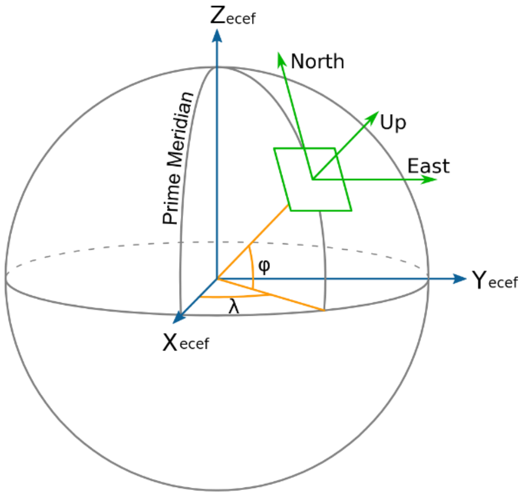
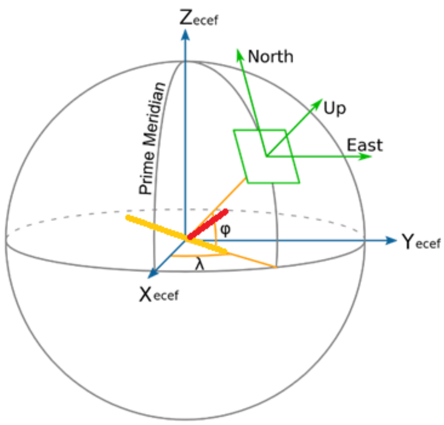
坐标系与矩阵(4):球心坐标系与 NEU 坐标系

前三篇介绍了坐标系和矩阵的数学知识，从本篇开始，我们试图运用这些知识来解决实际问题。



如上图，模拟了一个以球心为原点的固定坐标系，该坐标系有一个名称地心地固坐标系(ECEF)，对应我们之前介绍的坐标系F，而平面场景在我们生活中更为直观，上北下南，左东右西，对应上图中绿色的切平面，简称 NEU 坐标系，对应之前介绍的坐标系M。于是，给定一点p，我们需要计算一个矩阵T，实现两个坐标系的转换。

这里对应两个环节，(1)球心坐标系的单位换算， 从经纬度(λ,φ)到米单位的笛卡尔坐标$(X_{ecef},Y_{ecef},Z_{ecef})$；(2)从 ECEF 到 NEU，从全球坐标系$(X_{ecef},Y_{ecef},Z_{ecef})$到本地坐标系$(X_{enu},Y_{enu},Z_{enu})$。

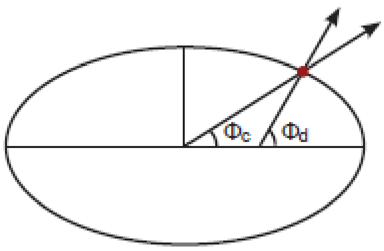


整体来看，默认初始时$F=M$，从 F 到 M 大概需要三个过程：(1)沿Z_{ecef}逆时针旋转$\lambda+\pi/2$，如上图，橙色对应的是Y_{ecef}，红色对应的是X_{ecef}，方向均向内；(2)沿着新坐标系中的红轴逆时针旋转$\pi/2-\varphi$；(3)沿新坐标系的z方向平移到绿色坐标系的原点。

前两个旋转矩阵对应的是：

$$T = R_3(\pi/2+\lambda)\cdot R_1(\pi/2-\varphi)$$
$$= \begin{bmatrix} -\sin\lambda & -\cos\lambda\sin\varphi & \cos\lambda\cos\varphi \\ \cos\lambda & -\sin\lambda\sin\varphi & \sin\lambda\cos\varphi \\ 1 & \cos\varphi & \sin\varphi \end{bmatrix}$$

这样，只要知道平移$T(X,Y,Z,1)$对应的三个分量，可以轻松的得到最终的矩阵。然后这里就有一个问题，地球是椭球而不是圆球，如下图所示，维度是Φ_c，但准确的切平面对应的法线是Φ_d，前者是 geocentric normal，后者是 geodetic normal，通常情况下，我们都是指的Φ_d。



椭球下经纬度和笛卡尔坐标转换的问题暂时先不做处理，假设已知某点对应球心的位置$(X_{ecef},Y_{ecef},Z_{ecef})$，椭球在 X，Y，Z 方向的半径分别为 a，b，c。则，up 方向也就是该点对应椭球切面的法线(geodetic normal)：

$$Z_{enu} = normalized\left(\frac{X_{ecef}}{a^2},\frac{Y_{ecef}}{b^2},\frac{Z_{ecef}}{c^2}\right)$$

又因为地球对应的椭球体中，a==b。North 轴指向北极，而 East 轴和 Up 轴，North 轴正交，可得 East 轴必须垂直于Z_{ecef}和Z_{enu}：

$$X_{enu} = normalized(-Y_{ecef},X_{ecef},0)$$

而$Y_{enu} = cross(X_{enu},Z_{enu})$，因此，我们可以获取 ENU 坐标系三个轴的向量$(X_{enu},Y_{enu},Z_{enu})$，这样，对应的转换公式为：

$$R\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = X_{enu} \quad R\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = Y_{enu} \quad R\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = Z_{enu}$$
$$\Downarrow$$
$$R = \begin{bmatrix} X_{enu}.x & Y_{enu}.x & Z_{enu}.x \\ X_{enu}.y & Y_{enu}.y & Z_{enu}.y \\ X_{enu}.z & Y_{enu}.z & Z_{enu}.z \end{bmatrix}$$
$$T = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{enu}.x & Y_{enu}.x & Z_{enu}.x & X_{ecef} \\ X_{enu}.y & Y_{enu}.y & Z_{enu}.y & Y_{ecef} \\ X_{enu}.z & Y_{enu}.z & Z_{enu}.z & Z_{ecef} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

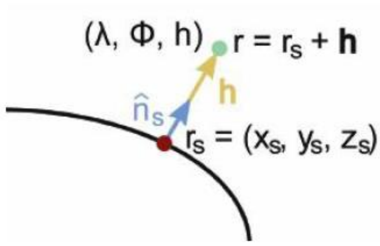
这样，我们在 ENU 本地坐标系上的一点p，对应球心坐标系上的点q，满足：

$$q = T \cdot p$$

如上，我们实现了 ECEF 和 ENU 之间的转化，下面，我们讲一下经纬度到 ECEF 之间的转换，该问题可以抽象为已知经纬度+高度(λ, ϕ, h)，这里的ϕ对应 ECEF 坐标系下的φ，求其在笛卡尔坐标系下对应的位置$(X_{ecef}, Y_{ecef}, Z_{ecef})$，这块并不涉及到坐标系的概念，不感兴趣的可以略过。

不失一般性，我们认为地球的椭球为：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



因为ϕ是 geodetic normal，所以，在点r_s处的法线为$\hat{n}_s = (\cos\phi\cos\lambda, \cos\phi\sin\lambda, \sin\phi)$，同样，由椭圆的属性可知，该点的法线（未归一化）同样可以是$n_s = \left(\frac{x_s}{a^2}, \frac{y_s}{b^2}, \frac{z_s}{c^2}\right)$，则可得如下关系：

$$\hat{n}_s = \gamma n_s = \gamma\left(\frac{x_s}{a^2}, \frac{y_s}{b^2}, \frac{z_s}{c^2}\right)$$

将(x_s, y_s, z_s)三个未知变量放到等式左侧：

$$(x_s, y_s, z_s) = \left(\frac{a^2 \hat{n}_x}{\gamma}, \frac{b^2 \hat{n}_y}{\gamma}, \frac{c^2 \hat{n}_z}{\gamma}\right)$$

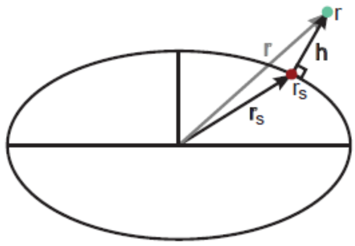
同时，因为(x_s, y_s, z_s)在椭球体上，带入椭球体的公式，可得：

$$\gamma = \sqrt{a^2 \hat{n}^2{}_x + b^2 \hat{n}^2{}_y + c^2 \hat{n}^2{}_z}$$

此时，我们可以得出(x_s, y_s, z_s)三个值，也就是r_s点的未知，最终就可以得到绿色点的位置：

$$(X_{ecef}, Y_{ecef}, Z_{ecef}) = r_s + h\hat{n}_s$$

接下来，自然就是逆运算了，已知$(X_{ecef}, Y_{ecef}, Z_{ecef})$，如何求$(\lambda, \phi, h)$。



如上图，一旦我们知道$r_s(x_s,y_s,z_s)$：

$$\lambda=\arctan\frac{\hat{n}_y}{\hat{n}_x}$$

$$\phi=\arcsin\frac{\hat{n}_z}{\|n_s\|}$$

已知$n_s=\left(\frac{x_s}{a^2},\frac{y_s}{b^2},\frac{z_s}{c^2}\right)$，可得：

$$r=r_s+h=r_s+\alpha n_s$$

$$x=x_s+\alpha\frac{x_s}{a^2}$$

$$y=y_s+\alpha\frac{y_s}{b^2}$$

$$z=z_s+\alpha\frac{z_s}{c^2}$$

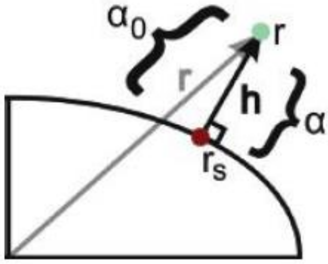
同样的思路，将(x_s,y_s,z_s)三个未知变量放到等式左侧：

$$(x_s,y_s,z_s)=\left(\frac{x}{1+\frac{\alpha}{a^2}},\frac{y}{1+\frac{\alpha}{b^2}},\frac{z}{1+\frac{\alpha}{c^2}}\right)$$

这里，我们定义一个函数 S：

$$S=\frac{x^2{}_s}{a^2}+\frac{y^2{}_s}{b^2}+\frac{z^2{}_s}{c^2}-1=0$$

$$S=\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{\alpha}{a^2}\right)^2}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{\alpha}{b^2}\right)^2}+\frac{z^2}{c^2\left(1+\frac{\alpha}{c^2}\right)^2}-1=0$$



这是求解一元四次方程，我觉得应该可以直接计算解析解吧？不过标准方式是采用的牛顿迭代法。初始值就是以 geocentric 和$(X_{ecef}, Y_{ecef}, Z_{ecef})$连线与椭球体的焦点，此时$\alpha = \alpha_0$：

$$\alpha_0 = (1-\beta)\frac{\|r\|}{\|n_s\|}$$

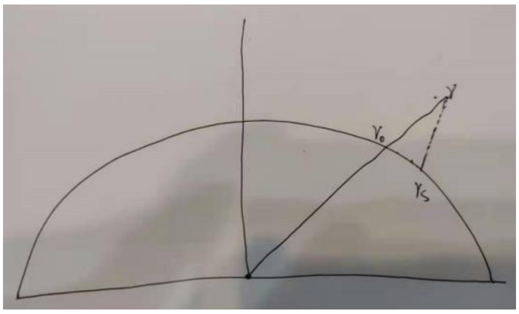
$$\beta = \sqrt{\frac{1}{\frac{x_s^2}{a^2}+\frac{y_s^2}{b^2}+\frac{z_s^2}{c^2}}}$$

这样，我们可以计算函数 S 相对于α的导数，用牛顿迭代法不断逼近，找到满足自己要求的α值：

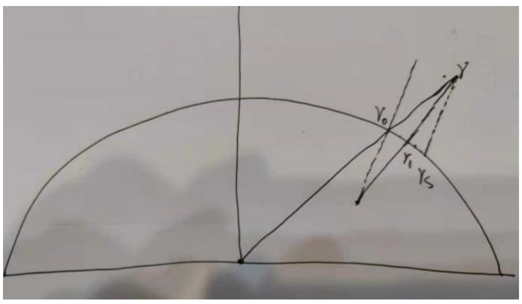
$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = -2\left[\frac{x^2}{a^4\left(1+\frac{\alpha}{a^2}\right)^3}, \frac{y^2}{b^4\left(1+\frac{\alpha}{b^2}\right)^3}, \frac{z^2}{c^4\left(1+\frac{\alpha}{c^2}\right)^3}\right]$$

$$\alpha = \alpha - \frac{S}{\frac{\partial S}{\partial \alpha}}$$

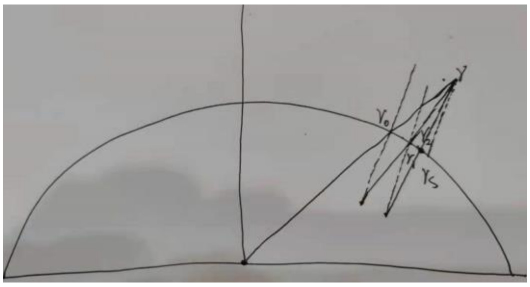
这个迭代对应的几何意义大概如下，不是特别确定：



Iteration 1：初始值，得到r_0



Iteration 2：以r_0的 geodetic normal 方向进行 scale，得到某个未知，连接 r，得到r_1



Iteration 3：同理，不断逼近，得到满足容限的近似解

本文到此结束，主要介绍了球心坐标系转换的相关内容，因为涉及到椭球而变得有些复杂，但在坐标系转换这方面并不复杂。下一篇是关于 Denavit-Hartenberg Algorithm。

参考资料：Cesium

3D Engine Design for Virtual Globes 第二章