Домашнее задание 11.

Задание 11.1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+1}\cdot(n!)^2}{((n+1)!)^2\cdot n^n} = \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{n!}{(n+1)!}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = 0;\ 0<1 \Rightarrow$$ ряд сходится.

Задание 11.2

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n};$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{n}}}{2} = \frac{1}{2};$$

$\frac{1}{2}<1 \Rightarrow$ ряд сходится.

Задание 11.3

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\ln n}$ – знакочередующийся ряд.

1. $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n+\ln n} = 0;$

2. $$\frac{1}{n+\ln n} - \frac{1}{n+1+\ln(n+1)} = \frac{n+1+\ln(n+1)-n-\ln n}{(n+\ln n)(n+1+\ln(n+1))} =$$

$$= \frac{\ln(1+\frac{1}{n})+1}{(n+\ln n)(n+1+\ln(n+1))} > 0$$ – монотонно убывает $\Rightarrow$ сходится

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|n+\ln n|}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – расходится;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\ln n}{n}\right) = 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)'}{(n)'} =$$

$= 1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1 \Rightarrow$ расходится вместе с $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

$\Rightarrow$ ряд сходится условно.

Задание 11.4

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\left(\frac{3^n\cdot 2^{n+1}}{2^n\cdot 3^{n+1}}-1\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\cdot n\right) = -\infty < 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд расходится.

Задание 11.5

$f(x) = \ln(16x^2)$ в т. 1

$f'(x) = (\ln(16x^2))' = \frac{32x}{16x^2} = \frac{2}{x}$; $f'(1) = 2$;

$f''(x) = \left(\frac{2}{x}\right)' = -\frac{2}{x^2}$; $f''(1) = -2$;

$f^{(3)}(x) = \left(-\frac{2}{x^2}\right)' = \frac{4}{x^3}$; $f^{(3)}(1) = 4$;

$f^{(4)}(x) = \left(\frac{4}{x^3}\right)' = -\frac{12}{x^4}$; $f^{(4)}(1) = -12$;

$$\ln(16x^2) = \ln 16 + \frac{2}{1}(x-1) - \frac{2}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3 - \frac{2}{4}(x-1)^4 + \ldots =$$

$$= \ln 16 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot(x-1)^n;$$