Научное програмирование

Задача на собственные значения

Кейела Патачона, НПМмд-02-21

Содержание

List of Figures

1 Цель работы

Цель этой работы — посмотреть, как мы определяем собственные значения и собственные векторы с Octave, и увидеть их использование в Марковских процессах и случайных блужданиях в Octave.

2 Задача на собственные значения

2.1 Собственные значения и собственные векторы

Зададим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Необходимо найти собственные значения и собственные векторы этой матрицы. Для нахождения используется команда eig с двумя выходными аргументами. Синтаксис: $[v \quad Lambda] = eig(A)$

Первый элемент результата есть матрица, столбцы которой представляют собой собственные векторы, а второй результат будет диагональной матрицей с собственными значениями на диагонали.

```
>> diary on
>> A=[1 2 -3; 2 4 0; 1 1 1]
A =

   1   2  -3
   2   4   0
   1   1   1

>> [v lambda] = eig(A)
v =

  -0.2400 +      0i  -0.7920 +      0i  -0.7920 -      0i
  -0.9139 +      0i   0.4523 + 0.1226i   0.4523 - 0.1226i
  -0.3273 +      0i   0.2322 + 0.3152i   0.2322 - 0.3152i

lambda =

Diagonal Matrix

   4.5251 +      0i                  0                  0
                  0   0.7374 + 0.8844i                  0
                  0                  0   0.7374 - 0.8844i
```

Figure 2.1: eigenvalues eigenvectors

Для того, чтобы получить матрицу с действительными собственными значениями, мы можем создать симметричную матрицу (имеющую действительные собственные значения) путём умножения матрицы и на транспонированную матрицу:

```
>> C = A' * A
C =

    6   11   -2
   11   21   -5
   -2   -5   10

>> [v lambda] = eig(C)
v =

   0.876137   0.188733  -0.443581
  -0.477715   0.216620  -0.851390
  -0.064597   0.957839   0.279949

lambda =

Diagonal Matrix

    0.1497         0         0
         0    8.4751         0
         0         0   28.3752
```

Figure 2.2: eigenvalues-eigenvectors-real

Здесь диагональные элементы матрицы A являются собственными значениями, а соответствующие столбцы матрицы Vявляются соответствующими собственными векторами. Каждому собственному значению соответствует бесконечное семейство собственных векторов. Типичные собственные векторы, полученные в Octave, нормированы на единицу.

3 Марковские цепи

Рассмотрим последовательность случайных событий при соблюдении следующих условий:

- возможно конечное число состояний;
- через определённые промежутки времени проводится наблюдение и регистрируется состояние системы;
- для каждого состояния мы задаём вероятность перехода в каждое из остальных состояний или вероятность остаться в том же самом состоянии. Существенным предположением является то, что эти вероятности зависят только от текущего состояния.

Такая система называется цепью Маркова. Наша задача – предсказать вероятности состояний системы.

4 Случайное блуждание

Предположим, что мы случайным образом передвигаемся следующим образом. В состояниях 2, 3 или 4 мы перемещаемся влево или вправо наугад. По достижении конца дороги (состояния 1 или 5) мы останавливаемся.

Наша цель – предсказать, где мы окажемся. Начнем с вектора вероятности.

- Предположим, что мы можем начать в любой точке с равной веро ятностью. Тогда начальный вектор будет $(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)$.
- С другой стороны, мы можем знать начальное состояние. Пред положим, мы начинаем с состояния 3. Тогда начальный вектор будет $(0, 0, 1, 0, 0)$.

Мы хотим предсказать наше местоположение после k ходов. Это делается путём записи переходной матрицы. Сформируем массив $n * n$, элемент ij которого является вероятностью перехода из состояния i в j. Пусть T есть транспонированная матрица переходов. Матричное произведение Tx даёт новое распределение вероятностей после одного периода времени. Продолжение умножения на T даёт вероятности для будущих состояний. Таким образом, для любого начального вектора вероятности x и любого положительного целого числа k вектор вероятности после k периодов времени равен

$$\vec{y} = T^k \vec{x}$$

Для примера случайного блуждания найдём вектор вероятности после 5 шагов для каждого из следующих начальных векторов вероятности:

$$a = [0.2\ \ 0.2\ \ 0.2\ \ 0.2\ \ 0.2]^T$$

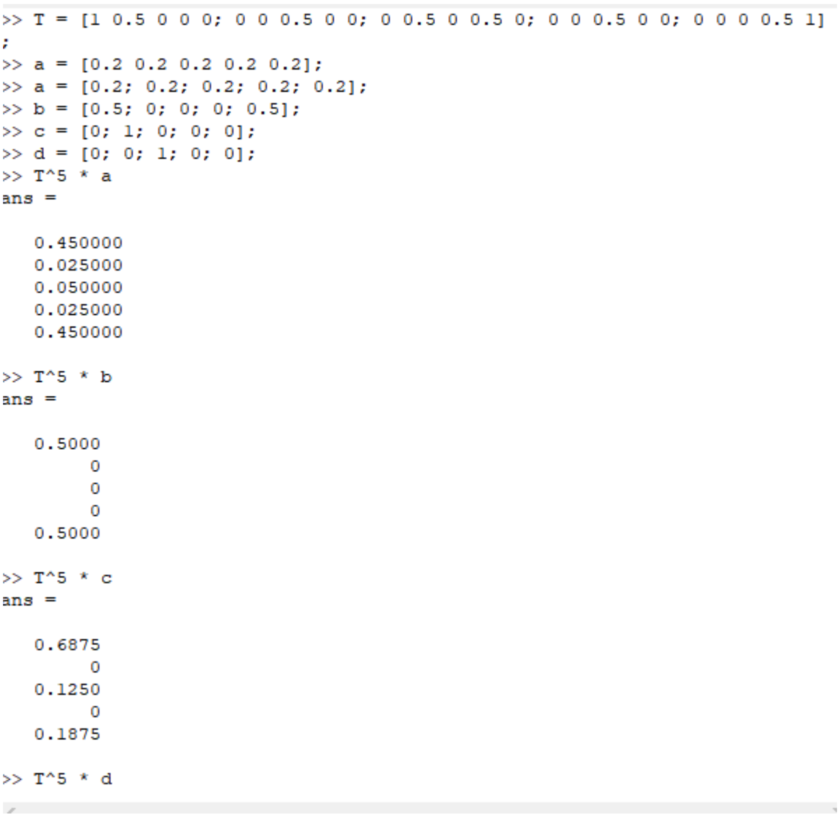
$$b = [0.5\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0.5]^T$$

$$c = [0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T$$

$$d = [0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0]^T$$

Сформируем матрицу переходов:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$



```
>> T = [1 0.5 0 0 0; 0 0 0.5 0 0; 0 0.5 0 0.5 0; 0 0 0.5 0 0; 0 0 0 0.5 1]
;
>> a = [0.2 0.2 0.2 0.2 0.2];
>> a = [0.2; 0.2; 0.2; 0.2; 0.2];
>> b = [0.5; 0; 0; 0; 0.5];
>> c = [0; 1; 0; 0; 0];
>> d = [0; 0; 1; 0; 0];
>> T^5 * a
ans =

   0.450000
   0.025000
   0.050000
   0.025000
   0.450000

>> T^5 * b
ans =

   0.5000
        0
        0
        0
   0.5000

>> T^5 * c
ans =

   0.6875
        0
   0.1250
        0
   0.1875

>> T^5 * d
```

Figure 4.1: вектор-буд-сос

Состояние x является равновесным, если $\vec{x} = T\vec{x}$, где T– матрица перехода для цепи Маркова. Равновесное состояние не приводит к изменению состояния в будущем. Каждая цепь Маркова имеет хотя бы одно равновесное состояние.

Пусть T- матрица переходов для цепи Маркова. Тогда $\lambda = 1$ является собственным значением T. Если x является собственным вектором для $\lambda = 1$ с неотрицательными компонентами, сумма которых равна 1, то является равновесным состоянием для T.

Найдём вектор равновесного состояния для цепи Маркова с переходной матрицей

$$T = \begin{bmatrix} 0.48 & 0.51 & 0.14 \\ 0.29 & 0.04 & 0.52 \\ 0.23 & 0.45 & 0.34 \end{bmatrix}$$

```
>> T = [0.48 0.51 0.14; 0.29 0.04 0.52; 0.23 0.45 0.35]
T =

   0.480000   0.510000   0.140000
   0.290000   0.040000   0.520000
   0.230000   0.450000   0.350000

>> [v lambda] = eig(T)
v =

  -0.6450  -0.8026   0.4349
  -0.5042   0.2577  -0.8168
  -0.5743   0.5380   0.3791

lambda =

Diagonal Matrix

   1.0033        0        0
        0   0.2224        0
        0        0  -0.3557

>> x = v(:,1)/sum(v(:,1))
x =

   0.3742
   0.2925
   0.3332
```

Figure 4.2: стац-вектор

Таким образом, $x = (0.37631\ \ 0.29287\ \ 0.33082)$ является вектором равновесного состояния. Проверили это.

```
>> T^10 * x
ans =

   0.3869
   0.3024
   0.3445

>> T^50 * x
ans =

   0.4420
   0.3455
   0.3935

>> T^50 * x - T^10 * x
ans =

   0.055067
   0.043046
   0.049035

>> diary off
```

Figure 4.3: вектор-равн-сос

5 Вывод

В конце этой работы я узнала, как определять собственные векторы и собственные значения с помощью операций с Octave, а также как использовать их для определения стационарных или граничных точек на марковских процессах и случайном блуждании.

Список литературы

1. Инструкция к лабораторной работе №8