Bevezetés a számítógépi grafikába

Görbék a számítógépes grafikában

Troll Ede Mátyás

Matematikai és Informatikai Intézet
Eszterházy Károly Egyetem

Eger, 2022

EGER 1774
ESZTERHÁZY KÁROLY EGYETEM

Áttekintés

Áttekintés

Miért van szükség görbékre?

A számítógéppel segített tervezés során pusztán szakaszokkal és körívekkel tervezni nem kifizetődő.

Miért van szükség görbékre?

A számítógéppel segített tervezés során pusztán szakaszokkal és körívekkel tervezni nem kifizetődő.

- A tervezés nehézkes és rugalmatlan

Miért van szükség görbékre?

A számítógéppel segített tervezés során pusztán szakaszokkal és körívekkel tervezni nem kifizetődő.

- A tervezés nehézkes és rugalmatlan
- A program adatstruktúrája sem lesz megfelelő

Miért van szükség görbékre?

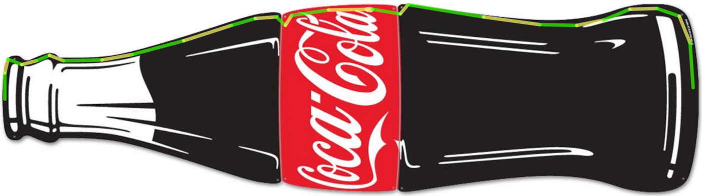
A számítógéppel segített tervezés során pusztán szakaszokkal és körívekkel tervezni nem kifizetődő.

- A tervezés nehézkes és rugalmatlan
- A program adatstruktúrája sem lesz megfelelő

Miért van szükség görbékre?

A számítógéppel segített tervezés során pusztán szakaszokkal és körívekkel tervezni nem kifizetődő.

- A tervezés nehézkes és rugalmatlan
- A program adatstruktúrája sem lesz megfelelő



Görbék leírása

A síkgörbéket az alábbi formákban adhatjuk meg:

Görbék leírása

A síkgörbéket az alábbi formákban adhatjuk meg:

1. Explicit megadási mód: $y = f(x)$

Görbék leírása

A síkgörbéket az alábbi formákban adhatjuk meg:

1. Explicit megadási mód: $y = f(x)$
2. Implicit megadási mód: $F(x, y)$

Görbék leírása

A síkgörbéket az alábbi formákban adhatjuk meg:

1. Explicit megadási mód: $y = f(x)$
2. Implicit megadási mód: $F(x, y)$
3. Paraméteres megadási mód: $\mathbf{r}(t) = x(t)\,e_1 + y(t)\,e_2$

Explicit megadási mód

Adott a síkban a Descartes-féle koordinátarendszer, valamint az $y = f(x)$ függvény.

Explicit megadási mód

Adott a síkban a Descartes-féle koordinátarendszer, valamint az $y = f(x)$ függvény. Azon pontok, melyek koordinátái $(x, f(x))$ alakúak, egy görbét írnak le. *(Euler-Monge féle megadási mód)*

Explicit megadási mód

Adott a síkban a Descartes-féle koordinátarendszer, valamint az $y = f(x)$ függvény. Azon pontok, melyek koordinátái $(x, f(x))$ alakúak, egy görbét írnak le. *(Euler-Monge féle megadási mód)*

Hátrányai

- Megjelenítése nagymértékben függ a koordináta-rendszertől.

Explicit megadási mód

Adott a síkban a Descartes-féle koordinátarendszer, valamint az $y = f(x)$ függvény. Azon pontok, melyek koordinátái $(x, f(x))$ alakúak, egy görbét írnak le. *(Euler-Monge féle megadási mód)*

Hátrányai

- Megjelenítése nagymértékben függ a koordináta-rendszertől.
- A globális explicit alak nem minden esetben létezik (y tengellyel párhuzamos egyenes, kör, stb. . .)

Explicit megadási mód

Adott a síkban a Descartes-féle koordinátarendszer, valamint az $y = f(x)$ függvény. Azon pontok, melyek koordinátái $(x, f(x))$ alakúak, egy görbét írnak le. *(Euler-Monge féle megadási mód)*

Hátrányai

- Megjelenítése nagymértékben függ a koordináta-rendszertől.
- A globális explicit alak nem minden esetben létezik (y tengellyel párhuzamos egyenes, kör, stb. . .)
- Nem alkalmas térgörbék leírására, mert újabb változót bevezetve felületet írunk le vele.

Implicit megadási mód

Adott a síkban a Descartes-féle koordinátarendszer, valamint az $F(x, y)$ függvény.

Implicit megadási mód

Adott a síkban a Descartes-féle koordinátarendszer, valamint az $F(x, y)$ függvény. Azon pontok, melyek koordinátáit behelyettesítve a függvénybe a kapott függvényérték $F(x, y) = 0$ egy görbét alkotbak. Az $F(x, y) = c$ kifejezést kielégítő pontok szintén görbét írnak le. *(Cauchy-féle előállításnak)*

Implicit megadási mód

Adott a síkban a Descartes-féle koordinátarendszer, valamint az $F(x, y)$ függvény. Azon pontok, melyek koordinátáit behelyettesítve a függvénybe a kapott függvényérték $F(x, y) = 0$ egy görbét alkotbak. Az $F(x, y) = c$ kifejezést kielégítő pontok szintén görbét írnak le. *(Cauchy-féle előállításnak)*

Hátrányai

- Megjelenítése scanline segítségével lehetséges.

Implicit megadási mód

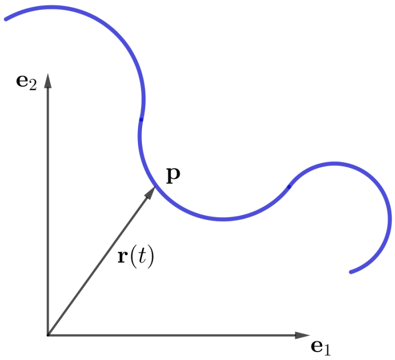
Adott a síkban a Descartes-féle koordinátarendszer, valamint az $F(x, y)$ függvény. Azon pontok, melyek koordinátáit behelyettesítve a függvénybe a kapott függvényérték $F(x, y) = 0$ egy görbét alkotbak. Az $F(x, y) = c$ kifejezést kielégítő pontok szintén görbét írnak le. *(Cauchy-féle előállításnak)*

Hátrányai

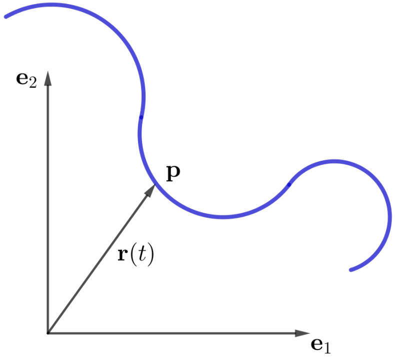
- Megjelenítése scanline segítségével lehetséges.
- Nem alkalmas térgörbék leírására, mert újabb változót bevezetve felületet írunk le vele.

Paraméteres megadási mód

A síkban mozgó pont egy görbét ír le.



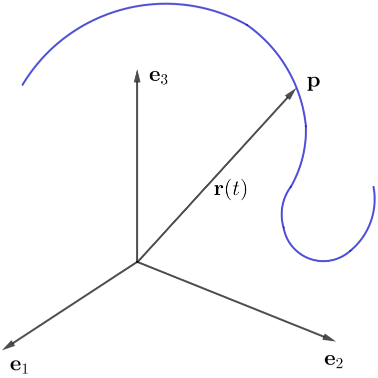
A síkban mozgó pont egy görbét ír le.



Ha minden t időpollanatban meghúzzuk az **op** vektort, és ezt $\mathbf{r}(t)$-vel jelöljük, akkor egy I intervallumon értelmezett vektorfüggvényt kapunk.

Paraméteres megadási mód

Ha az előző előállításban szereplő pont a térben mozog, akkor térgörbét kapunk.



Paraméteres megadási mód

Az $\mathbf{r}(t)$ vektorfüggvényt általában koordinátafüggvényeivel adjuk meg.

Paraméteres megadási mód

Az $\mathbf{r}(t)$ vektorfüggvényt általában koordinátafüggvényeivel adjuk meg.

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) \qquad \text{síkban,}$$
$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \qquad \text{térben,}$$

ahol a koordinátafüggvények általában valós változós, valós értékű függvények.

Paraméteres megadási mód

Az $\mathbf{r}(t)$ vektorfüggvényt általában koordinátafüggvényeivel adjuk meg.

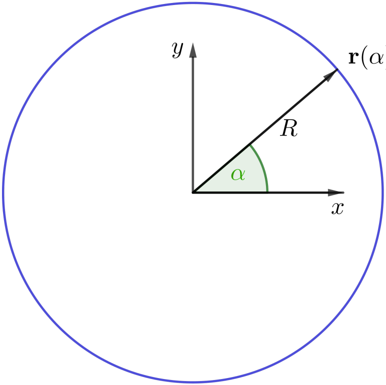
$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= (x(t), y(t)) && \text{síkban,} \\ \mathbf{r}(t) &= (x(t), y(t), z(t)) && \text{térben,} \end{aligned}$$

ahol a koordinátafüggvények általában valós változós, valós értékű függvények. A vektorfüggvény differenciálhányadosát a koordinátafüggvények deriváltjaival adjuk meg.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}(t) &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) && \text{síkban,} \\ \dot{\mathbf{r}}(t) &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) && \text{térben.} \end{aligned}$$

Paraméteres megadási mód

Origó középpontú R sugarú kör



$$\mathbf{r}(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha)) = \\ = (R\cos\alpha, R\sin\alpha),\ \text{ahol } \alpha \in [0, 2\pi]$$

Paraméteres görbe megjelenítése

A $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett $\mathbf{r}(t)$ görbét számítógépen töröttvonallal közelítjük.

Paraméteres görbe megjelenítése

A $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett $\mathbf{r}(t)$ görbét számítógépen töröttvonallal közelítjük.
Ez azt jelenti, hogy kiszámítjuk a

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}(t0), \mathbf{p}_1 = \mathbf{r}(t_1), \ldots, \mathbf{p}_{n-1} = \mathbf{r}(t_{n-1}), \mathbf{p}_n = \mathbf{r}(t_n)$$

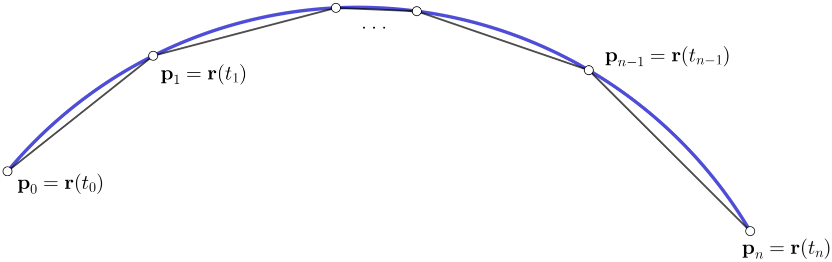
pontokat, ahol $t_0 = a$ és $t_n = b$, majd a pontok által meghatározott szakaszokat megjelenítjük.

Paraméteres görbe megjelenítése

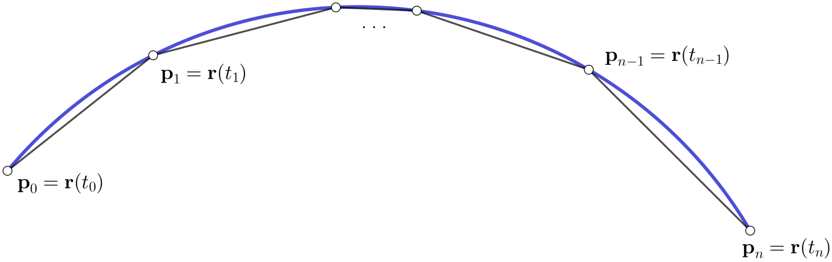
A $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett $\mathbf{r}(t)$ görbét számítógépen töröttvonallal közelítjük.
Ez azt jelenti, hogy kiszámítjuk a

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}(t0), \mathbf{p}_1 = \mathbf{r}(t_1), \ldots, \mathbf{p}_{n-1} = \mathbf{r}(t_{n-1}), \mathbf{p}_n = \mathbf{r}(t_n)$$

pontokat, ahol $t_0 = a$ és $t_n = b$, majd a pontok által meghatározott szakaszokat megjelenítjük.

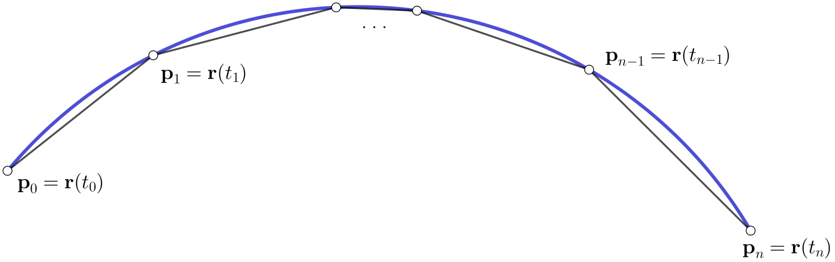


Paraméteres görbe megjelenítése



A megjelenítés során meg kell határoznunk a szomszédos $\mathbf{p}_i$ és $\mathbf{p}_{i+1}$ pontok távolságát.

Paraméteres görbe megjelenítése



A megjelenítés során meg kell határoznunk a szomszédos $\mathbf{p}_i$ és $\mathbf{p}_{i+1}$ pontok távolságát.
Mivel a megjelenítés az $[a, b]$ intervallumon való iterálással történik, így általában azt osztjuk föl egy előre meghatározott mennyiséggel.

Paraméteres görbe megjelenítése

```
ELJÁRÁS PARAM_GÖRBE(FÜGGVÉNY: X, FÜGGVÉNY: Y,
                    VALÓS: A, VALÓS: B, EGÉSZ: POTNOK);
    VÁLTOZÓK
        VALÓS: T, H;
        PONT: P0, P1;
    ALGORITMUS
        T <- A;
        H <- (B - A) / PONTOK;
        P0 <- [X(T), Y(T)];
        CIKLUS_AMÍG (T < B)
            T <- T + H;
            P1 <- [X(T), Y(T)];
            SZAKASZ(P0, P1);
            P0 <- P1;
        CIKLUS_VÉGE;
ELJÁRÁS_VÉGE;
```

Paraméteres megadási mód - Probléma: megjelenítés

Hány részre osszuk fel a paramétertartományt?

Paraméteres megadási mód - Probléma: illeszkedés

Paraméteres megadási mód - Probléma: illeszkedés

Legyen adott egy $\mathbf{r}(t)$ görbe a koordinátafüggvényeivel és egy $\mathbf{p}(x_p, y_p)$ pont.

Paraméteres megadási mód - Probléma: illeszkedés

Legyen adott egy $\mathbf{r}(t)$ görbe a koordinátafüggvényeivel és egy $\mathbf{p}(x_p, y_p)$ pont. Annak eldöntésére, hogy a **p** pont illeszkedik-e a görbére olyan t_0 értéket kellene találnunk, melyre

Paraméteres megadási mód - Probléma: illeszkedés

Legyen adott egy $\mathbf{r}(t)$ görbe a koordinátafüggvényeivel és egy $\mathbf{p}(x_p, y_p)$ pont. Annak eldöntésére, hogy a $\mathbf{p}$ pont illeszkedik-e a görbére olyan t_0 értéket kellene találnunk, melyre

$$x(t_0) = x_p \text{ és}$$
$$y(t_0) = y_p.$$

Paraméteres megadási mód - Probléma: illeszkedés

Legyen adott egy $\mathbf{r}(t)$ görbe a koordinátafüggvényeivel és egy $\mathbf{p}(x_p, y_p)$ pont. Annak eldöntésére, hogy a **p** pont illeszkedik-e a görbére olyan t_0 értéket kellene találnunk, melyre

$$
\begin{aligned}
x(t_0) &= x_p \text{ és} \\
y(t_0) &= y_p.
\end{aligned}
$$

A fenti probléma túlhatározott, a megoldás legtöbbször csak numerikusan meghatározható.

Paraméteres megadási mód - Probléma: illeszkedés

Legyen adott egy $\mathbf{r}(t)$ görbe a koordinátafüggvényeivel és egy $\mathbf{p}(x_p, y_p)$ pont. Annak eldöntésére, hogy a $\mathbf{p}$ pont illeszkedik-e a görbére olyan t_0 értéket kellene találnunk, melyre

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_p \text{ és} \\ y(t_0) &= y_p. \end{aligned}$$

A fenti probléma túlhatározott, a megoldás legtöbbször csak numerikusan meghatározható.
Ugyanez a probléma implicit esetben pusztán az $F(x, y) = 0$ egyenletbe való behelyettesítéssel eldönthető.

Paraméteres megadási mód - Probléma: metszet

Paraméteres megadási mód - Probléma: metszet

Határozzuk meg a g_1 és g_2 görbék a metszetét.

Paraméteres megadási mód - Probléma: metszet

Határozzuk meg a g_1 és g_2 görbék a metszetét.
Az előző probléma alapján, két paraméteresen megadott görbe esetén csak numerikus módszerekkel próbálkozhatunk.

Paraméteres megadási mód - Probléma: metszet

Határozzuk meg a g_1 és g_2 görbék a metszetét.
Az előző probléma alapján, két paraméteresen megadott görbe esetén csak numerikus módszerekkel próbálkozhatunk.
Az ideális eset az, ha az egyik görbe implicit, a másik paraméteres alakban van megadva, azaz

$$\begin{aligned} g_1 :& F(x, y) = 0, \\ g_2 :& \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Paraméteres megadási mód - Probléma: metszet

Határozzuk meg a g_1 és g_2 görbék a metszetét.
Az előző probléma alapján, két paraméteresen megadott görbe esetén csak numerikus módszerekkel próbálkozhatunk.
Az ideális eset az, ha az egyik görbe implicit, a másik paraméteres alakban van megadva, azaz

$$\begin{aligned} g_1 &: F(x, y) = 0, \\ g_2 &: \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Ekkor g_2 koordinátafüggvényeit visszahelyettesítve g_1-be az

$$F(x(t), y(t)) = 0$$

egyismeretlenes egyenletet kapjuk.

Paraméteres megadási mód - Probléma: metszet

Határozzuk meg a g_1 és g_2 görbék a metszetét.
Az előző probléma alapján, két paraméteresen megadott görbe esetén csak numerikus módszerekkel próbálkozhatunk.
Az ideális eset az, ha az egyik görbe implicit, a másik paraméteres alakban van megadva, azaz

$$\begin{aligned} g_1 :& F(x, y) = 0, \\ g_2 :& \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Ekkor g_2 koordinátafüggvényeit visszahelyettesítve g_1-be az

$$F(x(t), y(t)) = 0$$

egyismeretlenes egyenletet kapjuk. A g_2 paramétertartományába eső gyököket visszahelyettesítjük g_2-be, és megkapjuk a metszetet.

Áttekintés

1. Görbék leírása

2. Lineáris algebrai ismeretek
   - Vektortér, vektorok
   - Mátrixok

Vektortér

A V nem üres halmazt vektortérnek nevezzük a $\mathbb{T}$ test felett, a értelmezve van rajta egy $+$ művelet, melyre nézve a $(V, +)$ kommutatív csoport, továbbá minden $\lambda \in \mathbb{T}$ és $a \in V$ esetén értelmezve van $\lambda a \in V$, és teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

Vektortér

A V nem üres halmazt vektortérnek nevezzük a $\mathbb{T}$ test felett, a értelmezve van rajta egy $+$ művelet, melyre nézve a $(V, +)$ kommutatív csoport, továbbá minden $\lambda \in \mathbb{T}$ és $a \in V$ esetén értelmezve van $\lambda a \in V$, és teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

$$
\begin{aligned}
\lambda (a + b) &= \lambda a + \lambda b \\
(\lambda + \mu) a &= \lambda a + \mu a \\
(\lambda\mu) a &= \lambda (\mu a) = \mu (\lambda a) \\
1a &= a
\end{aligned}
$$

minden $\lambda, \mu \in \mathbb{T}$ és minden $a, b \in V$ esetén, ahol 1 a $\mathbb{T}$ test multiplikatív egységelemét jelöli.

Vektortér

A V nem üres halmazt vektortérnek nevezzük a $\mathbb{T}$ test felett, a értelmezve van rajta egy $+$ művelet, melyre nézve a $(V, +)$ kommutatív csoport, továbbá minden $\lambda \in \mathbb{T}$ és $a \in V$ esetén értelmezve van $\lambda a \in V$, és teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

$$\begin{aligned}
\lambda (a + b) &= \lambda a + \lambda b \\
(\lambda + \mu) a &= \lambda a + \mu a \\
(\lambda\mu) a &= \lambda (\mu a) = \mu (\lambda a) \\
1a &= a
\end{aligned}$$

minden $\lambda, \mu \in \mathbb{T}$ és minden $a, b \in V$ esetén, ahol 1 a $\mathbb{T}$ test multiplikatív egységelemét jelöli.

Példa: Síkban vagy térben a szabadvektorok vektorteret alkotnak a valós számok teste fölött.

Vektorműveletek

A $\mathbb{T}$-beli elemekből alkotott n-esek vektorteret alkotnak $\mathbb{T}$ fölött. Ezt a vektorteret $\mathbb{T}^n$-nel jelöljük. Legyenek $\mathbf{a}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)^t$, $\mathbf{b}\,(b_1, b_2, \ldots, b_n)^t \in \mathbb{T}^n$, $\lambda \in \mathbb{T}$ esetén

Vektorműveletek

A $\mathbb{T}$-beli elemekből alkotott n-esek vektorteret alkotnak $\mathbb{T}$ fölött. Ezt a vektorteret $\mathbb{T}^n$-nel jelöljük. Legyenek $\mathbf{a}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)^t$, $\mathbf{b}\,(b_1, b_2, \ldots, b_n)^t \in \mathbb{T}^n$, $\lambda \in \mathbb{T}$ esetén

$$\mathbf{a}^t + \mathbf{b}^t = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix},$$

$$\lambda\mathbf{a}^t = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}.$$

Mátrix

Legyenek a_{ij} $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ egy $\mathbb{T}$ test elemei.

Mátrix

Legyenek a_{ij} $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ egy $\mathbb{T}$ test elemei. Ekkor az

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

számtáblázatot $m \times n$ típusú mátrixnak nevezzük.

Mátrix

Legyenek a_{ij} $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ egy $\mathbb{T}$ test elemei. Ekkor az

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

számtáblázatot $m \times n$ típusú mátrixnak nevezzük.

Ha $m = n$, akkor négyzetes mátrixról beszélünk.

Mátrix

Legyenek a_{ij} $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ egy $\mathbb{T}$ test elemei. Ekkor az

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

számtáblázatot $m \times n$ típusú mátrixnak nevezzük.

Ha $m = n$, akkor négyzetes mátrixról beszélünk.

Két mátrix egyenlő, ha azonos típusúak, és elemenként megegyeznek, azaz

$$a_{ij} = b_{ij}, \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Mátrix

Legyenek a_{ij} $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ egy $\mathbb{T}$ test elemei. Ekkor az

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

számtáblázatot $m \times n$ típusú mátrixnak nevezzük.

Ha $m = n$, akkor négyzetes mátrixról beszélünk.

Két mátrix egyenlő, ha azonos típusúak, és elemenként megegyeznek, azaz

$$a_{ij} = b_{ij}, \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Az A mátrix transzponáltját úgy képezzük, hogy felcseréljük a sorait és oszlopait, és A^t-vel jelöljük.

Műveletek mátrixokkal

Az azonos típusú $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}$ és $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}$ mátrixok összege az a $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}$ mátrix, melyre

Műveletek mátrixokkal

Az azonos típusú $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}$ és $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}$ mátrixok összege az a $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}$ mátrix, melyre

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \, (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n) \, .$$

Műveletek mátrixokkal

Az azonos típusú $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ és $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ mátrixok összege az a $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ mátrix, melyre

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\,(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)\,.$$

Az $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ és $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times k}$ mátrixok szorzata az a $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times k}$ mátrix, melyre

Műveletek mátrixokkal

Az azonos típusú $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ és $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ mátrixok összege az a $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ mátrix, melyre

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\,(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)\,.$$

Az $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ és $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times k}$ mátrixok szorzata az a $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times k}$ mátrix, melyre

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\,(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)\,.$$

Műveletek mátrixokkal

Az azonos típusú $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ és $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ mátrixok összege az a $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ mátrix, melyre

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \, (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n) \, .$$

Az $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ és $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times k}$ mátrixok szorzata az a $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times k}$ mátrix, melyre

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \, (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n) \, .$$

Fontos megjegyeznünk, hogy a mátrixok szorzása asszociatív, azaz

$$A\,(BC) = (AB)\,C.$$

Köszönöm a figyelmet!