**Задание 3.1.** **Домашнее задание 3.**

• $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = 2^n - n$;

а) $a_n = 2^n - n$, $a_{n+1} = 2^{n+1} - n - 1 = 2\cdot 2^n - n - 1$;

$2^n - n < 2\cdot 2^n - n - 1 \Rightarrow$ последовательность монотонно возрастающая.

в) $n \geqslant 1,\ n \in N$

$\lim\limits_{n\to 1}(2^n - n) = 2 - 1 = 1$;

$\lim\limits_{n\to +\infty}(2^n - n) = +\infty \Rightarrow$ последовательность ограниченна снизу и не ограниченна сверху.

с) $a_5 = 2^5 - 5 = 27$;

• $\{b_n\}_{n=2}^{\infty} = \frac{1}{1-n}$;

а) $b_n = \frac{1}{1-n}$; $b_{n+1} = \frac{1}{1-n-1} = -\frac{1}{n}$;

$-\frac{1}{n-1} < -\frac{1}{n} \Rightarrow$ последовательность монотонно возрастающая.

в) $n \geqslant 2,\ n \in N$

$\lim\limits_{n\to 2}\left(\frac{1}{1-n}\right) = \frac{1}{1-2} = -1$;

$\lim\limits_{n\to +\infty}\left(\frac{1}{1-n}\right) = 0 \Rightarrow$ последовательность ограниченная.

с) $b_5 = \frac{1}{1-5} = -0{,}25$.

• $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = -1^n + \sqrt{2n}$;

а) $c_n = -1^n + \sqrt{2n}$, $c_{n+1} = -1^{n+1} + \sqrt{2(n+1)} = -1 + \sqrt{2(n+1)}$

$-1 + \sqrt{2n} < -1 + \sqrt{2(n+1)} \Rightarrow$ последовательность монотонно возрастающая.

в) $n \geqslant 1,\ n \in N$

$\lim\limits_{n\to 1}(-1^n + \sqrt{2n}) = -1^1 + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$.

$\lim\limits_{n\to +\infty}(-1^n + \sqrt{2n}) = +\infty \Rightarrow$ последовательность ограниченна снизу и не ограниченна сверху.

с) $c_5 = -1^5 + \sqrt{2\cdot 5} = \sqrt{10} - 1$.

• $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = (-1)^{2n} + \frac{1}{n^2}$;

а) $d_n = (-1)^{2n} + \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{n^2}$; $d_{n+1} = (-1)^{2(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} = 1 + \frac{1}{(n+1)^2}$.

$1 + \frac{1}{n^2} > 1 + \frac{1}{(n+1)^2} \Rightarrow$ последовательность монотонно убывающая.

в) $n \geqslant 1,\ n \in N$

$\lim\limits_{n\to 1}\left((-1)^{2n} + \frac{1}{n^2}\right) = 1 + 1 = 2$;

$\lim\limits_{n\to +\infty}\left((-1)^{2n} + \frac{1}{n^2}\right) = 1 + 0 = 1 \Rightarrow$ последовательность ограниченная

с) $d_5 = (-1)^{2\cdot 5} + \frac{1}{5^2} = 1 + \frac{1}{25} = 1{,}04$.

**Задание 3.2**

$a_1 = 128$, $a_{n+1} - a_n = 6$.

$a_2 = a_1 + q$, $a_3 = a_2 + q = a_1 + 2\cdot q$, $a_4 = a_3 + q = a_1 + 3\cdot q \ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{n+1} = a_1 + n\cdot q$, $a_n = a_1 + (n-1)\cdot q \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{12} = 128 + (12-1)\cdot 6 = 194$.

Ответ: 194.

**Задание 3.3.**

$$\lim_{n\to +\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to +\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}} = \lim_{n\to +\infty}\frac{\cancel{n}}{\frac{\cancel{n}}{e}\cdot(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}} =$$

$$= \lim_{n\to +\infty}\frac{e}{(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}} = e.$$