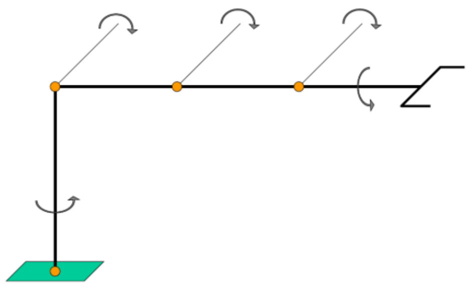
坐标系与矩阵(5): Denavit-Hartenberg Algorithm

上一篇我介绍了坐标系与矩阵的应用之一：ECEF 与 ENU 坐标转换的相关的概念。本篇介绍坐标系在动力学中的应用场景，这里则涉及到 Denavit-Hartenberg(DH) Algorithm。

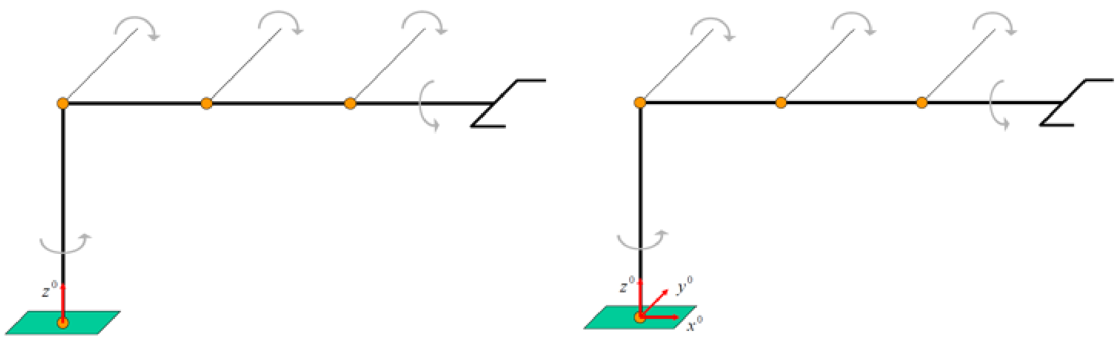
在动力学中，比如人的胳膊就有好几个关节，且不同的关节有不同的旋转轴，如果是路飞的话，关节之间的长度还是不固定的。这里，每一个关节都存在一个自身坐标系，其中旋转可以是绕三个轴，平移则是沿着三个轴，每个坐标系存在 6 个自由度。问题就有点复杂了，每个人对每个关节可能会定义不同的坐标系方向，这会直接决定求解该问题的难度。DH 算法则提供了一个一般性理论，且每一个关节只需要 4 个自由度。

DH 满足四个规则：

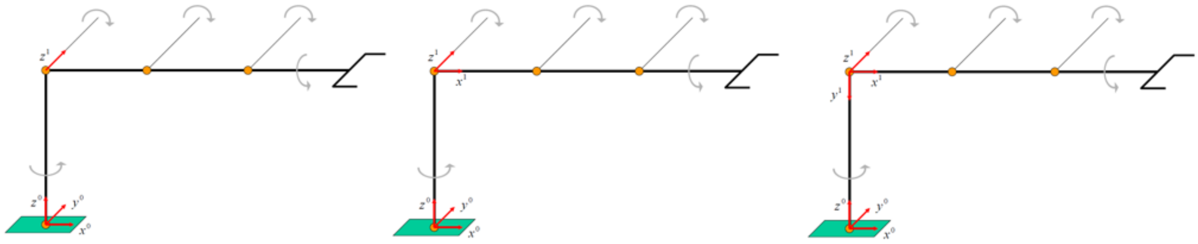
- 每一个关节 z 轴和关键轴的方向相同
- x 轴和当前关节的z^n和上一关节z^{n-1}垂直，如果不唯一，则方向从z^{n-1}到z^n
- y 轴由右手坐标系确定
- x^n轴必须和z^{n-1}相交



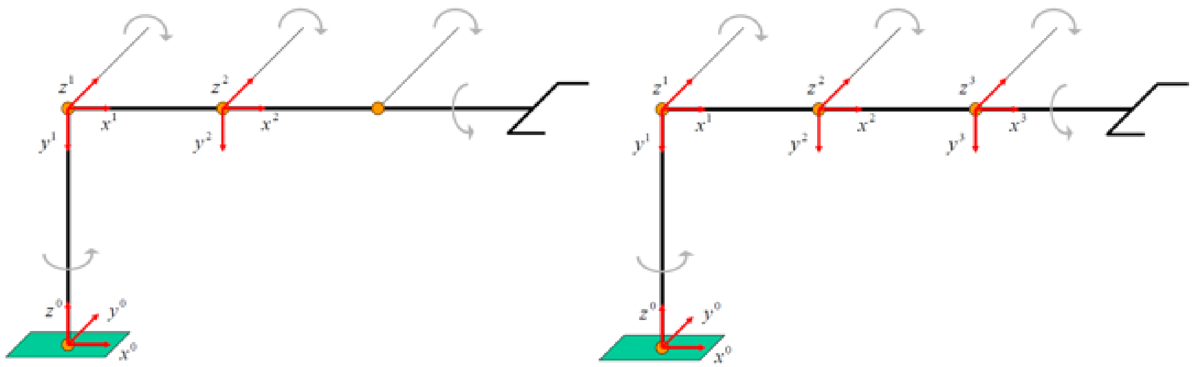
根据该规则，以上图为例，来确定每一个关节的坐标系。



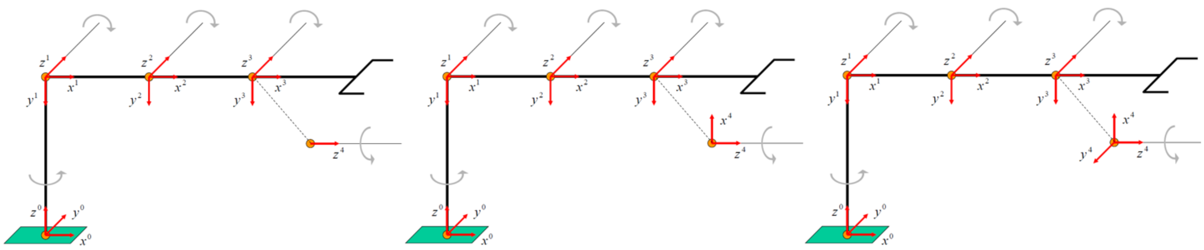
(0)由左向右，确定第一个关节的z^0，这里x^0有多个选择，你选择一个正常的就可以，然后根据右手坐标系确定y^0



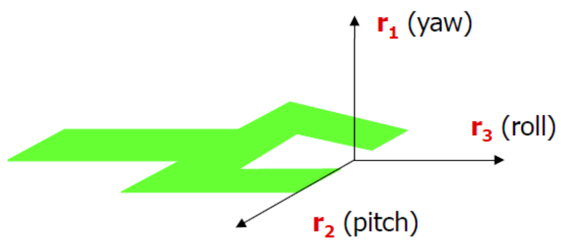
(1)确定第二个关节的z^1， x^1有两个选择，这里选择向右，根据右手坐标系确定y^1



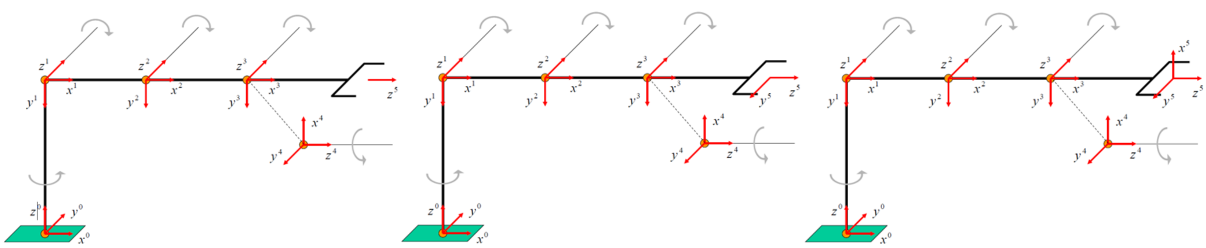
(2)同理，依次确定第三个关节的z^2、x^2和y^2，第四个关节的的z^3、x^3和y^3



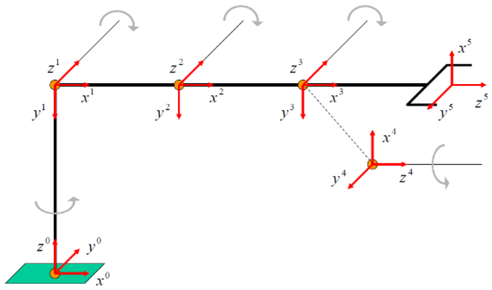
(3)第四个关节的特殊点在于它有两个旋转轴，因此，我们需要在对其建立另一个坐标系，确定对应的z^4、x^4和y^4



根据上图确定最后一个关节的坐标轴

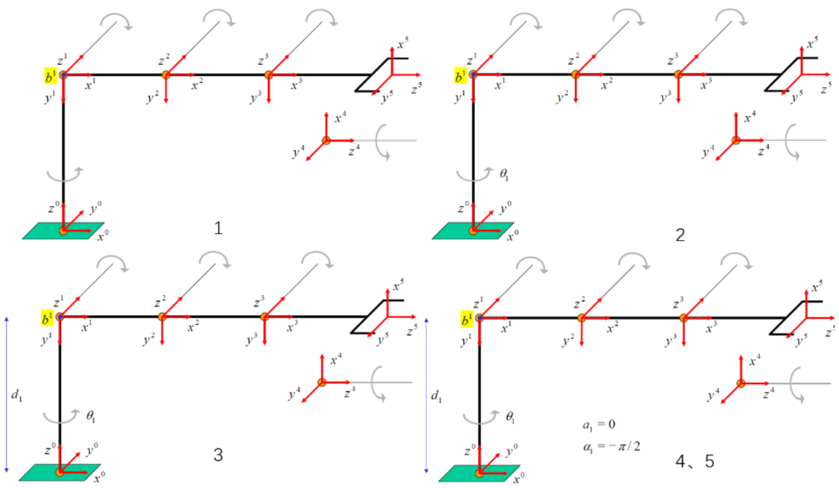


(3)最后的终端称为 tool，我们定义对应的 approach vector r^3，sliding vector r^2，另一个轴则是 normal vector r^1，确定对应的z^5、y^5和x^5

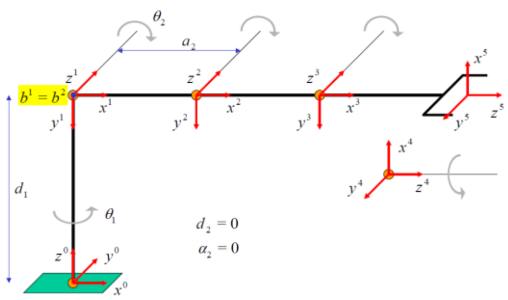


如上，我们确定了每一个节点的坐标系，但这还不够，我们需要确定相邻坐标系之间的旋转和平移参数。参数计算规则如下：

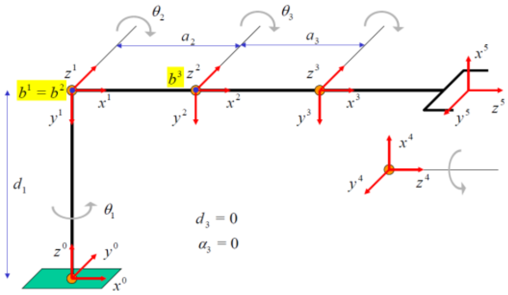
1. 确定辅助点b^k位置，是轴x_k和轴z_{k-1}，如果没有相交，则是轴x_k和轴z_{k-1}的法线与轴x_k的交点
2. 计算θ_k，是绕轴z_{k-1}从x_{k-1}到x_k的角度
3. 计算d_k，是从坐标系L_{k-1}的原点沿着轴z_{k-1}到b^k的距离
4. 计算a_k，是从b^k沿着x_k到坐标系L_k的原点的距离
5. 计算α_k，是绕轴x_k从z_{k-1}到z_k的角度



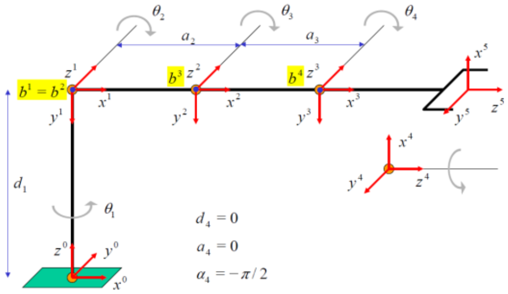
上图是从L_0到L_1的转换步骤（1-5）：$(\theta,d,a,\alpha)^1=\left(\theta_1,d_1,0,-\frac{\pi}{2}\right)$



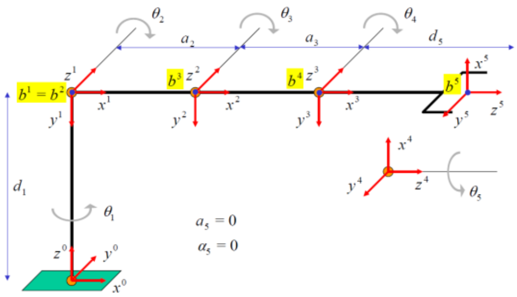
从L_1到L_2：$(\theta,d,a,\alpha)^2=(\theta_2,0,a_2,0)$



从L_2到L_3：$(\theta,d,a,\alpha)^3=(\theta_3,0,a_3,0)$



从L_3到L_4：$(\theta,d,a,\alpha)^4=\left(\theta_4,0,0,-\frac{\pi}{2}\right)$



从L_4到L_5：$(\theta,d,a,\alpha)^5=(\theta_5,d_5,0,0)$

如上，我们首先确定了每个关节的坐标系，进而确定关节的四个参数，对应其四个自由度，这样，我们按照如下规则计算两个相邻关节之间的转换矩阵，该矩阵将L_k上的点p_k转为L_{k-1}上对应的点p_{k-1}：

$$
{}^{k-1}T_k(\theta_k,d_k,a_k,\alpha_k)=
$$
$$
R_3(\theta_k)\cdot Tran_3(d_k)\cdot Tran_1(a_k)\cdot R_1(\alpha_k)
$$

我们把从L_0到L_5中相邻坐标系，可以建立一个参数表：

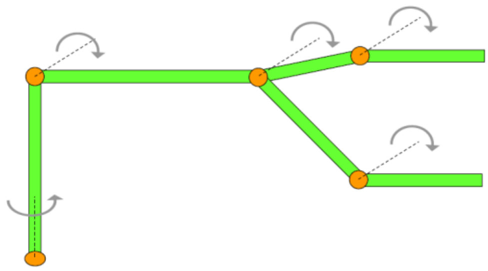
	θ	d	a	α
L_0到L_1	θ_1	d_1	0	$-\frac{\pi}{2}$
L_1到L_2	θ_2	0	a_2	0
L_2到L_3	θ_3	0	a_3	0

L_3 到 L_4	θ_4	0	0	$-\frac{\pi}{2}$
L_4 到 L_5	θ_5	d_5	0	0

当我们需要将 L_k 上的点 p_k 转到 L_0 坐标系下的点 p_0，对应的 转换矩阵为：

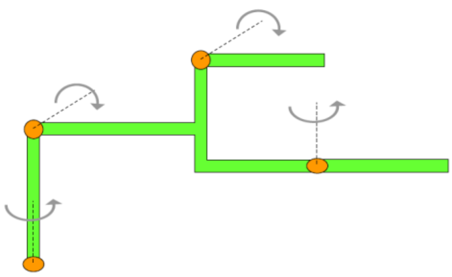
$$^0T_5 = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot {}^4T_5$$

例子 1



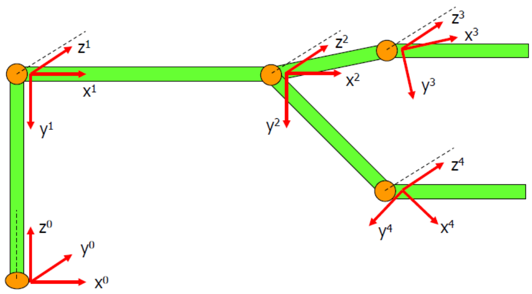
对上图建立每个关节的坐标系

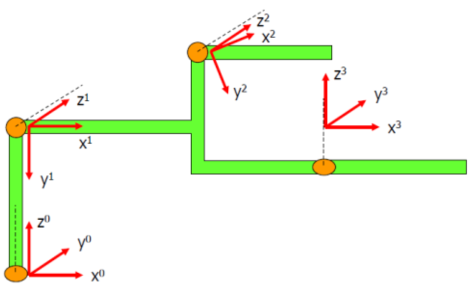
例子 2



对上图建立每个关节的坐标系

答案：





DH 算法的介绍到此结束。下一篇是 OpenGL 中基础的模型视图投影矩阵。

参考资料：Motion and Manipulation https://www.cs.uu.nl/docs/vakken/moma/2019.html