

# Symulacja procesów ciągłych i algorytmy adaptacyjne

## Projekt Tsunami

Patryk Czuchnowski, Michał Pędrak, Andrzej Wacławik

### 1. Wstęp

Celem projektu jest modyfikacja dostarczonego kodu symulującego falę tsunami tak, aby symulacja brała również pod uwagę ukształtowanie dna morskiego pobranego z pliku oraz przeprowadzenie eksperymentów i wizualizacja otrzymanych wyników.

### 2. Analiza wzoru i kodu przed modyfikacją

Kod przed modyfikacją reprezentuje następujące równanie:

$$\underbrace{u_t}_{\text{Next state}} = \underbrace{u_{t-1}}_{\text{Previous state}} + \underbrace{u_{t-1} - u_{t-2}}_{\text{States difference}} + \underbrace{\Delta t^2}_{\text{Time step squared}} g \underbrace{\nabla(u_{t-1} \nabla u_{t-1})}_{\text{Physics}}$$

Oznaczmy *Physics* jako  $X$ :

$$\mathbf{X} = \nabla(u \nabla u) = \partial_x(u \partial_x u) + \partial_y(u \partial_y u)$$

$$\partial_x(u \partial_x u) = u_x^2 + u u_{xx} \quad \partial_y(u \partial_y u) = u_y^2 + u u_{yy}$$

$$\mathbf{X} = u_x^2 + u u_{xx} + u_y^2 + u u_{yy}$$

Dla przypomnienia wzór na iloraz różnicowy oraz na drugą pochodną:

$$u'(x) \approx \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} \quad u''(x) \approx \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

Używamy ich do przybliżeń:

$$u_x^2 \approx X_1 = \left( \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \right)^2$$

$$u u_{xx} \approx X_2 = u_{i,j} \cdot \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$u_y^2 \approx X_3 = \left( \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h} \right)^2$$

$$u u_{yy} \approx X_4 = u_{i,j} \cdot \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2}$$

Powyzszym wzorom odpowiada następujący, dostarczony nam kod:

```

h = 10/u.shape[0]
X_1 = ((u[i+1, j] - u[i-1, j]) / 2*h)**2
X_2 = u[i, j] * (
    (u[i+1, j]-2*u[i, j]+u[i-1, j]) / h**2
)
X_3 = ((u[i, j+1] - u[i, j-1]) / 2*h)**2
X_4 = u[i, j] * (
    (u[i, j+1]-2*u[i, j]+u[i, j-1]) / h**2
)

X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4

```

### 3. Modyfikacja wzoru i kodu o zmienną z odpowiadającą głębokości

Chcemy wprowadzić zmienną z reprezentującą głębokość w danym miejscu tak jak w następującym wzorze:

$$\underbrace{u_t}_{\text{Next state}} = \underbrace{u_{t-1}}_{\text{Previous state}} + \underbrace{u_{t-1} - u_{t-2}}_{\text{States difference}} + \underbrace{\Delta t^2}_{\text{Time step squared}} \underbrace{g \nabla ((u_{t-1} - z) \nabla u_{t-1})}_{\text{Physics}}$$

Oznaczmy *Physics* jako  $\mathbf{X}$ :

$$\mathbf{X} = \nabla((u - z) \nabla u)$$

Wprowadzamy zmienną pomocniczą A:

$$A = u - z$$

$$\mathbf{X} = \nabla(A \nabla u) = \partial_x(Au_x) + \partial_y(Au_y) = A_x u_x + A u_{xx} + A_y u_y + A u_{yy}$$

Ponownie przybliżamy ilorazami różnicowymi:

$$A_x u_x \approx X_1 = \left( \frac{(u_{i+1,j} - z_{i+1,j}) - (u_{i-1,j} - z_{i-1,j})}{2h} \right) \left( \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \right)$$

$$A u_{xx} \approx X_2 = (u_{i,j} - z_{i,j}) \cdot \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$A_y u_y \approx X_3 = \left( \frac{(u_{i,j+1} - z_{i,j+1}) - (u_{i,j-1} - z_{i,j-1})}{2h} \right) \left( \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h} \right)$$

$$A u_{yy} \approx X_4 = (u_{i,j} - z_{i,j}) \cdot \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2}$$

W ten sposób otrzymujemy dokładne wzory które możemy zmienić w kodzie:

```
h = 10/u.shape[0]
X_1 = ((u[i+1,j] - z[i+1,j]) - (u[i-1,j] - z[i-1,j])) / (2*h) * ((u[i+1,j] - u[i-1,j]) / (2*h))
X_2 = (u[i,j] - z[i,j]) * (u[i+1,j] - 2 * u[i,j] + u[i-1,j]) / (h**2)
X_3 = ((u[i,j+1] - z[i,j+1]) - (u[i,j-1] - z[i,j-1])) / (2*h) * ((u[i,j+1] - u[i,j-1]) / (2*h))
X_4 = (u[i,j] - z[i,j]) * ((u[i,j+1] - 2 * u[i,j] + u[i,j-1]) / (h**2))

X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4
```

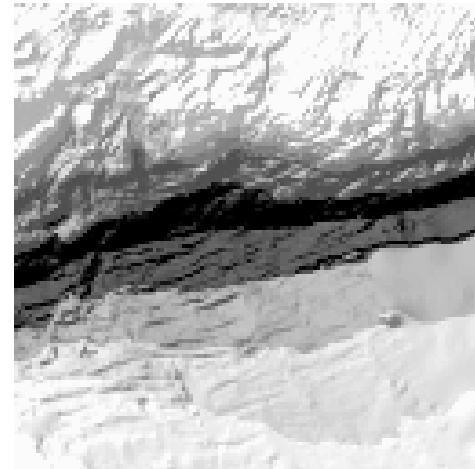
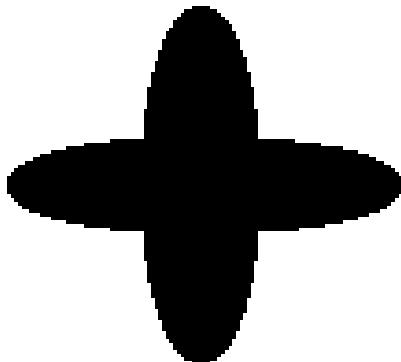
#### 4. Wczytywanie terenu

Stworzyliśmy również funkcję która pozwala nam na wczytywanie ukształtowania dna morskiego ze zdjęcia:

```
def load_terrain(filename, normalize_val):
    img = Image.open(filename).convert("L") # convert to 8 bit grayscale
    z = np.array(img, dtype=np.float32)
    max_val = np.max(z)
    z = (z / max_val) * normalize_val
    return z
```

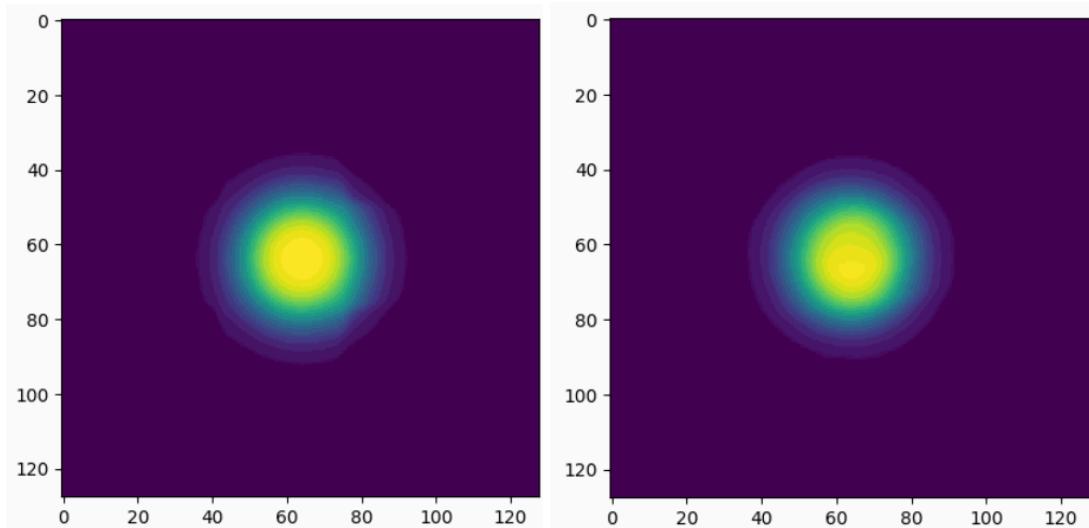
#### 5. Bitmapy powierzchni dna morskiego

Do symulacji utworzyliśmy dwie bitmapy dna morskiego o rozmiarach 128 na 128 pikseli - jednej sztucznej oraz drugiej naturalnej, obie są zamieszczone poniżej.

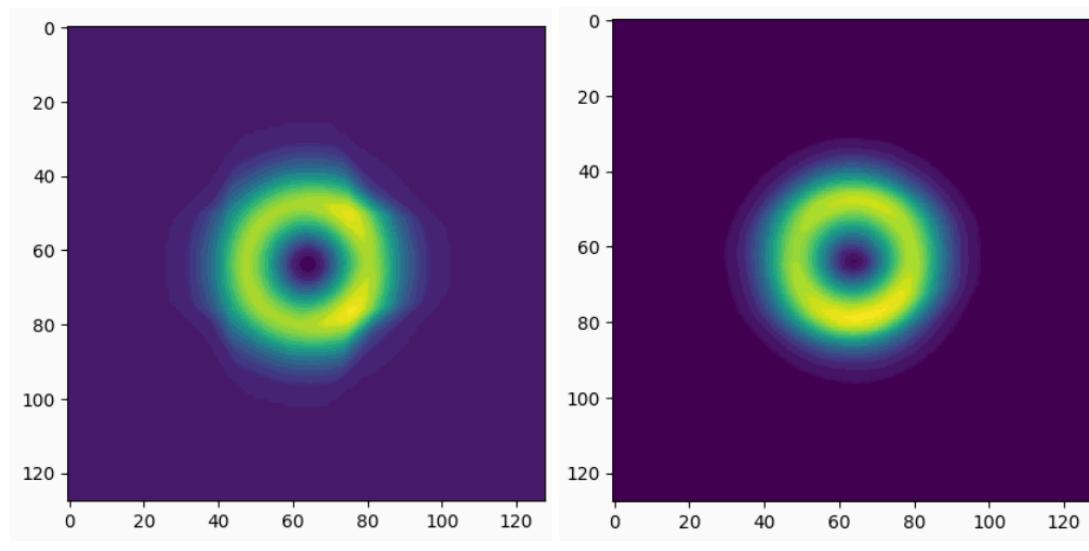


## 6. Przeprowadzone symulacje

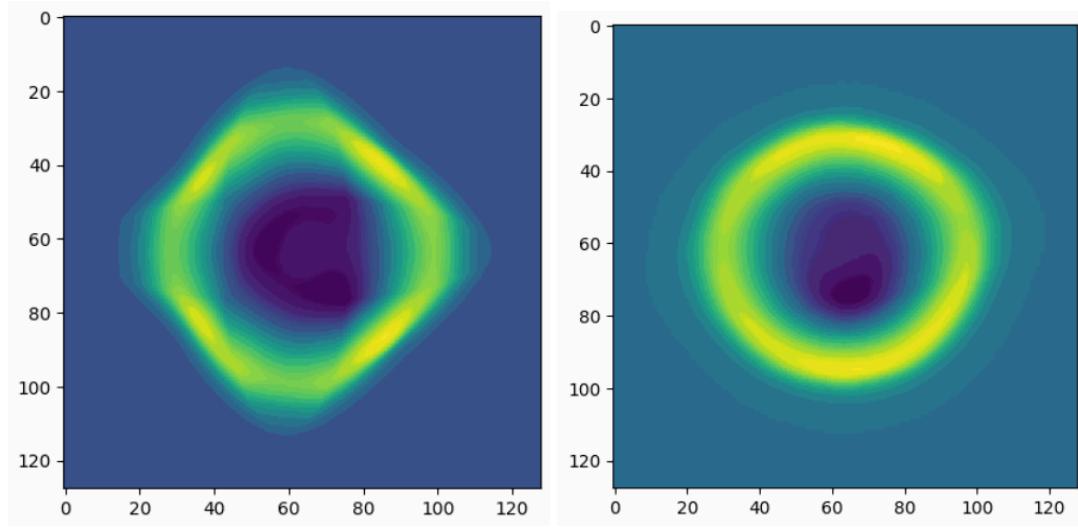
Symulacje były przeprowadzane z rozmiarem 128 na 128 i krokiem czasowym równym 0,001. Poniżej znajdują się wybrane z otrzymanych klatek z utworzonych gifów. Dla każdego wybranego kroku są 2 klatki - jedna dla dna sztucznego (po lewej) oraz druga dla dna naturalnego (po prawej).



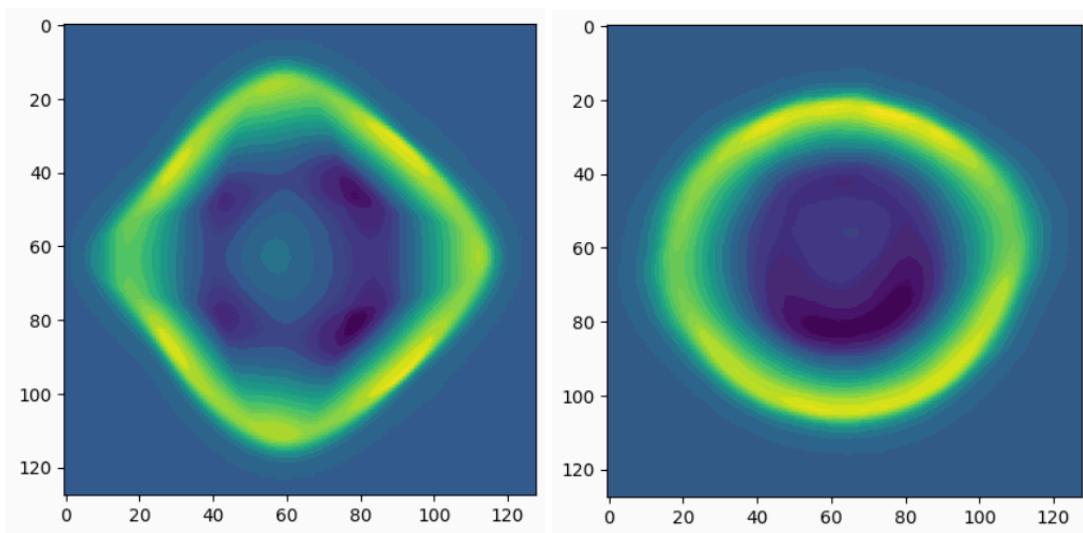
krok 100



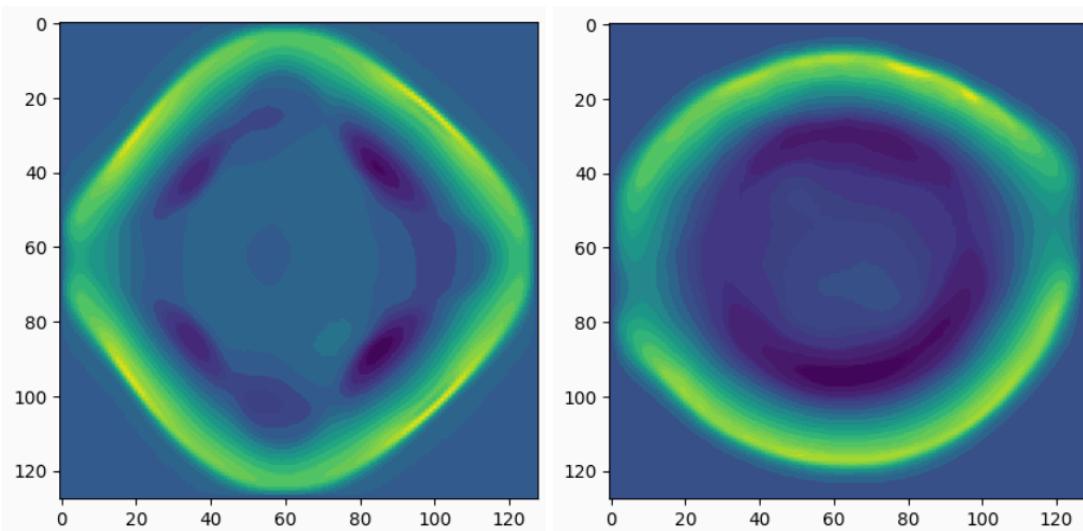
krok 200



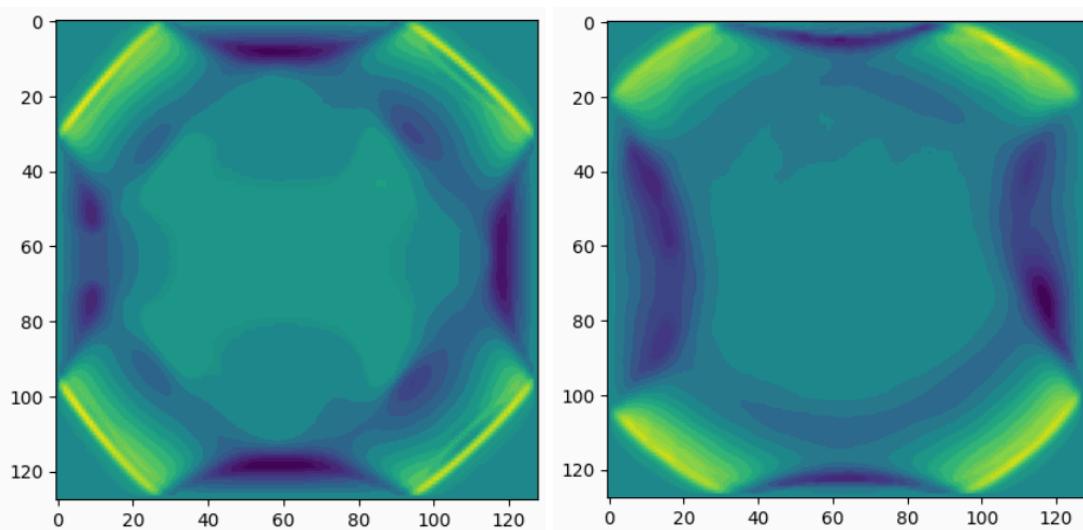
krok 500



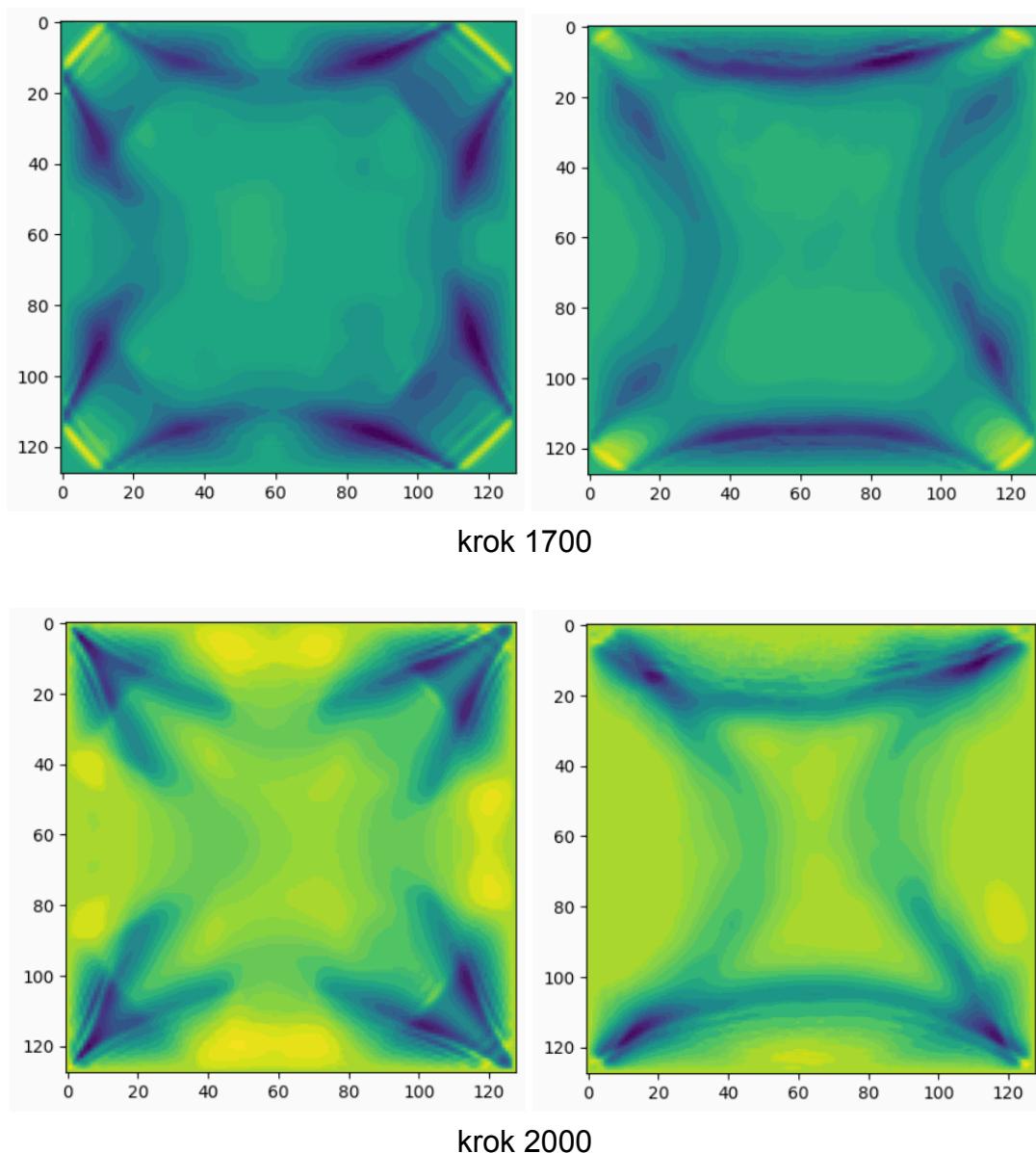
krok 700



krok 1000



krok 1400



## 7. Wnioski

- Dodanie zmiennej reprezentującej głębokość dna pozwoliło uzyskać bardziej realistyczną propagację fali
- Ukształtowanie dna morskiego wpływa na prędkość i wysokość fali tsunami
- Ostre zmiany głębokości prowadzą do odbić i zakłóceń w kształcie fali
- Naturalne, łagodniejsze dna powodują bardziej równomierne rozchodzenie się fali