U1A2E6

રચના 11

11.1 પ્રાસ્તાવિક

ધોરણ IX માં, સીધી પટ્ટી અને પરિકરની મદદથી તમે કેટલીક રચનાઓ કરી હતી તથા તેમની યથાર્થતાની ચર્ચા પણ કરી હતી. ઉદાહરણ તરીકે, આપણે ખૂણાનો દ્વિભાજક દોરવો, રેખાખંડનો લંબદ્વિભાજક દોરવો, ત્રિકોણ પરની કેટલીક રચનાઓ કરી હતી. આ પ્રકરણમાં આપણે અગાઉ અભ્યાસ કરેલ રચનાઓના જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરી કેટલીક વધારે રચનાઓનો અભ્યાસ કરીશું. આવી રચનાઓ શું કાર્ય કરે છે તેની પાછળના ગાણિતિક તર્ક આપવાની અપેક્ષા પણ તમારી પાસે હશે.

11.2 રેખાખંડનું વિભાજન

W3E4S8

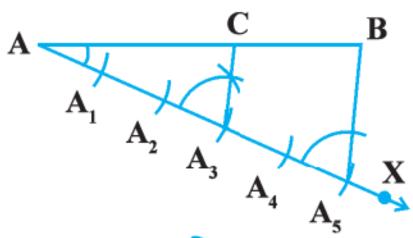
ધારો કે, એક રેખાખંડ આપ્યો છે અને તમારે તેનું આપેલા ગુણોત્તર 3:2 માં વિભાજન કરવાનું છે. તમે તેની લંબાઈ માપી આપેલા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે તેવા એક બિંદુનું સ્થાન તેના પર નક્કી કરી શકો. પરંતુ, ધારો કે તેનું ચોકસાઈપૂર્વક માપ કાઢવા માટે તમારી પાસે કોઈ રસ્તો નથી, તો તમે આ બિંદુ કેવી રીતે શોધી શકશો ? આપણે આવું બિંદુ શોધવાની બે રીત નીચે પ્રમાણે આપીશું :

રચના 11.1 : રેખાખંડનું આપેલા ગુણોત્તરમાં વિભાજન

એક રેખાખંડ AB આપ્યો છે. ધન પૂર્ણાંકો m, n માટે આપણે તેનું $m:n$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરવા ઇચ્છીએ છીએ. તમને સમજવામાં સરળતા રહે તે માટે, આપણે $m = 3$ અને $n = 2$ લઈશું.

રચનાના મુદ્દા :

1. AB સાથે લઘુકોણ બનાવે તેવું કોઈ પણ કિરણ AX દોરો.
2. AX પર $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$ થાય તેવાં 5 $(= m + n)$ બિંદુઓ A_1, A_2, A_3, A_4 અને A_5નાં સ્થાન નક્કી કરો.
3. BA_5 જોડો.



આકૃતિ 11.1

4. બિંદુ A_3 (m = 3) માંથી AB ને C માં છેદતી A_5B ને સમાંતર હોય તેવી રેખા ($\angle A A_3C$ એ $\angle A A_5B$ને સમાન ખૂણો બને તે રીતે) દોરો. (જુઓ આકૃતિ 11.1.) તેથી, AC:CB = 3:2 થશે.

આ રીતે માંગેલ વિભાજન કેવી રીતે મળે છે તે આપણે જોઈએ.

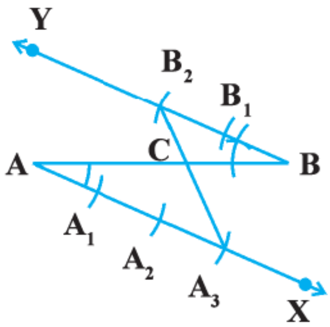
A_3C એ A_5B ને સમાંતર છે માટે,

$$\frac{AA_3}{A_3A_5} = \frac{AC}{CB}$$ (સપ્રમાણતાના મૂળભૂત પ્રમેય દ્વારા)

રચના પરથી, $$\frac{AA_3}{A_3A_5} = \frac{3}{2}.$$

માટે, $$\frac{AC}{CB} = \frac{3}{2}.$$

આ સિદ્ધ કરે છે કે, બિંદુ C એ AB નું 3:2 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.



આકૃતિ 11.2

વૈકલ્પિક રીત :

રચનાના મુદ્દા :

1. AB સાથે લઘુકોણ બનાવે તેવું કોઈક કિરણ AX દોરો.
2. $\angle BAX$ ને સમાન $\angle ABY$ બને તે રીતે કિરણ AX ને સમાંતર કિરણ BY દોરો.
3. $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = BB_1 = B_1B_2$ થાય તેવાં બિંદુઓ A_1, A_2, A_3 (m = 3) એ કિરણ AX ઉપર અને B_1, B_2 (n = 2) એ કિરણ BY ઉપર દર્શાવો.
4. A_3B_2 જોડો. ધારો કે તે AB ને બિંદુ C માં છેદે છે. (જુઓ આકૃતિ 11.2.)
   AC:CB = 3:2 થશે.

આ રીત કેવી રીતે યથાર્થ છે? ચાલો, આપણે જોઈએ :

અહીં, ΔAA_3C એ ΔBB_2C ને સમરૂપ છે. (શા માટે ?)

તેથી, $$\frac{AA_3}{BB_2} = \frac{AC}{CB}$$ થશે.

રચના પરથી, $$\frac{AA_3}{BB_2} = \frac{3}{2}.$$ આથી, $$\frac{AC}{CB} = \frac{3}{2}$$

ખરેખર, રેખાખંડનું કોઈ પણ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરવાનું કાર્ય ઉપર આપેલી રીતો દ્વારા થાય છે.

હવે, જેની બાજુઓ આપેલા ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓના ગુણોત્તરમાં હોય એવા આપેલ ત્રિકોણને સમરૂપ ત્રિકોણની રચના કરવામાં આપણે ઉપરની રચનાની સંકલ્પનાનો ઉપયોગ કરીશું.

રચના 11.2 : *આપેલ સ્કેલમાપન પ્રમાણેના આપેલ ત્રિકોણને સમરૂપ ત્રિકોણની રચના કરવી.*

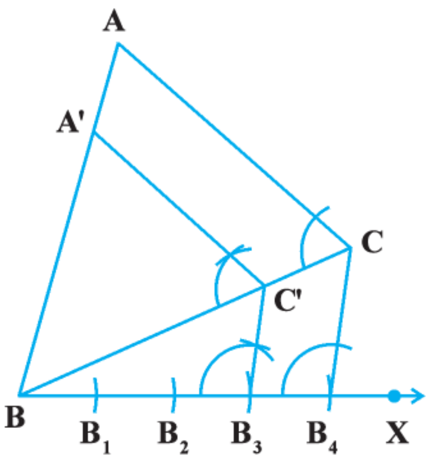
આ રચના બે ભિન્ન પરિસ્થિતિનો સમાવેશ કરે છે. એકમાં, રચેલ ત્રિકોણ આપેલા ત્રિકોણ કરતાં નાનો છે અને બીજામાં આપેલ ત્રિકોણ કરતાં મોટો છે. અહીં, ***સ્કેલમાપન (Scale factor)*** એટલે, રચિત ત્રિકોણની બાજુઓ અને આપેલા ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓનો ગુણોત્તર (પ્રકરણ 6માં પણ જુઓ). ચાલો, આપણે સમાવિષ્ટ રચના સમજવા માટે આગળનું ઉદાહરણ લઈએ. આ પદ્ધતિઓનું વ્યાપક રીતે પણ પ્રયોજન કરી શકાય.

ઉદાહરણ 1 : જે ત્રિકોણની બાજુઓનો આપેલા ત્રિકોણ ABC ની અનુરૂપ બાજુઓ સાથેનો ગુણોત્તર $\frac{3}{4}$ હોય તેવા ત્રિકોણ ABC ને સમરૂપ ત્રિકોણની રચના કરો. (એટલે કે, સ્કેલ માપન $\frac{3}{4}$ હોય તેવા)

ઉકેલ : ત્રિકોણ ABC આપેલો છે. આપણે જેની બાજુઓ ત્રિકોણ ABC ની અનુરૂપ બાજુઓ કરતાં $\frac{3}{4}$ ગણી હોય એવો બીજો ત્રિકોણ રચવો છે.

રચનાના મુદ્દા :

1. BC ના જે અર્ધતલમાં A છે તેનાથી વિરુદ્ધ અર્ધતલમાં BC સાથે લઘુકોણ બનાવતું કોઈક કિરણ BX દોરો.
2. $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$ થાય તેવા ચાર ($\frac{3}{4}$ માં 3 અને 4 પૈકી જે સંખ્યા મોટી હોય તેટલાં) બિંદુઓ B_1, B_2, B_3 અને B_4 એ BX પર લો.
3. B_4C જોડો અને B_3 માંથી ($\frac{3}{4}$ માં 3 અને 4 પૈકી 3 નાનો છે, આથી ત્રીજું બિંદુ) B_4C ને સમાંતર હોય તેવી BC ને C' માં છેદતી રેખા દોરો.
4. C' માંથી CA ને સમાંતર હોય તેવી BA ને A' માં છેદતી એક રેખા દોરો. (જુઓ આકૃતિ 11.3.)



આકૃતિ 11.3

Δ A'BC' એ માંગેલ ત્રિકોણ છે.

ચાલો, હવે આપણે જોઈએ કે આ રચના કેવી રીતે માંગેલ ત્રિકોણ રચે છે.

રચના 11.1 પરથી, $\frac{BC'}{C'C} = \frac{3}{1}$

આથી, $\frac{BC}{BC'} = \frac{BC' + C'C}{BC'} = 1 + \frac{C'C}{BC'} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ અર્થાત્ $\frac{BC'}{BC} = \frac{3}{4}$

વળી, C'A' એ CA ને સમાંતર છે. આથી, $\Delta A'BC' \sim \Delta ABC$. (શા માટે?)

તેથી, $\frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{4}$

ઉદાહરણ 2 : જેની બાજુઓ ત્રિકોણ ABC ની અનુરૂપ બાજુઓ સાથે $\frac{5}{3}$ ગુણોત્તર રચે એવો આપેલ ત્રિકોણ ABC ને સમરૂપ ત્રિકોણ રચો. (એટલે કે સ્કેલમાપન $\frac{5}{3}$ લો.)

ઉકેલ : ત્રિકોણ ABC આપ્યો છે. આપણે જેની બાજુઓ ત્રિકોણ ABC ની બાજુઓ કરતાં $\frac{5}{3}$ ગણી હોય એવા ત્રિકોણની રચના કરવી છે.

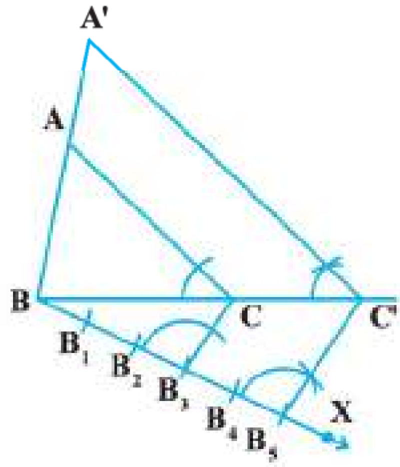
રચનાના મુદ્દા :

1. BC ના જે અર્ધતલમાં A હોય તેનાથી વિરુદ્ધ અર્ધતલમાં BC સાથે લઘુકોણ બનાવતું કિરણ BX દોરો.

2. $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5$ થાય તેવાં 5 બિંદુઓ ($\frac{5}{3}$ માં 5 અને 3 પૈકી મોટી સંખ્યા) B_1, B_2, B_3, B_4 અને B_5 એ BX પર અંકિત કરો.

3. B_3 ને ($\frac{5}{3}$ માં 3 અને 5 પૈકી 3 નાની છે, આથી ત્રીજું બિંદુ) C સાથે જોડો. B_5 માંથી B_3C ને સમાંતર BC ને C' માં છેદતી રેખા દોરો.

4. લંબાવેલ રેખાખંડ BA ને A' માં છેદતી CA ને સમાંતર હોય તેવી C' માંથી રેખા દોરો. (જુઓ આકૃતિ 11.4.)



આકૃતિ 11.4

A'BC' એ માંગેલ ત્રિકોણ થશે.

રચનાની યથાર્થતા માટે નોંધો કે, $\Delta ABC \sim \Delta A'BC'$.

(શા માટે ?)

માટે, $\frac{AB}{A'B} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{BC'}$

પરંતુ, $\frac{BC}{BC'} = \frac{BB_3}{BB_5} = \frac{3}{5}$

તેથી, $\frac{BC'}{BC} = \frac{5}{3}$, અને તેથી, $\frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{5}{3}$

નોંધ : ઉદાહરણ 1 અને 2 માં તમે AB અથવા AC સાથે લઘુકોણ બનાવતું કિરણ લઈને પણ આ જ પ્રમાણે આગળ વધી શકો છો.

સ્વાધ્યાય 11.1

નીચેના પૈકી પ્રત્યેકની રચના કરી તેની યથાર્થતા આપો :

1. 7.6 સેમી લંબાઈનો રેખાખંડ દોરી તેનું 5:8 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરો. બંને ભાગ માપો.

2. 4 સેમી, 5 સેમી અને 6 સેમી બાજુવાળા ત્રિકોણની રચના કરી અને પછી આ ત્રિકોણની બાજુઓને અનુરૂપ તે બાજુઓથી $\frac{2}{3}$ ગણી બાજુવાળા ત્રિકોણની રચના કરો.

3. 5 સેમી, 6 સેમી અને 7 સેમી બાજુવાળા ત્રિકોણની રચના કરો અને પછી બીજો ત્રિકોણ રચો જેની બાજુઓ, પ્રથમ ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓ કરતાં $\frac{7}{5}$ ગણી હોય.

4. 8 સેમી આધાર અને 4 સેમી વેધવાળા સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની રચના કરો અને પછી બીજો એવો ત્રિકોણ રચો કે જેની બાજુઓ, સમદ્વિભુજ ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓ કરતાં $1\frac{1}{2}$ ગણી હોય.

5. BC = 6 સેમી, AB = 5 સેમી અને $\angle ABC = 60°$ હોય તેવો ત્રિકોણ ABC દોરો. પછી ΔABC ની અનુરૂપ બાજુઓને $\frac{3}{4}$ પ્રમાણમાં હોય તેવી બાજુવાળા ત્રિકોણની રચના કરો.

6. BC = 7 સેમી, $\angle B = 45°$, $\angle A = 105°$ હોય તેવો ત્રિકોણ ABC દોરો. પછી એવા ત્રિકોણની રચના કરો કે, જેની બાજુઓ, ΔABC ની અનુરૂપ બાજુઓથી $\frac{4}{3}$ ગણી હોય.

7. 4 સેમી અને 3 સેમી લંબાઈની (કર્ણ સિવાયની) બાજુવાળા કાટકોણ ત્રિકોણની રચના કરો. પછી આ ત્રિકોણની બાજુઓને અનુરૂપ તે બાજુઓથી $\frac{5}{3}$ ગણી બાજુવાળા ત્રિકોણની રચના કરો.

11.3 વર્તુળના સ્પર્શકની રચના

K6Y1G1

તમે આગળના પ્રકરણમાં શીખી ગયાં છો કે, જો બિંદુ વર્તુળની અંદરના ભાગમાં આવેલું હોય, તો આ બિંદુમાંથી વર્તુળના સ્પર્શકનું અસ્તિત્વ નથી. તેમ છતાં, જો બિંદુ વર્તુળ ઉપર આવેલું હોય, તો આ બિંદુએ વર્તુળને માત્ર એક સ્પર્શક હોય છે અને તે આ બિંદુ આગળની ત્રિજ્યાને લંબ હોય છે. તેથી, જો વર્તુળના આ બિંદુએ તમે સ્પર્શક દોરવા ઇચ્છો, તો આ બિંદુએ માત્ર ત્રિજ્યા દોરો અને આ ત્રિજ્યાને આ બિંદુએ લંબરેખા દોરો, તે આ બિંદુએ માંગેલ સ્પર્શક થશે.

તમે એ પણ જોયું કે, જો બિંદુ વર્તુળની બહારના ભાગમાં આવેલું હોય, તો આ બિંદુમાંથી વર્તુળને બે સ્પર્શક મળશે. આ સ્પર્શક કેવી રીતે દોરવા તે હવે આપણે જોઈશું :

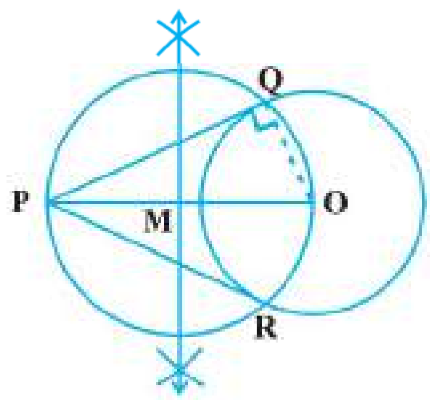
રચના 11.3 : *વર્તુળના બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળના સ્પર્શકની રચના*

આપણને O કેન્દ્રવાળું વર્તુળ અને તેની બહાર બિંદુ P આપ્યું છે. આપણે બિંદુ P માંથી વર્તુળના બે સ્પર્શકની રચના કરવી છે.

રચનાના મુદ્દા :

1. PO જોડો અને તેને દુભાગો. ધારો કે, PO નું મધ્યબિંદુ M છે.
2. M કેન્દ્ર અને MO ને ત્રિજ્યા લઈ એક વર્તુળ દોરો. ધારો કે, તે આપેલા વર્તુળને Q અને R માં છેદે છે.
3. PQ અને PR જોડો.

PQ અને PR એ માંગેલા બે સ્પર્શક છે. (જુઓ આકૃતિ 11.5.)



આકૃતિ 11.5

ચાલો, હવે આ રચના કેવી રીતે યથાર્થ છે તે આપણે જોઈએ.

OQ જોડો. $\angle PQO$ એ અર્ધવર્તુળમાંનો ખૂણો છે અને માટે $\angle PQO = 90°$

તમે જોઈ શકો છો કે, $PQ \perp OQ$?

આપેલ વર્તુળની ત્રિજ્યા OQ હોવાથી, PQ એ વર્તુળનો સ્પર્શક બનશે.

આ જ પ્રમાણે PR એ પણ વર્તુળનો સ્પર્શક છે.

નોંધ : જો વર્તુળનું કેન્દ્ર આપ્યું ન હોય, તો પહેલાં સમાંતર ન હોય તેવી બે જીવાઓ લઈ પછી તેમના લંબદ્વિભાજકોનું છેદબિંદુ શોધીએ. આ છેદબિંદુ કેન્દ્ર થશે. પછી તમે ઉપર પ્રમાણે આગળ વધી શકો.

સ્વાધ્યાય 11.2

નીચેની પ્રત્યેક રચના કરી તેની યથાર્થતા પણ આપો :

1. 6 સેમી ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દોરો. તેના કેન્દ્રથી 10 સેમી દૂર આવેલા બિંદુમાંથી વર્તુળના સ્પર્શકની જોડીની રચના કરો અને તેમની લંબાઈ માપો.

2. 4 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળને સમકેન્દ્રી બીજા 6 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળ પરના બિંદુમાંથી પ્રથમ વર્તુળના સ્પર્શકની રચના કરો અને તેની લંબાઈ માપો. વાસ્તવિક ગણતરીથી માપની ચકાસણી પણ કરો.
3. 3 સેમી ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દોરો. તેના કેન્દ્રથી લંબાવેલા વ્યાસ પર દરેકનું કેન્દ્રથી અંતર 7 સેમી થાય તે રીતે બિંદુઓ P અને Q લો. બિંદુઓ P અને Q માંથી વર્તુળને સ્પર્શકો દોરો.
4. 5 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના જેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ 60° થાય તેવા સ્પર્શકો રચો.
5. 8 સેમી લંબાઈનો રેખાખંડ AB દોરો. A ને કેન્દ્ર લઈ 4 સેમી ત્રિજ્યાવાળું એક વર્તુળ દોરો. B ને કેન્દ્ર લઈ બીજું 3 સેમી ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દોરો. પ્રત્યેક વર્તુળને બીજા વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી સ્પર્શકો દોરો.
6. AB = 6 સેમી, BC = 8 સેમી અને $\angle B = 90°$ થાય તેવો કાટકોણ ત્રિકોણ ABC લો. B માંથી AC પરનો લંબ BD છે. B, C, D માંથી પસાર થતું વર્તુળ દોરેલું છે. A માંથી આ વર્તુળને સ્પર્શકો દોરો.
7. બંગડીની મદદ લઈ એક વર્તુળ દોરો. વર્તુળની બહાર એક બિંદુ લો. આ બિંદુમાંથી વર્તુળના સ્પર્શકોની જોડ દોરો.

11.4 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં નીચેની રચનાઓ કેવી રીતે કરવી તે તમે શીખ્યાં :

1. આપેલ ગુણોત્તરમાં રેખાખંડનું વિભાજન કરવું.
2. 1 કરતાં ઓછો અથવા 1 કરતાં વધારે હોય તેવા આપેલ સ્કેલમાપન પ્રમાણે આપેલા ત્રિકોણને સમરૂપ ત્રિકોણની રચના કરવી.
3. વર્તુળની બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને સ્પર્શકોની જોડની રચના કરવી.

વાચક નોંધ

રચના 11.2ના ઉદાહરણ 1 અને 2માં જે મુદ્દા આપ્યા છે તેમનો ઉપયોગ કરી આપેલા સ્કેલમાપન પ્રમાણે આપેલા ચતુષ્કોણ (અથવા બહુકોણ)ને સમરૂપ ચતુષ્કોણ (અથવા બહુકોણ)ની રચના કરો.

Y7V5L4