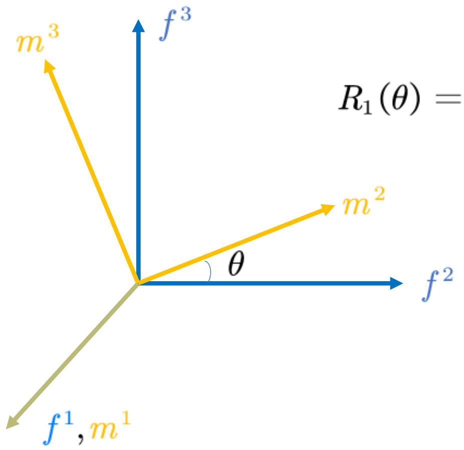
坐标系与矩阵(1):旋转

坐标系转换在很多方面都会用到，比如机器人中的骨骼关节间的空间关系，GIS 中的坐标系，渲染和计算机视觉中的相机等，往往需要采用矩阵来实现不同坐标系间的转换。因此，这里主要涉及到几何和线性代数两方面的数学知识。

基于个人的理解，一直想把这块知识点梳理一下，形成一个自我的知识体系，正巧前阵子有同事提到了齐次坐标，不妨以此为契机，形成这一系列。本篇主要针对旋转。

首先，我们先定义两个坐标系，一个是固定坐标系(fixed)，也可以称为全球坐标系(global)，或世界坐标系(world)，其特点是该坐标系是绝对的，一旦确立就不再变化，我们记为$F=\{f^1,f^2,f^3\}$。另一个则是移动坐标系(moving)，也称为本地坐标系(local)或自身坐标系(body)，其特点是会移动(旋转 R，平移 T，缩放 S，RTS)，我们记为$M=\{m^1,m^2,m^3\}$。本文主要针对旋转，自然也分为两种情况，相对F的旋转，或相对M的旋转。



$$R_1(\theta)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

上图是M相对于f^1旋转θ的效果以及对应的矩阵。同理，相对于f^2,f^3旋转θ对应的矩阵分别是：

$$R_2(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix},R_3(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

并且，该矩阵为正交矩阵：

$$R_i(\theta)^{-1}=R_i(\theta)^T$$

这里，如果坐标系 M 绕坐标系 F 的某一个轴f^i旋转θ，其中p和q分别对应某一点相对于M和F的坐标位置，则转换关系如下：

$$q=R_i(\theta)p$$
$$p=R_i(\theta)^Tq$$

例子 1，初始是$M=F$，M绕着f^3旋转$\pi/3$，此时，F坐标系上的一点$q(4,3,2)$对应M坐标系的位置p是多少？

求解如下:

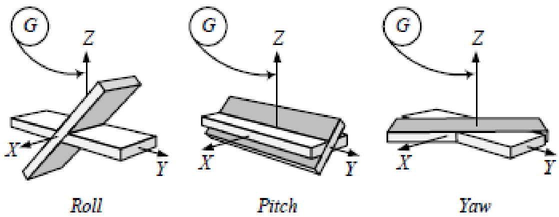
$$p=R_3\left(\frac{\pi}{3}\right)^{-1}\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}=R_3\left(\frac{\pi}{3}\right)^{T}\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} & 0\\ -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+\frac{3\sqrt{3}}{2}\\ \frac{3}{2}-2\sqrt{3}\\ 2\end{pmatrix}$$

同理，初始是$M=F$，然后M绕着F进行了一系列的旋转$R^1,R^2,...,R^n$,此时，空间上同一个点，对应 M 和 F 坐标系下的空间位置分别记作p,q，满足公式:

$$q=R^n...R^2R^1p$$

全球坐标系下，针对不同轴的旋转，这里有一个对应的 roll-pitch-yaw:



刚才我们只讨论了围绕F坐标系的旋转并给出了对应的矩阵，这里，如果我们相对M坐标系旋转，分别得到对应的三个矩阵:

$$A_1(\theta)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},A_2(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix},A_3(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

同理，如果此时M绕着m^i旋转θ，p,q分别对应某一点相对于M和F的坐标位置，则转换关系如下:

$$p=A_i(\theta)q$$
$$q=A_i(\theta)^{-1}p=A_i(\theta)^Tp$$
$$R_i(\theta)=A_i(\theta)^T$$

例子 2，初始是$M=F$，M绕着m^3旋转$\pi/3$，此时，F坐标系上的一点$q(4,3,2)$对应M坐标系的位置p是多少?

求解如下:

$$p=A_3\left(\frac{\pi}{3}\right)\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} & 0\\ -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+\frac{3\sqrt{3}}{2}\\ \frac{3}{2}-2\sqrt{3}\\ 2\end{pmatrix}$$

例子 3，初始是$M=F$，M绕着m^3旋转$\pi/3$，此时，M坐标系上的一点$p(0,1,2)$对应F坐标系的位置q是多少？

求解如下：

$$q=A_3\left(\frac{\pi}{3}\right)^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=A_3\left(\frac{\pi}{3}\right)^{T}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} & 0\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 2\end{pmatrix}$$

同理，初始是$M=F$，然后M绕着M进行了一系列的旋转$A^1,A^2,...,A^n$,此时，空间上同一个点，对应 M 和 F 坐标系下的空间位置分别记作p,q，满足公式：

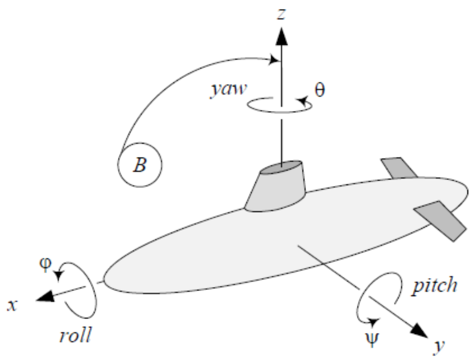
$$p=A^n...A^2A^1q$$

这样，我们可以把绕固定坐标系F和移动坐标系M旋转综合在一起，可得如下

- 初始是$M=F$,相当于 M 绕 F 旋转一个单位矩阵：$R:=I$
- 然后，M 旋转θ：
    - 如果相对于f^i：$R:=R_i(\theta)\cdot R$
    - 如果相对于m^i：$R:=R\cdot R_i(\theta)$

这里，R 用于将M坐标系下的一点p转换为相对于F坐标系下的点q。如上的规则应该算是本篇内容最重要的部分了。

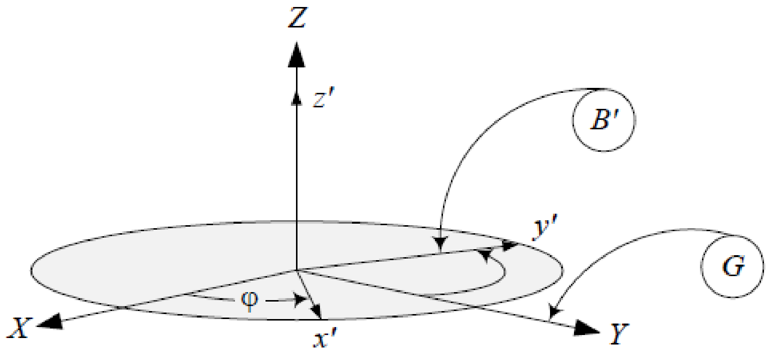
同样，在局部坐标系下，针对不同轴的旋转，这里有一个对应的 roll-pitch-yaw：



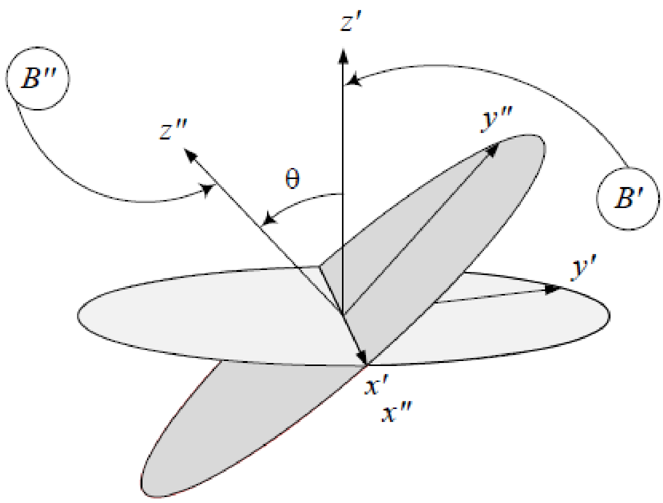
基于如上的旋转，有的是基于f^i，有的则是基于m^i，我们可以基于一系列的旋转复合形成该物体的朝向(orientation)。这里就有了欧拉角这个概念：

1. 绕f^3旋转φ，称为 precession
2. 绕m^1旋转θ，称为 nutation
3. 绕m^3 旋转ψ，称为 spin

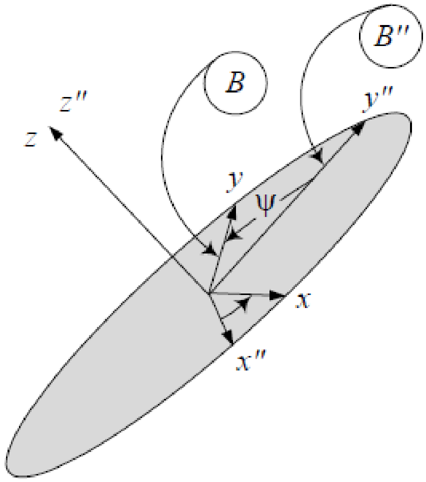
欧拉角对应的过程如下图所示：



(1)Precession: $R := R_3(\varphi)$, $p_1 = A_3(\varphi)q$



(2)nutation: $R:=R_3(\varphi)R_1(\theta),\ p_2=A_1(\theta)p_1$



(3)spin: $R:=R_3(\varphi)R_1(\theta)R_3(\psi),\ p_3=A_3(\psi)p_2$

将 R 展开:

$$
\begin{aligned}
R &= R_3(\varphi)R_1(\theta)R_3(\psi) \\
&= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi-\cos\theta\sin\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi-\cos\theta\cos\psi\sin\varphi & \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\psi\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi+\cos\theta\cos\varphi\cos\psi & -\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

通过本章，我们可以得到一个结论:

对于原点相同的任意两个坐标系Φ_1,Φ_2，空间中相同的一个点，分别对应坐标系下的位置为φ_1,φ_2，必然存在一个转换矩阵 R，满足两者之间的映射关系:

$$\varphi_2=R\varphi_1$$

坐标系旋转的内容基本介绍完毕，下一篇继续，基于 rotation，最终将确定物体的朝向，orientation 这部分的内容会在下一篇详细介绍。

参考资料:'Motion and Manipulation'

微信公众号: