PHS3903 – Projet de simulation
Mini-devoir. Méthode de la matrice 2D.

Directives

Répondre aux questions suivantes à l'aide du code Python (ou Matlab) fourni sur Moodle, auquel vous aurez apporté les modifications nécessaires. Justifier vos réponses avec clarté et concision. Vos tableaux et figures doivent être lisibles et présentés selon les règles de l'art. Remettre un fichier .pdf avec vos réponses et un fichier .py (ou .m) contenant votre code dans la boîte de dépôt sur Moodle.

Méthode de la matrice en 2D, paroirs internes.

En classe, je vous ai présenté la méthode de la matrice d'ordre $O\left(\delta^2\right)$ en utilisant l'exemple d'une distribution de la température à l'intérieur d'un appartement rectangulaire de taille $L_x = 4m$ par $L_y = 2.4m$ avec les murs d'épaisseur $L_m = 0.4m$ en brique de la conductivité thermique $k = 0.85W/(mK)$. La conductivité d'air à l'intérieure d'un appartement est $k = 0.024W/(mK)$. Le code se trouve dans un fichier intitulé « Equation_independant_du_temps_2D.m » que j'ai mis dans un dossier de mini-projet 4. En fait, ce code dans la forme actuelle n'est pas complètement adéquat, car il ne traite pas explicitement les paroirs internes entre l'espace intérieur d'appartement et les murs isolants. Dans ce mini-projet, vous allez améliorer le code et implantez la condition de continuité de flux de chaleur sur les paroirs internes.

<u>1. Travail préparatoire.</u> Vous devez d'abord modifier le code «Equation_independant_du_temps_2D.m» en utilisant une formulation de matrices 2D pleines. D'abord, modifiez le code pour implanter avec précision $O\left(\delta^2\right)$ les conditions convectives sur les surfaces extérieures de tous les quatre murs d'appartement. Cette condition correspond au cas d'un appartement suspendu dans l'air comme dans le cas d'Habitat 67 (http://fr.wikipedia.org/wiki/Habitat_67).

Surfaces extérieures du mur :

$$-k_{mur}\,\overline{\nabla}T\Big|_{mur}\cdot\overline{n}_{mur,ext} = h\left(T\Big|_{mur,ext} - T_a\right)$$

$\overline{n}_{mur,ext}$ – normale au mur dirigée vers l'extérieur ; T_a – température ambiante ; h – coefficient de transfert de chaleur

Ensuit, modifiez le code pour implanter avec précision $O\left(\delta^2\right)$ la condition de continuité du flux de chaleur sur les surfaces intérieures entre les murs isolants et l'intérieure d'appartement. Cette condition s'écrit comme :

Surfaces intérieures du mur :

$$-k_{mur}\,\overline{\nabla}T\Big|_{mur}\cdot\overline{n}_{mur,\mathrm{int}} = -k_{air}\,\overline{\nabla}T\Big|_{air}\cdot\overline{n}_{mur,\mathrm{int}}$$

$\overline{n}_{mur,\mathrm{int}}$ – normale au mur dirigée vers l'intérieure ; k_{mur} – conductivité thermique du mur ; k_{air} – conductivité thermique de l'air

<u>2. Simulations numériques</u>

En utilisant les valeurs des constantes physiques $T_a = -10^0$ C, $h = 20W/\left(m^2K\right)$ à utiliser dans les conditions convectives et $q = 10^4\,W/m^3$ dans la source de chaleur, vous devez calculer plusieurs paramètres suivants :

1) (8 Points). La température au milieu de l'appartement $T_m = T\left(\frac{L_x}{2dx}+1, \frac{L_y}{2dy}+1\right)$ et l'erreur $Err\left(T_m,\delta\right)$ associée avec cette valeur en utilisant les pas de discrétisation $dx = dy = \delta = 10cm \cdot \left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}\right]$ et la définition d'erreur $Err(T,\delta) = \left|T(2\delta) - T(\delta)\right|$. Parmi les pas mentionnés, quelle est la plus petite valeur de δ pour laquelle votre ordinateur est capable de faire le calcul? Quelle est la nature de cette limitation en δ ? Quelle est la valeur la plus précise de T_m et l'erreur Err associée ? Présenter la distribution de la température avec échelle de valeurs (colorbar).

Consigne 1 : pour résoudre Mx=b, utilisez [L U]=lu(M) ; x=U\(L\b)) (Matlab) ou np.linalg.solve(M,b) (Python).
Consigne 2 : pour l'évaluation de $Err(T,\delta)$ vous devez effectuer deux calculs aux pas δ et 2δ.
Consigne 3 : les calculs avec les pas $\delta = 10cm \cdot \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{16}\right]$ peuvent prendre beaucoup de temps, attendez patiemment jusqu'à la fin.

2) (8 Points). Pour chaque pas de discrétisation en 1) sauvegarder le temps $t_{ini}(\delta)$ d'initialisation de la matrice M, le temps $t_{inv}(\delta)$ d'inversion de la matrice M en utilisant la décomposition LU, aussi bien que le mémoire nécessaire pour stoker les matrices L et U ($mem(\delta) = 8 \cdot \left(\frac{L_x}{dx} \cdot \frac{L_y}{dy}\right)^2$ octets). Tracez $mem(\delta)$, $t_{ini}(\delta)$, $t_{inv}(\delta)$, $Err(T_m,\delta)$ en utilisant les coordonnés log-log trouvez les quatre exposants et les coefficients appropriés dans les relations suivants :

$$mem(\delta) = A_{mem}\delta^{p_{mem}} \quad ; \quad t_{ini}(\delta) \approx A_{ini}\delta^{p_{ini}} \quad ; \quad t_{inv}(\delta) \approx A_{inv}\delta^{p_{inv}} \quad ; \quad Err(T_m,\delta) \approx A_{err}\delta^{p_{err}}$$

3) (4 Points). À partir des données calculées en 1) et en 2), estimer le pas de discrétisation minimale δ_{128Gb} qu'on pourrait utiliser si un ordinateur avec une mémoire RAM de 128Gb (gigaoctet) était disponible. Pour cette valeur de pas de discrétisation, estimer le temps d'initialisation, le temps d'inversion et l'erreur associée avec une valeur de T_m.