ESERCIZI DI MATEMATICA DISCRETA E PROBABILITÀ DEL 22 NOVEMBRE 2018

Studenti nati in Emilia-Romagna: esercizio (1) e quello che riesci a fare del (4).
Studenti nati in Marche o Abruzzo: esercizio (2) e quello che riesci a fare del (6).
Altri studenti nati a nord di Roma: esercizio (3).
Altri studenti nati a sud di Roma: esercizio (5).

(1) Supponiamo che la probabilità che nessun bambino nato a Cesena in questo mese diventi un dottore di ricerca sia e^{-1}.
  (a) Qual è la probabilità che almeno due bambini nati in questo mese a Cesena diventino dottori di ricerca?
  (b) Qual è la probabilità che in un anno nascano almeno 4 bambini che diventeranno dottori di ricerca?

(2) Si considerino 2 variabili aleatorie indipendenti X ed Y. Sono noti i seguenti valori della densità congiunta

$X \backslash Y$	0	2
0		$\frac{1}{5}$
-1		$\frac{4}{15}$
3	$\frac{1}{12}$	

  (a) Detto $t = p_{X,Y}(3,2)$ giustificare il fatto che t soddisfa la seguente equazione:
  $\left(\frac{1}{12}+t\right)\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{15}+t\right)=t$
  (b) Calcolare i possibili valori per t.
  (c) Scelto uno di questi valori completare la tabella a doppia entrata della densità congiunta delle variabili X ed Y.

(3) Un'urna contiene 4 palline numerate 1,2,3,4. Effettuiamo 6 estrazioni con rimpiazzo. Consideriamo le variabili aleatorie X_1, X_2, X_3, X_4 date da $X_i = 1$ se la pallina con il numero i è stata estratta almeno una volta e $X_i = 0$ altrimenti.
  – Stabilire se X_1 e X_3 sono indipendenti.
  – Determinare la densità congiunta delle variabili (X_1, X_2, X_3, X_4),

(4) Novanta palline numerate vengono tutte estratte a caso senza rimpiazzo. Vengono poi riestratte tutte nuovamente senza rimpiazzo una seconda volta. Consideriamo le variabili X_i = numero della i-esima pallina estratta nella prima sequenza di estrazioni, e Y_i = numero della i-esima pallina estratta nella seconda sequenza di estrazioni, dove $i = 1, \ldots, 90$.
  (a) Descrivere uno spazio di probabilità che modellizzi questo fenomeno aleatorio.
  (b) Deteminare $P(X_i = Y_i)$.

(c) Stabilire se X_i e Y_j sono indipendenti, dove $i \neq j$.
(d) Stabilire se X_i e X_j sono indipendenti, dove $i \neq j$.
(e) Determinare la densità della variabile $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{90}$.
(f) Sia ora $Z = |\{i = 1, \ldots, 90 : \ X_i = Y_i\}|$. Determinare $E[Z]$.

(5) Un'urna contiene 2 palline bianche e 2 palline rosse. Le palline vengono estratte successivamente una ad una dall'urna rimpiazzando nell'urna le rosse e NON rimpiazzando le bianche. Poniamo

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se la } i\text{-esima estrazione dà una pallina bianca} \\ 0 & \text{se la } i\text{-esima estrazione dà una pallina rossa} \end{cases}$$

e $T =$ "numero dell'estrazione in cui viene pescata l'ultima pallina bianca"
(a) Descrivere uno spazio di probabilità che modellizzi questo fenomeno aleatorio.
(b) Determinare la densità di X_1 e di X_2;
(c) Stabilire se X_1 e X_2 sono indipendenti;
(d) Determinare la densità di X_i per ogni $i > 0$;
(e) Esprimere T come somma di due variabili geometriche modificate;
(f) Deteminare il valore atteso per T.

(6) Due dadi, uno rosso e uno blu, vengono lanciati simultaneamente per 3 volte. Si considerino le seguenti variabili aleatorie:
- $X =$ Numero di volte in cui un dado ha dato come risultato 1 o 6;
- $Y =$ Numero di lanci in cui il dado rosso ha dato risultato minore o uguale a 3;
- $Z =$ Numero di lanci in cui la somma dei dadi ha dato 7.

(a) Determinare la densità delle variabili X, Y e Z;
(b) Stabilire se X ed Y sono indipendenti;
(c) Stabilire se Y e Z sono indipendenti;
(d) Stabilire se X e Z sono indipendenti.