



**Universidade do Minho**  
Escola de Engenharia

## **Cálculo de Programas**

### Trabalho Prático (2023/24)

Lic. em Ciências da Computação

#### **Grupo G22**

a105531 Cláudia Rego Faria  
a102502 Patrícia Daniela Fernandes Bastos  
a101987 Renato Pereira Garcia

# Preâmbulo

**Cálculo de Programas** tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos cursos que têm esta disciplina, opta-se pela aplicação deste método à programação em **Haskell**, sem prejuízo da sua aplicação a outras linguagens funcionais. Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em **Haskell**. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, a validá-los e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

Antes de abordarem os problemas propostos no trabalho, os grupos devem ler com atenção o anexo **A** onde encontrarão as instruções relativas ao software a instalar, etc.

Valoriza-se a escrita de *pouco* código, que corresponda a soluções simples e elegantes mediante a utilização dos combinadores de ordem superior estudados na disciplina. Recomenda-se ainda que o código venha acompanhado de uma descrição de como funciona e foi concebido, apoiado em diagramas explicativos. Para instruções sobre como produzir esses diagramas e exprimir raciocínios de cálculo, ver o anexo **D**.

## Problema 1

No passado dia 10 de Março o país foi a eleições para a Assembleia da República. A lei eleitoral portuguesa segue, como as de muitos outros países, o chamado **Método de Hondt** para seleccionar os candidatos dos vários partidos, conforme os votos que receberam. E, tal como em anos anteriores, há sempre *notícias* a referir a quantidade de votos desperdiçados por este método. Como e porque é que isso acontece?

Pretende-se nesta questão construir em Haskell um programa que implemente o método de Hondt. A **Comissão Nacional de Eleições** descreve esse método *nesta página*, que deverá ser estudada para resolver esta questão. O quadro que aí aparece,

Divisor	Partido			
	A	B	C	D
1	12000	7500	4500	3000
2	6000	3750	2250	1500
3	4000	2500	1500	1000
4	3000	1875	1125	750

mostra o exemplo de um círculo eleitoral que tem direito a eleger 7 deputados e onde concorrem às eleições quatro partidos *A*, *B*, *C* e *D*, cf:

**data** Party = A | B | C | D **deriving** (Eq, Ord, Show)

A votação nesse círculo foi

$[(A, 12000), (B, 7500), (C, 4500), (D, 3000)]$

sendo o resultado eleitoral

$result = [(A, 3), (B, 2), (C, 1), (D, 1)]$

apurado correndo

$result = final\ history$

que corresponde à última etapa da iteração:

$history = [for\ step\ db\ i \mid i \leftarrow [0..7]]$

Verifica-se que, de um total de 27000 votos, foram desperdiçados:

$wasted = 9250$

Completem no anexo G as funções que se encontram aí indefinidas<sup>1</sup>, podendo adicionar funções auxiliares que sejam convenientes. No anexo F é dado algum código preliminar.

## Problema 2

A biblioteca *LTree* inclui o algoritmo “mergesort” (*mSort*), que é um hilomorfismo baseado função

$merge :: Ord\ a \Rightarrow ([a], [a]) \rightarrow [a]$

que junta duas listas previamente ordenadas numa única lista ordenada.

Nesta questão pretendemos generalizar *merge* a *k*-listas (ordenadas), para qualquer *k* finito:

$mergek :: Ord\ a \Rightarrow [[a]] \rightarrow [a]$

Esta função deverá ser codificada como um hilomorfismo, a saber:

$mergek = \llbracket f, g \rrbracket$

1. Programe os genes *f* e *g* do hilomorfismo *mergek*.
2. Estenda *mSort* a

$mSortk :: Ord\ a \Rightarrow Int \rightarrow [a] \rightarrow [a]$

por forma a este hilomorfismo utilizar *mergek* em lugar de *merge* na etapa de “conquista”. O que se espera de *mSortk k* é que faça a partição da lista de entrada em *k* sublistas, sempre que isso for possível. (Que vantagens vê nesta nova versão?)

## Problema 3

Considere-se a fórmula que dá o *n*-ésimo número de Catalan:

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n!)} \quad (1)$$

No anexo F dá-se a função *catdef* que implementa a definição (1) em Haskell. É fácil de verificar que, à medida que *n* cresce, o tempo que *catdef n* demora a executar degrada-se.

<sup>1</sup> Cf.  $\perp$  no código.

Pretende-se uma implementação mais eficiente de  $C_n$  que, derivada por recursividade mútua, não calcule factoriais nenhuns:

$cat = \dots$  for loop init **where**  $\dots$

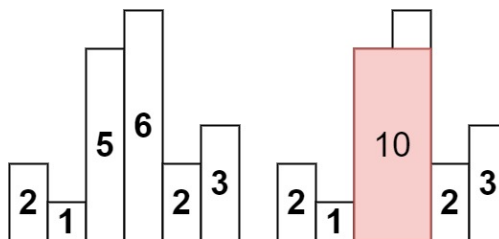
No anexo F é dado um oráculo que pode ajudar a testar  $cat$ . Deverá ainda ser comparada a eficiência da solução calculada  $cat$  com a de  $catdef$ .

**Sugestão:** Começar por estudar a regra prática que se dá no anexo E para problemas deste género.

## Problema 4

Esta questão aborda um problema que é conhecido pela designação *Largest Rectangle in Histogram*. Precebe-se facilmente do que se trata olhando para a parte esquerda da figura abaixo, que mostra o histograma correspondente à sequência numérica:

$h = [2, 1, 5, 6, 2, 3]$



À direita da mesma figura identifica-se o rectângulo de maior área que é possível inscrever no referido histograma, com área  $10 = 2 * 5$ .

Pretende-se a definição de uma função em Haskell

$lrh :: [Int] \rightarrow Int$

tal que  $lrh\ x$  seja a maior área de rectângulos que seja possível inscrever em  $x$ .

Pretende-se uma solução para o problema que seja simples e estruturada num hilomorfismo baseado num tipo indutivo estudado na disciplina ou definido *on purpose*.

## Anexos

### A Natureza do trabalho a realizar

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de 3 alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na [página da disciplina](#) na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo em **todos** os exercícios do trabalho, para assim poderem responder a qualquer questão colocada na *defesa oral* do relatório.

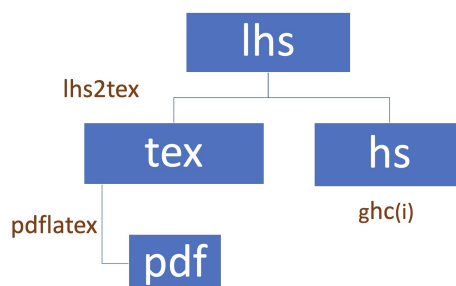
Para cumprir de forma integrada os objectivos do trabalho vamos recorrer a uma técnica de programação dita “[literária](#)” [1], cujo princípio base é o seguinte:

*Um programa e a sua documentação devem coincidir.*

Por outras palavras, o **código fonte** e a **documentação** de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp2324t.pdf` que está a ler é já um exemplo de [programação literária](#): foi gerado a partir do texto fonte `cp2324t.lhs`<sup>1</sup> que encontrará no [material pedagógico](#) desta disciplina descompactando o ficheiro `cp2324t.zip`.

Como se mostra no esquema abaixo, de um único ficheiro (*lhs*) gera-se um PDF ou faz-se a interpretação do código [Haskell](#) que ele inclui:



Vê-se assim que, para além do [GHCI](#), serão necessários os executáveis [pdflatex](#) e [lhs2TeX](#). Para facilitar a instalação e evitar problemas de versões e conflitos com sistemas operativos, é recomendado o uso do [Docker](#) tal como a seguir se descreve.

### B Docker

Recomenda-se o uso do [container](#) cuja imagem é gerada pelo [Docker](#) a partir do ficheiro `Dockerfile` que se encontra na diretoria que resulta de descompactar `cp2324t.zip`. Este [container](#) deverá ser usado na execução do [GHCI](#) e dos comandos relativos ao [L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X](#). (Ver também a `Makefile` que é disponibilizada.)

---

<sup>1</sup> O sufixo ‘lhs’ quer dizer *literate Haskell*.

Após [instalar o Docker](#) e descarregar o referido zip com o código fonte do trabalho, basta executar os seguintes comandos:

```
$ docker build -t cp2324t .  
$ docker run -v ${PWD}:/cp2324t -it cp2324t
```

**NB:** O objetivo é que o container seja usado *apenas* para executar o [GHCi](#) e os comandos relativos ao [L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X](#). Deste modo, é criado um *volume* (cf. a opção `-v ${PWD}:/cp2324t`) que permite que a diretoria em que se encontra na sua máquina local e a diretoria `/cp2324t` no [container](#) sejam partilhadas.

O grupo deverá visualizar/editar os ficheiros numa máquina local e compilá-los no [container](#), executando:

```
$ lhs2TeX cp2324t.lhs > cp2324t.tex  
$ pdflatex cp2324t
```

[lhs2TeX](#) é o pre-processor que faz “pretty printing” de código Haskell em [L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X](#) e que faz parte já do [container](#). Alternativamente, basta executar

```
$ make
```

para obter o mesmo efeito que acima.

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp2324t.lhs` é executável e contém o “kit” básico, escrito em [Haskell](#), para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp2324t.lhs
```

O grupo deve abrir o ficheiro `cp2324t.lhs` num editor da sua preferência e verificar que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}  
...  
\end{code}
```

é seleccionado pelo [GHCi](#) para ser executado.

## C Em que consiste o TP

Em que consiste, então, o *relatório* a que se referiu acima? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo [G](#) com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com [Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>](#)) e o índice remissivo (com [makeindex](#)),

```
$ bibtex cp2324t.aux  
$ makeindex cp2324t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. (Como já se disse, pode fazê-lo correndo simplesmente `make` no [container](#).)

No anexo [F](#) disponibiliza-se algum código [Haskell](#) relativo aos problemas que são colocados. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

Deve ser feito uso da [programação literária](#) para documentar bem o código que se desenvolver, em particular fazendo diagramas explicativos do que foi feito e tal como se explica no anexo D.

**Importante:** o grupo deve evitar trabalhar fora deste ficheiro [lhs](#) que lhe é fornecido. Se, para efeitos de divisão de trabalho, o decidir fazer, deve **regularmente integrar** e validar as soluções que forem sendo obtidas neste [lhs](#), garantindo atempadamente a compatibilidade com este. Se não o fizer corre o risco de vir a submeter um ficheiro que não corre no GHCi e/ou apresenta erros na geração do PDF.

## D Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2TeX

Como primeiro exemplo, estudar o texto fonte ([lhs](#)) do que está a ler<sup>1</sup> onde se obtém o efeito seguinte:<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}
 id &= \langle f, g \rangle \\
 &\equiv \{ \text{universal property} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\
 &\equiv \{ \text{identity} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\
 &\square
 \end{aligned}$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package*  $\text{\LaTeX}$  [xymatrix](#), por exemplo:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\text{in}} & 1 + \mathbb{N}_0 \\
 \text{\scriptsize $\langle g \rangle$} \downarrow & & \downarrow \text{\scriptsize $id + \langle g \rangle$} \\
 B & \xleftarrow{g} & 1 + B
 \end{array}$$

## E Regra prática para a recursividade mútua em $\mathbb{N}_0$

Nesta disciplina estudou-se como fazer [programação dinâmica](#) por cálculo, recorrendo à lei de recursividade mútua.<sup>3</sup>

Para o caso de funções sobre os números naturais ( $\mathbb{N}_0$ , com functor  $F X = 1 + X$ ) pode derivar-se da lei que foi estudada uma *regra de algibeira* que se pode ensinar a programadores que não tenham estudado [Cálculo de Programas](#). Apresenta-se de seguida essa regra, tomando como exemplo o cálculo do ciclo-for que implementa a função de Fibonacci, recordar o sistema:

$$\begin{aligned}
 fib\ 0 &= 1 \\
 fib\ (n + 1) &= f\ n \\
 f\ 0 &= 1 \\
 f\ (n + 1) &= fib\ n + f\ n
 \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Procure e.g. por "sec:diagramas".

<sup>2</sup> Exemplos tirados de [2].

<sup>3</sup> Lei (3.95) em [2], página 110.

Obter-se-á de imediato

$$\begin{aligned} fib' &= \pi_1 \cdot \text{for loop init where} \\ loop (fib, f) &= (f, fib + f) \\ init &= (1, 1) \end{aligned}$$

usando as regras seguintes:

- O corpo do ciclo *loop* terá tantos argumentos quanto o número de funções mutuamente recursivas.
- Para as variáveis escolhem-se os próprios nomes das funções, pela ordem que se achar conveniente.<sup>1</sup>
- Para os resultados vão-se buscar as expressões respectivas, retirando a variável *n*.
- Em *init* colecionam-se os resultados dos casos de base das funções, pela mesma ordem.

Mais um exemplo, envolvendo polinómios do segundo grau  $ax^2 + bx + c$  em  $\mathbb{N}_0$ . Seguindo o método estudado nas aulas<sup>2</sup>, de  $f\ x = ax^2 + bx + c$  derivam-se duas funções mutuamente recursivas:

$$\begin{aligned} f\ 0 &= c \\ f\ (n + 1) &= f\ n + k\ n \\ k\ 0 &= a + b \\ k\ (n + 1) &= k\ n + 2\ a \end{aligned}$$

Seguindo a regra acima, calcula-se de imediato a seguinte implementação, em Haskell:

$$\begin{aligned} f'\ a\ b\ c &= \pi_1 \cdot \text{for loop init where} \\ loop (f, k) &= (f + k, k + 2 * a) \\ init &= (c, a + b) \end{aligned}$$

## F Código fornecido

### Problema 1

Tipos básicos:

```
type Votes = ℤ
type Deputies = ℤ
```

Dados:

```
db :: [(Party, (Votes, Deputies))]
db = map f vote where f (a, b) = (a, (b, 0))
vote = [(A, 12000), (B, 7500), (C, 4500), (D, 3000)]
```

Apuramento:

```
final = map (id × π₂) · last
total = sum (map π₂ vote)
wasted = waste history
```

<sup>1</sup> Podem obviamente usar-se outros símbolos, mas numa primeira leitura dá jeito usarem-se tais nomes.

<sup>2</sup> Secção 3.17 de [2] e tópico [Recursividade mútua](#) nos vídeos de apoio às aulas teóricas.



## Problema 3

Definição da série de Catalan usando factoriais <sup>(1)</sup>:

$$\text{catdef } n = (2 * n)! \div ((n + 1)! * n!)$$

Oráculo para inspeção dos primeiros 26 números de Catalan<sup>1</sup>:

```
oracle = [  
  1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845,  
  35357670, 129644790, 477638700, 1767263190, 6564120420, 24466267020,  
  91482563640, 343059613650, 1289904147324, 4861946401452  
]
```

## G Soluções dos alunos

Os grupos devem colocar neste anexo as suas soluções para os exercícios propostos, de acordo com o “layout” que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto, diagramas e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

**Importante:** Não pode ser alterado o texto deste ficheiro fora deste anexo.

## Problema 1

Votos desperdiçados:

```
waste = sum · map restantes · last  
restantes = (/) ($) fromIntegral · (π1 · π2) < * > fromIntegral · succ · (π2 · π2)
```

Corpo do ciclo-**for**:

```
step l = map update l  
where  
  quotient (_, (v, d)) = fromIntegral v / fromIntegral (succ d)  
  maxParty = π1 $ maximumBy (comparing (quotient)) l  
  pred = (≡ maxParty) · π1  
  update = (λx → if pred x then (λ(p, (v, d)) → (p, (v, succ d))) x else id x)
```

## Problema 2

Genes de *mergek*:

```
f (i1 ()) = []  
f (i2 (xs, ys)) = merge (xs, ys)  
  
g [] = i1 ()  
g [x] = i2 (x, [])  
g (x : xs) = i2 (x, xs)
```

<sup>1</sup> Fonte: [Wikipedia](#).

Diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{N}_0^*)^* & \xrightarrow{g} & 1 + \mathbb{N}_0^* + (\mathbb{N}_0^*)^* \\
 \llbracket g \rrbracket \downarrow & & \downarrow id + id \times g \\
 (\mathbb{N}_0^*)^* & & 1 + \mathbb{N}_0^* + (\mathbb{N}_0^*)^* \\
 \llbracket f \rrbracket \downarrow & & \downarrow id + id \times f \\
 \mathbb{N}_0^* & \xleftarrow{f} & 1 + \mathbb{N}_0^* + \mathbb{N}_0^*
 \end{array}$$

Extensão de *mSort*:

$$mSortk\ k = [singl, mergek] \cdot (id + \text{map } (mSortk\ k)) \cdot (lsplitk''\ k)$$

$$lsplitk :: Int \rightarrow [a] \rightarrow [[a]]$$

$$lsplitk\ k\ l = lsplitk'\ k\ (\text{length } l)\ l$$

**where**

$$lsplitk'\ _-\ [] = []$$

$$lsplitk'\ 0\ _- = []$$

$$lsplitk'\ i\ n\ l = \text{take } tamanho\ l : lsplitk'\ (i - 1)\ (n - tamanho)\ (\text{drop } tamanho\ l)$$

**where**

$$tamanho = (n + i - 1) \text{ 'div' } i$$

$$lsplitk'' :: Int \rightarrow [a] \rightarrow a + [[a]]$$

$$lsplitk''\ _-[x] = i_1\ x$$

$$lsplitk''\ k\ xs = i_2\ (lsplitk\ k\ xs)$$

### Problema 3

Sendo

$$catalan(n) = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n!)}$$

É imediato que  $catalan(0) = 1$ .

Já para  $catalan(n + 1)$  é necessário calcular  $catalan(n + 1) = k\ catalan(n)$

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{catalan(n+1)}{catalan(n)} = \frac{\frac{(2(n+1))!}{(n+1+1)!(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{(n+1)!(n!)}} = \frac{(2n+2)!(n+1)!(n!)}{(n+2)!(n+1)!(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!(n!)}{(n+2)(n+1)(n)!(2n)!} = \\
 &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+2)(n+1)} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+2)(n+1)} = \frac{2(2n+1)}{(n+2)} = \frac{4n+2}{(n+2)}
 \end{aligned}$$

Temos então

$$catalan(n + 1) = \frac{4n+2}{(n+2)} catalan(n)$$

Sendo  $cataux(n) = \frac{4n+2}{(n+2)}$  podemos dividir cataux em duas funções:

$$num = 4n + 2 \quad denom = n + 2$$

Onde  $num(0) = denom(0) = 2$ ,  $num(n + 1) = 4(n + 1) + 2 = 4n + 4 + 2 = 4 + 4n + 2 = num(n) + 4$   
e  $denom(n + 1) = n + 1 + 2 = n + 2 + 1 = denom(n) + 1$

Com isto temos que:

$$catalan\ 0 = 1$$

$$catalan\ (n + 1) = num\ (n) * catalan\ (n) \text{ 'div' } denom\ (n)$$

$$num\ 0 = 2$$

$$num\ (n + 1) = num\ (n) + 4$$

$$denom\ 0 = 2$$

$$denom\ (n + 1) = denom\ (n) + 1$$

Podemos então concluir que:

$$cat = prj \cdot \text{for loop } inic$$

onde:

$$loop\ (catalan, num, denom) = ((num * catalan) \text{ 'div' } denom, num + 4, denom + 1)$$

$$inic = (1, 2, 2)$$

$$prj\ (catalan, num, denom) = catalan$$

## Problema 4

$$lrh = \llbracket c, a \rrbracket \cdot geraListas$$

$$a\ [] = i_1\ ()$$

$$a\ (x : xs) = i_2\ (calculaArea\ x, xs)$$

$$c\ (i_1\ ()) = 0$$

$$c\ (i_2\ (xs, ys)) = \max\ xs\ ys$$

$$calculaArea :: [Int] \rightarrow Int$$

$$calculaArea\ [] = 0$$

$$calculaArea\ heights = \text{minimum } heights * \text{length } heights$$

$$geraListas :: [Int] \rightarrow [[Int]]$$

$$geraListas\ heights = \text{concatMap } inits\ (\text{tails } heights)$$

Diagrama de geralistas:

$$\mathbb{N}_0^* \xrightarrow{geraListas} (\mathbb{N}_0^*)^*$$

Diagrama do hilomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{N}_0^*)^* & \xrightarrow{a} & 1 + \mathbb{N}_0 + (\mathbb{N}_0^*)^* \\ \llbracket a \rrbracket \downarrow & & \downarrow id + id \times a \\ \mathbb{N}_0^* & & 1 + \mathbb{N}_0 + \mathbb{N}_0^* \\ \llbracket c \rrbracket \downarrow & & \downarrow id + id \times c \\ \mathbb{N}_0 & \xleftarrow{c} & 1 + \mathbb{N}_0 + \mathbb{N}_0 \end{array}$$

# Index

$\LaTeX$ , [3](#), [4](#)

**bibtex**, [4](#)

**lhs2TeX**, [3–5](#)

**makeindex**, [4](#)

**pdflatex**, [3](#)

Combinador “pointfree”

*hylo*

        Listas, [2](#)

*split*, [5](#)

Comissão Nacional de Eleições, [1](#)

    Método de Hondt, [1](#)

Cálculo de Programas, [1](#), [3](#)

    Material Pedagógico, [3](#)

        LTree.hs, [2](#)

        mSort (‘merge sort’), [2](#)

Docker, [3](#)

    container, [3](#), [4](#)

Função

$\pi_1$ , [5](#)

$\pi_2$ , [5](#), [6](#)

*for*, [2](#)

*map*, [5](#), [6](#)

Haskell, [1](#), [3](#), [4](#)

    interpretador

        GHCi, [3](#), [4](#)

    Literate Haskell, [3](#)

Números naturais ( $\mathbb{N}$ ), [5](#)

Programação

    literária, [3](#), [4](#)

## References

- [1] D.E. Knuth. *Literate Programming*. CSLI Lecture Notes Number 27. Stanford University Center for the Study of Language and Information, Stanford, CA, USA, 1992.
- [2] J.N. Oliveira. *Program Design by Calculation*, 2018. Draft of textbook in preparation. viii+297 pages. Informatics Department, University of Minho.