Considere el sistema dinámico no lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 3x_1^2 x_2 + x_1 + u \end{bmatrix},$$

$$y = -x_1^3 + x_2.$$

1. Encuentre los puntos de equilibrio del sistema sin considerar ningún esfuerzo de control.
   Respuesta:

tenemos que

$$f(x,u) = \dot{x} = 0 \quad si \quad u^* = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 3x_1^2 x_2 + x_1 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \quad x_1 = -x_2 \quad \text{entonces...}$$

$$3(-x_2)^2 x_2 - x_2 = 0 \rightarrow x_2(3x_2^2 - 1) = 0 \quad \text{tenemos:}$$

$$x_2 = 0 \quad \& \quad x_2^2 = 1/3 \rightarrow x_2 = \pm\sqrt{1/3} = \pm \sqrt{3}/3$$

Puntos de equilibrio $u^* = 0$ $\quad X^* = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ //.

2. Encuentre la linealización local del sistema no lineal alrededor del punto de equilibrio con $x_1 > 0$.

Tenemos $\frac{\partial \dot{X}}{\partial(x_1, x_2)} = A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6x_1x_2 + 1 & 3x_1^2 \end{bmatrix}$; $\frac{\partial x}{\partial u} = B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\frac{\partial y}{\partial(x_1, x_2)} = C = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & 1 \end{bmatrix}$; $\frac{\partial Y}{\partial u} = D = 0$

Linealizando para $x_1 > 0$ entonces $\quad X^* = \sqrt{3}/3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -6(3/9)+1 & 3(\sqrt{3}/3)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} Z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} V \quad ; \quad w = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} Z \quad //.$$

3. Determine la estabilidad del sistema LTI. ¿Qué puede concluirse de la estabilidad local del sistema no lineal?
Respuesta: el sistema LTI es inestable ya que ambos polos tienen parte real positiva. Por el teorema de Hartman-Grobman sabemos que esto implica que el punto de equilibrio del sistema no lineal es (localmente) inestable.

$\det(A - I\lambda) = 0$ tenemos:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \rightarrow (1-\lambda)^2 - (-1)(1) = 0$$

$$(1-\lambda)^2 = -1 \rightarrow 1-\lambda = \pm i$$

$$\lambda = \{1 \pm i\}$$ "Polos del sistema"

R/. Como los polos tienen parte real positiva, el sistema para el punto de equilibrio $x^* = \sqrt{3}/3\,[1 \ \ -1]^T$ es localmente inestable. //.

4. Determine si el sistema es completamente controlable y observable.
Respuesta: ambas matrices de controlabilidad y observabilidad tienen rank igual al orden del sistema, por lo que éste es efectivamente C.C. y C.O.

* Controlabilidad

$$\text{Rank}([B \quad AB]) = \text{Rank}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \text{Rank}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 2 = n$$

Cumple ✓ "Coincide con el número de variables de estado" R/. C.C

* Observabilidad

$$\text{Rank}\left(\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}\right) \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}}_{C}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rank}\begin{pmatrix} [-1 & 1] \\ [-2 & 0] \end{pmatrix} = 2 = n$$ "Coincide con el número de variables de estado" cumple ✓ R/ C. A

5. Encuentre el controlador de retroalimentación de estados que estabiliza el sistema linealizado mediante asignación de polos. Se desea que la respuesta del sistema corresponda a una con polos en $-2 \pm \jmath$.
Respuesta:

$$v = -\mathbf{Kz} = -9z_1 - 6z_2.$$

$$A - BK = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

$\det(SI - (A - BK)) = 0$ entonces...

$$\det\left(\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1-K_1 & 1-K_2 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} S-1 & -1 \\ 1+K_1 & S-1+K_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$(S-1)[(S-1)+K_2] + 1 + K_1 = S^2 - 2S + 1 + K_2 S - K_2 + 1 + K_1 = 0$$

sabiendo que se desean los polos : $S = -2 \pm j$ tenemos..

$$(S+2)^2 = -1 \rightarrow S^2 + 4S + 4 + 1 = 0$$

$$S^2 + S(K_2 - 2) + 2 + K_1 - K_2 = 0$$

igualando polinomios

$$\begin{cases} K_2 - 2 = 4 \rightarrow K_2 = 6 \\ 2 + K_1 - K_2 = 5 \end{cases}$$

$$2 + K_1 - 6 = 5 \rightarrow K_1 = 5 + 4 = 9$$

R/ El controlador sería $K = [9 \quad 6]$ por lo tanto

$$V = -KZ = -9Z_1 - 6Z_2$$ //

6. Encuentre la matriz de ganancias de un observador de Luenberger que puede emplearse para estimar las variables de estado del sistema linealizado.

Respuesta:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -83.5 \\ -61.5 \end{bmatrix}.$$

$$A - LC = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -L_1 & L_1 \\ -L_2 & L_2 \end{bmatrix}$$

$\det(sI - (A - LC)) = 0$ entonces:

$$\det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1+L_1 & 1-L_1 \\ -1+L_2 & 1-L_2 \end{bmatrix} \right) = \det\left(\begin{bmatrix} s-1-L_1 & -1+L_1 \\ 1-L_2 & s-1+L_2 \end{bmatrix} \right)$$

$$[s-(1+L_1)][s-(1-L_2)] - (1-L_2)(-1+L_1) = 0$$

$$s^2 - s(1-L_2) - s(1+L_1) + (1+L_1)(1-L_2) - (1-L_2)(-1+L_1) = 0$$

$$s^2 - s(2+L_1-L_2) + (1-L_2)[1+L_1+1-L_1] = 0$$

sabiendo que se desean los polos más agresivos: $s = 5(-2 \pm i)$

$$\left.\begin{aligned} &(s+10)^2 = -25 \rightarrow s^2 + 20s + 100 + 25 = 0 \\ &s^2 - s(2+L_1-L_2) + 2(1-L_2) = 0 \end{aligned}\right\} \text{igualando polinomios}$$

$$\begin{cases} -2 - L_1 + L_2 = 20 \\ 2(1-L_2) = 125 \end{cases} \rightarrow L_2 = 1 - 125/2 = -61.5$$

$$L_1 = -2 - 20 - 61.5 = -83.5$$

R/. $$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -83.5 \\ -61.5 \end{bmatrix} \quad /\!/$$

7. ¿Cuál es el controlador que debe aplicarse al sistema no lineal si se desea estabilizar el punto de equilibrio con $x_1 > 0$?
Respuesta: se obtiene a partir de la respuesta del inciso 5 y tiene la forma

$$u = -9x_1 - 6x_2 + \sqrt{3}.$$

El controlador estabilizará el punto de equilibrio del sistema no lineal siempre y cuando $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}^*$, con $\delta\mathbf{x}^*$ lo suficientemente pequeño.

Sabemos que el control para el sistema linealizado es :

$v = -9z_1 - 6z_2$ pero sabemos que :

$v = u - u^*$ & $z = x - x^*$ con esto recordando que

$u^* = 0$ & $x = \sqrt{3}/3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ tenemos que

regresando al sistema no lineal obtenemos :

$u - 0 = -9(x_1 - \sqrt{3}/3) - 6(x_2 + \sqrt{3}/3)$

$u = -9x_1 - 6x_1 + \sqrt{3}$ //.

Esto siempre y cuando $x_0 = x^* + \delta x^*$

siendo δ muy pequeño.