坐标系与矩阵(3):平移

本章主要介绍平移，平移本身非常的直白，比如一点$p(x,y)$，平移$(\Delta x,\Delta y)$，则平移后的位置是$p'=(x+\Delta x,y+\Delta y)$。如果在平移前考虑旋转，结合前两篇的内容，很容易得到如下公式：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

这里，就有一个线性变换的概念：变换后直线不变，比例不变，原点不变。不难看出，红色矩阵部分是绕原点旋转，满足线性变换的条件。但平移后原点发生的变化，并不是线性变换。这里我们称其为仿射变换(Affine transformation)：线性变换+平移。

数学之美，其中之一就是希望达到形式上的统一。而齐次坐标，则实现了将仿射变换转为线性变换的形式：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \Delta x \\ \sin\theta & \cos\theta & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

这里，我们将一个 2*2 的矩阵升级为 3*3 的矩阵，这里要强调的是该矩阵是先旋转再平移，每个点扩增一个w位，竟然将平移从非线性变成线性的关系，将旋转和平移统一在一个矩阵中，如此的神奇，这是为什么呢？

从几何的角度，这里可以认为新增了一个维度z，当旋转时，每一个点都相对z旋转，自然中心点不变，而平移时，因为新增维度z的值为 1，则相当于该平面上升到$z=1$的平面，然后在该平面上实现了平移，而整体上则类似比萨斜塔那般，依旧相对于原点不变。这样，我们新增一个维度，通过高维度的线性变换实现低维度的仿射变换。下图描述了该过程。

这样，对于一个 point，对应的齐次坐标为$(x,y,1)$，而一个 vector，对应的齐次坐标为$(x,y,0)$：

$$\begin{aligned} point - point &= vector \\ vector + vector &= vector \\ vector - vector &= vector \\ point + point &= center \end{aligned}$$

这样，既能满足向量的平移不变性，也能保证两点相减为向量，唯一特别处是两点相加，对应的是两点的中点，这个几何意义。

这样，可得平移矩阵：

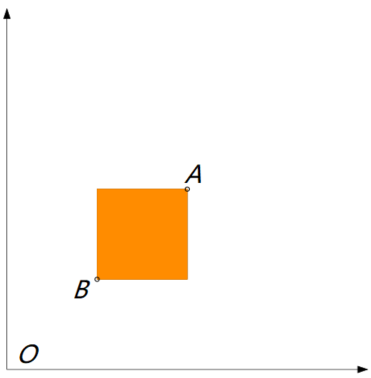
$$T(t)=\begin{pmatrix} I & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}(t)=T(-t)$$

我们将旋转和平移组合在一起，假设初始位置$M=F\to T=I$可得：

$$\begin{cases} T{:}R_k(\theta)\cdot T & \mathrm{f}^{\mathrm{k}}\text{旋转}\theta \\ T{:}T_k(c)\cdot T & \mathrm{f}^{\mathrm{k}}\text{平移c单位} \\ T{:}T\cdot R_k(\theta) & \mathrm{m}^{\mathrm{k}}\text{旋转}\theta \\ T{:}T\cdot T_k(c) & \mathrm{m}^{\mathrm{k}}\text{平移c单位} \end{cases}$$

例子 1：



点 p 绕正方向左下角点$\pi/4$后的点p'

这里，提供两种思路。通常二维场景下，我们会把 B 移到 O 点$T\left(-\overrightarrow{OB}\right)$，然后旋转$R_z(\pi/4)$，最后再移动回 B 点$T\left(\overrightarrow{OB}\right)$，因此对应的解为：

$$T=T\left(\overrightarrow{OB}\right)\cdot R_z(\pi/4)\cdot T\left(-\overrightarrow{OB}\right)$$

$$p'=T\cdot p$$

另一个思路则是默认$M=F$，则 M 从 O 平移到 B，然后绕m^3旋转，此时 A 相对于 M 坐标系的位置记为p_A：

$$T=T\left(\overrightarrow{OB}\right)\cdot R_z(\pi/4)$$

$$p'=T\cdot p_A$$

而p_A是 M 从 O 平移到 B 时的相对位置：

$$p = T\left(\overrightarrow{OB}\right) \cdot p_A$$

$$p_A = T\left(\overrightarrow{OB}\right)^{-1} \cdot p = T\left(-\overrightarrow{OB}\right) \cdot p$$

前者是坐标点的移动，而后者是坐标系的移动，不同的思路，但最终的矩阵都是一致的。

坐标系和矩阵的基本概念介绍完毕，下一篇我们对应具体的应用场景，首先，先从 GIS 中大地坐标系和 NEU 这类的平面坐标系的转换开始吧。

参考资料（上一篇忘记引入参考资料了）：Motion and Manipulation https://www.cs.uu.nl/docs/vakken/moma/2019.html

GAMES101: https://www.bilibili.com/video/BV1X7411F744?p=3

如何通俗地讲解「仿射变换」这个概念：

https://www.zhihu.com/question/20666664/answer/157400568

微信公众号：