Y3F4S4

બહુપદીઓ 2

2.1 પ્રાસ્તાવિક

ધોરણ IX માં આપણે એક ચલ બહુપદી અને તેમની ઘાતનો અભ્યાસ કર્યો છે. યાદ કરો કે જો $p(x)$ ચલ x માં બહુપદી હોય તો, **$p(x)$ માં x ના મહત્તમ ઘાતાંકને બહુપદી $p(x)$ ની ઘાત કહે છે.** ઉદાહરણ તરીકે, $4x + 2$ એ ચલ x માં એક ઘાતવાળી બહુપદી છે. $2y^2 - 3y + 4$ એ ચલ y માં 2 ઘાતવાળી બહુપદી છે, $5x^3 - 4x^2 + x - \sqrt{2}$ એ ચલ x માં 3 ઘાતવાળી બહુપદી છે અને $7u^6 - \frac{3}{2}u^4 + 4u^2 + u - 8$ એ ચલ u માં 6 ઘાતવાળી બહુપદી છે.

$\frac{1}{x-1}$, $\sqrt{x} + 2$, $\frac{1}{x^2+2x+3}$ વગેરે જેવી અભિવ્યક્તિઓ બહુપદીઓ નથી.

એક ઘાતવાળી બહુપદીને ***સુરેખ બહુપદી (Linear Polynomial)*** કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે $2x - 3$, $\sqrt{3}x + 5$, $y + \sqrt{2}$, $x - \frac{2}{11}$, $3z + 4$, $\frac{2}{3}u + 1$, વગેરે બધી જ સુરેખ બહુપદીઓ છે. $2x + 5 - x^2$, $x^3 + 1$ વગેરે જેવી બહુપદીઓ સુરેખ બહુપદીઓ નથી.

બે ઘાતવાળી બહુપદીને ***દ્વિઘાત બહુપદી (Quadratic Polynomial)*** કહે છે. '*quadratic*' શબ્દ '*quadrate*' પરથી મેળવવામાં આવ્યો છે અને તેનો અર્થ 'વર્ગ' એવો થાય છે. $2x^2 + 3x - \frac{2}{5}$, $y^2 - 2$, $2 - x^2 + \sqrt{3}x$, $\frac{u}{3} - 2u^2 + 5$, $\sqrt{5}v^2 - \frac{2}{3}v$, $4z^2 + \frac{1}{7}$ દ્વિઘાત બહુપદીઓનાં કેટલાંક ઉદાહરણો છે. (તેમના સહગુણકો વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.) વ્યાપક રીતે, વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a, b, c માટે અને શૂન્યેતર a માટે x માં કોઈ પણ દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ સ્વરૂપમાં હોય.

ત્રણ ઘાત ધરાવતી બહુપદીને ***ત્રિઘાત બહુપદી (Cubic Polynomial)*** કહે છે. ત્રિઘાત બહુપદીનાં કેટલાંક ઉદાહરણો $2 - x^3$, x^3, $\sqrt{2}x^3$, $3 - x^2 + x^3$, $3x^3 - 2x^2 + x - 1$ છે. હકીકતમાં ત્રિઘાત બહુપદીનું ખૂબ જ સરળ વ્યાપક સ્વરૂપ $ax^3 + bx^2 + cx + d$ છે. અહીં, a, b, c, d વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે અને $a \neq 0$.

હવે, બહુપદી $p(x) = x^2 - 3x - 4$ નો વિચાર કરો. આ બહુપદીમાં $x = 2$ મૂકતાં, આપણને $p(2) = 2^2 - 3 \times 2 - 4 = -6$ મળે. $x^2 - 3x - 4$ માં $x = 2$ મૂકતાં મૂલ્ય '-6' મળ્યું તે $x^2 - 3x - 4$ ની $x = 2$ આગળની કિંમત થાય. આ જ પ્રમાણે, $p(0)$ એ $p(x)$ નું $x = 0$ આગળનું મૂલ્ય છે અને તે -4 છે.

જો $p(x)$ એ x માં બહુપદી હોય, અને જો k કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો $p(x)$ માં x ને બદલે k મૂકવાથી મળતા મૂલ્ય ને $p(x)$ ની $x = k$ આગળની કિંમત કહે છે અને તેને $p(k)$ વડે દર્શાવાય છે.

$x = -1$ આગળ $p(x) = x^2 - 3x - 4$ ની કિંમત શું થાય ?

આપણને $p(-1) = (-1)^2 - \{3 \times (-1)\} - 4 = 0$ મળે.

વળી, એ પણ જુઓ કે $p(4) = (4)^2 - (3 \times 4) - 4 = 0$

$p(-1) = 0$ અને $p(4) = 0$ હોવાથી, -1 અને 4 ને દ્વિઘાત બહુપદી $x^2 - 3x - 4$ નાં શૂન્યો કહે છે. વ્યાપક રીતે, ***જો $p(k) = 0$ હોય તો વાસ્તવિક સંખ્યા k ને બહુપદી $p(x)$ નું શૂન્ય કહે છે.***

આપણે ધોરણ IX માં સુરેખ બહુપદીનાં શૂન્ય કેવી રીતે મેળવવા તેનો અભ્યાસ કર્યો છે. ઉદાહરણ તરીકે જો k એ $p(x) = 2x + 3$ નું એક શૂન્ય હોય તો $p(k) = 0$. આથી આપણને $2k + 3 = 0$ મળશે. આથી, $k = \frac{-3}{2}$.

વ્યાપક રીતે, k એ $p(x) = ax + b$ નું શૂન્ય હોય તો, $p(k) = ak + b = 0$. આથી $k = \frac{-b}{a}$ થાય.

આમ, સુરેખ બહુપદી $ax + b$ નું શૂન્ય $= \frac{-b}{a} = \frac{-(\text{અચળ પદ})}{x \text{ નો સહગુણક}}$

આથી, સુરેખ બહુપદીના શૂન્યને બહુપદીના સહગુણકો સાથે સંબંધ છે. શું અન્ય બહુપદીઓના કિસ્સામાં પણ આવું બનશે ? ઉદાહરણ તરીકે, દ્વિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યોને પણ તેના સહગુણકો સાથે સંબંધ છે ?

આ પ્રકરણમાં, આપણે આ પ્રશ્નોના જવાબ મેળવવા પ્રયત્ન કરીશું. આપણે બહુપદીઓ માટે ભાગ પ્રવિધિનો પણ અભ્યાસ કરીશું.

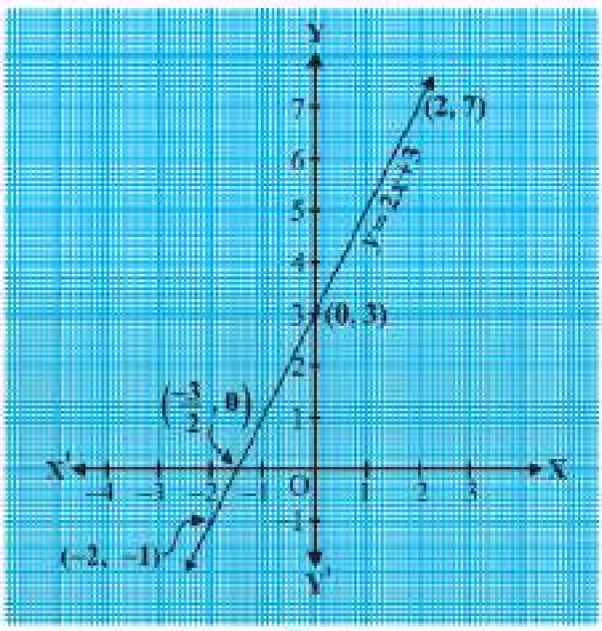
V6I8D2

2.2 બહુપદીનાં શૂન્યોનો ભૌમિતિક અર્થ

આપણે જાણીએ છીએ કે જો $p(k) = 0$ હોય તો વાસ્તવિક સંખ્યા k એ બહુપદી $p(x)$ નું શૂન્ય છે પરંતુ બહુપદીનાં શૂન્યો શા માટે અગત્યનાં છે ? આના ઉત્તર માટે, પ્રથમ આપણે *સુરેખ* અને *દ્વિઘાત બહુપદીઓનું ભૌમિતિક નિરૂપણ* અને તેનાં શૂન્યોના ભૌમિતિક અર્થ જોઈએ.

પ્રથમ સુરેખ બહુપદી $ax+b$, $a \neq 0$ નો વિચાર કરો. આપણે ધોરણ IX માં અભ્યાસ કર્યો છે કે $y = ax + b$ નો આલેખ એક રેખા છે. ઉદાહરણ તરીકે $y = 2x + 3$ નો આલેખ એ બિંદુઓ $(-2, -1)$ અને $(2, 7)$માંથી પસાર થતી રેખા છે.

x	-2	2
$y = 2x + 3$	-1	7



આકૃતિ 2.1

આકૃતિ 2.1 પરથી આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે $y = 2x + 3$ નો આલેખ x-અક્ષને $x = -1$ અને $x = -2$ની મધ્યમાં આવેલા બિંદુ $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$ માં છેદે છે.

આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે બહુપદી $2x + 3$ નું શૂન્ય $\frac{-3}{2}$ છે. આથી, બહુપદી $2x + 3$ નું શૂન્ય એ $y = 2x + 3$ નો આલેખ x-અક્ષને જે બિંદુએ છેદે છે તેનો x-યામ છે.

વ્યાપક રીતે, સુરેખ બહુપદી $ax + b$, $a \neq 0$ માટે $y = ax + b$ નો આલેખ x-અક્ષને બરાબર એક બિંદુ $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$ બિંદુમાં છેદતી રેખા છે.

આથી શૂન્યેતર a માટે સુરેખ બહુપદી $ax + b$ ને એક જ શૂન્ય $\frac{-b}{a}$ છે અને તે $y = ax + b$ નો આલેખ x-અક્ષને જે બિંદુએ છેદે છે તેનો x-યામ છે.

હવે, આપણે દ્વિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યોનો ભૌમિતિક અર્થ જોઈએ. $x^2 - 3x - 4$ દ્વિઘાત બહુપદીનો વિચાર કરો. ચાલો આપણે જોઈએ કે $y = x^2 - 3x - 4$ નો આલેખ* કેવો દેખાશે.

આપણે કોષ્ટક 2.1 માં x ની કેટલીક કિંમતોને અનુરૂપ $y = x^2 - 3x - 4$ ની કિંમતોની યાદી બનાવી છે.

કોષ્ટક 2.1

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 3x - 4$	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

જો આપણે ઉપરની યાદીમાં દર્શાવેલાં બિંદુઓને આલેખપત્ર પર દર્શાવી આલેખ દોરીએ તો તે આકૃતિ 2.2 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનો દેખાશે.

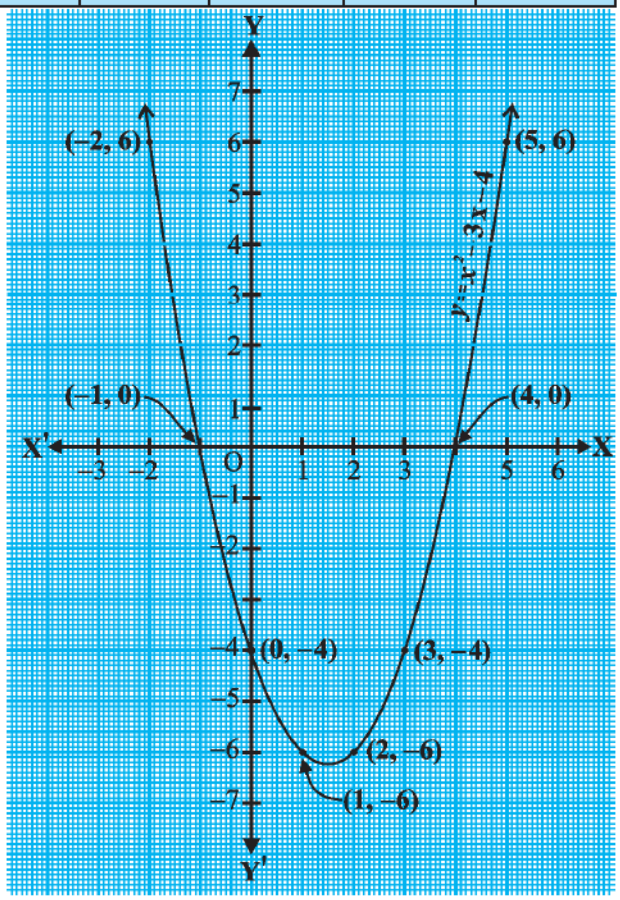
ખરેખર તો, શૂન્યેતર a હોય તેવી કોઈ પણ દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$, ના સંદર્ભમાં તેને અનુરૂપ સમીકરણ $y = ax^2 + bx + c$ નો આલેખ અનુક્રમે $a > 0$ અથવા $a < 0$ અનુસાર ઉપરની તરફ ખુલ્લો વક્ર $\cup$ અથવા નીચેની તરફ ખુલ્લો વક્ર $\cap$ મળશે. (આ વક્રને પરવલય કહે છે.)

તમે કોષ્ટક 2.1 પરથી જોઈ શકો છો કે -1 અને 4 એ આપેલ દ્વિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યો છે.

આકૃતિ 2.2 પરથી નોંધો કે $y = x^2 - 3x - 4$ નો આલેખ x-અક્ષને જે બિંદુઓએ છેદે છે. તેમના x યામ -1 અને 4 છે.

આમ, દ્વિઘાત બહુપદી $x^2 - 3x - 4$ નાં શૂન્યો એ $y = x^2 - 3x - 4$ નો આલેખ x-અક્ષને જે બિંદુઓએ છેદે છે તેમના x યામ થાય.

આ હકીકત કોઈ પણ દ્વિઘાત બહુપદી માટે સત્ય છે, દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ નાં શૂન્યો એ



આકૃતિ 2.2

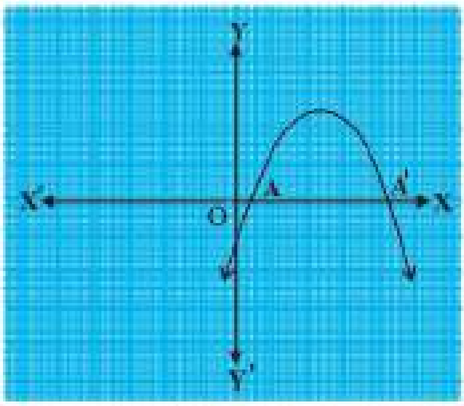
* વિદ્યાર્થી એ દ્વિઘાત તથા ત્રિઘાત બહુપદીઓના આલેખ દોરવાનું અપેક્ષિત નથી તથા તે મૂલ્યાંકનનો હિસ્સો નથી.

નિશ્ચિતપણે $y = ax^2 + bx + c$ ને દર્શાવતો પરવલય x-અક્ષને જે બિંદુઓમાં છેદે છે તે બિંદુઓના x-યામ થાય.

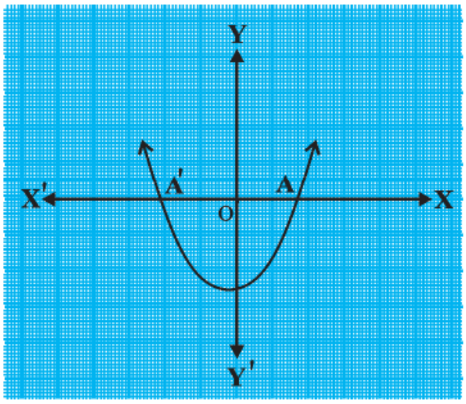
અગાઉના આપણા નિરીક્ષણને આધારે $y = ax^2 + bx + c$ ના આલેખના આકાર માટે નીચે પ્રમાણેના ત્રણ વિકલ્પ હોઈ શકે :

વિકલ્પ (i) : અહીં આલેખ x-અક્ષને ***બે ભિન્ન બિંદુઓ*** A અને A' માં છેદે છે.

આ કિસ્સામાં A અને A' ના x-યામ એ દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ નાં બે શૂન્યો થાય. (જુઓ આકૃતિ 2.3.)



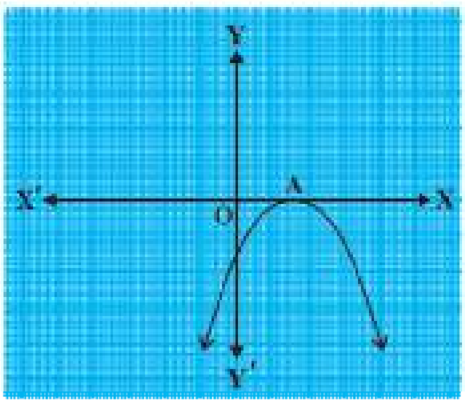
(i)



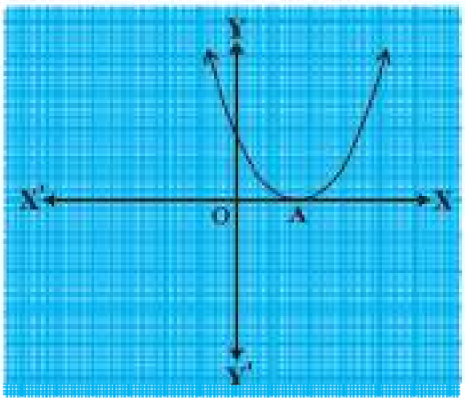
(ii)

આકૃતિ 2.3

વિકલ્પ (ii) : અહીં આલેખ x-અક્ષને એક બિંદુમાં છેદે છે. એટલે કે તે x-અક્ષને બે સંપાતી બિંદુઓમાં છેદે છે. આથી વિકલ્પ (i)વાળા બિંદુ A અને A' સંપાતી બને છે અને એક જ છેદબિંદુ A મળે છે. (જુઓ આકૃતિ 2.4.)



(i)

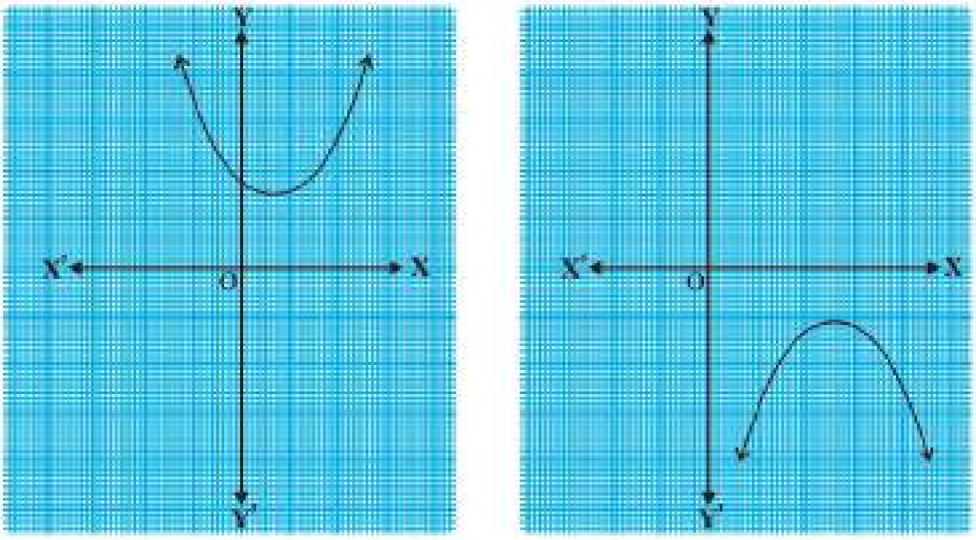


(ii)

આકૃતિ 2.4

આ કિસ્સામાં બિંદુ Aનો x-યામ એ દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ નું ***એક માત્ર શૂન્ય*** થશે.

વિકલ્પ (iii) : અહીં આલેખ સંપૂર્ણપણે x-અક્ષની ઉપર અથવા સંપૂર્ણપણે x-અક્ષની નીચે છે અને તે x-અક્ષને કોઈ પણ બિંદુએ છેદશે નહીં. (જુઓ આકૃતિ 2.5.)



આકૃતિ 2.5

આથી, આ કિસ્સામાં દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ ને **વાસ્તવિક શૂન્ય** નથી.

આથી, ભૌમિતિક રીતે જોઈ શકાય કે, દ્વિઘાત બહુપદીને કાં તો બે ભિન્ન શૂન્યો હોય અથવા બે સમાન શૂન્યો હોય (એટલે કે એક શૂન્ય) અથવા શૂન્ય ન હોય. આનો અર્થ એ પણ થાય કે બે ઘાતવાળી બહુપદીને વધુમાં વધુ બે શૂન્યો હોય.

હવે, ત્રિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યોના ભૌમિતિક અર્થ માટે તમે શું અપેક્ષા રાખો છો ? ચાલો, આપણે નક્કી કરીએ. ત્રિઘાત બહુપદી $x^3 - 4x$ નો વિચાર કરો. $y = x^3 - 4x$ નો આલેખ કેવો દેખાશે તે જોઈએ.

ચાલો, આપણે x ની કેટલીક કિંમતોને અનુરૂપ y ની કેટલીક કિંમતોની યાદી કોષ્ટક 2.2 માં દર્શાવેલ છે તે જોઈએ.

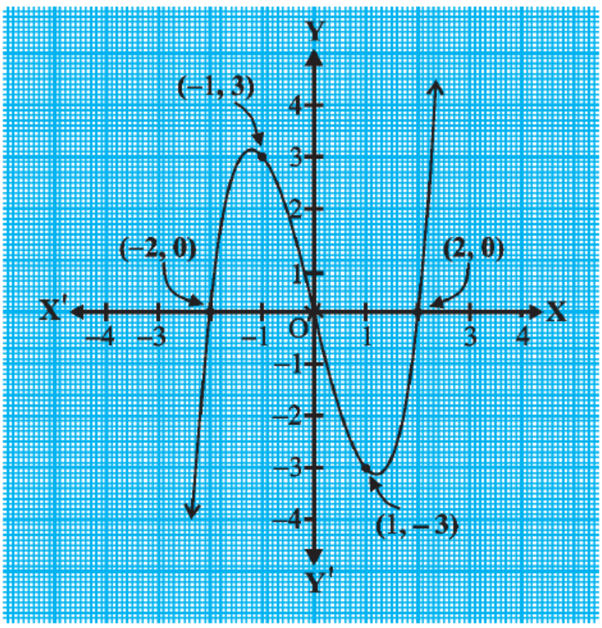
કોષ્ટક 2.2

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3 - 4x$	0	3	0	-3	0

કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ બિંદુઓને આલેખપત્ર પર દર્શાવી આલેખ દોરતાં આપણે જોઈ શકીએ કે, $y = x^3 - 4x$ નો આલેખ ખરેખર આકૃતિ 2.6 માં દર્શાવેલ છે તેવો લાગશે.

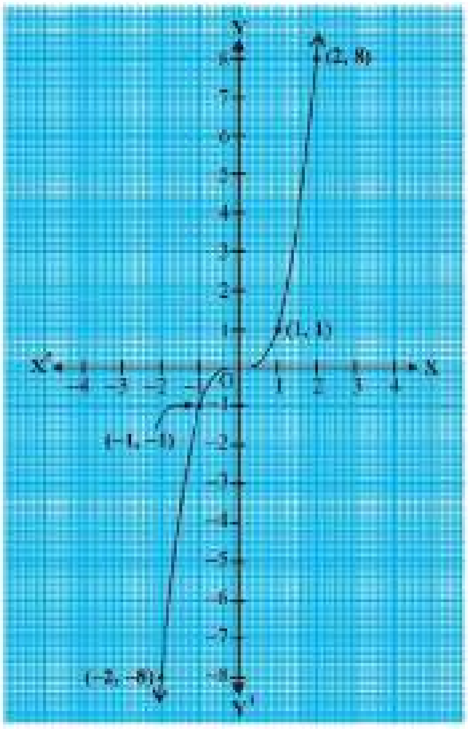
ઉપરના કોષ્ટક પરથી આપણે જોઈ શકીએ કે -2, 0 અને 2 એ ત્રિઘાત બહુપદી $x^3 - 4x$ નાં શૂન્યો છે અવલોકન કરો કે $y = x^3 - 4x$ નો આલેખ x-અક્ષને જ્યાં છેદે છે તે બિંદુઓના x-યામ જ હકીકતમાં -2, 0 અને 2 છે.

વક્ર x-અક્ષને આ ત્રણ બિંદુએ જ છેદતો હોવાથી તેના x-યામ આ બહુપદીનાં શૂન્યો થાય અને આ સિવાય અન્ય કોઈ શૂન્ય ન મળે.

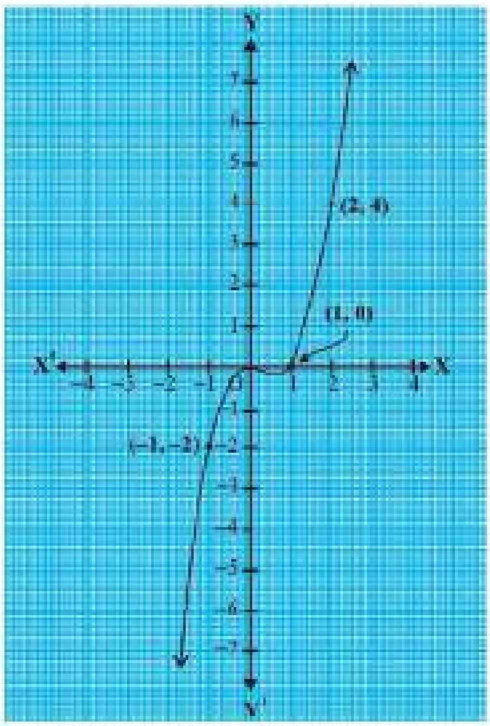


આકૃતિ 2.6

ચાલો આપણે કેટલાંક વધુ ઉદાહરણો લઈએ. ત્રિઘાત બહુપદીઓ x^3 અને $x^3 - x^2$નો વિચાર કરો. આકૃતિ 2.7 અને આકૃતિ 2.8 માં અનુક્રમે $y = x^3$ અને $y = x^3 - x^2$ ના આલેખ આપણે દોર્યા છે.



આકૃતિ 2.7



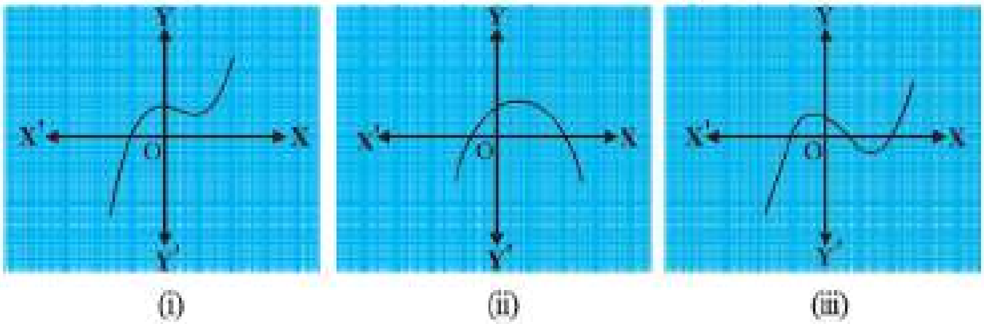
આકૃતિ 2.8

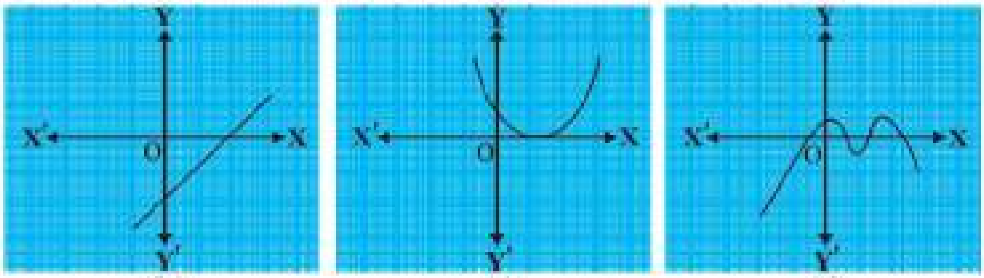
આપણે નોંધીએ કે 0 એ બહુપદી x^3 નું એક માત્ર શૂન્ય છે. વળી, આકૃતિ 2.7 પરથી તમે જોઈ શકો છો કે $y = x^3$ નો આલેખ x-અક્ષને માત્ર એક બિંદુમાં છેદે છે અને તેનો x-યામ 0 છે. $x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$ હોવાથી, બહુપદી $x^3 - x^2$ નાં શૂન્યો માત્ર 0 અને 1 છે. વળી, આકૃતિ 2.8 પરથી આ મૂલ્યો $y = x^3 - x^2$ નો આલેખ x-અક્ષને જે બિંદુઓમાં છેદે છે તેમના x-યામ છે.

ઉપરનાં ઉદાહરણો પરથી, આપણે જોયું કે કોઈ પણ ત્રિઘાત બહુપદીને વધુમાં વધુ ત્રણ શૂન્યો હોય છે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો ત્રણ ઘાતવાળી બહુપદીને વધુમાં વધુ ત્રણ શૂન્યો હોય છે.

નોંધ : વ્યાપક રીતે કહીએ તો આપેલી બહુપદી $p(x)$ ની ઘાત n હોય તો $y = p(x)$ નો આલેખ x-અક્ષને વધુમાં વધુ n બિંદુઓમાં છેદે. માટે n ઘાતવાળી બહુપદી $p(x)$ ને વધુમાં વધુ n શૂન્યો હોય.

ઉદાહરણ 1 : નીચે આકૃતિ 2.9માં આપેલ આલેખ જુઓ. પ્રત્યેક આલેખ બહુપદી $p(x)$ માટે $y = p(x)$ ના આલેખ છે. પ્રત્યેક આલેખ માટે $p(x)$નાં શૂન્યોની સંખ્યા શોધો.





(iv) (v) (vi)

આકૃતિ 2.9

ઉકેલ :

(i) આલેખ x-અક્ષને એક જ બિંદુમાં છેદતો હોવાથી શૂન્યોની સંખ્યા 1 છે.

(ii) આલેખ x-અક્ષને બે બિંદુમાં છેદતો હોવાથી શૂન્યોની સંખ્યા 2 છે.

(iii) બહુપદીનાં શૂન્યોની સંખ્યા 3 છે. (શા માટે ?)

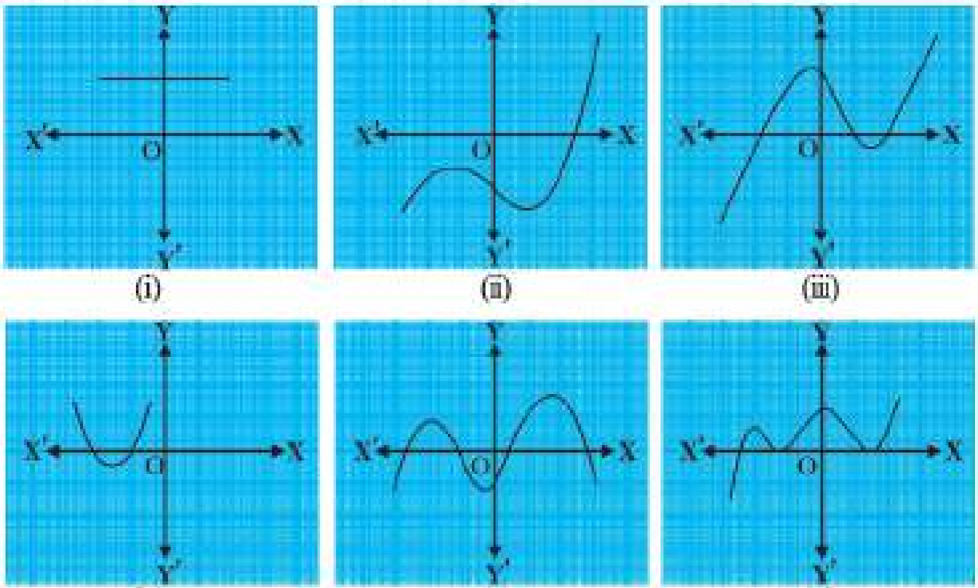
(iv) બહુપદીનાં શૂન્યોની સંખ્યા 1 છે. (શા માટે ?)

(v) બહુપદીનાં શૂન્યોની સંખ્યા 1 છે. (શા માટે ?)

(vi) બહુપદીનાં શૂન્યોની સંખ્યા 4 છે. (શા માટે ?)

સ્વાધ્યાય 2.1

1. નીચે આકૃતિ 2.10 માં કોઈ બહુપદી $p(x)$ માટે $y = p(x)$ ના આલેખ આપેલ છે. દરેક કિસ્સામાં $p(x)$ નાં શૂન્યોની સંખ્યા શોધો.



(i) (ii) (iii)

(iv) (v) (vi)

F9C4K2

આકૃતિ 2.10

2.3 બહુપદીનાં શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ

તમે જોયું કે સુરેખ બહુપદી $ax + b$ નું શૂન્ય $\frac{-b}{a}$ છે. હવે આપણે દ્વિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેના

સંબંધના સંદર્ભે વિભાગ 2.1 માં ઉદ્ભવેલા પ્રશ્નનો ઉત્તર આપવા પ્રયત્ન કરીએ. ચાલો, આ માટે આપણે દ્વિઘાત બહુપદી $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ લઈએ. ધોરણ IX માં તમે દ્વિઘાત બહુપદીના મધ્યમપદના ભાગ પાડી તેના અવયવ પાડતાં શીખ્યાં છો. માટે, આપણે મધ્યમ પદના એવા બે ભાગ પાડીએ જેમનો સરવાળો '$-8x$' થાય અને જેમનો ગુણાકાર $6 \times 2x^2 = 12x^2$ આવે. આથી,

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8x + 6 &= 2x^2 - 6x - 2x + 6 \\ &= 2x\,(x-3) - 2(x-3) \\ &= (2x-2)\,(x-3) \\ &= 2(x-1)\,(x-3) \end{aligned}$$

આથી, જ્યારે $x - 1 = 0$ અથવા $x - 3 = 0$ હોય ત્યારે $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ ની કિંમત શૂન્ય થાય. આથી $2x^2 - 8x + 6$ નાં શૂન્યો 1 અને 3 છે.

અવલોકન કરો કે,

તેનાં શૂન્યોનો સરવાળો $= 1 + 3 = 4 = \dfrac{-(-8)}{2} = -\dfrac{x \text{ નો સહગુણક}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$

તેનાં શૂન્યોનો ગુણાકાર $= 1 \times 3 = 3 = \dfrac{6}{2} = \dfrac{\text{અચળ પદ}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$

ચાલો, આપણે વધુ એક દ્વિઘાત બહુપદી $p(x) = 3x^2 + 5x - 2$ લઈએ. મધ્યમપદના ભાગ પાડવાની પદ્ધતિ દ્વારા,

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x - 2 &= 3x^2 + 6x - x - 2 \\ &= 3x\,(x+2) - 1\,(x+2) \\ &= (3x-1)\,(x+2) \end{aligned}$$

$3x^2 + 5x - 2$ ની કિંમત શૂન્ય લેતાં, $3x - 1 = 0$ અથવા $x + 2 = 0$ થાય. આથી $x = \dfrac{1}{3}$ અથવા $x = -2$.

માટે, $3x^2 + 5x - 2$ નાં શૂન્યો $\dfrac{1}{3}$ અને -2 થાય. અવલોકન કરો કે,

તેનાં શૂન્યોનો સરવાળો $= \dfrac{1}{3} + (-2) = \dfrac{-5}{3} = \dfrac{-(x \text{ નો સહગુણક})}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$

તેનાં શૂન્યોનો ગુણાકાર $= \dfrac{1}{3} \times (-2) = \dfrac{-2}{3} = \dfrac{\text{અચળ પદ}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$

વ્યાપક રીતે, જો શૂન્યેતર a માટે દ્વિઘાત બહુપદી $p(x) = ax^2 + bx + c$, નાં શૂન્યો α* અને β* હોય, તો આપણે જાણીએ છીએ કે $x - \alpha$ અને $x - \beta$ એ $p(x)$ ના અવયવો થાય. માટે,

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= k(x - \alpha)\,(x - \beta), \ k \text{ શૂન્યેતર અચળ} \\ &= k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta], \\ &= kx^2 - k(\alpha + \beta)x + k\,\alpha\beta \end{aligned}$$

બંને બાજુ x^2, x ના સહગુણકો અને અચળ પદને સરખાવતાં આપણને,

$a = k,\ b = -k\,(\alpha + \beta),\ c = k\,\alpha\beta$ મળે.

* α તથા β ગ્રીક મૂળાક્ષરો છે અને તેમનો ઉચ્ચાર અનુક્રમે ''આલ્ફા'' અને ''બીટા'' થાય છે. આગળ જતાં જેનો ઉચ્ચાર ગેમા થાય તેવા વધુ એક મૂળાક્ષર γ નો ઉપયોગ કરીશું.

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\,\beta = \frac{c}{a} \text{ મળે.}$$

આથી   શૂન્યોનો સરવાળો $= \alpha + \beta = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(x \text{ નો સહગુણક})}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$

શૂન્યોનો ગુણાકાર $= \alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{અચળ પદ}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$

ચાલો, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 2 : દ્વિઘાત બહુપદી $x^2 + 7x + 10$ નાં શૂન્યો શોધો તથા તેનાં શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ ચકાસો.

ઉકેલ : આપણી પાસે

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)\,(x + 5)$$

આથી, જ્યારે $x + 2 = 0$ અથવા $x + 5 = 0$ હોય, ત્યારે $x^2 + 7x + 10$ નું મૂલ્ય શૂન્ય થાય.

માટે $x = -2$ અથવા $x = -5$.

આથી, $x^2 + 7x + 10$ નાં શૂન્યો -2 અને -5 થાય. હવે,

શૂન્યોનો સરવાળો $= (-2) + (-5) = -(7) = \dfrac{-(7)}{1} = \dfrac{-(x \text{ નો સહગુણક})}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$

શૂન્યોનો ગુણાકાર $= (-2) \times (-5) = 10 = \dfrac{10}{1} = \dfrac{\text{અચળ પદ}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$

ઉદાહરણ 3 : બહુપદી $x^2 - 3$ નાં શૂન્યો શોધો અને તેનાં શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ ચકાસો.

ઉકેલ : નિત્યસમ $a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$ યાદ કરી તેનો ઉપયોગ કરી, આપણે લખી શકીએ કે,

$$x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})\,(x + \sqrt{3})$$

આથી, જ્યારે $x = \sqrt{3}$ અથવા $x = -\sqrt{3}$ હોય ત્યારે $x^2 - 3$ ની કિંમત શૂન્ય થાય.

માટે, $x^2 - 3$ નાં શૂન્યો $\sqrt{3}$ અને $-\sqrt{3}$ છે.

હવે,

શૂન્યોનો સરવાળો $= \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 = \dfrac{-(x \text{ નો સહગુણક})}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$

શૂન્યોનો ગુણાકાર $= (\sqrt{3})\,(-\sqrt{3}) = -3 = \dfrac{-3}{1} = \dfrac{\text{અચળ પદ}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$

ઉદાહરણ 4 : જેનાં શૂન્યોના સરવાળો અને ગુણાકાર અનુક્રમે –3 અને 2 હોય તેવી દ્વિઘાત બહુપદી મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે માંગેલ દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ નાં શૂન્યો α અને β છે.

આપણી પાસે

$$\alpha + \beta = -3 = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta = 2 = \frac{c}{a}$$

જો $a = 1$ તો $b = 3$ અને $c = 2$

આથી, આપેલ શરતને અનુરૂપ એક દ્વિઘાત બહુપદી $x^2 + 3x + 2$ છે.

તમે એ પણ ચકાસી શકો કે શૂન્યેતર વાસ્તવિક k માટે, $k\,(x^2 + 3x + 2)$ સ્વરૂપની કોઈ પણ બીજી દ્વિઘાત બહુપદી આ શરતોને અનુરૂપ લઈ શકાય.

ચાલો, આપણે હવે ત્રિઘાત બહુપદીઓ જોઈએ. તમે કલ્પના કરી શકશો કે ત્રિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યો અને તેના સહગુણકો વચ્ચે શું આવો જ સંબંધ હશે ?

$p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ નો વિચાર કરીએ,

$p(x)$ ને વધુમાં વધુ ત્રણ શૂન્યો હોય. આપણે $x = 4, -2, \frac{1}{2}$ માટે $p(x) = 0$ થાય તે ચકાસી શકીએ. આ સંખ્યાઓ $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ નાં શૂન્યો થાય. હવે,

$$\text{શૂન્યોનો સરવાળો} = 4 + (-2) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = \frac{-(-5)}{2} = \frac{-(x^2 \text{ નો સહગુણક})}{x^3 \text{ નો સહગુણક}}$$

$$\text{શૂન્યોનો ગુણાકાર} = 4 \times (-2) \times \frac{1}{2} = -4 = \frac{-8}{2} = \frac{-\text{ અચળ પદ}}{x^3 \text{ નો સહગુણક}}$$

જો કે અહીં એક વધુ સંબંધ છે. બબ્બે શૂન્યોના ગુણાકારોના સરવાળાનો વિચાર કરીએ. આપણી પાસે

$$\{4 \times (-2)\} + \left\{(-2) \times \frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{1}{2} \times 4\right\} = -8 - 1 + 2 = -7 = \frac{-14}{2} = \frac{x \text{ નો સહગુણક}}{x^3 \text{ નો સહગુણક}}$$

વ્યાપક રીતે, જો ત્રિઘાત બહુપદી $ax^3 + bx^2 + cx + d$ નાં શૂન્યો α, β, γ હોય, તો સાબિત કરી શકાય કે,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$$

ચાલો, એક ઉદાહરણ સમજીએ.

ઉદાહરણ 5* : ચકાસો કે $3, -1, -\frac{1}{3}$ એ ત્રિઘાત બહુપદી $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ નાં શૂન્યો છે અને તે પછી શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ ચકાસો.

* પરીક્ષાના દ્રષ્ટિકોણથી લીધેલ નથી.

ઉકેલ : આપેલી બહુપદીને $ax^3 + bx^2 + cx + d$ સાથે સરખાવતાં,

આપણને $a = 3$, $b = –5$, $c = –11$, $d = –3$ મળશે. વધુમાં

$$p(3) = 3 \times 3^3 - (5 \times 3^2) - (11 \times 3) - 3 = 81 - 45 - 33 - 3 = 0$$

$$p(-1) = 3 \times (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 - 11 \times (-1) - 3 = -3 - 5 + 11 - 3 = 0$$

$$p\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 11 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 3,$$

$$= -\frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{11}{3} - 3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

આથી, 3, –1 અને $-\frac{1}{3}$ એ $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ નાં શૂન્યો છે.

આથી, આપણે $\alpha = 3$, $\beta = -1$ અને $\gamma = -\frac{1}{3}$ લઈએ.

હવે,

$$\alpha + \beta + \gamma = 3 + (-1) + \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = \frac{-(-5)}{3} = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3 \times (-1) + \left((-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right)\right) + \left(\left(-\frac{1}{3}\right) \times 3\right)$$

$$= -3 + \frac{1}{3} - 1 = -\frac{11}{3} = \frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma = 3 \times (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 = -\left(-\frac{3}{3}\right) = \frac{-d}{a}$$

સ્વાધ્યાય 2.2

1. નીચે દર્શાવેલ દ્વિઘાત બહુપદીઓનાં શૂન્યો શોધો તથા તેમનાં શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ ચકાસો :

(i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4s^2 - 4s + 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$

(iv) $4u^2 + 8u$ (v) $t^2 - 15$ (vi) $3x^2 - x - 4$

2. નીચે દર્શાવેલ સંખ્યાઓ અનુક્રમે દ્વિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યોનો સરવાળો અને શૂન્યોનો ગુણાકાર છે તે પરથી દ્વિઘાત બહુપદી મેળવો :

(i) $\frac{1}{4}, -1$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $0, \sqrt{5}$

(iv) 1, 1 (v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (vi) 4, 1

2.4 બહુપદીઓ માટે ભાગપ્રવિધિ

આપણે જાણીએ છીએ કે ત્રિઘાત બહુપદીને વધુમાં વધુ ત્રણ શૂન્યો છે. વધુમાં, જો તમને એક શૂન્ય આપેલ હોય તો તમે બીજાં બે શૂન્યો શોધી શકો ? આ માટે ચાલો આપણે ત્રિઘાત બહુપદી $x^3 - 3x^2 - x + 3$ નો વિચાર કરીએ. જો અમે તમને કહીએ કે તેનું એક શૂન્ય 1 છે આથી તમે જાણો છો કે $x - 1$ એ $x^3 - 3x^2 - x + 3$ નો એક અવયવ છે. આથી, તમે

R5S7W9

$x^3 - 3x^2 - x + 3$ ને $x - 1$ વડે ભાગો. આ તો તમે ધોરણ IX માં શીખ્યાં છો. આથી ભાગફળ $x^2 - 2x - 3$ મળશે.

બાદમાં, $x^2 - 2x - 3$ ના મધ્યમ પદનું વિભાજન કરતાં તમને $(x + 1)(x - 3)$ અવયવ મળશે.

આથી, $x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x - 1)(x^2 - 2x - 3)$

$= (x - 1)(x + 1)(x - 3)$ મળશે.

આથી, આપેલા ત્રિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યો હવે 1, –1 અને 3 મળી જાય છે.

ચાલો આપણે એક બહુપદીનો બીજી બહુપદી વડે ભાગાકાર કરવાની પદ્ધતિની વિગતવાર ચર્ચા કરીએ. પરંપરાગત સોપાનોની નોંધ કરતાં પહેલાં આપણે એક ઉદાહરણનો અભ્યાસ કરીએ.

ઉદાહરણ 6 : $2x^2 + 3x + 1$ ને $x + 2$ વડે ભાગો.

ઉકેલ : આપણે નોંધીએ કે જ્યારે શેષ શૂન્ય હોય અથવા તેની ઘાત ભાજકની ઘાત કરતાં ઓછી હોય ત્યારે આપણે ભાગાકારની પ્રક્રિયા અટકાવીશું. આથી, અહીં ભાગફળ $2x - 1$ અને શેષ 3 છે.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x \quad - 1 \\
\hline
x + 2 & 2x^2 + 3x + 1 \\
 & 2x^2 + 4x \\
 & \underline{-\quad\; -} \\
 & \quad -x + 1 \\
 & \quad -x - 2 \\
 & \quad \underline{+ \quad +} \\
 & \qquad\quad 3
\end{array}
$$

વળી,

$(2x - 1)(x + 2) + 3 = 2x^2 + 3x - 2 + 3 = 2x^2 + 3x + 1$

માટે, $2x^2 + 3x + 1 = (x + 2)(2x - 1) + 3$

આથી, ભાજ્ય = ભાજક × ભાગફળ + શેષ

ચાલો, હવે આપણે એક બહુપદીને દ્વિઘાત બહુપદી વડે ભાગીને આ પ્રક્રિયા સમજીએ.

ઉદાહરણ 7 : $3x^3 + x^2 + 2x + 5$ ને $1 + 2x + x^2$ વડે ભાગો.

ઉકેલ : સૌપ્રથમ આપણે ભાજક અને ભાજ્યનાં પદોને તેમના ઘાતાંકના ઊતરતા ક્રમમાં ગોઠવીએ. યાદ કરો કે બહુપદીનાં પદોને આ ક્રમમાં ગોઠવીએ તો, તે સ્વરૂપને બહુપદીનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ કહે છે. આ ઉદાહરણમાં, ભાજ્ય પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં જ છે અને $x^2 + 2x + 1$ એ ભાજકનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ થશે.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & & 3x & -5 & \\
\hline
x^2 + 2x + 1 & 3x^3 + & x^2 + & 2x + & 5 \\
 & 3x^3 + & 6x^2 + & 3x & \\
 & - \quad & - \quad & - & \\
\hline
 & & -5x^2 - & x + & 5 \\
 & & -5x^2 - & 10x - & 5 \\
 & & + \quad & + \quad & + \\
\hline
 & & & 9x & +10
\end{array}
$$

સોપાન 1 : ભાગફળનું પ્રથમ પદ મેળવવા માટે ભાજ્યના સૌથી મોટી ઘાતવાળા પદને (એટલે કે $3x^3$) ભાજકના સૌથી મોટી ઘાતવાળા પદ (એટલે કે x^2) વડે ભાગો. ભાગફળ $3x$ થશે. ત્યાર બાદ ભાગાકારની પ્રક્રિયા આગળ ધપાવતાં $-5x^2 - x + 5$ વધશે.

સોપાન 2 : હવે ભાગફળનું બીજું પદ મેળવવા માટે ભાગાકારના નવા ભાજ્યનાં સૌથી મોટી ઘાતવાળા પદને (એટલે કે $-5x^2$). ભાજકના સૌથી મોટી ઘાતવાળા પદ (એટલે કે x^2) વડે ભાગો. ભાગફળ –5 મળશે. ફરીથી ભાગાકારની પ્રક્રિયા $-5x^2 - x + 5$ સાથે આગળ ધપાવો.

સોપાન 3 : $9x + 10$ બાકી રહેશે. હવે, $9x + 10$ની ઘાત ભાજક $x^2 + 2x + 1$ની ઘાત કરતાં ઓછી છે માટે, આપણે ભાગાકાર આગળ ધપાવી શકીશું નહિ.

માટે, ભાગફળ $3x - 5$ અને શેષ $9x + 10$ છે. વળી,

$$(x^2 + 2x + 1) \times (3x - 5) + (9x + 10) = 3x^3 + 6x^2 + 3x - 5x^2 - 10x - 5 + 9x + 10$$
$$= 3x^3 + x^2 + 2x + 5$$

અહીં પણ આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે,

ભાજ્ય = ભાજક × ભાગફળ + શેષ

અહીં આપણે જે પ્રવિધિ લાગુ પાડી તે યુક્લિડની ભાગ પ્રવિધિને સમાન છે. આપણે તેનો પ્રકરણ 1માં અભ્યાસ કર્યો છે.

તે દર્શાવે છે કે,

જો $p(x)$ અને $g(x)$ બે બહુપદીઓ હોય અને $g(x) \neq 0$, તો આપણે એવી બહુપદીઓ $q(x)$ અને $r(x)$ શોધી શકીએ, જેથી

$$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x),$$

જ્યાં $r(x) = 0$ અથવા $r(x)$ની ઘાત < $g(x)$ ની ઘાત.

આ પરિણામ બહુપદીઓ માટે **ભાગપ્રવિધિ** તરીકે ઓળખાય છે.

ચાલો, આપણે તેનો ઉપયોગ દર્શાવતાં કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ 8 : $3x^2 - x^3 - 3x + 5$ નો $x - 1 - x^2$ વડે ભાગાકાર કરો અને ભાગ પ્રવિધિ ચકાસો.

ઉકેલ : જુઓ કે આપેલ બહુપદીઓ પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં નથી. આથી, ભાગાકાર કરવા માટે આપણે પ્રથમ ભાજ્ય અને ભાજકને તેની ઘાતના ઊતરતા ક્રમમાં ગોઠવીશું.

આથી, ભાજ્ય $= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$ અને ભાજક $= -x^2 + x - 1$.

ભાગાકારની પ્રક્રિયા જમણી બાજુએ દર્શાવેલ છે.

$$\begin{array}{r|l} & x - 2 \\ \hline -x^2 + x - 1 & -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 \\ & -x^3 + x^2 - x \\ & {+}\quad {-}\quad\quad {+} \\ \hline & 2x^2 - 2x + 5 \\ & 2x^2 - 2x + 2 \\ & {-}\quad {+}\quad {-} \\ \hline & 3 \end{array}$$

આપણે 3માં x ની ઘાત $= 0 < 2 =$ ઘાત $(-x^2 + x - 1)$ થવાથી ત્યાં અટકીશું.

આથી, ભાગફળ $= x - 2$, શેષ $= 3$

હવે, ભાજક × ભાગફળ + શેષ $= (-x^2 + x - 1)(x - 2) + 3$

$= -x^3 + x^2 - x + 2x^2 - 2x + 2 + 3$

$= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$

= ભાજ્ય

આ રીતે ભાગપ્રવિધિને ચકાસી શકાય.

ઉદાહરણ 9 : જો $\sqrt{2}$ અને $-\sqrt{2}$ એ $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ નાં બે શૂન્યો છે તેવું તમે જાણતા હો, તો બાકીનાં શૂન્યો શોધો.

ઉકેલ : $\sqrt{2}$ અને $-\sqrt{2}$ બે શૂન્યો હોવાથી, $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = x^2 - 2$ એ આપેલ બહુપદીનો અવયવ થશે. હવે આપણે આપેલી બહુપદીને $x^2 - 2$ વડે ભાગીએ.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
\multicolumn{1}{r}{} & 2x^2 & -\,3x & +\,1 & & \\ \cline{2-6}
x^2-2 & 2x^4 & -\,3x^3 & -\,3x^2 & +\,6x & -\,2 \\
 & 2x^4 & & -\,4x^2 & & \\
 & - & & + & & \\ \cline{2-6}
 & & -\,3x^3 & +\,x^2 & +\,6x & -\,2 \\
 & & -\,3x^3 & & +\,6x & \\
 & & + & & - & \\ \cline{3-6}
 & & & x^2 & & -\,2 \\
 & & & x^2 & & -\,2 \\
 & & & - & & + \\ \cline{4-6}
 & & & & & 0
\end{array}
$$

ભાગફળનું પ્રથમ પદ $\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2$

ભાગફળનું બીજું પદ $\frac{-3x^3}{x^2} = -3x$

ભાગફળનું ત્રીજું પદ $\frac{x^2}{x^2} = 1$

આથી, $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = (x^2 - 2)(2x^2 - 3x + 1)$.

હવે, $-3x$ ના ભાગ પાડતાં આપણે $2x^2 - 3x + 1$ ના અવયવ $(2x - 1)(x - 1)$ પાડી શકીશું. આથી, તેનાં શૂન્યો $x = \frac{1}{2}$ અને $x = 1$ થશે. માટે આપેલી બહુપદીનાં શૂન્યો $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \frac{1}{2}, 1$ છે.

સ્વાધ્યાય 2.3

1. નીચે આપેલ તમામ બહુપદી $p(x)$ને બહુપદી $g(x)$ વડે ભાગો અને ભાગફળ તથા શેષ મેળવો :

(i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$, $g(x) = x^2 - 2$

(ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5$, $g(x) = x^2 + 1 - x$

(iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6$, $g(x) = 2 - x^2$

2. નીચે આપેલ બે બહુપદીઓ પૈકી બીજી બહુપદીને પ્રથમ બહુપદી વડે ભાગીને ચકાસો કે પ્રથમ બહુપદી એ બીજી બહુપદીનો અવયવ છે કે નહિ.

(i) $t^2 - 3, 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$

(ii) $x^2 + 3x + 1, 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$

(iii) $x^3 - 3x + 1, x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$

3. જો $\sqrt{\frac{5}{3}}$ અને $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ એ $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ નાં બે શૂન્યો હોય, તો બાકીનાં શૂન્યો શોધો.

4. $x^3 - 3x^2 + x + 2$ ને બહુપદી $g(x)$ વડે ભાગતાં ભાગફળ અને શેષ અનુક્રમે $x - 2$ અને $-2x + 4$ મળે છે, તો $g(x)$ શોધો.

5. ભાગપ્રવિધિ અને નીચેની શરતોને સંતોષે તેવી બહુપદીઓ $p(x)$, $g(x)$, $q(x)$ અને $r(x)$ નાં ઉદાહરણો આપો.

(i) $p(x)$ ની ઘાત $=$ $q(x)$ ની ઘાત

(ii) $q(x)$ ની ઘાત $=$ $r(x)$ ની ઘાત

(iii) $r(x)$ ની ઘાત $= 0$

સ્વાધ્યાય 2.4 (વૈકલ્પિક)*

1. નીચે ત્રિઘાત બહુપદીની સાથે દર્શાવેલ સંખ્યાઓ તેનાં શૂન્યો છે તે ચકાસો. દરેક પ્રશ્નમાં શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ પણ ચકાસો :

(i) $2x^3 + x^2 - 5x + 2 ; \frac{1}{2}, 1, -2$ (ii) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 ; 2, 1, 1$

2. જેનાં શૂન્યોનો સરવાળો, બબ્બે શૂન્યોના ગુણાકારનો સરવાળો અને ગુણાકાર અનુક્રમે 2, –7, –14 છે એવી ત્રિઘાત બહુપદી શોધો.

3. જો બહુપદી $x^3 - 3x^2 + x + 1$ નાં શૂન્યો $a - b, a, a + b$ હોય તો a અને b શોધો.

4. બહુપદી $x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35$ નાં બે શૂન્યો $2 \pm \sqrt{3}$ હોય તો બાકીનાં શૂન્યો શોધો.

5. બહુપદી $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10$ ને બીજી બહુપદી $x^2 - 2x + k$ વડે ભાગતાં આવે તો શેષ $x + a$ મળે તો k અને a શોધો.

2.5 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. 1, 2 અને 3 ઘાત ધરાવતી બહુપદીઓને અનુક્રમે સુરેખ, દ્વિઘાત અને ત્રિઘાત બહુપદીઓ કહે છે.

2. વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a, b, c તથા શૂન્યેતર a માટે, x પરની વાસ્તવિક સહગુણકો ધરાવતી દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ છે.

3. $y = p(x)$ નો આલેખ x-અક્ષને જે બિંદુએ છેદે છે તે બિંદુના x-યામ એ બહુપદી $p(x)$નાં શૂન્યો છે.

4. દ્વિઘાત બહુપદીને વધુમાં વધુ 2 વાસ્તવિક શૂન્યો અને ત્રિઘાત બહુપદીને વધુમાં વધુ 3 વાસ્તવિક શૂન્યો હોય છે.

5. જો α અને β એ દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ નાં શૂન્યો હોય, તો

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

6. જો α, β, γ એ ત્રિઘાત બહુપદી $ax^3 + bx^2 + cx + d$ નાં શૂન્યો હોય, તો

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a},$$

અને $$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$$

7. ભાગ પ્રવિધિ દર્શાવે છે કે આપેલ કોઈ પણ બહુપદી $p(x)$ અને કોઈ શૂન્યેતર બહુપદી $g(x)$ ને સંગત બહુપદીઓ $q(x)$ અને $r(x)$ મળે જેથી,

$$p(x) = g(x)\, q(x) + r(x),$$

જ્યાં $r(x) = 0$ અથવા $r(x)$ની ઘાત $< g(x)$ ની ઘાત.

J9T8Z7

* આ સ્વાધ્યાય પરીક્ષાના હેતુથી બનાવેલ નથી.