ESZTERHÁZY KÁROLY KATOLIKUS EGYETEM
Matematikai és Informatikai Intézet

Tómács Tibor

Matematikai statisztika gyakorlatok összefoglaló

Kivonat az alábbi jegyzetből:

https://tomacstibor.uni-eszterhazy.hu/tananyagok/Matematikai_statisztika_gyakorlatok.pdf

Eger, 2022

Tartalomjegyzék

Jelölések

Általános

$\mathbb{N}$	a pozitív egész számok halmaza
$\mathbb{R}$	a valós számok halmaza
$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}$-nek önmagával vett n-szeres Descartes-szorzata
$\mathbb{R}_+$	a pozitív valós számok halmaza
(a, b)	rendezett elempár vagy nyílt intervallum
$\simeq$	közelítőleg egyenlő
$[x]$	az x valós szám egész része
f^{-1}	az f függvény inverze
$A^\top$	az A mátrix transzponáltja
A^{-1}	az A mátrix inverze

Valószínűségszámítás

$\mathrm{P}(A)$	az A esemény valószínűsége
$\mathrm{E}\,\xi$	ξ várható értéke
$\mathrm{D}\,\xi,\ \mathrm{D}^2\,\xi$	ξ szórása illetve szórásnégyzete
$\mathrm{cov}(\xi, \eta)$	kovariancia
$\mathrm{corr}(\xi, \eta)$	korrelációs együttható
φ	a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye
Φ	a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye
Γ	Gamma-függvény
I_A	az A esemény indikátorváltozója
$\mathrm{Bin}(r; p)$	az r-edrendű p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változók halmaza
$\mathrm{Exp}(\lambda)$	a λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók halmaza

$\mathrm{Norm}(m;\sigma)$	az m várható értékű és σ szórású normális eloszlású valószínűségi változók halmaza
$\mathrm{Gamma}(r;\lambda)$	az r-edrendű λ paraméterű gamma-eloszlású valószínűségi változók halmaza
$\mathrm{Khi}(s)$	az s szabadsági fokú khi-négyzet eloszlású valószínűségi változók halmaza
$\mathrm{T}(s)$	az s szabadsági fokú t-eloszlású valószínűségi változók halmaza
$\mathrm{F}(s_1;s_2)$	az s_1 és s_2 szabadsági fokú F-eloszlású valószínűségi változók halmaza
$F[\mathrm{V}]$	Ha ξ valószínűségi változó és V a ξ-vel azonos eloszlású valószínűségi változók halmaza, akkor $F[\mathrm{V}]$ a V-beli valószínűségi változók közös eloszlásfüggvényét jelenti. Például $\Phi = F[\mathrm{Norm}(0;1)]$.

Matematikai statisztika

F_n^*	tapasztalati eloszlásfüggvény
$\overline{\xi}$	a ξ-re vonatkozó minta átlaga (mintaátlag)
$S_n,\ S_n^2$	tapasztalati szórás illetve szórásnégyzet
$S_{\xi,n},\ S_{\xi,n}^2$	ξ-re vonatkozó tapasztalati szórás illetve szórásnégyzet
$S_n^*,\ S_n^{*2}$	korrigált tapasztalati szórás illetve szórásnégyzet
$S_{\xi,n}^*,\ S_{\xi,n}^{*2}$	ξ-re vonatkozó korrigált tapasztalati szórás illetve szórásnégyzet
$\xi_1^*,\ldots,\xi_n^*$	rendezett minta
$\mathrm{Cov}_n(\xi,\eta)$	tapasztalati kovariancia
$\mathrm{Corr}_n(\xi,\eta)$	tapasztalati korrelációs együttható
$\widehat{\vartheta}$	a ϑ paraméter becslése
$H_0,\ H_1$	nullhipotézis, ellenhipotézis

1. fejezet

Összefoglaló

1.1. Eloszlások generálása

1.1.1. Egyenletes eloszlásból származtatott eloszlások

Itt az $\eta, \eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots$ független, a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változókat jelent.

- **Diszkrét egyenletes eloszlás**
  Ha $m \in \mathbb{N}$, akkor $[m\eta]+1$ diszkrét egyenletes eloszlású az $\{1,\ldots,m\}$ halmazon.

- **Karakterisztikus eloszlás**
  Ha $0 < p < 1$, akkor $\mathrm{I}_{\eta<p}$ karakterisztikus eloszlású p paraméterrel.

- **Binomiális eloszlás**
  Ha $r \in \mathbb{N}$ és $0 < p < 1$, akkor $\sum\limits_{i=1}^{r} \mathrm{I}_{\eta_i<p}$ r-edrendű p paraméterű binomiális eloszlású.

- **Hipergeometrikus eloszlás**
  Legyen $r, M, N \in \mathbb{N},\ M < N$, továbbá $r \le \min\{M, N-M\}$. Ekkor

  $$\xi_0 \equiv 0, \quad \xi_i := \begin{cases} \xi_{i-1}+1, & \text{ha } \eta_i < \frac{M-\xi_{i-1}}{N-i+1}, \\ \xi_{i-1}, & \text{különben,} \end{cases} \qquad (i = 1,\ldots,r)$$

  jelöléssel ξ_r hipergeometrikus eloszlású N, M, r paraméterekkel.

- **Poisson-eloszlás**
  Ha $\lambda > 0$, akkor $\min\left\{ s \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \eta_0\eta_1\cdots\eta_s < e^{-\lambda} \right\}$ Poisson-eloszlású λ paraméterrel.

- **Geometriai eloszlás**
  Ha $0 < p < 1$, akkor $\min\{s \in \mathbb{N} : \eta_s < p\}$ geometriai eloszlású p paraméterrel.

- **Folytonos egyenletes eloszlás**
  Ha $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$, akkor $a + (b - a)\eta$ az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlású.

- **Exponenciális eloszlás**
  Ha $\lambda > 0$, akkor $-\frac{\ln \eta}{\lambda}$ exponenciális eloszlású λ paraméterrel.

- **Gamma-eloszlás**
  Ha $\lambda > 0$ és $r \in \mathbb{N}$, akkor $-\frac{1}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^{r} \ln \eta_i$ r-edrendű λ paraméterű gamma-eloszlású. Tetszőleges $r, \lambda > 0$ esetén $F^{-1}(\eta)$ r-edrendű λ paraméterű gamma-eloszlású, ahol $F = F[\text{Gamma}(r; \lambda)]$.

- **Normális eloszlás**
  Ha $m \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$, akkor $m + \sigma\sqrt{-2\ln \eta_1}\cos(2\pi\eta_2)$ illetve $F^{-1}(\eta)$ normális eloszlású m várható értékkel és σ szórással, ahol $F = F[\text{Norm}(m; \sigma)]$. (Standard normális eloszlás esetén $m = 0$, $\sigma = 1$ és $F = \Phi$.)

1.1.2. Normális eloszlásból származtatott eloszlások

Itt az η, η_i $(i \in \mathbb{N})$ független standard normális eloszlású valószínűségi változókat, míg ξ a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változót jelent.

- **Khi-négyzet eloszlás**
  Ha $s \in \mathbb{N}$, akkor $\sum\limits_{i=1}^{s} \eta_i^2$ illetve $F^{-1}(\xi)$ khi-négyzet eloszlású s szabadsági fokkal, ahol $F = F[\text{Khi}(s)]$.

- **t-eloszlás**
  Ha $s \in \mathbb{N}$, akkor $\eta\sqrt{s/\sum\limits_{i=1}^{s} \eta_i^2}$ illetve $F^{-1}(\xi)$ t-eloszlású s szabadsági fokkal, ahol $F = F[\text{T}(s)]$.

- **Cauchy-eloszlás**
  Ha $\mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$, akkor $\mu + \sigma\frac{\eta_1}{\eta_2}$ illetve $\mu + \sigma \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}(2\xi - 1)$ Cauchy-eloszlású μ és σ paraméterekkel. (Standard Cauchy-eloszlás esetén $\mu = 0$ és $\sigma = 1$.)

- **F-eloszlás**
  Ha $s_1, s_2 \in \mathbb{N}$, akkor $\frac{s_2}{s_1}\sum\limits_{i=1}^{s_1} \eta_i^2 / \sum\limits_{i=s_1+1}^{s_1+s_2} \eta_i^2$ illetve $F^{-1}(\xi)$ F-eloszlású s_1 és s_2 szabadsági fokkal, ahol $F = F[\text{F}(s_1; s_2)]$.

1.2. Grafikus illeszkedésvizsgálat

Legyen $x_1 < x_2 < \cdots < x_r$, továbbá tegyük fel, hogy a mintarealizáció legkisebb eleme nagyobb x_1-nél, a mintarealizáció legnagyobb eleme pedig kisebb x_r-nél.

- **Exponencialitásvizsgálat**
  Ha a vizsgált valószínűségi változó exponenciális eloszlású λ paraméterrel, akkor $y_i := \ln\Big(1-F_n^*(x_i)\Big)$ jelöléssel az $(x_1, y_1), \ldots, (x_r, y_r)$ koordinátájú pontok körülbelül egy olyan egyenesre esnek, melynek $-\lambda$ a meredeksége és átmegy az origón.

- **Normalitásvizsgálat**
  Ha a vizsgált valószínűségi változó normális eloszlású m várható értékkel és σ szórással, akkor $y_i := \Phi^{-1}\Big(F_n^*(x_i)\Big)$ jelöléssel az $(x_1, y_1), \ldots, (x_r, y_r)$ koordinátájú pontok körülbelül egy olyan egyenesre esnek, melynek $\frac{1}{\sigma}$ a meredeksége és $-\frac{m}{\sigma}$ értéknél metszi a függőleges tengelyt.

1.3. Intervallumbecslések

Legyen a ξ valószínűségi változóra vonatkozó minta $\xi_1, \ldots, \xi_n$, és $1-\alpha$ a becsülendő paraméterre vonatkozó $[\tau_1, \tau_2]$ konfidenciaintervallum biztonsági szintje.

- $\xi \in \mathrm{Norm}(m;\sigma)$
  m az ismeretlen becsülendő paraméter, σ ismert
  $\tau_1 = \overline{\xi} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \quad \tau_2 = \overline{\xi} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$

- $\xi \in \mathrm{Norm}(m;\sigma)$
  m ismert, σ az ismeretlen becsülendő paraméter
  $F = F[\mathrm{Khi}(n)]$
  $\tau_1 = \sqrt{\frac{1}{F^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - m)^2} \quad \tau_2 = \sqrt{\frac{1}{F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - m)^2}$

- $\xi \in \mathrm{Norm}(m;\sigma)$
  m ismeretlen, σ az ismeretlen becsülendő paraméter
  $n \geq 2, \ F = F[\mathrm{Khi}(n-1)]$
  $\tau_1 = S_n\sqrt{\frac{n}{F^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}} \quad \tau_2 = S_n\sqrt{\frac{n}{F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}$

- $\xi \in \mathrm{Norm}(m;\sigma)$
  m az ismeretlen becsülendő paraméter, σ ismeretlen

$n \geq 2,\ F = F[\mathrm{T}(n-1)]$
$\tau_1 = \overline{\xi} - \frac{S_n^*}{\sqrt{n}} F^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \quad \tau_2 = \overline{\xi} + \frac{S_n^*}{\sqrt{n}} F^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$

- $\xi \in \mathrm{Exp}(\lambda)$
  λ az ismeretlen becsülendő paraméter
  $F = F[\mathrm{Gamma}(n;1)]$
  $\tau_1 = (n\overline{\xi})^{-1} F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \tau_2 = (n\overline{\xi})^{-1} F^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$

- $\xi \in \mathrm{Bin}(1;p)$
  p az ismeretlen becsülendő paraméter
  $\tau_1 = \frac{1}{n} \max\left\{z \in \mathbb{N} : \sum\limits_{i=0}^{z} \binom{n}{i} \overline{\xi}^i (1-\overline{\xi})^{n-i} < \frac{\alpha}{2}\right\}$
  $\tau_2 = \frac{1}{n} \min\left\{z \in \mathbb{N} : \sum\limits_{i=0}^{z} \binom{n}{i} \overline{\xi}^i (1-\overline{\xi})^{n-i} \geq 1 - \frac{\alpha}{2}\right\}$
  Nagy n-re:
  $c = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$
  $$\tau_1 = \frac{\overline{\xi} + \frac{c^2}{2n} - \frac{c}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{\xi}(1-\overline{\xi}) + \frac{c^2}{4n}}}{1 + \frac{c^2}{n}} \simeq \overline{\xi} - \frac{c}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{\xi}(1-\overline{\xi})}$$
  $$\tau_2 = \frac{\overline{\xi} + \frac{c^2}{2n} + \frac{c}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{\xi}(1-\overline{\xi}) + \frac{c^2}{4n}}}{1 + \frac{c^2}{n}} \simeq \overline{\xi} + \frac{c}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{\xi}(1-\overline{\xi})}$$

- ξ az $[a,b]$ intervallumon egyenletes eloszlású
  a ismert, b az ismeretlen becsülendő paraméter
  $F = F[\mathrm{Gamma}(n;1)],\ c_1 = F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right),\ c_2 = F^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$
  $\tau_1 = a + \left(e^{c_1} \prod\limits_{i=1}^{n} (\xi_i - a)\right)^{\frac{1}{n}}$
  $\tau_2 = a + \left(e^{c_2} \prod\limits_{i=1}^{n} (\xi_i - a)\right)^{\frac{1}{n}}$

1.4. Paraméteres hipotézisvizsgálatok

A következőkben $1 - \alpha$ a próba szintjét jelenti.

- **Egymintás u-próba**
  $\xi \in \mathrm{Norm}(m;\sigma)$, m ismeretlen, σ ismert, a ξ-re vonatkozó minta n elemű, $m_0 \in \mathbb{R}$.

$H_0\colon m = m_0$	kritikus tartomány
$H_1\colon m \neq m_0$	$2 - 2\Phi(\lvert u\rvert) < \alpha$
$H_1\colon m < m_0$	$1 - \Phi(\lvert u\rvert) < \alpha$ és $u < 0$
$H_1\colon m > m_0$	$1 - \Phi(\lvert u\rvert) < \alpha$ és $u > 0$

ahol

$$u = \frac{\overline{\xi} - m_0}{\sigma}\sqrt{n}.$$

- **Kétmintás u-próba**

  $\xi \in \mathrm{Norm}(m_1;\sigma_1)$, $\eta \in \mathrm{Norm}(m_2;\sigma_2)$ függetlenek, m_1, m_2 ismeretlenek, σ_1, σ_2 ismertek, a ξ-re vonatkozó minta n_1 elemű, az η-ra vonatkozó minta n_2 elemű.

$H_0\colon m_1 = m_2$	kritikus tartomány
$H_1\colon m_1 \neq m_2$	$2 - 2\Phi(\lvert u\rvert) < \alpha$
$H_1\colon m_1 < m_2$	$1 - \Phi(\lvert u\rvert) < \alpha$ és $u < 0$
$H_1\colon m_1 > m_2$	$1 - \Phi(\lvert u\rvert) < \alpha$ és $u > 0$

ahol

$$u = \frac{\overline{\xi} - \overline{\eta}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}.$$

- **Egymintás t-próba**

  $\xi \in \mathrm{Norm}(m;\sigma)$, a paraméterek ismeretlenek, a ξ-re vonatkozó minta n elemű, $m_0 \in \mathbb{R}$.

$H_0\colon m = m_0$	kritikus tartomány
$H_1\colon m \neq m_0$	$2 - 2F(\lvert t\rvert) < \alpha$
$H_1\colon m < m_0$	$1 - F(\lvert t\rvert) < \alpha$ és $t < 0$
$H_1\colon m > m_0$	$1 - F(\lvert t\rvert) < \alpha$ és $t > 0$

ahol

$$t = \frac{\overline{\xi} - m_0}{S_n^*}\sqrt{n} \quad \text{és} \quad F = F[\mathrm{T}(n-1)].$$

- **Kétmintás t-próba**

  $\xi \in \mathrm{Norm}(m_1;\sigma_1)$, $\eta \in \mathrm{Norm}(m_2;\sigma_2)$ függetlenek, $\sigma_1 = \sigma_2$, a paraméterek ismeretlenek, a ξ-re vonatkozó minta n_1 elemű, az η-ra vonatkozó minta n_2 elemű.

$H_0\colon m_1 = m_2$	kritikus tartomány
$H_1\colon m_1 \neq m_2$	$2 - 2F(\lvert t\rvert) < \alpha$
$H_1\colon m_1 < m_2$	$1 - F(\lvert t\rvert) < \alpha$ és $t < 0$
$H_1\colon m_1 > m_2$	$1 - F(\lvert t\rvert) < \alpha$ és $t > 0$

ahol

$$t = \frac{\overline{\xi} - \overline{\eta}}{\sqrt{n_1 S_{\xi,n_1}^2 + n_2 S_{\eta,n_2}^2}}\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \quad \text{és} \quad F = F[\mathrm{T}(n_1 + n_2 - 2)].$$

- **Scheffé-módszer**

  $\xi \in \mathrm{Norm}(m_1; \sigma_1)$, $\eta \in \mathrm{Norm}(m_2; \sigma_2)$ függetlenek, a paraméterek ismeretlenek, a ξ-re vonatkozó minta n_1 elemű, az η-ra vonatkozó minta n_2 elemű, $n_1 \leq n_2$.

$H_0\colon m_1 = m_2$	kritikus tartomány
$H_1\colon m_1 \neq m_2$	$2 - 2F(\lvert t\rvert) < \alpha$
$H_1\colon m_1 < m_2$	$1 - F(\lvert t\rvert) < \alpha$ és $t < 0$
$H_1\colon m_1 > m_2$	$1 - F(\lvert t\rvert) < \alpha$ és $t > 0$

  ahol
  $$\zeta_i := \xi_i - \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\eta_i + \frac{1}{\sqrt{n_1 n_2}} \sum_{k=1}^{n_1} \eta_k - \overline{\eta} \quad (i = 1, \ldots, n_1)$$
  jelöléssel
  $$t = \frac{\overline{\zeta}}{S^*_{\zeta,n_1}} \sqrt{n_1} \quad \text{és} \quad F = F[\mathrm{T}(n_1 - 1)].$$
  Speciálisan $n_1 = n_2$ esetén $\zeta_i = \xi_i - \eta_i$ teljesül. A módszert ekkor *párosított t-próbának* is nevezik. Ebben az esetben a módszer akkor is alkalmazható, ha a minták nem függetlenek, de csak akkor, ha $\xi - \eta$ normális eloszlású.

- **Welch-próba**

  $\xi \in \mathrm{Norm}(m_1; \sigma_1)$, $\eta \in \mathrm{Norm}(m_2; \sigma_2)$ függetlenek, a paraméterek ismeretlenek, a ξ-re vonatkozó minta n_1 elemű, az η-ra vonatkozó minta n_2 elemű.

$H_0\colon m_1 = m_2$	kritikus tartomány
$H_1\colon m_1 \neq m_2$	$2 - 2F(\lvert t\rvert) < \alpha$
$H_1\colon m_1 < m_2$	$1 - F(\lvert t\rvert) < \alpha$ és $t < 0$
$H_1\colon m_1 > m_2$	$1 - F(\lvert t\rvert) < \alpha$ és $t > 0$

  ahol
  $$t := \frac{\overline{\xi} - \overline{\eta}}{\sqrt{\dfrac{{S^*_{\xi,n_1}}^2}{n_1} + \dfrac{{S^*_{\eta,n_2}}^2}{n_2}}} \quad \text{és} \quad F \simeq F[\mathrm{T}(s)].$$
  Az s szabadsági fok a c értékének kerekítése a legközelebbi egészre, ahol
  $$a := \frac{{S^*_{\xi,n_1}}^2}{n_1}, \quad b := \frac{{S^*_{\eta,n_2}}^2}{n_2}, \quad c := \frac{(a+b)^2}{\dfrac{a^2}{n_1 - 1} + \dfrac{b^2}{n_2 - 1}}.$$

- **F-próba**

  $\xi \in \mathrm{Norm}(m_1; \sigma_1)$, $\eta \in \mathrm{Norm}(m_2; \sigma_2)$ függetlenek, a paraméterek ismeretlenek, a ξ-re vonatkozó minta n_1 elemű, az η-ra vonatkozó minta n_2 elemű.

$H_0\colon \sigma_1 = \sigma_2$	kritikus tartomány
$H_1\colon \sigma_1 \neq \sigma_2$	$2\min\{F(\mathsf{F}), 1 - F(\mathsf{F})\} < \alpha$
$H_1\colon \sigma_1 < \sigma_2$	$\min\{F(\mathsf{F}), 1 - F(\mathsf{F})\} < \alpha$ és $\mathsf{F} < 1$
$H_1\colon \sigma_1 > \sigma_2$	$\min\{F(\mathsf{F}), 1 - F(\mathsf{F})\} < \alpha$ és $\mathsf{F} > 1$

ahol

$$\mathsf{F} = \frac{S^{*2}_{\xi,n_1}}{S^{*2}_{\eta,n_2}} \quad \text{és} \quad F := F[\mathrm{F}(n_1 - 1; n_2 - 1)].$$

- **Khi-négyzet próba normális eloszlás szórására**
  $\xi \in \mathrm{Norm}(m;\sigma)$, a paraméterek ismeretlenek, a ξ-re vonatkozó minta n elemű, $\sigma_0 > 0$.

$H_0\colon \sigma = \sigma_0$	kritikus tartomány
$H_1\colon \sigma \neq \sigma_0$	$2\min\{F(\chi^2), 1 - F(\chi^2)\} < \alpha$
$H_1\colon \sigma < \sigma_0$	$\min\{F(\chi^2), 1 - F(\chi^2)\} < \alpha$ és $\chi^2 < n - 1$
$H_1\colon \sigma > \sigma_0$	$\min\{F(\chi^2), 1 - F(\chi^2)\} < \alpha$ és $\chi^2 > n - 1$

ahol

$$\chi^2 = \frac{S^{*2}_n}{\sigma_0^2}(n-1) \quad \text{és} \quad F = F[\mathrm{Khi}(n-1)].$$

- **Statisztikai próba az exponenciális eloszlás paraméterére**
  $\xi \in \mathrm{Exp}(\lambda)$, ahol λ ismeretlen, a ξ-re vonatkozó minta n elemű, $\lambda_0 > 0$.

$H_0\colon \lambda = \lambda_0$	kritikus tartomány
$H_1\colon \lambda \neq \lambda_0$	$2\min\{F(\gamma), 1 - F(\gamma)\} < \alpha$
$H_1\colon \lambda < \lambda_0$	$\min\{F(\gamma), 1 - F(\gamma)\} < \alpha$ és $\gamma > n$
$H_1\colon \lambda > \lambda_0$	$\min\{F(\gamma), 1 - F(\gamma)\} < \alpha$ és $\gamma < n$

ahol

$$\gamma = \lambda_0 n\overline{\xi} \quad \text{és} \quad F = F[\mathrm{Gamma}(n;1)].$$

- **Statisztikai próba valószínűségre**
  $\xi \in \mathrm{Bin}(1;p)$, p ismeretlen, a ξ-re vonatkozó minta n elemű, $0 < p_0 < 1$.

$H_0\colon p = p_0$	kritikus tartomány
$H_1\colon p \neq p_0$	$n\overline{\xi} < F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ vagy $n\overline{\xi} > F^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$
$H_1\colon p < p_0$	$n\overline{\xi} < F^{-1}(\alpha)$
$H_1\colon p > p_0$	$n\overline{\xi} > F^{-1}(1-\alpha)$

ahol

$$F^{-1}(x) = \min\left\{ z \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{z} \binom{n}{i} p_0^i (1-p_0)^{n-i} \geq x \right\}.$$

1.5. Nemparaméteres hipotézisvizsgálatok

A következőkben $1 - \alpha$ a próba szintjét jelenti.

- **Tiszta illeszkedésvizsgálat valószínűségre**
  $A_1, \ldots, A_r$ teljes eseményrendszer, $p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{R}_+$, $p_1 + \cdots + p_r = 1$.

  $$\boxed{H_0\colon A_i \text{ valószínűsége } p_i\ \forall i},$$

  Legyen ϱ_i az A_i gyakorisága n kísérlet után ($\varrho_i \geq 10\ \forall i$),

  $$\nu_i = np_i, \quad \chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\varrho_i - \nu_i)^2}{\nu_i} \quad \text{és} \quad F \simeq F[\mathrm{Khi}(r-1)].$$

  Kritikus tartomány: $1 - F(\chi^2) < \alpha$.

- **Tiszta illeszkedésvizsgálat eloszlásfüggvényre**
  Legyen ξ a vizsgált valószínűségi változó és F_0 egy eloszlásfüggvény.

  $$\boxed{H_0\colon \xi \text{ eloszlásfüggvénye } F_0}$$

  Legyen $a_1 < a_2 < \cdots < a_{r-1}$, $I_1 = (-\infty, a_1)$, $I_2 = [a_1, a_2)$, $I_3 = [a_2, a_3)$, $\ldots$, $I_{r-1} = [a_{r-2}, a_{r-1})$, $I_r = [a_{r-1}, \infty)$. Jelölje ϱ_i a ξ-re vonatkozó n elemű mintában az I_i intervallumba eső mintaelemek számát ($\varrho_i \geq 10\ \forall i$), továbbá legyen $p_1 = F_0(a_1)$, $p_2 = F_0(a_2) - F_0(a_1)$, $p_3 = F_0(a_3) - F_0(a_2)$, $\ldots$, $p_{r-1} = F_0(a_{r-1}) - F_0(a_{r-2})$, $p_r = 1 - F_0(a_{r-1})$,

  $$\nu_i = np_i, \quad \chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\varrho_i - \nu_i)^2}{\nu_i} \quad \text{és} \quad F \simeq F[\mathrm{Khi}(r-1)].$$

  Kritikus tartomány: $1 - F(\chi^2) < \alpha$.

- **Becsléses illeszkedésvizsgálat**
  Legyen ξ a vizsgált valószínűségi változó és F_ϑ eloszlásfüggvény minden $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}^v$ esetén.

  $$\boxed{H_0\colon \xi \text{ eloszlásfüggvénye } F_\vartheta \text{ valamely } \vartheta \in \Theta \text{ esetén}}$$

  Legyen $a_1 < a_2 < \cdots < a_{r-1}$, $I_1 = (-\infty, a_1)$, $I_2 = [a_1, a_2)$, $I_3 = [a_2, a_3)$, $\ldots$, $I_{r-1} = [a_{r-2}, a_{r-1})$, $I_r = [a_{r-1}, \infty)$. Jelölje ϱ_i a ξ-re vonatkozó n elemű mintában az I_i intervallumba eső mintaelemek számát ($\varrho_i \geq 10\ \forall i$). Legyen

$\widehat{\vartheta}$ a ϑ maximum likelihood becslése H_0 feltételezésével, továbbá $\widehat{p}_1 = F_{\widehat{\vartheta}}(a_1)$, $\widehat{p}_2 = F_{\widehat{\vartheta}}(a_2) - F_{\widehat{\vartheta}}(a_1)$, $\widehat{p}_3 = F_{\widehat{\vartheta}}(a_3) - F_{\widehat{\vartheta}}(a_2)$, $\ldots$, $\widehat{p}_{r-1} = F_{\widehat{\vartheta}}(a_{r-1}) - F_{\widehat{\vartheta}}(a_{r-2})$, $\widehat{p}_r = 1 - F_{\widehat{\vartheta}}(a_{r-1})$,

$$\nu_i = n\widehat{p}_i, \quad \chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\varrho_i - \nu_i)^2}{\nu_i} \quad \text{és} \quad F \simeq F[\mathrm{Khi}(r-1-v)].$$

Kritikus tartomány: $1 - F(\chi^2) < \alpha$.

- **Függetlenségvizsgálat eseményrendszerekre**
  $A_1, \ldots, A_r$ és $B_1, \ldots, B_s$ két teljes eseményrendszer. A nullhipotézisben azt feltételezzük, hogy a két eseményrendszer független egymástól, azaz

  $$\boxed{H_0\colon\ \mathrm{P}(A_i \cap B_j) = \mathrm{P}(A_i)\,\mathrm{P}(B_j)\ \forall i, j},$$

  ahol P a valódi valószínűség. Végezzünk n darab kísérletet. Legyen ϱ_{ij} az $A_i \cap B_j$ gyakorisága ($\varrho_{ij} \geq 10$), k_i az A_i gyakorisága, l_j az B_j gyakorisága,

  $$\nu_{ij} = \frac{k_i l_j}{n}, \quad \chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \frac{(\varrho_{ij} - \nu_{ij})^2}{\nu_{ij}} \quad \text{és} \quad F \simeq F[\mathrm{Khi}((r-1)(s-1))].$$

  Kritikus tartomány: $1 - F(\chi^2) < \alpha$.

- **Függetlenségvizsgálat két valószínűségi változóra**
  A vizsgált valószínűségi változók ξ és η.

  $$\boxed{H_0\colon \xi \text{ és } \eta \text{ függetlenek}}$$

  A (ξ, η)-ra vonatkozó minta $(\xi_1, \eta_1), \ldots, (\xi_n, \eta_n)$.

  Legyen $a_0 < a_1 < \cdots < a_r$, tegyük fel, hogy $\xi_1, \ldots, \xi_n$ minden eleme benne van az $[a_0, a_r)$ intervallumban. Jelölje k_i a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ mintában az $[a_{i-1}, a_i)$ intervallumba eső elemek számát.

  Legyen $b_0 < b_1 < \cdots < b_s$, tegyük fel, hogy $\eta_1, \ldots, \eta_n$ minden eleme benne van a $[b_0, b_s)$ intervallumban. Jelölje l_j az $\eta_1, \ldots, \eta_n$ mintában a $[b_{j-1}, b_j)$ intervallumba eső elemek számát.

  Jelölje ϱ_{ij} a $(\xi_1, \eta_1), \ldots, (\xi_n, \eta_n)$ mintában az $[a_{i-1}, a_i) \times [b_{j-1}, b_j)$ tartományba eső elemek számát ($\varrho_{ij} \geq 10$),

  $$\nu_{ij} = \frac{k_i l_j}{n}, \quad \chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \frac{(\varrho_{ij} - \nu_{ij})^2}{\nu_{ij}} \quad \text{és} \quad F \simeq F[\mathrm{Khi}((r-1)(s-1))].$$

Kritikus tartomány: $1 - F(\chi^2) < \alpha$.

- **Homogenitásvizsgálat**

  Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_{n_1}$ és $\eta_1, \ldots, \eta_{n_2}$ a ξ illetve η független valószínűségi változókra vonatkozó minták.

$$\boxed{H_0\colon \xi \text{ és } \eta \text{ azonos eloszlású}}$$

  Legyen $a_0 < a_1 < \cdots < a_r$, tegyük fel, hogy mindkét minta minden eleme benne van az $[a_0, a_r)$ intervallumban. Jelölje ϱ_{i1} a $\xi_1, \ldots, \xi_{n_1}$ mintában az $[a_{i-1}, a_i)$ intervallumba eső elemek számát ($\varrho_{i1} \geq 10$), illetve ϱ_{i2} az $\eta_1, \ldots, \eta_{n_2}$ mintában az $[a_{i-1}, a_i)$ intervallumba eső elemek számát ($\varrho_{i2} \geq 10$), továbbá

$$\nu_{ij} = \frac{(\varrho_{i1} + \varrho_{i2})n_j}{n_1 + n_2}, \quad \chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{2} \frac{(\varrho_{ij} - \nu_{ij})^2}{\nu_{ij}} \quad \text{és} \quad F = F[\mathrm{Khi}(r-1)].$$

  Kritikus tartomány: $1 - F(\chi^2) < \alpha$.

- **Kétmintás előjelpróba**

  (ξ, η)-ra vonatkozó minta $(\xi_1, \eta_1), \ldots, (\xi_n, \eta_n)$.

$H_0\colon\ \mathrm{P}(\xi > \eta) = \frac{1}{2}$	kritikus tartomány
$H_1\colon\ \mathrm{P}(\xi > \eta) \neq \frac{1}{2}$	$B < F^{-1}(\frac{\alpha}{2})$ vagy $B > F^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$
$H_1\colon\ \mathrm{P}(\xi > \eta) < \frac{1}{2}$	$B < F^{-1}(\alpha)$
$H_1\colon\ \mathrm{P}(\xi > \eta) > \frac{1}{2}$	$B > F^{-1}(1 - \alpha)$

  ahol B azon (ξ_i, η_i) mintaelemek száma, melyekre $\xi_i - \eta_i$ pozitív, továbbá

$$F^{-1}(x) = \min\left\{ z \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{z} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq x \right\}.$$

- **Kolmogorov – Szmirnov-féle kétmintás próba**

  ξ és η folytonos eloszlásfüggvényű független valószínűségi változók, az ezekre vonatkozó minták $\xi_1, \ldots, \xi_n$ illetve $\eta_1, \ldots, \eta_n$ ($n > 30$).

$$\boxed{H_0\colon \xi \text{ és } \eta \text{ azonos eloszlású}}$$

  ξ-re illetve η-ra vonatkozó mintákhoz tartozó tapasztalati eloszlásfüggvények F_n^* illetve G_n^*,

$$D = \sqrt{\frac{n}{2}} \max_{i=1,\ldots,n} \max\Big\{ |F_n^*(\xi_i) - G_n^*(\xi_i)|, |F_n^*(\eta_i) - G_n^*(\eta_i)| \Big\},$$

$$K(z) = 1 + 2\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i e^{-2i^2z^2}.$$

Kritikus tartomány: $K(D) \geq 1 - \alpha$.

- **Kolmogorov – Szmirnov-féle egymintás próba**

  ξ folytonos eloszlásfüggvényű valószínűségi változó, az erre vonatkozó minta $\xi_1, \ldots, \xi_n$ $(n > 30)$.

  $$\boxed{H_0\colon \xi \text{ eloszlásfüggvénye } F}$$

  $$D = \sqrt{n} \max_{i=1,\ldots,n} \max\Big\{|F_n^*(\xi_i) - F(\xi_i)|, |G_n^*(\xi_i) - F(\xi_i)|\Big\},$$

  ahol F_n^* a tapasztalati eloszlásfüggvény, k_i azon mintaelemek száma, melyek nem nagyobbak ξ_i-nél és $G_n^*(\xi_i) = \frac{k_i}{n}$.

  $$K(z) = 1 + 2\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i e^{-2i^2z^2}.$$

  Kritikus tartomány: $K(D) \geq 1 - \alpha$.

1.6. Regressziószámítás

Az $\eta, \xi_1, \ldots, \xi_k$ valószínűségi változókra adjuk meg azt az $\eta \simeq g(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ közelítést adó g függvényt, melyre $\mathrm{E}\Big(\eta - g(\xi_1, \ldots, \xi_k)\Big)^2$ minimális. Az ilyen tulajdonságú g függvényt (*regressziós függvény*) a gyakorlatban csak becsülni tudjuk az $(\eta, \xi_1, \ldots, \xi_k)$ valószínűségi vektorváltozóra vonatkozó

$$(\eta_i, \xi_{i1}, \ldots, \xi_{ik}), \quad i = 1, \ldots, n$$

minta alapján. Legyen ez a becslés $\widehat{g}$. Ezután az $\boxed{\eta \simeq \widehat{g}(\xi_1, \ldots, \xi_k)}$ közelítést fogjuk használni.

- **Lineáris regresszió**

  A regressziós függvényt csak a

  $$\boxed{g(x_1, \ldots, x_k) = a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_kx_k \quad (a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{R})}$$

  alakú függvények között keressük. Ekkor az

  $$\boxed{\eta \simeq \widehat{a}_0 + \widehat{a}_1\xi_1 + \cdots + \widehat{a}_k\xi_k}$$

közelítést fogjuk használni, ahol $\widehat{a}_0, \dots, \widehat{a}_k$ rendre $a_0, \dots, a_k$ becslései.

- **Fixpontos lineáris regresszió**
  Legyenek $t_0, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ rögzített konstansok. A regressziós függvényt

  $$\boxed{g(x_1, \dots, x_k) = t_0 + a_1(x_1 - t_1) + \dots + a_k(x_k - t_k) \quad (a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R})}$$

  alakban keressük. Ekkor az

  $$\boxed{\eta \simeq t_0 + \widehat{a}_1(\xi_1 - t_1) + \dots + \widehat{a}_k(\xi_k - t_k)}$$

  közelítést fogjuk használni, ahol $\widehat{a}_1, \dots, \widehat{a}_k$ rendre $a_1, \dots, a_k$ becslései.

- **Polinomos regresszió**
  $k = 1$ és a regressziós függvényt

  $$\boxed{y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_r x^r \quad (a_0, \dots, a_r \in \mathbb{R}_+)}$$

  alakban keressük. Az $a_0, \dots, a_r$ együtthatókat az $\boxed{\eta, \xi_1, \xi_1^2, \dots, \xi_1^r}$ között végrehajtott lineáris regresszió adja.

- **Hatványkitevős regresszió**
  $k = 1$ és a regressziós függvényt

  $$\boxed{y = a x^b \quad (a \in \mathbb{R}_+,\ b \in \mathbb{R})}$$

  alakban keressük. Ez azzal ekvivalens, hogy

  $$\ln y = \ln a + b \ln x,$$

  így ekkor $\boxed{\ln \eta \text{ és } \ln \xi_1}$ között lineáris regressziót végrehajtva, a kapott a_0, a_1 együtthatókra teljesül, hogy

  $$\boxed{a = e^{a_0}, \quad b = a_1}.$$

- **Exponenciális regresszió**
  $k = 1$ és a regressziós függvényt

  $$\boxed{y = a b^x \quad (a, b \in \mathbb{R}_+)}$$

alakban keressük. Ez azzal ekvivalens, hogy

$$\ln y = \ln a + (\ln b)x,$$

így ekkor $\boxed{\ln\eta \text{ és } \xi_1}$ között lineáris regressziót végrehajtva, a kapott a_0, a_1 együtthatókra teljesül, hogy

$$\boxed{a = e^{a_0}, \quad b = e^{a_1}}.$$

- **Logaritmikus regresszió**
  $k = 1$ és a regressziós függvényt

  $$\boxed{y = a + b\ln x \quad (a, b \in \mathbb{R})}$$

  alakban keressük. Így ekkor $\boxed{\eta \text{ és } \ln\xi_1}$ között lineáris regressziót végrehajtva,

  $$\boxed{a = a_0,\ b = a_1}.$$

- **Hiperbolikus regresszió**
  $k = 1$ és a regressziós függvényt

  $$\boxed{y = \frac{1}{a + bx} \quad (a, b \in \mathbb{R})}$$

  alakban keressük. Ez azzal ekvivalens, hogy

  $$y^{-1} = a + bx,$$

  így ekkor $\boxed{\eta^{-1} \text{ és } \xi_1}$ között lineáris regressziót végrehajtva,

  $$\boxed{a = a_0,\ b = a_1}.$$

1.7. Excel függvények

1.7.1. Analysis ToolPak aktiválása

Az *Adatok/Adatelemzés* menüpont használatához aktiválja az *Analysis ToolPak* bővítményt: *Fájl/Beállítások/Bővítmények* majd *Ugrás* gomb. Pipálja ki az *Analysis ToolPak* sort majd *OK*.

1.7.2. Képlet bevitele

Minden képletet `=` jellel kell kezdeni. Ha a képlet egyértékű eredményt ad, akkor nyomjon *Enter*-t.

1.7.3. Tömbképlet bevitele

Ha a képlet eredménye tömb (például egy mátrix inverze), akkor először jelölje ki a megfelelő méretű tömböt, gépelje be a képletet (előtte `=`), majd nyomjon *Ctrl+Shift+Enter*-t.

1.7.4. Tömbképlet javítása

Ha egy tömbképletet javítani akar, akkor jelölje ki a tömbképletre vonatkozó tömböt, *F2*, javítás, majd *Ctrl+Shift+Enter*.

1.7.5. Műveletek

`+` összeadás

`-` kivonás

`*` szorzás

`/` osztás

`^` hatványozás

1.7.6. Relációk

`=` egyenlő

`<` kisebb

`>` nagyobb

`<=` kisebb vagy egyenlő

`>=` nagyobb vagy egyenlő

`<>` nem egyenlő

1.7.7. Konstansok

$e =$ `KITEVŐ(1)`

$\pi =$ `PI()`

1.7.8. Logikai függvények

$\boxed{\texttt{HA(feltétel;ha igaz;ha hamis)}}$

$\boxed{\texttt{ÉS(feltétel1;feltétel2;...)}}$

$\boxed{\texttt{VAGY(feltétel1;feltétel2;...)}}$

1.7.9. Elemi függvények

$|x| = \boxed{\texttt{ABS(}x\texttt{)}}\ x \in \mathbb{R}$

$[x] = \boxed{\texttt{INT(}x\texttt{)}}\ x \in \mathbb{R}$

$\operatorname{sign} x = \boxed{\texttt{ELŐJEL(}x\texttt{)}}\ x \in \mathbb{R}$

$\ln x = \boxed{\texttt{LN(}x\texttt{)}}\ x > 0$

$\log_a x = \boxed{\texttt{LOG(}x\texttt{;}a\texttt{)}}\ x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$

$\sqrt{x} = \boxed{\texttt{GYÖK(}x\texttt{)}}\ x \geq 0$

$x^a = \boxed{\texttt{HATVÁNY(}x\texttt{;}a\texttt{)}} = \boxed{x\hat{\ }a}$

$e^x = \boxed{\texttt{KITEVŐ(}x\texttt{)}}\ x \in \mathbb{R}$

$\sin x = \boxed{\texttt{SIN(}x\texttt{)}}\ x \in \mathbb{R}$

$\cos x = \boxed{\texttt{COS(}x\texttt{)}}\ x \in \mathbb{R}$

$\operatorname{tg} x = \boxed{\texttt{TAN(}x\texttt{)}}\ x \in \mathbb{R},\ x \neq k\frac{\pi}{2}$, ahol k páratlan egész

$\arcsin x = \boxed{\texttt{ARCSIN(}x\texttt{)}}\ x \in [-1, 1]$

$\arccos x = \boxed{\texttt{ARCCOS(}x\texttt{)}}\ x \in [-1, 1]$

$\operatorname{arctg} x = \boxed{\texttt{ARCTAN(}x\texttt{)}}\ x \in \mathbb{R}$

$\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty u^{x-1}e^{-u}\,\mathrm{d}u = \boxed{\texttt{GAMMA(}x\texttt{))}}\ x > 0$

1.7.10. Mátrixok

$\boxed{\texttt{MDETERM(tömb)}}$ A `tömb`-ben található $n \times n$ típusú mátrix determinánsa

$\boxed{\texttt{TRANSZPONÁLÁS(tömb)}}$ A `tömb`-ben található $m \times n$ típusú mátrix transzponáltja, mely egy $n \times m$ méretű tömbben helyezkedik el (tömbképlet!).

$\boxed{\texttt{INVERZ.MÁTRIX(tömb)}}$ A `tömb`-ben található $n \times n$ típusú mátrix inverze, mely egy $n \times n$ méretű tömbben helyezkedik el (tömbképlet!).

$\boxed{\texttt{MSZORZAT(tömb1;tömb2)}}$ A `tömb1`-ben található $m \times n$ típusú mátrix és a `tömb2`-ben található $n \times k$ típusú mátrix szorzata, mely egy $m \times k$ méretű tömbben helyezkedik el (tömbképlet!).

1.7.11. Kombinatorika

$m! = \boxed{\texttt{FAKT(}m\texttt{)}}$ $m \in \mathbb{N}$

$m!! = \boxed{\texttt{FAKTDUPLA(}m\texttt{)}}$ $m \in \mathbb{N}$ ($m!!$ az ún. *szemifaktoriális*, amely $1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m$, ha m páratlan, illetve $2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot m$, ha m páros.)

$\binom{m}{k} = \boxed{\texttt{KOMBINÁCIÓK(}m\texttt{;}k\texttt{)}}$ $m \in \mathbb{N},\ k = 0, \ldots, m$

$\frac{m!}{(m-k)!} = \boxed{\texttt{VARIÁCIÓK(}m\texttt{;}k\texttt{)}}$ $m \in \mathbb{N},\ k = 0, \ldots, m$

$\frac{(k_1+k_2+\cdots+k_r)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_r!} = \boxed{\texttt{SZORHÁNYFAKT(}k_1\texttt{;}k_2\texttt{;...;}k_r\texttt{)}}$ $k_1, k_2, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$

1.7.12. Pszeudo-véletlen szám generálása

$\boxed{\texttt{VÉL()}}$ $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású pszeudo-véletlen szám

$\boxed{\texttt{VÉLETLEN.KÖZÖTT(}a\texttt{;}b\texttt{)}} = \boxed{\texttt{INT((}b\texttt{-}a\texttt{+1)*VÉL())+}a}$ $(a, b \in \mathbb{N},\ a < b)$ diszkrét egyenletes eloszlású pszeudo-véletlen szám az $\{a, a+1, \ldots, b\}$ halmazon

1.7.13. Statisztikák

Legyen a ξ valószínűségi változóra vonatkozó $x_1, \ldots, x_n$ mintarealizáció az `A` oszlopban. Jelölje $x_1^*, \ldots, x_n^*$ a rendezett mintarealizációt. Ekkor

$x_1^* = \boxed{\texttt{MIN(A:A)}}$

$x_n^* = \boxed{\texttt{MAX(A:A)}}$

$x_k^* = \boxed{\texttt{KICSI(A:A;}k\texttt{)}}$ $k = 1, \ldots, n$

$x_{n-k}^* = \boxed{\texttt{NAGY(A:A;}k+1\texttt{)}}$ $k = 0, \ldots, n-1$

$\min\{k : x_k^* = x_i\} = \boxed{\texttt{RANG.EGY(}x_i\texttt{;A:A;1)}}$ $i = 1, \ldots, n$

$\min\{k : x_{n-k}^* = x_i\} + 1 = \boxed{\texttt{RANG.EGY(}x_i\texttt{;A:A;0)}}$ $i = 1, \ldots, n$

$n = \boxed{\texttt{DARAB(A:A)}}$

$\overline{\xi} = \boxed{\texttt{ÁTLAG(A:A)}}$

$S_n = \boxed{\texttt{SZÓR.S(A:A)}}$

$S_n^2 = \boxed{\texttt{VAR.S(A:A)}}$

$S_n^* = \boxed{\texttt{SZÓR.M(A:A)}}$

$S_n^{*2} = \boxed{\texttt{VAR.M(A:A)}}$

tapasztalati medián = $\boxed{\texttt{MEDIÁN(A:A)}}$

tapasztalati módusz = $\boxed{\texttt{MÓDUSZ.EGY(A:A)}}$

$100t$%-os tapasztalati kvantilis = $\boxed{\texttt{PERCENTILIS.TARTALMAZ(A:A;}t\texttt{)}}$ $0 \leq t \leq 1$

tapasztalati alsó kvartilis = $\boxed{\texttt{KVARTILIS.TARTALMAZ(A:A;1)}}$

tapasztalati felső kvartilis = $\boxed{\texttt{KVARTILIS.TARTALMAZ(A:A;3)}}$

tapasztalati ferdeség = $\boxed{\texttt{FERDESÉG.P(A:A)}}$

tapasztalati lapultság (csúcsosság) = $\boxed{\texttt{CSÚCSOSSÁG(A:A)}}$

$\sum_{i=1}^{n} x_i = \boxed{\texttt{SZUM(A:A)}}$

$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \boxed{\texttt{NÉGYZETÖSSZEG(A:A)}}$

$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{\xi})^2 = \boxed{\texttt{SQ(A:A)}}$

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{\xi}| = \boxed{\texttt{ÁTL.ELTÉRÉS(A:A)}}$

$\prod_{i=1}^{n} x_i = \boxed{\texttt{SZORZAT(A:A)}}$

$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \boxed{\texttt{MÉRTANI.KÖZÉP(A:A)}}$ $x_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$

$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)^{-1} = \boxed{\texttt{HARM.KÖZÉP(A:A)}}$ $x_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$

a-nál kisebb elemek száma = $\boxed{\texttt{DARABTELI(A:A;"<"\&}a\texttt{)}}$ $a \in \mathbb{R}$

$(a, b]$-beli elemek száma = $\boxed{\texttt{DARABHATÖBB(A:A;">"\&}a\texttt{;A:A;"<="\&}b\texttt{)}}$ $a, b \in \mathbb{R}$

a-nál kisebb elemek összege = $\boxed{\texttt{SZUMHA(A:A;"<"\&}a\texttt{)}}$ $a \in \mathbb{R}$

$(a, b]$-beli elemek összege = $\boxed{\texttt{SZUMHATÖBB(A:A;A:A;">"\&}a\texttt{;A:A;"<="\&}b\texttt{)}}$ $a, b \in \mathbb{R}$

a-nál kisebb elemek átlaga = $\boxed{\texttt{ÁTLAGHA(A:A;"<"\&}a\texttt{)}}$ $a \in \mathbb{R}$

$(a, b]$-beli elemek átlaga = $\boxed{\texttt{ÁTLAGHATÖBB(A:A;A:A;">"\&}a\texttt{;A:A;"<="\&}b\texttt{)}}$ $a, b \in \mathbb{R}$

Legyen a ξ-re vonatkozó mintarealizáció $x_1, \ldots, x_n$ és az η-ra vonatkozó mintarealizáció $y_1, \ldots, y_n$. Az `A` oszlop i-edik sorában legyen x_i, illetve a `B` oszlop i-edik sorában legyen y_i. Ekkor

$\mathrm{Cov}_n(\xi, \eta) = \boxed{\texttt{KOVARIANCIA.S(A:A;B:B)}}$

$\mathrm{Corr}_n(\xi, \eta) = \boxed{\texttt{KORREL(A:A;B:B)}}$

$R^2 = \mathrm{Corr}_n^2(\xi, \eta) = \boxed{\texttt{RNÉGYZET(A:A;B:B)}}$

$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \boxed{\texttt{SZORZATÖSSZEG(A:A;B:B)}}$

$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 = \boxed{\texttt{SZUMXBŐLY2(A:A;B:B)}}$

$\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - y_i^2) = \boxed{\texttt{SZUMX2BŐLY2(A:A;B:B)}}$

$\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2) = \boxed{\texttt{SZUMX2MEGY2(A:A;B:B)}}$

1.7.14. Eloszlásfüggvények

- **Binomiális eloszlás** (r-edrendű p paraméterű)
  $\sum_{i=0}^{k} \binom{r}{i} p^i (1-p)^{r-i} = \boxed{\texttt{BINOM.ELOSZL(}k\texttt{;}r\texttt{;}p\texttt{;IGAZ)}}$
  $r \in \mathbb{N},\ k = 0, \ldots, r,\ 0 < p < 1$

- **Hipergeometrikus eloszlás**

$\sum\limits_{i=0}^{k} \frac{\binom{M}{i}\binom{N-M}{r-i}}{\binom{N}{r}} = \boxed{\texttt{HIPGEOM.ELOSZLÁS(}k\texttt{;}r\texttt{;}M\texttt{;}N\texttt{;IGAZ)}}$
$r, M, N \in \mathbb{N},\ M < N,\ r \leq \min\{M, N-M\},\ k = 0, \ldots, r$

- **Poisson-eloszlás** (λ paraméterű)
  $\sum\limits_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = \boxed{\texttt{POISSON.ELOSZLÁS(}k\texttt{;}\lambda\texttt{;IGAZ)}}\ \lambda > 0,\ k = 0, 1, \ldots$

- **Exponenciális eloszlás** (λ paraméterű)
  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} = \boxed{\texttt{EXP.ELOSZL(}x\texttt{;}\lambda\texttt{;IGAZ)}}\ \lambda > 0,\ x \geq 0$

- **F-eloszlás** (s_1 és s_2 szabadsági fokú)
  $F(x) = \boxed{\texttt{F.ELOSZL(}x\texttt{;}s_1\texttt{;}s_2\texttt{;IGAZ)}}\ s_1, s_2 \in \mathbb{N},\ x \geq 0$

- **Gamma-eloszlás** (r-edrendű λ paraméterű)
  $F(x) = \boxed{\texttt{GAMMA.ELOSZL(}x\texttt{;}r\texttt{;1/}\lambda\texttt{;IGAZ)}}\ r, \lambda > 0,\ x \geq 0$

- **Khi-négyzet eloszlás** (s szabadsági fokú)
  $F(x) = \boxed{\texttt{KHINÉGYZET.ELOSZLÁS(}x\texttt{;}s\texttt{;IGAZ)}}\ s \in \mathbb{N},\ x \geq 0$

- **Normális eloszlás** (m és σ paraméterű)
  $F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \boxed{\texttt{NORM.ELOSZLÁS(}x\texttt{;}m\texttt{;}\sigma\texttt{;IGAZ)}}$
  $m, x \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$

- **Standard normális eloszlás**
  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \boxed{\texttt{NORM.S.ELOSZLÁS(}x\texttt{;IGAZ)}}\ x \in \mathbb{R}$

- **t-eloszlás** (s szabadsági fokú)
  $F(x) = \boxed{\texttt{T.ELOSZL(}x\texttt{;}s\texttt{;IGAZ)}}\ s \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$

1.7.15. Inverz eloszlásfüggvények

- **Exponenciális eloszlás** (λ paraméterű)
  $F^{-1}(x) = \boxed{\texttt{-LN(1-}x\texttt{)/}\lambda}\ \lambda > 0,\ 0 < x < 1$

- **F-eloszlás** (s_1 és s_2 szabadsági fokú)
  $F^{-1}(x) = \boxed{\texttt{F.INVERZ(}x\texttt{;}s_1\texttt{;}s_2\texttt{)}}\ s_1, s_2 \in \mathbb{N},\ 0 < x < 1$

- **Gamma-eloszlás** (r-edrendű λ paraméterű)
  $F^{-1}(x) = \boxed{\texttt{GAMMA.INVERZ(}x\texttt{;}r\texttt{;1/}\lambda\texttt{)}}\ r, \lambda > 0,\ 0 < x < 1$

- **Khi-négyzet eloszlás** (s szabadsági fokú)
  $F^{-1}(x) = \boxed{\texttt{KHINÉGYZET.INVERZ(}x\texttt{;}s\texttt{)}}\ s \in \mathbb{N},\ 0 < x < 1$

- **Normális eloszlás** (m és σ paraméterű)
  $F^{-1}(x) = \boxed{\texttt{NORM.INVERZ(}x\texttt{;}m\texttt{;}\sigma\texttt{)}}\ m \in \mathbb{R},\ \sigma > 0,\ 0 < x < 1$

- **Standard normális eloszlás**
  $\Phi^{-1}(x) = \boxed{\texttt{NORM.S.INVERZ(}x\texttt{)}}\ 0 < x < 1$

- **t-eloszlás** (s szabadsági fokú)
  $F^{-1}(x) = \boxed{\texttt{T.INVERZ(}x\texttt{;}s\texttt{)}}\ s \in \mathbb{N},\ 0 < x < 1$

1.7.16. Eloszlások

- **Binomiális eloszlás** (r-edrendű p paraméterű)
  $\binom{r}{k}p^k(1-p)^{r-k} = \boxed{\texttt{BINOM.ELOSZL(}k\texttt{;}r\texttt{;}p\texttt{;HAMIS)}}$
  $r \in \mathbb{N},\ k = 0, \dots, r,\ 0 < p < 1$

- **Hipergeometrikus eloszlás**
  $\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{r-k}}{\binom{N}{r}} = \boxed{\texttt{HIPGEOM.ELOSZLÁS(}k\texttt{;}r\texttt{;}M\texttt{;}N\texttt{;HAMIS)}}$
  $r, M, N \in \mathbb{N},\ M < N,\ r \leq \min\{M, N-M\},\ k = 0, \dots, r$

- **Poisson-eloszlás** (λ paraméterű)
  $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \boxed{\texttt{POISSON.ELOSZLÁS(}k\texttt{;}\lambda\texttt{;HAMIS)}}\ \lambda > 0,\ k = 0, 1, \dots$

1.7.17. Sűrűségfüggvények

- **Exponenciális eloszlás** (λ paraméterű)
  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} = \boxed{\texttt{EXP.ELOSZL(}x\texttt{;}\lambda\texttt{;HAMIS)}}\ \lambda > 0,\ x \geq 0$

- **F-eloszlás** (s_1 és s_2 szabadsági fokú)
  $F(x) = \boxed{\texttt{F.ELOSZL(}x\texttt{;}s_1\texttt{;}s_2\texttt{;HAMIS)}}\ s_1, s_2 \in \mathbb{N},\ x \geq 0$

- **Gamma-eloszlás** (r-edrendű λ paraméterű)
  $f(x) = \boxed{\texttt{GAMMA.ELOSZL(}x\texttt{;}r\texttt{;1/}\lambda\texttt{;HAMIS)}}\ r, \lambda > 0,\ x \geq 0$

- **Khi-négyzet eloszlás** (s szabadsági fokú)
  $f(x) = \boxed{\texttt{KHINÉGYZET.ELOSZLÁS(}x\texttt{;}s\texttt{;HAMIS)}}\ x \geq 0$

- **Normális eloszlás** (m és σ paraméterű)
  $f(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \boxed{\texttt{NORM.ELOSZLÁS(}x\texttt{;}m\texttt{;}\sigma\texttt{;HAMIS)}}$
  $m, x \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$

- **Standard normális eloszlás**
  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \boxed{\texttt{NORM.S.ELOSZLÁS(}x\texttt{;HAMIS)}}$ $x \in \mathbb{R}$

- **t-eloszlás** (s szabadsági fokú)
  $F(x) = \boxed{\texttt{T.ELOSZL(}x\texttt{;}s\texttt{;HAMIS)}}$ $s \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$

1.7.18. Grafikus illeszkedésvizsgálat

$\boxed{\texttt{MEREDEKSÉG(tömb\_}y_i\texttt{;tömb\_}x_i\texttt{)}}$ Az (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, r$ pontokra illesztett lineáris trendvonal meredeksége.
$\boxed{\texttt{METSZ(tömb\_}y_i\texttt{;tömb\_}x_i\texttt{)}}$ Az (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, r$ pontokra illesztett lineáris trendvonal függőleges tengelymetszete.

1.7.19. Intervallumbecslés

$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \boxed{\texttt{MEGBÍZHATÓSÁG.NORM(}\alpha\texttt{;}\sigma\texttt{;}n\texttt{)}}$ $0 < \alpha < 1,\ \sigma > 0,\ n \in \mathbb{N}$
$\frac{S_n^*}{\sqrt{n}} F^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \boxed{\texttt{MEGBÍZHATÓSÁG.T(}\alpha\texttt{;}S_n^*\texttt{;}n\texttt{)}}$ $F = F[\mathrm{T}(n-1)],\ 0 < \alpha < 1,\ n \in \mathbb{N}$
$\min\left\{c \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{c} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \geq x\right\} = \boxed{\texttt{BINOM.INVERZ(}n\texttt{;}p\texttt{;}x\texttt{)}}$ $n \in \mathbb{N},\ 0 < p <$ $< 1,\ 0 < x < 1$

1.7.20. Paraméteres hipotézisvizsgálatok

A ξ-re illetve η-ra vonatkozó mintarealizációk az `A` illetve `B` oszlopokban vannak.

- **Egymintás u-próba**
  $1 - \Phi(u) = \boxed{\texttt{Z.PRÓB(A:A;}m_0\texttt{;}\sigma\texttt{)}}$
  $2 - 2\Phi(|u|) = \boxed{\texttt{2*MIN(Z.PRÓB(A:A;}m_0\texttt{;}\sigma\texttt{);1-Z.PRÓB(A:A;}m_0\texttt{;}\sigma\texttt{))}}$

- **Egymintás t-próba**
  A ξ-re vonatkozó mintarealizáció minden tagja mellett szerepeljen m_0 értéke a `B` oszlopban.
  $2 - 2F(|t|) = \boxed{\texttt{T.PRÓB(A:A;B:B;2;1)}}$
  $1 - F(|t|) = \boxed{\texttt{T.PRÓB(A:A;B:B;1;1)}}$

- **F-próba**
  $2\min\{F(\mathsf{F}), 1 - F(\mathsf{F})\} = \boxed{\texttt{F.PRÓB(A:A;B:B)}}$

- **Kétmintás t-próba**
  $2 - 2F(|t|) = \boxed{\texttt{T.PRÓB(A:A;B:B;2;2)}}$
  $1 - F(|t|) = \boxed{\texttt{T.PRÓB(A:A;B:B;1;2)}}$

- **Scheffé-módszer azonos mintaelemszámra (párosított t-próba)**
  $2 - 2F(|t|) =$ `T.PRÓB(A:A;B:B;2;1)`
  $1 - F(|t|) =$ `T.PRÓB(A:A;B:B;1;1)`

- **Scheffé-módszer különböző mintaelemszámra**
  Az ζ-ra vonatkozó mintarealizáció a `C` oszlopban van és minden tagja mellett szerepeljen 0 a `D` oszlopban.
  $2 - 2F(|t|) =$ `T.PRÓB(C:C;D:D;2;1)`
  $1 - F(|t|) =$ `T.PRÓB(C:C;D:D;1;1)`

- **Welch-próba**
  $2 - 2F(|t|) =$ `T.PRÓB(A:A;B:B;2;3)`
  $1 - F(|t|) =$ `T.PRÓB(A:A;B:B;1;3)`

- **Statisztikai próba valószínűségre**
  $F^{-1}(x) =$ $\boxed{\texttt{BINOM.INVERZ(}n\texttt{;}p_0\texttt{;}x\texttt{)}}$

1.7.21. Nemparaméteres hipotézisvizsgálatok

- **Tiszta illeszkedésvizsgálat**
  $1 - F(\chi^2) =$ $\boxed{\texttt{KHINÉGYZET.PRÓBA(}\varrho_i\,\texttt{tartománya;}\nu_i\,\texttt{tartománya)}}$

- **Függetlenségvizsgálat**
  $1 - F(\chi^2) =$ $\boxed{\texttt{KHINÉGYZET.PRÓBA(}\varrho_{ij}\,\texttt{tartománya;}\nu_{ij}\,\texttt{tartománya)}}$

- **Homogenitásvizsgálat**
  $1 - F(\chi^2) =$ $\boxed{\texttt{KHINÉGYZET.PRÓBA(}\varrho_{ij}\,\texttt{tartománya;}\nu_{ij}\,\texttt{tartománya)}}$

- **Kétmintás előjelpróba**
  $F^{-1}(x) =$ $\boxed{\texttt{BINOM.INVERZ(}n\texttt{;1/2;}x\texttt{)}}$

1.7.22. Regressziószámítás

- **Lineáris regresszió**
  `eta`: η-ra vonatkozó mintarealizációt tartalmazó $n \times 1$ méretű tömb.
  `xi`: $(\xi_1, \dots, \xi_k)$-ra vonatkozó mintarealizációt tartalmazó $n \times k$ méretű tömb.
  `x`: $x_1, \dots, x_k$ számokat tartalmazó $1 \times k$ méretű tömb.
  $(\widehat{a}_k, \widehat{a}_{k-1}, \dots, \widehat{a}_0) =$ `LIN.ILL(eta;xi)` ($1 \times (k+1)$ méretű tömbképlet!)
  $\widehat{a}_0 + \widehat{a}_1 x_1 + \cdots + \widehat{a}_k x_k =$ `TREND(eta;xi;x)`

- **Fixpontos lineáris regresszió**

  `eta-t`: $(\eta - t_0)$-ra vonatkozó mintarealizációt tartalmazó $n \times 1$ méretű tömb.

  `xi-t`: $(\xi_1 - t_1, \ldots, \xi_k - t_k)$-ra vonatkozó mintarealizációt tartalmazó $n \times k$ méretű tömb.

  `x-t`: $x_1 - t_1, \ldots, x_k - t_k$ számokat tartalmazó $1 \times k$ méretű tömb.

  $(\widehat{a}_k, \widehat{a}_{k-1}, \ldots, \widehat{a}_1) = \boxed{\texttt{LIN.ILL(eta-t;xi-t;HAMIS)}}$ ($1 \times k$ méretű tömbképlet!)

  $\widehat{a}_1(x_1 - t_1) + \cdots + \widehat{a}_k(x_k - t_k) = \boxed{\texttt{TREND(eta-t;xi-t;x-t;HAMIS)}}$

- **Exponenciális regresszió**

  `eta`: η-ra vonatkozó mintarealizációt tartalmazó $n \times 1$ méretű tömb.

  `xi`: ξ_1-re vonatkozó mintarealizációt tartalmazó $n \times 1$ méretű tömb.

  $(\widehat{b}, \widehat{a}) = \boxed{\texttt{LOG.ILL(eta;xi)}}$ (1×2 méretű tömbképlet!)

  $\widehat{a} \cdot \widehat{b}^x = \boxed{\texttt{NÖV(eta;xi;}x\texttt{)}}$