

SPCIAA

Projekt Tsunami

Patryk Czuchnowski, Michał Pędrak, Andrzej Wacławik

1. Wstęp

Celem projektu jest modyfikacja dostarczonego kodu symulującego falę tsunami tak, aby symulacja brała również pod uwagę ukształtowanie dna morskiego oraz przeprowadzenie takich symulacji i wizualizacja wyników.

2. Analiza wzoru i kodu przed modyfikacją

Kod przed modyfikacją reprezentuje następujące równanie:

$$\underbrace{u_t}_{\text{Next state}} = \underbrace{u_{t-1}}_{\text{Previous state}} + \underbrace{u_{t-1} - u_{t-2}}_{\text{States difference}} + \underbrace{\Delta t^2}_{\text{Time step squared}} \underbrace{g \nabla (u_{t-1} \nabla u_{t-1})}_{\text{Physics}}$$

Oznaczmy *Physics* jako X :

$$\mathbf{X} = \nabla(u \nabla u) = \partial_x(u \partial_x u) + \partial_y(u \partial_y u)$$

$$\partial_x(u u_x) = u_x^2 + u u_{xx} \quad \partial_y(u u_y) = u_y^2 + u u_{yy}$$

$$\mathbf{X} = u_x^2 + u u_{xx} + u_y^2 + u u_{yy}$$

Dla przypomnienia wzór na iloraz różnicowy:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Używamy go do przybliżeń:

$$u_x^2 \approx X_1 = \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \right)^2$$

$$u u_{xx} \approx X_2 = u_{i,j} \cdot \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$u_y^2 \approx X_3 = \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h} \right)^2$$

$$u u_{yy} \approx X_4 = u_{i,j} \cdot \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2}$$

Tym wzorom odpowiada następujący kod:

```
h = 10/u.shape[0]
X_1 = ((u[i+1, j] - u[i-1, j]) / 2*h)**2
X_2 = u[i, j] * (
    (u[i+1, j]-2*u[i, j]+ u[i-1, j]) / h**2
)
X_3 = ((u[i, j+1] - u[i, j-1]) / 2*h)**2
X_4 = u[i, j] * (
    (u[i, j+1]-2*u[i, j]+ u[i, j-1]) / h**2
)

X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4
```

3. Modyfikacja wzoru i kodu o zmienną z

Chcemy wprowadzić zmienną z reprezentującą głębokość w danym miejscu tak jak w następującym wzorze:

$$\underbrace{u_t}_{\text{Next state}} = \underbrace{u_{t-1}}_{\text{Previous state}} + \underbrace{u_{t-1} - u_{t-2}}_{\text{States difference}} + \underbrace{\Delta t^2}_{\text{Time step squared}} \underbrace{g \nabla \left((u_{t-1} - z) \nabla u_{t-1} \right)}_{\text{Physics}}$$

Oznaczmy *Physics* jako X:

$$\mathbf{X} = \nabla((u - z) \nabla u)$$

Wprowadzamy zmienną pomocniczą A:

$$A = u - z$$

$$\mathbf{X} = \nabla(A \nabla u) = \partial_x(A u_x) + \partial_y(A u_y) = A_x u_x + A u_{xx} + A_y u_y + A u_{yy}$$

Ponownie przybliżamy ilorazami różnicowymi:

$$A_x u_x \approx X_1 = \left(\frac{(u_{i+1,j} - z_{i+1,j}) - (u_{i-1,j} - z_{i-1,j})}{2h} \right) \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \right)$$

$$A u_{xx} \approx X_2 = (u_{i,j} - z_{i,j}) \cdot \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$A_y u_y \approx X_3 = \left(\frac{(u_{i,j+1} - z_{i,j+1}) - (u_{i,j-1} - z_{i,j-1})}{2h} \right) \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h} \right)$$

$$A u_{yy} \approx X_4 = (u_{i,j} - z_{i,j}) \cdot \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2}$$

W ten sposób otrzymujemy dokładne wzory które możemy zmienić w kodzie:

```
h = 10/u.shape[0]
X_1 = (((u[i+1,j] - z[i+1,j]) - (u[i-1,j] - z[i-1,j])) / (2*h)) * ((u[i+1,j] - u[i-1,j]) / (2*h))
X_2 = (u[i,j] - z[i,j]) * (u[i+1,j] - 2 * u[i,j] + u[i-1,j]) / (h**2)
X_3 = (((u[i,j+1] - z[i,j+1]) - (u[i,j-1] - z[i,j-1])) / (2*h)) * ((u[i,j+1] - u[i,j-1]) / (2*h))
X_4 = (u[i,j] - z[i,j]) * ((u[i,j+1] - 2 * u[i,j] + u[i,j-1]) / (h**2))

X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4
```

4. Wczytywanie terenu

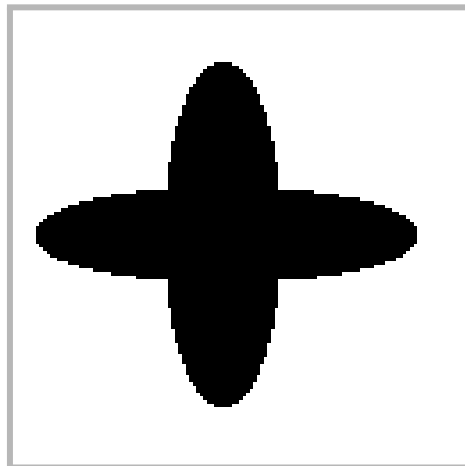
Stworzyliśmy również funkcję która pozwala nam na wczytywanie ukształtowania dna morskiego z obrazka:

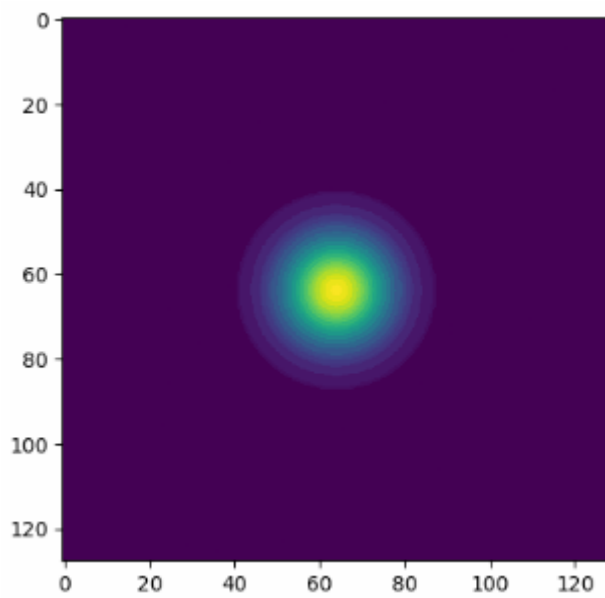
```
def load_terrain(filename, normalize_val):
    img = Image.open(filename).convert("L")
    z = np.array(img, dtype=np.float32)
    max_val = np.max(z)
    z = z / (max_val * normalize_val)
    return z
```

5. Przeprowadzone symulacje

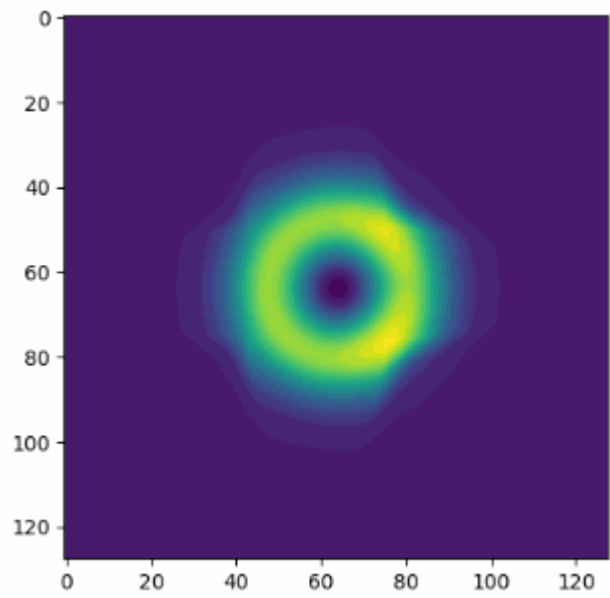
Symulacje były przeprowadzane z rozmiarem 128x128, $t = 0.001$. Gify zostały zamieszczone na Upelu.

- a) Symulacja z bardzo ostrym sztucznie stworzonym dnem morskim

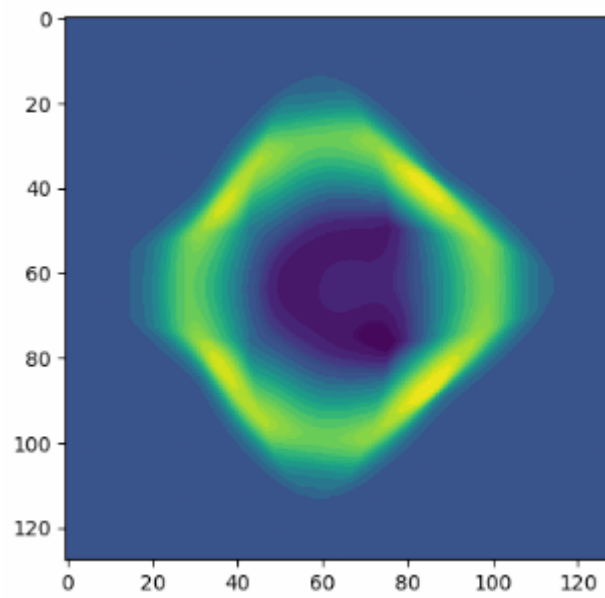




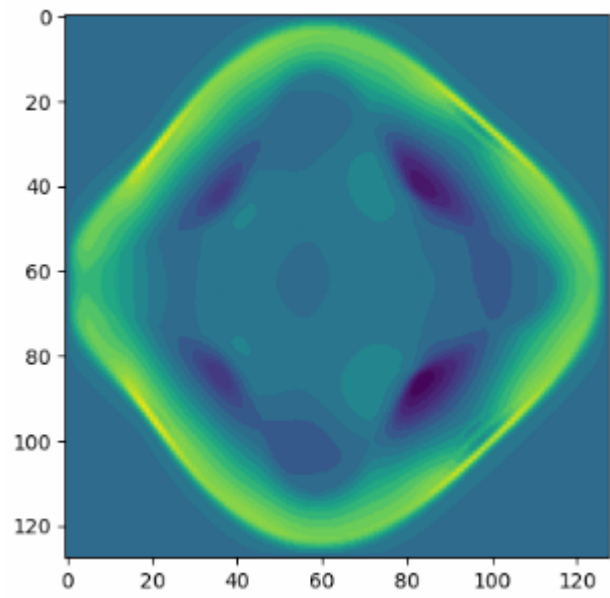
Krok 1 / 1000



Krok 200 / 1000

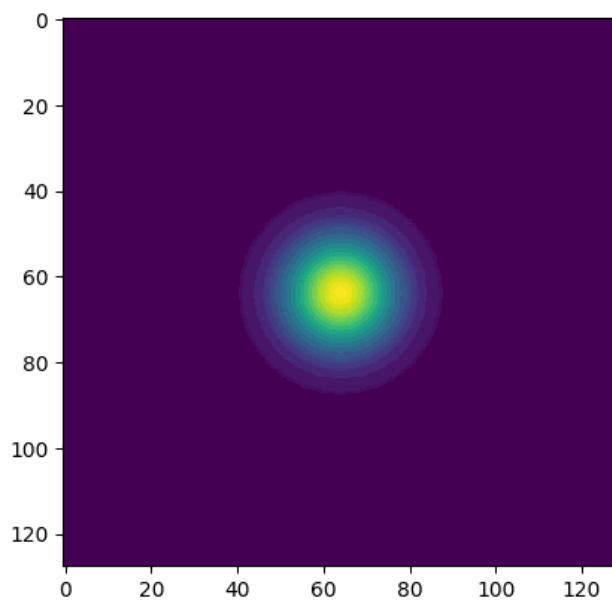
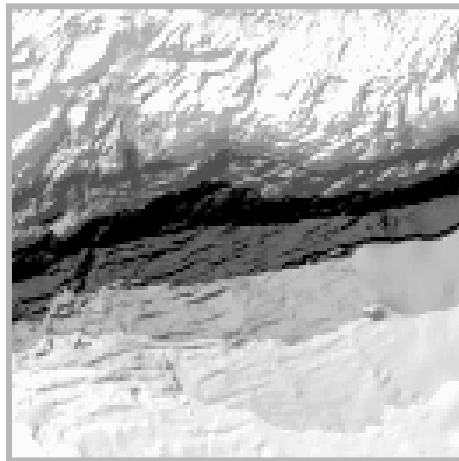


Krok 500 / 1000

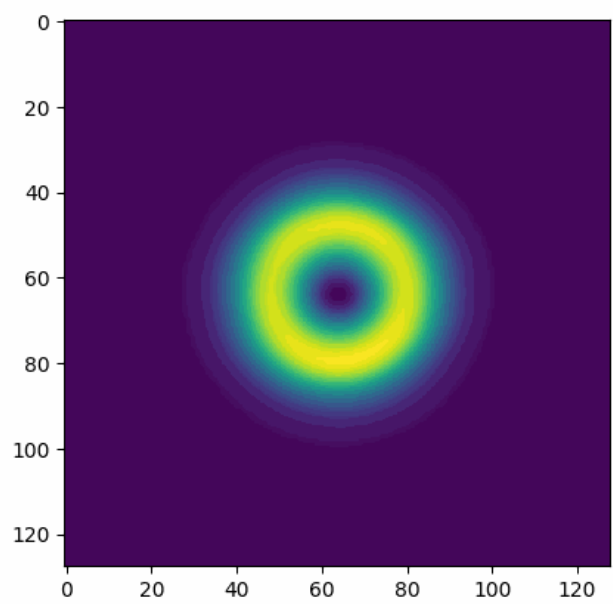


Krok 1000 / 1000

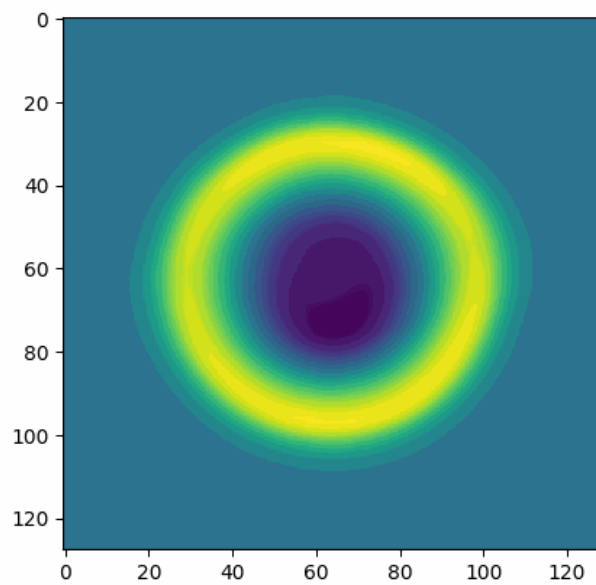
b) Symulacja z naturalnym dnem morskim



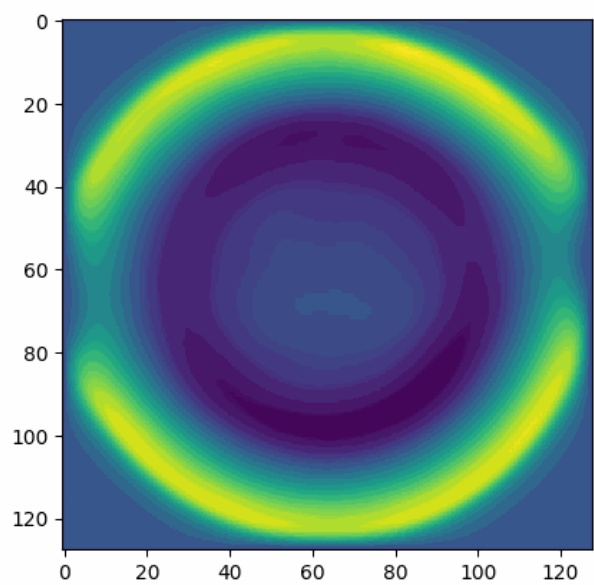
Krok 1 / 2000



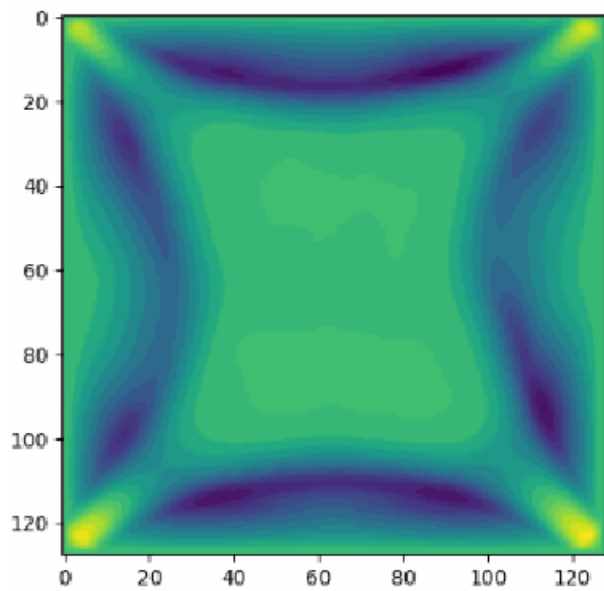
Krok 200 / 2000



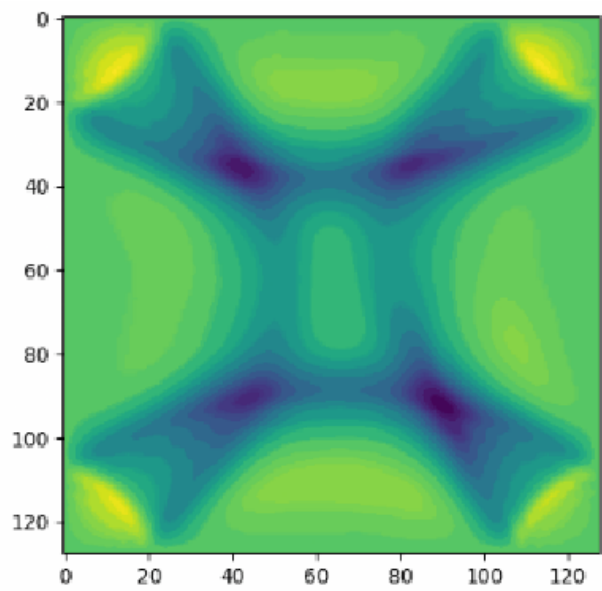
Krok 500 / 2000



Krok 1000 / 2000



Krok 1500 / 2000



Krok 2000 / 2000

6. Wnioski

- Dodanie zmiennej reprezentującej głębokość dna pozwoliło uzyskać bardziej realistyczną propagację fali
- Ukształtowanie terenu wpływa na prędkość i wysokość fali tsunami
- Ostre zmiany głębokości prowadzą do odbić i zakłóceń w kształcie fali
- Naturalne, łagodniejsze dna powodują bardziej równomierne rozchodzenie się fali