

Capítulo 4: Tasa de interés nominal y efectiva

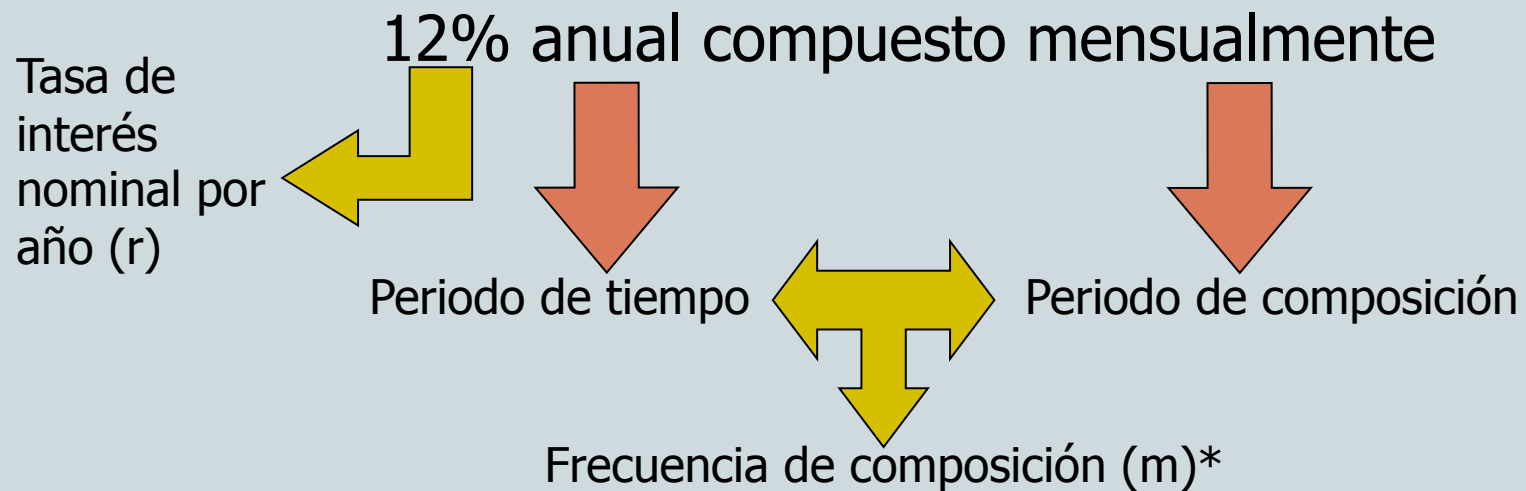


INGENIERÍA ECONÓMICA

Tasa de interés NOMINAL



- Una institución financiera usa una unidad temporal distinta de un año, por ejemplo, un mes o un trimestre, para calcular pagos de interés:



r/m = tasa de interés por periodo de capitalización PC

$$r/m = 12\%/12 = 1\%^*$$



- Si el interés compuesto se calcula más de una vez al año se tomarán en cuenta los siguiente términos:
 - Tasa de interés NOMINAL, r , es la tasa de interés que no considera la capitalización de los intereses.
 - Tasa de interés EFFECTIVA: es la tasa “real” aplicable a un período de tiempo establecido. La tasa de interés efectiva toma en cuenta la acumulación del interés durante el período de la tasa nominal correspondiente.

Unidades del tiempo



- Período de tiempo (t): es el período en el que se expresa el interés (el que nos dan). Eje. 1% mensual
- Período de capitalización o composición (PC): es la unidad de tiempo mas corta durante la que se paga interés. Se identifica por el término “compuesto” o “capitalizado”. Eje. 8% anual compuesto mensualmente.
- Frecuencia de composición: es el número de veces que la capitalización “ m ” ocurre dentro del período “ t ”. Eje. 8% anual compuesto mensualmente: $m = 12$
- 1% mensual compuesto mensualmente: $m = 1$

Ejemplos



| Enunciado | 18% anual, compuesto trimestralmente | 6% semestral, compuesto semanalmente |
|---------------------------------------|---|---|
| Periodo de tiempo | Año | Semestre |
| Periodo de composición | Trimestre | Semana |
| Frecuencia de composición (m) | 4 | 26 |
| Tasa efectiva por Periodo Composición | 4.5% | 0.23% |

TASA DE INTERÉS EFECTIVA ANNUAL (i_a)

- El valor futuro al final del año 1 es el principal más los intereses:
- $F = P + Pi = P(1 + i_a)$
- i_a = dado que el interés se puede capitalizar varias veces durante el año.
- La tasa i por PC debe capitalizarse durante todos los M períodos
- $F = P(1 + i)^m$
- Igualamos y se despeja para i_a :
- $I_a = (1 + i)^m - 1$ donde $i = r/m$

Ejemplo



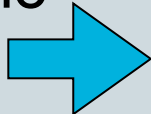
$$P=\$1 \quad i=12\%/12 \quad N=12$$

$$F = P(1 + i)^n = 1(1 + 0.01)^{12} = \underline{\underline{1.1268}}$$

$$\Rightarrow I = F - P = 1.1268 - 1 = \underline{\underline{0.1268}}$$

Por cada dólar se
paga un interés
anual equivalente
de 12.68 centavos

Se puede deducir el
pago de interés
efectivo anual como
porcentaje del
capital:

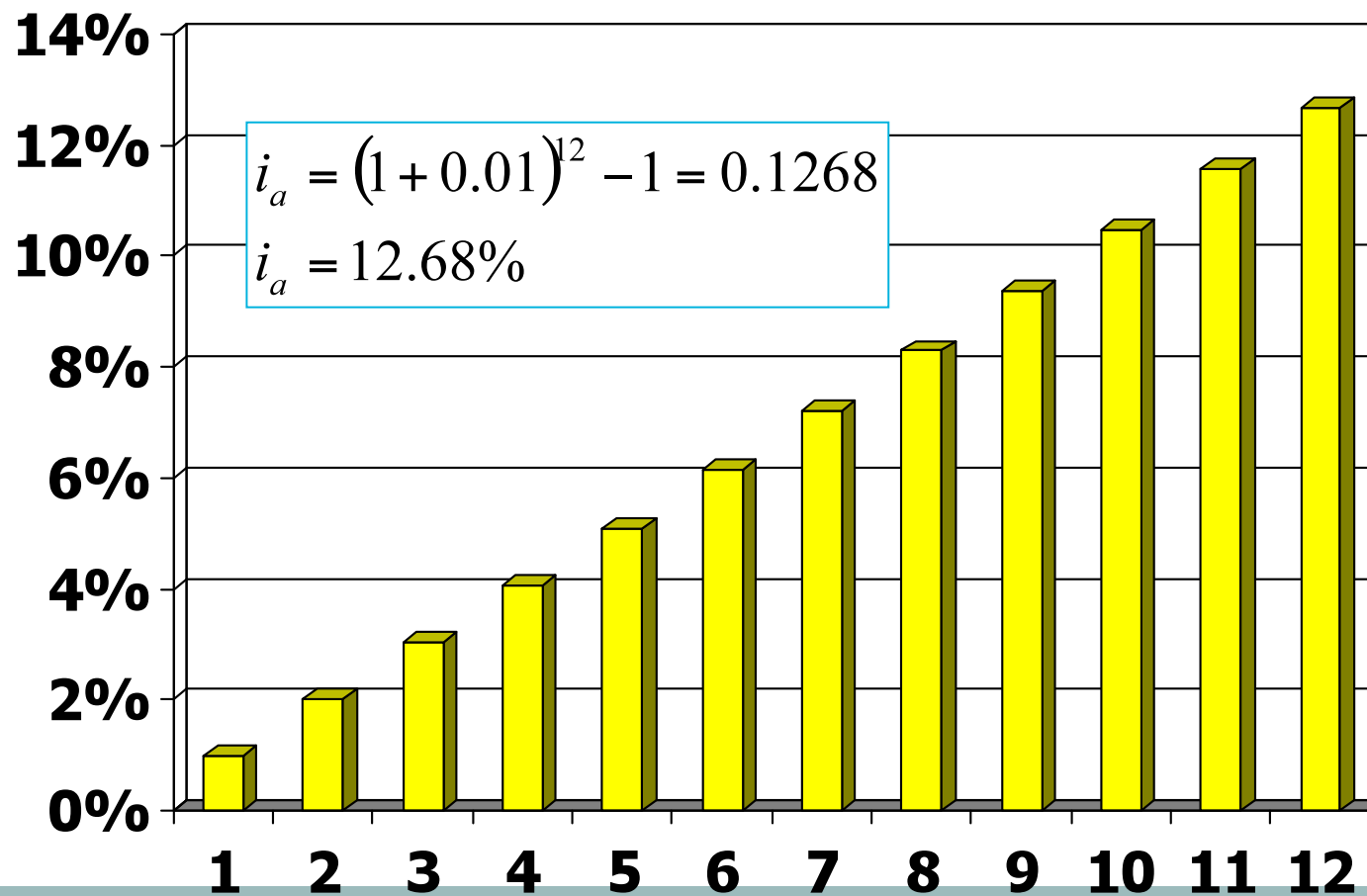


$$i_a = (1 + 0.01)^{12} - 1 = 0.1268$$

$$i_a = 12.68\%$$

| Mes | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| r/12 | 1% | 1% | 1% | 1% | 1% | 1% | 1% | 1% | 1% | 1% | 1% | 1% |

$r=1\% \times 12 = 12\%$ Tasa de interés nominal anual





Para el mismo préstamo a un interés compuesto del 12% trimestral, la tasa de interés sería de:

$$3\% = 12\%/4$$

$$i_a = (1+0.03)^4 - 1 = 12.55\% \text{ o } 12.55\%$$

Al disminuir la frecuencia de la composición disminuye la cantidad de interés que se paga en el año con la misma tasa de interés nominal*

| Tasa nominal | Composición anual | Composición semestral | Composición trimestral | Composición mensual | Composición diaria |
|--------------|-------------------|-----------------------|------------------------|---------------------|--------------------|
| 12% | 12% | 12.36% | 12.55% | 12.68% | 12.74% |

Tasas de interés efectivas para cualquier periodo



$$i_{efectivo} = (1 + r/m)^m - 1$$

r = tasa de interés nominal por período de pago (PP)

m = número de periodos de composición por periodo de pago (PC por PP)

Ejemplo

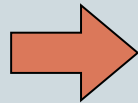


- Una tienda por departamentos le ha ofrecido una tarjeta de crédito que cobra un interés del 1.5% mensual compuesto mensualmente. ¿Cuál es la tasa de interés nominal (porcentaje anual) de esta tarjeta de crédito? ¿Cuál es la tasa de interés efectivo anual?

$$r = 1.5 \times 12 = \mathbf{18\%}$$

PP = anual

PC = mensual



$$m = 12$$

$$i_{ef} = \left(1 + \frac{.18}{12}\right)^{12} - 1 \quad \Rightarrow \quad i_{ef} = \mathbf{19.56\%}$$

Relaciones de Equivalencia



- Para realizar los cálculos de equivalencia la tasa de interés se debe de ajustar para que quede el mismo periodo para:
 - Periodo de capitalización
 - Periodo de pago
- Casos:
 - $PP \geq PC$
 - $PP < PC$



- Si usted deposita en un fondo de ahorro \$4,000 hoy, \$9,000 dentro de cinco años y \$10,500 dentro de 12 años. Todo a una tasa de interés anual del 5% anual capitalizable trimestralmente, ¿Cuánto dinero tendrá en su cuenta 20 años después de iniciado el fondo de ahorro?

Ejemplo 4.2



- Jacki obtuvo una nueva tarjeta de crédito; con una tasa establecida de 18% anual y período de composición mensual. Para un saldo de \$1,000 al principio del año, calcule la tasa anual efectiva y el adeudo total al banco después de un año tomando en cuenta que no hace ningún pago durante el año.
- R: /

Ejemplo 4.3



- Joshua acaba de recibir un bono de \$10,000 y desea invertir el dinero para los 5 años siguientes.
- El vio un anuncio de un banco con tasas de interés de los certificados de depósito. El piensa invertir los \$10,000 en un CD a 5 años para preservar su capital. En forma alternativa, considera invertir todo en acciones para los dos años siguientes, en los que estima ganar una tasa efectiva anual de 10%. Luego de ese rendimiento, invertirá conservadoramente en un CD los tres años siguientes.
- a.) Determine el período de capitalización para los CD de 3 y 5 años, ya que esta información no se incluye en el sitio web. Obténgalo como sea posible al PRA redondeado a 2 decimales
- b.) Determine la cantidad total que tendrá después de 5 años para las dos opciones que analiza.

Cuentas Banco MBNA: Depósito mínimo de inversión \$10,000



| Términos (meses) | Tasa de interés actual (APR) | Porcentaje de rendimiento anual (APY) |
|------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| 6 a 9 | 1.74% | 1.75% |
| 9 a 12 | 1.89% | 1.90% |
| 12 a 18 | 2.38% | 2.40% |
| 18 a 24 | 2.72% | 2.75% |
| 24 a 30 | 2.86% | 2.90% |
| 30 a 36 | 3.20% | 3.25% |
| 36 a 48 | 3.40% | 3.45% |
| 48 a 60 | 3.83% | 3.90% |
| Mas de 60 | 4.36% | 4.45% |
| | | |

Ejemplo 4.4



- ... Un ingeniero evalúa tres propuestas de venta con las tasas de interés que aparecen a continuación. La compañía hará pagos semestrales exclusivamente. El ingeniero se encuentra confundido respecto de las tasas de interés efectivas (su valor anual y durante el período de pago de 6 meses).
- 1.) 9% anual, compuesto trimestralmente
- 2.) 3% trimestral, compuesto trimestralmente
- 3.) 8.8% anual, compuesto mensualmente

- a.) Determine la tasa efectiva de cada propuesta si se harán pagos semestrales
- b.) Cuáles son las tasas anuales efectivas
- c.) Qué propuesta incluye la tasa efectiva más baja.

Ejemplo 4.5



- Una compañía.com planea invertir dinero en un nuevo fondo de capital riesgoso, que actualmente reembolsa 18% anual con un período de composición diario. ¿Cuál es el valor de la tasa de interés efectiva a.) anual b.) semestral

PP \geq PC para pagos únicos (P/F y F/P)



- **Método 1:**
 - Determinar la tasa durante el periodo de composición PC
 - n se iguala al número de periodos de composición
- **Método 2:**
 - Se determina la tasa para el t de la tasa nominal

Ejemplo 4.6



- Un ingeniero que trabaja como consultor privado realizó depósitos en una cuenta especial, para cubrir gastos de viaje no reembolsados. Depositó \$1,000 hoy; \$3,000 en el año 4 y \$1,500 en el año 6. Calcule cuanto hay en la cuenta después de 10 años a una tasa de interés del 12% anual, compuesto semestralmente.

Series con $PP \geq PC$ (A, G, g)



- Cuando los flujos de efectivo implican una serie (por ejemplo A, G, g) y el periodo de pago es igual o mayor que el periodo de composición
- 1.) Se calcula la tasa de interés efectiva i por periodo de pago
- 2.) Se determina “n” como el número total de periodos de pago

Ejemplo 4.7



- Un ingeniero de control de calidad pagó \$500 semestrales en los pasados 7 años por el contrato de mantenimiento de software de una LAN. ¿Cuál es la cantidad equivalente después del último pago, si estos fondos se obtienen de un consorcio que ha estado reembolsando 20% de interés anuales con composición trimestral?

Ejemplo 4.8



- Suponga que usted planea adquirir un automóvil y obtiene un préstamo de \$12,500 al 9% anual, compuesto mensualmente. Los pagos deben efectuarse mensualmente durante 4 años. Determine el pago mensual.

PP < PC Pagos únicos y series*



- Políticas de Capitalización interperiódica:
 - Los flujos de efectivo no ganan intereses:
 - ✦ Los flujos negativos se trasladan al final del periodo (no se obtienen intereses)
 - ✦ Los flujos positivos se trasladan al principio de periodo (no se pagan intereses)

PP < PC Pagos únicos y series*



- Los flujos interperiódicos ganan un interés compuesto
 - ✦ Se obtiene la tasa efectiva utilizando un m menor que 1

Capitalización continua



- Se considera cuando ocurre una gran cantidad de flujos de efectivos diarios se pueden considerar con periodos de capitalización continua. Es decir m se aproxima al infinito

$$\frac{r}{m} = \frac{1}{h} \implies m = hr$$

$$\implies \lim_{h \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{h} \right)$$

$$^{hr} - 1 = \lim_{h \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{h} \right)^h \right]^r - 1$$

$$\underline{\underline{i = e^r - 1}}$$

Ejemplo 4.11



- a.) Calcule las tasas de interés anual y efectiva mensual, para una tasa de interés del 18% anual con composición continua.
- b.) Un inversionista necesita un rendimiento efectivo de, por lo menos, el 15%. ¿Cuál es la tasa nominal anual mínima aceptable para la composición continua?

Tasa de interés que varían con el tiempo

- Si la variación es grande, los valores equivalentes variarán considerablemente.
- Por ejemplo, para calcular P se debe de utilizar la i que aplique a cada año para cada valor de F .

Ejemplo 4.13



- CE, Inc. Arrienda equipo pesado para perforación de túneles. Las utilidades netas del equipo para cada uno de los últimos 4 años han ido disminuyendo, como lo indica la siguiente tabla. Ésta además, incluye las tasas de rendimiento anuales sobre el capital invertido. La tasa de rendimiento se ha ido incrementando. Determine el valor presente de P y la serie uniforme equivalente A de la serie de utilidades netas. Tome en cuenta la variación anual de las tasas de rendimiento.



| AÑO | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---------------|----------|----------|----------|----------|
| Utilidad neta | \$70,000 | \$70,000 | \$35,000 | \$25,000 |
| Tasa anual | 7% | 7% | 9% | 10% |

Recordatorio



- La diferencia fundamental entre el interés simple y el interés compuesto estriba en que en el primero el capital permanece constante, y en el segundo el capital cambia al final de cada período de tiempo.



Interés Simple

| Final del año | Préstamo | Interés | Adeudo | Suma Pagada |
|---------------|---------------|---------|---------|----------------|
| 0 | \$1000 | | | |
| 1 | | \$60 | \$1,060 | 0 |
| 2 | | \$60 | \$1,120 | 0 |
| 3 | | \$60 | \$1,180 | \$1,180 |

Interés Compuesto

| Final del año | Préstamo | Interés | Adeudo | Suma Pagada |
|---------------|------------|---------|------------|-------------|
| 0 | \$1,000.00 | | | |
| 1 | \$0.00 | \$60.00 | \$1,060.00 | \$0.00 |
| 2 | \$0.00 | \$63.60 | \$1,123.60 | \$0.00 |
| 3 | \$0.00 | \$67.42 | \$1,191.02 | \$1,191.02 |