

Hozzárendelési feladat

Kapcsolódó videó: <https://youtu.be/1KLtUFrgPjw>

Hozzárendelési feladat: Adott n számú dolgozó, és ugyanennyi munka. Az egyes dolgozók a munkákat különböző költségekkel tudják végrehajtani. Osszuk szét a dolgozók között az összes munkát úgy, hogy minden dolgozó pontosan egy munkát kapjon és a munkavégzés összköltsége minimális legyen.

Jelölje c_{ij} a j -edik munka elvégzésének költségét, ha azt az i -edik dolgozó hajtja végre. Ekkor a feladat megadható a $C = [c_{ij}]$ mátrixszal, melynek mérete $n \times n$. Sőt, a feladat úgy is megfogalmazható, hogy adott egy $n \times n$ -es mátrix, válasszunk ki minden sorából és oszlopából pontosan egy elemet úgy, hogy a kiválasztott elemek összege minimális legyen.

Magyar módszer

A hozzárendelési feladat megoldására használható az ún. magyar módszer, melynek ismertetéséhez szükségünk lesz az alábbi fogalmakra.

Egy mátrix valamely sorát/oszlopát kötött sornak/oszlopnak nevezzük, ha mellette/felette egy „+” jel áll. A mátrix valamely elemét szabad elemnek nevezzük, ha nincs semmiféle jellel ellátva, és sem a sora, sem az oszlopa nincs lekötve. Speciálisan, ha az illető elem 0, akkor szabad 0-ról beszélünk.

Előkészítő rész:

1. A C költségmátrix minden sorából vonjuk ki az illető sor legkisebb elemét.
2. Az így kapott mátrix minden oszlopából vonjuk ki a szóban forgó oszlop legkisebb elemét. Ez mátrix lesz az alábbi iteráció, nulladik eleme, melyet $C^{(0)}$ fog jelölni.
3. Haladjunk végig a $C^{(0)}$ mátrix oszlopain, és minden oszlopban jelöljük meg *-gal az első olyan nullát, amely sorában nincs még *-gal megjelölt 0. Ha nem találunk ilyet, akkor térjünk át a következő oszlopra.

Iteráció:

1. Ha a $C^{(r)}$ mátrixban a *-gal megjelölt 0-k száma éppen n , akkor készen vagyunk: az optimális hozzárendelés a *-gal megjelölt 0-k mentén adódik. Ellenkező esetben kössük le a *-gal megjelölt 0-k oszlopait, és folytassuk a 2. lépéssel.
2. A sorról-sorra haladva keressünk szabad 0-t. Ha nem találunk, az 5. lépés következik. Ha találunk, vizsgáljuk meg a megtalált 0 sorát. Ha ez a sor tartalmaz *-gal megjelölt 0-t, akkor 3., ha nem, akkor a 4. lépés következik.
3. A tekintett szabad 0-t
 - a. lássuk el vesszővel,
 - b. kössük le a sorát,
 - c. szabadítsuk fel a vele azonos sorban lévő, *-gal megjelölt 0 oszlopát, majd folytassuk a 2. lépéssel.
4. A tekintett szabad 0-t lássuk el vesszővel, és ebből kiindulva képezzük láncot az alábbiak szerint: a láncban minden '-vel ellátott 0-t vele azonos oszlopban lévő *-gal megjelölt 0 követ, a *-gal megjelölt 0 után pedig vele azonos sorban lévő '-vel ellátott nulla következik, feltéve, hogy vannak ilyen elemek. Ellenkező esetben a lánc véget

ér. Ezek után legyen $C^{(r+1)}$ a jelölések nélküli $C^{(r)}$ mátrix, és lássuk el *-gal azokat a 0-kat, melyek *-gal voltak jelölve és nem voltak a láncban, és azokat is, melyen '-vel voltak ellátva és szerepeltek a láncban. Folytassuk az első lépéssel.

5. Képezzük a szabad elemek minimumát, majd vonjuk ki azt az összes szabad elemekből, és adjuk hozzá mindazon elemekhez, melyeknek a sora is és az oszlopa is között.