

Лабораторная работа №6 - Пределы, последовательности и интегралы

Кейела Патачона

15 декабря, 2021, Москва, Россия

Российский Университет Дружбы Народов

Цели и задачи

Цель лабораторной работы

Вычисление пределов, сумм рядов и интегралов.

Задача

На языке Octave определить предел, частичные суммы рядов, вычислить интеграл с помощью различных реализаций и сравнить время выполнения этих реализаций.

Выполнение лабораторной работы

Рассмотрим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Вычисление предела

```
>> library(mg)
>> f = function(x) 1 + 1 / x1^2
f =
function(x) 1 + 1 / x1^2
>> n = 101001
n =
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

>> format(limit)
>> E = 10^-7 * E
E =
1
100
1000
10000
100000
1000000
10000000
100000000
1000000000

>> f(n)
```

Figure 1: Нахождение предела 1

```
>> f(n)
ans =

2.000000000000000
2.593742460100002
2.704813829421529
2.716923932235520
2.718145926824356
2.718268237197528
2.718280469156428
2.718281693980372
2.718281786395798
2.718282030814509

>> format
>>
```

Figure 2: Нахождение предела 2

Частичные суммы

Пусть $a = \sum_{n=2}^{\infty} a_n$ -ряд, n -й член равен

$$a_n = \frac{1}{n(n+2)}$$

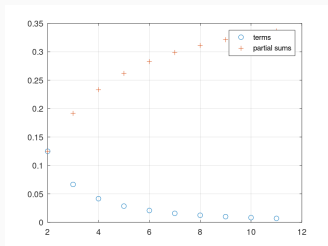


Figure 3: Частичные суммы - график

Сумма ряда

Найдём сумму первых 1000 членов гармонического ряда:

$$\sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n}$$

Нам нужно только сгенерировать члены как ряда вектор, а затем взять их сумму.

```
>>  
>> n = [1:1:1000];  
>> a = 1 ./ n;  
>> sum(a)  
ans = 7.4855
```

Figure 4: Сумма ряда

Численное интегрирование

Octave имеет несколько встроенных функций для вычисления определённых интегралов. Мы будем использовать команду *quad* (сокращение от слова квадратура). Вычислим интеграл: $\int_0^{\pi/2} e^{x^2} \cos(x) dx$

```
>>  
>> function y = f(x)  
y = exp (x .^ 2) .* cos (x);  
end  
>> quad ('f',0,pi/2)  
ans = 1.8757  
>>  
>> f = @(x) exp (x .^ 2) .* cos (x)  
f =  
  
@(x) exp (x .^ 2) .* cos (x)  
  
>> quad (f,0,pi/2)  
ans = 1.8757  
>>
```

Figure 5: Определенный интеграл

Правило средней точки

Правило средней точки, правило трапеции и правило Симпсона являются общими алгоритмами, используемыми для численного интегрирования. Напишем скрипт, чтобы вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2} e^{x^2} \cos(x) dx$ по правилу средней точки для $n = 100$. Стратегия заключается в использовании цикла, который добавляет значение функции к промежуточной сумме с каждой итерацией. В конце сумма умножается на dx

```
>> midpoint
a = 0
b = 1.5708
n = 100
dx = 0.015708
approx = 1.8758
```

Правило средней точки

Традиционный код работает хорошо, но поскольку Octave является векторным языком, также можно писать векторизованный код, который не требует каких-либо циклов. Создадим вектор x -координат средних точек. Затем мы оцениваем f по этому вектору средней точки, чтобы получить вектор значений функции. Аппроксимация средней точки – это сумма компонент вектора, умноженная на dx .

```
>> midpoint_v  
a = 0  
b = 1.5708  
n = 100  
dx = 0.015708  
approx = 1.8758
```

Figure 6: Векторный результат

Сравнили время выполнения для каждой реализации, и векторная реализация работает быстрее.

```
--  
>> tic; midpoint; toc  
a = 0  
b = 1.5708  
n = 100  
dx = 0.015708  
approx = 1.8758  
Elapsed time is 0.0138249 seconds.  
>>  
>> tic; midpoint_v; toc  
a = 0  
b = 1.5708  
n = 100  
dx = 0.015708  
approx = 1.8758  
Elapsed time is 0.00774312 seconds.  
>> |
```

Figure 7: Сравнение реализаций

Вывод

В ходе выполнения данной работы мы ознакомились с вычислением пределов, с работой с последовательностями и с рядами и научились посчитать определенные интегралы с помощью различных методов на языке Octave.