作业11

1. 模型 $Y_{n\times 1}=X_{n\times p}\beta_{p\times 1}+\epsilon_{n\times 1}, \epsilon\sim(0,\sigma^2)$中，$\beta=(\beta_0,\beta_1,...,\beta_{p-1})'$, 其中 β_0 是截距项。记 β 的LS估计为 $\widehat{\beta}, \mathbf{e}=Y-X\widehat{\beta}$为残差向量。记

$$X=\begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{x}}_1'\\ \widetilde{\mathbf{x}}_1'\\ \vdots\\ \widetilde{\mathbf{x}}_n'\end{pmatrix}$$

其中$\widetilde{\mathbf{x}}_i'$是$1\times p$行向量(第一个元素为1), 是 X 的第 i 行, $i=1,2,...,n$。 记投影矩阵/帽子矩阵 $H=X(X'X)^{-1}X'$, 其 (i,j) 元素为 h_{ij}。

(a) 证明: $h_{ii}=\widetilde{\mathbf{x}}_i'(X'X)^{-1}\widetilde{\mathbf{x}}_i$.

(b) 证明: $h_{ii}\geq\frac{1}{n}$.

(c) 设 A 为任一可逆对称 $n\times n$矩阵，$\mathbf{x},\mathbf{y}\in R^n$, 证明:

$$(A+\mathbf{x}\mathbf{y}')^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1}\mathbf{x}\mathbf{y}'A^{-1}}{1+\mathbf{x}'A^{-1}\mathbf{y}}$$

(d) X 矩阵中删除第 i 行后的矩阵记为 $X_{(-i)}$, Y删除第 i 个元素后的向量记为 $Y_{(-i)}$, 拟合模型 $Y_{(-i)}=X_{(-i)}\beta+\epsilon_{(-i)}$ 得 β 的LS估计 $\widehat{\beta}_{(-i)}=(X_{(-i)}'X_{(-i)})^{-1}X_{(-i)}'Y_{(-i)}$. 利用 (c) 的结果证明:

$$\widehat{\beta}_{(-i)}=\widehat{\beta}-\frac{1}{1-h_{ii}}(X'X)^{-1}\widetilde{\mathbf{x}}_ie_i,$$

其中$e_i=y_i-\widetilde{\mathbf{x}}_i'\widehat{\beta}$ 为$\mathbf{e}$ 的第 i 个分量。

(e) 第i个样本点的标准化残差定义为 $r_i=\frac{e_i}{\sqrt{1-h_{ii}}\hat{\sigma}}$, 类似于 F-检验统计量，Cook 距离定义为

$$D_i=\frac{(\widehat{\beta}_{(-i)}-\widehat{\beta})'X'X(\widehat{\beta}_{(-i)}-\widehat{\beta})}{p\hat{\sigma}^2},$$

证明：$D_i=\frac{1}{p}\times\frac{h_{ii}}{1-h_{ii}}r_i^2$.

2. 设$\lambda>0$ 为任一实数，A为n阶正定矩阵，向量$\mathbf{x}\in R^n$, 证明：

$$\lambda A\geq\mathbf{x}\mathbf{x}'\Longleftrightarrow\mathbf{x}'A^{-1}\mathbf{x}\leq\lambda.$$

3. 假设数据 $(x_i,y_i), i=1,2,...,n$ 满足模型

$$y_i=a+bx_i+\epsilon_i,\ \epsilon\sim(0,\sigma^2),$$

最小二乘法拟合得到LS估计 $\hat{a},\hat{b}$. 假设 (x_0,y_0) 也来自于同一模型, 即

$$y_0=a+bx_0+\epsilon_0,\ \epsilon\sim(0,\sigma^2),$$

且 y_0 与 $y_i, i=1,2,...,n$ 独立。 我们需要预测 x_0 所对应的 y_0。 取两个预测统计量为

$$\hat{y}_0=\hat{a}+\hat{b}x_0,\quad \tilde{y}_0=\bar{y},$$

试分别计算 $\hat{y}_0,\tilde{y}_0$ 的预测误差, 并说明何时 $\tilde{y}_0$ 的预测效果好于 $\hat{y}_0$.

4. 假设真模型为

$$Y_{n\times 1} = X_{n\times p}\beta_{p\times 1} + \epsilon_{n\times 1}, \epsilon \sim (0, \sigma^2 I_n),$$

假设$X = (X_1, X_2)$, $\beta = (\beta_1', \beta_2')'$, 其中$X_1$为$n \times q$ 矩阵， β_1 为$q \times 1$ 向量。假设工作模型（部分模型，子模型）为

$$Y = X_1\beta_1 + \tilde{\epsilon},$$

基于此模型得到 β_1 的LS估计为$\tilde{\beta}_1 = (X_1'X_1)^{-1}X_1'Y$, 令 $\tilde{Y} = X\tilde{\beta} = X_1\tilde{\beta}_1$, 残差平方和为$\mathrm{RSS}_q = ||\tilde{Y} - Y||^2$， $\tilde{Y}$ 的 均方误差$\mathrm{MSE}(\tilde{Y}) = E||\tilde{Y} - E(Y)||^2$。 证明

$$\mathrm{MSE}(\tilde{Y})/\sigma^2 = E(\mathrm{RSS}_q)/\sigma^2 - (n - 2q).$$

注:证明过程中的期望计算都是在真模型下进行的.