Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Cálculo de Programas
Trabalho Prático (2023/24)

Lic. em Ciências da Computação

Grupo G22

a105531	Cláudia Rego Faria
a102502	Patrícia Daniela Fernandes Bastos
a101987	Renato Pereira Garcia

junho 2024

Preâmbulo

Cálculo de Programas tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos cursos que têm esta disciplina, opta-se pela aplicação deste método à programação em Haskell, sem prejuízo da sua aplicação a outras linguagens funcionais. Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em Haskell. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, a validá-los e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

Antes de abordarem os problemas propostos no trabalho, os grupos devem ler com atenção o anexo A onde encontrarão as instruções relativas ao sofware a instalar, etc.

> Valoriza-se a escrita de *pouco* código, que corresponda a soluções simples e elegantes mediante a utilização dos combinadores de ordem superior estudados na disciplina.
> Recomenda-se ainda que o código venha acompanhado de uma descrição de como funciona e foi concebido, apoiado em diagramas explicativos. Para instruções sobre como produzir esses diagramas e exprimir raciocínios de cálculo, ver o anexo D.

Problema 1

No passado dia 10 de Março o país foi a eleições para a Assembleia da República. A lei eleitoral portuguesa segue, como as de muitos outros países, o chamado Método de Hondt para selecionar os candidatos dos vários partidos, conforme os votos que receberam. E, tal como em anos anteriores, há sempre notícias a referir a quantidade de votos desperdiçados por este método. Como e porque é que isso acontece?

Pretende-se nesta questão construir em Hakell um programa que implemente o método de Hondt. A Comissão Nacional de Eleições descreve esse método nesta página, que deverá ser estudada para resolver esta questão. O quadro que aí aparece,

Divisor	Partido			
	A	B	C	D
1	**12000**	**7500**	**4500**	**3000**
2	**6000**	**3750**	2250	1500
3	**4000**	2500	1500	1000
4	3000	1875	1125	750

mostra o exemplo de um círculo eleitoral que tem direito a eleger 7 deputados e onde concorrem às eleições quatro partidos A, B, C e D, cf:

$$\mathbf{data}\ Party = A \mid B \mid C \mid D\ \mathbf{deriving}\ (Eq, Ord, Show)$$

A votação nesse círculo foi

$$[(A, 12000), (B, 7500), (C, 4500), (D, 3000)]$$

sendo o resultado eleitoral

$$result = [(A,3),(B,2),(C,1),(D,1)]$$

apurado correndo

$$result = \mathit{final}\ history$$

que corresponde à última etapa da iteração:

$$history = [\text{for } step\ db\ i \mid i \leftarrow [0\mathinner{..}7]]$$

Verifica-se que, de um total de 27000 votos, foram desperdiçados:

$$wasted = 9250$$

Completem no anexo G as funções que se encontram aí indefinidas[1], podendo adicionar funções auxiliares que sejam convenientes. No anexo F é dado algum código preliminar.

Problema 2

A biblioteca *LTree* inclui o algoritmo "mergesort" (*mSort*), que é um hilomorfismo baseado função

$$merge :: Ord\ a \Rightarrow ([a],[a]) \rightarrow [a]$$

que junta duas listas previamente ordenadas numa única lista ordenada.

Nesta questão pretendemos generalizar $merge$ a k-listas (ordenadas), para qualquer k finito:

$$mergek :: Ord\ a \Rightarrow [[a]] \rightarrow [a]$$

Esta função deverá ser codificada como um hilomorfismo, a saber:

$$mergek = [\![f, g]\!]$$

1. Programe os genes f e g do hilomorfismo $mergek$.
2. Estenda $mSort$ a

   $$mSortk :: Ord\ a \Rightarrow Int \rightarrow [a] \rightarrow [a]$$

   por forma a este hilomorfismo utilizar $mergek$ em lugar de $merge$ na estapa de "conquista". O que se espera de $mSortk\ k$ é que faça a partição da lista de entrada em k sublistas, sempre que isso for possível. (Que vantagens vê nesta nova versão?)

Problema 3

Considere-se a fórmula que dá o n-ésimo número de Catalan:

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n!)} \tag{1}$$

No anexo F dá-se a função $catdef$ que implementa a definição (1) em Haskell. É fácil de verificar que, à medida que n cresce, o tempo que $catdef\ n$ demora a executar degrada-se.

[1] Cf. $\perp$ no código.

Pretende-se uma implementação mais eficiente de C_n que, derivada por recursividade mútua, não calcule factoriais nenhuns:

$$cat = \cdots \cdot \text{for } loop\ init\ \textbf{where}\ \cdots$$

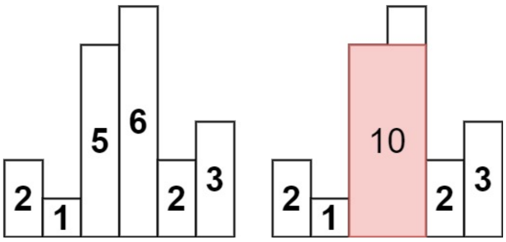
No anexo F é dado um oráculo que pode ajudar a testar *cat*. Deverá ainda ser comparada a eficiência da solução calculada *cat* com a de *catdef*.

> **Sugestão**: Começar por estudar a regra prática que se dá no anexo E para problemas deste género.

Problema 4

Esta questão aborda um problema que é conhecido pela designação *Largest Rectangle in Histogram*. Precebe-se facilmente do que se trata olhando para a parte esquerda da figura abaixo, que mostra o histograma correspondente à sequência numérica:

$$h = [2, 1, 5, 6, 2, 3]$$



À direita da mesma figura identifica-se o rectângulo de maior área que é possível inscrever no referido histograma, com área $10 = 2 * 5$.

Pretende-se a definição de uma função em Haskell

$$lrh :: [Int] \rightarrow Int$$

tal que $lrh\ x$ seja a maior área de rectângulos que seja possível inscrever em x.

Pretende-se uma solução para o problema que seja simples e estruturada num hilomorfismo baseado num tipo indutivo estudado na disciplina ou definido *on purpose*.

Anexos

A Natureza do trabalho a realizar

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de 3 alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na página da disciplina na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo em **todos** os exercícios do trabalho, para assim poderem responder a qualquer questão colocada na *defesa oral* do relatório.

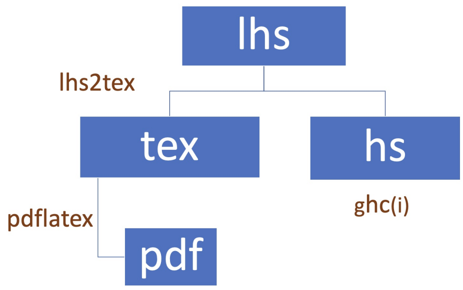
Para cumprir de forma integrada os objectivos do trabalho vamos recorrer a uma técnica de programação dita "literária" [1], cujo princípio base é o seguinte:

> *Um programa e a sua documentação devem coincidir.*

Por outras palavras, o **código fonte** e a **documentação** de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp2324t.pdf` que está a ler é já um exemplo de programação literária: foi gerado a partir do texto fonte `cp2324t.lhs`[1] que encontrará no material pedagógico desta disciplina descompactando o ficheiro `cp2324t.zip`.

Como se mostra no esquema abaixo, de um único ficheiro (*lhs*) gera-se um PDF ou faz-se a interpretação do código Haskell que ele inclui:



Vê-se assim que, para além do GHCi, serão necessários os executáveis pdflatex e lhs2TeX. Para facilitar a instalação e evitar problemas de versões e conflitos com sistemas operativos, é recomendado o uso do Docker tal como a seguir se descreve.

B Docker

Recomenda-se o uso do container cuja imagem é gerada pelo Docker a partir do ficheiro `Dockerfile` que se encontra na diretoria que resulta de descompactar `cp2324t.zip`. Este container deverá ser usado na execução do GHCi e dos comandos relativos ao LaTeX. (Ver também a `Makefile` que é disponibilizada.)

[1] O sufixo 'lhs' quer dizer *literate Haskell*.

Após instalar o Docker e descarregar o referido zip com o código fonte do trabalho, basta executar os seguintes comandos:

```
$ docker build -t cp2324t .
$ docker run -v ${PWD}:/cp2324t -it cp2324t
```

NB: O objetivo é que o container seja usado *apenas* para executar o GHCi e os comandos relativos ao LaTeX. Deste modo, é criado um *volume* (cf. a opção `-v ${PWD}:/cp2324t`) que permite que a diretoria em que se encontra na sua máquina local e a diretoria `/cp2324t` no container sejam partilhadas.

O grupo deverá visualizar/editar os ficheiros numa máquina local e compilá-los no container, executando:

```
$ lhs2TeX cp2324t.lhs > cp2324t.tex
$ pdflatex cp2324t
```

lhs2TeX é o pre-processador que faz "pretty printing" de código Haskell em LaTeX e que faz parte já do container. Alternativamente, basta executar

```
$ make
```

para obter o mesmo efeito que acima.

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp2324t.lhs` é executável e contém o "kit" básico, escrito em Haskell, para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp2324t.lhs
```

O grupo deve abrir o ficheiro `cp2324t.lhs` num editor da sua preferência e verificar que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

é seleccionado pelo GHCi para ser executado.

C Em que consiste o TP

Em que consiste, então, o *relatório* a que se referiu acima? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo G com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com BibTeX) e o índice remissivo (com `makeindex`),

```
$ bibtex cp2324t.aux
$ makeindex cp2324t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. (Como já se disse, pode fazê-lo correndo simplesmente `make` no container.)

No anexo F disponibiliza-se algum código Haskell relativo aos problemas que são colocados. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

Deve ser feito uso da programação literária para documentar bem o código que se desenvolver, em particular fazendo diagramas explicativos do que foi feito e tal como se explica no anexo D.

> **Importante:** o grupo deve evitar trabalhar fora deste ficheiro lhs que lhe é fornecido. Se, para efeitos de divisão de trabalho, o decidir fazer, deve **regularmente integrar** e validar as soluções que forem sendo obtidas neste lhs, garantindo atempadamente a compatibilidade com este. Se não o fizer corre o risco de vir a submeter um ficheiro que não corre no GHCi e/ou apresenta erros na geração do PDF.

D Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2TeX

Como primeiro exemplo, estudar o texto fonte (lhs) do que está a ler[1] onde se obtém o efeito seguinte:[2]

$$
\begin{array}{ll}
& id = \langle f, g \rangle \\
\equiv & \qquad \{ \text{ universal property } \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \text{ identity } \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\
\Box &
\end{array}
$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* LaTeX xymatrix, por exemplo:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N}_0 \arrow[d, "(\!| g |\!)"'] & 1 + \mathbb{N}_0 \arrow[l, "\mathsf{in}"'] \arrow[d, "id + (\!| g |\!)"] \\
B & 1 + B \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}
$$

E Regra prática para a recursividade mútua em $\mathbb{N}_0$

Nesta disciplina estudou-se como fazer programação dinâmica por cálculo, recorrendo à lei de recursividade mútua.[3]

Para o caso de funções sobre os números naturais ($\mathbb{N}_0$, com functor $\mathsf{F}\ X = 1 + X$) pode derivar-se da lei que foi estudada uma *regra de algibeira* que se pode ensinar a programadores que não tenham estudado Cálculo de Programas. Apresenta-se de seguida essa regra, tomando como exemplo o cálculo do ciclo-for que implementa a função de Fibonacci, recordar o sistema:

$$
\begin{array}{l}
fib\ 0 = 1 \\
fib\ (n+1) = f\ n \\
\\
f\ 0 = 1 \\
f\ (n+1) = fib\ n + f\ n
\end{array}
$$

---

1 Procure e.g. por `"sec:diagramas"`.

2 Exemplos tirados de [2].

3 Lei (3.95) em [2], página 110.

Obter-se-á de imediato

$$
\begin{array}{l}
fib' = \pi_1 \cdot \mathsf{for}\ loop\ init\ \textbf{where} \\
\quad loop\ (fib, f) = (f, fib + f) \\
\quad init = (1, 1)
\end{array}
$$

usando as regras seguintes:

- O corpo do ciclo *loop* terá tantos argumentos quanto o número de funções mutuamente recursivas.
- Para as variáveis escolhem-se os próprios nomes das funções, pela ordem que se achar conveniente.[1]
- Para os resultados vão-se buscar as expressões respectivas, retirando a variável n.
- Em *init* coleccionam-se os resultados dos casos de base das funções, pela mesma ordem.

Mais um exemplo, envolvendo polinómios do segundo grau $ax^2 + bx + c$ em $\mathbb{N}_0$. Seguindo o método estudado nas aulas[2], de $f\ x = ax^2 + bx + c$ derivam-se duas funções mutuamente recursivas:

$$
\begin{array}{l}
f\ 0 = c \\
f\ (n+1) = f\ n + k\ n \\
k\ 0 = a + b \\
k\ (n+1) = k\ n + 2\ a
\end{array}
$$

Seguindo a regra acima, calcula-se de imediato a seguinte implementação, em Haskell:

$$
\begin{array}{l}
f'\ a\ b\ c = \pi_1 \cdot \mathsf{for}\ loop\ init\ \textbf{where} \\
\quad loop\ (f, k) = (f + k, k + 2 * a) \\
\quad init = (c, a + b)
\end{array}
$$

F Código fornecido

Problema 1

Tipos básicos:

$$
\begin{array}{l}
\textbf{type}\ Votes = \mathbb{Z} \\
\textbf{type}\ Deputies = \mathbb{Z}
\end{array}
$$

Dados:

$$
\begin{array}{l}
db :: [(Party, (Votes, Deputies))] \\
db = \mathsf{map}\ \ f\ vote\ \textbf{where}\ f\ (a, b) = (a, (b, 0)) \\
vote = [(A, 12000), (B, 7500), (C, 4500), (D, 3000)]
\end{array}
$$

Apuramento:

$$
\begin{array}{l}
final = \mathsf{map}\ \ (id \times \pi_2) \cdot last \\
total = sum\ (\mathsf{map}\ \ \pi_2\ vote) \\
wasted = waste\ history
\end{array}
$$

[1] Podem obviamente usar-se outros símbolos, mas numa primeira leitura dá jeito usarem-se tais nomes.

[2] Secção 3.17 de [2] e tópico Recursividade mútua nos vídeos de apoio às aulas teóricas.

Problema 3

Definição da série de Catalan usando factoriais (1):

$$catdef\ n = (2 * n)! \div ((n + 1)! * n!)$$

Oráculo para inspecção dos primeiros 26 números de Catalan[1]:

$$\begin{array}{l} oracle = [\\ \quad 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, \\ \quad 35357670, 129644790, 477638700, 1767263190, 6564120420, 24466267020, \\ \quad 91482563640, 343059613650, 1289904147324, 4861946401452 \\ \quad] \end{array}$$

G Soluções dos alunos

Os grupos devem colocar neste anexo as suas soluções para os exercícios propostos, de acordo com o "layout" que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto, diagramas e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

> **Importante**: Não pode ser alterado o texto deste ficheiro fora deste anexo.

Problema 1

Neste problema, cujo objetivo final era implementar o método de Hondt, primeiramente desenvolvemos as funções *waste*, para resolver a wasted, e a função *step* para descobrir a função history. A função *waste* vai buscar o último elemento da history e a cada elemento da lista aplica a função *restantes*, que calcula o número de votos desperdiçados de um partido. Depois a função soma todos os votos desperdiçados de todos os partidos. Isso vai originar a função *wasted*.

Votos desperdiçados:

$$\begin{array}{l} waste = sum \cdot \mathsf{map}\ \ restantes \cdot last \\ \quad \textbf{where}\ restantes = (/)\ \langle\$\rangle\ fromIntegral \cdot (\pi_1 \cdot \pi_2) < * > fromIntegral \cdot \mathsf{succ}\ \cdot (\pi_2 \cdot \pi_2) \end{array}$$

A função *step* aplica basicamente a função *update*, que vai atualizar o número de deputados de um partido. A função *update* vai verificar se o partido é o partido com maior quociente e se for, incrementa o número de deputados desse partido. Esta função foi feita baseada no **McCarthy's Conditional**. A função *step* vai ser utilizada para construir a *history*. Para além disso, a variável *maxParty* vai buscar o partido com maior quociente e a função *quotient* vai calcular o quociente de um partido. A variável *pred* vai verificar se o partido é o partido com maior quociente.

Corpo do ciclo-**for**:

$$\begin{array}{l} step\ l = \mathsf{map}\ \ update\ l \\ \quad \textbf{where} \\ \quad\quad quotient\ (\_, (v, d)) = fromIntegral\ v\ /\ fromIntegral\ (\mathsf{succ}\ \ d) \\ \quad\quad maxParty = \pi_1\ \$\ maximumBy\ (comparing\ (quotient))\ l \end{array}$$

[1] Fonte: Wikipedia.

$pred = (\equiv maxParty) \cdot \pi_1$
$update = (\lambda x \rightarrow \textbf{if } pred\ x \textbf{ then } (\lambda(p,(v,d)) \rightarrow (p,(v, \mathsf{succ}\ \ d)))\ x \textbf{ else } id\ x)$

O **History** terá os seguintes passos, no exemplo fornecido neste enunciado:

$$
\begin{array}{ll}
i = 0 & [(A,(12000,0)),(B,(7500,0)),(C,(4500,0)),(D,(3000,0))] \\
i = 1 & [(A,(12000,1)),(B,(7500,0)),(C,(4500,0)),(D,(3000,0))] \\
i = 2 & [(A,(12000,1)),(B,(7500,1)),(C,(4500,0)),(D,(3000,0))] \\
i = 3 & [(A,(12000,2)),(B,(7500,1)),(C,(4500,0)),(D,(3000,0))] \\
i = 4 & [(A,(12000,2)),(B,(7500,1)),(C,(4500,1)),(D,(3000,0))] \\
i = 5 & [(A,(12000,3)),(B,(7500,1)),(C,(4500,1)),(D,(3000,0))] \\
i = 6 & [(A,(12000,3)),(B,(7500,2)),(C,(4500,1)),(D,(3000,0))] \\
i = 7 & [(A,(12000,3)),(B,(7500,2)),(C,(4500,1)),(D,(3000,1))]
\end{array}
$$

Problema 2

Genes de *mergek*:

O anamorfismo g recebe uma lista de listas ordenadas e cria pares recursivamente. Por sua vez, o catamorfismo f aplica a função merge a pares de listas recursivamente. O resultado do hilomorfismo mergek será uma única lista ordenada.

$f :: (Ord\ a) \Rightarrow () + ([a],[a]) \rightarrow [a]$
$f\ (i_1\ ()) = [\,]$
$f\ (i_2\ (xs, ys)) = merge\ (xs, ys)$

$g :: [[a]] \rightarrow () + ([a],[[a]])$
$g\ [\,] = i_1\ ()$
$g\ [x] = i_2\ (x,[\,])$
$g\ (x : xs) = i_2\ (x, xs)$

O seguinte diagrama representa o hilomorfismo mergek:

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbb{N}_0^*)^* \arrow[r, "g"] \arrow[d, "[\!(\, g \,)\!]"'] & 1 + \mathbb{N}_0^* + (\mathbb{N}_0^*)^* \arrow[d, "id + id\ x\ g"] \\
(\mathbb{N}_0^*)^* \arrow[d, "(\!|\, f \,|\!)"'] & 1 + \mathbb{N}_0^* + (\mathbb{N}_0^*)^* \arrow[d, "id + id\ x\ f"] \\
\mathbb{N}_0^* & 1 + \mathbb{N}_0^* + \mathbb{N}_0^* \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}
$$

Extensão de *mSort*:

Foi criada uma função lsplitk" que parte uma lista em k sublistas recursivamente. Se k receber o valor de 1, é dado um caso de paragem que coloca cada elemento da lista numa lista dentro da nova lista. Este caso foi implementado para não conduzir a um loop infinito. Esta nova função lsplitk" permite criar um hilomorfismo mSortk que implementa mergek onde mSort implementaria merge.

$mSortk\ k = [singl, mergek] \cdot (id + \mathsf{map}\ \ (mSortk\ k)) \cdot (lsplitk''\ k)$

$$
\begin{array}{l}
lsplitk :: Int \to [a] \to [[a]] \\
lsplitk\ k\ l = lsplitk'\ k\ (length\ l)\ l \\
\quad \mathbf{where} \\
\qquad lsplitk'\ \_\ \_\ [\,] = [\,] \\
\qquad lsplitk'\ 0\ \_\ \_ = [\,] \\
\qquad lsplitk'\ i\ n\ l \ \ = take\ tamanho\ l : lsplitk'\ (i-1)\ (n - tamanho)\ (drop\ tamanho\ l) \\
\qquad\quad \mathbf{where} \\
\qquad\qquad tamanho = (n + i - 1)\ `div`\ i
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
lsplitk'' :: Int \to [a] \to a + [[a]] \\
lsplitk''\ \_\ [x] = i_1\ x \\
lsplitk''\ 1\ xs = i_2\ \$\ \mathsf{map}\ \ (\lambda x \to [x])\ xs \\
lsplitk''\ k\ xs = i_2\ (lsplitk\ k\ xs)
\end{array}
$$

O algoritmo mSort original divide a lista em dois recursivamente até que cada sublista contenha apenas um elemento. A implementação de mSortk, que recebe um inteiro k pelo utilizador, permite ajustar a divisão da lista, restringindo o número de chamadas recursivas ao necessário e resultando num desempenho mais eficiente.

Problema 3

Sendo, $catalan(n) = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n!)}$ é imediato que $catalan(0) = 1$.

Para *cat* ser uma implementação mais eficiente de *catalan*, derivada por recursividade mútua, não calculando factoriais nenhuns, é necessário encontrar um *k* tal que,

$$catalan(n+1) = k * catalan(n)$$

Para tal fazemos os seguintes cálculos matemáticos:

$$k = \frac{catalan(n+1)}{catalan(n)} = \frac{\frac{(2(n+1))!}{(n+1+1)!(n+1!)}}{\frac{(2n)!}{(n+1)!(n!)}} = \frac{(2n+2)!(n+1)!(n!)}{(n+2)!(n+1)!(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!(n!)}{(n+2)(n+1)(n)!(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+2)(n+1)} =$$

$$= \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+2)(n+1)} = \frac{2(2n+1)}{(n+2)} = \frac{4n+2}{(n+2)}$$

Temos então

$$catalan(n+1) = \frac{4n+2}{(n+2)} * catalan(n)$$

Sendo $k(n) = \frac{4n+2}{(n+2)}$ podemos dividir *k* em duas funções: $num = 4n + 2$ e $denom = n + 2$

Onde,

$num(0) = denom(0) = 2$

$num(n+1) = 4(n+1) + 2 = 4n + 4 + 2 = 4 + 4n + 2 = num(n) + 4$

$denom(n+1) = n + 1 + 2 = n + 2 + 1 = denom(n) + 1$

Assim, temos:

$$
\begin{array}{l}
catalan\ 0 = 1 \\
catalan\ (n+1) = num\ (n) * catalan\ (n)\ `div`\ denom\ (n)
\end{array}
$$

$$num\ 0 = 2$$
$$num\ (n+1) = num\ (n) + 4$$

$$denom\ 0 = 2$$
$$denom\ (n+1) = denom\ (n) + 1$$

Podemos concluir que:

$$cat = prj \cdot \mathsf{for}\ loop\ inic$$

onde:

$$loop\ (catalan, num, denom) = ((num * catalan)\ \text{`}div\text{`}\ denom, num + 4, denom + 1)$$
$$inic = (1, 2, 2)$$
$$prj\ (catalan, num, denom) = catalan$$

catdef é menos eficiente que *cat* principalmente quando o n é elevado, como mencionado no enunciado, por requerir múltiplos cálculos de factoriais repetitivos. Já *cat* vai atualizando os valores de *catalan*, *num*, e *denom* a cada passo evitando cálculos repetitivos.

Problema 4

De forma a solucionar o problema de forma simples, *lrh* é definida por um hilomorfismo e pela função *geraListas*:

$$lrh = [\![c, a]\!] \cdot geraListas$$

A função *geraListas* recebe a lista das alturas de cada barra do histograma e gera as várias sublistas que podem estar contidas em tal.

$$geraListas :: [Int] \to [[Int]]$$
$$geraListas\ heights = concatMap\ inits\ (tails\ heights)$$

Após isso é então efetuado o hilomorfismo que recebe a lista de listas gerada por *geraListas*. É pelo anamorfismo *a* que é calculada a área para cada lista recursivamente com o auxilio da função *calculaArea*.

$$a :: [[Int]] \to () + (Int, [[Int]])$$
$$a\ [\,] = i_1\ ()$$
$$a\ (x : xs) = i_2\ (calculaArea\ x, xs)$$

calculaArea calcula a área do retângulo inscrito na lista recebida.

$$calculaArea :: [Int] \to Int$$
$$calculaArea\ [\,] = 0$$
$$calculaArea\ heights = minimum\ heights * length\ heights$$

É pelo catamorfismo *c* que é calculada, recursivamente, a maior área entre as áreas de todos os retângulos que são possíveis inscrever no histograma.

$c :: () + (Int, Int) \rightarrow Int$
$c\ (i_1\ ()) = 0$
$c\ (i_2\ (xs, ys)) = max\ xs\ ys$

Os seguintes diagramas ilustram *geraListas* e o hilomorfismo respetivamente:

$$\mathbb{N}_0^* \xrightarrow{geraListas} (\mathbb{N}_0^*)^*$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{N}_0^*)^* \arrow[r, "a"] \arrow[d, "[\![a]\!]"'] & 1 + \mathbb{N}_0 + (\mathbb{N}_0^*)^* \arrow[d, "id + id \times a"] \\
\mathbb{N}_0^* \arrow[d, "(\![c]\!)"'] & 1 + \mathbb{N}_0 + \mathbb{N}_0^* \arrow[d, "id + id \times c"] \\
\mathbb{N}_0 & 1 + \mathbb{N}_0 + \mathbb{N}_0 \arrow[l, "c"]
\end{tikzcd}$$

Index

LaTeX, 3, 4
    `bibtex`, 4
    `lhs2TeX`, 3–5
    `makeindex`, 4
    `pdflatex`, 3

Combinador “pointfree”
    hylo
        Listas, 2
    split, 5
Comissão Nacional de Eleições, 1
    Método de Hondt, 1
Cálculo de Programas, 1, 3
    Material Pedagógico, 3
        LTree.hs, 2
        mSort (’merge sort’), 2

Docker, 3
    container, 3, 4

Função
    π_1, 5
    π_2, 5, 6
    for, 2
    map, 5, 6

Haskell, 1, 3, 4
    interpretador
        GHCi, 3, 4
    Literate Haskell, 3

Números naturais ($\mathbb{N}$), 5

Programação
    literária, 3, 4

References

[1] D.E. Knuth. *Literate Programming*. CSLI Lecture Notes Number 27. Stanford University Center for the Study of Language and Information, Stanford, CA, USA, 1992.

[2] J.N. Oliveira. *Program Design by Calculation*, 2018. Draft of textbook in preparation. viii+297 pages. Informatics Department, University of Minho.