坐标系与矩阵(2):朝向

轴角旋转(Axis-Angle Rotation)

上一篇主要是针对F或M坐标系中某一个轴旋转，自然，我们会想到，是否能以任意轴$\hat{u}$旋转ϕ，这称之为轴角旋转(Angle-Axis Rotation)。这里，我们可以给出两个结论：

- 任意轴$\hat{u}$旋转ϕ，都可以分解为沿着三个非平面的轴的旋转
- 有限多的旋转后刚体的最终方向与绕唯一轴$\hat{u}$唯一旋转ϕ后获得的方向相同

存在一个全球坐标系下的归一化的向量$\hat{u}=(u_1,u_2,u_3)^T$，这里$\sqrt{{u_1}^2+{u_2}^2+{u_3}^2}=1$，我们绕$\hat{u}$旋转$\phi$，可以旋转矩阵为：

$$R=I\cos\phi+\hat{u}\hat{u}^T vers\phi+\tilde{u}\sin\phi$$

$$vers\phi=1-\cos\phi=2\sin^2\frac{\phi}{2}$$

$$\tilde{u}=\begin{pmatrix}0 & -u_3 & u_2\\ u_3 & 0 & -u_1\\ -u_2 & u_1 & 0\end{pmatrix}$$

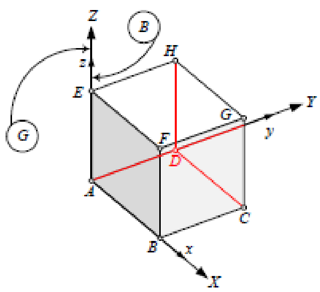
这里，$\tilde{u}$是反对称矩阵(skew-symmetric)，存在$\tilde{u}^T=-\tilde{u}$，可得：

$$\tilde{u}\tilde{u}^T=\begin{pmatrix}{u_1}^2 & u_1u_2 & u_1u_3\\ u_1u_2 & {u_2}^2 & u_2u_3\\ u_1u_3 & u_2u_3 & {u_3}^2\end{pmatrix}$$

推导后得到：

$$R=\begin{pmatrix}{u_1}^2 vers\phi+\cos\phi & u_1u_2 vers\phi-u_3\sin\phi & u_1u_3 vers\phi+u_2\sin\phi\\ u_1u_2 vers\phi+u_3\sin\phi & {u_2}^2 vers\phi+\cos\phi & u_2u_3 vers\phi-u_1\sin\phi\\ u_1u_3 vers\phi-u_2\sin\phi & u_2u_3 vers\phi+u_1\sin\phi & {u_3}^2 vers\phi+\cos\phi\end{pmatrix}$$

例子 1：



单位立方体绕通过其角 A 和 G 的直线旋转 π/4。旋转后立方体角的坐标是多少？

这里，$\hat{u}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^T,\phi=\frac{\pi}{4}$，可得：

$$vers\frac{\pi}{4}=1-\cos\frac{\pi}{4}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}=0.292893$$

$$\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=0.707107$$

$$u_iu_j=\frac{1}{3}=0.333333$$

$$R=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0.804738 & -0.310617 & 0.505879\\ 0.505879 & 0.804738 & -0.310617\\ -0.310617 & 0.505879 & 0.804738\end{pmatrix}$$

因为点 G (1,1,1)就在该轴上，无论如何旋转都不应该变化，我们验证一下：

$$q=Rp=\begin{pmatrix}0.804738 & -0.310617 & 0.505879\\ 0.505879 & 0.804738 & -0.310617\\ -0.310617 & 0.505879 & 0.804738\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

同理，点 F (1,0,1)对应的结果：

$$q=Rp=\begin{pmatrix}0.804738 & -0.310617 & 0.505879\\ 0.505879 & 0.804738 & -0.310617\\ -0.310617 & 0.505879 & 0.804738\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.310617\\0.195262\\0.494121\end{pmatrix}$$

这样，通过$(\hat{u},\phi)\to R$，如果已知矩阵R，是否可以获取对应的$(\hat{u},\phi)$：

$$\cos\phi=\frac{1}{2}\left(tr(R)-1\right)$$

$$\tilde{u}=\frac{1}{2\sin\phi}\left(R-R^T\right)$$

$$tr\left(\begin{bmatrix}r_{11} & \cdots & r_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ r_{n1} & \cdots & r_{nn}\end{bmatrix}\right)=\sum_{i=1}^{n}r_{ii}$$

另外，我们还可以通过 Euler parameters 形式来表达：

$$e_0 = \cos\frac{\phi}{2}$$

$$e_1 = u_1 \sin\frac{\phi}{2}$$

$$e_2 = u_2 \sin\frac{\phi}{2}$$

$$e_3 = u_3 \sin\frac{\phi}{2}$$

这样，可得 R：

$$\begin{pmatrix} {e_0}^2+{e_1}^2-{e_2}^2-{e_3}^2 & 2(e_1e_2-e_0e_3) & 2(e_0e_2+e_1e_3) \\ 2(e_0e_3+e_1e_2) & {e_0}^2-{e_1}^2+{e_2}^2-{e_3}^2 & 2(e_2e_3-e_0e_1) \\ 2(e_1e_3-e_0e_2) & 2(e_0e_1+e_2e_3) & {e_0}^2-{e_1}^2-{e_2}^2+{e_3}^2 \end{pmatrix}$$

同样，我们也可以根据矩阵 R 反推出对应的欧拉参数(e_0,e_1,e_2,e_3)，再次不再赘述。

这里，就有疑问了，这种形式有什么好处吗？答案就是四元数和欧拉公式之间的关系。

四元数(Quaternions)

四元数可以认为式复数的延伸：

$$q = a + bi + cj + dk$$

其中，a 是标量部分(scalar)，而$bi+cj+dk$是向量部分(vector),当 a 为零时为纯四元数。

常见的运算规则如下：

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$
$$ij = k, ji = -k$$
$$jk = i, kj = -i$$
$$ki = j, ik = -j$$

根据该运算规则可得 Hamilton product：

$$\begin{gathered}(a_1+b_1i+c_1j+d_1k)(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)= \\ a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2 \\ +(a_1b_2+b_1a_2+c_1d_2-d_1c_2)i \\ +(a_1c_2-b_1d_2+c_1a_2+d_1b_2)j \\ +(a_1d_2+b_1c_2-c_1b_2+d_1a_2)k\end{gathered}$$

四元数的共轭(Conjugate)形式是：$q^* = a - bi - cj - dk$，且满足$(pq)^* = q^*p^*$

$$|q|^2 = qq^* = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

$$q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2}$$

当空间上的一点$p(p_1,p_2,p_3)^T$绕单位向量$\hat{u}(u_1,u_2,u_3)^T$旋转ϕ对应的四元数表示形式为:

$$q = e^{\frac{\phi}{2}(u_1 i + u_2 j + u_3 k)}$$

通过欧拉公式对应为:

$$q = \cos\frac{\phi}{2} + (u_1 i + u_2 j + u_3 k)\sin\frac{\phi}{2}$$

此时，点 p 对应一个纯四元数:

$$p = p_1 i + p_2 j + p_3 k$$

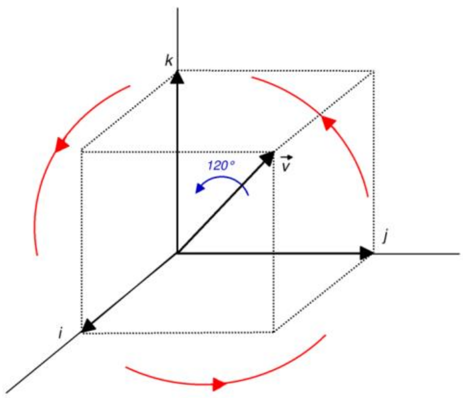
旋转后的结果为:

$$p' = qpq^{-1}$$

因为q是单位四元数:

$$p' = qpq^*$$

例子 2:



上图一点$p(1,0,0)$绕着向量$\lambda(1,1,1)$旋转$2\pi/3$，旋转后的点p'

一个没有亲手算过四元数的程序员不能算是一个真正的 renderman，当然这个是必要不充分条件，这个问题留给大家自己来算吧。

最后一点，如果存在多次旋转的情况时，比如第一次是q_1，第二次是q_2，则有:

$$q = q_2 q_1 \qquad q_2\text{绕固定坐标系}F$$

$$q = q_1 q_2 \qquad q_2\text{绕移动坐标系}M$$

至于四元数的优势，一来是只需要四个变量，二来是便于插值计算。另一个好处是避免了欧拉角的万向锁的问题。这个我就不讨论了，因为我从没有遇到过，只是听说过，对此理解不深刻。

以我的理解，实际中欧拉角往往都会转为四元数来参与计算。

这一块的数学概念比较多，基于不同的场景各有优略，同时数据计算量比较大，可能视觉体验比较差，但其实用到的数据概念都比较直观，关键在于从几何角度理解其作用，剩下的直接套公式便可以求解。

前两篇主要是基于我的理解，从坐标系到矩阵，从轴角到欧拉参数到最后的四元数这样的方式，将各个知识点之间的关系整合起来，最终确定物体旋转后的 orientation，希望这个梳理后的知识体系能够对大家有所帮助。下一篇则介绍平移 translation 方面的内容。

参考资料（上一篇忘记引入参考资料了）：Motion and Manipulation https://www.cs.uu.nl/docs/vakken/moma/2019.html

微信公众号: