2014.3.11

第七讲. 多元正态分布（续）

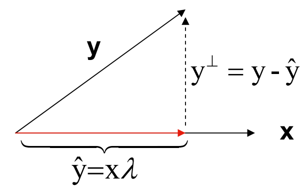
投影与卡方分布

3. 欧氏空间中的投影

例：向量$y \in R^n$在向量$x \in R^n$上的投影$\hat{y} = P_x y$满足

（i）存在实数λ，$\hat{y} = x\lambda$

（ii）$(y - \hat{y}, x) = (y - x\lambda, x) = 0$



$$\Rightarrow \lambda = \frac{(y,x)}{(x,x)} = \frac{x'y}{x'x}$$

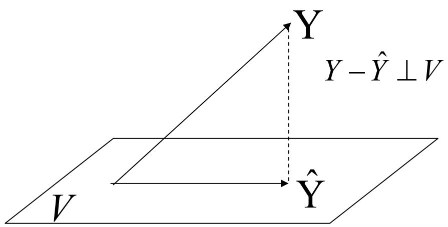
$$\Rightarrow \hat{y} = x\frac{x'y}{x'x} = \frac{xx'}{x'x}y$$

其中 $P_x = \frac{xx'}{x'x} = x(x'x)^{-1}x'$ 称为投影矩阵

$y^{\perp} = y - \hat{y} = y - \frac{xx'}{x'x}y$称为Gram-Schmidt正交化

定义：向量$Y_{n\times 1}$在子空间$V \subset R^n$上的正交投影$\hat{Y} = P(Y|V)$

满足:(1) $\hat{Y} \in V$, (2) $Y^{\perp} \triangleq Y - \hat{Y} \perp V$



正交分解： $Y = \hat{Y} + Y^{\perp}$，其中$\hat{Y} \perp Y^{\perp}$

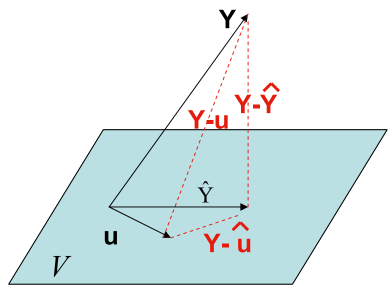
平方和分解：$\|Y\|^2 = \|\hat{Y}\|^2 + \|Y^{\perp}\|^2$

定理8（最小二乘）：记$\hat{Y} = P(Y|V)$为Y在V上的投影

则$\|Y - \hat{Y}\|^2 = \min_{u \in V} \|Y - u\|^2$

证：对任何$u \in V$，因为$\hat{Y} - u \in V$，故$Y - \hat{Y} \perp \hat{Y} - u$，所以

$\|Y - u\|^2 = \|Y - \hat{Y} + \hat{Y} - u\|^2 = \|Y - \hat{Y}\|^2 + \|\hat{Y} - u\|^2 \geq \|Y - \hat{Y}\|^2$.



投影矩阵

容易验证，投影：$\mathrm{Y} \to \hat{\mathrm{Y}} = \mathrm{P}(\mathrm{Y} \mid V)$是$n$维欧氏空间中的线性变换，即满足：

(1) $\mathrm{P}(\alpha \mathrm{Y} \mid V) = \alpha \mathrm{P}(\mathrm{Y} \mid V)$，$\alpha$实数；

(2) $\mathrm{P}(\mathrm{Y}_1 + \mathrm{Y}_2 \mid V) = \mathrm{P}(\mathrm{Y}_1 \mid V) + \mathrm{P}(\mathrm{Y}_2 \mid V)$

所以存在唯一$n \times n$矩阵$\mathrm{P_V}$，投影变换可表示为

$$\hat{\mathrm{Y}} = \mathrm{P}(\mathrm{Y} \mid V) = \mathrm{P_V Y}$$

$\mathrm{P_V}$称为子空间V所对应的投影矩阵。

命题1：若P_V是子空间V的投影阵，则$I_n - P_V$是$V^{\perp}$的投影阵，且$P_V(I_n - P_V) = 0$，所以$\mathrm{P_V} = \mathrm{P_V}'$，$\mathrm{P_V^2} = \mathrm{P_V}$，即$\mathrm{P_V}$是$n \times n$对称幂等矩阵。

命题2. 设X是$n \times p$列满秩矩阵，若$\mathrm{V} = L(X)$，即X的列向量张成的空间，则V对应的投影矩阵为 $\mathrm{P_X} = \mathrm{X(X'X)^{-1}X'}$

所以向量Y在$L(X)$上的投影为$\hat{Y} = \mathrm{P_X} Y = \mathrm{X(X'X)^{-1}X'Y}$

验证：对任意Y，设它在L(X)上的投影为$\hat{Y} = P_X Y$

(1)首先，$\hat{Y} \in \mathrm{L(X)}$，即存在$\mathrm{b}_{p \times 1}$使得$\hat{Y} = \mathrm{Xb}$

(2)其次，$Y - \hat{Y} \perp \mathrm{L(X)}$，特别地垂直于X的每一列，即

$\mathrm{X}'(Y - \hat{Y}) = 0$，即$0 = \mathrm{X}'(Y - \mathrm{Xb}) = \mathrm{X}'Y - \mathrm{X'Xb} \Rightarrow$

$\mathrm{b} = (\mathrm{X'X})^{-1}\mathrm{X}'Y$，所以$\hat{Y} = \mathrm{Xb} = \boxed{\mathrm{X(X'X)^{-1}X'}Y}$

所以$P_X = \mathrm{X(X'X)^{-1}X'}$

命题3：若A为对称幂等矩阵 ($A = A'$, $A^2 = A$)，则

(1) 其特征根为0或1；

(2) 存在正交矩阵Q使得$\mathrm{A} = \mathrm{Q}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{Q}'$，其中$r = Rank(\mathrm{A})$，

(3) $\mathrm{tr(A)} = \mathrm{Rank(A)}$

(4) 对称幂等矩阵A可表示成$\mathrm{A} = \mathrm{B(B'B)^{-1}B'}$的形式。

所以命题2和(4)表明：投影阵 $\Leftrightarrow$ 对称幂等阵

(4)的证明：记(2)中的$Q = (Q_1, Q_2)$，其中Q_1为n行r列，则

$$A = (Q_1, Q_2)\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1' \\ Q_2' \end{pmatrix} = Q_1 Q_1', \text{但} I_n = Q'Q = \begin{pmatrix} Q_1' \\ Q_2' \end{pmatrix}(Q_1, Q_2)$$

$$= \begin{pmatrix} Q_1'Q_1 & Q_1'Q_2 \\ Q_2'Q_1 & Q_2'Q_2 \end{pmatrix} \Rightarrow Q_1'Q_1 = I_r \Rightarrow A = Q_1 Q_1' = Q_1(Q_1'Q_1)^{-1}Q_1'$$

4. 正态分布的二次型 - 卡方分布

定义：$\mathbf{x} \sim N_n(0, I_n)$，则$\mathbf{x}'\mathbf{x} \sim \chi_n^2$

性质：若$\mathbf{x} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$，则$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi_n^2$

证明：$\mathbf{y} = \Sigma^{-1/2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \sim N_n(0, \mathrm{I})$，

则$\mathbf{y}'\mathbf{y} = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi_n^2$

定理9：$\mathbf{x}\sim N_n(0,\mathrm{I})$, 设$A_{n\times n}$是秩为r的对称幂等阵(投影阵)，则$\mathbf{x}'A\mathbf{x}=\|A\mathbf{x}\|^2\sim\chi_r^2$

证明：存在正交矩阵Q使得$\mathrm{A}=\mathrm{Q}'\begin{pmatrix}\mathrm{I_r} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\mathrm{Q}$

令$\mathbf{y}=\mathrm{Q}\mathbf{x}$，则$\mathbf{y}\sim N(0,I_n)$。所以

$$\mathbf{x}'A\mathbf{x}=\mathbf{x}'\mathrm{Q}'\begin{pmatrix}\mathrm{I_r} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\mathrm{Q}\mathbf{x}=\mathbf{y}'\begin{pmatrix}\mathrm{I_r} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\mathbf{y}=y_1^2+\ldots+y_r^2\sim\chi_r^2$$

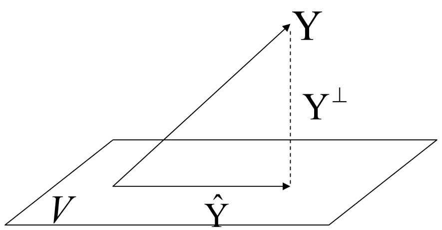
定理10：$\mathbf{x}\sim N_n(0,\mathrm{I_n})$,
(1) $A_{n\times n}$对称幂等, C 为$m\times n$矩阵，若$CA=0$, 则$\mathrm{C}\mathbf{x}$与$\mathbf{x}'A\mathbf{x}$独立。
(2) $A_{n\times n}, B_{n\times n}$对称幂等，若$\mathrm{AB}=0$，则$\mathbf{x}'A\mathbf{x}$与$\mathbf{x}'\mathrm{B}\mathbf{x}$独立

证明：

(1) 由$CA'=0\Rightarrow \mathrm{C}\mathbf{x}$与$\mathrm{A}\mathbf{x}$独立，进而与$(\mathrm{A}\mathbf{x})'(\mathrm{A}\mathbf{x})=\mathbf{x}'A\mathbf{x}$独立。

(2) $\mathrm{AB}'=0\Rightarrow \mathrm{A}\mathbf{x}$与$\mathrm{B}\mathbf{x}$独立$\Rightarrow\|\mathrm{A}\mathbf{x}\|^2$ 与$\|\mathrm{B}\mathbf{x}\|^2$ 独立

定理11：$\mathrm{Y}\sim N_n(0,\mathrm{I_n})$, 假设$V\subset R^n$是$p$维子空间，$\hat{\mathrm{Y}}=\mathrm{P_V Y}$为Y在V上的投影，$\mathrm{Y}^{\perp}=\mathrm{Y}-\hat{\mathrm{Y}}$
则$\hat{\mathrm{Y}}$与$\mathrm{Y}^{\perp}$独立，且$\dfrac{\|\hat{\mathrm{Y}}\|^2/p}{\|\mathrm{Y}^{\perp}\|^2/(n-p)}\sim F_{p,n-p}$



例. 假设$x_1,\ldots,x_n$ iid $\sim N(\mu,\sigma^2)$, $\bar{x}$为样本均值，s^2为样本方差，则 (1) $\bar{x}$与s^2独立; (2) $(n-1)s^2/\sigma^2\sim\chi^2_{n-1}$; (3) $\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)/s\sim t_{n-1}$

证明：

(1) 令$\mathrm{x}=(x_1,\ldots,x_n)' \sim N(\mathbf{1}\mu,\sigma^2 I_n)$, 令$\mathrm{y}=(\mathrm{x}-\mathbf{1}\mu)/\sigma\sim N(0,I_n)$

所以$\bar{x}=\mathbf{1}'\mathrm{x}/n=\mathbf{1}'\mathrm{y}/n\sigma+\mu$

因为$(x_1-\bar{x},\ldots,x_n-\bar{x})'=\mathrm{x}-\mathbf{1}\bar{x}=\mathrm{x}-\mathbf{1}\bar{x}=\mathrm{x}-\mathbf{1}\mathbf{1}'\mathrm{x}/n=(\mathrm{I_n}-P_1)\mathrm{x}$,

其中$P_1=\mathbf{1}\mathbf{1}'/n=\mathbf{1}(\mathbf{1}'\mathbf{1})^{-1}\mathbf{1}'$为向量**1**的投影阵

所以$s^2=\dfrac{\mathrm{x}(\mathrm{I_n}-P_1)\mathrm{x}'}{n-1}=\sigma^2\dfrac{\mathrm{y}(\mathrm{I_n}-P_1)\mathrm{y}'}{n-1}$, 所以$\bar{x}$与$s^2$独立。

(2)因为$\mathrm{I_n} - P_1$是秩$n-1$投影阵，所以$\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \mathrm{y}(\mathrm{I_n} - P_1)\mathrm{y}' \sim \chi^2_{n-1}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{关键：}\bar{x}\text{只与}\hat{\mathrm{x}} = P_1\mathrm{x} = \mathbf{1}\bar{x}\text{有关，}s^2\text{只与}\mathrm{x}^{\perp} = \mathrm{x} - \hat{\mathrm{x}}\text{有关,}\\ \text{而}\hat{\mathrm{x}}\text{与}\mathrm{x}^{\perp}\text{正交(独立),所以}\bar{x}\text{ 与}s^2\text{独立.}\end{array}}$$