多元方差分析

张伟平

zwp@ustc.edu.cn

Office: 东区管理科研楼 1006

Phone: 63600565

课件 http://staff.ustc.edu.cn/~zwp/

论坛 http://fisher.stat.ustc.edu.cn

简介

1.1 多总体均值的比较

- 常常需要对 g 个 p 维总体 (或者处理) 的均值进行比较 $(g \geq 2)$. 从 g 个总体中随机抽样得到独立样本 (或者随机的将 n_k 个体分配到第 k 个处理):

$$\begin{aligned}
&\text{总体 1:} \quad X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1} \\
&\text{总体 2:} \quad X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2} \\
&\qquad\vdots \\
&\text{总体 g:} \quad X_{g1}, X_{g2}, \ldots, X_{gn_g}
\end{aligned}$$

- 感兴趣的问题是:g **个总体的均值向量是否相同? 若不同, 均值向量的哪些分量显著不同?**

- 一元/多元方差分析 (ANOVA/MANOVA) 就是解决此类问题的主要工具.

- 如果所有的 $n_k - p$ 都很大 $(k = 1, \ldots, g.)$, 则对 g 个总体/处理的均值进行比较时常假设

  - $X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}$ $i.i.d$ $p - variate\ dist$ (μ_k, Σ_k)
  - 样本单元之间相互独立

- 当样本量较小时, 我们一般需要更多的假设:

  - $X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}$ $i.i.d \sim N_p(\mu_k, \Sigma_k)$
  - $\Sigma_1 = \cdots = \Sigma_g$
  - 样本单元之间相互独立

1.2 单因素多元方差分析

- 当实验仅涉及一个因素, 该因素有不同的水平 (处理), 个体完全随机分配到因素的各水平下来研究各水平的平均差异时, 称为单因素方差分析.

- 对 g 个处理的均值进行比较, 常用的想法是对样本波动性按照来源进行分解:

    1. 因为处理的平均值差异带来的波动性 (组间波动性)

    2. 因为测量误差或同一处理组内个体的差异 (组内波动性)

一元 Anova(完全随机化设计)

对 $p=1$, 我们回顾一下单因素一元方差分析方法. 此时

- 第 k 组样本 $X_{k1}, X_{k2}, \ldots, X_{kn_k}$ $i.i.d \sim N_1(\mu_k, \sigma^2)$, $k=1,2,\ldots,g$

- 各组样本之间相互独立
- 感兴趣的假设是 $H_0 : \mu_1 = \cdots \mu_g \leftrightarrow H_1 : \exists k \neq l,\ s.t.\ \mu_k \neq \mu_l$

想法

- 将均值表达/分解为 $\mu_k = \mu + \tau_k$, 其中 μ 表示总平均, $\tau_k = \mu_k - \mu$ 表示第 k 个总体的效应, 为保证可识别性, 常施加限制 $\sum_k \tau_k = 0$ 或 $\tau_g = 0$ 之类的.
- 样本 $X_{kj} \sim N(\mu + \tau_k, \sigma^2), j = 1, \ldots, n_k; k = 1, \ldots, g$. 即

$$X_{kj} = \mu + \tau_k + e_{kj}, e'_{kj}s\ i.i.d \sim N(0, \sigma^2)$$

为保证参数可识别性, 常限制 $\sum_k n_k\tau_k = 0$.

- 此时考虑的零假设等价于 $H_0 : \tau_1 = \cdots = \tau_k = 0$

这等价于要对回归系数进行检验

- 似然比检验方法是可行的, 但习惯上常使用方差分解的想法来导出检验统计量.

- **方差分析** 由上述分解, 基于样本可以进行类似的分解:

$$x_{kj} = \bar{x} + (\bar{x}_k - \bar{x}) + (x_{kj} - \bar{x}_k)$$

观测值 = 总的样本平均 + 估计的处理效应 + 残差

这等价于

$$\underbrace{x_{kj} - \bar{x}}_{\text{Overall variability}} = \underbrace{(\bar{x}_k - \bar{x})}_{\text{Between-group var.}} + \underbrace{(x_{kj} - \bar{x}_k)}_{\text{Within-group var.}}$$

其中 $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k,j} x_{kj}$ 为 μ 的估计, $n = \sum_k n_k$, $\bar{x}_k = \frac{1}{n_k}\sum_j x_{kj}$, $\hat{\tau}_k = (\bar{x}_k - \bar{x})$ 为 τ_k 的估计, $(x_{kj} - \bar{x}_k)$ 为 e_{kj} 的估计.

- 对假设检验问题 $H_0 : \tau_1 = \cdots = \tau_k = 0$, 通过评定处理效应相对于残差对样本波动性的贡献程度来进行. 波动性可以通过平方和 (SS, sum of squares) 来度量, 因此

$$SS_{tot} = SS_{tr} + SS_{res}$$

$$\sum_{k,j}(x_{kj} - \bar{x})^2 = \sum_k n_k(\bar{x}_k - \bar{x})^2 + \sum_{k,j}(x_{kj} - \bar{x}_k)^2$$

- 从而当

$$F = \frac{SS_{tr}/(g-1)}{SS_{res}/(n-g)} > F_{g-1,n-g}(\alpha)$$

时拒绝零假设 H_0. 计算上常表示为下面的方差分析表:

Source of variation	Sum of squares(SS)	Degree of freedom(df)	MS
Treatments	SS_{trt}	$g-1$	$SS_{trt}/(g-1)$
Residual	SS_{res}	$n-g$	$SS_{res}/(n-g)$
Total	SS_{tot}	$n-1$	

多元方差分析 (MANOVA) 现在将前面讨论的 Anova 推广到观测 $\mathbf{X}_{kj}$ 为 p 元向量场合, 此时的方差分析方法即称为多元方差分析法 (MANOVA).

假设(完全随机化设计)

- 第 k 组样本 $\mathbf{X}_{k1}, \mathbf{X}_{k2}, \ldots, \mathbf{X}_{kn_k}$ $i.i.d \sim N_p(\mu_k, \Sigma)$, $k = 1, 2, \ldots, g$
- 各组样本之间相互独立
- 感兴趣的假设是 $H_0 : \mu_1 = \cdots \mu_g \leftrightarrow H_1 : \exists k \neq l,\ s.t.\ \mu_k \neq \mu_l$

类似于一元场合, 我们有

- 总体模型可以表示为

$$\mathbf{X}_{kj} = \mu + \tau_k + \mathbf{e}_{kj}, \text{其中 } \mathbf{e}'_{kj}s\ i.i.d\ \sim N_p(0, \Sigma)$$

其中为保证参数识别性, 假设 $\sum_k n_k \tau_k = 0$.

- 样本波动性分解

$$\mathbf{X}_{kj} - \bar{\mathbf{X}} = (\bar{\mathbf{X}}_k - \bar{\mathbf{X}}) + (\mathbf{X}_{kj} - \bar{\mathbf{X}}_k)$$

于是**总平方和与交叉乘积**

$$\underbrace{\sum_{k,j}(\mathbf{X}_{kj} - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_{k,j} - \bar{\mathbf{X}})'}_{\mathbf{T}} = \underbrace{\sum_{k} n_k(\bar{\mathbf{X}}_k - \bar{\mathbf{X}})(\bar{\mathbf{X}}_k - \bar{\mathbf{X}})'}_{\mathbf{B}}$$

$$+ \underbrace{\sum_{k,j}(\mathbf{X}_{kj} - \bar{\mathbf{X}}_k)(\mathbf{X}_{kj} - \bar{\mathbf{X}}_k)'}_{\mathbf{W}}$$

- 相应的自由度

$$\sum_{i=1}^{g} n_i - 1 = (g-1) + \left(\sum_{i=1}^{g} n_i - g\right)$$

- 从而对假设 $H_0 : \tau_1 = \cdots = \tau_g = 0$, Wilk's Λ检验统计量 (和似然比检验有关)

$$\Lambda = \frac{|\mathbf{W}|}{|\mathbf{B} + \mathbf{W}|}$$

- 从而当 B 相对于 W 比较 "小", 则 Λ 将靠近 1, 否则 Λ 比较小.

- 因此当 Λ 较小时候拒绝 H_0.

- 统计量 Λ 的精确分布在一些特殊情况下可以得出, 但对一般场合难以得出.

变量个数 (p)	处理个数 (g)	多元正态抽样
$p = 1$	$g \geq 2$	$\left(\frac{n-g}{g-1}\right)\left(\frac{1-\Lambda}{\Lambda}\right) \sim F_{g-1,n-g}$
$p = 2$	$g \geq 2$	$\left(\frac{n-g-1}{g-1}\right)\left(\frac{1-\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}}\right) \sim F_{2(g-1),2(n-g-1)}$
$p \geq 1$	$g = 2$	$\left(\frac{n-p-1}{p}\right)\left(\frac{1-\Lambda}{\Lambda}\right) \sim F_{p,n-p-1}$
$p \geq 1$	$g = 3$	$\left(\frac{n-p-2}{p}\right)\left(\frac{1-\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}}\right) \sim F_{2p,2(n-p-2)}$

- 对较大的 n, 在 H_0 下, Bartlett 证明了

$$-\left(n-1-\frac{p+g}{2}\right)log\Lambda \rightsquigarrow \chi^2_{p(g-1)}$$

因此水平 α 检验的拒绝域为

$$-\left(n-1-\frac{p+g}{2}\right)log\Lambda > \chi^2_{p(g-1)}(\alpha)$$

- **其他检验** 注意到

$$\Lambda = |\mathbf{W}||\mathbf{B}+\mathbf{W}|^{-1} = |\mathbf{B}\mathbf{W}^{-1}+I|^{-1}$$

  – Lawley-Hotelling trace 水平 α 检验拒绝域为

$$nT_0^2 = tr(\mathbf{B}\mathbf{W}^{-1}) > \chi^2_{gp}(\alpha)$$

  – Pillai trace

$$V = tr[\mathbf{B}(\mathbf{B}+\mathbf{W})^{-1}]$$

- Roy's maximum root 检验统计量为 $\mathbf{BW}^{-1}$ 的最大特征根.
- 四种检验方法对非常大的样本量是等价的.
- 对中等规模的样本量, 模拟研究表明 Wilk's, Lawley-Hotelling 和 Pillai 检验的功效是近似的. Roy's 统计量只有在 g 个处理差异非常大时功效较高.
- 模拟研究结果表明 Pillai's trace 可能对多元正态偏离稍微稳健些.

• 当原始数据偏离正态分布严重时, 使用这些检验方法则需要先对原始数据进行正态化变换.

1.2.1 处理效应的同时置信区间

- 当零假设 "H_0 : 所有处理效应无差异" 被拒绝后, 常常感兴趣哪些处理效应的差异导致零假设被拒绝. 因此需要考虑成对比较问题.

- Bonferroni 方法可以用来建立差异 $\tau_k - \tau_l$ 的同时置信区间, 可以通过这些置信区间是否包含 0 来找出有差异的处理对.

- 记 τ_{ki} 为 τ_k 的第 k 个分量. 由于 τ_k 的估计为 $\hat{\tau}_k = \bar{\mathbf{X}}_k - \bar{\mathbf{X}}$, 因此

$$\hat{\tau}_{ki} = \bar{\mathbf{X}}_{ki} - \bar{\mathbf{X}}_i$$

- 从而差异 $\tau_{ki} - \tau_{li}$ 的估计为 $\hat{\tau}_{ki} - \hat{\tau}_{li} = \bar{\mathbf{X}}_{ki} - \bar{\mathbf{X}}_{li}$, 注意 $\bar{\mathbf{X}}_k$ 和 $\bar{\mathbf{X}}_l$ 相互独立, 因此

$$Var(\hat{\tau}_{ki} - \hat{\tau}_{li}) = Var(\bar{\mathbf{X}}_{ki}) + Var(\bar{\mathbf{X}}_{li}) = \left(\frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_l}\right)\sigma_{ii}$$

- 注意 $W = \sum_k (n_k - 1)S_k$, 其中 $(n_k - 1)S_k \sim W_p(n_k - 1, \Sigma)$ 且 $S_1, \ldots, S_g$ 相互独立. 因此 $W \sim N_p(n - g, \Sigma)$. 从而 σ_{ii} 的估计可以由 W 的第 i 个对角元 w_{ii} 得到

$$\hat{\sigma}_{ii} = \frac{w_{ii}}{n - g}$$

- 由 t 分布定义

$$\frac{(\hat{\tau}_{ki} - \hat{\tau}_{li}) - (\tau_{ki} - \tau_{li})}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_l}\right)\frac{w_{ii}}{n-g}}} \sim t_{n-g}$$

- 因此 $\tau_{ki} - \tau_{li}, i = 1, \ldots, p; l < k = 1, \ldots, g$(总共 $pg(g-1)/2$ 个) 的同时 $1 - \alpha$ 置信区间为

$$\bar{\mathbf{x}}_{ki} - \bar{\mathbf{x}}_{li} \pm t_{n-g}\left(\frac{\alpha}{pg(g-1)}\right)\sqrt{\left(\frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_l}\right)\frac{w_{ii}}{n - g}}$$

1.3 双因素多元方差分析

- 考虑有两个因子的试验设计, 假设因子 A 有 g 个不同水平, 因子 B 有 b 个不同的水平, ngb 个个体被随机分配到各水平组合上, 使得每个水平组合下有 n 个个体.

- 若记 $\mathbf{X}_{lkr}$ 表示第 r 个个体在因子 A 的第 l 个水平, 因子 B 的第 k 个水平下的 $p \times 1$ 测量值, 则类似于单因素方差分析, 将 $\mathbf{X}_{lkr}$ 表示为

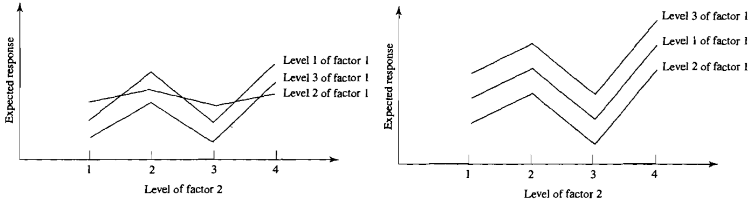
$$\mathbf{X}_{lkr} = \mu + \alpha_l + \beta_k + \gamma_{lk} + \mathbf{e}_{lkr}, \quad \mathbf{e}'_{lkr}s\ i.i.d \sim N_p(0, \Sigma)$$

其中 $l = 1, \ldots, g, k = 1, \ldots, b$ 以及 $r = 1, \ldots, n.$

- 为保证参数可识别性, 常限定

$$\sum_l \alpha_l = \sum_k \beta_k = \sum_l \gamma_{lk} = \sum_k \gamma_{lk} = 0$$

- α_l 表示因子 A 第 l 个水平的效应, β_k 表示因子 B 第 k 个水平的效应, γ_{lk} 表示因子 A 的第 l 个水平与因子 B 的第 k 个水平的交互效应:(a) 存在交互效应 (b) 不存在交互效应



- 当存在交互效应时候, 因子的效应不再是可加的. 一个因子的效应可能依赖于另一因子的效应.

- 对观测值 $\mathbf{X}_{lkr}$, 可类似分解

$$\mathbf{X}_{lkr}-\bar{\mathbf{X}} = (\bar{\mathbf{X}}_{l\cdot}-\bar{\mathbf{X}})+(\bar{\mathbf{X}}_{\cdot k}-\bar{\mathbf{X}})+(\bar{\mathbf{X}}_{lk}-\bar{\mathbf{X}}_{l\cdot}-\bar{\mathbf{X}}_{\cdot k}+\bar{\mathbf{X}})+(\mathbf{X}_{lkr}-\bar{\mathbf{X}}_{lk})$$

- 其中

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{ngb}\sum_{l,k,r}\mathbf{X}_{lkr}, \qquad \bar{\mathbf{X}}_{l\cdot} = \frac{1}{nb}\sum_{k,r}\mathbf{X}_{lkr}$$

$$\bar{\mathbf{X}}_{\cdot k} = \frac{1}{ng}\sum_{l,r}\mathbf{X}_{lkr}, \qquad \bar{\mathbf{X}}_{lk} = \frac{1}{n}\sum_{r}\mathbf{X}_{lkr}$$

- 从而**平方和与交叉积**

$$\begin{aligned}\sum_{l,k,r}(\mathbf{X}_{lkr}-\bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_{lkr}-\bar{\mathbf{X}})' &= \sum_{l} bn(\bar{\mathbf{X}}_{l\cdot}-\bar{\mathbf{X}})(\bar{\mathbf{X}}_{l\cdot}-\bar{\mathbf{X}})' \\ &+ \sum_{k} gn(\bar{\mathbf{X}}_{\cdot k}-\bar{\mathbf{X}})(\bar{\mathbf{X}}_{\cdot k}-\bar{\mathbf{X}})' \\ &+ \sum_{l,k} n(\bar{\mathbf{X}}_{lk}-\bar{\mathbf{X}}_{l\cdot}-\bar{\mathbf{X}}_{\cdot k}+\bar{\mathbf{X}})(\bar{\mathbf{X}}_{lk}-\bar{\mathbf{X}}_{l\cdot}-\bar{\mathbf{X}}_{\cdot k}+\bar{\mathbf{X}})' \\ &+ \sum_{l,k,r}(\mathbf{X}_{lkr}-\bar{\mathbf{X}}_{lk})(\mathbf{X}_{lkr}-\bar{\mathbf{X}}_{lk})'\end{aligned}$$

即

$$SSP_{tot} = SSP_A + SSP_B + SSP_{AB} + SSP_{res}$$

相应的自由度

$$gbn - 1 = (g-1) + (b-1) + (g-1)(b-1) + gb(n-1)$$

交互效应存在与否假设

- 通常总是先检验交互效应, 再检验因子的主效应.
- 首先考虑假设 H_0 : 不存在交互效应 $\leftrightarrow$ H_1 : 存在交互效应. 即

$$H_0 : \gamma_{11} = \gamma_{12} = \cdots = \gamma_{gb} = 0 \leftrightarrow H_1 : \text{至少一个 } \gamma_{lk} \neq 0$$

- Wilk's Λ 统计量

$$\Lambda^* = \frac{|SSP_{res}|}{|SSP_{AB} + SSP_{res}|}$$

因此渐近水平 α 检验据拒绝域为

$$-\left[bg(n-1)-\frac{1}{2}(p+1-(g-1)(b-1))\right]log\Lambda^{*}>\chi^{2}_{(g-1)(b-1)p}(\alpha)$$

- 如果拒绝零假设, 表明存在交互效应, 此时因子 A 和 B 的主效应缺乏清晰的解释. 从实用角度来看, 再作进一步的多元检验是不明智的. 一种推荐的做法是逐个考虑 p 个一元双因素方差分析, 来检查交互效应在那些变量上存在. 在那些不存在交互效应的一元方差分析检验中, 响应变量可以解释为 "对两因子的主效应是可加的".

- 当零假设没有被拒绝时候, 下一步则经常考虑两个因子是否具有可加效应.

因子是否具有可加效应的假设

- 假设 H_0 : 没有因子 A 效应 $\leftrightarrow H_1$: 存在一些因子 A 效应, 可表示为

$$H_0 : \alpha_1 = \cdots = \alpha_g = 0 \leftrightarrow H_1 : \text{ at least one } \ \alpha_k \neq 0$$

- Wilk's Λ 统计量为

$$\Lambda^* = \frac{|SSP_{res}|}{|SSP_A + SSP_{res}|}$$

因此渐近水平 α 检验据拒绝域为

$$-\Big[bg(n-1) - \frac{1}{2}(p+1-(g-1))\Big] log\Lambda^* > \chi^2_{p(g-1)}(\alpha)$$

- 类似, 对因子 B, 假设 H_0 : 没有因子 B 效应 $\leftrightarrow H_1$: 存在一些因子 B 效应, 可表示为

$$H_0 : \beta_1 = \cdots = \beta_b = 0 \leftrightarrow H_1 : \text{ at least one } \ \beta_k \neq 0$$

- Wilk's Λ 统计量为

$$\Lambda^* = \frac{|SSP_{res}|}{|SSP_B + SSP_{res}|}$$

因此渐近水平 α 检验据拒绝域为

$$-\left[bg(n-1) - \frac{1}{2}(p+1-(b-1))\right] log\Lambda > \chi^2_{p(b-1)}(\alpha)$$

1.3.1 效应差异的同时置信区间

- 当交互效应是可忽略的时候, 我们可以集中在因子 A 和 B 各自分量的差值上.

- 对因子 A 的 $g(g-1)/2$ 个水平差对 $\alpha_{lj}-\alpha_{mj}$, $l<k=1,\ldots,g$, $j=1,\ldots,p$, 注意到 $\alpha_{lj}-\alpha_{mj}$ 的估计

$$\bar{\mathbf{X}}_{l\cdot j}-\bar{\mathbf{X}}_{m\cdot j}\sim N(\alpha_{lj}-\alpha_{mj},\frac{2}{nb}\sigma_{jj}),\quad E_{jj}\sim\chi_v^2$$

且相互独立, 从而 $\alpha_{lj}-\alpha_{mj}$ 的的 $1-\alpha$ Bonferroni 同时置信区间为

$$\bar{\mathbf{X}}_{l\cdot j}-\bar{\mathbf{X}}_{m\cdot j}\pm t_v\left(\frac{\alpha}{pg(g-1)}\right)\sqrt{\frac{2E_{jj}}{vbn}}$$

其中 $v=gb(n-1)$, E_{jj} 为 SSP_{res} 的 (j,j) 对角元. $\bar{\mathbf{X}}_{l\cdot j}-\bar{\mathbf{X}}_{m\cdot j}$ 为 $p\times 1$ 向量 $\bar{\mathbf{X}}_{l\cdot}-\bar{\mathbf{X}}_{m\cdot}$ 的第 j 元.

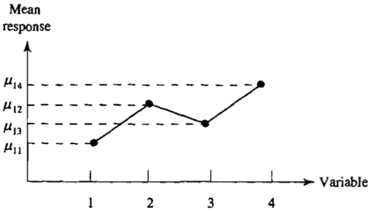
- 类似地, 对因子 B 的 $b(b-1)/2$ 个水平差对 $\beta_{kj}-\beta_{qj}$, $l<k=1,\ldots,b$, $j=1,\ldots,p$ 的 $1-\alpha$ Bonferroni 置信区间为

$$\bar{\mathbf{X}}_{\cdot lj}-\bar{\mathbf{X}}_{\cdot qj}\pm t_v\left(\frac{\alpha}{pb(b-1)}\right)\sqrt{\frac{2E_{jj}}{vgn}}$$

其中 $v=gb(n-1)$, E_{jj} 为 SSP_{res} 的 (j,j) 对角元. $\bar{\mathbf{X}}_{l\cdot j}-\bar{\mathbf{X}}_{q\cdot j}$ 为 $p\times 1$ 向量 $\bar{\mathbf{X}}_{\cdot k}-\bar{\mathbf{X}}_{\cdot q}$ 的第 j 元.

1.4 轮廓分析中的应用

- 轮廓分析是等价于 MANOVA 的一类方法, 轮廓分析使用图来对不同组进行比较.
- 考虑四种处理施加于两组对象, $\mu_1' = [\mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{14}]$ 表示第一组四种处理的平均值. 如下图. 这种折线图就称为总体 1 的轮廓 (Profile). 对每个总体都可以构造其轮廓.



- 以两总体为例, 记 $\mu_1' = [\mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{14}]$ 和 $\mu_2' = [\mu_{21}, \mu_{22}, \mu_{23}, \mu_{24}]$

分别为两总体对 p 种处理的平均值. 则对假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ 的检验可以根据轮廓分析的想法分成如下几步:

- (1) 两轮廓是否平行? 等价地, 假设 $H_{01}: \mu_{1i} - \mu_{1i-1} = \mu_{2i} - \mu_{2i-1}, i = 2, 3, \ldots, p$ 是否可以接受?
- (2) 假如两轮廓是平行的, 那么它们是否重合? 等价地, 假设 $H_{02}: \mu_{1i} = \mu_{2i}, i = 1, \ldots, p$ 是否可以接受?
- (3) 假设两轮廓是重合的, 它们是水平的吗? 即所有均值是否等于同一常数? 等价地, 假设 $H_{03}: \mu_{11} = \cdots = \mu_{1p} = \mu_{21} = \cdots = \mu_{2p}$ 是否可以接受?

• 如果对这三个步骤中的任何一个否定, 则表明存在显著差异.

两轮廓是否平行的检验

- 对 (1), 假设 H_{01} 可以等价表示为其中 C 为 $(p-1)\times p$ 对比阵:

$$H_{01}: C\mu_1 = C\mu_2, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 若从两个同方差 -协方差的正态总体中分别得到独立观测样本 $\mathbf{X}_{1j}, j=1,\ldots,n_1$ 和 $\mathbf{X}_{2i}, i=1,\ldots,n_2$. 则记 "新的" 样本为 $C\mathbf{X}_{1j}$ 和 $C\mathbf{X}_{2i}$, 则假设 H_{01} 为两样本均值检验问题.

- 从而两个同方差 -协方差的正态总体的平行轮廓水平 α 检验的拒绝域为

$$T^2 = (C(\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2))'\left[(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})CS_pC'\right]^{-1}(C(\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2)) > c^2$$

其中 $c^2 = \frac{(n_1+n_2-2)(p-1)}{n_1+n_2-p} F_{p-1,m_1+n_2-p}(\alpha)$. S_p 为两组样本协方差矩阵混合下的样本协方差矩阵:

$$S_p = \frac{n_1 - 1}{n_1 + n_2 - 2} S_1 + \frac{n_2 - 1}{n_1 + n_2 - 2} S_2$$

两轮廓是否重合的检验

- 当两个轮廓平行时候, 只有当 $\mathbf{1}'\mu_1 = \mathbf{1}'\mu_2$ 时候, 两个轮廓才会重合.
- 因此等价地, 第 (2) 步中的假设 H_{02} 可以等价表示为

$$H_{02} : \mathbf{1}'\mu_1 = \mathbf{1}'\mu_2$$

- 因此对两个同方差 -协方差, 假设 H_{02} 的水平 α 检验拒绝域为

$$T^2 = (\mathbf{1}'(\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2))'\Big[(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})\mathbf{1}'S_p\mathbf{1}\Big]^{-1}(\mathbf{1}'(\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2))$$
$$= \left[\frac{\mathbf{1}'(\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2)}{\sqrt{(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})\mathbf{1}'S_p\mathbf{1}}}\right] > t^2_{n_1+n_2-2}(\alpha/2) = F_{1,n_1+n_2-2}(\alpha).$$

两轮廓重合时是否水平的检验

- 当两个轮廓重合时候, 则所有样本来自同一总体. 下一步研究所有变量的均值是否相同.

- 当 H_{01} 和 H_{02} 被接受时候, 可以用 $n_1 + n_2$ 个观测样本来估计其公共均值向量 μ:

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{n_1 + n_2}[\sum_j \mathbf{X}_{1j} + \sum_i \mathbf{X}_{2i}]$$

- 如果公共轮是水平的, 则第 (3) 步中的假设 H_{03} 可以等价表示为

$$H_{03} : C\mu = 0$$

- 因此假设 H_{03} 的水平 α 检验拒绝域为

$$(n_1 + n_2)\bar{\mathbf{X}}'C'[CSC']^{-1}C\mathbf{X} > c^2$$

其中 $c^2 = \frac{(n_1+n_2-1)(p-1)}{n_1+n_2-p+1}F_{p-1,m_1+n_2-p+1}(\alpha)$, S 为基于所有 $n_1 + n_2$ 个观测样本值的样本协方差矩阵.