Домашнее задание 4.

Задание 1.

$\frac{\sin x}{x} = 0$, $x \neq 0$, $\sin x = 0$, $x = \arcsin 0 = \pi n, n \in Z$

Ответ: $x = \pi n$, где $n \in Z$ и $n \neq 0$.

Задание 2.

$y = k_1 x + b_1$, $y = k_2 x + b_2$, $y = k_3 x + b_3$.

Чтобы узнать, пересекаются ли все 3 прямые в одной точке, надо сначала найти точку пересечения двух любых прямых, а затем узнать, проходит ли третья прямая через эту точку.

$$\begin{cases} y = k_1 x + b_1; \\ y = k_2 x + b_2; \\ y = k_3 x + b_3; \end{cases}$$

$k_1 x + b_1 = k_2 x + b_2$; $\Rightarrow (k_2 - k_1)x = -(b_2 - b_1)$;

$x = -\frac{b_2 - b_1}{k_2 - k_1}$, $y = -k_1 \cdot \frac{b_2 - b_1}{k_2 - k_1} + b_1$ — т. пересечения двух первых прямых

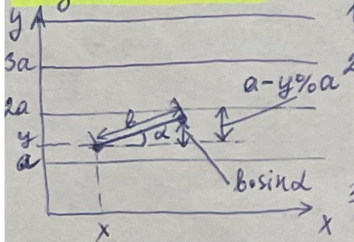
Теперь подставим полученные координаты в уравнение третьей прямой:

$$-k_1 \frac{b_2 - b_1}{k_2 - k_1} + b_1 = -k_3 \frac{b_2 - b_1}{k_2 - k_1} + b_3; \Rightarrow \frac{(k_3 - k_1)(b_2 - b_1)}{k_2 - k_1} - b_3 + b_1 = 0.$$

$k_1 \neq k_2 \neq k_3$

Ответ: прямые пересекаются в одной точке, если соблюдаются условия $\frac{(k_3 - k_1)(b_2 - b_1)}{k_2 - k_1} - b_3 + b_1 = 0$ и $k_1 \neq k_2 \neq k_3$.

Задание 3.



1) $y\%a$ — остаток от деления y на a

2) $a - y\%a$ — расстояние от конца иглы (x, y) до ближайшей верхней линии.

3) $b \cdot \sin\alpha$ — проекция длины иглы на ось Oy.

Если $a - y\%a > b \cdot \sin\alpha$, игла не пересекает линию

Ответ: пересекает, если $a - y\%a > b \cdot \sin\alpha$.

Задание 4.

$\sin(a \cdot x) = 0$, $0{,}01 < a < 0{,}02$, $100 < x < 500$. x - ?

$a \cdot x = \arcsin 0 \Rightarrow a \cdot x = \pi n \Rightarrow x = \frac{\pi n}{a}$, где $n \in Z$

$100 < \frac{\pi n}{a} < 500 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < \pi n < 5 \\ 2 < \pi n < 10 \end{array}\right. \Rightarrow 1 < \pi n < 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow \approx 0{,}32 < n < 3{,}19$, где $n \in Z \Rightarrow n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{a}$, $x_2 = \frac{2\pi}{a}$, $x_3 = \frac{3\pi}{a}$.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{a}$, $x_2 = \frac{2\pi}{a}$, $x_3 = \frac{3\pi}{a}$.

Задание 5.1

$x_1 = \sqrt{2}$ и $x_2 = -\sqrt{3}$;

$Ax + By + C = 0$; $\Rightarrow A_1 = 1, B_1 = 0, C_1 = -\sqrt{2}$; $A_2 = 1, B_2 = 0, C_3 = \sqrt{3}$.

$$\cos\alpha = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0}{\sqrt{1+0} \cdot \sqrt{1+0}} = 1 \Rightarrow \alpha = \arccos 1 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ прямые параллельны.

Ответ: $\alpha = 0$.

Задание 5.2.

1) $y^2 - 2x - 2y - 5 = 0$;

$(y^2 - 2y + 1) - 2x - 1 - 5 = 0$;

$(y-1)^2 = 2(x+3)$ — парабола с вершиной в т. $(-3;1)$

2) $3x^2 + 5y^2 + 12x - 30y + 42 = 0$;

$3(x^2 + 4x + 4) - 12 + 5(y^2 - 6y + 9) - 45 + 42 = 0$;

$\frac{(x+2)^2}{\sqrt{5}^2} + \frac{(y-3)^2}{\sqrt{3}^2} = 1$ — эллипс с центром в т. $(-2;3)$ с $a = \sqrt{5}, b = \sqrt{3}$

3) $2x^2 - y^2 + 6y - 7 = 0$;

$2x^2 - (y^2 - 6y + 9) + 9 - 7 = 0$;

$2x^2 - (y-3)^2 + 2 = 0$;

$\frac{(y-3)^2}{\sqrt{2}^2} - \frac{x^2}{1^2} = 1$ — гипербола с центром симметрии в т. $(3;0)$ и $a = \sqrt{2}, b = 1$ в системе yOx.

4) $2x^2 - 3y^2 - 28x - 42y - 55 = 0$;

$2(x^2 - 14x + 49) - 98 - 3(y^2 + 14y + 49) + 147 - 55 = 0$;

$2(x-7)^2 - 3(y+7)^2 = 6$;

$\frac{(x-7)^2}{\sqrt{3}^2} - \frac{(y+7)^2}{\sqrt{2}^2} = 1$ — гипербола с центром симметрии в т. $(7;-7)$ и $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{2}$.