

Демонстрационное задание 4.

Задание 6.1

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4; \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \end{array} \right) \end{array}$$

тогда $x_4 = c$, тогда

$$\begin{cases} x_4 = c; \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2c = 0; \\ -x_2 + x_3 + 5c = -2; \\ -2x_3 + 3c = 4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = c; \\ x_3 = 1,5c - 2; \\ -x_2 + 1,5c - 2 + 5c = -2; \\ x_1 + x_2 - 1,5c + 2 - 2c = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = c \\ x_3 = 1,5c - 2 \\ x_2 = 6,5c \\ x_1 = -3c - 2 \end{cases}$$

Однако: $x_1 = -3c - 2; x_2 = 6,5c; x_3 = 1,5c - 2; x_4 = c$.

Задание 6.2

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4; \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -3 & -17 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & -17 \\ 0 & -4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & -24 \end{pmatrix}$$

$\text{rank } A = 3, \text{rank } \tilde{A} = 3, n = 3 \Rightarrow$ система совместна и определена

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2; \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 5; \end{cases} \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

$\text{rank } A = 1, \text{rank } \tilde{A} = 2, n = 3 \Rightarrow$ система несовместна

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4; \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2; \end{cases}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & -8 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & -23 & -14 \end{pmatrix}$$

$\text{rank } A = 2, \text{rank } \tilde{A} = 2, n = 3 \Rightarrow$ система совместна и имеет бесконечное количество решений.

Задание 6.3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{rank } A = 4, \text{rank } \tilde{A} = 4, n = 4,$$

\Rightarrow система совместна и определена

Задание 6.4.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b - 4a \\ 0 & -6 & -12 & c - 7a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b - 4a \\ 0 & 0 & 0 & c + a - 2b \end{pmatrix}$$

$\text{rank } A = 2 \Rightarrow$ система однозначно определена,
если $\text{rank } \tilde{A} = 3 \Rightarrow c + a - 2b \neq 0$.

Задание 7.1

$$\text{a)} \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1; \\ 3x_1 - 4x_2 = 7; \end{cases} \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2 \neq 0;$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 14 = 10; \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 3 = 4;$$

$$x_1 = \frac{10}{2} = 5; \quad x_2 = \frac{4}{2} = 2;$$

Однако: $x_1 = 5, x_2 = 2$.

$$\text{б)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2; \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 13 + 7 + 5 \cdot 2 = 26 + 7 + 10 = 43;$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 10 \cdot 13 + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = \frac{130 + 1 - 45}{2} = 46;$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 10 \cdot 7 + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -68 + 25 = -43;$$