Bevezetés a számítógépi grafikába
A geometriai modellezés alapjai

Troll Ede Mátyás

Matematikai és Informatikai Intézet
Eszterházy Károly Katolikus Egyetem

Eger, 2022

Áttekintés

1. Coons felület
2. Bézier- és B-Spline felületek
3. Subdivision görbék
4. Subdivision felületek

Áttekintés

1 Coons felület

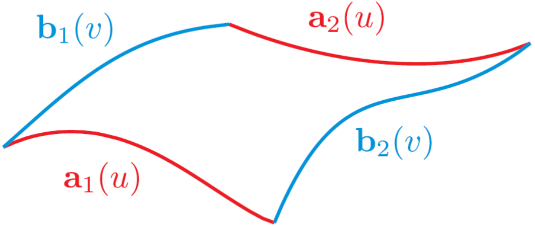
2 Bézier- és B-Spline felületek

3 Subdivision görbék

4 Subdivision felületek

Coons felület

Legyen adott 4, végpontjaikban egymáshoz csatlakozó görbe



Coons felület

Keressük azt az $\mathbf{s}(u, v)$, $u, v \in [0, 1]$ felületet, melyre teljesülnek az alábbi feltételek:

$$\mathbf{s}(u, 0) = \mathbf{a}_1(u), u \in [0, 1]$$
$$\mathbf{s}(u, 1) = \mathbf{a}_2(u), u \in [0, 1]$$
$$\mathbf{s}(0, v) = \mathbf{b}_1(v), v \in [0, 1]$$
$$\mathbf{s}(1, v) = \mathbf{b}_2(v), v \in [0, 1]$$

A felületet három segédfelület felhasználásával fogjuk előállítani.

Coons felület

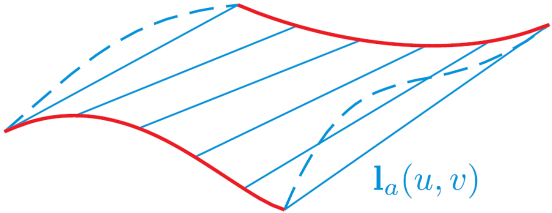
Kössük össze egyenes vonalakkal az $\mathbf{a}_1(u)$ és $\mathbf{a}_2(u)$ görbéket az alábbi módon!

$$\mathbf{l}_a(u,v) = (1-v)\mathbf{a}_1(u) + v\mathbf{a}_2(u), \text{ ahol } u, v \in [0,1]$$

Coons felület

Kössük össze egyenes vonalakkal az $\mathbf{a}_1(u)$ és $\mathbf{a}_2(u)$ görbéket az alábbi módon!

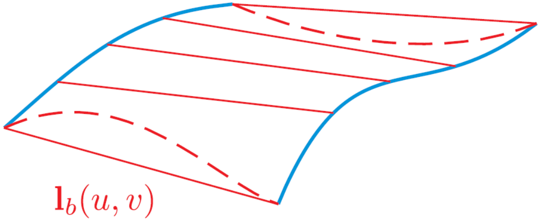
$$\mathbf{l}_a(u, v) = (1 - v)\mathbf{a}_1(u) + v\mathbf{a}_2(u), \text{ ahol } u, v \in [0, 1]$$



Coons felület

Hasonló módon kössük össze egyenes vonalakkal a $\mathbf{b}_1(v)$ és $\mathbf{b}_2(v)$ görbéket az alábbi módon!

$$\mathbf{l}_b(u,v) = (1-u)\mathbf{b}_1(v) + u\mathbf{b}_2(v), \text{ ahol } u,v \in [0,1]$$



Coons felület

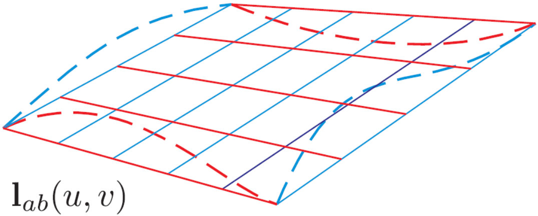
Az $\mathbf{l}_a(u,v)$ és $\mathbf{l}_b(u,v)$ felületek a 4 görbéből kettő-kettőre illeszkednek (a másikra nem), így szükségünk van egy további felületre, melyet a négy csúcs alapján definiálunk:

$$\begin{aligned}\mathbf{l}_{ab}(u,v) = (1-v)((1-u)\mathbf{l}_a(0,0) + u\mathbf{l}_a(1,0)) + \\ + v((1-u)\mathbf{l}_a(0,1) + u\mathbf{l}_a(1,1)), \text{ ahol } u,v \in [0,1]\end{aligned}$$

Coons felület

Az $\mathbf{l}_a(u,v)$ és $\mathbf{l}_b(u,v)$ felületek a 4 görbéből kettő-kettőre illeszkednek (a másikra nem), így szükségünk van egy további felületre, melyet a négy csúcs alapján definiálunk:

$$\mathbf{l}_{ab}(u,v) = (1-v)((1-u)\mathbf{l}_a(0,0) + u\mathbf{l}_a(1,0))+ \\ + v((1-u)\mathbf{l}_a(0,1) + u\mathbf{l}_a(1,1)), \text{ ahol } u,v \in [0,1]$$



Coons felület

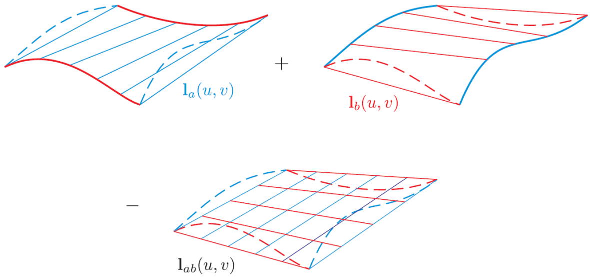
Az előzőek felhasználásával az alábbi módon állítjuk elő a Coons felületet:

$$\mathbf{s}(u, v) = \mathbf{l}_a(u, v) + \mathbf{l}_b(u, v) - \mathbf{l}_{ab}(u, v)$$

Coons felület

Az előzőek felhasználásával az alábbi módon állítjuk elő a Coons felületet:

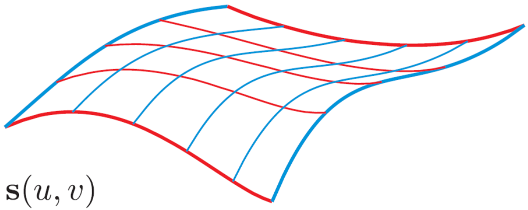
$$\mathbf{s}(u, v) = \mathbf{l}_a(u, v) + \mathbf{l}_b(u, v) - \mathbf{l}_{ab}(u, v)$$



Coons felület

Az előzőek felhasználásával az alábbi módon állítjuk elő a Coons felületet:

$$\mathbf{s}(u, v) = \mathbf{l}_a(u, v) + \mathbf{l}_b(u, v) - \mathbf{l}_{ab}(u, v)$$



Áttekintés

1 Coons felület

2 Bézier- és B-Spline felületek

3 Subdivision görbék

4 Subdivision felületek

Tenzori szorzat felületek

Korábban foglalkoztunk olyan paraméteres görbékkel, melyek bizonyos alapfüggvények és kontrollpontok lineáris kombinációi:

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^{n} A_i^n(t)\mathbf{p}_i$$

Tenzori szorzat felületek

Korábban foglalkoztunk olyan paraméteres görbékkel, melyek bizonyos alapfüggvények és kontrollpontok lineáris kombinációi:

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^{n} A_i^n(t)\mathbf{p}_i$$

A tenzori felületek esetén kontroll poligon helyett kontrollpont rácsot kell definiálnunk. Az előállított felületet elképzelhetjük úgy, mint egy kontrollpont alapú görbét, melynek kontrollpontjai is egy-egy kontrollpont alapú görbén mozognak.

Tenzori szorzat felületek

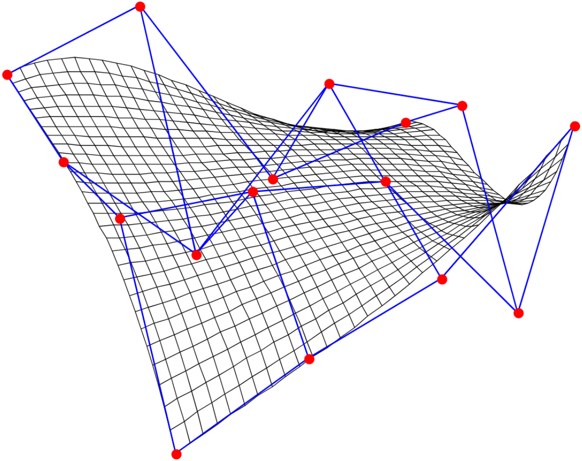
Korábban foglalkoztunk olyan paraméteres görbékkel, melyek bizonyos alapfüggvények és kontrollpontok lineáris kombinációi:

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^{n} A_i^n(t)\mathbf{p}_i$$

A tenzori felületek esetén kontroll poligon helyett kontrollpont rácsot kell definiálnunk. Az előállított felületet elképzelhetjük úgy, mint egy kontrollpont alapú görbét, melynek kontrollpontjai is egy-egy kontrollpont alapú görbén mozognak.

$$\mathbf{s}(u, v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} A_i^n(u) A_j^m(v)\mathbf{p}_{ij}$$

Tenzori szorzat felületek



Bézier- és B-Spline felületek

A Bézier- és B-Spline felületek esetén tehát a korábban megismert alapfüggvényeket felhasználva állítjuk elő a felületet:

$$\text{Bézier felület: } \mathbf{s}(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} B_i^n(u) B_j^m(v) \mathbf{p}_{ij}$$

$$\text{B-Spline felület: } \mathbf{s}(u,v) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} N_i(u) N_j(v) \mathbf{p}_{ij}$$

Áttekintés

1 Coons felület

2 Bézier- és B-Spline felületek

3 Subdivision görbék

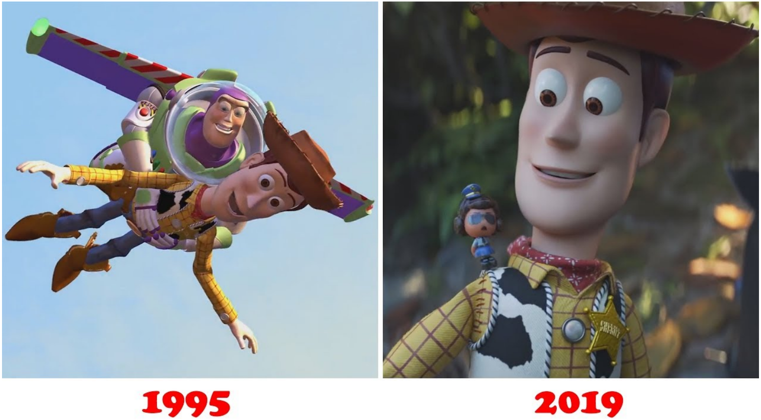
4 Subdivision felületek

A probléma

1995

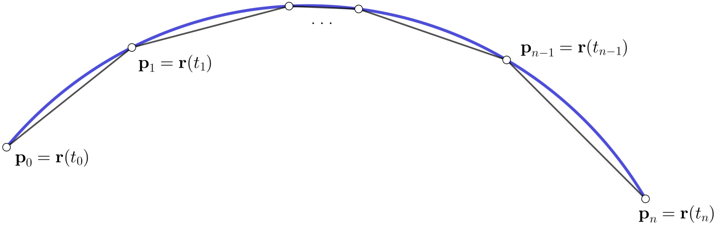
2019

A probléma



Szükségünk van-e arra, hogy ott legyen a matek?

Van-e szükség paraméteres görbére (és felületre)?

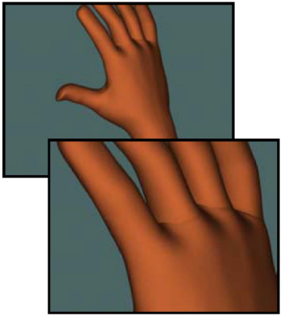


Végül úgyis csak egy "nagyon finom" poligont (poliédert) rajzolunk...

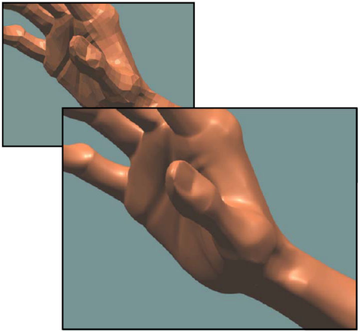
Egy alternatív út

Egy alternatív út

Woody's hand (NURBS)



Geri's hand (subdivision)



Corner-cutting algoritmus

Induljunk ki egy adott poligonból, és folyamatosan hajtsuk végre az alábbiakat:

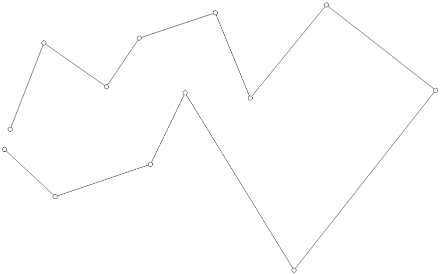
Corner-cutting algoritmus

Induljunk ki egy adott poligonból, és folyamatosan hajtsuk végre az alábbiakat:

1. Szúrjuk be a poligon minden szakaszára annak $\frac{1}{4}$ és $\frac{3}{4}$ arányú osztópontjait
2. Távolítsuk el a korábbi csúcsokat
3. Kössük össze az új csúcsokat

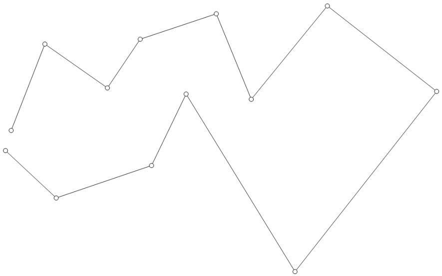
Subdivision görbék

Legyen adott a $P^0 = \{\mathbf{p}_i | i \in \mathbb{Z}\}$, melynek **rekurzív finomításával** egy új $P^{j+1} = \{\mathbf{p}_i^{j+1} | i \in \mathbb{Z}\}$ poligont kapunk, ahol $j \geq 0$.



Subdivision görbék

Legyen adott a $P^0 = \{\mathbf{p}_i | i \in \mathbb{Z}\}$, melynek **rekurzív finomításával** egy új $P^{j+1} = \{\mathbf{p}_i^{j+1} | i \in \mathbb{Z}\}$ poligont kapunk, ahol $j \geq 0$.



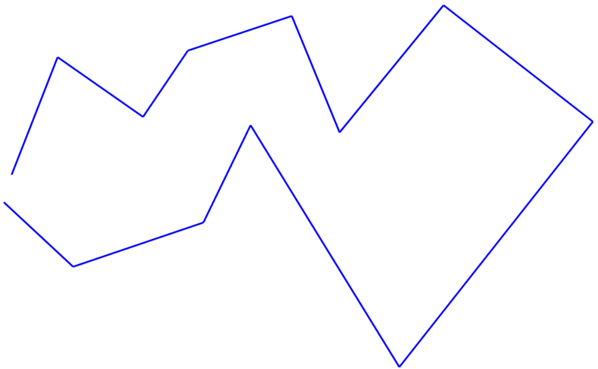
A görbét a folyamatos finomítások eredményeképpen, igazából **a poligonok határgörbéjeként** kapjuk.

$$C = \lim_{j \to \infty} P^j$$

Chaikin algoritmus (1974)

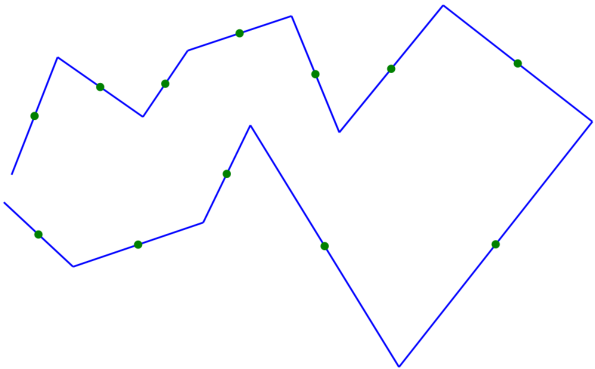
Chaikin algoritmus (1974)

1. Induljunk ki egy adott poligonból



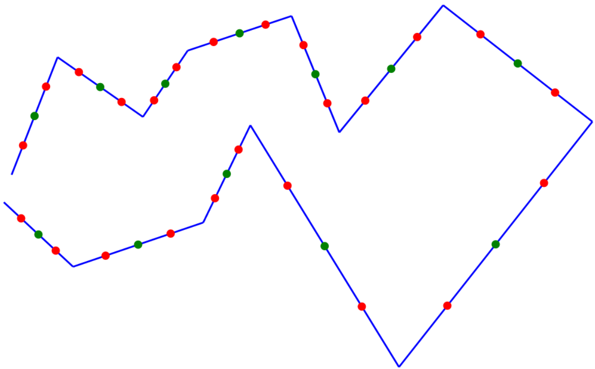
Chaikin algoritmus (1974)

1. Induljunk ki egy adott poligonból
2. Szúrjuk be a felezőpontokat a csúcsok közé (splitting step)



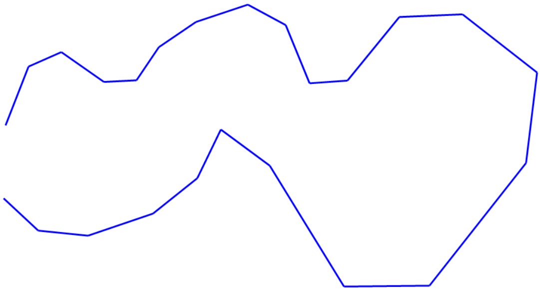
Chaikin algoritmus (1974)

1. Induljunk ki egy adott poligonból
2. Szúrjuk be a felezőpontokat a csúcsok közé (splitting step)
3. Sorra átlagoljuk a csúcsokat óramutató járásával megegyezően a szomszédaival (averaging step)



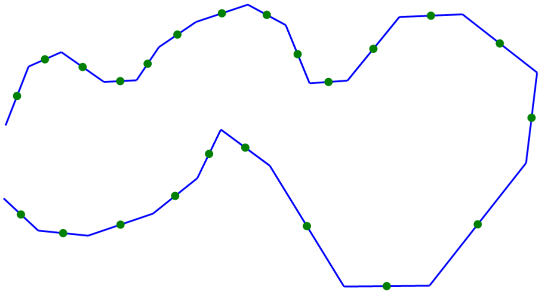
Chaikin algoritmus (1974)

1. Induljunk ki egy adott poligonból
2. Szúrjuk be a felezőpontokat a csúcsok közé (splitting step)
3. Sorra átlagoljuk a csúcsokat óramutató járásával megegyezően a szomszédaival (averaging step)
4. Ugorjunk a 2. lépésre



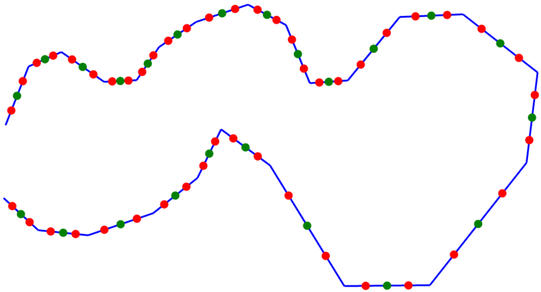
Chaikin algoritmus (1974)

1. Induljunk ki egy adott poligonból
2. Szúrjuk be a felezőpontokat a csúcsok közé (splitting step)
3. Sorra átlagoljuk a csúcsokat óramutató járásával megegyezően a szomszédaival (averaging step)
4. Ugorjunk a 2. lépésre



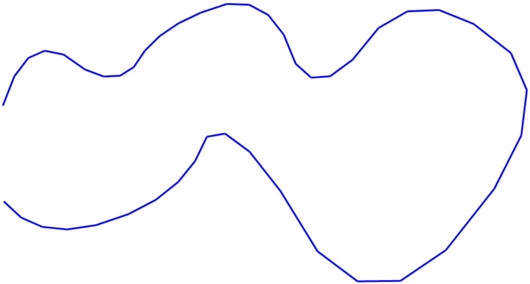
Chaikin algoritmus (1974)

1. Induljunk ki egy adott poligonból
2. Szúrjuk be a felezőpontokat a csúcsok közé (splitting step)
3. Sorra átlagoljuk a csúcsokat óramutató járásával megegyezően a szomszédaival (averaging step)
4. Ugorjunk a 2. lépésre



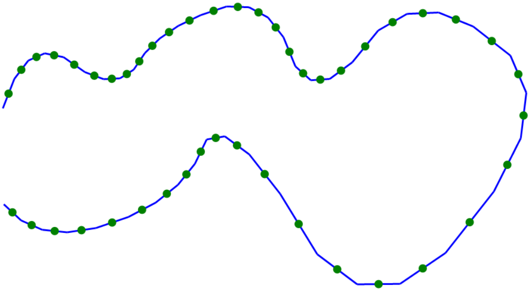
Chaikin algoritmus (1974)

1. Induljunk ki egy adott poligonból
2. Szúrjuk be a felezőpontokat a csúcsok közé (splitting step)
3. Sorra átlagoljuk a csúcsokat óramutató járásával megegyezően a szomszédaival (averaging step)
4. Ugorjunk a 2. lépésre



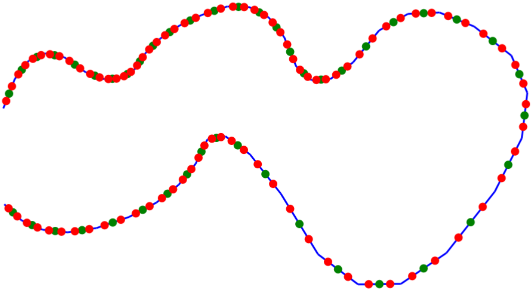
Chaikin algoritmus (1974)

1. Induljunk ki egy adott poligonból
2. Szúrjuk be a felezőpontokat a csúcsok közé (splitting step)
3. Sorra átlagoljuk a csúcsokat óramutató járásával megegyezően a szomszédaival (averaging step)
4. Ugorjunk a 2. lépésre



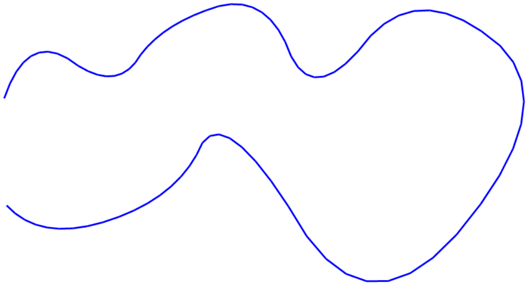
Chaikin algoritmus (1974)

1. Induljunk ki egy adott poligonból
2. Szúrjuk be a felezőpontokat a csúcsok közé (splitting step)
3. Sorra átlagoljuk a csúcsokat óramutató járásával megegyezően a szomszédaival (averaging step)
4. Ugorjunk a 2. lépésre



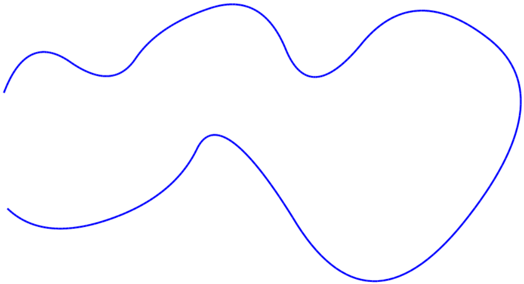
Chaikin algoritmus (1974)

1. Induljunk ki egy adott poligonból
2. Szúrjuk be a felezőpontokat a csúcsok közé (splitting step)
3. Sorra átlagoljuk a csúcsokat óramutató járásával megegyezően a szomszédaival (averaging step)
4. Ugorjunk a 2. lépésre



Chaikin algoritmus (1974)

1. Induljunk ki egy adott poligonból
2. Szúrjuk be a felezőpontokat a csúcsok közé (splitting step)
3. Sorra átlagoljuk a csúcsokat óramutató járásával megegyezően a szomszédaival (averaging step)
4. Ugorjunk a 2. lépésre



Subdivision maszkkok

Az ún. *averaging step* általánosítható, tehát a P^{j+1} pont alakja

$$\mathbf{p}_i^{j+1} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m \mathbf{p}_k^j,$$

ahol

$$A = (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots), \; a_m \in \mathbb{R}.$$

Ezen együtthatók összessége a **subdivision maszk**.

Néhány kritérium a maszkokkal szemben

1. $\sum_{i=0}^{n} a_i = 1$

Néhány kritérium a maszkokkal szemben

1. $\sum_{i=0}^{n} a_i = 1$
2. $a_i = a_{n-i}$

Néhány kritérium a maszkokkal szemben

1. $\sum_{i=0}^{n} a_i = 1$
2. $a_i = a_{n-i}$
3. $a_i > 0,\ i \in \{0, 1, \ldots, n\}$

Néhány kritérium a maszkokkal szemben

1. $\sum_{i=0}^{n} a_i = 1$
2. $a_i = a_{n-i}$
3. $a_i > 0,\ i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ (approximációs esetben)

Ismert, gyakran használt maszkok

- $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (Chaikin, corner cutting)

Ismert, gyakran használt maszkok

- $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (Chaikin, corner cutting)
- $\frac{1}{2^n}\left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}\right)$ (Lane-Riesenfield, $n+1$-ed fokú B-Spline görbe)

Ismert, gyakran használt maszkok

- $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (Chaikin, corner cutting)
- $\frac{1}{2^n}\left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}\right)$ (Lane-Riesenfield, $n+1$-ed fokú B-Spline görbe)
    - $n = 0$: (1)

Ismert, gyakran használt maszkok

- $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (Chaikin, corner cutting)
- $\frac{1}{2^n}\left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}\right)$ (Lane-Riesenfield, $n+1$-ed fokú B-Spline görbe)
  - $n = 0$: (1)
  - $n = 1$: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (kvadratikus B-Spline)

Ismert, gyakran használt maszkok

- $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (Chaikin, corner cutting)
- $\frac{1}{2^n}\left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}\right)$ (Lane-Riesenfield, $n+1$-ed fokú B-Spline görbe)
  - $n = 0$: (1)
  - $n = 1$: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (kvadratikus B-Spline)
  - $n = 2$: $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ (kubikus B-Spline)

Ismert, gyakran használt maszkok

- $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (Chaikin, corner cutting)
- $\frac{1}{2^n}\left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}\right)$ (Lane-Riesenfield, $n+1$-ed fokú B-Spline görbe)
  - $n = 0$: (1)
  - $n = 1$: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (kvadratikus B-Spline)
  - $n = 2$: $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ (kubikus B-Spline)
- $\left(-\frac{2}{16}, \frac{5}{16}, \frac{10}{16}, \frac{5}{16}, -\frac{2}{16}\right)$ (Dyn-Levin-Gregory, interpolációs maszk)

Áttekintés

1 Coons felület

2 Bézier- és B-Spline felületek

3 Subdivision görbék

4 Subdivision felületek

Subdivision felületek

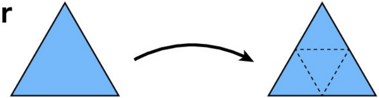
Felületek esetén poligon helyett poliéderek finomítása a célunk. A poliéderek alapja általában

- háromszög
- négyszög

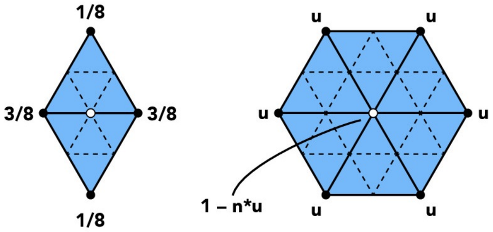
Rengeteg subdivision séma létezik: **Subdivision Zoo**

Loop subdivision

- Split each triangle into four



- Assign new vertex positions according to weights:

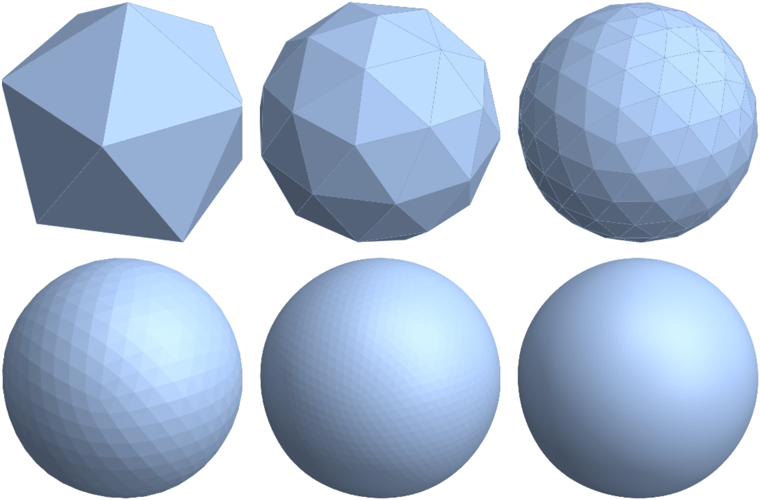


n: vertex degree

u: 3/16 if n=3, 3/(8n) otherwise

New vertices　　Old vertices

Loop subdivision



Köszönöm a figyelmet!