Factores

Ingeniería Económica

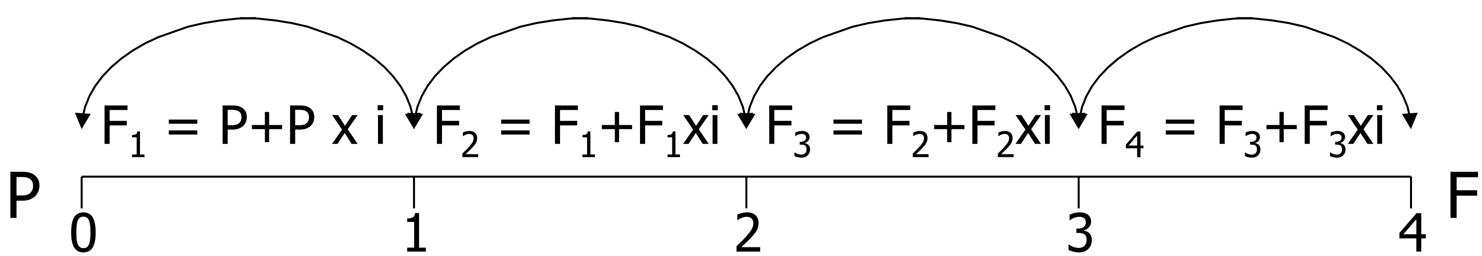
Factores de Pago único

- Para obtener la equivalencia de un valor presente a un valor futuro se utiliza el factor F/P o Factor de cantidad compuesta de pago único:

$$F = P(1+i)^n$$

Notación: (F/P,i,n)

Deducción de factor:



Deducción de fórmula

$$F_1 = P + Pi$$
$$F_1 = P(1+i)$$
$$F_2 = F_1 + F_1 i$$
$$F_2 = P(1+i) + P(1+i)i$$
$$F_2 = P(1+i+i+i^2)$$
$$F_2 = P(1+2i+i^2)$$
$$F_2 = P(1+i)^2$$

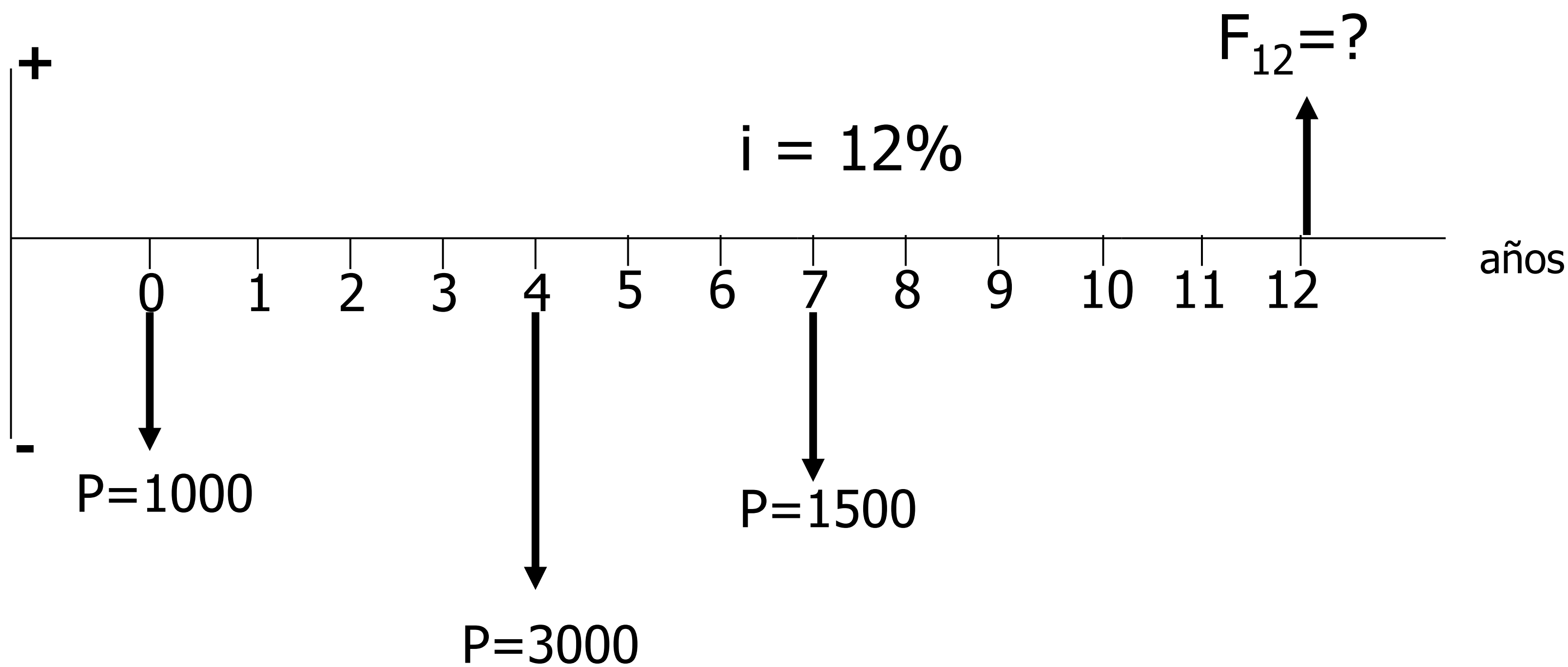
Por inducción matemática se llega a:

$$F = P(1+i)^n$$

Ejemplo:

Si usted deposita en un fondo de ahorro $1000 hoy, $3000 dentro de 4 años y $1500 dentro de 7 años. Todo a una tasa de interés anual del 12%. ¿Cuánto dinero tendrá en su cuenta 12 años después de iniciado el fondo de ahorro?

Ejemplo:



Ejemplo:

$$F = 1000(F/P,12\%,12) + 3000(F/P,12\%,8) + 1500(F/P,12\%,5)$$

$$F = 1000(3.8960) + 3000(2.4760) + 1500(1.7623)$$

$$F = 1000(1+.12)^{12} + 3000(1+.12)^{8} + 1500(1+.12)^{5}$$

$$\boxed{F = 13,967.38}$$

Factores de Pago único

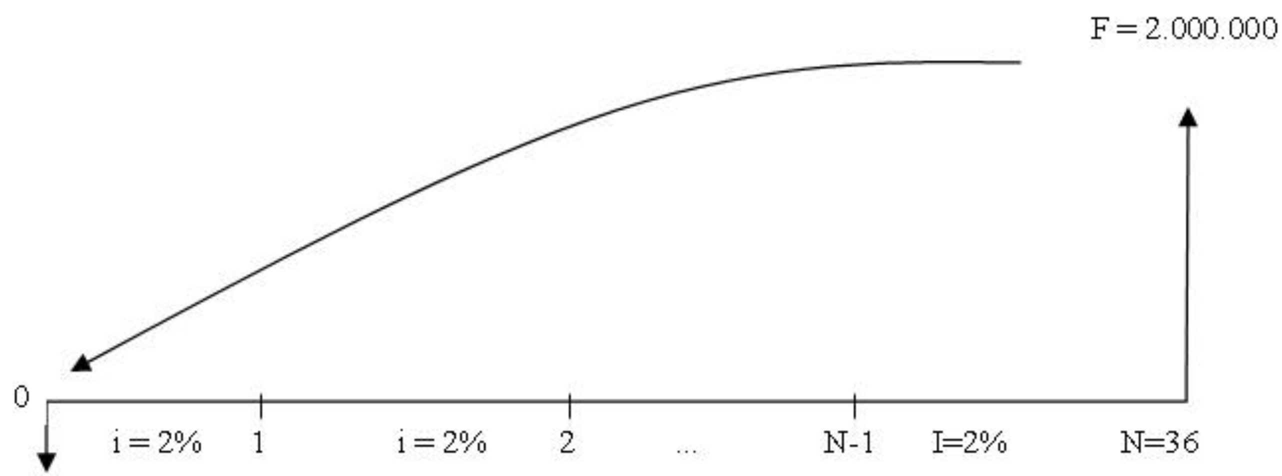
- Para obtener la equivalencia de un valor futuro a un valor presente se utiliza el factor P/F o Factor de valor presente de pago único (FVPPU):

$$P = F\left[\frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

Notación: (P/F,i,n)

Ejemplo

- Hallar la cantidad de dinero que se debe invertir hoy para disponer de $2.000.000 al final de 36 meses, si la tasa de interés es del 2% mensual.


F = 2.000.000
0
i = 2%
1
i = 2%
2
...
N-1
I=2%
N=36

$F = 2.000.000$

$i = 2\%$ mensual

$n = 36$ meses.

$F = P * (1+ i)^n$, despejamos el valor de P.

$P = F *(1/(1+ i)^n)$

$(1/(1+ i)^n)$ Es el factor que convierte un pago único futuro de valor F, en un pago único presente de valor P equivalente.

Diagrama de flujo de caja:

$P = 2.000.000 / (1+.02)^{36} = \$980.446.$

Valor presente, P: El valor presente de una cantidad F, es aquel valor P que invertido ahora a una tasa de interés i y en n periodos será igual a F.

Lo anterior quiere significar que si se invierten $980.446 ahora en una entidad que paga una tasa del 2% mensual, al cabo de 36 meses se dispone de $2.000.000.

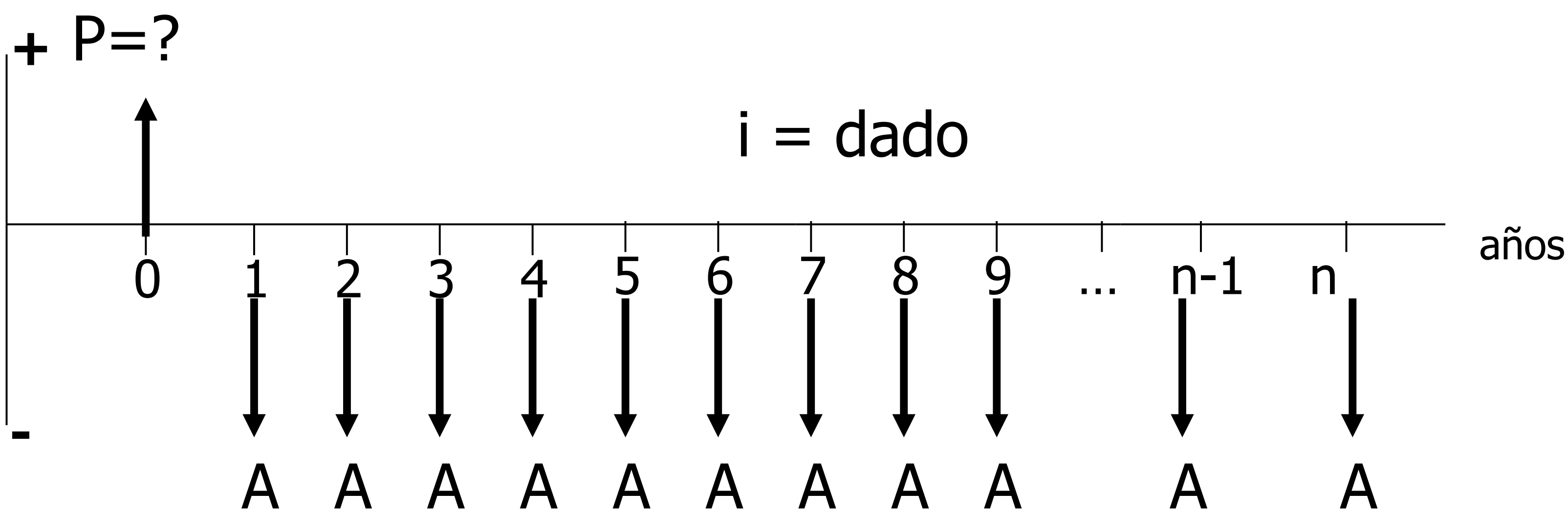
Factores de Valor presente y de recuperación de capital en series uniformes

Definición:

Una anualidad es una serie de pagos que cumple con las siguientes condiciones:

1. Todos los pagos son de igual valor.
2. Todos los pagos se hacen a iguales intervalos de tiempo.
3. Todos los pagos son llevados al principio o al final de la serie <u>a la misma tasa</u>.
4. El número de pagos debe ser igual al número de periodos.

Diagrama de flujo



Factores de series uniformes

Primer factor:

Factor de valor presente de serie uniforme (FVPSU) o factor P/A:

$$P = A\boxed{\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right)}$$

$$i \neq 0$$

Notación: (P/A,i,n)

Deducción

Deducción

$$P = A\left[\frac{1}{(1+i)^1}\right] + A\left[\frac{1}{(1+i)^2}\right] + A\left[\frac{1}{(1+i)^3}\right] + \ldots + A\left[\frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right] + A\left[\frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

$$P = A\left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n}\right] \quad (1)$$

Si se multiplica ambos lados por: $\frac{1}{1+i}$

$$P\left(\frac{1}{1+i}\right) = A\left[\frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^4} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{n}} + \frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right] \quad (2)$$

Luego se restan (2)-(1):

$$P\left(\frac{1}{1+i}\right) = A\left[\cancel{\frac{1}{(1+i)^2}} + \cancel{\frac{1}{(1+i)^3}} + \cancel{\frac{1}{(1+i)^4}} + \ldots + \cancel{\frac{1}{(1+i)^n}} + \frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right]$$

$$-P = A\left[\frac{1}{(1+i)^1} + \cancel{\frac{1}{(1+i)^2}} + \cancel{\frac{1}{(1+i)^3}} + \ldots + \cancel{\frac{1}{(1+i)^{n-1}}} + \cancel{\frac{1}{(1+i)^n}}\right]$$

$$\frac{-i}{1+i}P = A\left[\frac{1}{(1+i)^{n+1}} - \frac{1}{(1+i)^1}\right]$$

$$P = \frac{A}{-i}\left[\frac{1}{(1+i)^n} - 1\right] = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

Factores de series uniformes

Segundo Factor:

Factor de recuperación de capital (FRC) o factor A/P:

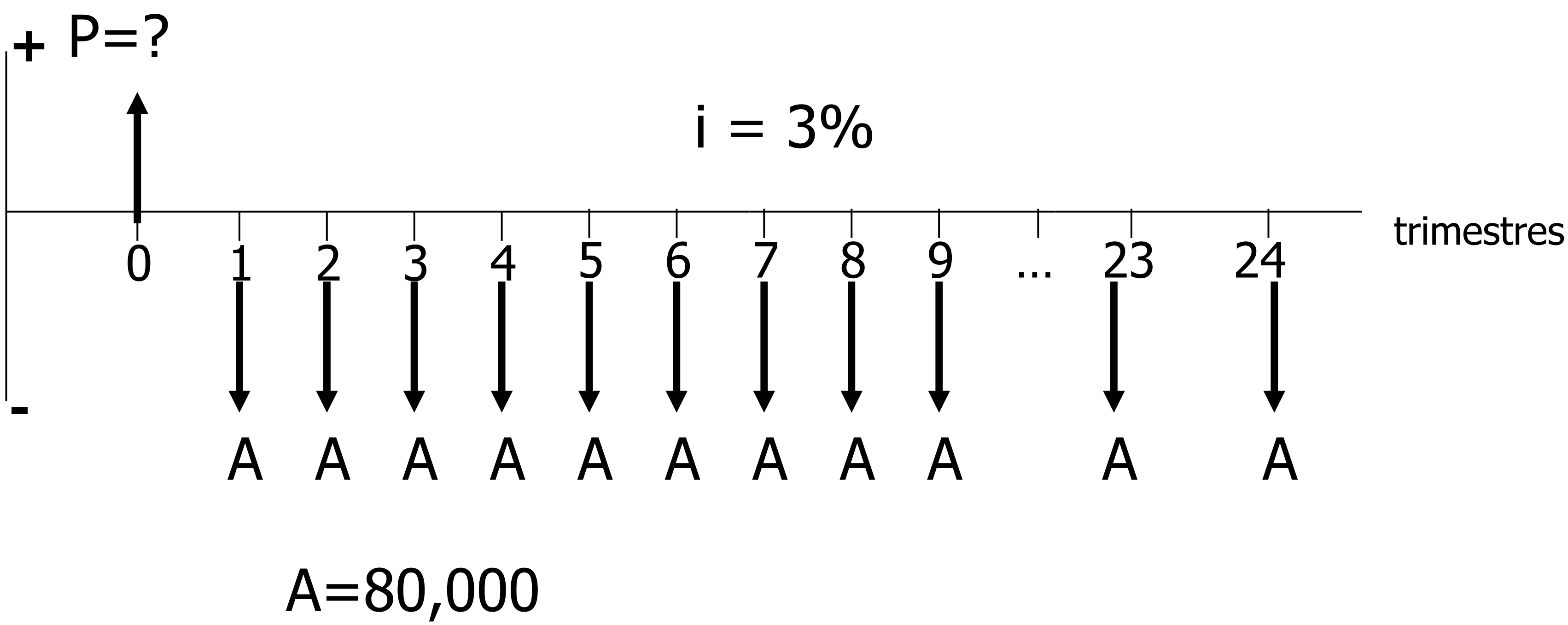
$$A = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

Nota importante

Estas fórmulas se derivan con el valor presente P y la primera cantidad anual uniforme A, con un periodo de diferencia. Es decir, el valor presente P siempre debe localizarse un periodo antes de la primera A.

Ejemplo

- Un documento estipula pagos trimestrales de **$80.000** durante **seis años**. Si este documento se cancelase con un solo pago, determina el valor presente, suponiendo un interés del 3% trimestral


+ P=?
i = 3%
trimestres
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ... 23 24
-
A A A A A A A A A A A
A=80,000

- El número de pagos **es n**= **4 X 6= 24 períodos**,
- **A = $80.000**
- i= 3% trimestral
- P= 80,000 (P/A,3%,24)
- P= 80,000 (16.9355)

$$P = 80,000\left(\frac{(1+0.03)^{24}-1}{0.03(1+0.03)^{24}}\right)$$

P= 1,354,843.37

Factores de series uniformes

Tercer factor:
Factor de fondo de amortización o (A/F)

$$A = F\left[\frac{i}{(1+i)^{n}-1}\right]$$

$$A = F\left(A/F, i, n\right)$$

Factores de series uniformes

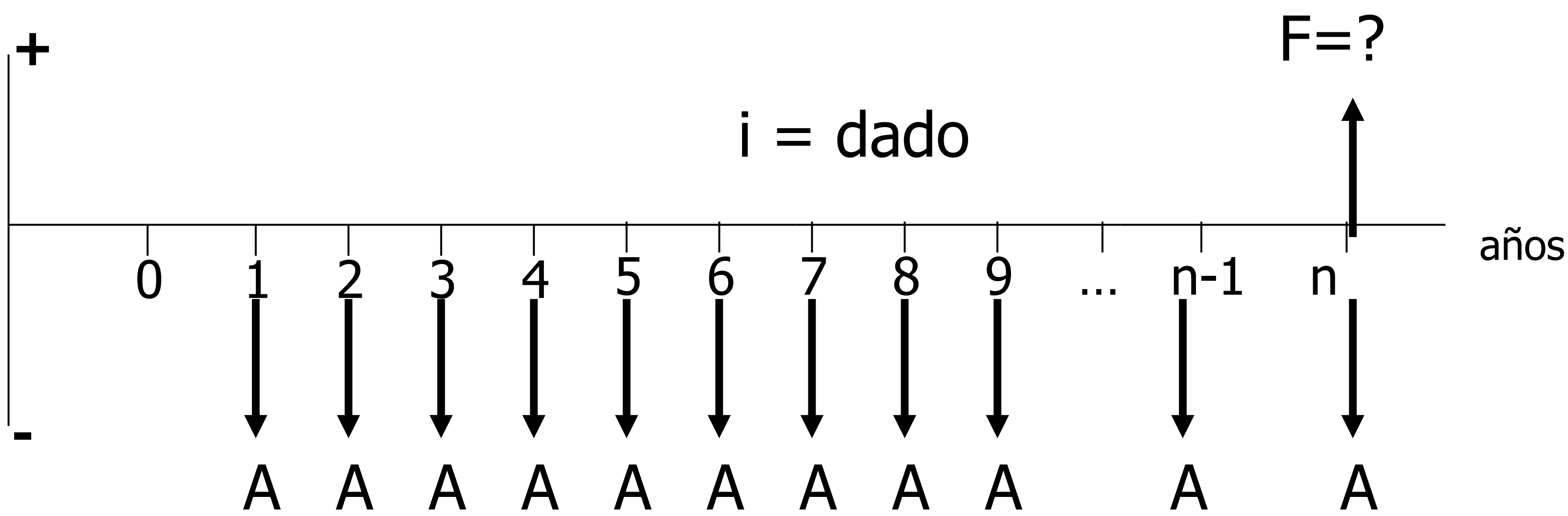
Cuarto factor:

Factor de cantidad compuesta, serie uniforme (FCCSU), o factor (F/A)

$$F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$F = A(F/A, i, n)$$

Diagrama de flujo

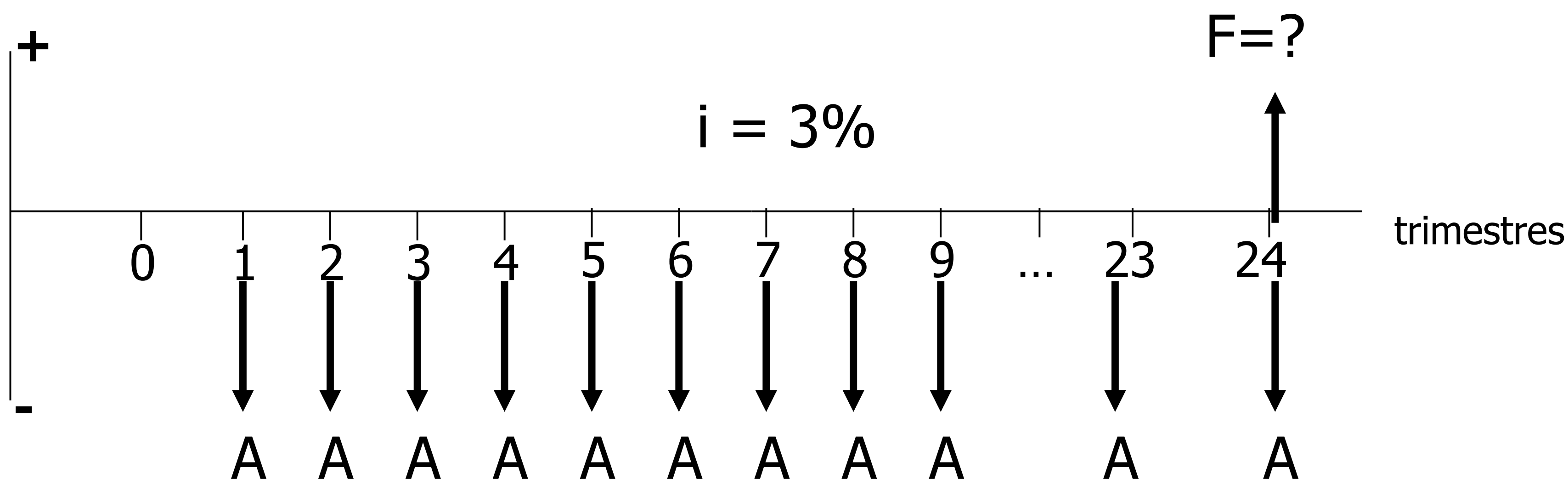


La serie uniforme A se inicia al final del periodo 1 y continúa a lo largo del periodo de la F dada

Ejemplo

- Un documento estipula pagos trimestrales de **$80.000** durante **seis años**. Si este documento se cancelase con un solo pago, determina el valor futuro, suponiendo un interés del 3% trimestral

Solución



A=80,000

- El número de pagos **es n= 4 X 6= 24 períodos**,
- **A = $80.000**
- i= 3% trimestral
- F= 80,000 (F/A, 3%, 24)
- F=80,000(34.4265)

$$F = 80,000\left(\frac{(1+0.03)^{24}-1}{0.03}\right)$$

F= 2,754,117.62

Ejercicios

- Si una persona deposita $950 cada 4 meses durante 15 años, ¿cuánto dinero tendrá en su cuenta al día siguiente que haga el último depósito, si la tasa de interés que le pagan es del 1.25% por , periodo?

Ejemplo 2.4

- ¿Cuánto dinero debería destinarse para pagar ahora por $600 garantizados cada año durante 9 años, comenzando el próximo año, a una tasa de rendimiento de 16% anual?

Ejemplo 2.5

- Formosa Plastics tiene grandes plantas de fabricación en Texas y Hong Kong. Su presidente quiere saber el valor futuro equivalente de una inversión de capital de $1 millón cada año durante 8 años, empezando un año a partir de ahora. El capital de Formosa gana a una tasa del 14% anual.

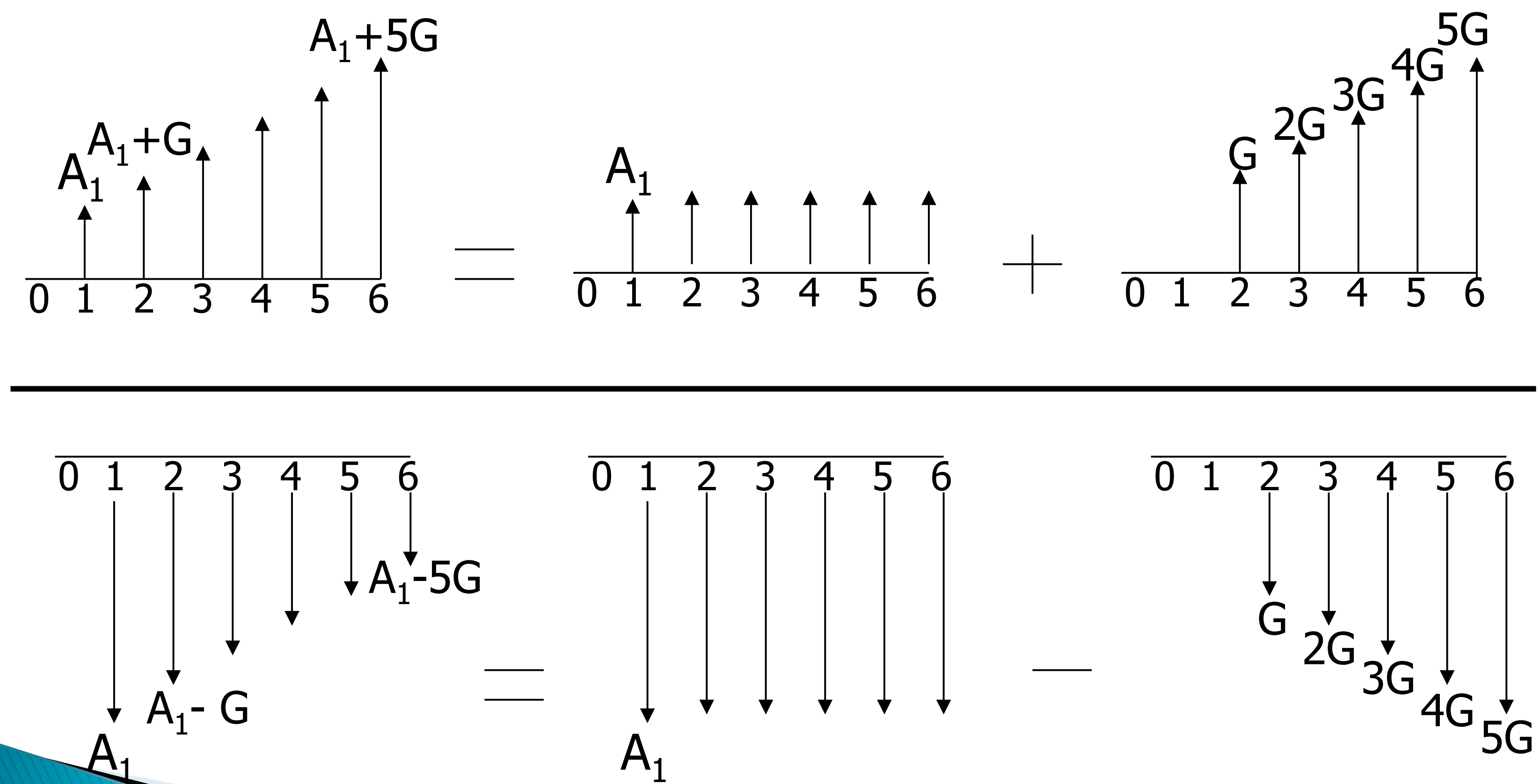
Ejemplo 2.6

- Cuánto dinero necesita depositar Carol cada año, empezando un año a partir de ahora, a 5.5% por año, para que pueda acumular $6,000 en siete años?

Factores de Gradiente Aritmético (P/G y A/G)

- Es una serie de flujos de efectivo que aumenta o disminuye en una cantidad constante
- Se define gradiente"G" al cambio aritmético constante en la magnitud de los ingresos o desembolsos de un periodo al siguiente. Puede ser positivo o negativo
- La cantidad del año 1 es una cantidad base, y no forma parte de la serie del gradiente. El gradiente inicia entre los años 1 y 2

Gradiente lineal aritméticos



Factores de Gradiente Aritméticos

- Factor P/G para el valor presente

$$\left(P/G,i,n\right)=\frac{\left(1+i\right)^n-in-1}{i^2\left(1+i\right)^n}$$

- Factor A/G para serie anual

$$\left(A/G,i,n\right)=\frac{1}{i}-\frac{n}{\left(1+i\right)^n-1}$$

- Factor F/G para el valor futuro

$$\left(F/G,i,n\right)=\left(\frac{1}{i}\right)\left(\frac{\left(1+i\right)^n-1}{i}-n\right)$$

Implicaciones

- La cantidad base es la cantidad A de serie uniforme que empieza en el año 1 y se extiende hasta el año n. Su valor presente se simboliza con P_A
- Para un gradiente creciente, la cantidad gradiente debe agregarse a la cantidad de la serie uniforme. El valor presente es P_G o de manera similar es A_G
- Para un gradiente decreciente la cantidad gradiente debe restarse de la cantidad de la serie uniforme. El valor presente es $-P_G$ o de manera similar es $-A_G$
- $P_T=P_A + P_G$ Y $P_T=P_A - P_G$
- $A_T=A_A + A_G$ Y $A_T=A_A - A_G$
- **Ejemplos**

Ejemplo 2.10

- Tres condados adyacentes en Florida acordaron emplear recursos fiscales ya destinados para remodelar los puentes mantenidos por el condado. En una junta reciente, los ingenieros de los condados estimaron que, al final del próximo año, se depositará un total de $500,000 en una cuenta para la reparación de los viejos puentes de seguridad dudosa que se encuentran en los tres condados. Además, estiman que los depósitos aumentarán en $100,000 por año durante 9 años a partir de ese momento, y luego cesarán. Determine las cantidades equivalentes de: a.) valor presente y b.) serie anual, si los fondos del condado ganan intereses al 5% anual.

Ejercicio

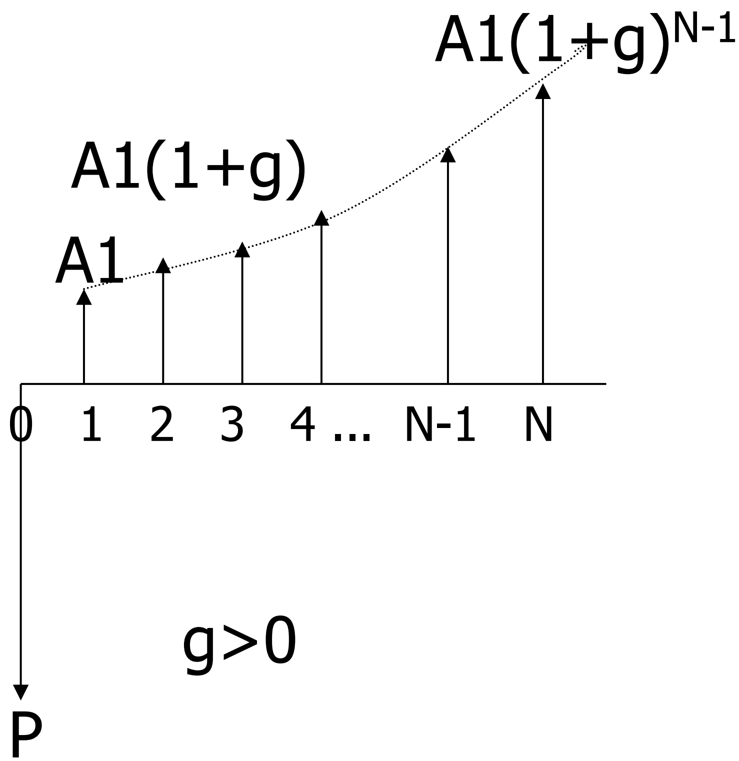
Una fábrica de textiles acaba de comprar un camión con vida útil de 5 años. El ingeniero estima que los costos de mantenimiento del camión durante el primer año serán de $1000. Se espera además que dichos costos de mantenimiento suban conforme envejezca el camión, a una tasa de $250 anuales durante su vida útil. Suponga que los costos de mantenimiento ocurren al final de cada año. La empresa quiere establecer una cuenta de mantenimiento que obtenga un interés anual de 12% al año. Todos los gastos de mantenimiento en el futuro se pagarán de esta cuenta. ¿Cuánto debe depositar la empresa en la cuenta ahora?

R/ ejer. Ant. $5,204.03

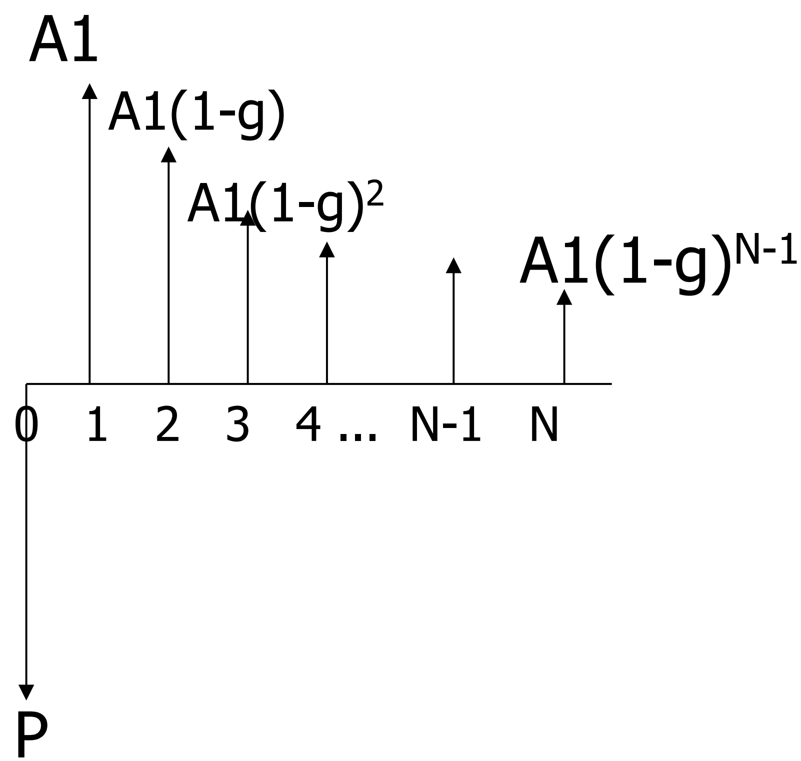
Suponga que hace una serie de depósitos anuales en una cuenta bancaria que paga interés del 10%. El deposito inicial al termino del primer año es de $1200. Las cantidades de los depósitos disminuyen en $200 al final de los siguientes 4 años. ¿Cuánto tendrá después del 5to depósito?

Factor de Gradiente Geométrico

- Se utiliza cuando los flujos de efectivos disminuyen o aumentan de un periodo a otro mediante un porcentaje constante
- Se utiliza el termino “g” que se define como la tasa de cambio constante, en forma decimal, mediante la cual las cantidades aumentan o disminuyen de un periodo al siguiente
- La serie inicia en el año 1 a una cantidad inicial A1, la cual no se considera una cantidad base.
- Los cambios de precio debido a la inflación son un ejemplo de estas series geométricas.



A1(1+g)N-1
A1(1+g)
A1
0 1 2 3 4 ... N-1 N
g>0
P



A1
A1(1-g)
A1(1-g)2
A1(1-g)N-1
0 1 2 3 4 ... N-1 N
P

Factor de valor presente de la serie gradiente geométrico

$$Pg = A_1 (P/A, g, i, n)$$

$$(P/A, g, i, n) = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\dfrac{1+g}{1+i}\right)^n}{i-g} & g \neq i \\[2ex] \dfrac{n}{1+i} & g = i \end{cases}$$

Ejemplo 2.11

- Los ingenieros del Sea World, una división de Busch Gardens, Inc. Desarrollaron una innovación en un deporte acuático existente para hacerlo más excitante. La modificación cuesta sólo $8,000 y se espera que dure 6 años con un valor de salvamento de $1,300 para el mecanismo solenoide. Se espera que el costo de mantenimiento sea de $1,700 el primer año, y que aumente 11% anual en lo sucesivo. Determine el valor presente equivalente de la modificación y del costo de mantenimiento, i=8%

Ejercicio:

Una planta municipal de energía espera generar un ingreso neto de $500,000 al final de su primer año y que esta cantidad anual aumente en un 8% cada año durante los próximos 5 años. Para financiar un nuevo proyecto de construcción, el gobierno municipal quiere emitir un bono exento de impuestos que pague un interés del 6% anual. (Un bono es un pagaré a largo plazo emitido por una empresa o unidad gubernamental). La cantidad del financiamiento por bonos dependerá del valor actual equivalente de las ganancias que se espera tenga en el futuro dicha planta de energía, las cuales se usarán para pagar los bonos. ¿Cuál sería la cantidad máxima de financiamiento por bonos que podría asegurarse?

Cálculo de tasas de interés y número de períodos desconocidos

- La tasa de interés se puede conocer a partir de los flujos de efectivos, el número de períodos. Se calcula al despejar i de las formulas o al resolverlas a partir de la interpolación de las tablas de factor; ensayo y error; así como también Excel ®
- El número de periodos se puede conocer a partir de los flujos de efectivos y la tasa de interés, despejando la n de las formulas o utilizando la interpolación de tablas; ensayo y error; así como también Excel ®

Ejemplo 2.12

- Si laurel puede hacer una inversión de negocios que requiere un gasto de $3,000 ahora con el objetivo de recibir $5,000 dentro de cinco años, ¿cuál sería la tasa de rendimiento sobre la inversión? Si Laurel puede recibir 7% anual de intereses de un certificado de depósito, ¿qué inversión debe realizarse?

Ejemplo 2.14

- ¿Cuánto tiempo tomará duplicar $1,000 si la tasa de interés es del 5% anual?

Ejercicio

- ¿Cuántos depósitos anuales de $575 debe efectuar una persona con el objeto de acumular $125,000 si la tasa de interés es del 8.16% anual?

R. ant/ 37.36 AÑOS

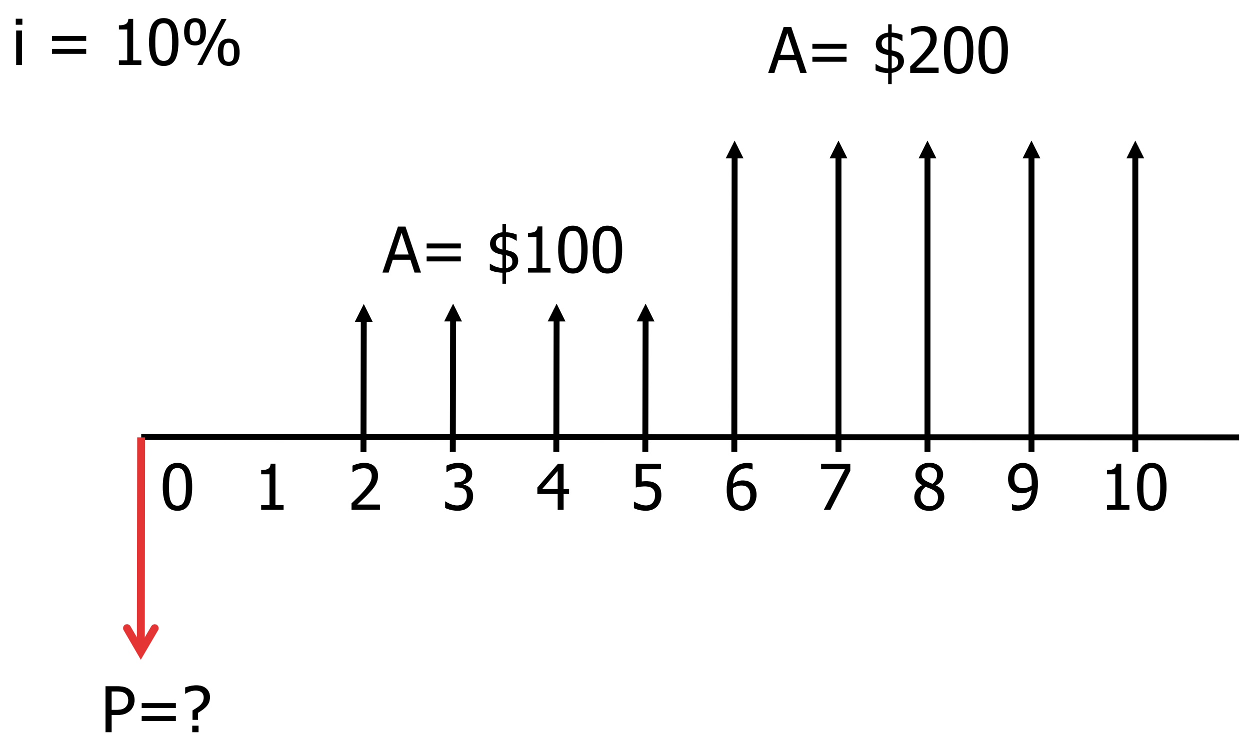
- Un banco cooperativo está dispuesto a prestarle Q20,000 para su proyecto de remodelación de vivienda. Usted debe de firmar una hipoteca que requiere pagos de Q3,116.40 al final de cada uno de los próximos 10 años. ¿Cuál es la tasa de interés que le ofrece el banco?

R/ant.= 9%

Roberto, quien trabaja de manera independiente, decide abrir una cuenta de jubilación en el banco. Su objetivo es acumular 1 millón en ella para cuando deje de trabajar, dentro de 20 años. Un banco local está dispuesto a abrir dicha cuenta de jubilación pagando un interés compuesto anual del 8% durante 20 años. Roberto espera que sus ingresos anuales aumenten en un 6% cada año durante su periodo de trabajo. Desea iniciar con un depósito al final del año 1 (A1) e incrementar este depósito a una tasa del 6% cada año subsecuente. ¿Cuál debe ser la magnitud de su primer depósito A1? El primer depósito tendrá lugar al concluir el primer año y los depósitos subsecuentes se efectuarán al finalizar cada año. El último depósito se hará al terminar el año 20.

R. Ant/ $13,756.85

Encontrar el valor presente de utilizando tres factores:



- Un equipo viejo produce una cantidad de piezas defectuosas. Se calcula que durante los siguientes cuatro (4) años se producirán 12.000 piezas defectuosas por año y a partir del quinto año, éstas aumentarán en 1.500 piezas anuales. La empresa propietaria del equipo, usa como referencia una tasa de interés del 24% anual y está realizando un estudio para reemplazar dicha máquina por una nueva para un período de 8 años.
- Si cada pieza defectuosa le cuesta $ 100, cuánto estaría dispuesto a pagar en este momento por la máquina nueva que evite totalmente este problema ?
- R./ $4,446,332.82