



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

MDC
EM2

KEMDEN

GARNISON
KOMMANDANTUR
REICHSKRIEGSMARINE



R

P. P.

Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematischen**, der **Technischen** und **Naturwissenschaften** nach allen Richtungen hin weiter auszubauen, ist mein stetes durch das Vertrauen und Wohlwollen zahlreicher hervorragender Vertreter obiger Gebiete von Erfolg begleitetes Bemühen, wie mein Verlagskatalog zeigt, und ich hoffe, daß bei gleicher Unterstützung seitens der Gelehrten und Schulmänner des In- und Auslandes auch meine weiteren Unternehmungen Lehrenden und Lernenden in Wissenschaft und Schule jederzeit förderlich sein werden. Verlagsamerbieten gediigener Arbeiten auf einschlägigem Gebiete werden mir deshalb, wenn auch schon gleiche oder ähnliche Werke über denselben Gegenstand in meinem Verlage erschienen sind, stets sehr willkommen sein.

Unter meinen zahlreichen Unternehmungen mache ich ganz besonders auf die von den Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien herausgegebene Encyklopädie der **Mathematischen Wissenschaften** aufmerksam, die in 7 Bänden die Arithmetik und Algebra, die Analysis, die Geometrie, die Mechanik, die Physik, die Geodäsie und Geophysik und die Astronomie behandelt und in einem Schluß-

wird.
besorg

W

wissen

matis

Geschi

matik

Verei

angew

natur

wissenschaftlichen Blätter, jerner Natur und Mensch (Zeitschrift für den gesamten naturkundlichen Unterricht aller Schulen), die Geographische Zeitschrift u. a.

Seit 1868 veröffentliche ich: „Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner“⁴. Diese jährlich zweimal erscheinenden „Mitteilungen“, die in 30 000 Exemplaren im In- und Auslande von mir verbreitet werden, sollen das Publikum, das meinem Verlage Aufmerksamkeit schenkt, von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und von den vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags durch ausführliche Selbstanzeigen der Verfasser in Kenntnis setzen und sind ebenso wie das bis auf die Jüngstzeit fortgeföhrte **Ausführliche Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner auf dem Gebiete der Mathematik, der Technischen und Naturwissenschaften nebst Grenzgebieten**, 100. Ausgabe [XLVIII u. 272 S. gr. 8], in allen Buchhandlungen unentgeltlich zu haben, werden auf Wunsch über auch unter Kreuzband von mir unmittelbar an die Besteller übersandt.

LEIPZIG, Poststraße 3.

B. G. Teubner.

KURT F. WENDT LIBRARY
COLLEGE OF ENGINEERING
UNIVERSITY OF WISCONSIN
MADISON, WI 53706



GASKUGELN

ANWENDUNGEN DER
MECHANISCHEN WÄRMETHEORIE
AUF KOSMOLOGISCHE UND METEOROLOGISCHE PROBLEME

VON

DR. R. EMDEN

PRIVATDOZENT FÜR PHYSIK UND METEOROLOGIE
AN DER KGL. TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN MÜNCHEN

MIT 24 FIGUREN, 12 DIAGRAMMEN UND 5 TAFELN IM TEXT



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1907

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

109093
JUL 29 1907

3703835

NIDC
EM2

Vorwort.

Die nachfolgenden Ausführungen sind entstanden aus einer Reihe von Vorlesungen: Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf meteorologische und kosmologische Probleme, Die allgemeine Zirkulation der Atmosphäre und Die Sonne, die ich in den Jahren 1901—1904 hier an der Technischen Hochschule gehalten; sie werden diese Art ihres Entstehens an vielen Stellen verraten. Abgesehen von der Absicht den materiellen Inhalt dieser Gebiete zu übermitteln, war es damals mein Bestreben die abstrakte Art, in der so oft durch Wort und Schrift theoretische Physik dargeboten wird, durch eine Behandlungsweise zu ersetzen, durch welche die Anwendbarkeit und Fruchtbarkeit dieser Disziplin auf Gebieten, von denen unsere gesamten Daseinsbedingungen abhängen, hervorgehoben werden, und an Stelle mancher herkömmlicher, abstrakter Übungsbeispiele, die sich durch Kollegien und Bücher forterben, einen Übungsstoff treten zu lassen, der aus der Natur der zu behandelnden Probleme sich von selbst ergibt. Dazu schienen mir die ausgewählten Themen vorzüglich geeignet; die allgemeine Zirkulation der Atmosphäre gestattete große Abschnitte der Mechanik und Thermodynamik zu entwickeln, und die Behandlung der Sonne erlaubte einen Knoten zu schürzen, dessen Fäden aus fast sämtlichen Gebieten der Physik zusammenliefen. Gleichzeitig gaben sie ausgezeichnet Anlaß den Hörer zu numerischem Rechnen anzuregen; und ich nützte diese mir sehr willkommene Gelegenheit um so mehr aus, als die Ausbildung einer genügenden Rechenpraxis bei unserm Hochschulunterricht im allgemeinen viel zu wenig berücksichtigt wird. Denn welcher Lehrer würde noch nicht die Erfahrung gemacht haben, (am eigenen Leibe beizufügen würde ich nicht wagen), daß der Anfänger gar oft leichter eine formale Beziehung ableitet, als sie in absolutem Maße auswertet. Das Interesse an der zu gewinnenden Zahl und die zwingende Überzeugung von der Notwendigkeit

a*

ihrer Berechnung auf diesen Gebieten, wo jede Schätzung versagt, ließen ein Unlustgefühl nicht aufkommen, das sich leicht einstellt, wenn das Durchrechnen eines konstruierten Übungsbeispiels lediglich als ein Unterrichtszwecken dienendes, notwendiges Übel empfunden wird. Die Behandlung der Differentialgleichung zweiter Ordnung, die wie ein roter Faden die nachfolgenden Betrachtungen durchzieht und unter einen gemeinsamen Gesichtspunkt bringt, ihre numerische Auswertung in willkürlich gewählten Einheiten und deren Umrechnung in absolute Maße bilden ein typisches Beispiel, wie in ähnlichen Fällen verfahren werden kann. Es zeigt sich auch hier, daß der innere Mechanismus einer solchen Gleichung auch dann vollständig durchschaut und die in ihr enthaltenen quantitativen Beziehungen nutzbar gemacht werden können, wenn es nicht gelingt, sie durch bekannte Funktionen zu integrieren; praktisch verwertbare Zahlen treten an die Stelle von Formeln.

Aus den erwähnten Vorlesungen habe ich einen Teil im vorliegenden Bande zu einem einheitlichen Ganzen zusammengestellt. Nicht berücksichtigt wurde die allgemeine Zirkulation der Atmosphäre; ich hoffe später diesen Gegenstand selbstständig als Seitenstück zu den Gaskugeln herausgeben zu können. Weggelassen wurde ferner alles, was damals nur Unterrichtszwecken und zur Einführung des Anfängers diente; hinzugekommen ist vieles, was außerhalb des Rahmens jener Vorlesungen lag, oder was ich erst später durcharbeitete. Die vollständige Angabe des gewonnenen Zahlenmaterials dürfte dem, der auf diesem Gebiete weiterzuarbeiten beabsichtigt, willkommen sein. In den Anwendungen beabsichtigte ich nicht bestimmte Theorien und Hypothesen aufzustellen und zu entwickeln; es sollte lediglich die Vorstellung einer Gaskugel in allen ihren Konsequenzen verfolgt werden. Hierbei glaube ich mit größter Vorsicht verfahren zu sein, stets eingedenk der Worte des alten Green: I have no faith in speculations of this kind unless they can be reduced to regular analysis. Sollten einige theoretisch sich ergebende Folgerungen mit beobachteten Tatsachen unvereinbar sein, so hoffe ich, daß der Widerspruch im Ausgangspunkt, nicht in der Richtigkeit der Entwicklung, und um diese allein ist es mir zu tun, sich finden wird. Ich glaube so ein Fundament gelegt zu haben, auf welches sich jeder stützen kann, der sich in besonderer Forschung der Sonne, einem Nebelfleck, einer kosmischen Staubmasse oder überhaupt einem beliebigen Himmelskörper zuwendet, falls er nur diesen ganz oder teilweise aus einer Materie aufgebaut annimmt, welche der Zustands-

gleichung der Gase gehorcht. Sollte ich aber mitunter der Lust zu spekulieren doch nicht haben widerstehen können, so ersuche ich nachträglich um Entschuldigung; wer selbst auf ähnlichen Gebieten gearbeitet hat, wird sie gewiß nicht versagen.

Ich habe noch die angenehme Pflicht zu danken meinen Schülern, die einen großen Teil der nachfolgenden mechanischen Quadraturen ausführten; meinem Kollegen Herrn Dr. W. Kutta, dessen Näherungsverfahren hierbei angewendet wurde, für viele praktische Ratschläge und seine, unter Seite 92—95 mitgeteilten Ausführungen, worin die Genauigkeit der Methode bei Anwendung auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung klargelegt wird; und nicht zuletzt Herrn Prof. Dr. K. Schwarzschild in Göttingen, der mich bei Durchsicht der Korrekturen wesentlich unterstützte, für manchen guten Rat.

München, März 1907.

R. Emden.

Inhalt.

Erster Teil. Theorie.

Erster Abschnitt. Grundgleichungen.

	Seite
Erstes Kapitel. Die vollkommenen Gase	1
Zweites Kapitel. Die polytropen Kurven	10
Drittes Kapitel. Die hydrodynamischen Gleichungen	29

Zweiter Abschnitt. Differentialbeziehungen.

Viertes Kapitel. Die Differentialgleichung der polytropen Gaskugel	35
Fünftes Kapitel. Auswertung der Differentialgleichung	61
Sechstes Kapitel. Beispiele	95

Dritter Abschnitt. Integralbeziehungen.

Siebentes Kapitel. Die kosmogenetischen Flächen	105
Achtes Kapitel. Die Energetik des Kontraktionsprozesses	119

Vierter Abschnitt. Unendlich große Gaskugeln.

Neuntes Kapitel. Die isotherme Gaskugel	131
Zehntes Kapitel. Polytrope Gaskugeln mit unendlichem Radius	149

Fünfter Abschnitt. Gemischte Systeme.

Elftes Kapitel. Gaskugeln in starrer Hülle	158
A. Isotherme Kugel	158
B. Polytrope Kugeln	172

Zwölftes Kapitel. Isotherm-polytropes System	183
--	-----

Dreizehntes Kapitel. Gaskugeln mit starrem Kerne	195
--	-----

Zweiter Teil. Anwendungen.

Vierzehntes Kapitel. Kosmische Staubmassen	237
--	-----

Fünfzehntes Kapitel. Nebelflecke und Doppelsterne	280
---	-----

Sechzehntes Kapitel. Strahlenbrechung in Gaskugeln	297
--	-----

Siebenzehntes Kapitel. Die Erde und ihre Atmosphäre	332
---	-----

Achtzehntes Kapitel. Die Sonne	382
--	-----

A. Die ruhende Sonne	382
--------------------------------	-----

B. Die rotierende Sonne	429
-----------------------------------	-----

C. Die pulsierende Sonne	448
------------------------------------	-----

Anhang.

Neunzehntes Kapitel. Historisches und Kritisches	454
--	-----

Erster Teil.

Theorie.

Erster Abschnitt.

Grundgleichungen.

Erstes Kapitel.

Die vollkommenen Gase.

§ 1. Es sei $d\varepsilon$ die kleine, in Erg gemessene Energiemenge, welche der Masse ein Gramm eines homogenen Körpers bei einer kleinen Zustandsänderung zuzuführen ist. Durchläuft der Körper einen Kreisprozeß, so ist stets $\sum d\varepsilon = 0$. Geht der Körper aus dem Zustand 1 in einen Zustand 2 über, von dem er auf irgend einem Wege den Zustand 1 wieder erreichen kann, so ist $\int_1^2 d\varepsilon$ unabhängig vom Wege und nur durch dessen Endpunkte bestimmt. Ist eine Gleichung von der Form $d\varepsilon = \sum_n X_n dx_n$, so ist stets

$$\frac{\partial X_m}{\partial x_n} = \frac{\partial X_n}{\partial x_m};$$

$d\varepsilon$ ist ein richtiges Differential und die Gleichung integrabel. Wird der Zustand 1 als Normalzustand festgehalten, so kann in der Gleichung $\int_1^2 d\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ der Summand ε_1 als Integrationskonstante behandelt werden. Die auf diese Weise festgelegte Funktion ε der den Körperzustand fixierenden unabhängigen Variablen nennen wir nach W. Thomson die Energie eines Körpers. (Energieprinzip).

In die auf diese Weise definierte Energie ε gehe nicht ein diejenige potentielle Energie, die daher röhrt, daß sich der betreffende Körper an irgend einer Stelle eines Kraftfeldes befindet. Eine Gasmasse, eingeschlossen in eine starre, für Wärme undurchdringliche

Hülle, enthalte eine und dieselbe Energiemenge, ob sie sich an der Erdoberfläche, der Sonnenoberfläche oder einem Orte ohne Schwerkraftbeschleunigung befindet. Ebenso mache die potentielle Energie, die davon herrührt, daß sich die Massen eines Körpersystems nach dem Gravitationsgesetze anziehen, keinen Teil der Energie ε dieses Systems aus, sondern werde stets separat behandelt.

§ 2. Es sei dQ die kleine, in Kalorien (1 Kalorie = $4,19 \cdot 10^7$ Erg) gemessene Wärmemenge, die der Masse ein Gramm eines homogenen Körpers von der absoluten Temperatur T während einer kleinen Zustandsänderung durch Leitung zuzuführen ist. Durchläuft der Körper einen umkehrbaren Kreisprozeß, so ist $\sum \frac{dQ}{T} = 0$. Wird der Körper auf einem beliebigen, aber umkehrbaren Wege aus dem Zustand 1 in den Zustand 2 versetzt, von dem aus er auf einem andern umkehrbaren Wege wieder in den Zustand 1 zurückkehren kann, so ist $\int_1^2 \frac{dQ}{T}$ unabhängig vom Wege und nur durch dessen Endpunkte bestimmt. Ist eine Gleichung von der Form

$$\frac{dQ}{T} = \sum X_n dx_n$$

gegeben, so ist stets

$$\frac{\partial X_m}{\partial x_n} = \frac{\partial X_n}{\partial x_m};$$

$\frac{dQ}{T}$ ist ein richtiges Differential einer Funktion, die wir η nennen, und die Gleichung stets integriabel. Wird der Zustand 1 als Normalzustand festgehalten, so kann in der Gleichung

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} = \eta_2 - \eta_1$$

der Summand η_1 als Integrationskonstante behandelt werden. Die auf diese Weise definierte Funktion η der den Körperzustand fixierenden unabhängigen Variablen, wobei es gleichgültig ist, auf welchem Wege der Körper in diesen Zustand gelangt ist, nennen wir nach Clausius die Entropie des Körpers.

Gelangt der Körper auf einem nicht umkehrbaren Wege A in den Zustand 2, und auf einem umkehrbaren Wege B in den Zustand 1 zurück, so ist stets

$$\sum_{A+B} \frac{dQ}{T} < 0.$$

Auf einem nicht umkehrbaren Wege ist deshalb $\frac{dQ}{T}$ nicht mehr gleich $d\eta$, dem Differential einer Funktion η ;

$$\sum \frac{dQ}{T}$$

ist abhängig vom Wege und stets

$$\sum_A \frac{dQ}{T} < \int_B \frac{dQ}{T},$$

somit auch $< \eta_2 - \eta_1$. (Entropieprinzip.)

Durchläuft ein Körper oder ein Körpersystem eine Reihe von Zuständen, aus denen es auf keinem umkehrbaren Wege mehr in den Ausgangspunkt zurückkehren kann, so kann das Entropieprinzip keine sinngemäße Anwendung finden.

§ 3. Liegt ein Körper oder ein Körpersystem in einem bestimmten Zustande vor, so kann man von deren Gehalt an Energie und Entropie, nicht aber von einem Gehalt an Wärme reden. Energiegehalt und Entropiegehalt sind bis auf eine Integrationskonstante bestimmt; das Wort Wärmegehalt hat sich aus der Stofftheorie der Wärme erhalten, doch einen Begriff Wärmegehalt kennt die dynamische Theorie der Wärme nicht. Von dem Gehalt eines Körpers an Wärme kann ebenso wenig gesprochen werden, wie von dem Gehalt eines Musikinstrumentes an Ton. Wie aus einer Violine beliebige Mengen Ton (Schallenergie) herausgenommen werden können, wenn durch den Bogen entsprechende Mengen mechanischer Energie aufgewandt werden, so können aus einer konstanten Menge Gas oder Dampf, ohne daß dieselben sich schließlich verändert haben, beliebige Mengen von Wärme heraus genommen werden, wenn etwa durch Carnotsche Kreisprozesse entsprechende Arbeit aufgewandt wird. (Auch können bei entgegengesetzter Richtung dieser Prozesse beliebige Mengen von Wärme einfließen, ohne daß irgend eine Veränderung dieser Körper resultiert.)

Der Ausdruck Wärmegehalt, der leider namentlich bei Behandlung meteorologischer Probleme noch häufig angewandt wird (selbst von Helmholtz), kann leicht unklare Auffassung verursachen und sollte deshalb vollständig verschwinden, was um so leichter geschehen kann, als es sich in fast allen diesen Fällen um den Entropiegehalt handelt.

§ 4. Von allen Energiemengen, die einem Körper zugeführt werden können, haben wir der durch Leitung zuführbaren Wärmemenge eine Ausnahmestellung eingeräumt, um mit ihrer Hilfe die

Entropie definieren und messen zu können. Nun ist in den folgenden Untersuchungen die Wärmeleitung ausgeschlossen; die einzigen Energiearten, die wir zu berücksichtigen haben, sind diejenigen, die einem Körper durch Strahlung und Leistung mechanischer Arbeit mitgeteilt werden können. Von demjenigen Teile der Strahlung, der von der Masseneinheit absorbiert oder emittiert wird, nehmen wir an, daß er sich in nichts von einer Wärmemenge Q unterscheidet, die in äquivalentem Betrage durch Leitung zugeführt werden kann. Die zugeführte Arbeit bestehet einzig darin, daß ein Druck p Dynen pro cent³ das Volumen v cent³ der Masseneinheit ändert, wobei Druck und Gegendruck bis auf genügend kleine Beträge sich gleich sein sollen. Beträgt die Volumänderung dv cent³ gramm⁻¹, so ist die zugeführte Arbeit

$$(1) \quad dW = -pdv \text{ Erg.gramm}^{-1}.$$

Stets werden wir Energiemengen, die dem zu betrachtenden Körper zugeführt werden, *positiv* rechnen. Die Zunahme $d\varepsilon$ der Energie ist gegeben durch die Gleichung

$$(2) \quad d\varepsilon = EdQ + dW = EdQ - pdv,$$

wobei E den Zahlenwert des mechanischen Äquivalentes der Kalorie, $4,19 \cdot 10^7$, bedeutet.

Den reziproken Wert $\frac{1}{E}$ werden wir mit A bezeichnen.

§ 5. Bezeichnet M die Masse eines homogenen Körpers, V dessen Volumen, T dessen Temperatur, p den Druck, unter dem er steht, so sind, bei den Festsetzungen des vorigen Paragraphen, diese vier Größen nicht unabhängig voneinander, sondern durch eine Gleichung von der Form

$$(3) \quad F(M, V, p, T) = \text{const.}$$

verbunden, welche man die *Zustandsgleichung* nennt.

Zweckmäßig legt man den Untersuchungen die Masseneinheit, $M = 1$ gramm zugrunde, wodurch $V = v$, dem Volumen der Masseneinheit, wird und die Zustandsgleichung die Form annimmt:

$$(3a) \quad f(v, p, T) = \text{konst.},$$

oder man untersucht das Verhalten der Volumeinheit, indem man $V = 1$ cent³ setzt, wodurch $M = \varrho$, der Masse der Volumeinheit, wird und die Zustandsgleichung die Form annimmt:

$$(3b) \quad \varphi(\varrho, p, T) = \text{konst.}$$

Dabei ist stets $v\varrho = 1$. Die Veränderungen, welche die Variablen p ,

T und ϱ , resp. v , erleiden können, sind demnach nicht unabhängig voneinander, sondern durch die Relationen verbunden

$$(4a) \quad \frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial T} dT + \frac{\partial f}{\partial v} dv = 0$$

desgleichen

$$(4b) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp + \frac{\partial \varphi}{\partial T} dT + \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} d\varrho = 0.$$

Von der Zustandsgleichung zu unterscheiden ist die *Gleichung der Zustandsänderung*, auch Gleichung des Weges genannt. Mannigfache Irrtümer sind dadurch entstanden, daß beide Gleichungen nicht streng auseinander gehalten worden sind. Die Gleichung der Zustandsänderung gibt das Gesetz an, das bei eintretender Veränderung die *aufeinanderfolgenden* Zustände miteinander verbindet. Die beiden Gleichungen vereinigt gestatten, aus der Veränderung einer einzigen unabhängigen Variablen die Veränderungen der beiden andern eindeutig zu bestimmen. Die Gleichung der Zustandsänderung kann ihren Zweck dadurch erfüllen, daß sie einer der unabhängigen Variablen einen konstanten Wert beilegt, wodurch die Wege konstanten Druckes, konstanter Temperatur und konstanter Dichte, resp. konstanten Volumens definiert sind; oder sie kann als Gleichung zwischen zweien der unabhängigen Variablen gegeben sein. Da durch zwei der unabhängigen Variablen der Zustand, also auch Energie ε und Entropie η fixiert sind, so können die Gleichungen der Zustandsänderungen auch in der Form $\varepsilon = \text{konst.}$, oder $\eta = \text{konst.}$ gegeben sein, wodurch die Wege konstanten Energiegehaltes, resp. konstanten Entropiegehaltes (Isentropen) festgelegt sind.

Ist ein Weg der Art beschaffen, daß in jedem Wegelement $dQ = 0$ ist, so nennen wir denselben eine Adiabate. Da aber keine Funktion Q der unabhängigen Variablen existiert (siehe § 3), dQ nicht das Differential einer Funktion der unabhängigen Variablen ist, so ist durch $dQ = 0$ im allgemeinen kein Weg vorgeschrieben, eine Wegegleichung von der Form $Q = \text{konst.}$ ist sinnlos. Ist der Weg umkehrbar, so fällt wegen der Beziehung $\frac{dQ}{T} = d\eta$ die Adiabate mit der Isentrope zusammen. Bei nicht Umkehrbarkeit besteht ein vom Wege abhängiger Unterschied. Dehnt sich z. B. ein vollkommenes Gas aus ohne Leistung äußerer Arbeit, so fällt die Adiabate mit der Isotherme zusammen.

Zwecks graphischer Darstellung werden wir v und p als Abszissen- und Ordinatenachsen benutzen. Jedem Punkte der pv -Ebene ist durch die Zustandsgleichung eine bestimmte Temperatur zugeordnet;

die Gleichung der Zustandsänderung bestimmt eine Linie, welche die aufeinanderfolgenden Zustände verbindet.

§ 6. Über die Natur der Körper, auf die sich die nachfolgenden Betrachtungen beziehen, machen wir zwei einschränkende Annahmen.

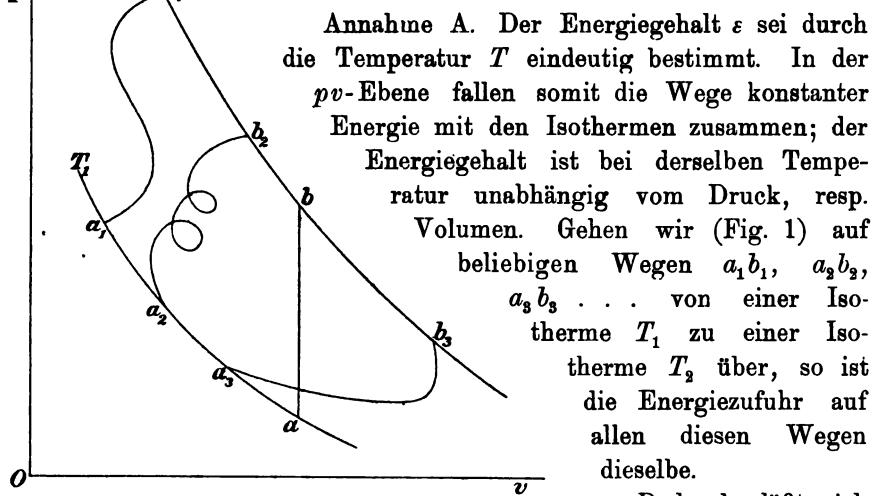


Fig. 1.

Annahme A. Der Energiegehalt ε sei durch die Temperatur T eindeutig bestimmt. In der pv -Ebene fallen somit die Wege konstanter Energie mit den Isothermen zusammen; der Energiegehalt ist bei derselben Temperatur unabhängig vom Druck, resp. Volumen. Gehen wir (Fig. 1) auf beliebigen Wegen a_1b_1 , a_2b_2 , $a_3b_3 \dots$ von einer Isotherme T_1 zu einer Isotherme T_2 über, so ist die Energiezufuhr auf allen diesen Wegen dieselbe.

Dadurch läßt sich der Energiegehalt leicht

als Funktion der Temperatur ausdrücken. Wir nehmen als Übergang von T_1 nach T_2 einen Weg ab konstanten Volumens, $dv = 0$. Auf jedem Wegelement ist die zugeführte Arbeit $= 0$ und Gleichung (2) gibt

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = E \int_{T_1}^{T_2} dQ.$$

Bezeichnen wir die Wärmekapazität bei konstantem Volumen mit c_v , gemessen in Kalorien, so ist $dQ = c_v dT$ und somit

$$(5) \quad \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = E \int_{T_1}^{T_2} c_v dT.$$

$$(6) \quad d\varepsilon = Ec_v dT$$

Da nach Annahme A der Wert von $\int_{T_1}^{T_2} c_v dT$ unabhängig davon ist, an welcher Stelle der pv -Ebene wir den Weg ab ziehen, so folgt, daß für diese Körperklasse die Wärmekapazität c_v unabhängig von Druck und Volumen sein muß; dieselbe kann nur Funktion der Temperatur sein.

Die Gleichung (2) können wir nun schreiben

$$(7) \quad Ec_v dT = EdQ - pdv,$$

$$(8) \quad dQ = c_v dT + Apdv,$$

d. h. wir haben Wärme zuzuführen zur Erhöhung der Energie $d\varepsilon = c_v dT$ und Leistung äußerer Arbeit pdv .

Um die Relation zwischen T , p und v zu spezialisieren haben wir der Zustandsgleichung eine bestimmte Form zu geben.

Annahme B. Der Körper befolge die Zustandsgleichung

$$(9) \quad \frac{pv}{273 + t^0} = \frac{p}{(273 + t^0)\varrho} = \text{konst.} = H \text{ cent}^2 \text{ sek}^{-2}.$$

$$273 + t^0 = T.$$

Die sogenannten permanenten Gase befolgen diese Zustandsgleichung mit ziemlicher Genauigkeit. Einen Körper, der die Annahme A und B für alle Intervalle von p und v und für das Intervall für t von -273 bis ∞ , erfüllt, nennen wir ein vollkommenes Gas. Da die Wärmekapazität c_v der permanenten Gase nur wenig mit der Temperatur sich ändert, machen wir mit Clausius für die vollkommenen Gase die Nebenannahme, daß c_v von der Temperatur nicht abhängt. Dann können wir die Gleichung (6) auch schreiben

$$(10) \quad \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = Ec_v(T_2 - T_1).$$

Alle folgenden Untersuchungen beziehen sich auf vollkommene Gase. Wir nehmen bei Ausrechnung bestimmter Fälle an, daß sich die permanenten Gase wie vollkommene Gase verhalten und können für dieselben die Gleichungen (4a) und (4b) in der Form schreiben:

$$(11a) \quad vdp - HdT + pdv = 0$$

$$(11b) \quad dp - \varrho HdT - THd\varrho = 0.$$

§ 7. Wir wenden stets das Cent. Gramm. Sek.-System als Maßsystem an. Energie, Wärmemenge und Entropie sind demnach von der Dimension des Erg = gramm. cent² sek⁻². Die Größen ε , Q , η , sind Energiemengen pro Masseneinheit, also von der Dimension cent² sek⁻². Als Einheit dient das Erg oder eine größere Einheit (für Q und η) = $4,19 \cdot 10^7$ Erg, die Kalorie. Der Druck mißt sich in Dynen cent⁻² = gramm cent⁻¹ sek⁻². Als größere Einheit benutzen wir die Megadyne = 10^6 Dynen. Die Temperatur t messen wir in Celsiusgraden mit Hilfe des Wasserstoffthermometers der physikalisch-technischen Reichsanstalt. Dann zeigt es sich, daß, wenn wir bei Auswertung der Zustandsgleichung (9) die Maßeinheiten für Masse, Länge, Zeit beliebig ändern, wohl die Konstante H ihren Wert ändert, die Zahl 273 im Nenner

aber unverändert stehen bleibt. Der Wert 273 ist somit nicht durch die Wahl der Maßeinheiten von Masse, Länge und Zeit bedingt; dasselbe gilt von der dazu addierten Größe t . Der Wert der Temperatur T ist somit unabhängig von den Maßeinheiten; wir betrachten dieselbe deshalb als undimensionierte Größe. Die Konstante H der Zustandsgleichung wird von der Dimension $\text{cent}^3 \text{ sek}^{-2}$; sie repräsentiert das Quadrat einer Geschwindigkeit, die in einfacher Beziehung zur Schallgeschwindigkeit steht. Die Wärmekapazitäten, ebenso die Größen ϵ , η , Q , $p dv$ und H sind sämtlich von der Dimension $\text{cent}^3 \text{ sek}^{-2}$.

Den Zahlenwert der Konstanten H finden wir, indem wir T, p, v zusammengehörige Werte geben. Setzen wir $p = 10^6$ Dynen cent^{-2} , $T = 273$ so erhalten wir (ausgehend von einer Luftdichte $\rho = 0,0012929$, bei einer Temperatur $t = 0^\circ$ und einem Druck einer Atmosphäre = $1,0132 \cdot 10^6$ Dynen cent^{-2}).

	ρ gramm cent^{-3}	v cent 3 gramm^{-1}	H cent 2 sek^{-2}
Luft	0,001276	783,7	$2,8705 \cdot 10^6$
Wasserstoff (H^2)	0,00008831	11325,0	$4,1481 \cdot 10^7$
Dissoziierter Wasserstoff (H^1) .	0,00004416	22650,0	$8,2962 \cdot 10^7$
Kohlensäure (CO^2)	0,001951	512,5	$1,8764 \cdot 10^6$
Dreiatomiges Gas vom Mole-			
kulargewicht 18; (H_2O) . . .	0,0007948	1258,3	$4,6090 \cdot 10^6$

Um die Gleichung (8) integrieren zu können muß noch die Gleichung der Zustandsänderung gegeben sein. Es wird sich zeigen, daß es eine Klasse von Wegen gibt, die scheinbar ganz verschieden aussehen, sich aber formell gleich behandeln lassen. Ehe wir dazu übergehen, deren Gleichung aufzustellen, haben wir noch eine wichtige Beziehung abzuleiten. Wir gehen in Fig. 1 auf einer Horizontalen, von einem Wege konstanten Druckes, von T_1 nach T_2 über.

Wenden wir die Gleichung (8) auf die Elemente dieses Weges an, so haben wir $dQ = c_p dT$, wenn c_p die Wärmekapazität bei konstantem Drucke bedeutet. Das Arbeitsglied $Apdv$ können wir umformen. Da die Veränderungen dp , dv und dT nach der Zustandsgleichung stets in der Beziehung (11a) stehen müssen, in diesem Falle aber $dp = 0$ ist, so erhalten wir $Apdv = AHdT$ und eingesetzt die überaus wichtige Beziehung

$$(12) \quad c_p - c_v = AH \text{ cent}^2 \text{ sek}^{-2}.$$

§ 8. Bei der Behandlung von Vorgängen, die sich bei konstanter Temperatur abspielen, ist es vorteilhaft, an Stelle der Gaskonstanten H

eine andere Konstante einzuführen, die man die Druckhöhe der Atmosphäre oder auch die Höhe der homogenen Atmosphäre nennt. Sie werde mit \mathfrak{H} bezeichnet. Liegt über einer anziehenden Kugel eine Atmosphäre, und gehen wir in derselben in einer Höhe h , ausgewiesen durch den Druck p , die Dichte ϱ und die Schwerkraft g um die Strecke dh nach oben, so ist die auftretende Druckverminderung

$$dp = - g \varrho dh$$

und wir erhalten

$$p = \int g \varrho dh,$$

wo wir das Integral erstreckt haben bis zur oberen Grenze der Atmosphäre, ausgezeichnet durch $p = 0$. Errichten wir an der Ausgangsstelle eine Luftsäule, deren Dichte ϱ von da ab durch die ganze Höhe konstant sein soll (wir werden finden daß dies realisierbar ist), und sehen ab von einer Änderung der Beschleunigung g , so läßt sich das Integral angeben. Wir erhalten als die Höhe \mathfrak{H} , die wir derselben geben müssen, um an der Ausgangsstelle denselben Druck p zu erzeugen:

$$(13) \quad \mathfrak{H} = \frac{1}{g} \cdot \frac{p}{\varrho} = \frac{1}{g} HT = \mathfrak{H}_0(1 + \alpha t) \text{ cent}$$

wenn wir

$$(14) \quad \mathfrak{H}_0 = \frac{H \cdot 273}{g} \text{ cent}$$

setzen. \mathfrak{H} , die Höhe der homogenen Atmosphäre, ist demnach unabhängig von der Dichte ϱ , die wir zu dem Aufbau verwenden, und dem Drucke p , den sie erzeugt. Sie ist, bei konstantem g , nur Funktion der Temperatur. Ist \mathfrak{H}_0 , die Höhe für $T = 273$, $t = 0^\circ$ bekannt, so ergibt sich \mathfrak{H} , indem man \mathfrak{H}_0 als lineares Gebilde, das einen Ausdehnungskoeffizienten $\alpha = 0,003665$ besitzt, behandelt. (Für jeden Grad Temperaturerhöhung vergrößert \mathfrak{H} sich um etwa 4%.) Für verschiedene Gase verhalten sich die Höhen \mathfrak{H}_0 umgekehrt wie die Molekulargewichte.

Bilden wir \mathfrak{H}_0 über mittleren Breiten der Erde, $g = 980,6$, so erhalten wir

	\mathfrak{H}_0 cent
Luft	$7,9916 \cdot 10^5$
Wasserstoff (H^2)	$1,1548 \cdot 10^7$
Dissoziierter Wasserstoff (H)	$2,3096 \cdot 10^7$
Kohlensäure	$5,2239 \cdot 10^6$
Dreiatomiges Gas vom Molekulargewicht 18 .	$1,2831 \cdot 10^6$

An der Sonnenphotosphäre ist der Wert von g 27,22 mal größer; die dort errichteten Höhen der homogenen Atmosphäre sind demnach 27,22 mal kleiner wie bei gleicher Temperatur an der Erdoberfläche. Würde an der Sonnenphotosphäre eine Temperatur von $27,22 \cdot 273^{\circ} = 7430^{\circ}$ herrschen, so wäre die Höhe der daselbst errichteten homogenen Atmosphäre gleich denjenigen auf der Erde bei 0° Cels.

Zweites Kapitel.

Die polytropen Kurven.

§ 1. Die Zustandsgleichung $pv = HT$ gibt eine Beziehung zwischen p , v und T an, die zu jeder Zeit und an jeder Stelle erfüllt werden muß; sie kann im Modell durch eine Fläche dargestellt werden. Statt dessen benutzen wir, wie bereits festgesetzt, p und v als Achsen, wodurch jedem Punkte der pv -Ebene eine Temperatur eindeutig zugeordnet wird. Die Gleichung der Zustandsänderung läßt sich in der pv -Ebene durch eine Kurve darstellen, die man kurz und zweckmäßig als Weg bezeichnet. In erster Linie treten fünf Arten von Wegen hervor, die Wege konstanten Volumens, konstanten Druckes, konstanter Temperatur, konstanter Energie und konstanter Entropie. Die Wege konstanten Volumens und konstanten Druckes sind parallel zu den Abszissenachsen. Auf den Wegen konstanten Volumens ist die vom Gase nach außen geleistete Arbeit gleich Null; die gesamte zugeführte Wärme wird zur Vermehrung der Energie benutzt. Auf dem Wege konstanten Druckes p ist bei Ausdehnung von v_1 nach v_2 die vom Gase geleistete Arbeit $= p(v_2 - v_1)$, die nur auf Kosten zugeührter Wärme bestritten werden kann, da bei konstantem Drucke zu größerem Volumen höhere Temperatur gehört. Wächst v_2 bis ∞ , so kommen unendliche Energiemengen ins Spiel, Ausdehnung bei konstantem Drucke zu unendlichem Volumen ist demnach unmöglich. Die Wege konstanter Temperatur und konstanter Energie fallen bei den vollkommenen Gasen zusammen. Ihre Gleichung ist $pv = HT = \text{konst.}$ Sie werden dargestellt durch eine Schar gleichseitiger Hyperbeln, welche die Achsen zu Asymptoten haben; alle Isothermen laufen in den unendlich fernen Punkten der Achsen zusammen. Diese Wege können durch das auf ihnen herrschende T bezeichnet und voneinander unterschieden werden. Bei Bewegung parallel den positiven Achsen werden stets Hyperbeln mit höherem T angetroffen; dehnt sich das Gas bei konstanter Energie (Temperatur)

von v_1 bis v_2 , so ist die geleistete Arbeit, (die selbstverständlich nur durch zugeführte Wärme bestritten werden kann)

$$\int_{v_1}^{v_2} p dv = HT \lg \frac{v_2}{v_1} \text{ Erg. gramm}^{-1}$$

Isotherme Ausdehnung bis $v = \infty$ ist also unmöglich.

Um die Gleichung der Isentropen zu finden, schreiben wir Gleichung (8) nochmals an als Gleichung

$$(15) \quad dQ = c_v dT + A pdv = c_v dT + A HT \frac{dv}{v}.$$

Führen wir mit Hilfe der Zustandsgleichung andere unabhängige Variable ein, und benutzen die Gleichung (12) $c_p - c_v = AH$, so erhalten wir die Gleichungen

$$(15a) \quad dQ = c_p dT - Avdp = c_p dT - AHT \frac{dp}{p},$$

$$(15b) \quad dQ = \frac{c_p p dv}{H} + \frac{c_v v dp}{H}.$$

Da die Isentropen stets Adiabaten sind (aber nicht umgekehrt), so haben wir, um ihre Gleichung zu finden, in diesen drei Gleichungen $dQ = 0$ zu setzen und erhalten, wenn wir das Verhältnis der Wärmekapazität $\frac{c_p}{c_v}$ mit κ bezeichnen, (κ stets > 1) dieselbe je nach den gewählten unabhängigen Variablen in einer der Formen

$$(16) \quad T v^{\kappa-1} = \text{konst.}; \quad T^\kappa p^{1-\kappa} = \text{konst.}; \quad p v^\kappa = \text{konst.},$$

wobei die Konstanten bestimmt werden durch einen beliebigen Punkt, durch den die Isentrope hindurchgeht.

Die Gleichung $p v^\kappa$ stellt eine Schar von Kurven dar, welche die p und v -Achsen zu Asymptoten haben und sich von gleichseitigen Hyperbeln um so weniger unterscheiden, je näher κ dem Werte 1 kommt. Durch jeden Punkt der $p v$ -Ebene kann eine Isentrope gelegt werden, die steiler abfällt, wie die durch denselben Punkt gelegte Isotherme. Denn für die Richtungstangenten der Isentropen und Isothermen ergibt sich

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T = -\kappa \frac{p}{v}; \quad \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s = -\frac{p}{v};$$

ihr Verhältnis ist gleich dem Verhältnis der Wärmekapazitäten. (In gleichem Verhältnis stehen auch die Elastizitäten des Gases bei isentropischer und isothermer Volumänderung.)

Für die während isentroper Ausdehnung von Gasen geleistete Arbeit ergibt sich aus (15) $0 = c_v dt + Apdv$, und integriert

$$(17) \quad \int_{v_1}^{v_2} pdv = Ec_v(T_1 - T_2).$$

Dies Resultat ist a priori anzugeben, da bei isentroper Behandlung das Gas die Arbeitsleistung aus seinem Energieinhalt bestreiten muß. Auf allen Isentropen, die zwischen denselben Isothermen gelegt werden können, leistet das Gas dieselbe äußere Arbeit; zieht man von beliebigen Punkten einer Isotherme T Isentropen bis $v = \infty$, so leistet auf allen diesen Wegen das Gas dieselbe Arbeit $= c_v T$, also einen endlichen Betrag, bis auf eine Konstante gleich seiner Energie. Bestimmt man die in die Energie eingehende Integrationskonstante so, daß die Energie mit $T = 0$ verschwindet, so reicht die Energie eines Gases gerade hin, isentrope Ausdehnungsarbeit bis $v = \infty$ zu leisten. Isentrope Ausdehnungsarbeit bis zu beliebig großem Volumen hat endlichen Betrag und ist deshalb möglich.

Wir können die Isentropen bezeichnen und voneinander halten durch den Wert der Konstanten $pv^\nu = \text{konst}$. Wir werden aber eine zweckmäßiger Bezeichnungsweise kennen lernen.

§ 2. So verschieden diese vier Arten von Wegen aussehen, so besitzen sie doch eine gemeinsame Eigenschaft, welche sie nebst unendlich vielen anderen Wegen in eine allgemeine Klasse einzureihen gestattet. Um dieselben aufzudecken, haben wir unsere Aufmerksamkeit den Wärmekapazitäten zuzuwenden. Unter einer Wärmekapazität versteht man das Verhältnis der während einer hinreichend kleinen Zustandsänderung der Masseneinheit zugeführten Wärmemenge dQ zu der dadurch bewirkten Temperaturerhöhung dT ; ihr analytischer Ausdruck ist $\frac{dQ}{dT}$. Dabei ist dQ definiert durch die Gleichung (8) $dQ = c_v dT + Apdv$. Für jedes anders orientierte Wegelement mit gleichem dT hat $Apdv$, also auch dQ und infolgedessen auch die Wärmekapazität einen anderen Wert; wie dQ ist derselbe bedingt durch den Weg. Lassen wir ein vollkommenes Gas einen Kreisprozeß durchlaufen, der in der pv -Ebene durch einen Kreis von endlichem Radius dargestellt wird, so hat am nördlichsten und südlichsten Punkte desselben die Wärmekapazität den Wert $\pm c_v$, am östlichsten und westlichsten Punkten $\pm c_v$. An zwei Stellen wird der Kreis von Isothermen, an zwei andern Stellen von Isentropen berührt; die Wärmekapazitäten sind daselbst $\pm \infty$, resp. 0. Durchläuft das Gas

den Kreis, so wechselt die Wärmekapazität stetig von $-\infty$ bis ∞ , ebenso, wenn wir uns von einem beliebigen Punkte der pv -Ebene um ein Wegelement ds entfernen, und dasselbe um 360° sich drehen lassen.

Es sei eine Wärmekapazität γ vorgeschrieben. Greifen wir einen beliebigen Punkt der pv -Ebene heraus, so können wir durch denselben das durch γ bestimmte Wegelement legen und gelangen zu einem Nachbarpunkte. Indem wir diese Konstruktion fortwährend wiederholen erhalten wir einen Weg konstanter Wärmekapazität γ . Indem wir diese Konstruktion an ∞ vielen verschiedenen Punkten beginnen, erhalten wir eine Schar Kurven, Wege mit derselben Wärmekapazität γ . Indem wir γ von $-\infty$ bis $+\infty$ variieren lassen, erhalten wir ∞ viele solcher Kurvenscharen. Jede dieser ∞^2 Kurven nennen wir eine polytropen Kurve, oder kürzer eine *Polytropen*.

Definition: Unter einer Polytropen verstehen wir einen umkehrbaren Weg konstanter Wärmekapazität.

Folgerungen: Da γ konstant ist, läßt sich die Gleichung $dQ = \gamma dT$ für endliche Wegstücke integrieren und liefert

$$(18) \quad Q = \gamma(T_2 - T_1).$$

Auf jeder Polytropen ist die zuzuführende Wärmemenge proportional der auftretenden Temperaturdifferenz.

Verbinden wir zwei Isothermen durch beliebige Polytropen mit gleichem γ , so ist für jede dieser Überführungen dieselbe Wärmemenge erforderlich. Da wir haben $d\varepsilon = Ec_v dT$, so ergibt sich

$$(19) \quad EQ = \frac{\gamma}{c_v} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1).$$

Auf jeder Polytropen ist die zuzuführende Wärmemenge proportional der Zunahme der Energie. Und aus der Beziehung $dQ = d\varepsilon - dW$ folgt

$$(20) \quad EQ = \frac{\gamma}{c_v - \gamma} W.$$

Auf jeder Polytropen ist die zuzuführende Wärmemenge proportional der zugeführten Arbeit, (die gleich und entgegengesetzt ist der vom Gase zu leistenden Arbeit).

Die weitere Beziehung $d\eta = \gamma \frac{dT}{T}$ lehrt, daß mit steigender Temperatur (Energie) die Entropie zu- oder abnimmt, je nachdem $\gamma \geqslant 0$ ist.

Wir erkennen nun bereits die Wege $p = \text{konst.}$, $v = \text{konst.}$, $\eta = \text{konst.}$, $\varepsilon = \text{konst.} = T$ als Polytropen mit den Wärmekapazitäten $\gamma = c_p; = c_v; = 0; = \pm \infty$.

§ 3. Wir konstruieren einen Kreisprozeß, bestehend aus zwei Isothermen T_1 und T_2 ; ($T_2 > T_1$), und zwei Polytropen, mit gleichem, aber beliebigen γ . Da dieser Kreisprozeß umkehrbar ist, so ist über die vier Kurvenstücke erstreckt $\int \frac{dQ}{T} = 0$. Für die beiden Polytropen ergibt das Integral die Beträge $\gamma \lg \frac{T_1}{T_2}$ und $\gamma \lg \frac{T_2}{T_1}$, die sich aufheben. Auf den beiden Isothermen erhalten wir $\frac{Q_1}{T_1}$ und $\frac{Q_2}{T_2}$, so daß wir haben

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0.$$

Leistet der Kreisprozeß Arbeit, und sei $\bar{Q}_1 = -Q_1$ die auf T_1 abgegebene Wärmemenge, $Q_2 - \bar{Q}_1$ die gewonnene Arbeit, so ist der Nutzeffekt des Kreisprozesses

$$\frac{Q_2 - \bar{Q}_1}{Q_1} = \frac{T_2 - T_1}{T_2},$$

d. i. derselbe wie der eines Carnotschen Kreisprozesses, in welchem die Polytropen als Adiabaten ($\gamma = 0$) auftreten und für welchen der Nutzeffekt ein Maximum ist. Wir haben also den Satz:

Alle Kreisprozesse, die aus zwei festliegenden Isothermen und zwei Polytropen mit gleichen, aber beliebigen γ bestehen, haben denselben maximalen Nutzeffekt.

Ziehen wir von zwei Punkten A und B einer Isothermen zwei Polytropen mit gleichem, aber beliebigem γ (also auch Wege $p = \text{konst.}$, $v = \text{konst.}$) nach einer anderen Isotherme, so haben alle so begrenzten Flächenstücke gleichen Inhalt.

§ 4. Um die Gleichung der Polytropen abzuleiten benutzen wir die Gleichungen (15), die wir mit Benützung der Relation $c_p - c_v = AH$ in der Form schreiben

$$\begin{aligned} dQ &= c_v dT + (c_p - c_v) T \frac{dv}{v} \\ dQ &= c_p dT - (c_p - c_v) T \frac{dp}{p} \\ dQ &= \frac{c_p p dv}{H} + \frac{c_v v dp}{H}. \end{aligned}$$

Setzen wir der Definition der Polytropen gemäß $dQ = \gamma dT$, so erhalten wir

$$(21) \quad 0 = (c_p - \gamma) dT + (c_p - c_v) T \frac{dv}{v}$$

$$(21a) \quad 0 = (c_p - \gamma) dT - (c_p - c_v) T \frac{dp}{p}$$

$$(21b) \quad 0 = (c_p - \gamma) p dv + (c_v - \gamma) v dp.$$

Das sind drei Gleichungen von derselben Form, wie die Glei-

chungen (15), nachdem wir $dQ = 0$ gesetzt haben (und in die sie für $\gamma = 0$ übergehen). Führen wir noch zur Abkürzung ein

$$(22) \quad k = \frac{c_p - \gamma}{c_v - \gamma}; \quad \gamma = c_v \frac{k - \infty}{k - 1} = \frac{k c_v - c_p}{k - 1},$$

so erhalten wir die Gleichung der Polytropen, je nach der Wahl der unabhängigen Variablen:

$$(23) \quad T v^{k-1} = \text{konst.}; \quad T^k p^{1-k} = \text{konst.}; \quad p v^k = \text{konst.}$$

wobei die Integrationskonstanten durch einen Punkt derselben bestimmt sind. Die Polytropen sind Kurven, welche ebenfalls die Koordinatenachsen zu Asymptoten haben. In jedem Punkte steht eine Polytrope um so steiler, je größer ihr Exponent k ist.

Für die früher betrachteten speziellen Wege haben k und γ folgende Werte

$$\begin{aligned} \epsilon = \text{konst.}; \quad (T = \text{konst.}) \quad k &= 1 \quad \gamma = \pm \infty \\ \eta = \text{konst.} \quad &\quad k = \infty \quad \gamma = 0 \\ p = \text{konst.} \quad &\quad k = 0 \quad \gamma = c_p \\ v = \text{konst.} \quad &\quad k = \infty \quad \gamma = c_v. \end{aligned}$$

Alle polytropen Zustandsänderungen können wir formal gleich behandeln. Eine Ausnahme machen nur in vielen Fällen die Isothermen, da ein Integral von der Form $\int \frac{dx}{x^k}$ für $k = 1$ auf einen Logarithmus führt. So erhalten wir z. B. für die Ausdehnungsarbeit eines Gases, das sich auf einer Polytropen von der Isothermen T_1 zu einer Isothermen T_2 bewegt

$$\int_{T_1}^{T_2} p dv = \frac{H}{1 - k} (T_2 - T_1),$$

das für $k = 1$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Auf allen Polytropen mit gleichen k (Ausnahme $k = 1$), die zwischen denselben Isothermen verlaufen, leistet das Gas dieselbe Ausdehnungsarbeit; sie bleibt endlich, wenn v bis ∞ wächst.

§ 5. Um weiter in den Energieumsatz auf Polytropen Einblick zu erhalten, stellen wir in Fig. 2 die Abhängigkeit des Exponenten k von der Wärmekapazität γ , $k = \frac{c_p - \gamma}{c_v - \gamma}$, graphisch dar. Als Abszisse ist γ aufgetragen und 5 Punkte, $\gamma = -\infty, 0, c_v, c_p, +\infty$ sind hervorgehoben. Stets ist $\frac{dk}{d\gamma} > 0$. Für Punkt 1, $\gamma = -\infty$, ist $k = 1$. Geht γ von $-\infty$ bis 0, so wächst k langsam, um im Punkt 2 ($\gamma = 0$) gleich ∞

zu werden. (Der Maximalwert für κ ist, für einatomige Gase, gleich $\frac{5}{3}$.) Bald steigt k äußerst rasch an, um im Punkt 3, ($\gamma = c_v$, c_v für Luft = 0,168) unendlich zu werden. Bei Durchschreitung der Abszisse c_p springt k nach $-\infty$ über, um bei weiterem Wachstum von γ rasch auf 0 zuzunehmen; Punkt 4, $\gamma = c_p$ (c_p für Luft = 0,2375). Dann wächst

k mit γ langsam weiter, um mit $\gamma = \infty$ in Punkt 5 den Wert 1 wieder anzunehmen.

Das Gas befindet sich in einem Zustande, der durch den Punkt P der $p v$ -Ebene (Fig. 3) dargestellt wird, und von dem aus daselbe die verschiedenen polytropen Zustandsänderungen unternehmen soll. Wir legen durch P eine Isotherme, eine Kurve konstanter Energie, eine Polytrope, vom Exponenten $k = 1$ und der Wärmekapazität $\gamma = \pm \infty$, entsprechend den Punkten 1 und 5 der Fig. 2. Verläuft von P aus ein Weg in das durch die Isotherme vom Koordinatenanfangspunkt O abgeschiedene Gebiet, so führt er stets zu Zuständen größerer Energie (höherer Temperatur); das Gebiet auf der andern Seite der Isothermen ist durch kleinere Energie

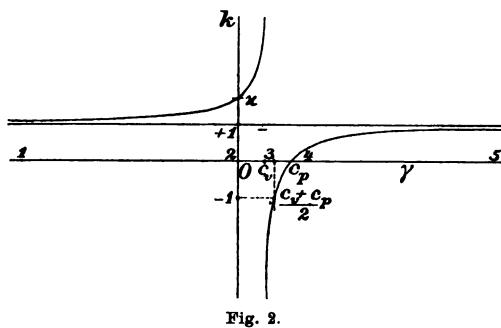


Fig. 2.

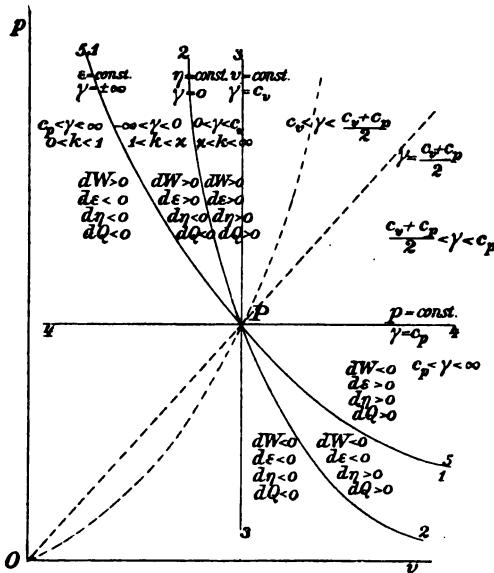


Fig. 3.

(tiefe Temperatur) ausgezeichnet. Die Isentrope 2, $k = x$, $\gamma = 0$ entspricht dem Punkte 2 der Fig. 2 und steht in P steiler als die Isotherme. Sie führt nach oben zu höherer, nach unten zu kleinerer Energie. Sie scheidet von O das Gebiet größerer Entropie ab. In jedem der beiden Zwickel 1 P 2 ist die ganze negative Seite der γ -Achse der Fig. 2 eingeschlossen. Alle Wegelemente und Polytropen, die von P

aus in diese Zwickel hineinführen, und nur diese, sind durch negative Wärmekapazitäten ausgezeichnet. Dem Punkte 3 ($k = \infty$, $\gamma = c_v$) entspricht die Vertikale durch P , der Weg $v = \text{konst.}$; dem Punkte 4 ($k = 0$, $\gamma = c_p$) die Horizontale durch P , der Weg $p = \text{konst.}$ (Zwischen beiden liegt die Gerade OP , $k = -1$, $\gamma = \frac{c_p + c_v}{2}$.) Bei

Punkt 5 kommen wir wieder zur Isothermen 15 zurück. Zu jedem Werte von γ können wir somit die Lage der zugehörigen Polytropen in der pv -Ebene angeben. Alle Polytropen mit negativem γ , $1 < k < \infty$, verlaufen in den Zwickeln 1 P 2, alle Polytropen mit positiven γ außerhalb derselben.

Die polytropen Zustandsänderungen, welche für die folgenden Untersuchungen von Wichtigkeit sind, führen in den 1. Quadranten des Diagramms hinein. (Für Wege in den 3. Quadrant haben wir nur die Veränderungen von p und v mit entgegengesetztem Vorzeichen einzuführen, wodurch sich in den folgenden Ungleichheiten das \geqslant Zeichen umkehrt.)

Auf allen Wegen von P in den 1. Quadranten kommt das Gas auf geringeres Volumen, die äußeren Kräfte leisten Arbeit, also ist die zugeführte Arbeit $dW > 0$. Alle Wege in das Gebiet 4 P 5 führen zu Zuständen geringerer, in das Gebiet 1 P 3 hinein zu Zuständen höherer Energie. Für 4 P 1 ist $d\varepsilon < 0$, für 1 P 3 ist $d\varepsilon > 0$. Alle Wege von P nach 4 P 2 führen zu kleinerer, nach 2 P 3 zu höherer Entropie. Daraus ergibt sich: *Führt ein Weg in das Gebiet 1 P 2 hinein, so tritt bei Zunahme der Energie, also Steigerung der Temperatur, eine Abnahme der Entropie ein.*

Auf allen polytropen Wegen nach 4 P 1 ist $\gamma > 0$, $dT < 0$, somit $dQ < 0$; auf allen polytropen Wegen nach 1 P 2 ist $\gamma < 0$, $dT > 0$, somit $dQ < 0$; für alle polytropen Wege nach 2 P 3 ist $\gamma > 0$, $dT > 0$, somit $dQ > 0$. In der Gleichung (2) $d\varepsilon = EdQ + dW$ ist für alle polytropen Wege nach 4 P 1 hinein $d\varepsilon < 0$, $dQ < 0$, $dW > 0$; d. h. da bei Arbeitszufuhr eine Abnahme der Energie eintritt, muß Energie in Form von Wärme abgeführt werden. Im Gebiete 2 P 3 ist $d\varepsilon > 0$, $dW > 0$, $dQ > 0$; d. h. da die Arbeitszufuhr nicht hinreicht, die Energiesteigerung (Temperaturerhöhung) zu decken, muß noch Wärme zugeführt werden. Im Gebiete 1 P 2 ist aber trotz $d\varepsilon > 0$ und $dW > 0$, doch $dQ < 0$, das heißt:

Führt eine Polytrope in das Gebiet 1 P 2 hinein, so ist die Energiezunahme des Gases (Temperatursteigerung) kleiner wie die aufgewandte Kompressionsarbeit und ein Teil derselben muß in Form von Wärme

abgeführt werden. Oder anders ausgedrückt: Wird ein Gas bei Wärmeentzug gezwungen, einer Polytropen in das Gebiet 1 P 2 hinein zu folgen, so ist die zugeführte Kompressionsarbeit genügend groß, bei Deckung des Wärmeentzuges noch eine Energie- (Temperatur-) Steigerung desselben zu bestreiten.

Die Verhältnisse liegen also vollständig verschieden, je nachdem der Weg nach 1 P 2 oder 2 P 3 hineinführt. In beiden Fällen sind dW und $d\varepsilon > 0$, im ersten Falle aber sind $d\eta$ und $dQ < 0$; nähert sich die Polytrope immer mehr der Isentrope, so nehmen $d\eta$ und dQ zu, um auf der Isentrope $= 0$ zu werden und in 2 P 3 positive Werte anzunehmen.

Die quantitativen Beziehungen zwischen dQ , dW und $d\varepsilon$ auf Polytropen haben wir bereits in den Gleichungen (18), (19), (20) ausgedrückt. Mit Benutzung der Gleichungen (22) lauten sie:

$$(24) \quad \frac{EdQ}{dW} = \frac{\gamma}{c_v - \gamma} = \frac{k - \varkappa}{\varkappa - 1}$$

$$(25) \quad \frac{d\varepsilon}{dW} = \frac{c_v}{c_v - \gamma} = \frac{k - 1}{\varkappa - 1}$$

$$(26) \quad \frac{EdQ}{d\varepsilon} = \frac{\gamma}{c_v} = \frac{k - \varkappa}{k - 1}$$

und wir können noch beifügen

$$(27) \quad \frac{Ed\eta}{dQ} = \frac{1}{T}; \quad \frac{Ed\eta}{dW} = \frac{k - \varkappa}{\varkappa - 1} \frac{1}{T}; \quad \frac{Ed\eta}{d\varepsilon} = \frac{k - \varkappa}{k - 1} \frac{1}{T}.$$

§ 6. Von allen Polytropen tritt bei den nachfolgenden Untersuchungen die Polytropenschar mit dem Exponenten $k = \frac{4}{3}$ hervor. Wir werden später beweisen, daß in einer polytropen Gaskugel, die sich bei Wärmeausstrahlung derart ändert, daß sie stets eine polytrope Gaskugel derselben Klasse bleibt, jedes Massenelement eine polytrope Zustandsänderung vom Exponenten $k = \frac{4}{3}$ durchmacht. Diese Polytrope gibt deshalb ein Bild der Zustände, welche die Gasmassen einer im Raum schwebenden, sich weiter entwickelnden Gas-Kugel durchlaufen. Wir nennen diese polytrope Zustandsänderung eine *kosmogenetische Zustandsänderung* oder kurz eine *Kosmogenide*.

Die Gleichung der Kosmogeniden lautet, je nach der Wahl der Variablen:

$$(28) \quad T^8 v = \text{konst}; \quad T^4 p^{-1} = \text{konst}; \quad p^8 v^4 = \text{konst},$$

wobei die Konstanten durch einen Punkt der Kosmogeniden bestimmt

sind und in der Beziehung stehen müssen, daß sich stets $pv = HT$ ergibt. Die Wärmekapazität eines Gases bei kosmogenetischer Zustandsänderung ergibt sich nach Gleichung (22) zu

$$(29) \quad \gamma = c_v (4 - 3\alpha) = 4c_v - 3c_p$$

ist also > 0 für Gase mit $\alpha < \frac{4}{3}$, und < 0 für $\alpha > \frac{4}{3}$.

Mit Rücksicht auf ihr Verhalten bei kosmogenetischer Zustandsänderung teilen sich somit die Gase in 2 Klassen, je nachdem $\alpha \gtrless \frac{4}{3}$ ist. Ist $\alpha > \frac{4}{3}$, so liegt für dies Gas die Kosmogenide in dem Zwickel 1 P 2 der Fig. 3, für $\alpha < \frac{4}{3}$ aber außerhalb, in 2 P 3. Daraus folgt:

Nur ein Gas mit einem Verhältnis $\frac{c_p}{c_v} = \alpha > \frac{4}{3}$ kann bei kosmogenetischer Zustandsänderung, bei steigender Temperatur (Energie) eine Abnahme der Entropie (Wärmeabgabe) erleiden.

Nur bei einem Gase mit $\alpha > \frac{4}{3}$ ist bei kosmogenetischer Zustandsänderung nach kleinerem Volumen die zugeführte Arbeit groß genug, um trotz der Energie- (Temperatur-) Steigerung noch eine Wärmeabgabe zu bestreiten.

Wird einem Gase bei vorgeschriebener kosmogenetischer Zustandsänderung Wärme entzogen, so führt der Weg von P aus in den Zwickel 1 P 2 hinein, falls $\alpha > \frac{4}{3}$ ist, im entgegengesetzten Falle aber in den Zwickel 2 P 3 des 3. Quadranten. Im ersten Falle hat Wärmeentzug stets Kontraktion zur Folge, im andern Falle würde Ausdehnung resultieren, falls, wovon gleich zu sprechen sein wird, stabiler Gleichgewichtszustand zu Anfang vorhanden wäre. Ist $\alpha = \frac{4}{3}$, so verläuft die kosmogenetische Änderung ohne Wärmeaustausch, da Kosmogenide und Isentrope zusammenfallen. In diesem Falle liefern auch die Formeln (24) und (25) $\frac{dQ}{dW} = 0$, $\frac{d\varepsilon}{dW} = 1$, d. h. die Kompressionsarbeit wird ohne Rest zur Energievermehrung aufgebraucht.

§ 7. Es sei eine Gasmasse im Punkte P im Gleichgewicht gegeben, jede Veränderung soll nur längs einer Kosmogeniden erfolgen können. Sie stehe unter dem Drucke p . Wird der Gasmasse eine kleine Wärmemenge entzogen, so sinkt im ersten Moment ihre Temperatur, infolgedessen ihre Expansionskraft, und sie wird dem äußern Drucke nachgeben. Ist ihr $\alpha > \frac{4}{3}$, so führt ihr Weg in den Zwickel

$1 P 2$ des 1. Quadranten hinein zu einem neuen Gleichgewichtszustande. Ist aber $\kappa < \frac{4}{3}$, so geht der Weg nach $2 P 3$ des 1. Quadranten und zur Erreichung eines neuen Gleichgewichtszustandes wäre Wärmezufuhr nötig. Ein Gleichgewichtszustand kann demnach nicht mehr erreicht werden, vielmehr wird das Gas, stets wachsender Druckdifferenz folgend, in sich selbst zusammenstürzen. Wird umgekehrt der im Gleichgewicht befindlichen Gasmasse Wärme zugeführt, so erreicht sie, falls $\kappa > \frac{4}{3}$, im Zwickel $1 P 2$ des 3. Quadranten einen neuen Gleichgewichtszustand; bei $\kappa < \frac{4}{3}$ wird sie hingegen, nach $2 P 3$ des 3. Quadranten wandernd, wachsendem Überdruckefolgend, schließlich explosionsartig auseinanderstieben, d. h.:

Befindet sich eine Gasmasse im Gleichgewicht, und kann sie nur einer Kosmogeniden folgen, welche Bewegung durch Wärmeaustausch eingeleitet wird, so befindet sie sich für $\kappa > \frac{4}{3}$ im stabilen, für $\kappa < \frac{4}{3}$ im labilen Gleichgewichte.

§ 8. Wir wenden die Formeln (24), (25), (26) auf kosmogenetische Zustandsänderungen an und erhalten:

$$(30) \quad \frac{EdQ}{dW} = \frac{4 - 3\kappa}{3(\kappa - 1)},$$

$$(31) \quad \frac{d\varepsilon}{dW} = \frac{1}{3(\kappa - 1)},$$

$$(32) \quad \frac{EdQ}{d\varepsilon} = 4 - 3\kappa.$$

Für die Wärmekapazität auf diesem Wege fanden wir bereits (29)

$$\gamma = c_v(4 - 3\kappa).$$

a) Einatomige Gase. Die kinetische Gastheorie fordert für κ den Wert $\frac{5}{3}$, der für Quecksilberdampf experimentell sehr genau ermittelt wurde. Wir werden diesen Wert von κ allen vollständig dissozierten Gasen und Dämpfen beilegen. Dann werden die vorigen Formeln

$$(30a) \quad \frac{EdQ}{dW} = -\frac{1}{2},$$

$$(31a) \quad \frac{d\varepsilon}{dW} = +\frac{1}{2},$$

$$(32a) \quad \frac{EdQ}{d\varepsilon} = -1,$$

$$\gamma = -c_v;$$

d. h.: *Wird einem einatomigen Gase bei kosmogenetischer Zustandsänderung Arbeit zugeführt, so teilt sich dieselbe in zwei gleiche Teile; die Hälfte derselben dient zu Energie- (Temperatur-)Steigerung, die andere Hälfte wird in Form von Wärme abgeführt.* Oder anders ausgedrückt: *Wird ein einatomiges Gas durch Entzug einer Kalorie Wärme veranlaßt, auf einer Kosmogeniden zu wandern, so bewegt es sich auf derselben soweit, daß $2 \cdot 4,17 \cdot 10^7$ Erg. Kompressionsarbeit geleistet werden, die zu gleichen Teilen Wärmeentzug und Energievermehrung bestreiten. Die Wärmekapazität ist $= -c_v$. Wird einem Gramm Gas eine Kalorie entzogen, so steigt dessen Temperatur um $\frac{1}{c_v}$ Grad.*

Als Repräsentanten eines einatomigen, vollkommenen Gases wählen wir dissozierten Wasserstoff. Die Wärmekapazitäten desselben sind experimentell nicht ermittelt. Wir können sie aber berechnen, da wir haben

$$\frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3}, \quad c_p - c_v = A H = \frac{8,2962 \cdot 10^7}{4,19 \cdot 10^7};$$

daraus ergeben sich $c_p - c_v = 4,9500$, $c_v = 2,9700$.

Die Temperatursteigerung bei Entzug einer Kalorie beträgt demnach $0,3367^\circ$.

b) Zweiatomige Gase. Nach Messungen von Lummer und Pringsheim (Wied. Annal. 64, pag. 555, 1898) beträgt κ für Luft 1,4025, für Wasserstoff 1,408. Diese Werte fallen so nahe mit dem Werte $\kappa = 1,4 = \frac{7}{5}$ zusammen, der mit großer Wahrscheinlichkeit aus der kinetischen Gastheorie für zweiatomige Gase gefolgert werden kann, daß wir für diese stets $\kappa = 1,4 = \frac{7}{5}$ annehmen. Dann ergeben sich die Verhältnisse:

$$(30b) \quad \frac{EdQ}{dW} = -\frac{1}{6},$$

$$(31b) \quad \frac{d\varepsilon}{dW} = +\frac{5}{6},$$

$$(32b) \quad \frac{EdQ}{d\varepsilon} = -\frac{1}{5},$$

$$\gamma = -\frac{1}{5} c_v;$$

d. h.: *Wird ein zweiatomiges Gas auf einer Kosmogeniden komprimiert, so müssen von der aufgewandten Kompressionsarbeit $\frac{5}{6} = 83,33\%$ zur Energievermehrung (Temperatursteigerung) verwandt werden und nur $\frac{1}{6} = 16,67\%$ können in Form von Wärme abgegeben werden.* Wird

einem Gramm Gase eine Kalorie entzogen, so müssen $6 \cdot 4,19 \cdot 10^7$ Erg Kompressionsarbeit geleistet werden und die eintretende Temperaturerhöhung beträgt $\frac{5}{c_p}$ Grad. Für Luft und Wasserstoff ist nach Messungen von E. Wiedemann (Wiedemann Annal I, pag. 39, 1876) $c_p = 0,2389$, resp. 3,410. Mittels $\kappa = \frac{7}{5}$ berechnet sich $c_p = 0,1706$, resp. 2,4357. Die bei Entzug einer Kalorie eintretende Temperaturerhöhung beträgt also bei Luft- resp. Wasserstoff $29,358^\circ$ resp. $2,0528^\circ$.

c) Dreiatomige Gase. Aus der kinetischen Gastheorie lässt sich für dreiatomige Gase mit Wahrscheinlichkeit der Wert $\kappa = \frac{4}{3} = 1,333$ ableiten. Messungen ergaben κ für Kohlensäure = 1,28 — 1,31 für Wasserdampf 1,29 — 1,33, schweflige Säure 1,26, Stickoxydul 1,31; also sehr nahe bei $\kappa = \frac{4}{3}$. Wir werden deshalb allgemein für dreiatomige Gase $\kappa = \frac{4}{3}$ setzen. Dann fallen für dieselben Isentropen und Kosmogeniden zusammen und wir erhalten:

$$(30c) \quad \frac{EdQ}{dW} = 0,$$

$$(31c) \quad \frac{d\epsilon}{dW} = 1,$$

$$(32c) \quad \frac{EdQ}{d\epsilon} = 0, \\ \gamma = 0.$$

Bei Entzug resp. Zufuhr einer unendlich geringen Wärmemenge wird sich das Gas einer unendlich klein bleibenden Druckdifferenz folgend, unendlich langsam zusammenziehen resp. ausdehnen.

d) Mehratomige Gase. Da κ mit der Atomzahl abnimmt, haben wir für mehr als dreiatomige Gase $\kappa < \frac{4}{3}$ anzunehmen. Ein solches Gas, das einer Kosmogeniden folgen muß, befindet sich deshalb in labilem Gleichgewicht. Kleinster Wärmeentzug hat Zusammenstürzen, kleinste Wärmezufuhr Auseinanderstieben zur Folge.

§ 9. Der innere Grund dieses so gänzlich verschiedenen Verhaltens von Gasen, deren Molekül aus verschiedener Anzahl von Atomen besteht, wird durch die kinetische Gastheorie aufgedeckt. Nach derselben resultiert der Druck p , den die Masseneinheit Gas von der Temperatur T (Volumen v) ausübt aus der fortschreitenden Bewegung der Moleküle; bezeichnet L die kinetische Energie dieser fortschreiten-

den Bewegung pro Masseneinheit, so ist ihr Zusammenhang mit p und T gegeben durch die Beziehung (mit Benutzung von Formel (12))

$$(33) \quad L = \frac{3}{2} p v = \frac{3}{2} H T = \frac{3}{2} (c_p - c_v) E T,$$

so daß wir haben:

$$(a) \quad \frac{dL}{dT} = \frac{3}{2} (c_p - c_v) E.$$

Andererseits haben wir für vollkommene Gase

$$(b) \quad \frac{d\varepsilon}{dT} = c_v E.$$

Bei einem einatomigen, vollkommenen Gas, das aus bewegten Massenpunkten, deren gegenseitige Fernwirkung zu vernachlässigen ist, besteht, ist die gesamte Energie ε in Form der kinetischen Energie L vorhanden, und a) und b) liefern, da $\varepsilon = L$

$$\frac{3}{2} (c_p - c_v) = c_v$$

$$\alpha = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

Diesen Wert für α haben wir für einatomige Gase angenommen. Bei mehratomigen Gasen besteht ein Teil L_i der Energie ε in Form kinetischer Energie der Atome innerhalb der Molekel, und nur der übrig bleibende Teil repräsentiert die kinetische Energie L ; $\varepsilon = L_i + L$. Wir machen mit Clausius die einfache und bewährte Annahme, daß die beiden Energiemengen L_i und L bei allen Temperaturen (allen Werten von ε) in einem konstanten Verhältnis stehen, das nur durch die Atomzahl bedingt ist. L macht demnach einen konstanten Bruchteil von ε aus, den wir mit $\sigma \geq 1$ bezeichnen und erhalten

$$(34) \quad L = \sigma \varepsilon, \quad L_i = (1 - \sigma) \varepsilon,$$

σ gegeben durch die Atomzahl. Aus (a) und (b) folgt dann

$$\frac{3}{2} (c_p - c_v) = \sigma c_v$$

$$(35) \quad \alpha = 1 + \frac{2}{3} \sigma.$$

Je komplizierter die Moleküle gebaut sind, desto größer ist der Bruchteil der Energie ε , die innerhalb des Moleküls aufgespeichert ist und desto kleiner σ und α .

Für einatomige Gase ist $\sigma = 1$ und somit $\alpha = \frac{5}{3}$. Nach Annahmen von Boltzmann ist für zweiatomige Gase $\sigma = \frac{3}{5} = 0,6$, für dreiatomige Gase $\sigma = \frac{1}{2} = 0,5$ zu setzen, sodaß wir die bereits benutzten Werte von α , $\frac{7}{5}$ resp. $\frac{4}{3}$ erhalten.

Führen wir nun den Wert (35) für \varkappa in die Gleichungen (30), (31), (29) ein, so erhalten wir

$$(36) \quad \frac{EdQ}{dW} = \frac{1 - 2\sigma}{2\sigma}$$

$$(37) \quad \frac{d\varepsilon}{dW} = \frac{1}{2\sigma}$$

$$(38) \quad \gamma = c_v(1 - 2\sigma)$$

und können mit Benutzung von (34) die merkwürdige und wichtige Beziehung ableiten

$$(39) \quad \frac{dL}{dW} = \frac{1}{2}.$$

σ ist aus dieser Gleichung verschwunden! Die einzige Annahme, daß die kinetische Energien innerer und fortschreitender Bewegung eines Moleküls in konstantem, von Gas zu Gas beliebig wechselndem Verhältnis stehen, gibt den Satz:

Wird ein Gas auf einer Kosmogeniden komprimiert, so wird stets, unabhängig von der Atomezahl, die Hälfte der aufgewandten Kompressionsarbeit zur Steigerung der lebendigen Kraft der fortschreitenden Bewegung der Moleküle verwandt.

Je größer ε im Verhältnis zu L ist (je kleiner \varkappa , σ) desto mehr der aufgewandten Kompressionsarbeit muß deshalb zur Steigerung von ε verwandt werden und desto weniger bleibt für Wärmeabfuhr übrig. Beträgt die Kompressionsarbeit eine Kalorie, so beträgt die Vermehrung von L stets $\frac{1}{2}$ Kalorie, die Vermehrung von ε ist $\frac{1}{2\sigma}$ Kalorien, die Wärmeabfuhr ($-dQ$) ist $\frac{2\sigma - 1}{2\sigma}$ Kalorien; setzen wir $\sigma = 1, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}$, so erhalten wir die im vorigen Paragraphen gefundenen Verhältniszahlen.

Entsprechendes gilt für die Ausdehnung. Je komplizierter das Molekül gebaut ist, ein desto größerer Bruchteil der Expansionsarbeit kann der inneren Energie der Moleküle entnommen werden und desto kleiner braucht die Wärmezufuhr zu sein. Für dreiatomige Gase ist letztere = 0; 50% der Expansionsarbeit werden von L , 50% von L_i und 100% von $\varepsilon = L + L_i$ gedeckt.

§ 10. Wir leiten einen für die weiteren Untersuchungen wichtigen Satz ab. Es seien zwei Polytropen vom Exponenten k_1 , der Wärmekapazität γ_1 , und zwei Polytropen vom Exponenten k_2 , der Wärmekapazität γ_2 gegeben. (Fig. 4.) Diese schneiden sich in vier Punkten

A, B, C, D , wozu die Werte p_A, v_A, T_A usw. gehören. Ein Gas durchläuft den Kreisprozeß A, B, C, D , für den, da er umkehrbar, $\int \frac{dQ}{T} = 0$ ist, Nun ist, der Definition der Polytrope entsprechend

$$\begin{aligned}\int \frac{dQ}{T} &= \gamma_1 \int_A^B \frac{dT}{T} + \\ \gamma_2 \int_B^C \frac{dT}{T} + \gamma_1 \int_C^D \frac{dT}{T} + \\ \gamma_2 \int_D^A \frac{dT}{T} &= 0,\end{aligned}$$

woraus folgt

$$(\gamma_1 - \gamma_2) \log \frac{T_B T_D}{T_A T_C} = 0.$$

Daraus folgt die wichtige Beziehung

$$T_B T_D = T_A T_C \text{ oder}$$

$$\frac{T_A}{T_D} = \frac{T_B}{T_C}; \quad \frac{T_A}{T_B} = \frac{T_D}{T_C}$$

und wenn wir die Gleichung der Polytropen

$T v^{1-k} = \text{konst}$ und $T p^{\frac{1-k}{k}} = \text{konst}$, auf die 4 Punkte A, B, C, D doppelt anwenden, erhalten wir weiter

$$v_B v_D = v_A v_C; \quad \frac{v_A}{v_D} = \frac{v_B}{v_C}; \quad \frac{v_A}{v_B} = \frac{v_D}{v_C}$$

$$p_B p_D = p_A p_C; \quad \frac{p_A}{p_D} = \frac{p_B}{p_C}, \quad \frac{p_A}{p_B} = \frac{p_D}{p_C}.$$

Daraus folgt: *Wird eine Polytropschar I von einer Polytropschar II geschnitten, so sind die Verhältnisse, die sich für die Drucke, Dichten und Temperaturen der Schnittpunkte einer der Polytropen ergeben, dieselben für die entsprechenden Schnittpunkte auf jeder Polytropen der Schar I. Dasselbe gilt für die Schar II, geschnitten von I.*

Nun sind Kosmogeniden und Isentropen spezielle polytrope Kurven; daraus folgt:

Haben wir eine Anzahl Gasmassen in einer Reihe von Zuständen, die polytrop (also speziell auch isentrop) ineinander übergeführt werden

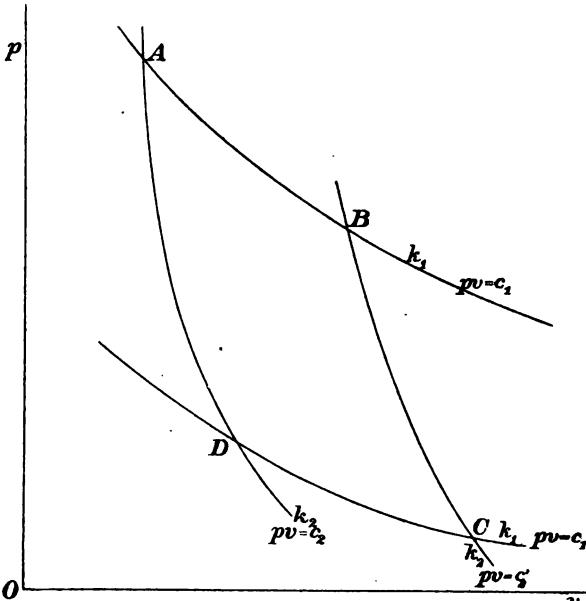


Fig. 4.

können und lassen wir jedes Gas auf einer Kosmogeniden so weit wandern, daß wir durch die Endzustände wieder eine Polytrope von gleichem Exponenten legen können, so hat sich das Verhältnis ihrer Temperaturen, Drucke und Dichten nicht geändert.

Umgekehrt: Haben wir Gasmassen von einer Polytropen I auf eine Polytrope II derselben Klasse k übergeführt, so daß in den Anfangs- und Endlagen das Verhältnis ihrer p, ϱ , resp. T konstant geblieben ist, so können wir über die zurückgelegten Wege derselben nichts aussagen. Wenn aber das Verhältnis der p, ϱ, T dasselbe ist für jede der unendlich vielen Polytropen derselben Klasse k , die wir zwischen I und II einschalten können, dann sind die zurückgelegten Wege Polytropen, deren Klasse k bestimmt ist.

§ 11. Wir haben uns nun nach einem Verfahren umzusehen, die Polytropen einer Schar von einander zu unterscheiden und zu bezeichnen. Dazu führen wir einen neuen Begriff: *die polytropen Temperatur* ein. Wir errichten in der $p v$ -Ebene an der Stelle $v = 1$ gramm $^{-1}$ cent 3 ($\varrho = 1$ gramm cent $^{-3}$) eine Senkrechte und suchen den Schnittpunkt der Polytropen mit dieser Senkrechten $v = 1$; ($\varrho = 1$). Durch diesen Schnittpunkt geht eine Isotherme, welche die zu diesem Schnittpunkte gehörige Temperatur bestimmt. Diese Temperatur nennen wir die *polytropen Temperatur vom Exponenten k* und bezeichnen sie mit Θ_k .

Definition. *Die polytropen Temperatur Θ_k einer Gasmasse in einem bestimmten Zustande ist diejenige Temperatur, die das Gas annimmt, wenn es aus diesem Zustande auf einer Polytropen vom Exponenten k auf die Dichte 1 gramm cent $^{-3}$ gebracht wird.*

Θ_k ist demnach konstant auf einer Polytropen und variiert von einer Polytrope zur andern; ist k und Θ_k gegeben, so ist die Polytrope in der $p v$ -Ebene festgelegt. Wir werden sehen, daß die Einführung von Θ_k den Überblick und die numerische Rechnung außerordentlich erleichtert.

Diese Temperatur Θ_k einer Gasmasse ist leicht zu berechnen. Ist der Zustand des Gases durch p_1 und v_1 resp. ϱ_1 gegeben, so lautet die Gleichung der durch diesen Punkt gelegten Polytropen $T v^{k-1} = T_1 v_1^{k-1}$ oder $T = T_1 \left(\frac{\varrho}{\varrho_1} \right)^{k-1}$; setzen wir also $\varrho = 1$, so ergibt sich

$$(40) \quad \Theta_k = T_1 \left(\frac{1}{\varrho_1} \right)^{k-1}.$$

Von allen polytropen Temperaturen, die einer Gasmasse in einem bestimmten Zustand zukommen, sind die kosmogenetische Temperatur und die adiabatische (isentropische) Temperatur besonders wichtig.

Kosmogenetische Temperatur $\Theta_{\frac{4}{3}}$ nennen wir diejenige Temperatur, die ein Gas annimmt, wenn es auf einer Kosmogeniden auf die Dichte eins gebracht wird.

Adiabatische Temperatur Θ_x oder kurz Θ nennen wir diejenige Temperatur, die das Gas annimmt, wenn es auf einer Isentropen auf die Dichte eins gebracht wird.

Die adiabatische Temperatur steht in einfacher Beziehung zum Entropiegehalt der Gasmasse. Wir haben nach Gleichung (15)

$$d\eta = \frac{dQ}{T} = c_v \frac{dT}{T} + AH \frac{dv}{v}$$

$$\eta = c_v \log T + AH \log v + \eta_0$$

und, da für $v = 1$, $T = \Theta$ ist, und die Entropie bei adiabatischer Behandlung konstant bleibt:

$$(41) \quad \eta = c_v \log \Theta + \eta_0.$$

Um die adiabatische Temperatur um $d\Theta$ zu erhöhen, ist deshalb eine Wärmemenge zuzuführen

$$dQ = T d\eta = c_v T \frac{d\Theta}{\Theta}.$$

Ebenso können wir die Wärmemenge berechnen, die notwendig ist, um die polytrope Temperatur Θ_k zu ändern. Ausgehend von

$$dQ = c_v dT + Ap dv = c_v dT - AH T \frac{d\varrho}{\varrho}$$

und der Gleichung der Polytropen (Gl. 40) $T = \varrho^{k-1} \Theta_k$ haben wir

$$\begin{aligned} dT &= \varrho^{k-1} d\Theta_k + (k-1) \Theta_k \varrho^{k-2} d\varrho \\ &= \varrho^{k-1} d\Theta_k + (k-1) T \frac{d\varrho}{\varrho} \end{aligned}$$

und dies in den Ausdruck für dQ eingesetzt, und die Beziehung $AH = c_p - c_v$ berücksichtigend, erhalten wir

$$(42) \quad dQ = c_v \varrho^{k-1} d\Theta_k + (k-\gamma) c_v T \frac{d\varrho}{\varrho} = c_v T \left(\frac{d\Theta_k}{\Theta_k} + (k-\gamma) \frac{d\varrho}{\varrho} \right).$$

Wärmeentzug hat stets ein Sinken, Wärmezufuhr ein Steigen der adiabatischen Temperatur zur Folge.

Für die polytrope Temperatur gilt dies nicht allgemein. Sie sinkt oder steigt, je nachdem das durch den Wärmetausch bedingte Wegelement im Punkte steiler oder geneigter verläuft, wie die Tangente an die Polytrope k .

§ 12. Der große Vorteil der Einführung der polytropen Temperatur Θ_k besteht darin, daß sich mit ihrer Hilfe die Beziehungen, die zwischen den Variablen p , ϱ , T auf der Polytropen bestehen, einfach ausdrücken

lassen. Da die Gleichung derselben lautet $\frac{T}{\varrho^{k-1}} = \frac{T_1}{\varrho_1^{k-1}}$ so ergibt sich, wenn wir $\varrho_1 = 1$ setzen.

$$(43) \quad T = \varrho^{k-1} \Theta_k$$

und mit Hilfe der Zustandsgleichung

$$(44) \quad p = \varrho^k H \Theta_k.$$

Speziell ergeben sich längs der Isentropen

$$(43a) \quad T = \varrho^{x-1} \Theta$$

$$(44a) \quad p = \varrho^x H \Theta.$$

(Man beachte, daß in (43) und (43a) die Gaskonstante H nicht eingeht.)

Nehmen wir z. B. atmosphärische Luft von 0° Cels. ($T = 273$) unter einem Drucke von 1 Atm. = $1,0132 \cdot 10^6$ Dynen cent.⁻², also einer Dichte von $\varrho = 0,001293$ gramm cent.⁻³, so ist die adiabatische Temperatur

$$\Theta = 273 \left(\frac{1}{0,001293} \right)^{\frac{7}{5}-1} = 3904,1.$$

Wird die Luftmasse von dem angegebenen Zustande aus adiabatisch (umkehrbar!) behandelt, bis zu einer Dichte ϱ , so ist stets

$$T = 3904,1 \cdot \varrho^{\frac{2}{5}}$$

$$p = 2,8705 \cdot 10^6 \cdot 3904,1 \cdot \varrho^{\frac{7}{5}} = 1,1207 \cdot 10^{10} \cdot \varrho^{\frac{7}{5}} \text{ Dynen cent.}^{-2}.*)$$

Wir führen für spätere Verwendung eine Hilfsfunktion u ein

$$(45) \quad \varrho^{k-1} = u; \quad \varrho = u^n; \quad n = \frac{1}{k-1}, \quad k = \frac{n+1}{n}$$

und schreiben die Gleichungen (42) und (43) als

$$(46) \quad T = u \Theta_k$$

$$(47) \quad p = u^{n+1} H \Theta_k \text{ Dynen cent.}^{-2}$$

und mit entsprechender Spezialisierung die Gleichungen (43a) und (44a).

Diese Darstellung der Polytropen in Parameterform wird sich äußerst zweckmäßig erweisen.

Rechenregel. Die polytrope Temperatur Θ_k ist wie die Temperatur T dimensionslos; die Gleichungen (43) bis (47) scheinen deshalb in bezug auf Dimension nicht zu stimmen. Dies röhrt daher,

*.) Nimmt man $x = 1,403$, so ist $\Theta = 3982,8$ und $p = 1,1429 \cdot 10^{10} \varrho^{\frac{7}{5}}$ Dynen cent.⁻². Beide Arten zu rechnen geben Werte, deren Differenzen innerhalb der Beobachtungsfehler liegen.

daß wir bei Bildung der Gleichung (40) ϱ^{k-1} gleich eins setzten. Dadurch ist eine Größe von der Dimension ϱ^{k-1} aus unsern weiteren Gleichungen scheinbar verschwunden. Diesem Umstand wird durch folgende Regel Rechnung getragen. In allen auftretenden Gleichungen wird ϱ^{k-1} dimensionslos angenommen; tritt ϱ in einer Potenz auf, die k enthält, so wird ϱ^{k-1} abgespalten und die Dimension des Restes angesetzt. ϱ^k ist demnach von der Dimension gramm cent⁻³. Dementsprechend ist u dimensionslos, u^n hingegen von der Dimension gramm cent⁻³. Tritt u in einer Potenz auf, so wird jedes u^n abgespalten und von der Dimension ϱ angenommen. u^{n+1} ist demnach von der Dimension gramm cent⁻³. Besondere Vorsicht erfordert der Fall $k = 2$, $n = 1$, wo stets zu untersuchen ist, ob u als Spezialfall von u^{n-1} aufzufassen ist oder nicht.

§ 13. Um die Bedeutung der drei verschiedenen Temperaturen T , Θ_4 und Θ_k nach einer andern Seite hin zu beleuchten, wollen wir den folgenden Untersuchungen vorgreifen und den Satz als bewiesen annehmen: Kontrahiert sich infolge von Wärmeausstrahlung eine adiabatische Gaskugel derart, daß sie stets eine adiabatische Gaskugel bleibt, so legt jedes Teilchen derselben eine kosmogenetische Zustandsänderung zurück.

Daraus folgt: *Die wirkliche Temperatur jedes Gasteilchens steigt, dessen adiabatische Temperatur, in jedem Moment gleich für alle Teilchen, sinkt, und dessen kosmogenetische Temperatur bleibt konstant.* Und mit Berücksichtigung der Lehre des § 10 ergibt sich der Fundamentalsatz: *Die Verhältnisse der Temperaturen $\frac{T_m}{T_n}$, der Drucke $\frac{p_m}{p_n}$ und der Dichten $\frac{\varrho_m}{\varrho_n}$, die zwei beliebig herausgegriffene Gasteilchen M und N zu einer beliebig gegebenen Zeit zukommen, bleiben für alle Zeiten konstant.*

Drittes Kapitel. Die hydrodynamischen Gleichungen.

§ 1. Wir benutzen die sogenannte Eulersche Form der hydrodynamischen Gleichungen; u , v , w bezeichnen die Geschwindigkeitskomponenten nach den drei Achsen, X , Y , Z die Beschleunigungen, welche die äußeren Kräfte der Masseneinheit nach den drei Achsen erteilen. Sie lauten

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$(48) \quad \begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}$$

Der Konstanz der Masse wird durch die Kontinuitätsgleichung

$$(49) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

Rechnung getragen. Ist noch die Gleichung der Zustandsänderung (Weggleichung), am bequemsten in der Form

$$(50) \quad \rho = f(p)$$

gegeben, so ist der Verlauf der fünf abhängigen Variablen u, v, w, ρ und p (also auch T), und somit die Bewegung bestimmt, falls der Zustand der Flüssigkeit im Zustande der Ruhe durch ρ und p eindeutig bestimmt ist, was im folgenden stets der Fall sein soll.

Ist die Flüssigkeit inkompressibel, $\rho = \text{konst.}$, so geht die Gleichung (48) über in die Gleichung

$$(49a) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Die Geschwindigkeit c , mit der sich in kompressiblen Flüssigkeiten kleine Dichteänderungen fortpflanzen, ist bekanntlich

$$= \sqrt{\frac{\text{Elastizität}}{\text{Dichte}}},$$

die Elastizität definiert als das Verhältnis eines kleinen Druckzuwachses dp zu der unter den gegebenen Umständen dadurch bewirkten Volumänderung der Volumeinheit, $-\frac{dv}{v}$, also

$$(51) \quad c^2 = - \frac{dp}{\frac{dv}{v}} = - v^2 \frac{dp}{dv} = \frac{dp}{d\rho} \cdot \text{cent}^2 \text{ sek}^{-2}.$$

Elastizität sowohl, wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit kleiner Dichteunterschiede, die man kurz als Schallgeschwindigkeit bezeichnet, sind demnach abhängig von der Zustandsänderung des Mediums beim Hindurchgang der Wellen. Erfolgt diese längs einer Polytropen, $pv^k = \text{konst.}$ (dem Gase kann z. B. Wärme proportional seiner Temperatur durch Leitung oder Strahlung zugeführt werden), so ist

$$c^2 = k \frac{p}{\rho} = kHT.$$

Erfolgt der Durchgang der Wellen durch Luft isotherm, so ist $k = 1$, und man erhält für c die sogenannte Newtonsche Schallgeschwindigkeit $2,7994 \cdot 10^4 \text{ cent sek}^{-2}$; wenn adiabatisch, $k = \alpha$, ist

$c = \kappa HT$, gleich der Laplaceschen Schallgeschwindigkeit, $3,3112 \cdot 10^4$ cent³ sek², für $\kappa = \frac{7}{5}$.

§ 2. Es läßt sich zeigen, daß die stationäre Bewegung einer kompressibeln Flüssigkeit gleichgesetzt werden kann der stationären Bewegung einer inkompressibeln Flüssigkeit, falls nur Geschwindigkeitskomponenten auftreten, deren Quadrate und Produkte uX , vY , wZ , geteilt durch c^2 vernachlässigt werden können. Wir setzen zum Beweise in den Gleichungen (48), (49), stationärer Bewegung Rechnung tragend $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ und $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ gleich Null und schreiben die Kontinuitätsgleichung (49) in der Form

$$\frac{1}{\rho} u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{\rho} v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{1}{\rho} w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0.$$

Setzen wir $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t}$ (c^2 sinngemäß bestimmt), so erhalten wir mit Berücksichtigung der Gleichungen (48)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2c^2} \frac{d}{dt} (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{1}{c^2} (uX + vX + wZ) \\ + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

für jede stationäre Bewegung einer kompressibeln Flüssigkeit. Sind die oben erwähnten Bedingungen erfüllt, so sind der 1. und 2. Summand zu vernachlässigen und wir erhalten

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

also dieselbe Gleichung wie für eine inkompressible Flüssigkeit. Wirken keine äußeren Kräfte, so genügt dazu, daß nur das Glied $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{c^2} \right)$ praktisch = 0 gesetzt werden kann; das Strömungsbild der kompressiblen Flüssigkeit deckt sich somit mit demjenigen einer inkompressiblen Flüssigkeit unter gleichen geometrischen Oberflächenbedingungen.

§ 3. Wir können weiter beweisen, daß sich die Gleichungen (48) für kompressible Flüssigkeiten stets ersetzen lassen durch entsprechende Gleichungen für inkompressible Flüssigkeiten, unabhängig von der Größe auftretender Geschwindigkeiten, sobald die vorgeschriebene Zustandsänderung längs einer Polytropen erfolgt. Dies nachzuweisen haben wir auch die Ausdrücke $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$ umzuformen.

Ist die Polytrope durch k und einen ihrer Punkte (etwa den Ruhezustand) gegeben, so können wir nach Gleichung (40) ihre poly-

trope Temperatur Θ_k berechnen und ihre Gleichung schreiben $p = \varrho^k H \Theta_k$. Der nach einer Richtung s umzuformende Differentialquotient gibt

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial s} = (H \Theta_k)^{\frac{1}{k}} p^{-\frac{1}{k}} \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{k}{k-1} (H \Theta_k)^{\frac{1}{k}} \frac{\partial p}{\partial s}^{\frac{k-1}{k}}.$$

Führen wir nun ein

$$(52) \quad \vartheta = \frac{k}{k-1} (H \Theta_k)^{\frac{1}{k}} = \frac{k}{k-1} \frac{p^{\frac{1}{k}}}{\varrho}.$$

$$(53) \quad \pi = p^{\frac{k-1}{k}},$$

so ergibt sich für polytrope Änderung

$$(54) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial s} = \vartheta \frac{\partial \pi}{\partial s}, \quad \vartheta = \text{konst.}!$$

und die Gleichungen (48) nehmen die Form an

$$(48 \text{ a}) \quad \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \vartheta \frac{\partial \pi}{\partial x} \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \vartheta \frac{\partial \pi}{\partial y} \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \vartheta \frac{\partial \pi}{\partial z}. \end{aligned}$$

Dieselben Gleichungen gelten für eine inkompressible Flüssigkeit von der Dichte $\varrho = \frac{1}{\vartheta}$, in welcher der Druck π wirksam ist.

Ist für diese π gefunden, so bestimmt sich daraus der Zustand der kompressiblen Flüssigkeit durch die Beziehungen:

$$(55) \quad p = \pi^{\frac{k}{k-1}} = \pi^{n+1}$$

$$(56) \quad \varrho = \frac{k}{k-1} \frac{\pi^{\frac{1}{k-1}}}{\vartheta} = (n+1) \frac{\pi^n}{\vartheta}$$

$$(57) \quad T = \frac{k-1}{k} \frac{\vartheta \pi}{H} = \frac{1}{n+1} \frac{\vartheta \pi}{H},$$

welche eine für viele Zwecke bequeme Gleichung der Polytropen in Parameterform darstellen.

Auf diese Weise lassen sich z. B. auf Gase bei polytroper Zustandsänderung alle die Lösungen übertragen, die sich bei zweidimensionaler Strömung inkompressibler Flüssigkeiten durch konforme Abbildung ergeben, (sobald $\frac{d}{dt} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{c^2} \right)$ praktisch = 0 gesetzt werden kann) und für jede Stelle p , ϱ und T berechnen.

Dies Verfahren scheint für isotherme Prozesse $k = 1$ zu ver-

sagen. Wir haben bereits früher (Kap. II § 4) darauf hingewiesen, daß von allen polytropen Zustandsänderungen die Isothermen öfters eigene Behandlung erfordern. In diesem Falle, $k = 1$, geht man aus von der Zustandsgleichung $p = \varrho HT$ und erzielt mit leichter Umformung, da $T = \text{konst.}$, die Beziehungen

$$(54a) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial s} = \vartheta \frac{\partial \pi}{\partial s}; \quad \vartheta = HT; \quad \pi = \lg p.$$

In den meisten Fällen wird man es mit adiabatischer Zustandsänderung zu tun haben, $k = \pi$; $\Theta_k = \Theta$. Für Luft unter Atmosphärendruck, $t = 0^\circ$ fanden wir bereits (pag. 28) $\Theta = 3904,1$.

Mit Benutzung von $\pi = \frac{7}{5} = 1,4$ finden wir weiter

$$\vartheta = \frac{7}{2} (2,8705 \cdot 10^6 \cdot 3904)^{\frac{5}{7}} = 5,2754 \cdot 10^7, \quad \lg \vartheta = 0,72226 + 7,$$

und die Gleichungen (55), (56), (57) ergeben

$$\begin{aligned} p &= \pi^{\frac{7}{2}} \text{ Dynen cent}^{-2} \\ \varrho &= \frac{7}{2} \frac{\pi^{\frac{5}{2}}}{5,2754 \cdot 10^7} \text{ gramm cent}^{-3} \\ T &= \frac{2}{7} \cdot 18,378 \pi. \end{aligned}$$

§ 4. Die Zweckmäßigkeit der Einführung der beiden Größen ϑ und π soll an zwei einfachen Beispielen gezeigt werden.

1) Allen Folgerungen, die für kompressible Flüssigkeiten aus den Gleichungen (48a) gezogen werden können, ist keine Geschwindigkeitsgrenze gesetzt. Strömt eine inkompressible Flüssigkeit stationär, so ist längs eines Stromfadens, falls q die Geschwindigkeit, Ω das Potential der äußeren Kräfte bezeichnet

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2} q^2 - \Omega = \text{konst.}$$

Daraus ergibt sich für ein stationär fließendes Gas

$$\vartheta \pi + \frac{1}{2} q^2 - \Omega = \text{konst.}$$

Wenden wir die Formel an auf den Fall, daß ein Gas unter Vernachlässigung äußerer Kräfte aus dem Zustande der Ruhe aus einem Gefäß, in dem der Druck p_1 herrscht, in den Außenraum vom Drucke p ausströmt, so ergibt sich für die Ausflußgeschwindigkeit sofort die einfache Form

$$q = \sqrt{2 \vartheta (\pi_1 - \pi)}.$$

Ist der Ausflußquerschnitt 1 cent², und berücksichtigt man, daß

$$\varrho = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}} \varrho_1 = \left(\frac{\pi}{\pi_1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \varrho_1,$$

so ergibt sich die Ausflußmenge pro Zelteinheit

$$M = \varrho_1 \sqrt{2 \vartheta \pi_1 \left(\left(\frac{\pi}{\pi_1}\right)^{\frac{2}{k-1}} - \left(\frac{\pi}{\pi_1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}} \right)},$$

die für $\frac{\pi}{\pi_1} = \frac{2}{k+1}$ ein Maximum wird. Für den speziellen Fall adiabatischer Zustandsänderung, $k = \nu$, sind diese Formeln gleichbedeutend mit den Weißbachschen Ausflußformeln und ergeben dieselben Konsequenzen.

2) Gehen wir in der Atmosphäre ein Stückchen dh nach aufwärts, so ist die zugehörige Druckänderung $dp = -g\varrho dh$, wo g die Schwerebeschleunigung in der Höhe h mißt. Für jede polytrope Zustandsänderung ist nach Formel (54a) $\frac{1}{\varrho} dp = \vartheta d\pi$. Ist der Zustand der Atmosphäre derart, daß wir beim Emporsteigen Zustände durchlaufen, die auf einer Polytropen liegen, so ist stets $\vartheta d\pi = -gdh$, und sehen wir ab von der Änderung von g , so ergibt sich die einfache barometrische Höhenformel

$$h = \frac{\vartheta(\pi_0 - \pi)}{g}.$$

Für jeden polytropen Zustand der Atmosphäre ergibt sich somit eine obere Grenze in der Höhe

$$\tilde{h} = \frac{\vartheta \pi_0}{g} \text{ cent.}$$

Für adiabatische Zustandsänderung ($k = \nu$), die durch den Zustand $p = 1,0132 \cdot 10^6$ Dynen cent⁻² (1 Atmosphäre) und $T = 273$ hindurchgeht, fanden wir oben $\vartheta = 5,2754 \cdot 10^7$. Liegt der Punkt π_0 am Erdboden, so ist $\pi_0 = (1,0132 \cdot 10^6)^{\frac{2}{\nu}} = 5,1990 \cdot 10^1$. Daraus ergibt sich die Höhe der adiabatischen Atmosphäre

$$\tilde{h} = \frac{5,2754 \cdot 10^7 \cdot 5,1990 \cdot 10^1}{9,806 \cdot 10^3} = 2,797 \cdot 10^6 \text{ cent} = 27,97 \text{ Kilometer.}$$

Allgemein ist nach Gleichung (57)

$$\vartheta \pi = \frac{k}{k-1} HT = \frac{1}{k-1} c^k = n c^2.$$

Vernachlässigen wir die Änderung von g mit der Höhe und lassen wir die Zustände der Luft beim Emporsteigen, nach irgend

einer Polytropen k sich ändern, so findet sich stets eine obere Grenze der Atmosphäre in solcher Höhe, daß zwischen der Endgeschwindigkeit, die ein Körper beim Herabfallen zur Erdoberfläche und der durch k bedingten Geschwindigkeit c die Beziehung besteht

$$q = c \sqrt{\frac{2}{k-1}} = c \sqrt{2n}.$$

(Eingehendere Anwendungen auf die Atmosphäre werden in einem späteren Kapitel besprochen werden.)

Zweiter Abschnitt.

Differentialbeziehungen.

Viertes Kapitel.

Die Differentialgleichung der polytropen Gaskugel.

§ 1. Ist in einer Kugel vom Radius R die Masse derart angeordnet, daß die Dichte ϱ nur Funktion des Radius r ist, so ist der Wert der Potentialfunktion in einem Punkte P im Abstande r vom Mittelpunkte

$$\Omega = -\frac{4\pi G}{r} \int_0^R \varrho r^2 dr = -\frac{G M}{r} \text{ cent}^2 \text{ sek}^{-2}, \text{ wenn der Punkt außerhalb}$$

$$\Omega = -\frac{4\pi G}{r} \int_0^r \varrho r^2 dr - 4\pi G \int_r^R \varrho r dr \text{ cent}^2 \text{ sek}^{-2}, \text{ wenn der Punkt innerhalb der Kugel liegt.}$$

Dabei bezeichnet G $\text{gramm}^{-1} \text{ cent}^3 \text{ sek}^{-2}$ die Gravitationskonstante; ihr numerischer Wert ist gleich dem numerischen Wert der Kraft, mit der sich zwei Massen von je 1 Gramm in der Entfernung 1 centimeter anziehen. Die im Punkte P in Richtung des Radius wirkende Beschleunigung hat den Wert

$$-\frac{d\Omega}{dr} \text{ cent sek}^{-2};$$

die Beschleunigung nach dem Zentrum zu bezeichnen wir mit g ,

$$g = +\frac{d\Omega}{dr} \text{ cent sek}^{-2}.$$

Wir suchen zuerst die Bedingung für $\varrho = f(r)$ auf, unter welcher eine Gaskugel, deren Dichte nur von dem Radius abhängt, und nur solche werden uns weiterhin beschäftigen, im Gleichgewichte sein kann; ob dasselbe indifferent, stabil oder labil ist, soll vorderhand

gleichgültig sein. Aus den hydrodynamischen Gleichungen (48) folgt für den Ruhezustand

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \varrho(Xdx + Ydy + Zdz) \text{ und daraus}$$

$$(58) \quad dp = -\varrho d\Omega$$

$$(58a) \quad dp = -\varrho g dr$$

$$(58b) \quad dp = -\frac{4\pi G \varrho dr}{r^2} \int_0^r \varrho r^2 dr.$$

Diese Gleichungen hätten wir auch anschreiben können gemäß der Überlegung, daß, wenn wir von einer Kugelschale vom Radius r zu einer Kugelschale vom Radius $r + dr$ übergehen, der Druck um das Gewicht der eingeschlossenen Massen abgenommen haben muß. $\frac{dp}{dr}$ hat deshalb stets negatives Vorzeichen. Setzen wir in (58b)

$\varrho = f(r)$, so erhalten wir

$$(58c) \quad dp = -G \cdot \varphi(r) dr,$$

wodurch die Funktion $\varphi(r)$ durch $f(r)$ bedingt ist. Wenn $f(r)$ eine Dichteverteilung darstellt, die physikalisch realisierbar ist (Unendlichwerden, Mehrdeutigkeit, unendlich viele Maxima und Minima ausgeschlossen), so ist (58c) integrierbar. Das heißt: .

Eine Gaskugel kann im Gleichgewicht sein, wie immer deren Dichte längs des Radius variiert.

Dies Resultat ist selbstverständlich. Denn denken wir uns die Kugel durch starre Kugelflächen in beliebig viele Kugelschalen zerlegt, so haben wir, nachdem jede Schale mit Gas von vorgeschriftener Dichte gefüllt ist, die Temperatur jeder derselben so zu wählen, daß der durch ϱ und T bestimmte Druck dem Gewicht der außen liegenden Massen das Gleichgewicht halten kann, damit wir die trennenden Kugelflächen entfernen können. Die Gleichung (58c) kann also durch die Wahl von T , welche p mit bedingt, an jeder Stelle r zur Erfüllung gebracht werden.

Hat die Gaskugel endlichen Radius, so lastet auf ihrer Oberfläche kein Gewicht. Die äußerste Gasschicht hat nach außen keinen Druck zu äquilibrieren; ihr Druck muß also gleich Null sein. Die Zustandsgleichung liefert dann auch $T = 0$. Daraus folgt:

Hat eine Gaskugel endlichen Radius, so müssen an ihrer Oberfläche Druck und Temperatur gleich Null sein.

Eine endliche Gaskugel kann, wenn die Temperatur, infolgedessen auch der Druck, an der Oberfläche beliebig kleine, end-

liche Werte haben, ebenso wenig im Gleichgewichte sein, wie komprimierte Luft in einem Gefäß bei geöffneten Hähnen. Auch erfordert die kinetische Gastheorie absolute Ruhe der äußersten Gasteilchen. Bei der geringsten von Null verschiedenen Temperatur würden einzelne rasch bewegte Moleküle vorhanden sein, welche die Gaskugel verlassen würden. Um diese Oberflächenbedingung benutzen zu können, haben wir angenommen, daß die Zustandsgleichung der vollkommenen Gase bis zu den Werten $p = 0$, $T = 0$, Gültigkeit besitzt. Die Experimentalphysik liefert keine exakten Anhaltspunkte für das Verhalten der Gase in diesen Grenzzuständen; unsere Annahme aber ist die einfachste, die sich machen läßt und enthält weder Unmöglichkeiten, noch Widersprüche in sich. Wir müssen aber stets bedenken, hier über die Ergebnisse der Experimentalphysik hinaus extrapoliert zu haben. Doch werden wir sehen, daß in den äußersten Schichten der Gaskugeln, wo noch endliche, experimentell verfolgbare Werte von p und T herrschen, die Dichte und deshalb auch die Menge des da-selbst vorhandenen Gases so außerordentlich gering ist, daß es nicht von bedeutenderem Einflusse für das Innere sein kann, welche Zustandsgleichung wir demselben geben. Würden wir, wie es auch schon geschehen, den Aufbau der Kugel, die Zustände längs des Radius, von außen nach innen entwickeln, so würden jene unsicherer Zustände der Grenzschichten gleichsam als Integrationskonstanten eingehen und von größtem Einflusse sein. Wir vermeiden diesen Übelstand, indem wir von innen nach außen entwickeln, wobei wir den Vorteil haben die Grenze angeben zu können, an der wir das Gebiet noch nicht experimentell erforschter Werte von p und T betreten.

Ob aber eine Glaskugel von *endlichem* Radius überhaupt möglich ist, müssen die folgenden Untersuchungen zeigen.

§ 2. Das Resultat, daß Gaskugeln bei beliebiger DichteVerteilung längs des Radius im Gleichgewichte sein können, ist so allgemein, daß wir mit demselben wenig anfangen können. Wir wählen deshalb eine besondere Klasse von Gaskugeln aus, auf welche sich die folgenden Betrachtungen beziehen sollen. Die Eigenschaft, die wir von diesen Gaskugeln fordern, ist folgende:

Schreiten wir längs des Radius fort, so müssen wir Gasmassen in stetig aufeinander folgenden Zuständen finden, die sämtlich auf einer polytropen Kurve liegen.

Oder anders aufgefaßt: *Verschieben wir ein Gasteilchen längs des Radius, so soll es eine polytrope Zustandsänderung erfahren und*

dadurch stets mit dem jeweils verdrängten Gasteilchen in bezug auf Druck, Temperatur und Dichte übereinstimmen.

Eine solche Gaskugel nennen wir eine Gaskugel im polytropen Gleichgewicht, oder kurz eine polytrope Gaskugel; dabei haben wir noch den Exponent k (oder $n = \frac{1}{k-1}$) der Polytropen anzugeben.

An jeder Stelle derselben ist der Zusammenhang zwischen p , ϱ , T derart, daß die Zustandsgleichung $p = \varrho HT$ erfüllt ist. Schreitet man aber längs des Radius fort zu anderen Dichten, so sind Druck und Temperatur bedingt durch die Gleichungen (45), (46), (47).

$$\begin{aligned} T &= \varrho^{k-1} \Theta_k = u \Theta_k \\ p &= \varrho^k H \Theta_k = u^{n+1} H \Theta_k. \end{aligned}$$

Θ_k ist die durch die betreffende Polytrope bestimmte Temperatur; dieselbe ist durch die ganze Gaskugel hindurch konstant, so daß wir von einer polytropen Temperatur derselben reden können. Ist die Gaskugel so beschaffen, daß an einer Stelle derselben die Dichte $\varrho = 1 \text{ gramm cent}^{-3}$ angetroffen wird, so ist die Temperatur T an dieser Stelle gleich Θ_k .

Ist die Polytropenklasse (k) und die Gasart (H) gegeben, so sind, wie wir sehen werden, immer noch ∞^2 Gaskugeln möglich. Zur eindeutigen Bestimmung haben wir durch Θ_k eine Polytrope dieser Schar herauszugreifen und anzugeben, welches Stück derselben auf dem Radius zur Abbildung gelangt.

Von allen polytropen Gaskugeln haben diejenigen eine besondere Bedeutung, für welche $k = \alpha = \frac{c_p}{c_v}$ ist. Längs des Radius treffen wir dann Gasmassen an, die umkehrbar adiabatisch (isentrop) ineinander übergeführt werden können. Solche Gaskugeln nennen wir kurz adiabatische (isentrope) Gaskugeln. Jedes Gasteilchen besitzt dieselbe adiabatische Temperatur Θ , jedes Gramm Gasmasse denselben Entropiegehalt η . Wird die Masse einer vor Wärmeabgabe geschützten adiabatischen Gaskugel durcheinander gerührt, so ändert sich ihr Zustand nicht. Eine beliebige, vor Wärmeabgabe geschützte Gaskugel von konstantem Radius wird durch einen genügend lange fortgesetzten Rührprozeß in eine adiabatische Gaskugel übergeführt. Wird während dieses Rührprozesses aber jedem Gasteilchen noch irgend welche Wärmemenge dQ mitgeteilt, proportional seiner augenblicklichen Temperaturänderung dT , $dQ = \gamma dT$, so resultiert eine polytrope Gaskugel vom Exponenten $k = \frac{c_p - \gamma}{c_v - \gamma}$.

Wir behandeln in folgenden nur polytropen Gaskugeln mit einem Exponenten $k > 1$. Jede dieser polytropen Gaskugeln können wir dann formal gleich behandeln wie eine adiabatische Gaskugel eines fingenierten Gases, dessen $\kappa = k$ ist.

Die Polytropengleichung in Verbindung mit den Gleichungen in § 2 lehrt, daß in jeder polytropen Gaskugel ($k > 1$) wie p , so auch ϱ und T nach außen stets abnehmen müssen. $p = 0$ und $T = 0$ bestimmen die Oberfläche derselben.

An der Grenze $k = 1$ geht die polytropen Gaskugel über in eine isotherme Gaskugel; durch die ganze Masse hindurch ist $T = \text{konst.}$

§ 3. Wir haben in erster Linie das Gesetz aufzusuchen, nach welchem in einer polytropen Gaskugel p , ϱ und T längs r variieren. Wir erhalten dasselbe in Form einer Differentialgleichung, indem wir ausgehen von der Gleichung (58 b), die wir in der Form schreiben

$$r^3 \frac{dp}{\varrho dr} = - 4 \pi G \int_0^r \varrho r^3 dr.$$

$4 \pi \int_0^r \varrho r^3 dr$ mißt die bis zum Radius r eingeschlossene Masse. Besitzt die Gaskugel einen festen Kern von der Masse M_i und dem Radius R_i , so lautet die rechte Seite der Gleichung $-GM_i - 4\pi G \int_{R_i}^r \varrho r^3 dr$.

In beiden Fällen aber erhalten wir, indem wir nochmals nach r differentieren, für jede beliebige Gaskugel

$$(59) \quad \frac{d}{dr} \left(r^3 \frac{dp}{\varrho dr} \right) = - 4 \pi G \varrho r^3.$$

Den Ausdruck $\frac{dp}{\varrho dr}$ spezialisieren wir für polytropen Gaskugeln, indem wir ausgehen von der Gleichung (44) $p = \varrho^k H \Theta_k$ und erhalten

$$(60) \quad \frac{dp}{\varrho dr} = k H \Theta_k \varrho^{k-1} \frac{d\varrho}{dr} = \frac{k}{k-1} H \Theta_k \frac{d\varrho^{k-1}}{dr}.$$

Setzen wir

$$(61) \quad \alpha^2 = \frac{4\pi G}{\frac{k}{k-1} H \Theta_k} \text{ gramm}^{-1} \text{ cent}$$

und führen wir die Differentiation in (59) aus, so erhalten wir

$$(62) \quad \frac{d^2 \varrho^{k-1}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varrho^{k-1}}{dr} + \alpha^2 \varrho = 0$$

und mit Einführung der Bezeichnungen der Gleichungen (45) $\varrho^{k-1} = u$, $n = \frac{1}{k-1}$ erhalten wir die

Differentialgleichung der polytropen Gaskugel

$$(I) \quad \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \alpha^2 u^n = 0,$$

in welcher α und n gegeben sind, und welche bei Beachtung der auf Seite 28 gegebenen Rechenregel in bezug auf Dimension stimmt. Aus der Gleichung (38) $T = u \Theta_k$ sehen wir, daß die Funktion u die Temperatur mißt, wenn als Einheit derselben die polytrope Temperatur Θ_k gewählt wird.

Die Differentialgleichung (I) gilt nur für die Fälle $k > 1$, $n < \infty$. Die Differentialgleichung der isothermen Gaskugel ($k = 1$) werden wir später ableiten und behandeln.

§ 4. Die Differentialgleichung

$$(I) \quad \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \alpha^2 u^n = 0$$

können wir in andere Gestalt kleiden, indem wir den reziproken Radius $x = \frac{1}{r}$ einführen, wobei wir durch leichte Umformung erhalten

$$(Ia) \quad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\alpha^2 u^n}{x^4} = 0$$

oder, indem wir $v = ru$ setzen, erhalten wir

$$(Ib) \quad \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{\alpha^2 v^n}{r^{n-1}} = 0.$$

Ist durch Auflösung von (I) u gefunden, so kann aus den Beziehungen $\varrho = u^n$, $T = u \Theta_k$, $p = u^{n+1} H \Theta_k$, Dichte, Temperatur und Druck an jeder Stelle r in absoluten Maßen ausgedrückt werden.

Das allgemeine Integral der Gleichung (I) läßt sich für die Fälle $n = 0$, ($k = \infty$, $\varrho = \text{konst.}$) und $n = 1$, ($k = 2$) leicht finden. Man erhält für $n = 0$

$$(63) \quad \begin{aligned} \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \alpha^2 u &= 0, \\ u &= C_1 + \frac{C_2}{r} - \frac{\alpha^2 r^2}{6}; \end{aligned}$$

für $n = 1$

$$(64) \quad \begin{aligned} \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \alpha^2 u &= 0, \\ u &= C_1 \frac{\sin \alpha r}{\alpha r} + C_2 \frac{\cos \alpha r}{\alpha r}. \end{aligned}$$

Für $n > 1$ ist die Differentialgleichung nicht mehr linear; ihre Lösung durch Quadraturen darzustellen ist mir nicht gelungen. Wahrscheinlich wird durch dieselbe eine bisher unbekannte Funktion definiert.

Wir werden sehen, daß die Fälle $n = 3$, ($k = \frac{4}{3}$) und $n = 5$, ($k = \frac{6}{5}$), bei besonders ausgezeichnete Gaskugeln repräsentieren, sich bereits bei Behandlung der Differentialgleichung bemerkbar machen. Für den Fall $n = 5$ ist es mir gelungen, für die bei Behandlung polytropischer Gaskugeln in Betracht kommenden Integrationskonstanten, das Integral in geschlossener Form zu finden.

Ein singuläres Integral der Gleichung (I) läßt sich leicht angeben in der Form

$$(65) \quad u = \left[\frac{2}{\alpha^2} \cdot \frac{n-3}{(1-n)^2} \cdot \frac{1}{r^2} \right]^{\frac{1}{n-1}}$$

und wird uns weiterhin beschäftigen. Wir sehen hier zum ersten Male eine ausgezeichnete Eigenschaft des Exponenten $n = 3$. Denn für $n = 3$ fehlt diese singuläre Lösung; für $n < 3$ aber tritt u in imaginärer Form auf und kommt für die weiteren Untersuchungen nicht mehr in Betracht. Von besonderer Wichtigkeit wird dies singuläre Integral für $n > 5$ und namentlich für $n = \infty$, bei Behandlung der isothermen Gaskugel.

Wir tragen den in Wirklichkeit vorliegenden Verhältnissen Rechnung, indem wir nur positive r (positive x) und positive Werte von u zulassen; negative Temperaturen sind ausgeschlossen. (Schon der Umstand, daß n eine beliebig gebrochene oder irrationale Zahl sein kann, schließt negative u aus.) Nun haben wir gesehen, (§ 1), daß $\frac{dp}{dr}$ negativ sein muß. Dasselbe gilt infolge der Polytropengleichung auch für $\frac{dT}{dr}$ und $\frac{du}{dr}$ (und $\frac{de}{dr}$, falls $k < \infty$). Tragen wir u graphisch auf, so nähert sich die Kurve immer mehr der r -Achse. Kommt es zum Schnitte, so sind an dieser Stelle u , p und T gleichzeitig gleich Null. Über diese Stelle hinaus dürfen wir die u -Kurve nicht fortsetzen, da sowohl negative u , wie positive $\frac{du}{dr}$ ausgeschlossen sind. Außerhalb der Stelle $p = 0$ können keine Massen liegen, da der Druck $p = 0$ deren Gewicht nicht äquilibrieren kann.

Diese Stelle, bei welcher u gleich Null wird, bestimmt somit die Oberfläche der Gaskugel, wobei es vorderhand unentschieden bleibt, ob dieser Wert von r im Endlichen liegt, die Gaskugel endliche Dimensionen besitzt.

(Die Kurve u der Gleichung (Ia) nähert sich, von endlichem Werte in ∞ herkommend, der x -Achse immer mehr, derselben stets die konkave Seite zukehrend; der Schnittpunkt mit der x -Achse entspricht dem Schnittpunkte der u -Kurve (I) mit der r -Achse. Liegt

dieser im Endlichen, so liegt der Schnittpunkt auf der x -Achse bei $x > 0$; kommt es auch im ∞ nicht zum Schnitt mit der r -Achse, so wird die Senkrechte $x = 0$ bei einem + Werte von u durchsetzt, an welchem die u -Kurve endigt.)

§ 5. Bestimmung der beiden Integrationskonstanten. Die Differentialgleichung I enthält nur r^2 , u ist also in bezug auf r eine symmetrische Funktion. Die allgemeine Lösung von u enthält zwei willkürliche Konstante, die den vorliegenden physikalischen Verhältnissen angepaßt werden müssen. Da wir eine Lösungskurve u in jedem Punkte des + Quadranten der ur -Ebene in beliebiger Richtung abgehend beginnen lassen können, gibt es ∞^2 Lösungskurven u , die, stetig mit wachsendem r abfallend, diesen Quadranten überdecken. Die Wahl des Ausgangspunktes und Abgangswinkels bestimmen die beiden Integrationskonstanten und somit eindeutig eine u -Kurve. Ist ein fester Kern vorhanden, so sind die beiden Integrationskonstanten durch Temperatur (u) und Temperaturgefälle ($\frac{du}{dr}$) an der Oberfläche desselben bestimmt. Wir behandeln aber vorderhand nur Gaskugeln ohne festen Kern; über den Zustand derselben im Mittelpunkt machen wir nun eine fundamentale Annahme, auf welcher alle folgenden Schlüsse beruhen.

Annahme. Im Mittelpunkte einer polytropen Gaskugel besitzt u , somit Temperatur, Dichte und Druck endliche Werte.

Diese Annahme können wir nicht beweisen, sie ist aber a priori gegeben, wenn wir die Gaskugel ohne jeglichen festen Kern nicht als mathematisch, sondern als physikalisch realisierbares Gebilde auffassen wollen. In den allgemeinen Lösungen (63) und (64) für $n = 0$ und $n = 1$ sind deshalb die Konstanten C_2 gleich Null zu setzen.

Diese Annahme bestimmt aber gleichzeitig die zweite Integrationskonstante. Wir finden allgemein $\frac{dp}{dr} = -g\varrho$. Nun ist im Mittelpunkte einer jeden Kugel, in der die Dichte Funktion des Radius ist, $g = 0$; also haben wir bei endlichem ϱ im Mittelpunkte $\frac{dp}{dr} = 0$ und infolge dessen auch $\frac{d\varrho}{dr}$, $\frac{du}{dr}$ und $\frac{dT}{dr} = 0$. Die erste Annahme hat also als Konsequenz:

Im Mittelpunkt einer polytropen Gaskugel sind $\frac{du}{dr}$, $\frac{dp}{dr}$, $\frac{d\varrho}{dr}$ und $\frac{dT}{dr}$ gleich Null.

Alle Lösungskurven u verlassen demnach die Ordinate $r = 0$ bei endlichen Werten parallel der r -Achse. Durch die Wahl u für $r = 0$ ist somit die Lösungskurve eindeutig bestimmt.

Der Krümmungsradius der u -Kurve läßt sich an dieser Stelle aus (I) einfach bestimmen. Ist $u = u_0$ für $r = 0$, und beachtet man, daß $\lim \left(\frac{1}{r} \frac{du}{dr} \right)_{r=0} = \frac{d^2 u}{dr^2}$, so ist für den Mittelpunkt $\frac{d^2 u}{dr^2} = -\frac{1}{3} \alpha^2 u_0^n$ und der Krümmungsradius $= -3 \frac{1}{\alpha^2 u_0^n}$. Für Gaskugeln mit gleichem α und dem Werte $u_0 = 1$ ist der Krümmungsradius der Druck-, Dichte- und Temperaturkurve im Mittelpunkte unabhängig von n ; für $u_0 > 1$ nimmt er mit wachsendem n ab, für $u_0 < 1$ mit wachsendem n zu.

Fassen wir nach Gleichung (Ia) u als $f(x)$ auf, so ist u endlich für $x = \infty$; da $\frac{du}{dx} = -\frac{du}{dr} r^2$, ist für $x = \infty \frac{du}{dx}$ sehr stark gleich Null; ebenso $\frac{d^2 u}{dx^2} = -\frac{u^n}{x^4}$. Der Krümmungsradius ist also für $x = \infty$ sehr stark unendlich, die Kurve $u = f(x)$ hat, da $\frac{d^2 u}{dx^2} \text{ stets } < 0$, keinen Wendepunkt, während für $u = f(r)$ ein solcher möglich ist.

§ 6. Daß Gaskugeln mit endlichem Radius möglich sind, ergibt sich bereits aus der Lösung der Spezialfälle $n = 0$ und $n = 1$, für welche die Lösungen lauten $u = C - \frac{\alpha^2 r^2}{6}$ resp. $u = C \frac{\sin \alpha r}{\alpha r}$. Da $C = u_0$ ist, so erhalten wir für die Radien dieser Gaskugeln ($u = 0$): $R = \frac{\sqrt{6} u_0}{\alpha}$, resp. $R = \frac{\pi}{\alpha}$. (Im 1. Falle wächst der Radius mit u_0 , im 2. Falle ist er unabhängig davon!) Wäre nun für eine Gaskugel von endlichem Radius an der Oberfläche $\frac{du}{dr}$ ebenfalls gleich Null, so würde sich nach Gleichung I dies auch für $\frac{d^2 u}{dr^2}$, und bei wiederholtem Differentieren für alle höheren Differentialquotienten ergeben. Die Funktion u von der Grenze nach dem Taylorschen Satze entwickelt, würde für das ganze Innere der Kugel den Wert 0 annehmen, wodurch auch p , ϱ , $T = 0$ würden. Daraus folgt:

Es ist unmöglich, daß für eine polytrope Gaskugel u und $\frac{du}{dr}$ im Endlichen gleichzeitig verschwinden.

(Dies ist nur möglich im Unendlichen, da dann das Glied $\frac{2}{r} \frac{du}{dr}$ endlichen Wert haben kann.) Daraus folgt weiter:

Hat eine polytrope Gaskugel endlichen Radius, so hat an ihrer Oberfläche das Temperaturgefälle von Null verschiedenen Wert.

In der geringsten endlichen Tiefe unter der Oberfläche treffen wir dann bereits endliche Werte von u , T , ϱ und p an.

Eine Gaskugel von endlichem Radius läuft also nicht, kurz aus-

gedrückt, allmählich aus, sondern sie hat eine ebenso scharf bestimmte Oberfläche wie ein fester Körper.

Als schlagendes Beispiel diene die Gaskugel $n = 0$ mit dem Radius $R = \frac{\sqrt[6]{u_0}}{\alpha}$. Da $n = 0$, $k = \infty$, hat in ihr die Dichte überall denselben Wert wie im Mittelpunkt, um an der Oberfläche sprungweise auf Null herabzusinken. Die Temperatur u fällt gemäß der Gleichung (I) und ebenso p , beide derart, daß aus der Zustandsgleichung $p = \varrho HT$ für jede Stelle $\varrho = \text{konst.}$ folgt.

§ 7. Die Differentialgleichung (I) ist für $n = 5$ durch eine merkwürdige Eigenschaft ausgezeichnet, wie überhaupt die Zahl $n = 5$ auch weiterhin eine ausgezeichnete Rolle spielen wird. Wir hatten

$$\text{a)} (I) \quad \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \alpha^2 u^n = 0.$$

Durch Einführung von $r = \frac{1}{x}$ ergibt sich

$$\text{b)} \quad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{u^n}{x^4} = 0.$$

In (b) führen wir wieder eine neue unabhängige Variable ein

$$u = yx, \quad y = \frac{u}{x} = ur$$

und erhalten durch leichte Transformation

$$\text{c)} \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{\alpha^2 x^n y^n}{x^6} = 0.$$

Setzen wir $n = 5$, so stimmt c) mit a) überein. Das heißt: $y = ur$ ist dieselbe Funktion von $x = \frac{1}{r}$, wie u von r . Dies gibt für u die Funktionalgleichung

$$\text{d)} \quad rf(r) = f\left(\frac{1}{r}\right).$$

Nach unserer Annahme ist für $r = 0$ die linke Seite gleich Null, also auch u für $f\left(\frac{1}{0}\right) = f(\infty)$. Da negative u und positive $\frac{du}{dr}$ ausgeschlossen sind, im Endlichen u und $\frac{du}{dr}$ nicht gleichzeitig Null werden können, so fällt u stetig, um für $r = \infty$ zu Null zu werden. Die Kurve $u = f(x)$ der Gleichung b) mündet für $n = 5$ also in den Punkt $x = 0$, $u = 0$ ein. Die polytrope Gaskugel $n = 5$, $k = \frac{6}{5}$ besitzt demnach eine durch die Werte $u = 0$ ($p = 0$, $\varrho = 0$, $T = 0$) ausgezeichnete Oberfläche, die im Unendlichen liegt.

(Bei weiterer Diskussion der Funktionalgleichung, die überflüssig ist, da wir das passende Integral finden werden, müßten wir sehr vorsichtig vorgehen, da auf jeder Seite ein Paar Integrationskonstanten eingeht, deren gegenseitige Wechselbeziehung sich nicht übersehen läßt.)

Auch der später besonders hervortretende Wert $n = 3$ verleiht der Differentialgleichung eine besondere Eigenschaft. Schreiben wir (Ia) in der Form

$$x \frac{d^2 u}{dx^2} + \alpha^2 \left(\frac{u}{x} \right)^3 = 0,$$

so sehen wir, daß sie in diesem Spezialfalle $n = 3$ homogen ist. Ihre Ordnung läßt sich deshalb nach bekannten Regeln erniedrigen. Setzen wir $u = xt$, $\frac{du}{dx} = p$, $\frac{d^2 u}{dx^2} = q$, so haben wir

$$q = \frac{\alpha^2}{x} \left(\frac{u}{x} \right)^3 = \frac{\alpha^2 t^3}{x}.$$

Aus den Beziehungen $du = x dt + t dx$ und $du = p dx$ ergibt sich

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{p-t}$$

und aus der Beziehung $dp = q dx = \frac{\alpha^2 t^3}{x} dx$ folgt

$$\frac{dx}{x} = \frac{dp}{\alpha^2 t^3},$$

so daß wir die Differentialgleichung 1. Ordnung erhalten:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\alpha^2 t^3}{p-t},$$

die sich aber trotz ihres einfachen Aussehens meinen Lösungsversuchen unzugänglich erwiesen hat.

§ 8. Halten wir fest, daß die Funktion $u = f(r)$ der Differentialgleichung I für $r = 0$ den endlichen Wert u_0 hat, sowie die u -Achse horizontal durchsetzt, so ist dieser Punkt $u = u_0$ durch keine Singularität ausgezeichnet und wir können u nach dem Taylorschen Satze von $r = 0$ aus entwickeln.

Wir betrachten gleich die allgemeinere Gleichung

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{m}{r} \frac{du}{dr} + F(u) = 0.$$

In dieser Gleichung ist auch die später behandelte Differentialgleichung der isothermen Gaskugel enthalten. (Für $F(u) = u$ und Spezialisierung von m werden wir auf Zylinderfunktionen geführt usw.) Für $r = 0$ sei $F(u)$ endlich $= F(0)$, $\frac{du}{dr} = 0$. Wir können u nach dem Taylor-

schen Sätze entwickeln und erhalten

$$u = \sum \frac{u^{(p)}}{p!} r^p.$$

Die Entwicklung enthält nur gerade Potenzen von r , da u gerade Funktion sein muß. Den Wert $\lim \left(\frac{1}{r} \frac{du}{dr}\right)_{r=0}$ finden wir gleich $\frac{d^2 u}{dr^2}$ und somit $\lim \left(\frac{d^2 u}{dr^2}\right)_{r=0} = u_0'' = -\frac{1}{1+m} F(0)$. Differentieren wir die Gleichung wiederholt, so können wir stets den Grenzwert des 2. Summanden durch den 1. Summanden ausdrücken, erhalten

$$u^{(p)} = A_p \left(\frac{d^{p-2} F(u)}{dr^{p-2}} \right)_{r=0}, \quad A_p = -\frac{p-1}{p-1+m}$$

und können somit die Reihenentwicklung anschreiben. [Setzen wir z. B. $F(u) = u$, $m = 1$, $A_p = -\frac{p-1}{p}$, so können wir die Reihenentwicklung der Zylinderfunktion $J_0(r)$ direkt niederschreiben, da alle $u^{(p)}$ sich durch das bereits bekannte $u^{(p-2)}$ ausdrücken.] Bezeichnen wir $\frac{d^p F(u)}{du^p}$ mit $F^{(p)}$, so finden wir leicht, indem man berücksichtigt, daß für $r = 0$ alle ungeraden Differentialquotienten von u nach r gleich Null sind:

$$F_{(0)} = F_{(0)},$$

$$F_{(0)}'' = F_{(0)}' u_0''^2,$$

$$F_{(0)}^{IV} = F_{(0)}' u_0^{IV} + F_{(0)}'' 3 u_0'',$$

$$F_{(0)}^{VI} = F_{(0)}' u_0^{VI} + F_{(0)}'' 15 u_0'' u_0^{IV} + F_{(0)}''' 15 u_0''^3,$$

$$F_{(0)}^{VIII} = F_{(0)}' u_0^{VIII} + F_{(0)}'' (28 u_0'' u_0^{VI} + 35 u_0^{IV^2}) + F_{(0)}''' 105 u_0''^2 u_0^{IV} + F^{IV} 105 u_0''^4$$

Mit Hilfe dieser Werte können wir die $u^{(p)}$ bis u^x berechnen und finden:

$$u_0 = u_0,$$

$$u_0'' = A_2 F_{(0)},$$

$$u_0^{IV} = A_4 A_2 F_{(0)} F_0',$$

$$u_0^{VI} = A_6 A_4 A_2 F_{(0)} F_0'^2 + 3 A_2^2 A_6 F_{(0)}^2 F_{(0)}'',$$

$$u_0^{VIII} = A_8 A_6 A_4 A_2 F_{(0)} F_0^3 + F_{(0)}^2 F_{(0)}'' (15 A_2^2 A_4 A_8 + 3 A_2^2 A_6 A_8) + F_{(0)}^3 F_{(0)}''' 15 A_2^3 A_8,$$

$$u_0^x = A_{10} A_8 A_6 A_4 A_2 F_{(0)} F_0'^4 + A_{10} A_2^2 F_{(0)}^2 F_{(0)}'^2 F_{(0)}'',$$

$$(15 A_4 A_8 + 3 A_6 A_8 + 28 A_4 A_6 + 35 A_4^2) + F_{(0)}^3 F_{(0)}'' 84 A_2^3 A_6 A_{10}$$

$$+ F_{(0)}^3 F_{(0)}''' A_2^3 A_{10} (105 A_4 + 15 A_8) + F^4 F^{IV} 105 A_2^4 A_{10}.$$

Spezialisieren wir, indem wir mit Rücksicht auf unsere Gleichung (I) $m = 2$ setzen, so finden wir $A_2 = -\frac{1}{3}$, $A_4 = -\frac{3}{5}$, $A_6 = -\frac{5}{7}$, $A_8 = -\frac{7}{9}$, $A_{10} = -\frac{9}{11}$ und erhalten in der Reihe

$$u = u_{(0)} + \frac{u''_0}{1 \cdot 2} r^2 + \frac{u^{IV}_0}{4!} r^4 + \frac{u^{VI}_0}{6!} r^6 + \frac{u^{VIII}_0}{8!} r^8 + \frac{u^{X}_0}{10!} r^{10} + \dots$$

die Koeffizienten

$$u_0 = u_0$$

$$u''_0 = -\frac{1}{3} F_{(0)}$$

$$u^{IV}_0 = +\frac{1}{5} F_{(0)} F'_{(0)}$$

$$u^{VI}_0 = -\frac{1}{7} \left(F_{(0)} F'^2_{(0)} + \frac{5}{3} F^2_{(0)} F''_{(0)} \right)$$

$$u^{VIII}_0 = +\frac{1}{9} \left(F_{(0)} F'^3_{(0)} + \frac{26}{3} F^2_{(0)} F'_{(0)} F''_{(0)} + \frac{35}{9} F^3_{(0)} F'''_{(0)} \right)$$

$$u^X = -\frac{1}{11}$$

$$\left(F_{(0)} F'^4_{(0)} + \frac{499}{15} F^2_{(0)} F'^2_{(0)} F''_{(0)} + \frac{420}{21} F^3_{(0)} F''^2_{(0)} + \frac{224}{9} F^3_{(0)} F'_{(0)} F'''_{(0)} + \frac{35}{8} F^4_{(0)} F^{IV}_{(0)} \right).$$

Setzen wir nun $F(u) = u^n$, so erhalten wir eine Reihenentwicklung, deren Gesetzmäßigkeit sich nicht überblicken läßt. Außerdem sind diese Reihen für $r > 1$ äußerst unpraktisch. Wir verfolgen diese Entwicklungen deshalb nicht weiter. Ich habe sie angegeben, einmal um zu zeigen, wie die Funktion u der Differentialgleichung (I) mit bekannten harmonischen Funktionen und Funktionen noch komplizierterer Differentialgleichungen durch dieselbe Reihenentwicklung sich darstellen läßt; sodann um zu zeigen, auf welch verwickelte Weise der Wert $F_{(0)}$, der für lineare Differentialgleichungen = 1 gesetzt werden darf, in die Entwicklungen nicht linearer Differentialgleichungen eingeht.

§ 9. Wir haben gesehen, daß für $n = 3$ die Differentialgleichung homogen ist. Ihre Ordnung muß sich deshalb um eins erniedrigen lassen, was § 5 auch nach bekannten Regeln ausgeführt wurde. Nun ist es möglich, neue Variable aufzufinden, durch deren Einführung sich die Differentialgleichung für beliebiges n auf eine Differentialgleichung erster Ordnung reduzieren läßt. In der Differentialgleichung

$$(I) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \alpha^2 u^n = 0$$

schaffen wir der Bequemlichkeit halber das α^2 durch Einführung der neuen Variablen $r = \alpha r$ weg und betrachten nur die Lösungskurve

u_1 , die bei $r = 0$ die Ordinate 1 besitzt. Wir werden im nächsten Kapitel sehen, daß die Allgemeinheit der Untersuchung dadurch nicht beeinträchtigt wird. Wir deuten dies dadurch an, daß wir r_1 statt r schreiben und erhalten

$$(Ia) \quad \frac{d^2 u_1}{dr_1^2} + \frac{2}{r_1} \frac{du_1}{dr_1} + u_1^n = 0.$$

Wir führen ein

$$a) \quad r_1 = e^{-\vartheta}, \quad u_1 = e^{\lambda \vartheta} z, \quad \lambda = \frac{2}{n-1}$$

und erhalten

$$b) \quad \begin{cases} \frac{du_1}{dr_1} = -e^{(\lambda+1)\vartheta} \left(\frac{dz}{d\vartheta} + \lambda z \right) \\ \frac{d^2 u_1}{dr_1^2} = +e^{(\lambda+2)\vartheta} \left(\frac{d^2 z}{d\vartheta^2} + (2\lambda+1) \frac{dz}{d\vartheta} + \lambda(\lambda+1)z \right), \end{cases}$$

und in (Ia) eingesetzt

$$\frac{d^2 z}{d\vartheta^2} + \frac{5-n}{n-1} \frac{dz}{d\vartheta} + \frac{2(3-n)}{(n-1)^2} z + z^n = 0.$$

Setzen wir weiter

$$c) \quad \frac{dz}{d\vartheta} = y; \quad \frac{d^2 z}{d\vartheta^2} = \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{dz}{d\vartheta} \right) \frac{dz}{d\vartheta} = y \frac{dy}{dz},$$

so erhalten wir die Gleichung 1. Grades

$$(I'a) \quad y \frac{dy}{dz} + \frac{5-n}{n-1} y + \frac{2(3-n)}{(n-1)^2} z + z^n = 0.$$

Wieder treten die ausgezeichneten Werte $n = 5$ und $n = 3$ hervor, wobei ein Glied der Gleichung verschwindet.

(Für $n = 1$ versagt diese Substitution. Dies röhrt daher, daß aus einer Lösung u_1 der Gleichung (Ia) eine neue Lösung Cu_1 durch die Einführung der neuen Variablen $r_2 = C^2 r_1$, $\lambda = \frac{n-1}{2}$ abgeleitet werden kann, was bei $n = 1$ nicht möglich ist, da sich C weghebt. Dafür ließ sich in diesem Falle die Lösung von (Ia) in geschlossener Form angeben.)

Aus (b) erhalten wir leicht

$$d) \quad y = \frac{dz}{d\vartheta} = -r_1^{\frac{2}{n-1}} \left(r_1 \frac{du_1}{dr_1} + \frac{2}{n-1} u_1 \right)$$

und indem wir $\frac{d^2 z}{d\vartheta^2}$ bilden und $\frac{dy}{dz} = \frac{1}{y} \frac{d^2 z}{d\vartheta^2}$ schreiben:

$$e) \quad \begin{aligned} \frac{dy}{dz} &= - \frac{r_1^{\frac{2}{n-1}} \frac{d^2 u_1}{dr_1^2} + \frac{n+3}{n-1} z \frac{du_1}{dr_1} + \left(\frac{2}{n-1} \right)^2 u_1}{r_1 \frac{du_1}{dr_1} + \frac{2}{n-1} u_1} \\ &= - \frac{\frac{5-n}{n-1} r_1 \frac{du_1}{dr_1} + \left(\frac{2}{n-1} \right)^2 u_1 - r_1^{\frac{2}{n-1}} u_1^n}{r_1 \frac{du_1}{dr_1} + \frac{2}{n-1} u_1} \end{aligned}$$

Mit Ausnahme des Falles $n = 5$ scheint sich die Gleichung (I'a) nicht integrieren zu lassen; selbst die einfach aussehende Gleichung für $n = 3$, $y \frac{dy}{dz} + y + z^3 = 0$ hat allen Lösungsversuchen widerstanden. Wahrscheinlich definiert sie neue Funktionen.

S 10. Die Lösungskurven von (I'a) bringen wir in der yz -Ebene zur Darstellung. Da wir nur positive Werte von r_1 und u_1 zu berücksichtigen haben, so kommt, wie aus a) hervorgeht, nur der positive Teil der Abszissenachse z in Betracht. Durch die Bedingungen im Mittelpunkt der Gaskugel ohne festen Kern, oder an der Oberfläche eines vorhandenen festen Kernes wird aus den ∞^1 Lösungskurven die in Betracht kommende Lösungskurve ausgesondert. (Behandlung von Gaskugeln mit festem Kern bleibt einem späteren Kapitel vorbehalten.) Im Mittelpunkt der Kugel ist $r_1 = 0$, u_1 endlich und $\frac{du_1}{dr_1} = 0$; diese Werte bedingen

$$\vartheta = \infty, \quad z = 0, \quad y = 0.$$

Die in Betracht kommende Lösungskurve entspringt im Anfangspunkt des Koordinatensystems und geht in den südöstlichen Quadranten desselben in einem Winkel ab, dessen $\frac{dy}{dz}$ sich aus e) zu

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{2}{n-1}$$

berechnet; z. B.

$$n \quad \frac{3}{2}, \quad 2, \quad \frac{5}{2}, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad \text{sehr groß}$$

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)_{r_1=0} = -4 \quad -2 \quad -\frac{4}{3} \quad -1 \quad -\frac{2}{3} \quad -\frac{2}{4} \quad -\frac{2}{5} \quad \text{sehr klein.}$$

Je kleiner n , desto steiler steht die Kurve im Ausgangspunkt. Diese Abgangsrichtung ist in den folgenden Diagrammen Nr. 1—8 durch die Gerade η angegeben.

Die Grenze der Kugel ist gegeben durch $u_1 = 0$. Hier haben wir zwei Fälle zu unterscheiden. Ist der Radius der Kugel endlich, so muß nach a) für die Oberfläche ($u = 0$) $z = 0$ sein. Ist aber der Radius unendlich, so ist nach a) $\vartheta = -\infty$ und die Bedingung $u_1 = 0$ ist für beliebige endliche Werte von z erfüllt. Für Gaskugeln mit endlichem Radius mündet die y -Kurve in die y -Achse ein; ein Einmünden in die y -Achse hat umgekehrt bei endlichem r_1 die Erfüllung der Oberflächenbedingung $u_1 = 0$ zur Folge. Endigt die y -Kurve bei Werten von z größer Null, so zeigt dies stets unendlich großen Radius der Gaskugel an. Mündet die y -Kurve in die y -Achse ein, so ergibt sich aus (I'a) ihr Schnittwinkel mit derselben zu

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{5-n}{n-1}.$$

Dies ergibt z. B.

$$\begin{array}{cccccc} n = & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 3 & 4 \\ \left(\frac{dy}{dz}\right)_{u=0} = & -7 & -3 & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3}. \end{array}$$

Die Kurve mündet um so flacher, je größer n . Für $n = 5$ tritt in dieser Gesetzmäßigkeit Unstetigkeit ein. In diesem Falle mündet, wie wir sehen werden, die Kurve wieder im Ausgangspunkt, den sie mit $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$ verlassen, symmetrisch mit $\frac{dy}{dx} = +\frac{1}{2}$ ein. (Wegen $y = 0$ versagt die Bestimmung von $\frac{dy}{dz}$ aus (I'a).) Für $n > 5$ kommt, wie wir sehen werden, die Kurve y nicht mehr zum Schnitt mit der Ordinatenachse, was unendlich ausgedehnte Gaskugeln zur Folge hat.

§ 11. Um weiter einen Überblick über den Verlauf der Lösungskurve zu erhalten, überdecken wir die in Betracht kommende Hälfte der yz -Ebene mit der Schar Kurven, die dadurch ausgezeichnet sind, daß die Lösungskurve jede derselben unter einem bestimmten konstanten Winkel durchsetzt. Wir erhalten diese Kurven konstanter Fortschreitungsrichtung, indem wir die Gleichung (I'a) in der Form schreiben

$$f) \quad y = -\frac{z^n + \frac{2(3-n)}{(n-1)^2} z}{\frac{dy}{dz} + \frac{5-n}{n-1}}$$

und die Kurven einzeichnen, für welche $\frac{dy}{dz}$ den angenommenen konstanten Wert hat. In den Diagrammen 1—8 sind diese Kurven konstanter Fortschreitungsrichtung eingetragen; mit Hilfe derselben können wir, von einem beliebigen Punkte ausgehend, die Lösungskurve y zeichnen; die für Gaskugeln ohne festen Kern in Betracht kommende Lösungskurve ist jeweils gestrichelt eingetragen. Stets wird die z -Achse senkrecht durchsetzt. Je nach dem Werte von n zerfallen diese Diagramme in zwei Klassen, die durch den Fall $n = 3$ geschieden werden. Wie aus f) hervorgeht, besitzt für jedes n die Schar der Kurven konstanter Fortschreitungsrichtung außer im Anfangspunkt des Koordinatensystems einen weiteren Verzweigungspunkt mit den Koordinaten:

$$y_0 = 0, \quad z_0 = \left[\frac{2(n-3)}{(n-1)^2} \right]^{\frac{1}{n-1}}.$$

Für $n < 3$ ist z_0 negativ oder tritt in imaginärer Form auf, kommt also für unsere Zwecke nicht in Betracht. Für $n = 3$ fällt

Bemerkungen zu den Diagrammen 1—8.

In diesen Diagrammen sind die Kurven konstanter Fortschreitungsrichtung gemäß Gl. f. eingetragen, jede bezeichnet durch den sie charakterisierenden Wert von $\frac{dy}{dz}$; die Fortschreitungsrichtungen sind durch kurze, auf jeder dieser Kurven unter sich parallele Striche veranschaulicht. Für negative z kann die Figur nur angelegt werden, wenn $(-z)^n$ reell ist. Für $n > 3$ besitzen die Lösungskurven eine Wendetangente. Der geometrische Ort der Wendepunkte ist in die Diagramme 5—8 strichpunktet eingezeichnet; seine Gleichung kann aus I'a gemäß der Bedingung

$$\frac{d^2y}{dz^2} = 0$$

leicht aufgestellt werden. (Siehe unten Kap. X u. XIII.) Die für Gaskugeln ohne festen Kern in Betracht kommenden Lösungskurven der Gleichung I'a sind stark gestrichelt gezeichnet. Sie entspringen im Anfangspunkt des Koordinatensystems in der durch (vgl. Seite 49)

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{2}{n-1}$$

bestimmten Abgangsrichtung; letztere ist durch die gestrichelte Gerade η hervorgehoben. Eine zweite mögliche Abgangsrichtung, durch

$$\frac{dy}{dz} = \frac{n-3}{n-1}$$

bestimmt und durch die gestrichelte Gerade ξ hervorgehoben, wird in Kap. XIII besprochen werden. Die Lösungskurve für $n = 1,5$ mündet bei $y_1 = 132$ in die Ordinatenachse ein; ihr Verlauf ist in der kleinen Figur des Diagramms 1 dargestellt. Mit wachsendem n nimmt y_1 ab und wird für $n = 5$ gleich Null. Für $n > 5 \dots$ windet sich die Lösungskurve in sich verengenden Spiralen umgekehrt dem Uhrzeigersinne um den Verzweigungspunkt

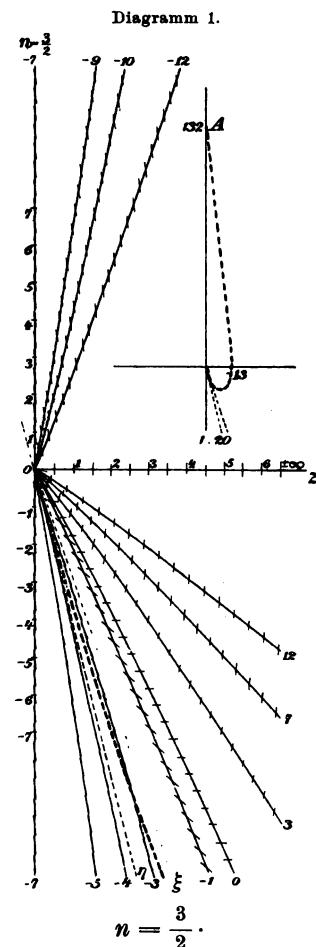
$$y = 0, z = z_0,$$

(z_0 mit n wachsend), in denselben nach unendlich vielen Umläufen einmündend.

Die Differentialgleichung I;

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \alpha^2 n^n = 0$$

ist bei wachsendem n außer durch $n = 3$ und $n = 5$ durch einen kritischen Wert $n = 3,176 \dots$ charakterisiert. Derselbe wird in den Untersuchungen des Kapitels über Gaskugeln mit festem Kern zutage treten; daselbst wird das die Fälle $3 < n < 3,176$ erläuternde Diagramm 5, $n = 3,1$, besprochen werden.



$$n = \frac{3}{2}.$$

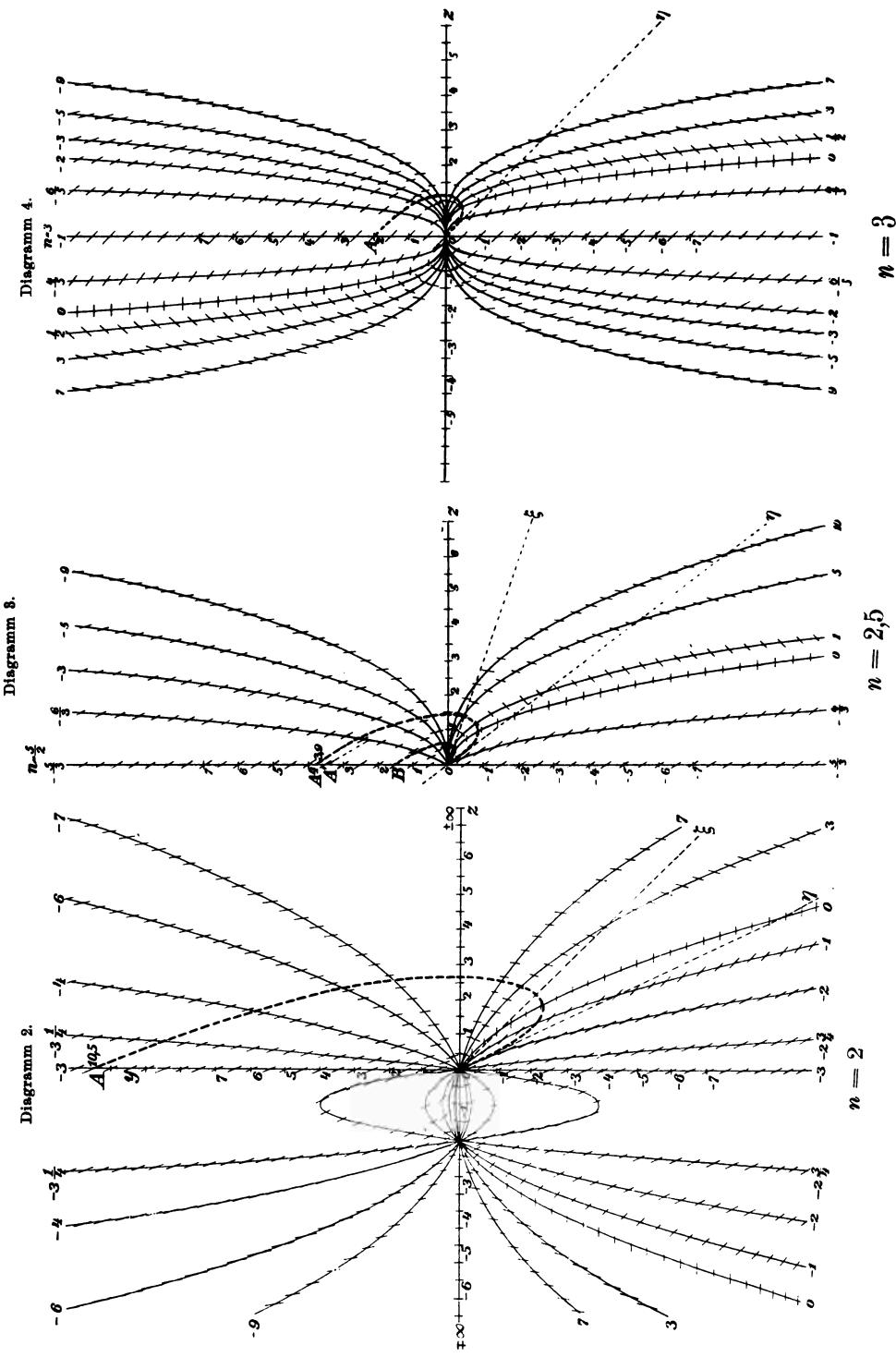
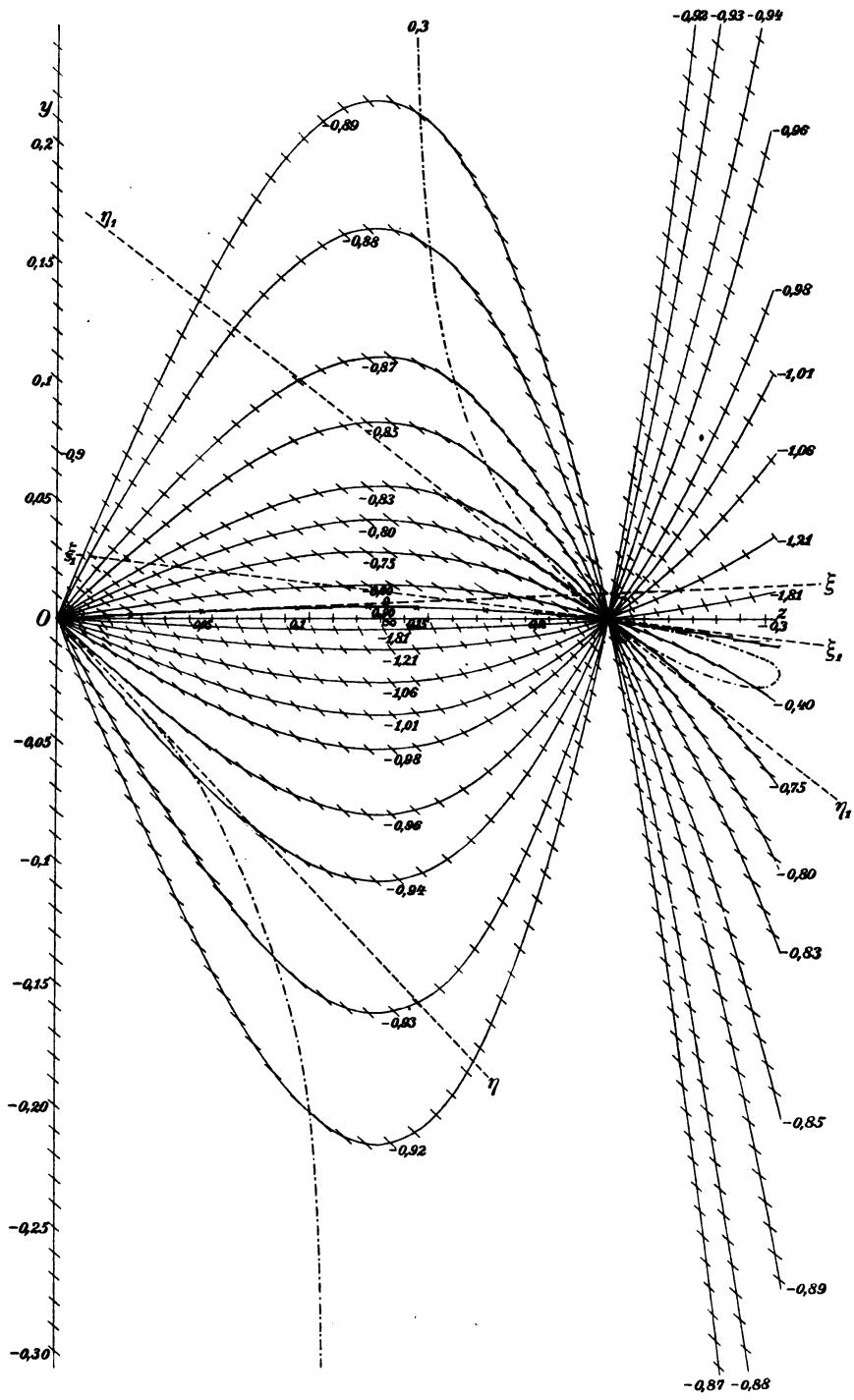


Diagramm 5.



$n = 3,1$

Diagramm 6.

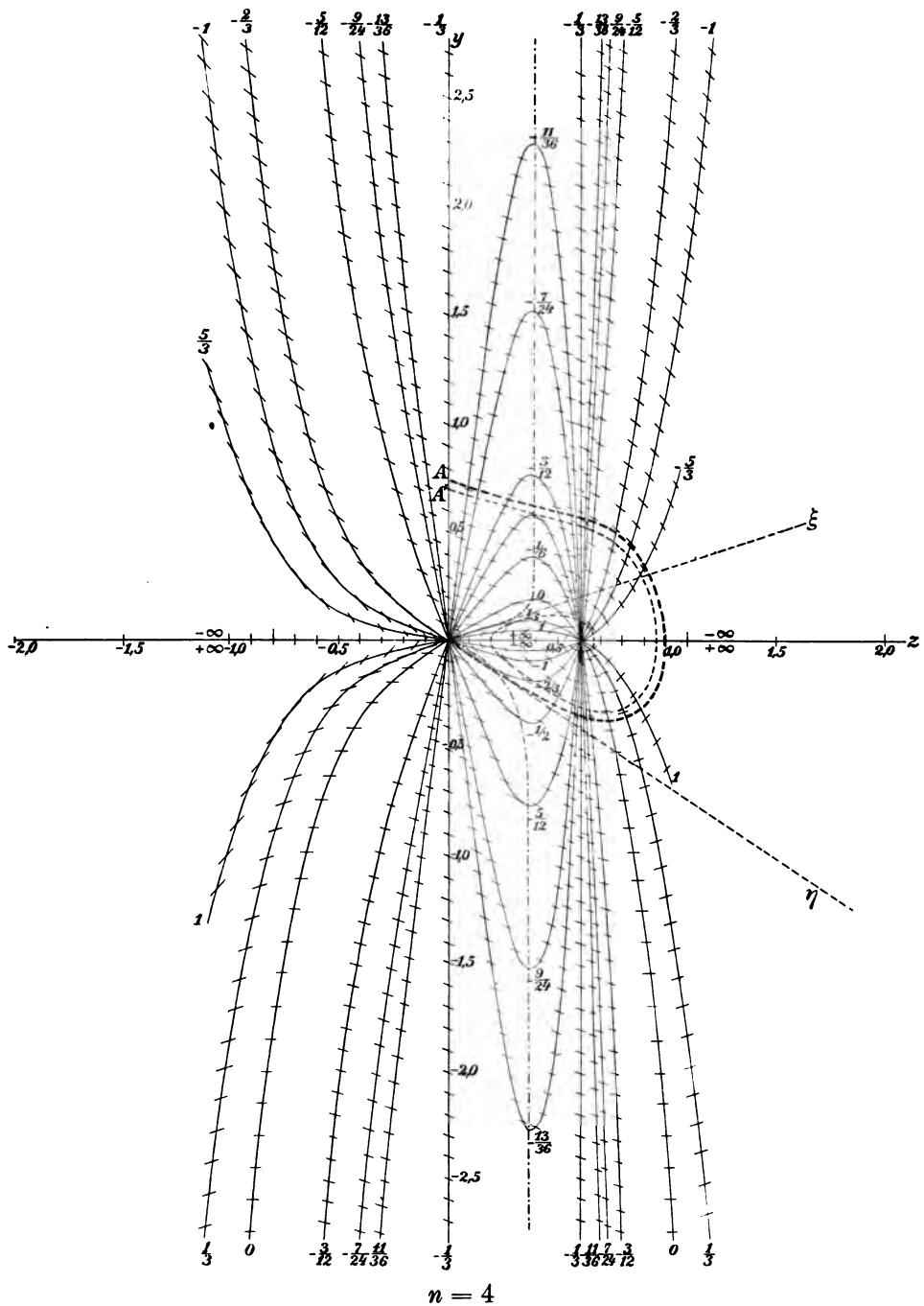


Diagramm 7.

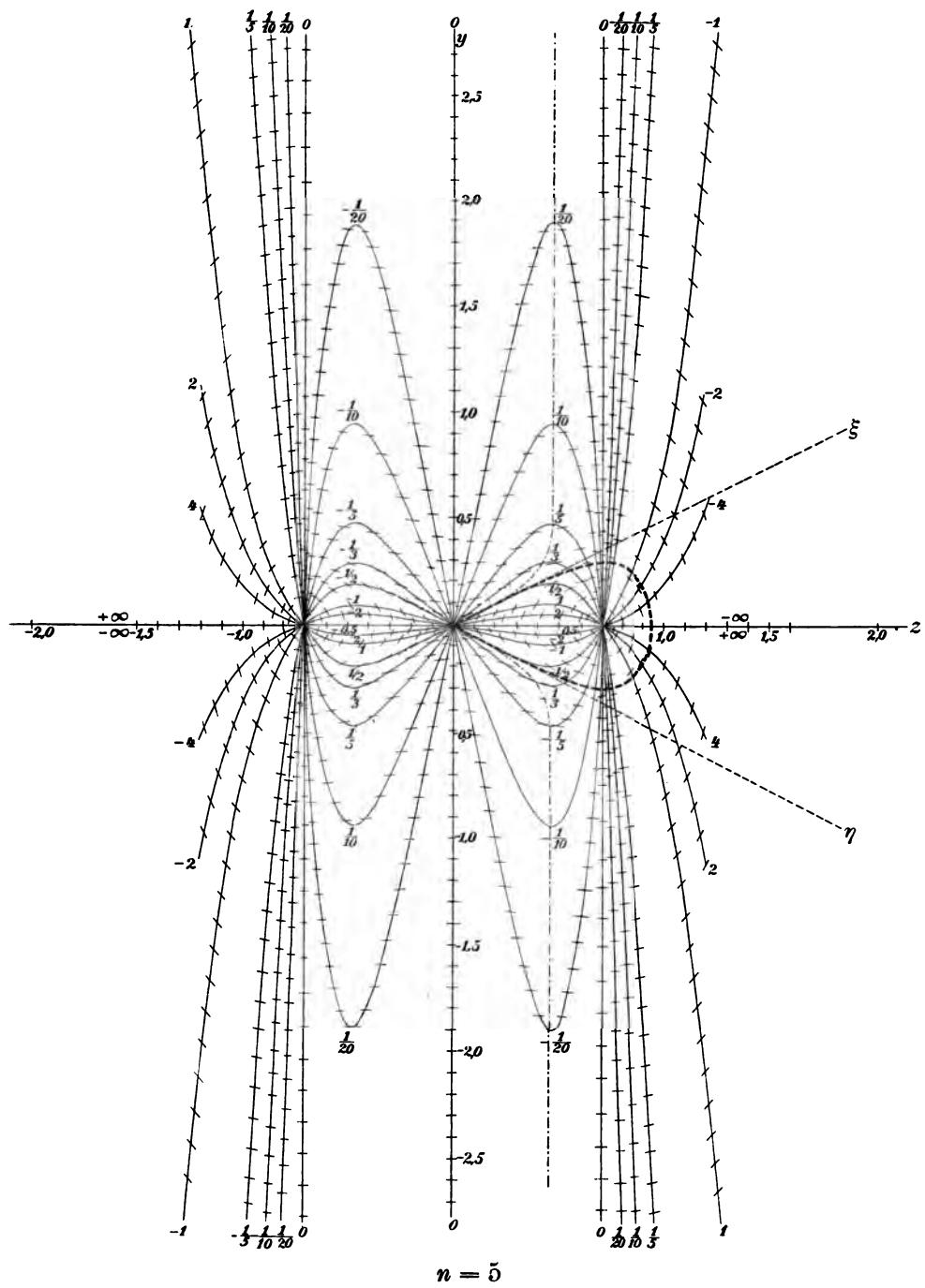
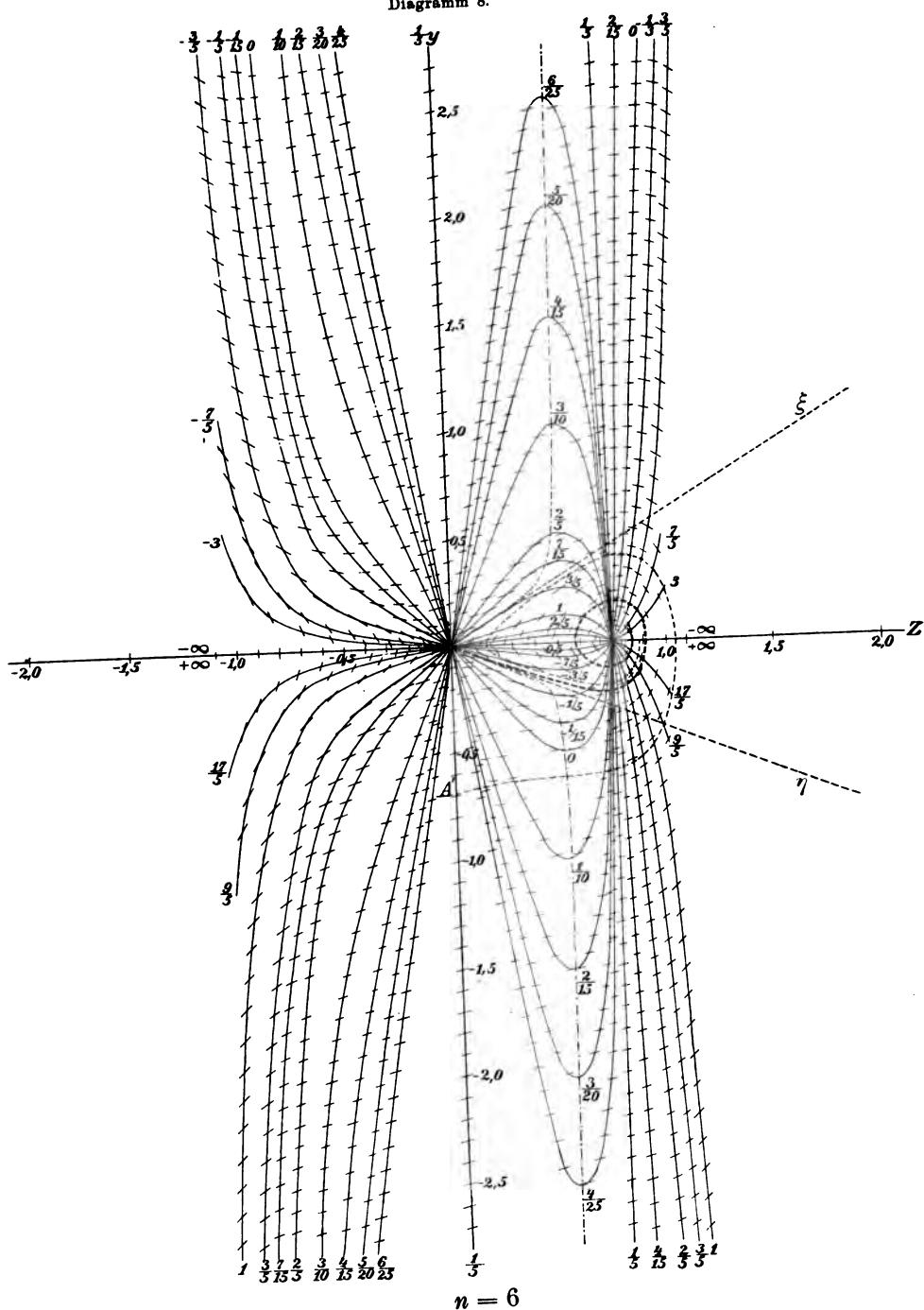


Diagramm 8.



der Verzweigungspunkt mit dem Koordinatenanfang zusammen; für $n > 3$ ist seine Abszisse leicht zu berechnen. Die Senkrechte $z = z_0$, nach f) mit der Durchsetzungsrichtung $\frac{dy}{dz} = -\frac{5-n}{n-1}$, erfüllt die Gleichung (I'a); sie bildet eine singuläre Lösung derselben und somit auch der Differentialgleichung zweiter Ordnung (Ia). Mit Berücksichtigung von a) erhalten wir die singuläre Lösung

$$g) \quad u_1 = e^{\frac{2}{n-1} \vartheta} z_0 = \left[\frac{2(n-3)}{(n-1)^2} \cdot \frac{1}{r_1^2} \right]^{\frac{1}{n-1}}.$$

Dies ist die singuläre Lösung, die wir für $n > 3$ bereits in § 4 fanden.

Behandeln wir erst die Fälle $n < 3$ und konstruieren mit Hilfe der in den Diagrammen eingezeichneten Fortschreibungsrichtungen die Lösungskurve. Sie entspringt dem Koordinatenanfangspunkt, geht unter dem im vorigen Paragraphen berechneten Ausgangswinkel in den unteren Quadranten hinein, verläuft immer horizontaler, wendet sich allmählich nach oben, um die z -Achse bei endlichem z senkrecht zu durchsetzen und nach links ansteigend unter bereits angegebenem Winkel bei endlichem Wert y in die y -Achse einzumünden, wodurch nach a) $u_1 = 0$ gemacht und die Begrenzung der Gaskugel bestimmt wird. Diese Art des Einmündens ist nach a), wie bereits oben erläutert, notwendige Bedingung, daß die Kugel endlichen Radius hat. Um zu zeigen, daß sie auch hinreichende Bedingung hierfür ist, betrachten wir das letzte Stück der Lösungskurve, indem wir die Gleichung (I'a) für sehr kleine Werte von z bilden, wodurch sie, da y_1 und $\left(\frac{dy}{dz}\right)_{y_1}$ gegen kleine z große Werte besitzen, die Form

$$\frac{dy}{dz} + \frac{5-n}{n-1} = 0$$

annimmt und für das letzte Kurvenstück die Gleichung einer Geraden $y = y_1 - \frac{5-n}{n-1} z$ ergibt. Da $y = \frac{dz}{dv}$, können wir nochmals integrieren und erhalten $\vartheta = -\frac{1}{5-n} \lg \left(y_1 - \frac{5-n}{n-1} z \right) + C$. Da $r_1 = e^{-\vartheta}$ un-

abhängige Veränderliche ist, kann die Integrationskonstante C nicht ∞ sein. ϑ bleibt für $z = 0$, $y = y_1$ endlich; $u_1 = e^{\vartheta} z$ wird für diesen Punkt stets gleich Null. Daraus folgt:

Polytropen Gaskugeln mit $n \leq 3$ haben endlichen Radius.

Für $n > 3$ weisen die Kurven gleicher Fortschreibungsrichtung einen bei positiven z auf der Abszissenachse liegenden Verzweigungspunkt auf; für $n > 3$ existiert die singuläre Lösung g), die besonders für

die Fälle $n > 5$ eine fundamentale Rolle spielen wird. Die Fälle $n > 3$ werden nun wieder in zwei Klassen getrennt, je nachdem $n < 5$ oder > 5 ist. Als Beispiel sind in den Diagrammen Nr. 6, 7, 8 die Fälle $n = 4, 5$ und 6 dargestellt. Setzen wir die eingezeichneten Linienelemente der Lösungskurven zusammen, so sehen wir, daß wir für $n = 5$ Linienzüge erhalten, die symmetrisch gegen die z -Achse liegen, in allen andern Fällen aber in dem den Verzweigungspunkt umgebenden Gebiete Spiralen, die sich bei Umkreisung dieses Punktes entgegengesetzt dem Uhrzeiger für $n < 5$ auf-, für $n > 5$ zuwickeln.*). Dies verschiedene Verhalten röhrt daher, daß in Gleichung f) für $n \leq 5$ ein Vorzeichenwechsel eintritt und die Kurve der konstanten Fortschrittsrichtung $\frac{dy}{dz} = 0$ dadurch zwischen z und z_0 auf verschiedene Seiten der z -Achse zu liegen kommt. Verlassen wir den Anfangspunkt der Koordinaten unter vorgeschrivenem Winkel, so werden wir bei $n = 5$ auf einem den Punkt $y = 0, z = z_0$ einschließenden, symmetrisch gegen die Abszissenachse liegenden Wege in den Ausgangspunkt zurückgeführt. Bei $n < 5$ umgehen wir den Verzweigungspunkt, wenden uns nach links oben, um, nachdem der Weg eine Depression erlitten hat, bei endlichem Werte von y in die y -Achse einzumünden. Bei $n > 5$ aber wird die in Betracht kommende Lösungskurve, nachdem sie die z -Achse bei $z > z_0$ durchsetzt hat, durch den Verzweigungspunkt abgefangen und gezwungen, denselben in einer sich verengenden Spirale entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne zu umkreisen. Dadurch ist die Möglichkeit geboten, daß das in Betracht kommende Stück der Lösungskurve bei $z_0 > 0$ endigt, die Gaskugel unendlichen Radius besitzt. Die Fälle $n > 5$ werden deshalb in dem späteren Kapitel über Gaskugeln mit unendlichem Radius ihre Erledigung finden. Für $n < 5$ ist der Radius der Gaskugel endlich wie bei $n < 3$; doch tritt hier folgende Eigentümlichkeit auf. Da die Lösungskurve rechts von z_0 vorbeigeht, schneidet sie zweimal die Gerade $z = \text{konst.} = z_0$, welche die singuläre Lösung darstellt; Hauptlösung und singuläre Lösung durchsetzen sich in zwei

*.) Wir werden später (Kap. X) zeigen, daß wir zwischen $n = 3$ und $n = 5$ nachmals einen kritischen Wert $n = 3,176$ antreffen; erst für $n > 3,176$ treten in der Umgebung von z_0 spiralförmige Lösungskurven auf. Für die Lösungskurve u_1 , ausgezeichnet durch $\frac{du_1}{dr_1} = 0$ für $r_1 = 0$ macht sich dieser kritische Wert von n nicht bemerkbar. Wir werden die weitere Teilung des Intervalls von $3 < n < 5$, sowie das Diagramm der Fortschrittsrichtungen für $n = 3,1$ erst später erörtern.

Punkten. Daraus folgt, daß auch die singuläre Lösung g) der Differentialgleichung 2. Ordnung (Ia) und die durch Integrationskonstanten ausgezeichnete Hauptlösung an zwei Punkten sich durchschneiden. Da die singuläre Lösung für $r_1 = 0$ unendlich große Werte ergibt, liegt sie anfangs über der Hauptlösung, senkt sich dann unterhalb dieselbe, um sich der z -Achse asymptotisch zu nähern, wobei sie nochmals mit der Hauptlösung, welche bei endlichen Abszissen in die r_1 -Achse einmündet, zum Schnitte gelangt

§ 12. Während die Fälle $n < 5$ zu endlichem, die Fälle $n > 5$ zu unendlichem Radius führen, bleibt der Fall $n = 5$ noch unbestimmt; denn, da die Lösungskurve bei $y = 0$ in die y -Achse einmündet, versagen die angestellten Überlegungen. Dieser Fall findet seine Erledigung dadurch, daß es gelingt, die in Betracht kommenden Lösungskurven der Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung zu finden.

Für $n = 5$ vereinfacht sich (I'a) zu

$$y \frac{dy}{dz} - \frac{1}{4} z + z^5 = 0$$

was sich zu

$$y^2 - \frac{1}{4} z^2 + \frac{1}{3} z^6 = \text{konst.} = 0$$

integrieren läßt. Die Integrationskonstante ist gleich Null, da die in Betracht kommende Lösungskurve von $z = 0$, $y = 0$ ausgeht. Die Kurve verläßt diesen Punkt unter einem Winkel, dessen Tangente $= -\frac{1}{2}$ ist (§ 10), erreicht bei der Abszisse des Verzweigungspunktes $z_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ ein Minimum

$$y = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \sqrt[4]{1 - \frac{1}{3}} = -0,28867, \text{ um bei } z = \sqrt[4]{\frac{3}{4}} = 0,93060$$

die z -Achse zu durchsetzen, sich nach links wendend bei z_0 die singuläre Lösung zum zweiten Male schneidend den Maximalwert $+0,28867$ zu erreichen und symmetrisch in den Ausgangspunkt einzumünden. Da $y = \frac{dz}{d\vartheta}$, können wir die Lösungskurve in der Form schreiben

$$d\vartheta = \frac{2 dz}{z \sqrt[4]{1 - \frac{4}{3} z^4}},$$

was sich zu

$$\vartheta = -\lg \frac{1 + \sqrt[4]{1 - \frac{4}{3} z^4}}{\sqrt[4]{\frac{4}{3} z^2}} + \lg C$$

integrieren läßt. Ersetzen wir gemäß a) ϑ und z durch r_1 und u_1 , so erhalten wir

$$u_1 = \sqrt{\sqrt{\frac{2C}{3}} \cdot \frac{1}{C^2 + r_1^2}}$$

C haben wir so zu bestimmen, daß für $r_1 = 0$ sich $u_1 = 1$ ergibt. Wir lösen die Aufgabe allgemeiner, indem wir für $r_1 = 0$ den Wert $u = u_0$ vorschreiben. Wir setzen in Übereinstimmung damit wieder r an Stelle von r_1 und erhalten als Lösung von (I) für $\alpha^2 = 1$

$$(66) \quad u = u_0 \sqrt{\frac{3}{3 + u_0^{-4} r^2}}.$$

Da

$$\frac{du}{dr} = -\frac{u_0^{-5} r}{3 + u_0^{-4} r^2} \sqrt{\frac{3}{3 + u_0^{-4} r^2}}$$

ist, wie erforderlich $\frac{du}{dr} = 0$ für $r = 0$.

Da schließlich

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = \frac{2u_0^{-9} r^2 - 3u_0^{-5}}{(3 + u_0^{-4} r^2)^2} \sqrt{\frac{3}{3 + u_0^{-4} r^2}},$$

so hat die Lösungskurve bei $r = \frac{1}{u_0^{-2}} \sqrt{\frac{3}{2}}$ eine Wendetangente. Zum Nullwerden von u ist $r = \infty$ erforderlich; die Gaskugel besitzt, wie bereits in § 7 bewiesen, unendlichen Radius. Bei wachsendem n treten wir mit $n = 5$ in das Gebiet unendlich großer Gaskugeln; vor $n > 5$ ist dieser Fall dadurch ausgezeichnet, daß hier für $r = \infty$ sich $r^2 \frac{du}{dr} = -\frac{1}{u_0} \sqrt{3}$, also noch endlich ergibt.

Für $n = 5$ haben wir noch die singuläre Lösung $u = \frac{1}{\sqrt{2r}}$. Diese senkt sich aus $u = \infty$ auf die Lösungskurve (66) herab, schneidet dieselbe bei $r = \frac{3u_0 - \sqrt{6}}{u_0^{-2}}$, verläuft unterhalb derselben bis zum zweiten Schnitte bei $r = \frac{3u_0 + \sqrt{6}}{u_0^{-2}}$, um dann wieder oberhalb derselben liegend sich mit ihr asymptotisch der r -Achse zu nähern.

§ 13. Unsere Untersuchungen bezogen sich auf die Abhängigkeit $u_1 = f(r_1)$ gemäß Gleichung (Ia). Da aber $r_1 = \alpha r$, α endliche Konstante, so bleiben die Resultate auch für $u_1 = f(r)$ gemäß Gleichung (I) bestehen. Lassen wir für die verschiedenen n die Lösungskurven für $\alpha = 1$ gemeinschaftlich bei $r = 0$, $u_0 = 1$ entspringen, wie vorgeschrieben mit horizontaler Tangente, so bilden sie hier ein Kurvenbüschel, in welchem wie aus der Reihenentwicklung des § 8 unmittel-

bar ersichtlich ist, das höhere n stets höher liegt. Alle Kurven senken sich nach der r -Achse herab, wobei $\frac{du}{dr}$ stets negativ ist. Für $n > 5$ kommt es im Endlichen nicht zum Schnitt mit der Abszissenachse; die Kurve für $n = 5$ mündet bei $r = \infty$ mit $\frac{du}{dr} = 0$ ein; die Kurven $n < 5$ schneiden bei endlichen r unter endlichen Winkel ein. Außer $n = 5$ haben wir für $n = 0$ und 1 die Lösungen in geschlossener Form angegeben und können daraus entnehmen, daß in diesen drei Fällen zum größeren n der größere Endradius gehört. Berücksichtigen wir noch die Art des Entspringens aller n Kurven, sowie der Umstand, daß die Endordinaten der Lösungskurven der Gleichung erster Ordnung mit wachsendem n stetig bis $y_1 = 0$ für $n = 5$ abnehmen, so wird es äußerst wahrscheinlich, daß ganz allgemein zum größeren n der größere Endradius gehört. Wir werden diese Vermutung später bestätigt finden.

Für $n > 3$ tritt noch eine singuläre Lösung auf, die für die später zu behandelnden Gaskugeln mit unendlichem Radius eine große Rolle spielen wird. Gaskugeln ohne festen Kern können nicht nach diesem Gesetze gebaut werden, da ihre Mittelpunktsdichte unendlich würde; bei Gaskugeln mit festem Kerne wird die singuläre Lösung auch realisierbar sein.

Wir werden in Kap. X u. XIII auf diese Topographie der Lösungskurven zurückkommen.

Fünftes Kapitel. Auswertung der Differentialgleichung.

§ 1. Die Differentialgleichung einer polytropen Gaskugel von der Klasse k lautete

$$(I) \quad \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \alpha^2 u^n = 0$$

$$n = \frac{1}{k-1}, \quad \alpha^2 = -\frac{4\pi G}{k H \Theta_k} [\text{gramm}^{-1} \text{cent}].$$

H ist durch die Gasart, k und Θ_k durch die Polytrope gegeben. Wir nehmen an, die Lösung dieser Gleichung sei gefunden und den Bedingungen $u = u_0$, $\frac{du}{dr} = 0$ für $r = 0$ angepaßt. Zu einer eindeutigen Bestimmung einer polytropen Gaskugel müssen außer der Gasart (H) und der Polytropenklasse (k) noch die polytrope Temperatur (Θ_k) und der Zustand im Mittelpunkt (u_0) gegeben sein. Aus

einer gegebenen Gasart lassen sich deshalb ∞^3 polytropen, ∞^3 adiabatischen Gaskugeln aufbauen.

§ 2. Aus der Lösung $u = f(r)$ lassen sich alle durch Temperatur, Dichte und Druck bedingten Eigenschaften der Gaskugeln ableiten. Der Radius R der Oberfläche der Gaskugel findet sich aus der Bedingung $u = 0$. (Größen, die sich auf die Oberfläche einer Gaskugel beziehen, werden wir nach Möglichkeit mit deutschen Buchstaben bezeichnen.) Temperatur, Dichte und Druck finden sich an jeder Stelle aus den Beziehungen (Gleichungen (45), (46), (47)):

$$\begin{aligned} \varrho &= u^n = u^{\frac{1}{k-1}} \text{ gramm cent}^{-3} \\ T &= u \Theta_k \\ p &= u^{n+1} H \Theta_k = u^{k-1} H \Theta_k \text{ Dynen cent}^{-2}. \end{aligned}$$

Zur Bildung weiterer Beziehungen gehen wir aus von Gleichung (58a)

$$dp = -g\varrho dr.$$

Die Polytropengleichung $p = \varrho^k H \Theta_k$ liefert

$$\frac{1}{\varrho} dp = \frac{k}{k-1} H \Theta_k d\varrho^{k-1} = \frac{k}{k-1} H \Theta_k du$$

und aus beiden Gleichungen folgt:

$$(67) \quad g = -\frac{k}{k-1} H \Theta_k \frac{du}{dr} = -\frac{4\pi G}{\alpha^2} \frac{du}{dr} \text{ cent sek}^{-2}.$$

Die Lösung $u = f(r)$ gibt somit den Wert der Schwerbeschleunigung g an jeder Stelle der Gaskugel. Man beachte, daß nicht u , sondern nur das Gefälle von u längs r in die Gleichung eingeht. Der Wert von $\frac{du}{dr}$ an der Stelle $u = 0$ gibt den Wert g an der Oberfläche der Gaskugel. Hat diese endlichen Radius, so muß $g > 0$ sein. In Übereinstimmung damit haben wir bereits in § 6 des vorigen Kapitels aus der Differentialgleichung selbst bewiesen, daß im Endlichen u und $\frac{du}{dr}$ nicht gleichzeitig verschwinden können. Nach den Untersuchungen des vorigen Abschnittes läuft die Kugel $n = 5$ asymptotisch aus; der Wert von g an ihrer im Unendlichen liegenden Oberfläche ist deshalb gleich Null.

Hat die Kurve $u = f(r)$ einen Wendepunkt ($\frac{du}{dr}$ Maximum, $\frac{d^2u}{dr^2} = 0$), so tritt an dieser Stelle das Maximum von g auf.

Aus der Beziehung $g = \frac{GM}{r^2}$ und Gleichung (67) finden wir

$$(68) \quad M = -\frac{k}{k-1} \frac{H \Theta_k}{G} r^2 \frac{du}{dr} = -\frac{4\pi}{\alpha^2} r^2 \frac{du}{dr} \text{ gramm.}$$

Damit ist die vom Radius r begrenzte Masse bestimmt. Die Gesamtmasse M ergibt sich, wenn in (68) $(r^2 \frac{du}{dr})_{r=R}$ eingesetzt wird. Für $n = 5$ hatten wir $u = u_0 \sqrt{\frac{3}{3 + u_0 r^2}}$ gefunden. Die Gesamtmasse dieser unendlich großen Gaskugel ist deshalb proportional

$$u_0^5 \left[\sqrt{\frac{3 r^6}{(3 + u_0^4 r^2)^3}} \right]_{r=\infty} = \frac{1}{u_0} \sqrt{3},$$

also endlich. Man beachte: Je größer die Mittelpunktsdichte, desto kleiner die Masse!

Aus (67) berechnet sich der Wert der Potentialfunktion an jeder Stelle der Gaskugel.

$$(69) \quad \Omega = -\frac{k}{k-1} H \Theta_k \int \frac{du}{dr} dr = -\frac{k}{k-1} H \Theta_k u + \text{konst.} \\ = -\frac{4\pi G}{\alpha^2} u + \text{konst. cent}^2 \text{sek}^{-2}.$$

Die mittlere Dichte $\bar{\rho} = \frac{M}{\frac{4}{3} \pi r^3}$ der Masse, die innerhalb des

Radius r eingeschlossen liegt, beträgt

$$(70) \quad \bar{\rho} = -\frac{3k}{k-1} \frac{H \Theta_k}{4\pi G} \cdot \frac{1}{r} \frac{du}{dr} = -\frac{3}{\alpha^2} \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \text{ gramm cent}^{-3}.$$

Für das Verhältnis der Mittelpunktsdichte $\rho_0 = u_0^n$ zu dieser mittleren Dichte $\bar{\rho}$ erhalten wir

$$(71) \quad \frac{\rho_0}{\bar{\rho}} = -\frac{3k}{k-1} \frac{\frac{u_0^n}{H \Theta_k}}{\frac{1}{4\pi G} \frac{1}{r} \frac{du}{dr}} = -\frac{\alpha^2}{3} \frac{r}{du} u_0^n.$$

Um den Mittelwert $g = \frac{1}{r} \int_0^r g dr$ längs des Radius bis zur Stelle r zu finden bildet man

$$(72) \quad \bar{g} = -\frac{4\pi G}{\alpha^2 r} \int_0^r \frac{du}{dr} dr = \frac{4\pi G}{\alpha^2 r} (u_0 - u) \text{ cent sek}^{-2}.$$

Bildet man den Mittelwert längs des ganzen Radius, so ergibt sich

$$(72a) \quad \bar{g} = \frac{4\pi G}{\alpha^2 R} u_0 \text{ cent sek}^{-2}.$$

In (69), (72) und (72a) tritt u , nicht aber $\frac{du}{dr}$ auf!

Das Verhältnis von g zum Mittelwerte \bar{g} bis zu dieser Stelle ist

$$(73) \quad \frac{g}{\bar{g}} = -\frac{r}{u_0 - u} \frac{du}{dr}$$

$$(73a) \quad \frac{g}{g} = -\frac{\Re}{u_0} \left(\frac{du}{dr} \right)_{r=\Re}$$

beide unabhängig von α .

Da $T = u \Theta_k$, $du = \frac{dT}{\Theta_k}$ ist, ergeben sich für einige der angeführten Gleichungen die neuen, wichtigen Formen

$$(74) \quad g = -\frac{k}{k-1} H \frac{dT}{dr} \text{ cent sek}^{-2}$$

$$(75) \quad M = -\frac{k}{k-1} \frac{H}{G} r^2 \frac{dT}{dr} \text{ gramm}$$

$$(76) \quad \bar{\rho} = -\frac{3k}{k-1} \frac{H}{4\pi G} \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} \text{ gramm cent}^{-3}.$$

Diese Größen sind demnach bestimmt lediglich durch das Temperaturgefälle. Die potentielle Temperatur Θ_k ist in diesen Ausdrücken nicht vorhanden; doch nur scheinbar, da sie sich bei Berechnung der $u(T)$ Kurve durch α^2 bemerkbar macht.

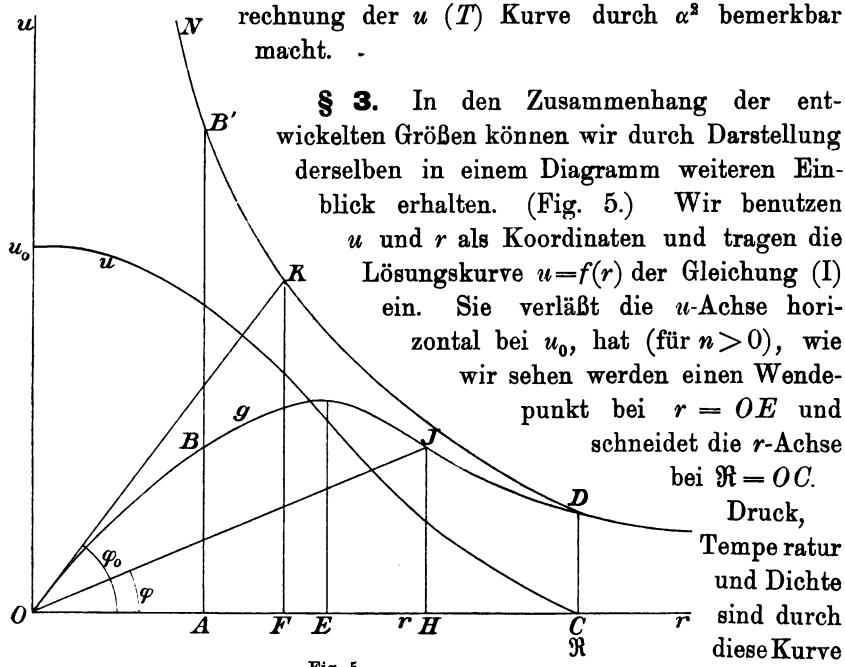


Fig. 5.

bestimmt. Nach (68) ist die Gesamtmasse \mathfrak{M} der Kugel berechenbar. Dieselbe denken wir uns im Mittelpunkte O konzentriert und der Wert g_N dieser supponierten Massen in der Entfernung r sei durch die Newtonsche Gravitations-Kurve $N = \frac{G M}{r^2}$ zur Darstellung gebracht.

Die Kurve g nach Gleichung (67) stellt den Gang von g im Innern der Gaskugel dar. Wir konstruieren sie, indem wir Ordinaten errichten, proportional der Tangente der Winkel, welche bei gleicher Abszisse die Tangente an die u -Kurve mit der r -Achse bilden. Die selbe beginnt bei O , erreicht ihren Maximalwert bei OE , $(\frac{d^2u}{dr^2} = 0)$ und mündet selbstverständlich bei $\Re = OC$ in die N Kurven ein. Wir untersuchen den Winkel, den die bei der Abszisse $\Re = OC$ an die g und N -Kurve gelegten Tangenten miteinander bilden. Für $r > \Re$ haben wir (Kurve N) $g_N = +\frac{G\Re}{r^2}$, $\frac{dg_N}{dr} = -\frac{2G\Re}{r^3}$ oder für $r = \Re$ nach Gleichung (68)

$$\left(\frac{dg_N}{dr}\right)_{r=\Re} = \frac{4\pi}{\alpha^2} \left(\frac{2}{r} \frac{du}{dr}\right)_{r=\Re}.$$

Für $r = \Re$ ist (Kurve g) $g = -\frac{4\pi G}{\alpha^2} \frac{du}{dr}$, $\frac{dg}{dr} = -\frac{4\pi G}{\alpha^2} \frac{d^2u}{dr^2}$. Aus der Differentialgleichung (I) folgt für $r = \Re$, $u = 0$: $\frac{d^2u}{dr^2} = -\frac{2}{r} \frac{du}{dr}$, so daß wir haben

$$\left(\frac{dg}{dr}\right)_{r=\Re} = \frac{4\pi G}{\alpha^2} \left(\frac{2}{r} \frac{du}{dr}\right)_{r=\Re} = \left(\frac{dg_N}{dr}\right)_{r=\Re}.$$

Die beiden Kurven g und N besitzen demnach an der Oberfläche der Gaskugel eine gemeinschaftliche Tangente. (Physikalisch liegt der Grund darin, daß die letzte Oberflächenschicht infolge ihrer unendlich geringen Dichte zum Werte von g nichts mehr beiträgt.) Ändern wir bei konstant gehaltener Masse den Aufbau der Kugel, indem wir k , Θ_k und u_0 beliebig ändern, so ändern sich $\Re = OC$ und die g Kurve, letztere aber so, daß sie in die unverändert bleibende N Kurve bei $\Re = OC$ mit gemeinschaftlicher Tangente einmündet.

Ziehen wir bei einer beliebigen Abszisse OA die Senkrechte und markieren die Schnittpunkte B und B' mit der g und N Kurve, so mißt AB' den Wert von g der Gesamtmasse \mathfrak{M} , AB hingegen den Wert von g der bis r eingeschlossenen Masse M , beide in einer Entfernung OB vom Mittelpunkte. Wir haben deshalb

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{M}{\mathfrak{M}} = \left(\frac{r}{\Re}\right)^2 \frac{\frac{du}{dr}}{\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=\Re}}.$$

Konstruieren wir ein Rechteck mit der Grundlinie r und der Höhe g an dieser Stelle und lassen dies um die u -Achse rotieren, so ist das Volumen des beschriebenen Zylinders proportional der von r eingeschlossenen Masse. Der Inhalt des Zylinders $r^2 \cdot g$ wächst mit r bis $r = \Re$, um von da konstant zu bleiben.

Der Wert der Potentialfunktion der innerhalb r liegenden Masse ist an jeder Stelle dem des Rechtecks $r \cdot g$ proportional.

Die Gleichung (74) können wir schreiben

$$dT = -\frac{k-1}{k} \frac{g}{H} dr.$$

Integrieren wir von $r = A$ bis \mathfrak{M} , und beachten, daß für $r = \mathfrak{M}$ stets $T = 0$ sein muß, so erhalten wir

$$T_A = -\frac{k-1}{kH} \int_A^{\mathfrak{M}} g dr = \frac{k-1}{kH} \cdot \text{Fläche } ABDC.$$

Die Temperatur des Mittelpunktes ist

$$T_0 = \frac{k-1}{kH} \cdot \text{Fläche } OgDCO.$$

Die rascheste Änderung von T , tritt bei $r = OE$ ein.

Wir legen in O die Tangente an die Kurve g ; der Tangentenwinkel φ_0 mißt dann direkt die Mittelpunktsdichte der Kugel. Denn wir haben aus Gleichung (67) $\frac{dg}{dr} = -\frac{4\pi G}{\alpha^2} \frac{d^2 u}{dr^2}$, und aus der Differentialgleichung (I) folgt für $r = 0$: $\frac{d^2 u}{dr^2} = -\frac{\alpha^2 u_0''}{3} = -\frac{\alpha^2 \varrho_0}{3}$, so daß wir haben

$$\left(\frac{dg}{dr}\right)_{r=0} = \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{4\pi G}{3} u_0'' = \frac{4\pi G}{3} \varrho_0.$$

(Dasselbe konnten wir auch aus der Poisson-Laplaceschen Gleichung $\frac{d^2 \Omega}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Omega}{dr} = 4\pi G \varrho$ ableiten, wenn wir dieselbe

$$\frac{dg}{dr} + \frac{2}{r} g = 4\pi G \varrho$$

schreiben und beachten, daß $\lim \left(\frac{g}{r}\right)_{r=0} = \left(\frac{dg}{dr}\right)_{r=0}$ ist.)

Konstruieren wir den Schnittpunkt K der erwähnten Tangente mit N , so ist $FK = r \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{4\pi G}{3} r \varrho_0$, gleich dem Werte von g an der Oberfläche einer Kugel vom Radius $r = OF$ und der konstanten Dichte ϱ_0 ; zugleich ist FK aus der N Kurve definiert. OF stellt somit den Radius der Kugel dar, die bei konstanter Dichte ϱ_0 die Masse \mathfrak{M} der Gaskugel besitzt.

Ziehen wir den Strahl OJ , so ist $\operatorname{tg} \varphi = \frac{g}{r} = -\frac{4\pi G}{\alpha^2} \frac{1}{r} \frac{du}{dr}$ und mit Berücksichtigung der Gleichung (70)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4\pi G}{3} \frac{1}{\varrho}.$$

Der Winkel φ mißt deshalb die mittlere Dichte der Gaskugel,

berechnet bis zum Radius $r = OH$. Dieselbe nimmt mit wachsendem Radius ab.

Für den Fall $n = 0$, ($k = \infty$, $\rho = \text{konst.}$), geht die Kurve g über in die Gerade OK ; die Kurve $u = f(r)$ kann deshalb keinen Wendepunkt besitzen. Vgl. Gleichung (63), für $C_2 = 0$.

§ 4. Aus der Lösung $u = f(r)$ der Differentialgleichung (I)

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \alpha^2 u^n = 0, \quad \alpha^2 = \frac{4\pi G}{\frac{k}{k-1} H \Theta_k} \text{ gramm}^{-1} \text{ cent}$$

lassen sich, wie wir gesehen haben, die mechanischen und thermischen Eigenschaften der Gaskugel entwickeln. Nun läßt sich $u = f(r)$ nicht in geschlossener Form darstellen und nur äußerst unpraktisch in Reihen entwickeln, wobei es sich nicht übersehen läßt, wie die für den speziellen Fall Konstanten n , α^2 , u_0 in die Lösung eingehen. Da wir uns die Aufgabe gestellt haben, die auf die Gaskugeln bezüglichen Werte in absoluten Maßen zu bestimmen, so bleibt uns nichts übrig, als durch ein unten zu beschreibendes Verfahren die Differentialgleichung durch mechanische Quadratur auszuwerten, für möglichst viele Werte von r die Funktion u zu berechnen und für Zwischenwerte zu interpolieren. Für jeden Wert der Konstanten n , α^2 , u_0 wäre eine solche mechanische Quadratur vorzunehmen. Nun läßt sich zeigen, daß wir bei beliebigen Werten von α^2 und u_0 die Gleichung (I) so umformen können, daß wir wieder auf eine Gleichung von der Form I kommen, in welcher α^2 und u_0 die Spezialwerte Eins haben. Wir haben dann nur noch für die verschiedenen n und die konstanten Werte $\alpha^2 = 1$, $u_0 = 1$ die Gleichung (I) auszuwerten.

Wir machen die Transformation der Gleichung (I) in zwei Schritten. Wir führen eine neue unabhängige Variable ein

$$(a) \quad r = \alpha r = \sqrt{\frac{4\pi G}{\frac{k}{k-1} H \Theta_k}} r \text{ gramm}^{-\frac{1}{2}} \text{ cent}^{\frac{3}{2}}$$

und erhalten aus (I) die Gleichung

$$(I') \quad \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + u^n = 0.$$

Die Lösungskurve $u = f(r)$ wird auch die Vertikale $r = 0$ bei u_0 in horizontaler Richtung verlassen, sich nach der r -Achse herabsenken und dieselbe bei einem Werte von r schneiden, welcher die Oberfläche der Kugel bestimmt. Jeder Spezialwert von u_0 bedingt bei unverändertem n eine besondere Lösungskurve und erfordert eigene Quadratur. Wir nehmen nun an, daß wir vorderhand nur

Gaskugeln zu behandeln haben, für welche $u_0 = 1$ ist, und daß die Lösungskurve $u = f(r)$ gefunden sei. Die Dichte $\varrho_0 = u_0^n$ im Mittelpunkte dieser Gaskugeln ist deshalb = 1, die Temperatur daselbst gleich der polytropen Temperatur. Dann ist auch u längs des Radius r der Gaskugel gegeben, denn der Stelle r der r -Achse entspricht die Stelle $r = \frac{r}{\alpha}$ der r -Achse. Aus dem Werte $r_{u=0}$ der Lösung $u = f(r)$ berechnet sich der Radius der Gaskugel zu

$$(77) \quad R = \frac{r_{u=0}}{\alpha} \text{ cent}$$

und die übrigen durch die Gleichungen (67) bis (73) bestimmten Größen finden wir, indem wir die neue Variable $r = \alpha r$ einführen, zu

$$(78) \quad g = - \frac{4\pi G}{\alpha} \frac{du}{dr} \text{ cent sek}^{-2}$$

$$(79) \quad M = - \frac{4\pi}{\alpha^5} r^3 \frac{du}{dr} \text{ gramm}$$

$$(80) \quad \Omega = + \frac{4\pi G}{\alpha^2} u + \text{konst. cent}^2 \text{ sek}^{-2}$$

$$(81) \quad \bar{\varrho} = \frac{3}{r} \frac{du}{dr} \text{ gramm cent}^{-3}$$

$$(82) \quad \frac{\varrho_0}{\bar{\varrho}} = - \frac{r(u_0^n = 1)}{3 \frac{du}{dr}}$$

$$(83) \quad \bar{g} = - \frac{4\pi G}{\alpha r} (u_0 - u) \text{ cent sek}^{-2}$$

$$(84) \quad \frac{g}{\bar{g}} = - \frac{r}{u_0 - u} \frac{du}{dr}.$$

Durch die Lösung von (I') ist somit die Gaskugel konstruiert für jeden Wert von α für $u_0 = 1$.

Diese Beschränkung $u_0 = 1$, $\varrho_0 = u_0^n = 1$ erledigen wir dadurch, daß wir eine neue Variable einführen, u_1 , die mit der Variablen u der Gleichung (I') in der Beziehung steht

$$u = U u_1;$$

dabei sei U eine reine Zahl und so bemessen, daß für $u = u_0$ das neue $u_1 = 1$ wird. U ist deshalb gleich dem Zahlenwert der Funktion u im Mittelpunkte. Die Gleichung (I') nimmt dann die Form an

$$U \frac{d^2 u_1}{dr^2} + U \frac{2}{r} \frac{du_1}{dr} + U^n u_1^n = 0.$$

Hier führen wir wieder eine neue unabhängige Variable

$$r_1 = U^{\frac{n-1}{2}} r \text{ gramm}^{-\frac{1}{2}} \text{ cent}^{\frac{3}{2}}$$

ein und erhalten die Gleichung

$$(I') \quad \frac{d^2 u_1}{dr_1^2} + \frac{2}{r_1} \frac{du_1}{dr_1} + u_1^n = 0.$$

Dies ist wiederum die Differentialgleichung (I'), mit der Bedingung, daß im Mittelpunkte $u_1 = 1$ ist. Ist die Lösungskurve $u_1 = f(r_1)$ bekannt, so läßt sich der Aufbau der Gaskugel für beliebiges α^2 und u_0 angeben. Denn der Stelle r_1 entspricht die Stelle r der Gaskugel

$$A) \quad r = \frac{1}{\frac{n-1}{U^{\frac{2}{2}-\alpha}}} r_1 = \frac{U^{\frac{k-2}{2(k-1)}}}{\alpha} r_1 \text{ cent.}$$

Zwischen den zusammengehörigen Stellen der r_1 und r -Achse herrscht deshalb ein für jeden Spezialfall konstantes Übersetzungsverhältnis.

Der Radius der Gaskugel findet sich aus der Gleichung

$$B) \quad R = \frac{1}{\frac{n-1}{U^{\frac{2}{2}-\alpha}}} r_{1(u_1=0)} = \frac{U^{\frac{k-2}{2(k-1)}}}{\alpha} r_{1(u_1=0)} \text{ cent.}$$

Dem Werte u_1 entsprechen die Werte Dichte, Temperatur und Druck

$$C) \quad \rho = U^n u_1^n = U^{\frac{1}{k-1}} u_1^{\frac{1}{k-1}} \text{ gramm cent}^{-3}$$

$$D) \quad T = U u_1 \Theta_k$$

$$E) \quad p = U^{n+1} u_1^{n+1} H \Theta_k = U^{\frac{k}{k-1}} u_1^{\frac{k}{k-1}} H \Theta_k \text{ gramm cent}^{-1} \text{ sek}^{-2}.$$

Um die übrigen Zustandsgrößen zu finden, ersetzen wir in den Gleichungen (78) — (84) r durch $\frac{r_1}{\frac{n-1}{U^{\frac{2}{2}}}}$ und erhalten:

$$(85) \quad g = -\frac{4\pi G}{\alpha} U^{\frac{n+1}{2}} \frac{du_1}{dr_1} = -\sqrt{4\pi G \cdot \frac{k}{k-1} H \Theta_k} U^{\frac{k}{2(k-1)}} \frac{du_1}{dr_1} \text{ cent sek}^{-2}$$

$$(86) \quad M = -\frac{4\pi}{\alpha^3} U^{\frac{3-n}{2}} r_1^2 \frac{du_1}{dr_1} = -\frac{k}{k-1} \frac{H \Theta_k}{G} \sqrt{\frac{k}{k-1} \frac{H \Theta_k}{4\pi G}} U^{\frac{3k-4}{2(k-1)}} r_1^2 \frac{du_1}{dr_1} \text{ gramm}$$

$$(87) \quad Q = +\frac{4\pi G}{\alpha^2} U u_1 + \text{konst.} = \frac{k}{k-1} H \Theta_k U u_1 + \text{konst. cent}^2 \text{ sek}^{-2}$$

$$(88) \quad \bar{\rho} = -3 U^n \frac{1}{r_1} \frac{du_1}{dr_1} = -3 U^{\frac{1}{k-1}} \frac{1}{r_1} \frac{du_1}{dr_1} \text{ gramm cent}^{-3}$$

$$\frac{\rho_0}{\bar{\rho}} = \frac{r_1 (u_1)_0^n = 1}{3 \frac{du_1}{dr_1}}$$

$$(90) \bar{g} = \frac{4\pi G}{\alpha} U^{\frac{n+1}{2}} \frac{(u_1)_0 - u_1}{r_1} = \sqrt{4\pi G \frac{k}{k-1} H \Theta_k} U^{\frac{k}{2(k-1)}} \frac{(u_1)_0 - u_1}{r_1} \text{ cent sek}^{-2}$$

$$(91) \frac{g}{\bar{g}} = - \frac{r_1}{(u_1)_0 - u_1} \frac{du_1}{dr_1}.$$

Durch die Lösung von (I'), die unabhängig von α und u_0 gefunden wird, ist somit der Bau der Gaskugel vollkommen bekannt.

§ 5. Die ermittelten Beziehungen gestatten bereits eine Reihe wichtiger Schlüsse. Gemäß B) ist

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{\frac{n-1}{n+1} r_{1(u_1=0)} - \frac{U^{2(k-1)}}{\alpha} r_{1(u_1=0)}} \text{ cent.}$$

Nun wächst die Mittelpunktsdichte wie U . Liegen polytrope Gaskugeln desselben Gases auf derselben Polytropen, ($\alpha^2 = \text{konst.}$), so wächst deren Radius mit der Mittelpunktsdichte, oder nimmt ab, je nachdem $n < 1$ oder > 1 , $k > 2$ oder < 2 ist. Für adiabatische Gaskugeln, $k = \alpha$, ist k stets < 2 . Daraus folgt:

Liegen adiabatische Gaskugeln aus demselben Gase auf denselben Adiabaten, so sind die Kugeln um so kleiner, je größer die Mittelpunktsdichte ist und umgekehrt.

Welch ausgezeichnete Rolle die Gaskugel $n = 3$, $k = \frac{4}{3}$ spielt, zeigt Formel (86). Bei Gaskugeln desselben Gases auf derselben Polytropen nimmt die Masse mit der Mittelpunktsdichte zu, ab, oder ist unabhängig von derselben, je nachdem n kleiner, größer oder gleich 3, k größer, kleiner oder gleich $\frac{4}{3}$ ist. ($k = \frac{4}{3}$ repräsentiert die kosmogenetische Zustandsänderung). Für adiabatische Gaskugeln auf derselben Adiabaten folgt, daß für ein- und zweiatomige Gase die Masse mit der Mittelpunktsdichte zunimmt, bei dreiatomigen Gasen unabhängig von derselben ist, für mehratomige Gase aber mit der Mittelpunktsdichte abnimmt.

§ 6. Überaus wichtig sind die Konsequenzen aus Formel (89). Bilden wir das Verhältnis der Mittelpunktsdichte zur mittleren Dichte der ganzen Kugel, so erhalten wir

$$\frac{\rho_0}{\rho_R} = - \left(\frac{r_1}{3} \frac{1}{du_1/dr_1} \right)_{u_1=0}.$$

also unabhängig von H , Θ_k und U und nur bedingt durch n , resp. k , die Klasse der Polytropen. Für gleiches k ergibt sich stets gleiches $\frac{\rho_0}{\rho_R}$. Für adiabatische Gaskugeln ist α gleich für Gase mit gleicher

Molekülzahl. Daraus folgt: *Für alle adiabatischen Gaskugeln, die sich aus Gasen mit gleichem α , gleicher Anzahl Atome im Molekül, aufbauen lassen, hat das Verhältnis der Mittelpunktsdichte zur mittleren Dichte denselben Wert, unabhängig vom Molekulargewicht (H), adiabatischer Temperatur (Θ), Mittelpunktsdichte $u_0 = U(u_1)_0$, und infolgedessen auch unabhängig von der Masse.*

Nun kann sich der Radius einer Gaskugel von konstanter Masse ändern, indem sich Θ_k ändert; z. B. bei adiabatischen Gaskugeln durch Wärmeausstrahlung. Die mittlere Dichte nimmt ab mit der dritten Potenz des Radius. Daraus folgt:

Die Mittelpunktsdichte einer polytropen Gaskugel von konstanter Masse ändert sich umgekehrt wie die dritte Potenz des Radius.

Weiter ist aber nach Gleichung (89) nicht nur das Verhältnis der Mittelpunktsdichte zur mittleren Dichte der Gesamtkugel, sondern auch zur mittleren Dicht $\bar{\rho}$, gerechnet bis zu einem Radius r , der einen beliebigen Bruchteil $\lambda \mathfrak{R}$ des ganzen Radius ausmacht, unabhängig von H , Θ_k und u_0 , also auch von der Gesamtmasse. Ändert eine polytrope Gaskugel ihren Radius \mathfrak{R} , so bleibt das Verhältnis von ρ_0 zu $\bar{\rho}$, dies gerechnet bis $\lambda \mathfrak{R}$, (λ konstant), konstant. Nun ändert sich ρ_0 mit der dritten Potenz von \mathfrak{R} , ebenso das Volumen der Kugel $\lambda \mathfrak{R}$; die Masse innerhalb der Kugel $\lambda \mathfrak{R}$ bleibt demnach konstant.

Definition. Wir nennen die Kontraktion einer Kugel gleichförmig, wenn bei Änderung ihres Radius \mathfrak{R} durch keine in ihr gelegte Kugelfläche vom Radius $\lambda \mathfrak{R}$ (λ eine Konstante) ein Transport von Masse stattfindet.

Die Gasteilchen verschieben sich dann bei einer Änderung von \mathfrak{R} wie Perlen, die auf einem dehbaren Gummifaden fest aufgeheftet sind. Somit lehrt Gleichung (89) den fundamentalen Satz:

Die Kontraktion einer polytropen Gaskugel, die während derselben stets polytrope Gaskugel von derselben Klasse bleibt, erfolgt gleichförmig.

Schlagen wir innerhalb einer polytropen Gaskugel zwei Kugelschalen von den Radien $\lambda_1 \mathfrak{R}$ und $\lambda_2 \mathfrak{R}$, (wobei während der Kontraktion λ_1 und λ_2 konstant bleiben), so bleibt die Masse innerhalb dieser Kugelschale konstant.

Nun ändert sich das Volumen dieser Kugelschale mit der dritten Potenz des Radius. Daraus folgt:

Ändert eine polytrope Gaskugel von konstanter Masse ihren Radius (wobei sie stets polytrope Gaskugel derselben Klasse bleibt), so ändert sich nicht nur die Mittelpunktsdichte, sondern auch die Dichte jedes Gasteilchens umgekehrt wie die dritte Potenz des Radius.

Ist die Dichte eines Teilchens ρ_1 , während der Radius der Kugel R_1 beträgt, und ändert sich dieser zu R , so ist die neue Dichte deselben Teilchens bestimmt durch

$$(a) \quad \frac{\rho}{\rho_1} = \left(\frac{R_1}{R} \right)^3.$$

Die gleichförmige Kontraktion läßt einen weiteren Schluß zu. Die Entfernung jedes Teilchens vom Mittelpunkt ändert sich dabei proportional mit dem Radius, und da die innerhalb einer Kugelschale liegende Masse konstant bleibt, ändert sich das Gewicht jedes Teilchens umgekehrt quadratisch mit dem Radius. Nehmen wir eine unendlich dünne Kugelschale, so hat sich bei der Kontraktion das Gewicht der außen liegenden Massen umgekehrt quadratisch mit dem Radius der Kugel geändert, quadratisch der Flächeninhalt der Schale; das Gewicht pro Flächeneinheit, der auf ihr lastende Druck, demnach umgekehrt mit der vierten Potenz des Radius. Ebenso stark muß der Druck der Gasteilchen dieser Schale gestiegen sein, da gleichmäßige Kontraktion einer polytropen Gaskugel zu einem neuen Gleichgewichtszustande führt. Daraus folgt:

Ändert eine polytrope Gaskugel von konstanter Masse ihren Radius (wobei sie stets polytrope Gaskugel derselben Klasse bleibt), so ändert sich der Druck jedes Gasteilchens umgekehrt wie die vierte Potenz des Radius.

Also

$$(b) \quad \frac{p}{p_1} = \left(\frac{R_1}{R} \right)^4.$$

Nach der Zustandsgleichung muß $\frac{p}{\rho T} = \frac{p_1}{\rho_1 T_1}$ sein. Dann folgt aus (a) und (b)

$$(c) \quad \frac{T}{T_1} = \frac{R_1}{R}.$$

Das heißt:

Ändert eine polytrope Gaskugel von konstanter Masse ihren Radius (wobei sie stets polytrope Gaskugel derselben Klasse bleibt) so ändert sich die Temperatur jedes Teilchens umgekehrt wie deren Radius.

Als Spezialfall dieses Gesetzes sei der Satz erwähnt, daß bei dieser Art von Kontraktion das Produkt aus Mittelpunktstemperatur und Radius konstant bleibt.

Diese drei Gesetze sind für adiabatische Gaskugeln von verschiedenen Autoren auf dieselbe Weise wie oben abgeleitet worden, aber stets ohne den Nachweis, daß die Kontraktion adiabatischer Gaskugeln gleichmäßig erfolgt.

Ohne diesen Nachweis erst geführt zu haben, der nur aus

der Differentialgleichung I gefolgert werden kann, ist dies Beweisverfahren vollständig wertlos. Nichts spricht a priori dafür, daß, wenn eine adiabatische Gaskugel unter Erfüllung des Gesetzes für die Dichteänderung (a) ihren Radius ändert, und wir zur Erhaltung des neuen Zustandes als Gleichgewichtszustand die Schichten so temperieren, daß das Druckgesetz (b) erfüllt ist, die neue Temperaturverteilung längs des Radius derart ist, wie sie einer adiabatischen Gaskugel entspricht; oder umgekehrt: nichts spricht a priori dafür, daß, wenn eine adiabatische Gaskugel sich unter Erfüllung von (a) kontrahiert, und wir die Temperatur längs des Radius so ändern, daß der Temperaturlang in einer adiabatischen Gaskugel wieder hergestellt ist, nun der neue Zustand ein Gleichgewichtszustand ist, d. h. daß der Druck jeder Schicht sich so geändert hat, daß sie imstande ist, das Gewicht der aufliegenden Masse, das sich mit der vierten Potenz des Radius ändert, zu tragen. Wie sehr diese ganze Beweisführung ohne den Nachweis gleichförmiger Kontraktion verfehlt ist, geht schon daraus hervor, daß obige Schlußweise sich auf jede Gaskugel übertragen ließe, die sich von irgend einem Gleichgewichtszustand aus durch eine Reihe von Gleichgewichtszuständen hindurch kontrahiert. Für jede derselben müßte z. B. der Satz gelten, daß das Produkt aus Mittelpunktstemperatur und Radius konstant ist. Wir sehen vielmehr: *Die drei Gesetze a, b, c gelten stets dann und nur dann, wenn eine Gaskugel, von einem Gleichgewichtszustande ausgehend, bei gleichförmiger Kontraktion stets Gleichgewichtszustände durchläuft.* Polytropische Gaskugeln erfüllen diese Bedingung, also gelten für sie die Gesetze (a) (b) (c). (Wir werden noch andere Beweise dieser drei Gesetze finden).

§ 7. Aus den Gesetzen (a), (b), (c) läßt sich eine besonders wichtige Folgerung ableiten. Sie enthalten bereits die Gleichung der Zustandsänderung, welche die einzelnen Gasteilchen sich kontrahierender, polytoper Gaskugeln befolgen.

Um dies Gesetz zu finden, demgemäß p und ϱ sich ändern, haben wir nur aus (a) und (b) die rechten Seiten zu eliminieren und erhalten

$$(92) \quad \frac{p^5}{\varrho^4} = \frac{p_1^5}{\varrho_1^4} = p_1^5 v_1^4 = \text{konst.}$$

Ebenso erhalten wir aus (a) und (c)

$$(93) \quad T \varrho^{-\frac{1}{3}} = T_1 \varrho_1^{-\frac{1}{3}} = \text{konst.}$$

und aus (b) und (c)

$$(94) \quad T p^{-\frac{1}{4}} = T_1 p_1^{-\frac{1}{4}} = \text{konst.}$$

Vergleichen wir damit die Gleichung einer Polytropen von der Klasse k

$$T v^{k-1} = T \varrho^{1-k} = \text{konst}; \quad T^k p^{1-k} = \text{konst}; \quad p v^k = \text{konst},$$

so sehen wir, daß wir durch $k = \frac{4}{3}$ die Gleichungen (92) (93) (94) erhalten. Für diese polytropen Zustandsänderung $k = \frac{4}{3}$ haben wir die Bezeichnung kosmogenetische Zustandsänderung eingeführt (Seite 18). Somit haben wir ein *Grundgesetz* der vorliegenden Untersuchungen:

In jeder Gaskugel, die sich durch eine Reihe von Gleichgewichtszuständen hindurch gleichförmig kontrahiert oder expandiert, machen sämtliche Gasteilchen kosmogenetische Zustandsänderung (polytropen Zustandsänderung mit $k = \frac{4}{3}$) durch.

Dieselbe Zustandsänderung machen auch die Gasteilchen einer polytropen Gaskugel durch, da diese das erforderliche Kontraktionsgesetz erfüllen.

Die überaus wichtigen Konsequenzen, dieses Satzes werden wir später behandeln.

§ 8. Um die an einer Gaskugel auftretenden Verhältnisse in absoluten Maßen ausdrücken zu können, haben wir nur noch die Aufgabe zu lösen, für jede in Betracht kommende Klasse n eine Lösungskurve $u_1 = f(r_1)$, für die Ausgangswerte $r_1 = 0$, $u_1 = 1$, $\frac{du_1}{dr_1} = 0$, $(\frac{d^2 u_1}{dr_1^2} = -\frac{1}{3})$ numerisch festzulegen. Zu dieser Auswertung der Differentialgleichung wurde ein von Kutta*) entwickeltes Verfahren benutzt. Die Methode ist (loc. cit.) nur für Differentialgleichungen erster Ordnung entwickelt, lässt sich aber ohne weiteres auch für Differentialgleichungen höherer Ordnung anwenden, indem man dieselben in simultane Differentialgleichungen erster Ordnung zerlegt. Im vorliegenden Falle wurde die Differentialgleichung $\frac{d^2 u_1}{dr_1^2} + \frac{2}{r_1} \frac{du_1}{dr_1} + u_1^n = 0$ zerteilt in die beiden Gleichungen

$$\frac{du_1'}{dr_1} = -\left(\frac{2}{r_1} u_1' + u_1^n\right); \quad \frac{du_1}{dr_1} = u_1'.$$

Ist die erste Gleichung für eine Stufe gelöst, so erfordert die Lösung der zweiten nur noch ein Minimum von Rechenarbeit. Verfahren wurde nach Rechenschema (loc. cit.) V; $\sigma = 1$, das für Gleichungen erster Ordnung noch Glieder vierter Ordnung berücksichtigt. Da sich a priori nicht über-

*) W. Kutta: Beiträge zur näherungsweisen Integration totaler Differentialgleichungen. Zeitschrift für Mathematik. Bd. 46. Seite 435, 1901.

blicken lässt, wie groß sich dann die Genauigkeit für das System der beiden Gleichungen stellt, habe ich Herrn Dr. Kutta gebeten, sich hierüber zu äußern. Ich bin meinem Kollegen für die Beantwortung dieser Frage außerordentlich zu Danke verpflichtet und lasse seine diesbezüglichen Ausführungen als Anhang zu diesem Kapitel folgen.

Abgesehen von ihrer Genauigkeit und der Bequemlichkeit der Rechnung, hat die Methode den Vorteil, nicht nur u_1 , sondern gleichzeitig $\frac{du_1}{dr_1}$ zu geben. Zudem lässt sich während der Rechnung leicht beurteilen, wie groß der nächste Schritt gewählt werden kann. (An Stellen stärkster Krümmung und am Ausgangspunkt werden die Schritte selbstverständlich am kürzesten gewählt). Gerechnet wurde mit Benutzung fünfstelliger Logarithmen. Zur Beurteilung der Genauigkeit der Methode und des nachfolgenden Zahlenmaterials gebe ich zwei Beispiele.

Für $n=1$ ist die Gleichung I" lösbar und die in Betracht kommende Lösungskurve $u_1 = \frac{\sin r_1}{r_1}$. Ich gebe in der folgenden Tabelle die aus dieser Gleichung berechneten Werte von u_1 und $\frac{du_1}{dr_1}$, sowie die durch die numerische Auswertung gefundenen Werte, ohne benutzte Schritte wegzulassen. Die Lösungskurve fällt (vgl. Tafel I) sehr steil ab und besitzt zwei Stellen sehr starker Krümmung. Sie stellt deshalb an die Exaktheit der Methode hohe Anforderungen.

r_1	Exakte Werte von		Numerisch ermittelte Werte von	
	u_1	$\frac{du_1}{dr_1}$	u_1	$\frac{du_1}{dr_1}$
0	1	0	1	0
$\frac{1}{4}$	0,98960	0,08280	0,98963	0,08290
$\frac{3}{8}$	0,95882	0,16250	0,95885	0,16256
$\frac{5}{8}$	0,90886	0,23623	0,90885	0,23623
1	0,84148	0,30117	0,84147	0,30118
$1\frac{1}{4}$	0,75918	0,35511	0,75918	0,35510
$1\frac{1}{2}$	0,66500	0,39622	0,66499	0,39618
2	0,45464	0,43541	0,45462	0,43553
$2\frac{1}{2}$	0,23938	0,41621	0,23931	0,41636
3	0,04703	0,34569	0,04691	0,34581
$3\frac{1}{4}$	-0,03330	0,29564	-0,03345	0,29572
π	0	0,31831		

Für $u_1 = 0$ ergibt die Auswertung $r_1 = 3,14095$ statt 3,14159,
nebst $\frac{du_1}{dr_1} = -0,31886$.

Die größte Differenz der exakten und durch numerische Auswertung

ermittelten Werte beträgt nur eine Einheit der vierten Dezimalen. Dabei ist zu berücksichtigen, daß, da die Rechnung mit Hilfe fünfstelliger Logarithmen durchgeführt wurde, die letzte Stelle durch Abrundung bereits mit Ungenauigkeit behaftet ist. (Über den Einfluß der Anwendung siebenstelliger Logarithmen siehe unten.) So lange nur die Schritte $\frac{1}{4}$ Einheit betragen, kommt eine geringe Differenz erst in der fünften Dezimalen zum Vorschein, trotz der starken Krümmung der Kurven. Die Kurven für höher n liegen sämtlich flacher und sind weniger gekrümmt, wodurch die Genauigkeit der Auswertung gesteigert wird.

Als weiteres Beispiel sei die Lösung für $n = 5$ angegeben. Ich hatte dieselbe bereits durch numerische Auswertung vorliegen, ehe es mir gelang, die Lösung in der geschlossenen Form $u_1 = \sqrt[3]{\frac{3}{3 + r_1^2}}$ zu finden. Ich gebe zum Vergleiche beide Lösungen in den Schritten, die der numerischen Auswertung zu Grunde lagen.

r_1	Exakte Werte von		Numerisch ermittelte Werte von	
	u_1	$-\frac{du_1}{dr_1}$	u_1	$-\frac{du_1}{dr_1}$
0	1	0	1	0
$\frac{1}{4}$	0,98974	0,08079	0,98985	0,08121
$\frac{2}{4}$	0,96078	0,14781	0,96081	0,14798
$\frac{3}{4}$	0,91768	0,19320	0,91773	0,19334
1	0,86602	0,21650	0,86606	0,21164
$\frac{5}{2}$	0,75593	0,21598	0,75592	0,21614
2	0,65465	0,18704	0,65456	0,18712
$\frac{5}{3}$	0,56950	0,15392	0,56933	0,15403
3	0,50000	0,12500	0,49981	0,12501
$\frac{7}{2}$	0,44353	0,10180	0,44334	0,10178
4	0,39736	0,08365	0,39718	0,08363
5	0,32733	0,05845	0,32721	0,05840
6	0,27735	0,04267	0,27728	0,04263
7	0,24020	0,03233	0,24033	0,03230
8	0,21160	0,02527	0,21177	0,02524
10	0,17066	0,01657	0,17089	0,01656
12	0,14286	0,01166	0,14311	0,01166
16	0,10763	0,00665	0,10793	0,00666
20	0,08628	0,00428	0,08656	0,00429
30	0,05764	0,00192	0,05816	0,00192

Trotz der zu Teil sehr langen Schritte erhalten wir bis $r_1 = 20$ nur einmal für u_1 eine Differenz von drei Einheiten in der vierten Dezimale, während sich für den weiteren Verlauf der Kurve völlige Übereinstimmung in beiden Tangentenerhebungen herausstellt. Die Berechnung eines Schrittes nimmt etwa 20 Minuten Zeit in

Anspruch. Welchen geringen Einfluß weitere Teilung der Schritte und Benutzung siebenstelliger Logarithmen ausübt wird sich unten zeigen.

§ 9. In den folgenden Tabellen ist der Verlauf der Lösungskurven für

$$\begin{array}{l} n = 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad 1,5 \quad 2 \quad 2,5 \quad 3 \quad 4 \quad 4,5 \quad 4,9 \quad 5 \quad 6 \\ k = \infty \quad 3 \quad 2 \quad \frac{5}{3} \quad 3 \quad \frac{7}{5} \quad 4 \quad \frac{5}{3} \quad 11 \quad \frac{59}{49} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{7}{6} \end{array}$$

zusammengestellt. Die Ungenauigkeit der Werte von u_1 und u_1' dürfte nur äußerst selten drei Einheiten, durchschnittlich eine Einheit der vierten Dezimale betragen. Die Tabellen enthalten u_1 , Temperatur; $-\frac{d u_1}{d r_1}$, Wert von g ; u_1'' , Dichte; u_1^{n+1} , Druck; $-\frac{r_1^2 d u_1}{d r_1}$, Masse innerhalb r_1 , $-\frac{r_1}{3} \frac{d u_1}{d r_1}$, das Verhältnis $\frac{\rho_0}{\rho}$, Mittelpunktsdichte zu mittlerer Dichte bis r_1 , also für $\rho_0=1$ den reziproken Wert der mittleren Dichte innerhalb r_1 . Besondere Sorgfalt mußte auf die Bestimmung von r_1 und $\frac{d u_1}{d r_1}$ für die Stelle $u_1=0$ gelegt werden, da hiervon die Konstanten der Gasamtkugel abhängen. Zu diesem Zwecke wurde die Lösungskurve bis zu einem möglichst kleinen positiven und negativen Wert von u_1 verfolgt und für beide Stellen mit Hilfe der Differentialgleichung $\frac{d^2 u_1}{d r_1^2}$ berechnet. Vom ersten Punkte an wurde u_1 nach dem Taylorschen Satze mit drei Gliedern angesetzt und durch Auflösung der quadratischen Gleichung das Zusatzstück Δr_1 bestimmt, welches u_1 vollständig zum Verschwinden bringt. Für diesen Punkt wurde dann aus der Stelle kleinen positiven und negativen Wertes von u_1 mit Hilfe der $\frac{d^2 u_1}{d r_1^2}$ zwei Werte $\frac{d u_1}{d r_1}$ berechnet und aus beiden das Mittel genommen.

Tabelle 1. $n = 0, k = \infty$.

r_1	u_1	$-u_1'$	u_1^n	u_1^{n+1}	$-r_1^2 u_1'$	$-\frac{r}{3} u_1'$
0	1	0	1	1	0	1
0,25	0,98958	0,08333	1	0,98958	0,00521	1
0,50	0,95834	0,16666	1	0,95834	0,04167	1
0,75	0,90625	0,25000	1	0,90625	0,14062	1
1,00	0,83333	0,33333	1	0,83333	0,33333	1
1,25	0,73958	0,41667	1	0,73958	0,65104	1
1,50	0,62500	0,50000	1	0,62500	1,1250	1
2,00	0,33333	0,66667	1	0,33333	2,6668	1
2,4494	0	0,81647	1	0	4,8988	1

Die Werte von u_1 und u'_1 sind berechnet aus der Gleichung $u_1 = 1 - \frac{r_1^2}{6}$ (Gl.(63), $C_2 = 0$), $\frac{du}{dr_1} = -\frac{r_1}{3}$. Die u_1 Kurve besitzt keinen Wendepunkt, $\frac{d^2 u_1}{dr_1^2}$ hat den konstanten Wert $-\frac{1}{3}$, g besitzt im Innern der Kugel kein Maximum, sondern wächst mit r_1 , wie dies im Innern einer Kugel von konstanter Dichte der Fall ist.

Tabelle 2. $n = \frac{1}{2}, k = 3$.

r_1	u_1	$-u'_1$	u_1^n	u_1^{n+1}	$-r_1^2 u'$	$-\frac{r_1}{3 u'_1}$
0	1	0	1	1	0	1
0,125	0,99740	0,04164	0,99870	0,99610	0,00065	1,00064
0,25	0,98960	0,08308	0,99479	0,98444	0,00519	1,00305
0,40	0,97944	0,13227	0,98663	0,96043	0,02116	1,0080
0,60	0,94054	0,19639	0,96982	0,91215	0,07070	1,0184
0,80	0,89505	0,25807	0,94607	0,84678	0,16517	1,0338
1,00	0,83758	0,31646	0,91517	0,76648	0,31646	1,0583
1,20	0,76874	0,37066	0,87678	0,67402	0,58375	1,0792
1,40	0,68961	0,41972	0,83043	0,57267	0,82265	1,1121
1,60	0,60126	0,46261	0,77541	0,46622	1,1843	1,1529
1,80	0,50504	0,49815	0,71066	0,385891	1,6140	1,2045
2,00	0,40257	0,52497	0,63448	0,25542	2,0999	1,2699
2,20	0,29578	0,54129	0,54383	0,16084	2,6138	1,3548
2,40	0,18692	0,54464	0,43234	0,08081	3,1871	1,4689
2,60	0,07905	0,53063	0,28116	0,02228	3,5871	1,6388
2,70	0,02679	0,51387	0,16368	0,00438	3,7375	1,7514
2,7528	0,00000	0,44975	0,00000	0,00000	3,7871	1,8361

Tabelle 3. $n = 1, k = 2$.

r_1	u_1	$-u'_1$	u_1^n	u_1^{n+1}	$-r_1^2 u'$	$-\frac{r_1}{3 u'_1}$
0	1	0	1	1	0	+ 1
0,25	0,98960	0,08280	0,98960	0,97930	0,00519	1,0040
0,50	0,95882	0,16250	0,95882	0,91935	0,04062	1,0256
0,75	0,90886	0,23623	0,90886	0,82604	0,13289	1,0583
1,00	0,84148	0,30117	0,84148	0,70808	0,30117	1,1068
1,25	0,75918	0,35511	0,75918	0,57637	0,55486	1,1734
1,50	0,66500	0,39622	0,66500	0,44222	0,89149	1,2619
2,00	0,45464	0,43541	0,45464	0,20670	1,74856	1,5811
2,50	0,23938	0,41621	0,23938	0,05734	2,60136	2,0022
3,00	0,04703	0,34569	0,04703	0,00202	3,11109	2,8927
3,14159	0	0,31831	0	0	3,14159	3,2899

u_1 und u'_1 sind berechnet aus den Gleichungen (64), ($C_2 = 0$)

$$u_1 = \frac{\sin r_1}{r_1}; \quad \frac{du_1}{dr_1} = \frac{r_1 \sin r_1 - \sin r_1}{r_1^2}.$$

Die Kurve besitzt einen Wendepunkt, g einen Maximalwert, bei $r_1 = 2,0816$, der ersten Wurzel der Gleichung $\log r_1 = \frac{2 r_1}{2 - r_1^2}$.

Tabelle 4.

 $n = 1,5, k = \frac{5}{3}$.

r_1	u_1	$-u_1'$	u_1^n	u_1^{n+1}	$-r_1^2 u_1'$	$-\frac{r_1}{3u_1'}$
0	1	0	1	1	0	1
0,25	0,98966	0,08268	0,98450	0,97482	0,00516	1,0087
0,50	0,95911	0,16057	0,93932	0,90090	0,04014	1,0380
0,75	0,91008	0,22988	0,86820	0,79010	0,12931	1,0875
1,00	0,84516	0,28727	0,77698	0,65667	0,28727	1,1604
1,25	0,76761	0,33061	0,67253	0,51624	0,51658	1,2608
1,50	0,68132	0,35752	0,56238	0,38816	0,80442	1,3986
1,75	0,58994	0,37168	0,45313	0,26732	1,1883	1,5694
2,00	0,49670	0,37209	0,35006	0,17387	1,4884	1,7917
2,25	0,40477	0,36119	0,25752	0,10424	1,8285	2,0764
2,50	0,31678	0,34120	0,17830	0,05648	2,1325	2,4428
2,75	0,23468	0,31475	0,11369	0,02668	2,3803	2,9128
2,8085	0,21617	0,30788	0,10050	0,02173	2,4284	3,0407
3,00	0,15972	0,28442	0,06883	0,01020	2,5598	3,5160
3,25	0,09258	0,25261	0,02817	0,002606	2,6681	4,2887
3,50	0,08335	0,22147	0,006090	0,0002081	2,7180	5,2680
3,625	0,00659	0,20680	0,0005849	$3,44 \cdot 10^{-6}$	2,7175	5,8480
3,64	0,00350	0,20511	0,0002071	$7,25 \cdot 10^{-7}$	2,7176	6,0002
3,6571	0	0,20316	0	0	2,7176	6,0003

Tabelle 5.

 $n = 2; k = 1,5$.

r_1	u_1	$-u_1'$	u_1^n	u_1^{n+1}	$-r_1^2 u_1'$	$-\frac{r_1}{3u_1'}$
0	1	0	1	1	0	1
0,25	0,98969	0,08247	0,97950	0,96940	0,00515	1,0105
0,50	0,95937	0,15865	0,92040	0,88302	0,03876	1,0750
0,75	0,91128	0,22386	0,83042	0,75675	0,12591	1,1168
1,00	0,84864	0,27453	0,72018	0,61117	0,27453	1,2142
1,25	0,77533	0,30937	0,60114	0,46609	0,48339	1,3468
1,50	0,69531	0,32825	0,48346	0,38615	0,78857	1,5232
1,75	0,61238	0,33307	0,37501	0,22965	1,0200	1,7514
2,00	0,52974	0,32640	0,28062	0,14868	1,3066	2,0425
2,50	0,37463	0,29023	0,14035	0,05258	1,8140	2,8713
2,5375	0,36388	0,28681	0,13241	0,04818	1,8467	2,9492
3,00	0,24166	0,24067	0,05840	0,01411	2,1660	4,1550
3,50	0,13379	0,19169	0,01790	0,002395	2,3482	6,0863
4,00	0,04866	0,15040	0,002368	0,0001152	2,4064	8,8658
4,25	0,01326	0,13346	0,0001755	$2,381 \cdot 10^{-6}$	2,4106	10,615
4,3518	0	0,12729	0	0	2,4107	11,396

Tabelle 6.

 $n = 2,5; k = 1,4 = \frac{7}{5}$.

r_1	u_1	$-u_1'$	u_1^n	u_1^{n+1}	$-r_1^2 u_1'$	$-\frac{r_1}{3u_1'}$
0	1	0	1	1	0	1
0,25	0,98971	0,08226	0,97450	0,96447	0,00513	1,0130
0,50	0,95961	0,15676	0,90202	0,86560	0,03919	1,0632
0,75	0,91242	0,21798	0,79520	0,72555	0,12261	1,1469
1,00	0,85196	0,26282	0,66997	0,57079	0,26282	1,2683
1,25	0,78246	0,29086	0,54156	0,42375	0,45369	1,4350
1,50	0,70809	0,30213	0,42192	0,29876	0,67978	1,6549

$$n = 2,5; k = 1,4 = \frac{7}{5}.$$

r_1	u_1	$-u_1'$	u_1^n	u_1^{n+1}	$-r_1^2 u_1'$	$\frac{r_1}{3u_1'}$
1,75	0,63246	0,29532	0,31811	0,20119	0,90442	1,9753
2,00	0,55961	0,28614	0,28428	0,13111	1,1446	2,3298
2,3498	0,46331	0,26290	0,14611	0,06769	1,4516	2,9793
2,50	0,42473	0,25080	0,11756	0,04993	1,5675	3,3227
3,00	0,31000	0,20793	0,05351	0,01659	1,8714	4,8093
3,50	0,21752	0,16783	0,02207	0,004800	2,0560	6,9517
4,00	0,14300	0,13445	0,007738	0,001106	2,1512	9,9170
4,50	0,08263	0,10813	0,001963	0,0001622	2,1896	10,5389
5,00	0,03884	0,08796	0,0002107	$7,295 \cdot 10^{-6}$	2,1990	18,948
5,40	0,00128	0,07545	$5,862 \cdot 10^{-8}$	$7,503 \cdot 10^{-11}$	2,2001	23,857
5,4172	0	0,07500	0	0	2,2010	24,076

$$\text{Tabelle 7. } n = 3; k = \frac{4}{3}.$$

r_1	u_1	$-u_1'$	u_1^n	u_1^{n+1}	$-r_1^2 u_1'$	$\frac{r_1}{3u_1'}$
0	1	0	1	1	0	1
0,25	0,98975	0,08204	0,96960	0,95966	0,00518	1,0158
0,50	0,95987	0,15495	0,88436	0,84886	0,03874	1,0756
0,75	0,91855	0,21270	0,76242	0,69650	0,11964	1,1754
1,00	0,85505	0,25219	0,62513	0,53451	0,25219	1,3218
1,25	0,78897	0,27370	0,49111	0,38747	0,42765	1,5224
1,50	0,71948	0,27998	0,37244	0,26797	0,62984	1,7862
1,75	0,64996	0,27460	0,27458	0,17847	0,84097	2,1243
2,00	0,58282	0,26149	0,19796	0,11538	1,0450	2,5495
2,1620	0,54133	0,25052	0,15863	0,08587	1,1710	2,8768
2,50	0,46109	0,22396	0,09803	0,04520	1,3994	3,7210
3,00	0,35921	0,18393	0,04635	0,01665	1,6558	5,4370
3,50	0,27629	0,14859	0,02109	0,005828	1,8203	7,8697
4,00	0,20942	0,11998	0,009185	0,001923	1,9197	11,113
4,50	0,15529	0,09748	0,003746	0,0005817	1,9740	15,387
5,00	0,11110	0,08003	0,001871	0,0001523	2,0007	20,826
6,00	0,04411	0,05599	$8,583 \cdot 10^{-6}$	$8,786 \cdot 10^{-5}$	2,0156	35,720
6,80	0,00471	0,04360	$1,045 \cdot 10^{-6}$	$4,921 \cdot 10^{-10}$	2,0161	51,987
6,9011	0	0,04231	0	0	2,0150	54,360

$$\text{Tabelle 8. } n = 4; k = \frac{5}{4}.$$

r_1	u_1	$-u_1'$	u_1^n	u_1^{n+1}	$-r_1^2 u_1'$	$\frac{r_1}{3u_1'}$
0	1	0	1	1	0	1
0,25	0,98980	0,08166	0,95984	0,95006	0,00510	1,0205
0,50	0,96035	0,15139	0,85138	0,81762	0,03785	1,1009
0,75	0,91557	0,20353	0,70275	0,64343	0,11448	1,2288
1,00	0,86054	0,23349	0,54838	0,47190	0,23349	1,0943
1,50	0,73895	0,24267	0,29818	0,22035	0,54601	2,0604
1,9184	0,64099	0,22275	0,16881	0,10820	0,81978	2,8708
2,00	0,62306	0,21743	0,15070	0,09390	0,86972	3,0661
3,00	0,44018	0,14856	0,03754	0,01653	1,3370	6,7313
4,00	0,31838	0,09872	0,01028	0,003271	1,5795	13,506
5,00	0,23637	0,06781	0,003122	0,0007379	1,6952	24,579

$n = 4$.

r_1	u_1	$-u_1'$	u_1^n	u_1^{n+1}	$-r_1^2 u_1'$	$\frac{r_1}{3u_1'}$
6,00	0,17889	0,04862	0,001024	0,0001832	1,7503	41,137
8,00	0,10515	0,02807	0,0001222	$1,2850 \cdot 10^{-5}$	1,7965	95,008
10,00	0,06016	0,01804	$1,310 \cdot 10^{-5}$	$7,880 \cdot 10^{-7}$	1,8040	184,78
12,00	0,03009	0,01254	$8,2 \cdot 10^{-8}$	$2,466 \cdot 10^{-8}$	1,8058	318,98
14,50	0,00859	0,00921	$5,444 \cdot 10^{-10}$	$4,677 \cdot 10^{-11}$	1,8059	506,70
14 $\frac{1}{2}$	0,00414	0,00859	$2,938 \cdot 10^{-11}$	$1,216 \cdot 10^{-12}$	1,8060	562,67
14,999	0	0,00803	0	0	1,8064	623,40

Tabelle 9. $n = 4,5; k = \frac{11}{9}$.

r_1	u_1	$-u_1'$	u_1^n	u_1^{n+1}	$-r_1^2 u_1'$	$\frac{r_1}{3u_1'}$
0	1	0	1	1	0	1
0,25	0,98988	0,08141	0,95504	0,93292	0,00509	1,02362
0,50	0,96059	0,14966	0,83450	0,80162	0,03742	1,11364
0,75	0,91666	0,19805	0,67600	0,61966	0,11140	1,26229
1,00	0,86341	0,22455	0,51640	0,44587	0,22455	1,48443
1,25	0,80587	0,23319	0,37868	0,30510	0,36773	1,78683
1,50	0,74789	0,22905	0,27057	0,20236	0,51536	2,18295
1,75	0,69199	0,21719	0,19074	0,13199	0,65157	2,88570
1,8158	0,67782	0,21331	0,17380	0,11780	0,70382	2,83750
2,00	0,63962	0,20126	0,13886	0,08562	0,80504	3,31254
2,25	0,59145	0,18411	0,09608	0,05566	0,93205	4,07364
2,50	0,54756	0,16703	0,06652	0,03643	1,0439	4,98900
2,75	0,50786	0,15079	0,04741	0,02408	1,1408	6,07886
3,00	0,47205	0,13584	0,03412	0,01610	1,2225	7,37850
3,25	0,438979	0,12247	0,02481	0,01091	1,2985	8,8456
3,50	0,41069	0,11504	0,01823	0,00749	1,8541	10,5544
4,00	0,36061	0,09061	0,010155	0,00366	1,4497	14,7150
4,50	0,31944	0,07504	0,00588	0,00188	1,5265	19,9893
5,00	0,28509	0,06285	0,00353	0,00101	1,5712	26,5179
5,50	0,25617	0,05320	0,002177	0,000558	1,6094	34,4677
6,00	0,23156	0,04550	0,001384	0,0003204	1,6380	43,9550
7,00	0,19210	0,03419	0,0005968	0,0001146	1,6753	68,2462
8,00	0,16197	0,02654	0,0002770	0,00004487	1,6985	100,480
10,00	0,11923	0,01721	$6,978 \cdot 10^{-5}$	$8,319 \cdot 10^{-6}$	1,7210	193,686
12,00	0,09047	0,01202	$2,015 \cdot 10^{-5}$	$1,823 \cdot 10^{-6}$	1,7308	332,785
14,00	0,06984	0,00885	$6,147 \cdot 10^{-6}$	$4,391 \cdot 10^{-7}$	1,7346	527,30
16,00	0,049434	0,00678	$2,028 \cdot 10^{-6}$	$1,104 \cdot 10^{-7}$	1,7368	786,05
20,00	0,03264	0,00433	$2,050 \cdot 10^{-7}$	$6,692 \cdot 10^{-8}$	1,7320	1540,1
24,00	0,01823	0,00301	$1,491 \cdot 10^{-8}$	$2,718 \cdot 10^{-10}$	1,7338	2657,8
32,00	0,00024	0,001695	$5,139 \cdot 10^{-17}$	$1,233 \cdot 10^{-20}$	1,73568	6290,0
32,143	0	0,00168	0	0	1,73570	6377,7

Tabelle 10. $n = 4,9; k = \frac{59}{49}$.

r_1	u_1	$-u_1'$	u_1^n	u_1^{n+1}	$-r_1^2 u_1'$	$\frac{r_1}{3u_1'}$
0	1	0	1	1	0	1
0,25	0,98985	0,08125	0,95122	0,94154	0,00508	1,0257
0,50	0,96077	0,14832	0,82192	0,81866	0,03708	1,1237

Emden, Gaskugeln.

$$n = 4,9; k = \frac{59}{49}.$$

r_1	u_1	$-u_1'$	u_1^n	u_1^{n+1}	$-r_1^2 u_1'$	$\frac{r_1}{3u_1'}$
0,75	0,91749	0,19420	0,65583	0,60172	0,10924	1,2878
1,00	0,86552	0,21814	0,49281	0,42654	0,21814	1,5281
1,50	0,75436	0,21861	0,25127	0,18955	0,49187	2,2871
1,7469	0,70183	0,20608	0,17641	0,12381	0,62871	2,8263
2,00	0,65169	0,18961	0,12268	0,07995	0,75844	3,5160
2,50	0,56520	0,15688	0,06104	0,03450	0,97738	5,8289
3,00	0,49457	0,12704	0,03175	0,01570	1,14386	7,8715
4,00	0,39024	0,08498	0,009945	0,003881	1,36168	15,690
5,00	0,31915	0,05929	0,008712	0,001182	1,4822	28,109
6,00	0,26850	0,04321	0,001592	0,0004280	1,5555	46,286
8,00	0,20208	0,02553	0,0003955	$7,991 \cdot 10^{-5}$	1,6339	104,45
10,00	0,16078	0,016707	0,0001290	$2,075 \cdot 10^{-5}$	1,6707	199,52
14,00	0,11274	0,008696	$2,021 \cdot 10^{-5}$	$2,280 \cdot 10^{-6}$	1,7044	536,64
18,00	0,08562	0,005298	$5,883 \cdot 10^{-6}$	$5,838 \cdot 10^{-7}$	1,7165	1132,5
22,00	0,06826	0,003568	$1,938 \cdot 10^{-6}$	$1,323 \cdot 10^{-7}$	1,7220	2061,1
26,00	0,05621	0,002552	$7,482 \cdot 10^{-7}$	$4,205 \cdot 10^{-8}$	1,7255	3396,0
30,00	0,04730	0,001918	$3,238 \cdot 10^{-7}$	$1,530 \cdot 10^{-8}$	1,7262	5218,6
40,00	0,03300	0,0010807	$5,504 \cdot 10^{-8}$	$1,819 \cdot 10^{-9}$	1,7291	12337
50,00	0,02436	0,0006920	$1,244 \cdot 10^{-8}$	$3,032 \cdot 10^{-10}$	1,7300	24084
70,00	0,01452	0,0003537	$9,858 \cdot 10^{-10}$	$1,431 \cdot 10^{-11}$	1,7331	65969
90,00	0,009025	0,0002141	$9,582 \cdot 10^{-11}$	$8,648 \cdot 10^{-18}$	1,7342	140119
120,00	0,004219	0,0001205	$2,309 \cdot 10^{-12}$	$9,742 \cdot 10^{-15}$	1,7352	209443
150,00	0,001329	0,00007718	$8,046 \cdot 10^{-15}$	$1,070 \cdot 10^{-17}$	1,7354	648267
169,4	0,00000041	0,00006048	$1,020 \cdot 10^{-27}$	$4,1 \cdot 10^{-38}$	1,7355	933620
169,4678	0	0,00006048	0	0	1,7355	934800

$$Tabelle 11. \quad n = 5; k = \frac{6}{5}.$$

r_1	u_1	$-u_1'$	u_1^n	u_1^{n+1}	$-r_1^2 u_1'$	$\frac{r_1}{3u_1'}$
0	1	0	1	1	0	1
0,25	0,98974	0,08079	0,94972	0,93998	0,00505	1,0314
0,50	0,96078	0,14781	0,81866	0,78654	0,03695	1,1276
0,75	0,91768	0,19320	0,65080	0,59722	0,10867	1,2940
1,00	0,86602	0,21650	0,48713	0,42187	0,21651	1,5396
1,50	0,75593	0,21598	0,24683	0,18659	0,48594	2,3150
2,00	0,65465	0,18704	0,12021	0,07872	0,74817	3,5643
2,50	0,56950	0,15392	0,05923	0,03411	0,96198	5,4171
3,00	0,50000	0,12500	0,03125	0,01563	1,1250	8,0000
3,50	0,44353	0,10180	0,01716	0,007508	1,2384	11,541
4,00	0,39736	0,08365	0,009906	0,003936	1,3384	15,939
5,00	0,32733	0,05845	0,003758	0,001280	1,4601	28,514
6,00	0,27735	0,04267	0,001641	0,0004552	1,5361	46,872
7,00	0,24020	0,03233	0,0007995	0,0001920	1,5843	72,163
8,00	0,21160	0,02527	0,0004243	$8,977 \cdot 10^{-6}$	1,6170	105,55
10,00	0,17066	0,01657	0,0001448	$2,471 \cdot 10^{-5}$	1,6569	201,18
12,00	0,14286	0,01166	$5,950 \cdot 10^{-6}$	$8,500 \cdot 10^{-6}$	1,6793	343,01
16,00	0,10763	0,00665	$1,444 \cdot 10^{-5}$	$1,554 \cdot 10^{-6}$	1,7020	802,18
20,00	0,08628	0,00428	$4,781 \cdot 10^{-6}$	$4,125 \cdot 10^{-7}$	1,7127	1557,0
30,00	0,05764	0,00192	$6,362 \cdot 10^{-7}$	$3,667 \cdot 10^{-8}$	1,7234	5222,0
50,00	0,03461	0,00069	$4,9734 \cdot 10^{-8}$	$1,7218 \cdot 10^{-9}$	1,7289	24099
100	0,01732	0,000173	$1,5588 \cdot 10^{-9}$	$2,6975 \cdot 10^{-11}$	1,73127	$1,9254 \cdot 10^{-6}$
1000	0,001732	0,00000173	$1,5589 \cdot 10^{-14}$	$2,6975 \cdot 10^{-17}$	1,73200	$1,9245 \cdot 10^{-8}$
∞	0	0	0	0	1,73205	∞

Die Werte der u_1 und u_1' sind berechnet aus den Gleichungen (vgl. Seite 60) $u_1 = \sqrt{\frac{3}{3+r_1^2}}$, $-\frac{d u_1}{d r_1} = r_1 \sqrt{\frac{3}{(3+r_1^2)^2}}$. u_1 nähert sich asymptotisch dem Werte 0, ebenso u_1' . Die u_1 -Kurve besitzt einen Wendepunkt, g ein Maximum, bei $r_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1,2248$; die vom Radius r_1 umschlossene Masse hat den Wert $\sqrt{\frac{3 r_1^5}{(3+r_1^2)^3}}$, besitzt also für $r_1 = \infty$ den endlichen Wert $\sqrt{3} = 1,73205$. (Die Masse dieser Kugel von unendlichem Radius ist also bei endlicher Dichte im Mittelpunkt endlich.)

Tabelle 12. $n = 6; k = \frac{7}{6}$.

r_1	u_1	$-u_1'$	u_1^n	u_1^{n+1}	$-r_1^2 u_1'$	$-\frac{r_1}{3u_1}$	$\frac{0,75170}{\frac{2}{5} \frac{r_1}{r_1}}$
0	1	0	1	1	0	1	∞
0,25	0,98990	0,08079	0,94090	0,93188	0,00505	1,0815	1,3087
0,50	0,96127	0,14475	0,78904	0,75848	0,03619	1,1514	0,99187
0,75	0,91956	0,18491	0,60461	0,55699	0,10401	1,3520	0,84388
1,00	0,87074	0,20228	0,43585	0,37962	0,20228	1,6479	0,75170
1,50	0,77007	0,19876	0,20554	0,16069	0,43595	2,5805	0,68914
1,5958	0,75171	0,18842	0,18044	0,13563	0,47983	2,8231	0,62852
2,00	0,68042	0,16360	0,09922	0,06751	0,65440	4,0750	0,56967
2,50	0,60631	0,13284	0,04968	0,03012	0,88026	6,2738	0,52012
3,00	0,54648	0,10744	0,02663	0,01455	0,96696	9,5243	0,48439
4,00	0,45812	0,07227	0,009244	0,004235	1,1568	18,449	0,43170
5,00	0,39781	0,05109	0,008983	0,001563	1,2778	32,622	0,39486
6,00	0,35343	0,03769	0,001949	0,0006889	1,3568	53,063	0,36710
8,00	0,29471	0,02290	0,0006552	0,0001981	1,4656	116,447	0,32795
10,00	0,25720	0,01538	0,0002895	$7,446 \cdot 10^{-5}$	1,5390	219,73	0,29123
12,00	0,23116	0,01103	0,0001526	$9,527 \cdot 10^{-5}$	1,5883	362,68	0,27820
16,00	0,19740	0,00649	$5,917 \cdot 10^{-5}$	$1,168 \cdot 10^{-5}$	1,6614	821,80	0,24796
20,00	0,17632	0,00430	$3,003 \cdot 10^{-5}$	$6,294 \cdot 10^{-6}$	1,7200	1550,4	0,22680
30,00	0,14709	0,00203	$1,013 \cdot 10^{-5}$	$1,490 \cdot 10^{-6}$	1,8270	4296,0	0,19284
50,00	0,12236	0,00081	$3,356 \cdot 10^{-6}$	$4,107 \cdot 10^{-7}$	2,0250	20576	0,15720
70,00	0,11046	0,00045	$1,817 \cdot 10^{-6}$	$2,007 \cdot 10^{-7}$	2,2050	51850	0,13740
100	0,10056	0,00025	$1,034 \cdot 10^{-6}$	$1,040 \cdot 10^{-7}$	2,5000	$1,3333 \cdot 10^5$	0,11914
200	0,08473	0,00010	$3,700 \cdot 10^{-7}$	$3,135 \cdot 10^{-8}$	4,0000	$6,6666 \cdot 10^5$	0,09029
300	0,07656	0,00006	$2,014 \cdot 10^{-7}$	$1,542 \cdot 10^{-8}$	5,4000	$1,6666 \cdot 10^6$	0,07677
500	0,06906	0,00004	$1,085 \cdot 10^{-7}$	$7,492 \cdot 10^{-9}$	10,000	$4,1666 \cdot 10^6$	0,06268
1000	0,05826	0,00002	$2,282 \cdot 10^{-8}$	$1,216 \cdot 10^{-9}$	20,000	$1,6666 \cdot 10^7$	0,04748

In letzter Spalte ist die singuläre Lösung

$$u_1 = \left[\frac{2(n-3)}{(n-1)^2} \right]^{\frac{1}{n-1}} \frac{1}{r_1^{\frac{n}{n-1}}}$$

angegeben. Auf diese Tabelle werden wir in dem Kapitel über Gas-kugeln mit unendlichem Radius zurückkommen.

§ 10. In Tabelle 13 stellen wir die für die Gesamtkugel wichtigen Größen für die berechneten zwölf Klassen zusammen. Sie enthalten Radius der Kugel r_1 , Werte g an der Oberfläche — $\frac{du_1}{dr_1}$, daselbst $\frac{d^2u_1}{dr_1^2}$, um die Zustandsänderung von der Oberfläche aus mit Berücksichtigung Glieder zweiter Ordnung entwickeln zu können; die Gesamtmasse, $-r_1^2 \frac{du_1}{dr_1}$, und das für alle Kugeln gleicher Klasse konstante Verhältnis der Mittelpunktsdichte zur mittleren Dichte der Kugel — $\frac{r_1}{3 \frac{du_1}{dr_1}}$.

Tabelle 18.

n	r_1	$-\frac{du_1}{dr_1}$	$+\frac{d^2u_1}{dr_1^2}$	$-r_1^2 \frac{du_1}{dr_1}$	$\frac{r_1}{3u_1}$
0	2,4494	0,81647	- 0,33383	4,8988	1
0,5	2,7528	0,49975	+ 0,36309	3,7871	1,8361
1	3,14159	0,31881	+ 0,20264	3,14159	3,2899
1,5	3,6571	0,20816	0,11355	2,7176	6,0003
2	4,3518	0,12729	0,06262	2,4107	11,396
2,5	5,4172	0,07500	0,02795	2,2010	24,076
3	6,9011	0,04231	0,01282	2,0150	54,360
4	14,999	0,00803	0,00107	1,8064	628,40
4,5	32,140	0,00168	0,000104	1,7854	6377,7
4,9	169,47	$6,043 \cdot 10^{-5}$	$4,208 \cdot 10^{-7}$	1,73554	$9,348 \cdot 10^5$
5	∞	0	0	$\sqrt[3]{3} = 1,73205$	∞
>5	∞	0	0	∞	∞

Überblicken wir die letzte Spalte, so fällt auf, daß für $n = 1,5$, 2,5 und 3 die Werte derselben äußerst nahe liegen bei $6 \cdot 1^2$, $6 \cdot 2^2$; $6 \cdot 3^2$. Da diese Werte von n gelten für $k = n = \frac{5}{3}$, $\frac{7}{5}$ resp. $\frac{4}{3}$, also für 1, 2 resp. 3 atomige Gase, so würde sich, bei strenger Erfüllung der angegebenen Werte der Satz ergeben:

„Die Mittelpunktsdichten adiabatischer Gaskugeln, die bei gleicher Masse und gleichem Radius aus 1, 2 und 3 atomigen Gasen aufgebaut werden, verhalten sich wie die Quadrate der Atomzahlen.“

Um diese Frage zu entscheiden, habe ich den Wert $\frac{r_1}{3 \frac{du_1}{dr_1}}$ für $n = 3$

mit möglichster Genauigkeit zu bestimmen gesucht, indem die numerische Auswertung der Differentialgleichung nochmals vorgenommen, dabei aber die Schritte in der Tabelle Nr. 7 halbiert und siebenstellige Logarithmen angewandt wurden. Das Ergebnis ist in Tabelle 7a dargestellt.

Tabelle 7 a. $n = 8; k = \frac{4}{3}$.

r_1	u_1	$-u_1'$	r_1	u_1	$-u_1'$
0	1	0	$2\frac{1}{2}$	0,4611186	0,2239753
$\frac{1}{8}$	0,9974060	0,0415043	$2\frac{5}{4}$	0,4076634	0,2036960
$\frac{3}{8}$	0,9896853	0,0818053	3	0,3592158	0,1840525
$\frac{5}{8}$	0,9770536	0,1198609	$3\frac{1}{4}$	0,3155810	0,1656674
$\frac{7}{8}$	0,9598483	0,1548256	$3\frac{3}{4}$	0,2762494	0,1488576
$\frac{9}{8}$	0,9385086	0,1859127	$3\frac{5}{4}$	0,2409646	0,1336985
$\frac{11}{8}$	0,9135523	0,2126804	4	0,2092632	0,1201780
$\frac{13}{8}$	0,8855441	0,2347185	$4\frac{1}{4}$	0,1807469	0,1081979
1	0,8550676	0,2521339	$4\frac{3}{4}$	0,1550468	0,0976258
$1\frac{1}{8}$	0,8226994	0,2560220	$4\frac{5}{4}$	0,1318287	0,0883182
$1\frac{3}{8}$	0,7888887	0,2736733	5	0,1107944	0,0801811
$1\frac{5}{8}$	0,7544411	0,2784856	$5\frac{1}{2}$	0,0742588	0,0665862
$1\frac{7}{8}$	0,7195077	0,2799193	6	0,0437090	0,0560474
$1\frac{9}{8}$	0,6848512	0,2784688	$6\frac{1}{2}$	0,0178858	0,0477714
$1\frac{11}{8}$	0,6499918	0,2746054	7	— 0,0043439	0,0411912
$1\frac{13}{8}$	0,6160106	0,2688079	6,8	0,0041366	0,0436498
2	0,5828580	0,2614974	6,895	0,0000467	0,0424558
$2\frac{1}{4}$	0,5196225	0,2438063	6,899921	0,0000000	0,0423947

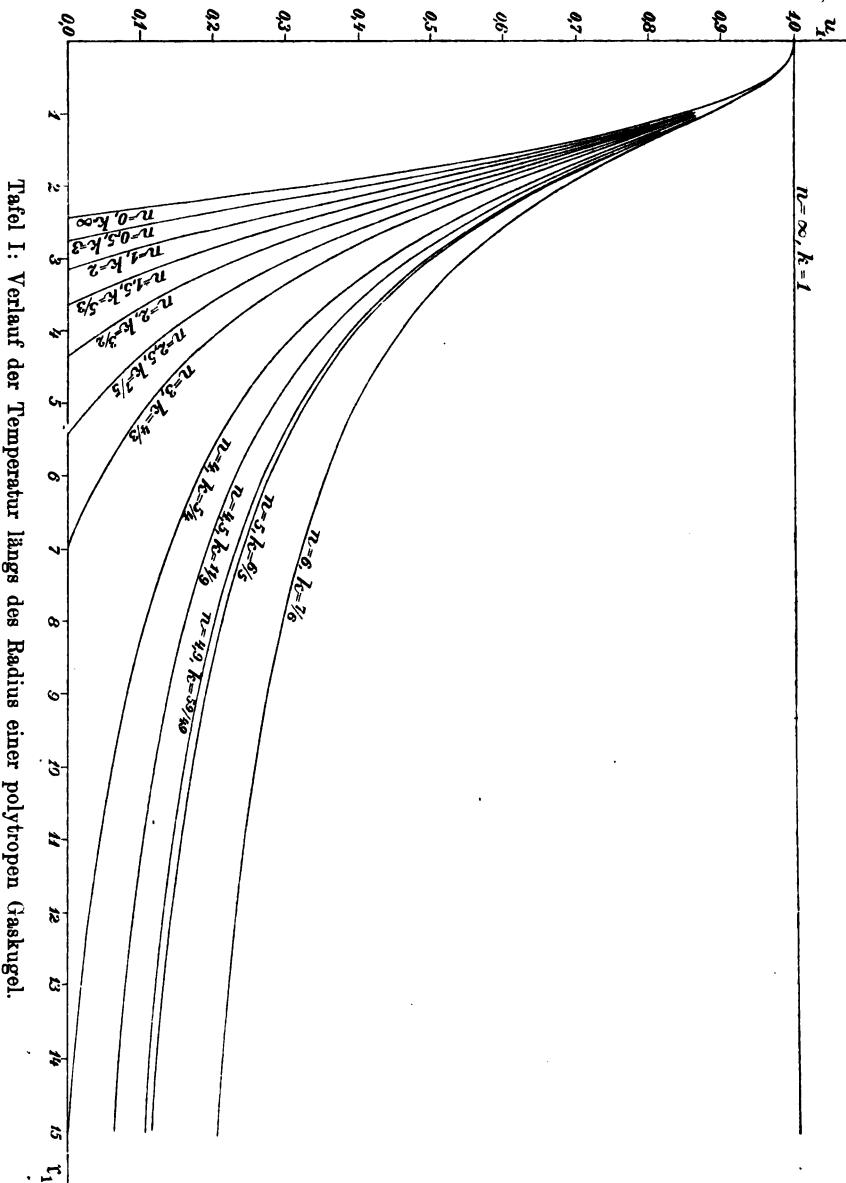
Ein Vergleich mit der Tabelle 7 zeigt, daß die größere Genauigkeit dieser ungleich umständlicheren Rechnung nur an einigen Stellen in einer Einheit der vierten Dezimale zu bemerken ist. Weitere Teilung der Schritte würde sich somit erst in der sechsten oder siebenten Dezimale bemerklich machen.

Da die u_1 -Kurve sehr flach einschneidet, muß der Endwert von r_1 sorgfältig bestimmt werden. Die Werte von u_1 und $\frac{du_1}{dr_1}$ zeigen, daß derselbe nahe bei $r_1 = 6,895$ liegt. Dieser Punkt wurde wie die übrigen Punkte der Differentialgleichung berechnet, die Taylorsche Entwicklung mit Gliedern zweiter Ordnung angesetzt und das gewünschte Zusatzglied zu $\Delta r_1 = 0,004921$ berechnet, was den Endwert $r_1 = 6,899921$ ergibt; das zugehörige $\frac{du_1}{dr_1}$ ergibt sich zu $-0,0042395$ und daraus folgt

$$-\frac{r_1}{3\frac{du_1}{dr_1}} = 54,2515$$

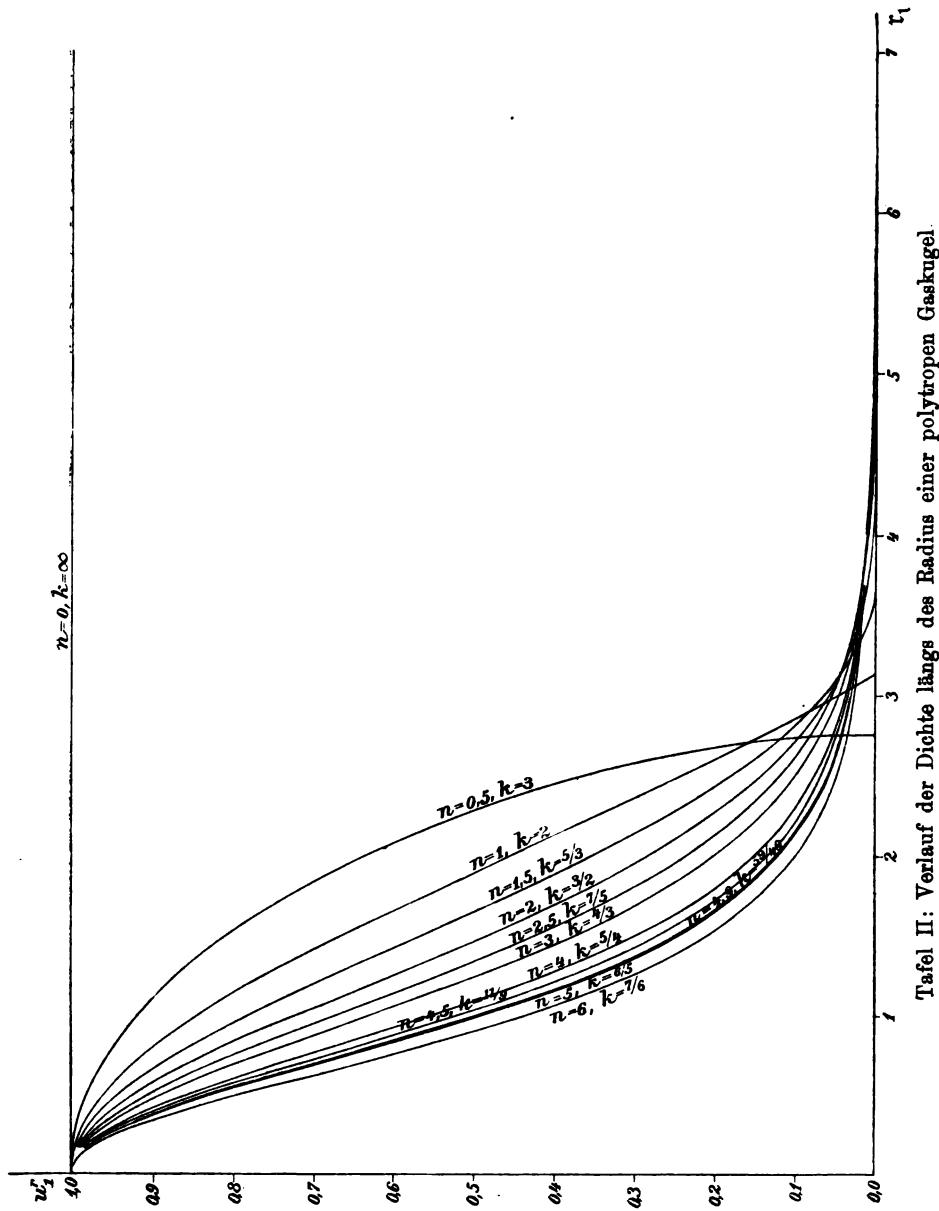
statt des früheren Wertes $-54,360$. Die geringe Differenz ist weniger durch die exakteren Werte von u_1 und $\frac{du_1}{dr_1}$, als durch die genauere Bestimmung des Endwertes von r_1 bedingt. Die Differenz gegen 54 ist zu groß, um durch das numerische Auswertungsverfahren der Differentialgleichung bedingt zu sein. Der vermutete, oben ausgesprochene Satz hat deshalb keine absolute Gültigkeit, gilt aber

immerhin so genau, daß er für praktische Zwecke ohne Schaden angewandt werden kann.



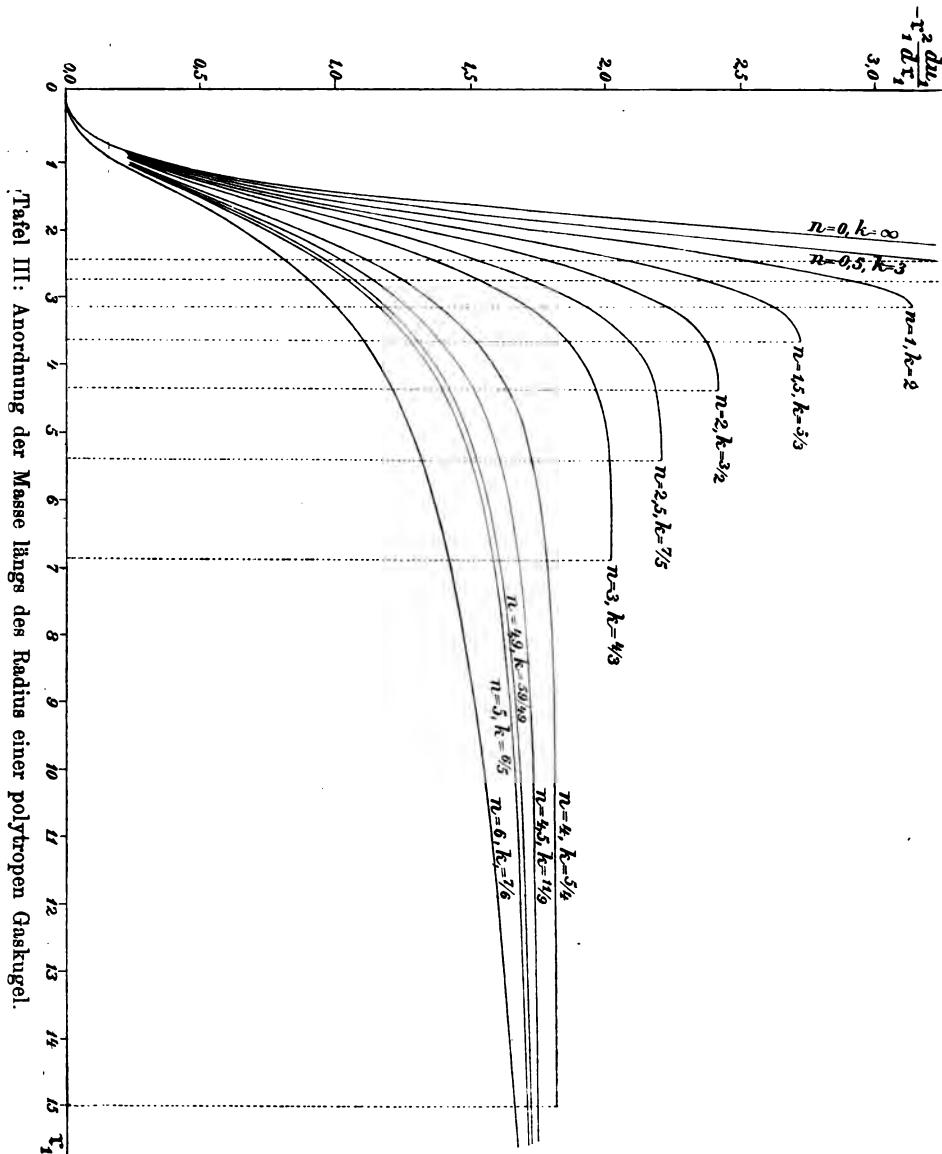
§ 11. Ein Teil des Inhaltes der Tabellen 1—12 ist in den Tafeln I—IV graphisch dargestellt.

Tafel I gibt den Verlauf der Funktion u_1 , stellt also den Gang der Temperatur längs des Radius dar für den Mittelpunktwert $u_1 = 1$. Alle Kurven gehen vom Werte $u_1 = 1$ horizontal ab, diver-



Tafel II: Verlauf der Dichte längs des Radius einer polytropen Gaskugel

gieren immer mehr und ordnen sich, ohne sich zu schneiden, in der Reihenfolge der n an; je größer n , desto größer der Radius der Kugel,



Tafel III: Anordnung der Masse längs des Radius einer polytrophen Gaskugel.

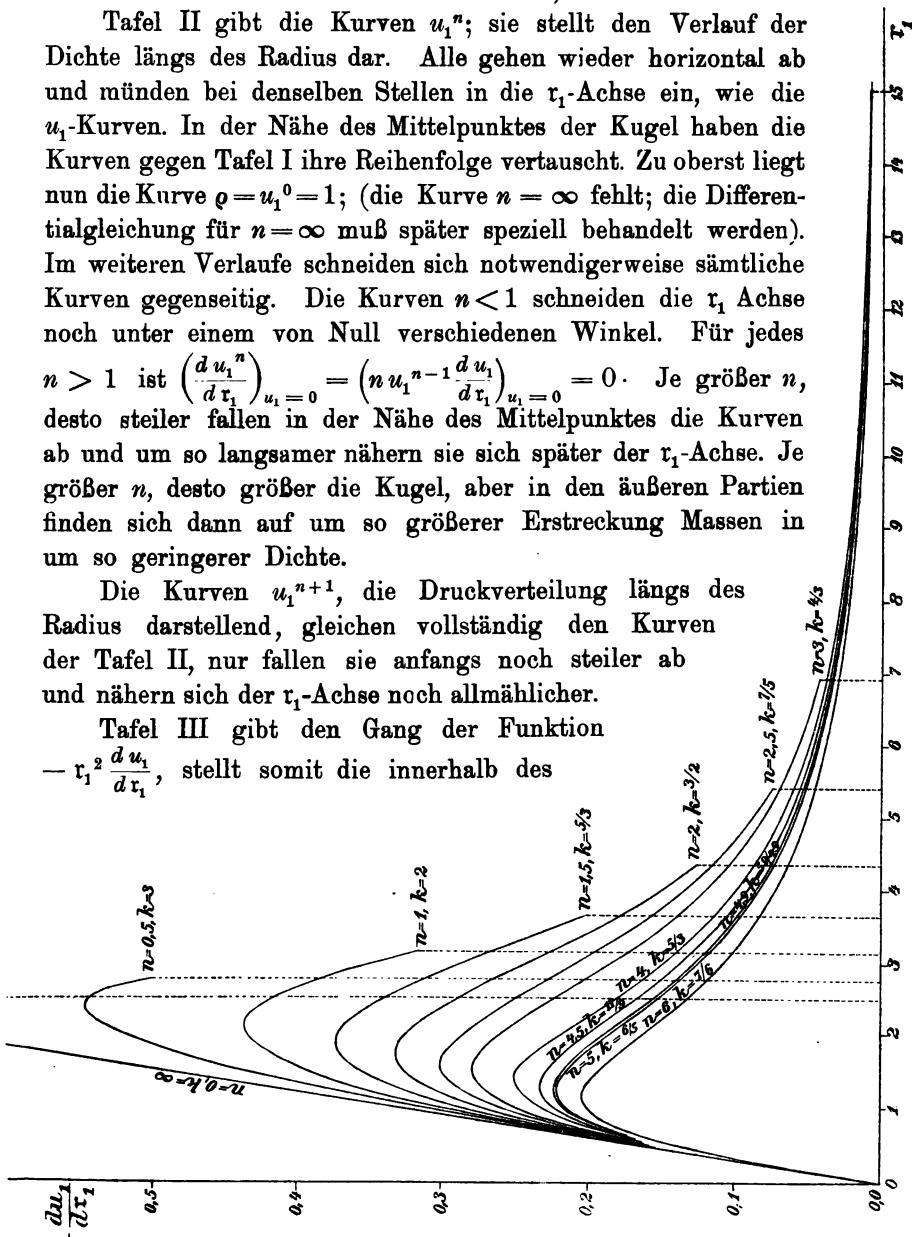
der mit $n = 5$ unendlich wird. Begrenzt wird das Kurvenbüschel durch die Kurve $u_1 = 1 = \text{konst}$, $n = \infty$; entsprechend der isothermen Gaskugel, und der Kurve $\varrho = \text{konst.}$, $n = 0$, den Temperaturgang der

Gaskugel konstanter Dichte darstellend. Mit Ausnahme dieser beiden besitzen sämtliche Kurven einen Wendepunkt; sämtliche Kurven für $n < 5$ schneiden die r_1 -Achse bei endlichen Werten, mit n wachsend, und unter von Null verschiedenen Winkeln, die mit n abnehmen.

Tafel II gibt die Kurven u_1^n ; sie stellt den Verlauf der Dichte längs des Radius dar. Alle gehen wieder horizontal ab und münden bei denselben Stellen in die r_1 -Achse ein, wie die u_1 -Kurven. In der Nähe des Mittelpunktes der Kugel haben die Kurven gegen Tafel I ihre Reihenfolge vertauscht. Zu oberst liegt nun die Kurve $\varrho = u_1^0 = 1$; (die Kurve $n = \infty$ fehlt; die Differentialgleichung für $n = \infty$ muß später speziell behandelt werden). Im weiteren Verlaufe schneiden sich notwendigerweise sämtliche Kurven gegenseitig. Die Kurven $n < 1$ schneiden die r_1 -Achse noch unter einem von Null verschiedenen Winkel. Für jedes $n > 1$ ist $\left(\frac{du_1^n}{dr_1}\right)_{u_1=0} = \left(n u_1^{n-1} \frac{du_1}{dr_1}\right)_{u_1=0} = 0$. Je größer n , desto steiler fallen in der Nähe des Mittelpunktes die Kurven ab und um so langsamer nähern sie sich später der r_1 -Achse. Je größer n , desto größer die Kugel, aber in den äußeren Partien finden sich dann auf um so größerer Erstreckung Massen in um so geringerer Dichte.

Die Kurven u_1^{n+1} , die Druckverteilung längs des Radius darstellend, gleichen vollständig den Kurven der Tafel II, nur fallen sie anfangs noch steiler ab und nähern sich der r_1 -Achse noch allmählicher.

Tafel III gibt den Gang der Funktion $-r_1^2 \frac{du_1}{dr_1}$, stellt somit die innerhalb des



Tafel IV: Verlauf der Anziehungsbeschleunigung längs des Radius einer polytropen Gaskugel.

Radius r_1 eingeschlossene Masse dar. Die Kurven ordnen sich, ohne sich zu schneiden, in umgekehrter Reihenfolge der n an; je kleiner n , desto rascher steigen sie an, je größer n , desto länger das Stück, das in den äußeren Partien der Kugel immer mehr horizontal verläuft. Je grösser n , desto mehr konzentriert sich die Masse auf die inneren Partien der Kugel, und desto weniger tragen die äußeren Partien, die Stellen äußerst geringer Dichte (vgl. Tafel II), zur Vermehrung derselben bei. Je kleiner n , also je kleiner diese Kugeln, desto grösser ihre Masse, so lange diese endlich ist. Die Masse der Kugel $n = 0$, $(u_1 = 1 - \frac{r_1^2}{6})$ hat in dieser Einheit den Wert $2\sqrt{6} = 2,8284\sqrt{3}$, die Masse der Kugel $n = 5$ den Wert $\sqrt{3}$; durchläuft n alle Werte von 0 bis 5, wobei die Masse endlich bleibt, so nimmt dieselbe im Verhältnis 1:2,8284 ab.

Tafel IV stellt den Verlauf der Funktion $-\frac{du_1}{dr_1}$ dar, gibt somit den Wert der Anziehungsbeschleunigung g in jeder Stelle der Kugel. Die Kurven ordnen sich, ohne sich zu schneiden, umgekehrt wie die n ; Alle Kurven, mit Ausnahme $n = 0$, $\varrho = \text{konst.}$, haben eine horizontale Tangente, entsprechend einem Maximalwerte von g . Derselbe ist um so grösser und liegt dem Zentrum um so näher, je kleiner r_1 , je kleiner der Radius der Kugel ist. Der Wert g an der Oberfläche der Kugel ist um so kleiner, je grösser der Radius der Kugel ist. An der Oberfläche der ∞ großen Kugel $n = 5$ herrscht, da die Masse derselben endlich, der Wert $g = 0$.

Die Tafeln I bis IV stellen die Verhältnisse von Gaskugeln im absoluten Maße dar, wenn $\alpha = 1$ und $U = 1$ sind. Haben diese beiden Größen endliche Werte, so haben wir mittels Gleichung (A Seite 69) das Übersetzungsverhältnis der r_1 -Achse in die r -Achse und mittels der Gleichungen C, D, E Seite 69 den Wert der Ordinaten in absoluten Maßen festzustellen. Durch lineare Deformationen können die Kurven allen möglichen Verhältnissen angepaßt werden, aber da die Differentialgleichung (I) nicht linear ist, sind auch die beiden Dilatationskoefizienten nicht lineare Funktionen der physikalischen Größen, welche die Gaskugel bestimmen, sondern hängen auf verwickelter Weise von denselben ab.

§ 12. Wir haben nochmals auf die Spezialfälle $n = 0$, $n = 1$ und $n = 5$ zurückzukommen.

a) $n = 0$; $k = \infty$. Die polytrope Kurve $k = \infty$ repräsentiert eine Zustandsänderung, bei welcher die Dichte konstant bleibt. In diesem Grenzfalle versagt der Begriff der polytropen Temperatur, da

ja schon die gewöhnlichen Formeln der polytropen Zustandsänderung, $p \varrho^k = \text{konst. usw.}$, nicht angewandt werden können. In diesem Spezialfalle lautet die Polytropengleichung $p = \varrho H T$; $\varrho = \text{konst.}$ Nun erhielten wir bei Ableitung der Differentialgleichung (I) Seite 39 die Formel

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\varrho} \frac{dp}{dr} \right) = -4\pi G \varrho r^2.$$

In unserm Spezialfalle haben wir $\frac{1}{\varrho} \frac{dp}{dr} = H \frac{dT}{dr}$, und die Ausführung der Differentiation liefert die Gleichung

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} + \alpha^2 = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{4\pi G \varrho}{H} \text{ cent}^{-2}, \quad \varrho = \text{konst.}$$

Das Integral mit Berücksichtigung der Anfangsbedingungen lautet

$$T = T_0 - \frac{\alpha^2 r^2}{6},$$

wo T_0 die Temperatur im Mittelpunkte ist. Zu jedem T gehört der Druck $p = \varrho H T$. Die Oberfläche der Kugel ist gegeben durch den Radius

$$R = \frac{1}{\alpha} \sqrt{6 T_0}.$$

Die übrigen Größen können wir leicht entwickeln, da wir es mit einer Kugel von konstanter Dichte zu tun haben. Oder wir können die Tabellen $n = 0$ und die Formeln (85)–(91) benutzen, wenn wir $U = T_0$ setzen, $\alpha^2 = \frac{4\pi G \varrho}{H} \text{ cent}^{-2}$ und die rechte Seite noch mit der konstanten Dichte ϱ multiplizieren.

b) $n = 1, k = 2$. Die Differentialgleichungen (I) nimmt die Form an

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \alpha^2 u = 0$$

und scheint in Bezug auf Dimension nicht mehr zu stimmen. Aus der Rechenregel Seite 28 sehen wir aber, daß wir das letzte u der Gleichung als hervorgegangen aus $u^n, n = 1$ betrachten und mit der Dimension ϱ einführen müssen.

Wir vermeiden bei weiterer Rechnung leicht unterlaufende Versehen, wenn wir die Differentialgleichung neu entwickeln aus der Formel

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\varrho} \frac{dp}{dr} \right) = -4\pi G \varrho r^2.$$

Für $k = 2$ lautet die Polytropengleichung $T = \varrho \Theta_2, p = \varrho^2 H \Theta_2$. Das ergibt $\frac{1}{\varrho} \frac{dp}{dr} = 2 H \Theta_2 \frac{d\varrho}{dr}$ und die Ausführung der Differentiation ergibt

$$\frac{d^2 \varrho}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varrho}{dr} + \alpha^2 \varrho = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{2\pi G}{H \Theta_2} \text{ gramm}^{-1} \text{ cent.}$$

Das für unseren Zweck in Betracht kommende Integral lautet

$$\varrho = \varrho_0 \frac{\sin \alpha r}{\alpha r},$$

da aber $T = \varrho \Theta_2$, haben wir auch

$$T = T_0 \frac{\sin \alpha r}{\alpha r}$$

und schließlich

$$p = p_0 \left(\frac{\sin \alpha r}{\alpha r} \right)^2;$$

ϱ und T sind demnach durch dasselbe Gesetz darstellbar.

Der Radius der Kugel ergibt sich zu

$$R = \frac{\pi}{\alpha},$$

ist also unabhängig vom Zustand im Mittelpunkt. Das sehen wir auch aus A, Seite 69, da für $k = 2$ das Übersetzungsverhältnis von r , in r unabhängig von U ist. Zur Ermittlung der übrigen Größen können wir die Lösung für ϱ benutzen, oder bequemer die Tabelle für $n = 1$ und die Formeln (85)–(91), in denen wir, entsprechend der Relation $\varrho = U^n u_1^n = U u_1$, U in Bezug auf Dimension und Zahlenwert gleich der Mittelpunktsdichte ϱ_0 setzen.

c) Im Falle $n = 5$ hatten wir $u = u_0 \sqrt{\frac{3}{3 + u_0^4 r_1^2}}$. Wir können entweder $u_0 = 1$ setzen und die Werte der Tabelle 5, $u_1 = \sqrt{\frac{3}{3 + r_1^2}}$ nebst den Formeln (85)–(91) benutzen; oder wir schreiben (die Rechenregel Seite 28 berücksichtigend) die Lösung von I in der Form $u = u_0 \sqrt{\frac{3 u_0}{3 u_0 + u_0^5 \alpha^2 r^2}}, \frac{du}{dr} = -u_0 \cdot u_0^5 \alpha^2 r \sqrt{\frac{3 u_0}{(3 u_0 + u_0^5 \alpha^2 r^2)^3}}$ an und halten uns an die Formeln (67)–(73). So erhalten wir mit Hilfe der Formel (68)

$$\mathfrak{M} = -\frac{4\pi}{\alpha^2} \left(\frac{r^3 d u}{d r} \right)_{r=\infty} = \frac{4\pi u_0^6 \sqrt{3 u_0}}{\sqrt{(u_0^5 \alpha^2)^3}} \text{ gramm.}$$

Anhang. Ausführungen des Hrn. Dr. W. Kutta. (Siehe oben § 8.) Daß die hier benutzte Näherungsformel, wie die anderen in dem Aufsatz der Zeitschrift für Math. u. Phys., Bd. 46, Seite 435 angegebenen Formeln, auch für Systeme von Differentialgleichungen ersten Grades gilt, läßt sich leicht folgendermaßen zeigen. (Beweis nur für zwei

simultane Differentialgleichungen ausgeführt, man vergleiche auch den Aufsatz von Runge, Zeitschrift für Math. u. Phys., Bd. 46, Seite 172).

Aus

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z); \quad \frac{dz}{dx} = g(x, y, z) \quad \text{folgt}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = f_1 + f_2 f + f_3 g, \quad \text{abgekürzt} = P$$

$$\frac{d^3 z}{dx^3} = g_1 + g_2 g + g_3 f \quad = Q$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = [f_{11} + f_{22} f^2 + f_{33} g^2 + 2 f_{12} f + 2 f_{13} g + 2 f_{23} f g] + [f_2 P + f_3 Q],$$

abgekürzt

$$= R + [f_2 P + f_3 Q].$$

Analog

$$\frac{d^3 z}{dx^3} = S + [g_2 Q + g_3 P]$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4 y}{dx^4} = & [f_{111} + f_{222} f^3 + f_{333} g^3 + 3 f_{112} f + 3 f_{113} g + 3 f_{122} f^2 + 3 f_{133} g^2 + 3 f_{223} f^3 g + \\ & + 3 f_{233} f g^2 + 6 f_{123} f g] \end{aligned}$$

$$+ 3 [(f_{12} + f_{23} f + f_{32} g) P + (f_{13} + f_{23} f + f_{32} g) Q] + [f_2 R + f_3 S] + \\ + [(f_2^2 + f_3 g_2) P + (f_2 f_3 + g_3 f_2) Q],$$

abgekürzt

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = T + 3 V + [f_2 R + f_3 S] + [(f_2^2 + f_3 g_2) P + (f_2 f_3 + g_3 f_2) Q].$$

Analog erhält man durch Vertauschung von f mit g und von Index 2 mit 3 $\frac{d^4 z}{dx^4}$.

Der durch die Taylorsche Entwicklung gegebene Wert von Δy heißt also

$$\begin{aligned} \Delta y = & \Delta x \cdot f + \frac{(\Delta x)^2}{2} P + \frac{(\Delta x)^3}{2 \cdot 3} \{ R + [f_2 P + f_3 Q] \} + \\ & + \frac{(\Delta x)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \{ T + 3 V + [f_2 R + f_3 S] + [(f_2^2 + f_3 g_2) P + (f_2 f_3 + g_3 f_2) Q] \} + \end{aligned}$$

Glieder höherer Ordnung.

Wir wollen nun beweisen, daß der Ausdruck

$$\Delta' y = f(x + \lambda \Delta x, y + \lambda \Delta y, z + \lambda \Delta z) \cdot \Delta x$$

sich bis zur vierten Ordnung genau in der Form

$$\begin{aligned} \Delta' y = & \Delta x \cdot f + (\Delta x)^2 \cdot a_2 P + (\Delta x)^3 \{ a_3 R + b_3 [f_2 P + f_3 Q] \} + \\ & + (\Delta x)^4 \{ a_4 T + b_4 V + c_4 [f_2 R + f_3 S] + d_4 [(f_2^2 + f_3 g_2) P + \\ & + (f_2 f_3 + g_3 f_2) Q] \} + \text{Glieder höherer Ordnung} \end{aligned}$$

darstellen läßt, wo die a, b, c reine Zahlen sind, sofern nur die hier

eintretenden Größen Δy und Δz sich bis zur dritten Ordnung genau durch

$$\Delta y = \Delta x \cdot f + (\Delta x)^2 \cdot A_2 P + (\Delta x)^3 \{ A_3 R + B_3 [f_2 P + f_3 Q] \} + \\ + \text{Glieder höherer Ordnung},$$

$$\Delta z = \Delta x \cdot g + (\Delta x)^2 \cdot A_2 Q + (\Delta x)^3 \{ A_3 S + B_3 [g_2 Q + g_3 P] \} + \\ + \text{Glieder höherer Ordnung}$$

darstellen lassen, wo wieder A_2 , A_3 , B_3 reine Zahlen sind.

In der Tat gibt die Entwicklung

$$\Delta' y = \Delta x \cdot f + \lambda \Delta x [\Delta x \cdot f_1 + \Delta y \cdot f_2 + \Delta z \cdot f_3] + \\ + \frac{\lambda^2 \cdot \Delta x}{2} [(\Delta x)^2 f_{11} + (\Delta y)^2 f_{22} + (\Delta z)^2 f_{33} + \\ + 2(\Delta x \Delta y f_{12} + \Delta x \Delta z f_{13} + \Delta y \Delta z f_{23})] + \\ + \frac{\lambda^3 \cdot \Delta x}{2 \cdot 3} [(\Delta x)^3 f_{111} + \\ + 6 \Delta x \Delta y \Delta z f_{123}] + \\ + \text{Glieder fünfter Ordnung}.$$

Das Einsetzen der obigen Werte von Δy und Δz gibt:

$$\Delta' y = \Delta x \cdot f + \lambda \cdot (\Delta x)^3 \cdot \lambda P + (\Delta x)^3 \{ \frac{\lambda^3}{2} R + \lambda A_2 [f_2 P + f_3 Q] \} + \\ + (\Delta x)^4 \{ \frac{\lambda^3}{6} T + \lambda^2 A_2 V + \lambda A_3 [f_2 R + f_3 S] \\ + \lambda B_3 [(f_2^2 + g_2 f_3) P + (f_2 f_3 + g_2 f_3) Q] \} + \\ + \text{Glieder höherer Ordnung}.$$

Es folgt somit, daß alle in den Formeln für die vierte Ordnung auftretenden Näherungswerte Δy sich auf die vorstehende Form, dieselbe, die auch der oben angeschriebene aus der Taylorschen Entwicklung erhaltene wahre Wert besitzt, bringen lassen. Es bleibt daher nur noch zu beweisen, daß auch die Zahlenkoeffizienten, die in dem Näherungswerte an die Summanden

f im Gliede erster Ordnung

P im Gliede zweiter Ordnung

R und $(f_2 P + f_3 Q)$ im Gliede dritter Ordnung

$T, V, [f_2 R + f_3 S],$

$[(f_2^2 + g_2 f_3) P + (f_2 f_3 + g_2 f_3) Q]$ im Gliede vierter Ordnung

herantreten, mit den entsprechenden Koeffizienten im wahren Werte übereinstimmen.

Für den Fall $g =$ identisch Null, also z konstant, kommen wir auf den Fall einer einzigen Differentialgleichung zurück. In diesem Falle ist die Übereinstimmung der Koeffizienten aber schon bewiesen. Denn dabei wird z. B. T das Glied f_{111} , V das Glied $f_{12} \cdot f_1$, $(f_2 R + f_3 S)$ das Glied $f_2 f_{11}$, $[(f_2^2 + g_2 f_3) P + (f_2 f_3 + g_2 f_3) Q]$ das Glied $f_2^2 f_1$ ent-

halten, das je in den anderen drei Summanden nicht vorkommt, also einzeln in seinem Koeffizienten Übereinstimmung mit dem wahren Wert zeigen muß.

Damit ist also die Richtigkeit bis zur vierten Ordnung inklusive für alle unsere Näherungsformeln nachgewiesen, wenn es sich um ein System von simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung handelt. Ebenso bleibt die Giltigkeit bei einem System von zwei Differentialgleichungen bestehen; der Beweis bleibt derselbe, indem bloß die Ausdrücke P , Q etc. entsprechend zu erweitern sind.

Es sei hier noch nebenbei bemerkt, daß die Verfolgung einer einzelnen Integralkurve einer Differentialgleichung höherer Ordnung mit Benutzung der gegebenen Näherungsformeln nicht wesentlich mehr Rechenarbeit verlangt, als die einer Integralkurve einer Differentialgleichung erster Ordnung.

Sechstes Kapitel.

Beispiele.

§ 1. Wir behandeln im folgenden in erster Linie Gaskugeln von der Größe der Erde oder der Sonne und stützen uns dabei auf folgende Daten:

Erde.

Die drei Achsen des Erdellipsoides haben nach A. R. Clarke folgende Längen

$$a = 6,37846 \cdot 10^8 \text{ cent}; \quad b = 6,37799 \cdot 10^8 \text{ cent}; \quad c = 6,35647 \cdot 10^8 \text{ cent}.$$

Darnach berechnet:

Erdvolumen	$= 1,0832 \cdot 10^{27} \text{ cent}^3$
Radius der Kugel gleichen Volumens (mittlerer Erdradius)	$= 6,37096 \cdot 10^8 \text{ cent}$
Oberfläche dieser Kugel	$= 5,10058 \cdot 10^{18} \text{ cent}^2$
Mittlerer Äquatorialradius nach Clarke	$= 6,37825 \cdot 10^8 \text{ cent}$
Schwerebeschleunigung unter 45°	$= 980,62 \cdot \text{cent sek}^{-2}$
Anziehungsbeschleunigung $980,62 + 1,696$	$= 982,316 \cdot \text{cent sek}^{-2}$

Bezeichnen wir die mittlere Dichte der als Kugel angenommenen Erde mit $\bar{\rho}$, die Gravitationskonstante mit G , so haben wir, da Anziehungsbeschleunigung $= G \cdot \frac{\text{Volumen} \cdot \bar{\rho}}{\text{Radius}^2}$.

$$G \bar{\rho} = \frac{982,316 \cdot (6,37096 \cdot 10^8)^2}{1,0832 \cdot 10^{27}} = 3,6809 \cdot 10^{-7} \text{ sek}^{-2}.$$

Wir nehmen nach den Messungen von Boys:

$$G = 6,6576 \cdot 10^{-8} \text{ gramm}^{-1} \text{ cent}^3 \text{ sek}^{-2}. \quad (\text{Sehr nahe } = \frac{2}{3} \cdot 10^{-7}.)$$

Die Masse, welche eine gleiche Masse in der Entfernung 1 cent mit der Kraft 1 Dyne anzieht beträgt somit $M = \sqrt{\frac{1}{G}} = 3876$ gramm, und die mittlere Dichte der Erdkugel berechnet sich

$$\bar{\rho} = 5\,5288 \text{ gramm cent}^{-3}.$$

$$\text{Masse der Erdkugel} = 5,9889 \cdot 10^{27} \text{ gramm.}$$

Die mittlere Dichte des dreiachsigen Erdellipsoedes würde sich mit dem angenommenen Werte von G zu 5,527 berechnen. Der Unterschied beider Zahlen, der auch in die Berechnung der Masse der Erde eingehet, kommt nicht in Betracht gegenüber der Differenz der nach verschiedenen Methoden bestimmten Werte von G . Da wir nach Prinzipien geometrischer Ähnlichkeit öfters weiter schließen werden, so kommt es für uns in erster Linie nur darauf an, einen Satz Konstanten zu haben, die in sich zusammengehören.

Sonne. (Aufgefaßt als Kugel vom Radius der Photosphäre.)

$$\text{Parallachse} = 8,80''.$$

$$\text{Entfernung } 2,34392 \cdot 10^4 \text{ äquatoriale Erdradien} = 1,49501 \cdot 10^{18} \text{ cent}$$

$$\text{Sonnendurchmesser nach Auwers } 31'59,3''.$$

Sonnenradius	= 109,052 äquatoriale Erdradien
	= 109,18 mittlere Erdradien
	= 6,95561 $\cdot 10^{10}$ cent

$$\text{Dazu gehörige Oberfläche der Sonne} = 6,07968 \cdot 10^{22} \text{ cent}^2$$

$$\text{Dazu gehöriges Volumen der Sonne} = 1,40960 \cdot 10^{33} \text{ cent}^3$$

Masse der Sonne	= 3,24439 $\cdot 10^5$ Erdmassen
	= 1,94302 $\cdot 10^{33}$ gramm

Mittlere Dichte der Sonne	= 1,37841 gramm cent ⁻³
	= 0,2493 \times mittlere Erddichte

Anziehungsbeschleunigung	= 2,6737 $\cdot 10^4$ cent sek ⁻²
	= 27,219 \times Anziehungsbeschleunigung der Erde.

§ 2. A. Als einfaches Beispiel stellen wir uns die Aufgabe, eine adiabatische Gaskugel $k = \alpha$; $\Theta_k = \Theta$ von der Masse und mittleren Dichte der Sonne aufzubauen, und zwar aus atmosphärischer Luft. Für diese ist die Gaskonstante $H_L = 2,8705 \cdot 10^6$ cent² sek⁻², $\alpha = 1,4 = \frac{7}{5}$. Von den verschiedenen Wegen, die zum Ziele führen, ist der kürzeste, daß wir aus der Tabelle für $n = 2,5$ für das Verhältnis $\frac{\rho_0}{\rho}$ Formel (89)

den Wert 24,074 entnehmen. Die mittlere Dichte der Sonne haben wir oben angegeben. Somit berechnet sich die Dichte ϱ_0 im Sonnenmittelpunkte

$$\varrho_0 = 1,37841 \cdot 24,074 = 33,189 \text{ gramm cent}^{-3}.$$

Daraus bestimmt sich (vgl. Seite 69)

$$U = \varrho_0^{-\frac{1}{n}} = \varrho_0^{x-1} = 4,0587.$$

Um die adiabatische Temperatur Θ der durch die Sonnenkugel zu legenden Adiabaten zu bekommen, lösen wir Gleichung (86) nach Θ auf und erhalten

$$\Theta^{\frac{n}{n-1}} = \frac{\frac{M^2 \cdot 4\pi G^3}{H^3 U^{3-n} \left(r_1^{\frac{n}{n-1}} \frac{du_1}{dr_1} \right)_{u_1=0}}}{\left(\frac{n}{n-1} \right)^{\frac{n}{n-1}}}.$$

Der Tabelle $n = 2,5$ entnehmen wir die Endwerte $r_1 = 5,4172$, $\frac{du_1}{dr_1} = 0,07500$ und finden

$$\Theta = 1,1226 \cdot 10^8.$$

An der Stelle im Sonneninnern, an der die Dichte 1 gramm cent⁻³ herrscht, findet sich demnach die absolute Temperatur $T = 1,1226 \cdot 10^8$. Die Mittelpunktstemperatur T_0 finden wir (D, Seite 69)

$$T_0 = U\Theta = 4,5563 \cdot 10^8,$$

und den Druck im Mittelpunkte (E, Seite 69)

$$p_0 = \varrho_0 H T_0 = 4,3405 \cdot 10^{16} \text{ gramm cent}^{-1} \text{ sek}^{-2}$$

$$= 4,2410 \cdot 10^{10} \text{ Atmosphären.}$$

α berechnen wir nach Gleichung (61):

$$\alpha = \sqrt{\frac{4\pi G}{\frac{n}{n-1} H \Theta}} = 2,7235 \cdot 10^{-11} \text{ gramm}^{-\frac{1}{2}} \text{ cent}^{\frac{1}{2}}$$

und das Übersetzungsverhältnis (A, Seite 69) mittels dessen wir die r_1 der Tabelle 6 in wirkliche Entfernung r umrechnen, erhalten wir

$$\frac{1}{U^{\frac{n}{2}} \alpha} = 1,2840 \cdot 10^{10} \text{ gramm}^{\frac{1}{2}} \text{ cent}^{-\frac{1}{2}}.$$

(Zur Kontrolle berechnen wir den Sonnenradius

$$R = \frac{1}{U^{\frac{n-1}{2}} \alpha} r_{1(u_1=0)} = 6,9556 \cdot 10^{10} \text{ cent}$$

also richtig, wie er durch Masse und mittlere Dichte gegeben, und noch (Formel 85) $g = -\frac{4\pi G}{\alpha} U^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{du_1}{dr_1} \right)_{u_1=0} = 2,6737 \cdot 10^4 \text{ cent sek}^{-2}$, also wieder den durch Masse und mittlere Dichte bedingten Wert.)

Bestände die Sonne aus einem zweiatomigen Gase dessen Normaldichte gleich derjenigen atmosphärischer Luft, so wäre ihr Mittelpunkt ausgezeichnet durch die Werte

$$\varrho_0 = 33,189 \text{ gramm cent}^{-3}$$

$$T_0 = 4,5563 \cdot 10^8$$

$$p_0 = 4,3405 \cdot 10^{16} \text{ gramm cent}^{-1} \text{ sek}^{-2}.$$

Wir erhalten also Werte von solcher Größenordnung, daß die experimentelle Erfahrung vollständig versagt. Die vorliegenden Untersuchungen verlieren aber nichts von ihrem Werte, wenn man diese Größen lediglich als bequeme Symbole für die Rechnung auffaßt. Mit Hilfe von U und α können wir die Lösung $u_1 = f(r_1)$ in die zum Radius r gehörigen Absolutwerte umrechnen. Gehen wir nach außen, so kommen wir endlich zu Werten von ϱ , p , T , die unserer Erfahrung genügend nahe liegen. An dieser Stelle können wir eine Kugelschale schlagen. Die Masse, oder was auf dasselbe hinauskommt, die mittlere Dichte, gerechnet bis zu dieser Stelle sind dann bekannt. Letztere wird dann sicher auch von bekannter Größenordnung sein. Geben wir der gesamten eingeschlossenen Masse durchwegs diese mittlere Dichte, oder ordnen wir sie beliebig an, nur daß sie denselben Wert beibehält, so wird an jener Kugelschale der Wert von g ungeändert bleiben. Geben wir dieser noch die für sie vorher gefundene Temperatur, so wird es in bezug auf die außen liegenden Gasmassen vollständig gleichgültig sein, ob wir sie der Wirkung der ursprünglich angeordneten oder abgeändert angeordneten Masse aussetzen. Nun sind ja vorderhand nur die äußeren Schichten der Himmelskörper unserer Erforschung zugänglich und unser Interesse in Anspruch nehmend. Nimmt man sie als Gasmassen in polytropen oder adiabatischen Gleichgewichtszuständen an, so ist die für die Rechnung geeignete Untersuchungsmethode die, daß man den ganzen Himmelskörper als polytrope Gaskugel von gegebener Masse und Radius betrachtet. Eine Scheidung von festem Kern und Atmosphäre, kurz ausgedrückt, wird sich durch direkte Beobachtung äußerst selten, vielleicht nie, feststellen lassen. Die Behandlung als polytrope Gaskugel wird aber stets eine solche Scheidung vorzunehmen gestatten, wobei die einzige bekannte Größen, Masse und Radius, ihre Werte behalten. Wir werden später sehen, wie sich der Gang der Untersuchung gestaltet, wenn Kern und Umgebung bekannt vorliegen. Wo aber diese erfahrungsgemäße Scheidung nicht möglich ist, werden wir das Ganze als Gasgebilde annehmen und die für die innersten

Partien abnorm hohen Werte lediglich als Rechensymbole betrachten, um das Verhalten der äußereren Schichten untersuchen zu können. Da Masse und Radius erhalten bleiben, wird die Erfahrung nicht verletzt und eine dieser nicht widersprechende Scheidung in Kern und Atmosphäre bleibt immer möglich.

Um die Größen p , ϱ , T in einem bestimmten Abstande r vom Sonnenmittelpunkte zu finden, müssen wir mit Hilfe des ermittelten Übersetzungsverhältnisses r in r_1 umrechnen, der Tabelle $n = 2,5$ die entsprechenden Werte von u_1 entnehmen und mit Hilfe von U verwerten. Um ein Bild des Zustandes längs des Radius zu gewinnen, genügt es, die in der Tabelle angeführten Werte von r_1 zu benutzen und in r umzurechnen.

Wählen wir $r_1 = 5$. Dem entspricht

$$r = \frac{1}{\sqrt[n-1]{U^2 - \alpha}} = 1,2840 \cdot 10^{10} \cdot 5 = 6,4200 \cdot 10^{10} \text{ cent},$$

also einer Tiefe von $5,356 \cdot 10^9$ cent unter der scheinbaren Sonnenoberfläche, einem Winkelabstande $1'13,9''$ von derselben entsprechend. Wir finden

$$\begin{aligned}\varrho &= (Uu_1)^n = (4,0587 \cdot 0,03384)^{2,5} = 0,00699 \text{ gramm cent.}^{-3} \\ T &= Uu_1 \Theta = 4,0587 \cdot 0,03384 \cdot 1,226 \cdot 10^8 = 1,5419 \cdot 10^7 \\ p &= \varrho HT = 3,0943 \cdot 10^{11} \text{ gramm cent.}^{-1} \\ &\quad \text{sek.}^{-2} \\ &= 3,0525 \cdot 10^5 \text{ Atmosphären.}\end{aligned}$$

Würden wir hier die Grenze eines festen Kernes annehmen, so hätten wir, um die mittlere Dichte desselben zu berechnen, die Beziehung

$$\frac{\varrho_0 = 33,189}{\bar{\varrho}} = \frac{r_1}{\frac{3}{3} \frac{du_1}{dr_1}} = 18,948, \text{ und erhielten } \bar{\varrho} = 1,7516 \text{ gramm cent.}^{-3}.$$

Geben wir der Oberfläche desselben noch die eben berechnete Temperatur, so würden die äußeren Schichten auf eine Ersetzung des adiabatischen Sonneninnern durch denselben nicht reagieren.

Wählen wir noch $r_1 = 5,4$, so erhalten wir $r = 6,9334 \cdot 10^{10}$ cent, befinden uns also in einer Tiefe von $2,22 \cdot 10^8$ cent = $\frac{1}{3}$ Erdradius unter der scheinbaren Sonnenoberfläche, in einem Winkelabstande von $3,05''$ von derselben, und finden

$$\varrho = 1,9454 \cdot 10^{-6} \text{ gramm cent.}^{-3}$$

$$\begin{aligned}T &= 5,8320 \cdot 10^5 \\p &= 3,2567 \cdot 10^6 \text{ gramm cent}^{-1} \text{ sek}^{-2} \\&= 3,2128 \text{ Atmosphären.}\end{aligned}$$

Wir sehen, wie auch die Betrachtung der Tafel I und II ergibt, daß beim Eindringen in den Gasball die Temperatur außerordentlich viel rascher ansteigt, wie die Dichte, diese wieder rascher wie der Druck. In dieser geringen Tiefe unter der Sonnenoberfläche, die etwa 3,4% des Radius entspricht, treffen wir Temperaturen gegen $600\,000^\circ$ Cels.; während die Dichte nur etwa $0,000\,002 \text{ gramm cent}^{-3}$ beträgt, ungefähr die Dichte atmosphärischer Luft von 0° Cels. unter einem Drucke von $1,2\text{ mm Quecksilber}$. Die hohe Temperatur kann diese Gasmasse trotzdem kräftig strahlen lassen.

B. Wir ändern den Aufbau der Kugel nur darin, daß wir zu demselben statt Luft Wasserstoff wählen, $H_{H^2} = 4,1481 \cdot 10^7 \text{ cent}^2 \text{ sek}^{-2}$; wir bleiben somit in der Klasse $n = 2,5$. Das Verhältnis $\frac{\varrho_0}{\varrho}$ bleibt unverändert bestehen, also bleibt auch

$$\varrho_0 = 33,189 \text{ gramm cent}^{-3},$$

ebenso bleibt $U = 4,0587$. Nach dem oben benutzten Verfahren erhalten wir

$$\Theta = 7,7684 \cdot 10^6,$$

und weiter

$$\begin{aligned}T_0 &= 3,1530 \cdot 10^7 \\p_0 &= 4,3405 \cdot 10^{16} \text{ gramm cent}^{-1} \text{ sek}^{-2}.\end{aligned}$$

Wie die Dichte, ist auch der Druck im Mittelpunkte unverändert geblieben, die Temperatur (auch Θ) hat sich im umgekehrten Verhältnis der Gaskonstanten, also proportional der Normaldichte, geändert. Beides war vorauszusehen. Denn u_1 ist durch dieselbe Lösungskurve gegeben. Die Dichteverteilung ist, bei gleicher Masse und gleichem Radius der Kugel, für Luft und Wasserstoff dieselbe; gleich ist auch an jeder Stelle der Druck, der ja nur das Gewicht der weiter außen liegenden Massen äquilibriert. Deshalb muß für jede Stelle auch $HT = \frac{p}{\varrho}$ denselben Wert behalten, T sich also umgekehrt wie H geändert haben, selbstverständlich auch der besondere Wert Θ von T . Da ferner $r = \frac{1}{\sqrt[n-1]{U^2 \alpha}}$ ist, α aber das Produkt

$H\Theta$ erhält, so hat sich das Übersetzungsverhältnis nicht geändert. Für die unter A. berücksichtigten äußersten Schichten erhalten wir für

p und ϱ dieselben Werte, die Temperaturen aber müssen mit der Dichte des Wasserstoffgases, bezogen auf Luft als Einheit, also $0,0692 = \frac{1}{14,5}$ multipliziert werden. Die mittlere Dichte der innenliegenden Masse ist unverändert geblieben.

C. Wir nehmen an, dieselbe Kugel bestehe aus einem einatomigen Gase und wählen dissozierten Wasserstoff; $H_H = 8,2962 \cdot 10^7 \text{ cent}^2 \text{ sek}^{-2}$. Wir sind jetzt in der Klasse $\alpha = \frac{5}{3}$, $n = 1,5$ und erhalten für diesen Fall aus der zugehörigen Tabelle $\frac{\varrho_0}{\varrho} = 6,0003$, und damit

$$\varrho_0 = 6,0003 \cdot 1,3784 = 8,2710 \text{ gramm cent}^{-3}.$$

Die Mittelpunktsdichte ist also auf ziemlich genau (vgl. Seite 84) $\frac{1}{4}$ des vorigen Wertes heruntergegangen, sie entspricht jetzt etwa der Dichte des Messings. $U = \varrho_0^{k-1} = \varrho_0^3$ wird $= 4,0897$, hat sich also wenig geändert. Mit den Werten

$$r_{1(u_1=0)} = 3,6571 \text{ und } - \left(\frac{du_1}{dr_1} \right)_{u_1=0} = 0,20316$$

finden wir für Θ , die Temperatur der Dichte Eins, $2,9476 \cdot 10^6$ und damit weiter

$$T_0 = 1,2069 \cdot 10^7$$

$$p_0 = 8,2813 \cdot 10^{15} \text{ gramm cent}^{-1} \text{ sek}^{-2}$$

$= 8,1697 \cdot 10^9 \text{ Atmosphären}$

$$\alpha = 3,6971 \cdot 10^{-11} \text{ gramm}^{-\frac{1}{2}} \text{ cent}^{\frac{1}{2}}.$$

Die Mittelpunktstemperatur ist auf den 38. Teil des Wertes heruntergegangen, den sie für atmosphärische Luft besaß, der Druck auf $\frac{1}{5}$. (Dabei ist außer dem Wechsel der Atomzahl noch der Wechsel der Gaskonstante H maßgebend.) Als Übersetzungsvorhältnis $\frac{1}{U^{\frac{1}{4}} \alpha}$ erhalten wir $1,9063 \cdot 10^{10}$.

Die Verhältnisse in der Nähe der Oberfläche werden wir später in anderem Zusammenhange besprechen.

D. Nehmen wir endlich zum Aufbau ein dreiatomiges Gas, vom Molekulargewicht des Wasserdampfes, $H_{H_2O} = 4,6090 \cdot 10^6$; und benutzen die Tabelle für $\alpha = \frac{4}{3}$, $n = 3$, so ergibt sich, da $\frac{\varrho_0}{\varrho} = 54,360$

$$\varrho_0 = 74,943 \text{ gramm cent}^{-3}$$

$$U = 4,2161$$

$$\Theta = 8,1978 \cdot 10^7$$

$$T_0 = 3,4335 \cdot 10^8$$

$$p_0 = 1,1857 \cdot 10^{17} \text{ gramm cent.}^{-1} \text{ sek.}^{-2}$$

$$= 1,1740 \cdot 10^{11} \text{ Atmosphären}$$

$$\alpha = 2,3528 \cdot 10^{-11} \text{ gramm}^{-\frac{1}{2}} \text{ cent}^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Übersetzungsverhältnis} = 1,0081 \cdot 10^{10}.$$

Wir haben hier den Aufbau einer gegebenen Gaskugel studiert unter der Annahme, daß sie aus Gasen mit ein, zwei oder drei Atomen im Molekül, $\alpha = \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{4}{3}$, von bestimmter Normaldichte in adiabatischem Gleichgewichte bestanden. Genau dieselben Verhältnisse aber würden wir finden, wenn wir, unter Beibehaltung derselben Normaldichte, Gase von beliebiger Atomzahl im Molekül verwenden würden, die nun aber im polytropen Gleichgewicht längs Polytropen vom Exponent $k = \frac{5}{3}, \frac{7}{5}$ resp. $\frac{4}{3}$ sich befinden. Durch die Polytrope wird das Verhältnis der Wärmekapazitäten $\frac{c_p}{p_v} = \alpha$ getilgt und an dessen Stelle tritt der Exponent k .

Der Verbrauch von Wärme zur Erhöhung der intramolekularen Bewegung wird dann gedeckt durch die Wärmezufuhr $dQ = \gamma dT$ aus Quellen, deren Natur wir vorderhand unbestimmt lassen.

§ 3. In den vorigen Beispielen ist die Gaskugel bestimmt worden aus Masse und Radius. Wir werden im nächsten Kapitel zeigen, daß, wenn Gasart und Exponent der Polytrope gegeben sind, stets zwei geeignet gewählte Bestimmungsstücke zum Aufbau der Gaskugel hinreichen. Wir wollen dies hier an einem Beispiel erläutern.

Aufgabe. Eine adiabatische Gaskugel bestehe aus atmosphärischer Luft $\alpha = \frac{7}{5}$, $H_L = 2,8705 \cdot 10^6 \text{ cent}^2 \text{ sek.}^{-2}$ (oder eine polytrope Gaskugel $k = \frac{7}{5}$ aus beliebigem Gase gleicher Normaldichte). Im Mittelpunkt herrscht eine absolute Temperatur $T_0 = 1,5332 \cdot 10^5$; an der Oberfläche hat die Anziehungsbeschleunigung den Wert $g = 982,316 \text{ cent sek.}^{-2}$. Welches sind die übrigen die Gaskugel charakterisierenden Größen?

Wir gehen aus von der Gleichung (85)

$$g = -\sqrt[3]{4\pi G \cdot \frac{\alpha}{\alpha-1} H \Theta U^{-\frac{n+1}{2}}} \left(\frac{du_1}{dr_1} \right)_{u_1=0}$$

und erhalten daraus

$$U^{n+1} \Theta = \frac{g^2}{4\pi G \frac{x}{x-1} H \left(\frac{du_1}{dr_1} \right)_{u_1=0}^2}.$$

Weiter ist $T_0 = U\Theta$. Aus beiden Beziehungen finden wir

$$\varrho_0 = U^n = \frac{g^2}{4\pi G \left(\frac{x}{x-1} \right) H \left(\frac{du_1}{dr_1} \right)_{u_1=0}^2 T_0}.$$

Der Tabelle für $n = 2,5$ entnehmen wir $\left(\frac{du_1}{dr_1} \right)_{u_1=0} = 0,07500$ und erhalten

$$\varrho_0 = 133,11 \text{ gramm cent}^{-3}, \quad U = 7,0745$$

und mittels dieser Werte

$$\bar{\varrho} = \frac{\varrho_0}{24,074} = 5,5288 \text{ gramm cent}^{-3}$$

$$\Theta = 2,1673 \cdot 10^4$$

$$T_0 = 1,5332 \cdot 10^5$$

$$p_0 = 5,8585 \cdot 10^{13} \text{ gramm cent}^{-1} \text{ sek}^{-2}$$

$$= 5,7796 \cdot 10^7 \text{ Atmosphären}$$

$$\alpha = 1,9601 \cdot 10^{-9} \text{ gramm}^{-\frac{1}{2}} \text{ cent}^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathfrak{M} = 5,9889 \cdot 10^{27} \text{ gramm}$$

$$\text{Übersetzungsverhältnis} = 1,1761 \cdot 10^8$$

$$\mathfrak{R} = 6,37096 \cdot 10^8 \text{ cent.}$$

Die Gaskugel entspricht also in bezug auf Masse und Radius der Erde.

§ 4. Aus den entwickelten Formeln 85—87 sehen wir bereits: *Der Größe und Masse einer polytropen Gaskugel sind weder nach oben noch nach unten Grenzen gesetzt*, vorausgesetzt, daß vollkommene Gase existieren, welche die Zustandsgleichung $p = \varrho HT$ unbeschränkt erfüllen. Die Oberflächenbedingung $u = 0$ ($p = 0$, $T = 0$) sichert ihre Existenz. Wir wollen als Beispiel eine adiabatische Gaskugel aus atmosphärischer Luft, ($x = \frac{7}{5}$, $H_L = 2,8705 \cdot 10^6 \text{ cent}^2 \text{ sek}^{-2}$) aufbauen, die einen Radius $\mathfrak{R} = 1 \text{ cent}$ und eine Mittelpunktsdichte von $\varrho_0 = 1 \text{ gramm cent}^{-3}$ besitzt.

Dann ist $\varrho_0 = U^n$, U somit = 1. Und da wir haben $\mathfrak{R} = \frac{1}{\frac{n-1}{U^2} \alpha} r_1$, muß sein

$$\alpha = \sqrt[1]{4\pi G \cdot \frac{x}{x-1} H \Theta} = r_1 = 5,41719 \text{ gramm}^{-\frac{1}{2}} \text{ cent}^{\frac{1}{2}}.$$

Daraus berechnet sich $\Theta = 2,8376 \cdot 10^{-15}$. Da im Mittelpunkt aber die Dichte Eins herrscht, ist die Mittelpunktstemperatur

$$T_0 = \Theta = 2,8376 \cdot 10^{-15}.$$

Damit ergibt sich

$$p_0 = \varrho_0 H T_0 = 8,1453 \cdot 10^{-9} \text{ gramm cent}^{-1} \text{ sek}^{-2} = 8,0354 \cdot 10^{-15} \text{ Atmosphären.}$$

Die Masse der Gaskugel ist

$$\mathfrak{M} = -\frac{4\pi}{\alpha^3} \left(r_1^2 \frac{du_1}{dr_1} \right)_{u_1=0} = 0,17398 \text{ gramm}$$

und die mittlere Dichte

$$\bar{\varrho} = \frac{1}{24,074} = 0,04154 \text{ gramm cent}^{-3}.$$

Der Wert von g an der Oberfläche derselben ist

$$g = -\frac{4\pi G}{\alpha} \left(\frac{du_1}{dr_1} \right)_{u_1=0} = 1,1582 \cdot 10^{-8} \text{ cent sek}^{-2}.$$

Und das Übersetzungsverhältnis wird $\frac{1}{(r_1)_{u_1=0}} = 0,18460$.

Die überaus niedrigen Werte der Temperatur, resp. des Drucks, die von $T_0 = 2,8376 \cdot 10^{-15}$ und $p_0 = 8,0354 \cdot 10^{-15}$ Atmosphären im Mittelpunkte bis Null auf der Oberfläche abnehmen, bewirken, daß eine Masse gleich 0,17398 gramm infolge von Massenanziehung als adiabatische Gaskugel von 1 cent Radius existieren kann.

Für den Radius $\mathfrak{R} = 1$ Meter und $\varrho_0 = 1$ gramm cent⁻³ würde sich ergeben

$$\alpha = 5,4179 \cdot 10^{-2} \text{ gramm}^{-\frac{1}{2}} \text{ cent}^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathfrak{M} = 1,7398 \cdot 10^5 \text{ gramm}$$

$$T_0 = 2,8376 \cdot 10^{-11}$$

$$p_0 = 8,0354 \cdot 10^{-11} \text{ Atmosphären}$$

$$g = 1,1582 \cdot 10^{-6} \text{ cent sek}^{-2}.$$

Weiter würde sich ergeben für $\mathfrak{R} = 1$ Kilometer, $\varrho_0 = 1$

$$\alpha = 5,4179 \cdot 10^{-5} \text{ gramm}^{-\frac{1}{2}} \text{ cent}^{\frac{1}{3}}$$

$$\mathfrak{M} = 1,7398 \cdot 10^{14} \text{ gramm}$$

$$T_0 = 2,8376 \cdot 10^{-5}$$

$$p_0 = 8,0354 \cdot 10^{-5} \text{ Atmosphären}$$

$$g = 1,1582 \cdot 10^{-3} \text{ cent sek}^{-2}$$

und für $\mathfrak{R} = 100000$ Kilometer, $\varrho_0 = 1$

$$\alpha = 5,4179 \cdot 10^{-10} \text{ gramm}$$

$$\mathfrak{M} = 1,7398 \cdot 10^{29} \text{ gramm}$$

$$T_0 = 2,8376 \cdot 10^6$$

$$p_0 = 8,0354 \cdot 10^6 \text{ Atmosphären}$$

$$g = 1,1582 \cdot 10^2 \text{ cent sek}^{-2}.$$

Alle diese Gaskugeln besitzen dieselbe mittlere Dichte

$$\bar{\varrho} = 0,04154 \text{ gramm cent}^{-3};$$

in allen ist die adiabatische Temperatur gleich der Mittelpunkts-temperatur; der Entropiegehalt der Masseneinheit, konstant durch jede Gaskugel hindurch, ändert sich proportional dem natürlichen Logarithmus der Mittelpunktstemperatur (vgl. Seite 27). Mit wachsendem Radius steigt die Gaskugel zu höheren Isentropen auf.

Würden wir der Kugel von 1 cent Radius eine Mittelpunkts-dichte $\varrho_0 = 22$, etwa der des Platins geben, so würden wir erhalten:

$$\alpha = 2,1430 \text{ gramm}^{-\frac{1}{2}} \text{ cent}^{\frac{1}{2}}. \quad \mathfrak{M} = 3,9424 \text{ gramm}. \quad \Theta = 1,8130 \cdot 10^{-14}$$

$$T_0 = 6,2422 \cdot 10^{-14}; \quad p_0 = 3,9424 \cdot 10^{-6} \text{ gramm cent}^{-1} \text{ sek}^{-2} = 3,8892 \cdot 10^{-12}$$

$$\text{Atmosphären}; \quad g = 2,5480 \cdot 10^{-7} \text{ cent sek}^{-2}.$$

\mathfrak{M} und g sind selbstverständlich 22 mal größer ausgefallen.

Diese kleine Gaskugel können wir beliebig abändern in bezug auf Masse und Volumen.

Bleibt die Oberflächenbedingung $p=0$, $T=0$ erfüllt, so können wir aus vollkommenen Gasen beliebig kleine Kugeln aus beliebig großer Masse, beliebig große Kugeln aus beliebig kleiner Masse aufbauen.

Dritter Abschnitt.

Integralbeziehungen.

Siebentes Kapitel.

Die kosmogenetischen Flächen.

§ 1. Wir haben die Frage zu entscheiden, wieviele unabhängige Variable uns zum Bau polytropfer Gaskugeln zur Verfügung stehen. In erster Linie können wir verfügen über die Natur des Gases (H) und die Klasse k , resp. n der Polytropen. Haben wir es mit adia-batischen Gaskugeln zu tun, so ist $k = z$ und somit durch die Wahl des Gases mitbestimmt. Zur Klärung der weiteren Verhältnisse be-dienen wir uns eines Diagrammes. (Fig. 6.)

Wir ziehen in der pv -Ebene eine Anzahl Polytropen $P_1 P_2 P_3 P_4 \dots$

der ausgewählten Klasse; alle laufen bei $v = \infty$, $\varrho = 0$ zusammen. Unter ihnen haben wir diejenige auszusuchen, welche die Zustandsänderung des Gases längs des Radius darstellt. Es sei die Polytrope P_2 . Wir bezeichnen diese wie bisher durch die an der Stelle $\varrho = v = 1$ herrschende Temperatur T_2 , die polytropen Temperatur Θ_k . Die Zahl möglicher Kugeln dieses Gases ist dadurch von ∞^2 auf ∞^1 herabgesunken. Zeichnen wir noch den Radius AB der Gaskugel,

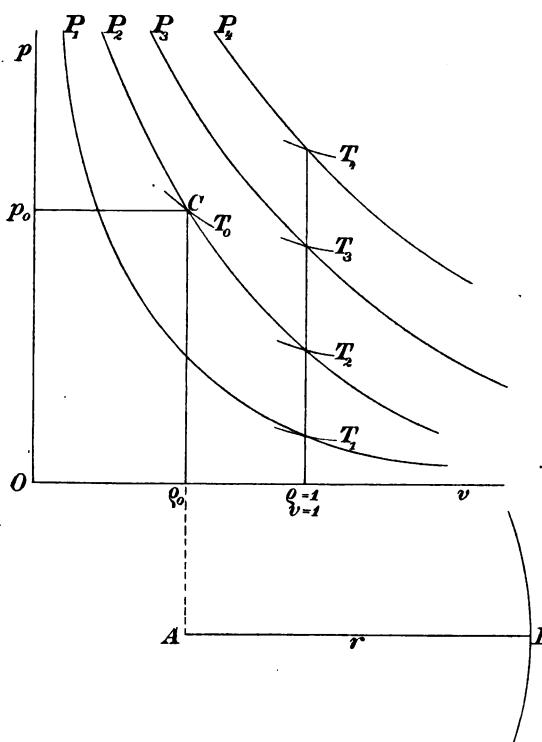


Fig. 6.

so entspricht der Oberfläche B der unendlich ferne Punkt der v -Achse mit den Werten $\varrho = 0$, $p = 0$, $T = 0$. Gehen wir von der Oberfläche nach Innen, so treffen wir auf Größen p , ϱ , T , die wir ermitteln, wenn wir uns auf der ausgewählten Polytropen nach links bewegen, und zwar in einem Tempo, das sich darnach richtet, wie geschwind wir r gegen A zu durchwandern. Dem Mittelpunkte A muß ein bestimmter Punkt C auf P_2 entsprechen; A und C erreichen wir zu gleicher Zeit. Durch die Lage von C auf P_2 sind

p_0 , ϱ_0 , T_0 und die Funktion $u = Uu_1$ im Mittelpunkte gegeben. (Liegt der Punkt C bei $\varrho > 1$, so treffen wir in der Kugel eine Stelle, deren Temperatur $T = \Theta_k$ ist; im andern Falle können wir eine solche Temperatur durch polytropen Kompression erreichen.) Ist die Lage des Punktes C gegeben, und somit U , so können wir aus der ermittelten Lösung $u_1 = f(r_1)$ die Größen u , p , ϱ , T für jede Stelle der Kugel berechnen; die Gaskugel ist dann vollständig bekannt. Ist die Natur des Gases und die Polytropenklasse gegeben, also das chemische und physikalische Gesetz des Aufbaus bekannt, so läßt sich aus der doppelt

unendlichen Mannigfaltigkeit möglicher Gaskugeln jede einzelne durch die Angabe von Θ_k und die Lage von C herausgreifen. C ist bestimmt durch eine der Größen p_0 , ϱ_0 , T_0 , also auch durch U . Dies können wir nun sofort allgemeiner fassen und erhalten folgenden Satz, der von weittragender Bedeutung ist:

Ist die Gasart und die Polytropenklasse gegeben, so ist jede der ∞^2 möglichen Gaskugeln bestimmt durch die Angabe zweier Größen, aus denen sich Θ_k und U berechnen lassen.

Aus der großen Zahl allgemeiner Gesetze und bequemer Rechenformeln, die sich aus diesem Satze ableiten lassen, seien einige der wichtigsten angeführt.

§ 2. Sind die Gasart und k gegeben, so sind durch die Lage des Punktes C wie gezeigt, U und Θ_k bestimmt. Da zwei der Größen p_0 , ϱ_0 , T_0 den Punkt C festlegen, so ist die Gaskugel durch zwei dieser Größen bestimmt.

Eine polytrope Gaskugel von gegebener Gasart und Polytropenklasse ist durch zwei der Größen Druck, Dichte, Temperatur des Mittelpunktes, eindeutig bestimmt.

In erster Linie suchen wir den Radius einer Kugel in seiner Abhängigkeit vom Zustande derselben im Mittelpunkte. Wir hatten Gleichung (61) und Gleichung (B) $\Re = \frac{1}{U^{\frac{n-1}{2}} \alpha} r_{1(u_1=0)}$ also

$$\Re^2 = \frac{U^{1-n} \Theta_k H \frac{k}{k-1}}{4\pi G} r_{1(u_1=0)}^2.$$

Anderseits ist Gleichung (D-E) S. 69

$$T = U u_1 \Theta_k, \quad p = U^{u+1} u_1^{u+1} H \Theta_k.$$

Um T_0 und p_0 zu bilden haben wir $u_1 = 1$ zu setzen und erhalten durch leichte Transformation

$$U^{1-n} \Theta_k = \frac{T_0^2 H}{p_0 (u_1^{1-n} - 1)}$$

und dies in den Ausdruck für \Re^2 eingesetzt:

$$(95) \quad \frac{p_0 \Re^2}{T_0^2} = \frac{\frac{k}{k-1} H^2 (u_1^{1-n} - 1)}{4\pi G} r_{1(u_1=0)}^2 = C_{(p, T, \Re)} \text{ gramm cent sek}^{-2}.$$

Die Radien von Gaskugeln, die aus Gasen von gleicher Normaldichte nach derselben Polytropen gebaut sind, verhalten sich bei gleichem Mittelpunktsdrucke wie die Quadrate der Mittelpunktstemperaturen, bei gleichen Mittelpunktstemperaturen umgekehrt wie die Quadratwurzeln

aus den Mittelpunktsdrucken; bei gleich großen Kugeln sind sich Druck und Quadrat der Temperatur im Mittelpunkt proportional.

Wir geben in der folgenden Tabelle die Werte von $C_{(p, T, R)}$ für adiabatische Gaskugeln aus ein-, zwei- und dreiatomigen Gasen, wobei wir auch jedesmal ein fiktives Gas mit der Gaskonstanten $H = 1$ anführen. Diese Werte von $C_{(p, T, R)}$ gelten dann auch für polytrope Kugeln beliebiger Gase von derselben Normaldichte, wenn wir $k = \alpha$ setzen. Außerdem geben wir noch die Werte von $C_{(p, T, R)}$ für polytrope Kugeln von fiktiven Gasen mit $H = 1$ cent² sek⁻². Für $n = 5$, $k = \frac{6}{5}$ werden R und $C_{(p, T, R)}$ unendlich.

	$C_{(p, T, R)}$ gramm cent sek ⁻²	$\lg C_{(p, T, R)}$
<i>Einatomige Gase</i> $n = 1,5$; $\alpha = \frac{5}{3}$		
	$H = 1$ $3,9949 \cdot 10^7$	$0,60162 + 7$
<i>Dissoziierter Wasserstoff</i> ($H_H = 8,2962 \cdot 10^7$)	$2,7503 \cdot 10^{23}$	$0,43938 + 23$
<i>Zweiatomige Gase</i> $n = 2,5$; $\alpha = \frac{7}{5}$		
	$H = 1$ $1,2276 \cdot 10^8$	$0,08907 + 8$
<i>Luft</i> ($H_L = 2,8705 \cdot 10^6$)	$1,0113 \cdot 10^{21}$	$0,00499 + 21$
<i>Wasserstoff</i> ($H_H = 4,1481 \cdot 10^7$)	$2,1124 \cdot 10^{23}$	$0,32477 + 23$
<i>Dreiatomige Gase</i> $n = 3$, $\alpha = \frac{4}{3}$		
	$H = 1$ $2,2825 \cdot 10^8$	$0,35842 + 8$
<i>Gas vom Molekulargewicht des Wasserdampfes</i> $H_{H_2O} = 4,6090 \cdot 10^6$	$4,8489 \cdot 10^{21}$	$0,68564 + 21$
$n = 0$ $k = \infty$	$H = 1$ $7,1717 \cdot 10^8$	$0,85563 + 6$
$n = \frac{1}{2}$ $k = 3$	$H = 1$ $1,3555 \cdot 10^7$	$0,13212 + 7$
$n = 1$ $k = 2$	$H = 1$ $2,3494 \cdot 10^7$	$0,37280 + 7$
$n = 2$ $k = \frac{3}{2}$	$H = 1$ $6,7900 \cdot 10^7$	$0,83193 + 7$
$n = 4$ $k = \frac{5}{4}$	$H = 1$ $1,6926 \cdot 10^9$	$0,22856 + 9$
$n = 4,5$ $k = \frac{11}{9}$	$H = 1$ $6,7919 \cdot 10^9$	$0,83199 + 9$
$n = 4,9$ $k = \frac{59}{49}$	$H = 1$ $2,0248 \cdot 10^{11}$	$0,30638 + 11$

Ersetzen wir in (95) p_0 durch $\varrho_0 H T_0$, so erhalten wir

$$(96) \quad \frac{\varrho_0 R^2}{T_0} = \frac{\frac{k}{k-1} H(u_1^{n-1} - 1)}{4\pi G} \quad r_1^2(u_1=0) = C_{(\varrho, T, R)} \text{ gramm cent}^{-1}.$$

Bei Kugeln, die aus Gasen von gleichem Molekulargewicht nach derselben Polytropen gebaut sind, verhalten sich die Mittelpunktsquerschnitte bei gleichen Mittelpunktsdichten, wie die Mittelpunktstemperaturen, bei gleichen Mittelpunktstemperaturen umgekehrt wie die Mittelpunktsdichten; haben die Kugeln gleichen Radius, so sind sich Dichte und Temperatur im Mittelpunkte proportional.

Für Gaskugeln aus Gasen mit $H=1$ haben die Konstanten $C_{(\varrho, T, \Re)}$ dieselben Zahlenwerte, wie die entsprechenden $C_{(p, T, \Re)}$.

Für die speziell ausgewählten Gase ergeben sich, für $k = \kappa$ (adiabatisch)

$$C_{(\varrho, T, \Re)} \text{ gramm cent}^{-1} \lg C_{(\varrho, T, \Re)}$$

Einatomige Gase $\kappa = \frac{5}{3}$, $n = 1,5$

Dissoziierter Wasserstoff

$$(H_H = 8,2962 \cdot 10^7) \quad 3,3152 \cdot 10^{15} \quad 0,52050 + 15$$

Zweiatomige Gase $\kappa = \frac{7}{5}$; $n = 2,5$

$$\text{Atmosphärische Luft } (H_L = 2,8705 \cdot 10^6) \quad 3,5240 \cdot 10^{14} \quad 0,54703 + 14$$

$$\text{Wasserstoff } (H_{H^2} = 4,1481 \cdot 10^7) \quad 5,0924 \cdot 10^{15} \quad 0,70692 + 15$$

Dreiatomige Gase $\kappa = \frac{4}{3}$; $n = 3$.

Gas vom Molekulargewicht des Wasserdampfes ($H_{H_2O} = 4,6090 \cdot 10^6$) $1,0520 \cdot 10^{15} \quad 1,02203 + 15$

Endlich können wir noch bilden

$$(97) \quad \frac{\varrho_0 \cdot \Re^2}{p_0} = \frac{k}{k-1} \frac{(u_1^{n-1} - 1)}{4\pi G} r_{(u_1=0)}^3 = C_{(\varrho, p, \Re)} \text{ gramm cent}^{-3} \text{ sek}^{+2}.$$

Die Gaskonstante H ist in diesem Ausdrucke nicht mehr enthalten. Bauen wir aus beliebigen Gasen Kugeln nach derselben Polytropen, so verhalten sich die Mittelpunktsquerschnitte bei gleichen Mittelpunktsdichten wie die Mittelpunktsdrücke, bei gleichen Mittelpunktsdrücken umgekehrt wie die Quadrate der Mittelpunktsdichten; in gleich großen Gaskugeln sind im Mittelpunkt Druck und Quadrat der Dichte sich proportional.

Die Konstanten $C_{(\varrho, p, \Re)}$ haben die gleichen Zahlenwerte wie die entsprechenden $C_{(p, T, \Re)}$ für $H = 1$.

§ 3. Im vorigen Paragraphen haben wir U und Θ_k durch p_0 , ϱ_0 , resp. T_0 ersetzt. Wir behalten nun Θ_k bei und ersetzen nur U .

Wieder ausgehend von der Formel $\Re^2 = \frac{U^{1-n}}{k-1} \frac{k}{4\pi G} H \Theta_k$ — $r_{(u_1=0)}$ er-

setzen wir U durch $\frac{T_0}{\Theta_k}$ und erhalten

$$(98) \quad \frac{T_0^{n-1} \mathfrak{R}^2}{\Theta_k^n} = \frac{k}{k-1} \frac{H}{4\pi G} r_1^2(u_1=0) = C_{(\Theta_k, T, \mathfrak{R})} \text{ cent}^2.$$

Diese Konstanten $C_{(\Theta_k, T, \mathfrak{R})}$ haben dieselben Zahlenwerte wie oben $C_{(\varrho, T, \mathfrak{R})}$. Das Ähnlichkeitsgesetz läßt sich leicht formulieren.

Um den außerordentlichen Einfluß der Polytropenklasse zu zeigen, wählen wir adiabatische Gaskugeln ($k = n$) und erhalten den Satz:

Bauen wir adiabatische Kugeln auf die Art, daß sie an Stellen gleicher Dichte gleiche Temperatur besitzen, so verhalten sich bei einatomigen ($n = 1,5$), zweiatomigen ($n = 2,5$), dreiatomigen ($n = 3$) Gasen die Radien umgekehrt wie die Mittelpunktstemperaturen in den Potenzen $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ resp. 1. Sinkt die Mittelpunktstemperatur auf $\frac{1}{16}$ ihres Wertes bei konstantem Θ , so steigt der Radius auf das 2-, 8-, resp. 16-fache.

Setzen wir in der Ausgangsformel $\varrho_0 = U^n(u_1^n = 1)$, so ergibt sich

$$(99) \quad \frac{\varrho_0}{\Theta_k} \frac{\frac{n-1}{n} \mathfrak{R}^2}{\Theta_k^n} = \frac{k}{k-1} \frac{H(u_1^{n-1} = 1)}{4\pi G} r_1^2(u_1=0) = C_{(\Theta_k, \varrho, \mathfrak{R})} \text{ gramm cent}^{-1}.$$

Die Konstanten $C_{(\Theta_k, \varrho, \mathfrak{R})}$ haben wieder dieselben Zahlenwerte wie $C_{(\varrho, T, \mathfrak{R})}$.

Bauen wir aus demselben Gase adiabatische Kugeln mit gleichem Θ_k auf, so verhalten sich bei ein-, zwei- resp. dreiatomigen Gasen deren Radien umgekehrt wie die Mittelpunktsdichte in der Potenz $\frac{1}{6}, \frac{3}{10}, \text{ resp. } \frac{1}{3}$. Steigt die Mittelpunktsdichte auf das 64-fache ihres Wertes an, doch so, daß an Stelle gleicher Dichte dieselbe Temperatur bestehen bleibt, so sinkt bei einatomigen Gasen der Radius auf die Hälfte, bei dreiatomigen Gasen auf $\frac{1}{4}$ seines Wertes.

Ersetzen wir schließlich im letzten Ausdrucke ϱ_0 mit Hilfe der Beziehung $p_0 = \varrho_0^k H \Theta_k$, so erhalten wir

$$(100) \quad \left(\frac{p_0}{H} \right)^{\frac{n-1}{n+1}} \frac{\mathfrak{R}^2}{\Theta_k^{n+1}} = \frac{k}{k-1} \frac{H(u_1^{n-1} = 1)}{4\pi G} r_1^2(u_1=0) = C_{(\Theta_k, p, \mathfrak{R})} \text{ gramm cent}^{-1}.$$

Die Konstanten $C_{(\Theta_k, p, \mathfrak{R})}$ haben wiederum dieselben Zahlenwerte wie

die entsprechenden $C_{(\theta, \tau, \mathfrak{M})}$. Für ein-, zwei-, resp. dreiatomige Gase hat $\frac{n-1}{n+1}$ die Werte $\frac{1}{5}, \frac{3}{7}$, resp. $\frac{1}{2}$.

§ 4. Der Umstand, daß zwei passend gewählte, unabhängige Variable eine Gaskugel, deren Gasart und Polytropenklasse gegeben ist, vollständig bestimmen, macht es möglich, drei passend gewählte Zustandsgrößen derselben in einer Gleichung zusammenzuschließen, die man als Gleichung einer Fläche auffassen kann. So können die Gleichungen der beiden vorangehenden Paragraphen als Flächen-gleichungen interpretiert werden. Alle diese Flächen kann man, da sie die Zustandsänderung, die eine Wärme ausstrahlende Gaskugel erleidet, zur Darstellung bringen, passend als *kosmogenetische Flächen* bezeichnen.

Von allen kosmogenetischen Flächen hat diejenige die größte Bedeutung, zu deren Ableitung wir nun übergehen.

Wir hatten für die bis zum Radius r eingeschlossene Masse M den Ausdruck Gleichung (86)

$$M = -\frac{k}{k-1} \frac{H\Theta_k}{G} \sqrt{\frac{k}{k-1} \frac{H\Theta_k}{4\pi G}} U^{\frac{8-n}{2}} r_1^{\frac{n}{2}} \frac{du_1}{dr_1} \text{ gramm.}$$

Und aus A. Seite 69

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{\frac{n-1}{n-1} r_1}, \quad \alpha^2 = \frac{4\pi G}{\frac{k}{k-1} H\Theta_k} \quad \text{erhalten wir} \\ U^{\frac{8-n}{2}} &\alpha \\ U^{n-1} &= \frac{r_1^{\frac{n}{2}}}{r^{\frac{n}{2}}} \frac{k}{k-1} \frac{H\Theta_k}{4\pi G}. \end{aligned}$$

Setzen wir dies in Gleichung (86) ein, so erhalten wir nach leichter Umformung, (wobei wir $\sqrt{\left(\frac{du_1}{dr_1}\right)^2}$ stets positiv nehmen),

$$(101) \quad \begin{cases} \frac{\Theta_k}{M^{\frac{n-1}{n}} r^{\frac{3-n}{n}}} = \frac{(4\pi)^{\frac{1}{n}} G}{\left(\frac{k}{k-1}\right) H} \frac{1}{r_1^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{du_1}{dr_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}} \\ \frac{\Theta_k}{M^{2-k} r^{3k-4}} = \frac{(4\pi)^{k-1} G}{\frac{k}{k-1} H} \frac{1}{r_1^k \left(\frac{du_1}{dr_1}\right)^{2-k}} \text{ gramm}^{k-2} \text{ cent}^{4-3k} \end{cases}$$

und für die Gesamtkugel

$$(102) \quad \frac{\Theta_k}{M^{2-k} \mathfrak{M}^{3k-4}} = \frac{(4\pi)^{k-1} G}{\frac{k}{k-1} H} \frac{1}{\left(r_1^k \left(\frac{du_1}{dr_1}\right)^{2-k}\right)_{u_1=0}} = C_{\Theta, \mathfrak{M}, \mathfrak{R}} \text{ gramm}^{k-2} \text{ cent}^{4-3k}.$$

Die Bedeutung dieser Fläche liegt darin, daß sie bestimmt ist durch Masse und Radius der Kugel, sowie durch deren polytropen Temperatur,

der einzigen Größe, die durch die ganze Masse hindurch konstant ist. Für adiabatische Gaskugeln kann statt derselben nach Gleichung (41) der Entropiegehalt eingeführt werden. Modellieren wir diese Fläche für die in Betracht kommende Gasart und Polytropenklasse, so kann die betreffende Gaskugel in einem eindeutig bestimmten Punkte derselben untergebracht werden; ändert sie sich im Laufe der Zeit durch Wärmeausstrahlung, so legt sie auf derselben einen Weg zurück, entsprechend dem Schnitt der Fläche mit der Ebene $\mathfrak{M} = \text{konst}$. Nun gilt aber die Flächengleichung nicht nur für die Gesamtmasse und den ganzen Radius, sondern nach Gleichung (101) für die Masse M , die innerhalb r eingeschlossen ist, wobei nur die rechte Seite ihren Zahlenwert ändert; derselbe lässt sich aus den berechneten Tabellen entnehmen, indem man $\frac{\mathfrak{R}}{r_{1(u_i=0)}}$, das Übersetzungsverhältnis von r_1 in r , bildet und so zu jedem r das zugehörige r_1 findet. Konstruiert man für eine bestimmte Gasart und Polytropenklasse nicht nur die kosmogenetische Fläche nach Gleichung (102), sondern Flächen nach Gleichung (101) in genügender Zahl, indem jeder Stelle des Radius ein Blatt entspricht, so lässt sich mittels dieses Blättersystems der innere Aufbau der Kugel zur Darstellung bringen. Ändert sich die Gaskugel durch Wärmeaustausch, so wird die Veränderung durch die ganze Kugel hindurch zum Ausdruck kommen in den Schnitten dieses Blättersystems mit der Ebene \mathfrak{M} resp. $M = \text{konst}$.

§ 5. Wir stellen die Werte der Konstante $C_{\Theta_k, \mathfrak{M}, \mathfrak{R}}$ zusammen (für dieselben Verhältnisse, in denen wir § 2 die Konstante $C_{(p, T, \mathfrak{R})}$ bildeten).

$$\frac{C_{(\Theta_k, \mathfrak{M}, \mathfrak{R})}}{\text{gramm}^{k-2}, \text{cent}^{4-8k}} \lg C_{(\Theta_k, \mathfrak{M}, \mathfrak{R})}$$

<i>Einatomige Gase.</i> $n = 1,5$	$\kappa = \frac{5}{3}$	$H = 1$	$2,8206 \cdot 10^{-8}$	$0,45034 - 8$
Dissoziierter Wasserstoff.	$H_H = 8,2962 \cdot 10^7$	$3,4000 \cdot 10^{-16}$	$0,53146 - 16$	
<i>Zweiatomige Gase.</i> $n = 2,5$	$\kappa = \frac{7}{5}$	$H = 1$	$2,3260 \cdot 10^{-8}$	$0,36662 - 8$
Luft.	$H_L = 2,8705 \cdot 10^6$	$8,1031 \cdot 10^{-15}$	$0,90866 - 15$	
Wasserstoff.	$H_{H_2} = 4,1481 \cdot 10^7$	$5,6075 \cdot 10^{-16}$	$0,74877 - 16$	
<i>Dreiatomige Gase.</i> $n = 3$.	$\kappa = \frac{4}{3}$	$H = 1$	$2,4256 \cdot 10^{-8}$	$0,38481 - 8$

$$\frac{C_{(\Theta_k, M, R)}}{\text{gramm}^{k-2}, \text{cent}^{4-k}} \lg C_{(\Theta_k, M, R)}$$

Dichte des Wasserdampfs.

	$H_{H^2 O} = 4,6090 \cdot 10^6$	$5,2624 \cdot 10^{-15}$	$0,72120 - 15$
$n = \frac{1}{2}, k = 3$	$H = 1$	$1,6790 \cdot 10^{-7}$	$0,22506 - 7$
$n = 1, k = 2$	$H = 1$	$4,2387 \cdot 10^{-8}$	$0,62723 - 8$
$n = 2, k = \frac{3}{2}$	$H = 1$	$2,4288 \cdot 10^{-8}$	$0,38539 - 8$
$n = 4, k = \frac{5}{4}$	$H = 1$	$3,1659 \cdot 10^{-8}$	$0,50049 - 8$
$n = 4,5, k = \frac{11}{9}$	$H = 1$	$4,3992 \cdot 10^{-8}$	$0,64337 - 8$
$n = 4,9, k = \frac{59}{49}$	$H = 1$	$8,9266 \cdot 10^{-8}$	$0,95069 - 8$

Anmerkung: Für alle Kugeln gleicher Klasse von gleicher Masse und gleichem Radius ist $H\Theta_k$ konstant!

§ 6. Für einige spezielle Werte von n erfordert die Flächengleichung besondere Bemerkungen.

Für $n = 0, k = \infty$ ($\rho = \text{konst.}$) versagt bekanntlich der Begriff der polytropen Temperatur. Da wir allgemein haben $T = \rho^{k-1}\Theta$, $\Theta^n = \frac{T^n}{\rho}$, so ist $\lim(\Theta^n)_{n=0} = \frac{1}{\rho}$, und für $\lim n = 0$ wird infolgedessen die Gleichung (101)

$$\frac{M}{\rho r^3} = - \frac{4\pi \frac{du_1}{dr_1}}{r_1}$$

und, da (Seite 78) $u_1 = 1 - \frac{r_1^2}{6}$, so wird Gleichung (102)

$$\frac{M}{\rho R^3} = \frac{4\pi}{3}.$$

Für $n = 1, k = 2$ und $n = 3, k = \frac{4}{3}$ lauten diese Flächengleichungen

$$\frac{\Theta_2}{R^2} = C_{(\Theta_2, M, R)}, \text{ resp. } \frac{\Theta_{\frac{4}{3}}}{R^{\frac{9}{2}}} = C_{\left(\Theta_{\frac{4}{3}}, M, R\right)},$$

die erstere ist also unabhängig von M , die andere von R ; das heißt:

In der polytropen Kugel $k = 2$ von gegebenem Radius ist die Masse, in der polytropen Kugel $k = \frac{4}{3}$ von gegebener Masse ist der Radius unabhängig von der polytropen Temperatur Θ_k .

Dies alles konnten wir voraussehen. Wir hatten Gleichung (89)

$$\frac{\rho_0}{\rho} = - \frac{r_1}{3 \frac{du_1}{dr_1}}, \text{ die wir auch schreiben können a)} \frac{\rho_0 R^3}{M} = - \left(\frac{r_1}{4\pi \frac{du_1}{dr_1}} \right)_{u_1=0}.$$

Enden, Gaskugeln.

Ferner lehrt Gleichung (86), daß für $n = 3$ die Masse \mathfrak{M} unabhängig ist von U , also von ϱ_0 ; und für $n = 1$ haben wir Seite 92 gezeigt, daß der Radius \mathfrak{R} unabhängig ist von ϱ_0 . Da wir Θ_k und ϱ als die beiden Bestimmungsstücke wählen können, so sehen wir, daß für $k = 2$, die Masse \mathfrak{M} nur Funktion von ϱ_0 , \mathfrak{R} nur Funktion von Θ_2 sein kann; und für $k = \frac{4}{3}$ der Radius \mathfrak{R} nur Funktion von ϱ_0 , die Masse \mathfrak{M} nur Funktion von $\frac{\Theta_4}{3}$ sein kann. In der Flächengleichung hat also im ersten Falle \mathfrak{M} , im letzten Falle \mathfrak{R} zu fehlen.

§ 7. Die Gleichung der kosmogenetischen Fläche $C_{(\Theta_k, \mathfrak{M}, \mathfrak{R})}$ zeigt, daß wir die polytropen Gaskugeln in zwei Klassen einteilen können, von denen die eine wieder in zwei Unterabteilungen zerfällt. Die beiden Hauptklassen sind definiert durch $k > \frac{4}{3}$, $n < 3$ und $k < \frac{4}{3}$, $n > 3$.

Der fundamentale Unterschied beider Klassen besteht darin, daß bei konstanter Masse für $k > \frac{4}{3}$ sich Θ_k in gleichem Sinne wie \mathfrak{R} , für $k < \frac{4}{3}$ aber in umgekehrtem Sinne ändert.

Zieht sich eine Gaskugel von konstanter Masse zusammen, so treffen wir an Stellen konstant bleibender Dichte für $k > \frac{4}{3}$ stets niedrigere, für $k < \frac{4}{3}$ stets höhere Temperaturen an. Dasselbe gilt auch für die Drucke.

Die Gaskugel $k = \frac{4}{3}$ kann ihren Radius ohne Beeinflussung von Θ_k ändern. Wir werden hierauf beim Stadium des Kontraktionsprozesses zurückkommen.

Die Klasse $k > \frac{4}{3}$ zerfällt wieder in die beiden Unterabteilungen $k > 2$ und $\frac{4}{3} < k < 2$; an der Grenze beider steht die Gaskugel $k = 2$. Bauen wir Gaskugeln von gleichem Radius auf, so haben wir für $k < 2$ die Stellen gleicher Dichte um so höher zu temperieren; (unter stärkeren Druck zu setzen) je größer ihre Masse \mathfrak{M} ist; für $k > 2$ gehören zu größeren Massen an Stelle gleicher Dichte tiefere Temperaturen und niedrigere Drucke. Die Gaskugel von konstantem Radius \mathfrak{R} können wir bei $k = 2$ und gleicher Temperatur an Stellen gleicher Dichte mit beliebiger Masse anfüllen. (Selbstverständlich treffen wir dann größere Dichten an, wenn die Masse zunimmt.) Da aber in erster Linie nicht der Aufbau von Gaskugeln, sondern deren

Änderung im Laufe der Zeit (\mathfrak{M} konstant, \mathfrak{R} variabel) interessiert, so ist die Scheidung in diese beiden Unterabteilungen von geringerer Bedeutung.

§ 8. Aus der Gleichung der eben behandelten kosmogenetischen Fläche können wir leicht drei weitere, überaus wichtige Flächen-gleichungen ableiten. Wir ersetzen in (101) Θ_k aus der bereits benutzten Gleichung

$$U^{n-1} = \frac{\mathfrak{r}_1^2}{r^2} \frac{k}{k-1} \frac{H\Theta_k}{4\pi G},$$

erhalten nach leichter Transformation

$$(103) \quad \frac{U^n r^3}{M} = - \frac{\mathfrak{r}_1}{4\pi} \frac{du_1}{d\mathfrak{r}_1},$$

und benutzen wir die Beziehung $\varrho = U^n u^n$, $\varrho_0 = U^n (u_1^n = 1)$, so erhalten wir die wichtigen Gleichungen

$$(104) \quad \frac{\varrho_0 r^3}{M} = - \frac{\mathfrak{r}_1 (u_1^n = 1)}{4\pi} \frac{du_1}{d\mathfrak{r}_1},$$

$$(105) \quad \frac{\varrho_0 \mathfrak{R}^3}{M} = - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mathfrak{r}_1 (u_1^n = 1)}{\frac{du_1}{d\mathfrak{r}_1}} \right)_{u_1=0} = C_{(\varrho_0, \mathfrak{R}, \mathfrak{M})}.$$

(Diese Gleichung hätten wir aus Gleichung (89) ableiten können.)

Die Gaskonstante ist in der rechten Seite nicht enthalten. Für dieselbe Polytropenklasse hat $C_{(\varrho_0, \mathfrak{R}, \mathfrak{M})}$ für alle Gase denselben Wert. Wir stellen für die berechneten Lösungen $u_1 = f(\mathfrak{r}_1)$ die Werte von $C_{(\varrho_0, \mathfrak{R}, \mathfrak{M})}$ zusammen.

		$C_{(\varrho_0, \mathfrak{R}, \mathfrak{M})}$	$\lg C_{(\varrho_0, \mathfrak{R}, \mathfrak{M})}$
$n = 0$	$k = \infty$	$\frac{3}{4\pi}$	0,37791 - 1
$n = \frac{1}{2}$	$k = 3$	0,43835	0,64182 - 1
$n = 1$	$k = 2$	0,78540	0,89509 - 1
$n = 1,5$	$k = \frac{5}{3}$	1,4325	0,15609
$n = 2$	$k = \frac{3}{2}$	2,7206	0,43466
$n = 2,5$	$k = \frac{7}{5}$	5,7479	0,75951
$n = 3$	$k = \frac{4}{3}$	12,980	1,11327 + 1
$n = 4$	$k = \frac{5}{4}$	$1,4860 \cdot 10^3$	0,17208 + 3
$n = 4,5$	$k = \frac{11}{9}$	$1,5224 \cdot 10^3$	0,18253 + 3
$n = 4,9$	$k = \frac{59}{49}$	$2,2317 \cdot 10^5$	0,34863 + 5.

Ersetzen wir in (103) U^n durch die Beziehung $T = U u_1 \Theta_k$, $T_0 = U(u_1 = 1)\Theta_k$ und eliminieren Θ_k mit Hilfe der Gleichung (101), so erhalten wir

$$(106) \quad \frac{T_0 \cdot r}{M} = - \frac{G}{\frac{k}{k-1} H r_1 \left(\frac{du_1}{dr_1} \right)} \text{ gramm}^{-1} \text{ cent.}$$

$$(107) \quad \frac{T_0 \mathfrak{R}}{\mathfrak{M}} = - \frac{G}{\frac{k}{k-1} H \left(r_1 \frac{du_1}{dr_1} \right)_{u_1=0}} = C_{(T_0, \mathfrak{R}, \mathfrak{M})} \text{ gramm}^{-1} \text{ cent.}$$

Wir stellen wieder Werte für die Flächenkonstanten zusammen, für $H = 1 \text{ cent}^2 \text{ sek}^{-2}$

$n = 0$	$k = \infty$	$C_{(T_0, \mathfrak{R}, \mathfrak{M})}$ gramm $^{-1}$ cent	$\lg C_{(T_0, \mathfrak{R}, \mathfrak{M})}$
		3,3288.10 $^{-8}$	0,52229 - 8
$n = \frac{1}{2}$	$k = 3$	3,2263.10 $^{-8}$	0,50870 - 8
$n = 1$	$k = 2$	3,3288.10 $^{-8}$	0,52229 - 8
$n = 1,5$	$k = \frac{5}{3}$	3,5843.10 $^{-8}$	0,55440 - 8
$n = 2$	$k = \frac{3}{2}$	4,0062.10 $^{-8}$	0,60273 - 8
$n = 2,5$	$k = \frac{7}{5}$	4,6817.10 $^{-8}$	0,67040 - 8
$n = 3$	$k = \frac{4}{3}$	5,7003.10 $^{-8}$	0,75590 - 8
$n = 4$	$k = \frac{5}{4}$	1,1054.10 $^{-7}$	0,04352 - 7
$n = 4,5$	$k = \frac{11}{9}$	2,2418.10 $^{-7}$	0,35060 - 7
$n = 4,9$	$k = \frac{59}{49}$	1,1019.10 $^{-6}$	0,04213 - 6.

Wenn wir schließlich noch die Gleichungen (104) und (106) miteinander multiplizieren und $\varrho_0 T_0$ durch $\frac{p_0}{H}$ ersetzen, so erhalten wir

$$(108) \quad \frac{p_0 r^4}{M^2} = \frac{G(u_1^n = 1)}{4 \pi \frac{k}{k-1} \left(\frac{du_1}{dr_1} \right)^2} \text{ gramm}^{-1} \text{ cent}^3 \text{ sek}^{-2}$$

$$(109) \quad \frac{p_0 \mathfrak{R}^4}{\mathfrak{M}^2} = \frac{G(u_1^n = 1)}{4 \pi \frac{k}{k-1} \left(\frac{du_1}{dr_1} \right)^2} = C_{(p_0, \mathfrak{R}, \mathfrak{M})} \text{ gramm}^{-1} \text{ cent}^3 \text{ sek}^{-2}.$$

Wieder tritt rechts nur die Polytropenklasse, nicht die Gaskonstante auf. Merkwürdigerweise fehlt auch die unabhängige Variable r_1 . Wir stellen wieder Werte von $C_{(p_0, \mathfrak{R}, \mathfrak{M})}$ zusammen.

$n = 0$	$k = \infty$	$C_{(p_0, R, M)}$ gramm $^{-1}$ cent 3 sek $^{-2}$	$\lg C_{(p_0, R, M)}$
$n = \frac{1}{2}$	$k = 3$	$1,4142 \cdot 10^{-8}$	$0,15052 - 8$
$n = 1$	$k = 1$	$2,6145 \cdot 10^{-8}$	$0,41738 - 8$
$n = 1,5$	$k = \frac{5}{3}$	$5,1344 \cdot 10^{-8}$	$0,71049 - 8$
$n = 2$	$k = \frac{3}{2}$	$1,0899 \cdot 10^{-7}$	$0,03739 - 7$
$n = 2,5$	$k = \frac{7}{5}$	$2,6911 \cdot 10^{-7}$	$0,42993 - 7$
$n = 3$	$k = \frac{4}{3}$	$7,3990 \cdot 10^{-7}$	$0,86917 - 7$
$n = 4$	$k = \frac{5}{4}$	$1,6432 \cdot 10^{-6}$	$0,21570 - 5$
$n = 4,5$	$k = \frac{11}{9}$	$3,4129 \cdot 10^{-4}$	$0,53313 - 4$
$n = 4,9$	$k = \frac{59}{49}$	$2,4590 \cdot 10^{-1}$	$0,39076 - 1.$

§ 9. Die Flächen (105), (107), (109) können wir modellieren; jeder polytropen Gaskugel entspricht eine bestimmte Stelle derselben, die sie bei Wärmeaustausch längs der Schnittlinie mit der Ebene $M = \text{konst.}$ verläßt. Zu jeder dieser Ebenen können wir mit Hilfe der Gleichungen (104), (106), (108) ein System von Blättern konstruieren, das ein Bild der Massenanordnung im Innern gibt. Projektieren wir die Schnitte dieser Blättersysteme mit den Ebenen $M_1 = \text{konst.}$ $M_2 = \text{konst.}$ usw. auf die ϱ_0, r ; T_0, r , resp. p_0, r -Ebene, so können diese Schnittkurven aus der Schnittkurve der Ebene $M = \text{konst.}$, wie die Flächengleichung zeigt, durch Verkleinerung dargestellt werden. Schneiden wir diese Kurven durch beliebige Senkrechte auf der Achse ϱ_0, p_0 , resp. T_0 , so werden dadurch auf der r -Achse Stücke bestimmt, deren gegenseitiges Verhältnis sich bei Volumänderung der Gaskugel nicht ändert.

Daraus folgt wieder der bereits Seite 71 abgeleitete fundamentale Satz:

„Ändert eine polytrope Gaskugel ihren Radius, wobei sie stets nach derselben Polytropenklasse im Gleichgewichte bleibt, so erfolgt Zusammenziehung und Ausdehnung gleichförmig. Die Gasmassen verschieben sich nicht längs des sich ändernden Radius, sondern bleiben auf demselben haften.“

Weiter können wir den Gleichungen (105), (107), (109) den wichtigen Satz entnehmen:

Ändert eine polytrope Gaskugel auf derselben Polytropen ihren Radius, so ändert sich im Mittelpunkt die Dichte umgekehrt wie die dritte Potenz, die Temperatur umgekehrt wie die erste Potenz, der Druck umgekehrt wie die vierte Potenz des Radius.

Da aber, wie wir bei Diskussion der Differentialgleichung (I) gezeigt haben, für dieselben Teile der Abszisse r_1 die Ordinate u sich ändert wie der Wert für $r_1 = 0$, folgt, daß für dieselben Stellen auf dem sich ändernden Radius der Gaskugel ϱ, p, T sich nach demselben Gesetze ändern wie im Mittelpunkt. Da Kontraktion und Ausdehnung der Kugel aber gleichmäßig erfolgen, so gehören zu denselben Stellen des Radius dieselben Gasteilchen. Daraus folgt:

Ändert eine polytrope Gaskugel ihren Radius, so ändert jedes Gasteilchen derselben seine Dichte umgekehrt wie die dritte Potenz, seine Temperatur umgekehrt wie die erste Potenz, seinen Druck umgekehrt wie die vierte Potenz des Radius.

In eine Gleichung zusammengefaßt, gelten somit für jedes Teilchen die Beziehungen

$$(110) \quad -\frac{dR}{R} = \frac{1}{3} \frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{dT}{T} = \frac{1}{4} \frac{dp}{p}.$$

Da somit das Verhältnis der ϱ, T, p , der Teilchen bei Änderung des Radius und somit der polytropen Temperatur ungeändert bleibt, so folgt aus dem in Kap. II, § 10 abgeleiteten Lehrsatz, daß alle Teilchen eine polytrope Zustandsänderung durchmachen müssen. Der Exponent k derselben ist leicht zu finden. Integrieren wir die Gleichungen (110), so ergibt sich

$$T\varrho^{-\frac{1}{3}} = Tv^3 = \text{konst.}, \quad Tp^{-\frac{1}{4}} = \text{konst.}, \quad p^3\varrho^{-4} = p^3v^4 = \text{konst.}$$

Vgl. wir damit die Gleichung einer Polytrope: $Tv^{k-1} = \text{konst.}$, $T_p^{k+1-k} = \text{konst.}$, $pv^k = \text{konst.}$, so ergibt sich Übereinstimmung für $k = \frac{4}{3}$. Diese polytrope Zustandsänderung hatten wir als kosmogenetische Zustandsänderung bezeichnet. Wir haben somit wieder den bereits Seite 74 auf andere Weise abgeleiteten Satz:

Ändert eine polytrope Gaskugel ihren Radius, indem sie stets polytrope Gaskugel derselben Klasse bleibt, so macht jedes Teilchen eine kosmogenetische Zustandsänderung durch.

Achtes Kapitel.
Die Energetik des Kontraktionsprozesses.

§ 1. Um den Verlauf des Kontraktionsprozesses einer Gaskugel durchblicken zu können, ist volle Klarheit über die verschiedenen ins Spiel kommenden polytropen Zustandsänderungen erforderlich. Wir benutzen wieder ein Diagramm (Fig. 7) und stellen durch die Lage des Punktes P in der $p v$ -Ebene den Zustand eines beliebig herausgegriffenen Gasteilchens der Gas- kugel dar.

Durch P legen wir eine Polytrope mit dem Exponenten $\frac{4}{3}$, die kosmogenetische Kurve; sie schneidet auf der Senkrechten $\varrho = 1$ die kosmogenetische Temperatur $\Theta_{\frac{4}{3}}$ des Teilchens P ab. Die kosmogenetischen Linien sind die einzigen Kurven, die unabhängig sind von der Polytropen, nach der wir die Kugel aufbauen, sowie vom Molekulargewicht und der Atomzahl des zum Aufbau benutzten Gases. Würden wir die $p v$ -Ebene mit der Schar Polytropen $k = \frac{4}{3}$ überziehen, so könnten wir dieselbe zum Studium des Kontraktionsprozesses jeder möglichen Gaskugel verwenden. Zwar könnten wir auch die isothermen Polytropen, $T = \text{konst.}$, ($k = 1$) für alle möglichen Fälle einzeichnen, aber wir dürfen dieselben dann nicht numerieren, da die Temperatur $T = \frac{pv}{H}$ von der Gaskonstante H abhängt. Eine Isotherme T haben wir durch P gelegt; alle übrigen Polytropen verlaufen steiler, da $k = 1$ der kleinste in Betracht kommende Wert von k ist. Während der Kontraktion werden alle Kosmogeniden von rechts nach

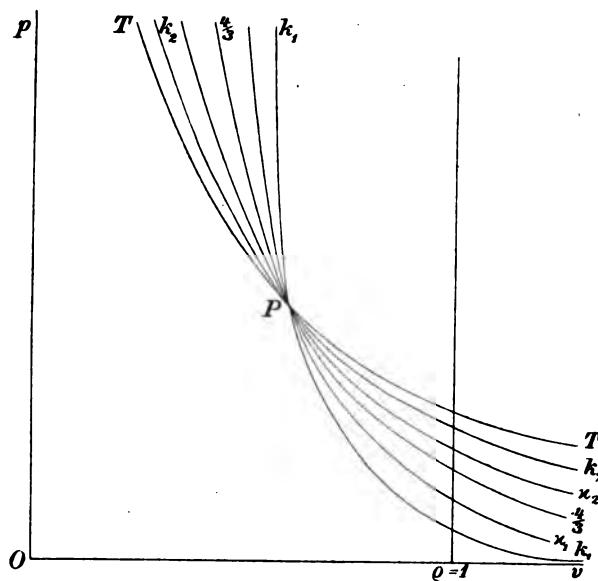


Fig. 7.

links durchlaufen, führen also zu höheren Drucken, Dichten und Temperaturen.

Durch P haben wir diejenige Polytrope der Klasse k zu legen, längs welcher die Kugel aufgebaut ist, und die dem augenblicklichen Zustande entspricht. Sie repräsentiert diejenige Zustandsänderung, welche die Gasmassen erleiden, wenn sie bei unverändertem Radius längs desselben hin- und hergeführt werden. Auf der Senkrechten $\varrho = 1$ schneidet sie die für die ganze Kugel gleiche polytropen Temperatur Θ_k ab. Diese Polytrope ist unabhängig von dem Molekulargewicht und der Atomzahl des Gases. Aus beliebigem Gase können wir eine Kugel von dieser Polytropenklasse und polytropen Temperatur aufbauen. Doch sehen wir, wie bereits Kap. VII, § 7 auseinandergesetzt, daß wir zwei Klassen von Gaskugeln unterscheiden müssen, je nachdem k größer oder kleiner als $\frac{4}{3}$ ist. Wir haben zwei Polytropen eingezeichnet, für $k_1 > \frac{4}{3}$ und $k_2 < \frac{4}{3}$. Durch jeden Punkt derselben führt eine Kosmogenide. Gehört die Gaskugel zu $k_1 > \frac{4}{3}$, so liegt die neue Polytrope, auf welche während der Kontraktion auf Kosmogeniden die Gasmassen übergeführt werden, links von der ursprünglichen Polytropen, im Falle $k_2 < \frac{4}{3}$ aber rechts davon. In beiden Fällen hat bei der Kontraktion die Temperatur eines jeden Teilchens zugenommen, im ersten Falle aber sind die polytropen Temperatur, und somit die Temperatur an Stellen konstant bleibender Dichte des Radius, gesunken, im zweiten Falle gestiegen. Dies analytisch zu formulieren differentiieren wir die Gleichung der kosmogenetischen Fläche (Gleichung 102) für $\mathfrak{M} = \text{konst.}$ und erhalten

$$(111) \quad \frac{d\Theta_k}{\Theta_k} = (3k - 4) \frac{d\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}}.$$

Durch P ziehen wir noch die Isentrope. Dieselbe ist nur bedingt durch die Atomzahl des Gases und wie die Kosmogenide vollkommen unabhängig von der Polytrope, die zum Bau der Gas-Kugel dient. Hier haben wir wieder die beiden Fälle $\varkappa \gtrless \frac{4}{3}$ zu unterscheiden; wir haben zwei Isentropen eingezeichnet, für $\varkappa_1 > \frac{4}{3}$, was ein-, zwei-, an der Grenze dreiatomiger Gase entspricht, und $\varkappa < \frac{4}{3}$, für vielatomige Gase. Nur im ersten Falle kann die Kosmogenide in den Zwickel 1 P 2 der Fig. 3 hinein verlaufen. Die Verhältnisse, die hier eintreten müssen, haben wir in den Paragraphen 5—8 des

II. Kapitels ausführlich erörtert. Mit spezieller Berücksichtigung des § 7 haben wir den fundamentalen Satz:

Polytrope Gaskugeln von beliebiger Klasse k können, falls ihr Gleichgewicht stabil oder indifferent sein soll, nur aus ein-, zwei- oder dreiatomigen Gasen, $\kappa > \frac{4}{3}$, aufgebaut werden; Gase mit mehr Atomen im Molekül ($\kappa < \frac{4}{3}$) ergeben nur labiles Gleichgewicht. In stabilem oder indifferentem Gleichgewichte existieren adiabatische Gaskugeln nur in drei Klassen, $\kappa = \frac{5}{3}, = \frac{7}{5}$ resp. $= \frac{4}{3}$; polytrope Gaskugeln hingegen für beliebiges k , doch können zu deren Bau nur die Gassorten verwandt werden, welche auch stabiles und indifferentes Gleichgewicht für adiabatische Kugeln geben.

§ 2. Da wir wissen, daß jedes Gasteilchen kosmogenetische Zustandsänderung durchmacht, können wir für die Energetik des Kontraktionsprozesses die Formeln (30), (31), (32) des § 8, Kapitel II anwenden. Wir stellen die Ergebnisse dieses Paragraphen hier zusammen. Es war:

	einatomig	zweiatomig	dreiatomig
$\frac{E dQ}{dW} = \frac{4 - 3\kappa}{3(\kappa - 1)} =$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	0
$\frac{d\varepsilon}{dW} = \frac{1}{3(\kappa - 1)} =$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{5}{6}$	1
$\frac{E dQ}{d\varepsilon} = 4 - 3\kappa =$	-1	$-\frac{1}{5}$	0
$\gamma = c_v(4 - 3\kappa) =$	$-c_v$	$-\frac{1}{5}c_v$	0

Die Temperaturänderung dT , die ein Gasteilchen erleidet, können wir aus den Beziehungen $dQ = \gamma dT$ oder auch $d\varepsilon = c_v dT$ berechnen; die Entropieänderung aus $d\eta = \frac{dQ}{T} = \frac{\gamma dT}{T}$. In allen Fällen ist γ negativ. Die Teilchen erleiden also ein Steigen der Temperatur bei Abnahme der Entropie.

Die Größen Q , W und ε sind von der Dimension $\text{cent}^3 \text{sek}^{-2}$, da sie sich auf die Masseneinheiten beziehen. Wie sie sich auf die einzelnen Massen der Kugel verteilen, können wir erst später entscheiden. Wir wissen nach den angeführten Formeln nur, daß das Verhältnis ihrer Änderungen für alle Masseneinheit denselben Wert hat, da in der angeführten Formel die Zustandsgrößen p , v , T nicht enthalten sind. Bezeichnen wir nun die der *Gesamtmasse* der Kugel zugeführte Wärmemenge $\sum Q$ mit (Q) , und setzen ebenso $\sum \varepsilon = (\varepsilon)$,

$\sum W = (W)$, so gelten für die Gesamtmasse der Kugel ebenfalls die Beziehungen:

$$(112) \quad \begin{array}{c|c|c|c} & \text{einatomig} & \text{zweiatomig} & \text{dreiatomig} \\ \frac{Ed(Q)}{d(W)} = \frac{4 - 3\alpha}{3(\alpha - 1)} = & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 0 \\ \frac{d(\varepsilon)}{d(W)} = \frac{1}{3(\alpha - 1)} = & +\frac{1}{2} & +\frac{5}{6} & 1 \\ \frac{Ed(Q)}{d(\varepsilon)} = 4 - 3\alpha = & -1 & -\frac{1}{5} & 0 \end{array}$$

und die spez. Wärme γ ist für alle Teilchen während der ganzen Dauer des Kontraktionsprozesses konstant $= c_v(4 - 3\alpha)$, für $\alpha > \frac{4}{3}$ also < 0 .

Wie groß die einer Gaskugel durch Kontraktion des Radius um dR zugeführte Arbeit $d(W)$ ist, ist vorderhand unbestimmt; sie kann abhängen von der Größe und Masse der Kugel, von der Natur des Gases und der Polytropenklasse, nach der sie gebaut ist. Wie diese Arbeitsmenge aber zur Verwendung kommt zur Steigerung der Energie ε des Gases (Erhöhung der Temperatur) und Deckung ausgestrahlter Wärme, hängt einzig und allein ab von der Atomzahl des zum Bau der Kugel benutzten Gases.

§ 3. Wir stehen nun vor der Aufgabe, das Arbeitsglied (W) durch die Konstanten der Gaskugel auszudrücken. Welche Energiequellen das Arbeitsglied (W) speisen, ist ohne weiteres klar. Je zwei Teilchen m_1 und m_2 der Gaskugel, die sich nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze anziehen, repräsentieren im Abstande r eine Menge potentieller Energie $= -G \frac{m_1 \cdot m_2}{r}$ Erg., deren Abnahme die während der Verschiebung dr geleisteten Arbeit entspricht. Wie eine gespannte Feder repräsentiert eine polytrope Gaskugel eine Menge ψ potentieller Energie, herrührend von der gegenseitigen Anziehung aller Teilchen, die durch den Druck des Gases äquilibriert wird. Nimmt ψ um $d\psi$ ab, so wird eine Kompressionsarbeit $d(W)$ geleistet. Ohne die Größe von ψ selbst zu kennen, können wir bereits einsehen, daß ψ zum Energiegehalt (ε) in bestimmter Beziehung steht. Denn nach (112) muß sein

$$\frac{d(\varepsilon)}{d(W)} = -\frac{d(\varepsilon)}{d(\psi)} = \frac{1}{3(\alpha - 1)}$$

und somit

$$(113) \quad (\varepsilon) = -\frac{\psi}{3(\alpha - 1)},$$

wobei die in (ε) und ψ eingehenden Integrationskonstanten so bestimmt

sind, daß (ε) und ψ gleichzeitig verschwinden, ((ε) für $t = 0$, ψ für $\mathfrak{R} = \infty$).

Es gelingt leicht, einen Ausdruck für ψ aufzustellen für eine Kugel, in welcher die Dichte nur Funktion des Radius ist. Schlagen wir im Innern derselben eine Kugel vom Radius r und der Masse M , so ist, da wir ihre Wirkung nach außen durch eine Masse M im Mittelpunkte ersetzen können, die zwischen der Masse M und der Masse dM der Kugelschale $r + dr$ aufgespeicherte potentielle Energie $= -G \frac{MdM}{r}$. Die Menge potentieller Energie ψ , die man das Potential der Kugel auf sich selbst oder kurz das Selbstpotential einer Kugel nennt, hat somit den Betrag

$$(114) \quad \psi = -G \int_0^{\mathfrak{R}} \frac{MdM}{r} \text{ gramm cent}^2 \text{ sek}^{-2}.$$

Für eine Kugel von konstanter Dichte ϱ ,

$$M = \frac{4\pi\varrho r^3}{3}, \quad dM = 4\pi\varrho r^2 dr$$

erhalten wir z. B.

$$(115) \quad \psi_{\varrho=\text{konst.}} = -G \frac{16 \cdot \pi^2 \varrho^2}{3 \cdot 5} \mathfrak{R}^5 = -\frac{3}{5} G \frac{\mathfrak{R}^5}{\mathfrak{R}} \text{ gramm cent}^2 \text{ sek}^{-2}.$$

Wir können leicht die Formel (113) durch direkte Rechnung verifizieren. Wir haben $\varepsilon = c_v T$, wenn die Integrationskonstante so bestimmt ist, daß ε mit T verschwindet. Messen wir ε in Erg, so haben wir rechts mit dem mechanischen Wärmeäquivalent $E = \frac{1}{A}$ zu multiplizieren und erhalten mit Benutzung der Gleichung (12) leicht die Beziehungen

$$\begin{aligned} (\varepsilon) &= \frac{c_v}{A} \int_0^{\mathfrak{R}} T dM = \frac{4\pi c_v}{A} \int_0^{\mathfrak{R}} T \varrho r^2 dr = \frac{4\pi c_v}{AH} \int_0^{\mathfrak{R}} pr^2 dr = \\ &= \frac{4\pi}{n-1} \left[\frac{1}{3} r^3 p - \frac{1}{3} \int r^3 dp \right]_0^{\mathfrak{R}} = -\frac{4\pi}{3(n-1)} \int_0^{\mathfrak{R}} r^3 dp. \end{aligned}$$

Dabei haben wir angenommen, daß $r^3 p$ von der Oberfläche wegen $p = 0$ verschwindet. Für Gaskugeln mit endlichem Radius wird dies stets der Fall sein. Für Gaskugeln mit unendlichem Radius muß dieser Wert stets besonders bestimmt werden. Für die unendliche Gaskugel $n = 5$ läßt sich derselbe sofort angeben. In den Bezeichnungen des § 12 Kap. V wächst r wie r_1 , p^{n+1} nimmt ab wie $u_1^6 = \left(V \frac{3}{3+r_1^2} \right)^6$; für $r_1 = \infty$ ergibt sich $r_1^3 p = 0$, so daß Formel (113) auch noch für den Fall $n = 5$ gültig ist.

Ferner da $g = \frac{G M}{r^2}$ und $dp = -g\varrho dr$, wird

$$\psi = -G \int_0^R \frac{MdM}{r} = - \int_0^R grdM = -4\pi \int_0^R gr^3 \varrho dr = 4\pi \int_0^R r^3 dp$$

und somit

$$(113) \quad \frac{(\varepsilon)}{\psi} = -\frac{1}{3(\kappa-1)}.$$

Diese Beziehung gilt also unter noch allgemeineren Bedingungen, als denjenigen, unter denen wir die Formel oben § 3 ableiteten. Dort hatten wir die Bedingung benutzt, daß eine beliebige polytrope Gaskugel sich kontrahiert, was kosmogenetische Änderung jedes Teilchens zur Folge hat. Hier haben wir die Beziehung abgeleitet für eine Gaskugel unter der einzigen Voraussetzung, daß ihre Dichte Funktion des Radius ist, gleichgültig ob ihr Gleichgewicht stabil oder labil ist, also auch unabhängig von der Atomzahl.

Dagegen haben wir hier die Beziehung nur für die Gesamtmasse der Kugel umfassenden Größen (ε) und ψ , dort aber für ε und W , das heißt auch für jedes Massenelement erhalten. Diese Gleichung (113) drückt meines Erachtens die merkwürdigste Beziehung aus, die sich für Gaskugeln herausfinden läßt. Bauen wir aus beliebigen Gasmassen Kugeln von beliebigem Radius, ordnen wir dann die Masse, einzig der Bedingung $\varrho = f(r)$ folgend, ganz beliebig an, temperieren jede Kugelschicht aber so, daß sie das Gewicht der äußeren Schichten tragen kann, d. h., daß Gleichgewicht herrscht, so besteht die Beziehung (113).

Für $\kappa = \frac{4}{3}$ ist $\Delta(\varepsilon) = -\Delta\psi$, für $\kappa \geq \frac{4}{3}$ aber $\Delta(\varepsilon) \leq \Delta\psi$. Tritt in einer Gaskugel irgend eine Veränderung ein, wodurch sich ψ ändert, so hat, ausgenommen $\kappa = \frac{4}{3}$, die Änderung von (ε) ungleichen Wert und es bleibt aus $\Delta\psi$ noch eine Energiemenge übrig, die durch Wärmeaustausch weggeschafft werden muß. Daraus folgt der wichtige Satz:

Ist eine Gasmasse vor Wärmeaustausch nach außen geschützt, so besitzen alle Gaskugeln, welche sich aus derselben aufbauen lassen, gleiches Selbstpotential ψ . Ausnahme machen dreiatomige Gase ($\kappa = \frac{4}{3}$), das Verhalten der Gaskugel unterliegt hier keinerlei Beschränkung.

§ 4. Wir machen nun die einschränkende Annahme, daß der Aufbau der Gaskugel längs einer bestimmten Polytrope k erfolgt sei, und stellen uns die Aufgabe (ε) und ψ einzeln zu berechnen. Da sich

die Differentialgleichung (I) nicht in geschlossener Form integrieren lässt, ist die Funktion $\varrho = f(r)$ nicht gegeben und die in (ε) und ψ auftretenden Integrale lassen sich nicht in geschlossener Form berechnen. Wir können aber eine weitere Beziehung zwischen (ε) und ψ aufstellen und haben dann mit Gleichung (113) zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Wir haben (in Erg ausgedrückt)

$$(\varepsilon) = \frac{c_v}{A} \int_0^R T dM = \frac{c_v}{A} \left| MT - \int M dT \right|_0^R = - \frac{c_v}{A} \int_0^R M dT.$$

Aus der Gleichung der Polytropen $T = \varrho^{k-1} \Theta_k$ und $p = \varrho^k H \Theta_k$ finden wir leicht $\frac{dp}{\varrho} = \frac{k}{k-1} H dT$, und da für Gleichgewicht stets gilt $\frac{dp}{\varrho} = -g dr$, so haben wir für polytropes Gleichgewicht

$$\frac{k}{k-1} H dT = -g dr,$$

welche Gleichung wir früher Gleichung (74) bereits kennen gelernt haben. Wir haben also weiter

$$\begin{aligned} (\varepsilon) &= \frac{c_v}{\frac{k}{k-1} H A} \int_0^R M g dr = \frac{G}{\frac{k}{k-1} (\kappa-1)} \int_0^R \frac{M^2}{r^2} dr \\ &= \frac{G}{\frac{k}{k-1} (\kappa-1)} \left\{ -\frac{M^2}{r} + 2 \int_0^R \frac{M dM}{r} \right\} = \frac{G}{\frac{k}{k-1} (\kappa-1)} \left\{ -\frac{M^2}{R} + 2 \int_0^R \frac{M dM}{r} \right\} \\ &= \frac{k}{k-1} (\kappa-1) \left\{ -G \frac{M^2}{R} - 2\psi \right\} \end{aligned}$$

und erhalten mit Hilfe von (113)

$$(116) (\varepsilon) = \frac{k-1}{(5k-6)(\kappa-1)} G \frac{M^2}{R} = \frac{1}{(5-n)(\kappa-1)} G \frac{M^2}{R} \text{ gramm cent}^2 \text{ sek}^{-2}$$

$$(117) \psi = -\frac{3(k-1)}{5k-6} G \frac{M^2}{R} = -\frac{3}{5-n} G \frac{M^2}{R} \text{ gramm cent}^2 \text{ sek}^{-2},$$

und spezialisiert für adiabatische Gaskugeln

$$(116a) \quad (\varepsilon) = \frac{1}{5\kappa-6} G \frac{M^2}{R}$$

$$(117a) \quad \psi = -\frac{3(\kappa-1)}{5\kappa-6} G \frac{M^2}{R}.$$

Das Potential der polytropen Kugel auf sich selbst, ψ , ist bei gegebener Masse und Radius vollkommen unabhängig von der Natur

des Gases; in den Ausdruck für (ε) geht noch die Atomzahl ein. Wir sehen k in der Verbindung $5k - 6$ auftreten; für $k = \frac{6}{5}$, $n = 5$ werden (ε) und ψ scheinbar ∞ . Für $n = 5$ haben wir aber (§ 12 Kap. V) $\Re = \infty$, \mathfrak{M} endlich gefunden. Da wir unendliche Temperaturen, also unendliche ε ausschließen, muß (ε) für $n = 5$, $k = \frac{6}{5}$ noch endlich sein, ebenso ψ . Da aber für $\Re = \infty$ von einer Kontraktion des Radius nicht gesprochen werden kann, so betrachten wir nur die Fälle $k > \frac{6}{5}$, $n < 5$.

Den im vorigen Kapitel besprochenen Flächengleichungen können wir nun zwei weitere beifügen.

$$(118) \quad \frac{\psi \cdot \Re}{\mathfrak{M}^2} = -3 \frac{k-1}{5k-6} G = C_{(\psi, \Re, \mathfrak{M})} \text{ gramm}^{-1} \text{ cent}^3 \text{ sek}^{-2}$$

$$(119) \quad \frac{(\varepsilon) \cdot \Re}{\mathfrak{M}^2} = + \frac{k-1}{(5k-6)(n-1)} G = - \frac{1}{3(n-1)} C_{(\psi, \Re, \mathfrak{M})} \text{ gramm}^{-1} \text{ cent}^3 \text{ sek}^{-2}.$$

Wir führen Werte von $C_{(\psi, \Re, \mathfrak{M})}$ an.

$k = \infty$	$n = 0$ ($\varrho = \text{konst.}$)	$- \frac{C_{(\psi, \Re, \mathfrak{M})}}{\text{gramm}^{-1} \text{ cent}^3 \text{ sek}^{-2}}$	$\lg C_{(\psi, \Re, \mathfrak{M})}$
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3} G$	0,64723 - 8
2	1	$\frac{3}{4} G$	0,69838 - 8
$\frac{5}{3}$	1,5	$\frac{6}{7} G$	0,75637 - 8
$\frac{3}{2}$	2	$1 G$	0,82332 - 8
$\frac{7}{5}$	2,5	$\frac{6}{5} G$	0,90250 - 8
$\frac{4}{3}$	3	$\frac{3}{2} G$	0,99941 - 8
$\frac{5}{4}$	4	$3 G$	0,30044 - 7
$\frac{11}{9}$	4,5	$6 G$	0,60147 - 7
$\frac{59}{49}$	4,9	$30 G$	0,30044 - 6

Die zugehörigen Werte von $\frac{(\varepsilon) \Re}{\mathfrak{M}^2}$ finden wir, indem wir die $C_{(\psi, \Re, \mathfrak{M})}$ für ein-, zwei-, dreiatomige Gase mit $-\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{6}$, resp. -1 multiplizieren.

Mit Berücksichtigung des am Schlusse des vorigen Paragraphen ausgesprochenen Satzes folgt, daß, bei Ausschluß von Wärmeabgabe nach außen, wir eine Gaskugel umwandeln können in eine Gaskugel

anderer Klasse, deren Radius sich umgekehrt wie die $C_{(\psi, \alpha, M)}$ geändert hat. So kann unter der Bedingung $(\varepsilon) = \text{konst.}$ z. B. eine Gaskugel $n = 2,5$ umgewandelt werden in eine Gaskugel konstanter Dichte und gleicher Masse, deren Radius die halbe Länge besitzt; um aus derselben eine Gaskugel $k = \frac{11}{9}$ ohne Wärmeaustausch nach außen herzustellen, müßten wir den Radius auf das Fünffache strecken.

§ 5. Die Formeln (116) und (117) sind nicht mehr anwendbar auf den Fall $n > 5$, da M sicher und M möglicherweise (wir werden dies später entscheiden) unendlich werden; von einem Kontraktionsprozeß kann dann auch nicht mehr die Rede sein. Der Energiegehalt wird für $M = \infty$ ebenfalls unendlich, für $n = 5$ aber ist (Seite 92) $M = \frac{4\pi u_0^8 \sqrt[3]{3} u_0}{\sqrt[3]{(u_0^5 \alpha^2)^3}}$ endlich; (ε) und ψ müssen also ebenfalls endlich sein. Wir finden (ε) durch direkte Rechnung, indem wir ansetzen

$$(\varepsilon) = 4\pi c_s \int_0^\infty T \varrho r^2 dr \text{ cal.} = \frac{4\pi H}{(\kappa - 1)} \int_0^\infty T \varrho r^2 dr \text{ Erg.}$$

Da $T = u \Theta_k$, $\varrho = u^5$, und Gleichung (66) $u = u_0 \sqrt{\frac{3u_0}{3u_0 + u_0^5 \alpha^2 r^2}}$, so ergibt das Integral

$$(\varepsilon) = \frac{108 \cdot \pi^2 \cdot H \Theta_k u_0^8}{48 \cdot \sqrt[3]{3} u_0 \sqrt[3]{(u_0^5 \alpha^2)^3}}.$$

Mit Hilfe des angegebenen Wertes von M können wir dies schreiben, indem wir noch $T_0 = u_0 \Theta_k$ berücksichtigen:

$$(\varepsilon) = \frac{3\pi}{16} \cdot \frac{1}{\kappa - 1} H T_0 M \text{ Erg.}$$

Da Gleichung (113) für $n = 5$ noch gilt, wird

$$\psi = - \frac{9 \cdot \pi}{16} H T_0 M \text{ Erg.}$$

Die Energieänderung der Gaskugel $n = 5$ verläuft genau wie die Energieänderung einer Gasmasse M von der Temperatur T_0 bei Nichtberücksichtigung der Gravitationskräfte, deren Wärmekapazität von c_s auf $\frac{3\pi}{16} c_s$ gesunken ist. Die ins Spiel tretende Energiequelle ist die Veränderung von ψ , hier verursacht dadurch, daß bei Änderung von T_0 eine Verschiebung der Masse auf dem unendlich bleibenden Radius stattfindet.

§ 6. Aus den Gleichungen (118) und (119) folgt der Satz:

Ändert eine polytrope Gaskugel ihren Radius, wobei sie stets polytrope Gaskugel derselben Klasse bleibt, so ändern sich ihr Energie-

inhalt (ε) und ihr Potential auf sich selbst (ψ) umgekehrt wie der Radius.

Dies Resultat konnten wir ohne Kenntnis der Ausdrücke für (ε) und ψ voraussagen. Denn da, wie wir mehrfach zeigten, sich während des Kontraktionsvorganges die Temperatur jedes Teilchens umgekehrt wie der Radius ändert, so muß dasselbe auch für die Energie ε jeder Masseneinheit, infolge dessen auch für die Gesamtenergie (ε) der Fall sein. (ε) und ψ aber stehen in konstanten Verhältnissen.

Wir können nun die Formeln (110) und (111) ergänzen und erhalten für die Verhältnisse, die in einer polytropischen Gaskugel von konstanter Masse, die unter steter Erhaltung ihres Gleichgewichtes nach derselben Polytropenklasse ihren Radius ändert, die Beziehungen

$$(120) \quad -\frac{d\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}} = \frac{1}{3} \frac{dp}{\varrho} = \frac{dT}{T} = \frac{1}{4} \frac{dp}{p} = \frac{1}{4-3k} \frac{d\Theta_k}{\Theta_k} = \frac{d(\varepsilon)}{(\varepsilon)} = \frac{d\psi}{\psi}.$$

Es wäre aber unsinnig, nach einem Ausdruck von der Form $\frac{d(Q)}{(Q)}$ suchen zu wollen. Denn eine Größe, die man als Wärmegehalt einer Masse bezeichnen müßte, eine Funktion (Q) der Zustandsgrößen, existiert nicht. Wir können nur die Anzahl Kalorien (Q) berechnen, die bei einer Änderung $d\mathfrak{M}$ nach außen ausgetauscht werden. Dazu differentieren wir (116) und (117) für $\mathfrak{M} = \text{konst.}$ und erhalten:

$$(121) \quad \begin{aligned} d(\varepsilon) &= -\frac{(k-1)}{(5k-6)(x-1)} G \frac{\mathfrak{M}^2 d\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}} \\ &= \frac{1}{3(x-1)} C_{(\psi, \mathfrak{M}, \mathfrak{m})} \frac{\mathfrak{M}^2}{\mathfrak{M}} \cdot \frac{d\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}} \text{ gramm cent}^2 \text{ sek}^{-2} \end{aligned}$$

$$(122) \quad \begin{aligned} d\psi &= \frac{3(k-1)}{5k-6} G \frac{\mathfrak{M}^2 d\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}} \\ &= -C_{(\psi, \mathfrak{M}, \mathfrak{m})} \frac{\mathfrak{M}^2}{\mathfrak{M}} \frac{d\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}} \text{ gramm cent}^2 \text{ sek}^{-2} \end{aligned}$$

und nach (112)

$$(123) \quad \begin{aligned} Ed(Q) &= -\frac{4-3x}{x-1} \cdot \frac{k-1}{5k-6} G \frac{\mathfrak{M}^2 d\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}} \\ &= \frac{4-3x}{3(x-1)} C_{(\psi, \mathfrak{M}, \mathfrak{m})} \frac{\mathfrak{M}^2}{\mathfrak{M}} \frac{d\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}} \text{ gramm cent}^2 \text{ sek}^{-2} \end{aligned}$$

Bauen wir aus beliebigen Gasen Kugeln von gleicher Masse und gleichem Radius und lassen denselben um denselben Betrag abnehmen, so ist die geleistete Arbeit $-d\psi$ unabhängig von der Gasart und nur bestimmt durch ihre Polytrope. Die kleinste Arbeit wird nach der Tabelle des vorigen Paragraphen von der Gaskugel konstanter Dichte, $k = \infty$, geleistet; die Arbeit steigt mit abnehmendem k und kann beliebig gesteigert werden, wenn wir k dem Werte $\frac{6}{5}$ immer näher rücken lassen. Nimmt k von ∞ bis $\frac{59}{49}$ ab, so steigt die

Arbeit um das Fünfzigfache. Wie die geleistete Kompressionsarbeit aber verwandt wird, hängt nur ab von der Atomzahl des Gases. Bei einatomigen Gasen teilt sie sich in gleiche Teile, in ausgestrahlte Wärme und Energievermehrung (Temperatursteigerung) des Gases. Bei zweiatomigen Gasen kann nur $\frac{1}{5}$ derselben ausgestrahlt werden, bei dreiatomigen Gasen muß die Gesamtarbeit zur Energiesteigerung verwandt werden. Gase mit mehr als drei Atomen im Molekül ergeben Gaskugeln in labilem Gleichgewichte, ihr Kontraktionsvorgang kann nicht statisch behandelt werden. Wohl ändert sich ihr ψ , aber die Menge kinetische Energie, die dabei erzeugt wird, entzieht sich jeder Schätzung.

Nehmen wir z. B. eine Gaskugel von der Masse M und scheinbarem Radius der Sonne, $M = 1,94302 \cdot 10^{33}$ gramm, $R = 6,95561 \cdot 10^{10}$ cent, und lassen den Radius derselben sich um $\frac{1}{10000}$ verkürzen, so steigt die Temperatur eines jedes Teilchens um $\frac{1}{10000}$ ihres Wertes. Die geleistete Arbeit beträgt ein Minimum, wenn wir die Sonne von konstanter Dichte, $k = \infty$, annehmen.

Die Kompressionsarbeit beträgt dann

$$C_{(\psi, R, M)} \frac{M^2}{R} \cdot \frac{1}{10000} = 2,1681 \cdot 10^{44} \text{ Erg} = 5,1745 \cdot 10^{36} \text{ calor.}$$

Würden wir nach der Polytrope $k = \frac{5}{3}$ (oder aus einatomigem Gase adiabatisch) gebaut haben, so wäre dieser Betrag $\frac{6}{7} : \frac{3}{5} = \frac{10}{7}$ mal größer, 2,5 mal größer wäre er für $k = \frac{4}{3}$ und 50 mal größer für $k = \frac{59}{49}$. Hätten wir zum Bau ein einatomiges Gas benutzt, so wäre bei dieser Kontraktion gerade die Hälfte dieser Beträge ausgestrahlt, die andere Hälfte zur Energieerhöhung des Gases verwendet worden; für $k = \frac{4}{3}$ aber hätte die gesamte Kompressionsarbeit zur Energieerhöhung verwandt werden müssen, und nichts hätte ausgestrahlt werden können. In beiden Fällen wäre die Temperatur jedes Teilchens um $\frac{1}{10000}$ ihres Wertes gestiegen. Ein Gas mit mehr als drei Atomen aber können wir zum Bau nicht verwenden. (Diese Anwendungen werden wir in einem späteren Kapitel eingehend behandeln.)

§ 7. Um die Mechanik des Kontraktionsprozesses vollständig durchblicken zu können, haben wir noch eine letzte, aber wichtige Frage zu beantworten. Für eine Kontraktion von bestimmtem Betrage

unter gegebenen Bedingungen können wir $d(Q)$ und $d(\varepsilon)$ berechnen. Wir fragen: in welchem Betrage steuern die einzelnen Gasteilchen zur Summe $d(Q)$ bei und empfangen Anteile der Summe $d(\varepsilon)$? Daß die Beträge dQ und $d\varepsilon$ für jedes Teilchen in demselben Verhältnisse stehen müssen, wissen wir bereits. Ob aber dQ für alle Teilchen gleich, oder von ihrem durch p , ϱ , T bedingten Zustande abhängen, ist die Frage, die wir zu beantworten haben. Wir beantworten sie erst auf einem Umwege. Wir haben Seite 27 die Wärmemenge dQ berechnet, die notwendig ist, um die polytropen Temperatur Θ_k der Masseneinheit eines Gases um $d\Theta_k$ zu ändern, und dafür gefunden, Gleichung (42)

$$dQ = c_v T \left(\frac{d\Theta_k}{\Theta_k} + (k - \nu) \frac{d\varrho}{\varrho} \right),$$

dieselbe ist also bedingt durch T , Θ_k und ϱ . Für den Fall der sich kontrahierenden Gaskugel aber haben wir nach Gleichung (120)

$$\frac{d\Theta_k}{\Theta_k} = -(4 - 3\nu) \frac{dT}{T} \quad \text{und} \quad \frac{d\varrho}{\varrho} = -3 \frac{dT}{T}.$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$dQ = c_v (3\nu - 4) T \frac{dT}{T}.$$

D. h.: In einer sich kontrahierenden Gaskugel ist die Wärmeabgabe und infolgedessen auch die Energiesteigerung eines jeden Teilchens proportional seiner Temperatur; von der gesamten Kompressionsarbeit empfängt jedes Teilchen einen Betrag proportional seiner Temperatur.

(Setzen wir zur Kontrolle gemäß Gleichung (120) noch $\frac{dR}{R} = -\frac{dT}{T}$, so erhalten wir $dQ = c_v(4 - 3\nu)dT = \gamma dT$; $\gamma = c_v(4 - 3\nu)$; dies ist (Gleichung 29) die Wärmekapazität eines Gases bei kosmogenetischer Zustandsänderung.)

Für adiabatische Gaskugeln ist dieser Satz evident, da die Entropieänderung $d\eta = \frac{dQ}{T}$ für jedes Teilchen denselben Wert haben muß. Wir hätten den Satz aber auch für polytropen Kugeln ohne jede Rechnung angeben können. Denn da jedes Teilchen seine Temperatur umgekehrt wie der Radius ändert, also proportional seiner augenblicklichen Temperatur, alle Teilchen aber kosmogenetische Zustandsänderung erleiden, die Wärmekapazität des Weges somit für alle Teilchen gleich ist, so muß auch die ausgetauschte Wärme proportional der augenblicklichen Temperatur sein, für jedes Teilchen zu jeder Zeit.

Vierter Abschnitt.

Unendlich große Gaskugeln.

Neuntes Kapitel.

Die isotherme Gaskugel.

§ 1. Die Reihe polytroper Gaskugeln, die wir erhalten, wenn wir k von 1 bis ∞ , n von ∞ bis 0 variieren lassen, ist auf der einen Seite begrenzt durch die Gaskugel konstanter Dichte, $k = \infty$, $n = 0$, mit der Polytropengleichung $p = \varrho HT$; $\varrho = \text{konst.}$, auf der andern Seite durch die Gaskugel konstanter Temperatur, $k = 1$, $n = \infty$, mit der Polytropengleichung $p = \varrho HT$; $T = \text{konst.}$

Diese isothermen Gaskugeln erfordern gesonderte Untersuchung, da die Differentialgleichung (I) Seite 40 für $n = \infty$ unbrauchbar wird.*)

A priori können wir nur aussagen, daß die Oberfläche isothermer Gaskugeln (der Fall $T = 0$ verdient keine Berücksichtigung) nicht im Endlichen liegen kann. Denn da T an der Oberfläche endliche Werte besitzt, sind die Moleküle daselbst in Bewegung und p hat endliche Werte; die Gaskugel würde sich sofort bis ∞ ausdehnen. Vollständigen Einblick in den Bau derselben erhalten wir nur durch Aufstellung und Lösung der Differentialgleichung, welche den Zustand des Gases längs des Radius ausdrückt.

§ 2. Wir gehen wieder aus von der Gleichung (59)

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\varrho} \frac{dp}{dr} \right) = -4\pi G \varrho r^2.$$

Da wir haben $p = \varrho HT$, $T = \text{konst.}$, so ergibt sich

$$\frac{dp}{\varrho} = HT \frac{d\varrho}{\varrho} = HT d \log \varrho,$$

und setzen wir

$$(124) \quad \beta^2 = \frac{4\pi G}{HT} (\text{gramm}^{-1} \text{ cent})$$

und führen die Differentiation aus, so ergibt sich die

Differentialgleichung der isothermen Gaskugel

$$(II) \quad \frac{d^2 \lg \varrho}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d \lg \varrho}{r} + \beta^2 \varrho = 0,$$

*) Wir haben bereits Kap. II, § 4 darauf hingewiesen und begründet, daß von allen polytropen Prozessen die isotherm verlaufenden eigene Behandlung erfordern. An Stelle einer Potenz tritt ein Logarithmus oder eine Exponentialfunktion.

oder wenn wir noch einführen

$$(125) \quad \lg \varrho = v, \quad \varrho = e^v$$

$$(IIa) \quad \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dv}{dr} + \beta^2 e^v = 0.$$

Diese Gleichung stimmt in den beiden ersten Gliedern mit der Gleichung (I) überein, aber an Stelle des Gliedes $\alpha^2 u^n$ erhalten wir hier $\beta^2 e^v$; und die Seite 28 gegebene Rechenregel lautet hier: $e^v = \varrho = [\text{gramm cent}^{-3}]$, $v = \lg \varrho = \text{dimensionslos}$.

§ 3. Wir nehmen an, (IIa) sei gelöst; dann ergeben sich leicht die für die Gaskugel in Betracht kommende Größe, wenn wir wieder von der Gleichung $dp = -g\varrho dr$ ausgehen. Wir erhalten die Beschleunigung g im Abstande r vom Zentrum

$$(126) \quad g = -\frac{1}{\varrho} \frac{dp}{dr} = -HT \frac{d \lg \varrho}{dr} = -\frac{4\pi G}{\beta^2} \frac{dv}{dr} \text{ cent sek}^{-2}.$$

Die bis zum Abstande r eingeschlossene Masse M ergibt sich aus der Beziehung $g = \frac{GM}{r^2}$ zu

$$(127) \quad M = -\frac{4\pi}{\beta^2} r^2 \frac{dv}{dr} \text{ gramm.}$$

Das Potential Ω im Abstande r hat den Wert

$$(128) \quad \Omega = -\frac{4\pi G}{\beta^2} v + \text{konst. cent}^2 \text{ sek}^{-2}.$$

Die mittlere Dichte $\bar{\varrho}$ der von r eingeschlossenen Masse M ist

$$(129) \quad \bar{\varrho} = -\frac{3}{\beta^2} \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} \text{ gramm cent}^{-3}.$$

Bezeichnen wir die Dichte mit Mittelpunkt mit ϱ_0 , und dementsprechend $e^{v_0} = \varrho_0$, so ist

$$(130) \quad \frac{\varrho_0}{\varrho} = -\frac{\beta^2}{3} \frac{r}{dv} e^{v_0}.$$

Für den Mittelwert von g bis zur Stelle r , $\bar{g} = \frac{1}{r} \int_0^r g dr$, ergibt sich

$$(131) \quad \bar{g} = -\frac{4\pi G}{\beta^2 r} (v - v_0) \text{ cent sek}^{-2}$$

und schließlich

$$(132) \quad \frac{g}{\bar{g}} = \frac{r}{v - v_0} \frac{dv}{dr}.$$

Diese Gleichungen entsprechen vollständig den Gleichungen (67)–(73), nur daß an Stelle von u und α hier v und β getreten sind.

§ 4. Die Differentialgleichung (II) resp. (IIa) scheint sich nicht auf Quadraturen zurückführen zu lassen; die Lösungskurve muß durch

mechanische Quadratur festgelegt werden. Nun wechselt β gemäß den physikalischen Bedingungen (H, T), und jeder Wert von β und jeder Wert von ϱ_0 , resp. v_0 im Mittelpunkte der Kugel würde eine eigene Auswertung erfordern. Um dies zu vermeiden, verfahren wir auch hier, wie in Kap. IV mit der Gleichung (I).

Wir führen eine neue Variable

$$r = \beta r \text{ gramm}^{-\frac{1}{2}} \text{ cent}^{\frac{3}{2}}$$

ein, wodurch die Gleichungen (II) resp. (IIa) sich verwandeln in

$$(II') \quad \frac{d^2 \lg \varrho}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d \lg \varrho}{dr} + \varrho = 0$$

$$(II'a) \quad \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dv}{dr} + e^v = 0,$$

drücken die in den Gleichungen (126)–(132) gegebenen Größen durch β, v und r aus und erhalten

$$g = -\frac{4\pi G}{\beta} \frac{dv}{dr} \text{ cent sek}^{-2}$$

$$M = -\frac{4\pi}{\beta^2} r^2 \frac{dv}{dr} \text{ gramm}$$

$$\Omega = -\frac{4\pi G}{\beta^2} v + \text{konst. cent}^2 \text{ sek}^{-2}$$

$$\bar{\varrho} = -\frac{3}{r} \frac{dv}{dr} \text{ gramm cent}^{-3}$$

$$\frac{\varrho_0}{\varrho} = -\frac{r}{3} \frac{e^{v_0}}{\frac{dv}{dr}}$$

$$\bar{g} = -\frac{4\pi G}{\beta r} (v - v_0) \text{ cent sek}^{-2}$$

$$\frac{g}{\bar{g}} = \frac{r}{v - v_0} \frac{dv}{dr}.$$

In (II') und (II'a) führen wir je eine neue Variable ϱ_1 resp. v_1 ein, gegeben durch

$$(133) \quad \varrho = P \varrho_1, \quad v = V + v_1, \quad e^v = e^V e^{v_1},$$

wo die dimensionslose Größe P und V die Zahlenwerte von ϱ resp. v im Mittelpunkte der Kugel bedeuten. Im Mittelpunkte der Kugel sind deshalb $\varrho_1 = 1$, $v_1 = 0$. Und führen wir weiter eine neue unabhängige Variable

$$(134) \quad r_1 = e^{\frac{V}{2}} r = \sqrt{P} v \text{ gramm}^{-\frac{1}{2}} \text{ cent}^{\frac{3}{2}}$$

ein, so erhalten wir die Gleichungen

$$(II'') \quad \frac{d^2 \lg \varrho_1}{dr_1^2} + \frac{2}{r_1} \frac{d \lg \varrho_1}{dr_1} + \varrho_1 = 0$$

$$(II''a) \quad \frac{d^2 v_1}{dr_1^2} + \frac{2}{r_1} \frac{dv_1}{dr_1} + e^{v_1} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen sind die Größen H , T und P , resp. V , durch welche die ∞^3 isothermen Gaskugeln sich voneinander unterscheiden, verschwunden. Die Lösung einer einzigen Gleichung liefert deshalb den Bau sämtlicher isothermer Gaskugeln. Es ergeben sich, wenn wir die neuen Variablen einführen

$$(135) \quad r = -\frac{r_1}{e^{\frac{v}{\nu}}} \text{ cent}$$

$$\qquad \qquad \qquad e^{\frac{v}{\nu}} \beta$$

$$(136) \quad g = -\frac{4\pi G}{\beta} e^{\frac{v}{\nu}} \frac{dv_1}{dr_1} \text{ cent sek}^{-2}$$

$$(137) \quad M = -\frac{4\pi}{\beta^3} \frac{1}{\nu} r_1^2 \frac{dv_1}{dr_1} \text{ gramm}$$

$$\qquad \qquad \qquad e^{\frac{v}{\nu}}$$

$$(138) \quad \Omega = -\frac{4\pi G}{\beta^2} (V + v_1) + \text{konst. cent}^2 \text{ sek}^{-2}$$

$$(139) \quad \bar{\rho} = -\frac{3}{r_1} e^{\frac{v}{\nu}} \frac{dv_1}{dr_1} \text{ gramm cent}^{-2}$$

$$(140) \quad \frac{\rho_0}{\rho} = -\frac{r_1 (e^{v_1} - 1)}{3} \frac{dv_1}{dr_1}$$

$$(141) \quad \bar{g} = -\frac{4\pi G}{\beta r_1} e^{\frac{v}{\nu}} v_1 \text{ cent sek}^{-2}$$

$$(142) \quad \frac{g}{\bar{g}} = \frac{r_1}{v_1} \frac{dv_1}{dr_1}.$$

(In diesen Gleichungen kann der Zahlenwert e^v durch den ihm gleichen Zahlenwert von P ersetzt werden.)

In dem Ausdrucke $\frac{\rho_0}{\rho}$ ist, wie in der entsprechenden Gleichung (89), verschwunden, was die verschiedenen Gaskugeln der Klasse $n = \infty$ voneinander unterscheidet. Nun kann von der Kontraktion, diese aufgefaßt als Verkürzung des Radius, unendlich ausgedehnter Kugeln nicht gesprochen werden. Allein ändert eine isotherme Kugel ihre Temperatur, so tritt nach (137) eine Bewegung der Massen längs des Radius ein, und diese Bewegung erfolgt der Art, daß Gleichung (140) erfüllt wird.

§ 5. Wir haben nun noch die Lösungskurve der Gleichung (II'a) numerisch festzulegen, und zwar für die Ausgangswerte $r_1 = 0$, $v_1 = 0$, $\frac{dv_1}{dr_1} = 0$ (denn $\frac{dv_1}{dr_1} = \frac{1}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dr_1}$ und $\frac{d\rho_1}{dr_1} = 0$). Aus der Gleichung (II''a) ergibt sich dann $\left(\frac{d^2 v_1}{dr_1^2}\right)_{r_1=0} = -\frac{1}{3}$. Die beiden Differentialquotienten haben also für den Mittelpunkt dieselben Ausgangswerte

wie $\frac{du_1}{dr_1}$ und $\frac{d^2u_1}{dr_1^2}$ der Gleichung (I''); statt $u_1 = 1$ aber haben wir hier $v_1 = 0$; ($\varrho_1 = 1$). Da $\frac{dv_1}{dr_1} = \frac{1}{\varrho_1} \frac{de_1}{dr_1}$ wie $\frac{dp}{dr_1}$ stets negativ ist, muß v_1 stets abnehmen. Ob aber v_1 bis $-\infty$, ϱ_1 und p bis zum Werte 0 für $r_1 = \infty$ herabsinken, kann a priori nicht entschieden werden.

Zur numerischen Auswertung der Gleichung (II'a) benutzen wir wieder das Seite 74 angeführte Verfahren von Kutta, daß auch hier rasche und bequeme Rechnung ermöglicht. Die gewonnenen Resultate sind in der Tabelle 14 zusammengestellt.

Tabelle 14.

r_1	$-v_1'$	$-v_1$	$\varrho_1 = e^{v_1}$	$\frac{2}{r_1^2}$	$-r_1 v_1'$	$-r_1^2 v_1'$
0	0	0	1	∞	0	0
$\frac{1}{4}$	0,08290	0,01037	0,98969	32	0,020725	0,00518
$\frac{3}{4}$	0,13225	0,04113	0,95971	8	0,08114	0,04057
$\frac{5}{4}$	0,23819	0,09113	0,91290	3,55556	0,17864	0,13398
1	0,30370	0,15903	0,85296	2,00000	0,30370	0,30370
$\frac{5}{2}$	0,36045	0,24225	0,78486	1,28000	0,45056	0,56321
$\frac{7}{2}$	0,40432	0,33817	0,71285	0,88889	0,60648	0,90972
$\frac{9}{4}$	0,44390	0,44488	0,64090	0,65806	0,77688	1,3595
2	0,47286	0,55967	0,57140	0,50000	0,94512	1,89144
$\frac{5}{3}$	0,50694	0,80584	0,44671	0,32000	1,26735	3,16888
3	0,51625	1,06226	0,34537	0,22222	1,54875	4,64620
$\frac{7}{3}$	0,51006	1,31937	0,26730	0,16327	1,78521	6,2483
$\frac{9}{4}$	0,49403	1,57071	0,20790	0,12500	1,97612	7,90448
$\frac{9}{2}$	0,47284	1,81246	0,16325	0,098765	2,12553	9,5650
5	0,44813	2,04264	0,12968	0,08000	2,24065	11,20325
6	0,39879	2,46598	0,08493	0,05556	1,89274	14,35344
7	0,35334	2,84160	0,05833	0,04082	2,47338	17,21366
8	0,31372	3,17489	0,04180	0,03125	2,50976	20,078
9	0,27989	3,47128	0,03108	0,02469	2,51900	22,670
10	0,25121	3,73646	0,02384	0,02000	2,51211	25,121
12	0,20605	4,19135	0,01513	0,013889	2,47260	29,671
14	0,17285	4,56861	0,01037	0,010204	2,41962	33,875
16	0,14784	4,88835	0,007534	0,0078125	2,36544	37,848
20	0,11321	5,40496	0,004494	0,005000	2,26420	45,284
25	0,08638	5,89864	0,002743	0,003200	2,1595	58,988
30	0,06940	6,28510	0,001864	0,002222	2,0820	62,460
35	0,05779	6,60138	0,0013585	0,001637	2,0229	70,801
40	0,04945	6,88825	0,001047	0,0012500	1,9780	79,110
50	0,03882	7,30243	0,0006740	0,0008000	1,9060	96,800
70	0,02657	9,98616	0,0003576	0,0004082	1,8599	130,193
100	0,01843	8,59506	$1,750 \cdot 10^{-4}$	$2,000 \cdot 10^{-4}$	1,8430	184,30
150	0,012450	9,34555	$8,735 \cdot 10^{-5}$	$8,889 \cdot 10^{-5}$	1,8675	280,125
200	0,009507	9,88742	$5,081 \cdot 10^{-5}$	$5,000 \cdot 10^{-5}$	1,9014	380,280
300	0,006527	10,66964	$2,324 \cdot 10^{-5}$	$2,222 \cdot 10^{-5}$	1,9581	587,430
400	0,004985	11,23825	$1,316 \cdot 10^{-5}$	$1,250 \cdot 10^{-5}$	1,9940	797,600
500	0,0040415	11,68344	$8,407 \cdot 10^{-6}$	$8,000 \cdot 10^{-6}$	2,02075	1010,375
700	0,0029133	12,36979	$4,245 \cdot 10^{-6}$	$4,082 \cdot 10^{-6}$	2,03931	1427,517
1000	0,0020451	13,09847	$2,047 \cdot 10^{-6}$	$2,000 \cdot 10^{-6}$	2,0451	2045,100
1500	0,0013610	13,92712	$8,044 \cdot 10^{-7}$	$8,889 \cdot 10^{-7}$	2,0415	3062,25
2000	0,0010158	14,51303	$4,928 \cdot 10^{-7}$	$5,000 \cdot 10^{-7}$	2,0316	3063,200

Die Tabelle enthält $-v_1, -\frac{dv_1}{dr_1}$, die Dichte $\rho_1 = e^{v_1}$, die bis r_1 eingeschlossene Masse $-r_1^2 \frac{dv_1}{dr_1}$, sowie die Werte von $\frac{2}{r_1^2}$ und $-r_1 \frac{dv_1}{dr_1}$ deren Bedeutung später zur Geltung kommen wird.

§ 6. Um die Gleichung (II'a)

$$\frac{d^2 v_1}{dr_1^2} + \frac{2}{r_1} \frac{dv_1}{dr_1} + e^{v_1} = 0$$

auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zu reduzieren, führen wir zwei neue Variable ein

$$(143) \quad r_1 = e^{-\vartheta}, \quad v_1 = \lg \rho_1 = 2\vartheta + z.$$

Für den Mittelpunkt $r_1 = 0, v_1 = 0$ haben wir somit $\vartheta = \infty, z_1 = -\infty$.

Für $r_1 = \infty$ ist $\vartheta = -\infty$, allein den Wert von z können wir nicht angeben, da wir nicht wissen, ob für $r_1 = \infty$ die Dichte ρ den Wert 0, v den Wert $-\infty$ erreicht. Finden wir aber umgekehrt, daß für $r_1 = \infty$ der Wert von z endlich bleibt, so lehrt (143), daß $v_1 = \lg \rho_1$ den Wert $-\infty$, also ρ_1 den Wert 0 annimmt.

Wir erhalten leicht

$$(144) \quad \begin{cases} \frac{dv_1}{dr_1} = -e^\vartheta \left(2 + \frac{dz}{d\vartheta} \right) \\ \frac{d^2 v_1}{dr_1^2} = e^{\vartheta} \left(2 + \frac{dz}{d\vartheta} + \frac{d^2 z}{d\vartheta^2} \right) \end{cases}$$

und in (II'a) eingesetzt

$$\frac{d^2 z}{d\vartheta^2} - \frac{dz}{d\vartheta} + e^z - 2 = 0.$$

Setzen wir weiter

$$(145) \quad \frac{dz}{d\vartheta} = y, \quad \frac{d^2 z}{d\vartheta^2} = \frac{dy}{d\vartheta} \frac{dz}{d\vartheta} = y \frac{dy}{dz}$$

so erhalten wir:

$$(III) \quad y \frac{dy}{dz} - y + e^z - 2 = 0.$$

Diese Gleichung erster Ordnung, auf welche wir die Gleichung (II'a) transformiert haben, ist das Seitenstück der Gleichung (I'a) der Seite 48, welche aus der Gleichung der polytropen Gaskugel für $n < \infty$ hervorgegangen ist.

Aus (143), (144), (145) erhalten wir leicht die weiteren Beziehungen, die wir brauchen werden:

$$(146) \quad y = -\left(r_1 \frac{dv_1}{dr_1} + 2 \right)$$

$$(147) \quad \frac{dy}{dz} = \frac{1}{y} \frac{d^2 z}{d\varrho^2} = - \frac{\frac{r_1^2}{r_1} \left(\frac{d^2 v_1}{dr_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{dv_1}{dr_1} \right)}{\frac{r_1}{r_1} \frac{dv_1}{dr_1} + 2} = + \frac{\frac{1}{r_1} \frac{dv_1}{dr_1} + e^{r_1}}{\frac{1}{r_1} \frac{dv_1}{dr_1} + \frac{2}{r_1^2}}$$

und daraus

$$(148) \quad \text{für } r_1 = 0; \quad y = -2, \quad \frac{dy}{dz} = 0.$$

§ 7. Die Gleichung (III) scheint sich nicht durch bekannte Funktionen integrieren zu lassen.

Um den Verlauf der Lösungskurven überblicken zu können, konstruieren wir die Kurven gleicher Fortschreibungsrichtung, (vgl. oben Seite 50—58)

$$y = \frac{2 - e^z}{\frac{dy}{dz} - 1}$$

indem wir $\frac{dy}{dz}$ bestimmte Werte vorschreiben; wir erhalten so Diagramm 9a. Im Diagramm 9b sind die Verhältnisse um den Anfangspunkt des Koordinatensystems in vergrößertem Maßstabe wiedergegeben.

Sämtliche Kurven laufen in dem Punkte

$$(149) \quad y = 0, \quad e^z = 2, \quad z = \lg 2 = 0,69315$$

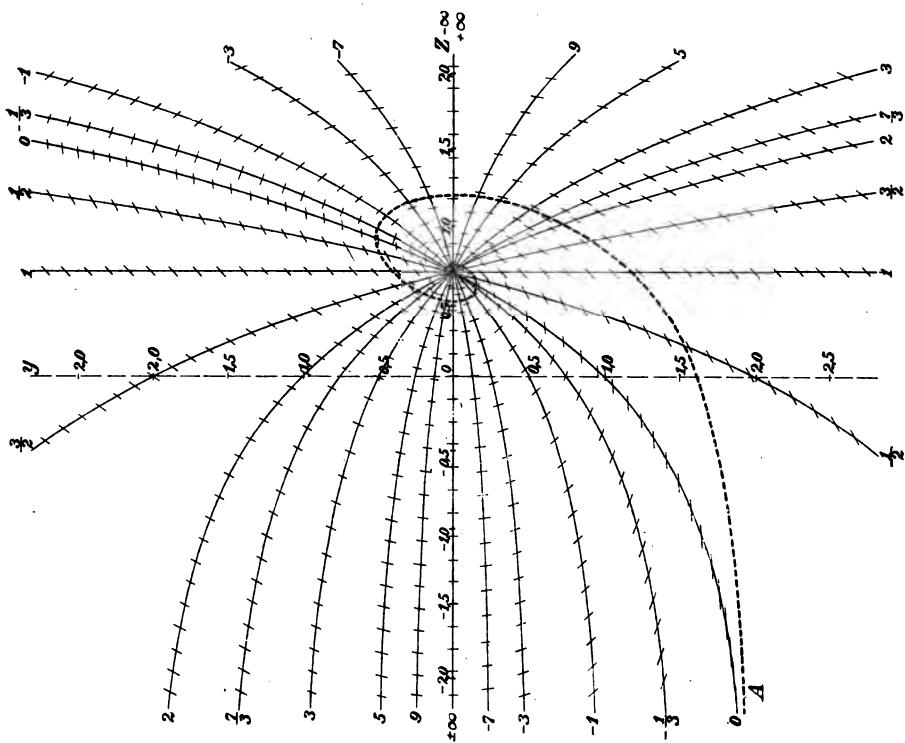
zusammen. Die Senkrechte in diesem Punkte liefert eine singuläre Lösung der Gleichung (III), und somit auch der Gleichung (II'a). Nach Gleichung (143) lautet dieselbe

$$(150) \quad \varrho_1 = e^{r_1} = \frac{2}{r_1^2}.$$

Diese Lösung entspricht der Seite 57 angegebenen singulären Lösung der Differentialgleichung polytropener Gaskugeln für $n < \infty$. Physikalisch ist diese Lösung, wie wir sehen werden, von großem Interesse, trotzdem sie die Mittelpunktsdichte $\varrho_1 = \infty$ liefert.

§ 8. Die Lösungskurve der Gleichung (III), welche den Bedingungen des vorliegenden Problems entspricht, ist nach (148) für $r_1 = 0, \quad z = -\infty$ durch die Werte $y = -2, \quad \frac{dy}{dz} = 0$ ausgezeichnet. Für sehr große negative z bleibt e^z lange = 0 und ändern sich infolgedessen y und $\frac{dy}{dz}$ wenig. Wie auch Diagr. 9a zeigt, fällt die Lösungskurve $y = f(z)$, von $y = -2, \quad z = -\infty$ kommend, lange Zeit mit der Kurve gleicher Fortschreibungsrichtung $\frac{dy}{dz} = 0$ nahe zusammen, um sich dann langsam der z -Achse zu nähern. Die Senkrechte $z = 0$ durchsetzt sie an einem Punkte, der nach (143) der Beziehung $\varrho_1 = \frac{1}{r_1^2}$ entspricht. Stärker sich aufwärts krümmend durch-

Diagramm 9b.



setzt sie die z -Achse senkrecht und beginnt den Punkt $z = \lg 2$, $y = 0$ zu umkreisen, wobei sie stets die z -Achse senkrecht, die Senkrechte $z = \lg 2$ unter 45° geneigt, durchsetzt. Wir werden in § 10 beweisen, 1) daß sie nach unendlich vielen Umläufen in diesem Punkte einmündet und 2) daß das Einmünden dem Unendlichwerden von r_1 entspricht. Daraus folgt: Für $r_1 = \infty$ ist z endlich = $\lg 2$ und zeigt Gleichung (143), daß hier $v_1 = -\infty$, $\varrho_1 = 0$ wird. Das heißt:

Druck und Dichte einer isothermen Gaskugel sind für unendlich große Werte des Radius gleich Null.

Nun repräsentiert der Punkt $z = \lg 2$, $y = 0$ eine singuläre Lösung $\frac{2}{r_1^2}$, und nach unendlich vielen Umläufen fällt die Hauptlösungskurve mit der singulären Lösung zusammen. Das heißt:

Für immer größer werdende r_1 nähert sich die Hauptlösungskurve $v_1 = f(r_1)$ immer mehr der singulären Lösung, um im Unendlichen mit ihr zusammenzufallen. Je größer r_1 , desto genauer kann $\varrho_1 = e^{v_1}$ durch $\frac{2}{r_1^2}$ dargestellt werden, für $r_1 = \infty$ ist die Übereinstimmung vollständig.

Daraus können wir eine Reihe wichtiger Schlüsse ziehen. Die Masse der isothermen Kugel wächst wie $\int \varrho_1 r_1^2 dr_1$, in den äußeren Partieen also wie $\int dr_1$, woraus folgt:

Die Masse einer isothermen Gaskugel von endlicher Mittelpunktsdichte ist unendlich.

Für den Wert von g im Abstande r_1 hatten wir nach (136) $g = -\frac{4\pi G}{\beta} e^{\frac{v}{2}} \frac{dv_1}{dr_1}$; aus $e^{v_1} = \frac{2}{r_1^2}$ bilden wir $\frac{dv_1}{dr_1} = -\frac{2}{r_1^3}$ und schließen:

Der Wert von g nähert sich mit Annäherung an die Oberfläche asymptotisch dem Werte Null; ebenso (Gleichung 139) der Wert der mittleren Dichte $\bar{\varrho}_1$.

§ 9. Wir können nun die für $r_1 = 0$ und $r_1 = \infty$ auftretenden Werte der Lösungskurven $e^{v_1} = \varrho_1 = f(r_1)$ und $y = \varphi(z)$ vollständig angeben und erhalten

$$(151) \quad r_1 = 0: \quad \varrho_1 = 1, \quad v_1 = 0, \quad \frac{dv_1}{dr_1} = 0, \quad \frac{d^2v_1}{dr_1^2} = -\frac{1}{3}; \quad \vartheta = \infty, z = -\infty, \\ y = -2, \quad \frac{dy}{dz} = 0$$

$$r_1 = \infty: \quad \varrho_1 = 0, \quad v_1 = -\infty, \quad \frac{dv_1}{dr_1} = 0, \quad \frac{d^2v_1}{dr_1^2} = 0, \quad \vartheta = -\infty, z = \lg 2. \\ y = 0, \quad \frac{dy}{dz} = +1.$$

(Letzteres geht aus Gleichung (147) hervor.)

Angesichts der großen Wichtigkeit der Lösungskurve $y = f(z)$ habe ich dieselbe numerisch ausgewertet und wiederum die Methode von Kutta (siehe oben Seite 74) angewandt. Dabei ist aber ein einfacher Kunstgriff anzuwenden, da jede Methode, die auf der Taylor-schen Entwicklung beruht, an Stellen $\frac{dy}{dz} = \infty$ versagt, hier also an allen Stellen, an denen die z -Achse durchsetzt wird. Dem Unendlichwerden des Differentialquotienten auszuweichen wurde, sobald die Lösungskurve etwa in der Mitte des südöstlichen Quadranten angelangt war, die Rolle von abhängiger und unabhängiger Variablen vertauscht und ein solcher Wechsel vorgenommen, so oft die Spirale um 90° sich weiter gedreht hatte.

Der bequemeren Rechnung wegen wurden durch Einführung einer neuen unabhängigen Variablen $z_1 = z - \lg 2$ die Abszissen vom Verzweigungspunkte $z = \lg 2$ aus gerechnet. Die Gleichung (III) nimmt dann die Form an

$$(III') \quad y \frac{dy}{dz_1} - y + 2(e^{z_1} - 1) = 0.$$

Die Resultate der numerischen Auswertung dieser Gleichung sind in der Tabelle 15 zusammengestellt.

Verfolgt wurde die Spirale durch vier halbe Windungen. Weitere Rechnung ist überflüssig, da sich von da ab die engeren Windungen einfacher behandeln lassen. (§ 10.)

§ 10. a) Die Durchsetzungspunkte der Spiralen mit der Senkrechten im Verzweigungspunkte, $z = \lg 2$, sind von fundamentaler Wichtigkeit. Für dieselben ist, wie aus dem Diagramm der Fortschreibungsrichtungen ersichtlich, und wie auch aus der Gleichung (III) unmittelbar hervorgeht, $\frac{dy}{dz} = +1$. Infolgedessen ist an allen diesen Stellen, wie Gleichung (147) lehrt, $e^{z_1} = \varrho_1 = \frac{2}{r_1^2}$. Daraus folgt:

Die Hauptlösungskurve $\varrho_1 = e^{z_1} = f(r_1)$ schneidet die singuläre Lösung in unendlich vielen Punkten.

Wir untersuchen, ob in diesen Punkten Berührungs- oder Durchsetzung der Kurven stattfindet. Dazu schreiben wir die Gleichung (143) in der Form $e^{z_1} = \varrho_1 = \frac{e^z}{r_1^2}$. Messen wir die Abszissen nun vom Punkte $\lg z = 2$ aus, so haben wir zu setzen $z_1 = z - \lg 2$ und erhalten

$$(152) \quad \varrho_1 = e^{z_1} = \frac{2e^z}{r_1^2}.$$

Die Funktion e^{z_1} mißt also an jeder Stelle die Abweichung der

Tabelle 15.

z_1	y	$\frac{dy}{dz_1}$	e^{z_1}
— ∞	— 2	0	0
— 100,000	— 1,9999999	~ 0	~ 0
— 20,000	— 1,9999999	~ 0	$2,0611 \cdot 10^{-9}$
— 10,000	— 1,9999281	0,00000695	0,0000454
— 6,00000	— 1,9979817	0,0014711	0,0024788
— 2,00000	— 1,885989	0,08304	0,135335
— 1,40000	— 1,81304	0,16890	0,246597
— 1,00000	— 1,72720	0,26804	0,867880
— 0,80000	— 1,66679	0,38925	0,449329
— 0,60000	— 1,59028	0,48254	0,548798
— 0,40000	— 1,49183	0,55802	0,670320
— 0,24000	— 1,39223	0,69847	0,786623
— 0,12000	— 1,30138	0,82622	0,886921
— 0,00000	— 1,19231	1,00000	1,000000
+ 0,08547	— 1,10000	1,16223	1,089226
+ 0,16508	— 1,00000	1,35897	1,179487
+ 0,25780	— 0,86000	1,68391	1,294080
+ 0,34198	— 0,70000	2,16474	1,407661
+ 0,40668	— 0,54000	2,85860	1,501827
+ 0,45928	— 0,36000	4,23855	1,582988
+ 0,49174	— 0,18000	8,05733	1,635160
+ 0,50324	0,00000	∞	1,654070
+ 0,49241	+ 0,16000	6,95325	1,636260
+ 0,45952	+ 0,30000	2,88887	1,583380
+ 0,42410	+ 0,38000	1,78013	1,528224
+ 0,38175	+ 0,44000	— 1,11961	1,466317
+ 0,32000	+ 0,48970	— 0,54028	1,323180
+ 0,24000	+ 0,51249	— 0,05855	1,221400
+ 0,16000	+ 0,50204	+ 0,30878	1,127496
+ 0,08000	+ 0,46401	+ 0,64102	1,083287
0,00000	+ 0,39881	+ 1,00000	1,000000
— 0,066418	+ 0,32000	+ 1,40160	0,935748
— 0,115562	+ 0,24000	+ 1,90946	0,890865
— 0,150972	+ 0,16000	+ 2,75160	0,859872
— 0,173645	+ 0,08000	+ 4,98510	0,840596
— 0,182100	0,00000	∞	0,833518
— 0,175857	— 0,060000	— 4,39537	0,838739
— 0,161827	— 0,100000	— 1,98824	0,850588
— 0,129231	— 0,140000	— 0,73158	0,878789
— 0,090000	— 0,155383	— 0,10783	0,913931
— 0,050000	— 0,150338	+ 0,35120	0,951230
0,000000	— 0,117698	+ 1,00000	1,000000
+ 0,038992	— 0,060000	+ 2,32540	1,039762
+ 0,052554	— 0,000000	+ ∞	1,053959
+ 0,048959	+ 0,025000	— 3,01420	1,050175
+ 0,034023	+ 0,045000	— 0,53804	1,034608
+ 0,025000	+ 0,047586	— 0,06400	1,025315
+ 0,015000	+ 0,046138	+ 0,34487	1,015113
0,000000	+ 0,036330	+ 1,00000	1,000000
— 0,011399	+ 0,020000	+ 2,13340	0,988666
— 0,016386	0,000000	+ ∞	0,983899

Hauptlösung von der singulären Lösung. Letztere liegt für alle Punkte der Spirale links von der Geraden $e^z = 2$ oberhalb, für Punkte rechts der Geraden unterhalb der Hauptlösung. Hauptlösung und singuläre Lösung durchsetzen sich in unendlich vielen Punkten, um im Unendlichen zusammenzufallen; ihr gegenseitiger Vertikalabstand ändert sich wie e^{v_1} .

Die Ordinaten der vier ersten dieser Durchsetzungsstellen ergeben sich zu (Tabelle 15)

$$y = -1,19231 + 0,39881 - 0,117698 + 0,036330.$$

Bestimmen wir durch Anwendung Taylorscher Entwicklungen die entsprechenden Punkte des Radius r_1 unter Benutzung der Werte der Tabelle 14, so erhalten wir mit genügender Genauigkeit

r_1	v_1'	v_1	e^{v_1}	$\frac{2}{r_1^2}$
1,7815	-0,45830	-0,46175	0,63009	0,63009
14,581	-0,16494	-4,6663	0,009407	0,009407
174,0	-0,01081	-9,62511	0,00006605	0,00006606
$r_1 v_1'$				$-(r_1 v_1' + 2) = y$
	-0,81645			-1,1836
	-2,4054			+0,4054
	-1,8809			-0,1191.

Ein weiterer Punkt liegt in der Nähe von $r_1 = 1800$.

Die Genauigkeit dieser Zahlwerte erreicht selbstverständlich nicht diejenige der Tabelle 14, da sie aus dieser durch Annäherung abgeleitet sind. Immerhin zeigt die Übereinstimmung der so berechneten y mit den exakten Werten der Spirale eine für praktische Zwecke sehr große Genauigkeit.

b) Wir untersuchen weiter die Bedeutung der Punkte, an welchen die Spirale die z -Achse durchsetzt. An allen diesen Punkten ist $y=0$, $\frac{dy}{dz} = \infty$, und aus Gleichung (146), wie aus Gleichung (147) folgt:

$$(153) \quad y = 0; \quad \frac{dy}{dz} = \infty; \quad r_1 \frac{dv_1}{dr_1} = -2.$$

Bilden wir aus der singulären Lösung $e^{v_1} = \frac{2}{r_1^2}$ den Ausdruck $r_1 \frac{dv_1}{dr_1}$, so erhalten wir ebenfalls -2 , d. h.

Den unendlich vielen Stellen, an denen die Spirale die z -Achse durchsetzt, entsprechen unendlich viele Stellen, an welchen die Hauptlösung $e^{v_1} = f(r_1)$ und die singuläre Lösung $e^{v_1} = \frac{2}{r_1^2}$ parallele Tangenten besitzen.

Die Abszissen der vier ersten Durchsetzungsstellen sind

$$z_1 = 0,50324 \quad -0,182100 \quad 0,052554 \quad -0,016336.$$

Die entsprechenden Punkte des Radius r_1 finden wir mit genügender Genauigkeit aus Tabelle 14

r_1	v_1'	v_1	e^{v_1}	$r_1 v_1'$	$\frac{v_1 - 2 \lg r_1}{-\lg 2} = z_1$
4,0712	-0,49126	-1,6050	0,20089	-2,0000	+0,5097
37,531	-0,05329	-6,7415	0,001182	-2,0000	-0,18296
414,4	-0,004826	-11,309	0,00001236	-2,0000	+0,0509

Ein weiterer Punkt liegt in der Nähe von $r_1 = 4400$.

c) Bei jedem Umgange der Spiralen erreicht beim Durchschnitte der Fortschreitungsrichtung $\frac{dy}{dz} = 0$ die Ordinate $y = -\left(r_1 \frac{dv_1}{dr_1} + 2\right)$ ein Maximum und ein Minimum, dasselbe gilt demnach auch für

$$r_1 \frac{dv_1}{dr_1} = -(y + 2).$$

Die aufeinanderfolgenden Maxima und Minima nehmen nach Maßgabe von y ab; $r_1 \frac{dv_1}{dr_1}$ schmiegt sich immer mehr dem Werte -2 an, um denselben beim Einmünden der Spirale in den Verzweigungspunkt zu erreichen.

Wegen der später hervortretenden Wichtigkeit des ersten Minimalwertes von $r_1 v_1'$ wurde derselbe mit großer Sorgfalt mit Hilfe der Tabelle 14 berechnet; es ergab sich für diese Stelle

r_1	v_1'	v_1	e^{v_1}	$r_1 v_1'$	y
8,9910	-0,28018	-3,4687	0,031156	-2,5191*)	-0,5191.

Der erste Maximalwert von $r_1 v_1'$ liegt sehr nahe bei $r_1 = 100$ und kann genügend genau zu -1,843 angenommen werden. Der nächste Minimalwert -2,046 liegt ungefähr bei 1000.**)

[Diese Pendelung von $r_1 v_1'$ tritt selbst bei den letzten Werten r_1 der Tabelle 14 noch deutlich hervor; doch sind die Werte von $r_1 v_1'$ hier ungenauer, da v_1' mit $r_1 > 1000$ multipliziert wird. Diese nicht so genauen Werte von $r_1 v_1'$ zeigen aber, daß eine Unsicherheit von v_1' erst in der fünften Dezimale auftritt.]

*) Als exakten Wert vermute ich $2\sqrt[3]{2} = 2,5198$.

**) Die Bedeutung von $r_1 \frac{dv_1}{dr_1}$, sowie weiterer ausgezeichneter Stellen werden wir im nächsten Abschnitt kennen lernen.

§ 11. Wir haben noch das Verhalten der Spirale zu untersuchen, wenn sie sich dem Punkte $\lg z = 2$, $y = 0$, in immer engeren Windungen nähert.

In ihrer Gleichung

$$y \frac{dy}{dz} - y + e^z - 2 = 0$$

verlegen wir den Koordinatenanfangspunkt in den Verzweigungspunkt, indem wir wieder einführen $z_1 = z - \lg 2$ und erhalten

$$y \frac{dy}{dz_1} - y + 2e^{z_1} - 2 = 0.$$

Wir entwickeln e^{z_1} nach Potenzen von z_1 , und wenn wir so enge Windungen betrachten, daß wir nur die erste Potenz von z_1 beibehalten müssen, so können wir die Gleichung schreiben

$$y \frac{dy}{dz_1} - y + 2z_1 = 0.$$

Mit Hilfe der neuen Variablen $w = \frac{y}{z_1}$ verwandelt sich die Gleichung weiter in

$$\frac{w dw}{w^2 - w + 2} + \frac{dz_1}{z_1} = 0$$

und da

$$\begin{aligned} \int \frac{w dw}{w^2 - w + 2} &= \frac{1}{2} \lg(w^2 - w + 2) + \frac{1}{2} \int \frac{dw}{w^2 - w + 2} \\ \int \frac{dw}{w^2 - w + 2} &= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctg \frac{2w - 1}{\sqrt{7}} \end{aligned}$$

erhalten wir das Integral derselben

$$\lg z_1 + \frac{1}{2} \lg(w^2 - w + 2) + \frac{1}{\sqrt{7}} \arctg \frac{2w - 1}{\sqrt{7}} = \text{konst.}$$

Zur Interpretation führen wir Polarkoordinaten ein, indem wir setzen

$$y = p \sin \varphi, \quad z_1 = p \cos \varphi, \quad w = \operatorname{tg} \varphi$$

und erhalten durch leichte Transformation

$$\lg p + \frac{1}{2} \lg(1 - \sin \varphi \cos \varphi + \cos^2 \varphi) + \frac{1}{\sqrt{7}} \arctg \frac{2 \operatorname{tg} \varphi - 1}{\sqrt{7}} = \text{konst.}$$

Führen wir einen Hilfswinkel ω ein:

$$\sqrt{7} \operatorname{tg} \omega = 2 \operatorname{tg} \varphi - 1$$

und beachten, daß wir schreiben können

$$\begin{aligned} 1 - \sin \varphi \cos \varphi + \cos^2 \varphi &= \\ \cos^2 \varphi \left(\frac{1}{\cos^2 \varphi} - \operatorname{tg} \varphi + 1 \right) &= \cos^2 \varphi (2 + \operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg} \varphi) \end{aligned}$$

und

$$\cos^2 \omega = \frac{1}{1 + \left(\frac{2 \operatorname{tg} \varphi - 1}{\sqrt{7}} \right)^2} = \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{2 + \operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg} \varphi},$$

so daß wir haben

$$1 - \sin \varphi \cos \varphi + \cos^2 \varphi = \frac{7}{4} \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \omega},$$

so können wir die Lösung anschreiben in der Form

$$(154) \quad p = C \frac{\cos \omega}{\cos \varphi} e^{-\frac{\omega}{\sqrt{7}}}$$

$$(155) \quad z_1 = C \cos \omega e^{-\frac{\omega}{\sqrt{7}}}$$

$$(156) \quad y = \frac{C}{2} (\sqrt{7} \sin \omega + \cos \omega) e^{-\frac{\omega}{\sqrt{7}}}.$$

Die Spirale mündet also nach unendlich vielen Umläufen in den Punkt ein, den sie umkreist. So oft sich der Radiusvektor um 2π weiter dreht, nimmt seine Länge, ebenso die Länge der Ordinaten der

durch ihn bestimmten Punkte um das $e^{-\frac{\omega}{\sqrt{7}}} = 0,093031$ fache zu. Außerdem existiert für die Punkte der Spirale, die auf den Achsen liegen, noch die Periode π und nach jedem halben Umlauf der Spirale ändern sich ihre Ordinaten um das $e^{-\frac{\pi}{\sqrt{7}}} = 0,305010$ fache ihres Wertes.

Wir fanden für die y , welche die vier ersten halben Windungen auf der Geraden $z_1 = 0$ abschneiden, die Werte

$$-1,19231 \quad 0,39881 \quad -0,117698 \quad +0,03633.$$

Die sukzessiven Quotienten der Zahlwerte sind

$$0,33449 \quad 0,29504 \quad 0,30866.$$

Die vier ersten auf der z -Achse abgeschnittenen Strecken sind

$$0,50324 \quad -0,18210 \quad 0,05255 \quad -0,016336$$

mit den sukzessiven Quotienten

$$0,36185 \quad 0,28857 \quad 0,31085.$$

Die Quotienten der vierten und fünften Strecke würden sich somit dem theoretischen Werte 0,30501 so nähern, daß wir alle engeren Windungen aus dem Werte der vierten halben Windung mit Hilfe des

theoretischen Wertes $e^{-\frac{\pi}{\sqrt{7}}}$ ableiten können.

Um die engen Windungen der Spirale auf dem Radius r_1 abzubilden, differentiiieren wir (143) nach z_1 und erhalten

$$\frac{dr_1}{dz_1} = -e^{-\vartheta} \frac{d\vartheta}{dz_1} \quad \text{oder} \quad \frac{dr_1}{r_1} = -\frac{dz_1}{y}.$$

Für die engen Windungen haben wir nach (155) und (156)

$$dz_1 = -C \left(\frac{1}{\sqrt[7]{r}} \cos \omega + \sin \omega \right) e^{-\frac{\omega}{\sqrt[7]{r}}} d\omega = -\frac{2}{\sqrt[7]{r}} y d\omega$$

und somit

$$(157) \quad \frac{dr_1}{r_1} = +\frac{2}{\sqrt[7]{r}} d\omega; \quad r_1 = C_1 e^{+\frac{2}{\sqrt[7]{r}} \omega}.$$

Der Radius r_1 wird also unendlich, wenn die Spirale nach unendlich vielen Umläufen in den Verzweigungspunkt einmündet.

Dreht sich die Spirale von den Punkten, an welchen sie die Achsen durchsetzt, um den Winkel π weiter, so wachsen die zuge-

hörigen Werte von r_1 um das $e^{\frac{2\pi}{\sqrt[7]{r}}} = 10,7491$ fache ihres Wertes an. Die Stellen des Radius r_1 , an welchen die Hauptlösung und die singuläre Lösung sich durchsetzen oder parallele Tangenten besitzen, folgen sich immer mehr in geometrischer Progression; das Verhältnis zweier aufeinander folgender Werte wird immer genauer = 10,7491.

Um noch den Verlauf von ϱ_1 größere Werte von r_1 beurteilen zu können, differenzieren wir (143) und erhalten

$$d \lg \varrho_1 = \left(2 \frac{d\theta}{dz_1} + 1 \right) dz_1 = \left(\frac{2}{y} + 1 \right) dz_1.$$

Für kleine Werte von y können wir 1 gegen $\frac{2}{y}$ vernachlässigen, und wenn wir wie oben dz_1 durch $d\omega$ ausdrücken, erhalten wir

$$(158) \quad d \lg \varrho_1 = -\frac{4}{\sqrt[7]{r}} d\omega, \quad \varrho_1 = C_2 e^{-\frac{4}{\sqrt[7]{r}} \omega}.$$

Die Werte von ϱ_1 der Hauptlösung, welche den Stellen der Durchschneidung mit der singulären Lösung oder den Stellen gleicher Tangentenrichtung $(-\frac{2}{r})$ entsprechen, folgen immer genauer einer geometrischen Progression; jeder nächstfolgende Wert wird immer genauer um das $e^{-\frac{4\pi}{\sqrt[7]{r}}} = 0,0086548$ fache seines Betrages größer.

Wir hatten (152) gefunden $\varrho_1 = \frac{2}{r_1} e^{z_1}$. e^{z_1} mißt an jeder Stelle das Verhältnis der Werte der ϱ_1 der Hauptlösung und singulären Lösung. Seine Maximalwerte hat z_1 an den Durchsetzungsstellen der Spirale mit der z_1 -Achse; dieselben nehmen immer genauer im Verhältnis $e^{\frac{\pi}{\sqrt[7]{r}}} = 0,30501$ zu. Daraus folgt, daß sich die Hauptlösung der singulären Lösungen immer genauer anschmiegt, so daß für große

r_1 für praktische Zwecke an Stelle der Hauptlösung die singuläre Lösung $\varrho_1 = \frac{2}{r_1^2}$, angenommen werden kann.

Ferner finden wir leicht

$$(159) \quad \frac{dv_1}{dr_1} = - C_3 e^{-\frac{2\omega}{V^2}}$$

mit entsprechenden Perioden.

Beispielsweise: Wir fanden für die Stellen r_1 , an welchen Hauptlösung und singuläre Lösung zusammenfallen, die Werte

$$1,7815 \quad 14,581 \quad 174,0 \quad 1800.$$

Die sukzessiven Quotienten sind

$$8,185 \quad 11,933 \quad 10,34.$$

Die diesen Stellen zugeordneten Dichten $\varrho_1 = e^{v_1}$ sind

$$0,63009 \quad 0,009407 \quad 0,00006605 \quad 0,00000060.$$

Die sukzessiven Quotienten sind

$$0,01493 \quad 0,007021 \quad 0,009084.$$

Diese nähern sich den theoretischen Werten

$$10,7491 \quad \text{und} \quad 0,0086548$$

bereits so sehr, daß wir mit Hilfe des periodischen Gesetzes die Tabelle 14 beliebig weit fortsetzen können.

§ 12. Wir haben noch die Energetik der isothermen Gaskugel zu besprechen. Ihr Energieinhalt (ϵ) = $c_v T M$ ist wegen der unendlich großen Masse selbst unendlich. Um das Potential der Kugel auf sich selbst, ψ , zu bestimmen, berechnen wir das Verhältnis $\frac{\epsilon}{\psi}$. Wir haben in Erg

$$\begin{aligned} (\epsilon) &= \frac{c_0}{A} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r T dM = \frac{4\pi c_v}{A} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r T \varrho r^2 dr = \frac{4\pi}{\kappa-1} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r p r^2 dr \\ &= \frac{4\pi}{\kappa-1} \left[\frac{1}{3} r^3 p - \frac{1}{3} \int_0^r r^3 dp \right] \stackrel{\lim r \rightarrow \infty}{=} \frac{4\pi}{\kappa-1} \left\{ \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{3} r^3 p - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \int_0^r r^3 dp \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi &= - \lim_{r \rightarrow \infty} G \int_0^r \frac{MdM}{r} = - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r g r dM = - 4\pi \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r g \varrho r^3 dr \\ &= + 4\pi \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r r^3 dp. \end{aligned}$$

$$(160) \quad \frac{(\varepsilon)}{\psi} = + \frac{1}{\kappa - 1} \left\{ \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} r^3 p}{\int_0^r r^3 dp} - \frac{1}{3} \right\}.$$

$$(161) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} r^3 p}{\int_0^r r^3 dp} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2 p + \frac{1}{3} r^3 \frac{dp}{dr}}{r^2 \frac{dp}{dr}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{p}{r \frac{dp}{dr}} + \frac{1}{3}.$$

Da wir haben $p = \rho HT$ und für $r = \infty$ $\rho = \frac{2}{\beta r^3}$ ansetzen können, so ist $\left(\frac{-p}{r \frac{dp}{dr}} \right)_{r=\infty} = -\frac{1}{2}$. Wir erhalten somit

$$(162) \quad \frac{(\varepsilon)}{\psi} = -\frac{1}{2(\kappa - 1)}.$$

Das Selbstpotential der isothermen Gaskugel ist also ebenfalls unendlich; $\frac{(\varepsilon)}{\psi}$ ist aber endlich $= -\frac{1}{2(\kappa - 1)}$, während wir für polytrope Kugeln mit $\Re < \infty$ das Verhältnis $= \frac{1}{3(\kappa - 1)}$ erhielten.

Da wir stets haben $d(\varepsilon) = d(Q) + d(W)$, $d(W) = -d\psi$, können wir mit Berücksichtigung von (162) die den Gleichungen (112) entsprechenden Gleichungen für die isotherme Kugel aufstellen und erhalten durch leichte Umformung

$$(163) \quad \begin{aligned} \frac{Ed(Q)}{d(W)} &= \frac{Ed(Q)}{-d\psi} = \frac{3 - 2\kappa}{2(\kappa - 1)} \\ \frac{d(\varepsilon)}{d(W)} &= \frac{d(\varepsilon)}{-d\psi} = \frac{1}{2(\kappa - 1)} \\ \frac{Ed(Q)}{d(\varepsilon)} &= 3 - 2\kappa. \end{aligned}$$

Ändert sich durch Änderung der Temperatur T der Energiegehalt (ε) und das Selbstpotential ψ , so kann mit der Temperatursteigerung eine Wärmeabgabe nur verbunden sein, solange $\kappa > \frac{3}{2}$. Dies ist nur für einatomige Gase möglich, während bei polytropen Gas-Kugeln mit $n < 5$ noch zwei- und dreiatomige Gase dazu befähigt waren. Die Steigerung der Temperatur (Energie) verzehrt hier eben den $\frac{1}{2(\kappa - 1)}$ Teil der geleisteten Arbeit, bei den polytropen Kugeln nur den $\frac{1}{3(\kappa - 1)}$ Teil.

Zehntes Kapitel.

Polytrophe Gaskugeln mit unendlichem Radius.

§ 1. In Kapitel IV hatten wir die Differentialgleichung der polytropen Gaskugel

$$(I) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \alpha^2 u^n = 0$$

aufgestellt und vereinfacht in

$$(I'') \quad \frac{d^2 u_1}{dr_1^2} + \frac{2}{r_1} \frac{du_1}{dr_1} + u_1^n = 0.$$

Um das Verhalten der Lösungskurven dieses Systems von Differentialgleichungen überblicken zu können, hatten wir (Seite 48) durch Einführung von

$$r_1 = e^{-\vartheta}, \quad u_1 = e^{\frac{2}{n-1}\vartheta} z, \quad y = \frac{dz}{d\vartheta} = -r_1^{\frac{2}{n-1}} \left(r_1 \frac{du_1}{dr_1} + \frac{z}{n-1} u_1 \right)$$

dieselben auf das System der Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(I'a) \quad y \frac{dy}{dz} + \frac{5-n}{n-1} y + \frac{2(3-n)}{(n-1)^2} z + z^n = 0$$

zurückgeführt und hatten den Verlauf der Lösungskurven desselben überblicken können, indem wir (Diagramm 1—8) für verschiedene n das System der Kurven darstellten, welche von den Lösungskurven unter konstantem Winkel durchsetzt werden. Die Fälle $n \leq 5$ hatten wir damals erledigt. Für $n > 3$ trat in den Diagrammen der Kurven gleicher Durchsetzungsrichtung ein Verzweigungspunkt auf mit der Abszisse

$$z_0 = \left[\frac{2(n-3)}{(n-1)^2} \right]^{\frac{1}{n-1}}. \quad \text{Die Senkrechte in } z_0 \text{ lieferte die singuläre Lösung}$$

$$u_1 = \left[\frac{2(n-3)}{(n-1)^2} \right]^{\frac{1}{n-1}} \frac{1}{r_1^{\frac{2}{n-1}}}.$$

Die Lösungskurven von (I'a) verließen den Punkt $z = 0, y = 0$ nach rechts unten gerichtet und mündeten, die Oberfläche der Kugel bestimmend, nach Durchlaufen eines Bogens, der Ähnlichkeit hat mit einer halben Windung einer Spirale, bei $+y$ in die Ordinatenachse ein, wobei sie den für $n > 3$ auftretenden Verzweigungspunkt umgingen. Dadurch kam es zu zwei Schnitten mit der singulären Lösung, woraus zu schließen war, daß auch die Hauptlösung und die singuläre Lösung von (I'') sich an zwei Stellen durchsetzen. Mit wachsendem n wurde die Endordinate der Lösungskurve $y = f(z)$ immer kleiner, der Radius der Kugel immer größer, und mit $n = 5$ mündete

$y = f(\varepsilon)$ wieder in den Anfangspunkt des Koordinatensystems ein, und wurde der Radius der Gaskugel unendlich, wobei aber deren Masse noch endlich blieb. Würde mit weiter wachsendem n der Endwert von y weiter abnehmen, so müßte derselbe negativ werden. Für $u_1 = 0$ aber würde derselbe $= -r_1^{\frac{2}{n-1}}$. $r_1 \frac{du_1}{dr_1}$ und da $\frac{du_1}{dr_1} < 0$, kann der der Oberfläche entsprechende Endwert von y nicht kleiner als Null werden. Nun sahen wir bereits, daß für $n > 5$ der Sinn der Spirale, zu welcher sich die Fortschreitungsrichtungen in der Umgebung des Verzweigungspunktes zusammensetzen, wechselt, so daß eine Kurve, die den Verzweigungspunkt von rechts umschlingt, durch denselben abgefangen wird. Mit $n > 5$ löst sich deshalb der Endpunkt der Lösungskurve von (I'a) von der Ordinatenachse los und beginnt den Verzweigungspunkt in immer engeren Windungen zu umkreisen. Der Wert $n = 5$ ist somit ein kritischer Wert, der zwei vollständig verschiedene Bauarten von Gaskugeln auseinanderhält. Für $n > 5$ können wir aus dem bereits Bekannten vermuten, Gaskugeln zu erhalten, die in vielen Stücken den isothermen Gaskugeln gleichen; und ebenso wird die Differentialgleichung $\frac{d^2 u_1}{dr_1^2} + \frac{2}{r_1} \frac{du_1}{dr_1} + u_1^n = 0$ manche Eigenschaft mit der so verschiedenen aussehenden Differentialgleichung $\frac{d^2 u_1}{dr_1^2} + \frac{2}{r_1} \frac{du_1}{dr_1} + e_1 u_1 = 0$ gemein haben. Diese Verhältnisse für $n > 5$ haben wir nun zu untersuchen.

§ 2. Für jedes $n > 5$ durchsetzt die Spirale (vgl. Diagramm 8) die Senkrechte im Verzweigungspunkt in unendlich vielen Stellen; diese Senkrechte repräsentiert eine singuläre Lösung. Daraus folgt: *Für jedes $n > 5$ durchsetzen sich die Hauptlösung und die singuläre Lösung $u_1 = \left[\frac{2(3-n)}{(n-1)^2} \right]^{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{r_1^{\frac{n-1}{2}}}$ an unendlich vielen Stellen.* Wir

werden in dem folgenden Paragraphen zeigen, daß auch diese Abstände r_1 allmählich einer geometrischen Progression folgen.

Wir suchen die Stellen der Spirale, an welchen Hauptlösung und singuläre Lösung parallele Tangenten besitzen. Dazu bilden wir aus der singulären Lösung die Tangentenrichtung und erhalten

$$\frac{du_1}{dr_1} = -\frac{2}{n-1} \frac{u_1}{r_1}.$$

Um die Stelle der Spirale, welche dieser Tangentenrichtung der Hauptlösung entspricht, zu erhalten, führen wir mit Hilfe der Be-

ziehungen a und b der Seite 48 die Variablen der Spirale in diese Gleichung ein und erhalten

$$-r_1^{-\frac{n+1}{n-1}} \left(y + \frac{2}{n-1} z \right) = -\frac{2}{n-1} \cdot r_1^{-\frac{n+1}{n-1}} z \\ y = 0.$$

Dies sind die Schnittpunkte mit der z -Achse.

Für jedes n , $5 < n \leq \infty$ bestimmen die Schnittpunkte der Spirale mit dem Achsenkreuz im Verzweigungspunkt die Stellen, an welchen Hauptlösung und singuläre Lösung sich durchsetzen resp. parallele Tangenten besitzen.

§ 3. Wir führen zuerst den Nachweis, daß dem Einmünden der Lösungskurve in den Verzweigungspunkt das Unendlichwerden von r_1 entspricht. Die Gleichung

$$(I'a) \quad y \frac{dy}{dz} + \frac{5-n}{n-1} y + \frac{2(3-n)}{(n-1)^2} z + z^n = 0$$

formen wir um, indem wir die Abszisse z_1 vom Verzweigungspunkte aus rechnen. Setzen wir dazu

$$z_1 = z - z_0, \quad z_0 = + \left[\frac{2(n-3)}{(n-1)^2} \right]^{\frac{1}{n-1}}$$

und setzen ferner

$$\frac{5-n}{n-1} = a, \quad \left[\frac{2(3-n)}{(n-1)^2} \right] = b,$$

so können wir (I'a) schreiben

$$y \frac{dy}{dz_1} + ay + b \left[z_1 + z_0 \right] + z_0^n \left[1 + \frac{z_1}{z_0} \right]^n = 0.$$

Da z_0 von 0,7071 bis 1 ansteigt, wenn n von 5 bis ∞ wächst, so können wir für die inneren Windungen der Spirale (kleine z_1) höhere Potenzen von $\frac{z_1}{z_0}$ vernachlässigen, und beachten wir, daß $z_0^{n-1} = -b$ ist, so erhalten wir

$$y \frac{dy}{dz_1} + ay + (1-n)bz_1 = 0.$$

Führen wir die neue Variable w ein durch die Beziehung

$$y = wz_1,$$

so ergibt sich leicht

$$\frac{dz_1}{z_1} + \frac{w dw}{w^2 + aw + (1-n)b} = 0$$

und durch Integration

$$\lg z_1 + \frac{1}{2} \lg [w^2 + aw + (1-n)b] - \frac{a}{2} \int \frac{dw}{w^2 + aw + (1-n)b} = \text{Const.}$$

Wir bilden unter Beachtung, daß $a^2 - 4b = 1$

$$(a) \quad q = 4(1-n)b - a^2 = -(1+4nb) = \frac{7n^2 - 22n - 1}{(n-1)^2} = q > 0$$

für $n > 5$ und erhalten damit

$$\lg z_1 + \frac{1}{2} \lg [n^2 + aw + (1-n)b] - \frac{a}{\sqrt{q}} \operatorname{arctg} \frac{2w+a}{\sqrt{q}} = \text{Const.}$$

Wir führen Polarkoordinaten ein

$$y = p \sin \varphi, \quad z_1 = p \cos \varphi, \quad w = \operatorname{tg} \varphi.$$

Dies ergibt

$$(b) \quad \lg p + \frac{1}{2} \lg [\sin^2 \varphi + a \sin \varphi \cos \varphi + (1-n)b \cos^2 \varphi] - \frac{a}{\sqrt{q}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \varphi + a}{\sqrt{q}} = \text{Const.}$$

Weiter werde ein Winkel ω eingeführt

$$(c) \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi + a}{\sqrt{q}}.$$

Berücksichtigen wir, daß

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi + a \sin \varphi \cos \varphi + (1-n)b \cos^2 \varphi \\ = \cos^2 \varphi [\operatorname{tg}^2 \varphi + a \operatorname{tg} \varphi + (1-n)b] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \omega &= \frac{1}{1 + \left(\frac{2 \operatorname{tg} \varphi + a}{\sqrt{q}} \right)^2} = \frac{q}{4(1-n)b - a^2 + 4 \operatorname{tg}^2 \varphi + 4a \operatorname{tg} \varphi + a^2} \\ &= \frac{q}{4} \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \varphi + a \operatorname{tg} \varphi + (1-n)b} \end{aligned}$$

und somit

$$\sin^2 \varphi + a \sin \varphi \cos \varphi + (1-n)b \cos^2 \varphi = \frac{q}{4} \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \omega},$$

so können wir die gesuchte Lösung in der Form schreiben

$$(164) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = \frac{2C}{\sqrt{q}} \frac{\cos \omega}{\cos \varphi} e^{\frac{a}{\sqrt{q}} \omega} \\ y = C \left(\sin \omega - \frac{a}{\sqrt{q}} \cos \omega \right) e^{\frac{a}{\sqrt{q}} \omega} \\ z_1 = \frac{2C}{\sqrt{q}} \cos \omega e^{\frac{a}{\sqrt{q}} \omega} \\ \frac{a}{\sqrt{q}} = - \frac{n-5}{\sqrt{7n^2 - 22n - 1}}. \end{array} \right.$$

Die Spirale mündet also nach unendlich vielen Umläufen in den Punkt ein, den sie umkreist. Nach Zurücklegung eines Umlaufes haben der Radiusvektor und die Ordinaten um das $e^{\frac{2a}{\sqrt{q}} \pi}$ fache ihres

Wertes zugenommen. Außerdem existiert für die Punkte der Spiralen, die auf den Achsen liegen, noch die Periode π und die Abschnitte auf diesen haben im Verhältnis $e^{\frac{a}{\sqrt{q}}\pi}$ zugenommen. Für jede Klasse n hat dies Verhältnis einen andern durch $\frac{a}{\sqrt{q}} = -\frac{n-5}{\sqrt{7n^2-22n-1}}$ bedingten Wert. Für $n=5$ haben wir noch keine Spirale (entsprechend $\frac{a}{\sqrt{q}}=0$); $\frac{a}{\sqrt{q}}$ steigt mit n und erlangt mit $n=\infty$ den Wert $-\frac{1}{\sqrt{7}}$, so daß wir die Periode der isothermen Kugel ($n=\infty$) wiederfinden.

§ 4. Um die Spirale auf dem Radius r_1 zur Darstellung zu bringen, bilden wir aus $r_1 = e^{-\vartheta}$

$$\frac{dr_1}{dz_1} = -e^{-\vartheta} \frac{d\vartheta}{dz_1} = -\frac{r_1}{y}.$$

Setzen wir in

$$\frac{dr_1}{r_1} = -\frac{dz_1}{y}$$

die Werte (164) ein, so wird die rechte Seite $= +\frac{2}{\sqrt{q}} d\omega$ und wir erhalten

$$(165) \quad r_1 = C_1 e^{\frac{2}{\sqrt{q}}\omega} = C_1 e^{\frac{2(n-1)}{\sqrt{7n^2-22n-1}}\cdot\omega},$$

d. h. wenn die Spirale nach unendlich vielen Umläufen den Verzweigungspunkt erreicht hat, ist der Radius der Gaskugel unendlich geworden. Dabei hat die Spirale die Senkrechte $z_0 = 0$ unendlich oft durchsetzt. Jedem Schnittpunkt entspricht ein Schneiden der Hauptlösung und der singulären Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Wir bestimmen den vertikalen Abstand beider Lösungskurven für größere r_1 .

$$\text{Wir haben } u_1 = e^{\frac{2}{n-1}\vartheta} z = e^{\frac{2}{n-1}\vartheta} z_1 + e^{\frac{2}{n-1}\vartheta} z_0.$$

Der zweite Summand ist gleich den Werten u_1 der singulären Lösung. Bezeichnen wir den vertikalen Abstand der beiden Lösungskurven mit u_Δ , so haben wir

$$u_\Delta = e^{\frac{2}{n-1}\vartheta} z_1.$$

Wir bilden $\frac{du_\Delta}{dz_1}$ und erhalten

$$du_\Delta = e^{\frac{2}{n-1}\vartheta} \left[1 + \frac{2}{n-1} \frac{d\vartheta}{dz_1} z_1 \right] dz_1 = r_1^{-\frac{2}{n-1}} \left[1 + \frac{2}{n-1} \frac{z_1}{y} \right] dz_1;$$

aus (165) folgt für größere r_1

$$r_1^{-\frac{2}{n-1}} = C_1 e^{-\frac{4}{(n-1)\sqrt{q}} \omega},$$

und berücksichtigen wir ferner die Werte von z_1 und y nach Gleichung (164), so erhalten wir durch leichte Umformung

$$du_\Delta = \frac{C_2}{q} \left[a \cos \omega - \sin \omega \sqrt{q} - \frac{4}{n-1} \cos \omega \right] e^{\frac{a-\frac{4}{n-1}}{\sqrt{q}} \omega} d\omega.$$

Integrieren wir und berücksichtigen $a - \frac{4}{n-1} = -1$, so ergibt sich

$$(166) \quad u_\Delta = (C_3 \cos \omega + C_4 \sin \omega) e^{-\frac{1}{\sqrt{q}} \omega} \\ = [C_3 \cos \omega + C_4 \sin \omega] e^{-\frac{n-1}{\sqrt{7n^2-22n-1}} \omega},$$

d. h., so oft die Spirale einen ganzen Umlauf vollzogen, hat u_Δ um $e^{\frac{2\pi}{\sqrt{q}}}$ -fache seines Betrages zugenommen.

Daraus folgt:

Die Hauptlösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u_1}{dr_1^2} + \frac{2}{r_1} \frac{du_1}{dr_1} + u_1^n = 0, \quad n > 5,$$

d. h. diejenige Lösungskurve, die bei $r_1 = 0$ und $u_1 = 1$ ohne Singularität (horizontal) abgeht und die singuläre Lösung

$$u_1 = \left[\frac{2(n-3)}{(n-1)^2} \right]^{\frac{1}{n-1}} \frac{1}{r_1^{\frac{2}{n-1}}}$$

durchsetzen sich an unendlich vielen Stellen der Achse r_1 ; die Abszissenwerte dieser Durchsetzungsstellen folgen immer genauer einer geometrischen

Progression mit der Periode 2π und dem Quotienten $e^{\frac{2(n-1)}{\sqrt{7n^2-22n-1}} \pi}$; die Differenz der u_1 Werte beider Lösungen nehmen rasch ab, derart daß die positiven und negativen Differenzen unter sich immer genauer einer geometrischen Progression mit der Periode 2π und dem Quotienten $e^{\frac{2\pi}{\sqrt{q}}}$ bilden. An der Grenze $n = \infty$ wird $\sqrt{q} = \sqrt{7}$ und wir erhalten dieselben periodischen Verhältnisse wie bei der Differentialgleichung der isothermen Kugel. Für $r_1 = \infty$ fallen Hauptlösung und singuläre Lösung zusammen und ergeben gleichzeitig den Wert $u_1 = \text{Null}$.

Tabelle 12 gibt für $n = 6$ außer der Hauptlösung noch den

Verlauf der singulären Lösung $\frac{0,87604}{r_1^{\frac{2}{5}}}$, jene durchsetzt diese in der

Nähe der Stellen $r_1 = 0,5; 5;$ und $300, \dots$. Diese Strecke r_1 bis 300 wird durch eine Strecke der Spirale, weit vom Verzweigungspunkt entfernt, dargestellt, so daß der für enge Windungen geltende Zahlenwert der Periode noch nicht hervortritt. (Je näher n an 5, desto langsamer ziehen sich die Windungen der Spirale zusammen.)

Nun haben wir in Kap. V gezeigt, daß einem beliebig endlichen Werte von u_1 bei $r_1 = 0$ Rechnung getragen werden kann durch eine lineare Streckung der r_1 -Achse.

Das ausgesprochene Gesetz gilt deshalb für jede Lösungskurve, die bei $r_1 = 0$ bei endlichem u_1 -Werte horizontal abgeht. Auf der festliegenden singulären Lösungskurve verschieben sich die Schnittpunkte, das Gesetz der Perioden aber bleibt erhalten.

Da nun auch für $n > 5$ die Lösungskurve für $r_1 = \infty$ den Wert $u_1 = 0$ ergibt, folgt:

Alle polytropen Gaskugeln von $n = 0$ bis $n = \infty$ haben eine Oberfläche, an der Druck, Temperatur und Dichte die Werte Null annehmen. Für $n > 5$ liegt dieselbe im Unendlichen.

§ 5. Nehmen wir an, daß die Lösungsspirale der Differentialgleichung erster Ordnung sich um 2π weiter gedreht hat. Dann hat der Wert r_1 des Schnittpunktes der singulären und Hauptlösungskurve

der Differentialgleichung zweiter Ordnung sich um das $e^{\frac{4\pi}{n}}$ -fache vergrößert, die Differenz der u_1 -Werte beider Lösungen aber hat Gleichung (166) nur um das $e^{\frac{2\pi}{n}}$ -fache abgenommen. Daraus folgt, daß die Tangentenrichtungen an beiden Kurven immer paralleler verlaufen und für $r_1 = \infty$ zusammenfallen. Für $r_1 = \infty$ haben wir deshalb allgemein

$$\frac{du_1}{dr_1} = -\frac{2}{n-1} \left[\frac{2(n-3)}{(n-1)^2} \right]^{1/(n-1)} \cdot \left(\frac{1}{r_1^{2/(n-1)+1}} \right)_{r_1=\infty} = 0.$$

Daraus folgt nach Gleichung (85) der Satz:

Der Wert der Anziehungsbeschleunigung g von der Oberfläche aller polytropen Gaskugeln von $n \geq 5$ ist gleich Null.

Nach Gleichung (86) ist die Masse einer polytropen Gaskugel

proportional $-r_1^{\frac{2}{n}} \frac{du_1}{dr_1}$ gebildet an der Oberfläche der Kugel. Für $n > 5$ haben wir somit Masse proportional

$$+ \left(\frac{r_1^{\frac{2}{n}-1}}{r_1^{\frac{n}{n}-1} + 1} \right)_{r_1=\infty} = \left(r_1^{\frac{n-5}{n-1}} \right)_{r_1=\infty} = \infty.$$

Die Polytropenklasse $n = 5$ trennt somit die Gaskugeln endlicher und unendlicher Masse.

§ 6. Aus dem Verhalten der Hauptlösung zur singulären Lösung können wir einen wichtigen Schluß ziehen. Da wir haben $r_1 = \alpha r$ so lautet die singuläre Lösung der Differentialgleichung (I) S. 40

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \alpha^2 u^n = 0$$

$$u = \left[\frac{2(n-3)}{(n-1)^2} \right]^{\frac{1}{n-1}} \frac{1}{[\alpha r]^{\frac{2}{n-1}}},$$

und ist somit nur bedingt durch α . Die Hauptlösung enthält aber außerdem noch den Wert von u im Mittelpunkte der Kugel. Alle diese verschiedenen Hauptlösungskurven schmiegen sich aber derselben singulären Lösung an. Daraus folgt:

Alle Gaskugeln einer Klasse $5 < n \leq \infty$, die auf derselben Polytropen aus demselben Gase ($\alpha = \text{konst.}$) gebaut sind, zeigen in wachsenden Abständen vom Mittelpunkte ein immer gleichartigeres, vom Zustande im Mittelpunkte unabhängiges Verhalten; die Massen, die von wachsenden Kugelschalen eingeschlossen sind, werden immer genauer derselben Werte gleich. Denn $r^2 \frac{du}{dr}$ gebildet aus der singulären Lösung, enthält nur α .

§ 7. Wir haben noch die Energetik dieser Gaskugeln zu erledigen. Da die Masse unendlich, jedes Massenelement endliche Temperatur besitzt, ist der Energieinhalt (ε) selbst unendlich. Zur Berechnung des Verhältnisses Energiegehalt: Selbstpotential $\frac{(\varepsilon)}{\psi}$ verfahren wir ebenso wie in Kap. IX § 10 und erhalten wie dort die Formeln (160) und (163).

$$\frac{(\varepsilon)}{\psi} = \frac{1}{n-1} \left\{ \lim_{r=\infty} \frac{\frac{1}{3} r^3 p}{\int_0^r r^3 dp} - \frac{1}{3} \right\}$$

und

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} r^3 p}{\int_0^r r^3 dp} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{p}{r \frac{dp}{dr}} + \frac{1}{3}.$$

Da $p = u^{n+1} H \Theta_k$, und wir zur Bildung des $\lim_{r \rightarrow \infty}$ den Wert u der singulären Lösung benutzen können, in welcher wir $r_1 = \alpha r$ setzen, so ergibt sich

$$p = \left[\frac{2(n-3)}{(n-1)^2 \alpha^2} \right]^{\frac{n+1}{n-1}} \cdot \frac{1}{r^{\frac{2(n+1)}{n-1}}} H \Theta_k$$

und mit Hilfe dieses Wertes ergibt sich leicht

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{p}{r \frac{dp}{dr}} \right) = -\frac{n-1}{2(n+1)}$$

und somit

$$(167) \quad \frac{(\varepsilon)}{\psi} = -\frac{n-1}{n+1} \frac{1}{2(n-1)}, \quad 5 \leq n < \infty.$$

Für $n = 5$ ergibt sich $\frac{(\varepsilon)}{\psi} = -\frac{1}{3(n-1)}$, der Wert, den wir Kap. IX für Gaskugeln mit $n \leq 5$ berechneten; für $n = \infty$ erhalten wir das Verhältnis $\frac{(\varepsilon)}{\psi}$ der isothermen Kugel $= -\frac{1}{2(n-1)}$. Wächst n von 5 bis ∞ , so nimmt das Verhältnis $\frac{(\varepsilon)}{\psi}$ im Verhältnis $\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$ zu.

Da wir stets haben $d(\varepsilon) = d(W) + d(Q)$, $d(W) = -d\psi$, so erhalten wir für den Energieumsatz die Beziehungen:

$$(168) \quad \begin{cases} \frac{Ed(Q)}{d(W)} = \frac{d(Q)}{-d\psi} = \frac{(n-1)-(n+1)2(n-1)}{(n+1)2(n-1)} \\ \frac{d(\varepsilon)}{d(W)} = \frac{d(\varepsilon)}{-d\psi} = \frac{(n-1)}{(n+1)2(n-1)} \\ \frac{Ed(Q)}{d(\varepsilon)} = \frac{(n-1)-(n+1)2(n-1)}{(n-1)}. \end{cases}$$

(Für $n = 5$ erhalten wir die Gleichungen (112), für $n = \infty$ die Gleichungen (163)).

Während in Gaskugeln für $n \leq 5$ und $n = \infty$ der Energieumsatz unabhängig von der Polytropeklasse (n), einzig durch das Verhältnis der Wärmekapazität, α , bedingt ist, so kommt für $5 < n < \infty$ die Polytropenklasse mit in Betracht. Damit bei zugeführter Arbeit Wärme abgegeben werden kann, muß $(n-1)-(n+1)2(n-1) < 0$ und somit

$$\alpha > \frac{3n+1}{2(n+1)}$$

sein, für $n \gtrless 5$, $\alpha > \frac{4}{3}$, entsprechend ein- und zweiatomigen Gasen; für $n = \infty$, $\alpha > \frac{3}{2}$, entsprechend einatomigen Gasen. Für $n \gtrless 5$ wird für $\alpha = \frac{4}{3}$, (dreiatomige Gase) die zugeführte Arbeit vollständig zur Deckung der Energiesteigerung verwandt. Je größer n , desto geringer die Atomzahl der Gase, für welche $\frac{d(Q)}{d(W)} \leq 0$ sein kann. Damit für $n > 5$ die zugeführte Arbeit gerade noch zur Deckung der Energieerhöhung zweiatomiger Gase, $\alpha = \frac{7}{5}$, ausreicht, muß n den Wert 9, $k = \frac{10}{9}$, erreicht haben.

Fünfter Abschnitt.

Gemischte Systeme.

Elftes Kapitel.

Gaskugeln in starrer Hülle.

§ 1. Um den Mittelpunkt einer Gaskugel werde mit einem beliebigen Radius R eine Kugelfläche geschlagen und dieselbe als starr und wärmeundurchlässig angenommen. Die außerhalb derselben liegenden Gasmassen können wir dann entfernen, ohne daß die innerhalb derselben liegenden Gasmassen beeinflußt werden, da eine Kugelschale, deren Dichte nur Funktion des Radius ist, keine Kraftlinien in den umschlossenen Raum aussendet. Der Druck der Oberfläche wird durch die starre Hülle äquilibriert.

Wir können uns deshalb die Aufgabe stellen, einen kugelförmigen Hohlraum mit starrer Umhüllung derart mit Gas anzufüllen, daß dasselbe unter Einfluß innerer Gravitation im Gleichgewicht ist. Das Studium von Weltkörpern, deren Oberfläche erstarrt, deren Inneres genügend heiß ist, führt zu diesem Probleme.

A. Isotherme Gaskugel.

§ 2. Gegeben seien der Radius R dieser Kugel, ihre Masse M und die Gaskonstante H . Um die Temperatur derselben zu finden gehen wir aus von den beiden Formeln (135) und (137)

$$\begin{aligned} R &= \frac{r_1}{\nu} \text{ cent} \\ &\quad e^{\frac{2}{\beta}} \beta \\ M &= - \frac{4\pi}{\beta^3} \frac{1}{\nu} r_1^2 d v_1 \text{ gramm.} \end{aligned}$$

Durch Elimination von $e^{\frac{v}{2}} \beta$ erhalten wir

$$\beta^2 = \frac{4\pi G}{HT} = -4\pi \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{m}} r_1 \frac{dv_1}{dr_1} \text{ gramm}^{-1} \text{ sec t}$$

und daraus für T die Bestimmungsgleichung

$$(169) \quad HT = -\frac{1}{r_1} \cdot \frac{G\mathfrak{M}}{\mathfrak{m}} \text{ cent}^2 \text{ sek}^{-2},$$

die wir mit Hilfe des Begriffs der Höhe der homogenen Atmosphäre $\mathfrak{H}_{\mathfrak{M}} = \frac{HT}{g}$, $g = \frac{G\mathfrak{M}}{r^2}$, die wir an der Oberfläche der Kugel errichtet annehmen, eleganter schreiben können

$$(169a) \quad \mathfrak{H}_{\mathfrak{M}} = -\frac{1}{r_1} \frac{dv_1}{dr_1} \mathfrak{M} \text{ cent.}$$

Bei Anwendung der Gleichung (169a) haben wir aber stets zu beachten, daß $\mathfrak{H}_{\mathfrak{M}}$ an der Oberfläche zu bilden ist (vgl. Kap. I. § 8), so daß durch den daselbst herrschenden Wert von g nicht nur \mathfrak{M} , sondern auch die Masse \mathfrak{M} zur Geltung kommt, und schreiben ihre Höhe deshalb $\mathfrak{H}_{\mathfrak{M}}$.

Wir sehen, daß die gestellte Aufgabe unendlich viele Lösungen zuläßt, da $r_1 \frac{dv_1}{dr_1}$ beliebig ausgewählt werden kann. Aus den von 0 bis ∞ reichenden r_1 -Achsen können wir ein bis zu einem beliebigen Werte von r_1 reichendes Stück herausgreifen und dasselbe so strecken, daß es gleich dem Radius \mathfrak{M} wird; das auf ihm liegende Stück der v_1 Kurve kommt über \mathfrak{M} zur Darstellung. Haben wir so über den Wert von $r_1 \frac{dv_1}{dr_1}$ und damit gleichzeitig über das Übersetzungsver-

hältnis $e^{\frac{v}{2}} \beta$ verfügt, so ist nach (169) T , also auch β^2 bekannt und mit Hilfe von (135) und (137) erhalten wir für den Zahlenwert der Mittelpunktsdichte

$$(170) \quad e^v = -\frac{r_1}{\frac{dv_1}{dr_1}} \cdot \frac{\mathfrak{M}}{4\pi \mathfrak{M}^3} = -\frac{r_1}{\frac{3}{2} \frac{dv_1}{dr_1}} \bar{\rho},$$

welchen Wert wir durch Gleichung (140) auch direkt hätten finden können.

Eine Gasmasse \mathfrak{M} kann als isotherme Gaskugel in starrer Hülle vom Radius \mathfrak{M} bei unendlich vielen Temperaturen und dadurch bedingten unendlich vielen verschiedenen Anordnungen der Masse längs des Radius im Gleichgewichte sein.

Die merkwürdigen Verhältnisse, die hier eintreten, werden wir in den nächsten Paragraphen besprechen.

§ 3. In den Formeln (169) und (169a) tritt zur Bestimmung von T , resp. \mathfrak{H}_g , das Produkt $r_1 \frac{dv_1}{dr_1}$ auf. Nun schwankt aber, wie wir im Kapitel IX, § 9 b) nachwiesen, $-r_1 \frac{dv_1}{dr_1}$ mit wachsendem r_1 um den Wert 2. Wir deuten in der Fig. 8 den Gang von $-r_1 v_1'$ als

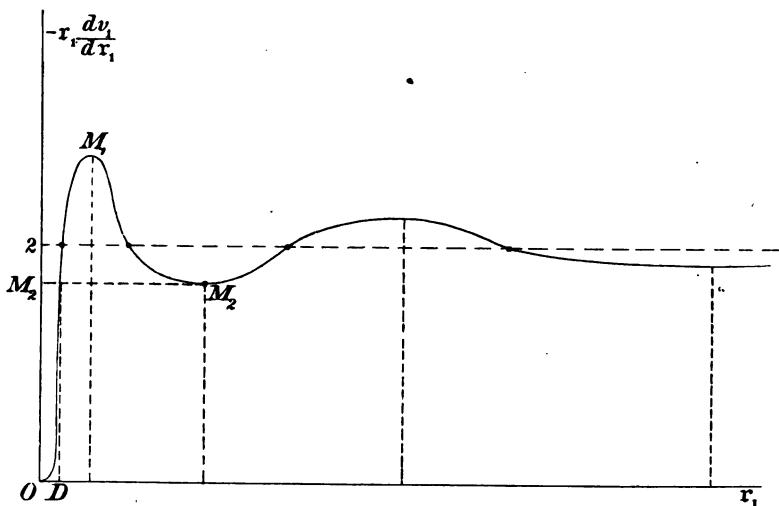


Fig. 8.

Funktion von r_1 an. In Wirklichkeit folgen die Abszissen der Ordinaten 2 immer genauer einer geometrischen Progression mit dem Quotienten $e^{\sqrt{7}} = 10,7491$; dieselbe Gesetzmäßigkeit gilt für die Abszissen der Stellen $\frac{d(r_1 v_1')}{dr_1} = 0$. Die Ordinaten dieser Stellen sind nach Gleichung (146) $= -(2 + y)$, worin die y allmählich in geometrischer Progression mit dem Quotienten $e^{-\frac{\pi}{\sqrt{7}}} = 0,30501$ abnehmen.

Nehmen wir zur Berechnung von T nach Gleichung (169) den Wert $-r_1 v_1' = 2$, so können wir unendlich viele Strecken der r_1 -Achse auswählen und auf dem Radius \Re abbilden. Es sind dies diejenigen Stellen, in welchen, wie wir im Kap. IX § 9 gezeigt haben, Hauptlösung und singuläre Lösung parallele Tangenten besitzen. Stets erhalten wir nach (169) resp. (169a) dieselbe Temperatur T der Kugel, resp. dieselbe Höhe der homogenen Atmosphäre \mathfrak{H}_g , nach (170) aber stets einen andern Wert der Mittelpunktsdichte und somit andern Aufbau der Kugel. Wir erhalten somit den Satz:

Eine isotherme Gaskugel von gegebener Masse und gegebenem Radius

in starrer Oberfläche kann auf unendlich viele verschiedene Arten so aufgebaut werden, daß die Höhe $\mathfrak{H}_\mathfrak{R}$ der homogenen Atmosphäre gleich dem halben Radius wird.

Die ersten Werte r_1 , die wir wählen müssen, um $r_1 v_1' = -2$ zu erhalten, sind Seite 143 angegeben.

Wählen wir anderseits $r_1 v_1'$ so, daß die Stelle von r_1 benutzt wird, an welcher $\frac{d(r_1 v_1')}{dr_1}$ zum n^{ten} Male gleich Null wird, so zeigt Fig. 8, daß dieser Wert von $r_1 v_1'$ noch an $n - 1$ Stellen, zwischen 0 und r_1 gelegen, auftritt. Wir erhalten so wiederum n gleich große Gaskugeln von gleicher Masse und Temperatur, welche verschiedenen Aufbau besitzen. Die Fig. 8 läßt ferner leicht überblicken, wie viele gleich temperierte, verschieden gebaute Kugeln möglich sind, je nach der Stelle r_1 , die wir auswählen; ebenso läßt sie die Stellen der r_1 -Achse erkennen, die wir zu wählen haben, um eindeutige Lösungen zu erhalten. Dazu können wir nur die Strecke OD benutzen, die eingeschlossen ist durch $r_1 = 0$ und den Wert r_1 , an welchem $r_1 v_1'$ den Wert besitzt, der dem zweiten Minimalwert M_2 gleich ist. Dieser zweite Minimalwert (vgl. Tabelle 14) kann genügend genau = 1,843 ($r_1 = 100$) angenommen werden; er findet sich zum ersten Male an der Stelle $r_1 = 3,7$. Alle Werte von r_1 , $0 < r_1 < 3,7$ liefern eindeutige Lösungen. Daneben existiert noch eine ausgezeichnete, eindeutige Lösung, gegeben durch den Maximalwert M_1 , den $-r_1 v_1'$ nicht über-
schreiten kann. Wir fanden denselben bei $r_1 = 8,991 \text{ gramm}^{-1} \text{ cent}^{\frac{3}{2}}$ zu $2,51910 = \frac{1}{0,39688}$. Daraus folgt der Satz:

Die tiefste Temperatur, bei welcher eine isotherme Gaskugel in starrer Hülle bestehen kann, ist dadurch bedingt, daß die Höhe ihrer homogenen Atmosphäre $\mathfrak{H}_\mathfrak{R} = 0,39688 \mathfrak{R}$ ist.

Von diesen Minimalwerten der Temperatur und Höhe der homogenen Atmosphäre sind für beide alle Werte bis ∞ möglich.

Diese isotherme Gaskugel niedrigster Temperatur (kleinsten Energiegehaltes!) wird weiterhin eine wichtige Rolle spielen. Wie Tabelle 14 zeigt, ist die Dichte im Mittelpunkt $\frac{1}{0,031156} = 32,090$ mal so groß wie die Dichte an der Oberfläche. In gleichem Verhältnisse stehen auch die Drucke an beiden Orten.

§ 4. Wir untersuchen, welche physikalische Bedeutung der Bedingungsgleichung $\frac{d(r_1 v_1')}{dr_1} = 0$ zukommt, die bei jedem Umlauf der Spirale (Kap. IX § 9) zweimal erfüllt wird. Wir schreiben sie

$$r_1 v_1'' + v_1' = 0,$$

und mit Berücksichtigung der Differentialgleichung (II'a) Seite 133

$$v_1'' + \frac{2}{r_1} v_1' + e^{v_1} = 0$$

erhalten wir die Bedingungsgleichung in der Form

$$(a) \quad \rho_1 = e^{v_1} = - \frac{v_1'}{r_1}.$$

Wir hatten (Gleichung 139) $\frac{\rho_0}{\bar{\rho}} = - \frac{r_1 (e^{v_1} - 1)}{3 v_1'}$. Da wir aus (a) auch bilden können

$$(b) \quad \rho = e^V \rho_1 = - \frac{v_1' e^V}{r_1},$$

erhalten wir aus den beiden letzten Beziehungen

$$(c) \quad \rho = \frac{\bar{\rho} (e^{v_1} - 1) e^V}{3 \rho_0}.$$

Da aber $(e^{v_1} - 1) e^V = e^{v_0} = \rho_0$, erhalten wir die Bedingungsgleichung $\frac{d(r_1 v_1')}{dr_1} = 0$ in der Form

$$(d) \quad \rho = \frac{\bar{\rho}}{3},$$

d. h. an jeder Stelle einer isothermen Kugel, an welcher $r_1 v_1'$ ein Maximum oder Minimum ist, beträgt die Dichte $\frac{1}{3}$ der bis zu dieser Stelle gerechneten mittleren Dichte.

Daraus folgt weiter der Satz:

Die Oberflächendichte einer isothermen Gaskugel mit starrer Oberfläche niedrigster Temperatur beträgt $\frac{1}{3}$, die Mittelpunktsdichte das 10,697fache der mittleren Dichte.

$^{2\pi}$

§ 5. Dieser Zahlwert 10,697 liegt dem Werte $e^{V/7} = 10,749$, dem Quotient einer bereits öfters aufgetretenen geometrischen Reihe, so nahe, daß wir zu untersuchen haben, ob nicht ein innerer Zusammenhang vorliegt.

Greifen wir zur Bildung der isothermen Gaskugel ($M = \text{konst.}$, $N = \text{konst.}$) immer größere Strecken r_1 heraus, entsprechend der Bedingung $\frac{d(r_1 v_1')}{dr_1} = 0$, so liegen in der Gaskugel immer mehr Kugelschalen, an welchen die Beziehung $\rho = \frac{\bar{\rho}}{3}$ erfüllt ist. Da diese Bedingung auch für die Oberfläche erfüllt ist, $\bar{\rho}$, die mittlere Dichte der Gesamtkugel aber konstant ist, so folgt, daß alle diese Gaskugeln gleiche Oberflächendichte besitzen. Da aber die Oberfläche, ausgedrückt in Einheiten der Mittelpunktsdichte, nach Tabelle 14 abnimmt, so

folgt, daß letztere durch die Reihe der Gaskugeln hindurch zunimmt.

Wir fanden Gleichung (158) $\varrho_1 = C_2 e^{-\frac{4}{V^7}\omega}$, d. h. für größere r_1 eine geometrische Reihe der ϱ_1 für Stellen, an welchen die Spirale einen ganzen Umgang macht. Dem Wechsel eines Maximums $r_1 v_1'$ zum Minimum entspricht ein Drehen der Spirale von einem Durchschnittspunkt der Fortschreibungsrichtung $\frac{dy}{dz} = 0$ zum nächsten, also um den Winkel π , da in den engeren Windungen die Kurven gleicher Fortschreibungsrichtung geradlinig angenommen werden können. Die zugehörigen ϱ nehmen also um $e^{-\frac{2\pi}{V^7}} = \frac{1}{10,749}$ zu. Daraus folgt:

In einer Reihe isothermer Gaskugeln ($\mathfrak{M} = \text{konst.}$, $\mathfrak{N} = \text{konst.}$) mit starrer Oberfläche von (relativer) maximaler und minimaler Temperatur folgen die Mittelpunktsdichten immer genauer einer geometrischen Reihe, in der jede folgende um das $e^{\frac{2\pi}{V^7}} = 10,749$ fache der vorhergehenden zunimmt.

Wählen wir nun zum Bau der Kugel ein minimales Stück der r_1 -Achse, so wird die Mittelpunktsdichte ϱ_0 sehr nahe gleich der Oberflächendichte ϱ und wir haben im Grenzfall

$$\frac{\varrho_0}{\varrho} = \frac{\varrho}{\varrho} = -\frac{1}{3} \lim \left(\frac{r_1}{v_1'} \right) = +1.$$

Der Umstand, daß bereits bei der Kugel niedrigster Temperatur das Verhältnis $\frac{\varrho_0}{\varrho}$ sehr nahe $= 10,749$ ist, zeigt, daß das eben ausgesprochene Gesetz schon für sehr frühe Glieder der Reihen erfüllt wird.

§. 6. Analoge Untersuchungen, wie im vorigen Paragraph in Bezug auf die Temperatur, stellen wir nun an in Bezug auf die Oberflächendichte. Eine isotherme Gaskugel mit starrer Oberfläche, Masse und Radius gegeben, soll so aufgebaut werden, daß die Oberflächendichte ϱ ein Minimum wird. Da die mittlere Dichte $\bar{\varrho} = \frac{3\mathfrak{M}}{4\pi\mathfrak{N}^3}$ gegeben, suchen wir das Minimum von $\frac{\varrho}{\bar{\varrho}}$ und gehen aus von der Beziehung (139) $\frac{\varrho_0}{\varrho} = -\frac{r_1(e^{v_1} - 1)}{3v_1'}$, und da wir haben $\varrho : \varrho_0 = e^{v_1} : (e^{v_1} - 1)$ können wir setzen

$$(a) \quad \frac{\varrho}{\bar{\varrho}} = -\frac{r_1 e^{v_1}}{3 v_1'}.$$

Um das Minimum dieses Ausdrückes zu finden, differentiiieren wir

nach r_1 , vereinfachen das Resultat mit Hilfe der Differentialgleichung
 $v_1'' + \frac{2}{r_1} v_1' + e^{v_1} = 0$ und erhalten

$$(b) \quad \frac{d\left(\frac{\varrho}{\varrho}\right)}{dr_1} = - \frac{r_1 e^{v_1} \left(v_1'^2 + \frac{3}{r_1} v_1' + e^{v_1}\right)}{3 v_1'^2},$$

und dies gleich Null gesetzt gibt die Bedingungsgleichung

$$(c) \quad v_1'^2 + \frac{3}{r_1} v_1' + e^{v_1} = 0.$$

Um Einblick in den Mechanismus dieser Gleichung zu erlangen, führen wir mit Hilfe der Gleichung (139) die Variablen der Spiralen ein, vereinfachen mit Hilfe ihrer Differentialgleichung (III), Seite 136
 $yy' - y + e^y - 2 = 0$ und erhalten leicht

$$(b') \quad \frac{d\left(\frac{\varrho}{\varrho}\right)}{dr_1} = - \frac{e^y e^y y (y + 2 - y')}{3 (2 + y)^2}$$

und die Bedingungsgleichung

$$(c') \quad y(y + 2 - y') = 0.$$

Da bei jedem Umgange der Spiralen y' von $-\infty$ bis $+\infty$ variiert, wird bei jedem Umlauf (c') zweimal erfüllt. Jeder Umlauf der Spirale liefert also zwei Lösungen des Problems. Für die engen Windungen der Spirale (y klein gegen 2) liegen diese Stellen immer genauer an den Durchschneidungsstellen der Spirale mit den Kurven der Fortschreibungsrichtung + 2. (Die Achse $y = 0$ gibt keine Lösung, da für dieselbe $y' = \infty$ ist, und $yy' = 0 \cdot \infty$ gemäß der Differentialgleichung der Spiralen $= e^y - 2$ wird.)

Nachdem wir eine unendliche Reihe Nullstellen von $\frac{d\left(\frac{\varrho}{\varrho}\right)}{dr_1}$ gefunden haben, müssen wir die Frage entscheiden, ob diese eine Reihe abwechselnder relativer Maxima und Minima bedingen, oder ob die Kurve $\frac{\varrho}{\varrho} = f(r_1)$ so verläuft, daß ihre Tangenten bei stets gleichem Vorzeichen sich unendlich oft horizontal stellen. Nun zeigt ein einfacher Vergleich der Formel (b') und des Diagramms der Fortschreibungsrichtungen, daß im Verlauf der Spirale $y + 2 - y'$, somit auch die linke Seite von (b'), beim Durchschreiten der Nullstelle das Vorzeichen wechselt. (Nicht auch beim Durchschreiten der z -Achse, denn beim Zeichenwechsel von y wechselt y' in umgekehrtem Sinne das Vorzeichen von ∞). $\frac{\varrho}{\varrho}$ durchläuft also eine Reihe abnehmender

Maxima und Minima, die sich immer mehr dem Werte $\frac{1}{3}$ anschmiegen

(denn wir haben $e^{v_1} = \varrho_1 = \frac{2}{r_1^2}$ für $r_1 = \infty$). Das erste Maximum im Werte 1 erhalten wir, wenn wir nur ein unendlich kleines Stück von r_1 auf \Re abbilden. Der erste brauchbare Wert von r_1 liefert deshalb ein Minimum. (Die numerische Auswertung der Spirale, Tab. 15, gibt in Übereinstimmung von $z = -\infty$ bis zur ersten Nullstelle von z die rechte Seite von (b') negativ.) Die Nullstellen selbst und die Werte zugehöriger $\frac{\varrho_0}{\varrho}$ finden wir, indem wir in Tabelle 14 durch geeignete Interpolation die Stellen aufsuchen, an welchen (c) erfüllt ist. An den drei ersten Nullstellen und $r_1 = \infty$ herrschen folgende Verhältnisse

$r_1 = 0$	22,88	252	∞
$v_1' = 0$	-0,096637	-0,007650	0
$\varrho_1 = e^{v_1} = 1$	0,003326	0,00003255	0
$\frac{\varrho_0}{\varrho} = 1$	0,26250	0,35742	$\frac{1}{3}$
$\frac{\varrho_0}{\varrho} = 1$	300,66	30722	∞ .

Das Verhältnis der Abstände r_1 , 252:22,88 ist = 11,01, also schon sehr nahe $= e^{\frac{2\pi}{V^7}} = 10,794$.

§ 7. Das im vorigen Paragraph behandelte Problem ändern wir dahin ab, daß wir die Minima und Maxima von $\frac{\varrho_0}{\varrho}$, des Verhältnisses der Mittelpunktsdichte zur mittleren Dichte aufsuchen.

Wir gehen aus von der Beziehung (139)

$$(a) \quad \frac{\varrho_0}{\varrho} = - \frac{r_1(e^{v_1} - 1)}{3v_1'}$$

und erhalten leicht

$$(b) \quad \frac{d\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)}{dr_1} = - \frac{3v_1' + r_1e^{v_1}}{3v_1'^2}.$$

Drücken wir den Zähler der rechten Seite durch die Variablen der Spirale aus und setzen ihn gleich Null, so ergibt sich

$$(c) \quad e^z - 3(2 + y) = 0.$$

Nun zeigt die numerische Auswertung der Spirale in den ersten Strecken und der Umstand, daß bald e^z stets nahe = 2 und y klein gegen 2, daß die linke Seite von (c) außer im Punkte $z = -\infty$ $y = -2$, nie mehr erfüllt werden kann, sondern stets < 0 ist. Die rechte Seite von (b) ist deshalb stets + und $\frac{\varrho_0}{\varrho}$ im Wachsen. Daraus folgt:

Verwenden wir zum Aufbau einer isothermen Gaskugel von gegebener Masse und Radius in starrer Hülle immer größere Stücke der r_1 -Achse, so nimmt das Verhältnis der Mittelpunktsdichte zur mittleren Dichte stets zu.

§ 8. Wir haben schließlich noch die wichtige Aufgabe zu lösen, die Gaskugel von gegebener Masse und Radius so aufzubauen, daß der Druck der Oberfläche auf die starre Hülle ein Minimum wird.

Bezeichnen wir denselben mit p , so ist allgemein

$$(a) \quad p = HT\bar{\rho} \text{ gramm cent}^{-1} \text{ sek}^{-2}.$$

Mit Benutzung von (a) des § 6 können wir dies schreiben

$$(b) \quad p = -HT\bar{\rho} \frac{r_1 e^{v_1}}{3 v_1'}$$

(wo $\bar{\rho}$ bekannt ist). Nun haben wir in § 2 gesehen, daß HT bestimmt ist durch (169) $HT = -\frac{G\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}} \frac{1}{r_1 v_1'}$, so daß p bestimmt ist durch

$$(c) \quad p = +\frac{G\mathfrak{M}\bar{\rho}}{\mathfrak{R}} \frac{e^{v_1}}{3(v_1')^2} = \frac{G\mathfrak{M}^2}{4\pi\mathfrak{R}^4} \cdot \frac{e^{v_1}}{(v_1')^2} \text{ gramm cent}^{-1} \text{ sek}^{-2}.$$

Wir suchen $\frac{dp}{dr_1} = 0$, erhalten durch leichte Transformation

$$(d) \quad \frac{d\left(\frac{e^{v_1}}{v_1'^2}\right)}{dr_1} = \frac{e^v(v'^2 - 2v'')}{v_1'^3} = \frac{e^v\left(v'^2 + \frac{4}{r_1}v' + 2e^{v_1}\right)}{v_1'^3},$$

so daß wir die Bedingungsgleichung haben

$$(e) \quad v'^2 + \frac{4}{r_1}v' + 2e^{v_1} = 0.$$

Führen wir wie oben die Variablen der Spirale ein, so ergibt sich

$$(f) \quad y + 2 - 2y' = 0.$$

Für die engen Windungen ist y klein gegen 2 und wir erhalten $y' = +1$. Der geometrische Ort dieser Punkte ist die Senkrechte im Verzweigungspunkte. Jeder Umgang der Spirale gibt nach (f) zwei Lösungen; sie werden bald bestimmt durch die Schnittpunkte der Spirale mit der Kurve der Fortschreibungsrichtung +1. Die dadurch bestimmten r_1 folgen also immer mehr einer geometrischen Reihe mit

dem Quotienten $e^{+\frac{2\pi}{V^2}}$. Der Differentialquotient (d) wechselt beim Durchgange durch jede Nullstelle sein Vorzeichen, wir haben es also mit unendlich vielen abwechselnden Maxima und Minima zu tun. Für $r_1 = 0$ wird p in (c) = ∞ ; das erste endliche r_1 bestimmt also ein Minimum. Dies geht auch daraus hervor, daß (f) in (d) eingesetzt für y in der Nähe von -2 und y' in der Nähe von 0 negatives Vor-

zeichen des Differentialquotienten ergibt. Die Lösungspunkte liegen, wie die Diagramme 9a und 9b zeigen, in der Nähe der Durchsetzungspunkte der Spirale mit der Kurve $y' = 0$, wodurch die Minima und Maxima der in § 3 besprochenen Temperaturen bedingt werden. *Die zum Bau einer isothermen Gaskugel möglichen Minima und Maxima der Temperatur bestimmen die Minima und Maxima ihres Druckes auf die starre Oberfläche angenähert, nicht, wie bei oberflächlicher Überlegung zu vermuten, exakt.* Zur Bestimmung der erforderlichen Werte von r_1 dient die Gleichung (e), die auch geschrieben werden kann

$$r_1 v_1' = -2 \mp 2 \sqrt{1 - \frac{r_1^2 e^{v_1}}{2}};$$

(der Vergleich mit dem Gange des Wertes $r_1 v_1'$ in Tabelle 14 ist sehr instruktiv). Durch geeignete Interpolation finden wir die Stelle des ersten Minimums von p (diese noch entfernt von der Stelle des ersten Minimums der Temperatur):

$$\begin{aligned} r_1 &= 15,936, \quad v_1' = -0,14852, \quad v_1 = -4,8785, \quad e^{v_1} = 0,007604, \\ \frac{e^{v_1}}{\varrho} &= 131,44, \quad r_1 v_1' = -2,3668, \quad \frac{p}{G \mathfrak{M}^2} = \frac{e^{v_1}}{(v_1')^2} = 0,34476. \end{aligned}$$

Die späteren Stellen fallen immer genauer auf diejenigen Stellen r_1 , an welchen Hauptlösung und singuläre Lösung zusammenfallen (vgl. Kap. IX § 9).

Für wachsende r_1 schwankt $\frac{e^{v_1}}{(v_1')^2}$ immer enger um den Wert $\frac{1}{2}$, wie sich leicht ergibt, da wir für $r_1 = \infty$ die singuläre Lösung für e^{v_1} benutzen können.

§ 9. Zusammenfassung. Überblicken wir nochmals die Ergebnisse der letzten Paragraphen. In einer starren Hülle von gegebenem Radius \mathfrak{R} können unendlich viele Gaskugeln von gleicher Masse \mathfrak{M} aufgebaut werden, da wir eine beliebig lange Strecke (vom Anfangspunkt aus gerechnet) der r_1 -Achse auf dem Radius \mathfrak{R} abbilden können. Gehen wir stetig zu immer größeren r_1 über, so ändern sich die Temperaturen derselben, oder ihre Oberflächendichte, oder ihr Oberflächendruck nicht immer im gleichen Sinne, sondern jede dieser Größen wird dargestellt durch eine fest über r_1 liegende Kurve mit abwechselnden Maxima und Minima; die Zahl dieser Wellen wird mit r_1 zugleich unendlich. Daraus folgt, daß die Angabe einer Ordinate die Kugel meistens noch nicht eindeutig bestimmt. Tragen wir, wie wir es in Fig. 8 für $r_1 v_1'$ getan haben, die T , ϱ und p bestimmenden Größen — $r_1 v_1'$, — $\frac{r_1 e^{v_1}}{3 v_1'}$

und $\frac{e^{\nu_1}}{(v_1)^2}$ graphisch auf, so sehen wir leicht, daß der n^{te} Punkt horizontaler Tangente n Lösungen bestimmt. Die Werte 2 im Temperaturproblem, $\frac{1}{3}$ im Dichteproblem und $\frac{1}{2}$ im Druckproblem geben immer ∞ viele Lösungen; aus der Kurve können wir leicht beurteilen, wie viele Lösungen jeder Stelle von r_1 zukommen, und ermitteln, welches Anfangsstück der r_1 -Achse eindeutige Lösungen liefert. Eine ausgezeichnete eindeutige Lösung liefert jeweils außerdem die erste Stelle horizontaler Tangente. Aus den ermittelten Zahlen folgt:

Die Temperatur kann nie kleiner werden als

$$0,39688 \frac{G\mathfrak{M}}{H\mathfrak{R}}, \quad \frac{\rho_0}{\rho} = 10,697, \quad \frac{\rho_0}{\rho} = 32,090;$$

die Oberflächendichte kann nie kleiner werden als

$$0,26250 \frac{3\mathfrak{M}}{4\pi\mathfrak{R}^3} \text{ gramm}, \quad \frac{\rho_0}{\rho} = 78,914, \quad \frac{\rho_0}{\rho} = 300,66;$$

der Oberflächendruck kann nie kleiner werden als

$$0,34476 \frac{G\mathfrak{M}^2}{4\pi\mathfrak{R}^4} \text{ gramm cent}^{-1} \text{ sek}^{-2}, \quad \frac{\rho_0}{\rho} = 35,766, \quad \frac{\rho_0}{\rho} = 131,44.$$

Die Maxima und Minima werden durch die Lösungsspirale bestimmt, diejenigen der Temperatur durch die Schnittpunkte mit der Fortschreibungsrichtung 0, diejenigen der Oberflächendichte durch die Schnittpunkte mit der Fortschreibungsrichtung + 2, diejenigen des Oberflächendruckes mit der Fortschreibungsrichtung + 1, der Senkrechten im Verzweigungspunkt. Ihre Schnittpunkte mit der z -Achse bestimmen unendlich viele Gaskugeln, die dieselbe Temperatur besitzen, ausgezeichnet dadurch, daß die Höhe ihrer homogenen Atmosphäre gleich dem halben Radius ist; an diesen Stellen haben Hauptlösung und singuläre Lösung parallele Tangenten. Ihre Schnittpunkte mit der Senkrechten im Verzweigungspunkte bestimmen die Schnittpunkte der Hauptlösung und der singulären Lösung und gleichzeitig die Kugeln kleinsten Oberflächendruckes. Die geometrischen Reihen, denen wir begegnet sind, sind in folgendem allgemeinen Gesetze enthalten:

Durch die Schnittpunkte (der nicht zu weiten Windungen) der Spirale mit den ∞ vielen Kurven konstanter Fortschreibungsrichtung werden auf der r_1 -Achse unendlich viele Punktreihen herausgehoben; in jeder derselben wachsen (bei Drehung der Spirale um π) in immer genauer werdender geometrischer Progression: die Abstände der Punkte vom Anfangspunkte mit dem (Vergrößerungs-) Quotienten $e^{+\frac{2\pi}{V^2}}$, die zugeordneten

Dichten $\rho_1 = e^{v_1}$ mit dem Quotienten $e^{-\frac{4\pi}{V^7}}$, die zugehörigen Differenzialquotienten $\frac{dv_1}{dr_1}$ mit $e^{-\frac{2\pi}{V^7}}$, die Größe $v' r_1 - 2$ mit $e^{-\frac{\pi}{V^7}}$ und die Verhältnisse $\frac{1}{\rho_1} = -\frac{r_1}{3v_1}$ mit $e^{+\frac{4\pi}{V^7}}$. $(e^{\frac{\pi}{V^7}} = 3,2785; e^{\frac{2\pi}{V^7}} = 10,749; e^{\frac{4\pi}{V^7}} = 115,54)$.

§ 10. Die Lösung des Druckproblems erlaubt eine wichtige Folgerung zu ziehen.

Ist eine Gasmasse M_i gramm als isotherme Kugel vom Radius R cent aufgebaut, so kann der Druck an der Oberfläche nie kleiner sein als

$$(a) \quad p_{\min} = 0,34476 \frac{G M_i^2}{4\pi R^4} = 0,34476 g_i \frac{M_i}{4\pi R^4} \text{ Dynen cent}^{-2}$$

wenn g_i die Schwerkraftbeschleunigung von der Oberfläche bedeutet. Die Starrheit der Hülle werde ersetzt durch das Gewicht einer aufgelagerten Kugelschale von der Masse M_a . Der Druck derselben auf die Oberfläche des isothermen Kernes wird ein Maximum, wenn wir M_a als möglichst dünne Kugelschale von möglichst großer, gleichmäßiger Dichte annehmen. Da in einer Kugelschale konstanter Dichte g proportional der Entfernung vom Mittelpunkt zunimmt, ist der Maximaldruck, den die Masse M_a ausüben kann

$$p_{\max} = \frac{g_i + g_a}{2} \frac{M_a}{4\pi R^4} \text{ Dynen cent}^{-2},$$

wenn g_a an der Oberfläche der Schale gilt. Da aber die Beziehung besteht

$$g_a : g_i = M_a : M_i$$

so ist

$$(b) \quad p_{\max} = g_i \left(1 + \frac{M_a}{2M_i}\right) \frac{M_a}{4\pi R^4} \text{ Dynen cent}^{-2}.$$

Dieser maximale Druck kann durch keine größere Innenmasse äquilibriert werden, als durch (a) bestimmt ist. Setzen wir also $p_{\min} = p_{\max}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{M_a}{M_i} &= 0,29980 \\ (171) \quad M_i &= 0,76933 (M_a + M_i) \end{aligned}$$

und den Satz:

Besitzt eine Gaskugel einen isothermen Kern, so kann die Masse desselben nie mehr betragen als 76,933 % der Masse der ganzen Kugel.

§ 11. Wir haben noch, was für spätere Untersuchungen wichtig, die Energetik der isothermen Gaskugel mit starrer Oberfläche zu behandeln. In Kap. IX § 11 haben wir gezeigt, daß für die vollständige Gaskugel das Verhältnis $(\varepsilon) : \psi$ den Wert $-\frac{1}{2(\kappa-1)}$ besitzt, wobei (ε) und ψ selbst unendlich waren. Wir gehen dazu über, (ε) und ψ für Gaskugeln in starrer Hülle aufzusuchen. Den Energiegehalt (ε) finden wir sehr einfach zu

$$(172) \quad (\varepsilon) = c_v T \mathfrak{M} \text{ Cal} = \frac{1}{\kappa-1} HT \mathfrak{M} \text{ Erg.}$$

Beachten wir die Untersuchungen des § 3 über die Abhängigkeit von der Temperatur von \mathfrak{M} und \mathfrak{R} , so sehen wir, daß auch der Energiegehalt (ε) Maxima und Minima besitzt. Was dort für HT ermittelt, gilt auch für (ε) . Daraus folgt:

Der Energiegehalt einer isothermen Gaskugel in starrer Hülle kann nie kleiner werden als $\frac{0,39688}{\kappa-1} \frac{G \mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}}$; für den Energiegehalt $\frac{1}{2(\kappa-1)} \frac{G \mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}}$ gibt es unendlich viele verschiedene Bauarten der Gaskugel.

Wir hatten bereits durch Gleichung (33) angegeben, daß die lebendige Kraft der Fortschreitungsbewegung der Moleküle pro Masseneinheit gegeben ist durch $HT = \frac{2}{3} L$. Bezeichnen wir das mittlere Geschwindigkeitsquadrat der Moleküle mit \bar{V}^2 , so ist $L = \frac{1}{2} \bar{V}^2$ und wir können auch setzen

$$(172a) \quad (\varepsilon) = \frac{2}{3(\kappa-1)} L \mathfrak{M} = \frac{1}{3(\kappa-1)} \mathfrak{M} \bar{V}^2. \text{ Erg.}$$

Zur Berechnung des Selbstpotentials der Gaskugel $\psi = - G \int_0^{\mathfrak{R}} \frac{M dM}{r}$ setzen wir wieder

$$M = - \frac{4\pi}{e^{\frac{1}{2}} \beta^3} r_1^3 \frac{dv_1}{dr_1} \text{ gramm}$$

$$dM = - \frac{4\pi}{e^{\frac{1}{2}} \beta^3} \left[r_1^2 \frac{d^2 v_1}{dr_1^2} + 2 r_1 \frac{dv_1}{dr_1} \right] dr_1 = + \frac{4\pi}{e^{\frac{1}{2}} \beta^3} r_1^2 e^{v_1} dr_1 \text{ gramm}$$

$$r = - \frac{r_1}{e^{\frac{1}{2}} \beta} \text{ cent.}$$

Wir erhalten

$$(173) \quad \psi = \frac{(4\pi)^3 G}{e^{\frac{1}{2}} \beta^5} \int_0^{\mathfrak{R}} r_1^3 e^{v_1} \frac{dv_1}{dr_1} dr_1 \text{ Erg.}$$

Wir formen um

$$\int r_1^3 e^{v_1} \frac{dv_1}{dr_1} dr_1 = r_1^3 e^{v_1} - 3 \int r_1^2 e^{v_1} dr_1 = r_1^3 e^{v_1} + 3 \int (r_1^2 \frac{d^2 v_1}{dr_1^2} + 2 r_1 \frac{dv_1}{dr_1}) dr_1 \\ = r_1^3 e^{v_1} + 3 r_1^2 \frac{dv_1}{dr_1}.$$

Für $r_1 = 0$ verschwinden beide Glieder, so daß wir haben

$$\psi = \frac{(4\pi)^2 G}{e^2 \beta^5} \left[r_1^3 e^{v_1} + 3 r_1^2 \frac{dv_1}{dr_1} \right]_{\Re}.$$

Benutzen wir die Beziehungen

$$\frac{1}{\bar{\varrho}_1} = - \frac{r_1}{3} \frac{dv_1}{dr_1} \quad \text{und} \quad \bar{\varrho} = e^v \bar{\varrho}_1,$$

so erhalten wir leicht

$$\psi = \left[\frac{(4\pi)^2 G r_1^3 \bar{\varrho}}{e^2 \beta^5} \left(\frac{e^{v_1}}{\bar{\varrho}_1} - 1 \right) \right]_{\Re} = \frac{(4\pi)^2 G \bar{\varrho} \Re^3}{\beta^2} \left[\frac{e^{v_1}}{\bar{\varrho}_1} - 1 \right]_{\Re}$$

und schließlich

$$(174) \quad \psi = 4\pi HT \Re^3 \bar{\varrho} \left[- \frac{r_1 e^{v_1}}{3 v_1} - 1 \right]_{\Re} = 3HT \mathfrak{M} \left[- \frac{r_1 e^{v_1}}{3 v_1} - 1 \right]_{\Re} \text{Erg.}$$

Für $r_1 \sim \infty$ haben wir $e^{v_1} = \frac{2}{r_1^2}$, die Klammer erhält den Wert $-\frac{2}{3}$, und wir finden wieder $\frac{(\varepsilon)}{\psi} = -\frac{1}{2(\kappa-1)}$.

Da wir in § 8 für den Oberflächendruck fanden $p = -HT \bar{\varrho} \frac{r_1 e^{v_1}}{3 v_1}$, so können wir schreiben

$$(174a) \quad \psi = 4\pi \Re^3 p - 3HT \mathfrak{M} = 4\pi \Re^3 p - 3(\kappa-1)(\varepsilon).$$

Wir sehen, für Gaskugeln mit starrer Oberfläche gilt die Beziehung (162) $\frac{(\varepsilon)}{\psi} = -\frac{1}{2(\kappa-1)}$ nicht mehr. Denn (ε) und p sind für gleiche \mathfrak{M} und \Re Funktionen mit Maxima und Minima. Wie wir aber § 8 sahen, fallen die Maxima und Minima von p nicht genau, nur angenähert mit denen von T , also auch (ε) , zusammen.

Versuchen wir nun noch die Maxima und Minima von ψ zu untersuchen, die beim Bau der Gaskugel möglich sind, so erhalten wir wenig übersichtliche Formeln. Sie liegen offenbar da, wo eine Kurve gleich der Differenz der Wellenzüge für p und T horizontale Tangenten besitzt.

Wir hatten § 4 gezeigt, daß jedesmal, wenn T einen Maximal- oder Minimalwert erhält, das Verhältnis der Oberflächendichte zur mittleren Dichte $\frac{\varrho}{\bar{\varrho}} = -\frac{r_1 e^{v_1}}{3 v_1}$ den Wert $\frac{1}{3}$ annimmt. Führen wir dies in (174) ein, so erhalten wir

$$(174b) \quad \psi = -2HT \mathfrak{M}.$$

Für jede Maximal- und Minimaltemperatur hat das Verhältnis
 ψ für die begrenzte Kugel denselben Wert $-\frac{1}{2(n-1)}$ wie für die unbegrenzte Kugel. Für die Kugel absolut niedrigster Temperatur von starrer Hülle ist

$$(174c) \quad \psi = -2 \cdot 0,39688 \cdot g \mathfrak{M} = -0,79376 \frac{G \mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}}.$$

Also sehr nahe (die Differenz ist zu groß, um von Ungenauigkeit der numerischen Auswertung der Differentialgleichung herzuröhren)
 $= -\frac{4}{5} \frac{G \mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}}$, während ψ für eine Kugel konstanter Dichte den Wert
 $= \frac{3}{5} \frac{G \mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}}$ besitzt.

B. Polytrope Gaskugeln.

§ 12. Es sei wiederum gegeben der Radius \mathfrak{R} der starren Hohlkugel und die Masse \mathfrak{M} eines Gases von der Gaskonstante H . Während aber alle isothermen Kugeln nach derselben Polytropen $n = \infty$ gebaut sind, sind unendlich viele polytrope Kugeln unendlich vieler Klassen möglich, da n von 0 bis ∞ variieren kann. Zur Fixierung der Aufgabe sei ein bestimmtes $n = \frac{1}{k-1}$ angegeben.

Um dies Problem zu lösen suchen wir die polytrope Temperatur Θ_k , d. h., unter den unendlich vielen Polytropen der Klasse n suchen wir diejenige heraus, nach welcher der Bau erfolgt, und suchen ferner den Zahlwert U der Funktion u im Mittelpunkt. Jedes Θ_k bedingt ein besonderes U .

Zur Bestimmung von U benutzen wir die Gl. (A) Seite 69 und Gl. (86)

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= -\frac{1}{n-1} r_1 \text{ cent} \\ U &= \frac{2}{\alpha^2} \end{aligned}$$

$$\mathfrak{M} = -\frac{4\pi}{\alpha^8} U^{\frac{3-n}{2}} r_1^2 \frac{du_1}{dr_1} \text{ gramm}$$

und erhalten durch Elimination von α

$$(175) \quad U^n = -\frac{r_1}{d u_1} \frac{\mathfrak{M}}{4\pi \mathfrak{R}^8}.$$

Zur Bestimmung von Θ_k benutzen wir die Gleichung der kosmogenetischen Fläche (102), die wir in der Form schreiben

$$(176) \quad \Theta_k = \frac{1}{r_1^k \left(\frac{du_1}{dr_1} \right)^{2-k}} \cdot \frac{\frac{(4\pi)^{k-1} G}{k}}{H} \cdot M^{2-k} \cdot R^{3k-4}$$

$$= \frac{1}{r_1^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{du_1}{dr_1} \right)^{\frac{n-1}{n}}} \frac{\frac{1}{n} (4\pi)^n G}{H} \cdot M^{\frac{n-1}{n}} \cdot R^{\frac{3-n}{n}}.$$

Daraus sehen wir: M und R reichen zur eindeutigen Bestimmung von U^n , dem Zahlenwerte der Mittelpunktsdichte, nicht aus; ebenso nicht zur Bestimmung von Θ_k . Die gestellte Aufgabe lässt immer noch unendlich viele Lösungen zu, da die Wahl von r_1 willkürlich bleibt. Jedes mögliche Wertepaar r_1 und $\frac{du_1}{dr_1}$ liefert andere Werte der Mittelpunktsdichte und der Temperatur an der Stelle Dichte Eins. Oder mit anderen Worten: Wir können jeden Wert von r_1 auf den Wert R dehnen und das durch r_1 beschränkte Stück der Lösungskurve $u_1 = f(r_1)$ auf R zur Darstellung bringen. Beim weiteren Studium dieser Verhältnisse haben wir die Fälle $n < 5$ und $n > 5$ gesondert zu behandeln.

$$B_1. \quad n \leq 5.$$

§ 13. Diese Fälle, welche die wichtigsten Kugeln umfassen, lassen sich leicht behandeln. (In diese Kategorie gehören alle adiabatischen Kugeln aus Gasen mit $\alpha > \frac{6}{5}$.) Denn r_1 ist endlich, mit Ausnahme des Grenzfalles $n = 5$, und $-\frac{r_1}{u_1^n}$ steigt mit r_1 stetig an. Jeder Wert von r_1 gibt eine eindeutige Lösung, ebenso jeder mögliche Wert von U oder Θ_k , da dadurch eine Stelle r_1 fixiert ist. Durch leichte Überlegung kommen wir zum Schlusse:

Eine polytropen Gaskugel ($n \leq 5$) von gegebener Gasart und Polytropenklasse in starrer Hülle erfordert zur vollständigen Bestimmung drei und nur drei Bestimmungsstücke.

In den meisten Fällen sind zwei derselben Masse und Radius; das dritte muß so gegeben sein, daß ein mögliches r_1 bestimmt wird. Dazu genügt z. B. U oder Θ_k ; oder der Wert von ρ oder von T oder von p an der starren Oberfläche.

Da $\rho = -\bar{\rho} \frac{r_1 u_1^n}{3 u_1'}$, $\bar{\rho}$ durch M und R bestimmt ist, so bestimmt ρ an der Oberfläche den Wert r_1 und somit die Gaskugel vollständig; dasselbe gilt für T und p . Ist M und R gegeben, so können nicht zwei der Größen ρ , p oder T an der Oberfläche beliebig angenommen werden; eine derselben bestimmt bereits die beiden andern.

Bei der vollständigen Gaskugel (ohne starre Hülle) erniedrigt sich die Zahl der Bestimmungsstücke auf zwei, da die Oberflächenbedingung $u_1 = 0$, ($T = 0$, $p = 0$, $\varrho = 0$) gegeben ist, welche die Verwendung der ganzen Länge r_1 vorschreibt.

Der kleinste Wert von $-\frac{r_1}{\frac{du_1}{dr_1}}$ ist = 3 für $r_1 = 0$ (vgl. Seite 43).

Der Zahlwert U^n der Mittelpunktsdichte kann also niemals kleiner werden als $\bar{\varrho} = \frac{3M}{4\pi R^3}$. Die Maximalwerte von $-\frac{r_1}{\frac{du_1}{dr_1}}$ entnehmen wir den

Tabellen 1—10; sie entsprechen den Endwerten von r_1 . Wir sehen z. B. daß bei den Polytropenklassen $k = \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{4}{3}$, oder adiabatischen Kugeln ein-, zwei- resp. dreiatomiger Gase die Mittelpunktsdichte niemals größer sein kann als

$$18,0009; 72,228, 162,54, > \frac{M}{4\pi R^3} \text{ gramm cent}^{-3}.$$

Bestände das Innere der Erde aus vollständig dissoziiertem Gase im adiabatischen Gleichgewicht, so kann die Mittelpunktsdichte im Maximum das 6,0003-fache der mittleren Dichte betragen. (In diesem Grenzfalle ist der Druck auf die Schale gleich Null und steigt mit abnehmender Mittelpunktsdichte.) Weitere Gesetzmäßigkeiten untersuchen wir gemeinsam mit dem Falle $n > 5$.

$$B_2. \quad n > 5.$$

§ 14. In diesen Fällen treten in der Lösungskurve $u_1 = f(r_1)$ periodische Verhältnisse auf; daraus folgt mit großer Wahrscheinlichkeit, daß wir hier ähnliche periodische Gesetzmäßigkeiten haben wie beim Bau isothermer Gaskugeln in starrer Hülle.

Wir untersuchen in erster Linie die Grenzwerte, die bei gegebenen M und R die polytrope Temperatur Θ_k annehmen kann. Wir hatten Gl. (176)

$$\Theta_k = \frac{1}{r_1^{\frac{n+1}{n}} u_1'^{\frac{n-1}{n}}} \frac{(4\pi)^{\frac{1}{n}} G}{k-1} M^{\frac{n-1}{n}} R^{\frac{3-n}{n}} H.$$

Die Grenzwerte fallen zusammen mit denen von $r_1^{\frac{n+1}{n-1}} u_1'$; wir bilden

$$(a) \quad \frac{d \left(r_1^{\frac{n+1}{n-1}} u_1' \right)}{dr_1} = r_1^{\frac{n+1}{n-1}} u_1'' + \frac{n+1}{n-1} r_1^{\frac{n+1}{n-1}-1} u_1'.$$

Wir eliminieren u_1'' mit Hilfe der Gleichung $u_1'' + \frac{2}{r_1} u_1' + u_1^n = 0$ und erhalten die Bedingungsgleichung

$$(b) \quad \frac{d \left(r_1^{\frac{n+1}{n-1}} u_1' \right)}{dr_1} = r_1^{\frac{n+1}{n-1}} \left(u_1^n - \frac{3-n}{n-1} u_1' r_1^{-1} \right) = 0.$$

Zur Interpretation führen wir nach Kap. X § 1 die Variablen der Differentialgleichung erster Ordnung ein und erhalten

$$(c) \quad \frac{d \left(r_1^{\frac{n+1}{n-1}} u_1' \right)}{dr_1} = e^{-\frac{n+1}{n-1} \vartheta} \left[z^n + \frac{3-n}{n-1} y + \frac{2(3-n)}{(n-1)^2} z \right]$$

und daraus die Bedingungsgleichung

$$(d) \quad \frac{3-n}{n-1} y + \frac{2(3-n)}{(n-1)^2} z + z^n = 0.$$

Eliminieren wir z^n mit Hilfe der Differentialgleichung (I'a), so ergibt sich

$$(e) \quad y \frac{dy}{dz} + \frac{2}{n-1} y = 0$$

und wir erhalten für die Grenzwerte von Θ_k die Bedingungsgleichung

$$(f) \quad \frac{dy}{dz} = -\frac{2}{n-1}.$$

Durch diesen Wert ist aber (vgl. Seite 49) der Abgangswinkel der Lösungskurve der Differentialgleichung (I'a) und die Gerade η der Diagramme 1—8, Seite 51 u. folg. im Nullpunkt bestimmt. Der Mittelpunkt der Kugel liefert $r_1^{\frac{n+1}{2}} u_1'^{\frac{n-1}{2}} = 0$ und somit $\Theta_k = \infty$; die Stelle $r_1 = 0$ liefert für alle n einen Maximalwert von Θ_k . Nun zeigen die Diagramme 1—8 daß für $n \leq 5$ die Lösungskurven nie mehr in der Tangentenrichtung $-\frac{2}{n-1}$ verlaufen, d. h.:

So lange $n \leq 5$ nimmt Θ_k mit den zur Verwendung kommenden Strecken r_1 ab und erreicht seinen, aus den Tabellen Nr. 1—10 zu berechnenden Minimalwert durch die dem Endwert von r_1 entsprechenden Werte von u_1' .

Für $n > 5$ aber haben wir es mit Spiralen zu tun und die Bedingungsgleichung (f) wird bei jedem Umlauf zweimal erfüllt.

Für $n > 5$ erhalten wir unendlich viele Maxima und Minima von Θ_k , gegeben durch die Schnittpunkte der Spirale mit der Kurve der Fortschreitungsrichtung $-\frac{2}{n-1}$.

Daß wir es mit Maxima und Minima und nicht nur mit horizontalen Tangentenrichtungen zu tun, folgt daraus, daß (f) und infolgedessen auch (d) und (b) ihr Vorzeichen beim Durchgange durch

den in Betracht kommenden Punkt wechseln. Der Zahlwert von $r_1^{\frac{n+1}{n-1}} u_1'$ ergibt sich durch Einführung der Variablen der Spirale leicht zu

$$(g) \quad r_1^{\frac{n+1}{n-1}} u_1' = y + \frac{2}{n-1} z.$$

Der Endwert für $r_1 = \infty$ entspricht dem Punkte

$$y = 0, \quad z = z_0 = \left[\frac{2(3-n)}{(n-1)^2} \right]^{\frac{1}{n-1}}.$$

Θ_k pendelt somit einem Werte zu, der durch

$$r_1^{\frac{n+1}{2}} u_1'^{\frac{n-1}{2}} = \left(\frac{2}{n-1} \right)^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{2(3-n)}{(n-1)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

bestimmt ist. Die rechte Seite von (g) kann auch geschrieben werden, wenn wir wieder mit z_1 die Abszissen vom Verzweigungspunkte z_0 messen

$$y + \frac{2}{n-1} z_1 + \frac{2}{n-1} z_0.$$

Dabei geben die beiden ersten Summanden die Abweichung dieses Wertes vom Endwerte $\frac{2}{n-1} z_0$; ihre Summe wechselt beim Durchsetzen der Fortschreitungsrichtung $-\frac{2}{n-1}$ das Vorzeichen. Θ_k pendelt seinem Grenzwert mit abnehmender Amplitude derart zu, daß die Maxima stets größer, die Minima stets kleiner wie jener sind. Der erste von Null verschiedene Wert von r_1 gibt ein Maximum von $r_1^{\frac{n+1}{2}} u_1'^{\frac{n-1}{2}}$ und liefert somit die Gaskugel niedrigster polytropen Temperatur. Die Stelle wird ermittelt, indem in der für das betreffende $n > 5$ angelegten Tabelle (Tabelle 12 entspricht $n = 6$), die Stelle gesucht wird, an welcher gemäß (b)

$$(h) \quad u_1^n = + \frac{3-n}{n-1} \frac{u'}{r_1}$$

wird. Für $n = 6$ liegt die Stelle in der Nähe von $r_1 = 3,8$.

Da wir ferner stets haben $\frac{\varrho}{\bar{\varrho}} = \frac{u_1^n r_1}{3 u_1'}$, so folgt aus (h) für die Beziehung zwischen der Oberflächendichte ϱ und der mittleren Dichte einer Kugel von größtem und kleinstem Θ_k

$$\varrho = \frac{\bar{\varrho}}{3} \frac{n-3}{n-1}; \quad n > 5.$$

Für $n = \infty$ erhalten wir, wenn wir Θ durch T ersetzen, die bereits gefundenen Beziehungen der isothermen Kugel mit starrer Oberfläche.

§ 15. Wir untersuchen die Werte, welche die Oberflächendichte ϱ annehmen kann. Da $\bar{\varrho}$ durch \mathfrak{M} und \mathfrak{N} bestimmt, untersuchen wir die Grenzwerte von $\frac{\varrho}{\bar{\varrho}} = -\frac{r_1 u_1^n}{3 u_1'}$ und erhalten

$$(a) \quad \frac{d}{dr_1} \left(-\frac{r_1 u_1^n}{3 u_1'} \right) = -\frac{u_1'(u_1^n + n r_1 u_1^{n-1} u_1') - r_1 u_1^n u_1''}{3 u_1'^2} = -\frac{u_1^n(3 u_1' + n r_1 u_1^{-1} u_1'^2 + r_1 u_1^n)}{3 u_1'^2}.$$

Wir führen die Variablen der Differentialgleichung erster Ordnung ein, setzen den Ausdruck gleich Null und erhalten nach leichter Transformation die Bedingungsgleichung für die Grenzwerte von $\frac{\varrho}{\bar{\varrho}}$

$$(b) \quad yz \left(2 + \frac{ny}{z} - y' \right) = 0.$$

Diese Gleichung wird zum ersten Male für $y = 0, z = 0$ erfüllt; denn $\frac{y}{z}$ ist die Tangente des Winkels, den der Radiusvektor mit der z -Achse bildet und ist im Nullpunkt $= y'$. Ein unendlich kleines Stück der r_1 -Achse liefert einen Maximalwert von $\frac{\varrho}{\bar{\varrho}}$ gleich +1. Behandeln wir erst die Fälle $n < 5$.

Die Untersuchung der Gleichung (b) ist hier umständlich. Wir bilden bequemer

$$\frac{\varrho}{\bar{\varrho}} = -\frac{r_1 u_1^n}{3 u_1'} = \frac{1}{3} \frac{z^{n-1}}{\frac{y}{z} + \frac{2}{n-1}}.$$

Für unendlich kleine r_1 , ($y = 0, z = 0$) ist $-\frac{r_1(u_1^n - 1)}{u_1'} = 3$; $\frac{\varrho}{\bar{\varrho}}$ erhält also einen Maximalwert = 1. Für $y = 0, z = 0$, ist $\frac{y}{z} = \frac{dy}{dz}$ und nach Seite 49 $= -\frac{2}{n-1}$. Im Bogen der Lösungskurve, der unterhalb der z -Achse liegt, steigt $\frac{y}{z}$ von $-\frac{2}{n-1}$ bis 0, z^{n-1} nimmt zu, $\frac{\varrho}{\bar{\varrho}}$ nimmt trotzdem ab, wie die numerischen Werte der Tabellen 4—10 ergeben; dasselbe ist im Bogen oberhalb der z -Achse der Fall, da $\frac{y}{z}$ stets zu und z abnimmt. Mit wachsendem r_1 wird $\frac{\varrho}{\bar{\varrho}}$ für $n \geq 5$ deshalb stets abnehmen und erhält bei der Verwendung der Gesamtlänge r_1 seinen Minimalwert 0.

Für $n > 5$ tritt eine Lösungsspirale auf und die Bedingungsgleichung (b) wird bei jedem Umlauf zweimal erfüllt, einen Maximal- und Minimalwert von $\frac{\varrho}{\bar{\varrho}}$ bestimmend. Für die engeren Windungen ist $n \frac{y}{z}$ gegen 2 um so rascher zu vernachlässigen, je größer n , und wir erhalten, wie bei der isothermen Kugel die Durchsetzungspunkte

der Spirale mit den Kurven der Fortschreibungsrichtung 2 als Bestimmungspunkte. (Für kein n liefert der Durchschnitt der Lösungskurve mit der z -Achse, $y = 0$, einen Bestimmungspunkt, da hier $yy' = 0 \cdot \infty$ einen aus der Differentialgleichung bestimmmbaren endlichen Wert erhält). Den Grenzwert von $\frac{\varrho}{\varrho_0}$ können wir leicht bestimmen, indem wir haben

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = -\frac{r_1 u_1''}{3 u_1'} = +\frac{z^n}{3(y + \frac{2}{n-1}z)} = \frac{(z_1 + z_0)^n}{3(y + \frac{2}{n-1}z_1 + \frac{2}{n-1}z_0)},$$

wo die z_1 vom Verzweigungspunkte $z_0 = \left[\frac{2(n-3)}{(n-1)^2}\right]^{\frac{1}{n-1}}$ gerechnet sind.

Für den Endpunkt $y = 0, z_1 = 0$ erhalten wir somit

$$(c) \quad \frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{1}{3} \frac{n-3}{n-1}$$

und im Grenzfall $n = \infty$ den Wert $\frac{1}{3}$ wie bei der isothermen Kugel. Nach § 13 ist die Bedingung (c) erfüllt, so oft Θ_k einen Maximal- oder Minimalwert erhält; einen entsprechenden Satz fanden wir für die isotherme Kugel. (§ 4.) (Die singuläre Lösung liefert selbstverständlich denselben Grenzwert von $\frac{\varrho}{\varrho_0}$.) Die erste endliche Stelle r_1 , an welcher die rechte Seite von (a) Null ergibt, liefert den kleinsten möglichen Wert von $\frac{\varrho}{\varrho_0}$ und muß in den numerisch berechneten Tabellen durch Interpolation gefunden werden.

Der Ausdruck $\frac{\varrho_0}{\varrho}$ kann, wie im Falle der isothermen Kugel, Kap. XI, § 7, mit wachsendem r_1 nur zunehmen, wie sich leicht durch Diskussion des Ausdrückes

$$\frac{\varrho_0}{\varrho} = -\frac{r_1(u_1''=1)}{3u_1'} = +\frac{\frac{r_1}{n-1}}{3z\left(\frac{y}{z} + \frac{2}{n-1}\right)^{\frac{2n}{n-1}}}$$

ergibt.

§ 16. Wir untersuchen weiter die Grenzwerte des Druckes, den eine polytrope Gaskugel auf eine starre Oberfläche ausüben kann. Masse und Radius sind gegeben.

Wir haben allgemein

$$p = u^{n+1} H \Theta_k \text{ gramm cent}^{-1} \text{ sek}^{-2}$$

$$u^n = \varrho = -\frac{r_1 u_1''}{3 u_1'} = -\frac{r_1 u_1''}{u_1'} \cdot \frac{\mathfrak{M}}{4 \pi \mathfrak{R}^3} \text{ gramm cent}^{-3}.$$

Ferner hatten wir Gleichung (176)

$$\Theta_k = \frac{1}{\frac{n+1}{r_1^2} \left(\frac{du_1}{dr_1} \right)^{\frac{n-1}{2}}} \frac{(4\pi)^{\frac{1}{n}} G}{k} \cdot M^{\frac{n-1}{n}} R^{\frac{3-n}{n}} \cdot H$$

Die Kombination dieser drei Gleichungen ergibt, (wobei wir, da n auch beliebig gebrochen sein kann, nur + Verzeichen anwenden):

$$(177) \quad p = \frac{u_1^{n+1}}{u_1'^2} \cdot \frac{G}{k} \cdot \frac{M^2}{R^4} \text{ gramm cent}^{-1} \text{ sek}^{-2}$$

Wir bilden und erhalten durch leichte Umformung

$$\frac{d \left(\frac{u_1^{n+1}}{u_1'^2} \right)}{dr_1} = u_1^n \left((n+1) u_1'^2 + \frac{4}{r_1} u_1 u_1' + 2 u_1^{n+1} \right)$$

Führen wir die Variablen der Differentialgleichung erster Ordnung ein, so erhalten wir für die Grenzwerte von p die Bedingungsgleichung

$$yz \left((n+1) \frac{y}{z} + 2 - 2y' \right) = 0;$$

p erhält somit (selbstverständlich) seinen Maximalwert ∞ bei Verwendung eines unendlich kleinen Stückes r_1 . Ebenso wie im vorigen Paragraphen für ϱ lässt sich zeigen, daß für $n < 5$ der Wert von p mit steigendem r_1 stets abnimmt und bei Verwendung der ganzen Strecke r_1 gleich Null wird. Bei $n > 5$ liefert jeder Umgang der Spirale einen Minimal- und Maximalwert von p . (Die Stellen $y=0, z>0$ kommen nicht in Betracht, da yy' endlich.) Für die engeren Windungen ist $(n+1) \frac{y}{z}$ rasch abnehmend und wir erhalten wie bei der isothermen Kugel die Bedingung $y'=1$. Der Grenzwert von p lässt sich leicht bestimmen, wenn wir schreiben

$$\frac{1}{k-1} \cdot \frac{u_1^{n+1}}{u_1'^2} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(z_1 + z_0)^{n+1}}{\left(y + \frac{2}{n-1} z_1 + \frac{2}{n-1} z_0 \right)^2}$$

und erhalten für $z_1 = 0, y = 0, z_0 = \left[\frac{2(n-3)}{(n-1)^2} \right]^{\frac{1}{n-1}}$ den Wert

$$\left(\frac{1}{k-1} \cdot \frac{u_1^{n+1}}{u_1'^2} \right)_{r_1=\infty} = \frac{1}{2} \frac{n-3}{n+1}.$$

(Für $n = \infty$ also den Wert wie bei der isothermen Kugel.) Der

Oberflächendruck einer polytropen Kugel $n > 5$ pendelt um den Wert

$$\frac{1}{2} \frac{n-3}{n+1} \frac{G \mathfrak{M}^2}{4\pi \mathfrak{R}^4} \cdot \text{gramm cent}^{-1} \text{sek}^{-2}.$$

Das erste brauchbare Stück r_1 liefert einen Minimalwert von p , der durch Interpolation der ausgewerteten Lösungskurve $u_1 = f(r_1)$ gemäß der aufgestellten Bedingungsgleichung gefunden werden muß.

§ 17. Wir haben noch die Grenzwerte der Temperatur, die der Oberfläche einer Gaskugel in starrer Hülle zukommen kann, zu untersuchen.

Allgemein ist

$$T = u \Theta_k.$$

Wir hatten

$$\Theta_k = - \frac{1}{\frac{n+1}{r_1^n} \frac{n-1}{u_1'^n}} \frac{\frac{1}{4\pi^n} G}{k-1} \frac{\mathfrak{M}^{\frac{n-1}{n}}}{H} \frac{\mathfrak{R}^{\frac{3-n}{n}}}{.$$

Ferner hatten wir, da $\varrho = U^n u_1^n$

$$U^n = - \frac{r_1}{u_1'} \frac{\mathfrak{M}}{4\pi \mathfrak{R}^3}.$$

Da aber $u = U u_1$, so erhalten wir

$$(178) \quad T = \frac{u_1}{r_1 u_1'} \cdot \frac{1}{\frac{k}{k-1} H} \cdot \frac{G \mathfrak{M}}{\mathfrak{R}}.$$

Wir bilden

$$\frac{d \left(\frac{u_1}{r_1 u_1'} \right)}{dr_1} = \frac{r_1 u_1'^2 - u_1 u_1' - u_1 r_1 u_1''}{r_1^2 u_1'^2} = \frac{r_1 u_1'^2 + u_1 u_1' + r_1 u_1^{n+1}}{(r_1 u_1')^2}.$$

Die Variablen der Differentialgleichung erster Ordnung eingeführt ergibt nach leichter Umformung die Bedingungsgleichung für den Grenzwert von T

$$yz \left(\frac{y}{z} - y' \right) = 0.$$

Den ersten Grenzwert erhalten wir für $r_1 = 0$ als $T = \infty$. Da wir weiter haben

$$-\frac{u_1}{r_1 u_1'} = \frac{1}{\frac{y}{z} + \frac{2}{n-1}},$$

$\frac{y}{z}$ aber mit wachsendem r_1 für $n \leq 5$ stets zunimmt, erreicht T einen Minimalwert für Verwendung der ganzen Strecke r_1 .

Da für $n < 5$ der Endwert von $\frac{y}{z}$ unendlich ist, wird $T = 0$.

Für $n = 5$ mündet die Lösungskurve symmetrisch in den Ausgangs-

punkt ein, $\frac{y}{z}$ wird am Endpunkt $= +\frac{2}{n-1} = \frac{1}{2}$, und wir sehen, daß für $n = 5$ wir stets haben

$$T > \frac{\frac{1}{k}}{\frac{k-1}{k}} \cdot \frac{G M}{H R}.$$

Für $n > 5$ erhalten wir bei jedem Umlauf der Spirale einen Maximal- und Minimalwert von T , für die engen Windungen an den Stellen $\frac{dy}{dz} = 0$, die auch bei der isothermen Kugel die Grenzwerte von T bestimmen.

Da wir schreiben können

$$-\frac{\frac{u_1}{r_1 u_1} - \frac{1}{k}}{k-1} = \frac{z}{(n+1)(y+z_{n-1})^2} = \frac{z_1 + z_0}{(n+1)\left(y + \frac{2}{n-1}z_1 + \frac{2}{n-1}z_0\right)}$$

erhalten wir für den Grenzwert von T an der Stelle $y = 0$, $z_1 = 0$,

$$z_0 = \left[\frac{2(n-3)}{(n-1)^2} \right]^{\frac{1}{n-1}}$$

$$(179) \quad T = \frac{1}{2} \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{G M}{H R}, \quad n > 5.$$

(Für $n = \infty$ ergibt sich wieder $\mathfrak{H}_R = \frac{1}{2} R$, vgl. § 3.)

Die erste endliche Strecke von r_1 , die der aufgestellten Bedingungsgleichung genügt, liefert einen Minimalwert von $T > 0$ und kleiner als die rechte Seite von (179); er muß der numerisch ausgewerteten Lösungskurve $u_1 = f(r_1)$ durch Interpolation entnommen werden.

§ 18. So lange die Masse einer polytropen Gaskugel endlich ist, läßt sich ihr Energieinhalt (ε) und das Potential auf sich selbst in geschlossener Form angeben. Wir bilden analog der Ableitung der entsprechenden Gleichung (Seite 123) für eine beliebige Gaskugel in starrer Hülle

$$\begin{aligned} (\varepsilon) &= \frac{c_v}{A} \int_0^R T dM = \frac{4\pi c_v}{A} \int_0^R T \varrho r^2 dr = \frac{4\pi c_v}{AH} \int_0^R pr^2 dr \\ &= \frac{4\pi}{n-1} \left[\frac{1}{3} r^3 p - \frac{1}{3} \int r^3 dp \right]_0^R = \frac{4\pi}{3(n-1)} \mathfrak{R}^3 p - \frac{4\pi}{3(n-1)} \int_0^R r^3 dp \text{ Erg.} \end{aligned}$$

Für endliche Gaskugeln mit freier Oberfläche ist der erste Summand gleich Null.

Da $g = \frac{GM}{r^2}$ und $dp = -g\varrho dr$, wird

$$\psi = -G \int_0^R \frac{MdM}{r} = - \int_0^R g r dM = -4\pi \int_0^R g \varrho r^3 dr = 4\pi \int_0^R r^3 dp \text{ Erg}$$

und somit

$$(180) \quad \psi = 4\pi \mathfrak{R}^3 p - 3(\kappa - 1)(\varepsilon) \text{ Erg.}$$

Da diese Gleichung für jede beliebige Gaskugel, die sich infolge innerer Gravitation im Gleichgewicht befindet, gilt, mußten wir bei Ableitung der Beziehung zwischen ψ und (ε) bei isothermer Kugel auf dieselbe Gleichung kommen. Vgl. Gleichung (174a).

Für polytropes Gleichgewicht können wir wie bei Ableitung der entsprechenden Gleichung (Seite 125) eine zweite Beziehung zwischen (ε) und ψ aufstellen. In diesem Falle haben wir, da

$$\frac{k}{k-1} H dT = -g dr,$$

$$\begin{aligned} (\varepsilon) &= \frac{c_0}{A} \int_0^{\mathfrak{R}} T dM = \frac{c_0}{A} [MT - \int M dT]_0^{\mathfrak{R}} = \frac{1}{k-1} HT_{\mathfrak{R}} \mathfrak{M} \\ &+ \frac{1}{k-1(\kappa-1)} \int_0^{\mathfrak{R}} Mg dr = \frac{1}{k-1} HT_{\mathfrak{R}} \mathfrak{M} + \frac{G}{k-1(\kappa-1)} \int_0^{\mathfrak{R}} \frac{M^2}{r^2} dr \\ &= \frac{1}{\kappa-1} HT_{\mathfrak{R}} \mathfrak{M} + \frac{G}{\frac{k}{k-1}(\kappa-1)} \cdot \left[-\frac{M^2}{r} + 2 \int \frac{MdM}{r} \right]_0^{\mathfrak{R}} \\ (181) \quad (\varepsilon) &= \frac{1}{\kappa-1} HT_{\mathfrak{R}} \mathfrak{M} - \frac{1}{\frac{k}{k-1}(\kappa-1)} \frac{G \mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}} - \frac{1}{\frac{k}{k-1}(\kappa-1)} 2\psi. \end{aligned}$$

Zusammen mit (180) folgt

$$\begin{aligned} (182) \quad (\varepsilon) &= \frac{k}{(6-5k)(\kappa-1)} HT_{\mathfrak{R}} \mathfrak{M} - \frac{k-1}{(6-5k)(\kappa-1)} 8\pi \mathfrak{R}^3 p \\ &- \frac{k-1}{(6-5k)(\kappa-1)} \cdot \frac{G \mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}} \text{ Erg.} \\ &= \frac{1}{(n-5)(\kappa-1)} \left[(n+1) HT_{\mathfrak{R}} \mathfrak{M} - 8\pi \mathfrak{R}^3 p - \frac{G \mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}} \right] \text{ Erg,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (183) \quad \psi &= -\frac{3k}{6-5k} HT_{\mathfrak{R}} \mathfrak{M} + \frac{k}{6-5k} 4\pi \mathfrak{R}^3 p + \frac{3(k-1)}{6-5k} \frac{G \mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}} \text{ Erg} \\ &= -\frac{3}{(n-5)} \left[(n+1) HT_{\mathfrak{R}} \mathfrak{M} - \frac{n+1}{3} 4\pi \mathfrak{R}^3 p - \frac{G \mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}} \right] \text{ Erg.} \end{aligned}$$

Für Kugeln mit freier Oberfläche und $n < 5$ erhalten wir, da $T = 0$, $p = 0$, die Formeln (116) und (117).

Benutzen wir zum Bau die Endwerte von r_1 , so erhalten wir mit Hilfe der Beziehungen der §§ 16 und 17 für $n > 5$

$$(184) \quad (\varepsilon) = \frac{1}{2} \frac{n-1}{n+1} \frac{n-3}{n-5} \frac{G \mathfrak{M}^2}{(\kappa-1)\mathfrak{R}} \text{ Erg,}$$

$$(185) \quad \psi = -\frac{n-3}{n-5} \frac{G M^2}{R} \text{ Erg}$$

und daraus für $n = \infty$ den Quotienten $\frac{e}{\psi}$ für die isotherme Vollkugel Gleichung (162).

Zwölftes Kapitel. Isotherm-polytropes System.

§ 1. In dem vorangehenden Kapitel wurde der Bau von Gas- kugeln in starrer Hülle untersucht. Während die freie Oberfläche einer Gaskugel durch das Nullwerden von Druck, Temperatur und Dichte ausgezeichnet ist, können die Größen an der starren Ober- fläche in bestimmten Grenzen liegende, von Null verschiedene Werte annehmen. Über die Natur der starren Oberfläche haben wir keinerlei Voraussetzung gemacht; sie hatte nur den Zweck, den Oberflächen- druck der Gaskugel zu äquilibrieren; jedes mechanisch realisierbare Gebilde, das diesen Zweck erfüllt, kann dieselbe ersetzen. Zu diesem Ersatz verwenden wir nun eine Gasmasse, nach irgend einer Poly- trope so aufgebaut, daß sie, mit Berücksichtigung der Gesamtgravi- tation sich im Gleichgewicht befindend, an ihrer inneren Begrenzung den Druck ausübt, den die starre Oberfläche auszuhalten hat. Wir nehmen ferner an, daß an dieser Stelle auch Temperatur von Kern und Schale gleich sind; dann gehen selbstverständlich auch die Dichten ohne Sprung ineinander über. Würden wir zum Bau der Schale dieselbe Gasart und dieselbe Polytrope benutzen, die den Kern charak- terisieren, so würde die ursprüngliche Trennungsfläche unkenntlich, und wir erhielten eine einfache Gaskugel mit freier Oberfläche. Im allgemeinen können Kern und Schale nach verschiedenen Polytropen- klassen gebaut sein. Durch Wiederholung dieses Gedankenganges ist leicht einzusehen, daß wir Gaskugeln bauen können, die mit überall stetigen Übergängen von Temperatur, Druck und Dichte so geschichtet sind, daß jede Schicht durch eine Polytrope einer anderen Klasse n aus- gezeichnet ist. Auch in starrer Oberfläche können wir diese so ge- schichteten Gaskugeln aufbauen. Würden wir die Lösung der be- kannten Differentialgleichungen zweiter Ordnung für beliebiges n in geschlossener Form angeben können, so ließen sich die hier ein- tretenden Verhältnisse einfach und vollständig behandeln, da wir nur die Werte der auftretenden Integrationskonstanten bestimmen müssen. Die Unkenntnis dieser Lösungen nötigt uns, unsere Betrachtungen auf die einfachsten Fälle zu beschränken. Die auftretenden Schwierig- keiten werden im nächsten Kapitel bei Behandlung eines einfachen

Problemes besprochen werden. Vorderhand beschränken wir uns auf die Lösung einer Aufgabe, die, abgesehen von dem theoretischen Interesse, praktische Bedeutung gewinnt.

Die Existenz einer frei im Raum schwebenden polytropen Gas kugel als Gaskugel derselben Klasse wird durch genügend starke Wärmeausstrahlung gesichert. Die kälter und dichter gewordenen Massen der äußersten Schicht sinken in die Tiefe, von hier steigen relativ heißere Massen empor, und nur das Spiel dieser Konvektionsströme, innerhalb welcher die Gasmassen die aufgezwungene polytrope Änderung durchmachen, bewirkt die Fortdauer der Kugel in derselben Polytropenklasse. Dabei ist angenommen, daß die Wärmeleitungsfähigkeit der Gase mit Rücksicht auf die meistens großen Dimensionen von verschwindend geringem Einfluß ist. Diese Konvektionsströme durchmischen am intensivsten die äußersten Schichten der Kugel; immer geringer wird die Zahl der Ströme, die in immer größere Tiefen hinab sinkt, und in den innersten Partien können sich immer mehr die Temperaturgegensätze durch Leitung ausgleichen. Als idealen Grenzfall können wir in einer Gaskugel einen isothermen Kern annehmen, der von einer Gasschicht, gebaut nach einer Polytropen $n < \infty$, umhüllt ist. Ein solches System nennen wir ein isotherm-polytropes; wir untersuchen dessen Bau.

§ 2. Gegeben sei eine isotherme Gasmasse M , die bei der Temperatur T eine Kugel vom Radius R erfüllt, und die von einer Gasmasse umhüllt ist, die nach der Polytropen n gebaut ist. An der Grenze R gehen Druck, Temperatur und Dichte ohne Sprung ineinander über. Dadurch wird, wie wir sehen werden, die Masse M dieser Schicht, ihre polytrope Temperatur und der Radius R der Gesamtkugel, entsprechend der Oberflächenbedingung $p = 0$, bestimmt. Der Einfachheit halber benutzen wir durchwegs dieselbe Gasart. Die Aufgabe so gestellt läßt noch unendlich viele Lösungen zu. Denn der Kern muß als isotherme Kugel in starrer Oberfläche behandelt werden und wie wir sahen (Kap. XI § 3) gibt es nur gewisse Temperaturen, welche den Bau, also auch die Werte von Druck und Dichte an ihrer Begrenzung eindeutig, dagegen eine Reihe von Temperaturen, welche den Bau mehrdeutig bestimmen, und eine ausgezeichnete Temperatur, welche unendlich viele Anordnungen zuläßt. Ebenso, unter Umständen unendlich-mehrdeutig, würde die Aufgabe, wenn wir den Kern außer an Stelle der Temperatur durch die Oberflächenwerte von Druck oder Dichte näher bestimmen wollten.

Wir nehmen, um Mehrdeutigkeit auszuschließen, an, daß dem isothermen Kern die kleinste mögliche Temperatur (minimalster Energiegehalt) zukommt. Die Temperatur ist nach (169)

$$T = \frac{1}{\tau} \frac{GM}{HR}, \quad \tau = -r_1 \frac{dv_1}{dr_1}$$

und die Minimum-Temperatur ergab sich für $\tau = 2,5191$. Die Oberflächendichte wird dann $= \frac{1}{3} \bar{\varrho} = \frac{M}{4\pi R^3}$ gramm cent⁻³; der Oberflächendruck $= HT\varrho = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{GM^2}{4\pi R^4}$ gramm cent⁻¹ sek⁻²; und der Wert von $g = \frac{GM}{R^3}$ cent sek⁻².

Die Lösung dieser Aufgabe läßt sich in geschlossener Form nur für die Polytropen $n = 0$, $n = 1$ angeben. Die Verhältnisse lassen sich hier vollständig überblicken, und wir erhalten Anhaltspunkte zur Beurteilung der für beliebiges n geltenden Gesetze. Wir behandeln deshalb die Fälle $n = 0$, $n = 1$ und sodann den für die Anwendung wichtigsten Fall $n = 1,5$ (Adiabate des einatomigen Gases).

§ 3. 1. Fall. $n = 0$ ($\varrho = \text{konst.}$). Wir umgeben den Kern mit einer Hülle konstanter Dichte. Nach Kap. V § 12 können wir die die Gaskugel $n = 0$ charakterisierende Differentialgleichung schreiben

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} + \alpha^2 = 0, \quad \alpha^2 = \frac{4\pi G \varrho}{H} \text{ cent}^{-2}.$$

mit der Lösung

$$T = B + \frac{C}{r} - \frac{\alpha^2 r^2}{6},$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{C}{r^2} - \frac{\alpha^2 r}{3}.$$

α^2 enthält die konstante Dichte ϱ der Hülle. Wir bestimmen α^2 , indem wir für den Radius R des Kernes die Dichten von Kern und Hülle gleich setzen. Nun haben wir gezeigt (Kap. XI § 4) daß für die isotherme Kugel in starrer Hülle mit minimalster Temperatur die Oberflächendichte $\frac{1}{3}$ der mittleren Dichte beträgt. Wir haben somit

$$\varrho = \frac{1}{3} \bar{\varrho} = \frac{M}{4\pi R^3} \text{ und daraus}$$

$$\alpha^2 = \frac{GM}{HR^3} = \frac{g_R}{HR},$$

wenn g_R den Wert an der Oberfläche des Kernes bezeichnet. Da wir ferner allgemein haben $dT = -\frac{g}{k-1} dr = -\frac{g}{H} dr$ für $n = 0$, so erhalten wir, wenn wir die Temperatur des Kernes mit T_R bezeichnen, für B und C die beiden Bedingungsgleichungen

$$T_R = B + \frac{C}{R} - \frac{\alpha^2 R^2}{6}$$

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_R = -\frac{C}{R^2} - \frac{\alpha^2 R}{3}$$

und daraus

$$C = -\left(\frac{dT}{dr}\right)_R R^2 - \frac{\alpha^2 R^3}{3} = \frac{2}{3} \frac{g_R R^2}{H}, \quad B = T_R - \frac{1}{2} \frac{g_R R}{H},$$

so daß der Temperaturgang in der Hülle eindeutig bestimmt ist zu

$$(a) \quad T = T_R - \frac{1}{2} \frac{g_R R}{H} + \frac{2}{3} \frac{g_R R}{H} \frac{R}{r} - \frac{1}{6} \frac{g_R R}{H} \left(\frac{r}{R}\right)^2.$$

Führen wir jetzt die Temperatur des Kernes ein nach der Bedingung $HT_R = \frac{g_R R}{\tau}$ so können wir (a) auch schreiben

$$(b) \quad HT = g_R R \left[\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{3} \frac{R}{r} - \frac{1}{6} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right].$$

Den Radius \mathfrak{R} der Gesamtkugel erhalten wir durch Auflösung der kubischen Gleichung, die sich ergibt, wenn wir die Oberflächenbedingung $T = 0$ rechnen. Der Minimumtemperatur des Kernes entspricht $\tau = 2,5191$ und wir erhalten

$$(186) \quad \mathfrak{R} = 1,4579 R.$$

Um den Wert von g an der Oberfläche der Gesamtkugel zu bestimmen, gehen wir aus von der Beziehung $g = -H \frac{dT}{dr}$, bilden $\frac{dT}{dr}$ aus (a) und erhalten mit Hilfe des ermittelten Wertes von \mathfrak{R}

$$(187) \quad g = 0,79962 g_R.$$

Aus den Werten von g und \mathfrak{R} berechnet sich leicht das Verhältnis der Gesamtmasse \mathfrak{M} zur Masse M des Kerns zu

$$(188) \quad \mathfrak{M} = 1,6996 M$$

und

$$(188a) \quad \mathfrak{M} - M = 0,6996 M.$$

Den Energiegehalt der Hülle

$$(\varepsilon)_a = c_v \int_R^{\mathfrak{R}} T d\mathfrak{M} = c_v 4\pi \rho \int_R^{\mathfrak{R}} T r^2 dr$$

finden wir, indem wir T aus (b) einsetzen, zu

$$(189) \quad \begin{aligned} (\varepsilon)_a &= \frac{c_v 4\pi \rho R g_1}{H} \int_R^{\mathfrak{R}} \left[\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{2} \right) r^2 + \frac{2}{3} R r - \frac{1}{6} \frac{r^4}{R^2} \right] dr \\ &= \frac{c_v 4\pi \rho R^4 g_R}{H} \left[\frac{1}{3\tau} \left(\frac{\mathfrak{R}}{R} \right)^3 - \frac{1}{6} \left(\frac{\mathfrak{R}}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathfrak{R}}{R} \right)^2 - \left(\frac{10 + 4\tau}{30 \cdot \tau} \right) \right] \\ &= c_v M T_R \tau \left[\frac{1}{3\tau} \left(\frac{\mathfrak{R}}{R} \right)^3 - \frac{1}{6} \left(\frac{\mathfrak{R}}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathfrak{R}}{R} \right)^2 - \left(\frac{10 + 4\tau}{30 \cdot \tau} \right) \right] \text{ cal.} \end{aligned}$$

Der Energiegehalt des Kernes ist

$$(\varepsilon)_i = c_s M T_R \text{ cal.,}$$

so daß sich ergibt

$$(190) \quad \frac{(\varepsilon)_a}{(\varepsilon)_i} = \tau \left[\frac{1}{3\tau} \left(\frac{\mathfrak{M}}{R} \right)^3 - \frac{1}{6} \left(\frac{\mathfrak{M}}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathfrak{M}}{R} \right)^2 - \left(\frac{10 + 4\tau}{30 + \tau} \right) \right] \text{ cal.}$$

Rechnen wir mit dem für $\tau = 2,5191$ gefundenen Werte von \mathfrak{M} den Klammerausdruck, so ergibt sich

$$(191) \quad \frac{(\varepsilon)_a}{(\varepsilon)_i} = 0,11695$$

oder

$$(191a) \quad (\varepsilon)_i = (\varepsilon)_a + (\varepsilon)_i = 1,11695 (\varepsilon)_i.$$

Da das Temperaturmittel einer Gaskugel ihrem Energiegehalt proportional ist, so ergibt sich die Mitteltemperatur \bar{T} des ganzen Systems zu

$$(192) \quad \bar{T} = 0,65717 \cdot T_R.$$

Den Energiegehalt $(\varepsilon)_i$ fanden wir Gleichung (172)

$$(\varepsilon)_i = \frac{0,89688}{\kappa - 1} \frac{G M^2}{R}$$

und erhalten infolgedessen

$$(193) \quad (\varepsilon) = \frac{0,44829}{\kappa - 1} \frac{G M^2}{R} = \frac{0,22374}{\kappa - 1} \frac{G \mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}} \text{ Erg.}$$

Auch gilt, wie leicht ersichtlich, für die Gesamtkugel die Gleichung (113)

$$(\varepsilon) = - \frac{\psi}{3(\kappa - 1)}.$$

Nehmen wir den Radius des isothermen Kernes als Einheit, so ergibt sich folgende kleine Tabelle, welche Aufschluß gibt über den Bau der Hülle

$\frac{r}{R}$	$\frac{T}{T_R}$	$\frac{g}{g_R}$	$\frac{\mathfrak{M}}{M}$
1	1	1	1
1,1	0,75919	0,91764	1,1103
1,2	0,53753	0,86297	1,2427
1,3	0,32277	0,82781	1,3990
1,4	0,11720	0,80680	1,5814
1,43	0,05634	0,80268	1,6414
1,4579	0,00000	0,79962	1,6996.

§ 4. Masse und Radius bestimmen somit den Aufbau dieser zusammengesetzten Kugel ebenso eindeutig wie den Bau einer Kugel

von durchweg gleichem n . Die Übergangsstelle von einer Polytropenklasse zur andern ist nach Radius und Masse eindeutig festgelegt, ebenso Temperatur und Mittelpunktsdichte des Kerns. Dies System schließt die größtmöglichen Gegensätze ein. Im Kerne herrscht konstante Temperatur; die Dichte, somit der Druck, sinken längs des Radius bis auf $\frac{1}{32,090}$ der Werte im Mittelpunkte herab; dann schließt sich stetig die Hülle, in der jetzt die Dichte konstant bleibt, und längs deren Radius die Temperatur, infolgedessen der Druck, bis zu den Werten Null herabsinken. Ändert sich der Gesamtradius, so ändert sich in demselben Verhältnis der Radius des Kerns; dessen Temperatur (Gleichung 169) $T_R = \frac{1}{\tau} \frac{GM}{HR}$ ändert sich umgekehrt wie deren Radius, dasselbe gilt auch für die Temperaturen der Hülle.

An jeder Stelle der zusammengesetzten Kugel ändert sich die Temperatur umgekehrt wie der Radius.

Die Dichte der Oberfläche des Kerns ist stets $\frac{1}{3}$ dessen mittlerer Dichte.

Die Dichten jeder Stelle des Systems steigen umgekehrt wie die dritte Potenz des Radius. Die Zusammenziehung des Systems erfolgt demnach homogen und jedes Gasteilchen macht eine kosmogenetische Zustandsänderung durch.

Zum Aufbau stabiler Systeme können wir deshalb nur ein-, zwei- oder dreiatomige Gase verwenden, und die mit der Kontraktion verbundene Wärmeabgabe und Energiesteigerung erfolgt nach denselben Gesetzen wie bei einer Kugel mit konstantem n . Nur die Flächenkonstante $C_{(\psi, \alpha, \bar{\rho})}$ hat den durch Gleichung (193) und (113) zu bestimmenden Wert 0,67122 G .

Verwenden wir zum Aufbau der isothermen Kugel immer längere Stücke der r_1 -Achse, so nähert sich τ immer mehr dem Werte 2 und ϱ immer mehr dem Werte $\frac{1}{3} \bar{\rho}$, so daß α^2 den oben benutzten Wert annimmt. Dann erhalten wir aus (b)

$$\mathfrak{R} = \sqrt[3]{4} R = 1,5873 R.$$

Da der Wert von \mathfrak{R} aus (b) durch Auflösung einer kubischen Gleichung gewonnen wird, wäre die Möglichkeit vorhanden, bei geeignetem τ drei reelle Wurzeln und somit drei verschiedene Gaskugeln zu erhalten. Es ist aber leicht ersichtlich, daß für das angenommene α^2 , $(\varrho = \frac{1}{3} \bar{\rho})$ die Gleichung nur eine positive Wurzel haben kann.

§ 5. Der Fall $n = 1$, ($k = 2$).

Nach Seite 91 und 92 können wir in diesem Falle die Differentialgleichung der Polytropen schreiben

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} + \alpha^2 T = 0, \quad \alpha^2 = \frac{2\pi G}{H\Theta_2} \text{ gramm}^{-1} \text{ cent.}$$

Die vollständige Lösung

$$T = A \frac{\sin \alpha r}{\alpha r} + B \frac{\cos \alpha r}{\alpha r}$$

nimmt bei Einführung zweier Konstanten T_R und \mathfrak{R} an Stelle von A und B die Form an

$$(194) \quad T = \frac{T_R R}{\sin \alpha (\mathfrak{R} - R)} \frac{\sin \alpha (\mathfrak{R} - r)}{r}.$$

T_R gibt die Temperatur des Kerns, \mathfrak{R} den Radius der Gesamtkugel.

Wir bestimmen erst α^2 aus der Bedingung gleicher Dichte ϱ von Kern und Hülle in der Trennungsfläche; $\varrho = \frac{1}{8} \bar{\varrho} = \frac{M}{4\pi R^3}$. Da die allgemeine Beziehung $\varrho = u^n$ für $n = 1$ in $\varrho = u$ übergeht und stets $T = u\Theta_k$ ist, wird:

$$\alpha^2 = \frac{2\pi G \varrho}{H T} = \frac{G M}{2 H T_R R^3},$$

und mit Hilfe der Beziehung $H T_R = \frac{g_R R}{\tau}$ erhalten wir

$$(195) \quad \alpha = \sqrt{\frac{\tau}{2}} \text{ gramm}^{-\frac{1}{2}} \text{ cent}^{\frac{1}{2}}.$$

Zur Bestimmung der 2. Integrationskonstanten \mathfrak{R} , die zugleich der Radius der ganzen Kugel ist, benutzen wir die Beziehung

$$\frac{dT}{dr} = - \frac{g}{k-1} \frac{1}{H} = - \frac{g}{2H} \text{ für } k = 2,$$

und indem wir dies für $r = R$ ansetzen, ergibt sich

$$(196) \quad \left(\frac{dT}{dr} \right)_R = - \frac{g_R}{2H} = - \frac{T_R R}{\sin \alpha (\mathfrak{R} - R)} \left(\frac{\alpha r \cos \alpha (\mathfrak{R} - r) + \sin \alpha (\mathfrak{R} - r)}{r^2} \right)_{r=R}$$

und mit Benutzung der Werte für T_R und α

$$\operatorname{tg} \sqrt{\frac{\tau}{2}} \left(\frac{\mathfrak{R}}{R} - 1 \right) = \frac{\sqrt{\frac{\tau}{2}}}{\frac{\tau}{2} - 1}$$

und für $\tau = 2,5191$

$$\sqrt{\frac{\tau}{2}} \left(\frac{\mathfrak{R}}{R} - 1 \right) = 77^\circ 20'' = 1,34400$$

und somit

$$(197) \quad \mathfrak{R} = 2,1976 \cdot R.$$

Um den Wert von g an der Oberfläche der Gesamtkugel zu bestimmen setzen wir (196) für $r = \mathfrak{R}$ an und erhalten

$$\frac{g}{2H} = - \frac{T_R R}{\sin \alpha (\mathfrak{R} - R)} \cdot \frac{\alpha}{\mathfrak{R}}$$

und durch leichte Transformation

$$(198) \quad g = \sqrt{\frac{\tau}{2}} \cdot \frac{1}{\frac{\mathfrak{R}}{R} \cdot \sin \sqrt{\frac{\tau}{2}} \left(\frac{\mathfrak{R}}{R} - 1 \right)} g_R = 0,41611 g_R \text{ cent sek}^{-2}.$$

Aus g und R finden wir leicht für die Gesamtmasse \mathfrak{M}

$$(199) \quad \mathfrak{M} = 2,0096 M.*)$$

Um den Energiegehalt $(\varepsilon)_a$ der Hülle berechnen zu können, bemerken wir, daß wir die Lösung der Differentialgleichung der Polytropen für $n = 1$ auch schreiben können (vgl. oben Gl. (194))

$$\varrho = \frac{\varrho_R R}{\sin \alpha (\mathfrak{R} - R)} \frac{\sin \alpha (\mathfrak{R} - r)}{r}$$

und erhalten

$$(\varepsilon)_a = c_v 4 \pi \int_R^{\mathfrak{R}} T \varrho r^2 dr = \frac{c_v 4 \pi T_R \cdot \varrho_R \cdot R^2}{\sin^2 \alpha (\mathfrak{R} - R)} \int_R^{\mathfrak{R}} \sin^2 \alpha (\mathfrak{R} - r) dr$$

$$= \frac{3 c_v M T_R}{R \sin^2 \alpha (\mathfrak{R} - R)} \int_R^{\mathfrak{R}} \sin^2 \alpha (\mathfrak{R} - r) dr \text{ cal.}$$

und daraus

$$(200) \quad (\varepsilon)_a = 0,52767 \cdot (\varepsilon)_i; \quad (\varepsilon) = (\varepsilon)_a + (\varepsilon)_i = 1,52767 (\varepsilon)_i.$$

Die mittlere Temperatur \bar{T} der Gesamtkugel ergibt sich

$$\bar{T} = 0,76018 T_R.$$

Für das Selbstpotential ψ und den Energieumsatz der sich kontrahierenden Kugel gelten dieselben Gesetze wie oben für $n = 0$. Wir können noch folgende kleine Tabelle anlegen:

$\frac{r}{R}$	$\frac{T}{T_R} = \frac{\varrho}{\varrho_R}$	$\frac{g}{g_R}$	$\frac{\mathfrak{M}}{M}$
1	1	1	1
1,25	0,71763	0,90432	1,2675
1,5	0,48258	0,68741	1,5470
1,75	0,22303	0,58530	1,7920
2	0,11286	0,49082	1,9633
2,1	0,05342	0,45488	2,0060
2,1976	0,00000	0,41611	2,0096.

*) Mit Anwendung des für τ vermuteten Wertes $2\sqrt[3]{2}$ (vgl. Anm. Seite 143) ergibt sich $\mathfrak{M} = 2,0088 M$.

§ 6. Der Fall $n = 1,5$, $k = \frac{5}{3}$. Dieser Fall ist für die spätere Untersuchung von besonderer Wichtigkeit, denn $k = \frac{5}{3}$ charakterisiert gleichzeitig die Adiabate einatomiger Gase. Ein Gasball, bestehend aus einem (heissen) isothermen Kern, ungeschlossen von einer Hülle dissoziierter Gase im indifferenten Gleichgewicht, ist nach den Gesetzen gebaut, die wir jetzt untersuchen werden. Da die Differentialgleichung der Gaskugel $n = 1,5$ sich nicht durch bekannte Funktionen integrieren lässt, wird auch für die Hülle eine numerische Auswertung notwendig, und die numerischen Auswertungen für Kern und Hülle müssen geeignet aneinander gepaßt werden.

Die Differentialgleichung für den Bau der isothermen Kugel lautet:

$$(a) \quad \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dv}{dr} + \beta^2 e^v = 0, \quad \beta^2 = \frac{4\pi G}{H T} \text{ gramm}^{-1} \text{ cent.}$$

Durch Einführung der neuen Variablen Gl. (135)

$$(b) \quad r_1 = e^{\frac{v}{2}} \beta r \text{ gramm}^{-\frac{1}{2}} \text{ cent}^{\frac{3}{2}}$$

verwandelt sich (a) in

$$(c) \quad \frac{d^2 v_1}{dr_1^2} + \frac{2}{r_1} \frac{dv_1}{dr_1} + e^{v_1} = 0.$$

Diese Gleichung hatten wir für den Fall $\left(\frac{dv_1}{dr_1}\right)_{r_1=0} = 0$, der Mittelpunktsbedingung einer Gaskugel, und für $v_1 = 0$ für $r_1 = 0$ numerisch ausgewertet, die Resultate in Tabelle 14 angegeben und in den Formeln (135)–(142) gezeigt, wie durch die Zahlenwerte der Tabelle die Gaskugel bestimmt ist. Die isotherme Kugel, die den Kern bildet, soll durch die Minimaltemperatur, $\tau = 2,5191$, bestimmt sein. Dieser Bestimmung tragen wir Rechnung, wenn wir die Stelle (vgl. Seite 143)

$$r_1 = 8,9910, \quad v_1' = -0,28018, \quad e^{v_1} = 0,031156, \quad r_1' v_1' = -2,5191$$

mit der Oberfläche derselben zusammenfallen lassen. An dieser Stelle r_1 haben wir den isothermen Kern zu verlassen und geeignet die polytrope Hülle anzuschließen. Um die Verwechslung mit den Variablen der Hülle zu vermeiden werden wir dies r_1 des Kerns mit r_i bezeichnen.

Die Hülle wird bestimmt durch die Differentialgleichung

$$(d) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \alpha^2 u^n = 0, \quad \alpha^2 = \frac{4\pi G}{k H \Theta_k} \text{ gramm}^{-1} \text{ cent.}$$

Früher hatten wir diese Gleichung behandelt unter der Annahme,

daß die Lösungskurve u horizontal für $r = 0$ abgeht; jetzt haben wir dieselbe stetig an die Lösungskurve $v = f(r_i)$ anzuschließen. Dazu führen wir ein:

$$(e) \quad r_a = \alpha r \text{ gramm}^{-\frac{1}{2}} \text{ cent}^{\frac{3}{2}}$$

und erhalten

$$(f) \quad \frac{d^2 u}{dr_a^2} + \frac{2}{r_a} \frac{du}{dr_a} + u^n = 0.$$

Ist die Lösung $u = f(r_a)$ bekannt, so zeigen die Formeln (78)–(84) wie aus derselben die Gaskugel bestimmt ist.

Durch die Endwerte der Lösungskurve $v_1 = f(r_i)$ sind die Anfangswerte der Lösung $u = f(r_a)$ gegeben. Dieser Übergang von der Variablen r_i zur Variablen r_a wird folgendermaßen bewerkstelligt. Den Radius R drücken wir nach (b) und (e) aus und erhalten

$$(g) \quad R = \frac{r_{i_R}}{\alpha} = \frac{r_{i_R}}{\frac{v}{e^{\frac{3}{2}} \beta}}.$$

Die Dichte an dieser Stelle können wir ebenfalls doppelt ausdrücken und erhalten

$$(h) \quad \rho_R = u_R^n = e^v e_R^{v_1}, \quad u_R = e^{\frac{v}{n}} e_R^{\frac{v_1}{n}}.$$

Dadurch ist die Ausgangsordinate u_R bestimmt.

Aus (a) und (d) finden wir mit Benutzung der Relation $T = u \Theta_k$

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{T_R}{\frac{\pi}{n-1} \Theta_k} = \frac{u_R}{\frac{k}{k-1}}.$$

$$(i) \quad \alpha = \sqrt{\frac{e^{\frac{v}{n}} e_R^{\frac{v_1}{n}}}{\frac{k}{k-1}}} \beta.$$

α ist somit bestimmt. Dadurch können wir die Ausgangsabszisse durch r_i ausdrücken und erhalten aus (g)

$$(k) \quad r_{a_R} = \frac{\alpha}{e^{\frac{v}{n}} \beta} \cdot r_{i_R} = \frac{e^{\frac{v}{n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right)} e_R^{\frac{v_1}{n}}}{\sqrt{\frac{k}{k-1}}} r_{i_R}.$$

Den Ausgangswert $\left(\frac{du}{dr_a} \right)_R$ finden wir, indem wir nach Formeln (78) und (136) den Wert für g_R doppelt ansetzen und erhalten

$$g = -\frac{4\pi G}{\alpha} \left(\frac{du}{dr_a} \right)_R = -\frac{4\pi G}{\beta} e^{\frac{v}{n}} \left(\frac{dv_1}{dr_i} \right)_R$$

und daraus

$$(l) \quad \left(\frac{du}{dr_a} \right)_R = \frac{\frac{v}{2} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) e^{\frac{v}{2n}}}{\sqrt{\frac{k}{k-1}}} \left(\frac{dv_1}{dr_i} \right)_R.$$

Schließlich können wir noch die mittlere Dichte $\bar{\rho}$ des Kerns doppelt ausdrücken und erhalten

$$(m) \quad \bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3} = - \frac{3 \left(\frac{du}{dr_a} \right)_R}{(r_a)_R} = - \frac{3e^v \left(\frac{dv_1}{dr_i} \right)_R}{(r_i)_R}.$$

Die oben auf Seite 191 angeführten Werte r_1 , e^{v_1} , v_1' sind gewonnen für die Mittelpunktsdichte 1, also $e^v = 1$; unter diesen Umständen haben wir aus (h)

$$u_R = \rho_R^{-n} = \left(e^v \right)_R = 0,031156^{\frac{2}{3}} = 0,099012,$$

aus (k)

$$r_{a_R} = \sqrt[2-n]{\frac{e^{\frac{v_1}{2n}}}{k}} \quad r_{i_R} = \frac{0,031156^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[2,5]{2,5}} \cdot 8,9910 = 1,7893,$$

und aus (l)

$$\left(\frac{du}{dr_a} \right)_R = - \frac{e^{\frac{v_1}{2n}}}{\sqrt{\frac{k}{k-1}}} \cdot \left(\frac{dv_1}{dr_i} \right)_R = - \frac{0,031156^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[2,5]{2,5}} \cdot 0,28018 = - 0,055760.$$

Damit sind die Ausgangswerte gegeben, für welche die Lösung von (f) gefunden werden muß. Bestimmen wir mit ihnen aus (f) den Wert von $\frac{d^2 u}{dr_a^2}$ für die Ausgangsstelle, so ergibt sich $\left(\frac{d^2 u}{dr_a^2} \right)_R = 0,031168$, also beinahe genau der Wert von $u_R^{-n} = e^{v_1} = 0,031156$. Wären die durch numerische Auswertung gewonnenen Werte für r_i , e^{v_1} usw. exakte Werte, so müßte die Übereinstimmung vollständig sein. Denn setzen wir in (f) $\frac{d^2 u}{dr_a^2} = u^n$, so lautet dieselbe $\frac{2}{r_a} u' + 2u^n = 0$; führen wir statt u und r_a die Variable v_1 und r_i gemäß (h), (k), (l) ein, so wird sie $\frac{v_1'}{r_i} + e^{v_1} = 0$, und dies ist die Bedingung, daß, wie verlangt, $-r_i v_1' = \tau$ ein Maximum wird (vgl. Kap. XI, § 4).

§ 7. Die Auswertung der Gleichung (f) nach dem oben (Seite 74) auseinandergesetztem Verfahren von Kutta, von den ermittelten Ausgangswerten ausgehend, ergibt

r_a	$-\frac{du}{dr_a}$	u	$u^{1,5}$	$-r_a^3 \cdot \frac{du}{dr_a}$	$u^{2,5} r_a^2$
1,7893	0,05576	0,099012	0,031156	0,178525	0,0099728
1,9		0,093018	0,028369		
2	0,050051	0,087893	0,026057	0,200204	0,009161
2,5	0,040486	0,065450	0,016744	0,253038	0,0068493
3	0,033624	0,046992	0,010183	0,302616	0,0043083
3,5	0,028006	0,031623	0,005624	0,343073	0,0021784
4	0,023170	0,018857	0,002589	0,370720	0,0007812
4,5	0,018999	0,008341	0,0007618	0,384731	0,0001286
5	0,015513	-0,000255			
4,9835	0,015616	0,000000	0,000000	0,387827	0,000000

Daraus ergibt sich weiter:

$$(201) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathfrak{R}}{R} = \frac{4,9835}{1,7893} = 2,7851 \\ \frac{g}{g_R} = \frac{0,015616}{0,05576} = 0,28006 \\ \frac{\mathfrak{M}}{M} = \frac{g \mathfrak{R}^2}{g_R R^2} = 2,1724. \end{array} \right.$$

Um den Energieinhalt $(\varepsilon)_a$ zu berechnen setzen wir an

$$(\varepsilon)_a = c_v \int_R^{\mathfrak{R}} T d\mathfrak{M} = 4\pi c_v \int_R^{\mathfrak{R}} T \varrho r^2 dr = \frac{4\pi c_v \Theta_k}{\alpha^3} \int_{1,7893}^{4,9835} u^{n+1} r_a^2 dr_a \text{ cal.}$$

Andererseits haben wir (mit Berücksichtigung von Formel (137), $e^v = 1$)

$$(\varepsilon_i) = -\frac{4\pi c_v T}{\beta^3} \left(r_i^2 \frac{dv_i}{dr_i} \right)_R \text{ cal.}$$

und somit

$$(n) \quad \frac{(\varepsilon)_a}{(\varepsilon)_i} = -\frac{\Theta_k \beta^3}{T \alpha^3} \frac{\int_{1,7893}^{4,9835} u^{n+1} r_a^2 dr_a}{\left(r_i^2 \frac{dv_i}{dr_i} \right)_R} = -\left(\frac{r_i}{r_a} \right)_R^3 \frac{1}{e_R^n} \frac{\int_{1,7893}^{4,9835} u^{n+1} r_a^2 dr_a}{\left(r_i^2 \frac{dv_i}{dr_i} \right)_R}.$$

$\int_{1,7893}^{4,9835} u^{n+1} r_a^2 dr_a$ kann mit Hilfe der letzten Spalte der Tabelle nach

der Simpsonschen Regel ausgewertet werden und ergibt 0,011341, so daß wir schließlich erhalten

$$\frac{(\varepsilon)_a}{(\varepsilon)_i} = \left(\frac{8,9910}{1,7893} \right)^3 \frac{1}{\frac{2}{3}} \cdot \frac{0,011341}{(8,9910)^2 \cdot 0,28018} = 0,64160$$

$$(202) \quad (\varepsilon) = (\varepsilon_a + \varepsilon_i) = 1,64160 \cdot (\varepsilon)_i.$$

Die Mitteltemperatur der ganzen Kugel ergibt sich zu

$$\bar{T} = 0,75564 T_R.$$

Da auch hier die Beziehung gilt $\frac{(\varepsilon)}{\psi} = -\frac{1}{3(\kappa-1)}$, läßt sich ψ angeben.

Die Energetik des Kontraktionsprozesses verläuft, wie oben für $n = 0$ auseinandergesetzt.

Berechnen wir noch Energie und Selbstpotential dieses Systems. Für den isothermen Kern hatten wir $T = \frac{1}{2,5191} \cdot \frac{GM}{HR}$; dies gibt den Energieinhalt der Masseneinheit zu $c_v T = \frac{1}{2,5191} \cdot \frac{c_v GM}{AHR} = \frac{1}{2,5191 \cdot (\kappa-1)} \frac{GM}{R}$, und somit den Energiegehalt des isothermen Kernes

$$(\varepsilon) = \frac{1}{2,5191(\kappa-1)} \cdot \frac{GM^2}{R} \text{ Erg.}$$

Also haben wir, da $(\varepsilon) = 1,6416 (\varepsilon)_i$

$$(203) \quad (\varepsilon) = \frac{0,65166}{\kappa-1} \frac{GM^2}{R} = \frac{0,38449}{\kappa-1} \frac{G\mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}} \text{ Erg.}$$

und

$$(204) \quad \psi = -1,15347 \cdot \frac{G\mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}} \text{ Erg.}$$

Die letzte Formel enthält den merkwürdigen Satz:

Das Selbstpotential der isotherm-polytropen Gaskugel minimalster Innentemperatur ist unabhängig von der Natur des Gases.

Dreizehntes Kapitel. Gaskugeln mit starrem Kerne.

§ 1. Die theoretische Behandlung einer Gaskugel mit festem Kerne, d. i. eines starren Weltkörpers nebst der ihn umgebenden Atmosphäre, gestaltet sich einfach, wenn die Massen von Hülle und Kern von sehr verschiedener Größe sind. Bei stark überwiegender Atmosphäre wird in den äußern, unserer Beobachtung zugänglichen Schichten der Einfluß des Kerns immer mehr zurücktreten, so daß wir hier die bereits erläuterten Verhältnisse einer vollständigen Gaskugel wiederfinden. Ist die Masse der Atmosphäre aber klein gegen die des zentralen Körpers, so können wir von der innern Gravitation derselben abssehen. Die Verhältnisse liegen dann sehr einfach; wir werden sie im Kap. 17 an einem bestimmten Beispiel, (die Erde und ihre Atmosphäre), erläutern. Die Behandlung des allgemeinen Problems aber gestaltet sich ungleich schwieriger wie diejenige der vollständigen Gaskugel. In beiden Fällen haben wir es mit derselben Diffe-

rentialgleichung zu tun. In letzterem Falle hatten wir die Mittelpunktsbedingung $\frac{du}{dr} = 0$; alle in Betracht kommenden Lösungskurven $u = f(r)$ gehen von der Ordinatenachse horizontal ab; und wir hatten gesehen, daß aus einer einzigen dieser Lösungskurven, derjenigen, die bei $u = 1$ entspringt, sich alle in Betracht kommenden Lösungskurven durch Ähnlichkeitstransformation entwickeln lassen. Jede Klasse n erfordert nur die Kenntnis einer einzigen Lösungskurve; wir hatten dieselbe durch numerische Auswertung gewonnen. Ist hingegen ein fester Kern vorhanden, so wird durch dessen Radius und Masse, sowie der Temperatur, (resp. Dichte oder Druck), der Atmosphäre an dessen Oberfläche in der u, r -Ebene ein r , ein u und ein $\frac{du}{dr}$ bestimmt, wodurch die Lösungskurve $u = f(r)$ festgelegt ist, die, da die Differentialgleichung von zweiter Ordnung ist, nicht unter den bereits vorliegenden enthalten zu sein braucht; sie muß, ausgenommen die Fälle $n = 0$ und $n = 1$, durch numerische Auswertung gewonnen werden. Aus dieser können, wie wir sehen werden, immer noch ∞^1 Lösungskurven durch Ähnlichkeitstransformation abgeleitet werden; da aber ∞^2 Lösungskurven möglich sind, so sind in jeder (durch den Wert von n bestimmten) Klasse ∞^1 numerische Auswertungen notwendig, um die Lösung der Aufgabe vollständig wiederzugeben. Diese Art der Lösung ist praktisch nicht ausführbar; wir schlagen statt dessen folgenden Weg ein.

Die bei endlichem r , und gegebenem $\frac{du}{dr}$ und u beginnende Lösungskurve denken wir nach rückwärts fortgesetzt, eventuell bis zum Schnitt mit der Achse $r = 0$. (Negative r brauchen wir nicht zu berücksichtigen, da die Funktion u zur Achse $r = 0$ symmetrisch liegt.) Würde die Kurve hier zufällig horizontal einschneiden, oder befänden wir uns für $n > 3$ zufällig auf der möglichen singulären Lösungskurve u proportional $\frac{1}{r^{\frac{n}{2}-1}}$, so wäre das Problem gelöst, da der feste Kern durch

ein Stück einer Gaskugel, welche die Atmosphäre zu einer vollständigen Gaskugel ergänzt, ersetzt werden kann. Die Wahrscheinlichkeit dieses Falles aber ist unendlich klein. Würden wir jedoch durch Diskussion der Differentialgleichung eingesehen haben, welche Typen von Lösungen $u = f(r)$ überhaupt möglich sind, so können wir aus dem an der Oberfläche des festen Kernes geltenden Werte von r, u und $\frac{du}{dr}$ schließen, welchem Lösungstypus die so bedingte Lösungskurve entspricht und die Lösung, wenn auch nicht zahlenmäßig, so doch ihrer Natur nach durchschauen.

Deshalb gehen wir dazu über, unsere früheren Untersuchungen der Differentialgleichungen (I) und (II) fortzusetzen. Wir behandeln zuerst Atmosphären im polytropen Gleichgewicht; die isotherme Atmosphäre lässt sich dann leicht erledigen.

§ 2. Nach Seite 39 lautet die Differentialgleichung der Gas-Kugel auch für den Fall eines festen Kernes

$$(I) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \alpha^2 u^n = 0$$

$$\alpha^2 = - \frac{4\pi G}{k - 1} \frac{H \Theta_k}{H \Theta_k} \text{ gramm}^{-1} \text{ cent.}$$

Wir nehmen an, die Gaskonstante H und die polytrope Temperatur Θ_k , (bei adiabatischen Atmosphären der Entropiegehalt), seien gegeben. Dadurch ist α^2 bestimmt. Aus der Lösungskurve $u = f(r)$ können sämtliche die Atmosphäre bestimmenden Größen nach Formeln (67) - (76) berechnet werden. Durch Masse M und Radius R des festen Kernes ist der Wert von g an dessen Oberfläche bestimmt; und wir haben nach Gleichung (67)

$$g = - \frac{k}{k - 1} H \Theta_k \frac{du}{dr} = - \frac{4\pi G}{\alpha^2} \frac{du}{dr} \text{ cent sek}^{-2}.$$

Die hier herrschende Temperatur T liefert

$$T = u \Theta_k.$$

Wir sehen:

Der Neigungswinkel der Kurve $u = f(r)$ für $r = R$ ist lediglich durch die Masse des Kerns, unabhängig von dessen Temperatur, die Ordinate u lediglich durch die Temperatur, unabhängig von dessen Masse, bestimmt.

Aus dem Werte von g an der Oberfläche des festen Kerns ($r = R$) und dem Werte g an der äußeren Begrenzung der Atmosphäre ($r = R$) berechnet sich die Masse der Atmosphäre M zu

$$(205) \quad M = \frac{g R^2}{G} - M = \frac{g R^2}{G} - \frac{g R^2}{G}$$

$$= - \frac{k}{k - 1} \frac{H \Theta_k}{G} \left(\left(r^2 \frac{du}{dr} \right)_R - \left(r^2 \frac{du}{dr} \right)_R \right)$$

$$= - \frac{4\pi}{\alpha^2} \left(\left(r^2 \frac{du}{dr} \right)_R - \left(r^2 \frac{du}{dr} \right)_R \right) \text{ gramm.}$$

Um die Differentialgleichung von dem speziellen Werte α^2 zu befreien, führen wir, wie auf Seite 67, eine neue unabhängige Variable ein

$$r = \alpha r \text{ gramm}^{-\frac{1}{2}} \text{ cent}^{\frac{3}{2}}$$

und erhalten so wieder

$$(I') \quad \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + u^n = 0$$

und haben weiter die Gleichungen (78) — (84) zu benutzen. Der Ausgangswert von $\frac{du}{dr}$ für $r = R$ berechnet sich aus

$$g = - \frac{4\pi G}{\alpha} \frac{du}{dr}$$

und die Masse der Atmosphäre ergibt sich zu

$$(206) \quad M = - \frac{4\pi}{\alpha^2} \left\{ \left(r^2 \frac{du}{dr} \right)_R - \left(r^2 \frac{du}{dr} \right)_\infty \right\}.$$

Aus der ermittelten Lösungskurve können wir durch Ähnlichkeitstransformation eine weitere Reihe Lösungen ableiten. Nehmen wir an, wir hätten an der R entsprechenden Stelle r anstatt u_2 den Wert $u = U u_2$, so können wir vom selben Werte u_2 ausgehen, wenn wir, wie auf Seite 68, eine neue unabhängige Variable

$$r_2 = U^{\frac{n-1}{2}} r \text{ gramm}^{-\frac{1}{2}} \text{ cent}^{\frac{3}{2}}$$

einführen. Wir erhalten dann die der Gleichung (I'') entsprechende Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u_2}{dr_2^2} + \frac{2}{r_2} \frac{du_2}{dr_2} + u_2^n = 0$$

und können nun mit Hilfe der Gleichungen A, B, C, D und (85) — (91) der Seite 69 rechnen. In bezug auf Übersichtlichkeit würden wir hier aber bedeutend weniger gewinnen wie dort; denn hier haben sich die Ausgangswerte von r und $\frac{du}{dr}$ geändert in $r_2 = U^{\frac{n-1}{2}} r$ und $\frac{du_2}{dr_2} = U^{-\frac{n+1}{2}} \frac{du}{dr}$, während bei der vollständigen Gaskugel die entsprechenden Ausgangswerte r_1 und $\frac{du}{dr_1}$, dem Mittelpunkt entsprechend, gleich Null blieben. Wir knüpfen deshalb die weiteren Untersuchungen an die Variablen u und r , entsprechend der Differentialgleichung (I').

§ 3. Wir untersuchen zuerst, in wie viel Punkten dieselbe Lösungskurve $u = f(r)$ eine Senkrechte, $r = \text{konst.}$, schneiden kann. In Kap. IV § 4 haben wir gezeigt, daß die Substitution $x = \frac{1}{r}$ die Differentialgleichung (I') verwandelt in

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{u^n}{x^4} = 0.$$

Da n kontinuierlich veränderlich, so haben wir nur mit $u > 0$ zu rechnen. Eine Lösungskurve $u = f(r)$ kehrt der x -Achse stets die konkave Seite zu, kann also (für $u > 0$) nicht mehrwertig sein. Daselbe folgt für die positiven Werte der Funktion $u = f(r)$. Gehen wir vom Punkte $r, u, \frac{du}{dr}$ nach der einen oder andern Richtung ab, so treffen wir stets auf größere, resp. kleinere Werte von r . Gehen wir zu kleinem r , so müssen wir zu $r = 0, u \geq 0$ oder $u = 0, r \geq 0$ gelangen.

§ 4. Wir untersuchen weiter, unter welchen Winkeln eine Lösungskurve $u = f(r)$ die Ordinatenachse bei endlichen Werten der Ordinate verlassen kann. Wir führen in der Gleichung (I') eine neue Veränderliche ein

$$(207) \quad u = \frac{w}{r}$$

und erhalten durch leichte Transformation

$$(208) \quad \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{w^n}{r^{n-1}} = 0.$$

Die Funktion w, u eindeutig zugeordnet, kehrt im positiven Quadranten der r -Achse stets die konkave Seite zu. Endlichen Werten von u für $r = 0$ entspricht stets der Wert $w = 0$ für $r = 0$; der Schar Lösungskurven $u = f(r)$, welche die Achse $r = 0$ bei endlichen Werten u verlassen, entspricht ein Büschel Lösungskurven $w = f(r)$, die sämtlich vom Punkte $w = 0, r = 0$ sich in den positiven Quadranten der w, r -Ebene erstrecken. Aus (207) bilden wir leicht

$$(209) \quad \left(\frac{dw}{dr} \right)_{r=0} = u_{r=0}.$$

Je größer der Wert $u_{r=0}$, desto steiler steht die w -Kurve im Punkte $r = 0, w = 0$. (Auch für $\left(\frac{du}{dr} \right)_{r=0} = \infty$, da $(ru')_{r=0}$ stets = 0.)

Aus (207) und (208) finden wir ferner

$$(210) \quad \left(\frac{du}{dr} \right)_{r=0} = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{dw}{dr} - w}{r} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} \right)_{r=0} = - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{w}{r} \right)^{n-1} \right]_{r=0} = 0,$$

das heißt (mit Berücksichtigung von (209)):

Alle Lösungskurven $u = f(r)$, welche die Ordinatenachse bei endlichen Ordinaten verlassen, gehen horizontal ab. Mündet eine vom Punkte $u, r, \frac{du}{dr}$ rückwärts verlängerte Lösungskurve bei endlichem u in der Ordinatenachse ein, so geschieht dies stets horizontal. In

jedem Punkte der u, r -Ebene ist $\frac{du}{dr}$ willkürlich; in den durch die Singularität $r = 0$ ausgezeichneten Stellen aber ist bei endlichem u nur $\frac{du}{dr} = 0$ zulässig.

Der Differentialgleichung $\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{w^n}{r^{n-1}} = 0$ können vier Typen von Lösungskurven $w = f(r)$ genügen (Fig. 9).

Dem Nullpunkt des Koordinatensystems entspringt ein Büschel I, wir haben dasselbe bereits besprochen und in die u, r -Ebene übersetzt. Jedem Punkte der r -Achse kann ein Bündel vom Typus II entspringen. (Wir brauchen nur die Hälfte der hier ausgängenden Kurven, für die $\frac{dw}{dr} > 0$ ist, zu betrachten, die Kurven mit $\frac{dw}{dr} <$

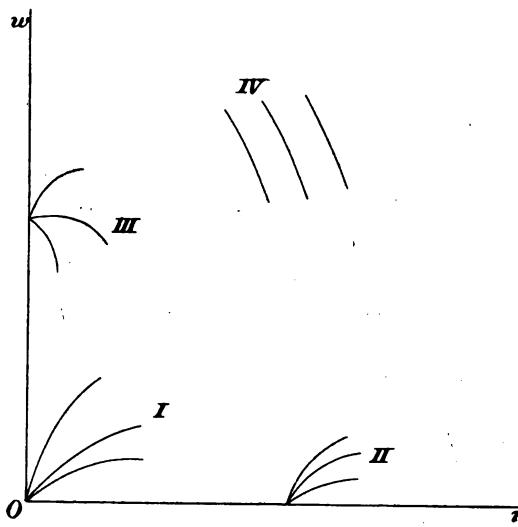


Fig. 9.

können als Endstücke der Kurven I, II resp. III aufgefaßt werden.) Bei derselben Abszisse entspringt ein Büschel u -Kurven mit der Neigung $u' = \frac{w'}{r}$. Mündet eine dieser w -Kurven nochmals in die r -Achse ein, so endigt in diesem Punkte auch eine u -Kurve. Den w -Kurven vom Typus III, die bei $r = 0$ in endlichen Ordnaten entspringen, entsprechen u -Kurven, die bei $r = 0$ und $u = \infty$ ausgehen. So lange

$(w')_{r=0} < +\infty$, ist $(u')_{r=0} = -\infty$. Ob u' auch endliche, vielleicht auch positive Werte annehmen kann, läßt sich vorderhand nicht entscheiden. Einem vierten Typus w -Kurven, die von $r = 0, w = \infty$ herabkommen, entsprechen u -Kurven aus $r = 0, u = \infty$.

Wir haben somit für u drei Lösungstypen, 1. die aus $r = 0, u = \infty$ kommen, mit $u' = -\infty$, nebst solchen mit möglicherweise endlichem u' ; 2. die aus $r = 0, u$ endlich mit $\frac{du}{dr} = 0$ entspringen, und 3. solche, die von $r > 0, u = 0$ mit beliebigem $\frac{du}{dr}$ ausgehen. Nun ist noch eine Klasse u -Kurven denkbar, die entsprechend dem

Typus I der w -Kurven mit beliebigem $\frac{du}{dr}$ von $u = 0$, $r = 0$ ausgehen. Diese Klasse u -Kurven existiert nicht. Denn betrachten wir wie oben u als $f(x)$, $x = \frac{1}{r}$, so müßten diese bei $x = \infty$, $u = 0$ mit $\frac{du}{dx} = -\frac{du}{dr} \cdot r^2 = 0$ entspringen, und dies ist für positive u unmöglich, da die Kurven der x -Achse stets die konkave Seite zukehren müssen.

Die weitere Untersuchung führen wir nur durch für die Klasse $n > 1$ und gehen nicht weiter ein auf den Fall $n \leq 1$. Die Grenzfälle $n = 0, = 1$ können wir in geschlossener Form angeben, und bei stetig wachsendem n stetige Änderung der Lösungskurven u erwarten, was durch die numerisch ausgewertete Lösung für $n = \frac{1}{2}$ bestätigt wird. An den Lösungen

$$n = 0, \quad u = A + \frac{B}{r} + \frac{r^2}{6}$$

$$n = 1, \quad u = A \frac{\sin r}{r} + B \frac{\cos r}{r}$$

lassen sich die eben ermittelten Eigentümlichkeiten der Lösungskurven $u = f(r)$ bequem nachweisen.

§ 5. Um weiter in den Mechanismus der Differentialgleichung I' einzudringen, benutzen wir wiederum die Gleichung erster Ordnung, in welche sie sich transformieren läßt. Vgl. Kap. IV § 9. Wir stellen die Formeln hier nochmals zusammen, teilweise nach leichter Umformung.

$$(a) \quad r = e^{-s}; \quad u = r^{-\frac{2}{n-1}} z; \quad y = \frac{dz}{ds}.$$

Dadurch verwandelt sich I' in die Gleichung erster Ordnung:

$$(I'a) \quad y \frac{dy}{dz} + ay + bz + z^n = 0$$

$$a = \frac{5-n}{n-1}, \quad b = \frac{2(3-n)}{(n-1)^2}.$$

Dabei ist

$$(b) \quad u' = -r^{-\frac{n+1}{n-1}} \left(y + \frac{2}{n-1} z \right),$$

$$(c) \quad y = -r^{\frac{2}{n-1}} \left(ru' + \frac{2}{n-1} u \right),$$

$$(d) \quad \frac{dy}{dz} = y' = - \frac{\frac{5-n}{n-1} ru' + \left(\frac{2}{n-1}\right)^2 u - r^2 u^n}{ru' + \frac{2}{n-1} u},$$

$$(e) \quad u' = \frac{r^2 u^n - \left(\frac{2}{n-1}\right)^2 u - \frac{2}{n-1} u y'}{r \left(y' + \frac{5-n}{n-1}\right)}.$$

(Wir schreiben u und r statt (loc cit) u_1 und r_1 , da wir die Transformation an der Gleichung (I'), nicht wie früher an der Gleichung (I'') (Seite 48) ausführten.) In den Diagrammen 1—8 haben wir die Kurven mit konstantem $\frac{dy}{dz}$ eingezeichnet (vgl. Kap. IV § 11). Für $n > 3$ findet sich bei $z = [-b]^{\frac{1}{n-1}}$ ein Verzweigungspunkt; derselbe gibt eine singuläre Lösung der Gleichung (I'a) und somit nach (a) die

$$\text{Lösung } u = \left| \frac{2(n-3)}{(n-1)^2} \right|^{\frac{1}{n-1}} \cdot \frac{1}{r^{\frac{2}{n-1}}} \text{ der Gleichung (I').}$$

Nach (a) haben wir $z = r^{\frac{1}{n-1}} u$. Die Achse $z = 0$ kann danach die r oder u -Achse der Gleichung (I') repräsentieren. Dies zu entscheiden verwenden wir die Beziehung (d). Setzen wir $u = 0$, so ergibt sich $y' = -\frac{5-n}{n-1}$; setzen wir $r = 0$, dann $y' = -\frac{2}{n-1}$. Da die y -Achse aber Kurve konstanter Durchsetzungsrichtung $y' = -\frac{5-n}{n-1}$ ist, so folgt:

Die Achse $z = 0$ entspricht der Achse $u = 0$; der singuläre Punkt $z = 0, y = 0$ entspricht der Achse $r = 0$. Den u -Kurven, die der Achse r bei endlichem r entspringen, entsprechen Lösungskurven $y = f(z)$, die auf der y -Achse beginnen; die u -Kurven, welche die Achse u bei endlichem u (also horizontal) verlassen, werden durch Kurven $y = f(z)$ dargestellt, die sämtlich von dem singulären Punkte $y = 0, z = 0$ ausgehen.

Die u -Kurven, welche von der Achse $r = 0$ horizontal abgehen, (die allein beim Problem der vollständigen Gaskugel in Betracht kamen), werden dargestellt durch Kurven $y = f(z)$, die mit $\frac{dy}{dz} = -\frac{2}{n-1}$ den Punkt $y = 0, z = 0$ verlassen; stets führt diese Richtung in den südöstlichen Quadranten der y, z -Ebene herein. In Richtung dieser Abgangstangente konstruieren wir die Gerade $y + \frac{2}{n-1} z = 0$; sie

ist den Diagrammen 1—8 als Gerade η eingezeichnet. Diese Gerade hat eine wichtige Bedeutung. Denn nach Gleichung (b) ist

$$u' \leqslant 0, \text{ wenn } \left(y + \frac{2}{n-1} z \right) \geqslant 0.$$

Daraus folgt:

In allen Punkten der y, z -Ebene, gelegen zwischen der Geraden η und der positiven y -Achse, ist $\frac{du}{dr} < 0$, in den Punkten zwischen der Geraden η und der negativen y -Achse ist $\frac{du}{dr} > 0$.

Werte $u = f(r)$, die wirklich vorhandenen Gasteilchen entsprechen, liegen also stets oberhalb der Geraden η ; nur rückwärts verlängerte u -Kurven können Kurven $y = f(z)$ entsprechen, die bis unter η heruntergehen. Den Punkten der negativen (positiven) y -Achse entsprechen somit Punkte der r -Achse mit positivem (negativem) $\frac{du}{dr}$. Da wir ferner aus (a) und (c) leicht bilden können

$$(f) \quad \frac{dz}{dr} = \left[\frac{2}{n-1} r^{\frac{2}{n-1}-1} u + r^{\frac{2}{n-1}} u' \right] = -\frac{y}{r}$$

und somit sehen, daß z mit r zu- resp. abnimmt, je nachdem y negativ oder positiv ist, so folgt:

Den Lösungskurven $y = f(z)$, welche die y -Achse bei $y < 0$ verlassen und in dieselbe bei $y > 0$ einmünden, entsprechen Lösungskurven $u = f(r)$, welche die r -Achse bei $r > 0$ mit $\frac{du}{dr} > 0$ verlassen und mit stetig wachsendem r mit $\frac{du}{dr} < 0$ wieder in dieselbe einmünden.

Dem Kulminationspunkte der u -Kurve entspricht der Durchgang der y -Kurve durch die Gerade η . Den Kurven u , im Sinne des wachsenden r durchlaufen, zu entsprechen, müssen die y -Kurven den Punkt $y = 0, z = 0$, entgegengesetzt dem Uhrzeiger, umgehen.

§ 6. Aus einer Lösungskurve $y = f(z)$ können wir durch nochmäliche Integration unendlich viele Lösungen $u = f(r)$ ableiten, da eine Integrationskonstante zur Verfügung steht. Diese Integrationskonstante kann (bei gegebenem r) für einen Wert von u die verschiedenen $\frac{du}{dr}$, oder für einen Wert von $\frac{du}{dr}$ die verschiedenen u bestimmen. Nach dem oben Auseinandergesetzten gilt hier folgendes Gesetz:

Der Lösungskurve $y = f(z)$, die den singulären Punkt $y = 0, z = 0$ in Richtung η verläßt, entsprechen Lösungen $u = f(r)$, die bei $r = 0$ mit $\frac{du}{dr} = 0$ bei beliebigem u abgehen; den Lösungskurven $y = f(z)$, welche die y -Achse bei einem endlichen Werte $+y_0$ verläßt, entsprechen

Lösungen $u = f(r)$, die bei einem Werte $r > 0$ mit $u = 0$ unter einem $\frac{du}{dr}$ abgehen, das durch Gleichung (c) bestimmt ist.

Die Integrationskonstante bestimmt im ersten Falle bei gegebenem $\frac{du}{dr}$, ($\frac{du}{dr} = 0$), die verschiedenen Abgangsordinaten u , im letzten Falle bei gegebenem u , ($u = 0$), die verschiedenen Abgangsrichtungen $\frac{du}{dr}$.

§ 7. Aus (d) und (e) folgte, daß Kurven $y = f(z)$, welche, die Gerade η tangierend, aus $y = 0, z = 0$ abgehen, u -Kurven repräsentieren, welche die u -Achse bei endlichem u horizontal verlassen. Wir untersuchen, ob die Differentialgleichung (I'a) an diesem Punkte noch eine zweite Abgangsrichtung zuläßt. Aus (I'a) bilden wir

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)_0 = - \lim_{\substack{y=0 \\ z=0}} \left(\frac{ay + bz + z^n}{y} \right) = - \frac{a \left(\frac{dy}{dz}\right)_0 + b}{\left(\frac{dy}{dz}\right)_0}$$

und erhalten für y'_0 im Punkt $y = 0, z = 0$ die quadratische Gleichung

$$y'^2 + ay' + b = 0.$$

Da $a = \frac{5-n}{n-1}$, $b = \frac{2(3-n)}{(n-1)^2}$, so ergeben sich für y' die beiden Werte

$$(211) \quad y'_\eta = -\frac{2}{n-1}; \quad y'_\xi = -\frac{3-n}{n-1}.$$

Wir finden somit noch eine zweite Abgangsrichtung y'_ξ und zeichnen ihr entsprechend in die Diagramme gleicher Fortschrittsrichtungen (Diagramme 1—8, Seite 51—56) die Gerade ξ :

$$(212) \quad y + \frac{3-n}{n-1}z = 0.$$

Diese zweite Abgangsrichtung y'_ξ setzen wir in (e) ein und erhalten für $z = 0$

$$u' = \left| \frac{\frac{r_1^2 u^n - \frac{2}{n-1} u}{2} r}{n-1} \right|_{z=0} = \left| \frac{u \left(r_1^2 u^{n-1} - \frac{2}{n-1} \right)}{\frac{2}{n-1} r} \right|_{z=0}.$$

Bei der Bildung dieses Grenzwertes haben wir zu berücksichtigen, daß für $r = 0$ auch $u = \infty$ werden kann. Da aber nach (a) $z = ur^{\frac{2}{n-1}}$, ist für $z = 0$ stets $ur^{\frac{2}{n-1}} = 0$ also auch $u^{n-1}r^2 = 0$. Deshalb ergibt sich für $z = 0$

$$u'r = -u.$$

Entspricht der Punkt 0 dem Mittelpunkt der Kugel, so haben wir

für $r = 0$, $u > 0$, $u' = -\infty$. Dazu gehört nach § 3 die Ausgangsordinate $u = +\infty$. Kurven y , die bei 0 in Richtung y_ξ' entspringen, können u -Kurven darstellen, die bei $r = 0$, $u = \infty$ mit $u' = -\infty$ abgehen. Wir werden aber sehen, daß der Punkt 0 und eine Einmündungsrichtung y_ξ' auch der Oberfläche $u = 0$ entsprechen kann; in diesem Falle ist stets $u' = 0$.

§ 8. In den Verzweigungspunkt $y = 0$, $z = 0$ münden unendlich viele Lösungskurven $y = f(z)$ ein. Dies Einmünden kann aber nur in einer der beiden Richtungen y_ξ' , y_η' vor sich gehen. Die Lösungskurven müssen deshalb eine der beiden Geraden ξ , η als Endtangente besitzen. Dies Verhalten muß nun näher untersucht werden.

Betrachten wir ein so kleines Gebiet in der Nähe dieses Verzweigungspunktes, daß wir z^n gegen bz vernachlässigen können, so nimmt (I'a) die Form an

$$y \frac{dy}{dz} + ay + bz = 0.$$

Führen wir $y = zw$ ein, so erhalten wir

$$\frac{w dw}{w^2 + aw + b} + \frac{dz}{z} = 0.$$

Da die bei Integration des ersten Summanden in Betracht kommende Größe

$$q = 4b - a^2 = \frac{4 \cdot 2 \cdot (3-n)}{(n-1)^2} - \left(\frac{5-n}{n-1}\right)^2 = -1, \text{ also } < 0$$

ist, so ergibt die Integration

$$\frac{1}{2} \lg(w^2 + aw + b) - \frac{a}{2} \lg \frac{2w + a - 1}{2w + a + 1} + \lg z = C.$$

Bei Untersuchung der Verhältnisse in der Umgebung des andern Verzweigungspunktes, der bei $n > 3$ auftritt, hatten wir (Kap. IX) dieselbe Gleichung zu integrieren. Damals aber war $q > 0$, so daß wir einen arctg erhielten und auf periodische Verhältnisse geführt wurden.

Weitere Umformung ergibt

$$\lg(y^2 + ayz + bz^2) - \lg \left(\frac{y + \frac{a-1}{2}z}{y + \frac{a+1}{2}z} \right)^a = C.$$

Da wegen $b = \frac{2(3-n)}{(n-1)^2}$ und $a = \frac{5-n}{n-1}$ die Beziehung besteht

$$b = \frac{a-1}{2} \cdot \frac{a+1}{2},$$

erhalten wir schließlich

$$(213) \quad \left(y + \frac{a-1}{2} z \right)^{\frac{a-1}{2}} = C \left(y + \frac{a+1}{2} z \right)^{\frac{a+1}{2}},$$

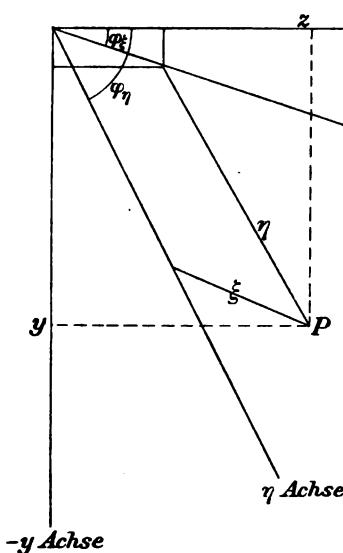


Fig. 10.

wobei wir haben

$$(214) \quad \begin{aligned} \frac{a-1}{2} \\ = \frac{3-n}{n-1} = -y'_\xi; \\ \frac{a+1}{2} \\ = \frac{2}{n-1} = -y'_\eta. \end{aligned}$$

Die letzten Beziehungen legen es nahe, die Gleichung (213) zu weiteren Untersuchungen in schiefwinkligen Koordinaten auszudrücken und als neue Koordinatenachsen die Geraden η und ξ zu wählen.

Wie aus Fig. 10 unmittelbar hervorgeht, ist

$$\begin{aligned} z &= \xi \cos \varphi_\xi + \eta \cos \varphi_\eta \\ y &= \xi \sin \varphi_\xi + \eta \sin \varphi_\eta. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(215) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{z \sin \varphi_\eta - y \cos \varphi_\eta}{\sin(\varphi_\eta - \varphi_\xi)} = \frac{z \operatorname{tg} \varphi_\eta - y}{\sin(\varphi_\eta - \varphi_\xi)} \cos \varphi_\eta \\ \qquad \qquad \qquad = -\frac{y + \beta z}{\sin(\varphi_\eta - \varphi_\xi)} \cos \varphi_\eta, \\ \eta = \frac{z \sin \varphi_\xi - y \cos \varphi_\xi}{\sin(\varphi_\xi - \varphi_\eta)} = \frac{z \operatorname{tg} \varphi_\xi - y}{\sin(\varphi_\xi - \varphi_\eta)} \cos \varphi_\xi \\ \qquad \qquad \qquad = -\frac{(y + \alpha z)}{\sin(\varphi_\xi - \varphi_\eta)} \cos \varphi_\xi, \\ \beta = -\operatorname{tg} \varphi_\eta = -y'_\eta = \frac{a+1}{2}, \\ \alpha = -\operatorname{tg} \varphi_\xi = -y'_\xi = \frac{a-1}{2}, \end{array} \right.$$

so daß wir die Gleichung (213) in den neuen, schiefwinkligen Koordinaten auch schreiben können

$$(216) \quad \eta^\alpha = C \xi^\beta.$$

§ 9. Zur Einsicht in Gleichung (216) ist die Kenntnis des geometrischen Ortes der Punkte, an welchen die Kurven $y = f(z)$ Wendetangentialen besitzen, von Nutzen. Wir finden diese Kurve der Wendepunkte, indem wir die Gleichung (I'a)

$$yy' + ay + bz + z^n = 0$$

differentieren, $y'' = 0$ setzen und aus der so gewonnenen Gleichung und (I'a) y' eliminieren; wir erhalten dann

$$y^2(b + nz^{n-1}) + (bz + z^n)(ay + bz + z^n) = 0$$

und nach leichter Umformung, wobei wir beachten, daß $a^4 - 4b = 1$, die

Gleichung der Wendepunktskurve

$$(217) \quad y = -\frac{1}{2} \frac{bz + z^n}{b + nz^{n-1}} \left[a \pm \sqrt{1 - 4nz^{n-1}} \right].$$

Die Kurve geht durch den Punkt $y = 0, z = 0$ hindurch und erstreckt sich nur über ein sehr kurzes Stück der z -Achse; das

maximale z ist $= \left(\frac{1}{4n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$, also stets < 1 . Die Kurve besitzt zu jedem z zwei reelle Ordinaten; wir suchen die Richtungen, in denen dieselbe vom Punkte $y = 0, z = 0$ ausgeht. Aus (217) bilden wir y' , bestimmen den Grenzwert rechts für $y = 0, z = 0$ und erhalten nach etwas umständlicher, aber leichter Umformung für die Abgangsrichtungen

$$(218) \quad \begin{aligned} y_1' &= -\frac{a+1}{2} = y_\eta' = -\beta, \\ y_2' &= -\frac{a-1}{2} = y_\xi' = -\alpha, \end{aligned}$$

d. h.: Die Kurve der Wendepunkte besitzt im Punkte $y = 0, z = 0$ die Geraden ξ und η als Abgangstangenten.

Die weitere Untersuchung haben wir für die verschiedenen Klassen n gesondert zu führen.

§ 10. $1 < n < 3$. Diagramme 1—3, Seite 51 und 52. Da wir die Lösungskurve $u = f(r)$ für den Abgang $r = 0, u = 1, \frac{du}{dr} = 0$ (Tabelle 1—6) numerisch ausgewertet haben, so können wir leicht die entsprechende Lösungskurve y , welche den Punkt O in Richtung η verläßt, konstruieren. Es genügt, die Lage ihres Endpunktes A zu berechnen und die Kurve $y = OA$ mit Hilfe der Fortschreibungsrichtungen zu zeichnen. Wir zeichnen ferner, z. B. in Diagramm 3, von O in Richtung ξ abgehend eine Kurve $y = OB$; dabei wird $OB < OA$ sein, da zwei Lösungskurven der yz -Ebene sich nicht durch-

schneiden können. OB repräsentiert eine Lösung u , die von $r = 0$, $u = \infty$ mit $\frac{du}{dr} = -\infty$ abgeht. Nun münden in das zwischen O A gelegene Stück der y -Achse noch unendlich viele y -Kurven ein, und es entsteht die Frage, wie sich dieselben auf die Abgangsrichtungen η und ξ verteilen, da hiervon ihre Interpretation in die u , r -Ebene abhängt. Nun lautet (Gleichung (216)) die Gleichung einer y -Kurve in nächster Nähe des Punktes O , ausgedrückt in schiefwinkligen Koordinaten η und ξ

$$\eta^\alpha = C\xi^3$$

oder anders geschrieben

$$(219) \quad \eta = C\xi^{\frac{\beta}{\alpha}} = C\xi^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} = C\xi^{\frac{3}{3-n}}.$$

Daraus folgt für $1 < n < 3$

$$(220) \quad \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_0 = 0.$$

d. h.: Alle von O ausgehenden Lösungskurven, mit Ausnahme der Grenzkurve OA , gehen in Richtung ξ ab.

Der Abgang vollzieht sich also nach dem Schema der Fig. 11.

Dies Resultat scheint in Widerspruch zu stehen mit den Schlüssen, die sich aus den Diagrammen der Fortschreitungsrichtungen zu ergeben scheinen. Denn wählen wir, z. B. wieder in Diagramm 3, eine Entfernung OA' , nur sehr wenig kleiner als OA , und ziehen rück-

wärts die zugehörige y -Kurve, so scheint sich dieselbe der Kurve OA immer mehr anzuschmiegen und bei O mit ihr zusammenzufallen, also in Richtung η einzulaufen. Und doch fordert die Gleichung (216), daß die Kurve OA' sich dort wieder von der Kurve OA und der Richtung η entfernt und sich der Geraden ξ anschmiegt. Dieser scheinbare Widerspruch wird beseitigt durch den

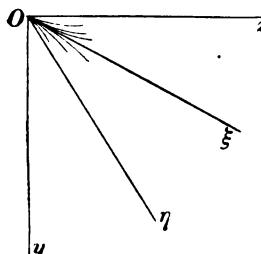


Fig. 11.

Umstand, daß die y -Kurven in Nähe des Punktes O Wendetangenten besitzen. Vgl. § 9. Gleichung (217) gibt den geometrischen Ort der Punkte mit Wendetangenten. Nach derselben liegen diese dem Punkte O so nahe, daß sich die Kurve der Wendepunkte in die Diagramme nicht mehr einzeichnen läßt. In Fig. 12 habe ich in sehr großem Maßstabe die Wendepunktkurve für den Fall $n = 2$ wiedergegeben (berechnet nach Gleichung (217)). Im Punkte O tangiert sie die Geraden ξ und η ; ihre Maximal-Abszisse liegt bei $z = \frac{1}{8} = 0,125$.

Die Kurve OA' , von A' kommend, kreuzt in der Nähe des Punktes O den untern Ast der Wendepunktskurve, kehrt von da ab der Achse ξ ihre konvexe Seite zu und läuft allmählich in dieselbe ein. Jede Kurve, die zu einer Endordinate $OA' < OA$ gehört, entspringt in O somit in Richtung ξ und liefert bei wiederholter Integration Kurven $u = f(t)$, die von $t = 0$, $u = \infty$ mit $u' = -\infty$ abgehen. Keine Kurve OA' , die zu einer Endordinate $OA' > OA$ gehört, kann aus dem Punkte O kommen; denn in Richtung η kann

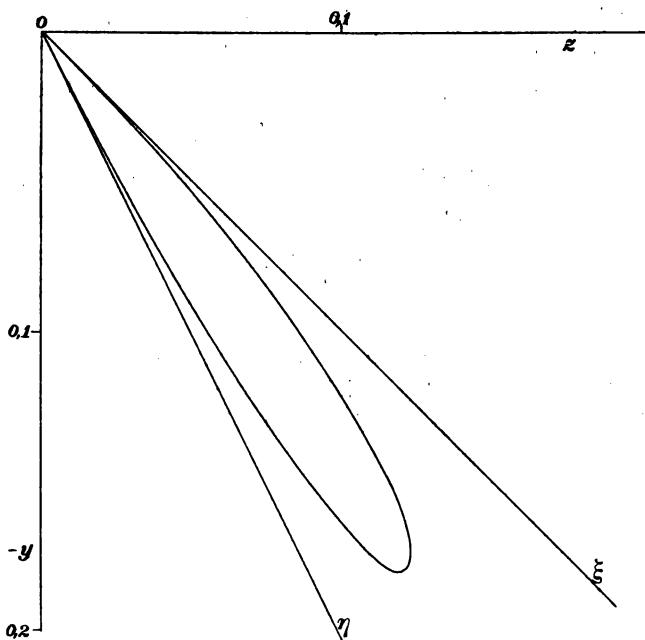


Fig. 12.

nur die Kurve OA abgehen, und keine in Richtung ξ abgehende Kurve kann zu einem $OA' > OA$ führen, da die Kurve OA gekreuzt werden müßte, und Kreuzung von Lösungskurven nur in singulären Punkten vorkommen kann. Zu jeder Endordinate $OA' > OA$ gehört eine y -Kurve, die auf der negativen y -Achse abgeht; sie repräsentiert, wie wir oben gezeigt, eine u -Kurve, die zwei Punkte der r -Achse miteinander verbindet.

Wir müssen somit y -Kurven unterscheiden mit einer Endordinate OA' größer, gleich oder kleiner OA und erhalten dadurch das Kriterium für die Lage der entsprechenden u -Kurve.

Der Fall $n = 3$. Die Konstanten sind $b = 0$, $a = 1$ und die Gleichung (I'a) nimmt die Form an

$$yy' + y + z^3 = 0;$$

sie ist, wie auch das zugehörige Diagramm 4 der Fortschreitungsrichtungen, scheinbar einfacher, aber wesentlich schwieriger zu behandeln, wie in den Fällen $n > 3$. Die oben für $n < 3$ ausgeführte Untersuchung in der Nähe des Verzweigungspunktes versagt, da wir nicht mehr z^3 gegen bz vernachlässigen können, und die Gleichung (216) nicht abgeleitet werden kann. Mit großer Wahrscheinlichkeit werden sich die Verhältnisse folgendermaßen gestalten.

Die Abgangsrichtungen von η und ξ ergeben sich leicht zu

$$y_\eta' = -1, \quad y_\xi' = 0.$$

Die Gerade ξ fällt mit der z -Richtung zusammen. Die Kurve der Wendepunkte hat die Gleichung

$$y = -\frac{z}{6} \pm \frac{z}{6}\sqrt{1-12z^2}.$$

Sie erstreckt sich bis $z = 0,291$.

Ihre Abgangsrichtungen im Verzweigungspunkt werden aber für $n = 3$ nicht mehr durch die Gleichung (218) wiedergegeben, da wir bei Ableitung derselben aus Gleichung (217) sofort, nicht erst nach-

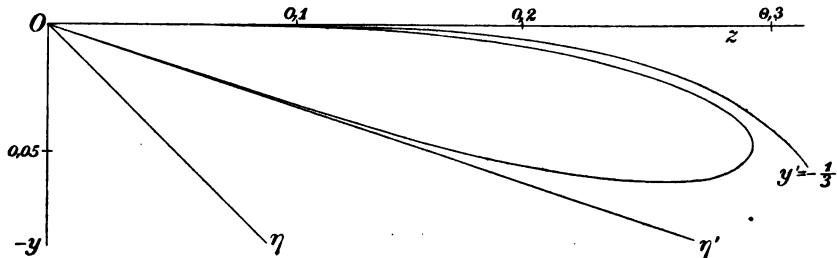


Fig. 13.

träglich, $b = 0$ setzen müssen. Wir finden leicht aus der oben angegebenen Kurvengleichung der Wendepunkte

$$y_1' = -\frac{1}{3} = \frac{1}{3}y_\eta'$$

$$y_2' = 0 = y'_\xi.$$

Die eine Abgangstangente fällt in Richtung der z -Achse, die andere, angegeben durch die Gerade η' , ist $\frac{1}{3}$ so steil wie die Gerade η . Diese Verhältnisse sind in Fig. 13 zur Darstellung gebracht.

Gleichzeitig ist die Kurve der Fortschreibungsrichtung $y' = -y_1' = -\frac{1}{3}$ eingezzeichnet. Sie verläuft zwischen der z -Achse und dem oberen Zweig der Kurve der Wendepunkte. In dem Diagramm 4 der Fortschreibungsrichtungen (Seite 52) tragen wir den aus der ausgewerteten Lösung $u_1 = f(r_1)$ berechneten Punkt A ein und konstruieren die zugehörige Lösungskurve OA ; sie verlässt O in Richtung η . Eine zu OA' , nur wenig kleiner wie OA , gehörige Lösungskurve geht in den Winkel zwischen den Geraden η und η' . Sie steht hier, wie die Lage der Kurve der Fortschreibungsrichtung $y_1' = -\frac{1}{3}$ anzeigt, bedeutend steiler wie die Gerade η' , dringt demnach in das von der Kurve der Wendepunkte umschlossene Gebiet ein, mündet in Richtung ξ ein in O und sperrt allen weiter rechts liegenden Kurven den Weg nach η . Für $OA' < OA$ liegen die Verhältnisse wie oben für $n < 3$. Ob aber eine Kurve zu OA' nur wenig größer wie OA nach O oder zu einem kleinen Abstande von O auf der negativen y -Achse führt, können wir nicht entscheiden, da eine Gleichung (216) nicht zu unserer Verfügung steht; ein neues Hilfsmittel zur Entscheidung dieser Frage habe ich nicht ermitteln können. Vermutlich gilt hier dieselbe Gesetzmäßigkeit wie oben bei $n < 3$, so daß wir die ganze $y z$ -Ebene auch für $n = 3$ ebenso interpretieren werden, wie für $n < 3$.

§ 11. $3 < n < 5$. Wird $n > 3$, so nehmen die Diagramme der Fortschreibungsrichtungen gänzlich verändertes Aussehen an. Bei reellem, positivem

$$z = [-b]^{\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{2(n-3)}{(n-1)^2} \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

besitzt die Gleichung (I'a)

$$yy' + ay + bz + z^n = 0$$

einen zweiten Verzweigungspunkt O_1 , derselbe stellt eine Lösung der Gleichung dar, und ergibt für die Gleichung (I') die singuläre Lösung

$$u = r^{-\frac{2}{n-1}} z = \left[\frac{2(n-3)}{(n-1)^2} \right]^{\frac{1}{n-1}} \cdot \frac{1}{r^{\frac{2}{n-1}}},$$

die wir bereits in Kap. IV § 11 kennen lernten.

Wir untersuchen erst die Verhältnisse in der Umgebung des

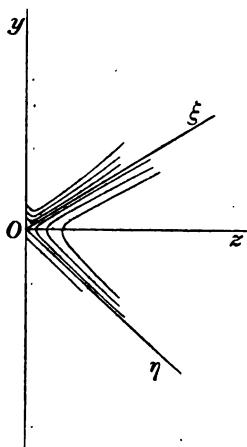
Verzweigungspunktes $z = 0, y = 0$. Von ihm gehen die Geraden η und ξ aus, entsprechend den Abgangstangenten

$$\eta' = -\frac{2}{n-1}, \quad \xi' = -\frac{3-n}{n-1}.$$

Für $n > 3$ geht die Gerade ξ in den + Quadranten. In nächster Umgebung des Punktes O gilt für die Lösungskurve wiederum Gleichung (216)

$$\eta = C\xi^{\alpha} = C\xi^{\frac{2}{3-n}},$$

aber mit dem Unterschied, daß jetzt $\frac{2}{3-n} < 0$ ist, so daß für $\xi = 0, \eta = \infty$ und für $\eta = 0, \xi = \infty$ werden. Es kann deshalb nur je eine Lösungskurve von O in Richtung η resp. ξ abgehen. Alle übrigen Lösungskurven nähern sich dem Punkt O bis zu einem Minimum, um sich dann wieder zu entfernen. Wir deuten dies Verhalten in Fig. 14 an.



Um die Tangentenrichtung der Lösungskurven im zweiten Verzweigungspunkt O_1 zu ermitteln, bilden wir aus (I'a)

$$y' = -\lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{ay + bz + z^n}{y} \right) = -\frac{ay' + b(1-n)}{y'},$$

und erhalten wegen $a^2 - 4b = 1$ für y' die Gleichung

$$y' = -\frac{1}{2} (a \pm \sqrt{1 + 4b}).$$

Da wir schreiben können

$$1 + 4bn = \frac{1 + 22n - 7n^2}{(n-1)^2},$$

so ergibt sich, daß die quadratische Gleichung

$$(221) \quad 7n^2 - 22n - 1 = 0$$

einen neuen kritischen Wert zu den Werten $n = 3$ und $n = 5$ bestimmt

$$n = 3,187673.$$

Liegt n zwischen 3 und diesem kritischen Werte, so gibt es auch für den zweiten Verzweigungspunkt zwei, (im Grenzfalle zusammenfallende), Abgangsrichtungen; ist n größer, existiert keine Abgangsrichtung. Der Punkt O_1 wird dann von den Lösungskurven in Spiralen umkreist.

Wir behandeln erst den letzten Fall, $3,187673 < n < 5$. Den Verlauf der Lösungskurven in der Umgebung des Verzweigungspunktes O_1 haben wir in Kap. X § 3 festgestellt und verwenden nun die dort eingeführten Bezeichnungen: z_1 Abszissen gerechnet von O_1 aus,

p Radius-Vektor aus O_1 , φ Polarwinkel, + Drehung entgegengesetzt dem Uhrzeiger. Die bei Integration der Gleichung

$$\lg z_1 + \frac{1}{2} \lg (w^2 + aw + (1-n)b) - \frac{a}{2} \int \frac{dw}{w^2 + aw + (1-n)b} = \text{konst.}$$

maßgebende Größe

$$q = 4(1-n)b + a^2 = -(1+4nb) = \frac{7n^2 - 22n - 1}{(n-1)^2}$$

ist > 0 für $n > 3,187673$;

wir erhalten deshalb für das Integral einen arctg und dadurch periodische Verhältnisse, die wir durch die Gleichung (164) darstellten:

$$p = \frac{2C}{\sqrt{q}} \frac{\cos \omega}{\cos \varphi} e^{\frac{a}{\sqrt{q}} \omega}$$

$$y = C \left(\sin \omega - \frac{a}{\sqrt{q}} \cos \omega \right) e^{\frac{a}{\sqrt{q}} \omega}$$

$$z_1 = \frac{2C}{\sqrt{q}} \cos \omega e^{\frac{a}{\sqrt{q}} \omega}$$

$$\frac{a}{\sqrt{q}} = - \frac{n-5}{\sqrt{7n^2 - 22n - 1}}.$$

Im Gegensatz zu dort ist aber hier $\frac{a}{\sqrt{q}} > 0$. ($a = \frac{5-n}{n-1}$.) Wir haben deshalb hier die Spirale im Sinne des Uhrzeigers (ω abnehmend) zu durchlaufen, wenn der Radius-Vektor nach dem dort aufgestellten periodischen Gesetze abnehmen soll. Bilden wir ferner wie dort die Spirale auf dem Radius r ab, so erhalten wir wieder Formel (165)

$$r = C_1 e^{\frac{a}{\sqrt{q}} \omega}.$$

Mündet nach unendlich vielen Umläufen die Spirale in O_1 ein, so ist $r = 0$ geworden; die zu gleichem Radius-Vektor gehörigen r nehmen immer genauer in einer geometrischen Reihe ab. Speziell gilt dies für die Schnittpunkte der Spirale mit der Senkrechten in O_1 , die Punkte bestimmd, an welchen die der Spirale entsprechende Lösung u die singuläre Lösung $u \sim \frac{1}{r^{n-1}}$ schneidet. Der Vertikalabstand beider

Lösungen wird durch Gleichung (166) gegeben

$$u_\Delta = (C_3 \cos \omega + C_4 \sin \omega) e^{-\frac{1}{\sqrt{q}} \omega}$$

und nimmt bei abnehmendem r in geometrischer Progression zu, ein nur scheinbar auffälliges Verhalten, da sich hier die beiden Kurven

immer senkrechter stellen. Beide stimmen immer genauer überein. Denn ein Punkt der singulären Lösung $\sim \frac{1}{r^{\frac{n-1}{2}}}$ ist nach einer Um-

drehung der Spirale übergegangen in $C_1 e^{-\frac{4}{(n-1)\sqrt{2}}\omega}$; das Verhältnis des u_Δ zu dieser Lösung ist geworden $C_1' e^{\frac{5-n}{(n-1)\sqrt{2}}\omega}$, für $n < 5$ mit abnehmendem ω ebenfalls abnehmend.

Wie in den Fällen $n > 5$ entsprechen den Stellen der Spirale, die links resp. rechts von der in O_1 errichteten Senkrechten liegen, Stellen der Lösung u , die unter, resp. über der singulären Lösung liegen. Die dort aufgestellten periodischen Verhältnisse treffen wir hier im wesentlichen sämtlich wieder, nur gelten sie hier immer genauer bei abnehmendem (dort zunehmendem) r , und fallen hier Hauptlösung und singuläre Lösung bei $r = 0$ (dort bei $r = \infty$) zusammen.

Wir sind damit imstande, die y -Kurve in die u , r -Ebene zu übertragen. Wir erläutern die Verhältnisse in dem Diagramm für $n = 4$. Die Geraden η und ξ sind ausgezeichnet durch die Richtungstangenten $-\frac{2}{3}$ und $+\frac{1}{3}$; in dieser Richtung geht auch der geometrische Ort der Punkte mit Wendetangenten, strichpunktiert gezeichnet, ab. Seine Maximalabszisse ist $z = \left(\frac{1}{4n}\right)^{\frac{1}{n-1}} = 0,3968$, ist also kleiner als die Abszisse des Verzweigungspunktes O_1 ,

$$z = (-b)^{\frac{1}{n-1}} = 0,6056,$$

was stets der Fall ist, so lange $n > 3,187673$. Für $z = \left(-\frac{b}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} = 0,3815$ erstreckt sich die Kurve nach $\pm \infty$.

Mit Hilfe der Tabelle 8 bestimmen wir die Lage des Punktes A und zeichnen die Kurve OA , in O die Gerade η tangierend. Sie liefert alle u -Kurven, die bei $r = 0$ mit endlichen Ordinaten horizontal abgehen. Von einem Punkte A' , $OA' < OA$, konstruieren wir rückwärts (r entgegengesetzt) eine OA benachbarte y -Kurve. Sie geht ebenfalls außerhalb O_1 durch die z -Achse, nähert sich der Geraden η und in dieser Richtung dem Punkte O . In dessen Nähe zeigt sie das in Fig. 14 dargestellte Verhalten, sie biegt um nach der Richtung ξ , entfernt sich von O und beginnt den Punkt O_1 in der oben beschriebenen Spirale zu umkreisen, um nach ∞ vielen Umläufen in $r = 0$, $u = \infty$, $u' = -\infty$, da mit der singulären Lösung zusammenfallend, einzumünden. Für die größten Werte r liegt diese Lösung unterhalb

der singulären Lösung $u = \frac{0,6056}{r^{\frac{2}{3}}}$, mit abnehmendem r pendelt sie um dieselbe herum, wobei die Abszissen der Durchsetzungspunkte $\frac{2\pi}{e^{\sqrt{q}}}$ immer genauer in geometrischer Progression mit den Quotienten $e^{\sqrt{q}}$ abnehmen. Dasselbe Verhalten zeigen alle Lösungskurven y , die zu einem $OA' < OA$ gehören; je kleiner OA' , desto weniger nahe kommen sie innerhalb des Winkelraums $\xi O \eta$ dem Punkte O . Für die entsprechenden u -Kurven, sämtlich aus $r = 0, u = \infty$ herabkommend und nach demselben Gesetze, aber in andern Schnittpunkten, um die singuläre Lösung herumpendelnd, wird der Mittelpunkt der Gaskugel in O_1 abgebildet. Je kleiner OA' , desto kleiner $-r^{\frac{n-1}{n}} u$ an der Oberfläche der Gaskugel. Die letzte dieser Kurven verläßt O in Richtung ξ ; für diese ist (§ 7) $u'r = 0$. Da aber (Kap. IV, § 6) für endliche r niemals u und u' gleichzeitig $= 0$ werden können, so repräsentiert diese letzte y -Kurve eine Lösungskurve u , die bei $r = \infty$ mit $u' = 0$ einmündet.

y -Kurven, die bei $OA' > OA$ einmünden, beginnen bei negativem y . Sie entsprechen (wie für $n < 3$) u -Kurven, welche zwei Punkte der r -Achse miteinander verbinden.

§ 12. $3 < n < 3,187673$. Diagramm 5, Seite 53. Wir haben gesehen, daß in diesem Falle in O_1 zwei reelle Abgangsrichtungen für Lösungskurven, $y' = -\frac{1}{2}(a \pm \sqrt{1+4bn})$ existieren. In O hat sich nichts geändert; die Lösungskurven zeigen hier das in Fig. 14 dargestellte Verhalten. Die Verhältnisse in O_1 müssen näher untersucht werden. Wir ziehen hier zwei Gerade η_1 und ξ_1 in den Abgangsrichtungen; deren Tangenten sind

$$y_{\eta_1}' = -\beta = -\frac{1}{2}(a + \sqrt{1+4bn})$$

$$y_{\xi_1}' = -\alpha = -\frac{1}{2}(a - \sqrt{1+4bn}).$$

η_1 steht somit steiler wie ξ_1 . In der Nähe von O_1 ergibt sich für y die Gleichung (vgl. Seite 213)

$$\lg \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \lg (w^2 + aw + (1-n)b) - \frac{a}{2} \int \frac{dw}{w^2 + aw + (1-n)b} = C,$$

und da

$$q = -(1+4nb) = < 0$$

ist, gibt die Integration

$$\lg z_1 + \frac{1}{2} \lg [w^2 + aw + (1-n)b] - \frac{a}{\sqrt{1+4nb}} \lg \frac{2w+a-\sqrt{1+4nb}}{2w+a+\sqrt{1+4nb}} = C.$$

ersetzen wir wieder w durch $\frac{y}{z}$ und berücksichtigen, daß wir schreiben können

$$\begin{aligned} & y^2 + ayz_1 + (1-n)bz_1^2 \\ &= \left(y + \frac{1}{2}(a - \sqrt{1+4nb})z_1 \right) \left(y + \frac{1}{2}(a + \sqrt{1+4nb})z_1 \right), \end{aligned}$$

so lautet die Gleichung nach leichter Umformung

$$\frac{\left[y + \frac{1}{2}(a + \sqrt{1+4nb})z_1 \right]^{\frac{1}{2}(a+\sqrt{1+4nb})}}{\left[y + \frac{1}{2}(a - \sqrt{1+4nb})z_1 \right]^{\frac{1}{2}(a-\sqrt{1+4nb})}} = C = \frac{(y + \beta z_1)^\beta}{(y + \alpha z_1)^\alpha}.$$

Zur Interpretation führen wir in O_1 schiefwinklige Koordinaten ein, nehmen als Achsen die Geraden η_1 und ξ_1 , und können dann die Gleichungen (216), (219), (220) benutzen, indem wir an Stelle von η , ξ und z setzen η_1 , ξ_1 und z_1 . In bezug auf dieses Koordinatensystem lauten sie

$$\begin{aligned} \eta_1^\alpha &= C \xi_1^\beta \\ \eta_1 &= C \xi_1^{\alpha/\beta} = C \xi^{\frac{a+\sqrt{1+4nb}}{a-\sqrt{1+4nb}}} \\ \left(\frac{d\eta_1}{d\xi_1} \right)_{O_1} &= 0, \end{aligned}$$

d. h. Mit Ausnahme einer einzigen münden sämtliche in O_1 einlaufenden Lösungskurven in Richtung ξ_1 ein (Fig. 11).

Die Geraden η_1 und ξ_1 durchsetzen beide O_1 ; die y -Kurven brauchen deshalb in O_1 nicht zu endigen, sondern können weiter gehen. Nun lehrt aber Gleichung (f) Seite 203, daß die zugehörige u -Kurve, in welcher Richtung wir von O_1 abgehen, sich stets nach größerem r erstreckt; und setzen wir ferner in (e) Seite 202 $r^2 u^{n-1} = z^{n-1} = -b$, so ergibt sich nach leichter Umformung $u'r = -\frac{2}{n-1}u$, welche Beziehung für die singuläre Lösung (mit der u in O_1 zusammenfällt) stets erfüllt ist. Die y -Kurven endigen deshalb in O_1 , die entsprechenden u -Kurven in $r=0, u=\infty, u'=-\infty$.

Die Gleichung (217) des geometrischen Ortes der Punkte mit Wendetangentialen gibt dessen Maximalabszisse $z^{n-1} = \frac{1}{4n}$, für

$n < 3,187673$ stets größer als die Abszisse $s^{n-1} = -b$ des Punktes O_1 ; diese Kurve geht mit ihren beiden Ästen durch den Punkt O_1 hindurch und zwar, wie eine leichte Untersuchung ihrer Gleichung lehrt, in Richtung von ξ_1 und η_1 .

Im Diagramm 5 Seite 53 sind diese Verhältnisse für $n = 3,1$ zur Darstellung gebracht; dazu war ein größerer Maßstab erforderlich, so daß nur ein kleines Gebiet in Nähe der Punkte O und O_1 wiedergegeben werden konnte. Wir haben $a = 0,90476$, $b = -0,045351$; die singuläre Lösung lautet $u = \frac{0,22924}{r^{0,95238}}$, die Abszisse von O_1 $z = 0,22924$; Richtungen der Abgangstangenten sind

$$\begin{array}{ll} \text{in } O \quad \text{für } \eta & y'_\eta = -0,95238 \\ & \text{für } \xi & y'_\xi = +0,04762, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{in } O_1 \quad \text{für } \eta_1 & y'_{\eta_1} = -0,78365 \\ & \text{für } \xi_1 & y'_{\xi_1} = -0,12111. \end{array}$$

Wendepunkte existieren bis $z = 0,30153$. Ihr geometrischer Ort, im Diagramm strichpunktiert gezeichnet, verläßt O in Richtung η , geht rasch zu immer größeren $-y$, wird für $s = 0,13375$ gleich $\mp\infty$, senkt sich rasch zur z -Achse herab, um O_1 in Richtung η_1 zu durchsetzen, erstreckt sich bis $z = 0,30153$, kehrt eine Schleife bildend nach O_1 zurück, und in Richtung ξ_1 durchgehend mündet er nach Durchlaufen eines flachen Bogens mit der Maximalordinate bei $z = 0,13375$ in Richtung ξ in O ein. (Dieser Bogen ist in dem Diagramm nur durch einzelne durch kleine Kreuze bezeichnete Punkte angegeben.) Die Schleife bei O_1 entspricht vollständig der Schleife der Fig. 12.

Auf der y -Achse können wir nun wieder einen Punkt A konstruieren, dessen zugehörige y -Kurve in Richtung η von O abgeht und den u -Kurven der vollständigen Gaskugel entspricht. Gehen wir von A' , $OA' < OA$ ab, so gehen wir außen an O_1 vorbei, nähern uns O in Richtung η und entfernen uns wieder in Richtung ξ , umkreisen nun aber O_1 nicht spiraling wie für $n > 3,187673$, sondern münden in Richtung ξ ein. Lassen wir OA' abnehmen, so kommen wir schließlich so nahe rechts an O_1 vorbei, daß wir nicht mehr nach O zugeführt werden, sondern vom negativen y her gleich in Richtung ξ in O_1 einlaufen. Beide Arten y -Kurven entsprechen u -Kurven, die bei $r = 0$, $u = \infty$ mit $u' = -\infty$ abgehen, nur mit dem Unterschiede, daß die singuläre Lösung ein- oder zweimal gekreuzt wird, wobei für die größeren r stets die Hauptlösung unter der singulären Lösung liegt. Zu $OA' > OA$ gehören schließlich y -Kurven, die bei $z = 0$ von negativem y ausgehen,

entsprechend u -Kurven, die zwei Punkte der r -Achse miteinander verbinden:

An der Grenze $n = 3,187673$ fallen die beiden Geraden ξ_1 und η_1 zusammen in der Richtung $y' = -0,41421$ und die Maximalabszisse der Wendepunktskurve fällt nach O_1 mit $z = 0,31234$. Dieser Fall bedarf keiner besondern Untersuchung.

§ 13. $n = 5$. In dem zugehörigen Diagramm 7 Seite 55 liegt alles zu der y -Achse sowohl, wie zu der z -Achse symmetrisch. Die Geraden η und ξ gehen unter Winkeln ab mit den Tangenten $= \mp \frac{1}{2}$; a ist $= 0$; und die Gleichung der y -Kurven läßt sich in geschlossener Form angeben (Kap. IV § 12). Die in Richtung η aus O abgehende Lösungskurve mündet symmetrisch in Richtung ξ wieder ein. Der in den Fällen $n < 5$ mit A bezeichnete Punkt fällt mit O zusammen. Die Gleichung dieser ausgezeichneten y -Kurve ist nochmaliger Integration fähig und lieferte (Kap. IV § 12) die Gleichung der u -Kurve der vollständigen Gaskugel. (Die nochmalige Integration der Gleichung der übrigen y -Kurven führt auf hyperelliptische Funktionen.) Durch jeden Punkt der yz -Ebene außerhalb dieser geschlossenen Kurve führt eine y -Kurve, die (wie für $n < 5$) negative und positive Stellen der y -Achse verbindet. In dem von der ausgezeichneten Lösungskurve umschlossenen Flächenstück existieren nur geschlossene y -Kurven, die O_1 umschlingen. Bei einem zwischen O und O_1 gelegenen Punkt der z -Achse beginnend geht die Kurve erst senkrecht nach unten, folgt dann ungefähr der Richtung η (um so genauer, je näher der Ausgangspunkt bei O ; vgl. dazu Fig. 14), geht rechts von O_1 wieder senkrecht durch die z -Achse und ein zu dieser symmetrisch gelegener Zweig führt wieder zu O zurück. Um diese Lösung in die u , r -Ebene zu übersetzen, beachten wir, daß sie nur $\frac{du}{dr} < 0$ zuläßt und die Senkrechte in O_1 zweimal schneidet. Dies ergibt eine u -Kurve, die bei $r = 0$, $u = \infty$, $u' = -\infty$ stetig fallend abgeht, erst tiefer liegt wie die singuläre Lösung $\frac{1}{\sqrt[2]{2r}}$, diese zweimal durchsetzt, schließlich wieder tiefer wie diese verläuft und zu $r = \infty$, $u = 0$, $u' = 0$ hinführt, aber so, daß wir haben (da zu Anfang und Ende gleiches z gehört)

$$\lim_{\substack{u=\infty \\ r=0}} (u r^{\frac{2}{n-1}}) = \lim_{\substack{u=0 \\ r=\infty}} (u r^{\frac{2}{n-1}}) = > 0 = 0,70710.$$

Die von O ausgehende, geschlossene y -Kurve scheidet somit die

y α -Ebene in zwei Teile; zu dem umschlossenen Teile gehören u -Kurven, die bei unendlichem, zu dem andern Teile u -Kurven, die bei endlichem Werte in die r -Achse einschneiden.

§ 14. $5 < n < \infty$. Für diesen Fall haben wir die Verhältnisse in der Umgebung O_1 bereits in Kap. X ausführlich diskutiert. O_1 wird von der sich verengenden Spirale entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne umkreist, so daß dieselbe zu $r = \infty$ führt. O_1 entspricht für $n < 5$ dem Mittelpunkt, für $n > 5$ der Oberfläche der Gaskugel. In Diagramm 8 Seite 56 haben wir den Fall $n = 6$ dargestellt. Die Geraden η und ξ von O sind bestimmt durch $y_\eta' = -\frac{3}{5}$, $y_\xi' = \frac{2}{5}$. O_1 liegt bei $z = 0,75170$. Die Kurve der Wendepunkte erstreckt sich bis $z = 0,5296$ (mit $y = -1,05$) und geht bei $z = 0,50166$ nach $\pm \infty$. Mit Hilfe der Tabelle 12 können wir die einzige in Richtung η abgehende y -Kurve konstruieren. Gehen wir von einem wenig unterhalb O gelegenen Punkte A' ab, so umkreisen wir ebenfalls spiraling O_1 . Je tiefer wir A' wählen, desto mehr nähern wir uns (vgl. Fig. 14) der Geraden ξ , dem Punkte O und umkehrend der Geraden η , worauf wieder eine Spirale folgt. Schließlich kommen wir mit A' in eine Lage A_1 , so daß wir in Richtung ξ in O einmünden. So erhalten wir wieder eine Grenzkurve, denn in Richtung ξ geht nur eine Kurve aus O ab. Für noch tiefer gelegene A' werden wir zur positiven Ordinatenachse geführt. Erinnern wir uns, daß r mit z für $y > 0$ stets ab-, mit $y < 0$ stets zunimmt (Gleichung (f); Seite 203), u' oberhalb der Geraden η stets < 0 ist, so sehen wir, daß jede y -Kurve bei A' , zwischen O und A_1 beginnend, einer u -Kurve entspricht, die einem beliebigen Punkte der r -Achse, aber der Art entspringt, daß

$y_{OA'} = -r^{n-1} u'$ ist, und nach bekanntem (Kap. X) periodischen Gesetze um die singuläre Lösung pendelnd, nach $r = \infty$, $u = 0$ geht.

Wächst, bei diesem r ausgehend, u' so, daß $-r^{n-1} u' = y_{OA_1}$ wird, so hört dies Pendeln auf, und es kommt nur zu zweimaligem Schnitt mit der singulären Lösung, immer noch mit dem Ende in $r = \infty$, $u = 0$. Wächst u' noch stärker, so daß wir außerhalb OA_1 beginnen, so endigen wir bei endlichem r mit $u = 0$. In diesem Falle hat der Weltkörper, trotz $n > 5$, eine im Endlichen liegende Oberfläche, was ohne festen Kern unmöglich ist. Damit sind alle vorkommenden y -Kurven interpretiert; u -Kurven aus $r = 0$, $u = \infty$ mit $u' = -\infty$ existieren für $n > 5$ nicht.

§ 15. $n = \infty$. In diesem Falle müssen die Differentialgleichung zweiter Ordnung und die zugehörige erster Ordnung eigens behandelt werden; in Kap. IX, isotherme Gaskugeln, ist dies geschehen. Wir nehmen Bezug auf die dort entwickelten Formeln, nur schreiben wir, in demselben Sinne, wie in dem Falle $n < \infty$, ϱ , v , r an Stelle ϱ_1 , v_1 , r_1 . Die Lösungskurven der Gleichung $yy' - y + e^z - 2 = 0$ haben Wendepunkte; die Gleichung der Wendepunktskurve findet sich leicht zu

$$(222) \quad y = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^z - 2}{e^z} (1 \pm \sqrt{1 - 4e^z}).$$

Ihr äußerster Punkt rechts liegt bei $z = -1,3863$, $y = 3,5$; von da verlaufen beide Äste nach $z = -\infty$, der eine sich der Horizontalen $y = -2$ asymptotisch nähert, der andere sehr steil, schließlich senkrecht nach $y = -\infty$ abfallend. In dem Diagramm 9a Seite 138, in der die Wendepunktskurve strichpunktiert eingezeichnet ist, hat die Horizontale $y = -2$ eine wichtige Bedeutung; sie entspricht der Geraden η in den Fällen $n < \infty$. Denn in dem oberhalb gelegenen Teile der $y z$ -Ebene ist, wie aus Gleichung (144) hervorgeht, $\frac{dv}{dr} = \frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{dr}$ kleiner, in dem tiefer gelegenen Teile aber größer als Null. Ebenso gilt eine Gleichung (f) S. 203.

Außer der Lösungsspirale A der vollständigen Gaskugel existiert nur noch eine Klasse von y -Kurven. Denn greifen wir irgend einen Punkt, etwa A' der $y z$ -Ebene, heraus und legen die Lösungskurve, so kommen wir im Sinne wachsender r fortschreitend dem Punkt O in Spiralen näher; gehen wir entgegengesetzt, so schneiden wir früher oder später die Wendepunktskurve und werden in einem gegen die z -Achse konvexen Bogen nach $z = -\infty$, $y = -\infty$ geführt. Mit Hilfe des eben Erläuterten, sowie der Gleichungen (143) und (144) können wir diese Kurven als v - resp. ϱ -Kurven interpretieren. Sie verlassen die r -Achse bei beliebiger Abszisse mit $\frac{dv}{dr} > 0$, erreichen eine Maximalhöhe (Durchschnitt der y -Kurve mit der Geraden $y = -2$) und beginnen dann, nach bekanntem (Kap. IX § 10) periodischen Gesetze um die singuläre Lösung herum pendelnd, mit dieser nach $r = \infty$, $\varrho = 0$, $\frac{d\varrho}{dr} = 0$ zu gehen. Wir haben somit nur zwei Klassen von Lösungen $\varrho = f(r)$; sie gehen beide nach $r = \infty$, $\varrho = 0$; die einen beginnen bei $r = 0$, ϱ endlich, $\frac{d\varrho}{dr} = 0$, die andern bei r endlich, $\varrho = 0$, $\frac{d\varrho}{dr} > 0$. Ein isothermer Weltkörper, ohne oder mit festem Kern, kann niemals im Endlichen endigen.

§ 16. Diese Topographie der Lösungskurven $y = f(z)$ gestattet (für $n > 1$) wichtige Einblicke in den Aufbau von Gaskugeln mit oder ohne festen Kern; sie würde Antwort auf alle sich darbietenden Fragen gestatten, falls sich die Wirkung nochmaliger Integration, welche y, z in u, r übersetzt und eine neue Integrationskonstante einführt, vollständig durchschauen ließe.

Wir hatten $z = ur^{\frac{2}{n-1}}$. Führen wir statt r wieder den in Zentimetern gemessenen Radius r ein ($r = \alpha r$), und ersetzen die Temperatur u durch die in Celsiusgraden gemessene Temperatur T ; ($T = u \Theta_k$), so erhalten wir

$$(223) \quad z = ur^{\frac{2}{n-1}} \alpha^{\frac{2}{n-1}} = \frac{k}{k-1} \frac{H}{4\pi G} r^{\frac{2}{n-1}} \alpha^{\frac{2n}{n-1}} T \text{ gramm}^{-\frac{1}{n-1}} \text{ cent}^{\frac{3}{n-1}}.$$

Sind H und Θ_k gegeben, so ist eine Vertikale $z = \text{konst.}$ durch die bei r herrschende Temperatur T eindeutig bestimmt; eine unendliche Zahl von Lösungskurven y schneidend.

Gehen wir weiter aus von der Beziehung $g = -\frac{4\pi G}{\alpha} \frac{du}{dr}$, ersetzen $\frac{du}{dr}$ nach Gleichung (b) Seite 201, führen statt r ein wieder r und bezeichnen die bis r eingeschlossene Masse (einen etwa vorhandenen festen Kern inbegriffen) mit M , so ergibt sich leicht

$$(224) \quad y + \frac{2}{n-1} z = \frac{\alpha g}{4\pi G} r^{\frac{n+1}{n-1}} = \frac{g}{4\pi G} \alpha^{\frac{2n}{n-1}} r^{\frac{n+1}{n-1}} \\ = \frac{\alpha^{\frac{2n}{n-1}} M r^{\frac{n-1}{n-1}}}{4\pi} \text{ gramm}^{-\frac{1}{n-1}} \text{ cent}^{\frac{3}{n-1}}.$$

Sind H und Θ_k gegeben, so ist durch die bis r eingeschlossene Masse M eine Gerade $y + \frac{2}{n-1} z = \text{konst.}$ bestimmt; diese verläuft parallel zur Geraden η , eine unendliche Zahl von Lösungskurven y schneidend.

Der Schnitt der durch (223) und (224) gegebenen Geraden bestimmt die in Betracht kommende Lösungskurve y . (Fig. 15.)

Einen Spezialfall der durch Gleichung (223) ausgedrückten Verhältnisse haben wir bereits früher kennen gelernt. Wir bezeichnen wieder Gesamtmasse und Begrenzungsradius mit \mathfrak{M} und \mathfrak{R} ; für $n \leq 5$ ist die Oberfläche der Gesamtkugel bestimmt durch den Schnitt der Geraden (224) mit der y -Achse. Wenden wir (224) auf die Oberfläche an, so lehrt ein Vergleich mit Gleichung (102), daß wir in (224) die Gleichung einer kosmogenetischen Fläche vor uns haben. Die dort angegebene

Konstante derselben $C_{(\theta, \mathfrak{M}, \mathfrak{N})}$ bestimmt den Schnittpunkt der Geraden $y + \frac{2}{n-1} z$ mit der y -Achse und dadurch die Lösungskurve y , welche der Gaskugel ohne festen Kern entspricht. Dadurch ist die Möglichkeit gegeben, den Begriff

der kosmogenetischen Fläche zu erweitern, und zwar sehen wir, daß wir alle Gaskugeln mit festem Kern, die sich aus den ∞^1 Lösungskurven u , die sich durch Integration einer Lösungskurve y ergeben, zu einer Klasse zusammenfassen können, welche auf derselben kosmogenetischen Fläche liegt.

Die ∞^1 Lösungskurven y bestimmen ∞^1 kosmogenetische Flächen, auf welchen die ∞^2 möglichen Gaskugeln liegen.

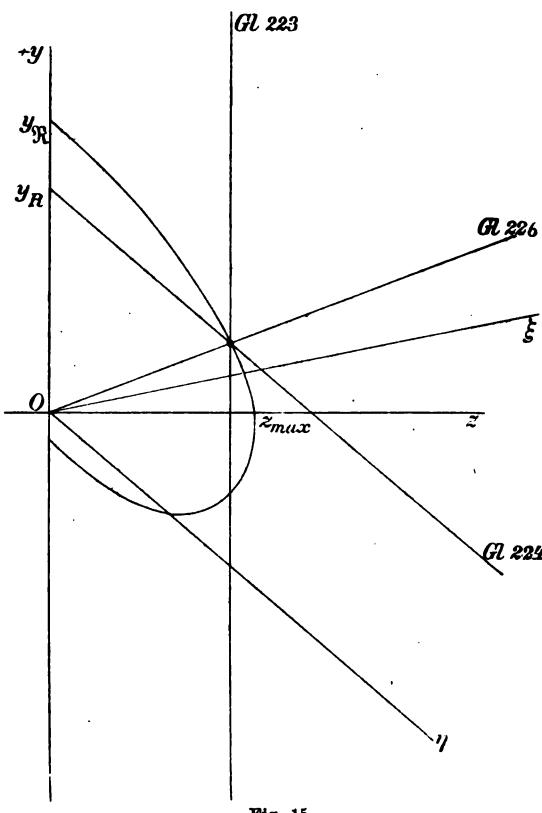


Fig. 15.

der aus dieser y -Kurve hervorgehenden u -Kurven kann somit ur^{n-1} größer sein wie das zugehörige z_{\max} . In jeder Stelle r existiert eine Maximaltemperatur u , welche von keiner dieser ∞^1 u -Kurven überschritten werden kann. Daraus folgt:

Die $\infty^1 u$ -Kurven, die durch Integration aus ein und derselben y -Kurve hervorgehen, haben eine einhüllende Kurve von der Gleichung $ur^{\frac{2}{n-1}} = z_{\max}$.

Diese einhüllenden Kurven haben dieselbe Form wie die singuläre Lösung $ur^{\frac{2}{n-1}} = (-b)^{\frac{1}{n-1}}$, die für $n > 3$ auftritt. Je größer

z_{\max} , desto größer die Temperatur u , die an derselben Stelle r auftreten kann. (Für $n < 1$ existieren diese einhüllenden Kurven nicht.)

Überaus wichtig ist der Schluß, der sich hinsichtlich des physikalischen Verhaltens der Gaskugeln aus dem Auftreten dieser einhüllenden Kurven ziehen läßt.

Es sei zum Bau einer vollständigen Gaskugel von bestimmter Klasse n gegeben H und Θ_k ; für diese ∞^1 Gaskugeln existiert daselbe z_{\max} . Wir finden dies, indem wir Gleichung (c) Seite 201 in der dieser Klasse entsprechenden Tabelle für u_1 die Stelle suchen

$$r_1 u_1' + \frac{2}{n-1} u_1 = 0$$

und für diese Stelle $z_{\max} = u_1 r_1^{\frac{2}{n-1}}$ bilden.

So ergeben sich folgende Werte, die auch in den Tabellen 1—12 eingefügt sind:

n	r_1	u_1	$u_1 r_1^{\frac{2}{n-1}} = z_{\max}$
1,5	2,8085	0,21617	13,448
2	2,5375	0,36388	2,3431
2,5	3,3498	0,46331	1,4490
3	2,1620	0,54133	1,1703
4	1,9154	0,64099	0,9886
4,5	1,8158	0,67782	0,9531
4,9	1,7469	0,70183	0,9342
5	$\sqrt[4]{3}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$	$0,9306 = \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$
6	1,5958	0,75171	0,9063

Daraus folgt:

Für jeden Abstand r Zentimeter vom Mittelpunkt existiert eine Maximaltemperatur in Cels.⁰

$$(225) \quad T_{\max} = \frac{\frac{4 \pi G}{k} \frac{z_{\max}}{r^{\frac{2n}{n-1}}}}{H \alpha^{\frac{n}{n-1}}} \frac{2}{r^{\frac{n}{n-1}}},$$

die in keiner dieser ∞^1 möglichen Gaskugeln überschritten werden kann.

Haben wir z. B. über k , H und α verfügt und setzen r gleich dem Radius der Sonnenphotosphäre, so gibt (225) die Maximaltemperatur, die an dieser Stelle von keiner der ∞^1 noch möglichen Sonnen überschritten werden kann.

§ 18. Dem eben ausgesprochenen Satze können wir unmittelbar einen weiteren anreihen:

Sind H und $\Theta_k(\alpha)$, sowie eine zum Abstande r cent gehörige mögliche Temperatur T gegeben, so sind für $1 < n \leq 5$ stets zwei verschiedene vollständige Gaskugeln möglich. Ist die Grenztemperatur T_{\max} gegeben, so fallen dieselben zusammen. Für $n > 5$ sind bis ∞^1 vollständige Gaskugeln möglich.

Denn durch die vorgeschriebene Bedingung ist in der yz -Ebene nach Gleichung (223) eine Senkrechte z bestimmt, welche die der vollständigen Gaskugel entsprechende Lösungskurve y mindestens zweimal schneidet, im Grenzfalle T_{\max} bei z_{\max} berührt. Durch jeden Schnittpunkt ist ein Wert von $y + \frac{2}{n-1} z$ bestimmt und dadurch nach (224) die bis r eingeschlossene Masse. Durch r , T und M ist aber die Gaskugel vollständig bestimmt. Für $1 < n \leq 5$ erhalten wir zwei Schnittpunkte; für die größere n tritt die in Betracht kommende Lösungskurve als Spirale auf, und je nach dem Werte von z kann die Zahl der Schnittpunkte beliebig hoch, (bis ∞^1) ansteigen.

§ 19. Wir sind nun in der Lage die Hauptfrage, die sich beim Studium des Weltkörpers mit festem Kerne darbietet, zu beantworten. Die Oberfläche der vollständigen Gaskugel liegt für $n < 5$ im Endlichen, für $n \geq 5$ im Unendlichen; für $n > 5$ wird außerdem die Masse unendlich. Wo liegt die Oberfläche des ganzen Systems, falls ein fester Kern vorhanden?

Die Verhältnisse an der Oberfläche des festen Kerns sind gegeben. Gleichung (223) und (224) übertragen dieselben in die yz -Ebene und bestimmen einen Punkt derselben und dadurch eine Lösungskurve $y = f(z)$. Aus beiden Gleichungen eliminieren wir α und erhalten

$$(226) \quad \frac{y}{z} + \frac{2}{n-1} = \frac{G}{k} \cdot \frac{M}{H \cdot r T}.$$

Ist für einen Radius R die Temperatur T , sowie die umschlossene Masse M gegeben, so ist dadurch eine durch den Punkt $y=0, z=0$ gehende Gerade bestimmt, die unendlich viele Lösungskurven schneidet. Bleibt M und R konstant und wächst T von 0 bis ∞ , so dreht sich diese Gerade aus senkrechter Stellung nach rechts herum, bis sie schließlich mit der Geraden η zusammenfällt; letzteres ist für jedes T der Fall, wenn $M = 0$, d. h. wenn eine Atmosphäre über einer starren Hohlkugel aufgebaut werden soll. Der Aufbau muß auf einer bestimmten Polytropen erfolgen; ist dieselbe, also Θ_k , resp. α gegeben,

so sind weiter die beiden Geraden (223) und (224) gegeben; sie schneiden sich auf der Geraden (226) und bestimmen durch den Schnittpunkt die in Betracht kommende Lösungskurve y und durch deren Endpunkt die Verhältnisse an der Oberfläche der ∞^1 möglichen Gaskugeln. Für $n < 5$ münden alle Lösungskurven y in die $+y$ -Achse ein; die Oberfläche der Gaskugel liegt stets im Endlichen. Zur Beurteilung der Fälle $5 \leq n < \infty$ ist die Lage der Geraden ξ maßgebend. Sie teilt den zwischen $+y$ und η liegenden Teil der yz -Ebene. Steht die Gerade (226) steiler als ξ , so trifft sie nur Lösungskurven, die nach der $+y$ -Achse gehen; liegt sie aber zwischen ξ und η , so trifft sie auch Lösungskurven, die nach O_1 gehen, unendlich großem Radius entsprechend.

Für die Gerade ξ hatten wir (211)

$$\left(\frac{dy}{dz}\right) = -\frac{3-n}{n-1}.$$

Für die Gerade (226) ist

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\frac{G}{k-1} H}{\frac{M}{rT}} - \frac{2}{n-1}.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{dy}{dz} - \left(\frac{dy}{dz}\right)_\xi = \frac{\frac{G}{k-1} H}{\frac{M}{rT}} - 1,$$

und somit der Satz:

Liegt über einem sturren Weltkörper (M, R, T) eine Atmosphäre, so liegt deren Oberfläche für $0 < n < 5$ stets im Endlichen, für $5 \leq n < \infty$ stets dann, wenn

$$(227) \quad \frac{M}{R T} > \frac{\frac{k}{k-1} H}{G} \text{ gramm cent}^{-1}.$$

Die an der Oberfläche des starren Weltkörpers errichtete Höhe ξ der homogenen Atmosphäre ist $\xi = \frac{H T}{g}$, $g = \frac{G M}{R^2}$, so daß wir (227) eleganter schreiben können

$$(227a) \quad R > \frac{k}{k-1} \xi = > (n+1)\xi.$$

Wir führen einige Werte von $\frac{H}{G}$ an.

$$\frac{H}{G} \text{ gramm cent}^{-1}$$

Atmosphärische Luft H_L $4,3119 \cdot 10^{18}$

Wasserstoff H_{H^2} $6,2306 \cdot 10^{14}$

Dissoziierter Wasserstoff H_H $1,2461 \cdot 10^{15}$

Wasserdampf H_{H_2O} $6,9230 \cdot 10^{18}$.

Ist für $5 < n < \infty$ die Bedingungsgleichung (227) (resp. 227a) nicht erfüllt, so muß als weiteres Kriterium die dem Bau zugrunde liegende Polytrope herangezogen werden. Ist Θ_k genügend groß (α genügend klein) so liegt der Schnittpunkt der Geraden (223), (224) resp. (226) im Bereich der um O_1 herumlaufenden Spiralen; mit abnehmenden Θ_k gleitet der Schnittpunkt längs der Geraden (226), um bei einem kritischen Werte eine Grenzkurve y zu durchschreiten und auf Lösungskurven zu liegen, die in die $+y$ -Achse einmünden und dadurch endlichen Grenzradius bedingen. Dieser kritische Wert Θ_k , für jedes n durch eine festliegende Grenzkurve und die bewegliche Gerade (226) bestimmt, ist somit Funktion des Produkts $\frac{M}{R^T}$.

Damit ist die Eingangs dieses Paragraphen gestellte Frage beantwortet.

Für $1 < n < 5$ liegt die Oberfläche einer Gaskugel ohne oder mit festem Kern im Endlichen, für $5 < n < \infty$ im ersten Falle im Unendlichen, im letzten Falle im Endlichen, falls der Kern die Bedingungsgleichung (227) resp. (227a) erfüllt, oder die polytrope Temperatur Θ_k der Atmosphäre einen, durch den Kern bedingten kritischen Wert nicht übersteigt.

Für $n = \infty$ liegt die Oberfläche der isothermen Atmosphäre stets im Unendlichen.

Bei oberflächlicher Überlegung liegt der Schluß nahe, daß durch genügend große Masse des Kernes die Atmosphäre für jedes $n < \infty$ im Endlichen zusammengehalten werden kann. Wir sehen, daß nicht die Masse entscheidend ist, sondern die zum Bau der Atmosphäre benutzte Polytrope.

Überschreitet Θ_k einen gewissen Wert, so kann selbst unendlich große Masse nicht Endlichkeit des Radius erzwingen. Andererseits sehen wir, daß selbst über einer starren Hohlkugel ($M = 0$) eine im Endlichen endigende Atmosphäre für jedes $n < \infty$ möglich ist, falls Θ_k richtig gewählt wird.

Die Gerade (226) geht dann in die Gerade η über und deren Schnittpunkt mit der Grenzkurve bestimmt die Gerade (223) und damit die obere Grenze der Θ_k , welche endlichen Radius ermöglichen. Für $n = 5$ ist, wie eine leichte Überlegung an Hand von Diagramm 7 Seite 55 und Fig. 15 zeigt, dies kritische $\alpha = 0$, $\Theta_k = \infty$; jede Gaskugel $n = 5$ über einer starren Hohlkugel endigt im Endlichen.

Da für $n = 5$ die Oberfläche der vollständigen Gaskugel im Unendlichen liegt, scheint dies Resultat auf den ersten Blick unnatürlich. Es wird sofort verständlich durch die Überlegung, daß ein jeder hohle

Kern die Mittelpunktsbedingung der vollständigen Gaskugel $\frac{du}{dr} = 0$ beseitigt und in die Lösung der Differentialgleichung für $u = f(r)$ eine andere Integrationskonstante einführt.

§ 20. Die Massen der vollständigen Gaskugeln sind für $n > 5$ stets unendlich. Ist ein Kern vorhanden, und rückt die Oberfläche ins Endliche, so wird auch die Masse der Atmosphäre endlich; denn die in Betracht kommenden Strecken der Lösungskurve y geben nie unendlich große Werte von u . In welchem Verhältnis die Masse M des Kerns zur Gesamtmasse \mathfrak{M} bei gegebener Oberflächentemperatur des Kerns und Polytropie Θ_k steht, kann ohne die Integration von y in u nicht angegeben werden. Durch M , R , T und α ist zwar der Oberflächenpunkt in der yz -Ebene gegeben, durch die Gerade (224)

ein Wert (Fig. 15.) $y_R = \frac{1}{4\pi} R^{\frac{3-n}{n-1}} \alpha^{\frac{2n}{n-1}} M$ und durch den Endpunkt der y -Kurve ein Wert $y_{\mathfrak{M}} = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{R}^{\frac{3-n}{n-1}} \alpha^{\frac{2n}{n-1}} \mathfrak{M}$ bestimmt, die Beziehung ergebend

$$\frac{y_{\mathfrak{M}}}{y_R} = \left(\frac{\mathfrak{R}}{R}\right)^{\frac{3-n}{n-1}} \frac{\mathfrak{M}}{M}.$$

Allein ohne zweite Integration läßt sich das Produkt $\mathfrak{R}^{\frac{3-n}{n-1}} \mathfrak{M}$ nicht weiter zerlegen.

Aus gleichem Grunde ist g es nicht möglich, die folgende wichtige Frage exakt zu beantworten:

Gegeben sind die Gesamtmasse \mathfrak{M} des Weltkörpers, sowie Radius R und Masse M des festen Kernes.

Wie ändert sich mit dessen Oberflächentemperatur T_R der Radius \mathfrak{R} des Systems?

Der naheliegende Schluß, \mathfrak{R} wächst mit T_R ist unrichtig. Eine einfache Überlegung zeigt, daß mit unbegrenzt wachsendem \mathfrak{R} die Temperatur T einem endlichen Grenzwerte zustrebt,

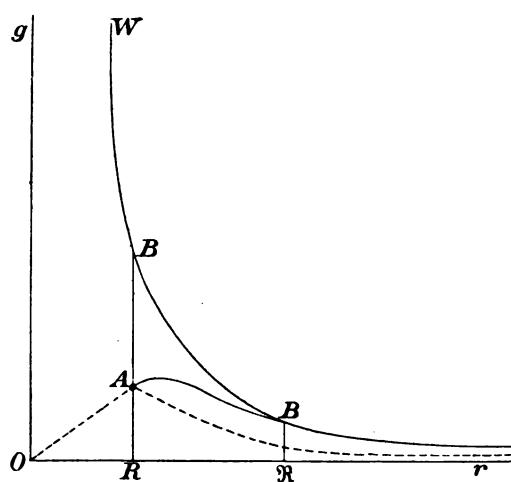


Fig. 16.

dabei aber einen Maximalwert, (möglicherweise deren mehrere), erlangen und mit weiter wachsendem \mathfrak{R} wieder abnehmen kann.

Dies klar zu legen greifen wir zurück auf die Darlegungen Kap. V § 2 u. 3 und legen Fig. 16 an. Als Ordinatenachsen benutzen wir den laufenden Radius r und die Schwerebeschleunigung g . Wir zeichnen die Kurve W , den Wert $g = \frac{GM}{r^2}$ darstellend, wenn die Gesamtmasse M in O vereinigt wäre. An der Oberfläche des festen Kernes hat g den Wert $RA = \frac{GM}{R^2}$. Wie g bis zum Abstande R variiert ist gleichgültig. An der Oberfläche des Gesamtkörpers, Radius \mathfrak{R} , ist der Wert von g gleich $RB = \frac{GM}{\mathfrak{R}^2}$. Der Punkt B liegt stets auf der Kurve W . Der Verlauf von g innerhalb der Atmosphäre ist durch die Kurve AB gegeben. Sie liegt unterhalb W ; um ihren Verlauf genau zu kennen, müßte die Funktion $u = f(r)$ durch Integration der Differentialgleichung zweiter Ordnung unter Berücksichtigung der durch M , R und T gegebenen Integrationskonstanten bestimmt sein. Da aber

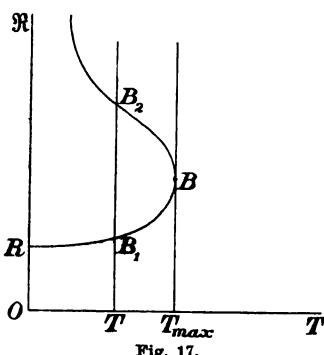
$$dT = - \frac{k-1}{k} \frac{g}{H} dr,$$

für $r = \mathfrak{R}$ aber $T = 0$ ist, so ist die

Fläche $RAB\mathfrak{R}$ proportional T_R ,

der Temperatur an der Oberfläche des Kerns. Ändert sich T_R , so verschiebt sich B längs W , den Radius \mathfrak{R} bestimmend. Für $T = 0$

wird $RAB\mathfrak{R} = 0$, liegt B senkrecht über R , und die Masse des Kerns M verhält sich zur Gesamtmasse M wie $RA : RB$; mit wachsendem \mathfrak{R} nimmt $RAB\mathfrak{R}$ endliche Werte an, um mit $\mathfrak{R} = \infty$ einem *endlichen* Werte zuzustreben (da die Kurve W von endlichem r bis ∞ endliche Fläche begrenzt). Dabei ist es möglich, daß $RAB\mathfrak{R}$ einen Maximalwert (möglicherweise mehrere) durchläuft, so daß von da ab zu wachsendem Radius abnehmende Oberflächentemperatur des Kerns gehört. Ein solcher



Zusammenhang ist in Fig. 17 zur Darstellung gebracht. Bei der Temperatur T an der Oberfläche des festen Kernes, sind zwei Atmosphärenhöhen möglich, die bis B_1 resp. B_2 reichen.

Wir schließen somit:

Besteht ein Weltkörper aus Atmosphäre nebst festem Kerne, so

existiert für letztere eine endliche maximale Oberflächentemperatur, nach deren Überschreitung die Atmosphäre sich nicht mehr im Gleichgewicht befinden kann. Diese Maximaltemperatur braucht nicht mit dem maximalen Gesamtradius $R = \infty$ zusammenzufallen; für eine Reihe von Temperaturen kann die Atmosphäre auf zwei verschiedene Arten im Gleichgewicht sein.

Wir werden später zeigen, daß bei Vernachlässigung der inneren Gravitation die Atmosphärenhöhe mit steigender Oberflächentemperatur des Kerns stets zunehmen muß. Diese Vernachlässigung wirkt in dem Maße weniger fehlerhaft, als die Masse des Kernes diejenige der Atmosphäre überwiegt. Damit die oben erwähnten beiden Gleichgewichtszustände möglich sind, darf das Massenverhältnis $\frac{M}{m}$ eine gewisse Grenze nicht überschreiten. Ist andererseits die Masse des Kernes Null (starre Hohlkugel), so fällt (Fig. 16) A bei R in die Abszissenachse; T_R ist Null für $R = R$ und für $R = \infty$, muß also mit wachsendem R ein Maximum passieren.

Wird die maximale Oberflächentemperatur überschritten, so genügen die Gravitationskräfte nicht mehr, die Atmosphäre im Gleichgewicht zu halten; letztere wird sich in dem umgebenden Raum zerstreuen. Wir kommen somit zur Vorstellung der *Zerstreuungstemperatur eines festen Kernes*.

§ 21. Die erwähnten Verhältnisse können wir in den Fällen $n = 0$ und $n = 1$ eingehender studieren, da sich hier die Integration der Differentialgleichung in geschlossener Form angeben läßt.

$$A \quad n = 0, \quad k = \infty, \quad \varrho = \text{konst.}$$

In diesem Falle lautet (Kap. IV § 4) die Auflösung der Differentialgleichung

$$T = A + \frac{B}{r} - \frac{\alpha^2 r^2}{6}; \quad \alpha^2 = \frac{4\pi G \varrho}{H} \text{ cent}^{-2}.$$

Für $r = R$ ist die Oberflächentemperatur T_R gegeben, ebenso in der untersten Schicht der Atmosphäre $\frac{dT}{dr}$. (Vgl. oben § 2). Denn für $\varrho = \text{konst.}$ gilt

$$\frac{dp}{\varrho} = HdT = -gdr, \quad \left(\frac{dT}{dr}\right)_R = -\frac{g}{H} = -\frac{GM}{HR^2}.$$

Dadurch sind die Integrationskonstanten A und B bestimmt und wir erhalten nach leichter Umformung

$$T = T_R + \frac{R}{2} \left(2 \left(\frac{dT}{dr} \right)_R + \alpha^2 R \right) - \frac{R^2}{3r} \left(3 \left(\frac{dT}{dr} \right)_R + \alpha^2 R \right) - \frac{\alpha^2 r^2}{6}.$$

Für die Oberfläche des Weltkörpers $r = \mathfrak{R}$ ist $T = 0$ und somit

$$0 = T_R + \alpha^2 \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{3\mathfrak{R}} - \frac{\mathfrak{R}^2}{6} \right) + R \left(\frac{dT}{dr} \right)_R \left(\frac{\mathfrak{R} - R}{\mathfrak{R}} \right).$$

Wäre α bekannt, so wäre hiernach die zu r gehörige Temperatur T bestimmt. α lässt sich für $\varrho = \text{konst.}$ leicht berechnen; denn bezeichnen wir die Masse der Atmosphäre mit $M_a = \mathfrak{M} - M$, so ist

$$M_a = \frac{4\pi}{3} \varrho (\mathfrak{R}^3 - R^3),$$

$$\alpha^2 = \frac{3GM_a}{H(\mathfrak{R}^3 - R^3)}$$

und somit

$$0 = T_R + \frac{3GM_a}{H(\mathfrak{R}^3 - R^3)} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{3\mathfrak{R}} - \frac{\mathfrak{R}^2}{6} \right) - \frac{GM}{HR} \left(\frac{\mathfrak{R} - R}{\mathfrak{R}} \right).$$

Setzen wir noch

$$\mathfrak{R} = \lambda R,$$

so erhalten wir schließlich

$$0 = T_R + \frac{GM}{HR} \left[\frac{1}{\lambda^3 - 1} \cdot \frac{3\lambda - \lambda^3 - 2}{2\lambda} \cdot \frac{M_a}{M} - \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right].$$

Ist die Masse der Atmosphäre endlich gegen die Masse des Kernes und gehen wir zur Grenze $\lambda = \infty$ über, so folgt

$$(228) \quad T_R = \frac{GM}{HR}; \quad \mathfrak{H} = R,$$

d. h.: Erstreckt sich die Atmosphäre in die Unendlichkeit, so ist die Oberflächentemperatur des Kernes derart, daß die Höhe der homogenen Atmosphäre an seiner Oberfläche gleich seinem Radius ist. (Die Höhe der homogenen Atmosphäre wird für $g_R = \text{konst.}$ gebildet!) Dies ist keineswegs die Maximaltemperatur des Kernes, bei welcher die Atmosphäre im Gleichgewicht sein kann. Denn setzen wir z. B. $M_a = \frac{7}{4} M$ und $\mathfrak{R} = 2R$, so liefert (228)

$$T_R = \frac{2GM}{HR}, \quad \mathfrak{H} = 2R,$$

also den doppelten Wert. Setzen wir $M = 0$, $R = \frac{\mathfrak{R}}{\lambda}$, $\lambda = \infty$, so erhalten wir aus (228) die Mittelpunktstemperatur der vollständigen Gaskugel $T_0 = \frac{G\mathfrak{M}}{2HR}$ in Übereinstimmung mit der kosmogenetischen Flächengleichung (107).

Ist an Stelle des Kernes eine starre Hohlkugel vorhanden ($M = 0$), so geht (228) über in

$$0 = T_R + \frac{GM_a}{HR} \left[\frac{1}{\lambda^3 - 1} \cdot \frac{3\lambda - \lambda^3 - 2}{2\lambda} \right]$$

und den Atmosphärenhöhen Null ($\lambda = 1$) und Unendlich ($\lambda = \infty$)

entspricht die Temperatur $T_R = 0$; mit wachsendem λ muß T_R stets ein Maximum passieren.

Den numerischen Zusammenhang zwischen T_R und λ der Gleichung (228) können wir an einem Beispiele zweckmäßig auf folgende Weise darstellen. Wir denken uns eine vollständige Gaskugel von der Masse $M = M_a + M$ und dem Radius R aufgebaut. Dadurch ist α , (Θ_k) bestimmt (kosmogenetische Fläche (102)) und der Gang der Temperatur längs des Radius. Wir suchen den Radius R , $R = \lambda_0 R$, welcher die Masse M einschließt; hier herrscht die Temperatur T_{0R} . Gehen wir umgekehrt von diesem Kerne aus, so werden sich die beiden Integrationskonstanten A und B so bestimmen, daß die ursprüngliche vollständige Gaskugel resultiert. Die Gleichung (228) schreibt sich dann

$$(228a) \quad 0 = T_{0R} + \frac{GM}{HR} \left[\frac{1}{\lambda_0^3 - 1} \cdot \frac{3\lambda_0 - \lambda_0^3 - 2}{2\lambda_0} \cdot \frac{M_a}{M} - \frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0} \right].$$

Durch $\frac{M_a}{M}$ ist λ_0 , umgekehrt durch λ_0 das Massenverhältnis bestimmt. Den Kern lassen wir nun erstarren und ändern seine Oberflächentemperatur. Gleichung (228) gibt dann den Zusammenhang zwischen λ und T_R und für jedes λ können wir aus (228) und (228a) das Verhältnis $\frac{T_R}{T_{0R}}$ bilden.

Setzen wir $\lambda_0 = 2$, so ist, da die Dichte konstant, $\frac{M_a}{M} = 7$; der Klammerausdruck der Gleichung (228a) erhält den Wert $-\frac{3}{2}$ und wir erhalten für $\frac{T_R}{T_{0R}}$ und das Verhältnis der Dichte der Atmosphäre zur Ausgangsdichte die Werte

$\lambda = \infty$	100	5	4	3	2,75	2,65	2,5	2	1,5	1
$\frac{T_R}{T_{0R}}$	$\frac{2}{3}$	0,6833	0,9547	1	1,0427	1,0476	1,0481	1,0461	1	0,7953
$\frac{\rho}{\rho_0}$	0	0,000007	0,0564	$\frac{1}{9}$	$\frac{7}{26}$	0,3541	0,3975	0,4786	1	2,074

Lassen wir die Höhe der Atmosphäre zunehmen, so ist ein Steigen der Temperatur des Kernes erforderlich, um bei $R = 2,65R$ ein Maximum zu erreichen; dehnt sich die Atmosphäre weiter aus, so muß die Temperatur wieder sinken und erreicht bei $R = 4R$ wieder ihren ursprünglichen Wert. Zu jeder Temperatur T_R zwischen $\frac{2}{3}T_{0R}$ und $1,0481T_{0R}$ sind zwei verschiedene Atmosphärenhöhen möglich.

Ist die Masse der Atmosphäre genügend klein, so tritt das mit

$\frac{M_a}{M}$ multiplizierte Glied gegen $\frac{1-\lambda}{\lambda}$ zurück, und wir erhalten mit λ stets steigende Temperatur; z. B.

$$\lambda_0 = 1,1; \text{ gibt } \frac{M_a}{M} = 0,331$$

und zu

$$\begin{array}{ccccccccc} \lambda & = & \infty & 500 & 100 & 5 & 2 & 1,1, \\ \frac{T_R}{T_{\Theta R}} & = & 9,5235 & 9,5075 & 9,443^*) & 7,9031 & 4,8066 & 1, \\ & & & & \text{Maximum für } \lambda = \infty. \end{array}$$

B Der Fall $n = 1; k = 2$. Hier ist

$$\varrho = u^n = u^1; \quad T = u \Theta = \varrho \Theta; \quad \alpha^2 = \frac{2\pi G}{H\Theta} = \frac{2\pi G \varrho}{HT} \text{ gramm}^{-1} \text{ cent.}^*)$$

Wir gehen wieder aus von einem System, in dem sich Kern und Masse zu einer vollständigen Gaskugel ergänzen. In diesem Falle ist die Lösung der Differentialgleichung für u

$$(a) \quad u = u_0 \frac{\sin \alpha r}{\alpha r}$$

und der Radius der Oberfläche bestimmt durch

$$(b) \quad \alpha \mathfrak{R} = \pi.$$

Soll der Gang von u in einer Atmosphäre gefunden werden, die sich von $r = R$, $u = u_R$ bis $r = \mathfrak{R}$ erstreckt, so können wir die Lösung schreiben

$$(c) \quad u = u_R \frac{R}{r} \frac{\sin \alpha (\mathfrak{R} - r)}{\sin \alpha (\mathfrak{R} - R)};$$

dies gibt

$$(d) \quad u' = \frac{u_R R}{\sin \alpha (\mathfrak{R} - R)} - \frac{\alpha r \cos \alpha (\mathfrak{R} - r) - \sin \alpha (\mathfrak{R} - r)}{r^2}.$$

Die bis zum Radius r eingeschlossene Masse ist nach (68)

$$M = - \frac{4\pi}{\alpha^2} r^3 \frac{du}{dr} \text{ gramm.}$$

Wir können somit die Masse des Kerns ausdrücken durch

$$(e) \quad M = \frac{4\pi}{\alpha^2} \frac{u_R R}{\sin \alpha (\mathfrak{R} - R)} [\alpha R \cos \alpha (\mathfrak{R} - R) + \sin \alpha (\mathfrak{R} - R)],$$

und die Gesamtmasse Kern + Atmosphäre ist

$$(f) \quad \mathfrak{M} = \frac{4\pi}{\alpha^2} \frac{u_R R}{\sin \alpha (\mathfrak{R} - R)} \alpha \mathfrak{R} \text{ gramm.}$$

*) Beachte die Rechenregel Seite 28.

Bleibt das Massenverhältnis ungeändert, so muß konstant bleiben

$$(g) \quad \frac{M}{\mathfrak{M}} = \frac{1}{\alpha \mathfrak{R}} (\alpha R \cos \alpha (\mathfrak{R} - R) + \sin \alpha (\mathfrak{R} - R)) \\ = \frac{R}{\mathfrak{R}} \cos \alpha \mathfrak{R} \left(1 - \frac{R}{\mathfrak{R}}\right) + \frac{\sin \alpha \mathfrak{R} \left(1 - \frac{R}{\mathfrak{R}}\right)}{\alpha \mathfrak{R}}.$$

Ergänzen sich Kern und Atmosphäre zu einer vollständigen Gaskugel, so gelten die Spezialwerte

$$\alpha_0, \quad \mathfrak{R}_0, \quad \alpha_0 \mathfrak{R}_0 = \pi; \quad \Theta_0, \quad u_{0R}, \quad T_{0R}, \quad \varrho_{0R};$$

die letzteren drei für die unterste Atmosphärenschicht. Ändern wir nun bei erstarrtem Kern den Radius des Systems, so haben wir nach (g) für $\alpha \mathfrak{R}$ die Bedingungsgleichung

$$(h) \quad \frac{R}{\mathfrak{R}} \cos \alpha \mathfrak{R} \left(1 - \frac{R}{\mathfrak{R}}\right) + \frac{\sin \alpha \mathfrak{R} \left(1 - \frac{R}{\mathfrak{R}}\right)}{\alpha \mathfrak{R}} \\ = \frac{R}{\mathfrak{R}_0} \cos \pi \left(1 - \frac{R}{\mathfrak{R}_0}\right) + \frac{\sin \pi \left(1 - \frac{R}{\mathfrak{R}_0}\right)}{\pi}.$$

Den so ermittelten Wert $\alpha \mathfrak{R}$ setzen wir $= \beta$.

Aus (f) erhalten wir für das geänderte u_R die Bedingungsgleichung

$$\mathfrak{M} = \frac{4\pi}{\alpha^2} u_R \frac{R}{\sin \beta \left(1 - \frac{R}{\mathfrak{R}}\right)} \beta = \frac{4\pi}{\alpha_0^2} u_{0R} \frac{R}{\sin \alpha_0 \mathfrak{R}_0 \left(1 - \frac{R}{\mathfrak{R}_0}\right)} \alpha_0 \mathfrak{R}_0 \\ = \frac{4\pi^2}{\alpha_0^2} u_{0R} \frac{R}{\sin \pi \left(1 - \frac{R}{\mathfrak{R}_0}\right)}$$

und daraus

$$(i) \quad \frac{u_R}{u_{0R}} = \frac{\varrho_R}{\varrho_{0R}} = \pi \left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^2 \frac{\sin \beta \left(1 - \frac{R}{\mathfrak{R}}\right)}{\beta \sin \pi \left(1 - \frac{R}{\mathfrak{R}_0}\right)}.$$

Setzen wir wieder

$$\mathfrak{R}_0 = \lambda_0 R, \quad \mathfrak{R} = \lambda R$$

und somit

$$\alpha \lambda R = \beta, \quad \alpha_0 \lambda_0 R = \pi,$$

so ergibt sich

$$(k) \quad \frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{\beta}{\pi} \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

und schließlich, da $\alpha^2 = \frac{2\pi G \varrho}{HT}$, aus (i)

$$(l) \quad \frac{T_R}{T_{0R}} = \frac{\varrho_R}{\varrho_{0R}} \left(\frac{\alpha_0}{\alpha}\right)^2 = \frac{\pi}{\beta} \frac{\sin \beta \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{\sin \pi \left(1 - \frac{1}{\lambda_0}\right)}.$$

Beispiel: $\Re_0 = 2R$, $\lambda_0 = 2$. Dann gehen die Bestimmungsgleichungen (h), (i), (l) über in:

$$\frac{1}{\lambda} \cos \beta \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{\sin \beta \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{\beta} = \frac{1}{\pi},$$

$$\frac{e_R}{e_{0R}} = \frac{\beta}{\pi} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 \sin \beta \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right),$$

$$\frac{T_R}{T_{0R}} = \frac{\pi}{\beta} \sin \beta \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right),$$

und aus (g) folgt

$$\frac{M}{\Re} = \frac{1}{\lambda} \cos \beta \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{\sin \beta \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{\beta} = \frac{1}{\pi}.$$

Wir erhalten daraus folgende zusammengehörige Werte:

$\lambda =$	∞	100	10	5	4,5	4	3	2,5
$\alpha \Re = \beta$	2,3137	2,3141	2,3364	2,4110	2,4363	2,4726	2,6173	2,7821
$\frac{\alpha}{\alpha_0}$	0	0,01473	0,14874	0,3070	0,3447	0,3935	0,5554	0,70845
$\frac{\Theta}{\Theta_0}$	∞	67,84	6,7232	3,2574	2,9010	2,5412	1,8005	1,4115
$\frac{e_R}{e_{0R}}$	0	0,000222	0,0464	0,1150	0,1453	0,1889	0,3648	0,5640
$\frac{T_R}{T_{0R}}$	1	1,0007	1,1587	1,2201	1,2223	1,2196	1,1822	1,1237

$\lambda =$	2	$\frac{4}{3}$	1
	3,1416	5,5825	∞
	1	2,6654	∞
	1	0,3752	0
	1	3,9371	∞
	1	0,55415	0

Mit wachsendem \Re steigt anfangs die Temperatur, um ziemlich genau bei $\Re = 4,5$ einen Maximalwert zu passieren und abnehmend wieder den Ausgangswert zu erreichen, wenn $\Re = \infty$ geworden.

§ 22. Wir haben noch die Energetik des Weltkörpers mit starrem Kerne zu behandeln. Die Masse des Kerns vom Radius R sei M , die Masse der Atmosphäre, die sich bis \Re erstreckt, M_a ; von R bis zu einem beliebigen Radius r , $R < r < \Re$; ist die Masse m eingeschlossen, in einer Kugelschale von der Dicke dr die Masse dm . Der Druck der untersten Schicht der Atmosphäre sei p_R .

Die Atmosphäre befindet sich in einem *beliebigen* Gleichgewichtszustande. Dann ist ihr Energiegehalt (ϵ)

$$(\epsilon) = \frac{c_v}{A} \int_R^{\infty} T dm = \frac{4\pi c_v}{A} \int_R^{\infty} T \varrho r^2 dr = \frac{4\pi}{\kappa - 1} \int_R^{\infty} p r^2 dr \text{ Erg.}$$

Unter ψ verstehen wir den Gehalt der Atmosphäre an potentieller Energie, herrührend davon, daß sie unter der Gravitationswirkung des Kerns, sowie ihrer eigenen Masse steht. (Das Selbstpotential des ganzen Systems ist also um das Selbstpotential des Kernes größer.)

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \psi &= -G \int_R^{\infty} \frac{(M+m)dm}{r} = - \int_R^{\infty} g r dm = -4\pi \int_R^{\infty} g \varrho r^3 dr = +4\pi \int_R^{\infty} r^3 dp \\ &= 4\pi \left\{ |r^3 p|_R^{\infty} - 3 \int_R^{\infty} p r^2 dr \right\} = -4\pi R^3 p_R - 3 \int_R^{\infty} p r^2 dr. \end{aligned}$$

Und somit ergibt sich für *beliebiges* Gleichgewicht als Seitenstück zu den Gleichungen (113) und (180) die Beziehung

$$(229) \quad \psi + 3(\kappa - 1)(\epsilon) = -4\pi R^3 p_R \text{ Erg.}$$

Diese Gleichung verliert ihre Gültigkeit, falls für $n > 5$ und $R = \infty$ sich $(r^3 p)_R > 0$ ergibt.

Ist die Atmosphäre im polytropen Gleichgewicht $dT = -\frac{g}{\frac{k}{k-1} H} dr$

so läßt sich eine weitere Beziehung zwischen (ϵ) und ψ ableiten.

$$\begin{aligned} (\epsilon) &= \frac{c_v}{A} \int_R^{\infty} T dm = \frac{c_v}{A} \left\{ |T m|_R^{\infty} - \int_R^{\infty} m dT \right\} = -\frac{c_v}{A} \int_R^{\infty} m dT \\ &= -\frac{1}{k-1} \int_R^{\infty} mg dr = \frac{G}{\frac{k}{k-1}(\kappa-1)} \int_R^{\infty} \frac{(M+m)m}{r^2} dr \\ &= \frac{G}{\frac{k}{k-1}(\kappa-1)} \left\{ \left| -\frac{Mm}{r} \right|_R^{\infty} + M \int_R^{\infty} \frac{dm}{r} - \left| \frac{m^2}{r} \right|_R^{\infty} + 2 \int_R^{\infty} \frac{mdm}{r} \right\} \\ &= -\frac{G}{\frac{k}{k-1}(\kappa-1)} \left\{ \frac{MM_a}{R} + \frac{M_a^2}{R} + M \int_R^{\infty} \frac{dm}{r} \right\} \\ &\quad + \frac{2G}{\frac{k}{k-1}(\kappa-1)} \left\{ M \int_R^{\infty} \frac{dm}{r} + \int_R^{\infty} \frac{mdm}{r} \right\}. \end{aligned}$$

$$\psi = -G \int_R^{\infty} \frac{(M+m)dm}{r} = -G \left\{ M \int_R^{\infty} \frac{dm}{r} + \int_R^{\infty} \frac{mdm}{r} \right\} \text{Erg.}$$

Aus diesen beiden Beziehungen und der Gleichung (209) erhalten wir schließlich

$$(230) \quad (\varepsilon) = + \frac{(k-1)G}{(5k-6)(\kappa-1)} \left\{ \frac{MM_a}{R} + \frac{M_a^2}{R} + M \int_R^{\infty} \frac{dm}{r} \right\} - \frac{8\pi(k-1)}{(5k-6)(\kappa-1)} R^3 p_R \text{ Erg.}$$

$$(231) \quad \psi = - \frac{3(k-1)G}{5k-6} \left\{ \frac{MM_a}{R} + \frac{M_a^2}{R} + M \int_R^{\infty} \frac{dm}{r} \right\} + \frac{4\pi k}{5k-6} R^3 p_R \text{ Erg.}$$

Zweiter Teil. Anwendungen.

Vierzehntes Kapitel.

Kosmische Staubmassen.

§ 1. In den vorstehenden theoretischen Betrachtungen haben wir Eigenschaften von Gaskugeln untersucht unter einziger Zugrundelegung folgender drei Gesetze. Erstens: Zwischen den Massenteilen des Gases sind Newtonsche Gravitationskräfte wirksam; zweitens: das Gas befolgt die Zustandsgleichung $pv = HT$; drittens: die Zustandsänderung längs des Radius folgt einer Polytropen (gleich für alle Radien). Daraus folgt rein analytisch, daß Gaskugeln von einer Polytropenklasse $n < 5$, und dazu gehören sämtliche stabilen, adiabatischen Kugeln, bei endlichen Radien scharf begrenzt sind durch Oberflächen, ausgezeichnet dadurch, daß an ihnen Druck und Temperatur auf den Wert Null herabgesunken sind. Die Auffassung der Wärme als molekulare Bewegung läßt logisch eine solche Oberfläche zu; denn ist der Nullpunkt der Temperatur erreicht, so sind sämtliche Moleküle in Ruhe; deshalb kann kein Molekül davonfliegen; und außerhalb dieser Fläche können keine ruhenden Moleküle mehr vorhanden sein, da sie sonst sich zentral in Bewegung setzen müßten. Die nach dieser Überlegung mögliche Begrenzungsfläche wird nicht genau mit der auf Grund der Zustandsgleichung ermittelbaren zusammenfallen, denn die Beziehung $pv = HT$ kann sicherlich nicht bis zu den Werten $p = 0, T = 0$ Gültigkeit besitzen. Bei den überaus geringen, in der Nähe der Oberfläche auftretenden Dichten wird die Beziehung wahrscheinlich bis auf weit nach außen gelegenen Partien einer Kugel angewandt werden können, muß aber früher oder später verlassen werden. Auch die Anwendung einer andern Zustandsgleichung, etwa derjenigen von van der Waals, würde über diese Schwierigkeit nicht hinweghelfen.

Um hier klarer zu sehen, haben wir zurückzugreifen auf die Vorstellungen der kinetischen Gastheorie.

§ 2. Der Zustand eines Gases sei durch p , ϱ , T bestimmt. Ist die Masse eines Moleküls m Gramm, so ist der mittlere Abstand λ zweier Moleküle gegeben durch

$$(232) \quad \lambda = \sqrt[3]{\frac{m}{\varrho}} \text{ cent.}$$

Es werde ein Raum v cent³ betrachtet, in welchem N Moleküle umherschwirren. Beträgt die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung dieser N Moleküle L Erg, so sei ein mittleres Geschwindigkeitsquadrat \bar{V}^2 cent² sek⁻² definiert durch die Beziehung

$$(233) \quad L = \frac{1}{2} N m \bar{V}^2 \text{ Erg.}$$

Jedes Molekül fliegt in geradliniger Bahn; nähert es sich aber einem andern Molekül bis auf eine Distanz von gleicher Größenordnung wie der Moleküldurchmesser, tritt es in die Aktionssphäre des selben, deren Radius wir mit s bezeichnen, ein, so wird es äußerst rasch aus seiner Bahn abgelenkt. Man hat nicht nötig, mit wirklichem Zusammenstoß zu rechnen, in welchem Falle der Aktionsradius s mit dem Molekülradius zusammenfällt, und die Moleküle als vollkommen elastische Kugeln behandelt werden müssen; es genügt anzunehmen, daß die Gaspartikeln auf molekulare Distanz mit sehr starken Kräften, anziehend oder abstoßend, aufeinander einwirken. Im ersten Falle beschreiben die Moleküle hyperbelähnliche Bahnen um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt; im andern Falle beschreiben sie ähnliche Bahnen, ohne um den Schwerpunkt herumzulaufen. Unter diesen Voraussetzungen tritt ein stationärer Zustand ein, derart, daß alle möglichen Geschwindigkeiten auftreten, sich aber so um die Geschwindigkeit \bar{V} gruppieren, daß die Anzahl Moleküle \mathfrak{N} , deren Geschwindigkeit zwischen V und $V + dV$ liegt, beträgt

$$(234) \quad \mathfrak{N} = N \cdot 6 \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}} \frac{1}{\bar{V}^3} V^2 e^{-\frac{V^2}{\bar{V}^2}} dV.$$

Daraus berechnet sich der Druck p auf die Flächeneinheit der den Raum v umschließenden Oberfläche zu

$$(235) \quad p v = \frac{2}{3} L = \frac{1}{3} N \cdot m \cdot \bar{V}^2 \text{ Erg.}$$

$$(235a) \quad \frac{p}{\varrho} = \frac{1}{3} \bar{V}^2 \text{ cent}^2 \text{ sek}^{-2}.$$

Mißt man die Temperatur durch den Druck des Gases, so ergibt sich die Zustandsgleichung $\frac{p}{\varrho} = HT$ und daraus

$$(236) \quad \overline{V^2} = 3HT \text{ cent}^2 \text{ sek}^{-2}.$$

Unter diesen Umständen beträgt ferner die Länge \mathfrak{L} des geradlinigen Weges, den die Moleküle durchschnittlich zwischen zwei Zusammenstößen zurücklegen

$$(237) \quad \mathfrak{L} = \frac{m}{\varrho s^2 \pi \sqrt{2}} = \frac{\lambda^3}{s^2 \pi \sqrt{2}} \text{ cent},$$

und dieser Weg wird durchschnittlich während einer Zeit \mathfrak{T} durchflogen:

$$(238) \quad \mathfrak{T} = \frac{\mathfrak{L}}{\overline{V}} \sqrt{\frac{3}{8} \pi} \text{ sek.}$$

Diese Betrachtungen können stets dann, aber auch nur dann, angewandt werden, wenn 1. die in Betracht kommenden Gasmassen groß sind gegen die Masse eines Moleküls, 2. die Dimensionen des in Betracht kommenden Raumes groß sind gegen die Länge \mathfrak{L} des freien Weges und 3. die in Betracht kommenden Zeiten groß sind gegen die Zeit \mathfrak{T} zwischen zwei Zusammenstößen. In unmittelbarer Nähe der Oberfläche einer Gaskugel wird die Gesamtmasse immer geringer, und mit abnehmender Temperatur steigen \mathfrak{T} und \mathfrak{L} bis Unendlich. Die ausgesprochenen drei Bedingungen sind hier sämtlich verletzt, die statistische Behandlung der kinetischen Gastheorie und die angegebenen Formeln nicht anwendbar. Nichts aber hindert, auch hier die Grundanschauung der kinetischen Gastheorie festzuhalten und die Gasmassen bestehend anzunehmen aus frei beweglichen Molekülen, die den Gesetzen der Mechanik unterworfen sind. Wir erleichtern uns diese Untersuchung außerordentlich, wenn wir uns gleichsam ein Modell eines Gases schaffen, indem wir bei wachsendem gegenseitigen Abstande die Moleküle bis zu greifbarer Größe, etwa zu derjenigen im Raume umherschwirrender Meteorsteine, anwachsen lassen. Dadurch werden wir gleichzeitig geführt zur Untersuchung kosmischer Gebilde, die wir als kosmische Staubmassen bezeichnen werden.

§ 3. Unter einer *kosmischen Staubmasse* verstehen wir eine Ansammlung von Massen, deren Anzahl hinreichend groß, und deren durchschnittlicher gegenseitiger Abstand hinreichend groß im Vergleich zu ihren Dimensionen sind. (Kosmische Staubmassen erfüllen demnach die beiden ersten der angeführten drei Bedingungen, welche der statistischen Behandlungsweise der kinetischen Gastheorie zu-

grunde liegen.) Die Größe der Einzelmasse ist dabei gleichgültig; wirkliche Staubkörnchen oder Fixsterne können kosmische Staubmassen bilden, wenn sie nur in genügender Zahl in genügend großem Raume auftreten. Zu den kosmischen Staubmassen zählen z. B. die Sternschnuppenschwärme, der Saturnring, wahrscheinlich die Kometenschweife, das Zodiakallicht, vielleicht die der Sonne entfernten Teile der Korona; schließlich kann sogar der ganze sichtbare Fixsternkomplex dazu gezählt werden. Es hat wohl Lockyer*) zuerst darauf aufmerksam gemacht, daß Nebel, die wir ihrem spektroskopischen Befunde nach als leuchtende Gasmassen halten würden, ebensogut kosmische Staubmassen sein können. Wir werden sehen, welche Wärmemengen frei werden können durch die Zusammenstöße der unregelmäßig durcheinander schwirrenden Komponenten, groß genug, beträchtliche Mengen derselben zu verdampfen und die Dämpfe auf hohe Temperatur zu erwärmen. Die hellsten Stellen ungleich leuchtender Nebel, etwa der Spiralnebel, wären aufzufassen als Stellen heftigster innerer Bewegung, stärkster und zahlreichster Zusammenstöße; ein Ringnebel würde im Saturnring in verkleinertem Maße dargestellt. Schon diese eine Bemerkung, verbunden mit dem Umstande, daß die von beleuchteten kosmischen Staubmassen reflektierte Lichtmenge durch deren Bau bedingt ist,**) würde deren eingehendes Studium erfordern. Dazu drängt aber noch ein anderer Gedankengang. Es kann wohl nicht geleugnet werden, daß die Lehre der Entwicklung unseres Planetensystems nach Kant-Laplace sehr in Mißkredit gekommen ist; und in letzter Linie kaum durch mehr gestützt wird, als durch den Glanz der Namen ihrer Urheber und den Umstand, daß lange Zeit nichts Besseres oder auch nur Gleichwertiges vorhanden war, was das in den meisten Stücken übereinstimmende Verhalten der Glieder unseres Planetensystems scheinbar mühelos erklärte. In neuerer Zeit gewinnt immer mehr eine Ansicht an Boden, die an Stelle des Kant-Laplaceschen Nebelballen eine kosmische Staubmasse setzt, und die man etwa folgendermaßen skizzieren kann. Ungleiche Massenverteilung zwang die Komponenten der Staubmasse an Stellen zufälliger größter Dichte sich immer mehr anzusammeln, in immer zahlreicheren Zusammenstößen sich immer mehr zu erhitzen und schließlich zu den großen Kugeln zusammenzuschweißen, die als Sonne, Planeten und Monde gemäß dem Newtonschen Gravitationsgesetze ihre Bahnen zurücklegen und größtenteils in gleichem

*) Lockyer, Proc. Roy. Soc. T. 259. pag. 117. 1887.

**) H. v. Seeliger, Über kosmische Staubmassen und das Zodiakallicht. Sitzungsber. der Kgl. bayr. Akad. d. Wissensch. XXXI. pag. 265. 1901.

Sinne laufen und rotieren, aufgezwungen durch Rotation der ursprünglichen Masse. Die dem System schon ursprünglich angehörigen Meteoritenchwärme und die Kometen, das Zodiakallicht und der Saturnring zeugen noch von jenen fernen, vergangenen Zeiten. Danach hat die Sonne nicht in fortwährendem Kontraktionsvorgange die Planeten sukzessive abgesetzt, sondern Sonne, Planeten und Monde sind im wesentlichen *gleichaltrige* Gebilde. Auch die Frage nach dem Auftreten der ersten organischen Zellen auf der Erde und den übrigen Körpern des Systems findet ihre Lösung darin, daß dieselben bereits auf den Komponenten der Staubmasse vorhanden waren. Wir werden sehen, daß sich die Geschwindigkeiten derselben nach dem Maxwell'schen Gesetze verteilen, so daß stets langsam bewegte, sich durch Zusammenstoß wenig erwärmende Staubkörper (Meteoritensteine) vorhanden waren, auf denen die Lebensfähigkeit der Zellen vorhanden blieb. Die Existenz kosmischer Staubwolken dürfte sicher stehen, ob aber jener sagenhafte Nebelball vollständig dissoziierter Materie, von welchem die „gründlichsten“ Verfechter der Nebelhypothese ausgehen, vorhanden oder auch nur möglich war, ist metaphysische Spekulation und entzieht sich jeder physikalischen Behandlungsweise. Es wäre vermutlich die Hauptaufgabe bereits gelöst, wenn sich die Entwicklung unseres Planetensystems aus einer kosmischen Staubmasse, anstatt aus jener ursprünglicheren? Verteilung der Materie, klar durchschauen ließe. Ein erster, notwendiger Schritt dazu ist die Untersuchung ruhender kosmischer Staubmassen, die infolge innerer Gravitation im Gleichgewichte stehen, mit welcher Aufgabe wir uns nun beschäftigen werden.

§ 4. Es ist klar, daß eine kosmische Staubwolke, deren Komponenten, die wir im folgenden stets als *Steine* bezeichnen werden, in relativer gegenseitiger Ruhe sich befinden, keine Beständigkeit haben kann. Gegenseitige Anziehungskraft würde die Steine in einem oder mehreren Attraktionszentren ansammeln. Bei der Behandlung dieser Gebilde ist aber mit solchen Allgemeinbetrachtungen wenig gedient; es muß sich in erster Linie stets darum handeln, die in Betracht kommenden Massen, Zeiten, Geschwindigkeiten usw. wenigstens der Größenordnung nach abzuschätzen; dazu dienen einfachst konstruierte Fälle mit Abmessungen, die durch die Kenntnis unseres Planetensystems und der nächsten Fixsternwelt zulässig erscheinen. Untersuchen wir das Zusammenstürzen einer Staubwolke aus ruhenden Steinen.

Die Wolke von der Masse M bestehe aus N gleich großen Steinen von der Masse m , als Kugel vom Radius R so aufgebaut, daß die Steine sich an den Ecken gleich großer Würfel von der Kantenlänge λ befinden. Bei genügend großer Anzahl derselben können wir die Dichte ρ der Wolke einführen und der gegenseitige Abstand der Steine berechnet sich aus Formel (232) zu $\lambda = \sqrt[3]{\frac{m}{\rho}}$. Ein Stein im Abstande r vom Zentrum wird von einer Masse $M = \frac{4\pi r^3 \rho}{3}$ mit der Kraft $-\frac{GM}{r^2}$ nach dem Zentrum gezogen; die Beschleunigung, die er erleidet, ist deshalb $-\frac{4\pi G r \rho}{3}$. Der Weg eines jeden Steines ist zentral gerichtet und proportional seinem Abstande r . Daraus folgt: *Die Kontraktion der Wolke erfolgt gleichförmig, wie die einer polytropen Gaskugel $n < 5$* (vgl. S. 71), *und niemals kommt es zum Zusammenstoß zweier Steine, außer im Zentrum*, wenn wir von den Lineardimensionen der Steine absehen.

Berechnen wir die zum Zusammenstürzen notwendige Zeit.

Geht ein Stein aus dem Abstande r_0 während dieser Kontraktion nach dem Abstande r , so ist die Differenz der hier geltenden Schwere-Potentiale $G m \frac{4\pi r_0^3 \rho}{3} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$ Erg. Diese Arbeit wird in kinetische Energie umgesetzt, und befand sich der Stein in r_0 in Ruhe, so ist seine Geschwindigkeit V in r

$$(239) \quad V = \sqrt{\frac{8\pi G r_0^3 \rho}{3} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0} \left(\frac{r_0}{r} - 1 \right)} \text{ cent sek}^{-1}.$$

Daraus ergibt sich für t die Differentialbeziehung

$$dt = \sqrt{\frac{r_0}{2GM}} \frac{dr}{\sqrt{\frac{r_0}{r} - 1}},$$

und führen wir ein

$$\frac{r}{r_0} = \sin^2 \vartheta,$$

so erhalten wir für die Zeit des Überganges leicht

$$(240) \quad t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r_0^3}{2GM}} \left[1 - \frac{2\vartheta}{\pi} \left(1 - \frac{\sin 2\vartheta}{2\vartheta} \right) \right] \\ = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3\pi}{2G\rho}} \left[1 - \frac{2\vartheta}{\pi} \left(1 - \frac{\sin 2\vartheta}{2\vartheta} \right) \right] \text{ sek.}$$

Die Zeit bis zur Ankunft im Mittelpunkt

$$(241) \quad T = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r_0^3}{2GM}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3\pi}{2G\rho}} \text{ sek.},$$

gleich für alle Steine, ist die zum Zusammensturze nötige Zeit.

Wir berechnen diese für die Staubmasse, welche in früheren Zeiten den Raum unseres Planetensystems eingenommen haben soll. Wir nehmen an, ihre Masse sei gleich der Sonnenmasse, (die Masse der vereinigten Planeten beträgt nur einige Prozente derselben), und gleichförmig verteilt in einer Kugel von 50 Erdbahnradien Radius, also über die Neptunbahn, deren Radius = 30 Erdbahnradien, hinreichend. Die Dichte ρ dieser Kugel ergibt sich zu $\rho = 1,11 \cdot 10^{-12}$ gramm cent⁻³; und beträgt die Masse m eines Steines 1 Gramm, so ist der gegenseitige Abstand λ derselben $9,66 \cdot 10^8$ cent, und wächst mit m im Verhältnis $m^{\frac{1}{3}}$. Für T ergibt sich

$$T = 1,99 \cdot 10^9 \text{ sek} = 63,4 \text{ Jahre},$$

eine Zeit von einer Größenordnung, daß wir unmöglich von einer Ansammlung ruhender Steine ausgehen können.

§ 5. Wir machen*) noch eine Anwendung der entwickelten Formeln, indem wir den ganzen Fixsternkomplex als kosmische Staubwolke behandeln. Wir nehmen an, die Fixsterne seien untergebracht in einer Kugel, deren Radius einer Parallaxe $0,001''$ oder $3,09 \cdot 10^{21}$ cent Länge entspricht. Das Licht braucht zum Durchlaufen dieser Strecke etwa 3000 Jahre. Die Anzahl der Sterne nehmen wir zu 1000 Millionen an. Diese Zahlen entsprechen der Größenordnung nach unsrern heutigen Anschauungen. Die Sterne sollen den Raum in gleicher Dichte erfüllen, die Masse eines jeden soll gleich der Sonnenmasse sein. Dies gibt eine Dichte $\rho = 1,57 \cdot 10^{-23}$ gramm cent⁻³; und der Abstand λ zweier Sterne beträgt $4,98 \cdot 10^{18}$ cent, einer Parallaxe von ungefähr $1''$ entsprechend. Unter diesen Annahmen ergibt sich

$$T = 5,31 \cdot 10^{14} \text{ sek} = 16,8 \text{ Millionen Jahre}.$$

Berechnen wir noch eine der auftretenden Geschwindigkeiten. Die Kugel sei bis auf $20,7$ Erdbahndurchmesser zusammengeschrumpft; sie erstreckt sich dann bis zur Uranusbahn; ihre Dichte würde $\rho = 1,57 \cdot 10^{-2}$ gramm cent⁻³ betragen, so daß der ganze Fixsternkomplex noch hinreichend in ihr Platz findet. In diesem Moment ist $\frac{r_0}{r} = 10^7$ und $\sin \Theta = 3,16 \cdot 10^{-4} = \Theta$. Dann geben (239) und (240)

$$V = 2,89 \cdot 10^{10} \text{ cent sek}^{-1}$$

und

$$t = 5,31 \cdot 10^{14} - 7,11 \cdot 10^8 \text{ sek}.$$

*) Lord Kelvin. Baltimore Lectures. Appendix. On the Clustering of gravitational Matter in any Part of the Universum. pag. 532. 1904.

Die Begrenzung der Kugel hat Lichtgeschwindigkeit erreicht, der Kontraktionsprozeß hat 16,8 Millionen Jahre gedauert, weniger $7,11 \cdot 10^8$ Sekunden. Etwa zwei Stunden später wie die Riesenkugel in sich selbst zusammenstürzt.

Während Lord Kelvin diese Zahlen benutzt, um die bei Fixsternen beobachteten Geschwindigkeiten zu erklären und zu günstigen Ergebnissen zu kommen glaubt,* scheint mir vielmehr die berechnete Lebensdauer $T = 16,8$ Millionen Jahren von falscher Größenordnung zu sein. Um die Entwicklungsperiode der Himmelskörper der Zeit nach abzuschätzen, haben wir vorderhand kein anderes Hilfsmittel, als uns als untere Grenze zu stützen auf die Zeiten, welche die Geologie für die Entwicklung der Beobachtung zugänglichen äußeren Schichten der Erde notwendig fordert. Darnach dürften seit der Bildung der silurischen Schichten etwa 100 Millionen Jahre verflossen sein. Da aber in jenen Schichten bereits verhältnismäßig hochentwickelte Lebewesen existierten, die Erdoberfläche in früheren Zeiten bereits bewohnbar gewesen sein wird, so wird man schwerlich zu hoch greifen, wenn man als untere Grenze für das Vorhandensein der Erde als selbständiger Himmelskörper eine Zeitdauer von der Größenordnung 1000 Millionen Jahre annimmt. Damit stehen die oben ermittelten 16,8 Millionen Jahre für das Vorhandensein der ganzen Fixsternwelt in grellem Widerspruch. Dieser ist wohl weniger darin begründet, daß wir die Anzahl der Masse und der Distanzen in gänzlich falscher Größenordnung angesetzt haben, oder daß das Newtonsche Gravitationsgesetz für große Entfernungen nicht der hinreichend exakte Ausdruck der Kräfte ist; er findet seine Lösung größtenteils darin, daß wir von einer ursprünglichen Eigenbewegung der Fixsterne abgesehen haben.

§ 6. Die kosmischen Staubmassen, die als beständige Gebilde nähere Untersuchung verdienen, müssen aus durcheinander schwirrenden Steinen bestehen. Nun ist es selbstverständlich unmöglich, den Flug jedes einzelnen Steines zu verfolgen. Allein auch in der kinetischen Gastheorie muß nicht jedes Molekül einzeln behandelt werden. Sind die oben (§ 2) erwähnten drei Gesetze erfüllt, so kann die statistische Behandlungsweise Platz greifen. Es gibt dann stets eine Geschwindigkeit \bar{V} , um welche sich die wirklich vorhandenen Geschwindigkeiten der Moleküle nach dem Maxwellschen Verteilungs-

*) Lord Kelvin. Baltimore Lectures. Seite 270—275. 1901.

gesetze gruppieren, und an Stelle des Aggregates diskreter Moleküle kann ein den Raum kontinuierlich erfüllendes Medium gesetzt werden, das der Zustandsgleichung

$$\frac{p}{\varrho} = HT = \frac{1}{3} \bar{V}^2 \text{ cent}^2 \text{ sek}^{-2}$$

gehoreht. Bauen wir Gaskugeln, so rechnen wir mit diesem Fluidum und nicht mit den einzelnen Molekülen. Ebenso günstig können auch die Verhältnisse in kosmischen Staubmassen liegen. Ist die Masse derselben groß gegen die Masse des einzelnen Steines, der Raum, den sie erfüllt, groß gegen den Würfel, an dessen Ecken durchschnittlich Steine sich befinden, legen diese ihren freien Weg zurück in Zeiten, klein gegen die in Betracht kommende Zeit, und ist schließlich die Geschwindigkeit so groß und die Masse der einzelnen Steine so klein, daß bei gegenseitiger Einwirkung nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz keine wesentliche Ablenkung aus ihrer Bahn stattfindet, außer in Momenten großer Annäherung, so kann auch hier die statistische Behandlungsweise Platz greifen. Wieder läßt sich eine mittlere Geschwindigkeit \bar{V} finden, um welche sich schließlich die Geschwindigkeiten der Steine nach dem Maxwell-schen Verteilungsgesetz anordnen, und an Stelle des Steinaggregates kann für die analytische Behandlungsweise ein den Raum v in einer Dichte $\varrho = \frac{M}{v}$ gramm cent⁻³ erfüllendes Kontinuum gesetzt werden, das der Zustandsgleichung

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{1}{3} \bar{V}^2 \text{ cent}^2 \text{ sek}^{-2}$$

gehoreht. Daß diese Verhältnisse vom mathematischen Standpunkte aus möglich sind, ist ohne weiteres klar. Die Hauptaufgabe besteht aber darin, dieselben auch quantitativ festzustellen, um entscheiden zu können, ob die so gebauten Staubmassen in dem uns der Größenordnung nach bekannten Raume mit Masse annehmbarer Menge bei nicht unwahrscheinlichen Geschwindigkeiten möglich sind. Diese Untersuchung ist zuerst von G. H. Darwin*) angestellt, dessen Gedankengänge wir im wesentlichen folgen werden.

§ 7. Die Gastheorie spricht von einem Zusammenstoß, wenn ein Molekül in die Aktionsphäre eines andern eintritt; kommt es dabei zu wirklichem Zusammenstoße, so werden dieselben als voll-

*) G. H. Darwin, On the Mechanical Conditions of a Swarm of Meteorites, and on Theories of Cosmogony. Phil. Trans. of the Roy. Soc. of London. T. 180. pag. 1. 1889.

kommen elastisch angenommen. Diese Annahme ist für den Zusammenprall zweier Steine nicht mehr zulässig; es wird stets ein Verlust kinetischer Energie stattfinden. Derselbe ist, wie wir sehen werden, notwendig, damit sich die Staubmasse kontrahieren kann. Betrachten wir zuerst den zentralen Zusammenstoß zweier Steine, die wir uns stets als Kugeln vorstellen; ihre Masse sei je ein Kilogramm. In einem später durchgerechneten Beispiel werden wir die Geschwindigkeit \bar{V} der Steine gleich $5 \cdot 10^5$ cent sek⁻¹ (fünf Kilometer pro Sekunde) finden. Die mittlere Relativgeschwindigkeit zweier Steine gegeneinander beträgt dann $5\sqrt{2}$, genügend genau sieben Kilometer pro Sekunde*), und die kinetische Energie der Relativbewegung beider Steine $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^8 \cdot (3,5 \cdot 10^5)^2 = 1,2 \cdot 10^{14}$ Erg, gleichwertig mit $2,8 \cdot 10^6$ Kalorien. Bei Stahlkugeln von demselben Gewichte (einem Radius von etwa 3 cent), mit derselben Geschwindigkeit zusammentreffend, beträgt die Stoßdauer 0,00003 Sekunden**) Trotz der sehr unvollkommenen Elastizität der Steine wird diese Zeit auch hier sehr klein sein, und die beim Zusammenstoße entwickelte Wärme in erster Linie den der Stoßstelle benachbarten Massen zugute kommen. Die Wärmekapazität der hauptsächlich aus Eisen gedachten Steine ist etwa $\frac{1}{7}$; zur Erhitzung eines Grammes bis zum Schmelzpunkt bei etwa 1500° ($T = 1800$) werden gegen 300 Kalorien verbraucht. Die Verdampfungswärme des Eisens ist unbekannt; nimmt man sie von gleicher Größe an, wie etwa die des Platins (27 Kalorien) und die des Quecksilbers (62 Kalorien), so genügen etwa $4 \cdot 10^2$ Kalorien zum Verdampfen eines Grammes; und mit einer Anzahl Kalorien von der Größenordnung 10^4 können einige Gramm in Dämpfe von außerordentlich hoher Temperatur verwandelt werden, in hellem Lichte leuchtend. Auf diese Weise würde von den $2,8 \cdot 10^6$ Kalorien nur ein kleiner Teil, aber genügend um vorübergehend helles Leuchten zu erzeugen, verbraucht, und mit wenig geänderter Geschwindigkeit könnten die Steine sich wieder trennen. Ähnlich werden sich die Verhältnisse bei exzentrischem Zusammenstoße abspielen; und an der Berührungsstelle werden Massen in Dampf verwandelt. Da stets nur ein kleiner Teil der kinetischen Energie dazu verzehrt wird, können wir die Steine als in hohem Grade elastisch behandeln.

Bei diesen Zusammenstößen, namentlich wenn sie sich zentral

*) O. E. Meyer, Die kinetische Theorie der Gase. Seite 259. 1899.

**) H. Hertz, Über die Berührung elastischer Körper. Ges. Abhandlungen I. pag. 173. 1895.

ereignen, werden die Steine oft zertrümmert werden und scheinbar müßte die Staubmasse sich schließlich zu feinem Staube zerreiben. Daß aber Steine von beträchtlicher Größe vorhanden sind, zeigen die zur Erde fallenden Meteoriten. Wir haben eben zu berücksichtigen, daß diese gefährlichen Zusammenstöße für den einzelnen Stein selten eintreten, und daß die Gefahr der Zertrümmerung um so geringer ist, je kleiner der Stein geworden. Dazu kommt noch, daß die verdampften Massen sich an andern, kalten Steinen wieder niederschlagen werden. Zertrümmern und Verdampfen verkleinert die Steine, Kondensation vergrößert sie; wir nehmen an, daß in den Staubmassen zwischen beiden Ursachen annähernd Gleichgewicht eingetreten ist, so daß wir von dieser Massenveränderung absehen können. Wir behandeln also die Staubmasse als bestehend aus gleich großen, vollkommen elastischen, kugelförmigen Steinen.

§ 8. Wir fragen, wie groß wir den *Aktionsradius* eines Steines anzunehmen haben. Wir bestimmen dazu die Maximaldistanz, in welcher zwei Steine, aneinander vorbeifliegend, durch gegenseitige Anziehung noch merklich aus ihrer geradlinigen Bahn abgelenkt werden. Wir lassen dazu die beiden Steinkugeln, vom Durchmesser s cent, so nahe aneinander vorbeigehen, daß sie sich gerade streifen; der Abstand ihrer Zentren ist dann gleich s . Die Steine beschreiben dann Hyperbeln; die Geschwindigkeit in großer Entfernung von einander sei gleich \bar{V} . Der eine Stein befindet sich im Brennpunkt der Hyperbel, mit der Halbachse a und der Exzentrizität ϵ , die der andere Stein um ihn beschreibt. Ist die Hyperbel sehr flach, ϵ sehr groß, so ist der Winkel zwischen ihren Asymptoten $\frac{1}{\epsilon}$, und dies ist die Ablenkung, die der Stein erleidet. Der Abstand der Steine im Augenblick der Berührung ist dann

$$s = a(\epsilon - 1) \text{ cent.}$$

Ist die Geschwindigkeit der Steine \bar{V} , so ist ihre Relativgeschwindigkeit $\bar{V}\sqrt{2}$, und das Gesetz der Zentralbewegung liefert

$$2\bar{V}^2 = \frac{Gm}{a} \text{ cent}^2 \text{ sek}^{-2},$$

so daß wir haben

$$(a) \quad \epsilon = \frac{2\bar{V}^2 s}{Gm} + 1.$$

Wir werden sehen, daß, wenn M die Masse der Staubwolke, R deren Radius bedeutet, wir die Beziehung haben

$$(b) \quad \bar{V}^2 = \lambda \frac{G \mathfrak{M}}{\mathfrak{R}} \text{ cent}^2 \text{ sek}^{-2},$$

worin λ durch den inneren Bau der Kugel bestimmt ist; in einem Zahlenbeispiel, das wir durchrechnen werden, ergibt sich $\lambda = 3.039688$, nahe gleich $\frac{6}{5}$. Dann ergibt sich weiter

$$(c) \quad \varepsilon = 2 \lambda \frac{\mathfrak{M}_s}{m \mathfrak{R}} + 1.$$

Vernachlässigen wir 1 gegen das erste Glied und beachten, daß die Ablenkung $\frac{1}{\varepsilon}$ in Graden gemessen $= \frac{180}{\pi \varepsilon}$ ist, so ergibt sich die

$$(d) \quad \text{Ablenkung} = \frac{180}{2 \pi \lambda} \frac{m \mathfrak{R}}{\mathfrak{M}_s} \cdot \text{Grade.}$$

Bezeichnen wir die Dichte eines Steines mit δ , so ist

$$m = \frac{1}{6} \pi \delta s^3 \text{ gramm}$$

und die

$$(e) \quad \text{Ablenkung} = \frac{15}{\lambda} \cdot \frac{\delta \mathfrak{M}_s^2}{\mathfrak{M}} \cdot \text{Grade.}$$

Wir nehmen eine Ablenkung von 10^6 , also sehr klein, an. Dazu ist nach (e) ein Durchmesser der Steine

$$(f) \quad s = \sqrt[3]{\frac{12 \mathfrak{M}}{3 \mathfrak{R} \delta}} \text{ cent}$$

erforderlich. Wir nehmen zur Abschätzung des Durchmessers s $\mathfrak{M} = \text{Sonnenmasse}$, abgerundet 10^{33} Gramm, $\mathfrak{R} = \text{Radius der Neptunbahn} = 4.5 \cdot 10^{14}$ cent; und setzen $\delta = 10 \text{ gramm cent}^{-3}$; so erhalten wir

$$s = \sqrt[3]{\frac{6}{5} \cdot \frac{2 \cdot 10^{33}}{3.4 \cdot 5 \cdot 10^{14} \cdot 10}} = 4.22 \cdot 10^8 \text{ cent}$$

und die Masse eines Steines

$$m = \frac{1}{6} \pi \delta s^3 = 3.92 \cdot 10^{26} \text{ gramm.}$$

Dies ist $\frac{1}{15}$ Erdmasse. Wenn also mit der in Staubmassen vorkommenden Geschwindigkeit zwei Steine von $\frac{1}{15}$ Erdmasse gerade streifend, also in größtmöglicher Annäherung, sich passieren, so beträgt die durch gegenseitige Anziehung erfolgende Ablenkung nur 10^6 . Bei den ungleich kleineren Massen, aus denen wir eine Staubmasse aufgebaut denken, wird diese Ablenkung unmerklich werden. *Wir sind demnach berechtigt, den Aktionsradius eines Steines gleich seinem Durchmesser s zu setzen.*

§ 9. Wir haben gesehen, unter welchen Bedingungen wir an Stelle einer Staubmasse eine den Raum kontinuierlich erfüllende Flüssigkeit setzen können, die der Zustandsgleichung $\frac{p}{\rho} = \frac{1}{3} \bar{V}^2$ cent² sek⁻² gehorcht und können nun daran gehen, aus derselben Kugeln zu bauen, deren Dichtigkeit nur Funktion des Abstandes vom Zentrum ist. Allein diese Aufgabe haben wir bereits für eine unendlich große Anzahl von Kugeln gelöst. Jeder polytropen Gaskugel entspricht eine kugelförmige Staubmasse von gleicher Gesamtmasse und Radius, gleichem Druck und gleicher Dichte in gleichem Abstande vom Zentrum, und in welcher wir die Verteilung der mittleren lebendigen Kraft der Steine längs des Radius erhalten, wenn wir setzen (Gleichung (236))

$$\bar{V}^2 = 3 HT \text{ cent}^2 \text{ sek}^{-2}.$$

§ 10. Ehe wir dazu übergehen, einige Beispiele durchzurechnen, schalten wir eine von G. H. Darwin herrührende Zwischenbetrachtung ein, die Bezug hat auf die Stabilität rotierender, kugelförmiger Staubmassen. Die Stabilität rotierender Gaskugeln ist noch nicht untersucht worden; man ist darauf beschränkt, die entsprechenden Verhältnisse, die sich beim Studium von Kugeln aus inkompressibler Flüssigkeit ergeben, herüberzunehmen. Diese Kugeln können, wie Poincaré gezeigt hat, in Schwingungen geraten, wodurch ihre Stabilität aufhört. Namentlich ist es die Grundschiwingung, welche Instabilität zur Folge hat. Die Periode der Grundschiwingung ist dieselbe, wie die Umlaufszeit \mathfrak{T}_s eines Satelliten an der Oberfläche der Kugel, also

$$\mathfrak{T}_s = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}} = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}} \text{ sek.}$$

Soll die Staubmasse durch ein Kontinuum ersetzt werden können, so muß jedenfalls die Zeit \mathfrak{T} zwischen zwei Zusammenstößen klein sein gegen diese Periode. Mit Berücksichtigung der Gleichungen (232) und (238) erhalten wir

$$(242) \quad \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}_s} = \frac{1}{8\pi \sqrt{\pi s^2 \rho}} \sqrt{\frac{g}{HTr}}.$$

(Darwin bezeichnet dies Kriterium mit $\frac{A}{C}$.)

Damit wir die Gleichung (242) ansetzen können, darf die Geschwindigkeit \bar{V} eines Steines zwischen zwei Zusammenstößen nicht dadurch merklich geändert werden, daß in der Zwischenzeit der Stein dem Attraktionszentrum näher fällt; oder anders ausgedrückt, die Strecke D , die er in der Zeit \mathfrak{T} dem Zentrum näher kommt, muß

klein sein gegen die freie Weglänge \mathfrak{L} . Nehmen wir auf der kurzen Strecke D den Wert g konstant an, so ist $D = \frac{1}{2}g\mathfrak{L}^2$, und mit Berücksichtigung von (237) und (238) erhalten wir das Verhältnis

$$(243) \quad \frac{D}{\mathfrak{L}} = \frac{1}{16\sqrt{2}} \cdot \frac{m}{s^2} \cdot \frac{g}{H T_e}.$$

Daß die beiden Kriterien, $\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{L}_0}$ und $\frac{D}{L}$ sehr klein, erfüllt sein müssen, und zwar an jeder Stelle der Kugel, läßt sich auch ohne Stabilitätsbetrachtungen einsehen. Denn die statistische Behandlungsweise, durch welche ein Gas oder eine Staubmasse als Kontinuum behandelt werden kann, läßt sich nur dann anwenden, wenn äußere Kräfte die Geschwindigkeitsverteilung nach dem Maxwellschen Gesetze (in bezug auf Richtung und Größe) nur um genügend kleine Beträge ändern. Dazu ist notwendig, daß diese beiden Kriterien erfüllt sind.

§ 11. Wir gehen dazu über, den Bau einiger kosmischen Staubmassen durchzurechnen. Bezuglich der anzunehmenden Massen und Lineardimensionen ist der Phantasie der weiteste Spielraum geboten. Da erscheint es zweckmäßig, dieselben jener Staubkugel anzupassen, die, wie oben erläutert, an Stelle des Kant-Laplaceschen Nebelballs gesetzt werden kann. Wir nehmen eine Kugel von der Masse der Sonne, $M = 1,9430 \cdot 10^{38}$ gramm; dieselbe soll sich über die Neptunbahn, (deren Radius = 30 Erdbahnradien), hinaus erstreckt haben, bis zu 44,563 Erdbahnradien. (Ich wähle diese Zahl, um meine Berechnung mit derjenigen eines Beispiels von G. H. Darwin vergleichbar zu machen. Derselbe behandelt nur den Fall, den wir unter III anführen werden, und setzt den Radius des isothermen Kernes = 16 Erdbahnradien; dadurch ist die äußere Begrenzung zu 44,563 Erdbahnradien bestimmt. Darwin hat sich darauf beschränkt, durch exakte, aber überaus mühsame, mechanische Quadratur die Differentialgleichung der Gaskugel nur für den Fall auszuwerten, den wir (Seite 191) als isotherm adiabatisches System bezeichnet haben; wir sind aber in der Lage, jede der im ersten Teile durchgerechneten polytropen Gaskugeln in die entsprechende Staubmasse umzuwandeln.) Auf diese Kugel haben wir dann die beiden Kriterien (242) und (243) anzuwenden, die den Entscheid liefern, ob diese hydrodynamische Behandlungsweise der diskontinuierlich verteilten Massen gestattet ist. Dazu haben wir die Massen und Dimensionen der Steine festzusetzen. Wir haben $m = \frac{4}{3}\pi\delta\left(\frac{s}{2}\right)^3$. Da eine große Zahl der auf die Erde niederfallenden Meteoriten überaus reich an Eisen ist, setzen wir die Dichte δ

der des Eisens ähnlich, indem wir annehmen $\delta = 5,9683$. Dadurch erhalten wir (mit Darwin)

$$m = \frac{25}{8} s^3 = 3 \frac{1}{8} s^3 \text{ gramm.}$$

Setzen wir $s = 1$ cent, 10 cent, 100 cent, so wird $m = 3 \frac{1}{8}$ gramm, $3 \frac{1}{8}$ Kilogramm, $3 \frac{1}{8}$ Tonnen. Wir nehmen $s = 1$ cent an, haben also Steine von $3 \frac{1}{8}$ Gramm Gewicht und können für andere s leicht umrechnen. Ferner ergibt sich der in vorstehenden Gleichungen auftretende Faktor

$$\frac{m}{s^3} = \frac{25}{8} s \text{ gramm cent}^{-2}.$$

I. Der Fall $n = 0; \varrho = \text{konst.}$

Die Staubmasse entspricht der polytropen Gaskugel $n = 0$, $\varrho = \text{konst}$, aufgebaut aus einatomigem Gase. Ihre Dichte ist konstant, um an der Oberfläche unstetig auf Null herabzusinken; der durchschnittliche Abstand λ der Steine und die freie Weglänge (Gleichung (237)) ist durch die ganze Kugel konstant. Wir finden

$$\varrho = 1,5687 \cdot 10^{-12} \text{ gramm cent}^{-3}$$

$$\lambda = 4,4840 \cdot 10^{11} \text{ cent.}$$

Um die Verteilung des mittleren Geschwindigkeitsquadrates \bar{V}^2 zu finden, benutzen wir die Seite 91 gegebene Lösung der Differentialgleichung (I) für $n = 0$

$$T = T_0 - \frac{\alpha^2 r^2}{6}$$

$$\alpha^2 = \frac{4\pi G \varrho}{H} \text{ cent}^{-2}$$

und erhalten, da $\bar{V}^2 = 3HT$ ist,

$$\bar{V}^2 = \bar{V}_0^2 - 2\pi G \varrho r^2.$$

Um den noch unbekannten Wert \bar{V}_0^2 im Mittelpunkte zu finden, beachten wir, daß der Radius R der ganzen Kugel durch die Bedingung $\bar{V}^2 = 0$ gegeben ist zu $R = \bar{V}_0 \sqrt{\frac{1}{2\pi G \varrho}}$ und können daraus \bar{V}_0 berechnen. Damit ist der Bau der Masse vollständig bekannt. Wir bringen denselben in folgender Tabelle 16 zur Darstellung.

Tabelle 16. $n = 0$.

Abstand r vom Zentrum in cm	0	$2,6 \cdot 10^{-13}$	$1,1960 \cdot 10^{-4}$	$1,8653 \cdot 10^{14}$	$2,3920 \cdot 10^{14}$	$2,6737 \cdot 10^{14}$	$4,0105 \cdot 10^{14}$	$5,9474 \cdot 10^{14}$	$6,0156 \cdot 10^{14}$	$6,6623 \cdot 10^{14}$	b
Abstand r vom Zentrum in Radien der Erdbahn	0	$1,7795$	$8,0070$	$12,465$	16	$17,8840$	$26,826$	$35,786$	$40,239$	$44,663$	b
Abstand vom Zentrum in Bruchteilen des ganzen Radius	0	$0,03993$	$0,17952$	$0,27954$	$0,35904$	$0,40138$	$0,60196$	$0,80,68$	$0,90296$	1	1
Eingeschlossene Masse M in Grammen	0	$1,8873 \cdot 10^{20}$	$1,1841 \cdot 10^{19}$	$4,2439 \cdot 10^{18}$	$8,9890 \cdot 10^{17}$	$1,2559 \cdot 10^{17}$	$4,2883 \cdot 10^{17}$	$1,0047 \cdot 10^{18}$	$1,4305 \cdot 10^{18}$	$1,9450 \cdot 10^{18}$	a
Dichte ρ gramm cent $^{-3}$		$1,5687 \cdot 10^{-13}$	$1,5687$	$a b^{-2}$							
Beschleunigung g cent sek $^{-2}$	0	$1,1638 \cdot 10^{-5}$	$5,2820 \cdot 10^{-5}$	$8,1470 \cdot 10^{-5}$	$1,0464 \cdot 10^{-4}$	$1,686 \cdot 10^{-4}$	$1,764 \cdot 10^{-4}$	$2,3393 \cdot 10^{-4}$	$2,6316 \cdot 10^{-4}$	$2,9144 \cdot 10^{-4}$	
Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat \bar{v} cent sek $^{-1}$		$5,3969 \cdot 10^{-5}$	$5,3950 \cdot 10^{-5}$	$5,1816 \cdot 10^{-5}$	$5,0370 \cdot 10^{-5}$	$4,9490 \cdot 10^{-5}$	$4,8095 \cdot 10^{-5}$	$3,8190 \cdot 10^{-5}$	$2,8190 \cdot 10^{-5}$	0	$a^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}$
Mittlere freie Weglänge L cent		$4,4840 \cdot 10^{11}$	$4,4840 \cdot 10^{11}$	$a^{-1} b^3 c$							
Mittlere freie Zeit Σ sek		$9,0182 \cdot 10^5$	$9,0218 \cdot 10^5$	$9,1670 \cdot 10^5$	$9,3998 \cdot 10^5$	$9,6622 \cdot 10^5$	$9,8460 \cdot 10^5$	$1,1298 \cdot 10^6$	$1,5120 \cdot 10^6$	∞	$a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{7}{3}} c$
Kriterium $\frac{D}{L}$	0	$1,0551 \cdot 10^{-5}$	$4,9082 \cdot 10^{-5}$	$8,0145 \cdot 10^{-4}$	$1,0893 \cdot 10^{-4}$	$1,2644 \cdot 10^{-4}$	$2,4951 \cdot 10^{-4}$	$5,9650 \cdot 10^{-4}$	$1,2025 \cdot 10^{-3}$	∞	$a^{-1} b^2 c$
Kriterium $\frac{\Sigma}{g}$	0	$9,4962 \cdot 10^{-5}$	$9,6499 \cdot 10^{-5}$	$8,875 \cdot 10^{-5}$	$1,0171 \cdot 10^{-4}$	$1,0365 \cdot 10^{-4}$	$1,1888 \cdot 10^{-4}$	$1,5916 \cdot 10^{-4}$	$2,2092 \cdot 10^{-4}$	∞	$a^{-1} b^2 c$

Andern sich die Masse um das a -fache, der Radius um das b -fache, der Staudurchmesser um das c -fache ihres Wertes, so sind die Zahlen jeder Horizontalreihe mit dem in der letzten Kolonne angegebenen Betrag zu multiplizieren.

Tabelle 17. $n = \frac{3}{2}$

Abstand vom Zentrum in cent	0	$9,1095 \cdot 10^{13}$	$1,8217 \cdot 10^{14}$	$2,7526 \cdot 10^{14}$	$3,6455 \cdot 10^{14}$	$4,5544 \cdot 10^{14}$	$5,4653 \cdot 10^{14}$	$6,3762 \cdot 10^{14}$	$6,6653 \cdot 10^{14}$	b	
Abstand r vom Zentrum in Radien der Erdbahn	0	$6,0983$	$12,186$	$18,279$	$24,372$	$30,465$	$36,498$	$42,591$	$44,563$	b	
Abstand vom Zentrum in Bruchteilen des Gesamtradius	0	$0,13672$	$0,27344$	$0,41016$	$0,54688$	$0,68360$	$0,82052$	$0,95704$	1	1	
Eingeschlossene Masse M in Grammen		$2,8691 \cdot 10^{11}$	$2,0545 \cdot 10^{12}$	$5,7929 \cdot 10^{12}$	$1,0644 \cdot 10^{13}$	$1,5251 \cdot 10^{13}$	$1,8306 \cdot 10^{13}$	$1,9462 \cdot 10^{13}$	$1,9430 \cdot 10^{13}$	$'a$	
Dichte ρ gramm cent $^{-3}$		$9,4126 \cdot 10^{-13}$	$8,8415 \cdot 10^{-13}$	$7,8184 \cdot 10^{-13}$	$5,2936 \cdot 10^{-13}$	$3,2850 \cdot 10^{-13}$	$1,6783 \cdot 10^{-13}$	$6,0080 \cdot 10^{-13}$	$5,3282 \cdot 10^{-13}$	$a b^{-3}$	
Beschleunigung g cent sek $^{-2}$	0	$2,8013 \cdot 10^{-4}$	$4,1817 \cdot 10^{-4}$	$5,1298 \cdot 10^{-4}$	$5,8982 \cdot 10^{-4}$	$4,0805 \cdot 10^{-4}$	$3,1774 \cdot 10^{-4}$	$2,9144 \cdot 10^{-4}$	$a b^{-2}$		
Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat \bar{v} cent sek $^{-1}$		$5,5999 \cdot 10^5$	$5,4841 \cdot 10^5$	$5,1481 \cdot 10^5$	$4,6292 \cdot 10^5$	$3,9467 \cdot 10^5$	$3,1018 \cdot 10^5$	$2,3580 \cdot 10^5$	$1,9227 \cdot 10^5$	0	$a^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}$
Mittlere freie Weglänge L cent		$7,4728 \cdot 10^0$	$7,9556 \cdot 10^0$	$9,6179 \cdot 10^0$	$1,3987 \cdot 10^1$	$2,1347 \cdot 10^1$	$4,9110 \cdot 10^1$	$1,1707 \cdot 10^2$	$1,1991 \cdot 10^2$	∞	$a^{-1} b^3 c$
Mittlere freie Zeit Σ sek		$1,4484 \cdot 10^5$	$1,5745 \cdot 10^5$	$2,0277 \cdot 10^5$	$8,1920 \cdot 10^5$	$5,8707 \cdot 10^5$	$1,4453 \cdot 10^6$	$5,6779 \cdot 10^6$	$1,9777 \cdot 10^6$	∞	$a^{-\frac{3}{2}} b^{\frac{7}{3}} c$
Kriterium $\frac{D}{L}$	0	$3,5872 \cdot 10^{-5}$	$8,8102 \cdot 10^{-5}$	$2,1575 \cdot 10^{-4}$	$4,9098 \cdot 10^{-4}$	$1,2166 \cdot 10^{-3}$	$5,6184 \cdot 10^{-3}$	$2,2471 \cdot 10^{-1}$	∞	$a^{-1} b^2 c$	
Kriterium $\frac{\Sigma}{g}$	0	$3,9840 \cdot 10^{-5}$	$4,8643 \cdot 10^{-5}$	$6,6487 \cdot 10^{-5}$	$1,1311 \cdot 10^{-4}$	$2,3814 \cdot 10^{-4}$	$7,8086 \cdot 10^{-4}$	$1,4682 \cdot 10^{-2}$	∞	$a^{-1} b^2 c$	

Andern sich die Masse um das a -fache, der Radius um das b -fache, der Staudurchmesser um das c -fache ihrer Größe, so sind die Zahlen jeder Horizontalreihe mit den in der letzten Kolonne angegebenen Werten zu multiplizieren.

(Die mittleren Entferungen der Planeten von der Sonne betragen bei Merkur 0,39, Venus 0,72, Erde 1, Mars 1,52, Jupiter 5,20, Saturn 9,54, Uranus 19,28, Neptun 30,05 astronomische Einheiten.)

Die mittlere freie Weglänge beträgt $4,4840 \cdot 10^{11}$ cent; dies sind nur $\frac{1}{33}$ Erdbahnradius oder 12 Abstände Mond-Erde; der Gesamt-radius ist 1500 mal größer wie diese Strecke. In Gasen von Normal-dichte ist die freie Weglänge der Moleküle von der Größenordnung 10^{-5} cent; die Staubmasse müßten wir durch ein Luftkugelchen von $1,5 \cdot 10^{-2}$ cent Radius zur Darstellung bringen, damit in beiden die Lineardimensionen in gleichem Verhältnisse stehen zur freien Weg-länge. In dieser Beziehung können Luftkugelchen und Staubmasse mit gleicher Genauigkeit als Kontinua behandelt werden. Im Zen-trum der Kugel, der Stelle lebhaftester Bewegung, beträgt die mittlere freie Zeit $9,0182 \cdot 10^6$ Sekunden. Hier erleidet ein Stein ungefähr alle 10 Tage einen Zusammenstoß bei einer Fluggeschwindigkeit im Mittel fünf Kilometer pro Sekunde. Würden die Steine $3\frac{1}{8}$ Kilogramm wiegen, so würde der freie Weg um das zehnfache zunehmen und die Zu-sammenstöße zehnmal weniger häufig eintreten. Die kritischen Werte $\frac{D}{L}$ und $\frac{\tau}{\tau_0}$ sind noch im Abstande 0,9 \mathfrak{R} von der Größenordnung 10^{-3} resp. 10^{-4} , so daß bis hier die hydrodynamische Behandlung der Staubmasse noch zulässig erscheint. Nimmt man die Größen-ordnung 10^{-2} als größten zulässigen Wert dieser Quotienten an, so könnten Steine von $3\frac{1}{8}$ Kilogramm Gewicht ($c = 10$) gerade noch zugelassen werden; bei $3\frac{1}{8}$ Tonnen Gewicht aber würde von $r = 0,4 \mathfrak{R}$ an die statistische Behandlung versagen.

II. Der Fall $n = \frac{3}{2}$.

Die Staubmasse entspricht einer adiabatischen Gaskugel aus ein-atomigem Gase, $k = \alpha = \frac{5}{3}$; so daß wir auch von einer kosmischen Staubmasse als Kugel im adiabatischen Gleichgewichte sprechen können. Würden eine genügend große Anzahl Steine von einer starren Kugelhülle umschlossen, genügend lange durcheinander ge-wirbelt werden, so würde eine adiabatische Staubkugel resultieren. Ihr Bau ist nach Tabelle 4 Seite 79 berechenbar, wenn die Aus-gangswerte bei $r_1 = 0$ bestimmt sind. Um die Mittelpunktsdichte

$$\varrho_0 = U^{\frac{3}{2}} \left(u_1^{\frac{3}{2}} - 1 \right)$$

zu finden, benutzen wir die kosmogenetische Flächengleichung (105)
 $\frac{e_0 \Re^3}{M} = 1,4325$ und finden

$$\varrho_0 = 9,4126 \cdot 10^{-12} \text{ gramm cent}^{-3}.$$

Dadurch ist der Zahlenwert von $U^{\frac{3}{2}} = 9,4126 \cdot 10^{-12}$ bestimmt, und die weiteren Werte von ϱ werden durch Multiplikation mit u_1^n gewonnen. Um \overline{V}_0^2 zu finden, benutzen wir die kosmogenetische Flächengleichung (107) $HT_0 \frac{\Re}{M} = 3,5843 \cdot 10^{-8} \text{ gramm}^{-1} \text{ sek}^{-2} \text{ cent}^3$ und finden

$$\overline{V}_0^2 = 3HT_0 = 3,1959 \cdot 10^{11} \text{ cent}^2 \text{ sek}^{-2}.$$

Die weiteren \overline{V}^2 erhalten wir daraus durch Multiplikation mit u_1 . Um α zu bestimmen, benutzen wir die Beziehung $\Re = \frac{1}{n-1} r_1 \text{ cent}$
 $U^{\frac{3}{2}} \alpha$

und erhalten

$$\alpha = \frac{r_1}{\frac{1}{n-1}} = \frac{3,6571}{(9,4126 \cdot 10^{-12})^{\frac{6}{n-1}}} = 3,7784 \cdot 10^{-13} \text{ gramm}^{\frac{1}{2}} \text{ cent}^{\frac{1}{2}}$$

und berechnen g und M aus den Beziehungen (85), (86)

$$g = - \frac{4\pi G}{\alpha} U^{\frac{n+1}{2}} \frac{du_1}{dr_1} \text{ cent sek}^{-2},$$

$$M = \frac{4\pi}{\alpha^5} U^{\frac{3-n}{2}} r_1^2 \frac{du_1}{dr_1} \text{ gramm.}$$

Der Bau der Kugel wird aus Tabelle 17 Seite 252 ersichtlich.

Gegen den Fall $n = 0$ ist die Mittelpunktsdichte auf etwa den sechsfachen Wert gestiegen; in demselben Verhältnis hat die freie Weglänge abgenommen, die mittlere Geschwindigkeit ist größer, die freie Zeit kleiner geworden. Die kritischen Werte $\frac{D}{L}$ und $\frac{A}{C}$ sind in den äußersten Partien nicht mehr zu vernachlässigen. Die abnehmende Dichte hat die freie Weglänge und gemeinsam mit der abnehmenden mittleren Geschwindigkeit die freie Zeit \mathfrak{T} hier stark vergrößert, so daß die Gravitationskräfte der innen liegenden Masse durch lange Zeiten und lange Strecken auf den einzelnen Stein wirken können. Die Verhältnisse liegen somit hier für die hydrodynamische Behandlung ungünstig; sie dürfte bereits bei 0,9 \Re versagen. Wir müßten $c = 0,1$ setzen, die Steine $3 \frac{1}{8}$ Milligramm schwer machen, damit \mathfrak{L} und \mathfrak{T} genügend klein werden, um $\frac{D}{L}$ und $\frac{A}{C}$ noch bei 0,95 \Re auf annehmbar kleine Werte zu bringen.

III. Isotherm-adiabatische Staubmasse.

In Kap. XII „Isotherm-polytrope Systeme“ haben wir die isotherm-adiabatische Gaskugel behandelt; die dort gefundenen Beziehungen übertragen wir auf Staubmassen. Sie wirken hier, wo wir die Gasmasse im Modell vor uns haben, doppelt überraschend. Wir denken uns eine starre Hohlkugel vom Radius R mit einer hinreichend großen Zahl durcheinander schwirrender Steine von der Gesamtmasse M derart angefüllt, daß die mittlere lebendige Kraft derselben (gleiche Temperatur der Gasmasse) durch den ganzen Raum konstant ist. Dann existiert ein Minimum des mittleren Geschwindigkeitsquadrates der Steine, gegeben durch die Beziehung (Seite 161)

$$\bar{V}^2 = 3HT = 3 \cdot 0,39688 \frac{GM}{R} = 1,19064 g R \text{ cent}^2 \text{ sek}^{-2},$$

bei welcher die Staubmasse infolge innerer Gravitation noch im Gleichgewichte sein kann. Die Mittelpunktsdichte beträgt dann das 30,091 fache der Oberflächendichte und das 10,697 fache der mittleren Dichte. Bei jedem größeren \bar{V}^2 kann diese gleiche Masse nicht nur im Gleichgewichte sein, sondern es existieren unendlich viele Werte von \bar{V}^2 , bei welchen Gleichgewicht bei verschiedener Anordnung der Dichte möglich ist. Und wählen wir \bar{V}^2 so, daß wir haben (Seite 160—161),

$$\bar{V}^2 = 3HT = \frac{3}{2} \frac{GM}{R} = \frac{3}{2} g R \text{ cent}^2 \text{ sek}^{-2},$$

so gibt es unendlich viele, verschiedene Massenanordnungen, bei denen Gleichgewicht herrscht. Wir wählen die (eindeutig bestimmte) Massenanordnung, bei welcher \bar{V}^2 ein Minimum ist. Die starre Hülle denken wir uns ersetzt durch eine Staubmasse im adiabatischen Gleichgewichte, von solcher Masse, Ausdehnung und Verteilung der \bar{V}^2 , daß ihr Druck nach innen das Auseinanderstreben der Steine des isothermen Kernes gerade kompensiert, und an der früheren Trennungsfläche in bezug auf ϱ und \bar{V}^2 stetiger Übergang herrscht. Das Gesamtsystem ist dann eindeutig bestimmt, und zwar ist (Seite 194)

$$\mathfrak{R} = 2,7851 R$$

$$\mathfrak{M} = 2,1724 M$$

$$g_{\mathfrak{R}} = 0,28006 g_R$$

$$\bar{V}^2 = \sqrt{0,75564} \bar{V}^2 \text{ isotherm}$$

$$\sum m \bar{V}^2 = 1,6426 \sum m \bar{V}^2 \text{ isotherm.}$$

Bei denselben Abmessungen der Gesamtkugel wie oben erhalten wir somit für den isothermen Kern

$$M = \frac{1,94303 \cdot 10^{38}}{2,1724} = 8,9420 \cdot 10^{32} \text{ gramm},$$

$$R = \frac{6,6623 \cdot 10^{14}}{2,7854} = 2,3920 \cdot 10^{14} \text{ cent} = 16,0000 \text{ Radien der Erdbahn,}^*)$$

$$\bar{V}^2 \text{ isotherm} = 1,19064 \frac{G M}{R} = 2,9631 \cdot 10^{11} \text{ cent}^3 \text{ sek}^{-2},$$

$$\beta^2 = \frac{4\pi G}{HT} = \frac{12 \cdot \pi \cdot G}{\bar{V}^2} = 8,4706 \cdot 10^{-18} \text{ gramm}^{-1} \text{ cent},$$

$$\varrho_0 = 10,697 \frac{3 M}{4\pi R^3} = 1,6689 \cdot 10^{-10} \text{ gramm cent}^{-3},$$

$$g_R = 9,3293 \cdot 10^{-4} \text{ cent sek}^{-2}.$$

Da wir haben $g = -\frac{4\pi G}{\beta^2} e^{\frac{v}{2}} \frac{dv}{dr_1}$, $e^{\frac{v}{2}} = \text{Zahlenwert von } \sqrt{\varrho_0}$, können wir mit Hilfe der Tabelle 14 den isothermen Kern durchrechnen, indem wir die Abszisse $r_1 = 8,991$ auf den Wert von R dehnen. Die Oberflächendichte desselben finden wir zu $5,2004 \cdot 10^{-12}$ gramm cent $^{-3}$. Den adiabatischen Teil der Kugel berechnen wir mit Hilfe der Tabelle Seite 194 indem wir den Anfangswert von $r = 1,7893$ dem Wert von R beilegen und als Ausgangsordinaten die Oberflächenwerte des isothermen Kernes wählen. ($\bar{V}^2 \sim u$; $g \sim -u'$, $\varrho \sim u^{\frac{3}{2}}$, $M \sim -r_1^2 u'$.) Die Ergebnisse der Rechnung stellen wir in Tabelle 18 (Seite 258) zusammen.

Im isothermen Teile beträgt die Geschwindigkeit \bar{V} etwa $5\frac{1}{2}$ Kilometer per Sekunde, um im adiabatischen Teile bis 0 herabzusinken. Die mittlere freie Weglänge wächst von 42 000 Kilometer im Zentrum bis auf 1 300 000 Kilometer im Abstand 16 Erdbahnradien und auf 62 Millionen Kilometer, etwas über $\frac{1}{2}$ Erdbahnradius, im Abstande 40 Erdbahnradien an. Die Zeit zwischen zwei Zusammenstößen eines Steines beträgt im Zentrum etwa $2\frac{1}{4}$ Stunden, im Abstand 16 Erdbahnradien etwa drei Tage und steigt im Abstande 40 Erdbahnradien auf 1,35 Jahre an. Auch hier erscheint die hydrodynamische Behandlung bis 0,9 \mathfrak{N} zulässig. Für größere r ver-

^{*)} $R = 16$ Erdbahnradien ist der Ausgangswert der Rechnung von G. H. Darwin.

sagt sie in allen drei behandelten Fällen und muß für r nahe gleich R überhaupt versagen. Wir sehen aber, daß die kosmische Staubmasse, welche den Kant-Laplaceschen Nebelball ersetzen soll, bis auf eine dünne Oberflächenschicht hydrodynamische Behandlung verträgt. Dies ist selbstverständlich kein Beweis dafür, daß sie wirklich existierte, und daß wir den Zusammenstoß zweier Steine als sehr elastischer Bälle, wie oben geschildert, richtig auffaßten; wir sehen lediglich, daß wir auf diesem Wege nicht zu unwahrscheinlichen Resultaten gelangen.

§ 12. Wir haben die Möglichkeit, diese kosmische Staubmasse nach irgend einer Polytropen oder als gemischtes System aufzubauen und haben zu entscheiden, welche dieser unendlich vielen verschiedenen Anordnungen von gleicher Masse und Radius die größte Wahrscheinlichkeit besitzt. Es ist klar, daß, wenn wir eine Gaskugel durcheinander rühren und der Wärmeleitung nur untergeordnete Bedeutung beilegen, eine adiabatische Gaskugel resultiert. Hört aber der Rührprozeß auf, so ist die Wärmeleitung nicht mehr zu vernachlässigen; das Temperaturgefälle in der Kugel sucht sich auszugleichen, und die Kugel verliert ihre Eigenschaft, adiabatische Gaskugel zu sein. Mit welcher Genauigkeit eine Gaskugel adiabatische Gaskugel bleibt, hängt davon ab, in welchem Maße der Rührprozeß den Wärmetransport durch Leitung überwiegt. Je kräftiger eine Gaskugel Wärme ausstrahlt, desto kräftigere Konvektionsströme treten in Richtung des Radius auf, und desto exakter kann sie, während sie auf kleines Volumen sich zusammenzieht, als adiabatische Kugel behandelt werden. Allein in eine starre, Wärme undurchlässige Hülle eingeschlossen, müßte sie allmählich isotherm werden. Reichen die durch Ausstrahlung bewirkten Konvektionsströme von der Oberfläche nicht in die zentralen Teile der Kugel hinab, so wird sich ein isothermer Kern in adiabatischer Hülle ausbilden. Ähnlich liegen die Verhältnisse in den Staubmassen. Genau auf dieselbe Weise, wie wir nach der kinetischen Gastheorie die Wärmeleitung als Diffusionsvorgang verschieden rasch bewegter Moleküle auffassen, durchmischen sich die ungleich rasch bewegten Steine, bilden ein gemeinsames \bar{V}^2 , und suchen eine isotherme Staubmasse herzustellen. Eine solche würde stets resultieren, wenn nicht wegen der unvollkommenen Elastizität der Steine beim Zusammenstoße die Steine an lebendiger Kraft verlieren und enger zusammenrücken würden, was bei nicht ganz vollkommener Symmetrie des Aufbaues oder äußerer störender Ur-

Tabelle 18.

	0	$2,6604 \cdot 10^{13}$	$1,1960 \cdot 10^{14}$	$1,8638 \cdot 10^{14}$	$2,3930 \cdot 10^{14}$	$2,6737 \cdot 10^{14}$	$4,0105 \cdot 10^{14}$	$5,3474 \cdot 10^{14}$	$6,0166 \cdot 10^{14}$	$6,6623 \cdot 10^{14}$	b
Abstand r vom Zentrum in cm	0	$2,6604 \cdot 10^{13}$	$1,1960 \cdot 10^{14}$	$1,8638 \cdot 10^{14}$	$2,3930 \cdot 10^{14}$	$2,6737 \cdot 10^{14}$	$4,0105 \cdot 10^{14}$	$5,3474 \cdot 10^{14}$	$6,0166 \cdot 10^{14}$	$6,6623 \cdot 10^{14}$	b
Abstand r vom Zentrum in Radien der Erdkugel	0	0	$1,7735$	$8,0070$	$12,456$	16	$17,884$	$. 26,826$	$35,796$	$40,239$	$44,563$
Abstand vom Zentrum in Bruchteilen des ganzen Radius	0	0	$0,05993$	$0,17952$	$0,27954$	$0,35904$	$0,40132$	$0,40196$	$0,50263$	$0,50296$	1
Eingeschlossene Masse M in Gramm	0	$1,1790 \cdot 10^{31}$	$3,7687 \cdot 10^{31}$	$6,8393 \cdot 10^{32}$	$8,9420 \cdot 10^{32}$	$1,0028 \cdot 10^{33}$	$1,5156 \cdot 10^{33}$	$1,8570 \cdot 10^{33}$	$1,9272 \cdot 10^{33}$	$1,94308 \cdot 10^{33}$	a
Dichte ρ gramm cm $^{-3}$	$1,6689 \cdot 10^{-10}$	$1,4286 \cdot 10^{-10}$	$2,7244 \cdot 10^{-11}$	$9,7846 \cdot 10^{-12}$	$5,2004 \cdot 10^{-12}$	$4,9439 \cdot 10^{-12}$	$1,7008 \cdot 10^{-12}$	$4,9289 \cdot 10^{-12}$	$1,2716 \cdot 10^{-12}$	0	$a b^{-3}$
Beschleunigung g cent sek $^{-2}$	0	$1,1878 \cdot 10^{-6}$	$1,7541 \cdot 10^{-6}$	$1,9122 \cdot 10^{-5}$	$1,0405 \cdot 10^{-5}$	$9,3393 \cdot 10^{-4}$	$6,2735 \cdot 10^{-4}$	$4,9286 \cdot 10^{-4}$	$3,5463 \cdot 10^{-4}$	$2,9144 \cdot 10^{-4}$	$a b^{-2}$
Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat V cent sek $^{-1}$	$5,4429 \cdot 10^5$	$5,1280 \cdot 10^5$	$3,7495 \cdot 10^5$	$2,3775 \cdot 10^5$	$1,5797 \cdot 10^5$	0	$\frac{1}{a} b^{-\frac{1}{2}}$				
Mittlerer freier Weg L cent	$4,2099 \cdot 10^8$	$4,9358 \cdot 10^9$	$2,5788 \cdot 10^{10}$	$7,2171 \cdot 10^{10}$	$1,8510 \cdot 10^{11}$	$1,6154 \cdot 10^{11}$	$4,1321 \cdot 10^{11}$	$1,6251 \cdot 10^{12}$	$6,1985 \cdot 10^{12}$	∞	$a^{-1} b^{\frac{3}{2}}$
Mittlere freie Zeit Σ sek	$8,3982 \cdot 10^9$	$9,8492 \cdot 10^9$	$5,1426 \cdot 10^4$	$1,4398 \cdot 10^6$	$2,6942 \cdot 10^5$	$3,4191 \cdot 10^5$	$1,1959 \cdot 10^6$	$7,4252 \cdot 10^6$	$4,2694 \cdot 10^7$	∞	$a^{-\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}}$
Kriterium $\frac{D}{L}$	0	$1,1065 \cdot 10^{-5}$	$8,9922 \cdot 10^{-5}$	$1,8826 \cdot 10^{-4}$	$3,7045 \cdot 10^{-4}$	$8,3785 \cdot 10^{-4}$	$1,0851 \cdot 10^{-3}$	$7,9280 \cdot 10^{-3}$	$4,6182 \cdot 10^{-2}$	∞	$a^{-1} b^{\frac{3}{2}}$
Kriterium $\frac{\Sigma}{L}$	0	$1,0210 \cdot 10^{-5}$	$9,1884 \cdot 10^{-5}$	$6,1162 \cdot 10^{-5}$	$8,9580 \cdot 10^{-5}$	$1,0181 \cdot 10^{-4}$	$2,9886 \cdot 10^{-4}$	$1,0638 \cdot 10^{-3}$	$4,0437 \cdot 10^{-3}$	∞	$a^{-1} b^{\frac{3}{2}} c$

Ändern sich die Massen um das a -fache, der Radius um das b -fache, der Steindurchmesser um das c -fache ihres Wertes, so sind die Zahlen jeder Horizontalreihe mit dem in der letzten Kolonne angegebenen Betrage zu multiplizieren.

Tabelle 19.

Abstand r vom Zentrum in cent	0	$9,1065 \cdot 10^{13}$	$1,8217 \cdot 10^{14}$	$2,7326 \cdot 10^{14}$	$3,6445 \cdot 10^{14}$	$4,5544 \cdot 10^{14}$	$5,4653 \cdot 10^{14}$	$6,3763 \cdot 10^{14}$	b
Abstand r vom Zentrum in Radien der Erdkugel	0	$6,098$	$12,186$	$18,279$	$24,372$	$30,465$	$36,498$	$42,501$	b
V^2 Reibung cent 2 sek $^{-1}$	$1,4458 \cdot 10^8$	$1,5074 \cdot 10^8$	$1,7106 \cdot 10^8$	$9,1919 \cdot 10^8$	$2,9107 \cdot 10^8$	$4,5638 \cdot 10^8$	$9,0524 \cdot 10^8$	$4,2867 \cdot 10^8$	$\frac{1}{a} b^{\frac{3}{2}}$
t in Sekunden	$1,193 \cdot 10^{11}$	$1,0083 \cdot 10^{11}$	$8,137 \cdot 10^{10}$	$5,283 \cdot 10^{11}$	$3,7788 \cdot 10^{11}$	$1,905 \cdot 10^{10}$	$4,071 \cdot 10^9$	$\frac{1}{a} b^{\frac{1}{2}} c$	$\frac{1}{a} b^{-\frac{1}{2}}$
t in Jahren	3790	3650	3200	2580	1880	1300	600	270	$\frac{1}{a} b^{-\frac{1}{2}} c$

Andern sich die Massen um das a -fache, der Radius um das b -fache und der Steindurchmesser um das c -fache, so sind die den Zahlen jeder Horizontalreihe mit dem in der letzten Kolonne angegebenen Werte zu multiplizieren. Für das Wärmeleitungsproblem sind die berechneten Zeiten 2,57 mal kleiner.

sachen Konvektionsströme mit Komponenten in Richtung des Radius auslösen würde. Um hier klarer zu sehen, haben wir erst die Wirkung der Wärmeleitung, der Diffusion der Steine mit ungleichen \bar{V}^2 , abzuschätzen. Damit gewinnen wir auch ein Maß für die Diffusion von Steinen mit ungleichem Bewegungsmoment in einer ausgezeichneten Richtung, mit andern Worten für die Wirkung der inneren Reibung bei Auftritt von Geschwindigkeitsdifferenzen, wie sie etwa vorhanden wären, wenn die Kugel in verschiedenen r mit verschiedener Winkelgeschwindigkeit rotieren würde.

Der Ausgleich der Temperaturen bei Wärmeabfluß nur in einer Richtung und der Ausgleich der Geschwindigkeiten bei lamellarer Bewegung nach nur einer Richtung, werden durch dieselbe Differentialgleichung beherrscht

$$(244) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \nu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Der Faktor ν^2 cent² sek⁻¹ mißt in einem Falle das Wärmeleitungsvermögen im thermometrischen Maße, im andern Falle die Zähigkeit in kinematischem Maße. Beide lassen sich für Staubmassen leicht berechnen, wenn wir wieder die Vorstellungen der kinetischen Gastheorie benutzen. Wir erhalten dann für die Zähigkeit ν^2 , wenn wir statt 0,30967 mit genügender Genauigkeit $\frac{1}{\pi}$ setzen,*)

$$(245) \quad \nu^2 = \frac{1}{\pi} \underbrace{\mathcal{L} \bar{V}}_{\text{Reibung}} \sqrt{\frac{3\pi}{8}} \text{ cent}^2 \text{ sek}^{-1},$$

und daraus, da wir bei der Wärmeleitung die Steine wie einatomige Moleküle behandeln müssen, für das Wärmeleitungsvermögen**)

$$(246) \quad \underbrace{\nu^2}_{\text{Wärmeleitung}} = 1,6027 \underbrace{\nu^2}_{\text{Reibung}}.$$

Haben wir ein Problem im Falle der Reibung gelöst, so erhalten wir die Lösung des entsprechenden Wärmeleitungsproblems, wenn wir bei gleichen Abszissen die berechneten Zeiten mit 1,60 multiplizieren. Mit Hilfe der Tabelle 17 habe ich nach Formel (245) die Werte von ν^2 für verschiedene Orte der dort behandelten adiabatischen Kugel Reibung berechnet. Für das Problem der Wärmeleitung sind die Werte von ν^2 mit 1,60 zu multiplizieren. Die Werte der ν^2 erreichen enorme Beiträge; sie sind von der Größenordnung 10^{16} und 10^{17} ; während für

*) O. E. Meyer, Die kinetische Theorie der Gase. Mathematische Zusätze. Seite 111. 1899.

**) O. E. Meyer, Die kinetische Theorie der Gase. Seite 285. 1899.

Luft von 0° und 760 mm Barometerstand $\nu^2 = 0,13 \text{ cent}^2 \text{ sek}^{-1}$
 ist. Dies auf den ersten Blick überraschende Verhalten wird sofort
 verständlich, wenn wir die großen, freien Wegstrecken und Flug-
 geschwindigkeiten der Steine betrachten, wodurch ein Stein seine
 Eigenschaften in kurzer Zeit in weit entfernten Stellen zur Geltung
 bringen kann.

Um die Wirkung der Zähigkeit und des Wärmeleitungsvermögens zu taxieren, behandeln wir folgende Aufgabe. Wir nehmen zwei unendlich ausgedehnte Staubmassen an, die an der Ebene $x = 0$ aneinander grenzen. Zur Zeit $t = 0$ soll im Reibungsproblem die eine Masse ruhen, die andere Masse sich mit konstanter Geschwindigkeit u_0 längs der Berührungsfläche verschieben; im Wärmeleitungsproblem sollen die beiden Massen sich auf den Temperaturen 0 und u_0 befinden, und wir untersuchen den Ablauf des Geschwindigkeits- resp. Temperaturausgleiches. Wir haben eine Funktion u zu suchen, welche der Gleichung (244) genügt, und für $t = 0$ für $x < 0$ gleich 0 und für $x > 0$ gleich u_0 ist. Diese Lösung des Problems ist*), da an der Berührungsfläche sich u momentan und dauernd auf $\frac{u_0}{2}$ einstellt

$$(247) \quad u = \frac{u_0}{2} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-\beta^2} d\beta \right).$$

Nach unendlich langer Zeit hat u für beide Körper den kon-

stanten Wert $\frac{u_0}{2}$ angenommen; der Summand $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-\beta^2} d\beta$ gibt somit

an, in welchem Maße sich u an jeder Stelle von diesem Endwerte unterscheidet, oder mit andern Worten, mit welcher Geschwindigkeit sich der Ausgleich der Geschwindigkeiten vollzieht. Da

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0,09} e^{-\beta^2} d\beta = 0,10128$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0,01} e^{-\beta^2} d\beta = 0,01128$$

*) H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der theoretischen Physik.
 Braunschweig 1901. Bd. II, Seite 95.

so erhalten wir, wenn wir setzen

$$\frac{x}{2\nu\sqrt{t}} = 0,09 \text{ resp. } = 0,01$$

die Zeit t , in welcher sich im Abstande x der Wert ν nur noch um 10%, resp. 1% von seinem Endwerte unterscheidet. Wir rechnen mit einem Ausgleich bis auf 10%; würden wir bis auf 1% rechnen, so hätten wir die ermittelten Zeiten um das 81-fache zu vergrößern.

Für den Ausgleich in dieser Genauigkeit im Abstande x erhalten wir somit die notwendige Zeit

$$(248) \quad t = \frac{x^2}{0,18^2 \nu^3}.$$

Für x haben wir selbstverständlich Werte zu nehmen, welche mit den Dimensionen der ganzen Kugel vergleichbar sind.

Wir setzen x gleich dem Radius der Erdbahn = $1,495 \cdot 10^{13}$ cent und erhalten für die adiabatische Staubkugel folgende Werte, Tabelle 19 Seite 258.

Damit sich Geschwindigkeits- resp. Temperaturunterschiede durch so große Entfernungen von einem Radius der Erdbahn bis auf 10% ausgleichen, sind nur Zeiten erforderlich, die sich nach Jahrtausenden berechnen, und die im Vergleich zu den Zeiten, die in der Entwicklungsgeschichte der Himmelskörper eine Rolle spielen, nicht in Betracht kommen. Daraus folgt, daß in einer kosmischen Staubmasse nicht mit verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten oder Temperaturdifferenzen, d.h. Verschiedenheiten von \bar{V} zu rechnen ist, außer diese Differenzen werden fortwährend neu erzeugt. Nun ist eine isotherme Staubkugel von endlicher Masse unmöglich. Wahrscheinlich werden wir nur mit einem isothermen Kerne zu rechnen haben, umhüllt von einer Schale, in welcher \bar{V} bis auf den Wert Null abnimmt. Von diesen Schalen hat wiederum die adiabatische die größte Wahrscheinlichkeit für sich. Suchen wir ferner die so noch auftretenden Temperaturunterschiede auf ein Minimum herabzusetzen, so haben wir einen isothermen Kern minimalster Temperatur anzunehmen. So würde ein Bau der Staubmasse, wie in Tabelle 18 ausgeführt, die größte Wahrscheinlichkeit für sich haben. In dem Maße aber, wie sich die Kugel kontrahiert, nimmt ν^2 ab und t zu; und zwar wachsen die Zeiten t , wenn sich

der Radius von \mathfrak{R}_1 auf \mathfrak{R}_2 zusammenzieht, an im Verhältnis $\left(\frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{R}_2}\right)^2$, also rasch. In späteren Entwicklungsperioden macht sich Reibung und Wärmeleitung immer weniger geltend, und die Umwandlung in eine adiabatische Staubmasse ohne isothermen Kern wird begünstigt.

§ 13. Wir haben in den drei berechneten Beispielen gesehen, daß in der Nähe der Oberflächen die Kriterien $\frac{D}{g}$ und $\frac{\Sigma}{\Sigma_0}$ zu große Werte erreichen, und die hydrodynamische Behandlung versagt. Dies muß der Fall sein, nach welcher Polytropen wir die Kugel aufbauen; denn die Zahl der Zusammenstöße, welche allein die Geschwindigkeiten so verteilen, daß wir die statistische Methode anwenden können, wird zu klein. In jeder kugelförmigen Staubmasse muß ein Grenzradius A bestehen, außerhalb welchem das Maxwellsche Verteilungsgesetz nicht mehr herrscht; in jeder Staubkugel ein Grenzradius A , außerhalb welchem die Gasgesetze keine Gültigkeit mehr besitzen. Den Gesetzen, die hier herrschen, näher zu kommen, nehmen wir mit G. H. Darwin den entgegengesetzten, extremen Fall an, daß sich außerhalb A überhaupt keine Zusammenstöße mehr ereignen, sondern jeder Stein unter Einfluß Newtonscher Gravitationskräfte seine Bahn beschreibt. Die Schwerkraft an jeder Stelle der Bahn hängt dann ab von der Masse, die sich innerhalb einer Kugel befindet, deren Radius gleich ist dem Abstande des Steines vom Zentrum der Staubmasse. Und diese Masse hängt ab von der Dichteverteilung des Schwärms. Unsere Aufgabe ist es, diese Dichteverteilung zu finden unter der Annahme keiner Zusammenstöße außerhalb A . Die wahre Dichteverteilung wird dann zwischen den Dichteverteilungen, die sich aus der hydrodynamischen Behandlungsweise und auf Grund der neu aufgestellten Hypothese ergeben, eingeschlossen sein. Die ermittelten Gesetze lassen sich dann wieder rückwärts auf Gaskugeln übertragen.

„Wir nehmen an, daß von jedem Punkte der Kugel vom Radius A eine Garbe von Meteoriten ausgeworfen wird, in allen Neigungen zur Vertikalen und mit Geschwindigkeiten, die um eine mittlere Geschwindigkeit gruppiert sind, gemäß dem für diese Orte geltenden Exponentialgesetze. Ebensoviele Meteoriten, als diese Fläche verlassen, sollen wieder auf sie zurückfallen, und diese einwärts gerichtete Kanonade gegen die Begrenzung der Kugel soll dem gasähnlichen Druck auf die Innenseite derselben das Gleichgewicht halten. Die angenommene Kugelfläche braucht so keine reelle Existenz zu besitzen. Da der niedersteigende Ast der Bahn das genaue Spiegelbild des aufsteigenden Astes ist, haben wir den Stein nur vom Momente des Auswurfs bis zum Apozentrum zu verfolgen und dann die Dichte zu verdoppeln, die sich aus der Annahme ergibt, daß alle Meteoriten aufsteigen. Da alle Elemente der Kugel solche Garben auswerfen und Zusammenstöße nach Annahme ausgeschlossen sein sollen, haben wir lediglich die Geschwindigkeit im Radiusvektor zu

betrachten. Die Verteilung der Dichten ist so dieselbe, als wenn jedes Element nur eine senkrechte Garbe auswerfen würde; aber in bezug auf die Vertikalgeschwindigkeit eines Steines haben wir zu achten auf die Neigung zur Vertikalen, unter der er ausgesandt wird“ (G. H. Darwin).

Wir setzen, wenn Ω_r das Potential der Gravitationskräfte im Abstande r bedeutet,

$$(a) \quad f(r) = 2(\Omega_r - \Omega_A).$$

Wir betrachten zuerst nur Steine, die von einem Oberflächenelement der Kugel vom Radius A mit der Geschwindigkeit V in Richtung ε zur Vertikalen ausgeworfen werden. Ihre Horizontalgeschwindigkeit ist im Abstande A vom Zentrum gleich $V \sin \varepsilon$, und der Flächensatz liefert für den weiteren Flug die Beziehung

$$(b) \quad r^2 \frac{d\Theta}{dt} = VA \sin \varepsilon.$$

Das Energieprinzip liefert die Beziehung

$$(c) \quad \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{d\Theta}{dt} \right)^2 + 2\Omega_r = V^2 + 2\Omega_A,$$

und eliminieren wir $\frac{d\Theta}{dt}$ aus (b) und (c), so ergibt sich

$$(d) \quad r^2 \frac{dr}{dt} = r \sqrt{r^2(V^2 - f(r)) - A^2 V^2 \sin^2 \varepsilon} \\ = r \sqrt{V^2(r^2 - A^2 \sin^2 \varepsilon) - r^2 f(r)}.$$

$\frac{dr}{dt}$ ist die Vertikalgeschwindigkeit der Steine; an der Auswurfsstelle ist sie gleich $V \cos \varepsilon$; und bezeichnen ferner δ und δ_0 die Dichtigkeiten der Garbe in den Abständen r und A , so liefert die Kontinuitätsgleichung die weitere Beziehung

$$(e) \quad \delta r^2 \frac{dr}{dt} = \delta_0 A^2 V \cos \varepsilon$$

und mit Berücksichtigung von (d)

$$(f) \quad \delta = \delta_0 \frac{A^2 V \cos \varepsilon}{r \sqrt{r^2(V^2 - f(r)) - A^2 V^2 \sin^2 \varepsilon}}.$$

Dies gilt für Steine mit der Anfangsgeschwindigkeit V in Richtung ε . Nun werden aber die Steine unter allen Richtungen ausgeworfen. Da diese gleichwertig um die Vertikale verteilt sind, so ist die Anzahl Steine, die in einem Winkelraume, durch zwei Kreiskegelflächen mit den Öffnungswinkeln ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ gegen die Vertikale begrenzt, ausgeworfen werden, proportional $\sin \varepsilon d\varepsilon$. Die Dichte δ , herrührend durch die Steine, die bei gleichem V , aber Winkeln, die

zwischen $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = \varepsilon_0$ liegen, ausgeworfen werden, wird somit, wenn C einen Proportionalitätsfaktor bezeichnet:

$$(g) \quad \delta = C \int_0^{\varepsilon_0} \frac{A^2 V \cos \varepsilon \sin \varepsilon d\varepsilon}{r \sqrt{r^2(V^2 - f(r)) - A^2 V^2 \sin^2 \varepsilon}}$$

Die Integration lässt sich leicht ausführen und liefert

$$(h) \quad \delta = \frac{C}{Vr} \left[\sqrt{r^2(V^2 - f(r))} - Vr^2(V^2 - f(r)) - V^2 A^2 \sin^2 \varepsilon_0 \right].$$

Bei Anwendung von (h) haben wir drei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall. $V^2 > \frac{r^2 f(r)}{r^2 - A^2}$. Nach (d) verschwindet die Vertikalsbewegung für keinen noch so großen Wert von $\sin \varepsilon_0$, (und wird der zweite Summand von (h) nicht imaginär). Wir können dann ε_0 bis 90° wachsen lassen und erhalten

$$\delta = \frac{C}{V} \left[\sqrt{V^2 - f(r)} - \sqrt{1 - \frac{A^2}{r^2}} \sqrt{V^2 - \frac{f(r)}{1 - \frac{A^2}{r^2}}} \right].$$

2. Fall. $V^2 < \frac{r^2 f(r)}{r^2 - A^2}$. Es gibt einen Grenzwinkel ε_0 , der in (d) $\frac{dr}{dt}$ zum Verschwinden bringt, (und bei dessen Überschreitung der zweite Summand in (h) imaginär würde). In diesem Falle wird (h)

$$\delta = \frac{C}{V} \sqrt{V^2 - f(r)}.$$

3. Fall. $V^2 < f(r)$. Dann ist $\frac{dr}{dt}$ überhaupt imaginär und

$$\delta = 0.$$

Die physikalische Interpretation dieser drei Fälle ist folgende:

Befinden wir uns sehr nahe an der Oberfläche der Kugel A , so erreicht jeder Stein, der mit der Geschwindigkeit $V^2 > \frac{r^2 f(r)}{r^2 - A^2}$ ausgeworfen wird, noch unsern Standort, selbst wenn er eine Stelle der Kugel horizontal ($\varepsilon_0 = 90^\circ$) verlässt. Gehen wir höher, so gibt es einen Grenzwinkel für die Geschwindigkeit $V^2 < \frac{r^2 f(r)}{r^2 - A^2}$, bei welchem die Steine gerade noch bis zum Standorte emporsteigen. Im dritten Falle ist die Geschwindigkeit zu klein, um gegen die Potentialdifferenz $\Omega_r - \Omega_A$ anzukommen, und nicht einmal ein senkrecht geworfener Stein steigt bis zum Standorte empor und trägt zur Dichtigkeit bei. $\delta = 0$.

Wir haben bisher den Steinen die Geschwindigkeit V beigelegt. Nun sind aber die Geschwindigkeiten bei A nach dem Maxwell'schen

Gesetze verteilt; die Anzahl Steine, die mit einer Geschwindigkeit fliegen, eingeschlossen zwischen V und $V + dV$, ist (Gleichung (234)) proportional

$$V^2 e^{-\frac{3 V^2}{2 \bar{V}^2}} dV,$$

wo \bar{V}^2 den an der Kugelfläche A geltenden Wert hat.

Wir haben also δ in (g) noch mit diesem Ausdruck zu multiplizieren und über alle in Betracht kommenden Geschwindigkeiten zu integrieren.

Im dritten Falle ist δ stets = 0.

Im 1. Glied des ersten Falles, ebenso wie im zweiten Falle, sind nach dem eben Auseinandergesetzten für V die Integrationsgrenzen $f(r)$ und ∞ ; im zweiten Summand des ersten Falles sind sie $\frac{f(r)}{1 - \frac{A^2}{r^2}}$

und ∞ . Wir haben also zu berechnen, einmal

$$\int_{f(r)}^{\infty} V \sqrt{V^2 - f(r)} V e^{-\frac{3 V^2}{2 \bar{V}^2}} dV.$$

Führen wir ein

$$V^2 - f(r) = \frac{2 \bar{V}^2}{3} x^2, \quad \sqrt{V^2 - f(r)} V dV = \left(\frac{2 \bar{V}^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} x^2 dx,$$

so ergibt sich leicht

$$(i) \quad \int_{f(r)}^{\infty} V \sqrt{V^2 - f(r)} V e^{-\frac{3 V^2}{2 \bar{V}^2}} dV = \left(\frac{2 \bar{V}^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3 f(r)}{2 \bar{V}^2}} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx.$$

Um $\sqrt{1 - \frac{A^2}{r^2}} \int_{\frac{f(r)}{1 - \frac{A^2}{r^2}}}^{\infty} \sqrt{V^2 - \frac{f(r)}{1 - \frac{A^2}{r^2}}} V e^{-\frac{3 V^2}{2 \bar{V}^2}} dV$ zu berechnen setzen wir

$V^2 - \frac{f(r)}{1 - \frac{A^2}{r^2}} = \frac{2 \bar{V}^2}{3} x^2$ und erhalten ebenso durch leichte Umformung

$$(k) \quad \begin{aligned} & \sqrt{1 - \frac{A^2}{r^2}} \int_{\frac{f(r)}{1 - \frac{A^2}{r^2}}}^{\infty} \sqrt{V^2 - \frac{f(r)}{1 - \frac{A^2}{r^2}}} V e^{-\frac{3 V^2}{2 \bar{V}^2}} dV \\ &= \left(\frac{2 \bar{V}^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 - \frac{A^2}{r^2}} e^{-\frac{3 f(r)}{2 \bar{V}^2 \left(1 - \frac{A^2}{r^2}\right)}} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx, \end{aligned}$$

so daß schließlich resultiert:

$$(l) \quad \delta = C \left(\frac{2}{3} \bar{V}^2 \right)^{\frac{3}{2}} \left[e^{-\frac{3f(r)}{2\bar{V}^2}} - \sqrt{1 - \frac{A^2}{r^2}} e^{-\frac{3f(r)}{2\bar{V}^2} \left(1 - \frac{A^2}{r^2} \right)} \right] \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx.$$

Bilden wir dies für $r = A$, so erhalten wir, da $f(r)$ gleich mit $1 - \frac{A^2}{r^2}$ verschwindet, $\delta_A = C \left(\frac{2}{3} \bar{V}^2 \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx$; und da δ zu δ_A sich verhält, wie die Dichte $\varrho : \varrho_A$ in gramm cent⁻³, so haben wir für die Dichte im Abstande r den Ausdruck

$$(249) \quad \varrho = \varrho_A \left[e^{-\frac{3f(r)}{2\bar{V}^2}} - \sqrt{1 - \frac{A^2}{r^2}} e^{-\frac{3f(r)}{2\bar{V}^2} \left(1 - \frac{A^2}{r^2} \right)} \right].$$

Das erste Glied rechts hat eine einfache Bedeutung. An jeder Stelle r gilt $dp = -g\varrho dr$, $\frac{1}{\varrho} \frac{dp}{dr} = -\frac{d\Omega_r}{dr}$, und die Zustandsgleichung der Staubmasse lautet $p = \varrho HT = \varrho \cdot \frac{1}{3} \bar{V}^2$. Die Staubmasse außerhalb A besitze durchwegs dieselbe Temperatur T , also dasselbe \bar{V} , wie bei A , das in Gleichung (249) auftritt. Dann ist

$$\frac{1}{\varrho} \frac{dp}{dr} = \frac{1}{\varrho} \frac{1}{3} \bar{V}^2 \frac{d\varrho}{dr} = -\frac{d\Omega_r}{dr},$$

und zwischen A und r integriert

$$\varrho = \varrho_A e^{-\frac{3}{\bar{V}^2} (\Omega_r - \Omega_A)} = \varrho_A \cdot e^{-\frac{3f(r)}{2\bar{V}^2}}.$$

Das erste Glied gibt somit die Dichteabnahme, die eintreten würde, wenn über A eine isotherme, die Gasgesetze streng erfüllende Hülle läge. Das zweite Glied gibt die Veränderung an, wenn die ausgleichende Wirkung der Zusammenstöße fehlt.

In (249) ist $f(r)$ unbekannt, resp. durch ϱ als Funktion r bedingt. Wir können, da

$$\Omega_r = -4\pi G \left[\frac{1}{r} \int_0^r \varrho r^2 dr + \int_r^\infty \varrho r dr \right], \quad \frac{d\Omega_r}{dr} = 4\pi G \frac{1}{r^2} \int_0^r \varrho r^3 dr,$$

schreiben:

$$(m) \quad \frac{1}{2} f(r) = \Omega_r - \Omega_A = 4\pi G \int_A^r \frac{dr}{r^2} \int_0^r \varrho r^3 dr,$$

und da

$$(n) \quad \int_0^r \varrho r^3 dr = \int_0^A \varrho r^3 dr + \int_A^r \varrho r^3 dr = \frac{1}{3} \bar{\varrho}_A A^3 + \int_A^r \varrho r^3 dr,$$

wobei wir mit $\bar{\varrho}_i$ die mittlere Dichte des isothermen Kernes bezeichnet haben, ergibt sich

$$(250) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} f(r) &= 4\pi G \left[\int_A^r \frac{dr}{r^2} \int_A^r \varrho r^3 dr + \frac{1}{3} \bar{\varrho}_i A^3 \int_A^r \frac{dr}{r^2} \right] \\ &= 4\pi G \int_A^r \frac{dr}{r^2} \int_A^r \varrho r^3 dr + \frac{4\pi G \bar{\varrho}_i A^3}{3} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{r} \right) \\ &= 4\pi G \int_A^r \frac{dr}{r^2} \int_A^r \varrho r^3 dr + \frac{G M}{A} \left(1 - \frac{A}{r} \right). \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wäre in (249) einzusetzen, allein wir würden dann eine viel zu komplizierte Differentialgleichung für ϱ erhalten. Wir machen, um einen Ausdruck für $f(r)$ zu gewinnen, zwei Hypothesen, welche den wirklichen Verlauf einschließen.

1. Hypothese. Wir vernachlässigen bei Bildung von $f(r)$ die Gravitationskräfte der außerhalb A liegenden, äußerst verdünnten Massen; dann wird (250)

$$(250a) \quad \frac{1}{2} f(r) = \frac{G M}{A} \left(1 - \frac{A}{r} \right)$$

und setzen wir dies in (249) ein, so erhalten wir

$$(251) \quad \varrho = \varrho_A \left(e^{-\frac{8GM}{\bar{\nu}^2 A} \left(1 - \frac{A}{r} \right)} - \sqrt{1 - \frac{A^2}{r^2}} e^{-\frac{3GM}{\bar{\nu}^2 A} \left(1 + \frac{A}{r} \right)} \right).$$

2. Hypothese. Verfolgen wir die Dichtigkeitsabnahme in den äußeren Schichten einer Gasmasse in den Tabellen 16, 17, 18, so finden wir, daß sie rascher abnimmt wie das Quadrat des reziproken Radius; wir nehmen also eine zu große Dichte an, wenn wir zur Bildung von $f(r)$ annehmen, daß ϱ wie $\frac{1}{r^2}$ abnimmt. Wir setzen also $\varrho = \varrho_A \frac{A^2}{r^2}$ und erhalten dann

$$\int_A^r \frac{dr}{r^2} \int_A^r \varrho r^3 dr = \varrho_A A^2 \int_A^r \frac{dr}{r^2} (r - A) = \varrho_A A^2 \left\{ \lg \frac{r}{A} + \left(\frac{A}{r} - 1 \right) \right\}$$

$$(250b) \quad \frac{1}{2} f(r) = 4\pi G \varrho_A A^2 \left\{ \lg \frac{r}{A} - \left(1 - \frac{A}{r} \right) \right\} + \frac{G M}{A} \left(1 - \frac{A}{r} \right).$$

Dieser Ausdruck für $\frac{1}{2} f(r)$ ist in (249) einzusetzen.

Den Verlauf der Dichten unter Annahme dieser beiden Zusatz-Hypothesen stellen wir an einem Beispiel fest. Wir könnten so verfahren, daß wir einen Abstand r der in Tabellen 16, 17 oder 18 be-

rechneten Staubmasse gleich dem Abstand A setzen und außerhalb ϱ gemäß Gleichung (249) mit Hilfe der Werte der Tabellen berechnen. Wir können aber zweckmäßiger, da allgemeiner, so verfahren, daß wir auf die Variablen u_1 und r_1 zurückgehen. Benutzen wir wieder die Beziehungen Seite 69:

$$r = \frac{1}{\frac{n-1}{U^{\frac{3}{2}} \alpha}} r_1, M = -\frac{4\pi}{\alpha^2} U^{\frac{3-n}{2}} r_1^2 u_1', \alpha^2 = \frac{4\pi G}{\frac{n}{n-1} H \Theta_k}, \bar{V}^2 = 3HT,$$

$T = U u_1 \Theta_k$, $\varrho = U^n u_1^n$, so erhalten wir leicht für die in (249), (250a) und (250b) auftretenden Größen:

$$(252) \quad \frac{3GM}{\bar{V}^2 A} = -\frac{n}{n-1} \frac{r_1 u_1'}{u_1}, \quad \frac{3.4\pi G \varrho_A A^2}{HT} = \frac{n}{n-1} r_1^2 u_1^2,$$

worin r_1 die Abszisse bezeichnet, die wir bis A strecken. Wir können so (249) auf irgend eine polytropen Staubkugel anwenden, und ein beliebiges r_1 in A verwandeln. Wir wählen als Beispiel den Fall, daß wir eine isotherm-adiabatische Staubmasse vor uns haben, nehmen in der Tabelle, Seite 194, den Wert $r_1 = 3,5$ zur Bildung von A , und erhalten, wenn wir $f(r)$ nach (250a) und (250b) in den Werten dieser Tabelle berechnen, ($\frac{n}{n-1} = 2,5$)

	$r_1 =$	3,5	4	4,5	4,9835
Gasgesetze gelten, $u_1^{\frac{3}{2}}$		0,005624	0,002589	0,000762	0
erste Hypothese, $u_1^{\frac{3}{2}}$		0,005624	0,002091	0,0009598	0,000535
zweite Hypothese, $u_1^{\frac{3}{2}}$		0,005624	0,001764	0,0007431	0,0003834.

Schließen wir Zusammenstöße aus, so nimmt die Dichte nach außen erst rascher, dann langsamer ab als bei Gültigkeit der Gasgesetze, um erst bei $r_1 = \infty$ zu Null zu werden. Dies übertragen wir auf unsere isotherm-adiabatische Staubmasse, die in Tabelle 18 dargestellt ist. Der Wert $r_1 = 3,5$ entspricht $4,6788 \cdot 10^{14}$ cent; und wir erhalten

Abstand r vom Zentrum in cent	$4,6788 \cdot 10^{14}$	$5,3474 \cdot 10^{14}$	$6,0156 \cdot 10^{14}$	$6,6623 \cdot 10^{14}$
Abstand r vom Zentrum in Radien der Erdbahn	31,297	35,786	40,239	44,563

adiabatisch, ϱ

gramm cent ⁻³	$9,3920 \cdot 10^{-13}$	$4,3235 \cdot 10^{-13}$	$1,2716 \cdot 10^{-13}$	0
--------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	---

erste Hypo-

these, ϱ gramm

cent ⁻³	$9,3920 \cdot 10^{-13}$	$3,4919 \cdot 10^{-13}$	$1,6074 \cdot 10^{-13}$	$8,9340 \cdot 10^{-14}$
--------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------

zweite Hypo-

these, ϱ gramm

cent ⁻³	$9,3920 \cdot 10^{-13}$	$2,9459 \cdot 10^{-13}$	$1,2445 \cdot 10^{-13}$	$6,4027 \cdot 10^{-14}$
--------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------

Es scheint demnach ziemlich auf dasselbe hinauszukommen, welche der beiden Hypothesen wir der Bildung von $f(r)$ zugrundelegen. Da auch Steine mit unendlich großen Geschwindigkeiten, aber in unendlich kleiner Anzahl vorkommen, werden wir in den entferntesten Gebieten noch Steine antreffen. Das Ausbleiben der Zusammenstöße verwischt die scharfe Begrenzung der adiabatischen, wie jeder polytropen Staubmasse. Die Dichte nimmt aber rascher ab als $(\frac{A}{r})^3$, so daß wir bald auf ganz außerordentlich geringe Dichten stoßen. Da aber die Zusammenstöße, welche eine scharfe Begrenzung der Masse, (außerhalb derselben die Dichte Null), bewirken, nicht vollständig ausbleiben können, so wird die Dichtigkeitsabnahme noch weit rascher sein, so daß wir bald in Regionen kommen, in denen sich die Anwesenheit von Masse nicht mehr bemerkbar machen wird. Das Aufhören der Gültigkeit der Gasgesetze hat demnach zur Folge, daß die scharfe Begrenzung der Masse verwischt und weiter hinausgerückt wird.

Diese Betrachtungen lassen sich auch auf polytropen Gaskugeln übertragen. In der Nähe der scharfen Begrenzung, die als Konsequenz der Zustandsgleichung $pv = HT$ auftritt, versagt die statistische Behandlungsweise und mit größter Wahrscheinlichkeit infolgedessen auch die Zustandsgleichung. Die Folge wird ebenfalls sein, daß sich die scharfe Begrenzung verwischt, und daß wir bald auf Gase treffen in einem Zustande der Verdünnung, dessen Eigenschaften uns gänzlich unbekannt sind, und in welchem uns eine Summe von Molekülen nicht mehr als „Gas“ kenntlich wird. Wir werden außerhalb der theoretischen Grenze bald in Regionen kommen, in welchen wir keine „Gase“ mehr nachweisen können, so daß praktisch genommen die Oberfläche polytropen Gaskugeln im Endlichen, nicht allzu entfernt von ihrer theoretischen Oberfläche liegt.

Wir verlassen hier die theoretischen Untersuchungen Darwins, um das Verhalten der Staubmasse noch aus einem andern Gesichtspunkte zu betrachten

§ 14. Wir denken uns eine kosmische Staubkugel. Bei unbegrenzter Gültigkeit der Gasgesetze würde sie eine scharf ausgeprägte Oberfläche besitzen. Wir nehmen an, im Abstande A würden diese mangels der hinreichenden Zahl von Zusammenstößen zu gelten aufhören; als Grenzfall nehmen wir an, die Zahl der Zusammenstöße außerhalb A sei gleich Null. Mit dem Radius A schlagen wir eine starre Kugelhülle, entfernen die außen liegenden Steine und lassen die starre Scheide wieder verschwinden. Die Steine, welche nun durch diese freigegebene Kugelfläche nach außen schießen, können wir in zwei Klassen teilen. Die eine Klasse besitzt eine kinetische Energie $\frac{1}{2}mc^2$, wo $c < \sqrt{2gA}$, also kleiner wie jene Geschwindigkeit ist, die der Stein aus einer Ruhelage im Unendlichen auf die Kugel fallend erlangen würde. Alle diese Steine werden wieder auf die Kugel zurückfallen. Die andere Klasse von Steinen mit $c > \sqrt{2gA}$ fliegt bis in unendlich ferne Regionen und geht für die Staubmasse verloren. Ist die Masse der Kugel groß, und liegt A da, wo die Dichte bereits sehr klein geworden, so werden auch verhältnismäßig wenig Steine verloren gehen, und was bei A verloren geht, kann lange Zeit hindurch durch Nachfluß aus dem Innern der Kugel gedeckt werden, ohne daß sich dieselbe merklich ändert. Nehmen wir diesen annähernd stationären Zustand als gekommen an und berechnen die Zahl der Steine, die pro Zeiteinheit in die unendlich fernen Regionen fliegen, so erhalten wir ein Maß dafür, in welcher Menge die Kugel pro Zeiteinheit an Masse verliert, oder kurz ausgedrückt, mit welcher Geschwindigkeit sie abdampft. Würden wir hierfür zu große Beträge finden, so könnte eine Staubmasse keine Beständigkeit haben, falls sie nicht von außen mit neuer Masse gespeist würde.

Wir nehmen auf der Oberfläche der Kugel ein Flächenelement $d\omega$ an. Ist in der Umgebung desselben die Anzahl Steine pro Volumeinheit N und das mittlere Geschwindigkeitsquadrat = \bar{V}^2 , so ist hier die Anzahl Steine, deren Geschwindigkeit zwischen V und $V + dV$ liegt,*)

$$N\psi(V)dV = N \cdot 6 \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}} \frac{1}{\bar{V}^3} V^2 e^{-\frac{3V^2}{2\bar{V}^2}} dV.$$

*) H. Helmholtz, Vorlesungen über Theorie der Wärme. Seite 398. 1903.

Diese Geschwindigkeiten sind regellos verteilt. Also ist, wie eine leichte Überlegung zeigt, die Anzahl dieser Steine, deren Geschwindigkeit mit der nach außen gerichteten Flächennormale in einem spitzen Winkel zwischen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ liegt, gleich

$$N\psi(V)dV \frac{1}{2} \sin \varepsilon d\varepsilon = N \cdot 3 \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{1}{V^3} V^3 e^{-\frac{3V^2}{2V^2}} dV \sin \varepsilon d\varepsilon.$$

Diejenigen dieser Steine, welche $d\omega$ in der Zeit dt durchsetzen, sind enthalten in einem Zylinder von der Grundfläche $d\omega$ und der Kantenlänge Vdt in Richtung V ; sein Inhalt ist $V \cos \varepsilon d\omega dt$. Die Anzahl Steine, die mit den Geschwindigkeiten zwischen V und $V + dV$ das Element $d\omega$ in Richtungen zwischen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ durchsetzt, ist somit

$$\begin{aligned} & N\psi(V)VdV \frac{1}{2} \sin \varepsilon \cos \varepsilon d\varepsilon d\omega dt \\ &= N 3 \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{1}{V^3} V^3 e^{-\frac{3V^2}{2V^2}} dV \sin \varepsilon \cos \varepsilon d\varepsilon d\omega dt. \end{aligned}$$

Um alle in der Zeit dt durch $d\omega$ fliegenden Steine mit einer Geschwindigkeit zwischen der erwähnten Geschwindigkeit $c = \sqrt{2}gr$ und ∞ zu erhalten, haben wir zu integrieren für V von c bis ∞ , für ε von 0 bis $\frac{\pi}{2}$. Die zweite Integration liefert $\frac{1}{2}$. Multiplizieren wir noch mit der Masse des einzelnen Steines m , so gibt $mN = \varrho$ gramm cent⁻³ die Dichte bei $d\omega$ an, und wir erhalten für die $d\omega$ in dt passierende Masse

$$\frac{\text{Masse}}{d\omega dt} = \varrho \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{1}{V^3} \int_c^\infty V^3 e^{-\frac{3V^2}{2V^2}} dV \text{ gramm.}$$

Das Integral läßt sich leicht berechnen. Setzen wir

$$\int_c^\infty V^3 e^{-\frac{3V^2}{2V^2}} dV = \int_0^\infty V^3 e^{-\frac{3V^2}{2V^2}} dV - \int_0^c V^3 e^{-\frac{3V^2}{2V^2}} dV,$$

ferner $\frac{3V^2}{2V^2} = x^2$ und beachten, daß

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{-x^2} dx &= -\frac{1}{2} \int x^2 d e^{-x^2} = -\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} + \int x e^{-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2} e^{-x^2}, \end{aligned}$$

so erhalten wir durch leichte Rechnung

$$(253) \quad \frac{\text{Masse}}{d\omega dt} = \frac{1}{3} \varrho \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \bar{V} \left(1 + \frac{3c^2}{2\bar{V}^2} \right) e^{-\frac{3c^2}{2\bar{V}^2}}.$$

Hierin haben wir zu setzen $c^2 = 2gA = \frac{2GM}{A}$ und erhalten

$$(254) \quad \frac{\text{Masse}}{d\omega dt} = \frac{1}{3} \varrho \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \bar{V} \left(1 + \frac{3GM}{A\bar{V}^2} \right) e^{-\frac{3GM}{A\bar{V}^2}}.$$

Drücken wir $\frac{3GM}{A\bar{V}^2}$ durch die Variablen u_1 und r_1 aus, Gleichung (252), so erhalten wir $-\frac{n}{n-1} \frac{r_1 u_1'}{u_1}$, r_1 gleich der Strecke, die auf die Länge A gedehnt ist. Wir rechnen ein bestimmtes Beispiel. In der isotherm-adiabatischen Staubmasse, die wir in Tabelle 18 darstellt, legen wir die verdampfende Oberfläche bei $r = 6,0156 \cdot 10^{14}$ cent = 40,239 Erdbahnradien; dadurch ist eine Schicht von 4,324 Erdbahnradien Dicke entfernt worden. Diese Stelle ist also sehr weit nach Innen liegend gewählt worden. Die neue, nicht mehr belastete Oberfläche sendet Steine aus, deren Menge durch (254) bestimmt ist. Wir berechnen aus Tabelle 18 (oder der Tabelle Seite 194, für $r_1 = 4,5$) für diese Stelle $\frac{3GM}{A\bar{V}^2} = \frac{3gA}{\bar{V}^2} = 25,640$ und damit

$$\frac{\text{Masse}}{d\omega dt} = \varrho \cdot 7,098 \cdot 10^{-6} = 9,0256 \cdot 10^{-19} \cdot \frac{\text{Gramm}}{d\omega dt}.$$

Da ein Jahr = $3,156 \cdot 10^7$ Sekunden, so würde im Laufe eines Jahres eine Schicht von etwa 2 Meter Dicke verloren gehen, im Laufe von 1 Millionen Jahren eine Schicht von $2 \cdot 10^8$ Kilometer Dicke, die gegenüber dem Radius von der Größenordnung $6 \cdot 10^9$ Kilometer nicht in Betracht kommt. In 30 000 Millionen Jahren würde der Radius erst um 1 % sich verkürzt haben. Im Laufe einer Sekunde verliert die Kugel etwa $4 \cdot 10^{12}$ Gramm Masse; im Laufe einer Million Jahre etwa 10^{46} Gramm, die gegenüber der Gesamtmasse von 10^{83} Gramm nicht in Betracht kommt. Nun können wir mit der Grenze A noch nach außen rücken; c würde sich wenig ändern, \bar{V} sehr stark abnehmen, so daß wir bald zu Verlusten kommen, die gar keine Rolle mehr spielen. Bevor wir aber den Schluß ziehen, daß eine Staubmasse durch Abdampfen praktisch genommen nur unmerklich an Masse verliert, selbst in Zeiträumen, mit denen wir in der Entwicklungsgeschichte der Himmelskörper rechnen müssen, haben wir zwei Bedenken zu erörtern.

Der geringe Verlust kommt in erster Linie daher, daß in der Schicht A nur wenig Steine vorhanden sind, deren Geschwindigkeit $c = \sqrt{2gA}$ übersteigt. Es ist nicht schwer, ihre Zahl pro Volumeneinheit zu berechnen. Sie beträgt

$$N \cdot 6 \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{1}{V^3} \int_c^\infty V^2 e^{-\frac{3c^2}{2V^2}} dV = N \left[1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{3c^2}{2V^2}} e^{-\frac{3c^2}{2V^2}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{3c^2}{2V^2}} e^{-x^2} dx \right].$$

In dem oben berechneten Beispiel war $\frac{3c^2}{2V^2} = 25,640$; $\int_0^{25,640} e^{-x^2} dx$ unterscheidet sich nur um ∞ wenig von $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, so daß wir erhalten

$$N \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{25,640} e^{-25,640} = N \cdot 4,1845 \cdot 10^{-11}.$$

Die überwiegende Masse der Steine fällt also wieder zurück. Nun wird aber ein Teil derselben in so entfernte Regionen fliegen, daß die Zeit bis zu ihrer Rückkehr in Betracht kommt zu den Zeiten, mit denen wir zu rechnen haben, so daß der stationäre Zustand, den wir oben zugrunde legten, praktisch nicht eintritt, und der Massenverlust viel größer wird, als oben berechnet. Dieser wird noch aus einem zweiten Grunde steigen. Wir dürfen nicht eine einzelne Staubkugel im leeren Raum betrachten, sondern haben immer zu berücksichtigen, daß in dem Raum unseres Fixsternsystems eine ungeheure Zahl von Anziehungszentren verteilt sind. Durch diese wird eine nicht abzuschätzende Zahl von Steinen abgefangen und der Massenverlust vergrößert. Aber diese Anwesenheit fremder Massen muß wieder zur Vergrößerung der Staubkugel beitragen, die ihrerseits Steine fremden Ursprungs abfangen wird. Versuchen wir einen Anhaltspunkt zu gewinnen, die Menge der letzteren abzuschätzen. Als untere Grenze für die Anzahl Meteore, die pro Stunde in die Atmosphäre der Erde eintritt, kann man 450 000 annehmen*); und liefert jedes derselben fünf Gramm kosmischen Staubes, so beträgt der Massenzuwachs der Erdoberfläche pro cent² und sek $1,2 \cdot 10^{-16}$ Gramm; er kann aber auch leicht 100 mal größer angenommen werden; (als obere Grenze ergäbe sich etwa eine 10^4 mal größere Menge). Wir wissen nun nicht, ob sich in der Umgebung einer kosmischen Staubmasse von den oben angenommenen Dimensionen Meteorite in ähnlicher Raumdichte herumtreiben, wie in der Umgebung der Erde. Dies zugegeben, so würde ihr Gewinn an Masse 10^3 , aber auch leicht 10^5 mal größer sein, wie der oben berechnete Massenverlust. Dies macht den Schluß äußerst wahrscheinlich, daß die Ungültigkeit der Gasgesetze in den äußersten

*) Ich entnehme diese und die folgenden Zahlen einem Aufsatze: R. Radau, *Étoiles filantes et comètes. Annuaire 1903.*

Schichten einer Staubkugel deren Existenzfähigkeit nur unmerklich beeinträchtigt. Die Steine waren wohl von Anfang an, weit im Raum verteilt, nicht zu einer kosmischen Staubmasse vereinigt; die Kraft, welche sie zu einer solchen zusammengezwungen hat, wird auch imstande sein, dieselbe dauernd zu erhalten.

Diese Ausführungen lassen sich qualitativ und quantitativ auf Gaskugeln übertragen. In den äußersten Partien wird die Dichtigkeit der Gase, die Anzahl der Moleküle pro Volumeneinheit, und die Energie der fortschreitenden Bewegung derselben so klein, daß Zusammenstöße nicht mehr in genügender Zahl auftreten, um das Maxwell'sche Verteilungsgesetz aufrecht zu erhalten. Nimmt man als extremsten Fall an, daß von einem gewissen Grenzradius an die Zusammenstöße überhaupt aufhören, und diese freigegebenen Moleküle dem Newton'schen Gesetze der Massenanziehung gehorchen, so erhält man als obere Grenze für die Verdampfungsgeschwindigkeit der Gaskugel wiederum Formel (254), und z. B. für eine isotherm-adiabatische Gaskugel von der gleichen Masse und Ausdehnung, wie die angenommene Staubmasse, auch dieselben Werte für den Massenverlust. Zwar wird bei Kontraktion der Kugel, (und überhaupt bei Annahme größerer Dichte), ϱ größer, der Massenverlust dadurch steigen. Allein wir haben gezeigt, daß der entscheidende Faktor $\frac{3c^2}{2V^2}$ in den Variablen r_1 und u_1 ausgedrückt werden kann und gleich $-\frac{x}{x-1} \frac{r_1 u_1'}{u_1}$ ist. In dem Maße, wie durch Vergrößerung der Dichte und Erhöhung der Temperatur bei Kontraktion die Anzahl der Zusammenstöße zunimmt, kann die kritische Grenze A auf größere Werte von r_1 gelegt werden. Da hier aber bei wachsendem r_1 der Faktor $-\frac{r_1 u_1'}{u_1}$ rasch bis ∞ zunimmt, so wird die Exponentialgröße in (254) außerordentlich rasch abnehmen, ebenso der Massenverlust. Er wird auch zum Teil wieder gedeckt durch Zuflug von Gasmolekülen fremden Ursprungs. Das Aufhören der Gasgesetze verwischt wohl die theoretische, scharfe Oberfläche einer Gaskugel, allein außerhalb derselben nimmt die schon außerordentlich geringe Dichte so rasch ab, daß wir sie praktisch bald gleich Null annehmen können. Wir treffen dann nur noch einzelne freie Moleküle an, also Gase in einem Zustande der Verdünnung, dessen Eigenschaften uns gänzlich unbekannt, und die nicht mehr als Gase erkenntlich sind. Ob die Komponenten dieser freien Moleküle in Perioden schwingen können, die im Gaszustande durch die äußerst raschen Zusammenstöße verhindert werden, und so die freien Mole-

küle in Wellenlängen leuchten können, die dem Gase nicht zu kommen, wodurch die unbekannten Linien äußerst verdünnter Gebilde, wie der Nebelflecke, der Korona usw. erklärt würden, entzieht sich unsern heutigen Kenntnissen.

§ 15. Wir haben noch auf den Energieumsatz der sich kontrahierenden Staubmassen zurückzukommen. In jeder polytropen oder isotherm-polytropen Gaskugel ist (Gl. (113)) $\frac{(\epsilon)}{\psi} = -\frac{1}{3(x-1)}$, speziell bei einatomigen Gasen $\frac{(\epsilon)}{\psi} = -\frac{1}{2}$. Die Arbeit, die durch Abnahme des ψ gewonnen, wird zu gleichen Teilen ausgestrahlt und zur Vermehrung der molekularen Energie, in diesem Falle nur in der lebendigen Kraft der fortschreitenden Bewegung bestehend, aufgewendet. Wir hatten aus den Grundlehren der kinetischen Gastheorie Formel (39) $\frac{dL}{dW} = \frac{1}{2}$ abgeleitet, welche dasselbe aussagt. In einer kosmischen Staubmasse aber haben wir ein einatomiges Gas im Modell vor uns und können diese Resultate unmittelbar übertragen. Nimmt der Radius ab, so leisten die Gravitationskräfte Arbeit, die zur Hälfte ausgestrahlt, zur Hälfte zur Vermehrung der lebendigen Kraft der Steine verwendet wird. Es ist leicht, hier noch weiter in diesen Mechanismus einzudringen. Die unvollkommene Elastizität der Steine gibt bei jedem Zusammenstoß Anlaß zu Verlusten von lebendiger Kraft. Derselbe kommt in Erhitzung der Steine, Bildung von Dämpfen usw. wieder zum Vorschein. Die nun langsamer fliegenden Steine vermögen den Druck der außen liegenden Massen nicht mehr zu äquilibrieren, sie geben nach, fallen dem Zentrum näher und gewinnen dabei von neuem an kinetischer Energie. Und zwar ist, wenn im neuen Gleichgewichtszustande die Kugel wieder nach derselben Polytropen gebaut ist, dieser Gewinn so groß, daß gerade der vorige Verlust lebendiger Kraft gedeckt, und ein ihm gleicher Betrag noch dazu gekommen ist. Die nun rascher als vorher fliegenden, dem Zentrum näheren Steine vermögen nun das größer gewordene Gewicht der dem Zentrum näher gekommenen äußeren Massen gerade zu äquilibrieren. Es ist von fundamentaler Bedeutung, sich die Bedeutung der vorhin durch andere Schrift hervorgehobenen Stelle klar zu machen. Denn zentral gelegene Steine würden, da hier der Wert von g beinahe gleich Null, durch ihren Fall wenig gewinnen. Der Wert von g ist bei mittleren Werten von r (vgl. die Tabellen 16—18) ein Maximum; würde jeder Stein, was homogener Kontraktion entspricht, proportional seinem Abstande vom Zentrum fallen, so würde die Vermehrung der kinetischen

Energie bei mittleren Werten von γ am größten sein, und ein neuer Gleichgewichtszustand ist so nicht möglich. Es werden Konvektionsströme eintreten; und wird deren Ablauf so geregelt, daß wieder dieselbe Polytrope resultiert, so gelten die oben ausgesprochenen Resultate und *jeder Stein vermehrt sein mittleres Geschwindigkeitsquadrat \bar{V}^2 proportional V^2* . (Gl. (120)). Genau dasselbe gilt für kontrahierende Gaskugeln. Die eintretende Erhitzung ist am stärksten in mittleren Partien, es werden Strömungen ausgelöst, und erst wenn durch dieselbe die neue Polytrope derselben Klasse wieder hergestellt ist, hat jedes Gasteilchen proportional seiner Temperatur ausgestrahlt und an Temperatur zugenommen. Die zentralen und äußeren Teile haben Energie auf Kosten der mittleren Teile verzehrt. Es sind die mittleren Partien einer Wärme strahlenden Kugel, die am kräftigsten „arbeiten“.

Für die oben angenommene isotherm-adiabatische Staubkugel haben Energie und Selbstpotential folgende Werte (Vgl. Seite 195)

$$(\epsilon) = \frac{0,38449}{\gamma - 1} \frac{G M^2}{R} = 2,0840 \cdot 10^{48} \text{ Erg} = 4,9739 \cdot 10^{40} \text{ Kalorien.}$$

$$\psi = -1,15347 \cdot \frac{G M^2}{R} = 4,1680 \cdot 10^{48} \text{ Erg} = 9,9478 \cdot 10^{40} \text{ Kalorien.}$$

Zieht sich die Kugel, Kugel derselben Klasse bleibend, bis auf Sonnenradius zusammen, so werden $9,94 \cdot 10^{40}$ Kalorien Arbeit gewonnen; davon kann die Hälfte, gleich $4,97 \cdot 10^{40}$ Kalorien ausgestrahlt werden. Dies ist eine Wärmemenge, wie sie die Sonne, bei konstant bleibender Strahlung von 4 Kalorien pro Minute, in 8,3 Millionen Jahren ausstrahlen würde. (Darüber später Kap. XVIII Die Sonne.)

§ 16. Man könnte versuchen, die vorstehenden Untersuchungen auszudehnen auf den ganzen Fixsternkomplex, indem man ihn als kosmische Staubmasse betrachtet. Wir haben Seite 243 angenommen, daß 10^9 Sonnen eine Kugel von $3,1 \cdot 10^{21}$ cent Radius in gleichen gegenseitigen Abständen erfüllen. Wir hätten demnach eine kugelförmige Staubmasse von überall gleicher Dichte vor uns, und zur Anwendung käme Tabelle 16. Die Vergrößerungszahlen der letzten Kolonne sind von der Ordnung $a = 10^9$, $b = \frac{3,1 \cdot 10^{21}}{6,6 \cdot 10^{14}} = 10^7$, $c = 10^{10}$ (Sonnenradius). Die Kriterien $\frac{\Sigma}{\Sigma_s}$ und $\frac{D}{\Sigma}$ wachsen um das 10^{16} -fache. Die statistische Behandlungsweise wäre also nur für die ganz zentralen Partien statthaft, wenn die ganze Betrachtungsweise überhaupt Berechtigung hat, da die mittlere freie Weglänge sich groß herausstellt gegenüber den Dimensionen des Systems. Die Wurzel aus dem mittleren Geschwindig-

keitsquadrat würde um das 10-fache zunehmen; das würde eine mittlere Geschwindigkeit der hier befindlichen Sterne zu 50 Kilometer pro Sekunde ergeben, was mit den wirklich beobachteten Sterngeschwindigkeiten merkwürdig genug übereinstimmt. Die mittlere freie Wegzeit aber betrüge 10^{20} Jahre, und es würde ein reiner Zufall sein, wenn wir Zeuge eines Zusammenstoßes würden. Diese Betrachtungsweise hätte aber zur Voraussetzung, daß der Fixsternkomplex bereits eine Existenzdauer hinter sich hätte, groß im Vergleich zu 10^{20} Jahren. Dadurch käme man auf Zeiten, die unendlich groß sind gegen die Zeiten, die man als Lebensdauer eines leuchtenden Sterns anzunehmen pflegt. Ohne Zusammenstöße, von ruhenden Sternen ausgehend, würde aber (vgl. Seite 243) die Lebensdauer des Fixsternkomplexes als solchen nur von der Größenordnung 10^7 Jahre sein. Aus diesem Dilemma würde man sich am einfachsten und zugleich radikalsten retten können durch die Annahme, in der gegenwärtigen Anordnung des Fixsternkomplexes nur eine zufällige, vorübergehende Erscheinung zu sehen. Dies ganze Gebiet ist durch Beobachtung noch viel zu wenig erforscht, um der theoretischen Behandlungsweise irgend welchen sicheren Stützpunkt zu gewähren.

§ 17. Wir haben oben (§ 7) die Ansicht vertreten, daß bei jedem Zusammenstoß zweier Steine infolge unvollkommener Elastizität und gegenseitiger Reibung ein kleiner Teil kinetischer Energie verbraucht wird zur Verdampfung kleiner Mengen Steinsubstanz und Erhitzung der Dämpfe, oft bis zu so hoher Temperatur, daß sie in sehr hellem Lichte leuchten. Die Zusammenstöße bewirken, daß ein Zusammentreffen einzelner nicht strahlender Steine eine Quelle von Wärme und selbst Lichtstrahlung sein kann. Wir präzisieren diesen Gedankengang, indem wir versuchen, die Menge strahlender Energie zu berechnen, welche die *Volumeneinheit* kosmischer Staubmasse bei gegebenen Werten von p, ϱ, \bar{V}^2 aussendet. Wir nehmen an, dieselbe sei proportional (\sim) der Anzahl der in ihr stattfindenden Zusammenstöße pro Zeiteinheit, sowie der mittleren lebendigen Kraft der Moleküle. Die Anzahl der Zusammenstöße eines Steins ist $\sim \frac{1}{\mathfrak{T}}$; ist die Anzahl der Steine in der Volumeneinheit N , Masse und Geschwindigkeitsquadrat derselben m und \bar{V}^2 , so sei die ausgestrahlte Energiemenge $\Delta Q \sim \frac{Nm\bar{V}^2}{\mathfrak{T}}$ oder $\sim \frac{\varrho\bar{V}^2}{\mathfrak{T}}$. Da aber $\mathfrak{T} \sim \frac{\mathfrak{L}}{\bar{V}}$, und $\mathfrak{L} \sim \frac{1}{\varrho}$, so wird $\Delta Q \sim \varrho^2 \bar{V}^3$, oder, wenn wir wieder statt \bar{V}^2 als Analogie zu einem Gase die entsprechende Temperatur

T einführen, $\Delta Q \sim \rho^{\frac{1}{k}} T^{\frac{1}{k}}$. Macht die Staubmasse polytropen Zustandsänderung durch, so ist während derselben $\frac{T}{\rho^{\frac{1}{k}-1}} = \text{konst.}$, und wir erhalten $\Delta Q \sim T^{\frac{1}{k-1}}$; und speziell für adiabatische Änderung $\Delta Q \sim T^{4.5}$. Auf Gase lassen sich diese Betrachtungen nicht unmittelbar übertragen, da die Wärmeemission nicht herzurühen braucht vom Zusammenstoß unvollkommen elastischer Moleküle. Nehmen wir, um die Größenordnung der Strahlung abzuschätzen, an, ein Gas würde wie ein schwarzer Körper strahlen, so hätten wir für die Masseneinheit $\Delta Q \sim T^4$, und für die Volumeinheit, von Absorption abgesehen, $\Delta Q \sim \rho T^4$. Daraus erhalten wir bei polytroper Zustandsänderung $\Delta Q \sim T^{\frac{4}{k-1}}$, und speziell bei adiabatischer Zustandsänderung $\Delta Q \sim T^{4.5}$. Wir werden also in beiden Fällen die ausgesandte Strahlung pro Volumeinheit unterschätzen, wenn wir sie für Gase und polytropen Staubmassen allgemein setzen $\Delta Q \sim T^4$, da nach der obigen Formel ΔQ mit abnehmenden k zunimmt.

In einer polytropen Gas- oder Staubkugel sind die Massenelemente polytrop ineinander überführbar; die Volumelemente der Kugel strahlen mit mindestens der 4. Potenz der Temperaturen, also von außen nach innen rasch zunehmend. Diese Verteilung der Strahlungsintensität der Volumteile der Kugel wird aber geändert, wenn die Massen in Bewegung sind. Haben die wirkenden Kräfte ein Potential Ω , und sehen wir von Reibung ab, so existiert ein Geschwindigkeitspotential $[\varphi]$; die Eulerschen Gleichungen (Kap. III) lassen sich integrieren und liefern die Beziehung*)

$$(a) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 + \Omega + \int \frac{dp}{\rho} = \text{konst.}$$

Wir nehmen ferner an, daß sich während der zur Beobachtung zur Verfügung stehenden Zeit die Strömung so wenig ändert, daß wir dieselbe als stationär ansehen können; so erhalten wir

$$(b) \quad \frac{1}{2} V^2 + \Omega + \int \frac{dp}{\rho} = \text{konst.}$$

Und wenn die in Bewegung gesetzten Massen auf derselben Polytropen gelegen sind und machen während der Bewegung polytropen Zustandsänderung derselben Klasse durch, so ist $\int \frac{dp}{\rho} = \frac{k}{k-1} HT$, und wir erhalten

*) H. Lamb, Einleitung in die Hydrodynamik. Seite 31. 1884.

$$(255) \quad \frac{k}{k-1} HT + \frac{1}{2} V^2 + \Omega = \text{konst.}$$

die Konstante ist dieselbe für alle Massenteile der Kugel. Ruht die Masse, so steigt die Intensität der Strahlung nach dem Zentrum zu, (nach abnehmendem Ω); treten in der Kugel aber Strömungen auf von eben geschilderter Art, so kann die Verteilung der Strahlungsintensität sich vollständig ändern. Denn nehmen wir an, die Geschwindigkeit der Strömung würde sich in Gebieten, in denen Ω nicht stark variiert, ändern, so würde die Strahlungsintensität sich ändern mit der 8. Potenz der Geschwindigkeit. Ein glühendes Gas, durch eine Röhre von variabelm Querschnitt getrieben, würde in gewaltigen Kontrasten die weitesten Querschnitte (V Minimum) in hellem, die engsten Querschnitte in schwachem, unter Umständen nicht mehr wahrnehmbarem Lichte strahlen lassen. Über die Helligkeitsverteilung einer ruhenden Masse, T nur Funktion von Ω , kann in einer Kugel mit inneren Strömungen sich eine Helligkeitsverteilung als Funktion der Geschwindigkeitsverteilung lagern und dieselbe überwiegen. Die Helligkeitsverteilung gibt dann ein Bild der Geschwindigkeitsverteilung, (nicht der Stromlinienverteilung; siehe darüber den Anhang), worin hell langsam, dunkel rasch entspricht. Dies Prinzip bietet eine Erklärungsmöglichkeit der in den verschiedensten kosmischen Gebilden beobachteten Helligkeitsdifferenzen. Je nach der Geschwindigkeitsverteilung innerer Strömung können uns Nebel als Spiral- oder Ringnebel erscheinen; in der in der Hauptmasse vielleicht unsichtbaren, bewegten Masse der Kometen können sich in gewissen Gebieten die Geschwindigkeiten vermindern und dieselben hell hervortreten lassen, wie in dem ruhenden, vielleicht noch durch kleines Ω ausgezeichneten Kopfe, und uns die Entwicklung von Schweifen vortäuschen, wo es sich nur um eine Änderung der Geschwindigkeit bereits vorhandener Massen handelt. Würde der Saturnring als kosmische Staubmasse mit einem Geschwindigkeitspotential rotieren, d. h. würde die Lineargeschwindigkeit proportional dem Radius abnehmen, so würde sich dessen Eigenlicht von außen nach innen außerordentlich stark vermindern. In allen diesen Fällen bleibt aber die Summe der Geschwindigkeitsquadrate der geordneten Bewegung und der ungeordneten Bewegung der kleinsten Teilchen plus der durch äußere Kräfte geleisteten Arbeit Ω konstant.

Fünfzehntes Kapitel.

Nebelflecke und Doppelsterne.

§ 1. Die Versuche, Einsicht in die Natur der Nebelflecke zu gewinnen, können sich nur auf wenige, durch Beobachtung ermittelte Tatsachen stützen.

In weit entfernten Regionen des Fixsternhimmels treten schwach leuchtende Gebilde auf, deren Dimensionen oft einige Bogenminuten betragen, woraus Abmessungen derselben folgen, die dem tausendfachen Durchmesser der Erd- oder selbst der Neptunbahn vergleichbar sind. Diese Gebilde lassen sich in drei Klassen einteilen. Die erste Klasse verrät sich bei genügend starker Vergrößerung als Sternhaufe; diese kommen für die nachfolgenden Untersuchungen nicht mehr in Betracht. Die zweite Klasse gibt trotz ihres schwachen Lichtes ein auf Auge und Platte verhältnismäßig kräftig wirkendes Spektrum. Die Strahlung, nur aus einer geringen Zahl monochromatischer Strahlenarten zusammengesetzt, liefert im Gegensatz zu derjenigen der Sternhaufen kein kontinuierliches Spektrum, sondern bleibt in wenigen hellen Linien konzentriert, deren Wirkung unabhängig von der Dispersionskraft des Spektralapparates bleibt. Nur ein Teil dieser Linien kann durch Laboratoriumsversuche wiedergefunden werden. Die Nebelflecke dieser Klassen bestehen somit aus leuchtenden Gasen oder sind kosmische Staubmassen. Die dritte Klasse soll sich durch ihr kontinuierliches Spektrum als Sternhaufe verraten, der dem Auflösungsvermögen unserer heutigen Instrumente widersteht. Diese Schlußfolgerung ist nicht zwingend. Wir wissen durch die Versuche von Frankland*), daß Wasserstoff schon bei einem Drucke von 360 mm Hg ein glänzendes, kontinuierliches Spektrum liefert. Liegen im Visionsradius große Wasserstoffmassen, so kann das Spektrum schon bei viel geringerem Drucke kontinuierlich werden, da das Licht einer Linie nach den Seiten wohl sehr rasch, aber nicht unstetig auf Null herabsinkt. Ein echter Nebelfleck kann also auch ein kontinuierliches Spektrum liefern, falls in seiner zentralen Partie nicht zu geringe Dichtigkeiten herrschen.

Manche Nebelflecke scheinen das Licht eingeschlossener, oder vielleicht auch weiter zurückliegender Sterne beinahe ungeschwächt hindurchgehen zu lassen; in diesem Falle haben wir dieselben als kosmische Staubmassen oder Gase in außerordentlicher Verdünnung zu betrachten.

*) Frankland, On the combustion of hydrogen and carbonic oxyde in oxygen under great pressure. Proc. of they Roy. Soc. T. 16. Seite 419. London 1868.

In diesen wenigen Sätzen ist alles enthalten, was wir auf diesem Gebiete an sicherer Kenntnis besitzen. Merkwürdigerweise stößt man aber auf bestimmt ausgesprochene Behauptungen von sehr niedriger Temperatur dieser Gebilde. Wir werden sehen, daß dieselben unbegründet sind.

Ich möchte im folgenden versuchen zu zeigen, daß man bei einigen nicht unmöglichen Annahmen die in Gasnebeln möglichen Druck-, Dichte- und Temperaturverhältnisse wenigstens der Größenordnung nach abschätzen kann.

§ 2. Wenn die photographische Abbildung eines Nebelfleckes ein treues Bild seiner Massenverteilung gibt, was nach den Arbeiten von Hartmann*), wobei sich die Konfiguration durch die zur Aufnahme benutzte Wellenlänge stark beeinflußt zeigt, nicht der Fall zu sein braucht, so gibt es Ansammlungen von Nebelmassen, die heftige Bewegungsvorgänge vermuten lassen. In andern Nebeln ist ruhende Masse nicht unmöglich; diese wird infolge innerer Gravitation allmählich in einem Gleichgewichtszustand angelangt sein. Wir nehmen an, daß auf diese Weise eine polytrope Gaskugel entstanden ist; das Aussehen mancher Nebelflecke als runder Scheiben mit verwaschenen Rändern steht damit nicht im Widerspruch. Auf diese Gaskugeln wenden wir die im ersten Teile gewonnenen Sätze an.

Wir nehmen an, die Gaskugel sei als adiabatische Kugel in indifferentem Gleichgewicht, setzen also $k = \alpha$. Die polytrope Temperatur Θ_k geht über in die adiabatische Temperatur Θ . Wir untersuchen den Aufbau aus ein- und zweiatomigen Gasen, $\alpha = \frac{5}{3}$, resp. $\frac{7}{5}$, $n = 1,5$, resp. $2,5$; als Repräsentanten dieser Gase wählen wir dissoziertes, resp. gewöhnliches, zweiatomiges Wasserstoffgas. In bezug auf die Massen- und Größenverhältnisse ist der Phantasie selbstverständlich der weiteste Spielraum geboten. Wir gehen aus von einem Nebel, dem die Kant-Laplacesche Nebelhypothese Wahrscheinlichkeit gibt, indem wir die Sonne im früheren Zustande als Gasball betrachten, der sich bis zur Neptunbahn erstreckte. Wir setzen also die Masse M unseres Gasballen gleich der Sonnenmasse $= 1,94302 \cdot 10^{38}$ gramm, seinen Radius $= 30$ Erdbahnradien $= 4,4750 \cdot 10^{14}$ cent.

Dichte, Druck und Temperatur im Mittelpunkte erhalten wir durch Anwendung der kosmogenetischen Flächengleichungen (105), (109) und (107). Wir haben (105)

$$\frac{\rho_0 R^3}{M} = C_{(\rho_0, R, M)},$$

*) Hartmann, Monochromatic Photographs of the Orion Nebula. *Astroph. Journal XXI.* Seite 389. 1905.

entnehmen für $C_{\varrho, \mathfrak{R}, \mathfrak{M}}$ der Tabelle Seite 115 den Zahlwert, unabhängig von der Gaskonstanten H ,

$$\kappa = \frac{5}{3}, \quad C_{\varrho, \mathfrak{R}, \mathfrak{M}} = 1,4325$$

$$\kappa = \frac{7}{5}, \quad C_{\varrho, \mathfrak{R}, \mathfrak{M}} = 5,7479$$

und erhalten für die Dichte im Mittelpunkt, unabhängig von H ,

$$\kappa = \frac{5}{3}, \quad \varrho_0 = 3,0851 \cdot 10^{-11} \text{ gramm cent}^{-3}$$

$$\kappa = \frac{7}{5}, \quad \varrho_0 = 1,2379 \cdot 10^{-10} \text{ gramm cent}^{-3}.$$

Wir haben ferner (109)

$$\frac{p_0 \mathfrak{R}^4}{\mathfrak{M}^2} = C_{(p_0, \mathfrak{R}, \mathfrak{M})} \text{ gramm}^{-1} \text{ cent}^3 \text{ sek}^{-2}.$$

Die Tabelle Seite 117 gibt, unabhängig von der Gaskonstanten H ,

$$\kappa = \frac{5}{3}, \quad C_{(p_0, \mathfrak{R}, \mathfrak{M})} = 5,1344 \cdot 10^{-8}$$

$$\kappa = \frac{7}{5}, \quad C_{(p_0, \mathfrak{R}, \mathfrak{M})} = 2,6911 \cdot 10^{-7},$$

und wir erhalten für den Druck p_0 im Mittelpunkt

$$\kappa = \frac{5}{3}, \quad p_0 = 4,7906 \text{ Dynen cent}^{-2}$$

$$= 4,7261 \cdot 10^{-6} \text{ Atmosphären}$$

$$\kappa = \frac{7}{5}, \quad p_0 = 2,5109 \cdot 10^1 \text{ Dynen cent}^{-2}$$

$$= 2,4771 \cdot 10^{-5} \text{ Atmosphären.}$$

Die Mittelpunktstemperatur T_0 können wir aus ϱ_0 und p_0 nach der Zustandsgleichung $\frac{p}{\varrho} = HT$ berechnen, oder die Flächen-Gleichung (107)

$$\frac{T_0 \mathfrak{R}}{\mathfrak{M}} = C_{(T_0, \mathfrak{R}, \mathfrak{M})} \text{ gramm}^{-1} \text{ cent}$$

anwenden. In der Tabelle Seite 116 ist $C_{(T_0, \mathfrak{R}, \mathfrak{M})}$ für die Gaskonstante $H = 1$ wiedergegeben. Um auf den vorliegenden Fall anzuwenden, sind diese Werte durch die Gaskonstanten $H_H = 8,2962 \cdot 10^7$ resp. $H_{H^2} = 4,1481 \cdot 10^7$ zu dividieren. Dies gibt für

$$\kappa = \frac{5}{3}, \quad C_{(T_0, \mathfrak{R}, \mathfrak{M})} = 4,3204 \cdot 10^{-16}$$

$$\kappa = \frac{7}{5}, \quad C_{(T_0, \mathfrak{R}, \mathfrak{M})} = 1,1286 \cdot 10^{-15}$$

und für

$$\kappa = \frac{5}{3}, \quad \text{dissozierten Wasserstoff } T_0 = 1,8717 \cdot 10^8$$

$$\kappa = \frac{7}{5}, \quad \text{zweiatomigen Wasserstoff } T_0 = 4,8895 \cdot 10^8.$$

Druck, Dichte und Temperaturgang längs des Radius lassen sich mit Hilfe der Tabellen 4 u. 6 leicht angeben; die Einheit der Ordinaten ist gleich p_0 , ρ_0 resp. T_0 zu nehmen und die Abszisse im Verhältnis $\frac{r}{r_1(u_1=0)}$ zu strecken.

Die Werte von p_0 entsprechen Drucken von 0,0036 resp. 0,019 mm Quecksilber, sind also im Laboratorium noch herstellbar. Da die Anzahl von Molekülen pro cent³ bei 0° und 760 mm Quecksilber von der Größenordnung 10^{19} ist, so entsprechen den gefundenen Werten von ρ_0 eine Anzahl Moleküle pro cent³ von der Größenordnung 10^9 . Auf die innern Partien des Gasballes, in dem die Hauptmasse desselben abgelagert ist, sind somit die Gasgesetze noch anwendbar.

§ 3. Ein Lichtstrahl, der diesen Gasball zentral durchsetzt, hat einen Weg von 60 Erdbahnradien zurückzulegen. Er trifft zwar auf Gase von außerordentlicher Verdünnung, allein wir können a priori nicht beurteilen, wie stark sich deren Absorptionskraft bei der ungeheuren zu durchstrahlenden Strecke bemerkbar macht. Der näheren Untersuchung dieses Punktes sollen die nächsten Betrachtungen gewidmet sein.

Angesichts unserer minimalen Kenntnis der Schwächung der Strahlung beim Durchgang durch permanente Gase sind wir zu einer Hypothese gezwungen. Die Annahme sei folgende: Passiert ein unendlich dünnes Bündel homogener Strahlung eine Schicht eines permanenten Gases, so ist die absorbierte Energiemenge proportional der Anzahl der von der Strahlung getroffenen Molekülen, unabhängig von Druck, Temperatur und Molekulart. Daraus folgt: Nehmen wir einen geraden Zylinder vom Querschnitt Eins, enthaltend eine Gasmasse M , in einem Querschnitt nicht an Dichte variierend, so ist die Schwächung eines Lichtbündels, das diesen Zylinder längs seiner Erzeugenden durchstrahlt, unabhängig von der Anordnung des Gases längs der Zylinderachse. Denn die Schwächung auf der kleinen Strecke Δx ist gleich $a \Delta x$ und wird, wenn sich dies Gasvolumen bei gleichem Querschnitt auf die Länge $n \Delta x$ streckt, gleich $\frac{a}{n} \cdot n \Delta x$. Damit haben wir die Möglichkeit, eine praktische Einheit zu gewinnen, mit der wir die Absorptionsfähigkeit von Gassäulen vergleichen können.

Eine Strahlungsquelle, etwa die Sonne, stehe im Zenith und durchstrahle die Atmosphäre. Die Absorptionsfähigkeit derselben wird sich nach unserer Annahme nicht ändern, wenn wir die Luftmassen

längs Vertikalen verschieben und beliebig temperieren. Wir werden später zeigen (Kapitel XVII), daß die Masse Atmosphäre, durchwegs von der Dichte $0,001293$ gramm cent $^{-3}$ und der Temperatur 0° angeordnet, sich nahezu bis zu einer Höhe, gleich der Höhe der homogenen Atmosphäre $7,9905 \cdot 10^5$ cent, erstrecken würde. Lassen wir diese Atmosphäre noch weiter zusammensinken, bis ihre Dichte $= 1$ gramm cent $^{-3}$ geworden, so wird ihre Höhe $= 7,9905 \cdot 10^6 \cdot 0,001293 = 10,33 \cdot 10^9$ cent. Eine Schicht atmosphärischer Luft von der Dichte 1 gramm cent $^{-3}$ und der Dicke 10^8 cent wird ziemlich genau so absorbieren, wie unsere Atmosphäre bei senkrechter Durchstrahlung. *Die Absorptionskraft einer Luftsicht von zehn Meter Dicke, aufgebaut aus atmosphärischer Luft von der absoluten Dichte Eins, ist die Einheit, mit der wir die Absorptionsfähigkeit von Gasschichten vergleichen.*

Dabei lassen wir dahingestellt, ob dies Absorptionsvermögen der Atmosphäre durch wirkliche Absorption oder diffuse Reflexion zu stande kommt.

Bei Anwendung dieser Einheit müssen wir vorsichtig verfahren.

Wir kennen, und auch das nur angenähert, die Absorptionsfähigkeit unserer Atmosphäre gegenüber der Gesamtstrahlung, die von der Sonne einfällt, nicht aber genügend genau in bezug auf die einzelne Wellenlänge. Wir können deshalb weder schließen auf ihr Verhalten gegenüber einer Strahlung, anders zusammengesetzt wie die Sonnenstrahlung, noch auf die Absorptionsfähigkeit von n hintereinandergestellten gleichen Atmosphären gegenüber der Sonnenstrahlung. Doch können wir sicher sein, daß, wenn wir die Absorptionskraft einer Gasschicht gegenüber einer Strahlung, ähnlich der Sonnenstrahlung, gleich oder kleiner finden als die gewählte Einheit, sich dieselbe nicht undurchlässiger verhalten wird wie die Atmosphäre; daß sie undurchlässiger wird, je mehr Einheiten sie enthält, und daß wir sie praktisch als undurchlässig betrachten können, wenn sie $40 - 50$ Einheiten übersteigt. Denn fällt auf 1 cent 2 Fläche einer ebenen Luftsicht von der Dichte ϱ gramm cent $^{-3}$ und der Dicke dx cent eine Strahlungsmenge S , so erleidet dieselbe beim Durchgang eine Schwächung im Betrage von $dS = - Sa\varrho dx$, $a = \text{konst.}$; die Strahlungsmenge S_0 , die auf eine Schicht von der Dicke x auffällt, wird beim Passieren derselben somit geschwächt auf den Betrag

$$(256) \quad S = S_0 e^{-a \int_0^x \varrho dx}.$$

Durchsetzt eine Strahlung senkrecht die Erdatmosphäre, so haben wir gemäß der oben gegebenen Festsetzung der Absorptionseinheit

$\int_0^r \varrho dx = 1$ zu setzen; für $\frac{S}{S_0}$, den Transmissionskoeffizienten derselben, nehmen wir einen mittleren Wert 0,8 an*), und erhalten dann $a = 0,223$, also etwa $\frac{1}{5}$. Durchsetzt die Strahlung \mathfrak{A} Absorptionseinheiten, so ist deren Transmissionskoeffizient = $(0,8)^{\mathfrak{A}}$, und wir erhalten folgende kleine Tabelle

\mathfrak{A}	$\frac{S}{S_0}$
1	0,80
10	0,11
20	0,012
30	0,0012
40	0,00013
50	0,000014
100	$2,0 \cdot 10^{-10}$.

50 Einheiten lassen nur noch $\frac{1}{100000}$ Licht passieren; 10 Einheiten würden die Größe eines Fixsterns um 2, 20 Einheiten bereits um $4\frac{1}{2}$ Größenklassen herabsetzen.

§ 4. Um das Absorptionsvermögen \mathfrak{A} einer Gaskugel in dieser Einheit auszudrücken, verfahren wir wie folgt. Wir legen zentral durch dieselbe einen geraden Zylinder vom Querschnitt 1 cent². Gegenüber den Dimensionen der zu behandelnden Gaskugeln können wir denselben als unendlich dünn betrachten und die Dichte in einem Querschnitt als konstant annehmen. Die in diesem Zylinder eingeschlossene Masse M beträgt

$$M = 1 \text{ cent}^2 \cdot 2 \int_0^{\infty} \varrho dr \text{ gramm},$$

was wir mit Benutzung der Beziehungen (S. 69) $\varrho = U^n u_1^n$ gramm cent⁻³,

$$r = \frac{1}{U^{\frac{n-1}{2}} \alpha} r_1 \text{ cent}, \quad \alpha^2 = \frac{4\pi G}{k - 1} H \Theta \text{ gramm}^{-1} \text{ cent schreiben}$$

können

$$M = 1 \text{ cent}^2 \cdot 2 \frac{U^n}{U^{\frac{n-1}{2}} \alpha} \int_0^{r_1(u_1=0)} u_1^n dr_1 \text{ gramm.}$$

Das Integral bezeichnen wir mit \mathfrak{J} . Mit Hilfe der kosmogenetischen

*) W. Valentiner, Handwörterbuch der Astronomie; I. Seite 331. 1897.

Flächengleichung (103) drücken wir U^n durch Masse \mathfrak{M} und Radius \mathfrak{R} der Gaskugel aus und erhalten

$$(257) \quad M = 1 \text{ cent}^3 \cdot \frac{\mathfrak{M}}{2\pi\mathfrak{R}^2} \cdot \frac{\mathfrak{J}}{(u_1')_{u_1=0}} \text{ gramm.}$$

Das Integral \mathfrak{J} berechnet sich mit Hilfe der Tabellen 4 und 6 und Anwendung der Simpsonschen Regel zu

$$(258) \quad \begin{aligned} n &= 1,5, \quad k = \frac{5}{3}, \quad \mathfrak{J}_{\frac{5}{3}} = 1,6888 \\ n &= 2,5, \quad k = \frac{7}{5}, \quad \mathfrak{J}_{\frac{7}{5}} = 1,4656. \end{aligned}$$

Benutzen wir weiter die Werte von u_1' für $u_1 = 0$, so erhalten wir für

$$(259) \quad \begin{aligned} n &= 1,5, \quad k = \frac{5}{3}, \quad M_{\frac{5}{3}} = 1 \text{ cent}^3 \cdot 8,3128 \frac{\mathfrak{M}}{2\pi\mathfrak{R}^2} \text{ gramm} \\ n &= 2,5, \quad k = \frac{7}{5}, \quad M_{\frac{7}{5}} = 1 \text{ cent}^3 \cdot 19,541 \frac{\mathfrak{M}}{2\pi\mathfrak{R}^2} \text{ gramm.} \end{aligned}$$

Der Zahlenwert von M ist gleich der Höhe, gemessen in Zentimetern, welche diese Luftmasse von der Dichte Eins und Querschnitt Eins erreicht. Wir erhalten also in den oben definierten Einheiten den Absorptionswert der Kugel

$$(260) \quad \begin{aligned} n &= 1,5, \quad k = \frac{5}{3}, \quad \mathfrak{A}_{\frac{5}{3}} = \frac{8,3128}{10^3} \frac{\mathfrak{M}}{2\pi\mathfrak{R}^2} \\ n &= 2,5, \quad k = \frac{7}{5}, \quad \mathfrak{A}_{\frac{7}{5}} = \frac{19,541}{10^3} \frac{\mathfrak{M}}{2\pi\mathfrak{R}^2}. \end{aligned}$$

Der Größenordnung nach ist $\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{M}}{2\pi\mathfrak{R}^2} \cdot 10^{-3}$.

Ändert eine Gaskugel von konstanter Masse ihren Radius, indem sie nach derselben Klasse aufgebaut bleibt, so ändert sich ihre Absorptionskraft umgekehrt wie ihr Querschnitt. (Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem Gesetze, daß sich die Gaskugel homogen kontrahiert).

Ich mache nochmals darauf aufmerksam, daß wir diese Betrachtungen nur anwenden dürfen auf Strahlung, ähnlich zusammengesetzt wie Sonnenstrahlung. Gegenüber der aus hellen Linien bestehenden Strahlung eines leuchtenden Gases würde sich der Unterschied verschiedener Gasarten im stärksten Maße bemerkbar machen; gegenüber der Sonnenstrahlung können wir dies Absorptionsvermögen der permanenten Gase als gleich betrachten, und zwar etwa in dem Maße, als die auffallende Strahlungsenergie, enthalten in den jeweils durch selektive Absorption bevorzugten Wellenlängen, klein ist im Verhältnis zur Gesamtenergie der Strahlung.

§ 5. Wenden wir die Gleichungen (260) auf einen Gasball mit den angenommenen Dimensionen an, so erhalten wir

$$\begin{array}{ll} \text{für } n = 1,5 & \mathfrak{A} = 12,774 \\ n = 2,5 & \mathfrak{A} = 30,040. \end{array}$$

Trotzdem die Gasdichte an der dichtesten Stelle nur $3,085 \cdot 10^{-11}$ resp. $1,238 \cdot 10^{-10}$ gramm cent⁻³ beträgt, trifft ein den Gasball zentral durchsetzender Lichtstrahl 12,774 resp. 30,040 mal mehr Gas- teilchen an wie bei senkrechter Durchstrahlung unserer Atmosphäre. Sein Transmissionskoeffizient würde 0,12, resp. 0,0012 betragen und das Licht hinter dem Gasball liegender Fixsterne würde schon sehr geschwächt zu uns gelangen. Vergrößern wir den Radius aber um das 3,57 resp. 5,48-fache, so würde der Gasball ebenso durchsichtig sein, wie unsere Atmosphäre senkrecht nach oben.

Die Mittelpunktstemperaturen 2145° resp. 5163° widerlegen die vielfach verbreitete Ansicht, daß Gasmassen in außerordentlicher Verdünnung sich auf sehr niedriger Temperatur befinden müssen. In unserem Beispiel beträgt der Druck im Mittelpunkt allerdings nur wenige tausendstel, resp. hundertstel, Millimeter Quecksilber, aber die Dichte des Gases daselbst ist so gering, daß wir demselben hohe Temperatur, den Molekülen große Geschwindigkeiten geben müssen, um diesen Druck zu äquilibrieren. Dabei haben wir die Kugel aus den leichtesten Gasen aufgebaut. Wählen wir andere Gase, so bleiben p_0 und ϱ_0 ungeändert, also auch HT_0 . Da sich die Gaskonstanten umgekehrt wie die Molekulargewichte verhalten, ändern sich die Mittelpunktstemperaturen wie die Molekulargewichte. Bauen wir die Gaskugel aus Sauerstoff oder Stickstoff, so steigen die angeführten Mittelpunktstemperaturen um das 16- resp. 14-fache und erreichen höhere Beträge, als die effektiven Temperaturen der Sonnenatmosphäre. Wie sich die Lichtheission der Gase in diesen Zuständen gestaltet, kann auf Grundlage experimentell ermittelter Gesetzmäßigkeiten nicht angegeben werden. Ein fester Körper würde kräftig strahlen. Doch hat Pringsheim*) gezeigt, daß Dämpfe von *Na*, *Ka*, *Li*, *Tha* erhitzt bis zur Schmelztemperatur des Nickels keinerlei Strahlung aussenden, wenn nicht gleichzeitig irgend welche chemischen Vorgänge wenn auch in minimalstem Grade, sich abspielen. (Letztere befähigen den *Na*-Dampf zu Lichtheission bereits bei einer Temperatur von 150° C.) Da die Gase sich ähnlich wie hochtemperierte Dämpfe ver-

*) E. Pringsheim. Das Kirchhoffsche Gesetz und die Strahlung der Gase. Wied. Annal. 45. 428. 1892; 49. 347. 1893.

halten werden, kann nicht ohne weiteres aus der hohen Temperatur auf Lichtemission geschlossen werden. Allein auch nach dieser Theorie ist kräftiges Leuchten eines Nebels nicht unmöglich. Denn ein Gasball wird höchst unwahrscheinlich nur aus einer Molekelart bestehen, chemische Reaktionen, und somit die Möglichkeit der Lichtemission sind nicht ausgeschlossen. Auch Ionisation, die vielfach als Ursache des Leuchtens gilt, wird bei diesen hohen Temperaturen nicht ausbleiben. Dies Licht der inneren Partien hat die äußeren Partien des Gasballs zu durchlaufen; die Gasdichten sind hier aber so außerordentlich gering, daß sie keine nennenswerte Absorption auszuüben vermögen, so daß wir mit größter Wahrscheinlichkeit die in einzelnen Wellenlängen konzentrierte Strahlung eines leuchtenden Gases zugesandt erhalten werden.

Wir ändern den Gasball ab. Wir setzen $M = 1000$ Sonnenmassen, $R = 1000$ Radien der Neptunbahn. Die Mittelpunktstemperatur hat sich nicht geändert, das Temperaturgefälle erstreckt sich aber über eine 1000 mal größere Strecke. Druck und Dichte im Mittelpunkt sind 10^6 mal kleiner geworden. Die Absorptionskraft des Balles hat sich 10^8 mal verkleinert, derselbe ist in dieser Beziehung gleichwertig mit 0,012 resp. 0,030 Erdatmosphären, die Schwächung hindurchgehenden Sternenlichtes kann gleich Null gesetzt werden. Hätten wir $M = 10$ Sonnenmassen, $R = 10$ Neptunbahnradien gesetzt, so wäre wiederum T_0 konstant geblieben; p_0 und ρ_0 hätten um das 100-fache, das Absorptionsvermögen um das 10-fache abgenommen. Für $M = 100$ Sonnenmassen, $R = 10$ Neptunbahnradien erhalten wir $T_0 = 1,8717 \cdot 10^4$, resp. $4,8895 \cdot 10^4$; für andere Gase haben wir noch im Verhältnis des Molekulargewichts zu multiplizieren. Das Absorptionsvermögen ist konstant geblieben.

Diese Gasbälle, in entfernten Regionen des Fixsternhimmels schwebend, werden uns als schwachleuchtende Scheibchen mit verwaschenen Rändern erscheinen, das Licht hindurchscheinender Sterne schwach oder gar nicht trübend, und uns eine Strahlung zusehend, in einzelnen Wellenlängen konzentriert. Einen solchen Gasball würden wir seiner Erscheinung nach als Nebelfleck registrieren, und vielleicht wird eine große Zahl von Nebelflecken als Gasbälle, wie wir sie oben geschildert haben, aufzufassen sein. Auf Nebelflecke von gänzlich unregelmäßiger Gestalt, oder in heftiger innerer Bewegung begriffen, lassen sich diese Betrachtungen selbstverständlich nicht anwenden. Immerhin scheinen sie geeignet, Anhaltspunkte zu geben über die Größenordnung von Druck, Temperatur und Dichte der Nebelmassen, Größen, die sich sonst gänzlich unserer Beurteilung entziehen.

§ 6. Berechnen wir schließlich noch die adiabatische Temperatur Θ dieser Gaskugeln. Wir benutzen die kosmogenetische Flächen-gleichung (102)

$$\frac{\Theta}{M^{3-x} R^{3x-4}} = C_{(e, m, n)} \text{ gramm}^{x-2} \text{ cent}^{4-3x}$$

und haben zu setzen (Tabelle Seite 112)

$$\text{für } x = \frac{5}{3}, \text{ einatomiger Wasserstoff}, \frac{\Theta}{M^{\frac{2}{3}} R^{\frac{1}{3}}} = 3,4000 \cdot 10^{-16}$$

$$\text{für } x = \frac{7}{5}, \text{ zweiatomiger Wasserstoff}, \frac{\Theta}{M^{\frac{2}{5}} R^{\frac{2}{5}}} = 5,6075 \cdot 10^{-16}.$$

Für die Gaskugel von der Masse der Sonne und einem Radius gleich dem der Neptunbahn ergibt sich daraus

$$\text{für } x = \frac{5}{3} \quad \Theta = 1,9028 \cdot 10^{10}$$

$$\text{für } x = \frac{7}{5} \quad \Theta = 4,4895 \cdot 10^7.$$

Diese Zahlen, die sich auf dissozierten, resp. zweiatomigen Wasserstoff beziehen, wachsen für andere Gase im Verhältnis der Molekulargewichte. Für atmosphärische Luft von 0° und 760 mm Barometerstand (vgl. Seite 28) ist $\Theta = 3904$; um mit den oben berechneten Θ vergleichbar zu machen haben wir noch durch ungefähr 15, resp. 30 zu dividieren. Seite 27 haben wir gezeigt, daß der Entropiegehalt η der Masseneinheit eines Gases gegeben ist durch

$$\eta = c_v \lg \Theta \text{ cent}^2 \text{ sek}^{-2}.$$

Diese Gaskugeln, die den Nebelflecken entsprechen, bestehen somit aus Gasen von außerordentlich hohem Entropiegehalt. Je höher der Entropiegehalt, desto größer die gewinnbare mechanische Arbeit, wenn eine abgegebene Wärmeeinheit ein bestimmtes Temperaturintervall durchsinkt, desto höher der Nutzwert einer abgegebenen Kalorie. Da ferner ein sich selbst überlassener Gasball Wärme ausstrahlt, seine Entropie abnimmt, und wohl in der Mehrzahl der Fälle die Ausstrahlung die Zustrahlung bei weitem überwiegt, kann in vielen Fällen der Entropiegehalt η (oder die adiabatische Temperatur Θ) einen Anhaltspunkt geben, die Entwicklungsphasen dieser Gebilde miteinander zu vergleichen. Denn mit fortschreitender Entwicklung nimmt der Entropiegehalt ab, und werden die von dem alternden Gasballe abgegebenen Wärmemengen minderwertiger. Für den bereits angeführten Gasball von 1000 Sonnenmassen, $R = 1000$ Radien der Neptunbahn, bestehend aus einatomigem Wasserstoff, ergibt sich

$\Theta = 1,9028 \cdot 10^{14}$; Neptun auf gleiche Weise aufgefaßt, würde $\Theta = 9,77 \cdot 10^8$ ergeben, Uranus $\Theta = 7,536 \cdot 10^8$, Saturn $\Theta = 3,319 \cdot 10^4$, Jupiter $\Theta = 5,903 \cdot 10^4$; diese Planeten haben somit eine ungleich längere Entwicklungsperiode hinter sich.

§ 7. Wir suchen einen Nebelfleck, ihn als Gaskugel auffassend, in seinem Entwicklungsgange weiter zu verfolgen. Besaß derselbe keine Rotation, so wird er sich durch Ausstrahlung stetig zu kleinerem Radius, kleinerem Entropiegehalt, größerer Mittelpunkts temperatur und größerer Mittelpunktsdichte zusammenziehen. Den Mechanismus dieses Kontraktionsprozesses haben wir in Kap. VIII aus einander gesetzt. Hatte der Gasball aber Rotation um eine Achse, so mußte die Rotationsgeschwindigkeit bei Kontraktion zunehmen. Poincaré*) hat zuerst gezeigt, daß eine genügend rasch rotierende Masse inkompressibler Flüssigkeit birnförmige Gestalt, von ihm Aploid genannt, annehmen kann, um sich bei weiterer Zunahme der Drehgeschwindigkeit wahrscheinlich in zwei Massen von gleicher Größenordnung zu teilen. Von anderer Seite her ist G. H. Darwin**) zu gleicher Vorstellung dieses Teilungsprozesses gelangt. Da der Bau dieser Apioide nur durch Newtonsche Gravitationskräfte zwischen endlichen Massen bestimmt ist, lassen sich diese Betrachtungen auf Gasmassen, die durch innere Gravitation zusammengehalten werden, übertragen. Wir gelangen so zur Vorstellung einer Gasmasse ähnlich einem Aploid in polytropem Gleichgewicht. Die Verteilung von Druck, Temperatur und Dichte im Innern sind derart, daß eine herumgeführte Gasmasse stets mit der augenblicklich Verdrängten übereinstimmt. Ein andauernder Rührprozeß muß diese Zustandsverteilung herbeiführen, und dieser Mischungs prozeß wird stets eintreten, wenn die äußeren Massen durch Wärme ausstrahlung dichter werden, in die Tiefe sinken und durch entropiehaltigere, aufsteigende Massen ersetzt werden. Machen die sich auf diese Weise bewegenden Massen nur adiabatische Prozesse durch, so resultiert ein Aploid ähnliches Gebilde im adiabatischen Gleichgewicht, dadurch ausgezeichnet, daß der Entropiegehalt η der Masseneinheit und die adiabatische Temperatur Θ durch die ganze Gasmasse hindurch

*) H. Poincaré. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. Acta mathematica. VII. 1885.

**) G. H. Darwin. Figures of equilibrium of rotating masses of fluid. Transactions of the Royal Society vol. 178. 1887. G. H. Darwin. On the pear shaped figure of a rotating mass of liquid. Transactions of the Royal Society. Nov. 1901.

konstant sind, und für welches ebenfalls eine kosmogenetische Flächen-gleichung zwischen Θ , M und einer linearen Abmessung möglich ist. Tritt der Teilungsprozeß ein, in zwei Massen von gleicher Größenordnung, so müssen beide Teile gleiches η und Θ besitzen. Wir nehmen an, daß sich die beiden Teile allmählich in Folge innerer Gravitation in zwei polytrope Gaskugeln verwandeln, die mit a priori nicht näher angebarer Geschwindigkeit um ihren gemeinsamen Schwerpunkt rotieren. Die infolge mehrfacher Umstände eintretende Abweichung von der Kugelgestalt vernachlässigen wir. Da die Massen derselben von gleicher Größenordnung sind, die erst gleichen Gehalte an Entropie von vergleichbarer Größe geblieben sein werden, so müssen, wie die Gleichungen der kosmogenetischen Fläche lehren, auch ihre Durchmesser und weiter die Zustandsgrößen im Mittelpunkt von gleicher Größenordnung sein. Zahlreiche Doppelnebel, mehr oder minder runde Scheibchen mit verwaschenen Rändern von annähernd gleicher Größe und Helligkeit in geringem Winkelabstande, sprechen durch ihr Aussehen für diese Entstehungsgeschichte*).

Diese Gaskugeln werden weiter ausstrahlen, ihr Radius wird ab-, ihre Dichte zunehmen; die scharfen hellen Linien des Spektrums werden sich verbreitern, und bei genügender Gasdichte wird das Spektrum kontinuierlich. An Stelle des Nebelflecks tritt allmählich ein Stern, an Stelle des Doppelnebels ein Doppelstern. Standen die beiden Komponenten des letztern in genügend großer Entfernung, so verläuft dieser Kontraktionsprozeß bei beiden in annähernd gleichem Tempo, und resultiert ein Doppelstern, dessen Komponenten Helligkeit von gleicher Größenordnung besitzen. Es ist aber auch der Fall möglich, daß die Geschwindigkeit dieser Kontraktion für beide Komponenten verschieden ist. Stehen diese nahe genug, so kann ihr gegenseitiger Energieaustausch durch Strahlung von Einfluß sein. Wärmegewinn und Wärmeverlust durch gegenseitige Zustrahlung braucht sich bei beiden Komponenten nicht aufzuheben. Die eine Gaskugel, bei der die Ausstrahlung überwiegt, wird sich rascher kontrahieren, der Kontraktionsprozeß der andern Kugel wird durch die mehr zugestrahlte Wärme gehemmt; die erstere Kugel wird sich rascher erwärmen, wie die andere, die bei starker Zustrahlung sich sogar abkühlen kann. Die Temperaturdifferenz beider und der gegenseitige Energieaustausch sind in Zunahme begriffen.

*) Siehe dazu: T. J. J. See: Die Entwicklung der Doppelsternsysteme. Inaugural-Dissertation. Berlin 1892.

Das Resultat ist ein Doppelsternsystem, dessen Komponenten starke Helligkeitsdifferenzen aufweisen, und zwar wird dies namentlich eintreten, wenn die Komponenten sich nahe stehen, wobei in der Regel die Rotationsgeschwindigkeit um den gemeinsamen Schwerpunkt groß sein wird. Der bedeutend dunklere Begleiter verrät sich dann durch die spektroskopisch nachweisbare Geschwindigkeit des Hauptsterns oder dessen periodischen Lichtwechseln. Wie sehr die Helligkeitsdifferenz der anfangs gleichen Komponenten steigen kann, zeigt Sirius mit seinem dunklen Begleiter. Wenn aber daraus gefolgert wird*): „Der Siriusbegleiter ist infolgedessen als ein sehr großer Stern zu betrachten, welcher sehr nahe dem Erlöschen ist“, erhält nach dem eben Erläuterten die Ansicht eine ebenso große Wahrscheinlichkeit, daß der Begleiter durch einen Gasball gebildet wird, der noch gar nicht zu kräftigem Leuchten gekommen ist. Die mächtige Zustrahlung des Hauptsterns hemmt seine Kontraktion und dadurch seine Temperaturerhöhung; ist aber das Strahlungsgleichgewicht zwischen zwei Gaskugeln gestört, so wird sich gerade dadurch diese Ungleichheit vergrößern, solange dieselben als Gaskugeln behandelt werden dürfen, oder sich nicht andere äußere Einflüsse geltend machen.

§ 8. Die Massen und Dimensionen der Fixsterne liegen unserer Kenntnis so fern, daß wir ihren Bau als Gaskugeln auch nicht der Größenordnung nach bestimmen können. Nur bei einigen veränderlichen Sternen ist es gelungen, Masse und Radius der beiden Komponenten wenigstens in Annäherung zu bestimmen und dieselben dadurch der thermodynamischen Behandlung zugänglich zu machen. Am eingehendsten studiert ist das System β Lyrae durch Myers.^{**)} Es ergeben sich folgende Größenverhältnisse:

Größere Kugel

$$\text{Masse } \mathfrak{M}_1 = 20,91 \text{ Sonnenmassen} = 4,0804 \cdot 10^{34} \text{ gramm}$$

$$\text{Radius } \mathfrak{R}_1 = 2,5609 \cdot 10^{12} \text{ cent}$$

$$\text{Mittlere Dichte } \bar{\rho}_1 = 0,00058 \text{ gramm cent}^{-3}.$$

Kleinere Kugel:

$$\mathfrak{M}_2 = 9,61 \text{ Sonnenmassen} = 1,8458 \cdot 10^{34} \text{ gramm}$$

$$\text{Radius} = 1,9125 \cdot 10^{12} \text{ cent}$$

$$\text{Mittlere Dichte } \bar{\rho}_2 = 0,00063 \text{ gramm cent}^{-3}.$$

*) S. A. Arrhenius. Lehrbuch der kosmischen Physik. Seite 49. 1903.

**) G. W. Myers, Untersuchungen über den Lichtwechsel des Sternes β Lyrae. Inauguraldissertation. München 1896.

Daraus berechnen wir mit Hilfe der kosmogenetischen Flächen-gleichungen für die beiden Kugeln

I. Aufbau aus einatomigem Wasserstoffgas.

Größere Kugel	Kleinere Kugel
$\rho_0 = 3,4011 \cdot 10^{-3}$	$3,7803 \cdot 10^{-3}$ gramm cent $^{-3}$
$p_0 = 1,9876 \cdot 10^{12}$	$1,3078 \cdot 10^{12}$ Dynen cent $^{-2}$
= $1,9602 \cdot 10^6$	$1,2899 \cdot 10^6$ Atmosphären
$T_0 = 6,8840 \cdot 10^6$	$4,1700 \cdot 10^6$
$\Theta = 2,9974 \cdot 10^8$	$1,7184 \cdot 10^8$.

II. Aufbau aus zweiatomigem Wasserstoffgas.

$\rho_0 = 1,3965 \cdot 10^{-3}$	$1,5168 \cdot 10^{-3}$ gramm cent $^{-3}$
$p_0 = 1,0418 \cdot 10^{13}$	$7,0140 \cdot 10^{12}$ Dynen cent $^{-2}$
= $1,0276 \cdot 10^7$	$6,9184 \cdot 10^6$ Atmosphären
$T_0 = 1,7983 \cdot 10^7$	$1,0893 \cdot 10^7$
$\Theta = 9,9287 \cdot 10^7$	$5,8186 \cdot 10^7$.

In allen vier Kugeln ist das Absorptionsvermögen \mathfrak{A} in der oben festgesetzten Einheit von der Größenordnung

$$\mathfrak{A} = 10^7.$$

Wird zum Aufbau ein anderes Gas von gleicher Atomzahl benutzt, so steigen T_0 und Θ im umgekehrten Verhältnis der Gaskonstanten.

Das Spektrum von β Lyrae gehört zur Klasse 1^c; aus dem kontinuierlichen Spektrum treten die Wasserstofflinien (und die Heliumlinie) hell und verbreitert hervor.

Algol.

Masse des Hauptsterns $\mathfrak{M}_1 = \frac{4}{9}$ Sonnenmasse = $8,636 \cdot 10^{33}$ gramm

Radius des Hauptsterns $\mathfrak{R}_1 = 1,255 \cdot 10^{11}$ cent

Mittlere Dichte des Haupt-

sterns $\bar{\rho}_1 \dots = 0,10432$ gramm cent $^{-3}$.

Masse des dunklen Begleiters $\mathfrak{M}_2 = \frac{2}{9}$ Sonnenmasse = $4,318 \cdot 10^{32}$ gramm

Radius des dunklen Begleiters $\mathfrak{R}_2 = 9,8 \cdot 10^{10}$ cent

Mittlere Dichte des dunklen Be-

gleiters $\bar{\rho}_2 \dots = 0,10952$ gramm cent $^{-3}$.

Daraus ergeben sich

I. Aufbau aus einatomigem Wasserstoffgas.

$\varrho_0 = 6,2484 \cdot 10^{-1}$	$6,5716 \cdot 10^{-1}$
$p_0 = 1,5336 \cdot 10^{14}$	$1,0378 \cdot 10^{14}$ Dynen cent $^{-2}$
$= 1,5225 \cdot 10^8$	$1,0234 \cdot 10^8$ Atmosphären
$T_0 = 2,973 \cdot 10^6$	$1,9035 \cdot 10^6$
$\Theta = 4,063 \cdot 10^8$	$2,5183 \cdot 10^8$.

II. Aufbau aus zweiatomigen Gasen.

$\varrho_0 = 2,5112$	$2,6369$ gramm cent $^{-3}$
$p_0 = 8,0903 \cdot 10^{14}$	$5,4394 \cdot 10^{14}$ Dynen cent $^{-2}$
$= 7,9800 \cdot 10^8$	$5,3651 \cdot 10^8$ Atmosphären
$T_0 = 7,7661 \cdot 10^6$	$4,9727 \cdot 10^6$
$\Theta = 5,3737 \cdot 10^6$	$3,3743 \cdot 10^6$.

In den oben definierten Einheiten ist das Absorptionsvermögen jeder Kugel von der Größenordnung 10^{10} . Wird zum Aufbau ein anderes Gas von gleicher Atomzahl gewählt, so wachsen T und Θ im umgekehrten Verhältnis der Gaskonstanten.

Das Spektrum von Algol ist kontinuierlich (Klasse 1); die Wasserstofflinien fehlen, doch treten die Heliumlinien hell hervor.

ξ Herculis. Für dies System ergeben sich nach v. Seeliger und Hartwig:

Größerer Stern.

Masse \mathfrak{M}_1	$= 172$ Sonnenmassen $= 3,3420 \cdot 10^{35}$ gramm
Radius \mathfrak{R}_1	$= 7,5 \cdot 10^{11}$ cent
Mittlere Dichte $\bar{\varrho}_1$	$= 0,18912$ gramm cent $^{-3}$.

Kleinerer Stern.

Masse \mathfrak{M}_2	$= 84$ Sonnenmassen $= 1,6322 \cdot 10^{35}$ gramm
Radius \mathfrak{R}_2	$= 6 \cdot 10^{11}$ cent
Mittlere Dichte $\bar{\varrho}_2$	$= 0,18039$ gramm cent $^{-3}$.

Daraus ergibt sich

I. Aufbau aus einatomigem Wasserstoff.

Größerer Stern. Kleinerer Stern.

$\varrho_0 = 1,1348$	$1,0824$ gramm cent $^{-3}$
$p_0 = 1,8125 \cdot 10^{16}$	$1,0554 \cdot 10^{16}$ Dynen cent $^{-2}$
$= 1,7877 \cdot 10^{10}$	$1,0410 \cdot 10^{10}$ Atmosphären
$T_0 = 1,9252 \cdot 10^8$	$1,1752 \cdot 10^8$
$\Theta = 1,7695 \cdot 10^8$	$1,1138 \cdot 10^8$.

II. Aufbau aus zweiatomigem Wasserstoff.

$\rho_0 = 4,5534$	$4,3434 \text{ gramm cent}^{-3}$
$p_0 = 9,5000 \cdot 10^{16}$	$5,5316 \cdot 10^{16} \text{ Dynen cent}^{-2}$
$= 9,3700 \cdot 10^{10}$	$5,4561 \cdot 10^{12} \text{ Atmosphären}$
$T_0 = 5,0292 \cdot 10^8$	$3,0703 \cdot 10^8$
$\Theta = 2,7427 \cdot 10^8$	$1,7063 \cdot 10^8$

Das Absorptionsvermögen ist von der Größenordnung 10^{12} Einheiten.

Die Rechnungen sind, um ein in sich geschlossenes System zu erhalten, wieder mit fünfstelligen Logarithmen durchgeführt; doch sind die Unterlagen derselben so unsicher, daß höchstens die Größenordnung der Resultate in Betracht kommen kann. In allen drei Fällen scheint die Gleichheit des Entropiegehaltes (Gleichheit von Θ) beider Komponenten für ihren gemeinsamen Ursprung zu sprechen. Derselbe ist wesentlich kleiner als in den erst besprochenen, als Nebelflecke erscheinenden Gaskugeln; wir haben Weltkörper in späteren Entwicklungsstadien vor uns. Dafür spricht auch ihre ungleich größere Mittelpunktsdichte. Die Mittelpunktstemperatur scheint in den größeren Komponenten höher zu liegen; da wir aber die Gesetze der Ausstrahlung einer Gaskugel bei Berücksichtigung innerer Absorption nicht kennen, dürfen wir höherer Mittelpunktstemperatur nicht ohne weiteres größere Lichtemission zuordnen. Myers setzt (loc. cit.) die Helligkeit des größeren Körpers = 0,4 derjenigen des kleineren. Dabei erscheint es merkwürdig, daß bei Spektralbeobachtungen die F -Linie des größeren, also dunkleren Körpers beobachtet wurde. Die höhere Mittelpunktstemperatur desselben würde damit im Einklang stehen. Doch ist gerade im System β Lyrae manches noch so unklar, daß darauf nicht zu viel Gewicht zu legen ist.

§ 9. Die merkwürdige Helligkeitsverteilung, die manche Nebel als Ringnebel, Spiralnebel usw. sichtbar werden läßt, haben wir bereits in Kap. XIV § 17 auf Geschwindigkeitsdifferenzen bewegter Massen zurückführen können. Stellen kleinerer Geschwindigkeit treten hell hervor. Ändert sich die Geschwindigkeitsverteilung, so erscheint uns der Nebel in anderem Bilde. Die Veränderungen, die an manchen Nebeln beobachtet werden, brauchen deshalb nicht von beträchtlichen Massenverlagerungen begleitet zu sein, sondern können auf Geschwindigkeitsänderungen bereits vorhandener Massen beruhen, und zwar von sehr geringem Betrage, da dieselben in 8. Potenz in die Rechnung eingehen.

Sechzehntes Kapitel.

Strahlenbrechung in Gaskugeln.

§ 1. Dringt ein unendlich dünnes Lichtbündel in ein Medium ein, dessen Brechungsexponent sich von Ort zu Ort stetig ändert, so legt dasselbe eine stetig gekrümmte Bahn zurück. Ist dabei der Brechungsexponent μ in parallelen Ebenen oder konzentrischen Kugelflächen konstant, so wird die Bahn eine einfach gekrümmte Kurve, deren Krümmungsradius σ an jeder Stelle durch μ und die Änderung von μ in deren Umgebung bestimmt ist. Denn nehmen wir an einem Orte, ausgezeichnet durch die Lichtgeschwindigkeit v , ein rechteckiges Element der Wellenfläche von der Höhe dh an, dessen untere Kante in der Ebene der Schichtung liegt, so hat sich diese im Zeitelement dt um die Strecke vdt , die obere Kante um die Strecke $(v + \frac{dv}{dh} dh) dt$ weiter bewegt. Das Stückchen Wellenfläche hat sich demnach um den Winkel $d\varphi = \frac{dv}{dh} dt$ gedreht; und ist sein Abstand vom Scheitel dieses Winkels gleich h , so hat es sich in dieser Zeit um die Strecke $hd\varphi = vdt$ vorwärts bewegt, woraus sich die Beziehung ergibt $h = \frac{v}{\frac{dv}{dh}}$. Lassen wir das Element der Wellenfläche stetig weiter wandern, so ist an jeder Stelle der Krümmungsradius σ der Bahn gleich h , und berücksichtigen wir noch, daß $v \cdot \mu$ konstant ist, so erhalten wir

$$(261) \quad \sigma = \frac{v}{\frac{dv}{d\sigma}} = - \frac{\mu}{\frac{d\mu}{d\sigma}}.$$

Der Brechungsexponent und sein Gefälle senkrecht zur Wellennormalen bestimmen an jeder Stelle den Krümmungsradius der Bahn; derselbe ist stets nach Orten größeren Brechungsvermögens hingewichtet. Die Maximalkrümmung erleidet das Lichtbündel an jener Stelle, wo seine Wellennormale in die Schichtung des Mediums zu liegen kommt. Von da senkt sich die Bahn in zwei symmetrischen Ästen in Gebiete mit höheren Brechungsexponenten. Gleichung (261) gestattet die Bahn, von einem gegebenen Orte in gegebener Richtung abgehend, punktweise zu konstruieren.

Haben wir die Lichtbrechung in einer Kugel zu untersuchen, in welcher das Brechungsvermögen Funktion des Radius ist, so empfiehlt es sich in manchen Fällen der Gleichung (261) andere Form zu geben.

Bildet an irgend einer Stelle der Strahl mit dem nach außen gerichteten Kugelradius den Winkel i , so können wir (261) auch schreiben

$$(262) \quad \sigma = -\frac{\mu}{d\mu} = -\frac{\mu}{dr \sin i}.$$

Zeichnen wir ferner in Fig. 18 den in aufeinanderfolgenden, unendlich dünnen Kugelschalen gebrochenen Strahl $ABCD$, so hat ein Element ds desselben, wie sich aus der Figur ergibt, die Länge $ds = \sigma d\varphi = \sigma(d\omega + di)$, woraus in Verbindung mit (262) folgt

$$(a) \quad \frac{ds}{d\omega + di} = -\frac{\mu}{dr \sin i}.$$

Ferner gibt ΔABE die Beziehungen

$$(b) \quad ds \cos i = dr; \\ r d\omega = dr \operatorname{tg} i.$$

Beides in (a) eingesetzt liefert

$$(c) \quad \frac{dr}{\cos i di + \frac{dr}{r} \sin i} = -\frac{\mu}{dr \sin i}$$

oder

$$(d) \quad \frac{dr}{r} + \frac{d\mu}{\mu} + \frac{d \sin i}{\sin i} = 0$$

und integriert die Bahngleichung

$$(263) \quad \mu r \sin i = \text{konst.}$$

Die Konstante ist bestimmt, wenn die Richtung des Strahls in irgend einem Abstande r gegeben; die Lichtbahn kann dann punktweise konstruiert werden. Dabei gilt Gleichung (263) weiter, wenn in der Kugel sich μ abteilungsweise stetig ändert, oder diese aus Kugelschalen endlicher Dicke von konstantem, von Schicht zu Schicht beliebig wechselndem μ aufgebaut ist.

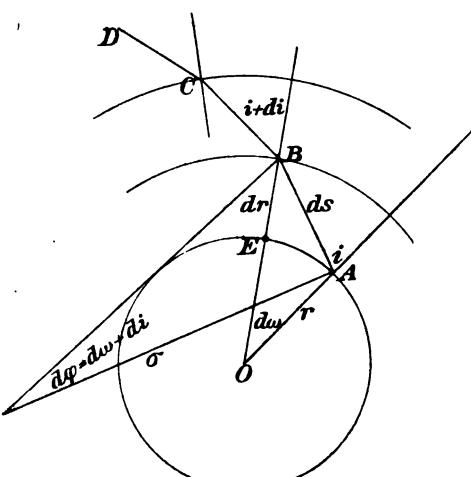


Fig. 18.

§ 2. Der Brechungsexponent μ eines Gases, unter normalen Verhältnissen an Zahlwert von Eins wenig verschieden, steigt mit der Gasdichte. Die Experimentalphysik hat noch nicht mit genügender Sicherheit festgestellt, wie sich in bezug auf μ bei gleicher Gasdichte

die Temperatur, resp. der Druck geltend macht. Es scheint, daß μ in seiner Abhängigkeit vom Gaszustande für nicht zu große Dichten mit genügender Genauigkeit dargestellt werden kann durch eine der Beziehungen

$$(264) \quad \mu = 1 + \nu \varrho$$

$$(264a) \quad \mu^2 = 1 + \nu_1 \varrho,$$

worin ϱ die Gasdichte, ν resp. ν_1 gramm $^{-1}$ cent 3 eine Materialkonstante, das Brechungsvermögen, bedeuten. Da μ nur wenig von Eins verschieden, kann mit genügender Genauigkeit

$$(264b) \quad \nu_1 = 2\nu$$

gesetzt werden. Denn (264a) und (264) ergeben

$$\nu_1 \varrho = (\mu^2 - 1) = (\mu - 1)(\mu + 1) = \nu \varrho (2 + \nu \varrho)$$

und somit $\nu_1 = 2\nu$, wenn $\nu \varrho$ klein gegen 2 ist. Die Bequemlichkeit der Rechnungsführung entscheidet, welche der beiden Formen anzuwenden ist.

Nach den Versuchen von Mascart ist, wenn ϱ_0 die Gasdichte bei 0° und 760 mm Barometerstand bedeutet, für Natriumlicht

$$\begin{aligned} \mu &= 1 + 0,0002927 \frac{\varrho}{\varrho_0} \text{ für Luft} \\ &= 1 + 0,0001387 \frac{\varrho}{\varrho_0} \text{ für Wasserstoff} \\ &= 1 + 0,0004544 \frac{\varrho}{\varrho_0} \text{ für Kohlensäure.} \end{aligned}$$

Benutzen wir die Seite 8 gegebenen Werte der Gasdichten ϱ_0 , so ist

$$(265) \quad \left| \begin{array}{l} \mu = 1 + 0,22637 \varrho \text{ für Luft,} \\ = 1 + 1,5463 \varrho \text{ „ Wasserstoff,} \\ = 1 + 0,2303 \varrho \text{ „ Kohlensäure.} \end{array} \right.$$

Die ϱ sind in gramm cent $^{-3}$ auszudrücken. In Ermangelung des Brechungsvermögens des dissozierten Wasserstoffes setzen wir dessen $\nu = 1,5463$ gramm $^{-1}$ cent 3 , gleich dem des zweiatomigen Wasserstoffs, was die Größenordnung der später zu berechnenden Größen nicht unrichtig liefern dürfte.

Durch Einführung des Brechungsvermögens ν läßt sich mit Benutzung von (262) der Krümmungsradius σ der Lichtbahn ausdrücken als

$$(266) \quad \sigma = - \frac{1 + \nu \varrho}{\nu \frac{d \varrho}{d \sigma}} = - \frac{1 + \nu \varrho}{\nu \frac{d \varrho}{dr} \sin i}.$$

§ 3. In einer vollständigen Gaskugel, oder in einer über einem festen Kern liegenden Atmosphäre greifen wir eine Stelle heraus, ausgezeichnet durch die Werte g , p , ϱ , T . An dieser ändern sich p , ϱ und T längs einer Polytropen von der Klasse k . Die Gleichgewichtsbedingung liefert $dp = -g\varrho dr$, und die Polytropengleichung $\frac{p}{\varrho^k} = \text{konst.}$ ergibt $dp = k \frac{p}{\varrho} d\varrho = kHT d\varrho$. Aus beiden Beziehungen folgt

$$(267) \quad \frac{d\varrho}{dr} = -\frac{g\varrho}{kHT}$$

und dies in (266) eingesetzt ergibt

$$(268) \quad \sigma = \frac{kHT}{g} \cdot \frac{1 + \nu\varrho}{\nu\varrho \sin i} = k \tilde{\mathfrak{H}} \frac{1 + \nu\varrho}{\nu\varrho \sin i} \text{ cent}$$

(wenn $\tilde{\mathfrak{H}}$ die Höhe der homogenen Atmosphäre bedeutet; Kap. I, § 8). Diese Gleichung gibt den wichtigen Satz:

Gehen Lichtstrahlen in gleicher Richtung durch Stellen von Gas-
kugeln oder Atmosphären, ausgesiechnet durch gleiche Werte von T , ϱ , g , in deren Umgebung der Gaszustand nach verschiedenen Polytropen variiert, so verhalten sich ihre Krümmungsradien wie die Exponenten k dieser Polytropen.

Schließen wir die Polytropen mit $k < 1$, die anomale Temperaturgefälle, $\frac{dT}{dr} > 0$, ergeben, aus, so folgt:

Die stärkste Krümmung erleidet ein Strahl in Gebieten konstanter Temperatur; $k = 1$.

Und weiter:

Geht ein Lichtstrahl durch eine Stelle der Erdatmosphäre, und herrscht in dieser bei gleichen p und T einmal adiabatisches ($k = \alpha = \frac{c_p}{c_v}$), dann isothermes Gleichgewicht, so verhalten sich dessen Krümmungs-
radien wie die Wärmekapazitäten bei konstantem Druck und konstantem Volumen. Niemals kann bei normalem Temperaturgefälle der Krümmungs-
radius kleiner werden wie $\frac{\tilde{\mathfrak{H}}}{\nu\varrho} \frac{1 + \nu\varrho}{\sin i}$.
größer wie $\frac{c_p}{c_v} \frac{\tilde{\mathfrak{H}}}{\nu\varrho} \frac{1 + \nu\varrho}{\sin i}$.

Wir wenden Gleichung (268) an auf den Fall, daß ein Lichtstrahl die untersten Schichten der Erdatmosphäre horizontal durchsetzt. Wir vernachlässigen $\nu\varrho$ gegen 1, nehmen ϱ für $p = 760 \text{ mm}$ und

*) Vgl. nächstes Kapitel.

$T = 273$ zu $0,0012929$ gramm cent $^{-3}$, \S (Seite 9) = $7,9916 \cdot 10^6$ cent und erhalten für $k = 1$, $(\frac{dT}{dr} = 0)$

$$\sigma_{\text{isotherm}} = 2,7310 \cdot 10^9 \text{ cent} = 4,2866 \text{ Erdradien.}$$

Für adiabatisches Gleichgewicht der Atmosphäre haben wir mit $k = \nu = \frac{7}{5}$ zu multiplizieren und erhalten

$$\sigma_{\text{adiabatisch}} = 3,8234 \cdot 10^9 \text{ cent} = 6,0012 \text{ Erdradien.}$$

Die Höhe der homogenen Atmosphäre, nur Funktion der Temperatur der Stelle, an der wir sie errichten (Kap. I § 8), ändert sich mit derselben wie ein lineares Gebilde vom Ausdehnungskoeffizienten $\alpha = \frac{1}{273}$; denselben

Ausdehnungskoeffizienten besitzt demnach auch der Krümmungsradius eines Lichtstrahles, so daß stets $\sigma_t = \sigma_0 (1 + \alpha t)$. Wäre bei isothermen Verhältnissen in den untersten atmosphärischen Schichten die Bodentemperatur -209° Cels., so wäre der Krümmungsradius gleich dem Erdradius, und der Lichtstrahl würde die Erde umlaufen. Dasselbe wäre der Fall, wenn wir bei $t = 0^\circ$ die Masse der Atmosphäre um das 4,2866-fache vermehren würden.

Umgeben wir den Jupiter mit einer Atmosphäre irdischer Luft von der Bodentemperatur 0° Cels., so ist hier die Höhe der homogenen Atmosphäre 2,39 mal kleiner wie auf der Erde, da die Schwerkrebeschleunigung 2,39 mal größer ist. Geben wir weiter der untersten Schicht eine Dichte von $0,0012929$ gramm cent $^{-3}$, so erhalten wir auf diesem Planeten, dessen Radius 11,34 Erdradien mißt,

$$\sigma_{\text{isotherm}} = \frac{1}{6,3229} \text{ Jupiterradien.}$$

$$\sigma_{\text{adiabatisch}} = \frac{1}{4,5163} \text{ Jupiterradien.}$$

Um σ mindestens gleich dem Jupiterradius zu machen, muß die Dichte der untersten Schicht 6,3229 resp. 4,5163 mal kleiner gewählt werden. Da die Höhe der homogenen Atmosphäre 2,39 mal kleiner ist wie auf der Erde, so genügt es, daß über der Flächeneinheit Jupiter 15,112 resp. 10,794 mal weniger Atmosphäre liegt wie über der Flächeneinheit Erde, damit ein Lichtstrahl, an einer Stelle horizontal streifend, den Jupiter umkreist.

§ 4. So lange $k > 1$ ist der Krümmungsradius der die Erdatmosphäre durchsetzenden Lichtstrahlen stets größer als der Erdradius. Daß unter Umständen der entgegengesetzte Fall eintreten kann, zeigen die Erscheinungen, die man als obere Luftspiegelung

bezeichnet. Der in einiger Höhe über dem Erdboden horizontal streichende Lichtstrahl senkt sich von diesem Punkte, dem Spiegelungspunkte, in zwei symmetrischen Ästen abwärts zum Auge des Beobachters und zum gesehenen Gegenstande; am Spiegelungspunkte ist sein Krümmungsradius kleiner als der Erdradius. Wir können leicht den Temperaturgradienten berechnen, bei welcher Gleichheit derselben eintritt. Die Erörterungen des letzten Paragraphen lehren, daß dazu k höchstens $= \frac{1}{4,2866}$ sein darf. Die Gleichung $dp = -g\varrho dr$ aber liefert in Verbindung mit der Polytropengleichung $\frac{p}{\varrho^k} = \text{konst.}$

$$(269) \quad \frac{dT}{dr} = - \frac{g}{kH} {}^\circ\text{Cels. cent}^{-1}.$$

Betrachten wir g als konstant, so erhalten wir für jede Polytrope konstantes Temperaturgefälle.

$k < 1$ ergibt annormales Temperaturgefälle, und speziell $k = \frac{1}{4,2866}$ liefert:

$$\frac{dT}{dr} = + 0,001123 {}^\circ \text{Cels. cent}^{-1}.$$

Bei diesem Temperaturgradienten kann ein Lichtstrahl die Erde umkreisen. Damit obere Luftspiegelung eintreten kann, muß die Temperatur mit der Höhe rascher zunehmen als $0,112 {}^\circ$ pro Meter.

§ 5. In der Gleichung (268) ist σ durch die beiden Variablen T und ϱ nebst g bedingt. Wenden wir die Gleichung an auf eine nicht allzuhohe Atmosphäre, die einen nicht zu kleinen, festen Weltkörper umgibt, so können wir g in erster Annäherung als konstant betrachten. σ ist noch bedingt durch T und ϱ , die bei normalem Temperaturgefälle, und nur solches soll weiterhin in Betracht gezogen werden, beide mit der Höhe abnehmen. Um das entsprechende Verhalten von σ zu ermitteln, drücken wir T und ϱ nach (45), (46) durch die Variable u aus und erhalten leicht

$$(270) \quad \sigma = \frac{kH\Theta_k \left(1 + \nu u^{\frac{1}{k-1}}\right)}{\nu g u^{\frac{2}{k-1}} \sin i} \cdot \text{cent.}$$

Im Zähler können wir $\nu u^{\frac{1}{k-1}} = \nu \varrho$ gegen 1 vernachlässigen. u ist proportional der Temperatur T . Wir erhalten somit den Satz:

Der Krümmungsradius des horizontal streichenden Lichtstrahles nimmt (bei normalem Temperaturgefälle) mit der Höhe zu oder ab, je

nachdem in diesem Intervalle die Atmosphäre nach einer Polytropen mit $k < 2$ oder $k > 2$ aufgebaut ist.

An der Grenze $k = \infty$, $\varrho = \text{konst.}$ wird der Krümmungsradius nach (266) an allen Stellen ∞ . Das Temperaturgefälle beträgt in diesem Falle nach (269) für die Erdatmosphäre

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{g}{H} = -3,4162 \cdot 10^{-4} \text{ °Cels. cent}^{-1}.$$

Die Temperatur nimmt pro 100 Meter um $3,4162^{\circ}$ ab.

Beim kritischen Werte $k = 2$ hat das Temperaturgefälle die Hälfte des eben berechneten Wertes, und der Krümmungsradius des horizontalen Strahles hat den konstanten Wert 8,5732 Erdradien. Für $k = 1$, $T = \text{konst.}$ fanden wir an der Erdoberfläche den halben Wert. $\sigma = 4,2866$ Erdradien, mit zunehmender Höhe zunehmend.

Wir nehmen im folgenden stets normales Temperaturgefälle an; Temperaturinversion soll nur lokalisiert auftreten und die Erscheinungen im großen und ganzen nicht wesentlich beeinflussen. Die Temperaturabnahme mit der Höhe erfolgt im allgemeinen nicht geradlinig, die Atmosphären der Himmelskörper sind nicht durch ihre ganze Höhe hindurch nach derselben Polytropen gebaut. Allein wie wir jede Kurve nach bekannten Methoden durch einen Polygonzug gerader Linien mit beliebiger Genauigkeit darstellen können, so können wir beliebiges Temperaturgefälle erhalten, indem wir die Atmosphären geschichtet annehmen derart, daß jeder Schicht eine bestimmte Polytrope entspricht. Herrscht in jeder Schicht stabiles Gleichgewicht, so muß, wie wir im nächsten Kapitel zeigen werden, ihr k kleiner wie α , also auch kleiner wie 2 sein. In jeder Schicht nimmt der Krümmungsradius des horizontalen Lichtstrahles mit der Höhe zu. Da aber nach (270) der Krümmungsradius σ noch k proportional ist, kann an der Grenze dieser Schicht σ auf sehr kurze Strecke hindurch abnehmen. Da aber auf längere Strecken stets die Abnahme von u überwiegt, so können wir dies Wachsen von σ als lokalisierte Erscheinung betrachten (falls es nicht möglich ist, dasselbe durch andere Anordnung des Polytropenzuges zum Verschwinden zu bringen), und annehmen, daß unter normalen Verhältnissen σ mit der Höhe stets zunimmt, und zwar in einem Grade, der durch den Gang von u (im Grenzfalle $T = \text{konst.}$ von ϱ) bedingt wird. Wir können demnach mit A. Schmidt*) die Atmosphären der Himmelskörper in zwei

*) A. Schmidt, Die Strahlenbrechung auf der Sonne. Stuttgart 1891.

Klassen einteilen. In den Atmosphären erster Art ist der Krümmungsradius des horizontal streichenden Strahles überall, in denen zweiter Art erst von einer gewissen Höhe, der kritischen Schicht, ab größer wie der Abstand der Durchsetzungsstelle vom Zentrum. Die Atmosphäre der Erde ist von erster Art; in gleicher Mächtigkeit und Bodenbeschaffenheit um den Jupiter angeordnet, würde sie von zweiter Art sein, wie wir oben zeigten.

§ 6. Wir behandeln eine Atmosphäre zweiter Art. Die ermittelten Verhältnisse oberhalb der kritischen Schicht gelten in einer Atmosphäre erster Art überall. Wir untersuchen erst die Abhängigkeit des Produktes μr von r und finden aus

$$\frac{d(\mu r)}{dr} \gtrless 0: \quad \mu + r \frac{d\mu}{dr} \gtrless 0.$$

Für den Krümmungsradius des horizontal streichenden Strahles hatten wir

$$\sigma = -\frac{\mu}{\frac{d\mu}{dr}}, \quad \mu + \sigma \frac{d\mu}{dr} = 0$$

und erhalten somit, da $\frac{d\mu}{dr} < 0$,

$$\frac{d(\mu r)}{dr} \gtrless 0, \text{ je nachdem } r \gtrless \sigma,$$

d. h.

Unterhalb der kritischen Schicht nimmt mit der Höhe μr ab, oberhalb derselben, wie in Atmosphären erster Art an allen Stellen, zu.

Dieser Satz hat zur Folge, daß ein Strahl, horizontal streichend, oberhalb der kritischen Schicht nie, unterhalb der kritischen Schicht stets nach der Oberfläche des festen Kernes gelangt oder von dieser ausgeht. Denn der Strahl, die Bedingung $\mu r \sin i = \text{konst.}$ erfüllend, streicht von dieser Stelle in beiden Fällen in Gebiete mit wachsendem μr und kann nicht ein zweites Mal horizontal werden, da in keinem Abstande μr wieder den Ausgangswert annimmt. Ein Strahl, der vom Boden aufsteigt, kann somit oberhalb der kritischen Schicht nie horizontal werden.

§ 7. Wir gehen dazu über, das Gesetz der „Sphärenvergrößerung“ abzuleiten. Dasselbe ist für Atmosphären erster Art zuerst von H. v. Seeliger in seinen Vorlesungen, Frühjahr 1891, angegeben.*)

*) H. v. Seeliger, Notiz über die Strahlenbrechung der Atmosphäre. Sitzungsberichte der math.-physik. Klasse der Kgl. Bayer. Akademie d. Wissenschaften. XXI. Seite 241. 1891.

wohl unabhängig von ihm und auch für Atmosphären zweiter Art im Herbste 1891 von A. Schmidt (loc. cit.) aufgestellt.

Atmosphären erster Art. Eine Atmosphäre erster Art liege über einem festen Kerne vom Radius R_0 ; an ihrem Boden herrsche der Brechungsexponent μ_0 . In großer Entfernung E befindet sich das Auge des Beobachters; an dieser Stelle sei der Brechungsexponent nur unmerklich von 1 verschieden. Die Strahlgleichung $\mu r \sin i = \text{konst}$. wenden wir an auf einen Strahl, der unter dem Winkel i_0 von einem Punkte der Oberfläche des Kernes aufsteigend in das Auge des Beobachters gelangt, mit E den Winkel γ bildend, und erhalten

$$\mu_0 R_0 \sin i_0 = E \sin \gamma.$$

Beide Seiten werden ein Maximum für $i_0 = 90^\circ$, also für Strahlen, welche den festen Kern tangierend verlassen, und werden

$$\mu_0 R_0 = E \sin \gamma = E\gamma,$$

falls γ sehr klein. γ ist der halbe Winkel, unter welchem der feste Kern gesehen wird. Wäre keine Atmosphäre vorhanden, so wäre dieser Winkel gegeben durch die Bedingung

$$R_0 = E \sin \gamma_0 = E\gamma_0,$$

so daß wir haben

$$(271) \quad \mu_0 \gamma_0 = \gamma.$$

Diese überraschend einfache Beziehung sagt aus, daß durch Strahlbrechung in der Atmosphäre der Radius des nackten Kernes im Verhältnis $\mu_0 : 1$ vergrößert erscheint, gleichgültig, wie die Atmosphäre aufgebaut ist, falls sie nur zur ersten Art gehört. Könnte irgend eine in der Atmosphäre gelegene, durch den Brechungsexponenten μ ausgezeichnete Kugelschale sichtbar gemacht werden, so würde ihr Radius im Verhältnis $\mu : 1$ vergrößert erscheinen. Da μ nach oben abnimmt, erscheinen die konzentrischen Schichten umso mehr vergrößert, je tiefer sie liegen.

Atmosphären zweiter Art. Es sei (Fig. 19) O der Mittelpunkt eines festen Kernes vom Radius R_0 ; die kritische Schicht habe den Radius R_1 . Strahlen 1, 2, 3, 4 ..., die unterhalb R_1 in $A, B, C \dots$ horizontal streichen, senken sich symmetrisch nach beiden Seiten zur Oberfläche des festen Kernes herab, dieselbe nach einer mit der Höhe des Kulminationspunktes wachsenden Zahl von Umläufen erreichend. Strahlen, welche die kritische Schicht tangieren, verbleiben in derselben. Strahlen, die von einem Punkte P ausgehend mit der Normalen einen Winkel i_0 bilden, größer wie ein gewisser kritischer Winkel β_0 , kehren wieder zur Oberfläche zurück, nach einer Anzahl

Umläufen, die mit abnehmendem i_0 zunimmt. Strahlen, die von P unter dem Winkel β_0 ausgehen, münden nach unendlich vielen Umläufen in die kritische Schicht ein. Erst Strahlen, die P steiler verlassen, können sich in beliebige Weiten entfernen, nach einer Anzahl Umläufen, die mit i_0 abnimmt. Der kritische Winkel bestimmt sich leicht, indem wir die Strahlgleichung (263) anwenden auf den Strahl, der unter β_0 von P ausgehend schließlich in die kritische Schicht mit dem Brechungskoeffizienten μ_1 unter $i = 90^\circ$ einmündet; es ergibt sich

$$(272) \quad \mu_0 R_0 \sin \beta_0 = \mu_1 R_1.$$

Für die zwischen R_0 und R_1 gelegenen Schichten nimmt nach außen β_0 zu,

da $\mu_0 R_0$ abnimmt (§ 6). Der Strahl, der P unter β_0 verlässt, durchsetzt alle zwischen R_0 und R_1 gelegenen Schichten unter ihren kritischen Winkeln.

Verläßt ein Strahl die Schicht R_0 unter einem Winkel i_0 , $i_0 < \beta_0$, so wird diese Stelle aus der Entfernung E unter einem Winkel γ gesehen, der sich aus der Gleichung

$$\mu_0 R_0 \sin i_0 = E \sin \gamma = E \gamma$$

bestimmt. Der Winkel γ wird ein Maximum, wenn i_0 seinen Maximalwert β_0 erreicht, und wir erhalten

$$(273) \quad \mu_0 R_0 \sin \beta_0 = \mu_1 R_1 = E \gamma,$$

d. h. der feste Kern und alle zwischen R_0 und R_1 gelegenen Schichten erscheinen in E unter demselben Winkel γ wie die kritische Schicht, die selbst, wie eine Kugel mit einer Atmosphäre erster Art umgeben, im Verhältnis $\mu_1 : 1$ vergrößert erscheint. Würden wir, ceteris paribus, den festen Kern ausdehnen bis auf den Radius R_1 , so würde sich in E dessen scheinbare Größe nicht ändern. Alle in der zwischen R_0 und R_1 eingeschlossenen Kugelschale schwimmenden Gebilde würden

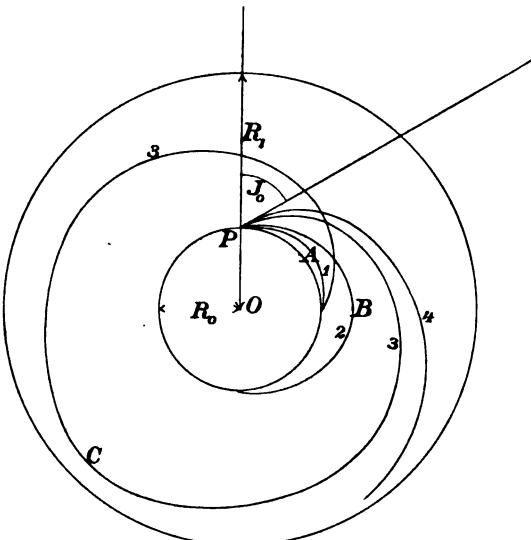


Fig. 19.

von E gegen einen aus der Oberfläche des festen Kernes gebildeten Hintergrund erscheinen.

Anmerkung. Eine Schicht vom Radius R kann nur dann unter dem nach (271) resp. (273) berechneten Winkel γ erscheinen, wenn in dieser Richtung sich noch brechende Schichten befinden. Eine mit Schellack vom Brechungsexponenten 1,5 gefirnißte Holzkugel vom Radius R wird nicht unter einem Winkel γ , $\gamma E = 1,5 R$, erscheinen; dies tritt erst ein, wenn der äußere Radius der Schellacksschicht größer als $1,5 R$ wird. In keinem Falle kann eine Schicht unter einem Winkel gesehen werden größer als derjenige, den die von E an die äußerste, brechende Schicht gelegten Tangenten bestimmen.

§ 8. Wir betrachten im folgenden die Lichtbrechung in vollständigen Gaskugeln mit $n > 1$. Dabei ist es unwesentlich, ob wir es mit Gaskugeln von endlichem Radius (z. B. polytropen Gaskugeln $n < 5$, isotherm-polytropen Gaskugeln mit $n < 5$) oder von unendlichem Radius (polytropen Gaskugeln $n > 5$, isotherme Gaskugeln) zu tun haben. Im Mittelpunkte ist stets $\frac{d\varrho}{dr} = 0$; an der im Endlichen oder Unendlichen liegenden Oberfläche ist stets $u = 0$, also $\frac{du}{dr} = \frac{d\varrho}{dr} = 0$. Der Krümmungsradius $\sigma = -\frac{1 + \nu\varrho}{\nu \frac{d\varrho}{dr}}$, von endlicher Größe und nur

im Mittelpunkte und an der Oberfläche unendlich, durchschreitet einen Minimalwert, der für kleine Werte von ϱ nahe an dem Wendepunkte der Kurve $\varrho = f(r)$ (vgl. Tafel II) auftritt. Wir bilden

$$\frac{d\sigma}{dr} = -1 + \frac{(1 + \nu\varrho) \frac{d^2\varrho}{dr^2}}{\nu \left(\frac{d\varrho}{dr} \right)^2}$$

und sehen, daß die Stelle $\frac{d\sigma}{dr} = 0$ in das Gebiet der Kugel fällt, in dem die Kurve $\varrho = f(r)$ ihren Wendepunkt überschritten hat. Da wir $\frac{d\sigma}{dr}$ auch schreiben können

$$\frac{d\sigma}{dr} = -1 + \frac{\nu \sigma^2 \frac{d^2\varrho}{dr^2}}{1 + \nu\varrho}$$

und von jener Stelle an $\frac{d^2\varrho}{dr^2}$ mit r zu-, ϱ aber abnimmt, so muß $\frac{d\sigma}{dr} = 0$ einen Minimalwert bestimmen. σ kann also nur *einen* Minimal-

wert durchschreiten, und zwar muß derselbe, falls er kleiner als r ist, zwischen zwei Stellen gelegen sein, an denen $\sigma = r$ ist.

Demnach können wir die Gaskugeln ebenfalls in zwei Klassen einteilen. In den Gaskugeln erster Art bleibt σ stets $> r$. Ein Lichtstrahl, der an irgend einer Stelle den Radius senkrecht durchsetzt, geht nach größerem r und kann die Gaskugel verlassen. Die ganze Gaskugel verhält sich wie eine Atmosphäre erster Art; für jede konzentrische Schicht gilt das Gesetz der Sphärenvergrößerung, Gleichung (271).

In den Gaskugeln zweiter Art wird σ kleiner als r und an zwei Stellen gleich r . Die Verhältnisse in einer solchen Gaskugel sind in Fig. 20 schematisch dargestellt. Ich habe eine Kugel mit endlichem Radius $r = R$ gewählt. Die Kurve σ schneidet die Gerade $y = r$ bei den Abszissen R_3 und R_1 ; sie geht für $r = 0$ und $r = R$ nach ∞ . Die Kurve μr ist für $r = 0$ gleich Null, für $r = R$ gleich $1/R$. Bei R_2 erreicht sie einen Maximalwert $\mu_2 R_2$, bei R_1 einen Minimalwert $\mu_1 R_1$; ihr Wendepunkt fällt nahezu in dieselbe Abszisse wie der Minimalwert von σ . Bei einer Abszisse R_3 ist $\mu_3 R_3 = \mu_1 R_1$. Die Gaskugel zerfällt in drei sich verschieden verhaltende Gebiete, die sich von 0 bis R_3 , R_3 bis R_1 und von R_1 bis zur Oberfläche erstrecken. Die Schicht von R_1 bis R verhält sich wie eine Atmosphäre erster Art; es gibt in ihr keine Strahlen, die nicht nach E gelangen können, und für jede Schale gilt das Vergrößerungsgesetz (271). Die Schicht von R_3 bis R_1 verhält sich wie eine Atmosphäre zweiter Art. Für jede Schale gibt es einen kritischen Winkel \mathfrak{J} , bedingt durch die Gleichung $\mu r \sin \mathfrak{J} = \mu_1 R_1$; Strahlen, die unter

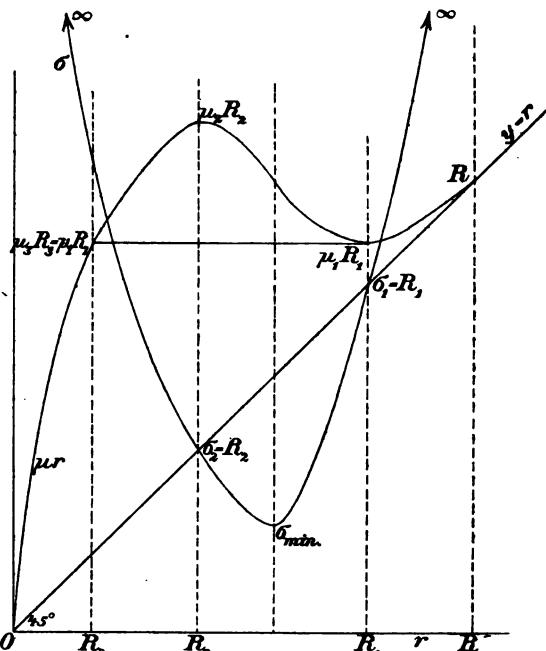


Fig. 20.

schwächerem Winkel \mathfrak{J} eingebrochen, werden in der Schicht von R_1 bis R gebrochen und treten aus der Kugel hervor. Die Kurve σ schneidet die Kurve μr im Bereich zwischen R_3 und R_1 .

größeren Winkel die Schale durchsetzen, gehen später wieder in die Tiefe; Strahlen unter dem Winkel β münden nach unendlich vielen Umläufen in die kritische Schicht vom Radius R_1 ein; nur Strahlen mit kleinerem Winkel können die kritische Schicht durchsetzen und nach E gelangen. Für die Schicht R_3 hat der Maximalwert $\mu_3 R_3$ einen Minimalwert β_3 zur Folge. Die Schichten von R_3 bis R_2 verhielten sich, wenn die über R_2 liegenden Schichten entfernt würden, wie eine Atmosphäre erster Art. Die Anwesenheit dieser Schichten jedoch bewirkt, daß auch für die Schichten von R_3 bis R_2 Grenzwinkel existieren, gegeben durch die Bedingung $\mu r \sin \beta = \mu_3 R_3 \sin \beta_3$, bei deren Überschreitung die Strahlen mit einem zu großen Winkel, größer β_3 , die Schale R_2 durchsetzen und deshalb nicht mehr nach E gelangen können. Dieser Grenzwinkel wächst mit der Tiefe und wird bei R_3 wieder 90° , da $\mu_3 R_3 = \mu_1 R_1$. Der Strahl, der R_2 unter dem Winkel β_3 schneidet, durchsetzt alle Schalen zwischen R_3 und R_1 unter ihren kritischen Winkeln; ist der Winkel nur wenig kleiner als β_3 , so kommt er aus Schichten, tiefer wie R_3 , begleitet die Schicht R_3 in sehr vielen Umläufen und gelangt nach E , nachdem er auch der Schicht R_1 in vielen Umläufen nahe geblieben ist. Für jede dieser Schichten gilt die Beziehung $\mu r \sin i = E\gamma$, und γ wird Maximum für $i = \beta$, so daß wir haben

$$\mu_3 R_3 = \mu_2 R_2 \sin \beta_3 = \mu_1 R_1 = E\gamma,$$

d. h. alle zwischen R_3 und R_1 gelegenen Schalen erscheinen unter demselben Gesichtswinkel wie die kritische Schicht R_1 . In bezug auf das Gesetz der Sphärenvergrößerung verhält sich also die Schicht zwischen R_3 und R_1 , trotzdem zwischen R_3 und R_2 stets $\sigma > r$ ist, durchwegs wie eine Atmosphäre zweiter Art. Tiefer wie R_3 treffen wir wieder eine Atmosphäre erster Art, dem Gesetz Gleichung (271) gehorchnend. Bauen wir, ceteris paribus, um das Zentrum der Kugel einen festen Kern und lassen seinen Radius wachsen, so wächst, falls wir Absorptionen des Lichtes ausschließen, dessen Bild kontinuierlich, so lange sein Radius kleiner wie R_3 bleibt; in dem Moment, wo dies eintritt, vergrößert sich sein Bild sprungweise bis zur Bildgröße der kritischen Schicht R_1 , gegeben durch die Beziehung $\mu_1 R_1 = E\gamma$, und behält konstante Größe bei, bis der Kern alle innerhalb R_1 liegenden Schichten ersetzt hat; erst bei weiterem Anschwellen desselben vergrößert sich dessen Bild nach Gleichung (271). Nehmen wir ferner einen Gasball aus glühenden Gasen, dessen Leuchtkraft nach außen abnimmt, so erscheint er von E aus als Scheibe, deren

Helligkeit stetig nach außen abnimmt, falls er zur ersten Art gehört; gehört er aber zur zweiten Art, und kann von Absorption abgesehen werden, so tritt bei $\mu_1 R_1$ ein plötzlicher Helligkeitswechsel auf, da der Grenzstrahl bei R_1 bis aus der Tiefe der Schicht R_3 Licht heraufholt. Liegt die Schicht R_1 in Gebieten, die selbst nur schwach leuchten, so kann trotzdem die ganze von $\mu_1 R_1$ umschlossene Scheibe in glänzendem Licht leuchten und sich in scharfer Begrenzung von sehr dunklem Hintergrunde abheben. Ist die Sonne ein Gasball zweiter Art mit stetig nach außen abnehmender Leuchtkraft, so braucht, falls wir Lichtschwächung durch Absorption vollständig ausschließen können, dem Helligkeitssprung an der Grenze der Photosphäre keine reelle Unstetigkeit innerhalb der Sonne zu entsprechen. Die kritische Schicht erscheint unter dem Gesichtswinkel der Photosphäre; jeder Strahl unter kleinerem Gesichtswinkel kann bis in die heißen, leuchtenden Schichten vom Radius R_3 hinabsteigen, jeder Strahl unter größerem Gesichtswinkel bleibt in den verhältnismäßig kühlen Schichten außerhalb R_1 ; deren Anwesenheit verrät sich, wenn bei einer Sonnenfinsternis der Mond das Licht innerhalb $\mu_1 R_1$ abblendet.

Diese Gesetze des Strahlenverlaufes in Gaskugeln hat zuerst A. Schmidt (loc. cit.) aufgestellt und die Sonne, wie eben geschildert, als einen Gasball zweiter Art aufgefaßt. Wir werden in Kap. XVIII diese Schmidtsche Sonnentheorie einer eingehenden Kritik unterziehen; in gegenwärtigem Kapitel handelt es sich für uns darum, dazu die nötigen Unterlagen zu suchen. Wir haben in erster Linie den Radius der kritischen Schicht in einem gegebenen Gasball zu ermitteln und die Mächtigkeit der Gasschichten, die ein aus gegebener Tiefe austretender Strahl zu durchsetzen hat. Würden sich außerhalb der kritischen Schicht liegend Massen ergeben, an Mächtigkeit die Atmosphäre der Erde etwa um das hundertfache übertreffend, so wäre deren Absorptionsvermögen so groß, daß kein Licht aus den kritischen oder tieferen Schichten zu uns gelangen kann; wir würden lediglich in eine Atmosphäre erster Art bis in eine gewisse Tiefe hineinblicken, und die theoretischen Konsequenzen des Strahlenganges aus tiefen Schichten praktisch nicht zur Erscheinung gelangen.

§ 9. Wir bestimmen die Lage der kritischen Schicht, indem wir in einer Gaskugel die Stellen suchen, an denen $\frac{\sigma}{r} = 1$ wird. Führen wir in dem Ausdruck

$$\frac{\sigma}{r} = -\frac{1 + \nu \varrho}{\nu r \frac{d \varrho}{dr}}$$

Tabelle 20.

n = 1,5. Dissoziierter Wasserstoff.

Tabelle 21.

$n = 2.5$. Wasserstoff.

Tabelle 22

n = 3.5 Atmosphärische Luft

r_1	u_1	$\varrho_0 = 1$			$\varrho_0 = 10$			$\varrho_0 = 20$		
		u_1	1	$\frac{\sigma}{r}$	1	$\frac{\sigma}{r}$	1	$\frac{\sigma}{r}$	1	
		$\frac{u_1}{n \tau \cdot u_1'}$	$1 \cdot j \cdot r \cdot n u_1' \cdot n - 1 \cdot u_1'$		$10 \dots$		$20 \dots$			
0	∞	∞	∞		∞	∞	∞		∞	∞
0,25	19,250	87,970	106,520		8,727	27,977	4,3635		23,614	
0,50	4,8972	23,982	28,879		2,3982	7,8954	1,1991		6,0963	
0,75	2,3295	12,401	14,634		1,2401	3,4736	0,62005		2,8586	
1	1,2966	8,5492	9,8458		0,8549	2,1515	0,42745		1,7241	
1,25	0,86234	7,0337	7,8960		0,70337	1,66871	0,35168		1,2140	
1,50	0,63497	6,5440	7,1690		0,65440	1,27937	0,32720		0,95817	
1,75	0,48951	6,7977	7,2872		0,67977	1,16928	0,33969		0,82949	
2	0,39115	7,3755	7,7667		0,73755	1,18270	0,36878		0,75993	
2,50	0,27096	10,181	10,452		1,0181	1,28906	0,50905		0,78001	
3	0,19879	16,412	16,611		1,6412	1,83999	0,82060		1,0194	
3,50	0,14811	29,654	29,803		2,9654	3,11351	1,4827		1,6308	
4	0,10636	60,759	60,865		6,0759	6,18296	3,03795		3,1443	
4,50	0,06793	152,89	152,96		15,289	15,357	7,6445		7,7124	
5	0,03078	645,40	645,43		645,40	645,471	32,370		32,301	
5,4	0,00126	94704,0	94704,0		9470,4	9470,4	4735,2		4735,2	
5,4172	0	∞	∞		∞	∞				

$$\nu = 1,5463 \text{ gramm}^{-1} \text{ cent}^3$$

$$\nu = 1,5463 \text{ gramm}^{-1} \text{ cent}^3.$$

$$\nu = 0,22637 \text{ gramm}^{-1} \text{ cent}^3.$$

die Variablen r_1 , u_1 , resp. v_1 der Differentialgleichung I', (Seite 69) resp. II' a (Seite 133) ein, so erhalten wir für eine polytrope Gaskugel von der Klasse n , indem wir Gleichung (C) (Seite 69) $\varrho = U^n u_1^n$ setzen, worin U^n den Zahlwert der Mittelpunktsdichte bedeutet, und r durch r_1 ausdrücken

$$(274) \quad \frac{\sigma}{r} = - \left(\frac{u_1}{n r_1 \frac{du_1}{dr_1}} + \frac{1}{n v U^n u_1^{n-1} r_1 \frac{du_1}{dr_1}} \right).$$

Für eine isotherme Gas- kugel setzen wir $\varrho = e^v e^{v_1}$, (Seite 133), e^v gleich dem Zahlwert der Mittelpunkts- dichte; r hängt von r_1 wieder linear ab, und wir erhalten

$$(275) \quad \frac{\sigma}{r} = - \left(\frac{1}{r_1 \frac{dv_1}{dr_1}} + \frac{1}{v e^v e^{v_1} r_1 \frac{dv_1}{dr_1}} \right).$$

Die rechten Seiten der Gleichungen können wir mit Hilfe der Tabellen 1—12, resp. 14 berechnen und erhalten $\frac{\sigma}{r}$ für jeden Wert der Mittelpunktsdichte an jener Stelle der Gaskugel, die durch r_1 bestimmt ist.

Für eine Reihe von Gas- kugeln habe ich die Resultate dieser Rechnung in den Tabellen 20—26 zusammen- gestellt.

Tabelle 23.

r_1	$n = 3$. Kohlensäure. $v = 0,2203$ gramm $^{-1}$ cent 3						$\int_{u_1} u_1^n du_1 = 0$
	$\varrho_0 = 1$	$\varrho_0 = 10$	$\varrho_0 = 50$	$\varrho_0 = 75,181$	$\varrho_0 = 100$	$\varrho_0 = 1000$	
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0,25	16,086	72,048	68,134	23,291	17,597	17,044	33,627
0,50	4,1899	30,279	24,409	8,0279	6,1578	6,0406	4,3527
0,75	1,9079	10,873	12,782	1,0873	1,9171	2,1264	0,0873
1	1,1502	7,8510	8,9812	0,78690	0,15738	0,1067	2,0176
1,25	0,78670	6,7973	7,5680	0,67973	1,4484	1,2849	0,07811
1,50	0,51114	6,6690	7,2811	0,66900	1,2871	0,90465	0,09042
1,75	0,40585	7,1307	7,5816	0,71307	1,1639	0,70434	0,07679
2	0,31748	8,1428	8,5207	0,81428	1,1864	0,14661	0,05737
2,50	0,27451	12,155	12,430	1,8155	1,4900	0,53446	0,05714
3,50	0,17100	30,399	30,549	2,0839	2,2558	0,40664	0,05716
4	0,14546	36,464	36,641	3,6464	3,6464	0,37298	0,05716
4,50	0,11800	136,875	136,923	6,8777	7,0232	1,51016	0,91480
5	0,09855	89,09	89,16	13,885	13,803	2,8850	1,93823
6	0,06877	214,7	224,47	99,408	99,369	5,8944	3,1767
6,5	0,06080	220,096	220,095	99,31	99,271	4,4338	0,45287
7	0	0	0	0	0	0	0

Die erste Kolonne gibt den von der Mittelpunktsdichte unabhängigen Wert von $\frac{u_1}{n r_1 \frac{du_1}{dr_1}}$, von ∞ bis 0 abnehmend. So lange wie

Tabelle 24. $n = 4$. $\nu \rho_0 = 1$.

r_1	$\frac{u_1}{n r_1 u_1'}$	$\frac{1}{n r_1 u_1^{n-1} u_1'}$	$\frac{\int_{r_1}^{r_1(u_1=0)} u_1^n dr}{u_1'(u_1=0)}$
0	∞	∞	156,09
0,25	12,121	12,628	125,58
0,5	3,1717	3,7290	97,032
0,75	1,4996	2,1840	72,810
1	0,92188	1,6802	53,335
1,5	0,50752	1,7021	27,644
2	0,35819	2,3770	14,070
3	0,24691	6,5769	8,9900
4	0,20156	16,817	1,1457
5	0,17429	65,835	0,40971
6	0,15831	149,70	0,15815
8	0,11706	957,60	0,01619
10	0,08385	6867,7	0,00184
12	0,04999	60981	
14	0,01665	$3,059 \cdot 10^6$	
14,5	0,00812	$2,8287 \cdot 10^7$	
14,599	0	∞	

Tabelle 25. $n = 4,9$. $\nu \rho_0 = 1$.

r_1	$\frac{u_1}{n r_1 u_1'}$	$\frac{1}{n r_1 u_1^{n-1} u_1'}$	$\frac{\int_{r_1}^{r_1(u_1=0)} u_1^n dr}{u_1'(u_1=0)}$
0	∞	∞	$1,9236 \cdot 10^4$
0,25	9,9453	10,698	$1,5200 \cdot 10^4$
0,5	2,6440	3,2187	$1,1532 \cdot 10^4$
0,75	1,2856	1,9604	8476,8
1	0,80973	1,6431	6100,7
1,5	0,46947	1,8686	8184,7
2	0,35072	2,8587	1630,1
2,5	0,31187	5,2711	919,92
3	0,26483	8,8414	581,87
4	0,23439	23,568	199,08
5	0,21971	59,196	83,900
6	0,21145	132,80	53,617
8	0,20194	510,43	14,761
10	0,19636	1522,3	6,1559
14	0,18907	8346,0	1,2329
22	0,17797	$9,1814 \cdot 10^4$	0,18203
50	0,14868	$1,1552 \cdot 10^7$	0,00443
169,47	0	∞	

dieser Ausdruck ≥ 1 kann keine noch so große Mittelpunktsdichte eine kritische Sphäre erzwingen. Die folgenden Kolonnen enthalten

für verschiedene Mittelpunktsdichten die Werte von $\frac{1}{\nu n U^n u_1^{n-1} r_1 \frac{du_1}{dr_1}}$, sowie den Wert von $\frac{\sigma}{r}$. Je größer die Mittelpunktsdichten, desto tiefer liegt die innere Schicht $\frac{\sigma}{r} = 1$, und desto mehr rückt die äußere Schicht $\frac{\sigma}{r} = 1$, die kritische Schicht, nach außen. Die durch Dezimalen ausgezeichnete Mittelpunktsdichte ergibt sich für eine Kugel der betreffenden Klasse und Gasart, an Masse gleich der Sonnenmasse, im Radius gleich demjenigen der Photosphäre.

Die Tabellen 24 und 25, $n = 4$, resp. 4,9, sind berechnet für den Fall, daß Brechungsvermögen mal Mittelpunktsdichte, νU^n , den Wert 1 hat; ein Minimum von Rechnung gestattet, zu andern Verhältnissen überzugehen.

Tabelle 26. Isotherme Kugel.
 $n = \infty$. Wasserstoff. $\nu = 1,5463 \text{ gramm}^{-1} \text{ cent}^3$.
 $\rho_0 = 1 \text{ gramm cent}^{-3}$.

r_1	$\frac{1}{r_1 v_1}$	$\frac{1}{\nu e^{\nu_1} r_1 v_1}$
1	8,2928	2,5781
1,5	1,6489	1,4966
2	1,0580	1,1975
2,5	0,78900	1,1428
3	0,64565	1,2080
3,5	0,56015	1,3558
4	0,50604	1,5742
5	0,44631	2,2257
6	0,41795	3,1824
7	0,40431	4,4826
8	0,39845	6,2551
9	0,39798	8,2608
10	0,39807	10,798
20	0,44175	63,557
50	0,52466	508,42
100	0,54159	1895,5

Tabelle 26 stellt diese Verhältnisse in einer isothermen Kugel aus Wasserstoffgas von der Mittelpunktsdichte 1 dar, woraus leicht zu andern Gasarten und Mittelpunktsdichten übergegangen werden kann. Würden wir eine isotherm-polytropen Kugel kleinster Innen temperatur aufbauen, so käme (vgl. Kap. XII) von der isothermen Kugel die Strecke bis $r_1 = 8,991$ zur Anwendung. Die kritische Schicht läge in dem isothermen oder dem polytropen Teile der Kugel, je nachdem $\nu \rho \leqslant 13,7$.

Um diese Verhältnisse bequemer überblicken zu können ist der

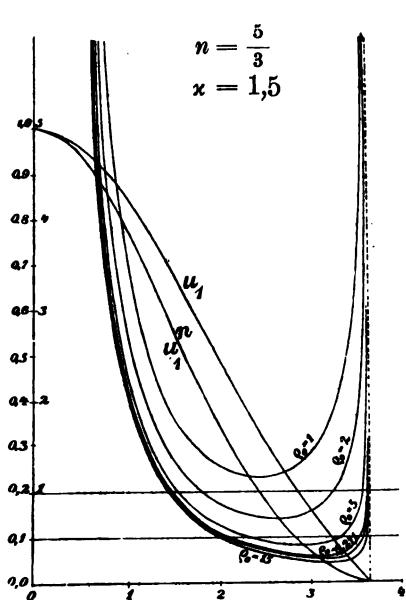


Diagramm 10.

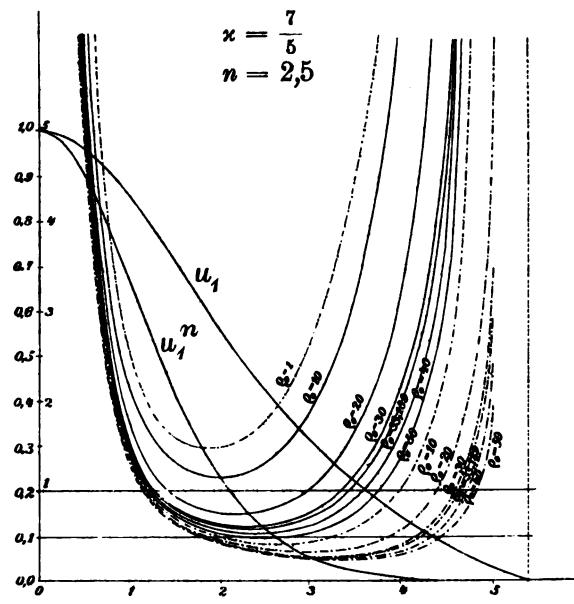


Diagramm 11.

$$x = \frac{4}{3}$$

$$n = 3$$

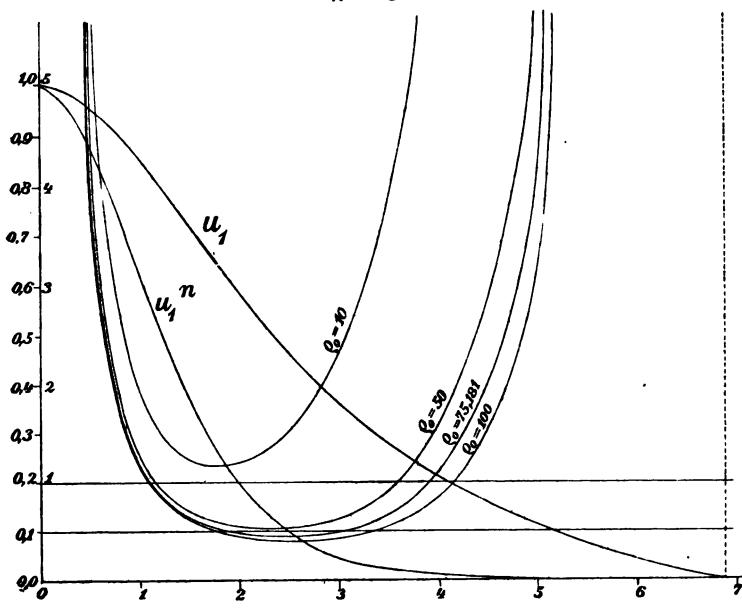


Diagramm 12.

Inhalt der Tabellen 20—23 in den Diagrammen 10, 11 und 12 graphisch zur Darstellung gebracht. Als Abszissen sind die Werte von r_1 aufgetragen. Die linke Seite der Ordinatenachse enthält eine von 0—1 reichende Teilung; in diesem Maße sind die Kurven u_1 und u_1'' , Temperatur- und Dichteverlauf im Innern der Kugel, aufgetragen. Die rechte Seite der Ordinatenachse enthält eine Skala für $\frac{\sigma}{r}$; die Kurven $\frac{\sigma}{r}$ sind durch die zugehörigen Werte der Mittelpunktsdichten ausgezeichnet. In Diagramm 11 sind diese Kurven für Wasserstoff (Tabelle 21) strichpunktiert, für atmosphärische Luft (Tabelle 22) ausgezogen eingezeichnet. Ihr äußerer Durchschnitt mit der Horizontalen $\frac{\sigma}{r} = 1$ gibt die Lage der kritischen Schicht. Würde das Brechungsvermögen ν den p -fachen Wert besitzen, so wäre die kritische Schicht mit genügender Genauigkeit gegeben durch den Schnitt der eingezeichneten $\frac{\sigma}{r}$ -Kurven mit der Horizontalen $\frac{\sigma}{r} = p$; die Horizontale $p = \frac{1}{2}$ ist eingezeichnet. Hätten wir die Abhängigkeit des Brechungsvermögens von der Dichte in der Form $\mu^2 = 1 + \nu' \varrho$, $\nu' = 2\nu$ angesetzt, so würde sich die Lage der kritischen Schicht nur unbedeutend geändert haben, denn es ergäbe sich

$$\frac{\sigma}{r} = -\frac{\mu}{r_1 \frac{d\mu}{dr_1}} = -\left(\frac{2u_1}{n r_1 \frac{du_1}{dr_1}} + \frac{2}{\nu' n r_1 U^n u_1^{n-1} \frac{du_1}{dr_1}} \right),$$

und mit wachsendem r_1 verschwindet, wie aus den vorstehenden Tabellen ersichtlich, der Einfluß des ersten Summanden.

Die Benutzung dieser Tabellen oder Diagramme gestaltet sich überaus einfach. Ist ein Gasball von bestimmter Gasart und Polytropenklasse durch Masse und Radius gegeben, so ermittelt man mit Hilfe der kosmogenetischen Flächengleichung den Wert der Mittelpunktsdichte und interpoliert nun den Schnittpunkt der entsprechenden Kurve $\frac{\sigma}{r}$ mit der Horizontalen $\frac{\sigma}{r} = 1$, resp. $\frac{\sigma}{r} = p$, falls ein Gas mit anderem ν vorliegt.

Für eine Kugel von der Masse der Sonne und dem Radius der Photosphäre, aus einatomigem Wasserstoffgas als isentrope Kugel, $n = 1,5$; $k = \nu = \frac{5}{3}$, aufgebaut, ergibt sich eine Mittelpunktsdichte $\varrho_0 = 8,2710 \text{ gramm cent}^{-3}$, und die kritische Schicht findet sich bei $r_1 = 3,63$. Die Strecke 3,6571 entspricht dem Radius der Photosphäre, einem Gesichtswinkel von 959,65''. Die kritische Schicht läge somit in einem Abstande von 7,1'' oder in einer Tiefe von 5100

Kilometer unter dem Rande der Photosphäre. An dieser Stelle findet sich nach Tabelle 4, $u_1^n = 0,000415$, und wegen $\rho_0 = 8,271$ eine Dichte von $\rho = 0,0034$ gramm cent⁻³, entsprechend der Dichte atmosphärischer Luft von 0° bei einem Drucke von 2,7 Atmosphären. Würden wir bei gleicher Masse den Radius der Kugel so gewählt haben, daß der Radius der kritischen Schicht gleich dem Radius der Photosphäre wird, so würden sich diese Werte nur ganz unbedeutend ändern.

§ 10. Wir bestimmen weiter die Masse, die ein Strahlenbündel von konstantem Querschnitt 1 cent² zu durchlaufen hat, wenn es von einer Schicht vom Radius r radial nach außen läuft. Diese Masse wollen wir kurz als „optische Masse“ bezeichnen. Die optische Masse der Erdatmosphäre fanden wir (Kap. XV § 3) mit genügender Genauigkeit zu 10³ gramm; diese Masse wählen wir weiterhin als Einheit der optischen Massen. Um die gesuchten optischen Massen zu bestimmen können wir verfahren wie in Kap. XV § 4, nur haben wir an Stelle des Integrals von 0 bis $r_{1(u_1=0)}$ die Integrale von dem der Stelle r entsprechenden Werte r_1 an bis $r_{1(u_1=0)}$ zu nehmen und erhalten für dieselben in den festgesetzten Einheiten

$$(276) \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{10^3} \cdot \frac{\mathfrak{M}}{4\pi R^3} \cdot \frac{\int_{r_1}^{r_{1(u_1=0)}} u_1^n dr_1}{\left(\frac{du_1}{dr_1}\right)_{(u_1=0)}}$$

Der Wert des letzten Faktors ist in der letzten Kolonne der Tabellen 20—25 angegeben.

In dem am Ende des vorangehenden § angeführten Beispiele fanden wir die kritische Schicht bei $r_1 = 3,63$. Dazu finden wir in

$$\text{Tabelle 20 } \frac{\int_{r_1}^{r_{1(u_1=0)}} u_1^n dr_1}{\left(\frac{du_1}{dr_1}\right)_{(u_1=0)}} = 0,00003 \text{ und erhalten } \mathfrak{A} = 960. \text{ Ein Lichtstrahl,}$$

der von der kritischen Schicht in radialer Richtung den Gasball verläßt, hat somit über 900 mal mehr Masse zu durchlaufen wie ein Strahl, der die Erdatmosphäre senkrecht durchsetzt. Die oberhalb der kritischen Schicht liegenden Massen besitzen für senkrechte Inzidenz einen Transmissionskoeffizienten (0,8)⁹⁶⁰, also von der Größenordnung 10⁻⁹⁰; er wäre von der Größenordnung 10⁻⁴⁰, wenn wir denjenigen der Erdatmosphäre zu 0,9 angenommen hätten. Die Energie Mengen, die durch Strahlung von der kritischen Schicht nach außen

gelangen, sind in diesem Falle praktisch gleich Null und die oben auseinander gesetzte, geometrische Optik des Gasballen für das Bild des selben bedeutungslos.

§ 11. Von allen Strahlenbündeln, die aus einer Gaskugel in das Auge des außen stehenden Beobachters gelangen, durchsetzt nur ein einziges dieselbe in radialer Richtung; im allgemeinen folgen dieselben gekrümmten Bahnen. Um die Absorptionsverhältnisse zu untersuchen, die ein Strahlenbündel erleidet, wenn es eine gekrümmte Strecke s zurücklegt, bestimmen wir die auf s gelegene optische Masse $\int \varrho ds$. Der Transmissionskoeffizient dieser Strecke berechnet sich aus

$$S = S_0 e^{-\alpha \int \varrho ds},$$

oder, wenn wir $\int \varrho ds$ in den oben definierten Einheiten messen und wieder

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{10^3} \int \varrho ds$$

setzen, so ergibt sich derselbe zu

$$\frac{S}{S_0} = (0,8)^{\mathfrak{A}}.$$

Die Strecke s drücken wir aus durch den Winkel z , den die an die Enden von s gelegten Tangenten miteinander bilden. Bezeichnen wir mit σ wieder den Krümmungsradius der Bahn, so erhalten wir

$$(a) \quad ds = \sigma dz = -\frac{\mu}{d\mu} dz.$$

Benutzen wir weiter die Beziehungen $\frac{dr}{d\sigma} = \sin i$; $\mu r \sin i = \mu_0 r_0 \sin i_0 = \text{konst.}$, $\mu = 1 + \nu \varrho$, so erhalten wir leicht

$$(b) \quad \varrho ds = -\frac{\mu^2 r}{\nu \mu_0 \sin i_0} \cdot \frac{\varrho}{r_0 \frac{dr}{d\sigma}} dz;$$

und ersetzen wir wieder ϱ durch $U^n u_1^n$ und r durch r_1 , so ergibt sich

$$(277) \quad \varrho ds = -\frac{\mu^2 r}{\nu \mu_0 \sin i_0} \cdot \frac{u_1}{n(r_1)_0 \frac{du_1}{dr_1}} dz.$$

Nehmen wir nur sehr kleine Richtungsänderung von dz an und bleiben in den wenig dichten Partien der Kugel, so können wir $\frac{\mu^2}{\mu_0} = 1$ setzen, für $\frac{u_1}{du_1/dr_1}$ den der Stelle r_0 entsprechenden Wert an-

wenden und erhalten

$$(277a) \quad \varrho \Delta s = - \frac{r}{\nu \sin i_0} \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{u_1}{r_1 \frac{du_1}{dr_1}} \right) \Delta z.$$

Wir bestimmen die optischen Massen, gelegen auf der Strecke s , die der Strahl passiert, wenn er, von der kritischen Schicht der aus dissoziertem Wasserstoffgas adiabatisch aufgebauten Sonnenkugel (vgl. Ende des § 9) ausgehend, seine Richtung um 10 Bogensekunden ändert. Wir haben dann $\Delta z = 10'' = 0,00005$ und erhalten

$$\mathfrak{A} = \frac{\varrho \Delta s}{10''} = \frac{6,904 \cdot 10^{10}}{10'' \cdot 1,546 \cdot \sin i_0} \cdot \frac{1}{1,5} \cdot \frac{0,00556}{3,63 \cdot 0,206} \cdot 0,00005 = \frac{11,07}{\sin i_0}.$$

\mathfrak{A} wird ein Minimum für den Strahl, der die kritische Schicht tangential verlässt; der Transmissionskoeffizient wird dann $(0,8)^{11,07} = 0,085$. Hat dieser Strahl sich um nur 10 Bogensekunden gedreht, so wird die Strahlintensität auf 8% ihres ursprünglichen Wertes abgeschwächt. Wäre $\Delta z = 1$ Bogenminute, so ergäbe sich der Transmissionskoeffizient der zugehörigen Strecke zu $3,7 \cdot 10^{-7}$; dieselbe wird sich praktisch als so gut wie undurchsichtig erweisen.

Die Strahlänge Δs , die zum Drehwinkel Δz gehört, finden wir aus (277a), indem wir mit $\varrho = U^n u_1^n$ dividieren, U^n bestimmt durch die kosmogenetische Flächengleichung (103). Zu $\Delta z = 10''$ im vorigen Beispiel gehört $\Delta s = 32,2$ Kilometer; eine Strecke von 200 Kilometern kann bereits als undurchsichtig betrachtet werden.

§ 12. Wir bestimmen die Strecke Δr , um die sich der Strahl während einer Drehung um Δz vom Zentrum entfernt. Mit Hilfe der Beziehungen $\frac{dr}{ds} = \cos i$, $ds = \sigma dz$ ergibt sich

$$(a) \quad \frac{\sin i}{\cos i} dr = - \frac{\mu}{d\mu} dz = - \frac{\mu}{\nu \frac{d\varrho}{dr}} dz.$$

Für $\cos i$ setzen wir $\pm \sqrt{1 - \frac{\mu_0^2 r_0^2 \sin^2 i_0}{\mu^2 r^2}}$, je nachdem $i_0 \leq 90^\circ$ und erhalten

$$(b) \quad \pm \sqrt{r^2 - \frac{\mu_0^2 r_0^2 \sin^2 i_0}{\mu^2}} = - \frac{\mu^2}{\nu \mu_0 \sin i_0 r_0 \frac{d\varrho}{dr}} dz.$$

Bei der Integration geben wir μ^2 einen passenden, konstanten, mittleren Wert (μ^2) und erhalten, wenn wir noch rechts die Variablen u_1 , r_1 einführen:

$$(278) \quad r + \sqrt{r^2 - \frac{\mu_0^2 r_0^2 \sin^2 i_0}{(\mu^2)}} = r_0 (1 + \cos i_0) e^{\mp \frac{\mu^2}{\mu_0 \nu \sin i_0 n U^n(r_1)} \int_{s_0}^{s_1} \frac{u_1}{u_1^n \frac{du_1}{dr_1}} ds}.$$

Setzen wir wie oben $\Delta z = 10''$, $i_0 = 90^\circ$ und $(\mu^2) = \mu_0^2$, so ergibt sich

$$r + \sqrt{r^2 - r_0^2} = r_0 e^{-0,0000467}.$$

Setzen wir die Exponenten von e gleich λ , so ist mit genügender Genauigkeit $e^{\mp\lambda} = 1 \mp \lambda$ und

$$r - r_0 = r_0 \frac{\lambda^2}{2}.$$

Für $\Delta z = 10''$ erhalten wir $r - r_0 = 76$ cent. Setzen wir $\Delta z = 1'$, so wird $r - r_0 = 27$ Meter, eine Länge, die den Dimensionen der Sonne gegenüber zu vernachlässigen ist. Trotzdem hat der Strahl eine optische Masse durchlaufen, deren Transmissionskoeffizient von der Größenordnung 10^{-7} ist.

Würde der Strahl die Strecke $r - r_0$ in radialer Richtung durchlaufen, so betrüge die optische Masse $\varrho(r - r_0) = \varrho r_0 \frac{\lambda^2}{2} = O_r$. Auf dem Wege s , den der Strahl in Wirklichkeit einschlägt, berechnet sich die optische Masse O_s nach Gl. (277) und wir erhalten das Verhältnis der optischen Massen

$$(279) \quad \frac{O_r}{O_s} = \frac{\mu^2}{2\mu_0\nu \sin i_0 n} \frac{u_1}{U^n u_1^n} \frac{du_1}{r_0 \frac{dr_1}{dr}} \Delta z = \frac{\lambda}{2}.$$

Das Verhältnis der Transmissionskoeffizienten des Weges Δs zum Wege Δr ergibt sich zu $(0,8)^{\frac{O_s}{O_r}} = (0,8)^{\frac{\lambda}{2}}$; für obenstehendes Beispiel und $\Delta z = 1'$ praktisch Null.

Auf den Inhalt der letzten §§ werden wir in dem Kapitel über die Sonne zurückkommen; wir wenden uns hier einer andern Gedankenreihe zu.

§ 13. In einer kürzlich erschienenen Arbeit hat K. Schwarzschild*) einen Gleichgewichtszustand einer Atmosphäre untersucht, den er Strahlungsgleichgewicht nennt, und die der Photosphäre auflagernden Schichten der Sonne nach diesem Gesichtspunkte behandelt. Seine Ausführungen sind hier insofern von Interesse, als wir streckenweise auf eine Polytrope $n = 5$ geführt werden.

Eine Gaskugel oder Atmosphäre sei so aufgebaut, daß die Dichte in konzentrischen Schichten konstant und die Gleichgewichtsbedingung $dp = -g\varrho dr$ an jeder Stelle erfüllt ist. Zur Integration muß eine

*) K. Schwarzschild. Über das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre. Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaft zu Göttingen. Math.-physik. Klasse. Heft 1. 1906.

weitere Beziehung zwischen Dichte und Temperatur gegeben sein. Nun wird die in einer Kugelschale von der Dicke Δr eingeschlossene Masse Energie ausstrahlen, was ihre Temperatur zu erniedrigen sucht; andererseits strahlen die äußern und innern Schichten ihr Energie zu, von denen sie einen Teil absorbiert und ihre Temperatur wieder erhöht. Ist die Gasmasse so aufgebaut, daß in jeder Schicht diese durch Strahlung umgesetzten Energiemengen sich kompensieren, so befindet sich dieselbe im Strahlungsgleichgewicht; der Strahlungsprozeß läßt dann die Temperatur eines jeden Gasteilchens unverändert. Wir werden finden, daß zwei Lösungen des Problems möglich sind.

Um hier klarer zu sehen, behandeln wir zuerst eine einfache Aufgabe. Es sei gegeben eine genügend große ebene Platte, senkrecht zur x -Richtung. In jeder Ebene $x = \text{konst.}$ sei die Temperatur konstant. Wir fragen nach der Temperaturverteilung, bei welcher durch *Wärmeleitung* die Temperatur eines jeden Teilchens ungeändert bleibt. Die Temperaturverteilung muß der Bedingungsgleichung $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$ gehorchen, woraus folgt

$$T = c_1 + c_2 x.$$

Außer der Lösung $c_2 = 0$, $T = \text{konst.}$, ist noch lineares Temperaturgefälle, dessen Gradient c_2 durch die Randbedingungen gegeben ist, bei stationärem Temperaturzustand möglich. Sind an den Plattenseiten genügend große Wärmebehälter als Quelle und Sinkstelle vorhanden, so durchfließt ein nach Zeit und Ort konstanter Wärmestrom die Platte, ohne die Temperaturen derselben zu ändern. Würden die Wärmebehälter entfernt, so würde sich schließlich konstante Temperatur einstellen.

Zwei entsprechende Möglichkeiten finden wir auch bei dem Strahlungsproblem. Eine isotherme Gaskugel in spiegelnder Hülle wird durch Strahlungsprozesse ihre Temperaturen nicht ändern. Eine Gasschicht von endlicher Dicke, an beiden Seiten mit Wärmebehältern versehen, kann durch Strahlung einen nach Zeit und Ort konstanten Energiestrom befördern, der das dazu erforderliche Temperaturgefälle ungeändert läßt. In Wirklichkeit wird der die Gaskugel umgebende Weltenraum als Wärmebehälter dienen, in welchen die Energie durch Strahlung abfließt. Als inneren Wärmebehälter betrachten wir einen etwa vorhandenen festen Kern oder grenzen in einer vollkommenen Gaskugel eine genügend große Kugel ab, deren Aufbau nicht weiter in Betracht kommt. Je größer wir deren Wärme-

kapazität annehmen, desto längere Zeit kann das Strahlungsgleichgewicht der äußeren Schichten bestehen.

Wir nehmen, um die Verhältnisse möglichst einfach zu gestalten, an, daß die Strahlung der Gasmassen dem Kirchhofschen Gesetze gehorcht. Ist im Abstande r eine Kugelschicht von der Dicke dr , angefüllt mit Masse von der Dichte ϱ und der Temperatur T gegeben, und absorbiert dieselbe von der auffallenden Strahlungsmenge den Bruchteil $a\varrho dr$, so strahlt dieselbe nach jeder Seite aus $aE\cdot\varrho dr$; $E = cT^4$, $c = \text{konst.}$

Durch die Kugelfläche r senden die umschlossenen Gasmassen durch Strahlung einen Energiestrom im Betrage A Erg sek $^{-1}$ nach außen; durch die Kugelfläche $r + dr$ senden die außen liegenden Massen einen Energiestrom B Erg sek $^{-1}$ nach innen. Beim Passieren der Schicht dr wird A durch Absorption verstärkt um den Betrag $dA = -A \cdot a\varrho dr$ und nochmals verstärkt durch die Strahlung $Ea\varrho dr$, die von der Schicht selbst nach außen gesandt wird. Die Änderung von A ist somit bestimmt durch

$$(280) \quad \frac{dA}{dr} = -a\varrho(A - E);$$

ebenso ergibt sich die Änderung von B

$$(281) \quad \frac{dB}{dr} = -a\varrho(E - B).$$

Da $E = cT^4$, so können in einer gegebenen Gaskugel die Energieströme A und B berechnet werden. Ist umgekehrt Strahlungsgleichgewicht vorgeschrieben, so haben A und B eine Bedingungsgleichung zu erfüllen, die in Verbindung mit der Zustandsgleichung und der Gleichung $dp = -g\varrho dr$ den Aufbau der Kugel eindeutig bestimmt. Das Strahlungsgleichgewicht verlangt, daß jede Schicht ebensoviel Energie gewinnt wie sie ausstrahlt; also muß sein $Aa\varrho dr + Ba\varrho dr = 2aE\varrho dr$, oder

$$(282) \quad A + B = 2E.$$

Subtrahieren wir (281) von (280) und berücksichtigen (282), so erhalten wir

$$(283) \quad \frac{d(A - B)}{dr} = 0, \quad A - B = \text{konst.} = 2\gamma.$$

D. h. befinden sich die äußeren Schichten einer Gaskugel im Strahlungsgleichgewicht, so ist die Differenz der Energieströme A und B konstant. Da an der Oberfläche einer Gaskugel $B = 0$ ist, so ist die

Konstante γ bestimmt durch die Energiemenge A_0 , welche die Gaskugel ausstrahlt:

$$(284) \quad \gamma = \frac{A_0}{2}.$$

A_0 selbst kann gegeben sein in der Form $A_0 = c T_e^4$, wo T_e in Analogie zur „effektiven“ Temperatur der Sonne, als die „effektive“ Temperatur der Gaskugel eingeführt werden kann.

Addieren wir (280) und (281) und berücksichtigen (283), so ergibt sich

$$(285) \quad \begin{aligned} \frac{d(A+B)}{dr} &= 2 \frac{dE}{dr} = -a\varrho(A-E+E-B), \\ \frac{dE}{dr} &= -a\varrho\gamma. \end{aligned}$$

Damit haben wir eine Beziehung zwischen T und ϱ gefunden, welche in Verbindung mit der Zustandsgleichung und der Gleichung $dp = -g\varrho dr$ den Bau der Gaskugel bestimmt, derart, daß die Energiemenge 2γ ausgestrahlt wird. An Stelle der Gleichung der Polytopen, welche die polytrope Gaskugel erzwingt, tritt im neuen Probleme die Gleichung (285).

Der Versuch, in Gleichung (59) Seite 39 mit Hilfe von (285) und der Zustandsgleichung die einzige Variable T als Funktion von r einzuführen, liefert eine so verwickelt gebaute Differentialgleichung, daß deren Behandlung aussichtslos erscheint. Schwarzschild hat (loc. cit.) eine durch die Annahme $g = \text{konst.}$ angenäherte Lösung gegeben für die der Sonnenphotosphäre aufgelagerten Schichten.

Die Gleichungen (282)–(284) gestatten einen wichtigen Schluß. Wir haben früher gezeigt, daß an der Oberfläche einer Gaskugel von endlichem Radius die Temperatur Null herrschen muß. An der Oberfläche ist dann $E = 0$, und da auch $B = 0$, muß nach (282) $A = 0$ sein. Daraus folgt nach (283) $\gamma = 0$ durch die ganze Kugel hindurch, und nach (285) E durch die ganze Kugel hindurch gleich dem Werte an der Oberfläche, also ebenfalls gleich Null. Daraus folgt:

Ist eine Gaskugel von endlichem Radius, so kann sie nicht in allen Schichten im Strahlungsgleichgewichte sein.

Es gibt somit keine polytrope Gaskugel $n < 5$, welche in allen Schichten im Strahlungsgleichgewicht ist.

§ 14. Wir denken uns in einer Gaskugel eine Kugelschale geschlagen, vollkommen starr und diatherman, und die äußeren Schichten entfernt. Die übrig bleibende Kugel kann dann bei beliebiger Oberflächentemperatur im Strahlungsgleichgewicht sein. Sind die entfernten

Schichten so wenig mächtig und niedrig temperiert, daß wir die von ihnen ausgesandte Strahlung, also auch den von ihnen einwärts ausgesandten Energiestrom B , vernachlässigen können, so können dieselben die angenommene starre Hülle ersetzen. Sie sind für den Strahlungsprozeß ohne wesentlichen Einfluß, hindern aber die bewegten Moleküle der inneren Schichten am Fortfliegen. Da die Behandlung der ganzen Kugel auf unüberwindliche Schwierigkeiten führt, so behandeln wir nur das Strahlungsgleichgewicht einer äußeren Schicht derselben. Die Dicke derselben sei bestimmt durch die Forderung, daß die Differenz ihrer äußeren und inneren kugelförmigen Begrenzungsflächen gegen die Flächen selbst hinreichend klein ist. Ihre Dicke steigt somit mit der Größe der Innenkugel. Damit ist das Problem auf ein ebenes Problem zurückgeführt, und die Gleichung (285) vereinfacht sich. Denn ohne die Form der Gleichungen (280) — (284) zu ändern, können wir jetzt A , B , E , γ als Energiemengen pro Flächeneinheit und Sekunde betrachten. War ihre Dimension in diesen Formeln bisher Erg. sek^{-1} , so sei sie von jetzt ab $\text{Erg. cent}^{-2} \text{sek}^{-1}$ und Gleichung (285) kann geschrieben werden, da jetzt $E = cT^4$, c die Stefansche Konstante,

$$(285a) \quad \frac{cdT^4}{dr} = -a\varrho\gamma.$$

Wir stellen nun die Frage: Gibt es eine derartige Schicht einer polytropen Gaskugel, die gleichzeitig im Strahlungsgleichgewicht ist, und welches ist die Klasse n derselben?

Wir nehmen an, es existiere eine solche Gaskugel von der Klasse n und führen in (285a) die bekannte Variable u ein, indem wir setzen*) $T = u\Theta_k$, $\varrho = u^n$, und erhalten

$$(a) \quad u^3 \frac{du}{dr} = -\frac{au^n\gamma}{4\Theta_k^4 c}.$$

Gleichzeitig muß u der Differentialgleichung (I) gehorchen

$$(I) \quad \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \alpha^2 u^n = 0, \quad \alpha^2 = \frac{\frac{4\pi G}{k}}{\frac{k-1}{H\Theta_k}} \text{ gramm}^{-1} \text{ cent.}$$

Läßt sich ein Exponent n finden, der diesen beiden Gleichungen gemäß $u = f(r)$ bestimmt, so ist die gestellte Aufgabe gelöst.

Wir versuchen gleich den Exponenten $n = 5$. Für diesen Fall

*) vgl. die Rechenregel Seite 28.

ließ sich (Kap. IV § 12) Gleichung (I) in geschlossener Form integrieren, und wir fanden

$$u = u_0 \sqrt{\frac{3 u_0}{3 u_0 + u_0^5 \alpha^2 r^2}},$$

u_0 und Θ_k bestimmt durch die Werte von Dichte und Temperatur im Mittelpunkte. Nun war in den früheren Beispielen α^2 nur von der Größe 10^{-10} bis 10^{-12} gramm $^{-1}$ cent. Haben wir aber Kugeln von den Dimensionen der Sonnen vor uns, so kommen wir nach außen gehend bald in Regionen, in welchen $3u_0$ gegen $u_0^5 \alpha^2 r^2$ nicht mehr in Betracht kommt, und wir in diesen äußern Schichten die Lösung schreiben können

$$(286) \quad u = u_0 \sqrt{\frac{3 u_0}{u_0^5 \alpha^2}} \frac{1}{r}.$$

Bilden wir damit die beiden Seiten von (a), so sehen wir, daß die Gleichung erfüllt ist, wenn wir setzen

$$(b) \quad 1 = \frac{a \gamma u_0}{4 \Theta_k^4 c} \sqrt{\frac{3 u_0}{u_0^5 \alpha^2}}$$

und haben somit den Satz:

Die dem Zentrum nicht zu benachbarten Schichten einer polytropen Gaskugel der Klasse $n = 5$ befinden sich in einer Dicke, die mit der Entfernung steigt, im Strahlungsgleichgewicht.

Die äußeren Schichten können, da die Temperatur mit r , die Dichte aber mit r^5 sinkt, für das Strahlungsproblem vernachlässigt werden.

Führen wir in (b) wieder $T_0 = u_0 \Theta_k$, $\varrho_0 = u_0^5$, $p_0 = \varrho_0 H T_0$ ein, setzen für α^2 seinen Wert und $\frac{k}{k-1} = n+1 = 6$, so erhalten wir

$$(287) \quad \gamma = \frac{4 c T_0^4}{a} \sqrt{\frac{4 \pi G}{3 \cdot 6 \cdot p_0}} \text{ Erg cent}^{-2} \text{ sek}^{-1}.$$

Ist eine Schicht im Strahlungsgleichgewicht gegeben, so kann dieselbe als Schicht einer Gaskugel $n = 5$ aufgefaßt und Druck und Temperatur im Mittelpunkt derselben nach früher erläuterten Methoden bestimmt werden. Dann ist γ bekannt und nach (284) auch $A_0 = 2\gamma$. Damit ist die emittierte Energiemenge, also auch die „Solarkonstante“, dieser Schicht bestimmt.

In (287) geht die Oberfläche der strahlenden Schicht nicht ein, da wir ein ebenes Problem behandelten. Die dadurch verursachte Unbestimmtheit in der Berechnung von A_0 macht sich praktisch nicht fühlbar, da, wie wir im Kapitel über die Sonne zeigen werden, man ziemlich sicher die Stelle einer Gaskugel bestimmen kann, von der

die Strahlung ausgesandt wird. Auf diese Schicht wäre dann Gleichung (287) anzuwenden.

Den Absorptionskoeffizienten a können wir berechnen. Wir haben oben den Transmissionskoeffizienten der Erdatmosphäre angegeben zu $0,8 = e^{-a_p \int \rho dh}$.

Wir haben hier den Absorptionskoeffizienten mit a_p bezeichnet, da er sich auf senkrecht einfallende, parallele Strahlen bezieht. Wir werden in § 15 zeigen, daß wir davon zu unterscheiden haben das Absorptionsvermögen a gegenüber diffus einfallender Strahlung und werden das bisher benutzte $a = 2a_p$ finden.

Die Masse der Atmosphäre in Gramm pro cent^2 ist gleich $0,001293.8.10^6$; daraus ergibt sich

$$a_p = 2,15 \cdot 10^{-4} \text{ gramm}^{-1} \text{ cent}^2; \quad a = 4,3 \cdot 10^{-4} \text{ gramm}^{-1} \text{ cent}^2.$$

Die Stefansche Konstante $c = 5,36 \cdot 10^{-5} \text{ Erg. cent}^{-2} \text{ sek}^{-1}$ angenommen können wir (284) auch schreiben

$$(284a) \quad A_0 = 2\gamma = 6,4 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{T_0^4}{\sqrt{p_0}} \cdot \text{Erg. cent}^{-2} \text{ sek}^{-1}.$$

Darnach ließe sich die Strahlung einer durch die Mittelpunkts-werte T_0 und p_0 ausgezeichneten Gaskugel $n = 5$ berechnen.

Versuchen wir die Gleichung auf die Sonne anzuwenden, diese aufgefaßt als Gaskugel $n = 5$; die der Sonnenphotosphäre anliegenden Schichten sind dann im Strahlungsgleichgewicht; bei einer Solarkonstanten von 4 Grammkalorien, $\mathfrak{A}_0 = 12,9 \cdot 10^{10} \text{ Erg. cent}^{-2} \text{ sek}^{-1}$ ergäbe sich $\frac{T_0^4}{\sqrt{p_0}} = 2 \cdot 10^{12} \text{ gramm}^{-\frac{1}{2}} \text{ cent}^{\frac{1}{2}} \text{ sek}$.

Für Gaskugeln mit endlichem Radius können wir mit Hilfe der kosmogenetischen Flächengleichungen (107) und (109) T_0 und p_0 durch Masse \mathfrak{M} und Radius \mathfrak{R} ausdrücken und erhalten

$$\frac{T_0^4}{\sqrt{p_0}} = \frac{C^4(T_0, \mathfrak{R}, \mathfrak{M}) \mathfrak{M}^3}{H^4 \sqrt{C_{(p_0, \mathfrak{R}, \mathfrak{M})} \mathfrak{R}^2}} = 2 \cdot 10^{12} \text{ gramm}^{-\frac{1}{2}} \text{ cent}^{\frac{1}{2}} \text{ sek}.$$

Für $n = 5$ wird $\mathfrak{R} = \infty$. Allein die Kugel $n = 4,9$, mit endlichem Radius, unterscheidet sich von der Kugel $n = 5$ sehr wenig in den Teilen, in welchen noch in Betracht kommende Massen liegen. Setzen wir die Konstanten C für $n = 4,9$ ein, wählen für H den Zahlenwert für Wasserstoffgas und setzen \mathfrak{R} gleich dem Radius der Photosphäre; so erhalten wir die Masse zu

$$\mathfrak{M} = 2,13 \cdot 10^{29} \text{ gramm} = \frac{1}{10000} \text{ Sonnenmasse.}$$

In ihrer Hauptmasse wird demnach die Sonne, bestehend aus Wasserstoff, nicht nach der Polytropen $n = 5$ gebaut sein. Ein Gas

mit etwa 10 mal größeren Molekulargewicht würde die Sonnenmasse richtig ergeben. Allein mit Rücksicht auf die mannigfachen, vereinfachenden Voraussetzungen darf dies Resultat einer „optischen Wägung“ nicht überschätzt werden.

§ 15. Um die Helligkeitsverteilung im Bilde einer strahlenden Schicht zu berechnen, verfahren wir mit Schwarzschild (loc.cit.) folgendermaßen. Ein Element einer strahlenden Schicht strahlt in allen Richtungen zur Flächennormalen. Ein Element df einer Gasschicht wird von den Strahlen der tieferen und höheren Schichten in allen Richtungen durchsetzt. Die Summe aller dieser Strahlungen pro Flächeneinheit gab den Energiestrom A resp. B ; und das Absorptionsvermögen a in bezug auf diese nach allen Richtungen i gemischte Strahlung war gegeben durch die Beziehung

$$(a) \quad \frac{dA}{A} = -a\varrho dr.$$

Erscheint die strahlende Schicht vom Radius R , so sendet ein Oberflächenelement im Abstande R vom Zentrum Strahlung zum Beobachter, die dasselbe im Winkel i ,

$$\sin i = \frac{R}{\mathfrak{R}},$$

mit der Flächennormalen, d. i. dem Kugelradius, durchsetzt hat. Die Strahlung, welche gegen die jeweilige Flächennormale im Winkel i läuft, bezeichnen wir mit A_i und haben nun die Aufgabe zu lösen, A_i durch die Schicht hindurch zu verfolgen.

Wir nehmen ein Bündel paralleler Strahlen A_i an, das somit in der Schicht von der Dicke dr einen Weg $ds = \frac{dr}{\cos i}$ zurücklegt. Das Absorptionsvermögen einer Schicht für parallele Strahlung sei a_p und wir haben

$$\frac{dA_i}{ds} = -a_p \varrho A_i$$

$$(b) \quad \frac{dA_i}{dr} = -\frac{a_p \varrho A_i}{\cos i}.$$

Wir untersuchen den Zusammenhang zwischen a_p und a .

Die Strahlung dA , die gegen die Normale des Flächenelementes df in dem zwischen i und $i + di$ gelegenen Winkelraume strömt, stammt von einem Ringe der Einheitskugel vom Flächeninhalt $2\pi \sin i di$ und wird von df im Querschnitt $df \cos i$ geschnitten. Die gesamte gegen df verlaufende Strahlung beträgt somit

$$(c) \quad A = 2\pi df \int_0^{\frac{\pi}{2}} A_i \sin i \cdot \cos i \cdot di.$$

Mit Benutzung von (b) erhalten wir für die Änderung dieser Strahlung auf der Strecke dr

$$(d) dA = -2\pi df \int_0^{\frac{\pi}{2}} A_i \sin i \cos i \frac{a_p \varrho dr}{\cos i} di = -2\pi a_p \varrho dr df \int_0^{\frac{\pi}{2}} A_i \sin i di$$

und weiter

$$(e) \frac{dA}{A} = -a_p \varrho dr \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} A_i \sin i di}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} A_i \sin i \cos i di}.$$

Vergleichen wir damit (a), so ergibt sich

$$(f) a = a_p \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} A_i \sin i di}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} A_i \sin i \cos i di}.$$

Die Beziehung zwischen A_i und i kennen wir nicht. Nehmen wir an, daß die Verhältnisse durchschnittlich ähnlich liegen wie auf der Photosphäre, wo A_i , namentlich bei nicht zu großem i , wenig variiert, so können wir in Annäherung A_i als konstant annehmen und erhalten die angenäherte Beziehung

$$(288) \quad a = 2a_p,$$

d. h. das Absorptionsvermögen einer Schicht für diffuse Strahlung ist angenähert doppelt so groß wie für parallele Strahlung.

Dieselben Überlegungen, die uns zu Gleichung (280) führten, geben für A_i die Beziehung

$$(g) \quad \frac{dA_i}{dr} = -\frac{a_p \varrho}{\cos i} (A_i - E) = -\frac{a \varrho}{2 \cos i} (A_i - E).$$

Erstreckt sich die strahlende Schicht von r_1 bis r_2 so ergibt die Integration für den Gewinn an A_i auf dieser Strecke

$$(h) \quad A_i = e^{r_2} \int_{r_1}^{\infty} \frac{a \varrho}{2 \cos i} dr \int_{r}^{\infty} \frac{a \varrho}{2 \cos i} E e^{-\int_{r'}^{\infty} \frac{a \varrho}{2 \cos i} dr'} dr.$$

Die Berechnung des Integrales nach der Polytropen $n = 5$, ϱ prop. $\frac{1}{r^5}$ würde unübersichtliche Resultate ergeben. Da für die über r gelegenen Schichten $\varrho \cdot E$ so wie $\frac{1}{r^5}$ abnimmt, für Schichten

unter r_1 die optische Masse $\int_0^{r_1} \rho dr$ sehr groß, die durchgelassene Strahlung sehr klein wird, können wir in erster Annäherung die Integration von 0 bis ∞ ausdehnen und die unter dem $\not\propto i$ austretende Strahlung setzen

$$(i) \quad A_i = \int_0^{\infty} \frac{a \rho}{2 \cos i} E e^{-r - \int_0^{\infty} \frac{a \rho}{2 \cos i} dr} dr.$$

Die angenäherte Relation $\rho \sim \frac{1}{r^5}$ für Strahlungsgleichgewicht lässt sich hier nicht benutzen. Hingegen lässt sich A_i für jedes polytropen Gleichgewicht in Annäherung berechnen, da in Wirklichkeit nur eine dünne Schicht die Hauptbeiträge zum Integral liefert und für dieselbe deshalb mit konstantem Werte g gerechnet werden kann. Aus $dp = -g \rho dr$ folgt dann $p = -g \int_0^{\infty} \rho dr$. Da $E = c T^4$, und für die Polytropen von der Klasse n die Beziehungen gelten $T = u \Theta$, $p = u^{n+1} H \Theta$, so erhalten wir aus (i) nach leichter Umformung

$$(289) \quad A_i = c \left(\frac{\Theta^n 2 g}{H a} \right)^{\frac{4}{n+1}} \cdot \cos i^{\frac{4}{n+1}} \int_0^{\infty} x^{\frac{4}{n+1}} e^{-x} dx \\ = c \left(\frac{\Theta^n 2 g}{H a} \right)^{\frac{4}{n+1}} \cos i^{\frac{4}{n+1}} \Gamma \left(\frac{4}{n+1} + 1 \right) \text{Erg cent}^{-2} \text{sek}^{-1}.$$

Setzt man die Strahlung im Zentrum, $i = 0$, als Einheit an, so ergibt sich

$$(290) \quad A'_i = \cos i^{\frac{4}{n+1}}.$$

Für Strahlungsgleichgewicht hat Schwarzschild

$$(290a) \quad A'_i = \frac{1 + 2 \cos i}{3}$$

gefunden. Setzen wir in (290) entsprechend der Strahlungsgleichgewicht liefernden Polytropen $n = 5$, so erhalten wir

$$A'_i = \cos i^{\frac{2}{3}},$$

und für $\not\propto i$, die 90° nicht zu nahe liegen, können wir setzen

$$\cos i^{\frac{2}{3}} = [1 - \varphi(i)]^{\frac{2}{3}} = 1 - \frac{2}{3} \varphi(i) = 1 - \frac{2}{3} (1 - \cos i) = \frac{1 + 2 \cos i}{3}.$$

Strahlungsgleichgewicht und polytropes Gleichgewicht $n = 5$, ($k = \frac{6}{5}$), liefern über den größten Teil der Scheibe dieselbe Strahlungsverteilung.

In der folgenden kleinen Tabelle vergleichen wir die Strahlungsverteilung, wie sie Gleichung (290a) und Gleichung (290) für $n = 5$ und $n = 1,5$, letzteres entsprechend adiabatischem Gleichgewicht vollständig dissozierten Gases, mit den Ergebnissen*) der Messung auf der Sonnenscheibe

$\frac{R}{\mathfrak{R}}$	Strahlungs-		Polytrope $n = 5$.	Polytrope $n = 1,5$.
	Messung.	gleichgewicht.		
0	1	1	1	1
0,20	0,99	0,99	0,99	0,97
0,4	0,97	0,95	0,94	0,87
0,6	0,92	0,87	0,86	0,70
0,7	0,87	0,81	0,80	0,58
0,8	0,81	0,73	0,71	0,44
0,9	0,70	0,63	0,58	0,26
0,96	0,59	0,52	0,43	0,13
0,98	0,49	0,47	0,34	0,08
1	(0,40)	0,33	0,00	0,00

Strahlungsgleichgewicht und das entsprechende polytropen Gleichgewicht $n = 5$ stellen trotz der vereinfachenden Voraussetzungen die Strahlungsverteilung sehr gut dar; die Sonne, aufgebaut aus vollständig dissoziiertem Gase im adiabatischen Gleichgewicht, würde ein gänzlich verschiedenes Aussehen zeigen. Ob am Rande, $\frac{R}{\mathfrak{R}} = 1$, die Strahlung auf etwa 0,4 oder auf Null herabsinkt, ist lediglich Sache der Auffassung. Nimmt man die Photosphäre durch eine reelle Diskontinuität von ihrer Umgebung geschieden an, so wird man von ihrem Rande selbstverständlich noch beträchtliche Strahlung erwarten können. Faßt man den scharfen Rand aber als Bild eines sehr raschen Abfalls von Dichte und Temperatur auf sehr kleine Werte auf, so kommt man für $\frac{R}{\mathfrak{R}} = 1$ zu einer Strahlung praktisch gleich Null, wenn man \mathfrak{R} nur wenige Bogensekunden größer ansetzt, als dem scheinbaren Rande der Photosphäre entspricht. Die übrige Strahlungsverteilung wird dadurch nur um verschwindend kleine Beiträge geändert.

*) G. Müller, Photometrie der Gestirne. Seite 323. 1897.

§ 16. Aus Gleichung (289) können wir Θ , H und g wieder entfernen und erhalten

$$(291) \quad A_i = c T^4 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{4}{n+1} + 1\right)}{\left(\frac{a}{2} \int_r^\infty \varrho dr\right)^{\frac{4}{n+1}}} \cos i^{\frac{4}{n+1}} \text{Erg cent}^{-2} \text{sek}^{-1}.$$

Die Temperatur T , zum Drucke p gehörig, gilt an der Oberfläche der strahlenden Schicht. Ist T bekannt, so läßt sich A_i und daraus die „Solarkonstante“ berechnen, falls der Nenner des Bruchs bekannt ist; umgekehrt läßt sich dann T aus A_i berechnen. $\frac{a}{2} \int_r^\infty \varrho dr$ läßt sich für die Sonne schätzen, wenn man als die in Betracht kommende strahlende Schicht eine Schicht in der Nähe der Photosphäre annimmt und sich der Ansicht von Vogel*) anschließt, daß ohne die der Photosphäre aufgelagerten Schichten die Sonne doppelt so hell und heiß erscheinen würde wie in Wirklichkeit.

Danach haben wir $\frac{\Gamma\left(\frac{4}{n+1} + 1\right)}{\left(\frac{a}{2} \int_r^\infty \varrho dr\right)^{\frac{4}{n+1}}} = \frac{1}{2}$ zu setzen. Für die

Polytrope $n = 5$, welche die Strahlungsverteilung gut darstellt, ergibt sich daraus $\frac{a}{2} \int_r^\infty \varrho dr = 2,43$. Es mag befremdend erscheinen, daß diese optische Masse in Gleichung (291) algebraisch und nicht als Exponentialgröße auftritt. Dies röhrt daher, daß mit Änderung derselben sich die Lage und Temperatur der maßgebenden strahlenden Schicht ändert. Setzen wir weiter die Solarkonstante gleich 4 Grammkalorien $\text{cent}^{-2} \text{min}^{-1}$, so steigt, wenn wir bis zur Photosphäre uns nähern, diese Strahlungsintensität im Verhältnis $(\frac{\text{Erdbahnradius}}{\text{Photosphärenradius}})^2$ und wir erhalten $A_{i=0} = 12,9 \cdot 10^{10} \text{ Erg cent}^{-2} \text{sek}^{-1}$. Die Stefansche Konstante c beträgt $5,36 \cdot 10^{-5} \text{ Erg cent}^{-2} \text{sek}^{-1}$, und wir erhalten somit die „schwarze“ Temperatur in den oberen Schichten der Photosphäre

*) Newcomb-Engelmann, Populäre Astronomie. III. Auflage. Seite 279. 1905.

$$T = \sqrt[4]{2 \cdot \frac{12,9 \cdot 10^{10}}{5,36 \cdot 10^{-5}}} = 8330.$$

Die Solarkonstante 3 würde 7750° liefern. Die zugehörigen „effektiven“ Sonnentemperaturen sind $T = 7000$ resp. 6520 .

§ 17. Aus dem Transmissionskoeffizienten 0,8 der Erdatmosphäre für senkrechte Inzidenz fanden wir (Seite 285) $\frac{a}{2} \int_r^\infty \varrho dr = 0,223$.

Vergleichen wir dies mit der entsprechenden Größe über der Sonnenatmosphäre im Betrage 2,43, so folgt:

Die über der Photosphäre in einem Zylinder lagernden Massen betragen das 10,9 fache der Erdatmosphäre über gleicher Fläche.

Über 1 cent² Photosphäre liegt demnach eine Masse von

$$10,9 \cdot 0,001293 \cdot 8 \cdot 10^6 = 1,13 \cdot 10^4 \text{ gramm.}$$

Damit können wir die Dichte $\bar{\varrho}_0$ in den oberen Schichten der Photosphäre angenähert berechnen. Denn da für $n = 5$ die Dichte ϱ mit $\frac{1}{r^5}$ sich ändert, so ist, wenn R den Radius der Photosphäre in cent mißt, $1,13 \cdot 10^4 = \bar{\varrho}_0 R^5 \int_R^\infty \frac{1}{r^5} dr$ und daraus $\bar{\varrho}_0 = 6,50 \cdot 10^{-7}$ gramm cent⁻³, d. i. $\frac{1}{2000}$ der Dichte atmosphärischer Luft bei 0° und 760 mm Barometerstand oder gleich der Dichte derselben bei 0° und 0,38 mm Quecksilber.

Siebzehntes Kapitel.

Die Erde und ihre Atmosphäre.

§ 1. Die Zustandsänderung in der Atmosphäre längs der Vertikalen ist nach Zeit und Ort so wechselnd, daß sie mit genügender Genauigkeit nur durch Beobachtung ermittelt werden kann. Unsere Kenntnis der Beschaffenheit der Atmosphäre in Höhen, die der Beobachtung nicht mehr zugänglich sind, und dazu gehören noch alle Höhen über etwa 25 Kilometer, ist gänzlich unbefriedigend. Noch vor wenigen Jahrzehnten glaubte man mit einem Bau derselben nach gewissen Schematas mehr oder minder gut auskommen zu können, und gestützt auf dieselben stellte man „barometrische Höhenformeln“

auf, eine Beschäftigung, in der eine Zeit lang förmlich Sport getrieben wurde. Da dieselben aber stets die so variablen Temperaturen der durchzumessenden Luftsäule enthalten, so hat man einsehen gelernt, daß die kunstvollst gebaute Formel keine wesentlichere Genauigkeit zuläßt wie eine einfache Formel bei entsprechender Benutzung. Glieder derselben, die etwa die Änderung der Schwerkraft nach Höhe und geographischer Breite oder den Einfluß des der Luft beigebrachten Wasserdampfes enthalten, treten zurück gegen den Einfluß des Gliedes, das die Temperatur enthält, und deren genügend genaue Ermittlung oft unmöglich ist. Wir wollen uns deshalb im folgenden nicht mit Konstruktion von Höhenformeln beschäftigen, sondern nur mit den Prinzipien, die deren Bau zugrunde liegen.

Wir haben, wenn wir aus den an der Erdoberfläche beobachteten Werten von p , ϱ , T auf deren Änderung mit der Höhe schließen wollen, von einem schematisierten Aufbau der Atmosphäre auszugehen. Wir machen die Annahme, die Atmosphäre sei nach einer Polytropen von der Klasse k , resp. $n = \frac{1}{k-1}$ aufgebaut, d. h. längs der Vertikalen ändern sich p , ϱ , und T ebenso wie in einer der Vertikalen entnommenen Luftmasse, die längs einer Polytropen von der Klasse k bewegt wird. Da jeder Weg in der p , v -Ebene durch einen Polygonzug polytoper Wege mit beliebiger Annäherung dargestellt werden kann, so sind wir imstande, jeden Aufbau der Atmosphäre durch Aneinanderfügung von Schichten, nach Polytropen gebaut, darzustellen. Unsere Aufgabe ist es, die Polytropen auf der Vertikalen abzubilden. Wir können dabei auf drei wesentlich verschiedene Arten rechnen. Erstens und zweitens nehmen wir die Masse der Atmosphäre so klein an gegen die Erdmasse, daß wir von ihrer „innern“ Gravitation absiehen können; wir werden dann für größere Höhen zu gänzlich verschiedenen Resultaten kommen, je nachdem wir erstens g konstant, zweitens g mit dem Quadrat der Entfernung vom Erdmittelpunkt abnehmend in die Rechnung einführen. Drittens machen wir keinerlei Annahme über das Massenverhältnis Atmosphäre-Erde, wir berücksichtigen noch deren innere Gravitation und werden untersuchen, ob sich unter dieser genaueren Rechnung ihre Höhe und Masse wesentlich anders herausstellen wird. In jedem dieser drei Fälle wird sich dann die Rechnung noch verschieden gestalten, je nachdem wir eine Polytrope $n < \infty$ oder $n = \infty$, also eine Isotherme, zu Grunde legen.

Wir führen hier nochmals die Seite 28 und 32 gewonnenen Darstellungen der Polytrope in Parameterform an.

$$\begin{aligned}
 p &= u^{n+1} H \Theta_k, & p &= \pi^{n+1} \text{ Dynen cent}^{-2} \\
 \varrho &= u^n & \varrho &= (n+1) \frac{\pi^n}{\vartheta} \text{ gramm cent}^{-3} \\
 T &= u \Theta_k & T &= \frac{\vartheta}{n+1} \frac{\pi}{H} \\
 n &= \frac{1}{k-1}, \quad \Theta_k = \frac{T}{\frac{1}{\varrho^n}}, \quad \vartheta = (n+1) (H \Theta_k)^{\frac{n}{n+1}} = (n+1) \frac{p^{\frac{n}{n+1}}}{\varrho} .
 \end{aligned}$$

Gleichheit von u hat Gleichheit von ϱ , Gleichheit von π Gleichheit von p zur Folge. Für atmosphärische Luft und $k = \frac{7}{5} = 1,4$ ergab sich für 0° und 760 mm Barometerstand $\Theta_7 = 3904$ und $\vartheta = 5,2754 \cdot 10^7$.

§ 2. Annahme $g = \text{konst}$. Bilden wir die Gleichgewichtsbedingung $dp = -g\varrho dr$ gemäß den eben angeführten Polytropengleichungen, so erhalten wir die beiden Beziehungen:

$$(292) \quad \Theta du = dT = -\frac{gdr}{(n+1)H},$$

$$(293) \quad \vartheta d\pi = -gdr \text{ cent}^3 \text{ sek}^{-2}.$$

D. h. In jeder polytrop aufgebauten Atmosphäre nehmen mit derselben Genauigkeit, in der $g = \text{konst}$. gesetzt werden kann, die Temperatur T und die Druckfunktion π linear mit der Höhe ab.

Ist die Klasse der Polytropen und die Bodenbeschaffenheit der Atmosphäre bekannt, so kann eine Höhenmessung nach (292) ohne Barometer mit Hilfe des Thermometers und nach (293) ohne Thermometer mit Hilfe des Barometers ausgeführt werden.

Der Temperaturgradient ist unabhängig von der Bodenbeschaffenheit der Atmosphäre. Bilden wir ihn für atmosphärische Luft, $H_8 = 2,8705 \cdot 10^6$ und $g = 980,62 \text{ cent sek}^{-2}$, so erhalten wir

$$(294) \quad \Delta T = -\frac{3,4162 \cdot 10^{-4}}{n+1} \Delta r.$$

$n = 0$ gibt die Polytrope konstanter Dichte. Damit die Dichte der Atmosphäre längs Vertikalen konstant bleibt, muß die Temperatur um $3,4162^\circ$ pro 100 Meter abnehmen. Druckabnahme und Temperaturabnahme mit der Höhe kompensieren sich derart, daß die Dichte konstant bleibt. Die Polytrope $k = \frac{7}{5}$, $n = 2,5$ entsprechend der Isentropen zweiatomiger Gase, liefert für atmosphärische Luft $\Delta T = -0,976^\circ$ pro 100 Meter. ($\pi = 1,403$ liefert $\frac{\Delta T}{\Delta r} = -0,981$,

$\alpha = 1,41$ der von den Meteorologen am häufigsten benutzte Wert, $\frac{\Delta T}{\Delta r} = -0,993$). Bei gleichen Polytropen wachsen diese Temperaturgradienten proportional der Schwerkraft g und dem Molekulargewicht. Für Wasserstoffgas sind sie bei gleichem g 14,5 mal kleiner, auf der Sonne bei gleichem Gase um 27,2 mal größer.

Aus Gleichung (293) folgt

$$\Delta \pi = -\frac{g}{(n+1)} \left(\frac{\frac{g}{n}}{p^{\frac{n}{n+1}}} \right)_0 \Delta r = -\frac{g}{k-1} \left(\frac{\frac{g}{1}}{p^k} \right)_0 \Delta r.$$

Ändert sich die Bodenbeschaffenheit der Atmosphäre bei gleicher Bauart derselben längs einer Polytropen von derselben Klasse k , so bleibt der Gradient $\frac{\Delta \pi}{\Delta r}$ ungeändert.

Temperatur und Druck nehmen von T und π am Erdboden mit der Höhe ab bis zum Werte Null. Dadurch ist die obere Grenze der Atmosphäre bestimmt; ihre Höhe \tilde{h}_n über dem Erdboden beträgt

$$(295) \quad \tilde{h}_n = (n+1) \frac{HT}{g} = \frac{\vartheta \pi}{g} \text{ cent.}$$

Setzen wir $n=0$, so erhalten wir für die Höhe \tilde{h} der Atmosphäre konstanter Dichte, der „homogenen“ Atmosphäre, den Wert

$$\tilde{h} = \frac{HT}{g} \text{ cent}$$

und speziell von 0° Cels. und $g = 980,62 \text{ cent sek}^{-2}$ von $\tilde{h}_0 = 7,991 \cdot 10^5 \text{ cent}$. Somit beträgt die Höhe jeder polytropen Atmosphäre

$$(296) \quad \tilde{h}_n = (n+1) 7,991 \cdot 10^5 \cdot \frac{T}{T_0} = (n+1) 7,991 \cdot 10^5 \cdot \left(1 + \frac{1}{273} t^0\right) \text{ cent.}$$

Die Höhe einer polytropen Atmosphäre ist somit lediglich durch die Klasse n derselben und die Bodentemperatur bedingt. Sie ändert sich wie ein lineares Gebilde vom Ausdehnungskoeffizienten $\alpha = \frac{1}{273}$; die Temperaturgradienten werden deshalb durch Änderung der Bodentemperatur nicht geändert. Für die Polytrope $n = 2,5$, $k = \frac{7}{5}$, der Isentropen zweiatomiger Gase, ergibt sich auf der Erde

$$\tilde{h}_{2,5} = 3,5 \cdot 7,991 \cdot 10^5 \frac{T}{T_0} = 2,7968 \cdot 10^6 (1 + \alpha t^0) \text{ cent.}$$

(Für $\alpha = 1,403$ resp. 1,41 würde sich dieser Zahlwert auf $2,782 \cdot 10^6$, resp. $2,748 \cdot 10^6$ vermindern). Mit genügender Genauigkeit kann man für die Erdoberfläche von 0° die Höhe der homogenen Atmosphäre zu 8, die der isentropen zweiatomigen Gase zu $3,5 \cdot 8 = 28$ Kilo-

meter annehmen. Über der Sonnenphotosphäre, deren Temperatur zu 7430° angenommen, würden alle ξ_n dieselben Werte besitzen wie an der Erdoberfläche; Sonnenatmosphären und Erdatmosphären würden in gleicher Höhe über der Basisfläche endigen.

Bestimmen wir die Masse M einer polytropen Atmosphäre pro cent² Bodenfläche. Da die Höhe derselben bei nicht gar zu großem n klein gegen den Erdradius, die Dichte in den höheren Schichten zudem sehr klein ist, (Ausnahme $n = 0$), so können wir das Problem

als ebenes Problem behandeln und setzen $M = \int_0^\xi \rho dh$, gramm cent⁻².

Da aber $dp = -g\rho dr$, erhalten wir bei $g = \text{konst.}$

$$(297) \quad M = \frac{p}{g} = \frac{HT}{g} \rho = \xi \cdot \rho \text{ gramm cent}^{-2},$$

also unabhängig von der Polytropenklasse. Rechnen wir für $p = 760$ mm Quecksilber, resp. $1,0132 \cdot 10^6$ Dynen cent⁻², $g = 960,62$ cent sek⁻², oder $\frac{HT_0}{g} = \xi_0 = 7,991 \cdot 10^5$ cent und $\rho_0 = 0,001293$ gramm cent⁻³, so erhalten wir für die Erdatmosphäre

$$M = \frac{1,0132 \cdot 10^6}{960,62} = 7,991 \cdot 10^5 \cdot 1,293 \cdot 10^{-3} = 1,0332 \cdot 10^8 \text{ gramm cent}^{-2}.$$

§ 3. Die isotherme Atmosphäre, $n = \infty$, $k = 1$, erfordert eigene Behandlung. In $dp = -g\rho dh$ ersetzen wir ρ durch $\frac{p}{HT}$ und erhalten durch Integration

$$(298) \quad p = p_0 e^{-\frac{h}{\xi}},$$

$$(298a) \quad \rho = \rho_0 e^{-\frac{h}{\xi}},$$

wo h die Erhebung über dem Erdboden, ξ die der Temperatur T entsprechende Höhe der homogenen Atmosphäre bedeutet. Gl. (298) geschrieben als

$$h = 7,991 \cdot 10^5 (1 + \alpha t) \ln \frac{p_0}{p} = 1,8400 \cdot 10^6 (1 + \alpha t) \log \frac{p_0}{p} \text{ cent}$$

ist die fast ausschließlich gebrauchte barometrische Höhenformel in ihrer einfachsten, für die meisten Zwecke der Anwendung vollkommen ausreichenden Form. Die isotherme Atmosphäre hat (selbstverständlich) im Endlichen keine Grenze; Gl. (298) und (298a) zeigen, daß in den unendlich fernen Gebieten p und ρ bis zu den Werten Null herabsinken, so daß dort ihr Verhältnis $\frac{0}{0} = \frac{p_0}{\rho_0} = HT$ bleibt. Bilden

wir die Masse pro cent² in der Form $\int_0^\infty \rho dr$ und benutzen (298a), so erhalten wir wieder $M = \tilde{\Omega} \cdot \rho = 1,0332 \cdot 10^3$ gramm cent⁻².

§ 4. Wir berücksichtigen die Veränderung von g , unbeeinflußt von der Masse der Atmosphäre. Bezeichnen wir Erdmasse und Erdradius mit M und R , so ist $g = \frac{G M}{r^2} = \frac{d\Omega}{dr}$, $\Omega = -\frac{G M}{r}$ das Gravitationspotential der Erdmasse. Gl. (292) und (293) zeigen, daß das Temperaturgefälle und das Gefälle von π mit der Höhe abnehmen, quadratisch mit der Entfernung. Um den Einfluß auf die Höhe $\tilde{\Omega}_n$ der polytropen Atmosphäre bei konstantem g zu ermitteln, schreiben wir (292) in der Form

$$dT = -\frac{d\Omega}{(n+1)H}$$

und erhalten die obere Grenze $r = \tilde{\Omega}_n$, $T = 0$, bestimmt durch die Beziehung

$$\Omega_{\tilde{\Omega}_n} - \Omega_R = (n+1) HT.$$

Setzen wir für die Ω ihre Werte und für $\tilde{\Omega}_n$ seinen Ausdruck (295) ein, so erhalten wir nach leichter Transformation

$$(299) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Omega}_n = \frac{R}{1 - \frac{\tilde{\Omega}_n}{R}}; \\ \tilde{\Omega}_n - R = \frac{1}{1 - \frac{\tilde{\Omega}_n}{R}} \tilde{\Omega}_n. \end{array} \right.$$

So lange die unter der Annahme $g = \text{konst.}$ berechnete Höhe $\tilde{\Omega}_n$ so klein ist, daß $\frac{\tilde{\Omega}_n}{R}$ gegen 1 vernachlässigt werden kann, ist die bei variablem g berechnete Atmosphärenhöhe $\tilde{\Omega}_n - R$ gleich $\tilde{\Omega}_n$. Die Höhe der homogenen Atmosphäre (8 Kilometer) wächst bei variablen g bei 0° um 10 Meter, die der isentropen Atmosphäre zweiatomiger Gase (28 Kilometer) um 122 Meter. Mit wachsendem $\tilde{\Omega}_n$ wächst $\tilde{\Omega}_n - R$ schneller, und für $\tilde{\Omega}_n = R$ wird $\tilde{\Omega}_n = \infty$. Damit erhalten wir den wichtigen und merkwürdigen Satz:

Ist die Masse eines Himmelskörpers groß gegen diejenige seiner Atmosphäre, und ist seine Oberflächentemperatur so hoch, daß die Höhe $\tilde{\Omega}_n$ einer polytropen Atmosphäre von der Klasse n bei konstantem Wert von g berechnet gleich seinem Radius wird, so erstreckt sich letztere in Wirklichkeit bis in die entferntesten Regionen. Ein Überschreiten dieser Oberflächentemperatur würde ein Zerstreuen dieser Atmosphäre zur Folge

haben. Für jeden Weltkörper gibt es eine Oberflächentemperatur T_n , bei deren Überschreitung seine Anziehungskraft nicht mehr hinreicht, eine Atmosphäre von nicht zu großer Masse von bestimmter Gasart und dieser Polytropenklasse um sich zu erhalten. (Diesen Satz hat zuerst Ritter*) für Atmosphären in indifferentem Gleichgewichtszustande abgeleitet.)

Für die homogene Atmosphäre ergibt sich diese Grenztemperatur aus der Beziehung $\frac{H}{g} = R = \frac{HT}{g}$; und wir erhalten für die wichtigsten Glieder der Sonnensystems für eine Wasserstoffatmosphäre:

	Grenztemperatur T
Merkur	2170
Venus	12400
Erde	15060
Mars	3030
Jupiter	408000
Saturn	148000
Uranus	55200
Neptun	56700
Sonnenphotosphäre	$4,47 \cdot 10^7$
Mond	693

Für Polytropen von der Klasse n sind diese Zahlen mit $n+1$ zu dividieren, für andere Gase im Verhältnisse ihres Molekulargewichtes zu vergrößern. Der Isentropen eines zweiatomigen Gases entspricht $n=2,5$. Die Grenztemperatur, bei welcher der Mond noch eine Wasserstoffatmosphäre im isentropen Gleichgewicht zu erhalten vermag beträgt $T = \frac{693}{3,5} = 198$, gleich -75° Cels. Diese Zahlen gewinnen Bedeutung bei Erörterung der Temperatur, die ein sich abkühlender Weltkörper erreicht haben muß, ehe eine Scheidung in Kern und Atmosphäre möglich war.

Um die Frage zu entscheiden, wie sich die Masse der Atmosphäre bei der Annahme $g = \frac{A}{r^2}$ gestaltet, haben wir zu bilden

$$M = \int_R^{\infty} \rho dr = \frac{n+1}{\vartheta} \int_R^{\infty} \pi^n dr;$$

und durch Integration von (293) finden wir $\pi = \frac{A}{\vartheta} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$, so daß wir erhalten

*) A. Ritter, Untersuchungen über die Höhe der Atmosphäre und die Konstitution gasförmiger Weltkörper. Wied. Ann. X. 180. 1880.

$$(300) \quad M = \frac{n+1}{\vartheta} \cdot \left(\frac{A}{\vartheta}\right)^n \int_R^{\infty} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)^n dr. \text{ gramm cent}^{-3},$$

welcher Ausdruck für beliebiges n unbequem diskutierbar ist. Setzen wir $n = 0$, so erhalten wir $M = \varrho (\mathfrak{R} - R)$ und sehen, daß die Masse der Atmosphäre gegenüber ihrem Werte unter der Annahme $g = \text{konst.}$ in gleichem Verhältnis sich ändert wie die Höhe der homogenen Atmosphäre; für die Erde also um $\frac{1}{800}$ ihres Wertes. Da, wie wir sehen werden, für $n = \infty$ der Ansatz $g = -\frac{A}{r^2}$ die für konstantes g endliche Masse der Atmosphäre unendlich werden läßt, so liegt der Schluß nahe, daß dieses Anwachsen um so mehr zur Geltung kommt, je größer n .

§ 5. Von gewissem Interesse ist die Frage nach dem Zustande eines Gases im Mittelpunkte eines festen Weltkörpers, falls es durch einen radialen Kanal mit dessen Oberfläche kommuniziert und in demselben nach einer Polytropen n aufgebaut ist. Da es nur auf die Größenordnung ankommt, so nehmen wir eine Kugel von konstanter Dichte an. g variiert im Innern dann proportional der Entfernung vom Mittelpunkt, und $\int_0^R g dr$ wird $= \frac{1}{2} g R$, g der Wert an der Oberfläche. Dann liefert Gl. (292) durch Integration die Mittelpunktstemperatur

$$T_m = \frac{1}{2(n+1)} \frac{g R}{H} + T_R,$$

wo T_R die Oberflächentemperatur mißt. Und die Polytropengleichungen liefern dann weiter

$$p_m = p_R \left(\frac{T_m}{T_R} \right)^{n+1}$$

$$\varrho_m = \varrho_R \left(\frac{T_m}{T_R} \right)^n.$$

Nehmen wir atmosphärische Luft an der Oberfläche der Erde von 0° Cels. unter Druck einer Atmosphäre, so erhalten wir für den Erdmittelpunkt und die Isentrope $n = 2,5$, $k = \alpha = \frac{7}{5}$

$$T_m = 31360^\circ, p = 16250000 \text{ Atmosphären}, \varrho = 183 \text{ gramm cent}^{-3}.$$

§ 6. Wir untersuchen den Fall $n = \infty$, die isotherme Atmosphäre, für den Ansatz $g = \frac{d\varrho}{dr}$, $\varrho = -\frac{G M}{r}$. Aus $dp = -g \varrho dr$ er-

halten wir mit Hilfe der Zustandsgleichung $\frac{dp}{p} = -\frac{d\varrho}{HT}$ und integriert

$$p = p_0 e^{-\frac{\Omega_r - \Omega_R}{HT}} = p_0 e^{-\frac{gM}{HT} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)} = p_0 e^{-\frac{gR^2}{HT} \frac{r-R}{r}},$$

und wenn wir wieder die Höhe der homogenen Atmosphäre für g_R und T einführen

$$(301) \quad p = p_0 e^{-\frac{R}{\Phi} \frac{r-R}{r}}$$

$$(301a) \quad \varrho = \varrho_0 e^{-\frac{R}{\Phi} \frac{r-R}{r}}.$$

So lange r nahe gleich R bleibt erhalten wir im wesentlichen dieselben Werte wie durch die gewöhnliche barometrische Höhenformel; der Unterschied steigt mit r , und für unendlich große Abstände ergeben sich nicht mehr p und ϱ gleich Null, sondern

$$\lim p = p_0 e^{-\frac{R}{\Phi}}, \quad \lim \varrho = \varrho_0 e^{-\frac{R}{\Phi}},$$

für die Erde und die Atmosphäre von 0°

$$\lim p = p_0 e^{-798} = p_0 10^{-346}; \quad \lim \varrho = \varrho_0 \cdot 10^{-346}.$$

Die Masse der Atmosphäre wird darnach unendlich. Dies Resultat ist zuerst von Zöllner*) abgeleitet; es ist seither wiederholt wiedergefunden worden und wird wohl auch in Zukunft von Zeit zu Zeit von neuem entdeckt werden. An den Umstand, daß Druck und Dichte im Weltenraum nicht gleich Null, sondern unter Einwirkung der Atmosphäre der Himmelskörper von noch endlicher Größe sind, wurden die kühnsten Folgerungen geknüpft. Und doch läßt sich leicht zeigen, daß diese ganze Rechnungsweise illusorisch ist, selbst wenn man nichts gegen isotherme Zustände in großen Entfernungen einwenden will. Ist nämlich die Dichte der Atmosphäre im Abstande r gleich ϱ , so lautet der strenge Ausdruck für g

$$g = \frac{G(M + 2\pi \int_0^r \varrho r^2 dr)}{r^2}.$$

Den zweiten Summanden im Zähler haben wir vernachlässigt, was für kleine Entfernungen zulässig ist. Damit kommen wir zu dem endlichen Grenzwerte für ϱ ; und setzen wir nun diesen in den strengen Ausdruck für g ein, so sehen wir, daß wir für große r nicht mehr beliebig klein gegen endlich, sondern beliebig groß, an der

*) E. Zöllner, Über die Stabilität kosmischer Massen. Bericht der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Math.-phy. Klasse. Seite 173. 1871.

Grenze ∞ , gegen endlich vernachlässigt haben. Auf diesen Fehler hat bereits M. Thiesen*) aufmerksam gemacht. An diesem Beispiel ist am einfachsten zu zeigen, welchen Fehler man durch Vernachlässigung der inneren Gravitation von Atmosphären begehen kann, falls man nicht sicher ist, daß dieselben in nicht allzugroßer Entfernung von der Oberfläche der sie tragenden Kugel endigen.

§ 7. Wir berücksichtigen die innere Gravitation der Atmosphäre. Die Funktion u befolgt auch hier, wie wir Seite 39 ableiteten, die Differentialgleichung

$$(I) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \alpha^2 u^n = 0, \quad \alpha^2 = \frac{4\pi G}{k - 1} \frac{\text{gramm}^{-1}}{H \Theta_k} \text{ cent.}$$

1. Für die homogene Atmosphäre $n = 0$ läßt sich die Gleichung in geschlossener Form integrieren und liefert

$$T = C_1 + \frac{C_2}{r} - \frac{\alpha^2 r^2}{6}, \quad \alpha^2 = \frac{4\pi G \varrho}{H} \text{ cent}^{-2}.$$

Die Konstanten C_1 und C_2 sind durch Temperatur und Temperaturgefälle an der Oberfläche des festen Kernes bestimmt. Wir haben diese Konstantenbestimmung bereits Seite 229 vorgenommen und erhalten

$$T = T_R + \frac{R}{2} \left(2 \left(\frac{dT}{dr} \right)_R + \alpha^2 R \right) - \frac{R^2}{3r} \left[3 \left(\frac{dT}{dr} \right)_R + \alpha^2 R \right] - \frac{\alpha^2 r^2}{6}.$$

Für die Erde und atmosphärische Luft, $T_R = 273$, $\varrho = 0,0012929$ gramm cent $^{-3}$ findet sich $\alpha^2 = 3,768209 \cdot 10^{-16}$ cent $^{-2}$, $\frac{dT}{dr} = -\frac{g}{H} = 3,416198 \cdot 10^{-4}$ $^{\circ}\text{Cels. cent}^{-1}$. Durch Auflösung der kubischen Gleichung, die sich für $T = 0$ ergibt, ist die Grenze R der homogenen Atmosphäre bestimmt; wird die Genauigkeit siebenstelliger Logarithmen vollständig ausgenutzt, so ergibt sich dieselbe in einer Höhe von

8000,25 meter.

Die Höhe der homogenen Atmosphäre ($g = \text{konst.}$) findet sich bei 7991,34 Meter. Berücksichtigt man die Abnahme von g in der Form $g = \frac{A}{r^2}$, so folgt aus (292) langsameres Temperaturgefälle und nach Gl. (299) wird die Grenze auf 8001,38 Meter gehoben. Die innere Gravitation der atmosphärischen Massen vergrößert dies g , und die Grenze sinkt um 1,1 Meter zurück. Mit Berücksichtigung innerer

*) M. Thiesen, Über die Verbreitung der Atmosphäre. A. W. Schade. Berlin 1878.

Gravitation ergibt sich die Masse der homogenen Atmosphäre um $\frac{1}{800}$ größer als bei der Annahme $g = \text{konst.}$

2. Auch für die Polytrope $n = 1$, (wobei Temperatur und Dichte für $g = \text{konst.}$ mit der Höhe linear abnehmen) ergab sich eine Lösung der Differentialgleichung (I) in geschlossener Form (Seite 91)

$$(a) \quad T = C_1 \frac{\sin \alpha r}{\alpha r} + C_2 \frac{\cos \alpha r}{\alpha r}$$

(Dieselbe Gleichung mit anderen Konstanten gilt für ϱ). Der Temperaturgradient an der Erdoberfläche ist die Hälfte desjenigen der homogenen Atmosphäre; für $g = \text{konst.}$ ergibt sich die Höhe der polytropen Atmosphäre $n = 1$ als das doppelte der Höhe der homogenen Atmosphäre zu 15982,7 Meter. Die Annahme $g = \frac{A}{r^2}$ vergrößert dieselbe (Gl. (299)) auf 16022,9 Meter. Durch Temperatur ($T = 273$), Dichte ($\varrho = 0,0012929$) und Temperaturgradient sind die Konstanten der Gleichung (a) bestimmt und ergeben

$$\lg \Theta = 0,3246313 + 5; \lg \alpha^2 = \lg \frac{2\pi G}{H\Theta} = 0,8389086 - 19.$$

Damit berechnet sich für die Grenze $\alpha R = 30^\circ 24'$; $R = 6,386975 \cdot 10^6$ Meter. Da wir den Erdradius mit $6,37096 \cdot 10^6$ einführen, ergibt sich die obere Grenze der Atmosphäre $n = 1$ in einer Höhe von 16015 Meter. Die Berücksichtigung der Gravitationswirkung der atmosphärischen Massen hat die Höhe der Atmosphäre um etwa 6—7 Meter erniedrigt.

Damit sind wir auch in der Lage, die Masse dieser Atmosphäre zu berechnen. Gl. (300) läßt sich für $n = 1$ integrieren und liefert nach leichter Umformung

$$M = \frac{R^2 g e}{2 H T} \left[\lg \frac{R}{R} - \frac{R - R}{R} \right] = \frac{g e \frac{R^2}{H T}}{4} \text{ gramm cent}^{-2},$$

und für die ganze Oberfläche $O = 5,1006 \cdot 10^{18}$ cent² erhalten wir $M = 5,2908 \cdot 10^{18}$ kilogramm.

§ 8. Um den Bau der Atmosphäre bei beliebigem n kennen zu lernen, muß die Differentialgleichung wie in früheren Fällen auf mechanischem Wege ausgewertet werden nach dem Seite 74 angeführten Verfahren von W. Kutta. Diese Auswertung habe ich bereits vor einigen Jahren bei Anlaß meiner Vorlesungen ausführen lassen. Die damals benutzten Einheiten sind Kilogramm für die Masse, Meter und Sekunde. Auch wurde damals die Gravitationskonstante zu $6,68 \cdot 10^{-11}$ kilogr⁻¹ meter³ sek⁻² und $\alpha = 1,403$ angesetzt, was aber das Resultat unmerklich beeinflußt. Die nachfol-

genden Berechnungen wurden von Herrn cand. math. R. Schmalen berg ausgeführt.

a) $k = 1,403$, $n = 2,4814$. Damit ergeben sich $\Theta = 246,14$;
 $\alpha^2 = 3,4127 \cdot 10^{-15}$ kilogr $^{-1}$ meter.

Die auszuwertende Differentialgleichung lautet

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + 3,4127 \cdot 10^{-15} \cdot u^{2,4814} = 0$$

mit den Ausgangswerten

$$r = 6,371 \cdot 10^6 \text{ Meter}, u = 1,1091, \frac{du}{dr} = -3,9866 \cdot 10^{-5}.$$

Die Resultate sind in Tabelle 27 wiedergegeben. Die Atmosphäre endigt in einer Höhe von $2,79375 \cdot 10^4$ Meter. Durch $g = \frac{A}{r^2}$ würde sich eine Höhe von $2,79436 \cdot 10^4$ Meter ergeben. Die innere Gravitation setzt diese Höhe um etwa 6 Meter herab; die Unsicherheit der Rechnung kann wahrscheinlich nur die letzte Stelle beeinflussen und beträgt somit einige Meter.

Tabelle 27. $k = 1,403$. $n = 2,4814$.

Höhe in Meter	u	$-\frac{du}{dr} \cdot 10^5$	T	$T, (g = \text{konst.})$
0	1,1091	3,9866	273	273
1000	1,0692	3,9853		
3000	0,9895	3,9828		
5000	0,9099	3,9803	223,90	223,94
7000	0,8303	3,9778		
10000	0,7110	3,9741	175,00	174,87
18000	0,5918	3,9704		
16000	0,4727	3,9667		
20000	0,3141	3,9617	77,81	76,75
24000	0,1557	3,9567	38,32	37,49
27937,5	0,0000	3,9518	00,0	

Die vierte Kolonne enthält $T = u\Theta$, die Temperatur mit Berücksichtigung innerer Gravitation der Atmosphäre, die letzte Kolonne T unter der Annahme linearen Temperaturgefälles. Die Differenzen sind so klein, daß die Annahme $g = \frac{A}{r^2}$ Temperaturen liefern würde, die von denen der vierten Kolonne bei der Rechengenauigkeit mit fünfstelligen Logarithmen nicht zu unterscheiden sind.

b) Wir wählen einen Wert von n , der die Höhe der Atmosphäre für $n = 2,5$ um etwa das 10-fache vermehrt.

$$k = 1,0296. n = 33,784. \Theta = 270,93.$$

$$\alpha^2 = 3,1031 \cdot 10^{-16} \text{ kilogr}^{-1} \text{ meter.}$$

Die Differentialgleichung wird

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + 3,1031 \cdot 10^{-16} \cdot u^{33,784} = 0$$

mit den Ausgangswerten

$$r = 6,371 \cdot 10^6 \text{ meter. } u = 1,00763; \frac{du}{dr} = -3,6248 \cdot 10^{-6}$$

Die Auswertung ist in Tabelle 28 wiedergegeben.

Tabelle 28.

 $k = 1,0296 \quad n = 33,784$

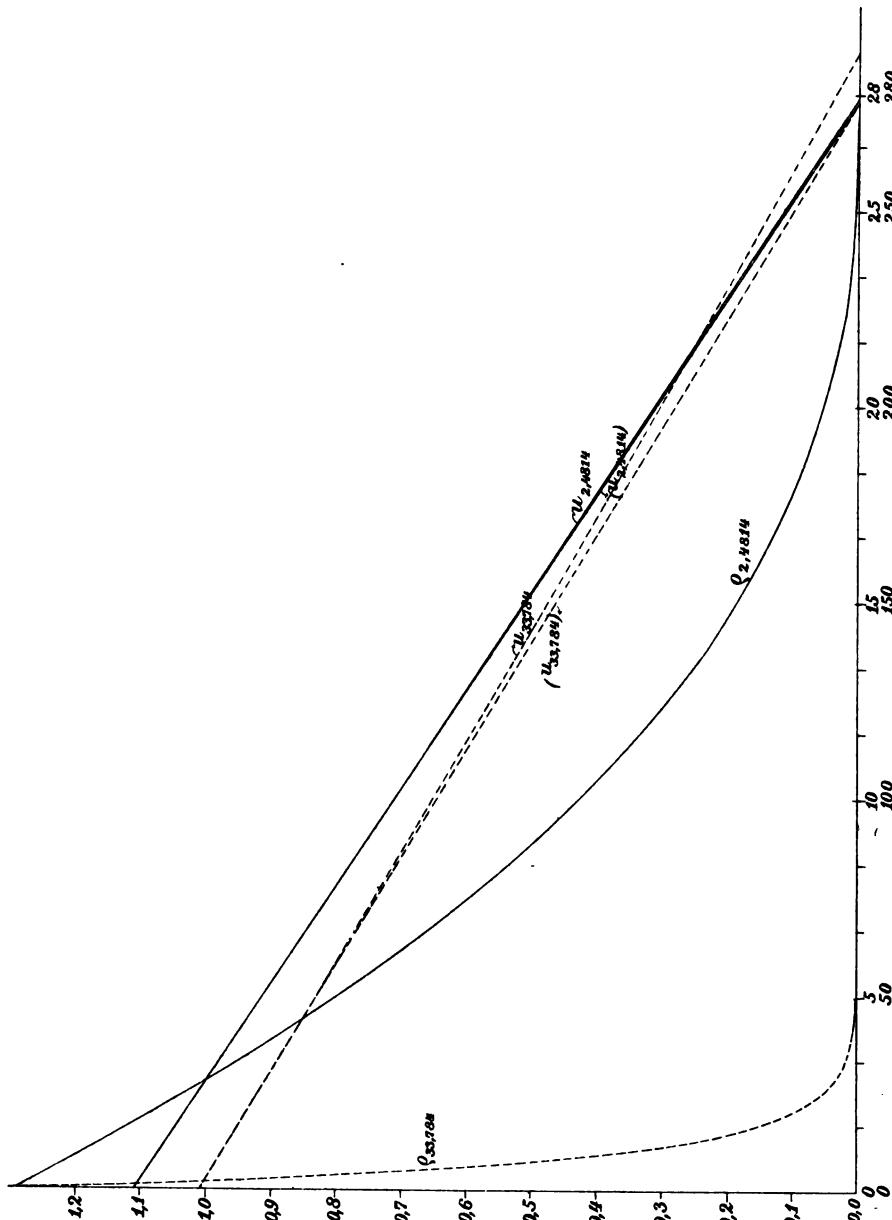
Höhe in Meter	u	$-\frac{du}{dr} \cdot 10^6$	T	$T, (g = \text{konst.})$
0	1,0076	3,6248	273	273
1000	1,0040	3,6237		
3000	0,9968	3,6214		
5000	0,9896	3,6191		
10000	0,9715	3,6134	263,21	263,18
30000	0,8995	3,5909		
50000	0,8279	3,5686	224,31	223,90
70000	0,7567	3,5465		
100000	0,6508	3,5137	176,32	174,79
180000	0,5459	3,4873		
160000	0,4419	3,4494		
200000	0,3048	3,4075	82,58	76,58
240000	0,1698	3,3064	45,87	37,80
290000	0,00224	3,3161		
290675	0,00000	3,3154	0,00	

Die vierte Kolonne enthält $T = u\Theta$, die Temperatur mit Berücksichtigung innerer Gravitation der Atmosphäre; die letzte Kolonne T unter der Annahme $g = \text{konst.}$ Der Ansatz $g = \frac{A}{r^2}$ würde Temperaturen liefern, die sich nur in den höchsten Höhen von denen der vierten Kolonne unterscheiden würden.

Die Atmosphäre endigt in einer Höhe von $2,90675 \cdot 10^6$ Meter. $g = \text{konst.}$ würde $2,7798 \cdot 10^6$ Meter, $g = \frac{A}{r^2}$ aber $2,9066 \cdot 10^6$ Meter ergeben haben. Die innere Gravitation hat letztere Höhe um 15 Meter vermehrt, während eine Abnahme um etwa diesen Betrag in Wirklichkeit zu erwarten ist; allein diese Differenz von etwa 30 Meter beträgt nur $\frac{1}{10000}$ der ganzen zu messenden Höhe, welche Unsicherheit bei Anwendung fünfstelliger Logarithmen bei der mechanischen Auswertung unvermeidlich ist.

Die Resultate der beiden mechanischen Quadraturen sind in Tafel V zur Darstellung gebracht. Die Abszissenachse enthält eine Höhenskala bis 28 Kilometer für den Fall $n = 2,4814$ (ausgezogene Kurven) und eine Skala bis 280 Kilometer für den Fall

$n = 33,784$ (gestrichelte Kurven). Für die u -Kurven gibt die Ordinatenachse Werte, die mit den polytropen Temperaturen $\Theta = 246,14$



Tafel V: Aufbau der Atmosphäre der Erde mit Berücksichtigung ihrer inneren Gravitation.

resp. 270,93 multipliziert die wirklichen, absoluten Temperaturen, für die Ausgangspunkte die Temperatur $T = 273$, ergeben. Die Kur-

ven ($u_{2,4814}$) und ($u_{33,784}$) sind unter der Annahme $g = \text{konst.}$ einge|tragen, verlaufen somit geradlinig und geben durch ihren Schnitt mit der Abszissenachse die zugehörigen Atmosphärenhöhen. Die Kurven $u_{2,4814}$ und $u_{33,784}$ sind durch mechanische Quadratur ermittelt; sie geben durch ihre Schnitte mit der Abszissenachse die wirklichen Höhen der Atmosphäre an. Die Kurven $\varrho_{2,4814}$ und $\varrho_{33,784}$, (erhalten, indem die zugehörigen u -Werte in die Potenzen 2,4814 resp. 33,784 erhoben wurden), zeigen die DichteVerteilung in der Atmosphäre mit Berücksichtigung innerer Gravitation. Die ϱ -Werte sind an der Ordinatenachse in gramm cent⁻³ ablesbar. Die ϱ -Kurve mündet in die Abszissenachse an der gleichen Stelle ein, wie die u -Kurve. Im Falle $n = 33,784$ ist die Dichte in einer Höhe von 50 Kilometer bereits so klein geworden, daß die ϱ -Kurve nicht weiter gezeichnet werden konnte. Die Tafel läßt bereits erkennen, daß der Einfluß der inneren Gravitation bei Berechnung der Masse der Atmosphäre außerordentlich klein sein muß.

Diese Auswertungen der Differentialgleichungen erlauben theoretisch die Masse der Atmosphäre zu bestimmen. Denn der Wert von $\frac{du}{dr}$ bestimmt an jeder Stelle den Wert von g , und aus den Werten von $\frac{du}{dr}$ an der unteren und oberen Grenze der Atmosphäre läßt sich nach Gleichung (205) deren Masse bestimmen. Allein praktisch versagt diese Methode. Denn der Wert von g an der oberen Grenze ist bedingt durch die Summe von Erdmasse und Atmosphärenmasse. Erstere ist von der Größenordnung 10^{27} gramm, letztere von der Größenordnung 10^{21} gramm. Es müßte also $\frac{du}{dr}$ mit weit größerer Genauigkeit ermittelt werden, als in den obigen Tabellen, wo eine Unsicherheit bereits in der vierten Dezimale eintreten kann. Wie genau die Auswertung der Tabelle 28 ist, geht daraus hervor, daß, wenn wir unter der Annahme $g = \frac{A}{r^2}$ den Endwert von $\frac{du}{dr}$ berechnen, wir $10^{-6} \frac{du}{dr} = -3,6248 \left(\frac{R}{R+\xi} \right)^2 = -3,3152$ erhalten, so daß der durch mechanische Quadratur ermittelte Wert um nicht ganz zwei Einheiten der letzten Dezimale zu groß gefunden wurde. Zur weitern Rechnung müßte aber mindestens eine 5. Dezimale exakt gegeben sein. Um den Einfluß innerer Gravitation in bezug auf die Massenberechnung festzustellen haben wir ein anderes Verfahren anzuwenden, das wir im folgenden Paragraphen darstellen werden.

§ 9. Wir entwickeln u von der Stelle $r = R$ nach dem Taylor-schen Satze und erhalten

$$(302) \quad u = u_R + \left(\frac{du}{dr}\right)_R (r - R) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2u}{dr^2}\right)_R (r - R)^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} \left(\frac{d^3u}{dr^3}\right)_R (r - R)^3 + \dots$$

Die Differentialquotienten sind durch die Differentialgleichung (I) gegeben; (302) gibt dann den Verlauf von u mit Berücksichtigung der inneren Gravitation der Atmosphäre.

a) $k = 1,403$; $n = 2,4814$. Bilden wir (302) mit Hilfe der Ausgangswerte, die wir im letzten Paragraphen der mechanischen Quadratur zugrunde legten, so erhalten wir für u in der Erdatmosphäre

$$u = 1,1091 - 3,98655 \cdot 10^{-5} (r - R) + \frac{1}{2} 1,25103 \cdot 10^{-11} (r - R)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot 5,50112 \cdot 10^{-18} (r - R)^3 + \dots$$

Durch $u = 0$ ist die Höhe der Atmosphäre $\mathfrak{H} - R$ bestimmt. Mit Berücksichtigung des in $r - R$ linearen Gliedes allein erhalten wir diese Höhe $\mathfrak{H} = 27822$ Meter; das ist die Höhe der polytropen Atmosphäre für $g = \text{konst.}$, die sich (Gleichung (299)) für den Ansatz $g = \frac{A}{r^2}$ auf 27943,6 Meter erhöht. Mit Berücksichtigung des quadratischen Gliedes ergibt sich $\mathfrak{H} = 27944$ Meter, also eine Zunahme von 122 Meter; das Glied mit dritter Potenz setzt diese Höhe nur um fünf Meter herab. Die folgenden Glieder der Reihe können wir deshalb vernachlässigen und erhalten $\mathfrak{H} = 27939$ Meter, mit der durch mechanische Quadratur (Tabelle 27) gefundenen Höhe bis auf 1,5 Meter übereinstimmend.

Der Ansatz (302) ist geeignet, auch die Masse einer polytropen Atmosphäre unter Berücksichtigung innerer Gravitation zu bestimmen. Wir schreiben (302) in der Form

$$(302a) \quad u = u_R (1 + A(r - R) + B(r - R)^2 + C(r - R)^3 + \dots)$$

und erhalten

$$u_R = 1,1091, \quad A = -3,5944 \cdot 10^{-5}, \quad B = 5,6397 \cdot 10^{-12}, \\ C = -8,2686 \cdot 10^{-18}.$$

Die Masse der Atmosphäre ist bestimmt durch

$$M = 4\pi \int_{R}^{\mathfrak{H}} r^2 \varrho dr, \quad \varrho = u^n.$$

Behalten wir nur das lineare Glied bei, so ergibt sich

$$\begin{aligned} M_1 &= 4\pi u_R^n \int_R^R r^2 (1 + A(r - R))^n dr \\ &= -\frac{4\pi u_R^n}{A^2} \left[\frac{(1 - AR)^2}{n+1} - \frac{2(1 - AR)}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right] \\ &= 5,2819 \cdot 10^{18} \text{ Kilogramm.} \end{aligned}$$

Sieht man außerdem noch ab vom Wachsen der Schichten mit r , bezeichnet die Oberfläche der Erde mit O , $O = 4\pi R^2 = 5,1006 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} M_1 &= O u_R^n \int_R^R [1 + A(r - R)]^n dr = -\frac{O u_R^n}{(n+1)A} \\ &= +\frac{O u_R^n}{(n+1)} \mathfrak{H}_n = O \varrho_R \mathfrak{H} = 5,1006 \cdot 10^{14} \cdot 1,293 \cdot 7991 \\ &= 5,2705 \cdot 10^{18} \text{ Kilogramm.} \end{aligned}$$

Dies ist die Masse der homogenen Atmosphäre. Berücksichtigen wir die Erweiterung der Schichten, so stieg dieselbe auf $5,2819 \cdot 10^{18}$ Kilogramm. Die Differenz ist so klein, daß wir den Einfluß der höhern Glieder in (302a) genügend genau feststellen können, wenn wir dabei von der Erweiterung der Schichten absehen. Dann erhalten wir mit Berücksichtigung des quadratischen Gliedes

$$\begin{aligned} M_2 &= 4\pi u_R^n \int_R^R r^2 (1 + A(r - R) + B(r - R)^2)^n dr \\ &= M_1 + 4\pi u_R^n n B \int_R^R r^2 (r - R)^2 [1 + A(r - R)]^{n-1} dr, \end{aligned}$$

wenn wir höhere Potenzen von B vernachlässigen. Der zweite Summand kann, wenn wir von der Erweiterung der Schichten absehen, gesetzt werden gleich

$$O u_R^n n B \int_R^R (r - R)^2 [1 + A(r - R)]^{n-1} dr = -\frac{O u_R^n B}{A^2} \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

und dies mit genügender Genauigkeit $= + M_1 \frac{2B}{A^2(n+2)}$, so daß wir erhalten

$$M_2 = M_1 \left(1 + \frac{2B}{A^2(n+2)} \right) = M_1 (1 + 0,001948).$$

Der Einfluß des quadratischen Gliedes vergrößert die Masse um nur 2 %. Mit gleicher Genauigkeit erhalten wir bei Berücksichtigung des Gliedes $(r - R)^3$

$$M_3 = M_2 \left(1 - \frac{6C}{A^3(n+2)(n+3)}\right) = M_2 (1 - 0,0000368).$$

Der Einfluß ist so gering, daß wir von höheren Gliedern abssehen können und für die Masse erhalten

$$\begin{aligned} M &= M_1 (1 + 0,001948 - 0,0000368) = M_1 1,00191 \\ &= 5,2920 \cdot 10^{18} \text{ Kilogramm}. \end{aligned}$$

Die Berücksichtigung innerer Gravitation ändert den Wert der Masse dieser Atmosphäre um $\frac{1}{500}$ ihres Wertes bei Annahme $g = \text{konst.}$

b) $k = 1,0236$; $n = 33,784$. Wir wählten diese Werte, um eine polytrope Atmosphäre zu erhalten, die sich zu ungefähr zehnfacher Höhe erhebt, wie die vorhin behandelte. Denn wir erhalten (für $g = \text{konst.}$) $\xi = 2,7798 \cdot 10^5$ Meter, welche Höhe sich bei Annahme $g = \frac{A}{r^2}$ um 12680 Meter, auf $\xi = 2,9066 \cdot 10^5$ Meter vermehrt. Die Faktoren der Gleichung (302) werden in diesem Falle

$$\begin{aligned} u_R &= 1,00763; \quad \frac{du}{dr} = - 3,6248 \cdot 10^{-6}; \quad \frac{d^2u}{dr^2} = 1,1375 \cdot 10^{-13}; \\ &\quad \frac{d^3u}{dr^3} = - 4,8695 \cdot 10^{-19}. \end{aligned}$$

Mit Berücksichtigung des quadratischen Gliedes erhalten wir eine Höhe von $2,7798 \cdot 10^5 + 1,3284 \cdot 10^4 = 2,9128 \cdot 10^5$ Meter; das Glied mit dritter Potenz setzt diese um 580 Meter herunter, und wir erhalten $\xi = 2,9070 \cdot 10^5$ Meter. Eine Differenz gegen das oben, Tabelle 28 ermittelte $\xi = 2,90675 \cdot 10^5$ Meter läßt sich durch Anwendung fünfstelliger Logarithmen nicht feststellen. Höhere Glieder brauchen wir nicht mehr zu berücksichtigen.

Die Konstanten der Gleichung (302a) zur Berechnung der Masse werden

$$\begin{aligned} u_R &= 1,00763, \quad A = - 3,5975 \cdot 10^{-6}, \quad B = 5,6447 \cdot 10^{-13}, \\ C &= - 8,0543 \cdot 10^{-20}, \end{aligned}$$

und wir erhalten, wie oben,

$$\begin{aligned} M_1 &= 5,2834 \cdot 10^{-18} \text{ Kilogramm}, \quad M_2 = M_1 (1 + 0,002438), \\ M_3 &= M_2 (1 - 0,000008), \\ M &= M_1 (1 + 0,00243) = 5,2962 \cdot 10^{18} \text{ Kilogramm}. \end{aligned}$$

c) $k = 1,0008$; $n = 125$. Bei konstantem g erstreckt sich

diese Atmosphäre bis $\tilde{h} = 1,00693 \cdot 10^6$ Meter; $g = \frac{A}{r^2}$ läßt sie bis $\tilde{h} = 1,19595 \cdot 10^6$ Meter, also etwa $\frac{1}{6}$ Erdradius, ansteigen. Wir haben

$$u = 1,00206, \quad \Theta = 272,377, \quad \alpha^2 = 8,5190 \cdot 10^{-17}$$

$$\frac{du}{dr} = -9,95263 \cdot 10^{-7}, \quad \frac{d^2u}{dr^2} = 3,12294 \cdot 10^{-13}$$

und erhalten damit

$$M_1 = 5,2853 \cdot 10^{18} \text{ Kilogramm}, \quad M_2 = M_1 (1 + 0,00249);$$

und da höhere Glieder ohne Einfluß sind, ergibt sich

$$M = 5,2984 \cdot 10^{18} \text{ Kilogramm}.$$

§ 10. Stellen wir diese Resultate zusammen. Über der Erde vom Radius $6,371 \cdot 10^6$ Meter liegt atmosphärische Luft, am Erdboden ausgezeichnet durch die Werte $T = 273$, $p = 760$ mm Quecksilber, $\rho = 1,293 \frac{\text{Kilogramm}}{\text{Kubikmeter}}$. War dann die Atmosphäre nach einer Polytrope von der Klasse k , (n) gebaut, so ergaben sich für ihre Höhe und Masse mit Berücksichtigung innerer Gravitation folgende Werte:

		Höhe in Zentimeter	Masse in Gramm
$k = \infty$	$n = 0$	$8,00025 \cdot 10^5$	$5,2827 \cdot 10^{21}$
$k = 2$	$n = 1$	$1,6015 \cdot 10^6$	$5,2908 \cdot 10^{21}$
$k = 1,403$	$n = 2,4814$	$2,7939 \cdot 10^6$	$5,2922 \cdot 10^{21}$
$k = 1,0296$	$n = 33,784$	$2,9067 \cdot 10^7$	$5,2962 \cdot 10^{21}$
$k = 1,0008$	$n = 125$	$1,1959 \cdot 10^8$	$5,2984 \cdot 10^{21}$

Mit wachsender Höhe der Atmosphäre nimmt deren Masse langsam, aber deutlich zu. Um die Grenze dieses Wachstums beurteilen zu können, lassen wir n bis ∞ zunehmen. Wir haben dann eine isotherme Atmosphäre aufgebaut, deren Grenze nicht im Endlichen liegen kann. Wir haben ferner, worauf wir gleich zurückkommen werden, gezeigt, daß die Lösungskurve der Differentialgleichung, welche den Aufbau einer isothermen Kugel regelt, mit wachsendem r , r linear abhängig von r , um den Wert $\frac{2}{r^2}$ in immer engeren Abständen herumpendelt. Je weiter wir in einer isothermen Kugel, auch wenn sie einen festen Kern besitzt, nach außen gehen, desto genauer nehmen Dichte und Druck proportional $\frac{1}{r^2}$ ab. Die Masse einer isothermen Atmosphäre wächst in den entfernten Gebieten wie r und wird mit $\tilde{h} = \infty$ ebenfalls unendlich. Daraus schließen wir, daß, wenn wir die Gasgesetze für unbegrenzt

gültig ansehen und die Erde mit ihrer Atmosphäre allein im Weltenraume schwebend annehmen, wir über die Masse der Atmosphäre überhaupt nichts aussagen können. Die Werte von p , ϱ und T an der Erdoberfläche genügen nicht zur Berechnung derselben.

Eine Luftmasse von $5,29 \cdot 10^{18}$ Kilogramm, die nur $\frac{1}{1000000}$ Erdmasse beträgt, und eine Luftmasse, welche die Erdmasse beliebig übertrifft, an der Grenze sogar ∞ werden kann, können wir so um die Erde herumbauen, daß ihre Grundflächen durch die Werte 0° Cels., 760^{mm} Quecksilber und Normaldichte ausgezeichnet sind. Sollten wir die gestellte Frage in aller Strenge entscheiden können, so müßten wir die Beschaffenheit der Luftmassen kennen, so weit hinaus solche noch vorhanden sind.

Vom praktischen Standpunkte aus stellen sich diese Verhältnisse freilich wesentlich anders.

Nehmen wir gleich als Grenzfall eine isotherme Atmosphäre. Aus Kap. IX, in Verbindung mit § 15, Kap. XIII folgt, daß in einer isothermen Atmosphäre über einem beliebigen Weltkörper sich die Dichte mit zunehmender Entfernung dem Werte $\frac{2}{\beta^2 r^2}$ gramm cent⁻³, $\beta^2 = \frac{4\pi G}{HT}$ gramm⁻¹ cent, immer mehr anschmiegt, in rasch abnehmenden Amplituden um diesen Wert herumpendelnd. Masse und Radius des Weltkörpers und bei konstantem T die Bodenbeschaffenheit der Atmosphäre sind ohne Einfluß auf den Wert, dem sich die Dichte nähert; sie bestimmen lediglich die Art der Annäherung, die Pendelungen nach Schnittpunkten und Amplituden. Für atmosphärische Luft von 0° wird $\beta^2 = 1,0676 \cdot 10^{-15}$ gramm⁻¹ cent²; liegt diese über der Erde oder einem beliebigen andern Weltkörper, so wird in genügender Entfernung die Dichte, immer genauer durch $\varrho = \frac{1,8733 \cdot 10^{16}}{r^2}$ gramm cent⁻³ wiedergegeben. Ist die Bodendichte der Erdatmosphäre $\varrho_0 = 0,001293$ gramm cent⁻³, und setzen wir $\frac{r}{R} = N$, R Radius der Erde, so können wir für große Entfernungen auch setzen $\varrho = \varrho_0 \frac{3,5723}{N^2}$ gramm cent⁻³. Weiter ergibt eine leichte Rechnung, daß sich dann die Erdatmosphäre um eine Masse gleich derjenigen der Erde vermehrt, so oft wir um etwa 400 Erdradien nach außen fortschreiten; sie wird auf diese Weise unendlich. Aber welches sind die genügend großen Entfernungen, bei welchen diese Verhältnisse eintreten? Aus Formel (301a), welche, da sie innere Gravitation der Atmosphäre vernachlässigt, zu langsame Dichteabnahme liefert, ergibt sich leicht,

daß die atmosphärischen Massen, die sich von einem Radius, $R + 0,01 R$ bis zu einem Radius, entsprechend einer Parallaxe von $0,001''$ erstrecken, gegenüber der Erdmasse verschwindend klein sind. Die demnach jedenfalls sehr bedeutenden in Betracht kommenden Entferungen können wir folgendermaßen abschätzen. Die Dichte der Atmosphäre an der Oberfläche der Erde ist 3,57 mal kleiner als sich nach dem Ansatz $\frac{2}{\beta^2 r^2}$ für $r = R$ ergibt. Die gesuchten Entferungen liegen außerhalb des ersten Schnittpunktes der Kurven $\frac{2}{\beta^2 r^2}$ mit der Kurve, welche die wahre Dichteverteilung darstellt, und durch Gleichung (301a) in Annäherung gegeben ist. Setzen wir $e^{-\frac{R}{g} \frac{r-R}{r}} = \frac{3,5723}{r^2} R^2$, so finden wir die Abszisse r des ersten Schnittpunktes von der Größenordnung $R \cdot 10^{170}$. Die in Betracht kommenden großen Entferungen sind derart, daß die Abmessungen unseres Fixsternsystems ihnen gegenüber verschwindend klein sind; sie sind demnach ohne praktische Bedeutung.

Die in Betracht kommenden Massen der Erdatmosphäre liegen somit in Nähe der Erdoberfläche. Wir sehen uns um nach beobachteten Tatsachen, die Anhaltspunkte über den Bau derselben liefern können. Wir schließen aus dem Auftreten der Polarlichter, dem Aufleuchten der Sternschnuppen, der Helligkeitsabnahme des Mondes bei Mondfinsternissen, daß in Höhen von 300 bis 400 Kilometern noch Luftmassen vorhanden sind, welche zu elektrischen, mechanischen und optischen Phänomenen Anlaß geben. Die Beschaffenheit derselben ist uns völlig unbekannt. Um ihre Dichte abzuschätzen nehmen wir Atmosphären an, welche sich bis über jene Höhe erheben. Da die innerhalb dieser Grenze befindlichen Luftmassen gegen die Erdmasse sehr klein sind, so vernachlässigen wir deren Gravitation und nehmen, da wir nur Größenordnungen feststellen wollen, g als konstant an. Wir nehmen erst eine bis ∞ reichende isotherme Atmosphäre. Geben wir derselben 0° Cels., so herrscht in h Metern Höhe eine Luftdichte $\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{h}{8000}}$, und wir erhalten

$$\text{in } 300 \text{ Kilometer } \varrho = 0,00129 e^{-\frac{37,5}{8000}} = 6,7 \cdot 10^{-20} \text{ gramm cent}^{-3}$$

$$\text{in } 500 \text{ Kilometer } \varrho = 0,00129 e^{-\frac{62,5}{8000}} = 9,3 \cdot 10^{-31} \text{ gramm cent}^{-3}.$$

In diesen Höhen werden wir aber zweifellos schon sehr niedere Temperaturen vorfinden. Nehmen wir, um extreme Werte zu finden, die ganze Luftmasse auf einer Temperatur $\frac{T}{2} = -136,5^\circ$ an, so erhalten wir

in 300 Kilometer $\varrho = 2,0,00129 e^{-2,87,5} = 6,9 \cdot 10^{-36}$ gramm cent $^{-3}$
 in 500 Kilometer $\varrho = 2,0,00129 e^{-2,62,5} = 1,3 \cdot 10^{-57}$ gramm cent $^{-3}$.

Den wirklich auftretenden Verhältnissen werden wir uns mit einer polytropen Atmosphäre mehr nähern. Wir benutzen dazu die bereits in § 9 eingeführte Atmosphäre $n = 125$, die sich bis etwa 1000 Kilometer Höhe erstreckt. Bei $g = \text{konst.}$ haben wir lineares Gefälle von u ; wir können dann $T = u\Theta$ und $\varrho = u^{125}$ in jeder Höhe berechnen und erhalten

$$\begin{aligned}\text{in 300 Kilometer } T &= 191,6; - 81,4^\circ \text{ Cels.} \\ \varrho &= 8,2 \cdot 10^{-20} \text{ gramm cent}^{-3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{in 500 Kilometer } T &= 137,4; - 135,6^\circ \text{ Cels.} \\ \varrho &= 6,8 \cdot 10^{-38} \text{ gramm cent}^{-3}.\end{aligned}$$

Diese Polytrope $n = 125$ liefert Resultate, die nicht unbedingt verwerflich erscheinen. Aber wir erhalten schon bei 300 Kilometer Gase in Verdünnungen, in denen 1 Molekül 1 cubcent. zur Verfügung hat; Verdünnungen, in denen angesichts des großen zur Verfügung stehenden Raumes die statistische Methode der kinetischen Gastheorie und die daraus resultierende Zustandsgleichung der vollkommenen Gase nicht zu versagen brauchen, deren Einfluß auf die physikalischen Eigenschaften der Gase uns aber gänzlich unbekannt ist. Dabei kommen wir für diese Höhen auf keineswegs sehr niedrige Temperaturen. Würden wir Polytropen mit noch höherem n wählen, so würden wir in diesen Höhen noch höhere Temperaturen bei kleineren Dichten vorfinden. Lassen wir, da wir in 300 — 400 Kilometern noch deutliche Wirkungen der Atmosphäre wahrnehmen, diese in etwa 1000 Kilometer endigen, so werden wir durch die Polytrope $n = 125$ oder eines Polygonzuges von nicht zu ungünstig gewählten Polytropen in Höhe von 300 Kilometer Temperaturen von etwa -100° Cels. und Dichten von der Größenordnung etwa 10^{-20} gramm cent $^{-3}$ vorfinden.

Wir kommen demnach zu folgendem Schlusse:

Die Masse der Erdatmosphäre ist, wenn wir die Erde als vollkommene, nicht rotierende, frei im Weltenraume schwebende Kugel betrachten, unbekannt. Sehen wir aber ab von Luftpässen in Verdünnungen von niedrigerer Größenordnung als etwa 10^{-20} gramm cent $^{-3}$, so ist ihre Masse $5,3 \cdot 10^{21}$ gramm cent $^{-3}$. Sie beträgt dann nur $\frac{1}{10^6}$ Erdmasse, so daß wir bei Untersuchung ihres Aufbaues von ihrer inneren Gravitation absehen können.

§ 11. Wir können leicht einsehen, unter welchen Umständen eine polytropen Atmosphäre von bestimmter Klasse n zustande kommt. Mischen wir eine beliebig gebaute Atmosphäre genügend lange durch, indem wir jedes Element derselben nötigen den durch Höhenänderung bedingten Druckänderungen auf Polytropen von der Klasse n zu folgen, so wird dieser Mischungsprozeß bewirken, daß schließlich jede in Bewegung gesetzte Luftmasse mit der augenblicklich verdrängten Luftmasse in bezug auf Druck, Dichte und Temperatur übereinstimmt. Die ganze Atmosphäre ist dann nach einer Polytropen dieser Klasse n aufgebaut; die polytropen Temperatur Θ_k dieser Polytropen dieser Klasse ist durch den Anfangszustand der durchzumischenden Massen bestimmt. Da diese Gleichgewichtszustände durch Konvektionsströme herbeigeführt werden, spricht man auch von Atmosphären in „konvektivem“ Gleichgewichte. Von allen diesen möglichen Atmosphären ist diejenige von besonderer Wichtigkeit, bei welcher die bewegten Luftmassen vor Wärmeaustausch nach außen geschützt sind. Dies wird, wenn wir von den Einflüssen von Strahlung und Wärmeleitung absehen, stets eintreten, wenn trockene Luftmassen der Erdatmosphäre, vom Erdboden losgelöst, in Bewegung sind. Das Resultat dieses Mischungsprozesses ist eine Atmosphäre im isentropen Gleichgewicht, ausgezeichnet durch die Klasse $n = \frac{1}{k-1}$, $k = \alpha = \frac{c_p}{c_v}$; die isentrope Temperatur Θ und der Entropiegehalt η sind durch die ganze Atmosphäre konstant. Da in diesen Gleichgewichtszuständen alle Veränderungen umkehrbar vor sich gehen, können wir dies isentrope Gleichgewicht auch adiabatisches Gleichgewicht nennen. Sind die Bodenwerte der adiabatischen Erdatmosphäre $T = 273$ und $\varrho = 0,001293$ gramm cent⁻³, so beträgt, $\alpha = \frac{7}{5}$ gesetzt (Seite 28): $\Theta = 3904,1$. In jeder polytropen Atmosphäre haben wir nach (292) und (293) lineares Gefälle von T und π , in der isentropen Erdatmosphäre ($\alpha = \frac{7}{5}$)

$$dT = -\frac{g dr}{3,5 H},$$

$$d\pi = -\frac{g}{\varrho} dr, \quad \pi = p^{n+1} = p^{\frac{1}{3,5}},$$

$$\Theta = 5,2754 \cdot 10^7 \text{ für } \varrho = 0,001293, \quad T = 273.$$

Da ein Körper bei linearem Temperaturgefälle einen Wärmestrom stationär befördern kann, so werden die Temperaturen einer Atmosphäre in konvektivem Gleichgewicht durch Wärmeleitung nicht ge-

ändert, falls sich an ihren Grenzen Wärmebehälter von genügender Kapazität vorfinden.

Es ist überaus wichtig, sich klar zu machen, daß die niedrigeren Temperaturen der Höhe daher röhren, daß die aufsteigenden Luftmassen, sich gegen den abnehmenden Druck umkehrbar ausdehnend, Arbeit leisten, diese ihrer Energie ε entnehmen und dadurch kälter werden. Denn ändert eine Luftmasse Druck und Temperatur um dT und dp , so ist der Vorgang geregelt durch Gleichung (15a)

$$(a) \quad dQ = c_p dT - A \frac{1}{\varepsilon} dp.$$

Bei adiabatischem Vorgange ist $dQ = 0$ zu setzen. Die Druckabnahme dp gehört zur Höhenänderung $dp = -g\rho dh$, und berücksichtigen wir noch Gleichung (12) $c_p - c_v = AH$, so erhalten wir

$$(b) \quad dT = -\frac{\frac{g}{c_p}}{\frac{c_p - c_v}{H}} dr = -\frac{\frac{g}{\gamma}}{\frac{\gamma - 1}{H}} dr = -\frac{g}{(\gamma - 1) H} dr,$$

also das bekannte, lineare Temperaturgefälle mit der Höhe.

Trockene Luft folgt stets dieser Temperaturänderung, auch feuchte Luft (wenn wir von der geringen Änderung der Gaskonstanten durch Beimengungen der kleinen Mengen dreiatomigen Wasserdampfes abschneien), so lange keine Kondensationsvorgänge, resp. Verdampfungsvorgänge eintreten. Die Untersuchung der adiabatischen Zustandsänderung feuchter Luft liegt außerhalb des Rahmens dieser Abhandlung; sie ist vollständig und übersichtlich von H. Hertz*) und neuerdings mit größerer numerischer Genauigkeit von O. Neuhoff**) durchgeführt worden. Die adiabatische Zustandsänderung feuchter Luft kann aber bei nicht zu großen Höhendifferenzen durch eine polytrope Zustandsänderung trockner Luft, bei großen Höhendifferenzen durch einen Polygonzug solcher Polytropen dargestellt werden. Denn nehmen wir aufsteigende, feuchte Luft an, so wird durch Kondensation des Wasserdampfes ein gewisses Wärmequantum verfügbar. Daraus folgt bereits, daß die Temperaturabnahme bei Aufstieg durch gleiche Höhen vermindert wird, da dies Wärmequantum einen Teil der Ausdehnungsarbeit bestreiten kann. Dies Wärmequantum können wir in erster Annäherung proportional setzen der

*) H. Hertz, Graphische Methode zur Bestimmung der Zustandsänderung feuchter Luft. Gesammelte Abhandlungen Bd. I. Seite 321.

**) O. Neuhoff, Adiabatische Zustandsänderung feuchter Luft. Abhandlungen des Kgl. Preußischen Meteorologischen Instituts. Bd. I. Nr. 6. 1900.

ausgeschiedenen Wassermenge und infolgedessen auch der eingetretenen Temperaturdifferenz. Setzen wir dasselbe gleich $dQ = \gamma dT$, so können wir die Gleichung (a) für trockene Luft ansetzen, welcher bei ihrer Änderung Wärme $dQ = \gamma dT$ zugeführt wird und erhalten ebenso

$$dT = - \frac{\frac{g}{c_p - \gamma} dr}{\frac{c_p}{c_v} H}$$

und wenn wir Gleichung (22) $k = \frac{c_p - \gamma}{c_v - \gamma}$ berücksichtigen

$$(c) \quad dT = - \frac{\frac{g}{k} dr}{\frac{k}{k-1} H} = - \frac{g}{(n+1) H} dr.$$

Der Temperaturgradient nimmt mit γ ab, die Klasse n der Polytropen steigt. γ selbst ist bedingt durch die Menge Wasserdampf, die kondensiert, von der Temperatur, bei welcher dieser Vorgang stattfindet und dem Umstande, ob die Kondensationsprodukte als Wasser oder Eis, oder beide gleichzeitig auftreten. Die durch diese polytrope Behandlungsweise feuchter Luft gegebenen Temperaturgradienten können der Tabelle 29 entnommen werden mit einer für praktische Zwecke ausreichenden Genauigkeit.

Tabelle 29.

h	30°		20°		10°		0		-10°		-20°		-30°	
	$\frac{\Delta T}{\Delta r}$	n												
0	0,37	8,23	0,44	6,76	0,54	5,33	0,62	4,51	0,75	3,55	0,86	2,97	0,91	2,75
1000	0,37	8,23	0,46	6,43	0,56	5,10	0,68	4,02	0,82	3,17	0,90	2,80		
2000	0,38	7,99	0,49	5,97	0,56	5,10	0,75	3,55	0,87	2,93				
3000	0,40	7,54	0,51	5,70	0,65	4,26	0,82	3,17	0,89	2,84				
4000	0,42	7,14	0,57	4,97	0,73	3,68	0,88	2,88						
5000	0,43	6,94	0,59	4,79	0,80	3,27								
6000	0,45	6,59	0,63	4,42	0,84	3,07								
7000	0,48	6,12	0,72	3,75										

$$\frac{\Delta T}{\Delta r} = \frac{^\circ \text{Cels.}}{100 \text{ m}}.$$

Die Tabelle enthält die Temperaturgradienten ($\Delta r = 100$ Meter), die eine Luftmasse erleidet, welche die Höhe 1000 m, 2000 m ... 7000 m gerade passiert, nachdem sie vom Erdboden als gesättigte feuchte Luft von $30^\circ \dots 20^\circ$ und ... -30° emporgestiegen ist. Diese Zahlen sind der Arbeit von O. Neuhoff (loc. cit.) entnommen. Ich habe nur an jeder Stelle die Klasse der in Betracht kommenden Polytropen beigefügt. Die Tabelle zeigt, daß selbst durch beträchtliche Höhen hindurch eine einzige Polytrope, durch große Höhen

hindurch wenige aneinander gesetzte Polytropen zur Darstellung der Temperatur-, Druck- und Dichteänderungen ausreichen.

§ 12. Würde die Erdatmosphäre, trockene Luft vorausgesetzt, hinreichend gemischt, so würde sie sich auf isentropes Gleichgewicht einstellen; an jeder Stelle betrüge das Temperaturgefälle $0,98^{\circ}$ auf 100 m, und in 27,9 Kilometer Höhe würde die Atmosphäre endigen. Es sind die Vertikalkomponenten der Bewegung, welche diesen Zustand herbeiführen; ihre Wirkung tritt, falls wir nicht Wärmezufuhr von außen vollständig abschließen, zurück in dem Maße, als die Horizontalbewegung überwiegt. Bei ruhiger Wetterlage und kräftiger Sonnenstrahlung können über größeren Gebieten bis in nicht zu große Höhen hinauf diese vertikalen Mischungskomponenten so kräftig auftreten, daß wir große Partien der Atmosphäre im isentropen Gleichgewichte antreffen. Betrachten wir die Atmosphäre aber als Ganzes, so liegen die Verhältnisse vollständig anders. Denn alle lokalen Bewegungsvorgänge der Atmosphäre werden namentlich in der Höhe überlagert durch gewaltige Strömungen, die man als die allgemeine Zirkulation der Atmosphäre bezeichnet. Die in äquatorealen Gegenden reich mit Energie und Entropie beladenen Luftmassen steigen empor und fließen in der Höhe nach den Polen zu ab, dieselben über die ganze Erdkugel hin verteilend. Diese Strömung ist in ihrer Wirkung so überwiegend, daß alle andern Bewegungsvorgänge nur als lokale Phänomene aufgefaßt werden können. Unter Einfluß dieser allgemeinen Zirkulation nimmt die Atmosphäre, als Ganzes betrachtet, überhaupt keinen Gleichgewichtszustand, sondern einen stationären Bewegungszustand an. Die Temperaturgradienten, die in den tieferen Schichten der Atmosphäre durch lokalisierte Mischungs- und Strömungsprozesse bewirkt werden, machen mit zunehmender Höhe Temperaturgradienten Platz, die durch die allgemeine Zirkulation bedingt sind. Schon in 10—12 Kilometer Höhe können die Verhältnisse so vollständig anders liegen wie in der Tiefe, daß wir an Stelle der Temperaturabnahme mit der Höhe Temperaturzunahme beobachten, bedingt durch den großen Entropiegehalt der äquatorealen Gegenden entstammenden Luftmassen. Diese allgemeine Zirkulation bewirkt, daß schon in diesen Höhen gänzlich andere Polytropen vorhanden sind wie diejenigen, die am Erdboden ansetzen. Welche Polytropen aber zu Höhen von etwa 50 Kilometer und darüber gehören, darüber sind wir gänzlich im Unklaren. Deswegen sind wir auch nicht imstande, die Grenze der Atmosphäre auf irgend welche Weise fest-

zusetzen. Atmosphären im isentropen Gleichgewicht, die in 27,9 Kilometer Höhe endigen würden, treffen wir wohl lokalisiert an; in der Atmosphäre als Ganzes betrachtet stellt sich die Temperaturverteilung in ganz anderem, uns noch unbekanntem Bilde dar. Nur fort schreitende Erfahrung kann der theoretischen Behandlung die zum Einsetzen nötigen Angriffspunkte verschaffen. (Vgl. oben § 10.)

§ 13. Wir haben bis jetzt das Gleichgewicht der Atmosphäre nur vom thermodynamischen Standpunkte aus betrachtet. Es tritt nun die Frage nach dem mechanischen Gleichgewicht derselben an uns heran.

Ein Teilchen der Atmosphäre sei unendlich wenig aus seiner Gleichgewichtslage verschoben, und sein ferneres Verhalten sei zu untersuchen. In dieser Form gestellt läßt die Aufgabe unendlich viele Lösungen zu. Eine eindeutige Lösung erhalten wir nur dann, wenn wir angeben, welchem thermodynamischen Wege das Teilchen auf seinem geometrischen Wege folgt. Wir stellen folgende Aufgabe. Gegeben sei

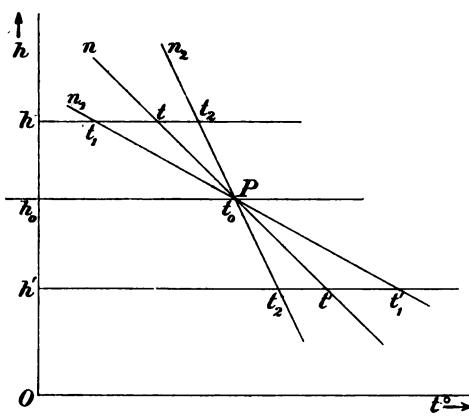


Fig. 21.

eine Atmosphäre im Gleichgewicht nach einer Polytropen von der Klasse n . Es soll das Verhalten eines Teilchens untersucht werden, das unendlich wenig aus seiner Gleichgewichtslage entfernt wird, während es einer polytropen Zustandsänderung von der Klasse n_1 unterworfen wird.

In Fig. 21 sind die Temperatur t und Höhe h als Koordinatenachsen gewählt. Durch einen Punkt P sind drei polytropen Gleichgewichtszustände nach den Klassen n , n_1 und n_2 eingezeichnet. Da $dt = dT$, haben wir nach G. (292)

$$\frac{dt}{dr} = - \frac{g}{(n+1) H}.$$

Die Kurven n , n_1 , n_2 sind deshalb gerade Linien, um so steiler stehend, je größer n . Wir haben also $n_1 < n < n_2$. Die Atmosphäre sei nach der Klasse n gebaut. Bewegen wir das Teilchen P in die Höhe oder Tiefe, wobei es einer Polytropen derselben Klasse folgen soll, so stimmt es in allen Stücken mit dem augenblicklich ver-

drängten Teilchen überein. Losgelassen bleibt es in der neuen Lage liegen. Unter diesen Verhältnissen haben wir indifferentes Gleichgewicht. Das Teilchen P sei weiter gezwungen, der Polytropen n_1 zu folgen. Wir heben es auf diese Weise bis zur Höhe h . Hier steht es unter gleichem Druck wie die umgebenden Luftmassen, seine Temperatur t_1 ist aber niedriger, wie die Temperatur t derselben. In der neuen Lage ist das Teilchen P somit schwerer als das verdrängte Teilchen, welches in die Tiefe gewandert ist, um den leer gewordenen Raum einzunehmen. Bei dieser Hebung hat eine Hebung des gemeinsamen Schwerpunktes der gehobenen und verdrängten Masse stattgefunden. In der neuen Lage losgelassen, werden beide Teilchen wieder ihre frühere Lage einnehmen. Hätten wir P aber auf n_1 bis h' hinabgeführt, so hat es schwerere Massen nach der Höhe verdrängt; es hat wieder eine Hebung des Schwerpunktes stattgefunden; freigegeben kehrt alles in die alte Gleichgewichtslage zurück. In diesem Falle ist das Gleichgewicht stabil. Führen wir drittens P auf n_2 nach h empor, so kommt es unter gleichem Druck, aber wärmer und somit leichter an als das tiefer gewanderte, verdrängte Teilchen. Der gemeinsame Schwerpunkt ist gesunken, er würde bei weiterer Hebung weiter sinken. Frei gegeben würde das Teilchen nicht nach P zurückkehren, sondern mit vermehrtem Auftrieb in die Höhe eilen; ebenso würde es beschleunigt in die Tiefe sinken, wenn wir es auf n_2 nach h' gebracht hätten. Das Gleichgewicht ist labil. Wir haben somit den fundamentalen Satz:

Befindet sich eine Atmosphäre im Gleichgewicht nach der Polytropen n , und folgen ihre Teilchen während einer Ortsveränderung einer Polytropen von der Klasse n_1 , so ist ihr Gleichgewicht indifferent, stabil oder labil, je nachdem n_1 gleich, kleiner, oder größer n ist.

Trockene Luft bei jeder Vertikalbewegung, sowie feuchte Luft bei Abwärtsbewegung, folgen einer Polytropen

$$n = 2,5, \frac{\Delta t}{\Delta r} = 0,98 \frac{0 \text{ Cels.}}{100 \text{ m}}.$$

Befindet sich die Atmosphäre thermodynamisch in isentropem (adiabatischem) Gleichgewicht, so befindet sie sich diesen Änderungen gegenüber mechanisch im indifferenten Gleichgewicht. Man bezeichnet diesen Gleichgewichtszustand auch schlechtweg als indifferenten Gleichgewichtszustand. Derselbe ist indifferent aber nur in bezug auf die angegebenen Verschiebungen. Luft auf ihrem Taupunkt folgt, wie Tabelle 29 zeigt, bei Aufwärtsbewegung stets Polytropen mit $n > 2,5$; diesen Veränderungen gegenüber ist das Gleichgewicht mit

$n = 2,5$ nicht indifferent, sondern labil. Für gewisse Störungen kann das Gleichgewicht stabil und zugleich für andere instabil sein. Steigt vom Boden bei 20° Cels. gesättigte Luft bis 3000 Meter auf, so kommt sie, wie Benutzung der Tabelle 29 zeigt, hier mit einer Temperatur von $5,7^\circ$ an. Nehmen wir an, in der Höhe von 3000 Meter sei bei $5,7^\circ$ die Atmosphäre etwa nach einer Polytropen $n = 3,27$ gebaut, (mit einem Temperaturgefälle von $0,8^\circ$ pro 100 Meter) und befände sich an diesem Orte trockene Luft ($n = 2,5$), so wäre hier das Gleichgewicht stabil; ebenso wenn feuchte Luft auf ihrem Taupunkt nach abwärts verschoben wird. Erhält diese aber eine kleine Verschiebung nach oben, wobei sie $n = 5,7$ folgt, so zeigt eine aufschließende Kumuluswolke das dieser Verschiebung gegenüber labile Gleichgewicht an.

§ 14. Wir nehmen an, in einer Atmosphäre trete eine Verschiebung von Luftmassen ein, der gegenüber sich dieselbe im labilen Gleichgewicht befindet. Mit dem Umsturz eines labilen Gleichgewichtszustandes pflegt man gewöhnlich die Vorstellung großer Geschwindigkeiten zu verbinden. So sucht man die gewaltigen Vertikalgeschwindigkeiten, die in den Wettersäulen, Tornados, Zyklonen, Gewittern und ähnlichen Gebilden beobachtet werden, zu erklären durch die Annahme, daß durch fortwährende Erwärmung vom Erdkörper aus, bewirkt durch Mischung aufsteigender Konvektionsströme, sich Temperaturgradienten ausbilden, bei denen sich die Atmosphäre selbst gegenüber trockener, aufsteigender Luft im labilen Gleichgewichtszustande befindet, bei dessen Auslösung eben jene Vertikalgeschwindigkeiten zu stande kommen. Nun lassen sich aber mechanische Modelle konstruieren, bei denen die Auslösung eines labilen Gleichgewichts nur zu beliebig kleinen Geschwindigkeiten führt. Auch die Umwälzung labiler Zustände in der Atmosphäre braucht deshalb a priori nicht zu großen Geschwindigkeiten zu führen. Wir stellen uns die Aufgabe, diese zu berechnen.*)

Wir entnehmen der Atmosphäre, aufgebaut nach einer Polytropen n_1 , in der Höhe h_0 eine Masse m Gramm und führen diese empor bis zur Höhe h , wobei sie Veränderungen längs einer Polytropen n durchmachen soll. In dieser Höhe ist ihr Volumen mv cent³ geworden. Hat die verdrängte Luft an dieser Stelle die Dichte ϱ_1 gramm cent⁻³, so beträgt deren Masse $\varrho_1 mv = m \frac{v}{v_1}$ gramm. Das Gewicht der em-

*) Th. Reye, Die Wirbelstürme, Wettersäulen und Tornados in der Erdatmosphäre. Anhang 4. Seite 227. 2. Auflage. Berlin 1880.

porgefährten Masse beträgt in der Höhe h somit $mg \left(1 - \frac{v}{v_1}\right)$ Dynen. Rechnen wir die Geschwindigkeit V positiv in Richtung h , so haben wir die Bewegungsgleichung

$$(a) \quad m \frac{dV}{dt} = m V \frac{dV}{dh} = m g \left(\frac{v}{v_1} - 1\right) = m g \left(\frac{T}{T_1} - 1\right),$$

da sich bei gleichen Drucken die spezifischen Volumina wie die absoluten Temperaturen verhalten.

Die Temperaturen können wir mit Hilfe der Gl. (292) durch die Temperatur T_0 in der Höhe h_0 ausdrücken. Wir haben dann

$$(b) \quad T = T_0 - \frac{g}{(n+1)H} (h - h_0); \quad T_1 = T_0 - \frac{g}{(n_1+1)H} (h - h_0).$$

Setzen wir noch zur Abkürzung

$$\frac{g}{(n+1)H} = \lambda, \quad \frac{g}{(n_1+1)H} = \lambda_1,$$

so wird die Bewegungsgleichung

$$(c) \quad V \frac{dV}{dh} = \frac{g(\lambda_1 - \lambda)(h - h_0)}{T_0 - \lambda_1(h - h_0)},$$

und wir erhalten integriert

$$(d) \quad \frac{1}{2} V^2 = g \frac{(\lambda_1 - \lambda)}{\lambda_1^2} [T_0 - \lambda_1(h - h_0) - T_0 \lg(T_0 - \lambda_1(h - h_0))] + \text{konst.}$$

Bestimmen wir die Integrationskonstante so, daß in der Höhe h_0 die Geschwindigkeit V_0 herrscht, so erhalten wir

$$(e) \quad \frac{1}{2} V^2 = \frac{1}{2} V_0^2 + \frac{g(\lambda_1 - \lambda)}{\lambda_1^2} \left[-\lambda_1(h - h_0) - T_0 \lg \left[1 - \frac{\lambda_1(h - h_0)}{T_0} \right] \right].$$

Entwickeln wir den \lg , so ergibt sich

$$(f) \quad V^2 = V_0^2 + g \left[\frac{\lambda_1 - \lambda}{T_0} (h - h_0)^2 + \frac{2}{3} \frac{(\lambda_1 - \lambda) \lambda_1}{T_0^2} (h - h_0)^3 + \frac{2}{4} \frac{(\lambda_1 - \lambda) \lambda_1^2}{T_0^3} (h - h_0)^4 \right]$$

und mit genügender Genauigkeit

$$(303) \quad V^2 = V_0^2 + g \frac{\lambda_1 - \lambda}{T_0} (h - h_0)^2 \text{ cent}^2 \text{ sek}^{-2}.$$

Die Geschwindigkeit wächst in Übereinstimmung mit dem Inhalt des Paragraph 13, wenn $\lambda_1 > \lambda$, $n_1 < n$. Suchen wir an einem Beispiel den Geschwindigkeitszuwachs festzustellen. Wir rechnen in größeren Einheiten, nehmen $g = 9,86 \text{ m sek}^{-2}$ und T_0 zu 300. Die Atmosphäre sei in adiabatischem Gleichgewicht, so daß wir $\lambda_1 = 0,0098^\circ$, rund $0,01^\circ$ pro Meter haben. Als aufsteigenden Strom nehmen wir kondensierende, feuchte Luft an mit einem Temperaturgradienten (vgl. Tabelle 29) von $0,005^\circ/\text{Meter}$.

Setzen wir noch $(h - h_0) = 1000$ Meter, so ergibt sich

$$V^2 = V_0^2 + \frac{9,86 \cdot 0,005}{300} (1000)^2 \text{ m}^2 \text{ sek}^{-2}.$$

Nehmen wir an, die Luftmasse beginnt ihre Aufwärtsbewegung mit sehr kleiner Geschwindigkeit, so erhalten wir

$$V = 12,8 \text{ m sek}^{-1}; \text{ Geschwindigkeitszuwachs pro Kilometer.}$$

Beim Durcheilen einiger Kilometer würden in der Höhe schon gewaltige Geschwindigkeiten auftreten. Allein der Temperaturgradient $\lambda_1 = 0,01$ wird sich selten in größere Höhen erstrecken, andererseits nur unter besonders günstigen Umständen ein Temperaturgradient $\lambda = 0,005$ beim Durcheilen größerer Strecken sich erhalten. (Vgl. Tab. 29). Nehmen wir ein anderes Beispiel. Die Luft sei in den unteren Schichten im labilen Gleichgewicht mit $\lambda_1 = 0,012\%/\text{m}$. Trockene Luft werde zum Aufsteigen veranlaßt so daß $\lambda = 0,01\%/\text{m}$. Dann ergibt sich für 1000 m Höhendifferenz $\Delta V = 8,1 \text{ m sek}^{-1}$. Wie stimmt dies mit den gewaltigen vertikalen Komponenten, die in Wirbelstürmen, Tornados usw. schon in den tiefsten Regionen beobachtet werden?

Ehe wir diese Frage beantworten, berechnen wir noch den Zusammenhang zwischen durcheilter Höhe und dazu nötiger Zeit. Wir erhalten aus (303)

$$(304) \quad t = \frac{1}{\sqrt{g \frac{\lambda_1 - \lambda}{T_0}}} \lg \left[\frac{V + \sqrt{g \frac{\lambda_1 - \lambda}{T_0}} (h - h_0)}{V_0} \right] \text{ sek; } \lambda_1 > \lambda,$$

$$(304a) \quad t = \frac{1}{\sqrt{g \frac{\lambda - \lambda_1}{T_0}}} \arcsin \left(\frac{\sqrt{g \frac{\lambda - \lambda_1}{T_0}} (h - h_0)}{V_0} \right) \text{ sek; } \lambda > \lambda_1,$$

also selbstverständlich ganz verschiedene Ausdrücke, je nachdem $\lambda_1 \geqslant \lambda$, denn Gl. (304a) gibt die periodische Bewegung, die eintritt, wenn bei stabilem Gleichgewicht eine Verschiebung stattfindet. Gl. (304) zeigt, daß, da wir von einem Gleichgewichtszustande ausgegangen, t unendlich wird für $V_0 = 0$. In den beiden oben angeführten Beispielen würden bei einer Anfangsgeschwindigkeit von 1 m sek^{-1} die Luftmassen zum Durcheilen des ersten Kilometers eine Zeit von 253 Sekunden, resp. 343 Sekunden gebrauchen.

Wie kommen, im Gegensatz zu den Ergebnissen dieser beiden Spezialfälle jene großen Vertikalgeschwindigkeiten zu stande, die selbst in den tiefsten Partien der Tornados, Wettersäulen usw. auftreten? Wir stellen eine zweite Frage, für welche sich eine gemeinsame Lösung ergeben wird. Wie erklärt sich die ungeheure Menge mechanischer Arbeit, die in den tropischen Zyklonen auftritt? Reye hat (loc. cit.) nachgewiesen, daß in dem großen Kuba-Orkan vom 5. bis 7. Oktober 1844 während dieser drei Tage $473\frac{1}{2}$ Millionen Pferdestärke aufgewandt wurden, um die einströmenden Luftmassen in Bewegung zu setzen, welche Zahl sich durch andere Rechnungsgrundlagen leicht auf 1184 Millionen steigern läßt. Reye hat versucht, diese Frage zu beantworten (loc. cit. Seite 160), indem er diese kinetische Energie auffaßt als das mechanische Äquivalent der Kondensationswärme der Regenmassen, die in den Zyklonen niederstürzen. Ich kann mich dieser Ansicht nicht anschließen, denn über diese Kondensationswärme ist bereits verfügt worden. Sie leistet einen Teil der Expansionsarbeit der aufsteigenden, sich abkühlenden und erst dadurch kondensierenden, feuchten Luftmassen. So lange die aufsteigende Luft den Kondensationspunkt noch nicht erreicht hat kühlte sie sich ab mit $0,98^{\circ}$ pro 100 Meter; dann aber weit weniger, gemäß den Zahlen der Tabelle 29; in Gleichung (a) des § 11 hatten wir bei Kondensation dQ nicht gleich Null, sondern gleich γdT gesetzt, der Kondensationswärme Rechnung tragend. In diesen vermindernden Temperaturgradienten haben wir das Äquivalent der Kondensationswärme, und zwar vollständig zu sehen, nicht aber in der kinetischen Energie der am Boden strömenden Massen.

Ehe wir die gestellten Fragen beantworten, schalten wir eine Zwischenbetrachtung ein.

§ 15. Betrachten wir die atmosphärischen Zirkulationen mit Rücksicht auf die Natur der Stromlinien, in denen sie sich schließen, sowie auf die Mechanik des Energieumsatzes, so finden wir, daß wir dieselben in zwei Klassen sondern können.

Die Zirkulationen der einen Klasse finden statt jeweils über einem kleinen Bereich der Erdoberfläche; nur ein kleiner Teil der Atmosphäre beteiligt sich am Bewegungsvorgange. Über einen kleinen Teil der Erdoberfläche können wir stets eine Fläche legen, außerhalb welcher keine Stromlinie dieser Zirkulationen verläuft. Ob sich diese Fläche mit der Zeit verschiebt, ist für die Natur des Vorganges von geringer Bedeutung. Stets schließen sich alle Strombahnen innerhalb

dieser Fläche. Wir nennen diese Zirkulationen „*kurz geschlossene Zirkulationen*“ oder bequemer „*kurze Zykel*“.

Bei der andern Klasse läßt sich eine solche Fläche nicht legen, es sei denn um die gesamte Atmosphäre herum. Diese Gebilde sind Erscheinungsformen der allgemeinen atmosphärischen Zirkulation. Ihre Strombahnen schließen sich nicht über begrenzten Gebieten, sondern sie münden ein in das allgemeine Windsystem der Erde und werden durch dasselbe geschlossen. Wir nennen diese Zirkulationen „*lang geschlossene Zirkulationen*“ oder einfacher „*lange Zykel*“.

Bei den kurzen Zykeln beteiligen sich nur Luftmassen, welche innerhalb der erwähnten geschlossenen Flächen vorhanden sind, und kommen nur Energiemengen in Umsatz, die durch Sonnenstrahlung in dem umschlossenen Raume selbst aufgespeichert wurden. In den langen Zykeln werden Luft und Energiemassen nach weit entfernten Teilen der Erdoberfläche hin transportiert.

Gelegenheit zur Bildung kurzer Zykel wird gegeben, wenn bei ruhiger Wetterlage Gebiete der Erdoberfläche kräftig von der Sonne bestrahlt werden. Dabei bilden sich Temperaturgradienten aus, bei denen der Gleichgewichtszustand der Atmosphäre selbst Verschiebung trockener Luft gegenüber labil wird. Bei Auslösung des Bewegungsvorganges vertauschen die Luftmassen der Tiefe und der Höhe ihre Plätze, und der durch Sonnenstrahlung zu hoch gehobene Schwerpunkt der Luftmasse sinkt wieder in die Tiefe zurück. Auf diese Weise entstehen z. B. die sommerlichen Gewitter, die Wettersäulen, Tornados und wahrscheinlich die tropischen Orkane. Dabei braucht nicht durch die ganze in Betracht kommende Höhe der Atmosphäre hindurch ein stetiges Temperaturgefälle zu herrschen, so daß, kurz ausgedrückt, jede Schicht derselben für sich in labilem Gleichgewichte ist. Wesentlich ist, daß sich eine derartige Temperatur- und dadurch DichteVerteilung ausbildet, daß zwei Schichten durch Platzwechsel ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt tiefer legen. Eine isotherme Schicht von beliebiger Mächtigkeit befindet sich in sehr stabilem Gleichgewicht; liegt über derselben aber eine hinreichend mächtige, isotherme Schicht von genügend niedrigerer Temperatur, ebenfalls für sich in stabilem Gleichgewicht, so können beide Schichten gemeinsam eine sehr instabile Atmosphäre bilden. Der Begriff der Instabilität darf nicht, wie es öfters geschieht, zu sehr durch das Bild eines stetigen Temperaturgradienten $\frac{dT}{dr} > 0,01 \text{ \%meter}$ durch endliche Strecken hindurch schematisiert werden. Die instabilen Atmosphären, durch welche die erwähnten kurzen Zykeln

ausgelöst werden, können ebensowohl unter Wirkung der Kälte von oben, wie der Wärme von unten herbeigeführt werden.

Bei diesen kurzen Zykeln ist es nicht nötig, daß der Schwerpunkt längere Zeit hindurch gehoben wird, bis er plötzlich wieder in die Tiefe sinkt. Die Bewegung kann bereits mit Hebung des Schwerpunktes eintreten und so zu großer Hebung desselben verhindern. Auf diese Weise entstehen bei ruhigem Wetter und klarer Atmosphäre die Land- und Seewinde der Küste, die Berg- und Talwinde der Gebirge.

Im Gegensatze zu diesen kurzen Zirkulationen stehen jene Luftbewegungen, welche für die Gebiete niederen und hohen Barometerstandes charakteristisch sind. In langsamen, aber breitem Strome werden über oft sehr großen Gebieten mächtige Luftmassen in die Höhe gehoben oder niedergepreßt, in beiden Fällen der Schwerpunkt langsam, aber stetig gehoben, ohne daß die Sonne, die Energiespenderin aller atmosphärischen Bewegungen, die dazu nötige Energie in den betreffenden Gebieten vorher aufgespeichert hat. Diese Zirkulationen werden mit Luft und Energie aus meistens sehr entfernt liegenden Gebieten gespeist. Am Erdboden führen wohl Strombahnen aus den Hochdruckgebieten nach den Gebieten niedrigeren Druckes. Nach den rückkehrenden Strombahnen in der Höhe hat man lange und sorgfältig gesucht; vergeblich. Denn diese Strombahnen existieren nicht. Diese vertikalen Ströme werden in der Höhe nicht horizontal, kurz geschlossen, sondern sie münden in die allgemeine atmosphärische Zirkulation ein. Wir haben es hier mit lang geschlossenen Zykeln zu tun, die mit Luft und Energie durch das allgemeine Windsystem der Erde gespeist werden. In den äquatorealen Gegenden wird die Luft reich mit Energie und Entropie beladen, sie führt dieselben nach den Polen hin ab und verteilt sie durch Bildung langer Zykeln, durch die Luftbewegung in den Hoch- und Niederdruckgebieten, über die gesamte Erdoberfläche hin. Die namentlich zur Winterszeit besonders häufig auftretenden langen Zykeln wirken segensreich, da sie uns mit frischer Luft aus fernen Gebieten versorgen zu einer Zeit, wo die abgestorbene Pflanzenwelt den Reinigungsprozeß der Luft von Kohlensäure nicht vollziehen kann.

Die langen Zykeln sind für die allgemeine atmosphärische Zirkulation von fundamentaler Bedeutung; ohne sie wäre letztere unmöglich. Die vom Äquator in großer Höhe nach Norden abfließenden Massen kommen der Rotationsachse näher, getrieben von Kräften, die zu derselben nicht windschief gelegen sind. Dem Flächensatze ge-

horchend steigt ihre Rotationsgeschwindigkeit, und bereits in mittleren Breiten müßten gewaltige, nie beobachtete Weststürme von über 130 meter pro sek. Geschwindigkeit herrschen.*). Die Zentrifugalkräfte dieser Luftmassen würde in einem Maße anwachsen, daß die durch ungleiche Erwärmung der Erdoberfläche verursachten Druckunterschiede der Atmosphäre nicht mehr hinreichen würden, sie weiter nordwärts drängend noch mehr der Rotationsachse zu nähern. Die atmosphärische Zirkulation würde zum Stillstande kommen, bis durch Reibung an der Erdoberfläche oder an tiefen, langsamem Luftsichten die Rotationsmomente dieser Luftmassen sich hinreichend verringert hätten, um ein weiteres Ausweichen nach Norden zu ermöglichen. Dazu wären aber (Helmholtz, loc. cit.) Zeiten nötig, die nach Jahrtausenden zählen. Hier tritt die Bedeutung der langen Zykeln zutage. Durch sie werden den zu rasch rotierenden Luftmassen, die gegen die Erdoberfläche relativ ruhenden, mit kleineren Rotationsmomenten behafteten Luftmassen zugeführt. In den langen Zykeln kommt diese Mischung der Rotationsmomente zustande, die allein den stetigen Ablauf der allgemeinen Zirkulation der Atmosphäre ermöglicht. Luftmassen, die sich nach Verlassen des Erdbodens in jeder Beziehung adiabatisch, d. h. vor Mitteilung von Wärme- und Rotationsmomenten frei verhalten haben, hat man nur in den höheren Schichten über dem Äquator zu erwarten; hier werden die größten Rotationsmomente, dieselben wie in der Tiefe, und auch die niedrigen Temperaturen anzutreffen sein, da hier der Temperaturgradient des aufsteigenden, expandierenden Luftstromes am reinsten zur Erscheinung kommt.

Machen wir uns den Unterschied beider Zyklenarten noch an einem Beispiel klar: Die Wärmegewitter, die durch Erwärmung der unteren oder Abkühlung der oberen Schichten zu stande kommen, sind kurz, die die barometrische Depressionen begleitenden Wirbelgewitter lang geschlossene Zykeln.

§ 16. In den kurz geschlossenen, mit eigener Energie getriebenen Zyklen kann die Luftbewegung nur dadurch bewirkt werden, daß bei Umlagerung der gemeinschaftliche Schwerpunkt tiefer sinkt. Die Geschwindigkeiten, die dabei auftreten können, haben wir in Paragraph 14 abgeschätzt und gesehen, daß sie außerordentlich viel kleiner sind, wie die Geschwindigkeiten, die in Wirklichkeit beobachtet

*) v. Helmholtz, Über atmosphärische Zirkulationen. I. Gesammelte Abhandlungen. III. Seite 289.

werden. Um das Zustandekommen der letzteren zu erklären, haben wir auf die hydrodynamischen Bewegungsgleichungen zurückzugreifen.

Wir haben bereits in Kap. XIV § 17 ein Integral derselben aufgestellt. Für eine stationäre Bewegung, nur unter Einfluß von Druckkräften erzeugt, ergab sich

$$(a) \quad \frac{1}{2} V^2 + \int \frac{dp}{\varrho} = \text{konst}; \text{ cent}^2 \text{ sek}^{-2}.$$

Machen die bewegten Teilchen dabei polytrope Änderungen von der Klasse n durch, so ergibt die Ausführung des Integrals eine der drei Formen

$$(305) \quad \frac{1}{2} V^2 + (n+1) HT = \text{konst}.$$

$$(305 \text{ a}) \quad \frac{1}{2} V^2 + (n+1) H \Theta_k \varrho^n = \text{konst}.$$

$$(305 \text{ b}) \quad \frac{1}{2} V^2 + (n+1) (H \Theta_k)^{\frac{n}{n+1}} p^{\frac{1}{n+1}} = \text{konst}.$$

Jede dieser Gleichungen ist ein Seitenstück zur Energiegleichung:

Kinetische Energie + Potentielle Energie = konst.

Je größer V , desto kleiner T , ϱ und p und umgekehrt.

Um die Bewegung eindeutig zu bestimmen, muß noch die Kontinuitätsgleichung erfüllt werden. Bezeichnet q den Querschnitt einer Strömungsrohre, so muß an jeder Stelle derselben sein

$$(306) \quad V \varrho q = \text{konst}.$$

Bei Kombination der beiden Gleichungssysteme sind zwei wichtige Fälle zu unterscheiden.

1. Fall. Wir haben es mit einem Luftstrahl zu tun. In scharf ausgeprägter Diskontinuitätsfläche sind strömende und ruhende Luft geschieden. H. v. Helmholtz*) hat zuerst diese Art von Bewegung untersucht und gezeigt, daß zu beiden Seiten einer solchen Diskontinuitätsfläche gleicher Druck herrschen muß. Solche Luftstrahlen treten uns in den Wasserhosen, den Wettersäulen oder Tromben unter Umständen wie tadellos ausgeführte Modelle entgegen. In scharf begrenztem, langem, dünnem Schloße strömt die Luft nach oben, scharf von der umgebenden, ruhenden Luft geschieden. An jeder Stelle des Schlosses, den wir als einheitliche Strömungsrohre betrachten können, herrscht der Druck der umgebenden ruhenden Luft. (Mit ähnlich scharfer Begrenzung kann der Föhn aus einem Gebirgs-

*) H. v. Helmholtz, Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. Gesammelte Abhandlungen Bl. I. Seite 101.

tale hervorbrechen.) Dadurch ist in Gleichung (305 b), deren Konstante von der Natur der einströmenden Luft abhängt, für jede Stelle p vorgeschrieben, nach oben abnehmend, nach einer barometrischen Höhenformel. An jeder Stelle ist aus (305 b) V berechenbar (im Falle der Tromben z. B. nach oben zunehmend). Durch das vorgeschriftenen p , den Ausgangszustand der Luftmassen und der Polytropen, der sie folgen, ist auch ϱ bestimmt, und nach (306) kann die Veränderung des Querschnittes ermittelt werden. In diesem Falle ist der Druck p die Größe, welche Geschwindigkeit und Querschnittsänderung bedingt.

2. Fall. Der Querschnitt des Luftstroms ist vorgeschriven. Dann können aus (305 a) und (306) V und ϱ berechnet und mit (305 b) oder der Polytropengleichung auch p ermittelt werden. p , V und ϱ sind also in umgekehrter Reihenfolge wie im 1. Falle voneinander abhängig. Dieser Fall tritt ein, wenn Luft durch eine Röhre von stetig variablem Querschnitt fließt, (wenn deren engste Stellen nicht Bildung von Diskontinuitätsflächen veranlassen). Behandeln wir diesen Fall etwas eingehender. An ein genügend großes Luftp reservoir, dessen Inhalt durch p_1, ϱ_1, T_1 ausgezeichnet ist, sei ein Rohr angesetzt, das in die umgebende Atmosphäre mit p_2, ϱ_2, T_2 mündet. Unter der Druckdifferenz $p_1 - p_2$ durchströmt eine berechenbare Luftmenge das Rohr, bei konstantem Querschnitt desselben eine durch $p_1 - p_2$ bestimmte Maximal-Geschwindigkeit V_m annehmend. Ist aber der Querschnitt des Rohres variabel, so ändert sich mit demselben auch die Geschwindigkeit, an jeder Stelle durch Gleichungen (305 a) und (306) berechenbar. Je enger der Querschnitt wird, desto größer wird an dieser Stelle die Geschwindigkeit und kann außerordentlich jene Geschwindigkeit übertreffen, die unter Aufwand der Druckarbeit $p_1 - p_2$ auf die Masseneinheit Luft erzielt wird. Diesen Überschuss an Geschwindigkeit entnimmt das Gas seinem eigenen Energievorrat $c_v T$; mit wachsender Geschwindigkeit nehmen T und infolgedessen auch p und ϱ ab. Je größer V , desto kleiner T, ϱ, p . Die Druckdifferenz $p_1 - p_2$ unterhält wohl den Strömungsvorgang, die auftretenden Geschwindigkeiten aber sind durch die Querschnittsverhältnisse mitbedingt, so daß sehr große Geschwindigkeiten durch beliebig kleine Druckkräfte ausgelöst auftreten können. Das mechanische Äquivalent dieser Geschwindigkeiten wird der eigenen Energie der Luftmassen entnommen, p, ϱ, T sinken und sind Funktionen der durch das Strombild vorgeschriebenen Geschwindigkeiten, nicht umgekehrt.

Den Zusammenhang zwischen V, p, T können wir aus den Gleichungen (305) und (306) leicht berechnen, wenn wir dieselben

anwenden auf eine Strömung, die vom Zustand der Ruhe ausgeht. Gehören zu diesem die Werte $p = 760 \text{ mm}$ und $t = 0^\circ$, so ergeben sich bei isentroper Strömung atmosphärischer Luft ($\gamma = \frac{7}{5}$) folgende zusammengehörige Werte

Tabelle 30.

$p \text{ mm}$	$V \text{ m sek}^{-1}$	$+ {}^\circ \text{Cels.}$
760	0	0
759	14,4	- 0,10
758	20,3	- 0,205
757	24,9	- 0,31
755	32,1	- 0,51
750	45,5	- 1,03
745	55,8	- 1,55
740	64,5	- 2,07
735	72,2	- 2,60
730	79,2	- 3,13
725	85,7	- 3,66
720	91,7	- 4,18
715	97,4	- 4,72
710	103	- 5,26.

(Andere Ausgangswerte für p oder t würden bei gleichen durchschrittenen Intervallen sehr wenig geänderte V -Werte ergeben; auch die Natur der Polytrope ist in dem angeführten Intervall ohne wesentlichen Einfluß auf die V -Werte, nur die Temperaturabnahme würde bis auf Null abnehmen, wenn n bis ∞ zunimmt.) Diese gewaltigen Geschwindigkeiten werden durch außerordentlich kleine Temperaturabnahmen gedeckt, eine Folge des großen mechanischen Äquivalentes der Wärme. In Gleichung (305) können wir mit Rücksicht auf Gleichung (12) das Temperaturlglied in mechanischen Einheiten schreiben $(n+1) HT = \frac{c_p}{c_p - c_v} HT = c_p ET$. Kühlt sich ein Kilogramm Luft um 1° ab, so werden $0,2375 \cdot 427 = 101,4$ Kilogrammeter Energie verfügbar, hinreichend, der Masse $\frac{1}{g}$ eines Kilogramms die Geschwindigkeit von 44,6 m/sec zu erteilen. Wird langsam strömende Luft durch das Strömungsbild gezwungen ihre Geschwindigkeit um 45 m/sec zu steigern, so bestreitet sie diesen Zuwachs von kinetischer Energie aus eigenen Mitteln, indem sie sich

um nur 1° abkühlt; ihr Druck sinkt dabei um 10 mm; geht die Geschwindigkeit wieder zurück, so nehmen mit ihr auch Druck und Temperatur ihre Ausgangswerte wieder an.

§ 17. Wir sind nun in der Lage die oben aufgeworfenen Fragen zu beantworten. Wird in einem kurzen Zykel der labile Gleichgewichtszustand umgeworfen, so wird durch Sinken des gemeinschaftlichen Schwerpunktes wohl der ganze Bewegungsvorgang unterhalten, aber die auftretenden Geschwindigkeiten sind Funktionen des Strömungsvorganges selbst und werden aus eigenen Mitteln bestritten. Dabei findet die Strömung derart statt, daß die Luft gleichsam in einem Schlothe, unter Umständen mit Strahlbildung, nach oben zieht; zum Fuße des Schlotes strömt die Luft aus größerem Umkreise herbei; in dem Maße, wie sie demselben näher kommt, steigert sich nach Gleichungen (306) und (305a) mit dem abnehmenden, zur Verfügung stehenden Querschnitt ihre Geschwindigkeit, und nehmen Druck und Temperatur, letztere langsam, ab. Die Tornados sind ein typisches Beispiel dieses Strömungsbildes; der mit ihnen zugleich eintretende Barometersturz hat die Geschwindigkeiten nicht verursacht, sondern ist durch jene bedingt, eine Folge des Umsatzes innerer Energie in kinetische Energie.

An diese Schlotbildung haben wir noch eine Bemerkung zu knüpfen. Ist der Schlot sehr eng, führt er in große Höhen und wird aus weitem Umkreise gespeist, so kann es in ihm zu Geschwindigkeiten kommen, die eine Abkühlung von einigen Graden bewirken. Die Höhe, in welcher die aufströmenden Luftmassen die Temperatur 0° erreichen, kann beträchtlich tiefer liegen wie diejenige, die sich ergibt, wenn ihrer Berechnung die Temperaturgradienten langsam aufwärts strömender Luft untergelegt werden. Die Heftigkeit der Strömung selbst kann somit die Bildungsstätte des Hagels beträchtlich tiefer legen. Die schmalen, scharfbegrenzten Hagelstriche scheinen diese engen, wohl ausgebildeten Schlote auf dem Erdboden förmlich abzuzeichnen.

Durch solche Schlotbildung kommen auch jene gewaltigen Platzregen zustande, in denen in kurzer Zeit auf kleinem Raume Wassermassen niederfallen, die in Dampfform über weite Flächen verteilt waren.

§ 18. Wir wagen noch den Versuch tiefer in die Energetik der tropischen Zyklonen einzudringen. Eine geringfügige Ursache, das Tiefersinken ihres gemeinsamen Schwerpunktes, falls wir es mit

einem kurzen Zykel zu tun haben, andernfalls den höheren Luftsichten entstandene Hebearbeit setzt auch hier die Luftmassen in anfängliche Bewegung und erhält die Zyklen während ihrer Lebensdauer. Die gewaltigen Sturmgeschwindigkeiten und starken Barometerstürze aber sind Folge des Strömungsbildes, das sich einstellt. Die kinetische Energie an einer Stelle des Sturmfeldes ist der Energie derjenigen Luftmasse entnommen, die augenblicklich an jener Stelle strömt. Um Geschwindigkeiten von 100 Meter per Sekunde, begleitet von einem Barometersturze von 50 mm , erlangen zu können, braucht trockene Luft ihre Temperatur nur um $5\frac{1}{4}^{\circ}$ zu erniedrigen. Bei kondensierender Luft kann (Tabelle 29) die Temperaturerniedrigung bis etwa $2\frac{1}{2}$ mal kleiner sein. Würde eine unsichtbare Macht den gewaltigsten, tropischen Zyklen Halt gebieten, so hätten wir rasch ein Druck- und Temperaturfeld vor uns so ausgeebnet, als es die allgemeine Wetterlage erlaubt.

Die Zyklen unterscheiden sich von den Tornados durch den Umstand, daß der Zufluß zu ihren zentralen Partien aus so großen Entfernungen stattfindet, daß die sogenannte ablenkende Kraft der Erdrotation sich in hohem Maße geltend macht. Die zuströmenden Luftmassen rotieren infolge derselben um die zentrale Achse schließlich derart, daß die radiale Komponente der Bewegung klein ist gegen die tangentiale. Wir nehmen in Annäherung an, daß wir es mit einer reinen Drehbewegung zu tun haben. Nun nennt der Meteorologe jede sich drehende Luftmasse einen Wirbel. Dabei befindet er sich aber in vollkommenem Gegensatz zu den feststehenden Bezeichnungen der Hydrodynamik. Die theoretische Physik unterscheidet strenge zwischen Bewegungen mit und ohne Geschwindigkeitspotential. Jede Bewegung mit Geschwindigkeitspotential nennt sie wirbelfrei. Ein Wirbel existiert nur und stets dann an jenen Stellen des Feldes, an denen kein Potential existiert. Selbst Drehung um *endliche* Beträge hindurch braucht keine Wirbelbewegung zu sein. Es gibt Strömungen, bei denen an jeder Stelle des Feldes ein Wirbel vorhanden ist, und die Strombahnen trotzdem sämtlich parallele, gerade Linien sind; andererseits gibt es Rotationsbewegungen, bei denen sich alles um eine gemeinschaftliche Achse dreht, und an keiner Stelle des Feldes ein Wirbel vorhanden ist, mit Ausnahme im Zentrum. Ein atmosphärischer Wirbel im Sinne der Meteorologie braucht im Sinne der Hydrodynamik durchaus noch kein Wirbel zu sein. Sind in letzterem Sinne die Zyklen Bewegungen mit Wirbel oder mit Geschwindig-

keitspotential? Wir werden gleich sehen, wie man dies durch Beobachtung entscheiden könnte. Mangels derselben könnte man etwa folgende Überlegungen anstellen. Die Hydrodynamik lehrt, daß in einer reibungslosen Flüssigkeit jede durch stetig wirkende Druckkräfte erzeugte, stetige Bewegung eine Potentialbewegung sein muß. Nimmt man eine solche Entstehungsart der Zyklone an und abstrahiert von Luftriebung, so kann dieselbe keine Wirbelbewegung sein. Die Hydrodynamik zeigt ferner, daß ein Wirbel, der seinen Ort ändert, immer aus denselben Teilchen aufgebaut ist.*.) Eine wandernde Zyklone als wandernden Wirbel aufzufassen ist schwer vereinbar mit dem Umstande, daß sie sich nicht in kurzer Zeit ausgeregnet hat. Als Potentialbewegung aufgefaßt aber ist dieselbe eine Erscheinungsform, an der sich wie an einer fortschreitenden Welle immer neue Teilchen beteiligen. Wir wollen deshalb die Zyklone als Potentialbewegung auffassen, was aber von den weitgehendsten Konsequenzen sein wird. Denn es gibt nur eine einzige Geschwindigkeitsverteilung, bei der die Teilchen unter Existenz eines Geschwindigkeitspotentials sich in konzentrischen Kreisen um eine Achse bewegen. Die Geschwindigkeit nimmt ab proportional dem Abstande von der Drehachse; V_r bleibt im Gebiete dieser Drehbewegung konstant. Nimmt man in Annäherung an, daß die Teilchen in einer Zyklone Kreise beschreiben, so würde demnach die Kenntnis der Geschwindigkeitsverteilung hinreichen zum Entscheid der Frage, ob wir es mit einer Wirbel- oder Potentialbewegung zu tun haben. Wir nehmen den zweiten Fall an; das Geschwindigkeitspotential lautet $C \operatorname{arctg} \varphi$, φ der Winkel des Radius vector gegen eine fixe Richtung.

In einer rotierenden Masse kann in nächster Nähe der Drehachse kein Geschwindigkeitspotential existieren; denn die Relation $V \cdot r = c$, $c = \text{konst.}$, würde hier zu unendlich großen Geschwindigkeiten führen. Um die Drehachse herum ist stets ein zylindrischer Raum auszusparen; die Flüssigkeit in demselben kann wirbelnde Drehung vollziehen, die unter Umständen stetig in die wirbelfreie Bewegung übergeht, oder sie kann auch ruhen und sich in eine Diskontinuitätsfläche von den rotierenden äußeren Partien absondern. In den Zyklonen ist meistens der zweite

*.) Die Helmholtzschen Sätze über Wirbelbewegungen sind bis jetzt nur für inkompressible Flüssigkeiten abgeleitet worden. Allein wie in Kap. III gezeigt nehmen für Gase, die polytrope Zustandsänderungen durchmachen, die hydrodynamischen Gleichungen dieselbe Form an wie für inkompressible Flüssigkeiten, so lange die auftretenden Geschwindigkeiten klein sind gegen die Schallgeschwindigkeit; in diesem Falle gelten somit auch die Helmholtzschen Sätze

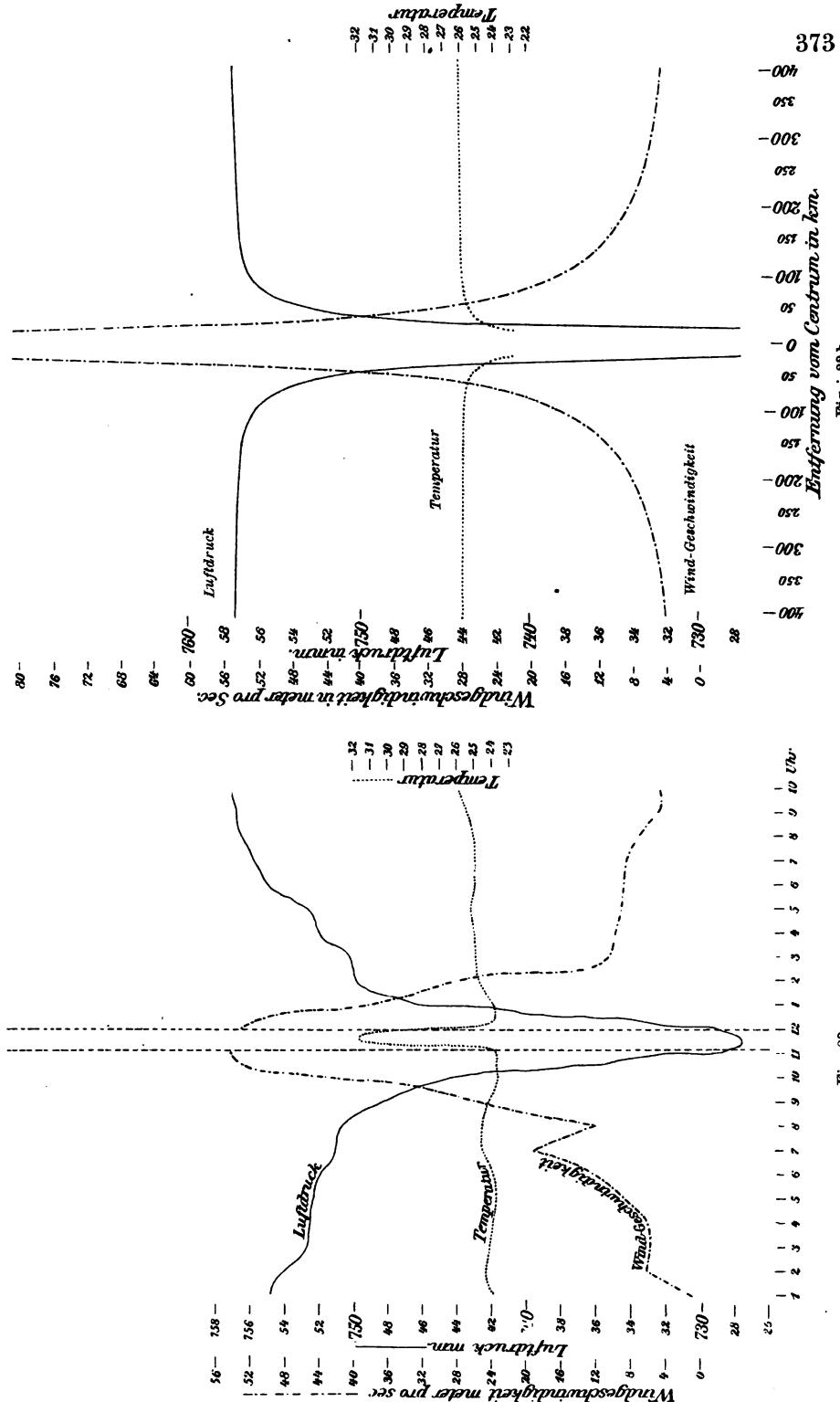


Fig. 22a.

Fig. 22b.

Fall realisiert, in ihrer Kalmenzone haben wir diesen Zylinder gleichsam im Modell vor uns. Zu beiden Seiten einer Diskontinuitätsfläche muß gleicher Druck herrschen; so kann sich in der Kalmenzone der niedere Druck der umgebenden rotierenden Massen und ein abwärts gerichtetes Druckgefälle ausbilden, das absteigende Luftbewegung veranlaßt, welche die Wolkendecke öffnet und föhnartige Zunahme der Temperatur und Abnahme der relativen Feuchtigkeit bewirken kann.

Nun ist es merkwürdig, daß unter diesen Annahmen die Kenntnis der Geschwindigkeit an einer einzigen, beliebigen Stelle der Zyklone hinreicht, dieselbe vollständig zu konstruieren. Denn die Beziehung $V \cdot r = c$, welche Konstante man die Zyklonenkonstante nennen kann, da sie den Bau desselben vollständig enthält, läßt dann V an jeder Stelle berechnen. Zu V aber läßt sich aus Tabelle 30 die Druck- und Temperaturerniedrigung bei Vorüberzug der Zyklone entnehmen.

Behandeln wir nach diesen Gesichtspunkten die Zyklone, die am 20. Oktober 1882 mit ihrem Zentrum nahe bei Manila vorbeizog, den wohl am sorgfältigsten beobachteten Orkan*). Im Zentrum war das Barometer um etwa 29—30 mm gefallen; dazu gehört nach Tabelle 30 eine Windgeschwindigkeit von 80 Meter/sec. Vor Eintritt dieses tiefsten Barometerstandes wurde das Anemometer in Manila zerstört, als es 54 Meter/sec anzeigte. Wir haben vor allem den Wert der Zyklonenkonstanten c festzusetzen. Die ersten Anzeichen des Sturmes zeigten sich etwa 24 Stunden vor Eintreffen des Zentrums in Manila. Da die Zyklone sich mit einer Geschwindigkeit von etwa 19 Seemeilen, = 35 Kilometer pro Stunde bewegte, ergibt sich ihr Radius zu etwa 800 Kilometer. Setzen wir $c = V \cdot r = 1600$, V in Sekundenmeter, r in Kilometer gemessen, so ergibt sich für ihren Rand $V = 2$ m/sec, während die beobachteten Werte zwischen 0 und 6 schwanken; $V = 80$ m/sec ergibt sich für $r = 20$ Kilometer. Dieser Radius der zentralen Kalmenzone stimmt ebenfalls der Größenordnung nach; denn in Subic, das beinahe zentral gelegen, dauerte die Windstille etwa eine Stunde. Wir können also für jeden Abstand r die Windstärke V und mit Hilfe der Tabelle 30 Temperatur und Barometerstand, als Ausgangspunkt desselben den tiefsten, beobachteten Stand in Manila, 727,6 mm während berechnen.

In Fig. 22a sind die in Manila während des Vorüberzugs der

*) P. Bergholz. Die Orkane des fernen Ostens. Seite 228ff. Bremen 1900. J. Hann. Lehrbuch der Meteorologie. 1. Aufl. Seite 359 Leipzig 1901.

Zyklone beobachteten Werte von Luftdruck, Windgeschwindigkeit und Temperatur zur Darstellung gebracht als Funktion der Zeit. Die Vertikalen bei 11 Uhr und 12 Uhr begrenzen etwa die zentrale Kalmenzone des Sturmes. (In derselben kommt die oben erwähnte, föhnartige Erwärmung deutlich zum Ausdruck). In Fig. 22b sind die berechneten Elemente dargestellt, als Funktion des Abstandes vom Zentrum. Die Abszissen der Fig. a und b sind so gewählt, daß beide Figuren direkt vergleichbar sind. Das beobachtete und berechnete Bild der Zyklone stimmen mit einer Genauigkeit überein, die größer nicht verlangt werden kann. Reibung an der Erdoberfläche kann die Windgeschwindigkeit, die in mäßiger Höhe vorhanden ist, beträchtlich vermindert haben. Auch ist bei Berechnung der Temperaturniedrigung trockene Luft angenommen und deshalb die größtmögliche Temperaturniedrigung erhalten worden. Den wirklich stattfindenden Verhältnissen wird durch kondensierende, feuchte Luft besser Rechnung getragen; der Temperaturfall kann dann leicht auf die Hälfte herabgedrückt werden.

Wiederholen wir nochmals den Gedankengang. Die tropische Zyklone ist wahrscheinlich ein kurz geschlossener Zykel. Sie wird dann ausgelöst und fortdauernd getrieben durch die Senkung des gemeinschaftlichen Schwerpunktes der Luftmassen, die bei der Fortbewegung immer neu zur Mischung gelangen. Deren mechanisches Äquivalent beträgt nur wenige Sekundenmeter Geschwindigkeit. Auch bei ihrer Auffassung als lange Zykeln würde die Hebearbeit der oberen Luftsichten nur geringe Geschwindigkeiten veranlassen. Die gewaltigen Sturmgeschwindigkeiten sind bedingt durch das der Zyklone eigentümliche Strömungsbild; sie werden durch Abnahme der inneren Energie ($\epsilon = c_v T$) der strömenden Massen geliefert, sie verursachen dadurch die starken Druckniedrigungen (und kleinen Temperaturabnahmen), statt ihrerseits durch diese bedingt zu sein.

§ 19. Wir behandeln noch die Energetik der Atmosphäre, diese als Ganzes betrachtet, im Ruhezustand gleichförmig um die Erde verteilt. Wir sehen ab von der Erweiterung der Schichten nach oben und nehmen die Hauptmasse der Atmosphäre in so tiefen Schichten konzentriert an, daß wir g in Annäherung als konstant betrachten können. Der Energieinhalt der Atmosphäre besteht aus zwei Teilen, aus der inneren Energie der Gasmassen, pro Gramm gleich $\epsilon = Ec_v T$ Erg, und aus der mechanischen, potentiellen Energie, daher röhrend, daß sich die Gasmassen im Schwerefeld der Erde befinden; sie be-

trage pro Gramm ψ Erg. Wir berechnen beide Größen für die in einem Zylinder vom Querschnitt 1 cent², der sich senkrecht von der Erdoberfläche bis zur Grenze \mathfrak{H} der Atmosphäre erstreckt, enthaltenen Luftmassen. Wir finden

$$(307) \quad (\varepsilon) = E \cdot c_v \int_0^{\mathfrak{H}} T dm = Ec_v \int_0^{\mathfrak{H}} T \varrho dh = \frac{c_v}{HA} \int_0^{\mathfrak{H}} pdh = \\ = \frac{1}{\kappa - 1} \int_0^{\mathfrak{H}} pdh \text{ Erg cent}^{-2}$$

$$(308) \quad (\psi) = \int_0^{\mathfrak{H}} gh dm = \int_0^{\mathfrak{H}} g \varrho h dh = - \int_0^{\mathfrak{H}} h dp = - [ph]_0^{\mathfrak{H}} + \int_0^{\mathfrak{H}} p dh = \\ = \int_0^{\mathfrak{H}} p dh \text{ Erg cent}^{-2}.$$

$$(309) \quad (E) = (\psi) + (\varepsilon) = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \int_0^{\mathfrak{H}} phh \text{ Erg cent}^{-2}$$

und daraus weiter

$$(310) \quad \frac{(\varepsilon)}{(E)} = \frac{1}{\kappa}; \quad \frac{(\psi)}{(E)} = \frac{\kappa - 1}{\kappa}; \quad \frac{(\psi)}{(\varepsilon)} = \kappa - 1.$$

Daraus ergibt sich der merkwürdige Satz:

Befindet sich eine Atmosphäre in einem beliebigen Gleichgewichtszustande, so ist ihr Energieinhalt stets in demselben, nur von dem Verhältnis der Wärmekapazitäten abhängigen Verhältnisse in potentielle und innere Energie geteilt.

Befindet sich die Erdatmosphäre ($\kappa = \frac{7}{5}$) in einem beliebigen Gleichgewichtszustande, so besteht ihr Energiegehalt zu $\frac{5}{7}$ aus innerer und zu $\frac{2}{7}$ aus potentieller Energie.

Wird einer Atmosphäre Energie in Form von Wärme mitgeteilt, so ist $\Delta Q = \Delta(E)$ und somit auch nach

$$(311) \quad \frac{\Delta(\varepsilon)}{\Delta Q} = \frac{1}{\kappa}, \quad \frac{\Delta(\psi)}{\Delta Q} = \frac{\kappa - 1}{\kappa}.$$

Daraus folgt:

Wird die Erdatmosphäre durch Wärmezufuhr in einen beliebigen anderen Gleichgewichtszustand übergeführt, so werden $\frac{2}{7}$ derselben zur

Vermehrung der potentiellen Energie (Umlagerung der Schichten) und $\frac{5}{7}$ zur Vermehrung der inneren Energie (Temperatursteigerung) verwandt.

§ 20. Das Integral $\int_0^{\mathfrak{H}} p dh$ lässt sich für eine polytrope Atmosphäre leicht berechnen. Da wir haben $T = u \Theta_k$, $p = u^{n+1} H \Theta_k$, $du = \frac{g dr}{(n+1) H \Theta_k}$, so ergibt sich durch leichte Umformung und Benutzung von Gl. (295)

$$(312) \quad \int_0^{\mathfrak{H}} p dh = \frac{n+1}{n+2} p_0 \mathfrak{H} = \frac{1}{n+2} p_0 \mathfrak{H}_n \text{ Erg cent}^{-2},$$

wo \mathfrak{H} die Höhe der homogenen, \mathfrak{H}_n die Höhe der polytropen Atmosphäre der Klasse n bedeutet, p_0 den Druck der untersten Schicht.

Daraus ergibt sich weiter

$$(313) \quad (E) = \frac{n}{n+1} \frac{n+1}{n+2} p_0 \mathfrak{H} = \frac{1}{n+1} \frac{1}{n+2} p_0 \mathfrak{H}_n \text{ Erg cent}^{-2}$$

$$(313a) \quad (\varepsilon) = \frac{1}{n+1} \frac{n+1}{n+2} p_0 \mathfrak{H} = \frac{1}{n+1} \frac{1}{n+2} p_0 \mathfrak{H}_n \text{ Erg cent}^{-2}$$

$$(313b) \quad (\psi) = \frac{n+1}{n+2} p_0 \mathfrak{H} = \frac{1}{n+2} p_0 \mathfrak{H}_n \text{ Erg cent}^{-2}.$$

Es gibt unendlich viele polytrophe Atmosphären, welche gleiche innere Energie und gleiche potentielle Energie besitzen. Bei gleichem Bodendruck sind ihre Grundflächen so temperiert, daß $\frac{n+1}{n+2}$ mal Höhe der homogenen Atmosphäre konstant bleibt und ihre Bodentemperaturen bestimmt sind durch die Beziehung $\frac{n+1}{n+2} \cdot T = \text{konst.}$ Eine Atmosphäre $n = 125$, eine adiabatische Atmosphäre und eine homogene Atmosphäre repräsentieren durch ihre Lagerung zur Erde gleiche Mengen potentieller Energie, wenn ihre Bodentemperaturen bei gleichen Barometerabständen $T = 300, 383$ und 596 betragen.

Die ermittelten Beziehungen gelten noch für $n = \infty$, wie die direkte Berechnung von $p_0 \int_0^{\infty} e^{-\frac{h}{\mathfrak{H}}} dh$ zeigt.

Wir können nun leicht die Höhe S des Schwerpunktes einer polytropen Atmosphäre über der Erdoberfläche bestimmen. Beträgt deren Masse pro cent² (M) = $\rho_0 \mathfrak{H}$ gramm, und vereinigen wir die-

selbe im Schwerpunkt, so behält die potentielle Energie ihren Wert bei, und wir erhalten

$$g \cdot (M) \cdot S = \frac{n+1}{n+2} p_0 \mathfrak{H}$$

und durch leichte Umformung

$$(314) \quad S = \frac{n+1}{n+2} \mathfrak{H} = \frac{1}{n+2} \mathfrak{H}_n \text{ cent.}$$

Der Schwerpunkt einer polytropen Luftsäule steigt bei gleicher Bodentemperatur mit n ; bei gleichem n und Steigerung der Bodentemperatur wächst dessen Höhe wie ein lineares Gebilde vom Ausdehnungskoeffizienten $\alpha = \frac{1}{273}$. Alle Atmosphären von gleichem Energiegehalt besitzen dieselbe Schwerpunktshöhe. In einer polytropen Atmosphäre von der Bodentemperatur 0° Cels. kann der Schwerpunkt nicht tiefer wie 4000 Meter und nichthöher wie 8000 Meter liegen.

Ist die Schwerpunktshöhe S bekannt, so können leicht potentielle und innere Energie berechnet werden. Sie betragen pro Quadratmeter Erdoberfläche in den Fällen

$n = 0$	3,5	125	∞
$S = 4000$	6220	7920	8000 Meter
$(\psi) = 4,05 \cdot 10^{15}$	$6,31^{15}$	$8,02 \cdot 10^{15}$	$8,10 \cdot 10^{15}$ Erg
$(\psi) = 9,67 \cdot 10^7$	$1,55 \cdot 10^8$	$1,91 \cdot 10^8$	$1,93 \cdot 10^8$ Grammkalorien
$(\epsilon) = 2,42 \cdot 10^8$	$3,87 \cdot 10^8$	$4,78 \cdot 10^8$	$4,84 \cdot 10^8$ Grammkalorien
$(E) = 3,39 \cdot 10^8$	$5,42 \cdot 10^8$	$6,70 \cdot 10^8$	$6,77 \cdot 10^8$ Grammkalorien.

Der Energiegehalt der ganzen Erdatmosphäre, stets frei von Kondensationsprodukten, beträgt somit

$$1,73 \cdot 10^{23} \quad 2,76 \cdot 10^{23} \quad 3,41 \cdot 10^{23} \quad 3,46 \cdot 10^{23} \text{ Grammkalorien};$$

die Integrationskonstante ist so bestimmt, daß der Energiegehalt (E) mit der Höhe der homogenen Atmosphäre verschwindet.

Die jährlich von der Sonne auf die Erde gesandte Energiemenge beträgt (unter Voraussetzung einer Solarkonstanten 4) $2,683 \cdot 10^{24}$ Grammkalorien, ist also etwa 10 mal größer.

Die Formeln der letzten Paragraphen sind im wesentlichen von Ritter*) abgeleitet, allein wenig durchsichtig und unter zum Teil

*) A. Ritter, Untersuchungen über die Höhe der Atmosphäre und die Konstitution gasförmiger Weltkörper. Wied. Annal. VII. 304. 1879. und VIII. 157. 1879.

unrichtigen Voraussetzungen. Anwendung auf meteorologische Probleme haben sie bis jetzt noch nicht gefunden.

§ 21. Es würde nun scheinbar nahe liegen, auch den Zustand im Innern der Erde vom Standpunkte der polytropen Zustandsänderung aus zu untersuchen. Wir verzichten hier darauf. Denn einmal würden wir uns auf einem Gebiete bewegen, auf dem wir gänzlich außerstande sind die Ergebnisse der Rechnung durch irgend welche Tatsachen der Beobachtung zu verifizieren; anderseits würden wir zu Dichten gelangen, in denen die Zustandsgleichung der vollkommenen Gase sicherlich nicht mehr anwendbar ist. Mit der Aufstellung der Werte von Druck, Dichte und Temperatur im Mittelpunkte, welche für die vollkommenen Gaskugeln bequeme Hilfsgrößen sind, um die Verhältnisse in den äußersten Schichten derselben bequem darstellen zu können, ist hier nicht gedient, da wir ja wirkliche Zustände kennen wollen. Auch zeigt die große Starrheit der Erde gegenüber scherenden Kräften, daß wir im Erdinnern Massen vor uns haben, die mit Gasen selbst unter hohem Drucke sehr wenig Ähnlichkeit besitzen. Wir sind nicht einmal in der Lage zu entscheiden, ob Temperaturgradienten, wie wir sie in den äußersten Schichten der Erde vorfinden, sich bis zum Mittelpunkt der Erde fortsetzen, oder ob wir die Hauptmasse der Erde als isothermes Gebilde zu behandeln haben. Nur in einer Wärme ausstrahlenden, und infolgedessen in radialer Richtung von Konvektionsströmen durchsetzten Kugel wird die ausgleichende Wirkung der Wärmeleitung zurückgehalten, und stellt sich ein Temperaturgradient längs des Radius ein bestimmt durch die Polytropie, welcher die auf- und absteigenden Massen folgen. Je schwächer das System der Konvektionsströme ausgebildet ist, desto mehr macht sich die Wärmeleitung geltend. Nun ist (vgl. unten) die Wärmeabgabe durch die Erdkruste hindurch so gering, daß in einiger Tiefe Konvektionsströme nur im bescheidensten Maße auftreten können, genügt doch in den äußersten Schichten ein Temperaturgradient von 1° auf 30 Meter diesen Wärmestrom durch Leitung zu befördern; in größeren Tiefen werden die Konvektionströme gänzlich fehlen, so daß wir hier ausschließlich mit Wärmeleitung zu rechnen haben. Würden wir das Wärmeleitungsvermögen der Massen im Erdinnern kennen, so könnten wir ähnlich schließen wie in Kap. XIV, § 12. Nehmen wir zwei isotherme Schichten von je 1000 Kilometer Dicke, also $\frac{1}{6}$ Erdradius an, geben denselben eine bestimmte Temperaturdifferenz und ein Wärmeleitungsvermögen von $0,17 \text{ cent}^2 \text{ sek}^{-1}$, gleich

denjenigen atmosphärischer Luft unter gewöhnlichen Verhältnissen, so wären etwa $7 \cdot 10^{11}$ Jahre erforderlich, um die Temperaturdifferenzen durch die Schicht von $\frac{1}{3}$ Erdradius hindurch bis auf 10% zum Verschwinden zu bringen. Allein das Wärmeleitungsvermögen der Massen im Erdinnern ist uns vollständig unbekannt. Wir können so immerhin Zeiten erhalten, wie sie für die Entwicklungsgeschichte der Erde in Betracht kommen. Selbst wenn die Erde ehemals Gaskugel mit starken Temperaturgradienten bis zum Mittelpunkt gewesen sein sollte, so würde die Bildung der festen Erdkruste, das System der Konvektionsströme verhindernd, der Wärmeleitung möglicherweise Zeit gegeben haben, den größten Teil des Erdinnern in eine angenähert isotherme Masse umzuwandeln. Gemäß diesen Überlegungen würde für den Bau des Erdinnern die Polytrope $n = \infty$, die Isotherme, in erster Linie in Betracht kommen. Allein die Schwierigkeiten, die wir angetroffen haben, auf den Zustand in den hohen Schichten der Atmosphäre zu schließen, treten in ungleich höherem Maße auf bei Behandlung der Erdmasse in der Tiefe. Dort war wenigstens die Zustandsgleichung des aufgebauten Materials bekannt, hier fehlt selbst diese vollständig; der Frage nach dem Zustand in den innern Partien des Erdballs stehen wir bei Beschränkung auf thermodynamische Behandlungsweise vollkommen hilflos gegenüber. Auf welche Schwierigkeiten man stößt, wenn man die Zustandsgleichung der zu behandelnden Masse nicht kennt, mögen die nachfolgenden Betrachtungen zeigen.

Wir nehmen die Dichte des Eisens = 7,7 gramm cent⁻³, seine Wärmekapazität $c = 0,114$ Grammkalorien pro Gramm und seinen Ausdehnungskoeffizient zu $0,000012 = 1,2 \cdot 10^{-5}$ an. Entziehen wir im Laboratorium einer Eisenkugel von konstanter Temperatur 0,114 Grammkalorien pro Gramm, so kühlte sich dieselbe um 1° ab, und ihr Radius verkürzt sich um $1,2 \cdot 10^{-5}$ seiner Länge. Im Gegensatze dazu nehmen wir die Eisenkugel von der Größe der Erde; ihre Masse beträgt dann $8,34 \cdot 10^{27}$ Gramm. Gibt diese, etwa durch Ausstrahlung, $9,51 \cdot 10^{26}$ Grammkalorien ab, so würden wir nach den gewöhnlichen Regeln der Kalorimetrie schließen, daß sie sich ebenfalls um 1° abkühlt und ihr Radius sich um $1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 6,37 \cdot 10^8 = 7,64 \cdot 10^3$ cent verkürzt. Allein bei der Größe dieser Kugel darf bei der Kontraktion diejenige Arbeitsgröße nicht mehr vernachlässigt werden, die aus der erfolgten gegenseitigen Annäherung der sich nach dem Gravitationsgesetze anziehenden Teilchen resultiert. Das Potential der Kugel auf sich selbst beträgt $\mathcal{Q} = -\frac{3}{5} \frac{G M^2}{R}$ Erg (konstante

Dichte vorausgesetzt; Dichtezunahme nach innen würde dasselbe noch kleiner ergeben). Nimmt der Radius um ΔR zu, so ist die geleistete Arbeit $\Delta W = -\Delta Q = -\frac{3}{5} \frac{G M^2}{R} \cdot \frac{\Delta R}{R}$ Erg. Nehmen wir nun $-\frac{\Delta R}{R} = 1,2 \cdot 10^{-5}$, so ergibt sich $\Delta W = 12,5 \cdot 10^{26}$ Grammkalorien, also das 1,3-fache der abgegebenen Wärmemenge. Für die Sonne aus Eisen ergibt sich dies Verhältnis zu 15700. (Bezeichnet c die Wärmekapazität, β den Ausdehnungskoeffizienten, E das mechanische Äquivalent der Kalorie, so ergibt sich dies Verhältnis für eine Kugel vom Radius R und der Masse M zu $\frac{3}{5} \frac{G M \beta}{c R E}$.) Was wird aus diesen Wärmemengen, welche die Wärmemengen, von denen wir ausgegangen, in einem mit dem Radius der Kugel quadratisch wachsenden Verhältnis übertreffen? Ohne Kenntnis der Zustandsgleichung des Eisens können wir darauf keinerlei Auskunft geben. Bei den Gasen wissen wir, daß diese Wärme die ausgestrahlte Wärme deckt und der Rest verwandt wird zur Temperatursteigerung jeder Schicht, die notwendig ist, damit der durch Annäherung an das gemeinschaftliche Attraktionszentrum größer gewordenen Druck der äußeren Schichten aquilibriert werden kann. Bei der Eisenkugel versagt diese Schlußweise. Ja, wir sind nicht einmal imstande, die Frage zu entscheiden, ob eine genügend große Eisenkugel durch Wärmeabgabe heißer oder kälter wird. Aus demselben Grunde sind wir auch vollständig im Unklaren über die Konsequenzen der Wärmeausstrahlung der Erdkugel. Man hat wiederholt Schlüsse auf das Alter der Erdkugel zu ziehen versucht, indem man die bei kleinen Massen gültigen Gesetze der Kalorimetrie und Wärmeleitung anwandte und von der Kontraktionsarbeit absah. Alle die gezogenen, sich überdies sehr widersprechenden Schlüsse sind vollständig illusorisch. Unsere Kenntnisse vom Zustande der Erdmasse gestatten uns nicht einmal die Frage zu entscheiden, ob die Wärme ausstrahlende Erdkugel im Laufe der Zeit heißer oder kälter wird.

Welche Arbeitsbeträge durch Kontraktion der Erdkugel verfügbar werden, möge an zwei Beispielen dargetan werden.

Nach allgemeiner Annahme hat der Erdball ursprünglich viel geringere Dichte besessen. Dieser Ball soll nun durch Wärmeausstrahlung sein Volumen verringert haben. Berechnen wir die Arbeit, welche die Gravitationskräfte leisteten, während sie den Erdball von der Dichte $3,5 \text{ gramm cent}^{-3}$, die wir bei vielen Meteoriten antreffen, bis zur jetzigen Dichte $5,6$ kontrahierten, so ergeben sich $3,26 \cdot 10^{38}$

$Erg = 7,78 \cdot 10^{30}$ Grammkalorien, also eine Wärmemenge, wie sie die Erde in 3 Millionen Jahren von der Sonne zugestrahlt erhält. Wie sind dieselben verwandt worden? Rechnen wir mit einer konstanten Wärmekapazität der Erdmasse von 0,2 Kalorien, so hätten sie hingereicht, die mittlere Temperatur des Erdballs um 6500° zu erhöhen.

Aus den tieferen Partien der Erde fließt ein Wärmestrom nach der Erdoberfläche, dessen Intensität aus der geothermischen Tiefenstufe abgeschätzt werden kann. Nach Hann*) gelangen im Laufe eines Jahres an jedes Quadratzentimeter Erdoberfläche 54,2 Grammkalorien; das macht für die ganze Erdoberfläche $2,77 \cdot 10^{30}$ Grammkalorien. Berechnet man nun den Betrag, um den der Erdradius sich verkürzen muß, wenn die Kontraktionsarbeit den Wärmeverlust des Erdinnern gerade kompensieren soll, so erhält man eine Strecke von 0,033 Millimeter.**))

Achtzehntes Kapitel.

Die Sonne.

A. Die ruhende Sonne.

Wir versuchen die Sonne zu rekonstruieren als Gaskugel, aufgebaut nach einer Polytropen, deren Klasse wir zweckentsprechend bestimmen müssen. Wir beabsichtigen nicht dadurch eine vollständige Theorie der Sonne zu geben; ein einziges Erklärungsprinzip kann dazu unmöglich ausreichen. Es soll lediglich die Vorstellung der Sonne als polytrope Gaskugel in ihren Konsequenzen entwickelt werden. Wir werden diese Untersuchungen jeweils abbrechen, wenn wir in Widerspruch geraten mit feststehenden Resultaten der Beobachtung, nicht aber, wenn wir in Gegensatz stehen mit mehr oder minder weit verbreiteten Ansichten.

Wir haben als Rechnungsunterlage drei durch Beobachtung ermittelte Größen.

§ 1. Die Mechanik lehrt, daß wir im Sonnenmittelpunkt ein Attraktionszentrum gleich $3,24439 \cdot 10^5$ Erdmassen, nach den Festsetzungen Seite 95/96 gleich $1,94302 \cdot 10^{33}$ Gramm anzunehmen haben.

*) J. Hann, Lehrbuch der Meteorologie. 1. Auflage. Seite 23. 1901.

**) Eine Verkürzung des Erdradius um 1 cent liefert $3,53 \cdot 10^{30}$ Erg gleich $8,42 \cdot 10^{22}$ Grammkalorien Kontraktionsarbeit.

Die Masse der Sonne, diese streng als Gaskugel aufgefaßt, bleibt dadurch noch vollständig unbestimmt. Denn die Klasse der Polytropen kann größer als 5 sein; die Sonnenmasse kann sich bis in die Unendlichkeit erstrecken; und trotzdem die Dichte in größerem Abstande von der Sonne so rasch sinken kann, daß die Planeten keinen nachweisbaren Bewegungswiderstand erfahren, könnte die Sonnenmasse in Anbetracht des zur Verfügung stehenden Raumes unendlich werden. Wir stellen uns hier gleich auf einen praktischen Standpunkt; wir nehmen die angegebene Masse noch innerhalb der Merkurbahn an und vernachlässigen die theoretisch noch möglichen, durch Beobachtung aber nicht mehr nachweisbaren Sonnenmassen. Wir betrachten also die Sonnenmasse endlich von obigem Betrage und setzen, dies zu erreichen, fest: Die Klasse n der Polytropen, nach welcher die Hauptmasse der Sonne gebaut ist, muß gleich oder kleiner sein als 5.

Die zweite Größe, von der wir wenigstens angenäherte Kenntnis besitzen, ist die von der Sonne ausgestrahlte Energiemenge. Der Wert der Solarkonstanten ist noch nicht mit der wünschenswerten Genauigkeit ermittelt. Mit welchen Schwierigkeiten die Messung dieser Größe verknüpft ist zeigt der Umstand, daß die im Laufe eines Jahres eintretende Schwankung um 6% ihres Wertes, bedingt durch den Umstand, daß bei einer Exzentrizität der Erdbahn gleich 0,016 sich die Entfernung der Erde von der Sonne um 3% ihres Wertes ändert, noch nicht nachgewiesen werden konnte. Wir stützen uns im folgenden auf die von K. Angström*) 1890 ermittelte Zahl von 4 Grammkalorien $\text{min}^{-1} \text{cent}^{-2}$. Die von der Sonne ausgestrahlte Energiemenge beträgt dann

$$7,8455 \cdot 10^{33} \text{ Erg pro Sekunde}$$

$$= 1,8724 \cdot 10^{26} \text{ Grammkalorien pro Sekunde},$$

$$2,4756 \cdot 10^{41} \text{ Erg pro Jahr} = 5,9085 \cdot 10^{33} \text{ Grammkalorien pro Jahr}.$$

Die dritte ermittelte Größe ist der Durchmesser der Photosphäre, jener verhältnismäßig scharf begrenzten Scheibe, von welcher die eben berechnete Strahlung bis auf einen zu vernachlässigenden Bruchteil auszugehen scheint. Nach Auwers beträgt ihr scheinbarer Durchmesser $31' 59'',3 = 1919,3''$, gleich nach allen Richtungen und im Laufe der Zeit nicht nachweisbar sich ändernd. Die Sonnenparallaxe

*) K. Angström, Beobachtungen über die Strahlung der Sonne. Wied. Annal. Bd. XXXIX. Seite 294. 1890.

von $8,80''$ bestimmt den Radius der Photosphäre zu $109,05$ äquatorialen Erdradien = $109,18$ mittleren Erdradien = $6,95561 \cdot 10^{10}$ cent.

§ 2. Die Kenntnis der Größen von ausgesandter Strahlung und strahlender Fläche legen es nahe die Temperatur der letzteren zu berechnen. Wir machen die Annahme, daß wir es mit der Temperaturstrahlung eines vollkommen schwarzen Körpers zu tun haben. Es mag auf den ersten Blick unerlaubt erscheinen, ein Gas als schwarzen Körper zu behandeln. Allein die Eigenschaft optisch schwarz zu sein ist nicht Eigenschaft bestimmter Substanzen, sondern eines jeden Körpers, der aus beliebigen Substanzen aufgebaut ist, falls er die Bedingung erfüllt, alles auffallende Licht ohne reflektierten Rest zu absorbieren. Daß der Sonnenball keine auffallende Strahlung von irgendwie in Betracht kommender Menge hindurchläßt, wird zur Evidenz aus dem Nachfolgenden hervorgehen. Über das Reflexionsvermögen der Gase besitzen wir keinerlei Kenntnis. Nimmt man auch hier an, daß die reflektierten Mengen bedingt sind durch die Brechungsexponenten aneinander grenzender Gase, gibt den Gasen der Photosphäre entsprechend ihrer geringen Dichte Brechungsexponenten nahe gleich Eins und berücksichtigt, daß überall stetige Übergänge von Dichte und Brechungsexponenten vorliegen, so scheint der Schluß gerechtfertigt, daß wir auch die von der Sonne reflektierte Strahlung praktisch gleich Null setzen und die von der Photosphäre umschlossene Sonnenmasse als schwarzen Körper behandeln dürfen. Setzen wir die Konstante des Stefanschen Strahlungsgesetzes gleich $1,28 \cdot 10^{-12}$ Grammkalorien $\text{sek}^{-1} \text{cent}^{-2}$, so erhalten wir die Temperatur der Photosphäre zu 7000° . Man bezeichnet diese Temperatur, welche nur als andere Ausdrucksform für den Wert 4 der Solar konstante aufzufassen ist, als effektive Sonnentemperatur. Zu einer etwas niedrigeren effektiven Sonnentemperatur im Betrage von etwa 5600° gelangt man durch die Bestimmung der Lage des Intensitätsmaximums des Sonnenspektrums. Nehmen wir weiter die Photosphäre als schwarze Fläche materialisiert und auf 7000° erwärmt an, so würde die Solarkonstante kleiner als 4 ausfallen; denn über derselben liegen noch Sonnenmassen, die sich durch Absorption bemerkbar machen, wenn sie auch infolge ihrer niedrigeren Temperatur zur Strahlung nur unwesentlich beitragen. Um die Solarkonstante 4 zu erhalten, müssen wir die Temperatur der Photosphäre erhöhen; wir haben bereits auf Seite 332 gezeigt, daß diese „schwarze Körpertemperatur“ etwa 8330° beträgt.

Wir werden sehen, daß an der Photosphäre die Dichte der Gasmassen nach innen rasch zunimmt, so daß Schichten, deren Dicke uns unter einem Gesichtswinkel von $1''$ erscheint, so gut wie un durchlässig für Strahlung sind. Wir können deshalb nicht nur den ganzen Sonnenball, sondern bereits Schichten von dieser geringen scheinbaren Dicke als schwarze Körper behandeln und schließen dar aus, daß in der Nähe der Photosphäre Temperaturen von der Größenordnung 8000° in Wirklichkeit auch auftreten.

Bei dieser Schlußfolgerung fällt weniger ins Gewicht, daß wir die Sonne als schwarzen Körper betrachten, als daß wir ihre Strahlung als Temperaturstrahlung annehmen. Denn E. Pringsheim*) hat gezeigt, daß wir mit großer Wahrscheinlichkeit das Leuchten erhitzter Dämpfe von *Na*, *Li*, *Ta*, *Ka* nicht als Folge der Temperaturerhöhung, sondern als Folge chemischer Reduktionsvorgänge zu betrachten haben. Gilt diese Schlußweise noch bei Temperaturen von der Höhe der Sonnentemperaturen, und läßt sie sich für alle Gase und Dämpfe verallgemeinern, so sind die eben berechneten Gas temperaturen (nicht aber die effektiven Temperaturen!) ebenso fehlerhaft bestimmt, als würde man die Temperatur eines Glühstrumpfes durch die Menge der ausgesandten Strahlung oder die Körpertemperatur eines Glühwurmes durch die Lage des Helligkeitsmaximums im Spektrum bestimmen. Auch Ionisation, die bei den Sonnentemperaturen schwerlich ausbleiben wird, als Ursache des Leuchtens angenommen berechtigt noch nicht die Gesetze der Temperaturstrahlung anzuwenden.

§ 3. Die Konstanz der mittleren Temperatur der Erdoberfläche läßt es sicher erscheinen **), daß Gleichgewicht besteht zwischen den Wärmemengen, welche die Erdoberfläche durch Ausstrahlung abgibt und, wenn wir von dem geringen Wärmezufluß aus dem Erdinnern absehen, von der Sonne zugestrahlt erhält. Letztere Wärmemenge wird zum Teil als chemische Energie auf der Erde aufgespeichert, der andere Teil ist gleich der Wärmemenge, welche die Erde ausstrahlt. Wir machen vorderhand die Annahme, der erstere Teil sei verschwindend klein. Wir nehmen die mittlere Temperatur der Erdoberfläche zu $T = 300$ an; sie soll sich um 4° , d. i. $\frac{4}{3}\%$ ihres Wertes ändern. Die ausgesandte Wärmemenge steigt dann um $\frac{16}{3}\%$

*) E. Pringsheim, Das Kirchhoffsche Gesetz und die Strahlung der Gase. Wied. Annal. 45. Seite 428. 1892 u. 49. Seite 347. 1893.

**) v. Bezold. Der Wärmeaustausch in der Erdoberfläche und in der Atmosphäre. Sitzungsbericht der Berliner Akad. d. Wissensch. LIV. Seite 1139. 1892.

ihres Wertes; damit wieder Wärmegleichgewicht besteht, muß sich die zugestrahlte Wärme ebenfalls um $\frac{1}{3}\%$ ändern, die effektive Sonnen-temperatur also um $\frac{4}{3}\%$ ihres Wertes, das sind 93° Cels. Würde anderseits die Hälfte der Sonnenstrahlung zurückbehalten werden, so brauchte nur der Rest um $\frac{16}{3}\%$ sich zu vermehren, die Gesamt-strahlung also um $\frac{8}{3}\%$ und die effektive Temperatur der Sonne um $\frac{2}{3}\% = 47^{\circ}$ Cels. Diese Schwankung fällt um so geringer aus, je mehr Sonnenenergie auf der Erde zurückbehalten wird. Wir können somit schließen:

Eine Änderung der effektiven Sonnentemperatur um weniger als 100° Cels. würde die mittlere Temperatur der Erdoberfläche in gleichem Sinne um 4° Cels. ändern.

Eine Änderung der Temperatur der Erdoberfläche von diesem Betrage durch längere Zeiträume hindurch muß sich in mächtiger Weise bemerkbar machen. Nach Brückner*) genügt ein Sinken derselben um $3-4^{\circ}$ durch längere Zeiträume hindurch, um eine neue Eiszeit herbeizuführen; die dazu erforderliche Schwankung der effektiven Sonnentemperatur beträgt weniger als 100° Cels. Weit kleinere Änderungen derselben müßten sich schon in nachweisbaren klimatischen Schwankungen geltend machen, würde doch ein Sinken der effektiven Sonnentemperatur um nur 25° Cels. die mittlere Temperatur der Erdoberfläche um 1° herabsetzen. Wohl ist es überaus wichtig, die Ursachen der Klimaschwankungen und Eiszeiten aufzudecken, aber mir scheint weit wichtiger die Beantwortung der eng damit verbundenen Frage: *Wie ist es möglich, daß durch längere Zeiten hindurch der Mittelwert der effektiven Sonnentemperatur bis auf weniger als 100° , resp. 25° Cels. konstant bleibt?*

§ 4. Aus der Konstanz der effektiven Sonnentemperatur wird man mit großer Sicherheit auf die Konstanz der in der Photosphäre wirklich vorhandenen Temperaturen schließen können. 1 cent² Photosphäre sendet pro Sekunde eine Energiemenge von $12,90 \cdot 10^{10}$ Erg = $3,078 \cdot 10^8$ Grammkalorien aus, welche aus dem Sonneninnern ergänzt werden muß. Wir werden uns erst später mit der Frage beschäftigen, wie dieser Nachfluß durch sehr lange Zeiträume hindurch gedeckt werden kann; wir untersuchen hier, auf welche Weise derselbe befördert wird. Daß Wärmeleitung nur einen verschwindend kleinen Prozentsatz dieser nachströmenden Energiemenge befördern kann, läßt sich leicht zeigen. Bezeichnen wir die pro Zeit- und

*) E. Brückner. Klimaschwankungen seit 1700. Seite 308. Wien 1890.

Querschnittseinheit beförderte Wärmemenge von $3,078 \cdot 10^3$ Grammkalorien mit ΔQ , so bestimmt sich das Temperaturgefälle ΔT pro Zentimeter aus der Beziehung $\Delta Q = k \Delta T$, wo k das Wärmeleitungsvermögen in kalorimetrischem Maße mißt. Für Luft resp. Wasserstoff von 0° beträgt dasselbe 0,00005, resp. 0,00033 Grammkalorien $\text{cent}^{-1} \text{ sek}^{-1}$; dasselbe steigt mit der Wurzel aus der absoluten Temperatur und beträgt bei 8000° 0,00027 resp. 0,0017. Also erhalten wir $\Delta T = 1,14 \cdot 10^7$, resp. $1,8 \cdot 10^6$. Auf ein Kilometer Tiefe müßte die Temperaturzunahme von der Größenordnung 10^{14} , resp. 10^{11} Grad sein, was vollkommen ausgeschlossen erscheint. Geben wir dem Wasserstoff ein 600 mal größeres Wärmeleitungsvermögen, wodurch er dem Silber, dem besten Wärmeleiter mit $k = 1$, gleichwertig wird, so bleibt das Temperaturgefälle pro Kilometer immer noch von der Größenordnung 10^8 Grade. Durch Wärmeleitung kann somit nur ein verschwindend kleiner Bruchteil des ganzen Wärmestroms nach außen befördert werden; würden andere Beförderungsmittel abgeschnitten, so müßte die Photosphäre in wenigen Minuten unsichtbar werden.

Diese ganze Wärmemenge kann fast ausschließlich nur durch Konvektionsströme befördert werden. Die durch Ausstrahlung dichter gewordenen Massen sinken in die Tiefe, um aufsteigenden, entropiehaltigeren, bei gleichem Druck energiehaltigeren, heißen Massen Platz zu machen. Die Konvektionsströme treten auf in allen Raumteilen, welche die Sonnenmasse einnehmen. Auf der Photosphäre zeichnen sich die Querschnitte der kälteren (dunkleren, absteigenden) und heißen (helleren, aufsteigenden) Ströme als „Granulationen“ ab. Partien, in denen diese Strömungen, resp. Granulationen in augenblicklich verschiedener Intensität ausgebildet sind, bilden das bekannte „photosphärische Netz“. Kommen durch einen Mechanismus, den wir später ausführlich erörtern werden, besonders mächtige, heiße Massen nach oben, so treten sie als „Fackeln“ hervor. Das ganze Spiel der Konvektionsströme zeichnet sich auf der Photosphäre ab. Sie durchmischen die ganze Sonnenmasse, so daß wir dieselbe in den den Gasgesetzen noch gehorchen Partien als Gaskugel in einem konvektiven Gleichgewichtszustand betrachten können. Würden in den auf- und absteigenden Strömen keine Wärmequellen wirksam sein, so würden die Veränderungen längs des Sonnenradius nach einer Isentropen vor sich gehen. Wir lassen aber erst die Klasse der Polytropen unbestimmt; kommen wir zu einem Aufbau der Sonne nach einer anderen Polytropen, so haben wir die wirkenden Wärmequellen aufzudecken.

§ 5. Wir haben hier noch eine wichtige Bemerkung einzuschalten. In der Sonnenkugel können diese radialen Strömungen ungestört vor sich gehen und konvektives Gleichgewicht herbeiführen. In der Erdatmosphäre werden sie nach oben bald gehemmt durch horizontale Ströme, durch das allgemeine Windsystem der Erde. Diese gewaltige Zirkulation der Atmosphäre wird getrieben durch die mächtige Strahlungsquelle, die Sonne, welche die verschiedenen Breitenkreise der Erde ungleich erwärmt. Für die Sonne aber gibt es keine Sonne, keine ähnlich wirkende Strahlungsquelle; ihre Temperaturen werden nicht durch äußere Zustrahlung nach Breitekreisen differenziert. Die Ursache der allgemeinen Zirkulation fehlt vollständig und somit auch diese mit allen ihren Konsequenzen. Alle Versuche, Verhältnisse der irdischen Atmosphäre auf die Sonnenatmosphäre, d.h. auf die der Photosphäre aufgelagerten Massen, zu übertragen müssen mit der größten Vorsicht betrachtet werden. In den wenigen Ausnahmefällen, in denen dies möglich ist, wie z. B. in der später zu besprechenden Schichtenbildung, verläuft der Prozeß, kurz gesagt, mit entgegengesetztem Vorzeichen, denn in der Erdatmosphäre befindet sich die treibende Wärmequelle, die Sonne, außen, bei der Sonne aber innen. Auf der Sonne gibt es wohl kurzgeschlossene, aber keine langgeschlossenen Zykeln (Vgl. Kap. XVII § 15); alle Strömungen auf der Sonne werden nicht durch Zustrahlung von außen getrieben, sondern dadurch, daß der gemeinschaftliche Schwerpunkt der ursprünglich benachbart gelegenen, sich nun mischenden Massen dem allgemeinen Attraktionszentrum, dem Sonnenmittelpunkte, näher rückt; in letzter Linie also dadurch, daß die Sonne sich durch Wärmeausstrahlung kontrahiert.

§ 6. In der Sonne, diese aufgefaßt als polytrope Gaskugel, gibt es in jeder Richtung nur stetige Übergänge von Druck, Dichte und Temperatur. Wie erklärt sich unter diesen Umständen die sichtbare Unstetigkeitsstelle, die Begrenzung der Photosphäre?

Wir haben bereits in Kap. XVI § 8 gezeigt, wie A. Schmidt*) diese Frage zu beantworten sucht. Der Rand der Photosphäre wird vorgetäuscht durch die Krümmung der Lichtstrahlen in Gaskugeln mit stetigem Dichtigkeitsgefälle nach außen. Die von Schmidt dargelegten Gesetzmäßigkeiten sind, soweit sie die Geometrie des Strahlenganges behandeln, vollständig richtig. Allein die Absorptionswirkung

*) A. Schmidt. Die Strahlenbrechung auf der Sonne. Stuttgart 1891.

der Massen, welche die ausgesandten Strahlen zu durchdringen haben, ist von demselben in keinerlei Weise berücksichtigt worden. Wir suchen im folgenden diesen Einfluß zu ermitteln.

Wir untersuchen zuerst genau nach dem Schema, das Schmidt selbst (loc. cit. Seite 23—25) dem Aufbau der Sonne zu grunde legt. [Wir bezeichnen im Anschluß an früher die Abstände vom Sonnenmittelpunkt mit r , Schmidt mit s ; seinen Abständen z_1 , z_2 und z_3 entsprechen die Abszissen R_1 , R_2 und R_3 der Fig. 20].

Der scheinbare Rand der Photosphäre beträgt 2,35 Einheiten; als Einheit ist die vom Lichte im freien Weltraum sekundlich zurückgelegte Strecke gewählt. Nach dem Gesetze der Sphärenvergrößerung wird der wirkliche Radius R_1 derselben etwas kleiner sein, was aber für die nachfolgenden Betrachtungen ohne Einfluß ist. Unter der Annahme, daß an dieser Stelle Wasserstoffgas die Hauptrolle spielt und die Temperatur etwa 10000° beträgt, setzt Schmidt die Dichte der Sonnengase hier zu $\frac{1}{9}$ der Normaldichte atmosphärischer Luft an. Der Brechungsexponent (bei 0° und $760\text{ mm} = 1,000138$) wird dann an dieser Stelle = 1,00022. Die zweite kritische Sphäre wird bei $R_2 = 1,5$ ermittelt und der zugehörige Brechungsexponent zu $\frac{2,94}{1,5} = 2$ berechnet, wie mir scheint unrichtig; denn zu seiner Berechnung dient der Ansatz $n_2 R_2 = n_1 R_1$, $n_2 = \frac{2,35}{1,5} = 1,565$; die Gasdichte ist auf das 2600-fache ihres Wertes an der Photosphäre angestiegen; (unter Zugrundelegung des Wertes $n_2 = 2$ auf das 4500-fache, was die folgenden Ergebnisse noch mehr zu Ungunsten von Schmidt verschieben würde.) Die dritte wichtige Sphäre wird ungefähr bei $R_3 = 1$ angesetzt; der zugehörige Brechungsexponent ist $n_3 = 2,35$ und die Dichte das 6000-fache der Dichte bei R_1 .

Und nun wird dargelegt:

„Als Ausgangspunkt des Lichtes der weißen Sonnenscheibe betrachten wir zunächst die inneren Schichten bis zum Radius $R_3 = 1$ ungefähr oder etwas weiter.“ Dann folgen die schwächer leuchtenden, elektive Absorption bewirkenden Sphären von $R_3 - R_1$ und endlich die im schwachen Koronalichte strahlenden Sphären oberhalb R_1 . Wäre die Sonnenmasse in ungestörtem, dem Schema entsprechenden Gleichgewicht, so müßte das vergrößerte Bild der inneren Kugel vom Radius R_3 mit den Bildern aller Sphären bis zum Radius R_1 sich decken als weiß leuchtende Scheibe vom Radius $n_1 R_1 = n_2 R_2 = n_3 R_3 = R$. Diese leuchtende Scheibe wäre unmittelbar begrenzt von der schwach leuchtenden Korona.“

Da der Radius der Photosphäre R_1 , unter einem Gesichtswinkel von $959,6''$ erscheint, so liegen die Stellen R_2 und R_3 um $347,2''$ resp. $551,3''$ tiefer. Da $1''$ eine Strecke von 725 Kilometern entspricht, so liegt R_3 um $2,5 \cdot 10^5$ Kilometer, R_2 um $3,97 \cdot 10^5$ Kilometer tiefer als die Photosphäre. Diese Strecken hat ein Lichtstrahl zurückzulegen, wenn er auf dem *kurzesten* Wege austritt. Wir denken uns diese Strecke belegt mit Gasen von der Dichte $\frac{1}{10}$ der atmosphärischen Luft bei 0° und 760 mm . Das ist noch etwas geringer als Schmidt für die Photosphäre ansetzt. Da die Höhe der homogenen Erdatmosphäre 8 Kilometer beträgt, so passieren die von R_3 , resp. R_2 radial austretenden Strahlen etwa 5000, resp. 3000 mal mehr Massen, wie ein Lichtstrahl, der die Erdatmosphäre zenithal durchdringt. Das Absorptionsvermögen dieser Strecke in der Sonne würde 5000 resp. 3000 der auf Seite 284 festgesetzten Einheiten betragen. Nehmen wir den Transmissionskoeffizienten für senkrecht einfallende Sternstrahlung der Erdatmosphäre zu 0,85 an, was sehr hoch gerechnet ist, so wird der Transmissionskoeffizient dieser Strecken in der Sonne

$$(0,85)^{5000} = 10^{-858}, \text{ resp. } (0,85)^{3000} = 10^{-212}.$$

Nun sind aber diese Strecken nicht belegt mit Massen von der Dichte der Photosphäre, die Dichte hat bei R_3 auf das 2500-fache, bis R_2 auf das 6000-fache zugenommen. Nehmen wir die mittlere Dichte bis R_3 gleich 1000, die bis $R_2 = 2500$ mal der Dichte an der Photosphäre an, so werden die Transmissionskoeffizienten

$$10^{-882500}, \text{ resp. } 10^{-212000}.$$

Würde man annehmen, daß die Erdatmosphäre nur 1% der zenithalen Sternstrahlung absorbiert, ihr Transmissionskoeffizient also 0,999 betrüge, so würden sich diese Transmissionskoeffizienten in der Sonne immer noch auf

$$10^{-5487}, \text{ resp. } 10^{-1805}$$

stellen.

Unter diesen Umständen „als Ausgangspunkt des Lichtes der weißen Sonnenscheibe die inneren Sphären bis zum Radius $R_3 = 1$ ungefähr“ zu betrachten, erscheint vollständig unhaltbar, es sei denn, daß das Absorptionsvermögen der Gase praktisch gleich Null gesetzt wird. Ein Leugnen der Absorptionskraft der Gase von den oben angenommenen Größenordnungen würde aber jede ernst zu nehmende Prüfung dieser Theorie ausschließen. Die Absorptionsverhältnisse dieser Sonne liegen so ungünstig, daß aus wenig tiefer wie R_1 gelegenen Regionen Lichtmengen von nennenswertem Betrage nicht

einmal auf dem kürzesten Wege, geschweige denn auf weit gekrümmten, vielmals längeren Bahnen (vgl. Kap. XVI §§ 11 u. 12) austreten können.

Nun ist aber das oben der Rechnung zu grunde gelegte Bauschema der Sonne nicht durch überzeugende Schlüsse, sondern ganz allgemein gehaltene Betrachtungen von Schmidt selbst entworfen worden. Sehen wir zu, ob sich nicht rationeller begründete Bauarten der Sonne finden lassen, bei denen sich die Schmidtsche Theorie günstiger stellt als unter den von ihrem Urheber selbst zu grunde gelegten Annahmen. Wir untersuchen im folgenden nach dieser Richtung die Sonne, diese aufgefaßt als Gaskugel in einem konvektiven Gleichgewichtszustande.

§ 7. Folgende Betrachtung wird die Untersuchung wesentlich abkürzen. Eine Bogensekunde auf der Sonne entspricht einer Strecke von 725 Kilometern, rund 90 Höhen der homogenen Erdatmosphäre. Füllen wir diese an mit Gas von der Normaldichte atmosphärischer Luft, so beträgt ihr Absorptionsvermögen 90 Einheiten. Setzt man den Transmissionskoeffizienten der Erdatmosphäre zu 0,8 oder 0,85 an, so betragen die Transmissionskoeffizienten jener Strecke

$$1,9 \cdot 10^{-9} \text{ resp. } 4,4 \cdot 10^{-7}$$

Sie wird sich also praktisch als undurchlässig erweisen. Würde die angenommene Gasdichte an der Photosphäre sich vorfinden, so werden diese Transmissionskoeffizienten noch viel kleiner sein, da die Gasdichte auf einer Strecke von 725 Kilometer äußerst stark zunimmt. Werden an der Photosphäre Gasdichten angetroffen, die nicht ungleich geringer sind wie $0,001293 \text{ gramm cent}^{-3}$, so wird bereits eine Schicht von $1''$ Mächtigkeit undurchlässig sein. (Deshalb können wir eine solche Schicht in bezug auf Strahlung als schwarzen Körper behandeln). Berücksichtigen wir noch, daß nur der zentrale Strahl auf kürzestem Wege in die Tiefe dringt, gerade aber die Strahlen, welche eine Schicht R tangieren und ihr Bild durch Sphärenvergrößerung auf R_1 legen sollen, in flachen Bogen verlaufend erst nach Passieren ungleich größerer Massen in gleiche Tiefe hinabsteigen, (vgl. Kap. XVI § 12) so wird in bezug auf das Schmidtsche Phänomen sich diese Schicht noch ungleich undurchlässiger erweisen müssen.

Die Krümmungsradien im Innern von Gaskugeln bestimmter Polytropenklassen haben wir in den Tabellen 20—26 und Diagrammen 10—12 Seite 315 zur Darstellung gebracht. Wir haben dort auch die Lage der kritischen Schicht festgelegt in einer Kugel von der Masse der Sonne und dem Radius der Photosphäre. Aber die ge-

stellte Aufgabe lautet jetzt anders. Wir haben nach bestimmter Polytropenklasse eine Kugel von der Masse der Sonne derart aufzubauen, daß die äußere kritische Schicht durch Sphärenvergrößerung unter dem Radius der Photosphäre erscheint. Da diese letztere Sphärenvergrößerung von geringerem Einfluß ist, vereinfachen wir die Aufgabe, indem wir wirklichen und scheinbaren Radius der äußeren kritischen Schicht gleich annehmen; er werde mit R_1 bezeichnet.

Für die Wasserstoffkugel $n = 1,5$ (der Isentropen des dissozierten Wasserstoffgases) können wir die Untersuchung durch die §§ 9—12 des Kap. XVI als erledigt betrachten. In diesem Falle liegt die kritische Schicht so nahe der Oberfläche, daß es ohne wesentlichen Einfluß ist, ob wir ihren Radius oder den Gesamtradius gleich dem Radius der Photosphäre setzen. Wir fanden an der kritischen Schicht, die $7,1'' = 5110$ Kilometer unter der Oberfläche liegt, $\varrho = 0,0034$ gramm cent⁻³; also mehr als doppelte Normaldichte atmosphärischer Luft. Die Undurchlässigkeit der benachbarten Schichten haben wir dort eingehend erörtert. Die der kritischen Schicht aufgelagerten 5110 Kilometer starken Massen haben ein Absorptionsvermögen von $\mathfrak{A} = 960$ Einheiten, so daß selbst von der äußeren kritischen Schicht kein Strahl nach außen dringen kann.

Wir behandeln weiter die Sonne als Wasserstoffkugel $n = 2,5$ (die Isentrope zweiatomigen Wasserstoffgases). Eine solche Kugel vom Radius der Photosphäre würde (Tabelle 21) eine Mittelpunktsdichte $\varrho_0 = 33,189$ besitzen. Soll die kritische Schicht vom Radius der Photosphäre werden, so muß der Radius der Kugel größer, die Mittelpunktsdichte kleiner sein. Benutzen wir die kosmogenetische Flächengleichung (105)

$$\frac{\varrho_0 R^3}{M} = 5,7479$$

und Tabelle 21, so finden wir: Setzen wir $\varrho_0 = 16,5$ gramm cent⁻³, so wird der Sonnenradius $= 8,7801 \cdot 10^{10}$ cent. Auf diesen Betrag ist die Strecke $r_1 = 5,4172$ zu dehnen, Tabelle 6, Seite 79. Die äußere kritische Schicht liegt bei $r_1 = 4,3$, die bei gleicher Dehnung sich auf $6,9695 \cdot 10^{10}$ cent. streckt, also mit für diese Zwecke genügender Genauigkeit gleich $6,9556 \cdot 10^{10}$ cent, dem Radius der Photosphäre wird. In einer Wasserstoffkugel im adiabatischen Gleichgewichte an der Stelle der Sonne, an Masse dieser gleich, von der Mittelpunktsdichte $\varrho_0 = 16,5$ gramm cent⁻³ und einem Radius von $8,7801 \cdot 10^{10}$ cent würde nach der Schmidtschen geometrischen Optik eine helleuchtende Scheibe vom Radius der Photosphäre

scharf begrenzt hervortreten. Allein nach Tabelle 6 gehört zu $r_1 = 4,3$ ein $u_1^n = 0,004$; die Mittelpunktsdichte macht $U^n = 16,5$ und wir erhalten an der kritischen Sphäre $\rho = 0,066$ gramm cent⁻³; also das 50-fache der Normaldichte atmosphärischer Luft. Berücksichtigen wir noch, daß nach Tabelle 21 bei $r_1 = 4,3$ sich

$$\int_{u_1^n=0}^{u_1^n=0} u_1^n dr_1$$

$\frac{r_1}{u_1^n(u_1=0)}$ mindestens = 0,01 ergibt, und wir damit unter Anwendung

von Formel (276) die Anzahl der Absorptionseinheiten \mathfrak{U} für die der kritischen Sphäre aufgelagerten Schichten von der Größenordnung 10^6 finden, so können wir mit Sicherheit behaupten, daß die theoretischen Konsequenzen der geometrischen Optik sich auf keinerlei Weise bemerkbar machen können. Alles Licht, das dieser Gasball aussendet, muß hervorstrahlen aus Schichten, die weit oberhalb der kritischen Schicht gelegen sind.

Beim Übergange von $n = 1,5$ zu $n = 2,5$ stieg die Dichte an der kritischen Schicht von 0,004 bis 0,066; wir können weiteres Steigen mit wachsendem n erwarten. Um aber sicher zu gehen, behandeln wir noch den Fall $n = 3$. Wir haben in Tabelle 24 und Diagramm 12 die adiabatische Kugel aus Kohlensäure zur Darstellung gebracht. Um vergleichbare Werte zu erhalten, behandeln wir Wasserstoffgas nach der Polytropen $n = 3$ und können die Tabelle 24 leicht für Wasserstoff brauchbar machen, da ν für dies Gas etwa siebenmal größer ist, wie für Kohlensäure. Wir finden: Eine Wasserstoffkugel $n = 3$ von der Masse der Sonne, der Mittelpunktsdichte etwa 25 gramm cent⁻³, vom Gesamtradius $1 \cdot 10^{11}$ cent würde nach den Prinzipien der geometrischen Optik eine Photosphäre vom Radius $6,6 \cdot 10^{10}$ cent ergeben. Zur Abbildung kommt die Stelle $r_1 = 4,6$, ausgezeichnet durch $u_1^n = 0,004$. An der kritischen Sphäre haben wir somit eine Dichte von $25 \cdot 0,004 = 0,1$ gramm cent⁻³, also 80-fache Normaldichte atmosphärischer Luft; die Dicke der aufgelagerten Schichten hat zugenommen.

Zu je größerem n wir übergehen, desto ungünstiger liegen diese Verhältnisse. Allein auch mit $n < 1,5$ kommen wir zu keinen günstigeren Resultaten. Die kritische Schicht liegt dann in außerordentlicher Nähe der wirklichen Oberfläche, ist also durch sehr geringe Dichten ausgezeichnet. Allein je kleiner n , desto rascher nimmt die Dichte von der Oberfläche nach innen zu, so daß auch hier von einem Eindringen der Strahlen in Tiefen von wenigen Bogensekunden keine Rede sein kann.

Wir schließen somit: *In keiner Gaskugel im polytropen Gleichgewicht haben die theoretischen Betrachtungen, infolge deren nach A. Schmidt die Begrenzung der Photosphäre zustande kommt, irgend welche praktische Bedeutung.*

Wir hätten nun noch Gaskugeln zu untersuchen, deren Bau durch einen Polygonzug von Polytropen geregelt ist. Wir überlegen gleich allgemeiner. Versuchen wir eine Kugel von der Masse der Sonne auf irgend welche Weise so aufzubauen, daß ihre Hauptmasse in einer Kugel von der ungefähren Größe der Photosphäre umschlossen wird, und wir überall genügend Dichte und Dichtegefäß vorfinden, um den Krümmungsradius der Lichtstrahlen genügend klein zu machen, so kommen wir, wie auch Schmidt in seinem oben erwähnten Bauschema, stets auf Dichten, welche Schichten von in Betracht kommender Mächtigkeit vollkommen undurchlässig machen müssen. Emissions- und Absorptionsvermögen einer jeden strahlenden Masse sind sich proportional; soll eine Schicht der Sonne zur Strahlung beitragen, so wird sie die Strahlung tiefer liegender Schichten vermindern. In der von Konvektionsströmen in stetem Mischungsprozesse begriffenen Sonne werden sich die Schichten überdies noch bedeutend undurchlässiger erweisen, als in ruhendem Zustande aus ihrer Dichte folgen würde. Denn in jeder Schicht haben wir dann über das allgemeine Dichtigkeitsgefälle überall noch rasch wechselnde, geringere Dichtigkeitsunterschiede, begleitet von Änderungen des Brechungsexponenten, gelagert. Wie sehr die infolge davon auftretenden, geringen, innern Reflexionen die Durchsichtigkeit der Schichten herabsetzen können, zeigt sich in der Erdatmosphäre bei ruhigem Wetter an heißen Sommertagen, wo durch die vom Erdboden aufsteigenden Konvektionsströme die Fernsicht außerordentlich beeinträchtigt wird. Den Gasen bis zu Dichten herab, in denen die Gasgesetze noch gelten, ein Absorptionsvermögen ungefähr proportional ihrer Dichte absprechen, würde jede weitere Diskussion auf diesem Gebiete ausschließen. Man mag ihres schönen Grundgedankens wegen dieser Theorie noch so wohlwollend entgegenkommen, eine eingehende Prüfung derselben wird stets zu dem Resultate führen: Die Schmidt'sche Sonnentheorie steht so jenseits von Theorie und Erfahrung, daß dieser geistreiche Blender weiterhin nur noch der Geschichte der Sonnenforschung angehören sollte.

§ 8. Nach weit verbreiteter Ansicht soll der scharfe Rand der Photosphäre dadurch bedingt sein, daß sich in den entsprechenden

Partien der Sonne die Durchsichtigkeit und Strahlung der Gase durch Bildung von Kondensationsprodukten, durch Auftreten „photosphärischer Wolken“ unstetig ändert. Am prägnantesten gibt Young dieser Auffassung Ausdruck*): „Ich halte es immer noch für wahrscheinlich, daß die Photosphäre oder sichtbare Oberfläche der Sonne aus einer Hülle von Wolken besteht, welche sich durch Kondensation und Verbindung derjenigen Sonnendämpfe gebildet hat, die durch Ausstrahlung in den Raum hinreichend abgekühlt sind. Diese Hülle, welche in ihrer strahlenden Leuchtkraft wie ein Auerscher Glühstrumpf wirkt, gibt den kontinuierlichen Untergrund des Sonnenpektrums. Die photosphärischen Wolken schwimmen natürlich in den sie umgebenden Gasen und nicht kondensierten Dämpfen, gerade wie die Wolken in unserer eigenen Atmosphäre.“ Und weiter: „Ich verkenne nicht, daß diese Theorie einer aus Wolken bestehenden Photosphäre zu mancherlei Schwierigkeiten führt und daß sich vieles zugunsten der von Schmidt in Stuttgart aufgestellten Hypothese sagen läßt, nach welcher die Photosphäre ein rein optisches Phänomen ist, das von der Refraktion in einer gasförmigen Kugel herröhrt. Aber es scheint mir bis jetzt eine notwendige Folge der bekannten physikalischen Gesetze zu sein, daß eine gasförmige Kugel, welche zu einem beträchtlichen Teile aus metallischen Dämpfen besteht, unvermeidlich sich selbst mit einer Wolkenhülle umgibt.“ Wir beschäftigen uns mit der im letzten Satze aufgestellten Behauptung.

Die durch Ausstrahlung eintretende Temperaturerniedrigung der Gasmassen läßt sich nicht feststellen, und es läßt sich nicht abschätzen, ob sie die Gase an Ort und Stelle bis unter ihren Taupunkt abkühlt. Sicher ist, daß dieselben dichter werden und in die Tiefe sinken, um neuen, heißen Massen Platz zu machen; der Ausstrahlungsprozeß bewirkt mächtige Konvektionsströme in radialer Richtung, die allein die effektive Sonnentemperatur konstant halten können. Wir untersuchen, ob die daraus resultierenden Druck- und Temperaturänderungen der auf- und absteigenden Massen in der Gegend der Photosphäre jene Wolkenhülle zur Folge haben müssen.

Wird ein Volumen gesättigten Dampfes adiabatisch komprimiert, so wirken während dieser Veränderung zwei Umstände gegeneinander. Die Volumenverminderung an sich hat Kondensation zur Folge, die Temperaturerhöhung an sich wird überhitzen und weitere Dampf-

*) Newcomb-Engelmann, Populäre Astronomie. 3. Auflage. Seite 321.
Leipzig 1905.

aufnahme ermöglichen. Soll dabei der Dampf einen thermodynamischen Weg zurücklegen derart, daß er stets gerade gesättigt bleibt, so muß, wenn die Volumverminderung die Temperaturerhöhung ΔT überwiegt, zur Verhütung der Kondensation ein bestimmtes Wärmequantum ΔQ zugeführt, im Falle die Temperaturerhöhung überwiegt, ein bestimmtes Wärmequantum ΔQ entzogen werden. Dies Verhältnis $\frac{\Delta Q}{\Delta T}$, die Wärmekapazität des Dampfes auf diesem bestimmten Wege, kurz als „Wärmekapazität des gesättigten Dampfes“ bekannt, kann positiv, negativ oder gleich Null sein. Negative Wärmekapazität hat Kondensation bei Ausdehnung, positive hat Kondensation bei Kompression zur Folge. Diese Wärmekapazität, für verhältnismäßig wenig Dämpfe bekannt, ist in hohem Maße von der Temperatur abhängig; so sehr, daß mit wechselnder Temperatur bei derselben Substanz alle drei möglichen Fälle auftreten können. Die Wärmekapazität des gesättigten Wasserdampfes, von James Watt für Null, von Regnault, gestützt auf seine Messungen, für positiv gehalten, wurde von Clausius aus denselben Messungen auf Grundlage des zweiten Hauptsatzes berechnet und für Temperaturen bis 200° als negativ, mit verhältnismäßig sehr großen Werten nachgewiesen. Würde die Erdatmosphäre ausschließlich aus Wasserdampf bestehen, so können aufsteigende Strömungen zu Wolkenbildung führen. In einer Erdatmosphäre aus Dampf des Aethyläthers, dessen Wärmekapazität positiv ist, würden aufsteigende Ströme überhitzten Dampf liefern; eine Wolkenbildung könnte nur durch absteigende Ströme eintreten, falls in der Höhe die Dämpfe, etwa durch Wärmeausstrahlung, ihren Entropiegehalt vermindert hätten. In diesen beiden Atmosphären würden viele meteorologische Vorgänge mit entgegengesetztem Vorzeichen verlaufen. In einer geeignet aus Äther- und Wasserdampf gemischten Atmosphäre brauchten weder auf- noch absteigende Ströme Wolkenbildung zu veranlassen.

Über die Eigenschaften der Dämpfe von Metallen und Metalloiden, die sich an der Zusammensetzung der Sonnenmasse vermutlich in ähnlichem Verhältnis beteiligen, wie an der Zusammensetzung der Erdmasse, wissen wir außerordentlich wenig. Sicher gestellt ist durch Versuche von Kahlbaum, daß der Siedepunkt der Metalle so außerordentlich Funktion des Druckes ist, daß bei genügend niederen Drucken sich Edelmetalle mit Leichtigkeit überdestillieren lassen. Die Wärmekapazität der gesättigten Dämpfe aber ist noch völlig unbekannt, und ihr Verhalten bei isentroper Volumänderung entzieht sich

deshalb vollständig unserer Kenntnis. Nimmt man in dem Verhalten dieser Metalldämpfe mit sinkender Temperatur keine Unstetigkeitsstelle an, so würde ein Metalldampf, dessen Wärmekapazität positiv oder Null ist, bei isentroper Ausdehnung nie zur Kondensation gelangen. Die Isentrope würde dann zu so niederen Drucken führen, daß trotz der niederen Temperatur die Metalle noch, kurz ausgedrückt, destillierbar bleiben. Wir sind demnach nicht imstande zu beurteilen, wie sich ein einzelner Dampf, geschweige denn ein Dampfgemisch dieser Stoffe von unbekannter prozentischer Zusammensetzung bei isentroper Behandlung in bezug auf Kondensation verhält.

In Wirklichkeit liegen noch weit verwickeltere Verhältnisse vor. Die Erdatmosphäre besteht nicht aus Wasserdampf; derselbe ist der atmosphärischen Luft nur in geringer Menge beigemischt. Die Wolken, die in aufsteigenden Strömen auftreten, sind nicht bedingt durch dessen negative Wärmekapazität. Die Temperaturniedrigung des aufsteigenden Stromes röhrt beinahe ausschließlich her von der Expansionsarbeit des trockenen Bestandteiles, durch welche der beigemengte Dampf unter seinen Kondensationspunkt abgekühlt wird. Auch beigemengter Ätherdampf könnte unter diesen Umständen zur Kondensation gelangen. Wir wissen nicht, in welchem Verhältnisse in der Sonnenmasse kondensierbare Dämpfe und (unter ähnlichen Umständen nicht kondensierbare) vollkommene Gase gemischt sind, wodurch die Kondensation erleichtert wird. Allein Dämpfe mit genügend großer, positiver Wärmekapazität und Dämpfe, genügend weit von ihrem Sättigungspunkt entfernt, könnten trotzdem im Zustande der Überhitzung verbleiben. Dazu kommt, daß wir in den Gegenden, in welchen die photosphärischen Wolken auftreten, „schwarze“ Temperaturen von etwa 8000° vorfinden; die wirklichen Temperaturen werden nicht niedriger, vermutlich viel höher liegen. Ob bei diesen Temperaturen, zu denen, wie wir sehen werden, keineswegs hohe Drucke gehören, die Metallmoleküle sich durch Kondensation zu Molekülgruppen vereinigen können, oder ob sie nicht wahrscheinlicher größtenteils in Atome dissoziert auftreten, ist ebenfalls offene Frage. Ich schließe daraus, daß die bekannten Gesetze der Physik, angewandt auf die Sonne in ihrem jetzigen Zustande, nicht Kondensationsvorgänge in der Photosphäre erfordern, sondern zum Entscheid dieser Frage auch nicht im entferntesten ausreichen.

Läßt man Kondensationsvorgänge zu, so erleichtert man sich wesentlich die Interpretationen der Erscheinung, daß Photogramme der Photosphäre in monochromatischem Lichte verschiedene Elemente

in ungleicher Verteilung anzeigen. In Gegenden, ausgezeichnet durch Calcium, scheint der Wasserstoff zurückzutreten und umgekehrt. Wenn man sich von der Vorstellung leiten läßt, daß die ungeheure Wärmeausstrahlung nur aus dem Sonneninnern durch ein mächtiges System von Konvektionsströmen gedeckt werden kann, welches die Sonnenmasse fortwährend mischt, so ist ohne Kondensationsvorgänge schwer einzusehen, wie sich deren Bestandteile räumlich scheiden können. Ein in radialer Richtung streichender Strom Sonnengase kann aber entsprechend seiner Zustandsänderung die kondensierbaren Bestandteile einzeln in verschiedenen Niveaus absetzen. So können in einzelnen Partien Bestandteile überwiegen, bis sie im Laufe der Zeit von neuem zur Mischung gelangen.

§ 9. Wir versuchen im folgenden eine Gaskugel mit den charakteristischen Eigenschaften der Sonne aufzubauen. Die Grundanschauung, von der wir ausgehen, gipfelt darin, daß wir es mit einer Kugel zu tun haben, die durch radiale Strömungen fortwährend in kräftigster Weise durchmischt wird. Denn die außerordentliche Konstanz der effektiven Sonnentemperatur bei mächtiger Wärmeabgabe erfordert, daß nicht nur die oberflächlichen Partien, sondern die ganze Masse der Sonne sich an diesem Ausstrahlungsprozeß beteiligen. Die gewaltigen Entropiemengen können aber, soweit unsere heutigen Kenntnisse vom Energietransporte reichen, auf keine andere Weise zur Oberfläche emporgebracht werden, als durch Konvektionsströme. Wir lehnen deshalb a priori alles ab, was mit einem derartigen Mischprozeß, der wenigstens den Hauptteil der Sonnenmasse in Bewegung setzt, unverträglich ist. Ein länger andauerndes Bestehen von Schichten besonderer physikalischer oder chemischer Zusammensetzung lassen wir nicht zu, mit alleiniger Ausnahme, daß eben durch die infolge dieses Mischungsprozesses auftretenden Temperaturänderungen sich in gewissen Niveaus vielleicht vorübergehend Kondensationsprodukte bilden können (vgl. vorhergehenden Paragraphen). Druck, Temperatur und Dichte der chemisch durchwegs gleichartigen Massen sollen stetig nach außen abnehmen. Wie kommt unter diesen Umständen die scheinbar scharfe Begrenzung der Photosphäre zustande?

Wir halten dafür, dadurch daß auf einer Strecke von einigen Hundert Kilometern Druck und Dichte, welche die Helligkeit der Sonnenscheibe bedingen, so rasch sich ändern, daß bei der großen Entfernung der Sonne, die 725 Kilometer unter dem Gesichtswinkel von einer Bogensekunde erscheinen läßt, ein scheinbar scharfer Rand vor-

getäuscht wird. Wollte man in erster Annäherung mit isothermen Sonnenmassen in der Gegend der Photosphäre rechnen, denen man eine Temperatur von $27,2 \cdot 300 = 8100^\circ$ gibt (der Wert von g an der Oberfläche der Sonne ist 27,2 mal größer wie an der Erde), so hätte dort ein Gas dieselbe Höhe ξ der homogenen Atmosphäre wie an der Erdoberfläche, und die barometrische Höhenformel $\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{h}{\Phi}}$ (vgl. Kap. XVII § 3) würde für dies Gas auf Sonne und Erde für gleiche Höhendifferenzen gleiche Dichtigkeitsabnahmen ergeben. Atmosphärische Luft würde dann auf der Sonne beim Emporsteigen um je 18,4 Kilometer ihre Dichte auf $\frac{1}{10}$ vermindern (wäre die Gastemperatur 81000° , dann beim Emporsteigen um 184 Kilometer). Auf diese Weise würde auf einer Strecke gleich $1''$ eine ungeheure Dichteabnahme erfolgen. Allein wir müssen berücksichtigen, daß wir beim Emporsteigen auch mit Temperaturabnahme zu rechnen haben, welche die Dichteabnahme nach der Isothermen vermindert. In einer Sonnenatmosphäre aus Wasserstoffgas würde eine Temperaturabnahme von $6,45^\circ$ auf 100 Meter (Formel (292), $n = 0$), diese Dichteabnahme aufheben und konstante Dichte erzwingen, ebenso wie in der Erdatmosphäre das Temperaturgefälle $3,42^\circ/100$ Meter die homogene Atmosphäre herbeiführen würde. Wir werden unten versuchen, die Größenordnung der Dichte- und Temperaturabnahme numerisch festzustellen.

Diese Dichteänderung macht sich auf zweierlei Weise geltend. Einmal wird man die Strahlung eines Volumelementes proportional setzen dürfen der darin enthaltenen Gasmasse; in demselben Verhältnis steigt aber auch dessen Absorptionskraft, die sich aber am Rande an der Sonnenscheibe in ungleich höherem Maße wirksam erweisen wird, wie in deren Mitte. Denn nehmen wir eine Kugelschicht von der Dicke h_1 , so wird der zentrale Sehstrahl in ihr die Strecke h_1 zurücklegen, der Randstrahl, der ihre innere Begrenzung vom Radius R , im folgenden gleich dem Radius der Photosphäre angenommen, tangiert die Strecke $\sqrt{2Rh_1}$. Nehmen wir $h_1 = 100$ Kilometer, also etwas über $0,1''$, so ist die Absorptionsstrecke um das 100-fache angewachsen und in gleichem Maße die Anzahl \mathfrak{A} ihrer Absorptionseinheiten, falls wir konstante Dichte annehmen würden. Dichteabnahme nach außen würde dies Verhältnis noch steigern. Rechnen wir im Grenzfalle isotherm, so gilt in vertikaler Richtung die barometrische Höhenformel $\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{h}{\Phi}}$; gehen wir bis zu einer Höhe h_1 , welche die Höhe der

homogenen Atmosphäre ξ nur etwa um das 10-fache übertrifft, so ist die pro cent² Grundfläche angetroffene Masse $m_1 = \varrho_0 \xi$ Gramm. Gehen wir aber in tangentialer Richtung z von R nach außen, $z^2 = 2Rh$, so ist die Dichteabnahme in dieser Richtung gegeben durch $\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{z^2}{2Rh}}$ und die Masse, wenn wir wieder bis zur Kugelfläche $R + h_1$ nach außen gehen, wird $m_2 = \varrho_0 \int_0^{V_{2Rh_1}} e^{-\frac{z^2}{2Rh}} dz$. Da aber das Integral $\int_0^x e^{-x^2} dx$ mit wachsendem x äußerst rasch nach $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ konvergiert, so ergibt sich $m_2 = \varrho_0 \sqrt{\frac{R\xi\pi}{2}}$ und das Verhältnis $\frac{m_2}{m_1} = \sqrt{\frac{R\xi\pi}{2\xi}}$, für $\xi = 8$ Kilometer etwa zu 370. Der Transmissionskoeffizient dieser Schicht, zentral gesehen = $(0,8)^{370}$, nimmt am Rande der Photosphäre auf $(0,8)^{370}$ ab. Der Sehstrahl, der von außen sich der Photosphäre nähert, trifft auf Schichten, deren Undurchsichtigkeit rapid ansteigt. Die nachfolgenden Rechnungen werden ergeben, daß bereits in der Gegend der Photosphäre sich Gasdichten ergeben, daß Schichten von in Betracht kommender Mächtigkeit sich in jeder Richtung praktisch als undurchlässig erweisen und deshalb den Gesetzen der „schwarzen“ Strahlung gehorchen. Da ferner mit zunehmender Dichte die Temperatur rasch ansteigt, die Strahlung aber mit der vierten Potenz derselben, so muß ein gewaltiges Ansteigen der ausgesandten Strahlungsmenge stattfinden. Nähert sich der Sehstrahl von außen der Photosphäre, so steigen Undurchsichtigkeit und ausgesandte Lichtmengen so rapid an, daß ein scheinbar scharfer Rand der Sonnenscheibe vorgetäuscht werden muß.

§ 10. Daß außerhalb der Photosphäre noch kräftig leuchtende, also vermutlich hoch temperierte Gasmassen vorhanden sind, zeigt sich bei totalen Sonnenfinsternissen. Selbst im Augenblicke zentraler Bedeckung können die außerhalb des Mondrandes liegenden Sonnenpartien die Erde noch mit einer Helligkeit beleuchten, welche die des Vollmondes übertrifft. In einer Entfernung von 357 000 Kilometer von der Erde beträgt der Radius der Mondscheibe 16' 45", also 85" mehr als der Radius der Sonne. Zur Zeit des zweiten oder dritten Kontaktes befindet sich ein Mondrand in einer Distanz gleich $\frac{1}{11}$ Sonnen-durchmesser außerhalb der Photosphäre; in dieser Entfernung wird noch

kräftig leuchtende Materie angenommen. Mit erst rasch, dann langsam abnehmender Helligkeit setzen sich diese Massen nach außen fort, als „Korona“ strahlend. Wir werden deshalb später die Sonne so aufzubauen versuchen, daß ihre Beschaffenheit stetig nach außen abnimmt, aber selbst in den äußersten Partien der Korona noch hohe Temperaturen sich vorfinden. Man könnte gegen diesen stetigen Übergang einwenden, daß die weiße, kalte Farbe der Korona wesentlich verschieden ist von dem gelblichen, warmen Sonnenlichte. Allein das Auge ist kein geeigneter Apparat, die Farbe von Gebilden zu vergleichen, die in so ganz verschiedener Intensität, unter ganz verschiedenen Bedingungen des Hintergrundes, auf dem sie erscheinen, und zudem nicht gleichzeitig leuchten. Wie verschieden die Korona verschiedenen Augen erscheint, geht daraus hervor, daß ein so geübter Beobachter wie L. E. Jewell*) das Licht der Korona am 30. August 1905 als grünlichgelb oder zitronengelb, ungefähr von der Wellenlänge 5800, in den äußeren Partien eher orangegelb beschreibt, während anderen Beobachtern dieselbe Korona rein weiß, mir selbst (in Guelma) weiß mit einem Stich ins Grünlische, an das Licht von Magnesiumfackeln erinnernd, erschien. Allein auch eine kältere Färbung der Korona ließe sich unschwer erklären durch den Umstand, daß ihrem Lichte ein großer Prozentsatz reflektierten Sonnenlichtes beigemengt ist. Die Korona-Gase können sich in dieser Beziehung ähnlich verhalten wie die höheren Schichten der Erdatmosphäre nach der Theorie von Lord Raleigh**); sie können in erster Linie die kurzen Wellenlängen reflektieren, die längeren aber durchlassen.

§ 11. Das Licht der Photosphäre unterscheidet sich bei spektraler Zerlegung von dem Lichte der sich unmittelbar anschließenden, äußeren Sonnenpartien dadurch, daß in ihm die Spektrallinien auf hellem Hintergrunde, also relativ dunkel, in letzterem aber auf dunklem Hintergrunde hell erscheinen und so das bekannte „flash“ Spektrum liefern. Es ist nun ein sehr bequemes und billiges Auskunftsmittel, zur Erklärung eines Sonnenphänomens eine besondere Schicht zu konstruieren, welche die betreffende Erscheinung veranlaßt. Die hier in Betracht kommende Erscheinung soll durch die sogenannte „um-

*) L. E. Jewell, Observations made during the total solar eclipse of August 30, 1905; at camp Dixie, near Guelma; Algeria. The Johns Hopkins University circular. No. 4. Seite 46. 1906.

**) J. W. Strutt, On the light from the sky, its polarisation and colour. Phil. Mag. IV. Bd. 41. 1871.

kehrende“ Schicht bewirkt werden; eine Schicht, welche alle die durch das flash Spektrum angezeigten Stoffe als leuchtende Gase enthält und deren Dicke Young auf etwa 200 Meilen schätzt, an Temperatur etwas niedriger wie die Gase der Photosphäre. Am Rande der Photosphäre gesehen erscheint diese Schicht in dem von ihr ausgesandten Lichte, über der heißen Photosphäre, die ein kontinuierliches Spektrum ergeben würde, liegend wirkt sie nach bekanntem Kirchhoff'schen Gesetze und veranlaßt so das Auftreten der relativ dunklen Frauenhoferschen Linien. Die Auffassung der Sonne als einer von mächtigen Konvektionsströmen durchsetzten Kugel läßt eine solche besonders ausgezeichnete Schicht nicht zu, gibt aber ebenfalls genügend Aufschluß über das Zustandekommen dieser Erscheinungen. Wie schon oben bemerkt, liegen außerhalb des scheinbar scharfen Randes der Photosphäre noch Massen, deren Leuchtkraft, wie sich bei Finsternissen zeigt, rapid nach außen abnimmt. Bei Finsternissen übertreffen die dem Mondrand unmittelbar benachbarten Massen die weiter außen liegenden so außerordentlich an Helligkeit, daß sie als schmales, sickel- resp. kreisförmiges, besonderes Gebilde erscheinen müssen, welches direkte prismatische Zerlegung (d. h. ohne Spalt) verträgt und so das bekannte flash Spektrum liefert. (Die Anwendung eines Spaltes ändert daran nichts wesentliches.) Diese scheinbar ausgezeichnete Schicht kommt demnach auf ähnliche Weise wie der scheinbar scharfe Rand der Photosphäre zustande.

Daß anderseits eine genügend dichte, leuchtende Dampfkugel bei zentraler Beobachtung zum Auftreten dunkler Frauenhoferscher Linien Veranlassung geben kann, läßt sich zwar nicht streng durchrechnen, kann aber durch Laboratoriumsexperimente leicht nachgewiesen werden. Eine genügend dichte Natriumflamme gibt bei Beobachtung ihrer mittleren Partien die bekannte Linienumkehr, während die Randpartien nur die helle *D*-Linie liefern. Von fundamentaler Bedeutung sind ferner die Versuche Lockyers*). Wird der horizontal gestellte Voltasche Flammenbogen mit Mealldämpfen beladen und ein schmäler, vertikaler Querstreifen desselben auf einen vertikalen Spalt projiziert, so zeigen gerade die kräftigsten Linien in ihrer Mitte, bezogen auf ihre Längsrichtung, Linienumkehr, während sie nach oben und unten hell auslaufen. Die dichtesten, heißesten Teile des Bogens ergeben das Spektrum der Photosphäre; der Rand die hellen Linien des flash. In diesen durchaus stetig gebauten Ge-

*) Lockyer. Researches in Spectrum Analysis in connexion with the Spectrum of the Sun. Phil. Trans. T. 163. pag. 253 u. 639. 1873, T. 164. pag. 805, 1874.

bilden des Flammenbogens, die außen helle, nach innen dunkle Linien liefern, haben wir die Sonne gleichsam im Modell vor uns.

Die eben erwähnten Versuche Lockyers lassen noch ein erst in neuerer Zeit gewürdigtes, individuelles Verhalten der verschiedenen Elemente hervortreten, das man als „Leichtigkeit der Linienbildung“ bezeichnen kann. Während einzelne Linien in einer Länge erscheinen, die beinahe dem ganzen Durchmesser des Flammenbogens entspricht, werden andere Linien nur durch dessen mittlere Partien geliefert. Dieser Unterschied in der Länge findet sich selbst bei den Linien desselben Elementes vor; die Linien verschiedener Elemente und desselben Elementes treten in ganz verschiedener Intensität auf, zum Teil mit Selbstumkehr. Berücksichtigt man noch, daß beim Leuchten von Gasgemischen in Geißlerschen Röhren die Linienbildung eines Bestandteiles durch die übrigen außerordentlich stark beeinflußt werden kann, so wird man auf der Hut sein müssen, aus dem Auftreten und Aussehen von Linien im Sonnenspektrum zu weitgehende Schlüsse zu ziehen. Aus Überwiegen des Glanzes oder der Zahl von Linien eines Elementes wird man nicht folgern dürfen, daß dies Element in größter Menge an betreffender Stelle vorhanden ist, sondern daß die örtlichen Verhältnisse der Ausbildung dieser Linien besonders günstig sind. Der Mangel an Linien eines Elementes ist kein Beweis für dessen Abwesenheit. Man denke an die Schwierigkeit des Nachweises von Sauerstoff auf der Sonne, der möglicherweise, wie bei der Erde, deren Hauptbestandteil ausmacht. Auch der Umstand, daß von den Linien eines Elementes gelegentlich nur wenige zum Vorschein kommen, oder zum Teil hell, zum Teil dunkel, ja daß ein und dieselbe Linie auf einen Bruchteil ihrer Länge umgekehrt sein kann, hat nichts Überraschendes an sich. In einer von Konvektionsströmen gleichmäßig durchmischten Gaskugel kann somit an einer Stelle, die der Ausbildung gewisser Linien besonders günstig ist, ein Überwiegen der Menge eines oder mehrerer Elemente vorgetäuscht werden. Das starke Hervortreten der Wasserstofflinien, namentlich in dem Spektrum der Protuberanzen, zwingt nicht zum Schluß, dies Gas als Hauptbestandteil der Sonne anzusehen, sondern zeigt nur, daß die örtlichen Verhältnisse der Ausbildung dieser Linien, die auch bei Laboratoriumsversuchen überaus leicht auftreten, besonders günstig sind. Aus den bekannten „Flocculi“-Aufnahmen Hale's braucht nicht gefolgert zu werden, daß Wasserstoff und Calciumdampf in der Photosphäre verschieden angeordnet sind; zu ihrer Interpretation genügt die Annahme, daß in den durch Konvektionsströme bewegten Schichten die günstigen

Bedingungen zum Auftreten kräftiger Linien für beide Elemente verschieden verteilt sind.

§ 12. Ehe wir dazu übergehen, uns vom Bau der Sonne auf Grund thermodynamischer Behandlungsweise eine präzisere Vorstellung zu verschaffen, müssen wir diese Aufgabe klar formulieren. Die Gesetze der Thermodynamik haben ebenso wenig wie das Newtonsche Gravitationsgesetz schöpferische Kraft. Ebensowenig wie auf Grund des Gravitationsgesetzes unser Planetensystem, selbst wenn die Massen des Zentralkörpers und der 8 Planeten gegeben sind, abgeleitet werden kann, ebensowenig kann die Thermodynamik den Bau der Sonne, selbst bei Kenntnis der richtigen Werte von Radius und Masse, eindeutig wiedergeben. Wir haben bereits (Kap. XVII § 10) gesehen, daß die Thermodynamik nicht einmal imstande ist Aufschluß zu geben über die Beschaffenheit der Erdatmosphäre in der Höhe, mag deren Zustand an der Erdoberfläche noch so genau bekannt sein. Bei gegebenem Radius und gegebener Masse sind immer noch unendlich viele verschiedene Sonnenkugeln möglich, die bei innerer Gravitation im mechanischen Gleichgewichte stehen. So können wir eine Gaskugel von der Masse der Sonne und dem Radius der Photosphäre bauen von durchwegs gleicher Dichte. Wir benutzen dazu die Polytrope $n = 0$. Die Dichte im Mittelpunkt ist gleich der mittleren Dichte $\varrho_0 = 1,3784$ gramm cent⁻³ und durch die ganze Kugel konstant. Temperatur und Druck im Mittelpunkt ergeben sich mit Hilfe der kosmogenetischen Flächen-gleichungen (107) und (109) zu

$$T_0 = 1,1209 \cdot 10^7, p_0 = 1,2818 \cdot 10^{15} \text{ Dynen cent}^{-2} = 1,265 \cdot 10^9 \text{ Atm.}$$

Dichte und Druck sind an jeder Stelle unabhängig von der Natur des benutzten Gases, die Temperatur steigt umgekehrt der Gas-constanten, proportional dessen Molekulargewicht. Der angegebene Wert T_0 gilt für dissoziertes Wasserstoffgas. An jeder Stelle der Kugel berechnet sich die Temperatur nach der Gleichung

$$T = T_0 - \frac{\alpha^2 r^2}{6},$$

$$\alpha^2 = \frac{4\pi G \varrho}{H} = 1,3901 \cdot 10^{-14} \text{ cent}^{-2}$$

und der Druck an jeder Stelle ist durch die Zustandsgleichung $p = \varrho HT$ gegeben. Die Oberflächenbedingung $T = 0$, völlige Ruhe der Moleküle, sichert der Kugel Beständigkeit. (Der Verlauf von Dichte, Temperatur, Masse und Beschleunigung längs des Radius ist in den Tafeln I—IV enthalten.) Die so gebaute Sonne würde ihre Aufgabe als Wärmespenderin der Erde aber sehr schlecht erfüllen. Ihre

Strahlung wäre so gering, daß sie möglicherweise unsichtbar bliebe. Denn der Temperaturgradient

$$\Delta T = -\frac{\alpha^2 r}{3} \Delta r$$

gibt an der Oberfläche der Kugel eine Temperaturzunahme von $32,23^\circ$ pro Kilometer in die Tiefe steigend. In einem Abstande von $0,1''$, in einer Tiefe von 72 Kilometer findet sich erst eine Temperatur von 2300° . Da aber 72 Kilometer 9 Höhen homogener Erdatmosphäre entsprechen, die Dichte der Sonnengase aber mehr als 1000 mal größer wäre wie die Normaldichte atmosphärischer Luft, so würde der bis in diese Tiefe dringende Strahl über 9000 mal soviel Masse zu passieren haben wie bei senkrechtem Durchschneiden der Erdatmosphäre. Nur aus der Oberfläche sehr nahe liegenden, kühlen Schichten könnte Strahlung nach außen gelangen.

§ 13. Wir haben uns deshalb in erster Linie klar zu werden über die Grundsätze, die uns bei der Rekonstruktion der Sonne zu leiten haben.

A. In welchem Verhältnis haben wir die Masse der Sonne innerhalb und außerhalb des scheinbar scharfen Randes der Photosphäre unterzubringen? Darüber geben genügend genau die Messungen Vogels Aufschluß, nach denen die Strahlung der Sonne ohne die der Photosphäre aufgelagerten Schichten sich etwa verdoppeln würde. Wir haben (Kap. XVI § 17) daraus abgeschätzt, daß über 1 cent² scheinbarer Sonnenoberfläche etwa 10mal mehr Masse liegt, wie über 1 cent² Erdoberfläche. Da, wie wir sehen werden, die Dichte der Sonnengase nach außen sehr rasch abnimmt, können wir von der Erweiterung der Schichten absehen und diese Masse in Nähe der Photosphäre annehmen. Über 1 cent² Photosphäre liegen dann etwa 10^4 Gramm, über der ganzen Photosphäre $6 \cdot 10^{26}$ Gramm, also ein verschwindend kleiner Bruchteil der $3 \cdot 10^{33}$ betragenden Gesamtmasse.

B. In welcher Weise soll die Hauptmasse der Sonne innerhalb der Kugel vom Radius der Photosphäre aufgebaut werden? Soll die Masse möglichst nach dem Sonneninnern zu konzentriert und so ein möglichst dichter Kern geschaffen oder dafür gesorgt werden, daß sich schon in den äußeren Partien beträchtliche Massen finden? Die Polytrope $n = 0$ liefert den Grenzfall konstanter Dichte; je mehr wir n wachsen lassen, desto mehr konzentriert sich die Masse nach dem Mittelpunkt. Über $n = 5$ können wir aber nicht hinausgehen, da wir die Sonnenmasse endlich annehmen. Wir lassen uns zum Entscheid dieser Frage leiten durch den Gedanken, daß die außerordentliche Konstanz der effektiven Sonnentemperatur

nur zustande kommen kann, wenn sich an dem Ausstrahlungsprozeß in kurzem Zeitintervalle gewaltige Sonnenmassen beteiligen. Würde die Hauptmasse der Sonne tief innen liegen, so müßten die Konvektionsströme, welche dieselben in fortwährendem Mischungsprozeß nach der Oberfläche emporführen, ungeheure Strecken zurücklegen. Der Mischungsprozeß würde außerdem durch die Rotation der Sonne, wie sich später ergeben wird, ganz außerordentlich verzögert werden. Wir führen deshalb den Bau nach einer Polytropen mit kleinem n aus.

C. Wir werden innerhalb des Photosphären auf sehr hohe Temperaturen geführt werden, so daß unter gewöhnlichen Druckverhältnissen die Moleküle vieler Elemente und Verbindungen zerfallen würden. Eine vollständige Dissoziation, die man früher im Sonneninnern mit Sicherheit anzunehmen sich berechtigt glaubte, findet für manche Verbindungen bei den im Laboratorium herstellbaren Temperaturen nicht statt; im Gegenteil wird mit steigender Temperatur die Bildung mancher Moleküle begünstigt. Ferner läßt sich nicht beurteilen, in welchem Maße die sich ergebenden, hohen Drücke den Zerfall der Moleküle hemmen. Lassen sich die Ergebnisse von Laboratoriumsversuchen bis auf das Sonneninnere extrapolieren, so wird hier ein durch Druck und Temperatur bedingter Gleichgewichtszustand zwischen Atomen und Atomkomplexen zustande kommen. In Ermangelung besserer Unterlagen werden wir trotzdem annehmen, daß die Sonnenmassen im Zustande völliger Dissoziation sich befinden und eine isentrope Gaskugel aufbauen. Wir benutzen deshalb, in Übereinstimmung mit dem unter B festgelegten Gesichtspunkte, die Isentrope einatomiger Gase, $k = \alpha = \frac{5}{3}$; $n = 1,5$.

D. Würden wir, den bei Finsternissen außerhalb der Photosphäre erscheinenden Massen Rechnung tragend, diese isentrope Gas kugel von größerem Radius wie den Radius der Photosphäre annehmen, so würden sich, selbst wenn dies Plus nur wenige Bogensekunden betragen würde, in dieser äußersten Kugelschale bereits Massen in solchem Betrage ergeben, daß nur ein minimaler Bruchteil der Strahlung der Photosphäre nach außen gelangen könnte. (Selbst wenn wir n bis 4,9 steigern, würden wir aus dieser Schwierigkeit nicht herauskommen). Dazu kommt, daß, wenn wir in der Schwarzschild'schen Beleuchtungsformel (vgl. S. 330) $\alpha = \frac{5}{3}$ setzen, wir eine überaus schlecht mit den Beobachtungen stimmende Helligkeitsverteilung der Sonnenscheibe erhalten. Diese beiden Übelstände erledigen wir, indem wir die photosphärischen Schichten nach besonderen Polytropen

aufbauen. Die Isentrope $n = 1,5$, $k = \alpha = \frac{5}{3}$, regelt den Bau vom Zentrum bis einige Bogensekunden unterhalb der Photosphäre; dann schließt sich stetig eine neue Polytrope an, mit größerem n , kleinerem k , da wir (vgl. Formel (292)) von da ab kleineres Temperaturgefälle erhalten müssen, um die Grenze $T = 0$ weiter hinauszuschieben. Da wir Einatomigkeit noch beibehalten, haben wir $k < \alpha$; die Wärmekapazität γ des neuen Weges ist nach Gl. (22) negativ. Es müssen demnach Wärmequellen vorhanden sein, welche die Temperaturniedrigung und Temperaturerhöhung bei Bewegung auf der Adiabaten verkleinern. Über die Natur dieser Wärmequellen können wir nicht im Unklaren sein, wenn wir überlegen, daß die bereits ziemlich durchstrahlbar gewordenen photosphärischen Massen sich in dem mächtigen Strahlungsfelde der heißeren, tiefer liegenden Partien bewegen. Die aufwärts steigenden Massen kühlen sich nicht mehr isentrop (adiabatisch) ab, die nachgesandte Strahlung wird von ihnen zum Teil absorbiert und vermindert die Abkühlung genau so, wie in einem aufsteigenden Strom feuchter Luft (vgl. Kap. XVII § 11) die eintretende Kondensation die Temperaturgradienten verkleinert. Dieser Prozeß ist umkehrbar; die wieder einwärts gehenden Massen erhitzen sich über ihre Umgebung, ihr Strahlungsvermögen wird für den Ort, an dem sie sich befinden, zu groß, und der Temperaturüberschuß vermindert sich. Die auf- und absteigenden Massen suchen sich auf einen neuen Gleichgewichtszustand einzustellen, den Schwarzschild (Kap. XVI § 13) als Strahlungsgleichgewicht bezeichnet. Sie erreichen denselben um so vollständiger, je kräftiger die Strahlung, und je langsamer die Bewegung ist. Welche Polytrope entspricht dem Strahlungsgleichgewicht? Wir haben Kap. XIV § 14 gesehen, daß eine *vollständige* Gaskugel $n = 5$ in ihren äußeren Partien im Strahlungsgleichgewicht ist. Dies können wir aber nicht mehr nachweisen für eine Schicht eines zusammengesetzten Systems, die nach $n = 5$ gebaut ist. Denn die zum Beweise benutzte Lösungskurve war diejenige unter den zweifach unendlich möglichen Lösungskurven $n = 5$, die durch $(\frac{du}{dr})_{r=0} = 0$ ausgezeichnet ist; eine isoliert auftretende Schicht $n = 5$ ist aber an diese Mittelpunktsbedingung nicht gebunden. Wir haben aber gezeigt, Kap. XVI § 15, daß die Beleuchtungsformel (290), die Schwarzschild für eine Sonnenphotosphäre in konvektivem Gleichgewicht aufgestellt hat, im wesentlichen dieselbe Helligkeitsverteilung liefert, wie Strahlungsgleichgewicht, wenn wir in ihr, der Polytropen $n = 5$ entsprechend, $k = \frac{6}{5}$.

setzen. Die Polytrope $n = 5$ liefert deshalb annähernd dieselbe Zustandsänderung, wie Strahlungsgleichgewicht; da $n = 5$ ferner die Helligkeitsverteilung der Sonnenscheibe sehr befriedigend ergibt (Kap. XVI § 15), nehmen wir an, daß die photosphärischen Schichten nach dieser Polytropen gebaut sind, die sich stetig an die Polytrope $n = 1,5$ der inneren Schichten ansetzt.

E. Auf die angegebene Weise erhalten wir eine richtig beleuchtete Sonnenscheibe; aber die Polytrope $n = 5$ würde die Grenze der Kugel nur wenige tausend Kilometer, einige Bogensekunden, über den Rand der Photosphäre hinausrücken; bei Finsternissen aber zeigen sich leuchtende Massen bis zu mehreren Sonnendurchmessern Abstand. Betrachten wir auch diese als zur Sonnenkugel gehörig, und nichts widerspricht a priori dieser Annahme, so haben wir die Begrenzung der Kugel ebenso weit hinauszurücken. Dieselbe Aufgabe hatten wir bei Behandlung der Erdatmosphäre zu lösen, als es galt, dieselbe bis in Höhe von einigen hundert Kilometern zu strecken. Wir verwandten eine Polytrope von genügend hohem n . Auch bei dem entsprechenden Sonnenproblem werden wir die Polytrope $n = 5$ an geeigneter Stelle verlassen und eine Polytrope anschließen, deren n bedingt ist durch die Ausdehnung, die wir der Kugel geben. Dabei müssen aber, in Übereinstimmung mit A und B, nur im Verhältnis zur Sonnenmasse verschwindend geringe, genügend durchsichtige Massen oberhalb der Photosphäre zu liegen kommen.

§ 14. Wir haben bereits in Kap. VI § 2 die Sonne nach der Polytrope $n = 1,5$ aus dissoziiertem Wasserstoffgase aufgebaut und für den Mittelpunkt gefunden:

$$\text{Dichte } \rho_0 = 8,2710 \text{ gramm cent}^{-3}$$

$$\text{Druck } p_0 = 8,2813 \cdot 10^{15} \text{ Dynen cent}^{-2}$$

$$= 8,1697 \cdot 10^9 \text{ Atmosphären}$$

$$\text{Temperatur } T_0 = 1,2069 \cdot 10^7.$$

Die isentrope Temperatur Θ beträgt $2,9476 \cdot 10^6$. (Diese Temperatur herrscht an der Stelle ausgezeichnet durch die Dichte Eins.)

Ferner ergab sich $\alpha = 3,6971 \cdot 10^{-11}$ gramm $r_i^{-\frac{1}{2}} \text{ cent}^{\frac{1}{2}}$, und das Übersetzungsverhältnis der r_i -Achse der Tabelle 4 in die nach cent gemessene r -Achse zu $1,9019 \cdot 10^{10}$. Werden zum Bau andere dissozierte Gase verwandt, so bleiben an allen Stellen der Kugel Dichte und

Druck ungeändert, während die Temperaturen im Verhältnis der Atomgewichte steigen. Die Mittelpunktsdichte der Sonne ergibt sich so etwas größer, wie diejenige des Eisens. Diese Mittelpunktwerte betrachten wir lediglich als Hilfsgrößen, um die entsprechenden Werte für die äußeren, der Beobachtung zugänglichen Partien bequemer bestimmen zu können. Der letzte berechnete Punkt der r_1 -Achse, $r_1 = 3,64$, entspricht einem Abstand von $4,49' = 3250$ Kilometer von dem Rand der Photosphäre. Innerhalb dieser Schicht liegen Massen, deren Differenz gegen die Gesamtmasse sich durch Rechnung mit fünfstelligen Logarithmen nicht mehr feststellen lässt. (Vgl. Tabelle 4, Kolonne — $r_1 \cdot u_1$). Die geringen, außerhalb der Schicht liegenden Massen wirken immerhin noch mit etwa 280 Absorptionseinheiten. Diese äußere Schicht als Ganzes ist praktisch undurchsichtig und kann deshalb als schwarzer Körper behandelt werden. Die Schicht selbst vom Radius $r_1 = 3,64$ ist ausgezeichnet durch die Werte

$$R = 6,9231 \cdot 10^{10} \text{ cent}$$

$$T_R = 42241$$

$$\varrho_R = 0,001713 \text{ gramm cent}^{-3}$$

$$p_R = 6,003 \cdot 10^9 \text{ Dynen cent}^{-2} = 5923 \text{ Atm.}$$

Würden wir an dieser Stelle auf der Polytropen $n = 1,5$ noch 3250 Kilometer weiter nach außen gehen, so kämen wir am Rande der Photosphäre mit dem Werte Null für T , p und ϱ an; die Gaskugel hätte hier ihre Grenze. Nach den Festsetzungen des vorigen Paragraphen gehen wir jedoch von dieser Stelle an auf der neuen Polytropen $n = 5$ nach außen. Da die Masse der Sonne bis auf einen verschwindend kleinen Bruchteil innerhalb R liegt, können wir von der inneren Gravitation der außen liegenden Massen absehen und g mit $\frac{1}{r^2}$ wachsen lassen. Zur Berechnung der Temperatur integrieren wir Gleichung (292) und erhalten, wenn g_0 den Wert für $r = R$ bezeichnet

$$T = T_R - \frac{g_0 R}{(n+1)H} \cdot \frac{h}{R+h}, \quad n = 5.$$

Die zugehörige Dichte ergibt sich aus der Beziehung

$$\varrho = \varrho_R \left(\frac{T}{T_R} \right)^n,$$

und p wird aus der Zustandsgleichung ermittelt.

Tabelle 31.

h Kilometer	T	ϱ gramm cent $^{-3}$	p . Dynen cent $^{-2}$	p .	\mathfrak{R}	Tr. C.	$\frac{\sigma}{R}$, $\nu = 1$, gramm $^{-1}$ cent 3	$\frac{\sigma}{R}$, $\nu = 1,5463$, gramm $^{-1}$ cent 3
0	42240	0,001713	$6,00 \cdot 10^9$	5923 Atm.	171	10^{-17}	1,82	0,854
1000	31830	0,000867	$2,65 \cdot 10^9$	2615	87	10^{-9}	2,2*	1,47
2000	31430	0,000891	$1,018 \cdot 10^9$	1065	89	0,0001	4,81	2,79
3000	26040	0,000153	$3,298 \cdot 10^8$	925,3	15	0,085	9,14	5,92
4000	20675	0,0000481	$8,254 \cdot 10^7$	81,43	4,8	0,345	23,0	14,9
5000	15320	0,0000108	$1,367 \cdot 10^7$	13,49	1,1	0,79	76,8	49,8
6000	9990	0,00000126	$1,048 \cdot 10^6$	1,033	0,18	0,97	423 :	273
6500	7320	0,000000268	$1,628 \cdot 10^5$	122,1 mm	0,026	0,994	1460	975
6750	6000	$9,90 \cdot 10^{-6}$	$4,580 \cdot 10^4$	36,97 mm	0,009,	0,998	3240	2050
7000	4660	$2,81 \cdot 10^{-8}$	$1,084 \cdot 10^4$	8,18 mm	0,0028	0,999	8900	5750
7500	2010	$4,137 \cdot 10^{-10}$	$6,8 \cdot 5 \cdot 10^1$	0,052 mm	0,000048	0,9999	260000	167,00
7880	0	0	0	0	0	1	∞	∞

Die so ermittelten Werte von T , ϱ und p sind in den ersten Kolonnen der Tabelle 31 wiedergegeben. Die Höhe h ist von $R = 6,9231 \cdot 10^{10}$ cent an in Kilometern gemessen; 725 Kilometer entsprechen $1''$. Die Grenze der Kugel wäre so bis 4630 Kilometer = 6,5' über den Rand der Photosphäre hinausgerückt. Der Rand der Photosphäre $h = 3250$ Kilometer ist ausgezeichnet durch die Werte $T = 24000^\circ$, $\varrho = 0,00012$ gramm cent $^{-3}$, $p = 250$ Atm. Die Dichte ist $\frac{1}{10}$ Normaldichte atmosphärischer Luft; die hohe Temperatur gibt diesem Gase eine Spannkraft von 250 Atm.

Nach den Festsetzungen des vorigen Paragraphen muß die Stelle $h = 0$ sich in geringer Tiefe unterhalb der Photosphären befinden. Wir haben $h = 0$ an die Stelle $r_1 = 3,64$, $r = R$ verlegt. Unsere Absichten würde aber ebensogut entsprochen werden, wenn wir diese Ausgangsstelle wenige tausend Kilometer tiefer oder höher legten. Dementsprechend würden sich die Ausgangswerte von p , ϱ , T erhöhen oder erniedrigeren, die Begrenzung der Kugel $r = \mathfrak{R}$ aber würde sich nur wenig verschieben und der Gang der Elemente p , ϱ , T gemäß Tabelle 31 würde sich mit ziemlicher Genauigkeit wiederfinden, wenn wir von außen nach einwärts rechnen und so die Stelle $h = 0$ der Tabelle auf r festlegen. Da es uns nur darauf ankommen kann, die Verhältnisse der Größenordnung nach richtig darzustellen, so erhalten wir genügende Genauigkeit, wenn wir annehmen, daß der Gang von p , ϱ , T durch die photosphärischen Schichten hindurch durch Tabelle 31 dargestellt wird, wobei es unserem Belieben überlassen bleibt, den scheinbar scharfen Rand der Photosphäre in dem berechneten Intervalle an eine uns günstig scheinende Stelle zu verlegen, (und die Stelle $h = 0$, wenn nötig, demgemäß festzusetzen). Wir legen denselben an die Stelle $h = 5000$ oder 6000 Kilometer. Der Druck

beträgt 13, resp. 1 Atmosphäre. Jewell*) fand aus den Verschiebungen der Spektrallinien der sogenannten umkehrenden Schichten, die in diese Gegenden zu liegen kommen, einen Druck von etwa 5 Atmosphären, also vorzügliche Übereinstimmung. Die Gasdichten sind $1,05 \cdot 10^{-5}$, resp. $1,26 \cdot 10^{-6}$ gramm cent $^{-3}$; in Kap. XVI, § 17 schätzten wir auf andere Weise diese Dichte zu $6,5 \cdot 10^{-7}$ gramm cent $^{-3}$, also wiederum genügende Übereinstimmung.

Die Temperaturen, dissoziiertes Wasserstoffgas vorausgesetzt, wären etwa $15\,000^\circ$ resp. $10\,000^\circ$. Andere Gase würden diese im Verhältnis ihrer Atomgewichte erhöhen; für ein Gasgemisch hätten wir ein mittleres Atomgewicht einzuführen. Wir kommen so zu ähnlichem Resultate wie E. v. Oppolzer**), der, von anderen Gesichtspunkten ausgehend, die Temperatur der Photosphärenoberfläche größer als $20\,000^\circ$ und kleiner als $100\,000^\circ$ ansetzt. In der Kolonne \mathfrak{U} ; resp. Tr. C haben wir die Anzahl Absorptionseinheiten (Kap. XV, § 3) resp. den Transmissionskoefizienten einer Schicht von 1000 Kilometer Dicke von der Gasbeschaffenheit in der Höhe h angegeben. In der Höhe $h = 5000$ bis 6000 Kilometer sind Schichten von dieser Dicke noch viel zu durchlässig, um als schwarze Körper behandelt werden zu können; ihre Temperaturen liegt deshalb bedeutend höher als die angenommene schwarze Temperatur von etwa 8300° . Würden wir den Rand der Photosphäre zu kleineren h verlegen, so würden wir für denselben rasch zu höheren Gastemperaturen kommen, die effektive Sonnentemperatur würde (selbstverständlich) konstant bleiben, die „schwarze“ Temperatur der Photosphärenoberfläche sich wenig vergrößern, da die weiter außen liegenden, absorbierenden Gasmassen zunehmen.

Gehen wir von $h = 5000$ resp. 6000 Kilometer um 1000 Kilometer nach außen, so kommen wir zu $\frac{3}{2}$, resp. zweimal niedrigeren Temperaturen; das Emissionsvermögen vermindert sich also um das fünf-, resp. sechzehnfache; die Gasdichte sinkt um das zehn-, resp. zweihundertfache. Gehen wir von diesen Stellen um etwa $\frac{5}{4}$ nach Innen, so steigt die Emission gleicher Volumteile Sonnengase um das fünfzig-, resp. dreitausendfache. Nimmt man dazu noch das ungeheuer rasche Wachstum der Schichten, die der Sehstrahl tangential zur Photosphäre durchsetzt, so ist klar, daß in diesen Gegenden eine scheinbar scharfe Begrenzung der Photosphäre vorgetäuscht werden muß.

*) L. E. Jewell, J. F. Mohler and W. Hymphreys. Note on the Pressure of the Reversing Layer of the Solar Atmosphere. *Astrophys. Journal T. III. p. 128.* 1896.

**) E. v. Oppolzer. Über die Ursache der Sonnenflecke. *Sitzungsberichte der k. Akad. zu Wien. Bd. CII. April 1893.*

§ 15. In den letzten beiden Kolonnen der Tabelle 31 ist das Verhältnis des Krümmungsradius des in der Höhe h horizontal streichenden Lichtstrahls zum Radius R dieser Schicht, der mit genügender Genauigkeit gleich dem Radius der Photosphäre gesetzt werden kann, angegeben. Der Krümmungsradius σ , $\sigma = -\frac{\mu}{\frac{d\mu}{dr}}$ (vgl. Kap. XVI), ist

leicht zu berechnen. Gehen wir aus von der Gleichung (292) $du = -\frac{1}{n+1} \frac{g dr}{H \Theta}$, multiplizieren mit $n u^{n-1}$, beachten $T = u \Theta$, $\varrho = u^n$, und vernachlässigen $\nu \varrho$ gegen 1, so erhalten wir nach leichter Umformung

$$(315) \quad \frac{\sigma}{R} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{n+1}{n} \frac{H T}{g R \varrho}.$$

Da T für verschiedene Gase umgekehrt wie H sich ändert, ϱ bei gleichem h ungeändert bleibt, ist $\frac{\sigma}{R}$ nur noch von h und ν abhängig. In Tabelle 31 ist $\frac{\sigma}{R}$ angegeben für $\nu = 1$, und für $\nu = 1,5463$, dem angenommenen Brechungsvermögen des dissozierten Wasserstoffgases. Wir sehen, daß durch eine beträchtliche Ausdehnung der photosphärischen Schichten hindurch σ und R von gleicher Größenordnung sind. Dies zwingt uns, unsere Aufmerksamkeit auf eine Theorie des Flashspektrums zu richten, die durch W. H. Julius aufgestellt ist.

Durch Julius*) ist ein neuer Gesichtspunkt für die Sonnenphysik aufgestellt worden. Die Erscheinung der sogenannten anomalen Dispersion, zuerst von Le Roux am Joddampf beobachtet, von Christiansen und Kundt in Lösungen von Körpern mit Oberflächenfarben nachgewiesen, ist durch Versuche von Becquerel, Julius und Ebert auch für eine Anzahl Metalldämpfe festgestellt. Diese experimentellen Ergebnisse, in Verbindung mit theoretischen Betrachtungen von Sellmayer und v. Helmholtz, machen es äußerst wahrscheinlich, daß die beobachteten Erscheinungen nicht anormal sind, sondern das allgemeine Gesetz der Lichtbrechung in Medien, ausgezeichnet durch Absorptionsgebiete, darstellen. Bei Annäherung mit abnehmender Wellenlänge an das Gebiet eines Absorptionsstreifens nimmt der Brechungsexponent rasch zu, zu ungewöhnlich hohen Werten ansteigend, um nach Durchschreitung desselben auf ungewöhnlich kleine Werte, unter Umständen kleiner als Eins, herabzusinken. (Brechungsexponenten < 1 , eine Lichtgeschwindigkeit,

*) W. H. Julius, Sonnenphänomene als Folgen anomaler Dispersion des Lichts betrachtet. Astron. Nachr. Bd. 153. Seite 433. 1900. Angeführt sei ferner dessen zusammenfassender Aufsatz: Théories solaires et la dispersion anomale. Revue général des sciences pures et appliquées. 15 Année. Seite 473. 1904.

größer wie diejenige im Vakuum ergebend, sind nach der gewöhnlichen Undulationstheorie schwer erkläbar; die elektromagnetische Theorie des Lichtes lässt deren Auftreten voraussehen.) Von dieser Stelle nimmt der Brechungsexponent erst rasch, dann langsam zu; an jedem folgenden Absorptionsgebiete wiederholt sich dieser Vorgang. Mag ein Absorptionsgebiet sich über noch so wenig Wellenlängen erstrecken und die Brechungsexponenten in einiger Entfernung von denselben sich noch so wenig von Eins unterscheiden, unmittelbar zu beiden Seiten werden dieselben außerordentlich hohe, resp. niedere Werte annehmen. Ein glühender Dampf ist ausgezeichnet durch Absorptionsgebiete für alle Wellenlängen, die er selbst aussendet. Betrachten wir eine weiße Lichtquelle durch ein Prisma, gebildet aus einem in den Wellenlängen $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_s$ glühenden Dampfe, so kann die Lichtbrechung in demselben meistens vernachlässigt werden für alle Wellenlängen, die $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_s$ nicht zu nahe liegen. Letztere Wellenlängen aber können so stark gebrochen werden, daß das Bild der Lichtquelle in diesen Wellenlängen aus dem Gesichtsfeld verschwindet. Das Bild verschwindet so durch Ablenkung vollständig, während Absorption die Helligkeit desselben nur herabgesetzt hätte. Das abgelenkte Bild erscheint an sonst dunkeln Stellen des Gesichtsfeldes in den Wellenlängen, in denen der ablenkende Dampf leuchtet, in einer Helligkeit, die durch das Strahlungsvermögen der primären Lichtquelle, und nicht durch dasjenige des ablenkenden Dampfes bedingt ist. Es würde zu weit führen auseinanderzusetzen, wie dies Prinzip den verschiedenen Gebieten der Sonnenphysik nutzbar gemacht wird; es sei dazu verwiesen auf die oben erwähnten Arbeiten von Julius*).

Die Anwendung auf das Flashspektrum ergibt sich nach Julius folgendermaßen. Julius steht ganz auf dem Boden der Schmidtschen Theorie. Danach ist die Leuchtkraft der photosphärischen Schichten zu gering, das Licht der Photosphäre und die Helligkeit der Flashlinien hervorzubringen. Innerhalb des sichtbaren Randes der Photosphäre ist der Krümmungsradius σ horizontal streichender Strahlen kleiner (an der Grenze gleich) R ; der Lichtstrahl geht in die Tiefe, das Licht der inneren, heißen Massen emporholend. Außerhalb des scharfen Randes der Photosphäre ist für nicht besonders ausgezeichnete Wellenlängen $\sigma > R$; der von der Erde tangential einfallende

*) Das wesentliche derselben ist auch dargestellt bei E. Pringsheim, Über Brechung und Dispersion des Lichtes auf der Sonne. Archiv der Mathematik und Physik. Bd. 4. Seite 316. 1905. Siehe ferner H. Ebert. Die anomale Dispersion u. ihre Bedeutung für die Astronomie. Vierteljahrsschrift der astron. Gesellschaft. Jahrg. 41. Seite 246. 1906.

Strahl geht wieder zu dünneren, kälteren, höheren Schichten. Allein der Ausdruck für den Krümmungsradius σ enthält ν im Nenner; für die Wellenlängen des Flashspektrums hat ν abnorm hohe Werte, σ kann für diese wieder kleiner wie R werden und der Lichtstrahl in die Tiefe steigen. Das Licht der Flashlinien braucht darnach nicht durch das Leuchten der photosphärischen Schichten verursacht zu sein, sondern ist durch Lichtbrechung in diesen aus der Tiefe emporgeholt. Was sich innerhalb des Randes der Photosphäre für alle Wellenlängen abspielt, wiederholt sich außerhalb desselben für alle Wellenlängen, in denen diese Schichten leuchten können. Jede dieser ausgezeichneten Wellenlängen bestimmt ihren eigenen Radius einer ihr zugehörigen Photosphäre, das Licht aller entstammt den inneren, heißeren Partien. Auf diese Weise gelangen die sehr großen ν zur Wirkung. Bei lokalen Störungen können auch vorübergehend Teile photosphärischer Schichten durch Dichtezunahme nach außen ausgezeichnet sein. Dann würden die abnormen, kleinen Werte von ν ein Tiefersteigen der Strahlen veranlassen und Licht aus der Tiefe hervorholen, dessen Wellenlänge sich von dem der großen ν um einen geringen Betrag unterscheidet. Auf diese Weise soll die gelegentlich beobachtete Verdoppelung der Linien des Flashspektrums zustande kommen. Auch mancherlei Eigentümlichkeiten der Flashlinien finden durch diesen Mechanismus ihre Erklärung. Eine weitere Stütze findet diese Juliussche Theorie in den Zahlen der beiden letzten Kolonnen der Tabelle 31. σ ist für $\nu = 1$ resp. für $\nu = 1,5463$, was wir als mittleren Wert des Brechungsvermögens angenommen haben, von gleicher Größenordnung wie R . Für die ausgezeichneten Wellenlängen des Flash kann ν außerordentlich viel höhere Werte erhalten und σ kleiner R machen, wie erforderlich. Und doch halte ich diese Juliussche Theorie in dieser Form für unhaltbar. Ebenso wenig wie die Schmidtsche Theorie berücksichtigt sie die Schwächung des Lichtes auf den gewaltigen, zurückgelegten Wegen. Was aber in dieser Beziehung der Schmidtschen Theorie zum Vorwurf gemacht wurde gilt auch für diese Juliussche Theorie, ja in verstärktem Maße. Denn Absorptionsvermögen und Emissionsvermögen gehen sich parallel. Gerade für die Strahlen, die den innern, heißen Partien entnommen und nach außen geleitet die hellen Linien des Flash ergeben sollen, muß sich das Absorptionsvermögen der zu durchdringenden Schichten in besonders hohem Maße bemerkbar machen. Haben wir die Mächtigkeit dieser Schichten bestimmt, so dürfen wir ihr Absorptionsvermögen nicht messen, indem wir sie mit der

Erdatmosphäre vergleichen und für diese einen Transmissionskoeffizienten von 0,8 oder 0,85 einführen, wie er derselben für weißes Licht zukommt. Wir haben deren Absorptionskraft vielmehr in der Intensität einzusetzen, wie sie in der Bildung der Linien irdischen Ursprungs im Sonnenspektrum zur Wirksamkeit gelangt, also in außerordentlich erhöhtem Maße. Für die durch extrem hohe Werte des Brechungsexponenten ausgezeichneten Strahlen wird auch das Absorptionsvermögen der Sonnengase besonders hohe Werte besitzen. Eine Schicht von der Dicke 1000 Kilometer in der Höhe $h = 0$ der Tabelle 31 wird nicht mit einem Absorptionsvermögen $\mathfrak{A} = 171$ Einheiten, sondern für die hier in Betracht kommenden Strahlen mit ungleich größerem \mathfrak{A} in Rechnung zu setzen sein. Es erscheint deshalb ganz ausgeschlossen, daß ein Strahl dieser Wellenlängen in den tiefer liegenden photosphärischen Schichten Strecken von nur wenig tausend Kilometern zurücklegen kann, geschweige denn, daß er auf gekrümmtem Wege bis in die inneren Partien des Sonnenballs hinabsteigt. Das Licht des Flash muß bis auf einen verschwindend kleinen Bruchteil den photosphärischen Schichten selbst entstammen. Wie die Schmidtsche Theorie scheint mir diese Julius'sche Theorie nicht nur unhaltbar, sondern auch vollkommen entbehrliech zu sein. Ohne Unstetigkeit physikalischer oder chemischer Natur kann, wie oben geschildert, in den äußeren Partien einer Gaskugel ein scheinbar scharfer Rand und das helle Flashspektrum im Gegensatz zu dem umgekehrten Spektrum der dem Rand entfernteren Partien zustande kommen. Allein auch bei dieser Auffassung ist es nicht ausgeschlossen, daß die anormale Dispersion gemäß der Julius'schen Grundanschauung in Wirksamkeit tritt. Wenn schon die Hauptmenge der Strahlung, die eine photosphärische Schicht in der Höhe h emittiert, dieser selbst entstammt, so ist möglicherweise noch Strahlung beigemengt, die durch Strahlenbrechung tieferen Schichten entnommen ist. Letztere liegen aber nicht im Innern des Sonnenballs, sondern in sehr geringer Tiefe unterhalb des gesehenen Ortes, in einem Abstande, welcher steigen kann, wenn wir nach außen, in dünnere Schichten emporsteigen. Allerdings nimmt hier das Verhältnis $\frac{\sigma}{R}$ unter normalen Verhältnissen auch für die ausgezeichneten Wellenlängen schon sehr große Werte an. Bilden sich aber vorübergehend starke Dichtegefälle aus, so kann an diesen Stellen $\frac{\sigma}{R}$ unter den Wert Eins heruntergedrückt werden; und die Schicht h , die als höhere Schicht schon schwächer leuchtet, kann noch scheinbar Strahlung

emittieren, die tieferen photosphärischen Schichten entstammt. Diese beiden Strahlungen können eine minimale Differenz der Wellenlänge besitzen und die entsprechende helle Linie kann doppelt erscheinen. Ist die bei einigen Flashspektren beobachtete Linienverdoppelung nicht auf Fehler in der Versuchsanordnung zurückzuführen, so kann sie erklärt werden dadurch, daß die beiden Komponenten der eigenen und der erborgten Strahlung entsprechen. Solche Linienverdoppelung würde am leichtesten in den äußeren Schichten auftreten können; dabei erscheint es nicht unmöglich, daß dieselbe Linie an ihrer Basis einfach gesehen wird und in zunehmender Höhe sich spaltet.

§ 16. Aus dem Umstande, daß in den photosphärischen Schichten σ und R für die nicht besonders ausgezeichneten Wellenlängen, gemäß Tabelle 31, von gleicher Größenordnung sind, ziehen wir eine wichtige Folgerung. Der Sehstrahl, der von der Erde nach den äußeren Schichten zielt, wird unter normalen Umständen diese etwas abgelenkt durchsetzen. Da aber σ und R von gleicher Größenordnung sind, so braucht das Dichtegefälle nur wenig zu steigen, um $\sigma < R$ zu machen, diesen Strahl stärker abzulenken und in die tieferen Schichten hinabzuführen. Gebilde, die sich in diesen Schichten befinden, erscheinen dann emporgehoben durch einen Strahlengang, der sein völliges Analogon in der Erdatmosphäre bei der sogenannten oberen Luftspiegelung findet. Nun werden die Eigentümlichkeiten der Sonnenflecke am einfachsten und vollkommensten erklärt durch die bekannte Wilsonsche Theorie, die in denselben kraterförmige Einbuchtungen der photosphärischen Schichten sieht. Dem scheinen einwurfsfreie Beobachtungen zu widersprechen, nach denen häufig diese Flecke, wenn sie sich am Rande der Sonnenscheibe befinden, höher wie ihre Umgebung liegend erscheinen. Dieser scheinbare Widerspruch löst sich sehr einfach durch die oben angeführte Überlegung. Gerade in der Umgebung der Flecke befinden sich bis auf weite Entfernung die Sonnenmassen in besonders heftiger Bewegung, und abnormal große Dichtegefälle können sich vorübergehend leicht einstellen. Das normale Dichtegefälle braucht (nach Tabelle 31) nur verhältnismäßig wenig verstärkt zu werden, damit für den auf der Erde stehenden Beobachter das Phänomen der oberen Spiegelung in der Sonnenatmosphäre eintritt und den Fleck mit seiner Umgebung über die entfernteren Partien der Photosphäre emporhebt. Diese scheinbar höher wie die Photosphäre liegenden Flecke können nicht mehr als Widerlegung der Wilsonschen Theorie geltend

gemacht werden, da sie einfach und ungezwungen durch verstärkte Strahlenbrechung in der Sonnenatmosphäre erklärt werden können.

§ 17. Wie aus Tabelle 31 ersichtlich, würde die Polytrope $n = 5$ die Sonne wenige Bogensekunden außerhalb der Photosphäre endigen lassen. Bei Sonnenfinsternissen treten aber noch weit außerhalb stark leuchtende Massen auf. Einwandsfreie Beobachter wie Laugley und Newcomb haben während der Finsternis im Jahre 1878 die Lichtbüschel der Korona bis in einen Abstand von $6 - 7^\circ$ vom Sonnenrande verfolgt, bis zu einer Ausdehnung von mehr als 25 Sonnenradien. Wir nehmen an, die Korona bestehe aus Gasmassen, die der Sonne zugehören, und haben deshalb die Grenze derselben bis zu diesem Abstande hinauszurücken. Wir verfahren wie bei dem analogen Problem in der Erdatmosphäre; wir benutzen eine Polytrope von hohem n , vernachlässigen, indem wir g wie $\frac{1}{r^n}$ abnehmen lassen, die innere Gravitation der geringen, außerhalb der Photosphäre liegenden Massen, berechnen T nach Gl. (292) und können das zugehörige ϱ leicht aus der Gleichung der benutzten Polytropen finden. Die Klasse n der Polytropen, die bis etwa $r = 26$ Sonnenradien hinausführen soll, bestimmt sich durch den Wert h der Tabelle 31, bei dem wir sie beginnen lassen. Um den Einfluß der Ausgangsstelle zu zeigen habe ich zwei Ausgangsstellen gewählt, die durch die absoluten Temperaturen 6000 und 15000 ausgezeichnet sind, und die Resultate der Rechnung in Tabelle 32 dargestellt.

Zur Zahl $T = 6000$ als untere Grenze wird man durch folgende Überlegung geführt. Die photosphärischen Schichten sind nach der Polytropen $n = 5$ gebaut und stehen deshalb angenähert im Strahlungsgleichgewicht. In ihnen gilt an jeder Stelle die Beziehung Gleichung (282) $A + B = 2E$. Je weiter wir in einer Kugel im Strahlungsgleichgewicht nach außen gehen, desto mehr kann B gegen A vernachlässigt werden; an der Grenze derselben ist B streng gleich Null. In den äußeren Partien ist deshalb $E = \frac{A_0}{2}$. A_0 ist der aus der Kugel austretende Energiestrom, der durch eine schwarze Kugel von der effektiven Temperatur des Gasballes geliefert wird. Bei der Sonne beträgt diese 7000° . Würden die äußeren Schichten in Annäherung noch als schwarz behandelt werden dürfen, so ergäbe sich aus der Beziehung $E = \frac{A_0}{2}$ deren schwarze Temperatur zu $\sqrt{\frac{7000}{2}} = 5900^\circ$. Die wirkliche Gastemperatur wird jedenfalls nicht niedriger liegen. Die im Strahlungsgleichgewicht befindlichen Schichten der Tabelle 31 können deshalb nicht über die zur Temperatur von etwa 6000° ge-

hörige Höhe h hinausreichen. An dieser Stelle lassen wir eine Polytrope $n = 3599$ beginnen, die das Gewünschte leistet, indem sie bis etwa 27 Sonnenradien hinausführt. Da anderseits der Rand der Photosphäre kaum tiefer liegen wird, als bei h zirka 5000 Kilometer, (Tabelle 31) lassen wir bei der durch $T = 15\,000^{\circ}$ ausgezeichneten Stelle eine Polytrope $n = 1439$ beginnen, die zur selben Grenze führt wie die Polytrope $n = 3599$. Die wirklich stattfindenden Verhältnisse werden dann wahrscheinlich durch diese beiden Polytropen abgegrenzt. Die Wärmequellen, welche diese Polytropen von großem n speisen, sind uns ebenso unbekannt wie in dem analogen Problem der Erdatmosphäre (Kap. XVII, § 10), wo wir ebenfalls große n einführen mußten, um in einigen hundert Kilometern Höhe noch atmosphärische Massen vorzufinden.

Tabelle 32.

ν	$n = 3599$			$n = 1439$		
	R	T	ϱ gramm cent $^{-3}$	R	T	ϱ gramm cent $^{-3}$
$+ 0$		6000 $^{\circ}$	$9,9 \cdot 10^{-8}$		15000	$9 \cdot 10^{-6}$
$+ 0,01 R$	5940		$1 \cdot 10^{-24}$	14850		$6 \cdot 10^{-18}$
$+ 0,02 R$	5880		10^{-40}	14700		$2 \cdot 10^{-19}$
$+ 0,05 R$	5765		10^{-70}	14260		10^{-38}
$+ 0,1 R$	5430		10^{-155}	13590		10^{-68}
$+ 0,2 R$	4960			12400		
$+ 0,5 R$	3920			9810		
$+ 1 R$	2890		10^{-1940}	7220		10^{-465}
$+ 1,5 R$	2260			5750		
$2 R$	1850			4600		
$5 R$	811			2000		
$10 R$	340			900		
$15 R$	162			400		
$20 R$	70			200		
$25 R$	18			30		
$26,44 R$	0			0		

Die Tabelle 32 zeigt, daß wir bis weit hinaus hohe Temperaturen vorfinden, wie übrigens zu erwarten war, da bei $g = \text{konst.}$ die Temperatur bis zur Begrenzung linear abnehmen würde. Dabei sind diese Temperaturen Minimaltemperaturen, denn für andere Gase wie dissoziierter Wasserstoff müßten sie im Verhältnis der Molekular- (oder Atom-)gewichte erhöht werden. Allein die Kolonnen der ϱ zeigen, daß wir sehr bald die Gase in einer Verdünnung vor uns haben, die sich der theoretischen Behandlung und unserer Vorstellung vom gasförmigen Aggregatzustand vollkommen entzieht. So lange die Dichte nicht unter die Größenordnung etwa 10^{-20} bis 10^{-25} heruntergeht, können wir die Temperatur, wenn sie auch nicht mehr durch die gewöhnlichen, thermometrischen Methoden meßbar ist, doch

noch definieren durch den Mittelwert der lebendigen Kraft der herumschwirrenden Moleküle, da die statistische Behandlungsweise (vgl. Kap. XIV § 2) noch zulässig ist. In kleinem, von der Erde nach der Sonne gezogenen Winkelraum befinden sich auch noch hinreichend Moleküle, deren Bewegung und Zusammenstöße den Äther zu genügend raschen, durch das Auge wahrnehmbaren Schwingungen veranlassen können. Auch sind wir bereits bei Behandlung der Erdatmosphäre, in Höhen von etwa 300 Kilometer von annehmbaren Bedingungen ausgehend, zu Dichten von der Größenordnung 10^{-20} gelangt. Allein entfernen wir uns weiter von der Sonne, so kommen wir bald zu Verdünnungen, bei denen in dem zur Verfügung stehenden Raume die statistische Behandlungsweise versagt und infolgedessen auch die thermodynamischen Beziehungen, die auf der Zustandsgleichung $pv = HT$ beruhen. Schon in einem Abstand von der Photosphäre geringer als $\frac{1}{10}$ Sonnenradius treffen wir Licht emittierende und Licht reflektierende Massen an in einem Zustande, der sich unserer Kenntnis und theoretischen Behandlung vollständig entzieht.

Man könnte hier vermuten und einwenden, daß wir zu diesen Zuständen nur gelangen durch die angenommene Bauart der Sonne. Allein versucht man deren Bau nach einer Polytropen anderer Klasse oder überhaupt nach irgend einer andern DichteVerteilung längs des Radius, wobei nur die Gleichgewichtsbedingung $dp = -g\varrho dr$ an jeder Stelle erfüllt ist, undachtet man darauf, daß außerhalb der Photosphäre nur ein kleiner Bruchteil der Sonnenmasse liegen kann, etwa von der Größenordnung 10^{26} Gramm, da sonst die Strahlung der Photosphäre zu arg geschwächt würde, so wird man stets schon in geringer Entfernung auf Gase in ähnlicher Verdünnung gelangen. Man kann diesen Verhältnissen gegenüber zwei verschiedene Standpunkte einnehmen. Man läßt die Sonnenkugel wirklich in geringem Abstande von der Photosphäre endigen und betrachtet die weiter außen liegenden Gebilde als selbständige Massenansammlungen unbekannter Natur, die nicht mehr zum eigentlichen Sonnenball gehören. Oder aber man läßt von einer gewissen Entfernung ab die Zustandsgleichung und die statistische Behandlung der Gase fallen und betrachtet die einzelnen Atome oder Moleküle oder Molekelkomplexe. Betrachtungen dieser Art haben wir bereits in dem Kapitel über kosmische Staubmassen in den §§ 13 und 14 angestellt und können die dort erhaltenen Resultate auf den vorliegenden Fall übertragen. Lassen wir von einem gewissen Kugelradius ab die Gasgesetze fallen, nehmen als extremen

Fall an, daß wir von Zusammenstößen der Moleküle vollständig abssehen und diese als Einzelmassen betrachten können, die ausgeworfen den Gesetzen der Planetenbewegung gehorchen, so wird weiter hinaus die Dichteabnahme außerordentlich verlangsamt, so daß sie bald nur wie etwa $\frac{1}{r^3}$ abnimmt. Lassen wir diese neue Anordnung der Moleküle etwa bei Verdünnungen $\rho = 10^{-20}$ oder 10^{-25} einsetzen und gehen etwa bis auf eine Entfernung von 30 Sonnenradien hinaus, so würde die Dichte nur bis 10^{-28} resp. 10^{-28} abgenommen haben. Die Dichte von der Größenordnung 10^{-20} resp. 10^{-25} könnte vermutlich noch stärker abnehmen, ohne daß sich bei der ungeheuren, in Betracht kommenden Entfernung das Aussehen dieser Massen, sowohl in bezug auf emittierte, wie reflektierte Strahlung wesentlich ändern würde. Damit würde sich erklären, daß die Korona in der Nähe der Photosphäre außerordentlich rasch an Helligkeit abnimmt, dann aber an Helligkeit nur langsam verlierend sich bis in verhältnismäßig weite Entfernungen erstreckt. (Über deren strahlenförmiges Gefüge wird später zu sprechen sein).

Von größter Bedeutung erscheint mir der Umstand, daß wir Kap. XV bei Behandlung der Nebelflecke die Gase von gleicher Beschaffenheit, verhältnismäßig hoher Temperatur bei außerordentlich geringer Dichte, gefunden haben. Die Nebelflecke und die äußeren Partien der Korona zeigen mancherlei Ähnlichkeit, wie schwaches Leuchten bei großer Durchsichtigkeit; die thermodynamische Behandlung liefert in beiden die Gase in ähnlichen Zuständen, lebhaft bewegte Moleküle in beträchtlichen, mittleren gegenseitigen Abständen.

Es erscheint nicht unmöglich Beobachtungsdaten zu erhalten um die Dichte der Koronagase abzuschätzen. Würde beim Vorrückgang der Sonne vor einem Fixstern eine Positionsveränderung desselben festzustellen sein, so könnte aus der Größe derselben die Refraktion innerhalb der Korona gerechnet werden. Dasselbe wäre der Fall, wenn es gelingen würde, während einer Finsternis Fixsterne durch die Korona hindurch zu photographieren und eine Veränderung ihrer bekannten Konstellation wahrzunehmen. Aus dem ermittelten Strahlengange könnten die wichtigsten Schlüsse über Dichtegefäß und Dichte innerhalb der Korona gezogen werden.

§ 18. Der Aufbau der Sonne aus dem eigentlichen Sonnenball, in dem die Massenanordnung in erster Linie bedingt ist durch die isentrope Zustandsänderung der längs des Radius bewegten Massen und den darüber liegenden photosphärischen Schichten, die aus dünnen,

durchsichtiger gewordenen Gasen, die sich in dem mächtigen Strahlungsfeld der tieferen, heißen Schichten bewegen und so annähernd in Strahlungsgleichgewicht kommen, bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Beim Bau der Korona versagt sehr bald die Zustandsgleichung der Gase mit ihren Konsequenzen; aber es ist doch noch möglich, sich ein nicht ganz unwahrscheinliches Bild von der Anordnung dieser Moleküle zu verschaffen. Erscheinungen, deren Enträtselung man aber vollkommen hilflos gegenübersteht, sind die Protuberanzen. Die billige Erklärung, dieselben als emporgesleuderte Gasmassen, deren Hauptbestandteil Wasserstoffgas ist, aufzufassen, dürfte wohl ziemlich allgemein nur noch als Notlüge angesehen werden. Die Schwierigkeit besteht weniger in der Erklärung der ungeheuren, auftretenden Geschwindigkeiten, die, spektroskopisch gemessen, bis zu 800 Kilometer/sek. sich ergaben. (Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Schallwellen in dissoziiertem Wasserstoffgas von 100000° beträgt nur 37 Kilometer/sek.) Wir haben (Kap. XVII § 14) gesehen, daß die Geschwindigkeiten, welche die in der Erdatmosphäre aufsteigenden Luftmassen erlangen, mit bedingt sind durch die Geschwindigkeiten, mit der sie von der Erdoberfläche losgehen. Reye*) hat gezeigt, daß Gasmassen, die aus der Photosphäre mit einer Geschwindigkeit von etwa 36 resp. 90 Kilometer/sek. ausgeschleudert werden, ihre Geschwindigkeit in 13 min. resp. 8 min. bis etwa 180 Kilometer/sek. steigern können, wobei dieselbe kontinuierlich zunimmt. Allein wenn Fényi**) mit Hilfe des Fadenmikrometers feststellen konnte, daß eine am 5. Sept. 1888 aufsteigende Protuberanz in $\frac{1}{2}$ Stunde die Reihe der Geschwindigkeiten 2, 119, 54, 105, 171 Kilometer/sek. aufwies oder die Protuberanz vom 15. Juli 1889 innerhalb 10 Minuten die Geschwindigkeiten 72, 6, 65, 24, 154 Kilometer/sek., so kann der Einfluß der Anfangsgeschwindigkeit sich nicht mehr geltend gemacht haben, und man wird vergeblich nach einer Erklärung dieser Geschwindigkeiten und Geschwindigkeitsänderungen suchen, wenn man die Protuberanzen als reelle, aufsteigende Gebilde ansieht. Nimmt man noch dazu, daß man in den ruhenden Protuberanzen Gebilde vor sich hat, die sich an Ort und Stelle entwickeln, ohne jeden sichtbaren Zusammenhang mit den tieferen Schichten, so wird man sich nach einer anderen, auf-

*) Th. Reye, Die Wirbelstürme, Tornados und Wettersäulen in der Erdatmosphäre. Anhang 4. Hannover 1880.

**) J. Fényi, Protuberanzen, beobachtet in den Jahren 1888, 1889, 1890 am Haynald-Observatorium. Kalosza 1902.

steigenden und ruhenden Protuberanzen gemeinsamen Erklärung umsehen müssen. Eine Theorie dieser Erscheinungen, die beide Arten von Protuberanzen auf gleiche Weise scheinbar mühelos erklärt, ist von Julius gegeben worden (loc. cit.).

Danach läßt sich die auf den Gesetzen der anormalen Dispersion beruhende Erklärung des Flash Spektrums (siehe oben § 14) ohne weiteres auf das Licht übertragen, das die Protuberanzen scheinbar aussenden. Der Sehstrahl, der von der Erde aus gezogen die Schichten der Korona durchsetzt, erleidet in der Regel eine nur schwache Ablenkung; der kleinste Krümmungsradius seiner Bahn ist viele tausendmal größer als der Radius der getroffenen Schicht (vgl. dazu Tabelle 31); der Strahl wird auf wenig gekrümmter Bahn hoch über der Photosphäre vorüberstreichen. Trifft der Strahl aber eine Stelle, an der sich zufällig und vorübergehend ein anormal starkes Dichtegefäß ausgebildet hat, so kann er so stark abgelenkt werden, daß er bis zu einer rückwärtigen Stelle der Photosphäre niedersteigt, die nun von der Erde aus gleichsam durch obere Luftspiegelung hoch über der diesseitigen Photosphäre liegend sichtbar wird. Diese Stelle scheint selbst zu strahlen, aber ihre Strahlung ist anders zusammengesetzt wie diejenige der Photosphäre. Der Krümmungsradius wird durch das Brechungsvermögen mit bestimmt. Nur für ganz ungewöhnlich hohe Brechungsvermögen wird der Krümmungsradius hinreichend klein, um den zugehörigen Strahl bis zur Photosphäre herunterzubiegen; und nur in Strahlen dieser Wellenlängen erscheint uns das Stück Photosphäre, kurz ausgedrückt, gespiegelt. Diese ausgezeichneten Farben sind aber nach den Gesetzen der anormalen Dispersion mit solch außerordentlicher Genauigkeit gerade diejenigen, in welchen die ablenkenden Gase der Korona selbst leuchten können, daß die Differenz der Wellenlängen von der Größenordnung wird, die als Verschiebung nach dem Dopplerschen Prinzip interpretiert die beobachtete, scheinbare Geschwindigkeit des Aufsteigens der Protuberanzen ergibt. Die spektrale Untersuchung kann unter diesen Umständen nicht feststellen, ob wir Eigenstrahlung bewegter oder durch ruhende Massen abgelenkte Photosphärenstrahlung vor uns haben. Der große Vorteil dieser Juliusschen Hypothese besteht darin, daß wir in den Protuberanzen nicht mehr emporgeschleuderte Massen sehen müssen, sondern Massen, die in der Nähe der Stelle, in welcher die Protuberanz sichtbar wird, vorhanden waren und nur in anderer Gruppierung sich angeordnet haben, um das zur Ablenkung der Strahlen nötige Dichtegefälle hervorzubringen. Die scheinbare Ge-

schwindigkeit des Aufsteigens einer Protuberanz mißt demnach nur die Geschwindigkeit, mit der diese Zustandsänderung sich fortpflanzt. Julius, auf dem Boden der Schmidtschen Theorie stehend, läßt dies Licht aus den inneren Partien des Sonnenballs heraustreten; die Unmöglichkeit dieses Vorganges habe ich bereits bei Besprechung der analogen Erklärung des Flash Spektrums dargelegt. Das Wesentliche dieser Juliusschen Theorie bleibt aber vollkommen bestehen, wenn wir die photosphärischen Schichten als Lichtquelle ansehen. Die Kolonnen \mathfrak{A} und $Tr.C.$ der Tabelle 31 zeigen, daß dies Licht in den äußeren Schichten keine allzu große Schwächung mehr erfahren wird. Allein diese Theorie scheint an einem andern Umstände zu scheitern. Wie Tabelle 31 zeigt, ist bereits in den untersten Schichten der Korona der kleinste Krümmungsradius eines Strahles tausende Male größer wie der Radius der Schicht, so daß ein Lichtstrahl in der Korona nur wenig gekrümmt verläuft. Die Ablenkung, die der Strahl bei der Protuberanzenbildung erfährt, muß beinahe ausschließlich in jenem verhältnismäßig kleinen Gebiete erfolgen, das eben als Protuberanz sichtbar wird. Nun sind Protuberanzen, die bis zu einem Abstand von einem halben Sonnenradius aufsteigen, keine Seltenheit; sie sind schon bis $688'' = 0,7 R$ Abstand beobachtet worden. Die Ablenkungen, die der Strahl in der Protuberanz erfährt, betragen dann 49° resp. 53° ; selbst bei einem Aufsteigen bis nur $\frac{1}{4}R$ würde die Ablenkung noch 36° betragen. Wie soll aber diese Ablenkung auf verhältnismäßig kurzer Strecke zustande kommen in Gasen, deren Dichte etwa von der Größenordnung 10^{-20} ist? Selbst wenn es möglich wäre, daß an einer Stelle sich ein so ungeheures Dichtegefälle ausbilden kann, wie ist es möglich, daß ein solches Dichtegefälle vorhanden ist durch die ganze, mit dem Sonnenradius vergleichbare Strecke hindurch, auf welcher die Protuberanz sichtbar ist? Das würde zu Ausgangswerten der Dichte an den untern Schichten der Korona führen, die außer aller Wahrscheinlichkeit liegen. Machen wir eine Überschlagsrechnung. Im Ausdruck für den Krümmungsradius (Gleichung (266)) $\sigma = -\frac{1+\nu\varrho}{\nu \frac{d\varrho}{dr}}$ vernachlässigen wir $\nu\varrho$. Be-

zeichnen wir den Radius einer Schicht der Korona mit R , so muß $\frac{\sigma}{R} = -\frac{1}{\nu R \frac{d\varrho}{dr}}$ einen äußerst kleinen Wert annehmen; bezeichnen wir

ihn mit $\frac{1}{N}$, so muß N viele Einheiten betragen. Wir haben dann $\frac{d\varrho}{dr} = -\frac{N}{\nu R}$, und integrieren wir, indem wir von außen nach innen r

von der Höhe der Protuberanz einwärts rechnen, so erhalten wir die Dichte an der Ausbruchsstelle

$$\varrho = \frac{N}{v} \frac{r}{R} + \text{konst; gramm cent}^{-3}.$$

Die Konstante gibt die Dichte an der Höhe der Protuberanz, r ist etwa von gleicher Größe wie R , und wir erhalten $\varrho = \frac{N}{v}$ gramm cent $^{-3}$, also einen Betrag, der viele Einheiten betragen würde, während die Dichte im Sonnenmittelpunkt sich nur zu acht Einheiten ergab. Wir können aber auch auf Grund von Gl. (315) urteilen. Wir hatten

$$\frac{\sigma}{R} = \frac{1}{v} \frac{n+1}{n} \frac{HT}{gR\varrho}.$$

Der Krümmungsradius σ ist bei gleichem T und ϱ ein Minimum für $n = \infty$, isotherm, (vgl. Kap. XVI, § 3). Damit $\frac{\sigma}{R} < 1 = \frac{1}{N}$ wird, muß sein

$$\varrho = \frac{1}{v} \frac{HT}{gR} N.$$

Da aber $H = 2,3 \cdot 10^7$, T von der Größenordnung $5 \cdot 10^8$, $g = 2,6 \cdot 10^4$ und $R = 6,9 \cdot 10^{10}$, so muß sein

$$\varrho = \frac{10^{-4}}{v} N$$

und zwar durch die Höhe der ganzen Protuberanz hindurch. Wir erhalten so Dichten, die unvereinbar sind mit den in den Tabellen 31 und 32 berechneten Werten. Dies sind Schwierigkeiten, die mir unüberwindlich scheinen.

Möglicherweise haben wir es in den Protuberanzen mit Erscheinungen zu tun, zu deren Interpretation unsere physikalischen Kenntnisse des Zustandes der Gase in starken Verdünnungen bei hohen Temperaturen überhaupt nicht ausreichen. In der durch Konvektionsströme durchmischten Sonnenatmosphäre können sich lokal vorübergehend Druck und Temperaturverhältnisse ausbilden, welche der Lichtemission der daselbst vorhandenen Gase besonders günstig sind, und diese leuchtend hervortreten. Diese Verhältnisse kämen dann in erster Linie dem Wasserstoff zugute, der sich durch besondere Leichtigkeit der Linienbildung auszeichnet. Unter günstiger werdenden Umständen können noch weitere Wellenlängen anderer Elemente hinzutreten. Nur fortschreitende *physikalische* Erfahrung wird auf diesem Gebiete Klarheit verschaffen können.

§ 19. Dem Rätsel nach der Natur der Protuberanzen setzen wir ein anderes Rätsel an die Seite, dessen Lösung wir ebenfalls vollkommen hilflos gegenüberstehen. Es ist die Frage nach der Energiequelle, welche die gewaltige, von der Sonne ausgesandte Strahlung

deckt. Eine in kurzen Zeiträumen, die sich nach Tagen und Stunden bemessen, unmerkliche Abnahme der effektiven Sonnentemperatur verhindern die auftretenden Konvektionsströme, welche die Sonne mischen, wodurch die ganze Sonnenmasse gleichmäßig an dem Strahlungsprozeß beteiligt ist. In längeren Zeiträumen aber wird sich der Energieverlust gleichmäßig durch die ganze Sonne hindurch geltend machen. Wir beantworten zuerst die Frage, ob wir uns überhaupt nach einer Deckung dieses Defizits umzusehen haben. Dazu haben wir in erster Linie die Größenordnung der Zeiträume abzuschätzen, die hier in Betracht kommen. Sie dürfte mindestens gegeben sein durch die Zeit, die verflossen ist, seit die sich abkühlende Erde sich mit einer festen Kruste bedeckte. Die Bestrebungen diese Zeit festzusetzen führen zu dem Wärmeleitungsproblem einer sich abkühlenden, festen Kugel; die Temperaturleitfähigkeit der Gesteine und die gemessene geothermische Tiefenstufe gestatten die Formeln numerisch auszuwerten. Das Resultat ist gänzlich unbefriedigend. Während Lord Kelvin diesen Zeitraum zwischen 20—400 Millionen Jahren ermittelt, berechnet ihn Perry zu 6500, Eckholm zu 65 000 Millionen Jahren.*.) Ich habe Kap. XVII, § 18 auseinandergesetzt, daß durch diese Behandlungsweise die Aufgabe überhaupt nicht gelöst werden kann. Anhaltspunkte zur Schätzung der in Betracht kommenden Zeit geben die Untersuchungen der Geologen. Penk**) hat nach verschiedenen Verfahren die innerhalb der drei großen, letzten Zeitalter verstrichene Zeit zu 150—200 Millionen Jahre bestimmt. Innerhalb dieser Zeit dürfte sich die effektive Sonnentemperatur nicht wesentlich geändert haben. Die Anfänge organischen Lebens auf der Erde, ohne Sonnenstrahlung unmöglich, liegen noch ungleich weiter zurück und noch viel weiter der Anfang der Krustenbildung der Erde. Da aber bei einer Solarkonstanten 4 die Sonne jährlich $5,9086 \cdot 10^{38}$ Grammkalorien abgibt, auf 1 Gramm Sonnensubstanz 3,041 Grammkalorien kommen, so ist klar, daß wir uns nach Quellen der Sonnenenergie umzusehen haben. Chemische Energie, wie sie auf der Erde nutzbar gemacht wird, kann hier nicht in Betracht kommen; die Sonne, aus Steinkohle bestehend, die bei Verbrennen pro Gramm 8000 Grammkalorien liefert, würde durch den in richtigem Tempo geleiteten Verbrennungsprozeß in 2630 Jahren abgebrannt sein.

*.) Vgl. dazu die höchst interessante Abhandlung: Oliver Heaviside. Mathematics and the Age of the Earth. Electromagnetic Theorie. Kap. V. Vol. II. 1. London 1899.

**) A. Penk, Das Alter der Erde. Aula. Jahrgang 1, Nr. 14 u. 15. 1895.

§ 20. Der erste Versuch, die ausgestrahlte Energiemenge durch die Arbeit von Gravitationskräften zu bestreiten, röhrt von R. Mayer her. Nach seiner berühmten Meteoritentheorie wird die Strahlung gedeckt durch Verschwinden kinetischer Energie beim Einsturz von Meteoriten in die Sonne. Haben diese Meteoriten in großer Entfernung von der Sonne keine beträchtliche Geschwindigkeit, so müssen jährlich Massen im Betrage von $1,3312 \cdot 10^{48}$ Gramm einstürzen; in 10 Millionen Jahren müßte sich die Masse der Sonne verdoppeln. Diese Massen können nicht von außen kommend in den Raum innerhalb der Erdbahn eintreten; die 2000 Jahre unserer Zeitrechnung müßten sich dadurch um etwa 40 Tage verkürzt haben. Daß aber innerhalb der Erdbahn sich Meteoriten in der Menge umherstreiben, um den Massenzufluß zur Sonne zu decken, erscheint ausgeschlossen.

In verbesselter Gestalt erscheint der Mayersche Grundgedanke in der Helmholtzschen Kontraktionstheorie; allein auch diese Theorie wird sich als gänzlich unbefriedigend herausstellen. Wir haben in Kap. VIII die Energetik eines sich kontrahierenden Gasballcs behandelt. Wir haben Gl. (114) das Potential ψ einer Kugel auf sich selbst aufgestellt,

$$\psi = - G \int_0^R \frac{M \cdot dM}{r} \cdot \text{Erg.}$$

Dies ist die Arbeitsmenge, die aufgewandt werden muß, um die Kugel bis auf unendlich großen Radius auszudehnen.

Für eine Kugel konstanter Dichte ergibt sich

$$\psi = - \frac{3}{5} \frac{G M^2}{R} \text{ Erg.}$$

Die Massen der Sonne, die außerhalb der Photosphäre liegen sind so gering, daß wir von ihrer Anziehungskraft absehen und im folgenden für R den Radius der Photosphäre einsetzen können. Wäre die Sonne Kugel konstanter Dichte, so ergäbe sich

$$-\psi = 2,1681 \cdot 10^{48} \text{ Erg} = 5,1745 \cdot 10^{40} \text{ Grammkalorien};$$

also eine Energiemenge gleich derjenigen, welche die Sonne in 8,7578 Millionen Jahren ausstrahlt. Während der Ansammlung der Sonnenmasse aus dem Zustand hinreichend großer Zerstreuung zu einer Kugel konstanter Dichte vom Radius der Photosphäre haben die Gravitationskräfte diese Arbeit geleistet, die in anderer Form auftreten muß.

Würde sich der Sonnenradius weiter um $\frac{1}{10000}$ seines Wertes kontra-

hieren, der Endzustand wieder konstante Dichte aufweisen, so wäre durch diese Arbeit der Gravitationskräfte eine Energiemenge verfügbar gleich derjenigen, welche die Sonne in 876 Jahren ausstrahlt. Dies die Helmholtzsche Lehre; seine Zahlen habe ich auf die Solar-konstante 4 umgerechnet. Durch oberflächliche Auffassung werden diese Sätze öfters so interpretiert, als könnte durch diesen Mechanismus die Sonnenstrahlung wirklich durch die angegebenen Zeiträume bestritten werden. Doch ist a priori klar, daß ein Teil dieser Energie in der Kugel aufgespeichert bleiben muß. Denn die dem gemeinsamen Attraktionszentrum näher rückenden Massen werden schwerer. Die Spannkraft einer Schicht muß steigen, um dies Gewicht äquilibrieren zu können; ihre Temperatur muß steigen, und dazu muß ein Teil der geleisteten Kontraktionsarbeit verwendet werden. In Kap. VIII habe ich diesen Anteil festgestellt, in Kap. II § 9 den inneren Zusammenhang näher erläutert. Die Menge Energie, die ausgestrahlt werden kann, ist bedingt durch die Atomzahl des Moleküls. Besteht die Kugel aus einatomigem Gase, so wird die Hälfte der berechneten Energiemenge ausgestrahlt, die andere Hälfte in der Kugel aufgespeichert. Die berechneten Zeiräume sind zu halbieren; für zweiatomige Gase sind sie auf $\frac{1}{6}$ zu vermindern. Bei dreiatomigen Gasen kann überhaupt nichts mehr ausgestrahlt werden; die ganze Kontraktionsarbeit wird zur Aufrechthaltung des Gleichgewichtes der Kugel verbraucht. Dazu reicht bei größerer Atomzahl die Kontraktionswärme überhaupt nicht mehr aus, die Kugel ist in labilem Gleichgewicht und stürzt bei Ausstrahlung in sich zusammen.

§ 21. Nun ist aber das Potential einer Kugel auf sich selbst ein Maximum, wenn die Kugel konstante Dichte hat; also für die Polytropenklasse $n = 0$. In den kosmogenetischen Flächengleichungen Seite 126 ist der Wert desselben für verschiedene Polytropenklassen angegeben. Wir haben oben eine Sonne aufgebaut nach der Isentropen einatomiger Gase. Wir nehmen die Solarkonstante dauernd gleich 4 und erhalten in diesem Falle, wenn wir die Kontraktion einer Kugel aus $R = \infty$ bis auf ihren augenblicklichen Radius mit Gesamtkontraktion bezeichnen:

Gesamtkontraktion lieferte $7,3921 \cdot 10^{40}$ Grammkalorien

Konnte die Ausstrahlung liefern für $6,2553 \cdot 10^6$ Jahre

Kontraktion um $\frac{1}{10000}$ deckt für 625 Jahre.

Hätten wir aus zweiatomigen Gasen nach derselben Polytropen

gebaut, so wäre die Gesamtkontraktionsarbeit unverändert geblieben, sie hätte aber den Ausstrahlungsprozeß nur für $2,0851 \cdot 10^6$ Jahre decken können, und die Kontraktion um $\frac{1}{10000}$ würde nur für 208 Jahre ausreichen. In dieser Kugel aus dreiatomigem Gase wird die ganze Kontraktionsarbeit in der Kugel selbst aufgespeichert. Diese Zeiträume sind verschwindend klein gegen diejenigen, die in Betracht kommen. Man könnte nun versuchen dieselben zu vergrößern, indem man die Sonne nach höheren Polytropen aufbaut. Für $n = 4,9$ würde man (vgl. Tabelle Seite 126) bereits 50-fache Beträge erhalten. Allein ein Bau der Sonne nach dieser Polytropen ist unmöglich, wie man bei tastenden Versuchen leicht finden wird. Auch würde man für die Mittelpunktsdichte $1,101 \cdot 10^6$ gramm cent⁻³ erhalten, einen unmöglich hohen Wert, den man in bezug auf das Kontraktionsproblem nicht als bloßes Rechnungssymbol betrachten kann, da die hier größeren Arbeitsmengen gerade daher röhren, daß die Gravitationskräfte auf sehr dichte, widerstehende Massen arbeiten.

Die von v. Helmholtz aufgedeckte Energiequelle reicht nicht im entferntesten aus das Strahlungsdefizit der Sonne zu decken, sie liefert nur einen minimalen Bruchteil der ausgesandten Strahlung.

§ 22. In neuester Zeit hat Arrhenius*) versucht, die Energie chemischer Prozesse nutzbar werden zu lassen. Es hat wohl Ostwald zuerst darauf aufmerksam gemacht, daß trotz der hohen Temperaturen nicht alle Verbindungen in Innern der Sonne zerfallen müssen, sondern gerade die Bildung derjenigen vor sich geht, die Wärme zu ihrer Bildung verbrauchen. Arrhenius nimmt an, daß solche Verbindungen mit ihren Dissoziationsprodukten neben den übrigen dissozierten Gasen in chemischem Gleichgewichte stehen. Würde die Temperatur steigen, so würde sich unter Wärmebindung die Menge der Verbindungen vergrößern, bei Sinken der Temperatur unter Wärmeentwicklung vermindern. Diese Wärmetönung kann Funktion der Temperatur sein; Arrhenius nimmt sie derselben proportional an und schließt: „Darnach würden die chemischen Prozesse, welche der Hauptsache nach bei der Abkühlung der etwa 3—4 Millionen Grad heißen Sonne sich abspielen, etwa 10000 mal mehr Wärme abgeben, als die wärmeergiebigsten Prozesse, welche wir kennen. Weiter ist das Temperaturintervall, welches die Sonne bei ihrer Abkühlung durchlaufen muß, sehr umfassend, so daß eine ganze Menge von

*) Sv. Arrhenius, Lehrbuch der kosmischen Physik. Seite 162. Leipzig 1903.

chemischen Prozessen nach einander während des Erkaltens verlaufen können. Diese Überlegung zeigt, daß es nicht unmöglich ist, anzunehmen, daß die chemischen Prozesse, welche sich bei der Abkühlung der Sonne abspielen, ausreichen können, um die Ausstrahlung der Sonne während Hunderten von Milliarden Jahren auf ihrer jetzige Stärke zu erhalten". Ich kann mich dieser Auffassung nicht anschließen. Denn betrachtet man die Sonne als Gasball, so ist ihr Wärmeausstrahlungsprozeß kein Abkühlungs-, sondern ein Erwärmungsprozeß; die Temperaturen im Sonneninnern sinken nicht, sondern steigen, und diese erwähnten Verbindungen vermehren sich unter Wärmebindung. Nimmt man aber an, der Kontraktionsprozeß der Sonne hätte das Erwärmungsstadium überschritten und wäre mit Abkühlung verbunden, so wird man immer fragen müssen, wie sind früher diese hohen Temperaturen und diese Verbindungen entstanden. Sind sie während des früheren mit Erwärmung verbundenen Kontraktionsstadiums entstanden, das die hohen Temperaturen erst ausgebildet hat, so ist in ihnen eben ein Teil der Kontraktionsarbeit aufgespeichert, und man wird zu demselben Zeitintervalle kommen, ob man die Kontraktionsarbeit direkt verwendet oder den Umweg über diese Verbindungen nehmen läßt. Das wird übrigens bei jedem chemischen Prozesse der Fall sein, dessen Wärmetonung man als Funktion der Temperatur ansetzt, da die Temperatur als Funktion der Kontraktion auftritt. Nimmt man aber die Sonne schon von Anbeginn an heiß genug an und mit solchen Verbindungen in genügender Menge beladen, und forscht nicht weiter zurück, so macht man sich die Sache wohl allzuleicht.

Die Energiequelle der Sonnenstrahlung ist noch vollständig unbekannt; Kräfte, die nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze wirken, können nur einen verschwindend kleinen Anteil der in Betracht kommenden Energie leisten.

B. Die rotierende Sonne.

§ 23. Zu den Erscheinungen, welche das Interesse der Sonnenforschung im höchsten Maße in Anspruch nehmen, gehören die Sonnenflecke. Eine Theorie dieser Gebilden habe ich vor einigen Jahren aufzustellen versucht*). Ich gebe im folgenden den wesentlichen Inhalt dieser Arbeit mit einigen Änderungen und Zusätzen

*) R. Emden. Sitzungsbericht der math.-physik. Klasse der kgl. bayer. Akademie der Wissenschaften. Bd. XXXI. Seite 339. 1901.

wieder. Nach dieser Theorie sind diese Gebilde Erscheinungen, die sich in einer nicht rotierenden Sonne auf ähnliche Weise, wie im folgenden erläutert, zufällig auch ausbilden können, die aber in einer rotierenden, Wärme ausstrahlenden Gaskugel regelmäßig und nach bestimmten Gesetzmäßigkeiten auftreten müssen. Wir werden gleichzeitig einen Einblick erhalten, in welchem Maße die Rotation eines Gasballes das System radialer Konvektionsströme, das durch Wärmeabgabe an der Oberfläche sich in der ruhenden Kugel ausbilden muß, beeinflußt.

§ 24. v. Helmholtz*) hat gezeigt, daß verschieden dichte, mit ungleicher Geschwindigkeit strömende Luftschichten in scharf ausgeprägten Diskontinuitätsflächen aneinander grenzen können; dann sind ähnliche Bedingungen gegeben, wie wenn der Wind über eine Wasseroberfläche streicht, und jene Trennungsfläche wird zur Bildung gewaltiger, paralleler, in Richtung der rascher bewegten Schicht vorwärts eilender Wellenzüge veranlaßt. Diese, meistens unsichtbar, können der Beobachtung zugänglich werden durch parallele, in den aufsteigenden Wellenbergen entstehende Wolkenstreifen, welche oft große Flächen des Firmaments bedecken; durch stürmische Regenschauer, die von Perioden heiteren Wetters unterbrochen, in gleichen Zwischenräumen mehrmals im Tage wiederkehren, sowie durch die Bewegung, die sie einem zufällig von ihnen erfaßten Luftballon mitteilen. Ein glücklicher Zufall gestattete mir, bei einer Ballonfahrt die Längen dieser Wellen, sowie die Beschaffenheit der beiden sich berührenden Luftschichten zu messen und Übereinstimmung der von der Helmholtzschen Theorie geforderten und der gemessenen Wellenlänge zu konstatieren.**)

In einer Reihe von Abhandlungen hat v. Helmholtz die Bedeutung dieser Wellenbildung für die allgemeine Zirkulation der Atmosphäre dargelegt. Die Wärmemenge, welche die Atmosphäre in den äquatorialen Gegenden empfängt und in mächtiger Strömung in den oberen Schichten den Polen zuführt, müssen auch der Erdoberfläche in mittleren Breiten zugeführt werden. Ein einfaches Niedersteigen jener oberen Schichten ist ausgeschlossen, denn, ihr Rotationsmoment beibehaltend, würden schon in niederen Breiten regelmäßig Stürme

*) v. Helmholtz, Über atmosphärische Bewegungen. Gesammelte Abhandlungen. Bd. III. Seite 289.

**) R. Emden, Eine Beobachtung über Luftwogen. Wied. Annal. LXII. pag. 62. 1897.

aufreten, von einer Heftigkeit, wie sie selbst ausnahmsweise nicht beobachtet werden. Der Koeffizient der Wärmeleitung ist viel zu klein, daß sich der Entropiegehalt durch Leitung, der Reibungskoeffizient zu klein, daß sich die Rotationsmomente durch innere Reibung ausgleichen können. Vielmehr werden sich die am Äquator mit Energie gespeisten, polwärts strömenden Luftmassen in immer neu sich bildenden Diskontinuitätsflächen von den unteren, an Energie ärmeren, zurück zum Äquator strömenden Luftmassen absondern. Die immer mächtiger sich ausbildenden Wellen werden mit immer steiler werdender Wellenfront weitereilen, sie werden schließlich wie Wasserwellen überhängend und branden; und an Stelle jedes Wellenzuges bildet sich ein gewaltiger, horizontalgelagerter Wirbel, in dem sich schließlich die beiden Luftsichten mischen. Indem durch Bildung von Diskontinuitätsflächen die Unstetigkeit erst auf die Spitze getrieben wird, bewirkt das Aufrollen derselben stetige Übergänge in bezug auf Rotationsmoment und Entropie, die ohne diesen Vorgang bei der Kleinheit der Koeffizienten für Wärmeleitung und Reibung unmöglich wären. Vgl. oben Kap. XVII, § 15.

Ähnliche Verhältnisse werden auch im *Innern* der flüssig gedachten, rotierenden und Wärme ausstrahlenden Sonne eintreten müssen. Dies näher auszuführen ist der Zweck der nachfolgenden Betrachtungen.*). Dabei werde die Sonne aufgefaßt als Gaskugel in polytropem Gleichgewicht.

§ 25. Wir betrachten die Sonne vom Nordpole aus und bezeichnen eine Bewegung im Sinne der Rotation als Vorwärtsbewegung.

Die Massen an der Oberfläche der Sonne geben Wärme ab, werden dichter und müssen in die Tiefe sinken. Würde die Sonne nicht rotieren, so würden bei dem angenommenen Gleichgewichtszustande diese Massen bis zum Sonnenmittelpunkt herabsteigen und daselbst eine gleiche Menge Materie verdrängen, die den freigewordenen Platz an der Oberfläche ausfüllt. Dies Strömungsbild wird aber durch die Rotation der Sonne vollständig geändert.

Aus Symmetriegründen sind die Flächen gleichen Druckes Rotationsflächen, die Druckkräfte schneiden die Sonnenachse, und die durch Abkühlung dichter gewordenen, einwärts sinkenden Massen

*) Auf die im folgenden zu beschreibende Schichtenbildung hat bereits M. Brillouin hingewiesen in einer kurzen Anmerkung zur französischen Übersetzung der Abhandlung von Lord Kelvin: Über die Sonnenwärme. W. Thomson: Conférences scientifiques et allocutions. pag. 241, Anmerkung.

müssen ihr Rotationsmoment beibehalten. Der Sonnenachse sich nähernd werden sie immer rascher vorwärts eilen und ihr Abtrieb durch Wachsen der Winkelgeschwindigkeit (Zentrifugalkraft) abnehmen. Die aufsteigenden Massen werden, ihr kleineres Rotationsmoment beibehaltend, immer rascher rückwärts eilen, mit abnehmendem Auftriebe. Wir erhalten so ungleich dichte, verschieden rasch rotierende Gasmassen, die in einer ausgeprägten Diskontinuitätsfläche aneinander vorbeigleiten können. Wir erhalten so Diskontinuitätsflächen, die an beliebigen Stellen im Sonneninnern auftreten können. Über ihre Gestalt wissen wir *a priori* nichts, als daß wir es wegen Symmetriegründen mit Rotationsflächen, in den meisten Fällen aber wohl nur mit mehr oder minder großen Stücken von solchen zu tun haben werden. An diesen Diskontinuitätsflächen sind nun die Bedingungen für das Zustandekommen mächtiger Wellen gegeben. Zur Sonnenachse nicht windschief gelegene Wellen oder Wellenzüge werden immer gewaltiger sich ausbilden; vorwärtseilend werden sie überhängend, und an Stelle jeder Welle bildet sich durch deren Brandung ein mächtiger Wirbel, in dem sich der Ausgleich der Rotationsmomente und des Entropiegehaltes der beiden Schichten vollzieht. *Nur auf diese Weise kann ein gleichmäßiger Mischungsprozeß in der rotierenden Sonne zustande kommen, denn die Verschiedenheit der Rotationsmomente verhindert das Zustandekommen beträchtlicher Konvektionsströme in radialer Richtung;* die innere Reibung genügt bei der Kleinheit des Reibungskoeffizienten nicht, in genügend kurzer Zeit die Rotationsmomente auszugleichen, ebensowenig wie die Wärmeleitung den verschiedenen Entropiegehalt.

Dieser geschilderte Mischungsprozeß soll näher untersucht werden. Wir haben in erster Linie die Gestalt und Lage dieser Diskontinuitätsflächen und dadurch die Lagerung der durch sie getrennten Sonnenschichten festzustellen.

§ 26. Wir bezeichnen mit R den Abstand eines Teilchens vom Sonnenmittelpunkt, mit r dessen Abstand von der Sonnenachse; der Durchmesser der Sonne sei = D . Das Rotationsmoment der Masseneinheit, die mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Sonne rotiert, sei:

$$(316) \quad \Omega = \omega r^2 \text{ cent}^2 \text{ sek}^{-1}.$$

Wir betrachten die Sonne als Gaskugel, deren Massen längs des Radius nach einer beliebigen Polytropen angeordnet sind. Für die Sonne haben wir $n < 5$ anzunehmen, damit ihre Masse endlich ist

und ihre Oberfläche im Endlichen liegt. Die nachfolgenden Betrachtungen gelten aber auch für Gaskugeln mit unendlich großem Radius ($n \geq 5$). Durch Rotation werden sich diese Kugeln in Rotationsellipsoide verwandeln. Obwohl die weiteren Betrachtungen auch für solche gelten, sehen wir von dieser Gestaltveränderung ab. Auch ist es gleichgültig, ob wir den Kugeln noch einen festen Kern geben; die auftretende Schichtenbildung, die sich ergeben wird, endigt dann an dessen Oberfläche.

Reibungskräfte lassen wir nun an Stellen mit endlichen Geschwindigkeitsdifferenzen zur Wirkung gelangen.

Wir gehen aus von den hydrodynamischen Gleichungen, die wir Kap. III aufgestellt. Den Anfangspunkt des Koordinatensystems legen wir in den Kugelmittelpunkt; die x -Achse falle mit der Sonnenachse zusammen; die y -Achse gehe durch Vorwärtsbewegung in die z -Achse über. Bezeichnen wir das Potential der Schwerkraft an einer Stelle der Kugel mit V , so ist

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Wir behandeln nur rotierende Bewegungen um die Sonnenachse. Dann ist

$$\begin{aligned} u &= 0 \\ v &= -\omega z = -\frac{\Omega}{r^2} z \\ w &= \omega y = \frac{\Omega}{r^2} y. \end{aligned}$$

Die hydrodynamischen Gleichungen (48) vereinfachen sich, wenn die Bewegung stationär geworden, und nehmen die Form an

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{\Omega^2}{r^3}. \end{aligned}$$

Den Ausdruck $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s}$ haben wir Seite 32 für polytrope Zustandsänderung auf eine wichtige, einfachere Form gebracht. (Gleichungen (52), (53), (54)). Die Gleichungen (a) lauten mit Einführung der neuen Variablen ϑ und π

$$\begin{aligned} (b) \quad \frac{\partial V}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial \pi}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial r} + \vartheta \frac{\partial \pi}{\partial r} &= \frac{\Omega^2}{r^3}. \end{aligned}$$

Innerhalb einer homogenen Schicht gilt also die Beziehung:

$$(A) \quad V + \vartheta \pi = -\frac{1}{2} \frac{\Omega^2}{r^2} + C.$$

§ 27. Wir betrachten nun zwei aneinander grenzende Schichten 1 und 2 und unterscheiden danach $\vartheta_1, \Omega_1, C_1$ von $\vartheta_2, \Omega_2, C_2$.

Damit eine Diskontinuitätsfläche bestehen kann, muß zu beiden Seiten derselben der Druck, und somit auch π , denselben Wert haben. An jeder Stelle der Grenzfläche muß also sein:

$$\pi_1 - \pi_2 = 0,$$

wobei längs derselben π_1 und π_2 variieren und an der Oberfläche der Gaskugel die Werte $\pi_1 = \pi_2 = 0$ annehmen.

Wir erhalten demnach als Gleichung der Meridiankurve der Diskontinuitätsfläche (Berührungsflächen zweier homogenen Schichten), ausgedrückt durch r und R :

$$(B) \quad V\left(\frac{1}{\vartheta_2} - \frac{1}{\vartheta_1}\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \left(\frac{\Omega_1^2}{\vartheta_1} - \frac{\Omega_2^2}{\vartheta_2}\right) - \frac{C_1}{\vartheta_1} + \frac{C_2}{\vartheta_2}.$$

Die Tangentenrichtung dieser Meridiankurve ergibt sich durch Differentieren nach r und R zu:

$$\frac{dV}{dR} \frac{dR}{dr} = \frac{dr}{r^3} \left(\frac{\Omega_1^2 \vartheta_2 - \Omega_2^2 \vartheta_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1} \right)$$

oder:

$$(C) \quad \frac{dr}{dR} = r^3 \frac{dV}{dR} \cdot \left(\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\Omega_1^2 \vartheta_2 - \Omega_2^2 \vartheta_1} \right).$$

Der Differentialquotient hat also stets dasselbe Vorzeichen wie $\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\Omega_1^2 \vartheta_2 - \Omega_2^2 \vartheta_1}$.

Verschwindet dieser Ausdruck, was für $\vartheta_2 = \vartheta_1$, $\Omega_1 + \Omega_2$ der Fall ist, so geht die Meridiankurve über in eine Parallele zur Sonnenachse.

Die Trennungsfläche von Schichten, die bei gleichem Entropiegehalt verschiedenes Rotationsmoment besitzen, sind in diesem Spezialfalle Kreis-Zylinderflächen, parallel und zentrisch zur Sonnenachse gelegen.)*

§ 28. Um im allgemeineren Falle weiteren Einblick in die Formen dieser Flächen und die Lagerung der Schichten 1 und 2 zu erhalten, benutzen wir das von v. Helmholtz bei Behandlung der Diskontinuitätsflächen der Atmosphäre angewendete Verfahren.

Die Gleichung der Trennungsfläche lautet $\pi_1 - \pi_2 = 0$, und für jede Richtung s innerhalb der Trennungsfläche ist deshalb

$$\frac{\partial(\pi_1 - \pi_2)}{\partial s} = 0.$$

*) Vgl. E. J. Wilczynski: Hydrodynamische Untersuchungen mit Anwendungen auf die Theorie der Sonnenrotation. Inauguraldissertation. Berlin 1897, pag. 8.

Erteilen wir der Fläche einer Stelle eine kleine Deformation, so werden π_1 und π_2 sich ändern und ebenfalls $\pi_1 - \pi_2$, falls das Gleichgewicht der Fläche nicht zufällig indifferent ist. Entfernen wir uns aus der Fläche auf der Normalen um die kleine Strecke ∂n , so kann der Quotient $\frac{\partial(\pi_1 - \pi_2)}{\partial n}$ positiv oder negativ sein, und dasselbe Vorzeichen hat bei stetiger Druckverteilung auf jeder Seite der Fläche auch der Quotient $\frac{\partial(\pi_1 - \pi_2)}{\partial h}$, wobei ∂h in beliebiger Richtung zurückgelegt wird. Ist der Differentialquotient positiv, so wird bei dieser Deformation nach dieser Seite hin ein Überdruck entstehen, der die Fläche wieder zurückdrängt; das Gleichgewicht der Fläche ist dann stabil. Wäre der Differentialquotient negativ, so würde die auftretende Druckdifferenz die Deformation vergrößern, und das Gleichgewicht wäre labil. Zur Entscheidung des Gleichgewichts genügt es den Differentialquotienten nach den beiden Richtungen dr und dR zu bilden und zu sehen, in welche Schicht bei stabilem Gleichgewicht dr oder dR hineinragt.

Wir bilden erst $\frac{\partial(\pi_1 - \pi_2)}{\partial R}$ bei konstantem r , d. h. wir gehen parallel zur Sonnenachse nach außen. Gleichung (A) liefert:

$$(317) \quad \frac{\partial(\pi_1 - \pi_2)}{\partial R} = \frac{\partial V}{\partial R} \left(\frac{1}{\vartheta_1} - \frac{1}{\vartheta_2} \right).$$

Der Differentialquotient ist positiv, wenn $\vartheta_1 > \vartheta_2$, also:

Das Gleichgewicht ist stabil, wenn die Schicht mit höherer polytroper Temperatur, in adiabatischen Kugeln die entropiehaltigere Schicht, in Richtung nach dem Sonnenpol höher liegt.

Dabei bleiben noch zwei Möglichkeiten offen. Gehen wir auf der Trennungsfläche nach außen, so können wir uns der Sonnenachse nähern oder von ihr entfernen. Im ersten Falle müßte die Schicht mit höherer polytroper Temperatur auf der Achse abgewendeten Seite der Fläche liegen; im zweiten Falle wäre die Lage derselben auf der der Sonnenachse zugewandten Seite. Um dies zu entscheiden bilden wir aus (A) $\frac{\partial(\pi_1 - \pi_2)}{\partial r}$ bei konstantem R und erhalten:

$$(318) \quad \frac{\partial(\pi_1 - \pi_2)}{\partial r} = \frac{1}{r^3} \left(\frac{\Omega_1^2}{\vartheta_1} - \frac{\Omega_2^2}{\vartheta_2} \right).$$

Der Differentialquotient ist positiv, wenn $\frac{\Omega_1^2}{\vartheta_1} > \frac{\Omega_2^2}{\vartheta_2}$, d. h. wenn zum größeren Rotationsmoment Ω_1 das kleinere ϑ_1 oder ein höchstens gleiches ϑ_2 gehört. In der vor Ausstrahlung geschützten Sonne hat ϑ überall denselben Wert, Ω nimmt von der Achse nach dem Äquator hin zu. Bei der Ausstrahlung nimmt ϑ gleichmäßig über die ganze

Oberfläche ab, so daß $\frac{\Omega^2}{\vartheta}$ vom Pol zum Äquator hin und von der Sonnenachse senkrecht nach außen wächst. Auch tritt die Abkühlung, Abnahme von ϑ , ein für die an der Oberfläche liegenden, niedersinkenden Massen, also größeres Ω , während die aufsteigenden Massen mit größerem ϑ und kleinerem Ω beladen sind. In den Schichten der Sonne wird deshalb stets zum größern Ω das kleinere ϑ gehören.

Bewegen wir uns auf einer Kugelfläche, die wir um den Sonnenmittelpunkt legen, so liegt bei stabilem Gleichgewicht die Schicht mit höherer polytropen Temperatur, (in adiabatischen Kugeln mit höherem Entropiegehalt) und kleinerem Rotationsmoment auf der der Sonnenachse zugewandten Seite der Trennungsfläche.

Die Trennungsflächen der Schichten, die sich in der rotierenden Sonne durch Wärmeausstrahlung bilden müssen, liegen also derart, daß wir bei der Bewegung auf derselben uns von der Sonnenachse entfernen, wenn wir nach außen gehen. Dabei liegt die größere Θ_k , in adiabatischen Kugeln größeren Entropiegehalt besitzende, mit kleinerem Rotationsmoment behaftete Schicht auf der der Sonnenachse zugewandten Seite.

In Übereinstimmung damit zeigt (C), daß $\frac{dr}{dR}$ positiv ist.

Gehen wir parallel zur Sonnenachse nach außen, so treffen wir stets auf Schichten mit höherem Θ_k , ebenso, wenn wir auf einer Kugelfläche von der Äquatorebene her uns der Sonnenachse nähern. Auf keinem dieser beiden Wege können wir deshalb dieselbe Trennungsfläche zweimal durchqueren. Daraus folgt:

Die Trennungsflächen sind keine geschlossenen Flächen, sondern Rotationsflächen, welche die Sonnenoberfläche schneiden.

Der Schnittwinkel ist bestimmt durch den Wert von $\frac{dr}{dR}$ an der Sonnenoberfläche.

§ 29. Über die Gestalt dieser Fläche läßt sich im allgemeinen wenig aussagen; sie ist bestimmt durch $\frac{dr}{dR}$. Aus (C) folgt:

$$\frac{dr}{dR} = r^3 \frac{dV}{dR} \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\Omega_2 \cdot \vartheta_2 - \Omega_1 \cdot \vartheta_1} = r^3 \cdot f(R) \cdot \varphi(\Omega, \vartheta).$$

Die Funktion $f(R) = \frac{dV}{dR}$ ist auf Tafel IV (Seite 89) zur Darstellung gebracht. Vom Werte 0 im Mittelpunkte steigt sie, um nach Überschreitung eines Maximums, dessen Lage auf dem Radius durch n bedingt ist, bis zum Werte g auf der Oberfläche abzunehmen. Über den Wert der Funktion $\varphi(\Omega, \vartheta)$ können wir ohne Kenntnis der Größe

Ω und ϑ nichts aussagen, als daß sie + ist und mit steigender Differenz der polytropen Temperaturen beider Schichten zunimmt. Legen wir eine Ebene durch die x (Sonnen-) und y -Achse, so können wir die Gleichung für $\frac{dr}{dR}$ auch schreiben

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{x} \left(\frac{R}{r^s f(R) \varphi(\Omega, \vartheta)} - y \right)$$

und sehen daraus, daß die Trennungsflächen die Äquatorebene senkrecht durchsetzen, und an derselben Stelle im Sonneninnern die Tangente an der Meridiankurve um so steiler auf der Äquatorebene steht, je kleiner $\varphi(\Omega, \vartheta)$ ist. Die Trennungsflächen sind also um so gekrümmter, je mehr sich die beiden benachbarten Schichten in bezug auf Θ_k , (bei adiabatischen Kugeln in bezug auf Entropiegehalt), und Rotationsmoment unterscheiden. Wären nur die Rotationsmomente, nicht auch die polytropen Temperaturen derselben verschieden, so wären die Trennungsflächen Zylinderflächen parallel zur Sonnenachse.

Die Form der Trennungsflächen ist in vorstehender Figur 23 angedeutet.

Ein Bestehen der rotierenden Sonne aus einer beliebig großen Zahl solcher homogener Schichten würde einen stabilen Gleichgewichtszustand derselben darstellen, falls wir die Reibung an den Trennungsflächen vernachlässigen, und die Schichten so geordnet sind, daß bei Bewegung auf der Äquatorebene nach außen stets Schichten mit größerem Ω und kleinerem ϑ angetroffen werden.

§ 30. Jede dieser rotierenden Schichten zeigt nun gänzlich anderes Verhalten wie die als Ganzes rotierend gedachte Sonne. Während letztere durch die ganze Masse hindurch dieselbe polytrope Temperatur besitzt, ist diese hier nur innerhalb einer Schicht konstant und wechselt von einer Schicht zur andern sprunghweise. In jeder Schicht ist das Rotationsmoment ebenfalls konstant; der kleinste Impuls genügt daher, um ein Massenteilchen eine Schicht in beliebiger Richtung durchqueren zu lassen. In jeder Schicht existiert ein Geschwindigkeitspotential, während die Rotation der Sonne eine Wirbelbewegung darstellt. Innerhalb einer Schicht wächst die Winkel-

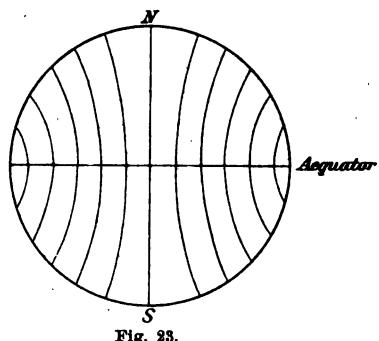


Fig. 23.

geschwindigkeit umgekehrt wie das Quadrat des Rotationsradius, die lineare Geschwindigkeit umgekehrt wie die erste Potenz, die Zentrifugalkraft umgekehrt wie die dritte Potenz desselben. Die Differenz der linearen Geschwindigkeit an einer Berührungsfläche zweier Schichten ist deshalb nicht konstant, sondern nimmt in dem Maße zu, wie sich die Trennungsfläche der Achse nähert. Je tiefer sich eine Trennungsfläche in das Sonneninnere hinabzieht, um so größer wird die Differenz der sich tangierenden Geschwindigkeit und deshalb der Effekt der Reibung längs der Trennungsfläche.

Die Bildung dieser Schichten und die Gestalt der Trennungsflächen ist offenbar vollständig unabhängig von der Anwesenheit eines festen Kernes in der Sonne. In letzterem Falle wird sich die Schichtbildung eben nur bis zur Oberfläche hinabziehen und der feste Sonnenkern mit der zur Photosphäre reichenden, geschichteten Gas- hülle vollständig der Erde mit der geschichteten Atmosphäre entsprechen. Der Unterschied ist nur der, daß die Lagerung der Schichten und der Trennungsflächen, wie sie der Sonne entsprechen, in der Atmosphäre der Erde, wo in der Regel die Tangente an die Meridiankurve der Trennungsfläche der Schichten das Himmelsgewölbe zwischen Horizont und Pol schneidet, nur ausnahmsweise und lokal beschränkt auftreten kann. Der Grund hierfür liegt darin, daß in der am Äquator geheizten Atmosphäre beinahe stets zum größeren Rotationsmoment der größere Entropiegehalt gehört, durch Heizung der Quotient $\frac{\alpha}{\delta}$ abnimmt, während in den sich berührenden Schichten der Sonne zum größeren Rotationsmoment die kleinere polytrope Temperatur gehört, da durch Abkühlung $\frac{\alpha}{\delta}$ zunimmt.

§ 31. Nun ist es wohl ausgeschlossen, daß die Sonne oder der gasförmige Teil derselben vollständig in eine mehr oder minder große Anzahl solcher homogener Schichten zerfällt. Wir haben uns die in Wirklichkeit eintretenden Verhältnisse vielmehr so vorzustellen, daß bei der von außen her stattfindenden Abkühlung der rotierenden Sonne mehr oder minder ausgedehnte Stücke dieser Diskontinuitätsflächen sich bilden werden. Die Verschiedenheit der linearen Geschwindigkeit zu beiden Seiten der Trennungsfläche regt dieselbe zu immer mächtigerer Wellenbildung an; es bilden sich Wellen aus, die schließlich überhängend werden, branden und sich dadurch in gewaltige Wirbel verwandeln, innerhalb deren sich die Mischung eines großen Teils der Massen beider Schichten vollzieht. Inzwischen werden sich an

anderen Stellen neue Trennungsflächen neu entstandener Schichten gebildet haben, an denen sich derselbe Mischungsprozeß wiederholt. *Einzig und allein durch diesen Mechanismus, der nichts Hypothetisches an sich hat und in einer flüssigen, rotierenden, Wärme ausstrahlenden Masse mit Notwendigkeit sich einstellen muß, kann eine gleichmäßige Wärmeabgabe der Sonnenmasse eintreten und ein viel zu rasches Erkalten der äußeren Schichten verhindert werden. Denn Wärmeleitung und innere Reibung der Gase sind zu gering, den Ausgleich der polytropen Temperaturen und der Rotationsmomente zu besorgen. Nur durch die geschilderte Bildung von Diskontinuitätsflächen und deren Aufrollen können durch Mischung verschiedene Rotationsmomente und polytrope Temperaturen ausgeglichen werden.*

§ 32. Wir haben bereits gezeigt, daß in einer homogenen Schicht die Winkelgeschwindigkeit im Quadrat des Abstandes von der Rotations- (Sonnenachse) abnimmt. Daraus folgt, daß es unmöglich ist, von einer Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Sonne zu sprechen. Würde die Sonne zufällig einmal überall mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotieren, so würde diese Konstanz durch die auftretende Schichtenbildung und Mischung gestört werden. Die Winkelgeschwindigkeit muß variabel sein, sowohl durch die ganze Sonnenmasse hindurch, als an derselben Stelle im Laufe der Zeit. Sie braucht in einem bestimmten Moment auch nicht stetig durch die Masse zu variieren, sondern wird an einer Diskontinuitätsfläche sich sprunghweise ändern. *Schneidet eine Diskontinuitätsfläche die Sonnenoberfläche (Photosphäre), so erhalten wir Partien, die daselbst mit ungleicher Winkelgeschwindigkeit aneinander vorbei gleiten.* Dieselbe Überlegung gilt aber auch hinsichtlich der polytropen Temperaturen. Wäre k für die Sonnenmasse und jene Funktion $\varphi(\Omega, \theta)$ bekannt, so ließe sich eine mittlere Verteilung der Winkelgeschwindigkeiten (Rotationsmomente) und polytropen Temperaturen angenähert berechnen. In Ermangelung dessen müssen wir uns mit folgendem allgemeinen Raisonnement begnügen.

Kühlt sich die *nicht* rotierende Sonne von außen her ab, so wird die Wirkung der Abkühlung auf die ganze Oberfläche gleichförmig sein, da die durch Konvektionsströmung bewirkte Mischung bis in gleiche Sonnentiefen hinabreicht. Rotiert die Sonne, so werden jene Strömungen, die sich an den Polen längs der Sonnenachse vollziehen, in keiner Weise gestört. Je näher wir aber dem Äquator kommen, desto weniger tief kann die Strömung hinabgehen, desto näher der

Oberfläche wird sie durch Bildung von Diskontinuitätsflächen gehemmt; und der Wärmeaustausch kann nur durch Aufrollen derselben und Bildung neuer ungleich langsamer in die Tiefe fortschreiten. Der Wärmeverlust der äquatorialen Partien wird deshalb langsamer ersetzt als derjenige der polaren Gegenden; die polytropen Temperaturen der letzteren müssen deshalb verhältnismäßig höher werden. Da aber unter gleichen Drucken die wirklich beobachteten Gastemperaturen mit den polytropen Temperaturen wachsen, so würde der Satz folgen:

a) *In den Schichten der Sonnenoberfläche müssen sich in den polaren Gegenden höhere Temperaturen vorfinden wie am Äquator.*

Ob diese Temperaturdifferenz groß genug ist, um durch Strahlungsmessungen festgestellt werden zu können, muß die Erfahrung lehren.

Ganz dieselben Überlegungen können wir anstellen bezüglich des Austausches der Rotationsmomente (Winkelgeschwindigkeiten) in polaren und äquatorialen Gegenden. Die äußeren Sonnenpartien ziehen sich durch Abkühlung zusammen, ihre Winkelgeschwindigkeit vergrößert sich, und die Hülle muß dem Kern voraneilen. Die in polaren Gegenden ungestört in größte Tiefen hinabreichenden Konvektionsströme sorgen für Ausgleich der Winkelgeschwindigkeit. Je näher wir dem Äquator kommen, desto bälder wird die Strömung durch Diskontinuitätsflächen gehemmt, und desto langsamer teilt sich durch fortwährendes Aufrollen und Neubildung derselben die von außen wachsende Winkelgeschwindigkeit den tiefen Partien mit. Daraus folgt der bekannte Satz:

b) *Die Schichten der Sonnenoberfläche müssen in ihren äquatorialen Gegenden größere Winkelgeschwindigkeiten besitzen wie in den polaren Gegenden.*

Sätze a) und b) sind Parallelsätze, die auf derselben Ursache basieren.

Für die in Satz b) ausgedrückte Erscheinung sind verschiedene andere Erklärungsversuche gegeben worden. C. A. Young hat seine Anschauungen in Newcomb-Engelmanns Populärer Astronomie, 2. Auflage, niedergelegt und schreibt in bezug auf diesen Punkt (Seite 325): „Die äquatoriale Beschleunigung der Sonnenoberfläche scheint mir in den Untersuchungen von Salmon und Wilsing ihre richtige Erklärung gefunden zu haben, welche dieselbe als ein langsam verschwindendes Überbleibsel von Zuständen ansehen, die jetzt nicht mehr bestehen, aber einst, als das Sonnensystem in seiner Bildung begriffen war, vorherrschten“. Gerade diese Erklärung scheint mir aber unhaltbar zu sein. Denn die Konstanz der

effektiven Sonnentemperatur kann nur durch Konvektionsströme erhalten werden, welche die Sonnenmasse fortwährend mischen und stets neue Masse an die Photosphäre emporführen. Die an der Oberfläche liegenden, kühler gewordenen Massen machen in kurzer Zeit anderen, heißeren Massen Platz. Würde aus irgend einem Grunde den äquatorialen Massen ein größeres Rotationsmoment gegeben werden, sie würden sie dies beim Untersinken mit in die Tiefe nehmen und durch den fortwährenden Mischungsprozeß anderen Massen mitteilen, in gleicher Zeit, wie sie ihren vermindernten Entropiegehalt ausgleichen. Die Konstanz der effektiven Sonnentemperatur erfordert, daß fortwährend andere Massen die Photosphäre aufbauen. Nur eine stetig andauernde Ursache kann die in äquatorialen Gegenden stets und unabhängig von der Ankunft neuer Massen vorhandenen größeren Rotationsmomente aufrecht erhalten.

§ 33. Außer durch die Verhinderung einer gleichmäßigen Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Sonne machen sich diese Diskontinuitätsflächen, namentlich der Prozess ihres Aufrollens, noch in anderer Weise bemerkbar.

Die Verschiedenheit der linearen Geschwindigkeiten veranlassen die Flächen zu Wellen, die schließlich überhängend werden und branden. An Stelle eines jeden Wellenzuges entsteht ein gewaltiger Wirbel, der im Sinne der Rotationsbewegung der Sonne rotiert und nicht windschief zur Sonnenachse liegt. Die Differenz der linearen Geschwindigkeit zu beiden Seiten dieser Trennungsfäche wächst (pag. 438) mit deren Annäherung an die Sonnenachse. Der Ort maximaler Wellen- und Wirbelbildung wird deshalb im Innern der Sonne, nicht an der Oberfläche derselben zu suchen sein. In Fig. 24 ist ein solcher Wirbel seiner Lage nach skizziert. Die Theorie der Wirbel lehrt, daß in seiner Achse der Druck sinkt. In Richtung der Achse saugt der Wirbel deshalb Masse ein, um sie in andern Teilen wieder auszuwerfen. Diese Saugwirkung der Zyklonen der Atmosphäre ist bekannt; jeder vertikale Wirbel in einem Flusse macht sich in einer Depression der Oberfläche geltend. Liegt der Wirbel, der sich durch Aufrollen der Diskontinuitätsfläche bildet, der Sonnenoberfläche nicht zu fern, so wird er sich in jener ebenso bemerkbar machen, wie der Wasserwirbel in der Oberfläche des Wassers. *Gibt man die Wilsonsche*

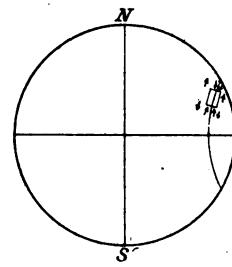


Fig. 24.

Theorie der Beschaffenheit der Sonnenflecke als ein Einsinken der photosphärischen Schichten zu, so brauchen wir die Ursache derselben nur in diesen Wirbeln im Sonneninnern zu suchen, um eine befriedigende Erklärung des Meisten zu erhalten, was wir über die Flecken und ihre Begleiterscheinungen wissen.

§ 34. Es kann nicht im Rahmen dieser Untersuchung liegen, das ganze, ungeheure Beobachtungsmaterial über Sonnenflecke in Hinsicht auf diesen Erklärungsversuch eingehend zu behandeln. Es genüge hier zu zeigen, daß die charakteristischen Erscheinungen, welche die Sonnenflecken darbieten, beinahe a priori vorausgesagt werden können, wenn wir sie mit diesen Wirbeln im Sonneninnern in Verbindung bringen.

Rollt sich eine Diskontinuitätsfläche nicht zu entfernt von der Sonnenoberfläche auf, so wird der sich ausbildende Wirbel sich allmählich auch auf derselben bemerkbar machen. Unruhe der Oberfläche, vermehrte Fackelbildung sind Vorboten des sich bildenden Fleckes, nach unserer Auffassung ein Beweis, daß die Mühle im Innern der Sonne bereits im Gange ist. Die Saugwirkung des Wirbels wird bald die an der Oberfläche der Photosphäre gelegenen Massen ergreifen. An einem oder mehreren Punkten beginnt die Masse einzusinken. Es bildet sich ein höchst unregelmäßiger Krater aus; die Strömung wird allmählich stationär, und in demselben Grade wird der Krater regelmäßigeren Querschnitt annehmen. In radialen Strömen stürzen die photosphärischen Massen in diesen Krater hinein, das Aussehen der Absorptionslinien im Spektrum zeigt die heftige Bewegung im Innern dieses Strudels an. „Dunklere Teile, wie der übrige Kern, sind wahrscheinlich Öffnungen röhrenartiger Vertiefungen, welche in unbekannte Tiefen eindringen“ (Dawes).

Die eingesogenen Massen müssen durch Massen aus dem Sonneninnern ersetzt werden, und der Sonnenfleck wird deshalb von einem an Fackeln reichen Gebiete umgeben sein. „Ein Fleck ist tatsächlich in der Regel von einem Ringe von Eruptionen umgeben, und es hat den Anschein, als ob die ausbrechenden Massen sämtlich in ein und dieselbe Vertiefung strömt, als ob die Massen wirklich hinabgesogen würden, als ob der Fleck eine saugende Wirkung ausübt, die stark genug ist, um die in der Umgebung des Fleckes hervorbrechenden Massen in das Innere des Fleckes hinabzuziehen“ (Young).

§ 35. Gegen diese Wilsonsche Theorie wird öfters der Einwand gemacht, daß die Flecken nicht immer als Vertiefungen, son-

dern zum Teil über der Photosphäre liegend erscheinen. Wir haben schon oben (S. 416) darauf aufmerksam gemacht, daß durch unregelmäßige Strahlenbrechung, wie sie in der Umgebung wirbelnder Gebiete häufig auftreten muß, ein Fleck stark gehoben erscheinen kann. Auch ist durchaus nicht ausgeschlossen, daß diese Wirbel auch in höheren photosphärischen Schichten auftreten und daselbst Flecken ähnlicher Gebilde hervorbringen. Diese Wirbel treten an Stellen, die der Rotationsachse entfernt sind, immer seltener auf. Daß diese selbst in den Schichten der Korona auftreten können, scheint auf manchen Photographien und Zeichnungen derselben zur Evidenz hervorzugehen.

Berechtigter erscheint folgender Einwand. Die Sonne haben wir als polytrope Gaskugel aufgefaßt; d. h. jedes umhergeführte Massenteilchen stimmt mit den verdrängten Teilchen in allen Stücken überein. Wenn demnach ein Wirbel Massen einsaugt, so sind diese ebenfalls polytropen Zustandsänderung unterworfen, die eingesogene Masse stimmt in allen Stücken mit der vorher anwesenden Masse überein, in Druck und Temperatur, und es wäre nicht einzusehen, wie der Wirbel optisch in Erscheinung treten sollte. Allein dieser Schluß gilt nur, wenn beide Massen sich in gleichem Bewegungszustande befinden. Alles was hier zu erläutern ist, haben wir bereits in Kap. XII, §§ 16 und 17 bei Behandlung der Zyklonen der Erdatmosphäre auseinandergesetzt. Wie diese Zyklonen sind auch die Sonnenwirbel kurz geschlossene Zykel, die nur von eigener Energie gespeist werden. Die der Rotationsachse sich nähernden Massen nehmen größere Geschwindigkeit an und können diesen Zuwachs kinetischer Energie nur bestreiten aus Eigenenergie; Druck, Temperatur und Dichte sinken. Die Tabelle 30 können wir fortsetzen bis das Gas mit Schallgeschwindigkeit strömt. Die zugehörige Temperatur T findet sich zu*)

$T = \frac{2}{k+1} T_0$, bei adiabatischer Strömung einatomiger Gase zu $\frac{3}{4} T_0$; bei einer Temperatur des ruhenden Gases von 10000° kann die Temperaturniedrigung an der Grenze bis 2500° betragen und sich schon bei weit geringerem Betrage durch verminderte Lichemission bemerkbar machen. Dabei wird, wie auch aus Fig. 22b ersichtlich, die bis zu größeren Geschwindigkeiten ausgedehnt auch für die Sonnenwirbel charakteristisch ist, (die Fig. ist für $\alpha = \frac{7}{5}$ angelegt, $\alpha = \frac{5}{3}$ würde ihren Charakter nicht ändern), bei Annäherung an die Rotationsachse die Tem-

*) R. Emden, Über die Ausströmungerscheinungen der Gase. Habilitationsschrift. Leipzig 1899. Auch. Wied. Annal. Bd. 69. 1899.

peratur erst langsam, dann rasch sinken. Aus der großen Entfernung, von der Erde aus, betrachtet, wird die Grenze dieser Gebiete scharf ausgeprägt erscheinen und die Gebiete des helleren Halbschattens und dunklen Kernschattens trennen. Die verminderte Temperatur wird die kälteren Massen trotz ihrer geringeren Dichte nach dem Kirchhoff-schen Gesetze absorbieren lassen; die auftretenden horizontalen Dichtegradienten geben Veranlassung, daß Erscheinungen, durch anomale Dispersion verursacht, von der Erde aus wahrgenommen werden können. Ich verweise auf die Besprechung dieser letzteren Verhältnisse durch Julius (loc. cit.).

§ 36. Erschöpft sich allmählich im Sonneninnern der Wirbel durch innere Reibung, so läßt dessen Saugwirkung nach, der scheinbare Krater an der Sonnenoberfläche füllt sich aus, und nur die noch einige Zeit andauernde, vermehrte Fackeltätigkeit an dieser Stelle zeigt, daß im Sonneninnern an dieser Stelle noch Kräfte tätig sind, die allmählich erloschen. Wird, während der Wirbel noch in Tätigkeit ist, durch eintretende Unsymmetrie das Zuströmen nicht in Richtung der Achse erfolgen, so kann der Krater an der Sonnenoberfläche verschwinden, um nach Erneuerung des symmetrischen Zuflusses wieder zu erscheinen. Auf diese Weise können Sonnenflecke mehrmals verschwinden und an derselben Stelle der Sonne wieder aufbrechen. Unter Umständen gelangen solche Partien nur sehr langsam zu völliger Ruhe. Die Wirbelbildung in diesen Stellen ist dann erleichtert, diese Stellen der Sonne scheinen dann lange Zeit hindurch zu Fleckenbildung besonders geneigt zu sein; während einer Fleckenperiode können so gewisse Meridiane der Sonne durch Fleckenhäufigkeit ausgezeichnet sein. Entstehen die Wellen und Wirbel in zu großer Tiefe, so wird sich ihr Auftreten auf der Sonnenoberfläche nur in vermehrter Fackeltätigkeit, nicht mehr in Kraterbildung bemerkbar machen. Auf diese Weise lassen sich auch die „verschleierten Flecke“ erklären, auf die Trouvelot aufmerksam machte. (Vgl. Young, Die Sonne, pag. 129.)

Entsteht der Wirbel nahe der Sonnenoberfläche, so wird sich sein Rotationssinn (im Sinne der Sonnenrotation) auch in einer gleichsinnigen Drehbewegung des Flecks bemerkbar machen müssen, wie sie auch zuweilen beobachtet wird. In den meisten Fällen entsteht der Wirbel in beträchtlichem Abstand von der Sonnenoberfläche, so daß der Drehsinn des Fleckes in erster Linie bedingt ist durch unsymmetrisches Herbeiströmen der angesogenen Massen. Die

ablenkende Kraft der Sonnenrotation auf diese Strömungen ist bei der langsamen Winkelgeschwindigkeit derselben gering (unter gleicher Breite und bei gleicher Strömungsgeschwindigkeit etwa 25 mal kleiner als auf der Erde), besonders in den niederen Breiten, in denen sich die Mehrzahl der Flecke ausbildet. Es kann deshalb auch sehr wohl vorkommen, daß in demselben Fleck je nach der Unsymmetrie des Anströmens verschiedener Drehsinn herrscht.

§ 37. Aussehen, Entstehen und Verschwinden der Flecke wird, sobald man diese wie Wilson betrachtet, vollständig durch dies Aufrollen der Diskontinuitätsflächen klargelegt. Ebenso befriedigend wird dadurch auch die Verteilung der Flecke über die Sonnenoberfläche hinweg erklärt. Die Art und Weise des Entstehens der Schichtbildung und Betrachtung der Fig. 23 lehrt, daß um den Äquator herum eine Zone minimaler Fleckenhäufigkeit vorhanden sein muß. Nur äußerst selten kann eine vielleicht unsymmetrisch ausgebildete Trennungsfläche durch unsymmetrisches Aufrollen einen Fleck in diesen Regionen verursachen. Auch in höheren Breiten werden sich selten Diskontinuitätsflächen bilden und dann nur solche, bei denen erst in großen Tiefen genügende Differenz der linearen Geschwindigkeiten zu beiden Seiten und dadurch Wellen- und Wirbelbildung zustande kommt. In höheren Breiten werden wir wohl Fackeln, auch verschleierte Flecke, aber keine ausgebildeten Flecke mehr antreffen. Der Ort maximaler Fleckenhäufigkeit sind mittlere Breiten, jene Breiten maximaler Schichtbildung, die sich auch an der Oberfläche durch größte Verschiedenheit in der stetigen Anordnung der Winkelgeschwindigkeit verraten. Wäre jene Funktion $\varphi(\Omega, \vartheta)$ bekannt, so ließe sich der Ort maximaler Fleckenhäufigkeit berechnen. So lange dies nicht möglich ist, müssen wir eher umgekehrt aus der Fleckenhäufigkeit auf die Stelle maximaler Schichtbildung schließen. Die meisten Trennungsflächen müssen sich deshalb in mittleren Breiten bilden, wo die Tangentenrichtung an die der Sonnenoberfläche näher liegenden Teile derselben letztere unter 10° bis 40° Breite schneidet, da zwischen diese Grenzen die Fleckenzone (mit seltenen Ausnahmen) eingeschlossen ist. Diese Orte maximaler und ausgeprägtester Schichtbildung haben durchaus nichts Unwahrscheinliches an sich, so daß wir auf Grund unserer Hypothese die Verteilung der Flecken rein mechanisch und ungezwungen erklären können.

Häufig treten Sonnenflecke in gleicher Breite serienweise angeordnet auf. Unsere Hypothese läßt dies voraussehen. Denn eine

Diskontinuitätsfläche bildet öfters nicht eine Welle, sondern es folgen mehrere Wellen aufeinander. Jedem Wellenzuge entspricht bei der Auflösung desselben ein Wirbel, und jedem Wirbel kann ein Sonnenfleck entsprechen. So entstehen Flecke, die ungefähr unter gleicher Breite liegend zu ziemlich gleichen Zeiten auftreten. Eine Serie Sonnenflecke und ein System parallel gelagerter Cirrusstreifen in unserer Atmosphäre werden durch den gleichen Mechanismus hervorgerufen.

Nach einer Periode geringster Fleckenhäufigkeit beginnen die wieder zahlreicher auftretenden Flecke sich in höheren Breiten zu bilden, und die Fleckenbildung schreitet dann nach niedrigeren Breiten fort. Unsere Hypothese läßt auch dies voraussehen. Ist die Sonnenmasse in einer Periode größter Ruhe, so werden sich die an der Oberfläche erkaltenden Massen verhältnismäßig stark abkühlen können, ehe sie niedersinken. Die Diskontinuitätsflächen beginnen in größerer Tiefe und höherer Breite sich zu bilden, und ebenso die Sonnenflecke. In dem Maße, wie die Sonne unruhiger wird, wird das labile Gleichgewicht der erkaltenden Massen an der Oberfläche rascher ausgelöst; die Massen müssen früher, weniger stark erkaltet niedersinken, und dementsprechend bilden sich Schichten und Flecke in immer niedrigeren Breiten.

Durch Auslösung dieses labilen Gleichgewichtes können möglicherweise Planeten die Fleckenerscheinungen beeinflussen.

§ 38. Werden die Sonnenflecke durch Wirbel verursacht, so können sie auch Eigenbewegung besitzen. Ein gerader Wirbelfaden in einer unendlich ausgedehnten, ruhenden Flüssigkeitsmasse wird nicht wandern. Liegt er aber in der Nähe einer festen Wand oder der Flüssigkeitsoberfläche diesen parallel, so wird er sich diesen parallel bewegen im gleichen Sinne, wie infolge seiner Rotationsbewegung die Flüssigkeit zwischen Wirbel und Wand hindurchfließt, und mit einer Geschwindigkeit $= \frac{1}{4}$ derjenigen, mit welcher die Flüssigkeit im Fußpunkte des auf die feste Wand gefällten Lotes strömt. Die Wirbel im Sonneninnern liegen nicht parallel der Sonnenoberfläche, zerlegen wir sie aber in zwei Wirbelkomponenten senkrecht und parallel der Sonnenoberfläche, so wird namentlich für Wirbel in niederen Breiten letztere beträchtlichen Wert besitzen. In niederen Breiten können die Wirbel, namentlich wenn sie nicht in zu großer Tiefe liegen, Eigenbewegung besitzen und zwar im Sinne der Rotationsbewegung der Sonne dieser voran-

eilen. Ebenso können nicht senkrecht zueinander gestellte Wirbel ihre Eigenbewegung gegenseitig beeinflussen. Dadurch lassen sich die verwickelten Eigenbewegungen der Sonnenflecke erklären, die Faye denselben zuschreibt. Daß ein Wirbel (Sonnenfleck) sich in mehrere Wirbel teilt, kann entsprechend an den Wasserwirbeln in einem Flusse häufig beobachtet werden.

Da nach dieser Erklärung die Flecke Folgeerscheinungen des Mischungsprozesses der rotierenden Sonne sind, so wird zur Zeit ihrer maximalen Häufigkeit der Wärmeverlust der Sonnenoberfläche am vollkommensten durch Mischung mit tiefer liegenden, entropiehaltigeren Massen ausgeglichen werden. *Die Zeiten maximaler Fleckenhäufigkeit werden demnach mit Zeiten erhöhter Wärmestrahlung der Sonne (Klimaschwankungen) zusammenfallen.*

Young hat (die Sonne, pag. 173) die Vermutung ausgesprochen, „daß die Flecke vielleicht Vertiefungen in der Photosphäre sind, die nicht unmittelbar durch den Druck von oben nach unten, sondern durch *Verminderung des Drucks von unten nach oben*, infolge von Eruptionen, die in der Nähe stattfinden, erzeugt werden“, und eine etwas künstliche Theorie der Flecke auf dieser Basis versucht.

Die Entstehung von Wirbeln durch Aufrollen der Diskontinuitätsflächen gibt unmittelbar die Druckverminderung im Sonneninnern, nach der Young sucht. Die Fayesche Wirbeltheorie der Sonnenflecke besitzt ihrer mannigfachen Vorzüge wegen noch zahlreiche Verbreitung, trotzdem, im Widerspruch mit der Erfahrung, das Fleckeninnere stets gleichsinnig mit der Sonne rotieren müßte, und die mechanische Erklärung des Zustandekommens dieser Wirbel nicht stichhaltig ist. Die hier skizzierte Theorie besitzt sämtliche Vorzüge, welche die Theorie von Faye auszeichnen, ohne deren Nachteile.

Da über den Flecken, falls sie durch Saugwirkung der im Innern der Sonne arbeitenden Wirbel entstehen, eine absteigende Strömung der die Photosphäre umhüllenden Gase eintreten muß, wie sie v. Oppolzer*) seiner Theorie der Sonnenflecke zugrunde legt, so werden die mannigfachen Vorzüge der Oppolzerschen Theorie auch der hier entwickelten zugute kommen. Die absteigende Strömung, von der Oppolzer ausgeht, findet hier ihre Erklärung.

Schichtenbildung, nach Raum und Zeit variable Rotationsgeschwindigkeiten und den Sonnenflecken analoge Gebilde sind notwendige Folge-

*) E. v. Oppolzer. Über die Ursache der Sonnenflecke. Sitzungsberichte der k. Akad. zu Wien. Bd. CII. April 1893.

erscheinungen des durch Wärmeausstrahlung bewirkten Abkühlungsprozesses eines rotierenden, ganz oder nur in seinen äußeren Schichten aus flüssiger Masse bestehenden Himmelskörpers.

§ 39. Diese Schichtenbildung ist selbstverständlich nicht auf die von der Photosphäre umschlossenen Massen beschränkt, sie reicht, soweit ausstrahlende zur Sonne angehörige Massen vorhanden sind. Auch die Korona muß, falls sie zur rotierenden Sonnenmasse gehört, dieser Schichtenbildung unterliegen. Die Lagerung ihrer Schichten muß den äußeren Partien der Fig. 23 entsprechen; das Aussehen der Korona scheint im wesentlichen diese Struktur zu besitzen. Häufig in der Korona beobachtete Wirbel können dem Aufrollen dieser Diskontinuitätsflächen zuzuschreiben sein. Da diese Schichtenbildung die Bildung von Sonnenflecken nach sich zieht, muß das Aussehen der Korona mit der erhöhten und verminderten Fleckenbildung der Sonne periodisch schwanken.

C. Die pulsierende Sonne.

§ 40. Erleidet eine polytrope Gaskugel eine kleine Deformation, so werden nach Aufhören des Zwanges die Teilchen derselben in ihre Gleichgewichtslage zurückgehen, getrieben durch gegenseitige Anziehung nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze. Sie erlangen auf diesem Wege Geschwindigkeit, die sie über die Gleichgewichtslage hinausführt, und die Kugel gerät in Schwingungen. Es handelt sich darum, deren Schwingungsdauer festzustellen. Für Kugeln, aufgebaut aus inkompressibler Flüssigkeit, ist dies Schwingungsproblem zuerst von Lord Kelvin*) behandelt worden.

In voller Strenge scheint die gestellte Aufgabe sich nicht lösen zu lassen. Wir fügen einige vereinfachende Bedingungen bei. Vor allem sei die Klasse der Polytropen < 5 , d. h. wir behandeln nur die Schwingungen endlicher Kugeln. Ihr Radius sei R . Die Schwingungen sind sehr klein, die Kugelfläche deformiert sich zu einer ihr nahe liegenden Sphäroidfläche. Der Zwischenraum ist klein und von Massen in außerordentlicher Verdünnung angefüllt. Wir machen die Annahme, daß die Anziehungskraft dieser Massen gegenüber der Anziehungskraft der übrigen Massen zu vernachlässigen ist. Wir machen weiter die Annahme, daß die Teilchen während ihrer Bewegung um die Gleichgewichtslage Veränderungen erleiden nach derselben Polytropen, nach der die Kugel aufgebaut ist. Während der Schwingungen

*) W. Thomson, Mathem. and Physical Papers. T. III. Seite 384. 1890.

soll die Kugel stets nach derselben Polytropen aufgebaut sein. Dadurch wird erreicht, daß die in den nachfolgenden Formeln auftretende Größe ϑ während des ganzen Vorganges als konstant behandelt werden kann. Und schließlich nehmen wir an, daß die geringe Deformation einer jeden Kugelschicht ihre Anziehungskraft auf einen äußeren Punkt nicht ändert. Jedes Teilchen im Abstande r bewegt sich danach im Schwerefeld der innerhalb r befindlichen Massen, die im Kugelmittelpunkt konzentriert angenommen werden können. Bei den Schwingungen von Kugeln aus inkompressibler Flüssigkeit ist diese Bedingung a priori erfüllt. Wir werden auch für Gaskugeln durch die angenommene Vereinfachung für die Schwingungsdauer keine falsche Größenordnung bekommen.

§ 41. Wir gehen aus von den hydrodynamischen Gleichungen (48). Für kleine Schwingungen können die Produkte $u \frac{\partial u}{\partial x} \dots$ vernachlässigt werden, und wir erhalten

$$(a) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{cases}$$

Für diese regelmäßigen, periodischen Schwingungen existiert ein Geschwindigkeitspotential φ , derart, daß wir haben

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Bezeichnen wir weiter das Potential der Gravitationskräfte mit V , so ist

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad W = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Die Ausdrücke $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$ können wir für die polytrope Zustandsänderung, welche die Teilchen erleiden sollen, umformen mit Hilfe der Gleichungen (52), (53), (54) und erhalten

$$\vartheta \frac{\partial \pi}{\partial x}, \quad \vartheta \frac{\partial \pi}{\partial y}, \quad \vartheta \frac{\partial \pi}{\partial z}; \quad \vartheta = \text{konst.}$$

ϑ und π lassen sich nach (52) und (53) aus p und ρ ableiten, wenn die Klasse der Polytropen gegeben ist. ϑ ist wie Θ_k nicht nur durch die ganze Kugel konstant, sondern nach unseren vereinfachenden Annahmen auch für jedes Teilchen während seiner Schwingung. Die verschiedenen Gaskugeln unterscheiden sich durch die Werte von ϑ , wie Flüssigkeitskugeln durch die Werte ihrer Dichte ρ . Die hydro-

dynamischen Gleichungen lassen sich nun in Beziehung auf den Ort integrieren und ergeben ein Integral

$$(b) \quad \partial \varphi + \text{konst} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - V.$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial (\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\varrho w)}{\partial z} = 0.$$

Ist die Kugel groß, (und die Gaskugeln, die wir betrachten, sind von der Größe der Himmelskörper), und die Verschiebungen klein, so wird an Ort und Stelle ϱ sich nur wenig ändern; sind die Schwingungen außerdem noch langsam, so können wir um so mehr $\frac{\partial \varrho}{\partial t}$ vernachlässigen und die Kontinuitätsgleichung schreiben

$$u \frac{\partial \varrho}{\partial x} + v \frac{\partial \varrho}{\partial y} + w \frac{\partial \varrho}{\partial z} + \varrho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0.$$

In großen Gaskugeln von der Beschaffenheit der Himmelskörper treten nur sehr kleine Dichtegefälle $\frac{\partial \varrho}{\partial x}, \frac{\partial \varrho}{\partial y}, \frac{\partial \varrho}{\partial z}$ auf; sind zudem die Schwingungen noch langsam, so können wir ihre Produkte mit u, v, w vernachlässigen und erhalten

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

und da ein Geschwindigkeitspotential existiert

$$(c) \quad \Delta \varphi = 0.$$

§ 42. Die Oberfläche der Kugel $r = R$ verwandelt sich in die Sphäroidfläche $r = R + h$; wir setzen:

$$(d) \quad h = Y_0 + Y_1 + \cdots + Y_m = \sum Y_m$$

worin Y_m die Oberflächenkugelfunktion von der Ordnung m bedeutet. Das Geschwindigkeitspotential, die Lösung der Gleichung (c) in Kugelkoordinaten, stellen wir durch eine Reihe räumlicher Kugelfunktionen dar und erhalten

$$(e) \quad \varphi = \sum \left(\frac{r}{R} \right)^m S_m.$$

Die Vertikalgeschwindigkeit eines Teilchens der Oberfläche können wir doppelt ausdrücken, als $\frac{\partial h}{\partial t}$ und als $-\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ für $r = R$. Dies gibt aus (d) und (e) die Beziehung

$$(f) \quad \frac{\partial Y_m}{\partial t} = - \frac{m}{R} S_m.$$

Bezeichnet g die Beschleunigung für $r = R$, so ist das Potential V außerhalb der Kugel $V = -\frac{gR^2}{r}$. Bilden wir diesen Ausdruck für die freie Oberfläche, indem wir $r = R + h$ setzen, berücksichtigen, daß h sehr klein gegen R ist, sowie (d), so erhalten wir

$$(g) \quad V = -\frac{gR^2}{R+h} = -gR + gh = \text{konst} + g \sum Y_m.$$

Mit Hilfe von (e) und (g) bilden wir (b) für $r = R$ und erhalten

$$(h) \quad \partial \pi + \text{konst} = \frac{\partial}{\partial t} \sum S_m - g \sum Y_m.$$

Die freie Oberfläche $r = R + h$ muß eine Fläche konstanten Druckes sein. Da wir aber die Anziehungskraft der zwischen R und $R + h$ gelegenen Massen vernachlässigen, ist auch die Fläche $r = R$ Fläche konstanten Druckes; also ist für $r = R$ auch π konstant und (h) gibt für $r = R$ die Beziehung:

$$(i) \quad \frac{\partial S_m}{\partial t} = g Y_m.$$

Aus (f) und (i) eliminieren wir Y_m (oder auch S_m)

$$(k) \quad \frac{d^2 S_m}{d t^2} = -\frac{mg}{R} S_m,$$

$$(l) \quad \frac{d^2 Y_m}{d t^2} = -\frac{mg}{R} Y_m,$$

und erhalten als Lösungen dieser Gleichungen

$$(m) \quad S_m = A \cos \left\{ \frac{mg}{R} t + \alpha \right\}, \quad Y_m = B \cos \left\{ \frac{mg}{R} t + \beta \right\}.$$

A und B sind Oberflächenkugelfunktionen, welche die Maximalamplituden von S_m und Y_m messen. Benutzen wir diese Lösung zur Bildung von h , so sehen wir, daß die nach einer Kugelfunktion von der Ordnung m deformierte und sich selbst überlassene Oberfläche in Schwingungen gerät. Der Vertikalabstand von der Gleichgewichtslage führt periodische Schwingungen aus, die Dauer τ einer Schwingung beträgt

$$(n) \quad \tau = 2\pi \sqrt{\frac{R}{mg}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{mG M}} = \sqrt{\frac{3\pi}{mG\bar{\rho}}} = 11897 \sqrt{\frac{1}{m\bar{\rho}}} \text{ sek}$$

worin $\bar{\rho}$ die mittlere Dichte der Gaskugel bedeutet.

§ 43. Wir haben somit den Satz:

Die Schwingungsdauer einer polytropen Gaskugel ist unabhängig von der Polytropenklasse, nach der sie gebaut ist, ist unabhängig von deren Größe und nur abhängig von ihrer mittleren Dichte. Die Schwingungsdauer aufeinander folgender Schwingungen höherer Ordnung

verhalten sich umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus den ganzen Zahlen.

Die Zeit $2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ sek ist gleich der Umlaufszeit eines Trabanten, der an der Oberfläche der Kugel dahingleitet.

Für eine Deformation nach der Kugelfunktion Y_0 wird τ unendlich. Dies ist vorauszusehen; denn dieser Deformation entspricht ein gleiches Anwachsen des Radius nach allen Richtungen. Die Teilchen gleiten längs des Radius nach derselben Polytropen, aus der die Kugel gebaut ist, und vernachlässigen wir, wie geschehen, die Massen die aus R heraustrreten, so haben wir immer dieselbe Kugel im Gleichgewichte vor uns. Auch der Fall $m = 1$ liefert kein brauchbares Resultat. Denn eine Abweichung erster Ordnung von der Kugelgestalt nach einer Kugelfunktion von der Ordnung 1 gibt eine gleiche Kugelfläche um einen Mittelpunkt, der von dem Mittelpunkt der gegebenen Oberfläche unendlich kleinen Abstand hat. (Bekanntlich lassen sich auch aus der Gleichung einer Sphäroidfläche $r = R(1 + Y_0 + Y_1 + Y_2 \dots + Y_m)$ durch geeignete Lage des Nullpunktes die Funktionen Y_0 und Y_1 entfernen.) Die Hauptschwingung wird durch $m = 2$ bestimmt. Die Dauer dieser Schwingung beträgt für jede Gaskugel von der mittleren Dichte der Sonne

$$7166 \text{ sek} = 1 \text{ h } 59 \text{ min } 26 \text{ sek},$$

unabhängig von deren Größe. Vereinfacht sich diese Schwingung derart, daß eine Symmetriearchse vorhanden ist, so nimmt die Kugel abwechselnd die Gestalt von Zitrone und Orange an, wobei die Parallelkreise mit einer Poldistanz $54^\circ 44'$ Knotenlinien bilden. Die Teilchen legen Bahnen zurück, deren Gleichung durch $xy^2 = \text{konst.}$ gegeben ist, wo x die auf der Symmetriearchse gemessene Entfernung vom Kugelmittelpunkt, y den Abstand von der Achse mißt.

Die Schwingungsdauer τ einer Kugel inkompressibler Flüssigkeit beträgt

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{2m+1}{2m(m-1)} \cdot \frac{R}{g}} \text{ sek}$$

(Lord Kelvin. loc. cit.). Die Hauptschwingung ergibt $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{5R}{4g}}$ sek, den 1,58-fachen Betrag, wie bei der Gaskugel gleicher mittlerer Dichte. Eine größere Dauer war vorauszusehen, da wir hier die Anziehungs-kraft der über R hinausgetretenen Teilchen nicht vernachlässigen dürfen, und deshalb die außerhalb R bewegten Teilchen ein Feld mit gerin-gerem Potentialgefälle durchlaufen.

Man hat wiederholt vergeblich versucht in längeren Zeiträumen vor sich gehende Gestaltsänderungen der Sonne nachzuweisen. Die hier behandelten Schwingungen mußten diesen Beobachtungen schon ihrer kurzen Perioden wegen entgehen. Nun ist aber durchaus nicht ausgeschlossen, daß eine Gaskugel noch ungleich langsamere Schwingungen ausführen kann. Solche Schwingungen sind z. B. möglich, wenn die Teilchen während ihrer periodischen Bewegung Polytropen folgen, welche die Kugel in eine gleichwertige Kugel von anderer Polytropenklasse umwandeln (Vgl. Kap. VIII §§ 5). Auch können die Schwingungen durch periodisch wirkende, äußere Kräfte erzwungen sein. Betrachtet man aber die Sonne in jedem Moment als adiabatische Gaskugel, so bemäßt sich die Dauer ihrer Gravitationschwingungen nur nach Stunden.

Anhang.

Neunzehntes Kapitel.

Historisches und Kritisches.

Bei der Abfassung des ersten, theoretischen Teiles dieser Schrift habe ich es in bezug auf Kürze und Einheitlichkeit der Darstellung für zweckmäßig gehalten auf bereits vorliegende Arbeiten auf diesem Gebiete nicht einzugehen; dies Schlußkapitel soll fremden Forschungen gerecht werden. Aus der Fülle des Stoffes habe ich herausgegriffen, was für das Problem selbst oder seine Geschichte von Wichtigkeit ist oder mir Anlaß zu nützlichen Bemerkungen zu geben schien.

§ 1. Das erste Kapitel, die vollkommenen Gase, hätte, falls dies Buch nur für den Physiker bestimmt gewesen wäre, wegbleiben können. Es enthält für diesen nur hinlänglich Bekanntes, obwohl ich die vollkommenen Gase formell etwas anders einführt, als dies gewöhnlich geschieht, wobei namentlich die Unabhängigkeit ihrer Wärmekapazität c , von Druck und Dichte klar hervortritt. Da aber die vorangehenden Ausführungen für weitere Kreise berechnet sind, habe ich dasselbe vorausgeschickt, namentlich um auf die beiden fundamentalen Begriffe des Energiegehaltes und Entropiegehaltes eines Körpers hinweisen und auf das Unsinnige eines Begriffes „Wärmegehalt“ aufmerksam machen zu können. Es ist merkwürdig, wie wenig der Begriff der Entropie in meteorologischen Arbeiten Beachtung findet und mit welcher Hartnäckigkeit von einem Wärmegehalt der Luft, eines Dampfes usw. gesprochen wird, womit bald der Energiegehalt, bald der Entropiegehalt gemeint ist. Dabei erleichtert der Gebrauch des Wortes Wärmegehalt nicht etwa die Ausdrucksweise, sondern ist nur dazu angetan, die richtige Auffassung zu erschweren. Klingt es nicht ganz widersinnig, wenn bei Behandlung der Energetik einer sich kontrahierenden Gaskugel (vgl. oben Kap. VIII) Betti in einer wertvollen, kleinen Arbeit

ausspricht:*) „Quando la massa gazosa perde una quantità di calore δQ , la quantità di calore contenuto nella massa aumenta di una quantità uguale a $\frac{\delta Q}{3x-4}$; während das scheinbar Paradoxe sofort verschwindet, wenn statt calore contenuto Energiegehalt gesetzt wird. Es gibt wohl zugeführte Wärmemengen ΔQ , welche eine Änderung des Entropiegehaltes $\Delta \eta > 0$ und eine Änderung des Energieinhaltes $\Delta \varepsilon \gtrless 0$, je nach der durch den Weg bedingten Größe der vom Gase zu leistenden Arbeit, zur Folge haben, nicht aber einen Wärmegehalt. Allein ich fürchte, daß die letzte Abhandlung, in der von einem Wärmegehalt gesprochen wird, noch lange Zeit nicht wird geschrieben sein.“

§ 2. Die polytropen Kurven, von denen das zweite Kapitel handelt, werden in der technischen Thermodynamik als wertvolles und bequemes Hilfsmittel fortwährend angewendet; in der Physik haben sie noch nicht die verdiente Würdigung gefunden. Deren kurze Besprechung dürfte deswegen manchem willkommen sein. Dabei habe ich nicht, wie es gewöhnlich der Fall ist, die Polytropen eingeführt durch ihre Gleichung $pv^k = \text{konst.}$, k beliebig, sondern habe sie definiert aus ihrer wichtigsten Eigenschaft, umkehrbare Wege beliebiger, aber konstanter Wärmekapazität zu sein, wodurch ihre physikalische Bedeutung besonders hervortritt. Dabei ergab sich unmittelbar der Kap. II, § 3 ausgesprochene Satz, daß alle umkehrbaren Kreisprozesse, die aus zwei Isothermen und zwei Polytropen beliebiger, aber gleicher Klasse zusammengesetzt sind, denselben maximalen Nutzeffekt haben wie der bekannte Carnotsche Kreisprozeß. Herr Prof. M. Schröter hatte die Liebenswürdigkeit mich darauf aufmerksam zu machen, daß dieser Satz bereits von ihm, allerdings auf gänzlich verschiedene Weise, abgeleitet wurde.**) Die verdiente Beachtung hat dieser wichtige Satz nicht gefunden. Das so exakte Lehrbuch der Thermodynamik von W. Voigt z. B. erklärt ausdrücklich (mit Hinweis auf K. Neumann, Bd. I. Seite 169), daß unter allen zwischen denselben Isothermen verlaufenden Kreisprozessen idealer Gase der Carnotsche den größten Wirkungsgrad besitzt; dabei ist

*) E. Betti: Sopra l'equilibrio di una massa di gaz perfetto isolata nello spazio. Il nuovo cimento. T. VII. pag. 26. 1880.

**) M. Schröter, Über die Anwendung der Regeneratoren bei Heißluftmaschinen. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. Bd. XXVII. Seite 449. 1883.

(Seite 150) der Carnotsche Kreisprozeß definiert als bestehend aus zwei Isothermen und zwei Isentropen. Auf Seite 179 (loc. cit.) ist in Formel (138) der Umsatz eines Kreisprozesses zwischen zwei Isothermen und zwei Polytropen abgeleitet mit dem Zusatze, daß sich daraus der Wirkungsgrad sogleich angeben läßt; es ergibt sich selbstverständlich derjenige eines Carnotschen Prozesses. Vor kurzem hat S. Valentiner*) gezeigt, daß eine ganze Klasse von Kreisprozessen dasselbe leistet wie der Carnotsche, während A. Boltzmann**) den Satz verfocht: „Es gibt also keinen vom Carnotschen um ein endliches verschiedene Kreisprozeß, welcher dasselbe leistet wie der Carnotsche.“ Diese Streitfrage läßt sich leicht wie folgt erledigen. Ein umkehrbarer Kreisprozeß bestehe aus vier Kurvenstücken A , B , C , D . Dann ist

$$\int_A \frac{dQ}{T} + \int_B \frac{dQ}{T} + \int_C \frac{dQ}{T} + \int_D \frac{dQ}{T} = 0.$$

Sind A und C Stücke von Isothermen von den Temperaturen T_1 und T_2 , Q_1 und Q_2 die aufgenommenen Wärmemengen, so ist

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \int_B \frac{dQ}{T} + \int_D \frac{dQ}{T} = 0.$$

Damit der Kreisprozeß dasselbe leistet wie ein Carnotscher ist notwendige und hinreichende Bedingung, daß

$$\int_B \frac{dQ}{T} + \int_D \frac{dQ}{T} = 0,$$

d. h. auf den Strecken B und D muß die Entropie um gleiche, aber entgegengesetzte Beträge zunehmen. Das ist die von Valentiner auf andere Weise aufgestellte Bedingung; sie wird durch Polytropen erfüllt.

§ 3. Die in Kap. II eingeführte polytrope Temperatur ist verwandt mit einer Größe, die in der Meteorologie als potentielle Temperatur bekannt ist. In seiner grundlegenden Arbeit über atmosphärische Bewegungen hat v. Helmholtz***) die Temperatur, die eine

*) S. Valentiner, Über den maximalen Wirkungsgrad umkehrbarer Kreisprozesse. Annal. der Physik. Bd. XV. Seite 829. 1904.

**) A. Boltzmann, Bemerkung zu Herrn Valentiners Abhandlung: Über den maximalen Wirkungsgrad umkehrbarer Kreisprozesse. Annal. der Physik. Bd. XVIII. Seite 642. 1905.

***) H. v. Helmholtz, Über atmosphärische Bewegungen. I. Ges. Abhandl. III. Seite 289.

Luftmasse annimmt, wenn sie adiabatisch auf einen Normaldruck p_0 gebracht wird, deren „bleibenden Wärmegehalt“ genannt, auf Rat von v. Bezolds später aber als „potentielle Temperatur“ bezeichnet. In meteorologischen Problemen leistet die Einführung dieser Temperatur, die meistens mit einem Minimum von Rechnung zu ermitteln ist, wichtige Dienste. In Aufgaben allgemeiner Natur aber empfiehlt es sich das Gas nicht auf einen Normaldruck, sondern auf die Dichte 1 gramm cent⁻³ überzuführen; der Zusammenhang mit dem absoluten Maßsystem ist so vollständiger gewahrt, und der Logarithmus dieser Temperatur ist dem Entropiegehalte proportional. Beschränkt man sich nicht auf adiabatische Vorgänge, so läßt sich diese Betrachtung verallgemeinern; hat man es mit einer polytropen Zustandsänderung vom Exponent k zu tun, so ist jede Luftmasse durch eine bestimmte polytropen Temperatur Θ_k ausgezeichnet, die, wie oben gezeigt, leicht zu bestimmen ist und die Zustandsänderung bequem numerisch zu verfolgen gestattet.

§ 4. Die ersten Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf meteorologische Probleme werden ziemlich allgemein v. Helmholtz und Hann zugeschrieben. Ersterer hatte (1865) in einem populären Vortrage*) auf die Temperaturänderung aufmerksam gemacht, die ein Luftstrom erleiden muß, der beim Überschreiten eines Gebirgszuges unter niedrigeren, dann wieder unter höheren Druck gerät; unabhängig davon hatte letzterer aus demselben Prinzipie die hohen Temperaturen und (relativen) niederen Feuchtigkeitsgehalte der Föhnwinde erklärt. Doch hat bereits Hann selbst darauf hingewiesen,**) daß schon in den 40er Jahren Espy und etwas später Dove die Temperaturänderungen auf- und absteigender Ströme auf Volumänderung der Luft zurückführten; ob in bewußter Anwendung thermodynamischer Prinzipien mag dahingestellt bleiben. Wir können jedoch noch zwei Jahrzehnte weiter zurückgehen um zu finden, daß dies Verdienst schon Sadi Carnot zukommt, der 1824 durch seine Schrift „Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance“ die Thermodynamik begründete. Schon in dieser grundlegenden Arbeit, durch welche eine vollständig neue Wissenschaft geschaffen wurde, ist die Kälte der höheren atmo-

*) H. v. Helmholtz, Eis und Gletscher. Vorträge und Reden. Bd. 1. Seite 193.

**) J. Hann, Meteorol. Zeitschrift. Einige Bemerkungen zur Entwicklungsgeschichte der Ansichten über den Ursprung des Föhn. II. Jahrgang. Seite 393. 1885.

sphärischen Schichten richtig erklärt. Wir lesen*): „Wird ein Gas schnell zusammengedrückt, so erhebt sich seine Temperatur; sie fällt umgekehrt, wenn es schnell ausgedehnt wird. Es ist dies eine der best erwiesenen Erfahrungstatsachen.“ Dazu findet sich eine erläuternde Anmerkung: „Die Erfahrungstatsachen, welche am besten die Temperaturänderung der Gase durch Zusammendrückung und Ausdehnung erweisen, sind folgende: 1. „Das Fallen eines im Rezipienten einer Luftpumpe befindlichen Thermometers, wenn man die Luft auspumpt..... 2. Die Entzündung des Zunders in den sogenannten pneumatischen Feuerzeugen..... 3. Das Fallen des Thermometers in einem Raume, aus welchem man die vorher verdichtete Luft durch einen Hahn entweichen läßt..... 4. Die Versuche über die Geschwindigkeit des Schalles. Herr de Laplace hat gezeigt, daß man, um diese Ergebnisse mit der Theorie in Einklang zu bringen, die Erwärmung der Luft durch eine plötzliche Verdichtung annehmen muß.“ Und dann lautet es im Originale: N'est-ce pas au refroidissement de l'air par la dilatation qu'il faut attribuer le froid des régions supérieurs de l'atmosphère? Les raisons donnée jusqu'ici pour expliquer ce froid sont tout à fait insuffisantes; on a dit que l'air des régions élevées, recevant peu de chaleur réfléchie par la terre, et rayonnant lui même vers les espaces célestes, devait perdre du calorique, et que c'était là la cause de son refroidissement; mais cette explication ce trouve détruite si l'on remarque qu'à égale hauteur le froid règne aussi bien et même avec plus d'intensité sur les plaines élevées que sur les sommets des montagnes ou que dans les parties d'atmosphère éloignées du sol.

§ 5. Diese Erklärung Sadi Carnots, die Abkühlung aufsteigender Luft ihrer Expansion zuzuschreiben, ist unbeachtet geblieben. Erst beinahe ein halbes Jahrhundert später haben eine Reihe Physiker**) denselben Gedanken wiederum ausgesprochen, rechnerisch

*) Das Original und ein späterer Nachdruck der Schrift Sadi Carnots sind vergriffen. Sie ist deutsch, übersetzt von Ostwald, erschien in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften als Nr. 37. Siehe hier S. 18 u. 19.

**) W. Thomson, On the Convective Equilibrium of temperature in the Atmosphere. 1862. Mathematical and Physical Papers. Vol. III, pag. 255. Peslin, Sur les mouvements généraux de l'atmosphère. Bull. hebdomadaire de l'Associat. scientif. de France. T. III. 1868. Th. Reye, Die Wirbelstürme, Tornados und Wettersäulen in der Erdatmosphäre. Hannover 1872. J. Hann, Die Gesetze der Temperaturänderung in aufsteigenden Luftströmen. Meteorol. Zeitschrift. Bd. IX. Seite 195. 1874.

verfolgt und gezeigt, daß eine aufsteigende, ihr Volumen vergrößernde Luftmasse durch Überwindung des in jedem Momente auf ihr lastenden Druckes eine Expansionsarbeit verrichtet, die sie aus ihrem Energieinhalt ε bestreitet und sich infolgedessen bei Erhebung um die Strecke Δh abkühlt nach der Beziehung (vgl. Kap. XVII, § 11)

$$(a) \quad \Delta T = - \frac{g \Delta h}{\frac{\gamma}{\gamma - 1} H} = \frac{A g}{c_p} \Delta h.$$

In einer Luftsäule, in welcher dieser Temperaturgradient herrscht, ist demnach

$$(b) \quad c_p T + Agh = \text{konst.}$$

Es ist schwer verständlich, wie später von zwei so ausgezeichneten Forschern wie Guldberg und Mohn*) eine andere Erklärung dieser Abkühlung gegeben werden konnte, welche auf einem offensichtlichen Irrtum beruht, die aber merkwürdigerweise, trotzdem derselbe wiederholt aufgedeckt wurde, sich als unausrottbar erwiesen hat. Danach soll die Vermehrung der potentiellen Energie, die daher röhrt, daß das emporsteigende Luftquantum seine Entfernung von der anziehenden Erde vergrößert, auf Kosten der Energie desselben gedeckt werden; diese soll verwandt werden, um „Hebearbeit“ zu leisten. Dabei wird übersehen, daß im luftleeren Raum ein durch eine gewichtslose Hülle abgegrenztes Luftquantum ohne hebende äußere Kraft, welche die Hebearbeit leistet, überhaupt nicht aufsteigt, in einer Atmosphäre von selbst aber nur dann, wenn das verdrängte Luftquantum schwerer ist, so daß gegen die Erdschwere keine Arbeit geleistet, sondern von dieser Arbeit gewonnen wird, die sich in kinetische Energie umsetzt. Durch „Hebearbeit“ kühlt sich ein in der Atmosphäre aufsteigendes Luftquantum ebensowenig ab wie ein Stück Holz, das unter Wasser losgelassen zur Oberfläche emporschwimmt. Die treibenden Kräfte sind hier wie dort dieselben. Auf die eingehendste Weise hat v. Bezold**) das Fehlerhafte dieser Auffassungsweise dargelegt, so daß zu hoffen stand, dieselbe endgültig beseitigt zu haben. Um so bedauerlicher ist es, daß das vorzügliche Lehrbuch der technischen Physik

*) Guldberg und Mohn, Über die Temperaturänderung in vertikaler Richtung in der Atmosphäre. Meteorol. Zeitschrift. Bd. XIII. Seite 118. 1878.

**) W. v. Bezold, Über der Temperaturänderung auf- und absteigender Luftströme. Meteorol. Zeitschrift, XV. Jahrgang. Seite 441. 1898.

von H. Lorenz*) wiederum die Theorie der Hebearbeit bringt und dieselbe nun wieder auf Jahre hinaus namentlich unter der lernbegierigen Jugend verbreitet.

Zur völligen Klärung dieser Verhältnisse mache ich darauf aufmerksam, daß die Abkühlung einer aufsteigenden Luftmasse nach Gl. (a) exakt nur dann gilt, wenn die verdrängende und die augenblicklich verdrängte Luftmasse in p , ϱ , T übereinstimmen; also nur bei der ganz bestimmten Bauart der Atmosphäre, die wir bei indifferentem Gleichgewicht antreffen. Diese geht in Gl. (a) scheinbar nicht ein; trotzdem ist sie von Einfluß. Denn führen wir eine in der Ausgangslage durch p_0 und T_0 ausgezeichnete Luftmasse bis zum Drucke p empor, so ist ihre Endtemperatur bestimmt durch die Beziehung

$$(c) \quad \frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{x-1}{x}};$$

die durch p und p_0 ausgezeichnete Höhendifferenz ist aber bedingt durch die bereits vorhandenen Temperaturen der Luftsäule. Aus Gl. (a) sind diese verschwunden, da bei der herkömmlichen Ableitung derselben, die ich Seite 355 gegeben, eine kleine Ungenauigkeit vorliegt. Denn kombiniert man die beiden Gleichungen

$$(d) \quad 0 = c_p dT - A \frac{1}{\varrho} dp$$

$$(e) \quad dp = - g \varrho dh$$

zu Gl. (a), so wäre streng genommen darauf zu achten, daß (d) sich auf die emporsteigende Masse, (e) aber sich auf die umgebende Atmosphäre bezieht. Steigt atmosphärische Luft um dh empor, so ist der entstehende Fehler unendlich klein von höherer Ordnung; die Abkühlung ergibt sich selbst bei Durchschreitung großer, endlicher Strecken mit großer Genauigkeit. Exakte Werte, denen nur theoretisches Interesse zukommt, erhält man aus (c) in Verbindung mit einer barometrischen Höhenformel. Für die Gleichgewichtsbetrachtungen hingegen kommt nur Gl. (a) in Betracht.

Eine Wasserstoffmasse und eine Luftmasse kühlen sich bei adiabatischem Aufstieg in der Erdatmosphäre durch die gleiche Strecke gleich stark ab, da die Moleküle beider Gase zweiatomig sind. Man würde zu einem richtigen Resultate gelangen, wenn man bei Behandlung

*) H. Lorenz, Lehrbuch der technischen Physik. Bd. II. Seite 80. München und Berlin 1904.

der Wasserstoffmasse die Gleichungen (d) und (e) gedankenlos zu Gl. (a), diese bezogen auf atmosphärische Luft, kombinierte, aber einen großen Fehler begehen, wenn man nicht darauf achtete, daß ρ in (d) sich auf Wasserstoff, ρ in (e) aber auf atmosphärische Luft sich bezieht.

§ 6. Einen ähnlichen Fehler, wie derjenige bezüglich der Hebearbeit begeht, Aug. Schmidt*), wenn er das einzelne Luftmolekül losgelöst aus seinem Zusammenhange betrachtet und auf dasselbe das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft anwendet. Genau wie ein fallender Körper soll das herabsinkende Molekül seine Geschwindigkeit steigern, das aufsteigende diese vermindern, so daß für jedes Molekül schließlich die Beziehung besteht potentielle Energie + kinetische Energie = konst. Da die kinetische Energie die Temperatur, diese die Energie der Masseneinheit bestimmt, soll eine Luftsäule unter Einfluß der Schwerkraft sich schließlich so anordnen, daß durch die ganze Säule hindurch die Beziehung besteht.

$$c_v T + Agh = \text{konst.}$$

Durch ähnliche Betrachtungen, dieselben aber exakter durchführend, zieht A. Ritter**) (dessen Arbeiten wir noch eingehend besprechen werden) den Schluß, daß die Schwerkraft die Molekularbewegung derart regelt, daß durch die Luftsäule hindurch

$$c_p T + Agh = \text{konst.}$$

also konvektives Gleichgewicht herbeigeführt wird. In einer isothermen Luftsäule würde in beiden Fällen durch Wirkung der Schwerkraft allein ein vertikaler Temperaturgradient hergestellt werden. Dies steht in direktem Widerspruche zum zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie***). Dazu kommt, daß L. Boltzmann†) die Molekularbewegung unter Einfluß äußerer Kräfte auf exakte Weise untersucht und gezeigt hat, daß letztere das Maxwell'sche Verteilungsgesetz nicht beeinflussen. In einer vertikalen Luftsäule müssen

*) Siehe z. B. Aug. Schmidt, Das Wärmegleichgewicht der Atmosphäre. Gerlands Beiträge zur Geophysik, IV. 1. Heft. 1899.

**) A. Ritter, Untersuchungen über die Höhe der Atmosphäre und die Konstitution der gasförmigen Weltkörper. Wied. Annal. d. Physik. Bd. VII. Seite 304. 1879

***) Vergl. J. C. Maxwell, Theorie of Heat. pag. 320. London 1885.

†) L. Boltzmann, Vorlesungen über kinetische Gastheorie. Bd. I. II. Abschnitt. § 19. Leipzig 1896.

wohl (loc. cit. § 19) Dichte und Druck nach unten zunehmen, aber auf solche Weise, daß ihr Verhältnis $\frac{p}{\rho}$, die Temperatur, überall denselben Wert besitzt. Loschmidt, der Bedeutendste derjenigen Vertreter der kinetischen Gastheorie, welche einen temperaturverteilenden Einfluß der Schwerkraft verfochten, hat die Boltzmannschen Ausführungen als richtig erkannt und seinen früheren Standpunkt aufgegeben. In der Annahme, durch seine Ausführungen den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie und Boltzmann widerlegt zu haben, dürfte A. Schmidt wohl ziemlich allein dastehen.

§ 7. Nachdem der Begriff des konvektiven Gleichgewichts einer Atmosphäre geschaffen war konnte es nur eine Frage der Zeit sein, daß die Untersuchungen sich auf eine durch die ganze Masse gasförmige Kugel erweiterten. Prinzipiell waren keine neuen Schwierigkeiten zu überwinden; die mathematische Behandlung aber stellte sich verwickelter. In einer Atmosphäre, die klein gegen die Masse der sie tragenden Kugel war, konnte der Wert der Anziehungsbeschleunigung konstant oder genauer im Quadrat der Entfernung abnehmend angenommen werden. In einer Gaskugel aber muß der durch die Anordnung der Masse bedingten Veränderlichkeit von g Rechnung getragen werden. An Stelle einer Differentialgleichung erster Ordnung tritt eine solche zweiter Ordnung, die nicht linear ist und sich nicht durch bekannte Funktionen integrieren läßt.

Die Dichte-, Druck- und Temperaturverteilung in einer Gaskugel in konvektivem Gleichgewicht unter Berücksichtigung innerer Gravitation zum erstenmale festgestellt zu haben ist das Verdienst von J. Homer Lane*) (1869). Seine Formeln (6) und (7) (loc. cit. Seite 60) enthalten die exakte Lösung der Aufgabe, (7) liefert durch die zweimalige Differentiation unter Berücksichtigung von (6) die Differentialgleichung 2. Ordnung I. (Oben Seite 40). Für zwei- und einatomige Gase, $\alpha = 1,4$, resp. $\frac{5}{3}$, wurde durch Reihenentwicklung der Verlauf der Dichte längs des Radius numerisch mit beträchtlicher Genauigkeit ermittelt; in einer Tafel (loc. cit. Seite 69) sind Dichte- und Temperaturverteilung graphisch dargestellt. Aus den ermittelten Zahlen

*) J. H. Lane, On the Theoretical Temperature of the Sun; under the Hypothesis of a Gaseous Mass maintaining its Volume by its Internal Heat, and depending on the Laws of Gases as known to Terrestrial Experiment. The American Journal of Science and Arts. Second Series. Vol. 4. Seite 57. 1870.

sucht Lane Schlüsse zu ziehen auf die Temperatur der Photosphäre, wobei er das Strahlungsgesetz von Dulong und Petit, dessen Proportionalitätskoeffizienten er etwas modifiziert, benutzt. Die diesbezüglichen Ausführungen sind für Lane selbst wie für den Leser wenig befriedigend; doch war Besseres auf diesem Gebiete zu leisten zu jener Zeit noch nicht möglich.

§ 8. Ohne von der Untersuchung Lanes Kenntnis zu haben, ist 9 Jahre später (1878) dies Problem von A. Ritter, dessen Arbeiten wir unten eingehend besprechen werden, in Angriff genommen und gelöst worden. Und wiederum 9 Jahre später (1887) hat Lord Kelvin, ohne von seinen beiden Vorgängern Kunde zu haben, eine selbständige Lösung gegeben*). Lord Kelvin wurde dazu angeregt durch eine Aufgabe, die Tait als Examensaufgabe der „Ferguson Scholarship“ zu Glasgow, im Oktober 1885 stellte. Eine Gaskugel sollte isotherm gebaut sein, und die Frage lautete: „Assuming Boyle's Law for all pressures, form the equation for the equilibrium-density at any distance from the centre of a spherical attracting mass, placed in an infinite space filled originally with air, Find the special integral which depends on a power of the distance from the centre of the sphere alone.“ Als Antwort war verlangt: Bei geeigneten Einheiten ist

$$(1) \quad \frac{d\rho}{dr} = - \frac{\rho \int_0^r r^2 dr}{r^2}.$$

Die Annahme

$$(2) \quad \rho = A r^x$$

ergibt $A = 2$, $x = -2$ und somit die Lösung

$$(3) \quad \rho = \frac{2}{r^2}.$$

(Dies ist die singuläre Lösung, vgl. Kap. IX, § 6).

Lord Kelvin behandelt die Kugel in adiabatischem Gleichgewicht, leitet die Differentialgleichung zweiter Ordnung ab, die er durch geeignete Wahl der Einheiten und Einführung des reziproken Radius $x = \frac{1}{r}$ auf die Form bringt:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = - \frac{u^n}{x^4}.$$

*) Sir W. Thomson, On the Equilibrium of a Gas under its own Gravitation only. Philos. Mag. V Series. Vol. XXIII. Seite 287. 1887.

Durch Diskussion dieser Gleichung findet Lord Kelvin eine Anzahl Ähnlichkeitsgesetze, die in den kosmogenetischen Flächengleichungen (vgl. oben Kap. VII) (98), (99), (102) und (96) enthalten sind. Die numerische Auswertung für $\alpha = 1,4$ erfolgte derart, daß die Kurve $u = f(x)$ graphisch konstruiert wurde, wobei für aufeinanderfolgende Bogenstücke der Krümmungsradius der Differentialgleichung entnommen wurde unter Verwertung einer Fortschreitungsrichtung, die sich jeweils während der Konstruktion ergab. Diese numerische Auswertung erreicht nicht diejenige Lane's; um die ermittelten Zahlen mit den von mir gefundenen zu vergleichen sind die Übersetzungsverhältnisse oben Seite 69 anzuwenden. Das Verhältnis der Mittelpunktsdichte zur mittleren Dichte ergab sich zu 22,5. Die Umrechnung der numerischen Auswertung auf geeignet gewählte Einheiten von Temperatur und Dichte wurde einer späteren Abhandlung vorbehalten; ich habe vergeblich nach derselben gesucht.

Ich benutze die Gelegenheit, um hier auf eine Ungenauigkeit aufmerksam zu machen, die sich in der Kelvinschen Betrachtungsweise der Wärmeausstrahlung einer Gaskugel wiederholt vorfindet. In einem überaus lehrreichem Vortrage: Über die Wärme der Sonne*), findet sich (loc. cit. Seite 283) folgende Stelle, die ich mit der später eingefügten Anmerkung von W. T. anführe:

„In einigen sonst vorzüglichen Büchern wird es als ‚paradox‘ bezeichnet, daß die Sonne infolge der Kondensation wärmer wird**). Paradoxa haben in der Wissenschaft keinen Platz. Um sie zu entfernen müssen die falschen Aussprüche und Gedanken durch richtige ersetzt werden, was nicht immer so leicht ist wie im vorliegenden Fall. Der wahre Sachverhalt ist der folgende: Weil die Sonne an

*) Über die Wärme der Sonne. Freitagabendvorlesung gehalten vor der Royal Institution of Great Britain. 21. Januar 1881. W. Thomson. Vorträge und Reden. Deutsche Übersetzung. 2. Auflage. Seite 280. 1891.

**) [Anmerkung vom 21. Februar 1887]. Das hier erwähnte „Paradoxon“ ist, wie ich jetzt finde, nur ein verkehrter (durch die Weglassung einer wesentlichen Bedingung falsch und offenbar paradox klingender) Ausdruck eines überraschenden und sehr wichtigen Schlusses aus einer Abhandlung von J. Lane, die im Americain Journal of Science vom Juli 1870 erschien. In Newcombs Popular astronomy, 1. Ausgabe, Seite 508, ist die Weglassung in einer Anmerkung ergänzt, die eine klare, populäre Erklärung der Dynamik von Lane's Schluß gibt; und in ähnlicher Weise ist der Gegenstand in Bells Story of the Heavens, Seite 501—503 mit vollständiger Vermeidung des Paradoxon erklärt. Ich nehme bei dieser Gelegenheit meine übereilte Korrektion des „Paradoxon“ durch Einfügen der im Texte kursiv gedruckten Worte hiermit zurück. W. T.

Stellen von gleicher Dichte weniger heiß wird, deshalb kann ihre Masse nach und nach unter dem verdichtenden Einfluß der Schwere nachgeben, und so findet im Laufe der Zeit zugleich Abkühlung und Verdichtung statt.“

Diese Darstellung des „wahren“ Sachverhaltes, die (loc. cit. Seite 304) nochmals eingehender auseinandergesetzt wird, ist unrichtig. Denn wir haben oben (Seite 114) durch Diskussion der kosmogenetischen Flächengleichung (102) den Satz gewonnen: Zieht sich eine Gaskugel von konstanter Masse zusammen, so treffen wir an Stellen konstant bleibender Dichte für $k > \frac{4}{3}$ stets niedrigere, für $k < \frac{4}{3}$ stets höhere Temperaturen an (k , nicht α !). Dasselbe gilt auch für die Drucke. Wäre die Sonne nach einer Polytropen $k < \frac{4}{3}$ gebaut, so würde gerade das Gegenteil der Kelvinschen Darstellung eintreten.

Ein ungenaue Angabe befindet sich auch loc. cit. Seite 302. „Ein sehr bemerkenswertes und richtiges Resultat, zu welchem er (Lane) kommt, ist das, daß die Dichtigkeit im Mittelpunkt ungefähr das Zwanzigfache der mittleren Dichtigkeit ist, und zwar einerlei, ob die Masse groß oder klein ist, ob sie Sauerstoff oder Stickstoff oder Wasserstoff oder sonst eine Substanz ist, wenn sie nur aus einer einzigen Gasart besteht, und wenn die Dichtigkeit in den zentralen Teilen nicht so groß ist, daß eine Kondensation nach dem gewöhnlichen Gesetz der Gasdichte, in einfachem Verhältnis zum Druck bei derselben Temperatur, nicht mehr stattfinden kann.“ Dieser Satz ist doppelt ungenau; denn das erwähnte Verhältnis ist bedingt durch die Polytropenklasse, bei adiabatischen Kugeln durch die Atomzahl des Gases, wie letzteres schon Lane gezeigt. Ferner können in adiabatischen Kugeln Gase gleicher Atomzahl, in polytropen Kugeln, wenn von der Art des Gleichgewichts abgesehen wird, beliebige Gase gemischt werden, ohne daß dies Verhältnis sich ändert.

§ 9. Ich stelle zum Vergleiche die in den drei angeführten Arbeiten ermittelten Zahlenwerte der Konstanten einer polytropen Gaskugel mit den von mir berechneten zusammen. Ich füge noch Zahlenwerte bei, die von W. Voigt*) gewonnen wurden; dabei ist zu berücksichtigen, daß der Verfasser selbst keinen besonderen Grad von Genauigkeit anstrehte, dafür aber den Vorteil erzielte, ein wesentlich einfacheres Auswertungsverfahren anwenden zu können.

*) W. Voigt, Thermodynamik. Bd. I. Seite 187. Leipzig 1903.

Emden, Gaskugeln.

	k	n	Radius r_1	Massen $-r_1^2 \frac{du}{dr_1}$	Verhältnis der Mittelpunktsdichte zur mittleren Dichte $\frac{\rho_0}{\rho}$
Lane	1,4	2,5	5,355	2,188	23,394
Ritter	1,41	2,44	5,2	2,1	22
Thomson	1,4	2,5	5,336	2,245	22,5
Emden	1,4	2,5	5,4172	2,2010	24,076
Ritter	1,5	2	4,35	2,41	11,4
Voigt	1,5	2	4,53	2,07	15
Emden	1,5	2	4,3518	2,4107	11,396
Lane	$\frac{5}{3}$	1,5	3,656	2,741	5,943
Ritter	$\frac{5}{3}$	1,5	3,65	2,70	6
Emden	$\frac{5}{3}$	1,5	3,6571	2,7176	6,0003
Ritter	$\frac{4}{3}$	3	7	2,05	57
Emden	$\frac{4}{3}$	3	6,901	2,0150	54,36
Ritter	$\frac{5}{4}$	4	14	1,76	520
Emden	$\frac{5}{4}$	4	14,999	1,8064	623,40
Ritter	$\frac{6}{5}$	5	0	?	∞
Emden	$\frac{6}{5}$	5	∞	$\sqrt[3]{3} = 1,73205$	∞

§ 10. Wir haben in allen vorangehenden Betrachtungen vollkommene Gase in der Zustandsgleichung $pv = HT \text{ cent}^2 \text{ sek}^{-2}$ vorausgesetzt. Für allzu große Verdünnungen kann letztere nicht mehr angewandt werden; wir haben in Kap. XIV, §§ 13 und 14 gezeigt, wie dann die freie Oberfläche von Gaskugeln zu behandeln ist. Auch für zu große Dichten muß die Zustandsgleichung versagen; ich habe deshalb oben wiederholt betont, die hohen Mittelpunktwerte in Gas- kugeln lediglich als Rechnungssymbole zu betrachten, um die Verhältnisse in den der Beobachtung zugänglichen, unser Interesse in erster Linie fesselnden Schichten bequem darstellen zu können. Es war deshalb ein äußerst verdienstvolles Unternehmen von Nils

Ekholm*), den Bau einer Gaskugel, an Masse und Radius gleich der Sonne, zu untersuchen unter Benutzung einer Zustandsgleichung, die das wirkliche Verhalten der Gase richtiger darstellt. Diejenige von van der Waals, $(p + \frac{a}{v^2})(v - b) = HT \text{ cent}^2 \text{ sek}^{-2}$, erwies sich hierfür zu verwickelt gebaut. Ekholm vernachlässigt deshalb den inneren Druck, indem er $a = 0$ setzt; die benutzte Zustandsgleichung

$$p(v - b) = HT \text{ cent}^2 \text{ sek}^{-2}$$

wird das Verhalten der Gase immer noch richtiger darstellen als unter Vernachlässigung des Covolumens der Moleküle, $b = 0$. Die für $k = \alpha = \frac{7}{5}$, $n = 2,5$ mit großem Geschick ausgeführte mechanische Quadratur ergab für den Sonnenmittelpunkt

$$\rho_0 = 1,486 \text{ gramm cent}^{-3}, \quad p_0 = 1,3948 \cdot 10^{15} \text{ Dynen cent}^{-2}, \\ T_0 = 5402000.$$

(Für die oben [Seite 408] aufgebaute Sonne erhielt ich

$$\rho_0 = 8,2710 \text{ gramm cent}^{-3}, \quad p_0 = 8,2313 \cdot 10^{15} \text{ Dynen cent}^{-2}, \\ T_0 = 12069000.)$$

Ekholm benutzte ein Gas von einer Dichte ungefähr gleich der des Stickstoffs, ich dissoziiertes Wasserstoffgas; ein Unterschied in meinen Zahlen könnte dadurch nicht in p_0 und ρ_0 , nur in T_0 zur Geltung kommen.

Leider scheint mir die Ekholmsche Behandlung an zwei Mängeln zu leiden, von denen namentlich der zweite geeignet ist die berechneten Resultate vollständig in Frage zu stellen.

Die benutzte Zustandsgleichung unterscheidet sich lediglich durch die Konstante b von derjenigen der vollkommenen Gase; die Verschiedenheit der Rechnungsergebnisse sind ceteris paribus nur bedingt durch den Wert, der b beigelegt wird. Diese Konstante b ist für etwa 107 Stoffe experimentell ermittelt**); mit verschwindend wenig Ausnahmen, die für dies Problem nicht in Betracht kommen, (dazu gehören z. B. die seltenen Gase Argon, Krypton, Xenon), ist für die Druckeinheit gleich 1 Megadyne b ungefähr gleich $1 \text{ gramm}^{-1} \text{ cent}^3$, meistens größer, für Wasserstoff $9,3 \text{ gramm}^{-1} \text{ cent}^3$; der reziproke Wert η deshalb ungefähr $\overline{\approx} 1 \text{ gramm cent}^{-3}$. Ekholm aber wendet

*) Nils Ekholm. Über den Energievorrat, die Temperatur und Strahlung der Weltkörper. Bihang till K. Svenska Vet.-Akad. Handliger. Bd. 26. Afd. I. No. 1. Stockholm 1900.

**) Winkelmann, Handbuch der Physik. Bd. III. Seite 857. Leipzig 1906.

den unverhältnismäßig großen Wert $\eta = 1,5156 \text{ gramm cent}^{-3}$ an; er ist dazu gezwungen durch den zweiten Umstand, den ich bemängele. Die Zustandsgleichung der vollkommenen Gase gestattet eine Differentialgleichung aufzustellen; die unter den vorgeschriebenen Mittelpunktsbedingungen abgehende, ermittelte Lösungskurve konnte dann gegebenen Gaskugeln nach Prinzipien geometrischer Ähnlichkeit angepaßt werden. Ekholm hat keine Differentialgleichung aufgestellt; seine mechanische Quadratur ist vorgenommen für den speziellen Fall einer Gaskugel an Masse und Radius gleich der Sonne; dabei mußte die Lösung entwickelt werden ausgehend von deren Oberfläche. Die Lösung ist deshalb abhängig von den Ausgangswerten an der Oberfläche. Für den Radius der Photosphäre, $r = 6,972 \cdot 10^{10} \text{ cent}$ wird angenommen

$$T = 6825, \quad p = 0,1 \text{ Megadyne}^*) \text{ cent}^{-2}, \quad \rho = 4 \cdot 10^{-6} \text{ gramm cent}^{-3}.$$

Dies sind aber namentlich in bezug auf Druck und Dichte vollkommen willkürlich geschätzte Werte, die keinerlei innere Berechtigung besitzen, und ebenso unsicher sind deshalb auch die errechneten Mittelpunktwerte.

Die Ekholmsche Behandlungsweise scheint mir aber auch prinzipiell unrichtig zu sein. Von den drei Ausgangswerten p , ρ , T können mindestens zwei beliebig angenommen werden, drei, falls über die Natur des Gases keine Annahme gemacht wird. Diese Werte sind angenommen für $r = 6,972 \cdot 10^{10} \text{ cent}$, und die resultierende Kugel soll von der Masse der Sonne, $M = 1,957 \cdot 10^{33} \text{ gramm}$ werden. Das ist prinzipiell unmöglich. Denn da für einen bestimmten Wert von r von Null verschiedene Werte von p und ρ (oder T) angenommen werden, so haben wir den Fall vor uns, den ich in Kap. XI als Gaskugel in starrer Hülle bezeichnet habe. In § 13 ist dort gezeigt, daß eine solche Gaskugel drei und nur drei Bestimmungsstücke erfordert. Sind für eine Strecke r zwei der Größe p , ρ , T gegeben, so ist die Gaskugel vollständig bestimmt, ihre Masse ist nicht mehr festsetzbar. Das gilt nicht nur für die Zustandsgleichung der vollkommenen Gase, sondern auch für diejenigen van der Waals, da hier nur noch Konstanten hinzutreten. Wenn für $r = 6,972 \cdot 10^{10} \text{ cent}$ Druck und Dichte zu $0,1 \text{ Megadyne cent}^{-2}$ und $4 \cdot 10^{-6} \text{ gramm cent}^{-3}$ festgelegt werden (die gleichzeitige Angabe von T ersetzt die Angabe des Molekulargewichtes des Gases), so ist die Masse der Kugel bestimmt. Daß

*) Im Original steht 0,1 Dyne cent⁻², offenbar ein Versehen. Ferner muß der Endwert in Tabelle 2, Seite 58 loc. cit. lauten 0,000004 statt 0,00004.

Ekholm trotzdem die Masse der Sonne erhält, röhrt daher, daß er für die Konstante b der Zustandsgleichung nicht experimentell ermittelte Werte nimmt, sondern sie zu seiner Verfügung hält und erst nachträglich so bestimmt, daß die richtige Sonnenmasse resultiert. Tatsächlich erwies sich $\eta = \frac{1}{b} = 1,50$ dafür zu klein, $\eta = 1,54$ zu groß; wie oben angeführt ergibt sich für beinahe alle Gase und Dämpfe aber $\eta < 1$. Die von Ekholm errechneten Mittelpunktwerte scheinen mir, da sie durch die willkürlich gewählte Ausgangsstelle der Lösungskurve gewonnen, und die Rechnung in bezug auf Sonnenmasse durch willkürliche Festsetzung von b stimmend gemacht wurde, wenig überzeugend zu sein.

Tatsächlich scheint mir die Frage nach dem Zustande im Sonnenmittelpunkte höchst unfruchtbar zu sein. Sind wir doch nicht einmal imstande angenäherte Kunde zu geben von dem Zustand im Erdmittelpunkte oder in den höchsten Schichten der Atmosphäre. Was unser Interesse fesseln muß ist der Zustand in den der Beobachtung einigermaßen zugänglichen Schichten der Photosphäre; diese Untersuchung wenigstens erscheint nicht aussichtslos. Über diese Schichten aber gibt die Lösung von Ekholm keine Auskunft, da die hier liegenden Ausgangswerte seiner Lösungen willkürlich festgesetzt wurden.

Auch die Art und Weise, wie Ekholm seine Lösung mit der von Lord Kelvin ermittelten vergleicht, gibt Anlaß zu einer Bemerkung. Lord Kelvin hat den Radius r der Gaskugel, in den von ihm benutzten Einheiten gleich $\frac{2}{3}$, so bestimmt, daß Druck, Dichte und Temperatur die Werte Null erhalten. Ekholm aber rechnet so um, daß sich für $r = \frac{2}{3}$ statt dieser Nullwerte ergeben: Dichte = $1,5988 \cdot 10^{-7}$ gramm cent⁻³, Druck = 0,1 Megadyne cent⁻² und Temperatur = 170800° , um daran die Bemerkung zu knüpfen, daß diese Oberflächentemperatur viel zu hoch ist. (Für zweiatomiges Wasserstoffgas würde sich diese Temperatur auf etwa 12000° , für dissoziertes Wasserstoffgas auf etwa 6000° reduzieren.) Jedenfalls ist der durch diese Werte von p und ϱ , die unabhängig von der Natur des Gases gelten, ausgezeichnete Punkt kein Oberflächenpunkt im Sinne Lord Kelvins; mit welcher Genauigkeit er auf der Kelvinschen Lösungskurve liegt, habe ich nicht untersucht.

§ 11. Im Kap. V §§ 6 und 7 wurde aus der Differentialgleichung der polytropen Gaskugel bewiesen, daß deren Kontraktion „gleichförmig“

erfolgt. Dann folgt weiter leicht, daß sich Temperatur, Dichte und Druck eines Gasteilchens umgekehrt wie die erste, dritte resp. vierte Potenz des Radius ändern müssen. Dieser Satz wurde zuerst von Ritter für adiabatische Gaskugeln aufgestellt, allein ohne den Nachweis gleichförmiger Kontraktion. Mit dieser mangelhaften Beweisführung ist er in den größten Teil der Fachliteratur übergegangen; andererseits wurde von verschiedenen Seiten seine Gültigkeit angezweifelt. Einen strengen Beweis dieses Satzes für Gaskugeln unter Voraussetzung gleichförmiger Kontraktion hat einzig P. Rudzki*) gegeben; hingegen fehlt hier der Nachweis, daß polytropen Gaskugeln sich gleichförmig kontrahieren. Die Arbeit enthält wertvolle Literaturangaben, die sich auf diese umstrittene Frage beziehen. Zur Beweisführung geht Rudzki zurück auf die hydrodynamischen Gleichungen, die auf unendlich langsame, gleichförmige Kontraktionsbewegung angewandt werden. Leser dieser interessanten Abhandlung mache ich darauf aufmerksam, daß merkwürdigerweise unter dem Gesetz der conductibilité de la chaleur die Gleichung $\frac{dQ}{dt} = c_v \frac{dT}{dt} + A p \frac{dv}{dt}$ gemeint ist und unter einem gaz idéal ein einatomiges Gas. (Die Gleichungen Seite 9 loc. cit. sind mit zahlreichen Druckfehlern behaftet; A bedeutet nicht das mechanische Wärmeäquivalent, sondern dessen reziproken Wert).

§ 12. Der Aufbau eines isothermen Gasgebildes unter Berücksichtigung innerer Gravitation wurde zum ersten Male von F. Zoellner**) (1871) in Angriff genommen. Die Differentialgleichung für den Dichteverlauf längs des Radius wurde aufgestellt, die singuläre Lösung $\rho = \frac{2c}{r^2}$, $c = \text{konst.}$, gefunden und an diese einige merkwürdige, nicht überzeugende Schlüsse geknüpft. So folgert z. B. Zoellner (loc. cit., S. 95): „Druck und Dichtigkeit müßten für alle endlichen Abstände vom Attraktionszentrum einen unendlich großen Wert besitzen, was der Erfahrung in dem uns zugänglichen Teile der Welt widerspricht“, während aus der nur eine Druckseite vorher aufgestellten Lösung $\rho = \frac{2c}{r^2}$ genau das Gegenteil folgt. Auf mustergültige Weise ist diese Differentialgleichung zuerst von M. Thiesen***) untersucht

*) P. Rudzki, Note sur la loi de la Température dans un corps céleste gazeux. Bulletin Astronomique. Avril 1902.

**) F. Zoellner, Über die Natur der Kometen. 3. Aufl. S. 93 und 94. Leipzig 1883 (1. Aufl. 1871).

***) M. Thiesen, Über die Verbreitung der Atmosphäre. A. W. Schadesche Buchdruckerei. Berlin 1878.

worden. Ich freue mich hier Gelegenheit zu haben, diese namentlich in ihrem 2. Teile überaus wertvolle Arbeit unverdienter Vergessenheit entreißen zu können. Die Differentialgleichung 2. Ordnung wurde auf 1. Ordnung reduziert, die neue Gleichung an Hand eines Diagramms konstanter Fortschreitungsrichtungen diskutiert und so die oben in Kap. IX durch ein ähnliches Verfahren gewonnenen, periodischen Verhältnisse, die zwischen Hauptlösung und singulärer Lösung bestehen, zum erstenmale aufgedeckt. Die Lösung der Differentialgleichung 1. Ordnung wurde in Form einer Potenzreihe aufgestellt und die ersten 25 Koeffizienten berechnet. Eine Quadratur der Differentialgleichung 2. Ordnung ist nicht ausgeführt. Diese findet sich, abgesehen von der unten zu erwähnenden Arbeit von Ritter, bei G. W. Hill*). Die Art der Ausführung ist nicht angegeben. Hill reduziert ebenfalls die Differentialgleichung 2. Ordnung auf erste Ordnung, benutzt zur Diskussion wieder ein Diagramm konstanter Fortschreitungsrichtungen und macht auf mögliche periodische Gesetzmäßigkeiten aufmerksam. Die ermittelte numerische Auswertung benutzt Hill um die Dichteverteilung im Erdinnern unter Annahme konstanter Temperatur und vollkommener Gase darzustellen. Mit Rücksicht auf das theoretische Interesse und der nicht leichten Zugänglichkeit des Originals gebe ich die Hillsche Lösung dieses Problems hier wieder.

r -Einheiten des Erdradius	ϱ gramm cent $^{-3}$	r -Einheiten des Erdradius	ϱ gramm cent $^{-3}$
0,000	21,69	0,469	10,25
0,109	20,63	0,501	9,43
0,157	19,57	0,535	8,65
0,195	18,54	0,570	7,88
0,230	17,53	0,608	7,13
0,261	16,54	0,649	6,40
0,291	15,58	0,694	5,70
0,321	14,63	0,743	5,02
0,350	13,72	0,800	4,35
0,379	12,81	0,866	3,70
0,408	11,93	0,945	3,06
0,438	11,08	1,000	2,70.

Diese Lösung ist eindeutig (vgl. oben Kap. XI) dadurch, daß die Dichte an der Oberfläche des gasförmigen Kernes gleich der

*) G. W. Hill, On the Interior Constitution of the Earth as respects Density. Annals of Mathematics. Vol. IV. pag. 19. University of Virginia 1888.

mittleren Dichtigkeit der festen Erdrinde, gleich 2,7 gramm cent⁻³ angenommen wurde, wodurch sich das Verhältnis Oberflächendichte: mittlere Dichte = 0,48 stellt. (In Tabelle 14 wird dadurch ziemlich genau die Strecke $r_1 = 5$ ausgewählt, um auf Erdradius gedehnt zu werden.)

Die Eindeutigkeitsbestimmung liefert $HT = 2,84 \cdot 10^{11}$ cent sek⁻². Die durch das Erdinnere konstante Temperatur beträgt für die Normaldichte des Wasserstoffgases 6860°, für die Normaldichte atmosphärischer Luft 100000° Cels. Der Druck im Mittelpunkt beträgt $6,03 \cdot 10^{12}$ Dynen cent⁻² gleich 6 Millionen Atmosphären.

Diese Dichte und Druckverteilung ergibt sich für Aufbau des Erdinnern aus beliebigem Material, falls dasselbe nur die Bedingung erfüllt, daß Dichte und Druck sich proportional sind. Die bekannte Laplacesche Annahme*), daß der Druck proportional dem Quadrat der Dichte variiert, liefert die Mittelpunktsdichte $\varrho_0 = 10,9$ gramm cent⁻³, also etwa den halben Wert. Zu diesem Ansatz $p = c \cdot \varrho^2$ wurde Laplace lediglich durch den Umstand veranlaßt, daß in diesem Falle die Differentialgleichung der Gaskugel integriabel wird. Denn $p = c \cdot \varrho^2$ entspricht der Polytropen $k = 2$, $n = 1$; und die in Betracht kommende Lösung ist $\varrho = C \frac{\sin \alpha r}{\alpha r}$.

Die Differentialgleichung der isothermen Gaskugel wurde auch von v. Seeliger in seinen Vorlesungen über Figur der Himmelskörper behandelt und auf eine Gleichung 1. Ordnung reduziert. Es liegen somit 4 Substitutionen, welche eine solche Reduktion erlauben, vor; ich stelle die Ergebnisse zusammen.

Die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dv}{dr} + e^v = 0$$

wurde auf eine der folgenden Gleichungen 1. Ordnung zurückgeführt:

$$\text{Thiesen} \quad 2xydy - (x + y + 1)dx = 0,$$

$$\text{Hill} \quad yxdy + (x + y - 2)dx = 0,$$

$$\text{v. Seeliger} \quad ydy - (x^2 - xy - 1)dx = 0,$$

$$\text{Emden} \quad ydy - (y + 2 - e^x)dx = 0.$$

Diese 4 Gleichungen können durch geeignete Substitutionen ineinander übergeführt werden.

*) Thomson u. Tait, Handbuch der theoretischen Physik. Bd. I. 2. Teil. Seite 392. Braunschweig. 1874.

Siehe ferner: T. J. J. See. Researches on the internal densities, pressures and moments of inertia of the principal bodies of the planetary system. Astron. Nachr. Bd. 167. Nr. 3992. 1903.

Als Seitenstück ergab sich die Zurückführung der Gleichung

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dv}{dr} + v^n = 0$$

auf die Form

$$y dy - \left(\frac{n-5}{n-1} y + \frac{2 \cdot (n-3)}{(n-1)^2} x - x^n \right) dx = 0.$$

Keine dieser Gleichungen 2. oder 1. Ordnung konnte durch bekannte Funktionen integriert werden, mit Ausnahme der Fälle $n = 0$, 1 und 5.

Daß diese beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung sich auf erste Ordnung reduzieren lassen müssen, folgt aus einem Satze von S. Lie*): Gestattet eine vorgelegte Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen x und y : $\Omega(x, y, y', y'') = 0$ eine bekannte infinitesimale Transformation in x und y , so kann man ihre Integration leisten durch die Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung in x und y . Eine infinitesimale Transformation aber ist möglich, da die beiden Gleichungen durch die Substitutionen av und br in sich selbst transformiert werden können. (Siehe oben Seite 67 u. 133.)

§ 13. Die umfangreichsten und eingehendsten Studien des Verhaltens gasförmiger Gebilde verdanken wir A. Ritter**); in 19 Abhandlungen sind seine trefflichen Untersuchungen dargestellt. Die Kunde vom Vorhandensein dieser Arbeiten ist weit verbreitet; nur ein kleiner, nicht durchwegs glücklich ausgewählter Teil ist, oft nicht mit der nötigen Sorgfalt behandelt, in die Fachliteratur übergegangen; größtenteils sind sie noch terra incognita. Dies Schicksal ist zum Teil selbst verschuldet; denn wahrscheinlich veröffentlicht in der Reihe wie sie entstanden, öfters wieder zurückspringend, um denselben Gegenstand auf andere, zweckmäßiger befundene Art und Weise zu behandeln, bieten diese Arbeiten kein äußerlich geordnetes Ganzes; wohl aber gestatten sie tiefe Einblicke zu tun in die Werkstatt eines schöpferischen Geistes. Ritter hat dies vielleicht selbst empfunden und deshalb einen Teil ihres Inhaltes in 6 Abhandlungen zusammen-

*) Sophus Lie, Vorlesungen über Differentialgleichungen. Herausgegeben von G. Scheffers. Seite 384. Leipzig 1891.

**) A. Ritter, Untersuchungen über die Höhe der Atmosphäre und ihre Konstitution. Wied. Annal. Bd. V. 405, 1878; V. 543, 1898; VI. 135, 1878. VII. 304, 1879; VIII. 157, 173, 1879; X. 130, 1880; XI. 332, 1880; XI. 978, 1880; XII. 445, 1881; XIII. 360, 1881; XIV. 610, 1881. XVI. 166, 1882; XVII. 332, 1882; XVIII. 488, 1883; XX. 897 1883; XX. 897, 910, 1883; XXXVI. 567, 1889.

gefaßt selbständige herausgegeben.*). Dazu kommt, daß die nötigen mechanischen Quadraturen nicht durch Zahlenrechnung, sondern durch graphische Methoden, die Ritter mit wahrer Virtuosität handhabt, ausgeführt wurden; diesen nachzugehen ist aber nicht jedermanns Sache. Ich weiß nicht, ob Ritter die Genauigkeit der so ermittelten Zahlen am Ende unterschätzt hat; denn vielfach werden diese Werte abgerundet. So wird z. B. der in der XIII. Abhandlung Seite 176 ermittelte Wert von m , $m = 0,4143$, dessen 2. Dezimale richtig ist, als 0,4 weitergeführt. Es ergeben sich so öfters einfache Zahlenbeziehungen und Gesetzmäßigkeiten, und der Leser ist nicht in der Lage zu beurteilen, ob diese in der Natur der Sache begründet oder Folgen solcher Abrundungen sind. Es kann nun selbstverständlich nicht meine Aufgabe und Absicht sein, dies große Werk Ritters hier vollständig darzustellen; ich werde daraus herausgreifen, was auf meine eigenen, oben dargestellten Untersuchungen Bezug hat oder sonst besonderes Interesse verdient. Beiseite lassen werde ich prinzipiell alles, was sich auf Geschwindigkeiten im interstellaren Raum, sowie auf Dämpfe und Kondensation (mit einer Ausnahme) bezieht; die hierauf bezüglichen Kapitel scheinen mir eingehendste Nachprüfung zu erfordern und zu verdienen. Ich brauche wohl kaum erst zu versichern, daß, wenn ich darauf bedacht bin zu betonen, was mir einer Korrektur bedürftig erscheint, es wahrhaftig nicht geschieht, um die großen Verdienste Ritters irgendwie zu verkleinern; ich wüßte nicht, wer durch ihn mehr belehrt und angeregt worden wäre als ich selbst bei Anlaß meiner Vorlesungen und bei Herausgabe vorstehender Arbeit.

§ 14. Die Arbeiten zeigen in einem Punkte durchwegs eine unrichtige Auffassung. Entfernt sich eine Luftmasse von einem Attraktionszentrum, wobei sie isentrop unter geringem Druck gerät, so wird die Abkühlung, die sie erleidet, nicht der geleisteten Expansionsarbeit zugeschrieben, sondern sogenannter Hebearbeit, daher röhrend, daß sich die zwischen Luftmasse und Attraktionszentrum aufgespeicherte potentielle Energie vermehrt. Ich habe bereits oben, § 5, diesen Umstand berührt; die dort zitierte Arbeit v. Bezolds behandelt diese Frage so vollständig, daß ich nicht näher hierauf eingehen muß.

In der ersten Abhandlung wird die Höhe der isentropen Erdatmosphäre von 0° Bodentemperatur zu 27491 m festgestellt; ist diese

*) A. Ritter, Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische Probleme. H. A. L. Degener, Leipzig 1882.

Atmosphäre noch mit Wasserdampf gesättigt, so steigt sie bis 28705 m. Den Umstand, daß die Beobachtung Luftmassen in ungleich größeren Höhen nachweist, sucht Ritter in erster Linie zu erklären durch die Annahme, daß von einer gewissen Höhe ab Sauerstoff und Stickstoff nicht mehr als Gase, sondern vielleicht auch in flüssiger und fester Form vorhanden wären und dann als Dämpfe behandelt werden müßten. (Für eine reine Wasserdampfatmosphäre hatte bei 0° Bodentemperatur sich eine Höhe von etwa 350 Kilometern berechnen lassen). Diese Frage ist durch Goldhammer*) erledigt worden, der nachwies, daß in den hohen Schichten einer Stickstoff- resp. Sauerstoffatmosphäre mit Umgehung der Phasen Flüssigkeit und Dampf sich diese Gase in fester Form niederschlagen; trotzdem erstrecken sich diese Atmosphären nur bis 62 Kilometer, resp. 70—75 Kilometer Höhe. Der scheinbare Widerspruch zwischen Theorie und Beobachtung löst sich dadurch, daß, wie oben Kap. XVII § 12 gezeigt, die Erdatmosphäre überhaupt keine Veranlassung hat isentropen Gleichgewichtszustand anzunehmen.

Die 2. Abhandlung bringt gleich das zuerst von Ritter aufgestellte, vielmehrtrittene Gesetz, daß in einer Wärme austauschenden, isentropen Gaskugel das Produkt aus Mittelpunktstemperatur und Radius konstant bleibt. Der Satz wird dahin erweitert, daß die Temperatur umgekehrt wie die erste, die Dichte umgekehrt wie die dritte, der Druck umgekehrt wie die vierte Potenz des Radius sich ändern. Daraus wird die Gleichung der kosmogenetischen Zustandsänderung $pv^{\frac{4}{3}} = \text{konst.}$ (Ritter nennt sie kosmogonische Zustandsänderung), so wie die Wärmekapazität dieses Weges, $\gamma = c_s(4 - 3\alpha)$ abgeleitet. Diese Beziehungen sind sämtlich richtig, die Beweisführung lückenhaft, da die Kontraktion der isentropen Gaskugel stillschweigend als gleichförmig angenommen wird. Dieser Beweis läßt sich nur aus der Differentialgleichung führen, die für eine isentrope Gaskugel von Ritter in seiner 3. Abhandlung, ohne von seinem Vorläufer Lane Kenntnis zu haben, aufgestellt und für zweiatomige Gase durch graphische Methoden numerisch ausgewertet wird. In der 8. Abhandlung wird der Bau der Gaskugel untersucht, wenn die Zustandsänderung längs des Radius durch die Gleichung $pv^k = \text{konst.}$, k beliebig (polytrope Zustandsänderung) gegeben ist und die Differentialgleichung für die Fälle $n = 1,5; 2; 2,44; 3; 4$ und $5; n = \frac{1}{k-1}$, wiederum

*) D. A. Goldhammer, Über die Natur der flüssigen Luft. Boltzmann-Festschrift. S. 410. Leipzig 1904.

graphisch ausgewertet. Bei Behandlung des Falles $n = 5$ ist Ritter ein merkwürdiges, überaus lehrreiches Versehen passiert. Ritter kommt zu dem Resultat, daß sich die Masse dieser Gaskugel auf den Mittelpunkt konzentriert, während ich (Kap. IV, § 12) zeigen konnte, daß sich für $n = 5$ die Differentialgleichung auf eine einfache Quadratur zurückführen läßt, wonach die endliche Masse der Kugel mit abnehmender Dichte sich bis Unendlich erstreckt. Der Irrtum röhrt daher, daß Ritter als unabhängige Variable den Abstand eines Teilchens vom Zentrum, dividiert durch den Radius der ganzen Kugel einführt; letzterer wird für $n = 5$ unendlich und die unabhängige Variable im Endlichen überall gleich Null. Der Bau von Gaskugeln mit $n > 5$, $k < \frac{6}{5}$, wird deshalb für unmöglich erklärt. Das ist um so merkwürdiger, als Ritter in der 13. Abhandlung eine vollständige, überaus elegante Behandlung der isothermen Gaskugel, $n = \infty$, gibt und in seiner 9. Abhandlung ausdrücklich darauf hinweist, daß über einem festen Kern, (dessen Radius nunmehr als Einheit der Rechnung unterlegt wurde), eine Atmosphäre mit n beliebig > 5 möglich ist, mag der Kern noch so sehr zusammenschrumpfen. Die im § 33 dieser VIII. Abhandlung durch Sperrdruck hervorgehobenen ersten 3 Sätze sind richtig, sie müssen aber sinngemäß gelesen werden. Sie gelten nur, wenn das k , das den Bau der Kugel regelt, gleich ist $\kappa = \frac{c_p}{c_r}$, dem Verhältnis der Wärmekapazitäten des aufbauenden Gases. Völlig klaren Einblick in diese Verhältnisse erhält man nur, wenn streng zwischen k und κ unterschieden wird, wie oben aus Kap. VIII hervorgeht. Der höchst problematische 4. Satz dieses Paragraphen (loc. cit. Seite 344) wäre besser weggelassen worden; er hat bereits Unheil gestiftet.

§ 15. Ritter hat das Gesetz des Aufbaues adiabatischer Gaskugeln selbständige entwickelt und numerisch dargestellt, die Arbeit seines Vorgängers Lane war ihm unbekannt; ihm aber gebührt das große Verdienst, zum ersten Male die Energetik des Kontraktionsprozesses dieser Gaskugeln behandelt zu haben. Schon in der zweiten Abhandlung wird die Wärmekapazität des Weges, den ein Teilchen einer kontrahierenden Gaskugel zurücklegt, (kosmogenetische Zustandsänderung), festgesetzt, für $\kappa = 1,41$ zu $-0,16312 c_p$ berechnet und benutzt um die Helmholtzsche Theorie von der Erhaltung der Sonnenwärme dahin zu präzisieren, daß von der Kontraktionsarbeit bis auf gegenwärtigen Radius äquivalenten Wärmemenge nur 18,7% ausgestrahlt werden könnten, 81,3% noch in der Sonne aufgespeichert sein

müßten` (zweiatomige Gase, $\kappa = 1,41$, vorausgesetzt). In der dritten Abhandlung wird die numerische Auswertung der Differentialgleichung des Dichteverlaufs für $\kappa = 1,41$ benutzt, um die während gegebener Verkürzung des Radius geleistete Kontraktionsarbeit zu berechnen. Die Rittersche Formel (102) $\mathfrak{A} = 1,2 N.P.\sigma$ lautet in den von mir benutzten Symbolen $\Delta\psi = 1,2 \frac{G\mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}} \cdot \frac{\Delta\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}}$; der für $\kappa = 1,41$ gefundene Faktor 1,2 ist für $\kappa = 1,4$ ein genauer Wert. (Um die Pouilletsche Solarkonstante 1,76 Grammkalorien $\text{min.}^{-1} \text{cent.}^{-2}$ zu decken müßte sich der Sonnenradius jährlich um 92 m verkürzen; als oberes Alter der Erde ergäben sich 7,5 Millionen Jahre; für die Solarkonstante 4 ist mit $\frac{4}{1,76} = 2,27$ zu vergrößern resp. zu verkleinern).

In der fünften Abhandlung hat Ritter, nachdem sich in der vierten Abhandlung sein Blick für diese Verhältnisse beim Studium derselben unter den vereinfachenden Voraussetzungen der Erdatmosphäre bei Ausschluß innerer Gravitation geschärft hatte, das überraschende Fundamentalgesetz aufgestellt:

Das Potential einer beliebigen, aus homogenen, konzentrischen Schichten zusammengesetzten Kugel bezogen auf die eigene Masse ist $3(\kappa - 1)$ mal so groß als das Arbeitsäquivalent der inneren Wärme, welche jene Masse als Gaskugel besitzen würde.

(Bei Ritter steht 1,23 an Stelle von $3(\kappa - 1)$, was sich für $\kappa = 1,41$ ergibt. Vgl. oben Kap. VIII, § 3. Unter innerer Wärme ist der Energiegehalt (ϵ) zu verstehen.) Dieser schöne, überaus wertvolle Satz wird in der Folge auch auf isotherme Kugeln, $n = \frac{1}{\kappa - 1} = \infty$, (Kugeln mit $5 \leq n < \infty$ existieren nach Ritter nicht, vgl. oben § 14) angewandt; allein seiner Allgemeingültigkeit sind Schranken gesetzt. Denn bei seiner Ableitung ergibt sich (Ritter, Gl. 185) für das Selbstpotential \mathfrak{A} die Beziehung

$$\mathfrak{A} = -4\pi \left\{ \left| \int_{\varrho=0}^{\varrho=r} p \varrho^2 d\varrho \right| - 3 \int_0^r p \varrho^2 d\varrho \right\},$$

(vgl. oben Kap. VIII, § 3), worin ϱ den laufenden, r den ganzen Radius bezeichnet; ist letzterer unendlich, so ist der erste Summand an der oberen Grenze unbestimmt und darf nicht ohne weiteres gleich Null gesetzt werden. Tatsächlich ergibt er sich für $n > 5$ größer als Null, und wir erhalten die Beziehung (Kap. X, Gl. (167))

$$5 \leq n \leq \infty, \quad \psi^{(\epsilon)} = -\frac{n-1}{n+1} \frac{1}{2(\kappa-1)}.$$

Die interessanten Betrachtungen des § 21 der fünften Abhandlungen sind deshalb, insofern sie die isothermen Kugeln betreffen, entsprechend zu modifizieren.

Eine zweite Beziehung zwischen (ε) und ψ , die dann gestattet, (ε) und ψ einzeln und unabhängig von der den Bau regelnden Differentialgleichung aus Masse und Radius der isentropen Kugel zu bestimmen, hat zuerst Betti*) gegeben. Auf wesentlich einfacheren und eleganteren Weise hat Ritter diese Beziehungen in § 32 der achten Abhandlung abgeleitet. Diese Beziehungen hatte ich (Kap. VIII, § 4) auf polytrope Kugeln erweitert, später aber gesehen, daß dieselben bereits von Voigt**) gegeben wurden.

§ 16. In der 13. Abhandlung wird in virtuoser Handhabung die graphische Methode zur Auswertung der Differentialgleichung der isothermen Gaskugel angewandt; die von Thiessen aufgedeckten, periodischen Verhältnisse werden wiedergefunden. Dann aber tritt Ritter noch völlig unerschlossene Gebiete, indem er die Untersuchung derjenigen Gebilde in Angriff nimmt, die ich oben im fünften Abschnitt als zusammengesetzte Systeme bezeichnete. Es ergab sich der überraschende Satz, daß eine isotherme Gasmasse in einer starren Hülle auf unendlich viele verschiedene Arten untergebracht werden kann; die Kugeln niedriger Temperatur, ferner kleinsten Oberflächendrucks wurden aufgebaut. Daran reihen sich die isotherm-isentrope Kugel niedrigster Innentemperatur. In der neunten Abhandlung wurde bereits der gasförmige Weltkörper mit festem Kern untersucht; es ergab sich der Satz, daß unter Umständen bei gleicher Oberflächentemperatur des Kernes eine Atmosphäre von gegebener Masse in zwei verschiedenen Höhen aufgebaut werden kann. Der weitere Inhalt dieser Abhandlung scheint mir eingehendste Untersuchung zu erfordern, die sich aber sehr schwierig gestalten dürfte; die dazu nötigen Unterlagen glaube ich oben in Kap. XIII gegeben zu haben.

§ 17. Da der Radius einer sich kontrahierenden Gaskugel deren Temperaturen, diese die ausgesandte Strahlung bestimmen, ist Gelegenheit gegeben, letztere mit dem Radius in Beziehung zu bringen. Da wir aber nicht wissen, nach welchen Gesetzmäßigkeiten sich Absorptionen

*) E. Betti. Sopra l'equilibrio di una massa di gaz perfetto isolata nello spazio. Il nuovo cimento. T. VII, pag. 26, 1880.

**) W. Voigt. Thermodynamik. I, § 86, Leipzig 1903.

geltend machen, bleiben derartige Betrachtungen äußerst unsicher. Dies zu zeigen folgen wir Ritter. In § 11 der zweiten Abhandlung wird gefolgert, daß, wenn die Ausstrahlung proportional der Oberfläche und der m ten Potenz der Temperatur eines Teilchens angesetzt wird, die Strahlung und Helligkeit einer kontrahierenden Gaskugel zunimmt, falls $m > 2$; für $m = 4$ umgekehrt wie das Quadrat des Radius. Zu entgegengesetztem Resultate führen die wesentlich genaueren Betrachtungen des § 64 der 16. Abhandlung. Ich halte es für angebracht, sie hier folgen zu lassen. Aus Formel (73 a) oben S. 64 sowie Formel (91), S. 70, wonach für die Oberfläche einer kontrahierenden Gaskugel $\frac{g}{\varrho}$ konstant bleibt, gleich c , c bedingt durch die Polytropenklasse, folgt für die Temperaturzunahme an der Oberfläche einer polytropen Gaskugel, wenn wir z in die Tiefe gehen lassen,

$$(a) \quad dT = \frac{T_0 dz}{c \mathfrak{R}},$$

wenn T_0 die Mittelpunktstemperatur bezeichnet. Daraus folgt

$$(b) \quad \frac{T}{T_0} = \frac{z}{c \mathfrak{R}}.$$

Die Polytropengleichung liefert, wenn ϱ_0 die Mittelpunktsdichte mißt,

$$(c) \quad \frac{\varrho}{\varrho_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{k-1}} = \left(\frac{z}{c \mathfrak{R}} \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Die Masse m einer Schicht von der Dicke z wird

$$(d) \quad m = \int_0^z \varrho dz = \frac{k-1}{k} \varrho_0 (c \mathfrak{R})^{-\frac{1}{k-1}} z^{\frac{k}{k-1}}.$$

Zieht sich die Kugel zusammen, so daß der neue Radius $\mathfrak{R}_1 = \frac{\mathfrak{R}}{\lambda}$ wird, so ist die Masse m_1 einer Schicht, die bis in die Tiefe z_1 reicht,

$$(e) \quad m_1 = \frac{k-1}{k} \lambda^3 \varrho_0 \left(c \frac{\mathfrak{R}}{\lambda} \right)^{-\frac{1}{k-1}} z_1^{\frac{k}{k-1}}.$$

Ich habe oben gezeigt, daß in einer Gaskugel von Art der Sonne die Strahlung nur aus sehr geringer Tiefe stammt. Diese strahlende Schicht habe die Dicke z und die Masse m . Machen wir mit Ritter die Annahme, daß bei Kontraktion die Masse der in Wirklichkeit strahlenden Schichten im wesentlichen konstant bleibt, so erhalten wir aus (d) und (e) für die Dicke z_1 der strahlenden Schicht nach Verkürzung des Radius

$$(f) \quad \frac{z_1}{z} = \lambda^{\frac{2-3k}{k}}.$$

Da Mittelpunktstemperatur mal Radius konstant bleibt, folgt aus (b)

$$\frac{T_1}{\lambda T_0} = \frac{z_1}{c \frac{\pi}{\lambda}}$$

und weiter

$$(g) \quad \frac{T_1}{T} = \lambda^2 \frac{z_1}{z} = \lambda^{\frac{2-k}{k}}.$$

Das Gesetz der Änderung der Dichte und Temperatur in dieser Schicht ist während der Kontraktion dasselbe geblieben, die mittleren Temperaturen sind deshalb T_1 und T proportional, und betrachtet man diese dünne Schicht als schwarzen Körper, so werden dessen „schwarze“ Temperaturen angenähert ebenfalls T_1 und T proportional. Die pro Flächeneinheit ausgesandten Strahlungsmengen q_1 und q verhalten sich deshalb wie

$$(h) \quad \frac{q_1}{q} = \left(\frac{T_1}{T} \right)^4 = \lambda^{\frac{4(2-k)}{k}}$$

und die von der ganzen Kugel ausgesandten Strahlungsmengen wie

$$(i) \quad \frac{\mathfrak{U}_1}{\mathfrak{U}} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{q_1}{q} = \lambda^{\frac{2(4-3k)}{k}}.$$

Haben wir es mit adiabatischen Kugeln zu tun, so ist $k = \alpha = \frac{c_p}{c_v}$.

Für dreiatomige Gase, $\alpha = \frac{4}{3}$, bleibt $\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}$, für ein- und zweiatomige Gase, $\alpha = \frac{5}{3}$ und $\alpha = \frac{7}{5}$, ist $\frac{\mathfrak{U}_1}{\mathfrak{U}} < 1$; d. h. trotz zunehmenden Temperaturen nimmt die Helligkeit sich kontrahierender, adiabatischer Gaskugeln ein und zweiatomiger Gase ab. Gase mit $\alpha < \frac{4}{3}$ liefern instabile Gebilde. Die Helligkeit einer stabilen, adiabatischen Gaskugel, die sich durch Kontraktion erhitzt, kann also nie zunehmen, sondern muß abnehmen. Bleiben wir aber bei polytropen Kugeln, deren strahlende Schichten im Strahlungsgleichgewichte sind, $n = 5$, $k = \frac{6}{5}$, so folgt $\frac{\mathfrak{U}_1}{\mathfrak{U}} = \lambda^{\frac{2}{5}}$, also langsam steigende Helligkeit.

Eine befriedigende Lösung dieses Problems können wir erst geben, wenn wir in der Lage sind die Wirkung der Absorption hinreichend genau zu fassen. Ein Versuch zur Lösung dieses äußerst schwierigen Problems wurde von J. Königsberger*) unternommen.

§ 18. Besondere Aufmerksamkeit widmet Ritter dem Pulsationsproblem. Im Kap. XVIII, C habe ich die Schwingungen von Gas-

*) J. Königsberger, Über die Emission von Körpern mit endlichem Absorptionsvermögen. Annal. d. Phys. Bd. 12. Seite 342. 1903.

kugeln untersucht, die denjenigen inkompressibler Flüssigkeiten entsprechen; die Kugelfläche geht periodisch in eine Sphäroidfläche über. Ritter untersucht eine andere Klasse von Schwingungen, bei denen die Kompressibilität des Gases zur Geltung kommt; die Teilchen verschieben sich längs des Radius, die Dichtigkeit bleibt in konzentrischen Schichten konstant, und die Kugel behält Kugelgestalt bei. Das Problem wurde gelöst für kleine Schwingungen unter den Annahmen 1. die Kugel ist von konstanter Dichte, 2. die Kugel bleibt während den Pulsationen von konstanter Dichte, 3. die Teilchen folgen während ihrer Bewegung der Poissonschen Gleichung $pv^x = \text{konst}$. Für unendlich kleine Schwingungen sind 2) und 3) sich nicht widersprechend. Ich skizziere die sechste Abhandlung. Bezeichnet ξ die Verschiebung eines Teilchens aus seiner Gleichgewichtslage, und was sich auf diese bezieht, soll im folgenden den Index 0 tragen, so ist

$$(a) \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} = -g - \frac{1}{\varrho} \frac{dp}{dr}.$$

Wir setzen

$$(b) \quad \xi = r - r_0, \quad \omega = \frac{\xi}{r_0}.$$

Nach Annahme 2) ist ω in jedem Augenblick durch die ganze Kugel hindurch konstant. Dann ist

$$(c) \quad g = g_0(1 + \omega)^{-2}; \quad \varrho = \varrho_0(1 + \omega)^{-3}, \quad r = r_0(1 + \omega), \\ dp_0 = -g_0 \varrho_0 dr_0,$$

und die Poissonsche Gleichung liefert

$$(d) \quad p = p_0 \left(\frac{\varrho}{\varrho_0} \right)^x = p_0(1 + \omega)^{-3x}.$$

In (a) eingesetzt ergibt sich

$$(e) \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} = -g_0[(1 + \omega)^{-2} - (1 + \omega)^{2-3x}].$$

Für eine Kugel konstanter Dichte ist

$$(f) \quad g_0 \omega = \frac{g_0 \xi}{r_0} = \frac{g_0}{R_0} \xi,$$

wenn g_0 und R_0 für die Oberfläche gelten; wir erhalten für kleine Exkursionen (kleine ω)

$$(g) \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{g_0}{R_0}(3x - 4)\xi,$$

und die Periode dieser Schwingungen ist

$$(h) \quad \tau = 2\pi \sqrt{\frac{R_0}{(3x - 4)g_0}} = 11897 \sqrt{\frac{1}{(3x - 4)\bar{\varrho}_0}} \text{ sek},$$

wenn ρ_0 gramm cent⁻³ die Dichtigkeit der Kugel in der Ruhelage mißt. (Vgl. oben Formel (319), S. 451). Für eine Gaskugel konstanter Dichte an Masse und Radius gleich der Sonne ergibt sich für einatomiges Gas $\tau = 2^h 48' 53''$, für zweiatomiges Gas $\tau = 6^h 17' 38''$. Für dreiatomige Gase wird die Schwingungsdauer, selbstverständlich, unendlich. (Vgl. oben Kap. VIII).

In der elften Abhandlung sucht Ritter diese Theorie auf endliche Amplituden von beliebiger Größe zu erweitern, wie folgt:

In Gleichung (e) wird eine neue Variable

$$(i) \quad \varphi = \frac{r}{r_0} = r_0(1 + \omega)$$

eingeführt. Beachten wir wieder, daß $\frac{g_0}{r_0} = \frac{g_0}{R_0}$, so wird

$$(k) \quad \frac{R_0}{g_0} \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -[\varphi^{-2} - \varphi^{2-3x}]$$

und integriert

$$(l) \quad \varepsilon = \frac{R_0}{g_0} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{2}{\varphi} - \frac{2}{3(x-1)} \frac{1}{\varphi^{3(x-1)}} + \text{konst.}$$

Die Konstante wird bestimmt durch den Wert ε_0 , den ε beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage $\varphi = 1$ annimmt, und wir erhalten

$$(m) \quad \varepsilon = \frac{R_0}{g_0} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{2}{\varphi} - \frac{1}{3(x-1)} \cdot \frac{1}{\varphi^{3(x-1)}} - \varepsilon_0 + 2 \frac{3x-4}{3(x-1)}.$$

Wir sehen, $\frac{d\varphi}{dt}$ kann nur gleich Null werden, Schwingungen sind nur dann möglich, wenn $\varepsilon_0 < 2 \frac{3x-4}{3(x-1)}$. Ist ε_0 größer, d. h. ist die kinetische Energie der Schwingungsbewegung zu groß, so geht die Auswärtsbewegung stets weiter, und die Kugel stiebt auseinander. Darauf gründet Ritter seine berühmte Trennung der Gaskugeln in zentripetale und zentrifugale Gebilde. Diese Trennung und ihre Bedeutung für Probleme der Kosmogonie hat besondere Beachtung und Verbreitung gefunden. (Vgl. z. B. den Artikel Kosmogonie in Valentiners Astronomischem Wörterbuch). Und doch halte ich diese Rittersche Theorie nicht für stichhaltig. Der Begriff der gleichmäßigen Kontraktion (vgl. oben Kap. V § 6) fehlt den Arbeiten Ritters. Darnach ist klar, daß für endliche Änderungen die Annahmen 2) und 3) Seite 481 sich widersprechen. Sollen die Teilchen einer Gaskugel konstanter Dichte stets Kugeln konstanter Dichte aufbauen, so ist dies nur möglich, wenn sie kosmogenetische Zustandsänderung $p\nu^{\frac{1}{3}} = \text{konst.}$ durchmachen. Folgen sie der Poissonschen Zustandsgleichung, so kann die Dichte nicht konstant bleiben, dreiatomige Gase ausgenommen.

Legen, wie Ritter annimmt, die Teilchen adiabatische Wege zurück, so kann φ resp. ω nicht durch die ganze Kugel hindurch konstant bleiben; φ wird Funktion von r , die Gleichung (k) geht in eine partielle Differentialgleichung über, und die Lösung (m) wird ungültig. Soll die Kugel aber konstante Dichte behalten, so muß $\alpha = k = \frac{4}{3}$ gesetzt werden. Dann sind aber, wie sich schon für kleine Exkursionen zeigte, keine Schwingungen möglich; Gleichung (m) liefert $\varepsilon = \varepsilon_0$, d. h. die einmal eingeleitete Bewegung setzt sich fort. Damit erscheinen mir aber auch die weiteren Untersuchungen Ritters der zentrifugalen Gebilde, so fein und geistreich sie an und für sich sind, einer Revision bedürftig.*)

Den Arbeiten Ritters sind noch lange nicht genügende Beachtung und ein hinreichend vertieftes Studium zuteil geworden; sie enthalten manche Schätze, die noch gehoben werden können. Namentlich gilt dies in bezug auf die Betrachtungen über Geschwindigkeiten im interstellaren Raum und die Temperaturen, die beim Eindringen von Meteoriten in widerstehende Medien erzeugt werden. Sie stehen in innigem Zusammenhange mit anderen Arbeiten Ritters**), die noch vollständig unbeachtet geblieben sind, obwohl sie so unerwartete Resultate enthalten, daß ein gewisses Mißtrauen berechtigt wäre, würde nicht Ritters Name für die Gediegenheit dieser Untersuchungen bürgen. Ihren Ausgangspunkt scheint diese ganze Gedankenreihe zu nehmen in einer kleinen Arbeit Ritters: Über ein Paradoxon der mechanischen Wärmetheorie; Wied. Annal. Bd. 160, S. 454, 1877, und Bd. 2, S. 616. 1877.

§ 19. Anlaß zu einigen Bemerkungen gibt mir eine Abhandlung von J. Wilsing***). Wilsing bezweifelt die Richtigkeit des Ritterschen Satzes, daß Mittelpunktstemperatur mal Radius einer Gaskugel konstant bleibt, durch den Einwand, daß Ritter diesen seinen Betrachtungen keinen speziellen thermodynamischen Weg zugrunde gelegt hat. Wilsing ist offenbar der § 9 der 2. Abhandlung: Zustandslinien und kosmogonische Linien entgangen. Denn 1. stellt hier

*) Die Schwingungen von Gaskugeln behandelt ferner: J. H. Jeans. The stability of a Spherical Nebula. Phil. Trans. Vol. 199. pag. 1. London 1902.

**) A. Ritter, Über die Fortpflanzung von Spannungen in elastischen Körpern. Zweite Abteilung. Zeitschrift d. V. deutscher Ingenieure. XXXIV. S. 1268. 1890
A. Ritter, Beitrag zur Theorie der adiabatischen Zustandsänderung. Wied. Annal. Bd. XXXVII. S. 44 und 633; 1889; Bd. XXXX. S. 356; 1890.

***) J. Wilsing, Über die Erhaltung der Energie der Sonnenstrahlung. Astron. Nachr. Nr. 3696. Bd. 154. S. 429, 1901.

Ritter die Gleichung des Weges auf (Gl. 53), 2. gibt er diesem Wege einen eigenen Namen, „kosmogonische Zustandsänderung“ und 3. ist (Seite 548) eine eigene Figur zur Darstellung dieses Weges angelegt. Die Weggleichung ist richtig, wenn auch ihre Ableitung lückenhaft; sie erzwingt das Gesetz $T_0 \cdot \mathfrak{R} = \text{konst.}$

Die Unterlassung der Festsetzung eines Weges findet sich in Wirklichkeit bei Wilsing. Wir gehen aus von der Energiebeziehung (oben Gl. (2), Seite 4):

$$(a) \quad dQ = d\varepsilon - dA.$$

Spezialisieren wir für ein vollkommenes Gas, so ist $d\varepsilon = c_v dT$, und wir erhalten

$$(b) \quad dQ = c_v dT - dA.$$

Dies ist auch die Ausgangsformel von Wilsing, allein wohl aus Versehen wird c_p , statt der Wärmekapazität c_v , benutzt. Ein Körper mit einer Energie proportional $c_p T$ ist mir nicht bekannt. Wir beziehen (b) auf das Massenelement dm , bezeichnen mit dq_m die pro Zeiteinheit zugeführte Wärmemenge, mit dt das Zeitelement, und erhalten bei sinngemäßer Festsetzung von dT_m und dA_m

$$(c) \quad dq_m dt = c_v dm dT_m - dA_m$$

und integriert über die Masse m der Kugel

$$(d) \quad dt \int dq_m = \int c_v dm dT_m - \int dA_m.$$

$-\int dq_m = -Q$ ist die pro Zeiteinheit abgegebene Wärmemenge, $\int dA_m$ ist die von den Gravitationskräften während dt geleistete Arbeit, $= \frac{dV}{dt} dt$; und bilden wir die mittlere Temperatur des Körpers

$$(e) \quad mdT = \int dm dT_m,$$

so erhalten wir die Gleichung

$$(1) \quad c_v m dT = \left(\frac{dV}{dt} - Q \right) dt,$$

an welche Wilsing seine weiteren Betrachtungen knüpft. Allein es ist a priori klar, daß aus dieser Gleichung ohne weitere Spezialisierung nur Binsenwahrheiten herausgelesen werden können; nämlich: die Temperatur eines *gasförmigen* Gebildes steigt, sinkt oder bleibt konstant, je nachdem die von den Gravitationskräften geleistete Arbeit größer, kleiner oder gleich ist der abgegebenen Wärmemenge, wozu, da Wilsing das Zeitelement noch eingefügt hat, hinzuzusetzen ist: pro Zeiteinheit. Statt dessen folgert Wilsing (Seite 43):

Wird die Ausstrahlung größer, während die Änderung des Potentials $dV : dt$ kleiner wird, so muß schließlich

$$\frac{dV}{dt} - Q = 0,$$

also auch $dT = 0$ werden, d. h. die mittlere Temperatur des Körpers besitzt ein Maximum. Mit weiter zunehmender Verdichtung wird die Änderung des Potentials gleichförmiger, so daß man in dieser vorgeschrittenen Epoche die Gleichung (1) durch die folgende ersetzen kann:

$$(2) \quad c_v m dT = (a - Q) dt,$$

in welcher man die Konstante a als einen für die Epoche gültigen „oskulierenden“ Wert zu betrachten hat. Da dT und dQ gleiches Vorzeichen haben, so konvergiert die Differenz $(a - Q)$ gegen Null. Dieses Ergebnis läßt sich durch den folgenden Satz ausdrücken:

„Der Wärmeverlust, welchen ein Weltkörper durch Strahlung in der Zeiteinheit erleidet, ist äquivalent der in derselben Zeit von den Gravitationskräften bei Verdichtung seiner Masse geleisteten Arbeit.“

Wie kann man aber dies alles beweisen, wenn man über die Natur des Weges keine Festsetzungen getroffen hat? Warum soll z. B. mit zunehmender Verdichtung $\frac{dV}{dt}$ gleichförmiger werden? Etwa weil die Kompressibilität des Gases nachläßt? Dann würde aber schon die Gleichung (1) ihre Gültigkeit verlieren, da sie sich nur auf vollkommene Gase bezieht, da nur für diese $d\varepsilon = c_v dT$ ist. Oder warum haben dT und dQ gleiches Vorzeichen, da es doch Wege mit negativer Wärmekapazität gibt? Kontrahiert sich eine Gaskugel gleichförmig durch eine Reihe von Gleichgewichtszuständen hindurch, so ist der Weg die kosmogenetische Zustandsänderung, seine Gleichung ist $p v^{\frac{2}{3}} = \text{konst.}$ und seine Wärmekapazität für ein- und zweiatomige Gase negativ, so daß dT und dQ entgegengesetztes Vorzeichen haben.

Ohne Festsetzung des Weges läßt sich aus Gleichung (1) nicht mehr herausholen, als oben angegeben. Baut man aber Kugeln aus ein- oder zweiatomigen Gasen in polytropem Gleichgewicht, und dazu gehören die von Ritter behandelten adiabatischen Kugeln, die stets nach derselben Polytropen gebaut sich kontrahieren, so ist der Zusammenhang zwischen $\frac{dV}{dt}$ und Q eindeutig bestimmt. $\frac{dV}{dt}$ ist in einem nur von der Atomzahl abhängigen Verhältnis größer wie Q ; die Wärmekapazität des Weges ist negativ und bei Wärmeausstrahlung T stets im Steigen begriffen. Verliert das Gas endlich die Eigenschaft, voll-

kommenes Gas zu sein, so läßt sich, falls nicht die Gleichung des neuen Zustandes bekannt ist, nicht einmal mehr die der Gleichung (1) entsprechende Gleichung aufstellen.

An Gl. (2) knüpft Wilsing folgenden Schluß:

„Wollte man annehmen, daß die Anwendung des Stefanschen Strahlungsgesetzes gestattet sei, so würde die vorstehende Gleichung in folgende übergehen“:

$$c_0 m dT = (a - \varepsilon T^4) dt,$$

welche Gleichung dann integriert wird. Hier scheint mir wieder ein Versehen vorzuliegen. Denn das T der rechten Seite der Gleichung kann nicht dasselbe sein, das links steht und nach Gleichung (e) definiert ist. Es müßte vielmehr gebildet sein als Mittelwert der vierten Potenzen aller vorkommenden Temperaturen.

Den Satz, daß eine Wärme ausstrahlende Gaskugel ihre Temperaturen steigert, sucht Wilsing durch einen Gedankengang zu widerlegen, der sich bereits bei Ritter in § 11 der zweiten Abhandlung vorfindet, allerdings in entgegengesetzter Absicht.

„Da Ritter aus seinen Formeln den Schluß herleitet, daß Bedingung einer Temperatursteigerung immer Wärmeentziehung, Bedingung einer Temperaturniedrigung Wärmezuführung ist, so würde ferner folgen, daß, wenn Druck und Temperatur in je zwei korrespondierenden Massenelementen zweier gleicher, im adiabatischen Gleichgewicht befindlicher Gaskugeln zur Zeit $t = 0$ einander gleich sind, und nur zwischen sich entsprechenden Elementen ein Wärmeaustausch stattfindet, die Mitteilung einer beliebig kleinen Wärmemenge an die Elemente der einen Kugel infolge des eintretenden Unterschiedes in der gegenseitigen Zustrahlung ein stetiges Wachsen der Temperaturdifferenz bewirken würde. Der urprüngliche Zustand der Kugeln müßte daher ein labiler Gleichgewichtszustand sein im Widerspruch mit der mechanischen Wärmetheorie, welche den stabilen Gleichgewichtszustand eines Systems durch die Forderung charakterisiert, daß die Entropie des Systems ein absolutes Maximum werden soll. Diese Forderung ist aber im Anfangszustand der beiden Massen erfüllt.“

Ich kann diesem Schluß nicht beipflichten. Die erwähnte Gleichgewichtsbedingung gilt bekanntlich nur für isolierte Systeme; sie verliert ihre Gültigkeit bei Energieabgabe des Systems, wie sie bei den beiden in den Weltenraum strahlenden Gaskugeln stattfindet. Werden die beiden Kugeln aber in eine spiegelnde Hülle eingeschlossen,

so versagt dies Kriterium ebenfalls, da die Entropie des Systems konstant bleibt.

§ 20. In Kap. XVII, §§ 16 bis 18 habe ich den Energieumsatz in einem Gase, das durch das Strömungsbild gezwungen ist seine Geschwindigkeit zu ändern, behandelt und hier und an anderen Stellen darauf hingewiesen, daß diese Verhältnisse als Erklärungsprinzip mancher kosmologischer und meteorologischer Erscheinungen dienen können. Darauf ist auch schon von anderer Seite aufmerksam gemacht worden. J. N. Lockyer führt in einem überaus reichhaltigen Aufsatze*), in dem er die Resultate einer eigenen, größeren Arbeit zusammenfassend darstellt, unter X. folgendes Ergebnis an: „The brighter lines in spiral nebulae, and in those in which a rotation has been set up, are in all probability due to streams of meteorites with irregular motions out of the main streams, in which the collisions would be almost *nil*. It has already been suggested by Prof. G. Darwin — using the gaseous hypothesis — that in such nebulae „the great mass of the gas is non luminous, the luminosity being an evidence of condensation along lines of low velocity according to a well-known hydrodynamicel law. From this point of view the visible nebula may be regarded as a luminous diagram of its own stream-lines.“ Der angeführte Satz findet sich bei Darwin in einer Begründung eines Aufsatzen von A. Winchell;**) ich weiß nicht, steht der Satz bereits in der Originalarbeit oder erst im Referate. In dieser Form scheint er mir unrichtig zu sein. Denn wie oben Kap. XIV, § 17 dargetan, kommt nach bekannten hydrodynamischen Gesetzen in der Helligkeitsverteilung einer Staub- oder Gasmasse nicht ein Bild der Strombahnen, sondern der Kurven gleicher Geschwindigkeit zum Ausdrucke.

Auf die Möglichkeit, diese Betrachtungen meteorologischen Problemen nutzbar zu machen, hat auch in einer kurzen Notiz M. Möller***) hingewiesen. Als Beispiel habe ich den inneren Mechanismus der tropischen Zyklone eingehender behandelt. Die sich theoretisch ergebende Struktur derselben wird man mit Hinblick auf die vereinfachenden Voraussetzungen mit der Beobachtung befriedigend übereinstimmend finden; ist doch rein kreisförmige Bewegung aller

*) J. N. Lockyer, Researches on Meteorites. Nature. Vol. XXXVII. pag. 55. 1887—88.

**) G. H. Darwin, World-Life; or Comparative Geology by Alex. Winchell. Nature. Vol. XXXI. pag. 25. 1884—1885.

***) M. Möller, Über die zur Erzeugung eines Wirbels erforderliche motorische Kraft. Meteorol. Zeitschrift. Bd. XXXI. Seite 19. 1896.

Teilchen vorausgesetzt, und sind die beobachteten Daten nur in den untersten Schichten gewonnen, wo Reibung die Geschwindigkeiten und den Energieumsatz stark beeinflußt haben kann. Ich war bisher mit Reye der Ansicht, daß diese Zyklonen zustande kommen durch Auslösung eines labilen Gleichgewichtszustandes der Atmosphäre, sehe nun aber, daß von berufenster Seite*) eine entgegengesetzte Ansicht vertreten wird. So sehr ich die Berechtigung der hier gemachten Einwürfe anerkenne, bin ich von der Unrichtigkeit meiner bisherigen Ansicht noch nicht überzeugt worden. Denn die vertikalen Temperaturgradienten, die über den tropischen Ozeanen zur Erreichung einer labilen Atmosphäre nötig sind, sind außerordentlich klein. Geben wir der über der Meeresoberfläche liegenden, mit Wasserdampf gesättigten Schicht eine Bodentemperatur von 20° , so erzwingt ein Temperaturgradient von $0,44\% / 100 \text{ m}$ bereits indifferentes Gleichgewicht. (Bei 30° könnte er bis $0,37\% / 100 \text{ m}$ sinken.) Daß solche Temperaturgradienten, die über dem Festlande unter Durchschnitt liegen, sich über Wasserflächen häufig einstellen werden, ist durchaus nicht unwahrscheinlich. Und wenn die Zyklonen am leichtesten nach der Regenzeit sich bilden, so kann dies darin begründet sein, daß dann bis in höhere Schichten hinauf die Atmosphäre reich mit Wasserdampf beladen ist, und hier kleine Temperaturgradienten labile Zustände bewirken. Aus gleichem Grunde kann eine Zyklone den nachfolgenden die Bildung erleichtern; in der Tiefe kann sich der geringe, erforderliche Temperaturgradient auch über einer Wasserfläche wohl unschwer herstellen. Diese Frage kann mit Sicherheit nur durch Beobachtungen entschieden werden, welche durch die in neuester Zeit begonnene Erforschung der oberen Schichten der Atmosphäre auch über den Ozeanen gewonnen werden können.

Die Anwendbarkeit des eingangs dieses Paragraphen erwähnten Prinzips auf meteorologische Probleme möchte ich noch an zwei Beispielen zeigen. Während der Föhnstürme bilden sich am Nordrande der Alpen oft Teilminima aus, die von einigen Forschern als Ursache, von anderen als Folge des Föhns angesehen werden. Letztere Ansicht ist namentlich durch R. Billwiller**) verfochten worden;

*) J. Hann, Lehrbuch der Meteorologie. V. Buch. 3. u. 4. Kap. Leipzig 1901.

**) R. Billwiller, Der Föhn vom 13. Januar 1895 am Nordfuß der Alpen und die Bildung einer Teildepression daselbst. Meteorol. Zeitschrift. Bd. XXX. Seite 201. 1895.

— — Bildung barometrischer Teilminima durch Föhne. Meteorol. Zeitschrift. Bd. XXXVI. Seite 1. 1901.

ich schließe mich derselben an, wenn mir auch die gegebene Erklärung durch die hohe Temperatur des Windes nicht stichhaltig erscheint. Die von dem Alpenkamme herabstürzenden Luftmassen werden von den Seitentälern gesammelt und dem eigentlichen Föhn-tale zugeführt. Durch die Geländeformation, durch das Strömungsbild gezwungen, nehmen die Winde größere Geschwindigkeit an, die sie aus eigener Energie bestreiten, wobei (vgl. die Tabelle Seite 369) die Druckverminderung stark, die Temperaturniedrigung der heißen Luftmassen bei den in Betracht kommenden Geschwindigkeiten gering ist. Am Ausgange der Föntäler müssen sich demnach mit eintretendem Winde kleine barometrische Depressionen bilden. Kommen die Luftmassen wieder auf größeren Querschnitt, so vermindert sich ihre Geschwindigkeit, und ihr Druck steigt, (sogenannte Bewegung gegen den Gradienten), bis zu jenem Werte, der die Föhnwinde erzwungen hat.

Über die Entstehung der vertikalen Luftbewegung in den barometrischen Hochdruck- und Niederdruckgebieten sind wir vorderhand nur auf Vermutungen angewiesen. Nehmen wir an in der Strömung in großen Höhen würden über irgend einem Gebiete die Stromlinien sich verengern oder erweitern, so würde hier die Geschwindigkeit steigen oder abnehmen; das Plus oder Minus an lebendiger Kraft muß der Energie ϵ der hier vorhandenen Massen entnommen werden, und ihr Druck wird dementsprechend sinken oder steigen. Dann ist das Gleichgewicht in vertikaler Richtung gestört, und wir erhalten auf- oder absteigende Luftbewegung. Gebieten in der Höhe, in denen die Stromlinien sich drängen, müssen Gebiete benachbart sein, in welchen sie sich streuen; auch in der Tiefe werden Hoch- und Niederdruckgebiete benachbart sein. Dabei erscheinen zwei Arten barometrischer Maximas möglich, je nachdem sie aus den entropiereicheren, polwärts fließenden Strömungen oder den entropieärmeren, rückkehrenden Strömungen gespeist werden. In den Minima aber kann ein Energieumsatz, analog demjenigen in den tropischen Zyklonen, in geringerem oder größerem Maße sich bemerkbar machen.

Tabellen.

Tabelle	Seite	77. Bau der polytropen Gaskugel $n = 0, k = \infty$.
"	2	78. " " "
"	3	78. " " "
"	4	79. " " "
"	5	79. " " "
"	6	79. " " "
"	7	80. " " "
"	8	80. " " "
"	9	81. " " "
"	10	81. " " "
"	11	82. " " "
"	12	83. " " "
"	13	84. Konstanten polytropen Gaskugeln.
"	14	135. Bau der isothermen Gaskugel $n = \infty, k = 1$.
"	15	141. Numerische Auswertung der Lösungsspirale isothermer Gaskugeln.
"	16	252. Bau der kosmischen Staubmasse $n = 0$.
"	17	252. Bau der kosmischen Staubmasse $n = 1,5$.
"	18	258. Bau der isotherm-isentropen kosmischen Staubmasse.
"	19	258. Innere Reibung einer kosmischen Staubmasse.
"	20	310. Krümmungsradien von Lichtstrahlen in der polytropen Gaskugel $n = 1,5$.
"	21	310. Krümmungsradien von Lichtstrahlen in der polytropen Gaskugel $n = 2,5$. (Wasserstoff.)
"	22	310. Krümmungsradien von Lichtstrahlen in der polytropen Gaskugel $n = 2,5$. (Atmosphärische Luft.)
"	23	312. Krümmungsradien von Lichtstrahlen in der polytropen Gaskugel $n = 3$. (Kohlensäure.)
"	24	313. Krümmungsradien von Lichtstrahlen in der polytropen Gaskugel $n = 4$.
"	25	313. Krümmungsradien von Lichtstrahlen in der polytropen Gaskugel $n = 4,9$.
"	26	314. Krümmungsradien von Lichtstrahlen in isothermen Gas- kugeln $n = \infty$. (Wasserstoff.)
"	27	343. Bau der isentropen Erdatmosphäre bei Berücksichtigung innerer Gravitation.
"	28	344. Bau der polytropen Erdatmosphäre $n = 33,784$ bei Be- rücksichtigung innerer Gravitation.
"	29	356. Adiabatische Zustandsänderung feuchter Luft.
"	30	369. Energieumsatz in adiabatisch strömender Luft.
"	31	410. Bau der photosphärischen Schichten.
"	32	418. Bau der Korona.

Autorenregister.

- Angström, K., Solarkonstante 383.
Arrhenius, Sv., Siriusbegleiter 292.
— Erhaltung der Sonnenwärme 428.
Auwers, Durchmesser der Photosphäre 96.
Becquerel, H., Anormale Dispersion 412.
Bergholz, P., Zyklone vom 22. Oktober 1882 374.
Betti, E., Energiegehalt und Selbstpotential von adiabatischen Gaskugeln 478.
Bezold, W. v., Wärmeaustausch in der Erdoberfläche und Atmosphäre 385.
— Potentielle Temperatur 457.
— Temperaturänderung auf- und absteigender Luftströme 459.
Billwiller, R., Teilminima bei Föhn 488.
Boltzmann, A., Maximaler Wirkungsgrad von Kreisprozessen 456.
— L., Energie mehratomiger Moleküle 23.
— L., Aerostatik mit Berücksichtigung äußerer Kräfte 461.
Boys, C. V., Gravitationskonstante 96.
Brillouin, M., Schichtenbildung in einer rotierenden Flüssigkeitskugel 431.
Brückner, E., Eiszeiten 386.
Carnot, Sadi, Erklärung der Kälte der höheren Luftsichten 458.
Clarke, A. R., Dimensionen des Erd-sphäroids 95.
Clausius, R., Energie mehratomiger Moleküle 23.
Clausius, R., Wärmekapazität gesättigten Wasserdampfes 396.
Darwin, G. H., Kosmische Staubmasen 245 fügde., 256, 262 fügde., 290.
— Helligkeitsverteilung in Nebeln 487.
Ebert, H., Anormale Dispersion 412. 413.
Eckholm, N., Alter der Erde 425.
— Bau der Sonne als Gaskugel unter Benutzung der van der Waals'schen Zustandsgleichung 467.
Emden, R., Beiträge zur Sonnentheorie 429.
— Luftwogen 430.
— Ausströmungerscheinungen von Gasen 443.
Fényi, J., Geschwindigkeitsmessungen von Protuberanzen 421.
Frankland, Spektrum des komprimierten Wasserstoffs 280.
Goldhammer, D. A., Höhe der Atmosphäre 475.
Guldberg, C. M. und Mohn, H., Temperaturänderung in aufsteigenden Luftströmen 459.
Hale, G., Flocculi-Aufnahmen 403.
Hann, J., Zyklone vom 22. Okt. 1882 374.
— Wärmeabgabe der Erde 382.
— Erklärung des Föhns 457.
— Temperaturänderung aufsteigender Luftströme 458.
— Tropische Zyklonen 488.
Hartmann, J., Monochromatische Photographien 281.
Heaviside, O., Alter der Erde 425.

- Helmholtz, H. v., Kinetische Theorie der Gase 270.
 — Atmosphärische Bewegungen 366.
 — Diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegung 367.
 — Anormale Dispersion 412.
 — Erhaltung der Sonnenstrahlung 426. 428.
 — Luftwogen 430.
 — Bleibender Wärmegehalt 456.
 — Erklärung des Föhns 457.
- Hertz, H., Dauer eines elastischen Stoßes 246.
 — Adiabatische Zustandsänderung feuchter Luft 355.
- Hill, G. W., Bau isothermer Gaskugeln 471.
 — Zustand im Erdinnern 471.
- Jeans, J. H., Stabilität kugelförmiger Nebel 483.
- Jewell, L. E., Farbe der Korona 401.
 — Druck in der Photosphäre 411.
- Julius, W. H., Theorie des Flashspektrums 412 flgd.
 — Erklärung der Protuberanzen 422.
 — Anormale Dispersion und Sonnenflecke 444.
- Kahlbaum, G. W. A., Destillierbarkeit der Metalle 396.
- Kelvin, Lord, Der Fixsternkomplex als kosmische Staubwolke 243. 244.
 — Alter der Erde 425.
 — Schwingungen von Flüssigkeitskugeln 448. 452.
 — Konvektives Gleichgewicht der Atmosphäre 458.
 — Bau adiabatischer Gaskugeln 461.
- Koenigsberger, J., Emission von Körpern mit endlichem Absorptionsvermögen 480.
- Kundt, A., Anormale Dispersion 412.
- Kutta, W., Näherungsweise Integration totaler Differentialgleichungen 74.
 — Näherungsweise Integration von Systemen totaler Differentialgleichungen 92.
- Lamb, H., Integration der Eulerschen Gleichungen 278.
- Lane, J. H., Bau adiabatischer Gas-Kugeln 462.
- Langley, S., Erstreckung der Korona 417.
- Laplace, P. S., Zustand im Erdinnern 472.
- Lie, S., Satz über Differentialgleichungen 2. Ordnung. 473.
- Lockyer, J. N., Kosmische Staubmassen. 240.
 — Emissionsspektren von Dämpfen 402.
 — Helligkeitsverteilung in Nebeln 487.
- Lorenz, H., Temperaturänderung aufsteigender Luftmassen 460.
- Lummer, O. u. Pringsheim, E., Verhältnis der Wärmekapazitäten atmosphärischer Luft 21.
- Mascart, E., Brechungsexponenten der Gase 298.
- Maxwell, J. C., Thermisches Gleichgewicht einer Luftsäule 461.
- Mayer, R., Erhaltung der Sonnenwärme 426.
- Meyer, O. E., Relativgeschwindigkeit zweier Moleküle 246.
 — Wärmeleitungsvermögen der Gase 259.
- Möller, M., Über die zur Erzeugung eines Wirbels erforderliche Kraft 487.
- Müller, G., Photometrie der Gestirne 330.
- Myers, G. W., Lichtwechsel von β Lyrae 292.
- Neuhoff, O., Adiabatische Zustandsänderung feuchter Luft 355.
- Newcomb, S., Erstreckung der Korona 417.
- Oppolzer, E. v., Temperatur in der Photosphäre 411.
 — Sonnenflecken 447.
- Peslin, Temperaturänderung aufsteigender Luftströme 458.
- Penk, A., Alter der Erde 425.
- Perry, J., Alter der Erde 425.

- Pringsheim, E., Strahlung der Gase 287. 385.
 — Brechung und Dispersion des Lichtes auf der Sonne 413.
- Poincaré, H., Apioide 290.
- Radau, R., Sternschnuppen 273.
- Rayleigh, Lord, Farbe des Himmels 401.
- Reye, Th., Geschwindigkeit aufsteigender Luftmassen 360.
 — Geschwindigkeiten der Protuberanzen 421.
 — Temperaturänderung aufsteigender Luftströme 458.
- Ritter, A., Zerstreuungstemperatur 338.
 — Energetik der Atmosphäre der Erde 374.
 — Wärmegleichgewicht der Atmosphäre 461.
 — Untersuchungen über die Höhe der Atmosphäre und die Konstitution gasförmiger Himmelskörper 473 fügld.
 — Strahlungsänderung bei Kontraktion von Gaskugeln 479.
- Rudzki, P., Gleichförmige Kontraktion einer Gaskugel 470.
- See, T. J. J., Doppelsternsysteme 291.
- Seeliger, H. v., Kosmische Staubmassen 240.
 — Gesetz der Sphärenvergrößerung 303.
 — Behandlung der Differentialgleichung der isothermen Gaskugel 472.
- Sellmeier, W., Anormale Dispersion 412.
- Schmidt, A., Strahlengang in Gaskugeln 309.
 — Gekrümmte Lichtstrahlen 302 fügld. 388.
 — Sonnentheorie 388 fügld.
 — Wärmegleichgewicht der Atmosphäre 461.
- Schröter, M., Kreisprozesse zwischen Isothermen und Polytropen 455.
- Schwarzschild, K., Strahlungsgleichgewicht 320. 323.
 — Helligkeitsverteilung auf der Photosphäre 329. 407.
- Tait, P. G., Bau isothermer Gaskugeln 463.
- Thiesen, M., Höhe der Atmosphäre 341.
 — Bau der isothermen Atmosphäre unter Berücksichtigung innerer Gravitation 470.
- Thomson, W., siehe Kelvin, Lord.
- Valentiner, S., Maximaler Wirkungsgrad von Kreisprozessen 456.
 — W., Transmissionskoeffizient der Erdatmosphäre 285.
- Voigt, W., Bau adiabatischer Gaskugeln 465.
 — Energiegehalt und Selbstpotential polytoper Gaskugeln 478.
- Vogel, H., Schwächung der Strahlung der Photosphäre 331. 405.
- Wiedemann, E., Wärmekapazität von Luft und Wasserstoff 22.
- Wilczynski, E. J., Hydrodynamische Untersuchungen 434.
- Wilsing, J., Erhaltung der Energie der Sonnenstrahlung 483.
- Weber, H., Lösung einer Differentialgleichung 260.
- Young, C. A., Rotationsgesetz der Sonne 440.
 — Beschaffenheit der Photosphäre 395.
 — Sonnenflecken 442. 444. 447.
- Zöllner, E., Dichteabnahme in einer isothermen Atmosphäre 340.
 — Differentialgleichung der isothermen Gaskugel 470.

Sachregister.

- | | |
|---|---|
| <p>Absorptionseinheit 283—285.
Absorptionskoeffizient a_p, Zahlenwert 326.
Absorptionskoeffizient a, Zahlenwert 326.
Absorptionskoeffizienten a und a_p 328.
Absorptionsvermögen einer Gaskugel 285.
Absorptionsvermögen einer Schicht 317.
Adiabate. Definition 5.
Adiabatische Temperatur 27.
Anormale Dispersion 412.
Atmosphäre. Bedingung für endliche Erstreckung 225.
— Möglichkeit verschiedener Höhe bei gleicher Bodentemperatur 227.
— Zerstreuungstemperatur 229.
— Krümmungsradien von Lichtstrahlen 299 fgd.
— erster Art und zweiter Art 303.
— Gesetz der Sphärenvergrößerung 303.
— Polytrope Atmosphäre der Erde 324.
— Isotherme Atmosphäre der Erde 336. 339.
— Zerstreuung einer polytropen Atmosphäre 337.
— Maximale Oberflächentemperatur eines festen Weltkörpers 338.
— Polytrope Atmosphäre der Erde mit Berücksichtigung innerer Gravitation 341 fgd.
— Masse der Atmosphäre der Erde 350.
— Zustand der Atmosphäre der Erde in großen Höhen 352 fgd.
— Temperaturgradient in der Atmosphäre bei konvektivem Gleichgewicht 354.
— Die Atmosphäre der Erde kann nicht im konvektiven Gleichgewicht sein 357.
— Verschiedene Arten des Gleichgewichts 358.
— Geschwindigkeit aufsteigender Luftmassen 360.
— Zirkulation mit Rücksicht auf die Natur der Stromlinien 363.
— Energetik der Atmosphäre 376.
— Höhe ihres Schwerpunktes 378.</p> | <p>Atmosphäre. Kälte der oberen Luftsichten 457 fgd.
— Temperaturverteilung unter Einfluß der Schwerkraft 461.
Atomzahl. Abhängigkeit des Verhältnisses der Wärmekapazitäten 23.
— Einfluß derselben bei kosmogenetischer Zustandsänderung 24.

Barometrische Höhenformel 386.
Beleuchtungsformeln 329.
Brechungsexponenten 298.
Brechungsvermögen 298.

Dichte vollkommener Gase. Zahlenwerte 8.
Differentialgleichung der polytropen Gas-Kugel 39. 40.
— — Andere Formen derselben 40.
— — Spezialfälle $n = 0, n = 1, n = 5, 40, 90, 91, 92$.
— — Allgemeine Diskussion 40 fgd.
— — Singuläres Integral 41.
— — Festsetzung der beiden Integrationskonstanten 42.
— — Reihenentwicklung 45.
— — Reduktion auf 1. Ordnung 48.
— — Allgemeine Diskussion der Gleichung 1. Ordnung 49 fgd.
— — Quadratur für $n = 5, 59, 60$.
— — Transformation derselben 67. 69.
— — Übersetzungsverhältnis 69.
— — Numerische Auswertung 73.
— — Lösungsspirale für $n > 5$, 150 fgd.
— — Periodische Verhältnisse für $n > 5$, 152 fgd.
Differentialgleichung der isothermen Gas-Kugel 131.
— — Transformation 132.
— — Numerische Auswertung 135.
— — Reduktion auf 1. Ordnung 136.
— — Diskussion der Gleichung 1. Ordnung 137.
— — Lösungsspirale 137.</p> |
|---|---|

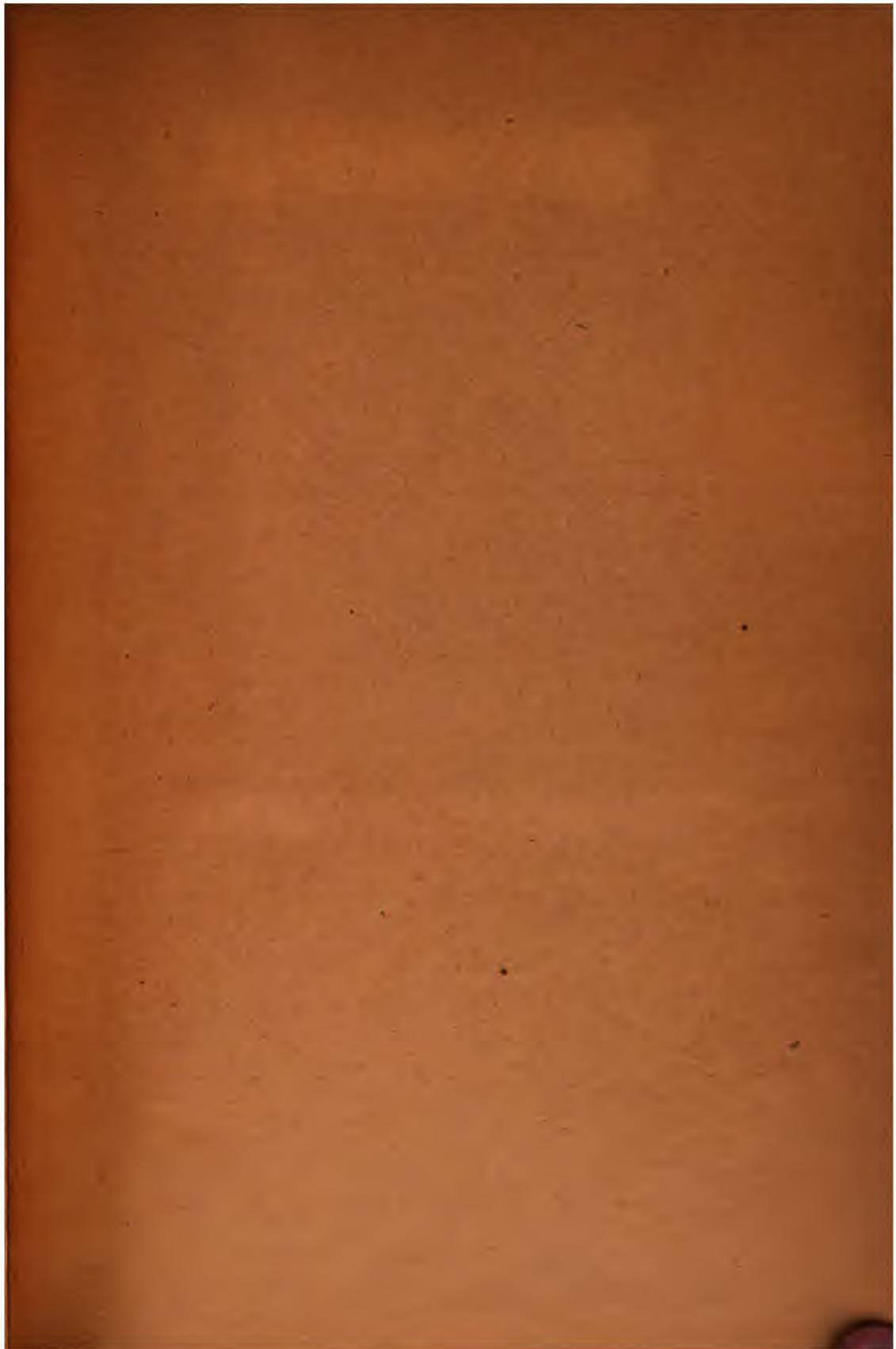
- Differentialgleichung der isothermen Gas-kugel. Numerische Auswertung der Gleichung 1. Ordnung 141.
 — Periodische Verhältnisse 144 fügde.
 Dispersion, anomale 412.
 Dispersionstemperatur 229.
 Doppelsterne. Entwicklung der 291.
 — Bau 292.
 Druckfunktion π 32.
- Effektive Sonnentemperatur 384.
 Einhüllende Kurven 222.
 Eisenkugel. Kontraktion einer 380.
 Energie eines Körpers 1.
 Energieprinzip 1.
 Entropie 2.
 — Abhängigkeit derselben von der polytropen Temperatur 27.
 Entropiegehalt der Nebelflecke 289.
 — der Planeten 290.
 Entropieprinzip 3.
 Erde. Dimensionen 95.
 — Kontraktion der 381.
 — Alter der 425.
 — Zustand im Erdinnern nach S. W. Hill 471.
 Erdinneres 379.
 Erhaltung der Sonnenstrahlung 387. 426.
- Flash 402.
 — Spektrum des nach Julius 412.
 Föhn. Teilminima bei 488.
- Gaskonstante H . Zahlenwerte 8.
 Gaskugeln in beliebigem Gleichgewicht 36.
 — Oberflächenbedingung für Endlichkeit des Radius 37.
 — adiabatische, isentrope 38.
 — erster Art und zweiter Art 306.
 — Schwingungen von 448. 481.
 Gaskugel Isotherme. Differentialgleichung 131.
 — Isotherme in starrer Hülle 158.
 — Kugel niederster Temperatur 161.
 — Kugel kleinster Oberflächendichte 163.
 — Kugel kleinsten Oberflächendruckes 166.
 — Zusammenfassung 167
 — Energiegehalt 170.
 — Selbstpotential 171.
 — $n > 5$. Selbstpotential 181.
 — Verhältnis von Energie und Selbstpotential 147.
 — Wärmeabgabe 148.
 — Krümmungsradien von Lichtstrahlen 314.
- Gaskugeln, polytrope. Definition 37. 38.
 — — Aufstellung der Differentialgleichung 39. 40.
 — — Differentialgleichung für $n = 0$ und $n = 1$, 40.
 — — Singuläres Integral ihrer Differentialgleichung 41.
 — — Fall $n = 5$, 44. 59. 60.
 — — Gleichgewicht derselben 121.
 — — Verhältnis von Energie und Selbstpotential $n \geq 5$, 122.
 — — Energiegehalt, $n < 5$, 125.
 — — Selbstpotential $n < 5$, 125.
 — — Energiegehalt bei $n = 5$, 127.
 — — Selbstpotential bei $n = 5$, 127.
 — — Wärmeabgabe bei Kontraktion 128. 130.
 — — Verhältnis von Energie und Selbstpotential $n > 5$, 157.
 — — Gaskugel in starrer Hülle $n \geq 5$, 173.
 — — — $n > 5$. Kugel niederster polytropen Temperatur 175.
 — — — $n > 5$. Kugel kleinster Oberflächendichte 177.
 — — — $n > 5$. Kugel kleinsten Oberflächendruckes 178.
 — — — Gaskugel in starrer Hülle $n > 5$. Energiegehalt 181.
 — — — Absorptionsvermögen 285.
 — — — Krümmungsradien von Lichtstrahlen 309 fügde.
 — — — Lage der kritischen Schicht 309 fügde.
 — — — Bau nach J. H. Lane 462.
 — — — Bau nach Lord Kelvin 463.
 — — — Bau nach A. Ritter 465. 476.
 — — — Bau nach W. Voigt 465.
 — — — Änderung der Strahlung bei Kontraktion 479.
 — — — Pulsationen nach A. Ritter 481.
 Gaskugeln mit starrem Kerne. Typen von Lösungskurven 199 fügde.
 — — Diskussion der Gleichung 1. Ordnung 200 fügde.
 — — Topographie der Lösungskurven 201 fügde.
 — — Schiefwinkelige Koordinaten 206.
 — — Wendepunktskurve 207.
 — — Maximaltemperatur desselben 223.
 — — Bedingung für endliche Erstreckung 225.
 — — Möglichkeit verschiedener Erstreckung bei gleicher Bodentemperatur 227.
 — — Zerstreuungstemperatur 229.
 — — Energetik 235.
- Gastheorie, kinetische. Grundlagen 238.

- Geschwindigkeiten aufsteigender Luftmassen 360.
 Gleichförmige Kontraktion 71.
 Gleichung des Weges 5.
 Gravitationskonstante. Definition 35.
- Helligkeitsverteilung in einer strömenden Flüssigkeit 277.
 — in Nebelflecken 295. 487.
 — im Bilde einer Gaskugel 329.
 Höhe der homogenen Atmosphäre 9.
 — der adiabatischen Atmosphäre 34.
 Homogene Atmosphäre. Definition und Zahlenwerte 9.
- Isentrope, Definition 5.
 Isentropen, Gleichung derselben 11.
 Isotherm-polytropes System. Isotherm, $n = 0$. 185.
 — Isotherm, $n = 1$. 189.
 — Isotherm, $n = 1,5$. 191.
 — Energetik 194.
- Kalorie 2.
 Kinetische Gastheorie. Grundlagen 238.
 Konstante der kosmogenetischen Flächen.
 $C(p, T, \mathfrak{R})$. 107.
 — $C(\rho, T, \mathfrak{R})$. 108.
 — $C(\rho, p, \mathfrak{R})$. 109.
 — $C(\varrho_k, T, \mathfrak{R})$. 110.
 — $C(\varrho_k, \varrho, \mathfrak{R})$. 110.
 — $C(\varrho_k, p, \mathfrak{R})$. 110.
 — $C(\varrho_k, \mathfrak{R}, \mathfrak{M})$. 111. 112.
 — $C(\varrho, \mathfrak{R}, \mathfrak{M})$. 115.
 — $C(p, \mathfrak{R}, \mathfrak{M})$. 116.
 — $C(T, \mathfrak{R}, \mathfrak{M})$. 116.
 — $C(\nu, \mathfrak{R}, \mathfrak{M})$. 126.
 — der Zustandsgleichung. Zahlenwerte 8.
 Kontraktion, gleichförmige 71.
 Koordinaten, schiefwinkelige 206.
 Korona. Bau derselben 418.
 — Farbe derselben 401.
 Kosmische Staubmasse. Definition 239.
 — Zusammensturz bei anfangs ruhenden Steinen 242.
 — Das Fixsternsystem als — 243. 276.
 — Einfluß unvollkommener Elastizität der Steine 246.
 — Aktionsradius eines Steines 247.
 — Kriterien für die Möglichkeit hydrodynamischer Behandlungsweise 249.
 — Bau derselben für $n = 0$ 251.
 — Bau derselben für $n = 1,5$ 253.
 — Isotherm-isentrope derselben 255.
 — Einfluß innerer Reibung 259.
 — Untersuchung der äußeren Schichten bei Ungültigkeit der Gasgesetze 262.
 — Massenverlust 270.
- Kosmische Staubmassen. Energetik 275.
 Kosmogenetische Temperatur. Definition 27.
 Kosmogenetische Zustandsänderung. 18. 74. 118.
 — Einfluß der Atomzahl 19.
 — — Gleichgewicht eines Gases 20.
 — — Energieumsatz 20. fügd.
 Kosmogenide 18.
 Kreisprozesse. Bestehend aus 2 Polyprescharen 25.
 — Maximaler Nutzeffekt derselben 14. 45.
 Kritische Schicht. Definition 303.
 — — Lage in Gaskugeln 309 fügd.
 Krümmungsradien von Lichtstrahlen in einer Atmosphäre 299.
 Krümmungsradius von Lichtstrahlen 296, 298.
- Lichtstrahlen. Krümmungsradius 296.
 — Gleichung der gekrümmten 297.
 — Krümmungsradien derselben in der Jupiteratmosphäre 300.
 — Absorption in Gaskugeln 318.-319.
 — Krümmung in den photosphärischen Schichten 416.
 Luftpochen 430.
- Maßsystem 7.
 Maximaltemperatur eines starren Kernes 223.
- Nebelflecke. Aufbau derselben 282.
 — Absorptionsvermögen derselben 286.
 — Entropiegehalt derselben 289.
 — Polytrope Temperatur derselben 289.
 — Helligkeitsverteilung 295.
- Optische Masse. Definition 317.
 — — die ein gekrümmter Lichtstrahl durchsetzt 318. 319.
- Photosphäre. Über derselben liegende Massen 332.
 — Zustandekommen der scharfen Begrenzung 398.
 — Absorptionsvermögen der photosphärischen Schichten 410.
 — Bau derselben 410.
 — Krümmungsradien von Lichtstrahlen in derselben 410.
- Polytrope Kurven 10.
 — Zustandsänderung. Definition 13.
 — — Zuzuführende Wärmemenge 13. 27.
 — — Gleichung derselben 15.
 — — Gleichung bei konstanter Energie 15.
 — — Gleichung b. konstanter Entropie 15.

- Polytrope Zustandsänderung. Gleichung bei konstantem Druck 15.
 — — Gleichung bei konstanter Dichte 15.
 — — Energieumsatz bei derselben 15. 16. 17.
 — Temperatur. Definition 26.
 — — Gleichung in Parameterform 28. 32. 334.
 Potentialfunktion. Definition 35.
 Potentialbewegung und Wirbelbewegung atmosphärischer Massen 371.
 Protuberanzen 421 fügl.
 Pulsationen von Gaskugeln 448. 481.
 Rechenregel 28.
 Rotationsgesetz der Sonne 440.
 Schallgeschwindigkeit 30.
 Schlotbildung 367. 370.
 Schwingungen von Gaskugeln 448. 481.
 Singuläres Integral der Differentialgleichung der polytropen Gaskugel 41.
 — — der Differentialgleichung der isothermen Gaskugel 187.
 Solarkonstante 331. 388.
 Sonne. Dimensionen 96.
 — Energieabgabe der Sonne 383.
 — Solarkonstante 383.
 — Effektive Sonnentemperatur 384.
 — Schwarze Körpertemperatur derselben 384.
 — Konstanz der effektiven Temperatur 386.
 — Theorie von Schmidt 388.
 — Wolkenhülle der Photosphäre 395.
 — Scharfer Rand der Photosphäre 398.
 — Farbe der Korona 401.
 — Flashspektrum 402.
 — Bau derselben nach der Polytropen $n = 0$ 404.
 — — — $n = 1,5$ 408.
 — Bau der photosphärischen Schichten 410.
 — Bau der Korona 418.
 — Protuberanzen 421.
 — Ersatz des Strahlungsverlustes nach R. Mayer 426.
 — Ersatz des Strahlungsverlustes nach v. Helmholtz 426.
 — Ersatz des Strahlungsverlustes nach Sv. Arrhenius 428.
 — Diskontinuitätsflächen in der rotierenden Sonne 434 fügl.
 — Aufbau der rotierenden Sonne aus Schichten 437.
 — Rotationsgesetz 440.
 — Wirbel im Innern 441.
 — Flecken derselben 442 fügl.
 — Bau derselben nach N. Eckholm 467.
- Sonne. Pulsationen 448.
 Sphärenvergrößerung 303.
 Staubmassen, kosmische, siehe kosmische Staubmassen.
 Strahlenbrechung in Gaskugeln erster Art 304.
 — — — zweiter Art 305. 307.
 Strahlungsgleichgewicht. Definition 321.
 — Differentialbeziehungen 322.
 — Die äußeren Partien einer polytropen Gaskugel $n = 5$ sind in Strahlungsgleichgewicht 324.
 — Helligkeitsverteilung bei 329.
 Strömende Flüssigkeit. Helligkeitsverteilung 277.
 — Energieumsatz 278. 367.
- Temperatur, polytrope. Definition 26.
 — adiabatische 27.
 — kosmogenetische. Definition 27.
 — maximale eines starren Kernes 223.
 — Zerstreuungstemperatur 229. 338.
 — polytrope der Nebelflecke 289.
 — Schwarze Körpertemperatur 381.
 — Schwarze Körpertemperatur der Sonne 384.
 — Effektive Sonnentemperatur 384.
 — Konstanz der effektiven Sonnentemperatur 386.
 Temperaturfunktion θ 32.
 Temperaturänderung aufsteigender Luftmassen 355. 458 fügl.
 Temperaturgradienten in aufsteigender, feuchter Luft 356.
 Topographie der Lösungskurven 201 fügl.
 Transmissionskoeffizient 285.
- Wärmegehalt 3.
 Wärmekapazität c_v 6.
 Wärmekapazitäten 12. 13.
 Wärmemenge, die bei Änderung der polytropen Temperatur zuzuführen 27.
 Weggleichung 5.
 Wendepunktskurve 207.
 Wirbelbewegung und Potentialbewegung atmosphärischer Massen 371.
- Zentrifugale Gebilde nach A. Ritter 482.
 Zerstreuungstemperatur 229. 338.
 Zirkulationen. Kurz und lang geschlossene 364.
 — Energieumsatz in denselben 367.
 Zustandsgleichung 4.
 Zustandsänderung, Gleichung derselben 5.
 — Kosmogenetische 18. 74. 118.
 Zyklonen, tropische 370. 488.
 — — Bau derselben 373.
 — Konstante 374.

Berichtigungen:

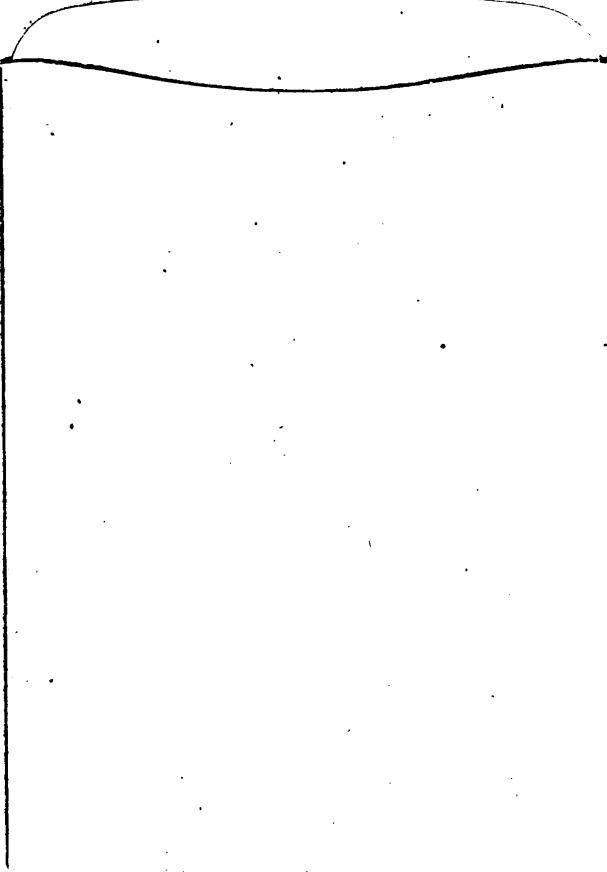
- Seite 57, Zeile 2—3 v. o. statt: „Die Senkrechte $z = z_0, \dots$, erfüllt“ lies:
„Der Punkt $z = z_0$ erfüllt.“
- Seite 57, Zeile 4 v. o. statt „sie“ lies „er“.
- Seite 129, Zeile 5 v. o. statt „ $\frac{1}{3}$ “ lies „ $\frac{1}{6}$ “.
- Seite 135, Tabelle 14, Reihe 16, statt „1,39274“ lies „2,39274“.
- Seite 137, Zeile 17 v. u. statt „die Senkrechte in diesem Punkt liefert“ lies
„dieser Punkt bildet“.
- Seite 149, Zeile 14 v. u. statt „die Senkrechte in z_0 “ lies „der Punkt z_0 “.
- Seite 150, Zeile 18 v. u. statt „diese Senkrechte“ lies „ihr Fußpunkt“.
- Seite 156, Zeile 4 v. o. statt „ $r_1^{\frac{n-5}{n-1}}$ “ lies „ $r_1^{\frac{n-3}{n-1}}$ “.



89074773920



b89074773920a



KURT F. WENDT LIBRARY
COLLEGE OF ENGINEERING
UNIVERSITY OF WISCONSIN
MADISON, WI 53706



89074773920



B89074773920A