ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ»

Факультет физико-математических и естественных наук
Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

Задание по материалам лекции 3.1

Дисциплина: непрерывные математические модели

01 марта 2022

Заведующий кафедрой	: д.Т.н., проф. К.Е. Самуйлов
Студент	: Кейела Патачона
Курс	: 5-й
Группа	: НПМмд-02-2021
Преподаватель	: Д.В. Диваков

Москва 2022

Содержание

Задание **3**

Выполнение работы **5**

1 Теоретическая часть **5**

2 Решение заданий **6**

2.1 Построение траекторий тела брошенного под разными начальными углами 6

2.2 Сравнение с траекториями тела при отсутствии сопротивления 7

2.3 Дальность полета 7

2.4 Сравнение скорости 7

Задание

Рассмотрим модель движения тела с учетом сопротивления воздуха, описываемую системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= v_x, \\ \\ \frac{dy}{dt} &= v_y, \\ \\ \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{k(v)}{m} v_x, \\ \\ \frac{dv_y}{dt} &= -g - \frac{k(v)}{m} v_x, \end{cases} \tag{1}$$

и начальными условиями

$$x(0) = x_0 \quad y(0) = y_0 \quad v_x(0) = v_0 cos\alpha_0 \quad v_y(0) = v_0 sin\alpha_0,$$

где $t-$ время (c);$g \approx 9.8M/c^2-$ ускорение свободного падения, $m-$ масса тела (кг), $k(v) = k_0 v$, а $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}-$ скорость (м/с), v_0- начальная скорость (м/с), x_0 и y_0 характеризуют начальное положение тела в декартовой системе координат.

Рассмотрим тело массой $m = 0.05$кг, характеризующееся коэффициентом $k_0 = 0.03$кг/м в случае $x_0 = 0$м, $y_0 = 1.5$м, а $v_0 = 1.6$м/с.

В рамках модели движения тела с учетом сопротивления воздуха

1. рассчитать и изобразить графически траектории рассматриваемого тела, брошенного под начальными углами $\alpha_0 = \pi/3$, $\alpha_0 = \pi/4$, $\alpha_0 = \pi/6$, $\alpha_0 = \pi/8$, $\alpha_0 = \pi/12$ и $\alpha_0 = 0$;

2. сравнить графически рассчитанные в п.1 траектории с аналогичными траекториями полета тела без учета сопротивления воздуха;

3. рассчитать численно с точность $\epsilon = 0.1$ дальность полета для рассмотренных в п.1 углов полета и сравнить с аналогичными дальностями полета тела без учета сопротивления воздуха;

4. для каждого из случаев из п.1 вычислить максимальную скорость полета и сравнить с аналогичной максимальной скоростью полета тела без учета сопротивления воздуха.

5. проанализировать полученные результаты.

Примечание 1 *Решать рассматриваемую задачу Коши рекомендуется в любой системе компьютерной математики (Maple, Mathematica, SciLab и др.), в которой имеются встроенные методы решения задачи Коши, а также встроенные методы построения графиков.*

Примечание 2 *В ТУИС в Теме 3 размещен готовый код в системе SciLab https://www.scilab.org/download/6.1.0*

, в котором реализован метод решения рассматриваемой задачи Коши.

Оформить результаты выполнения лабораторной работы в виде отчета, содержащего:

- титульный лист с указанием фамилии, имени и отчества (при наличии) студента, выполнившего лабораторную работу;
- содержание, включающее все разделы лабораторной работы;
- раздел с краткой теоретической справкой о рассматриваемой модели, включающий основные уравнения модели
- раздел с численными расчетами;
- необходимо, чтобы результаты выполнения пп.1-4 вошли в отчет;
- отчет загружается на ТУИС в формате '.pdf'.

Выполнение работы

1 Теоретическая часть

В этой работе мы рассматриваем модель движения тела с учетом сопротивления воздуха, которая описывается системой дифференциальных уравнений (1) с заданными начальными условиями. Решить данную систему не получится аналитически, поэтому мы использовали пакет *solve_ivp* из библиотеки *scipy.integrate* на языке программирования *python*. Выбор этого языка программирования объясняется тем, что он позволяет удобно и наглядно представить результаты. Код решения системы (1) выглядит как следующее:

```
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.lines import Line2D
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp
plt.style.use('seaborn-poster')
%matplotlib inline
```

Листинг 1: Использованные библиотеки

```
def sys_ode(t,u):
    du = [0]*4
    du[0] = u[2]
    du[1] = u[3]
    du[2] = -k0*np.sqrt(u[2]**2 + u[3]**2)*u[2]/m
    du[3] = -g-k0*np.sqrt(u[2]**2 + u[3]**2)*u[3]/m
    return du

#main constants
g = 9.8
m = 0.05
#initial position and speed
x0, y0 = 0, 1.5
v0 = 1.6
k0 = 0.03
t0 = 0 #initial time
T, N = 10, 2048
# interval fragmentation for numeric computation
t = np.linspace(t0,T, N)

angles = [np.pi/3,np.pi/4,np.pi/6,np.pi/8,np.pi/12,0]
results = []
for i, alpha in enumerate(angles):
    u0 = [x0, y0, v0*np.cos(alpha), v0*np.sin(alpha)] # initial
   conditions
    #Solve ODE with initial conditions
    sol = solve_ivp(sys_ode, [t0, T], u0, t_eval=t)
    # Save the solution in @results
    results.append(sol.y.T)
```

Листинг 2: Решение системы диф. урав. рассматриваемой модели.

С помощью полученных решений для каждого угла, мы ответим на вопросы, касающиеся численной части (построение траекторий объекта при присутствии сопротивления и вычисление скорости). Нам также понадобится уравнение движения тела без сопротивления:

$$y = y_0 + xtan\alpha_0 - \frac{g}{v_0^2 cos^2\alpha_0}x^2. \tag{2}$$

Дальность полета тела без сопротивления:

$$X_{max} = \frac{v_0 cos\alpha_0}{g}\left(v_0 sin\alpha_0 + \sqrt{v_0^2 sin^2\alpha_0 + 2gy_0}\right). \tag{3}$$

Скорость в момент приземления (максимальная скорость):

$$V_{max} = \sqrt{v_0^2 + 2gy_0}. \tag{4}$$

2 Решение заданий

2.1 Построение траекторий тела брошенного под разными начальными углами

При использовании результатов, полученных при выполнении кода *Листинг 2* мы построили следующие траектории:

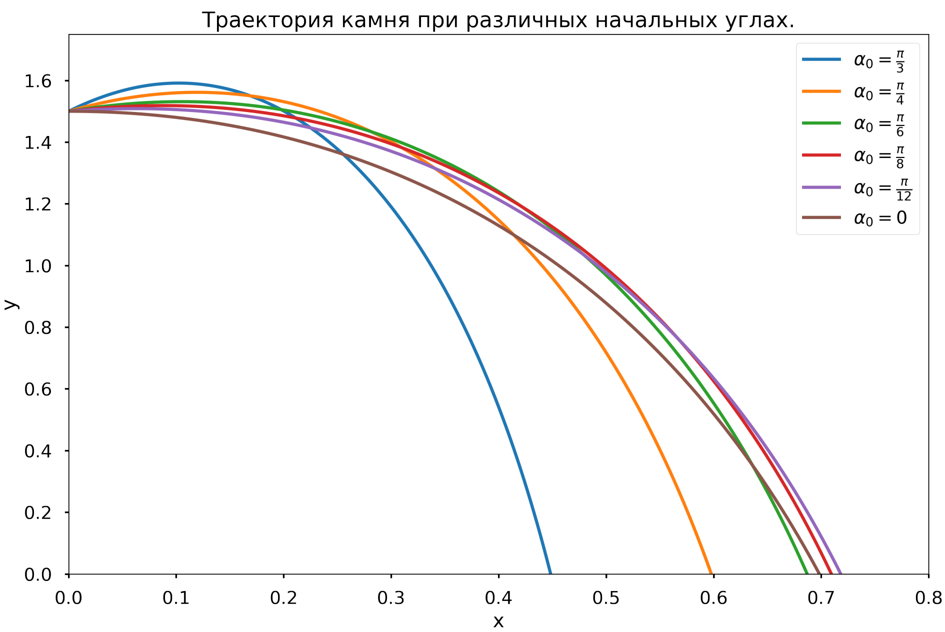

Рис. 1: Ответ на вопрос номер 1

Как видно на рис.1, в заданных условиях, тело дальше летит при бросании под углом $\frac{\pi}{12}$. Самая маленькая дальность получена при бросании под углом $\frac{\pi}{3}$.

2.2 Сравнение с траекториями тела при отсутствии сопротивления

Для каждого отдельного начального угла мы смотрим на разницу между траекториями с сопротивлением и без его.

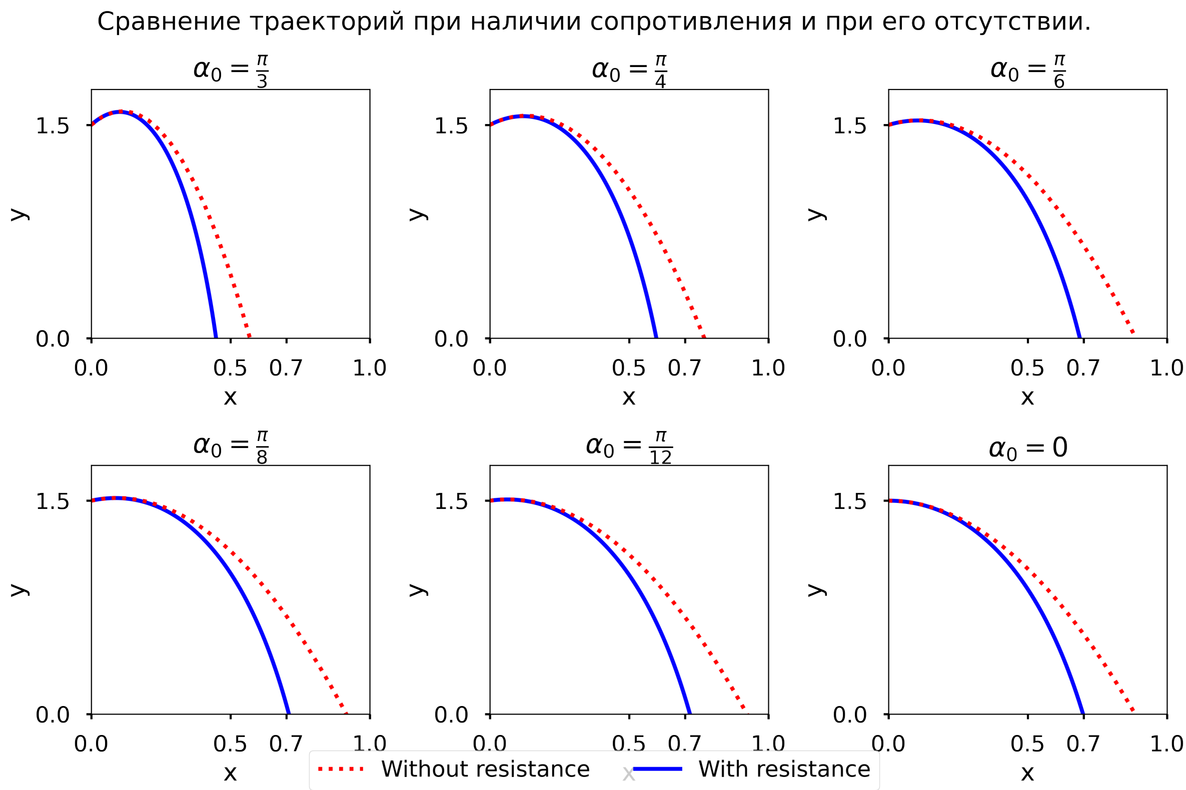

Рис. 2: Сравнение траекторий

Рис.2 подтверждает, что при отсутствии сопротивления объекта дальше летит.

2.3 Дальность полета

Используя численные результаты можно найти дальность полета с сопротивлением, а дальность полета без сопротивления находятся по формуле (3). Таблица 1 сравнивает полученные ответы. Результаты в этой таблице подтверждают результаты на рис.2.

2.4 Сравнение скорости

Используя численные результаты и формулу максимальной скорости (4) мы получили результаты в таблице 2. Это естественно и ожидаемо, что максимальная скорость тела движущего без сопротивления больше скорости при присутствии сопротивления.

Угол	Дальность с сопр.	Дальность без сопр.
$\frac{\pi}{3}$	0.44	0.57
$\frac{\pi}{4}$	0.59	0.77
$\frac{\pi}{6}$	0.67	0.89
$\frac{\pi}{8}$	0.7	0.92
$\frac{\pi}{12}$	0.71	0.92
0	0.68	0.89

Таблица 1: Сравнение дальности полета

Угол	Скорость с сопр.	Скорость без сопр.
$\frac{\pi}{3}$	3.72	5.65
$\frac{\pi}{4}$	3.71	5.65
$\frac{\pi}{6}$	3.71	5.65
$\frac{\pi}{8}$	3.7	5.65
$\frac{\pi}{12}$	3.7	5.65
0	3.69	5.65

Таблица 2: Сравнение скорости полета