

Bevezetés a számítógépi grafikába

Az Hermite-ív

Troll Ede Mátyás

Matematikai és Informatikai Intézet
Eszterházy Károly Egyetem

Eger, 2019



- 1 Hermite-ív
- 2 Görbék csatlakozása, folytonosság
- 3 Hermite-ívek csatlakoztatása

- 1 Hermite-ív
- 2 Görbék csatlakozása, folytonosság
- 3 Hermite-ívek csatlakoztatása

Hogyan definiáljuk a görbét?

Hogyan definiáljuk a görbét?

Ha adott a görbe két végpontja, azzal még nem definiáljuk egyértelműen.

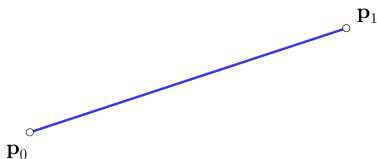
\circ
 \mathbf{p}_0

\circ \mathbf{p}_1

Hermite-ív

Hogyan definiáljuk a görbét?

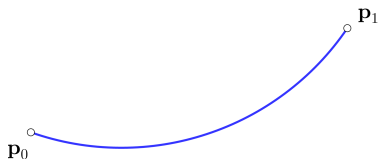
Ha adott a görbe két végpontja, azzal még nem definiáljuk egyértelműen.



Hermite-ív

Hogyan definiáljuk a görbét?

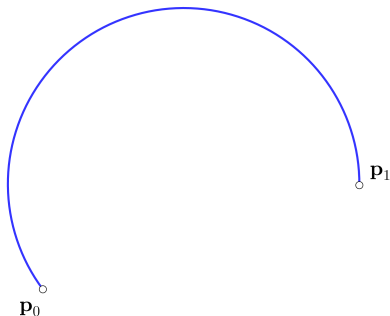
Ha adott a görbe két végpontja, azzal még nem definiáljuk egyértelműen.



Hermite-ív

Hogyan definiáljuk a görbét?

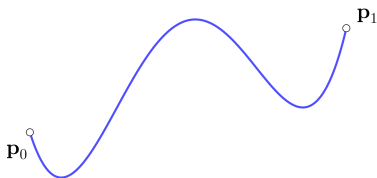
Ha adott a görbe két végpontja, azzal még nem definiáljuk egyértelműen.



Hermite-ív

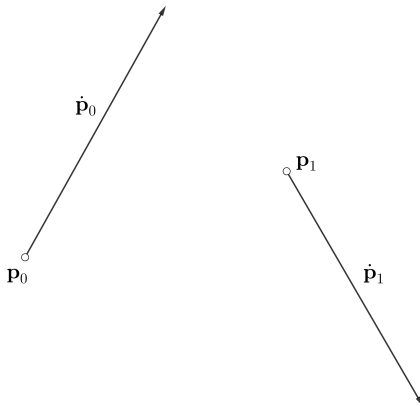
Hogyan definiáljuk a görbét?

Ha adott a görbe két végpontja, azzal még nem definiáljuk egyértelműen.



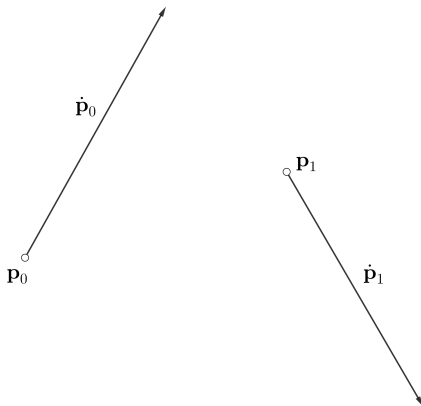
Hermite-ív

Legyenek adottak a \mathbf{p}_0 és \mathbf{p}_1 pontok, valamint a keresendő görbe végpontjaiban az érintővektorok $\dot{\mathbf{p}}_0$ és $\dot{\mathbf{p}}_1$.



Hermite-ív

Legyenek adottak a \mathbf{p}_0 és \mathbf{p}_1 pontok, valamint a keresendő görbe végpontjaiban az érintővektorok $\dot{\mathbf{p}}_0$ és $\dot{\mathbf{p}}_1$. Célunk leírni az $\mathbf{s}(t)$ görbét a kontroll alakzatok, és bizonyos bázisfüggvények lineáris kombinációjaként.



Mit várunk el a bázisfüggvényektől?

Mit várunk el a bázisfüggvényektől?

- Legyen gyorsan számolható

Mit várunk el a bázisfüggvényektől?

- Legyen gyorsan számolható
- Biztosítson kellő rugalmasságot a tervezéshez

Mit várunk el a bázisfüggvényektől?

- Legyen gyorsan számolható
- Biztosítson kellő rugalmasságot a tervezéshez
- A velük definiált görbe igazodjon a kontroll alakzatokhoz

Mit várunk el a bázisfüggvényektől?

- Legyen gyorsan számolható
- Biztosítson kellő rugalmasságot a tervezéshez
- A velük definiált görbe igazodjon a kontroll alakzatokhoz

Az Hermite-ív kifejlesztésekor a számítógépek számítási kapacitása erősen limitált volt, így a keresett függvények függvényterét az $\{1, t, t^2, t^3\}$ bázisban keresték.

Mit várunk el a bázisfüggvényektől?

- Legyen gyorsan számolható
- Biztosítson kellő rugalmasságot a tervezéshez
- A velük definiált görbe igazodjon a kontroll alakzatokhoz

Az Hermite-ív kifejlesztésekor a számítógépek számítási kapacitása erősen limitált volt, így a keresett függvények függvényterét az $\{1, t, t^2, t^3\}$ bázisban keresték. A későbbiekben természetesen készítettek olyan görbéket is, melyek már más, például az $\{1, t, \sin t, \cos t\}$, vagy az $\{1, t, t^2, \dots, t^k \sin t, \cos t\}$ bázisokból kerültek ki.

Adottak tehát a \mathbf{p}_0 és \mathbf{p}_1 pontok, valamint a keresendő göre végpontjaiban az érintővektorok $\dot{\mathbf{p}}_0$ és $\dot{\mathbf{p}}_1$. Keressük az $\mathbf{s}(t)$ görbét harmadfokú polinomiális alapfüggvények, valamint a végpontok és végérintők lineáris kombinációjaként, azaz

Adottak tehát a \mathbf{p}_0 és \mathbf{p}_1 pontok, valamint a keresendő göre végpontjaiban az érintővektorok $\dot{\mathbf{p}}_0$ és $\dot{\mathbf{p}}_1$. Keressük az $\mathbf{s}(t)$ görbét harmadfokú polinomiális alapfüggvények, valamint a végpontok és végérintők lineáris kombinációjaként, azaz

$$\mathbf{s}(t) = H_0(t) \mathbf{p}_0 + H_1(t) \mathbf{p}_1 + H_2(t) \dot{\mathbf{p}}_0 + H_3(t) \dot{\mathbf{p}}_1,$$

Adottak tehát a \mathbf{p}_0 és \mathbf{p}_1 pontok, valamint a keresendő göre végpontjaiban az érintővektorok $\dot{\mathbf{p}}_0$ és $\dot{\mathbf{p}}_1$. Keressük az $\mathbf{s}(t)$ görbét harmadfokú polinomiális alapfüggvények, valamint a végpontok és végérintők lineáris kombinációjaként, azaz

$$\mathbf{s}(t) = H_0(t) \mathbf{p}_0 + H_1(t) \mathbf{p}_1 + H_2(t) \dot{\mathbf{p}}_0 + H_3(t) \dot{\mathbf{p}}_1,$$

ahol a $H_i(t)$ függvények egyelőre ismeretlen harmadfokú polinomok.

Adottak tehát a \mathbf{p}_0 és \mathbf{p}_1 pontok, valamint a keresendő göre végpontjaiban az érintővektorok $\dot{\mathbf{p}}_0$ és $\dot{\mathbf{p}}_1$. Keressük az $\mathbf{s}(t)$ görbét harmadfokú polinomiális alapfüggvények, valamint a végpontok és végérintők lineáris kombinációjaként, azaz

$$\mathbf{s}(t) = H_0(t) \mathbf{p}_0 + H_1(t) \mathbf{p}_1 + H_2(t) \dot{\mathbf{p}}_0 + H_3(t) \dot{\mathbf{p}}_1,$$

ahol a $H_i(t)$ függvények egyelőre ismeretlen harmadfokú polinomok. Írjuk fel a problémát mátrixos alakban, azaz

$$\mathbf{s}(t) = AP = A \begin{pmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \dot{\mathbf{p}}_0 \\ \dot{\mathbf{p}}_1 \end{pmatrix} = (t^3 \ t^2 \ t \ 1) H \begin{pmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \dot{\mathbf{p}}_0 \\ \dot{\mathbf{p}}_1 \end{pmatrix}.$$

Keressük tehát a $H_i(t)$ függvények együtthatóiból álló H mátrixot.

Keressük tehát a $H_i(t)$ függvények együttthatóiból álló H mátrixot. Azt szeretnénk, hogy a görbeív a $[0, 1]$ intervallumon legyen értelmezve.

Keressük tehát a $H_i(t)$ függvények együtthatóiból álló H mátrixot. Azt szeretnénk, hogy a görbeív a $[0, 1]$ intervallumon legyen értelmezve. Ez alapján felírható az alábbi 4 egyenletből álló egyenletrendszer

$$\mathbf{s}(0) = \mathbf{p}_0$$

$$\mathbf{s}(1) = \mathbf{p}_1$$

$$\dot{\mathbf{s}}(0) = \dot{\mathbf{p}}_0$$

$$\dot{\mathbf{s}}(1) = \dot{\mathbf{p}}_1$$

Szorozzuk meg a paraméterek vektorát a H mátrixszal:

$$(t^3 \ t^2 \ t \ 1) H = (t^3 \ t^2 \ t \ 1) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Szorozzuk meg a paraméterek vektorát a H mátrixszal:

$$(t^3 \ t^2 \ t \ 1) H = (t^3 \ t^2 \ t \ 1) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A szorzás eredményeképpen megkapjuk a $H_i(t)$ függvényeket:

$$H_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1 = (t-1)^2(2t+1)$$

$$H_1(t) = -2t^3 + 3t^2 = t^2(3-2t)$$

$$H_2(t) = t^3 - 2t^2 + t = (t-1)^2 t$$

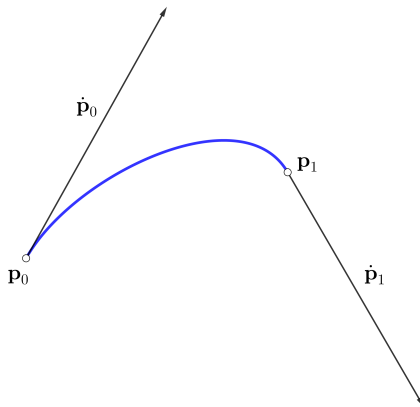
$$H_3(t) = t^3 - t^2 = (t-1) t^2$$

A fentiek alapján a keresett görbe:

$$\mathbf{s}(t) = H_0(t) \mathbf{p}_0 + H_1(t) \mathbf{p}_1 + H_2(t) \dot{\mathbf{p}}_0 + H_3(t) \dot{\mathbf{p}}_1$$

Hermite-ív

A $H_i(t)$ bázisfüggvényekkel definiált Hermite-ív.



Mátrixos alakban felírt görbék megjelenítése

A számítógépes megjelenítés során a mátrixos felírás sok esetben lehet előnyös, hiszen a mátrixok szorzásának asszociativitása miatt a bázisfüggvények együtthatóit előre összesorozhatjuk a kontroll alakzatok vektorával, így utólag már csak ezt kell megszoroznunk a t hatványait tartalmazó vektorral.

- 1 Hermite-ív
- 2 Görbék csatlakozása, folytonosság
- 3 Hermite-ívek csatlakoztatása

Mivel 3-adfokú görbét definiáltunk a kontroll alakzatokkal, így azok módosítása bármennyire is nagy szabadsági fokot ad a tervezésben, hullámot már nem tudunk megadni egyetlen Hermite-ívvel.

Mivel 3-adfokú görbét definiáltunk a kontroll alakzatokkal, így azok módosítása bármennyire is nagy szabadsági fokot ad a tervezésben, hullámot már nem tudunk megadni egyetlen Hermite-ívvel. Két Hermite-ív csatlakoztatását úgy oldhatjuk meg, ha bizonyos mértékű folytonosságot várunk el a görbék csatlakozási pontjában.

Csatlakozó görbék folytonossága

Legyenek adottak az $\mathbf{s}(t)$ és $\mathbf{r}(u)$ görbék, melyek a

$$\mathbf{p} = \mathbf{s}(t_0) = \mathbf{r}(u_0)$$

pontban csatlakoznak.

Csatlakozó görbék folytonossága

Legyenek adottak az $\mathbf{s}(t)$ és $\mathbf{r}(u)$ görbék, melyek a

$$\mathbf{p} = \mathbf{s}(t_0) = \mathbf{r}(u_0)$$

pontban csatlakoznak. A hagyományos (analízisbeli) **n-edrendű folytonosság** alatt azt értjük, hogy a két görbe deriváltjai az adott pontban n-edrendben megegyeznek, azaz

Csatlakozó görbék folytonossága

Legyenek adottak az $\mathbf{s}(t)$ és $\mathbf{r}(u)$ görbék, melyek a

$$\mathbf{p} = \mathbf{s}(t_0) = \mathbf{r}(u_0)$$

pontban csatlakoznak. A hagyományos (analízisbeli) **n-edrendű folytonosság** alatt azt értjük, hogy a két görbe deriváltjai az adott pontban n-edrendben megegyeznek, azaz

$$\dot{\mathbf{s}}(t_0) = \dot{\mathbf{r}}(u_0)$$

$$\ddot{\mathbf{s}}(t_0) = \ddot{\mathbf{r}}(u_0)$$

...

$$\mathbf{s}^{(n)}(t_0) = \mathbf{r}^{(n)}(u_0)$$

és ezt C^n -nel jelöljük.

Geometriailag a C^1 folytonosság azt jelenti, hogy a \mathbf{p} -ben találkozó görbéknek ebben a pontban megegyezik az érintővektora.

Geometriailag a C^1 folytonosság azt jelenti, hogy a \mathbf{p} -ben találkozó görbéknek ebben a pontban megegyezik az érintővektora. Ettől gyengébb feltétel az lenne, ha csupán az érintővektorok iránya egyezne meg, azaz

$$\mathbf{s}(t_0) = \lambda \mathbf{r}(u_0), \quad \lambda > 0.$$

Geometriailag a C^1 folyotnosság azt jelenti, hogy a \mathbf{p} -ben találkozó görbéknek ebben a pontban megegyezik az érintővektora. Ettől gyengébb feltétel az lenne, ha csupán az érintővektorok iránya egyezne meg, azaz

$$\mathbf{s}(t_0) = \lambda \mathbf{r}(u_0), \quad \lambda > 0.$$

Ez utóbbi kritérium előnye a C^1 folyotnossággal szemben, hogy tisztán geometriai feltétellel írható le.

Geometriailag a C^1 folyotnosság azt jelenti, hogy a \mathbf{p} -ben találkozó görbéknek ebben a pontban megegyezik az érintővektora. Ettől gyengébb feltétel az lenne, ha csupán az érintővektorok iránya egyezne meg, azaz

$$\mathbf{s}(t_0) = \lambda \mathbf{r}(u_0), \quad \lambda > 0.$$

Ez utóbbi kritérium előnye a C^1 folyotnossággal szemben, hogy tisztán geometriai feltétellel írható le. Ez utóbbi feltételnek megfelelő görbéknél a csatlakozást **geometriailag elsőrendben folytonosnak** nevezzük, és GC^1 -gyel jelöljük.

Csatlakozó görbék folytonossága

A geometriailag n -edrendben csatlakozó görbéiveket a klasszikus folytonossághoz hasonlóan a

$$\dot{\mathbf{s}}(t_0) = \lambda_1 \dot{\mathbf{r}}(u_0)$$

$$\ddot{\mathbf{s}}(t_0) = \lambda_2 \ddot{\mathbf{r}}(u_0)$$

...

$$\mathbf{s}^{(n)}(t_0) = \lambda_n \mathbf{r}^{(n)}(u_0)$$

egyenlőségekkel adjuk meg, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$.

Csatlakozó görbék folytonossága

A geometriailag n -edrendben csatlakozó görbéiveket a klasszikus folytonossághoz hasonlóan a

$$\dot{\mathbf{s}}(t_0) = \lambda_1 \dot{\mathbf{r}}(u_0)$$

$$\ddot{\mathbf{s}}(t_0) = \lambda_2 \ddot{\mathbf{r}}(u_0)$$

...

$$\mathbf{s}^{(n)}(t_0) = \lambda_n \mathbf{r}^{(n)}(u_0)$$

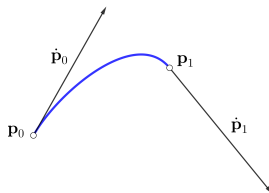
egyenlőségekkel adjuk meg, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$. Mivel a görbék **görbületét** (mennyire görbe a görbe, azaz mennyire tér el az egyenestől) a második deriválttal, a **torzióját** (mennyire tér el a síktól) pedig a harmadik deriválttal írjuk le, így általában ezeket a folytonosságokat szoktuk megkövetelni.

Praktikusan síkban a másod-, térben pedig a harmadrendben való geometriai folytonosság megkövetelése azt jelenti, hogy az emberi szem nem fogja tudni megmondani, hol csatlakoznak a görbeívek.

- 1 Hermite-ív
- 2 Görbék csatlakozása, folytonosság
- 3 Hermite-ívek csatlakoztatása

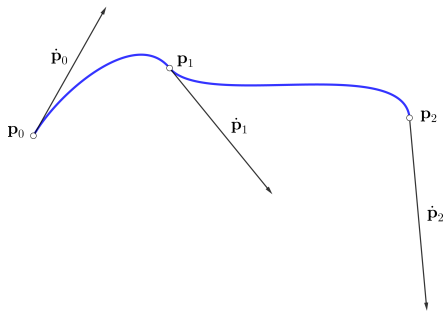
Hermite-ívek csatlakoztatása

Hermite-íveket legegyszerűbben úgy tudunk csatlakoztatni, hogy ha adott az $\mathbf{s}_1(t)$ Hermite-ív a $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ pontokkal és a végpontokkal $\dot{\mathbf{p}}_0, \dot{\mathbf{p}}_1$ végérintőkkel.



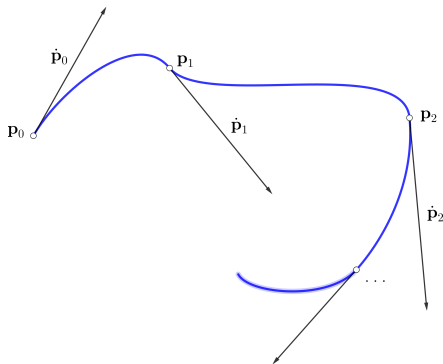
Hermite-ívek csatlakoztatása

Hermite-íveket legegyszerűbben úgy tudunk csatlakoztatni, hogy ha adott az $\mathbf{s}_1(t)$ Hermite-ív a $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ pontokkal és a végpontokkal $\dot{\mathbf{p}}_0, \dot{\mathbf{p}}_1$ végérintőkkel. A hozzá csatlakozó $\mathbf{s}_2(t)$ ívet úgy definiáljuk, hogy annak kezdőpontja \mathbf{p}_1 , kezdőérintője $\dot{\mathbf{p}}_1$ legyen.



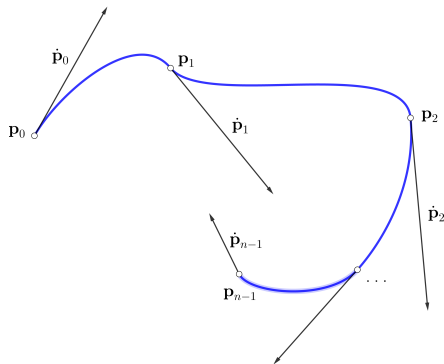
Hermite-ívek csatlakoztatása

Hermite-íveket legegyszerűbben úgy tudunk csatlakoztatni, hogy ha adott az $\mathbf{s}_1(t)$ Hermite-ív a $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ pontokkal és a végpontokkal $\dot{\mathbf{p}}_0, \dot{\mathbf{p}}_1$ végérintőkkel. A hozzá csatlakozó $\mathbf{s}_2(t)$ ívet úgy definiáljuk, hogy annak kezdőpontja \mathbf{p}_1 , kezdőérintője $\dot{\mathbf{p}}_1$ legyen. És így tovább...



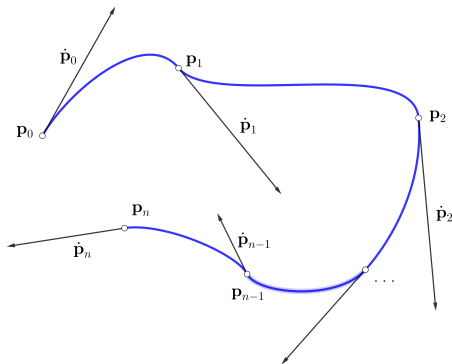
Hermite-ívek csatlakoztatása

Hermite-íveket legegyszerűbben úgy tudunk csatlakoztatni, hogy ha adott az $\mathbf{s}_1(t)$ Hermite-ív a $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ pontokkal és a végpontokkal $\dot{\mathbf{p}}_0, \dot{\mathbf{p}}_1$ végérintőkkel. A hozzá csatlakozó $\mathbf{s}_2(t)$ ívet úgy definiáljuk, hogy annak kezdőpontja \mathbf{p}_1 , kezdőérintője $\dot{\mathbf{p}}_1$ legyen. És így tovább...



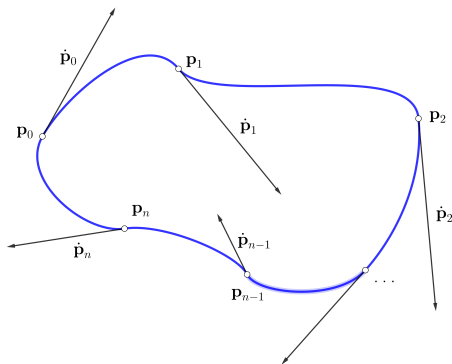
Hermite-ívek csatlakoztatása

Hermite-íveket legegyszerűbben úgy tudunk csatlakoztatni, hogy ha adott az $\mathbf{s}_1(t)$ Hermite-ív a $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ pontokkal és a végpontokkal $\dot{\mathbf{p}}_0, \dot{\mathbf{p}}_1$ végérintőkkel. A hozzá csatlakozó $\mathbf{s}_2(t)$ ívet úgy definiáljuk, hogy annak kezdőpontja \mathbf{p}_1 , kezdőérintője $\dot{\mathbf{p}}_1$ legyen. És így tovább...



Hermite-ívek csatlakoztatása, zárt görbe

A görbeívek csatlakozásakor úgy tudunk zárt görbét készíteni, hogy utolsó ívként megrajzoljuk azt a görbét, melynek kezdőpontja és kezdőérintője $\mathbf{p}_n, \dot{\mathbf{p}}_n$, végpontja és végérintője pedig $\mathbf{p}_0, \dot{\mathbf{p}}_0$.



Köszönöm a figyelmet!