સંભાવના 7

The description of right lines and circles upon which geometry is founded belongs to mechanics. Geometry does not teach us to draw these lines but requires them to be drawn.

– Newton

7.1 પ્રાસ્તાવિક

ધોરણ IX માં આપણે સંભાવનાના અભ્યાસની શરૂઆત કરી હતી. અહીં યાદ કરીએ કે યાદચ્છિક પ્રયોગનાં તમામ પરિણામોના ગણને **નિદર્શાવકાશ (Sample space)** કહે છે અને નિદર્શાવકાશના કોઈ પણ ઉપગણને **ઘટના (event)** કહે છે. આપણે સંભાવનાની પૂર્વધારણાયુક્ત વ્યાખ્યા તેમજ તેને લગતા પ્રમેયો જાણીએ છીએ. આપણે સંભાવનાની પ્રશિષ્ટ વ્યાખ્યા યાદ કરી લઈએ. જો કોઈ યાદચ્છિક પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલા સાન્ત નિદર્શાવકાશના સમસંભાવી ઘટકોની સંખ્યા n હોય અને n પૈકીના r $(0 \le r \le n)$ ઘટકો ઘટના Aના ઉદ્ભવ માટે અનુકૂળ હોય, તો A ની સંભાવના $P(A) = \frac{r}{n}$.
હવે આપણે આ સંકલ્પનાનો વિગતવાર વધુ અભ્યાસ કરીએ.

7.2 શરતી સંભાવના

સંભાવનાની વ્યાખ્યા અનુસાર નિદર્શાવકાશનો ઉલ્લેખ કર્યા વગર કોઈપણ ઘટનાની સંભાવના વિશે વાત કરવી નિરર્થક છે. ઉદાહરણ તરીકે જો આપણે કોઈ પણ ઇજનેર વાર્ષિક ઓછામાં ઓછા ₹ 4,00,000 કમાણી કરે તેની સંભાવના પૂછીએ તો તે નિરર્થક છે. અહીં આપણે દર્શાવવું જોઈએ કે આપણે ભારતના બધા ઇજનેર વિશે પૂછીએ છીએ કે પછી કોઈ ચોક્કસ ઉદ્યોગમાં કામ કરતા ઇજનેર કે પછી શૈક્ષણિક ક્ષેત્રમાં સેવા આપતા ઈજનેર કે પછી સરકારી વિભાગમાં સેવા આપતા ઇજનેર વિશે પૂછીએ છીએ વગેરે. આમ, જ્યારે આપણે કોઈ પણ ઘટના A ની સંભાવના P(A) સંકેતનો ઉપયોગ કરીએ છીએ ત્યારે તેની સાથે કોઈક નિદર્શાવકાશ U જોડાયેલો હોય છે જ. હવે, આપણે સંકેત $P(A|B)$ દાખલ કરીએ, જેને ‘‘ઘટના Bને સાપેક્ષ ઘટના Aની સંભાવના’’ અથવા ‘‘B ની શરતે A ની સંભાવના’’ તરીકે વંચાય છે.

સંકેત $P(A|B)$ના ઉપયોગથી ખાતરી થાય છે કે અહીં નિદર્શાવકાશ તરીકે B છે. અહીં, $P(A|B)$ ને B ને સાપેક્ષ A ની શરતી સંભાવના કહે છે. આમ, **કોઈ પણ ઘટનાની સંભાવના એ શરતી સંભાવના છે.** અલબત્ત, જ્યારે નિદર્શાવકાશ U હોય ત્યારે આપણે સરળતા ખાતર સંકેત P(A) વાપરીએ છીએ. પરંતુ જ્યારે નિદર્શાવકાશ Uનો કોઈક ઉપગણ B હોય, ત્યારે, A ની શરતી સંભાવનાને આપણે $P(A|B)$ લખીશું. આમ, કોઈ પણ ઘટનાની શરતી સંભાવના એ બીજી કોઈ ઘટના ઉદ્ભવી હોય તેમ આપેલ હોય ત્યારે મળતી સંભાવના છે.

હવે આપણે શરતી સંભાવનાની સંકલ્પનાને ઉદાહરણ દ્વારા સમજવાનો પ્રયત્ન કરીએ. બે સમતોલ પાસાને એક વખત ઉછાળવાનો પ્રયોગ કરીએ. જ્યારે પ્રથમ પાસા પર અંક 6 આવે ત્યારે બંને પાસા પર આવતા અંકોનો સરવાળો 8 કરતાં વધુ થાય તેની સંભાવના શોધીએ. ધારો કે ઘટના A એ બંને પાસા પર આવતા અંકોનો સરવાળો 8 કરતાં વધુ થાય તે છે અને ઘટના B પ્રથમ પાસા પર આવતો અંક 6 આવે તે છે. આપણે P(A | B)ની કિંમત શોધવી છે. પ્રથમ આપણે ફક્ત પહેલા પાસા પર આવેલ અંક 6 હોય તેવા ઘટકો શોધીશું અને પછી આપણે માંગેલ ઘટનાના ઉદ્ભવ માટેના અનુકૂળ ઘટકો શોધીશું. બંને પાસા પર મળતાં કુલ શક્ય પરિણામો નીચે મુજબ છે :

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

પાસો 1	પાસો 2	કુલ
1	1	2
1	2	3
1	3	4
1	4	5
1	5	6
1	6	7
2	1	3
2	2	4
2	3	5
2	4	6
2	5	7
2	6	8
3	1	4
3	2	5
3	3	6
3	4	7
3	5	8
3	6	9

પાસો 1	પાસો 2	કુલ
4	1	5
4	2	6
4	3	7
4	4	8
4	5	9
4	6	10
5	1	6
5	2	7
5	3	8
5	4	9
5	5	10
5	6	11
6	1	7
6	2	8
6	3	9
6	4	10
6	5	11
6	6	12

આકૃતિ 7.1

પ્રથમ પાસા પર અંક 6 આવે તેવા 6 ઘટકો છે. આમાંથી ચાર ઘટકો એવા છે કે જેથી બંને પાસા પરના અંકોનો સરવાળો 8 થી વધુ હોય. (6, 3); (6, 4); (6, 5); (6, 6).

$$\therefore \quad P(A | B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \qquad \text{(i)}$$

હવે આપણે આ ઉદાહરણને બીજી રીતે જોઈએ. આપણે નોંધીએ કે નિદર્શાવકાશ U ની સાપેક્ષે

$$P(A \cap B) = \frac{4}{36} \qquad (n = 36, r = 4)$$

અને $P(B) = \frac{6}{36}$ $\qquad (n = 36, r = 6)$

$$\therefore \quad \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \qquad \text{(ii)}$$

(i) અને (ii) પરથી આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે,

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

ઉપરનાં તારણોને ધ્યાનમાં રાખીને નીચે પ્રમાણે વ્યાપક વ્યાખ્યા આપીએ.

શરતી સંભાવના (Conditional Probability) : ધારો કે A અને B એ સાન્ત નિદર્શાવકાશ Uના ઘાતગણ Sની ઘટનાઓ છે અને $P(B) \neq 0$. ઘટના Bને સાપેક્ષ ઘટના Aની શરતી સંભાવના

$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

સૌપ્રથમ આપણે સાબિત કરીશું કે ચલ A નું ગણ વિધેય $P(A \mid B)$ હકીકતમાં નિશ્ચિત ઘટના B ને સાપેક્ષ સંભાવના વિધેય જ છે.

પ્રથમ આપણે સંભાવનાની પૂર્વધારણાયુક્ત વ્યાખ્યા યાદ કરી લઈએ.

ધારો કે U એક સાન્ત નિદર્શાવકાશ છે અને S નિદર્શાવકાશ U નો ઘાતગણ છે. જો ગણવિધેય $P : S \to R$ નીચેની પૂર્વધારણાઓનું પાલન કરે તો તેને સંભાવના વિધેય કહે છે.

પૂર્વધારણા 1 : પ્રત્યેક $A \in S$ માટે $P(A) \geq 0$

પૂર્વધારણા 2 : $P(U) = 1$

પૂર્વધારણા 3 : પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ $A_1 \in S$ અને $A_2 \in S$ માટે

$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

પરિણામ : નિશ્ચિત ઘટના B ને સાપેક્ષ ગણ વિધેય $P(A|B)$ જ્યાં $P(B) > 0$, ચલ Aના વિધેય તરીકે સંભાવના વિધેય છે.

(1) $P(A \cap B) \geq 0$ અને $P(B) > 0$ હોવાથી,

$\therefore \quad P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$

તેથી પ્રત્યેક $A \in S$ માટે અને S માં નિશ્ચિત ઘટના B માટે $P(A \mid B) \geq 0$. આમ, શરતી સંભાવના પૂર્વધારણા 1નું પાલન કરે છે.

(2) જો $A = U$ હોય, તો $P(A \mid B)$ની વ્યાખ્યા અનુસાર,

$$P(U \mid B) = \frac{P(U \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

આમ, શરતી સંભાવના પૂર્વધારણા 2નું પાલન કરે છે.

(3) જો A_1 અને A_2 પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય, તો શરતી સંભાવનાની વ્યાખ્યા અનુસાર,

$$P((A_1 \cup A_2) \mid B) = \frac{P[(A_1 \cup A_2) \cap B]}{P(B)} \qquad \text{(i)}$$

હવે, $(A_1 \cup A_2) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$ (વિભાજનનો નિયમ)

પરંતુ ઘટનાઓ A_1 અને A_2 પરસ્પર નિવારક હોવાથી $A_1 \cap B$ અને $A_2 \cap B$ પણ પરસ્પર નિવારક થશે.

$\therefore \quad P[(A_1 \cup A_2) \cap B] = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)$ (પૂર્વધારણા 3) (ii)

$\therefore \quad P((A_1 \cup A_2) \mid B) = \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)}$ ((i) અને (ii) પરથી)

$$= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)}$$

$$= P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B)$$

તેથી શરતી સંભાવના પૂર્વધારણા 3નું પાલન કરે છે.

આમ, શરતી સંભાવના, સંભાવના વિધેયની તમામ પૂર્વધારણાઓનું પાલન કરે છે.

શરતી સંભાવનાના ગુણધર્મો :

(1) જો A_1 અને A_2 એ નિદર્શાવકાશ U ની કોઈ પણ બે ઘટનાઓ હોય તથા U ની કોઈ ઘટના B એવી હોય જ્યાં $P(B) \neq 0$, તો $P((A_1 \cup A_2) \mid B) = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B) - P((A_1 \cap A_2) \mid B)$

$$P((A_1 \cup A_2) \mid B) = \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) - P(A_1 \cap A_2 \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} - \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap B)}{P(B)}$$

$$= P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B) - P((A_1 \cap A_2) \mid B)$$

(2) $P(A' \mid B) = 1 - P(A \mid B)$, જ્યાં $P(B) \neq 0$

B ની શરતે નિદર્શાવકાશ Uની સંભાવના $P(U \mid B) = 1$

$\therefore \quad P((A \cup A') \mid B) = 1$ $\quad (A \cup A' = U)$

$\therefore \quad P(A \mid B) + P(A' \mid B) = 1$ $\quad$ (A અને A' પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે.)

$\therefore \quad P(A' \mid B) = 1 - P(A \mid B)$

ઉદાહરણ 1 : એક પેટીમાં મોબાઈલ ફોન માટેના 100 મેમરી કાર્ડ્સ (memory cards) છે. 10 કાર્ડ્સમાં A પ્રકારની ખામી છે, 5 કાર્ડમાં B પ્રકારની ખામી છે તથા 2 કાર્ડ્સમાં બંને પ્રકારની ખામી છે. એક કાર્ડ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે.

(1) પસંદ થયેલ કાર્ડમાં A પ્રકારની ખામી હોય તેવું આપેલ હોય ત્યારે તેમાં B પ્રકારની ખામી હોય તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(2) પસંદ થયેલ કાર્ડમાં A પ્રકારની ખામી ન હોય તેવું આપેલ હોય ત્યારે તેમાં B પ્રકારની ખામી ન હોય તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : નીચે પ્રમાણેની ઘટનાઓ વ્યાખ્યાયિત કરીએ :

A : મેમરી કાર્ડમાં A પ્રકારની ખામી હોય.

B : મેમરી કાર્ડમાં B પ્રકારની ખામી હોય.

આપેલી માહિતી પરથી, $P(A) = \frac{10}{100} = 0.10$, $P(B) = \frac{5}{100} = 0.05$, $P(A \cap B) = \frac{2}{100} = 0.02$

(1) માંગેલી સંભાવના $P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.02}{0.10} = 0.2$

(2) માંગેલી સંભાવના $P(B' \mid A') = \frac{P(B' \cap A')}{P(A')} = \frac{P((A \cup B)')}{P(A')}$

$$= \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)}$$

$$= \frac{1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]}{1 - P(A)}$$

$$= \frac{1 - (0.10 + 0.05 - 0.02)}{1 - 0.10}$$

$$= \frac{0.87}{0.90} = \frac{87}{90} = \frac{29}{30}$$

ઉદાહરણ 2 : વિમાન નિયત સમયે ઉપડે તેની સંભાવના 0.83 છે. તે નિયત સમયે આવે તેની સંભાવના 0.82 તથા તે નિયત સમયે આવે અને નિયત સમયે ઉપડે તેની સંભાવના 0.78 છે. **(1)** જો વિમાન નિયત સમયે ઉપડે તેમ આપેલ હોય તો તે નિયત સમયે આવ્યું હોય તે ઘટનાની સંભાવના શોધો. **(2)** જો વિમાન નિયત સમયે આવે તેમ આપેલ હોય તો તે નિયત સમયે ઉપડે તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે ઘટના D એ વિમાન નિયત સમયે ઉપડે તે છે અને ઘટના A એ વિમાન નિયત સમયે આવે તે છે. આપેલ માહિતી અનુસાર, $P(D) = 0.83$, $P(A) = 0.82$, $P(D \cap A) = 0.78$

(1) જો વિમાન નિયત સમયે ઉપડે તેમ આપેલ હોય ત્યારે તે નિયત સમયે આવે તેની સંભાવના

$$P(A \mid D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.78}{0.83} = \frac{78}{83}$$

(2) જો વિમાન નિયત સમયે આવે તેમ આપેલ હોય ત્યારે તે નિયત સમયે ઉપડે તેની સંભાવના

$$P(D \mid A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = \frac{0.78}{0.82} = \frac{78}{82} = \frac{39}{41}$$

ઉદાહરણ 3 : એક સમતોલ ન હોય તેવા પાસાને ઉછાળવાથી તેના પર મળતા પૂર્ણાંકની સંભાવના નીચે મુજબ છે :

પૂર્ણાંક	1	2	3	4	5	6
સંભાવના	0.10	0.32	0.21	0.15	0.05	0.17

ઉપર પ્રમાણેના પાસાને ઉછાળવામાં આવે છે. જો તેના પર મળતો પૂર્ણાંક 1 અથવા 2 હોય તેવું આપેલ હોય ત્યારે પાસા પર મળતો પૂર્ણાંક 1 હોય તે ઘટનાની સંભાવના કેટલી થાય ?

ઉકેલ : ધારો કે A : પાસા પર મળતો પૂર્ણાંક 1 હોય.

B : પાસા પર મળતો પૂર્ણાંક 2 હોય.

આપેલ માહિતી પરથી $P(A) = 0.10$, $P(B) = 0.32$.

હવે, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ **(A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે.)**

$= 0.10 + 0.32 = 0.42$

આપણે $P(A \mid (A \cup B))$ની સંભાવના શોધવી છે.

$$P(A \mid (A \cup B)) = \frac{P[A \cap (A \cup B)]}{P(A \cup B)}$$

$$= \frac{P(A)}{P(A \cup B)}$$ **(શા માટે ?)**

$$= \frac{0.10}{0.42} = \frac{10}{42} = \frac{5}{21}$$

ઉદાહરણ 4 : 500 વ્યક્તિઓના સંતાનોના માસિક ખર્ચ વિશેની મોજણી કરવામાં આવી. મોજણીમાં વ્યક્તિને પૂછવામાં આવે છે કે તેમનું સંતાન કૉલેજમાં અભ્યાસ કરે છે કે નહિ અને તેમનો માસિક ખર્ચ કેટલો છે.

નીચે આપેલા કોષ્ટકમાં મોજણી દ્વારા મળતી સંભાવના દર્શાવેલ છે :

	માસિક ખર્ચની સંભાવના		
	ખૂબ વધુ	સમતોલ	ખૂબ ઓછો
સંતાન કૉલેજમાં છે	0.30	0.13	0.01
સંતાન કૉલેજમાં નથી	0.20	0.25	0.11

ધારો કે એક વ્યક્તિની યાદચ્છિક રીતે પસંદગી કરવામાં આવી. જો પસંદ થયેલી વ્યક્તિનું સંતાન કૉલેજમાં ભણે છે તેવું આપેલું હોય ત્યારે તે ખૂબ જ વધુ માસિક ખર્ચ કરતું હોય તે ઘટનાની સંભાવના કેટલી થાય ?

ઉકેલ : ધારો કે ઘટના B એ યાદચ્છિક રીતે પસંદ થયેલી વ્યક્તિનું સંતાન કૉલેજમાં અભ્યાસ કરે તે છે.

$\therefore \quad P(B) = 0.30 + 0.13 + 0.01 = 0.44$

ધારો કે ઘટના A એ યાદચ્છિક રીતે પસંદ થયેલી વ્યક્તિના સંતાનનો માસિક ખર્ચ ખૂબ વધુ છે.

આપેલી માહિતી પરથી, $P(A \cap B)$ = P(માસિક ખર્ચ ખૂબ વધુ $\cap$ સંતાન કૉલેજમાં અભ્યાસ કરતું હોય) = 0.30

આમ, માંગેલી સંભાવના $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.30}{0.44} = \frac{15}{22}$

ઉદાહરણ 5 : જો એવું આપેલું હોય કે બે બાળકો ધરાવતા કુટુંબમાં ઓછામાં ઓછી એક છોકરી છે ત્યારે બંને છોકરીઓ હોય તેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : જો બાળક છોકરો હોય તે પરિણામને b વડે અને છોકરી હોય તે પરિણામને g વડે દર્શાવીએ તો, બે બાળકો ધરાવતાં કુટુંબની તપાસના પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ

$U = \{(b, b), (g, b), (b, g), (g, g)\}$.

ધારો કે ઘટના A : બંને બાળકો છોકરીઓ હોય તે છે અને

B : બંને બાળકોમાં ઓછામાં ઓછી એક છોકરી હોય તે દર્શાવેલ છે.

$A = \{(g, g)\}$ અને $B = \{(b, g), (g, b), (g, g),\}$

$\therefore \quad A \cap B = \{(g, g)\}$

આમ, $P(B) = \frac{3}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

$\therefore$ માંગેલી સંભાવના $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

સ્વાધ્યાય 7.1

1. જો $P(A) = 0.35$, $P(B) = 0.45$ અને $P(A \cup B) = 0.65$, તો $P(B|A)$ શોધો.
2. જો $P(A) = 0.40$, $P(B) = 0.35$ અને $P(A \cup B) = 0.55$, તો $P(A|B)$ શોધો.
3. જો $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.5$ અને $P(A|B) = 0.4$, તો $P(A \cap B)$ અને $P(B|A)$ શોધો.
4. એક સમતોલ પાસાને બે વખત ઉછાળવામાં આવે છે અને તેના પર આવતા પૂર્ણાંકોનો સરવાળો 7 છે તેમ આપેલ છે. પાસા પર ઓછામાં ઓછો એક વખત પૂર્ણાંક 2 મળે તેની સંભાવના કેટલી થાય ?
5. એક સમતોલ પાસો ઉછાળવામાં આવે છે. જો પાસા પર મળતો પૂર્ણાંક અયુગ્મ સંખ્યા હોય તેમ આપેલ હોય ત્યારે તે અવિભાજ્ય સંખ્યા હોય તેની સંભાવના કેટલી થાય ?
6. ઉદાહરણ 4ના કોષ્ટકનો ઉપયોગ કરી નીચે પ્રમાણેની સંભાવના શોધો : (1) જો વ્યક્તિનું સંતાન કૉલેજમાં અભ્યાસ કરતું ન હોય તેમ આપેલું હોય ત્યારે તેનો માસિક ખર્ચ ખૂબ જ ઓછો હોય તેની સંભાવના શોધો. (2) જો વ્યક્તિનું સંતાન કૉલેજમાં અભ્યાસ કરે છે તેમ આપેલું હોય ત્યારે તેનો માસિક ખર્ચ સમતોલ હોય તેની સંભાવના શોધો.
7. એક કાર્ડ પર 1, બીજા કાર્ડ પર 2 એમ 1 થી 100 પૂર્ણાંક લખેલા 100 કાર્ડ્સને એક પેટીમાં મૂકી બરાબર મિશ્ર કરીને પછી યાદચ્છિક રીતે એક કાર્ડની પસંદગી કરવામાં આવે છે. જો પસંદ થયેલા કાર્ડ પરનો ક્રમાંક પૂર્ણવર્ગ હોય તેમ આપેલું હોય ત્યારે તે અયુગ્મ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા હોય તેની સંભાવના શોધો.
8. એક શહેરના 40 % રહીશો પાસે કમ્પ્યૂટર છે, 25 % રહીશો પાસે ઇન્ટરનેટ જોડાણ છે અને 15 % રહીશો પાસે બંને છે. આ શહેરના એક રહીશની યાદચ્છિક રીતે પસંદગી કરવામાં આવે છે : (1) પસંદ થયેલ રહીશ પાસે કમ્પ્યૂટર છે તેમ આપેલું હોય ત્યારે તેની પાસે ઇન્ટરનેટ જોડાણ હોય તેની સંભાવના શોધો. (2) પસંદ થયેલ રહીશ પાસે ઇન્ટરનેટ જોડાણ છે તેમ આપેલું હોય ત્યારે તેની પાસે કમ્પ્યૂટર ન હોય તેની સંભાવના શોધો.
9. એક સમતોલ પાસાને ત્રણ વખત ઉછાળવામાં આવે છે. ઘટના A એ ત્રીજા પ્રયત્નમાં મળતો પાસા પરનો પૂર્ણાંક 4 હોય તે છે તથા ઘટના B એ પ્રથમ અને દ્વિતીય પ્રયત્નમાં પાસા પર મળતો પૂર્ણાંક અનુક્રમે 6 અને 5 હોય તે છે. $P(A|B)$ શોધો.

10. એક સમતોલ સિક્કાને ત્રણ વખત ઉછાળવામાં આવે છે. ઘટનાઓ A, B, E, F, M, N નીચે મુજબ દર્શાવેલ છે : (1) A : ત્રીજા પ્રયત્નમાં છાપ મળે તે ઘટના છે. B : પ્રથમ પ્રયત્નમાં છાપ મળે તે ઘટના છે. $P(A|B)$ શોધો. (2) E : ઓછામાં ઓછી બે વખત છાપ મળે તે ઘટના છે. F : વધુમાં વધુ બે વખત છાપ મળે તે ઘટના છે. $P(E|F)$ શોધો. (3) M : વધુમાં વધુ બે વખત કાંટો મળે તે ઘટના છે. N : ઓછામાં ઓછો એક વખત કાંટો મળે તે ઘટના છે. $P(M|N)$ શોધો.

*

7.3 સંભાવનાનો ગુણાકારનો નિયમ

આપણે જાણીએ છીએ કે જ્યારે ઘટના B બની ગઈ હોય ત્યારે ઘટના Aની ઘટના Bને સાપેક્ષ શરતી સંભાવના

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ P(B) \neq 0$$

આ પરથી આપણે લખી શકીએ કે, $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$ (i)

વળી, $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)},\ P(A) \neq 0$

$\therefore\ P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ $(A \cap B = B \cap A)$

$\therefore\ P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$ (ii)

પરિણામ (i) અને (ii) પરથી,

જો $P(A) \neq 0$ તો $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

જો $P(B) \neq 0$ તો $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$

ઉપરના પરિણામોને **સંભાવનાનો ગુણાકારનો નિયમ** કહેવાય છે.

ત્રણ ઘટનાઓ માટે સંભાવનાનો ગુણાકારનો નિયમ : જો A, B અને C એ ત્રણ ઘટનાઓ હોય, તો

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P((A \cap B) \cap C) \\ &= P(A \cap B)\ P(C|(A \cap B)) && \text{(બે ઘટનાઓ માટે ગુણાકારનો નિયમ)} \\ &= P(A)\ P(B|A)\ P(C|(A \cap B)) \end{aligned}$$

પૂર્ણ સંભાવના માટેનું પ્રમેય (Total Probability) :

પ્રમેય 7.1 : ધારો કે B_1 અને B_2 પરસ્પર નિવારક અને નિ:શેષ ઘટનાઓ છે તથા $P(B_1) \neq 0$ અને $P(B_2) \neq 0$. S ની કોઈ પણ ઘટના A માટે.

$$P(A) = P(B_1)\ P(A|B_1) + P(B_2)\ P(A|B_2)$$

સાબિતી : અહીં B_1 અને B_2 પરસ્પર નિવારક અને નિ:શેષ ઘટનાઓ હોવાથી,

$B_1 \cup B_2 = U$ અને $B_1 \cap B_2 = \emptyset$

$$\begin{aligned} \therefore\ A &= A \cap U \\ &= A \cap (B_1 \cup B_2) \\ &= (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) && \text{(વિભાજનનો નિયમ) (i)} \end{aligned}$$

હવે, $$\begin{aligned} (A \cap B_1) \cap (A \cap B_2) &= A \cap (B_1 \cap B_2) && (B_1 \cap B_2 = \emptyset) \\ &= A \cap \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

$\therefore$ $A \cap B_1$ અને $A \cap B_2$ પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે.

$\therefore$ (i) ના કારણે, $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2)$

$P(A) = P(B_1)\ P(A|B_1) + P(B_2)\ P(A|B_2)$ (સંભાવનાનો ગુણાકારનો નિયમ)

તે જ પ્રમાણે, જો B_1, B_2, B_3 પરસ્પર નિવારક અને નિ:શેષ ઘટનાઓ હોય અને $P(B_1) \neq 0$, $P(B_2) \neq 0$, $P(B_3) \neq 0$ તો S ની કોઈ પણ ઘટના A માટે

$$P(A) = P(B_1)\ P(A|B_1) + P(B_2)\ P(A|B_2) + P(B_3)\ P(A|B_3)$$

બેયઝનો નિયમ

બેયઝનો નિયમ પ્રથમ વખત રીવરેન્ડ થોમસ બેયઝે (1702 - 1761) રજૂ કર્યો.

પ્રમેય 7.2 : ધારો કે B_1, B_2 અને B_3 પરસ્પર નિવારક અને નિ:શેષ ઘટનાઓ છે. જો A ઘટના એવી હોય કે જેથી $P(A) \neq 0$, તો

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)\, P(B_i)}{P(A \mid B_1)\, P(B_1) + P(A \mid B_2)\, P(B_2) + P(A \mid B_3)\, P(B_3)}, \qquad i = 1, 2, 3$$

સાબિતી : શરતી સંભાવનાની વ્યાખ્યા અનુસાર,

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} \tag{i}$$

હવે, સંભાવનાના ગુણાકારના નિયમ અને પ્રમેય 7.1 અનુસાર,

$$P(A \cap B_i) = P(A \mid B_i)\, P(B_i) \tag{ii}$$

અને $P(A) = P(A \mid B_1)\, P(B_1) + P(A \mid B_2)\, P(B_2) + P(A \mid B_3)\, P(B_3)$ (iii)

પરિણામ (i), (ii) અને (iii) પરથી,

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)\, P(B_i)}{P(A \mid B_1)\, P(B_1) + P(A \mid B_2)\, P(B_2) + P(A \mid B_3)\, P(B_3)}, \qquad i = 1, 2, 3$$

$$= \frac{P(A \mid B_i)\, P(B_i)}{\sum\limits_{i=1}^{3} P(A \mid B_i)\, P(B_i)}, \qquad i = 1, 2, 3$$

ઘટનાઓની નિરપેક્ષતા (Independent Events) :

જો ઘટના Aના ઉદ્ભવ થવા માટેની સંભાવના એ ઘટના Bના ઉદ્ભવ થવા માટેની સંભાવના પર આધારિત ન હોય તો $P(A \mid B) = P(A)$ થાય અને આ પરિસ્થિતિમાં A તથા B ને નિરપેક્ષ ઘટનાઓ કહે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, એક પાસાને ઉછાળતા પ્રથમ પ્રયત્નમાં અંક 6 આવે તે ઘટના અને દ્વિતીય પ્રયત્નમાં અંક 6 આવે તે ઘટના નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે. આનાથી ઉલટું, પાસાને ઉછાળતાં પ્રથમ પ્રયત્નમાં અંક 6 આવે તે ઘટના અને પ્રથમ તથા બીજા પ્રયત્નમાં પાસા પરના અંકનો સરવાળો 8 થાય તે ઘટનાઓ નિરપેક્ષ નથી.

હવે, શરતી સંભાવનાની વ્યાખ્યા પરથી,

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (P(B) \neq 0)$$

જો A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય તો

$$P(A \mid B) = P(A)$$

$$\therefore \quad \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

$$\therefore \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

વળી, $P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ $(P(A) \neq 0)$

$$\therefore \quad P(B) = P(B \mid A)$$

આમ, જો ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય તો $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, તથા $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ અને $P(A \mid B) = P(A)$ અને $P(B \mid A) = P(B)$.

વળી, જો $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ તો આપણે કહી શકીએ કે A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.

A અને B ઘટનાઓ નિરપેક્ષ હોય, તો અને તો જ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

પ્રમેય 7.3 : જો A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય, તો A અને B', A' અને B અને A' અને B' પણ નિરપેક્ષ હોય.

સાબિતી : ઘટનાઓ $A \cap B$ અને $A \cap B'$ પરસ્પર નિવારક છે અને $A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$

$\therefore \quad P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$

$\therefore \quad P(A) = P(A) \cdot P(B) + P(A \cap B')$ (A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે)

$\therefore \quad P(A \cap B') = P(A)\,(1 - P(B))$

$\therefore \quad P(A \cap B') = P(A)\,P(B')$

$\therefore$ A અને B' નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે. આ જ પ્રમાણે આપણે સાબિત કરી શકીએ કે A' અને B પણ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.

હવે, $P(A' \cap B') = P[(A \cup B)']$ (દ મોર્ગનનો નિયમ)

$= 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A)\,P(B)$ (A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે)

$= (1 - P(A)) - P(B)\,(1 - P(A))$

$= (1 - P(A))\,(1 - P(B))$

$\therefore \quad P(A' \cap B') = P(A')\,P(B')$

$\therefore$ A' અને B' નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.

નોંધ : જો ત્રણ ઘટનાઓ A, B અને C માટે,

(1) $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

$P(B \cap C) = P(B)\,P(C)$

$P(A \cap C) = P(A)\,P(C)$

અને $P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$ હોય, તો ઘટનાઓ A, B, C પરસ્પર નિરપેક્ષ છે એમ કહેવાય.

જો આપેલ ત્રણ ઘટનાઓ ઓછામાં ઓછી એક શરતનું પાલન ન કરે તો તે પરસ્પર નિરપેક્ષ ન કહેવાય.

(2) $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

$P(B \cap C) = P(B)\,P(C)$

અને $P(A \cap C) = P(A)\,P(C)$ હોય, તો ઘટનાઓ A, B, C જોડયુક્ત નિરપેક્ષ છે એમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 6 : રમવાના 52 પત્તાના ઢગમાંથી એક પછી એક યાદચ્છિક રીતે ત્રણ પત્તાં પસંદ કરવામાં આવે છે. (બીજું પત્તું પસંદ કરીએ ત્યારે પ્રથમ પત્તું પરત કરવામાં આવતું નથી.) જો ઘટનાઓ A_1 પસંદ થયેલ પ્રથમ પત્તું લાલ રંગનો એક્કો હોય, A_2 પસંદ થયેલ બીજું પત્તું 10 અથવા ગુલામ હોય અને A_3 પસંદ થયેલ ત્રીજા પત્તાં પરનો ક્રમાંક 3થી વધુ હોય અને 7થી ઓછો હોય તે છે તો $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ શોધો.

ઉકેલ : અહીં ઘટનાઓ A_1 : પસંદ થયેલ પ્રથમ પત્તું લાલ રંગનો એક્કો હોય. A_2 : પસંદ થયેલ બીજું પત્તું 10 અથવા ગુલામ હોય. A_3 : પસંદ થયેલ ત્રીજા પત્તા પરનો ક્રમાંક 3 થી વધુ અને 7થી ઓછો હોય.

હવે, $P(A_1) = \frac{2}{52}$ (લાલનો એક્કો અને ચોકટનો એક્કો)

$P(A_2 \mid A_1) = \frac{8}{51}$ (પૂરવણી વગર, 10 ક્રમાંકના 4 પત્તા અને ગુલામના 4 પત્તા)

$P(A_3 \mid (A_1 \cap A_2)) = \frac{12}{50}$ (શા માટે ?)

$\therefore$ સંભાવનાના ગુણાકારના નિયમ પરથી,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | (A_1 \cap A_2))$$

$$= \frac{2}{52} \cdot \frac{8}{51} \cdot \frac{12}{50}$$

$$= \frac{8}{5525}$$

ઉદાહરણ 7 : એક પેટીમાં 8 લાલ અને 5 સફેદ દડા છે. ત્રણ ત્રણ દડાઓ બે વખત એક પછી એક એવી રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે કે (1) બીજી પસંદગી પહેલાં પ્રથમ પ્રયત્ને પસંદ થયેલ દડા પરત કરવામાં આવે છે (2) બીજી પસંદગી પહેલાં પ્રથમ પ્રયત્ને પસંદ થયેલ દડા પરત કરવામાં આવતા નથી. પ્રથમ પસંદગી ત્રણ સફેદ દડાઓની થાય અને બીજી પસંદગી ત્રણ લાલ દડાઓની થાય તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે ઘટના A એ પ્રથમ પસંદગી ત્રણ સફેદ દડાઓની થાય છે તે દર્શાવે છે અને ઘટના B એ બીજી પસંદગી ત્રણ લાલ દડાઓની થાય તે છે. આપણે $P(A \cap B)$ની કિંમત શોધવી છે.

(1) પૂરવણી સહિતની પસંદગી : પ્રથમ પસંદગી વખતે લીધેલા દડા બીજી પસંદગી પહેલાં પેટીમાં પાછા મૂકવામાં આવે તો ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ છે. અને માંગેલી સંભાવના $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ દ્વારા મળે.

પ્રથમ પસંદગી : કુલ $8 + 5 = 13$ દડામાંથી ત્રણ દડાની પસંદગીના પ્રકારની સંખ્યા $\binom{13}{3}$.

$\therefore \quad n = \binom{13}{3}$

જો પસંદ થયેલ ત્રણેય દડા સફેદ હોય, તો $r = \binom{5}{3}$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{r}{n} = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{13}{3}} = \frac{10}{286} = \frac{5}{143}$$

દ્વિતીય પસંદગી : પ્રથમ પસંદગી વખતે પસંદ થયેલા દડા પેટીમાં પરત મૂકવામાં આવે છે. તેથી પેટીમાં કુલ 13 દડા જ રહેશે. જો પસંદ થયેલા ત્રણેય દડા લાલ રંગના હોય તો $r = \binom{8}{3}$

$$\therefore \quad P(B) = \frac{r}{n} = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{13}{3}} = \frac{56}{286} = \frac{28}{143}$$

આમ, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$= \frac{\binom{5}{3}}{\binom{13}{3}} \cdot \frac{\binom{8}{3}}{\binom{13}{3}} = \frac{140}{(143)^2} = \frac{140}{20449}$$

(2) પૂરવણી સિવાયની પસંદગી : આ પ્રકારની પસંદગીમાં પ્રથમ પ્રયત્ને પસંદ થયેલ દડા પેટીમાં પરત કરવામાં આવતા નથી. આથી ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ ન થાય અને માંગેલી સંભાવના

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A)$$

(1) માં ચર્ચા કર્યા મુજબ $P(A) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{13}{3}} = \frac{5}{143}$ **(i)**

જો પસંદ થયેલા ત્રણ સફેદ દડા પેટીમાં પરત કરવામાં ન આવે તો હવે પેટીમાં $13 - 3 = 10$ દડા બાકી રહેશે. (8 લાલ, 2 સફેદ)

આમ, $P(B \mid A) = \dfrac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{56}{120} = \dfrac{7}{15}$ (ii)

આથી, પરિણામ (i) અને (ii) પરથી,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{13}{3}} \cdot \frac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{3}} = \left(\frac{5}{143}\right)\left(\frac{7}{15}\right) = \frac{7}{429}$$

ઉદાહરણ 8 : A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે. જો $P(A \cup B) = 0.5$ અને $P(A) = 0.2$, તો $P(B)$ શોધો.

ઉકેલ : A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોવાથી, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

હવે, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A)\ P(B)$

$= P(A) + P(B)\ (1 - P(A))$

$\therefore \quad 0.5 = 0.2 + P(B)\ (1 - 0.2)$

$\therefore \quad 0.3 = P(B)\ (0.8)$

$\therefore \quad P(B) = \dfrac{3}{8}$

ઉદાહરણ 9 : એક કંપનીમાં ઉત્પાદિત યંત્ર A અને B બે પ્રકારના ભાગમાં બનેલું છે. જો કંપની યંત્રના A પ્રકારના 100 ભાગ બનાવે તો તે પૈકી 9 ભાગ ખામીવાળા હોઈ શકે છે અને B પ્રકારના 100 ભાગ બનાવે તો તે પૈકી 5 ભાગ ખામીવાળા હોઈ શકે છે. કંપની દ્વારા ઉત્પાદિત યંત્ર ખામીરહિત હોય તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે ઘટના E : યંત્રનો A ભાગ ખામીવાળો હોય

તથા ઘટના F : યંત્રનો B ભાગ ખામીવાળો હોય તે છે.

આપેલ માહિતી પરથી,

$P(E) = \dfrac{9}{100}$, $P(F) = \dfrac{5}{100}$

ઘટના E' : યંત્રનો A ભાગ ખામીરહિત હોય અને

ઘટના F' : યંત્રનો B ભાગ ખામીરહિત હોય.

$\therefore \quad P(E') = 1 - P(E) = 1 - \dfrac{9}{100} = \dfrac{91}{100}$

$P(F') = 1 - P(F) = 1 - \dfrac{5}{100} = \dfrac{95}{100}$

E તથા F નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોવાથી E' અને F' પણ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ થશે.

હવે, કંપની દ્વારા ઉત્પાદિત યંત્ર ખામીરહિત હોય તે ઘટના $E' \cap F'$ થાય.

$\therefore \quad P(E' \cap F') = P(E') \cdot P(F')$

$= \dfrac{91}{100} \cdot \dfrac{95}{100} = \dfrac{8645}{10000} = 0.8645$

ઉદાહરણ 10 : એક પાકિટમાં 6 ચાંદીના સિક્કાઓ અને 3 સોનાના સિક્કાઓ છે. બીજા પાકિટમાં 4 ચાંદીના અને 5 સોનાના સિક્કાઓ છે. એક પાકિટની યાદચ્છિક પસંદગી કરવામાં આવે છે અને તેમાંથી એક સિક્કો પસંદ કરવામાં આવે છે. આ સિક્કો ચાંદીનો હોય તે ઘટનાની સંભાવના કેટલી થાય ?

ઉકેલ : ધારો કે ઘટના B_1 પ્રથમ પાકીટ પસંદ થાય તે છે અને ઘટના B_2 બીજું પાકિટ પસંદ થાય તે છે. બંનેની પસંદગીની સંભાવના સમાન હોવાથી,

$\therefore \quad P(B_1) = \frac{1}{2}$ અને $P(B_2) = \frac{1}{2}$

ઘટના A : પસંદ થયેલો સિક્કો ચાંદીનો હોય તે છે.

$\therefore \quad P(A \mid B_1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ (કુલ 9 સિક્કાઓ, 6 ચાંદીના સિક્કા)

તે જ પ્રમાણે, $P(A \mid B_2) = \frac{4}{9}$

$\therefore$ માંગેલી સંભાવના, $P(A) = P(B_1)\ P(A \mid B_1) + P(B_2)\ P(A \mid B_2)$

$$= \frac{6}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

ઉદાહરણ 11 : વિજ્ઞાનના એક વર્ગના 75 વિદ્યાર્થીઓમાંથી 15 વિદ્યાર્થીઓ AB જૂથના છે, 45 વિદ્યાર્થીઓ A જૂથના અને બાકીના B જૂથના છે. KVPY (કિશોર વિજ્ઞાન પ્રોત્સાહક યોજના)ની પરીક્ષામાં AB જૂથનો વિદ્યાર્થી ઉત્તીર્ણ ન થાય તેની સંભાવના 0.005, A જૂથનો વિદ્યાર્થી ઉત્તીર્ણ ન થાય તેની સંભાવના 0.05 અને B જૂથનો વિદ્યાર્થી ઉત્તીર્ણ ન થાય તેની સંભાવના 0.15 છે. જો એક વિદ્યાર્થી KVPY પરીક્ષામાં ઉત્તીર્ણ થયેલ છે તેમ આપેલું હોય તો તે B જૂથનો હોય તેની સંભાવના કેટલી થાય ?

ઉકેલ : નીચે પ્રમાણેની ઘટનાઓ વ્યાખ્યાયિત કરીએ :

B_1 : વિદ્યાર્થી AB જૂથનો છે.

B_2 : વિદ્યાર્થી A જૂથનો છે.

B_3 : વિદ્યાર્થી B જૂથનો છે.

A : વિદ્યાર્થી KVPY ની પરીક્ષામાં ઉત્તીર્ણ થાય તે છે.

આપેલી માહિતી પરથી,

$P(B_1) = \frac{15}{75} = 0.2,\ P(B_2) = \frac{45}{75} = 0.6,\ P(B_3) = \frac{15}{75} = 0.2$

$P(A \mid B_1) = 1 - 0.005 = 0.995,\ P(A \mid B_2) = 1 - 0.05 = 0.950,\ P(A \mid B_3) = 1 - 0.15 = 0.850$

હવે,
$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \mid B_1)\, P(B_1) + P(A \mid B_2)\, P(B_2) + P(A \mid B_3)\, P(B_3) \\ &= (0.995)(0.2) + (0.95)(0.6) + (0.85)(0.2) \\ &= 0.1990 + 0.570 + 0.170 \\ &= 0.939 \qquad \text{(i)} \end{aligned}$$

આપણે $P(B_3 \mid A)$ મેળવીએ.

બેયૂઝના નિયમથી,

$$\begin{aligned} P(B_3 \mid A) &= \frac{P(A \mid B_3)\ P(B_3)}{\sum\limits_{i=1}^{3} P(A \mid B_i)\ P(B_i)} \\ &= \frac{P(A \mid B_3)\ P(B_3)}{P(A)} \\ &= \frac{(0.2)\ (0.850)}{0.939} \qquad \text{((i) પરથી)} \\ &= \frac{0.170}{0.939} = \frac{170}{939} \end{aligned}$$

સ્વાધ્યાય 7.2

1. બરાબર ચીપેલાં 52 પત્તાંના ઢગમાંથી એક પત્તુ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. ઘટનાઓ A અને B નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત છે :

   A : પસંદ થયેલું પત્તું કાળીનું હોય

   B : પસંદ થયલું પત્તું એક્કો હોય.

   ચકાસો કે ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ છે કે નહિ.

2. જો $P(B') = 0.65$, $P(A \cup B) = 0.85$ તથા A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે, તો $P(A)$ શોધો.

3. એક વર્ગમાં 10 છોકરાઓ અને 5 છોકરીઓ છે. એક પછી એક ત્રણ વિદ્યાર્થીઓને યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. નીચે મુજબની સંભાવના શોધો :

   (1) પહેલા બે છોકરાઓ પસંદ થાય અને ત્રીજી છોકરી હોય.

   (2) પ્રથમ અને ત્રીજી પસંદગી છોકરાની થાય તથા બીજી પસંદગી છોકરીની થાય.

   (3) પ્રથમ અને ત્રીજી પસંદગી એક લિંગની હોય અને બીજી પસંદગી વિરુદ્ધ લિંગની હોય.

4. પોલીસ વિભાગ શહેરની હદમાં ત્રણ જુદાં જુદાં સ્થળોએ રડારની મદદથી ગતિ અવરોધકોનો ઉપયોગ કરવાનું નક્કી કરે છે. રડાર સંયત્ર આ ત્રણ સ્થળોએ 40 %, 30 % અને 20 % સમય કામ કરે છે. જો એક વ્યક્તિ તેના કામના સ્થળે વધુ પડતી ગતિથી જતો હોય ત્યારે આ રડારવાળાં ત્રણ સ્થળોએથી પસાર થવાની સંભાવના અનુક્રમે 0.2, 0.1 અને 0.5 હોય તો તેને દંડ થવાની સંભાવના કેટલી થાય ?

5. ધારો કે રંગીન દડા નીચે પ્રમાણે ત્રણ પેટીમાં વહેંચાયેલા છે :

રંગ ↓	પેટી 1	પેટી 2	પેટી 3
લાલ	2	4	3
સફેદ	3	1	4
વાદળી	5	3	3
કુલ	**10**	**8**	**10**

   એક પેટીને યાદચ્છિક પસંદ કરી તેમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક દડો પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ થયેલો દડો લાલ રંગનો હોય તેની સંભાવના કેટલી થાય ?

6. એક કારખાનામાં ઉત્પાદિત કુલ વસ્તુઓમાંથી ત્રણ યંત્રો A, B અને C અનુક્રમે 50 %, 30 % અને 20 % ઉત્પાદન કરે છે. આ યંત્રો અનુક્રમે 3 %, 4 % અને 5 % ખામીવાળી વસ્તુઓનું ઉત્પાદન કરે છે. જો કોઈ ઉત્પાદિત વસ્તુ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે તો તે ખામીરહિત હોય તેની સંભાવના શોધો.

7. એક કૉલેજમાં 25 % છોકરાઓ અને 10 % છોકરીઓ ગણિત વિષયનો અભ્યાસ કરે છે. કૉલેજના કુલ વિદ્યાર્થીઓમાં છોકરીઓનું પ્રમાણ 60 % છે.

   (1) ગણિત વિષયનો અભ્યાસ થતો હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

   (2) કૉલેજના એક વિદ્યાર્થીની યાદચ્છિક પસંદગી કરવામાં આવે તો માલૂમ પડ્યું કે તે ગણિત વિષયનો અભ્યાસ કરે છે. આ પસંદ થયેલ વિદ્યાર્થી છોકરી હોવાની સંભાવના કેટલી ?

8. એક રોગથી પીડાતા દર્દી માટે રોગથી સાજા થવા માટે બે સારવાર પદ્ધતિઓ B_1 અને B_2 ઉપલબ્ધ છે. દર્દી આ બે પૈકીની ગમે તે એક પદ્ધતિ પસંદ કરી શકે છે. જો તે સારવાર પદ્ધતિ B_1 પસંદ કરે તો તેની રોગથી સાજા થવાની સંભાવના $\frac{7}{8}$ છે અને જો તે સારવાર પદ્ધતિ B_2 પસંદ કરે તો તેની રોગથી સાજા થવાની સંભાવના $\frac{9}{10}$ છે. (i) દર્દી રોગથી સાજો થઈ જશે તેની સંભાવના કેટલી ? (ii) જો દર્દી રોગથી સાજો થયેલો છે તેમ આપેલું હોય તો તેણે સાજા થવા માટે સારવાર પદ્ધતિ B_2નો ઉપયોગ કર્યો હશે તે ઘટનાની સંભાવના કેટલી ?

*

7.4 યાદચ્છિક ચલ અને સંભાવના વિતરણ

યાદચ્છિક પ્રયોગના શક્ય પરિણામોથી મળતા નિદર્શાવકાશના ઘાતગણ S પર વ્યાખ્યાયિત સંભાવના વિધેય દ્વારા વિવિધ ઘટનાઓની સંભાવના કેવી રીતે મેળવી શકાય તે વિશેનો અભ્યાસ આપણે કરી ગયા. વ્યવહારમાં યાદચ્છિક પ્રયોગના બધા પરિણામોની વિગતોનો અભ્યાસ કરવામાં આપણને રસ હોતો નથી. દાખલા તરીકે બે બાળકો ધરાવતા કુટુંબના યાદચ્છિક પ્રયોગના ચાર શક્ય પરિણામો bb, bg, gb, gg ને બદલે આ પ્રયોગમાં મળતી છોકરાઓની સંખ્યા (અથવા છોકરીઓની સંખ્યા) જાણવામાં વધુ રસ હોય છે. એક કારખાનામાં ઉત્પન્ન થયેલ વીજળીના ગોળાના સમૂહમાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ ગોળાના સમૂહમાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ ગોળાનું આયુષ્ય (કલાકમાં) કેટલું છે તે જાણવું વધુ રસપ્રદ છે. આમ, ઉપર વર્ણવેલ દરેક યાદચ્છિક પ્રયોગના પરિણામ સાથે આપણે એક યા બીજી રીતે એક વાસ્તવિક સંખ્યા સાંકળીએ છીએ. અર્થાત્ યાદચ્છિક પ્રયોગનાં તમામ પરિણામોથી મળતા નિદર્શાવકાશ પર એક વાસ્તવિક વિધેય વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય અને આ વાસ્તવિક વિધેયને આપણે **યાદચ્છિક ચલ** કહીશું. આ વિભાગમાં આપણે યાદચ્છિક ચલ અને તેના સંભાવના વિતરણ વિશે અભ્યાસ કરીશું.

યાદચ્છિક ચલ વિશેની સંકલ્પના મેળવવા આપણે એક સાદું ઉદાહરણ લઈએ. બે બાળકો ધરાવતા એક કુટુંબની પસંદગી કરીએ. આ યાદચ્છિક પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ નિદર્શાવકાશ $U = \{bb, bg, gb, gg\}$ છે.

જો U ના ઘટકો સમસંભાવી હોય તો સંભાવનાની પ્રશિષ્ટ વ્યાખ્યા મુજબ,

$$P(\{bb\}) = P(\{bg\}) = P(\{gb\}) = P(\{gg\}) = \frac{1}{4}$$

ધારો કે $X : U \to R$ એ U પર આ પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થાય છે. $X(u) = u$ માં છોકરાઓની સંખ્યા

જો $u = bb$ તો $X(bb) = 2$. જો $u = gg$ તો $X(gg) = 0$ અને જો $u = bg$ કે gb હોય, તો $X(bg) = X(gb) = 1$.

આમ, વિધેય $X : U \to R$ નો વિસ્તાર $\{0, 1, 2\}$ થાય. હવે આપણે વિધેય Xના વિસ્તારનો ઉપગણ $\{1\}$ લઈએ. ગણ $\{1\}$નું પૂર્વપ્રતિબિંબ $\{u \in U \mid X(u) = 1\} = \{bg, gb\}$ થશે. તે જ પ્રમાણે ગણ $\{2\}$ના પૂર્વપ્રતિબિંબનો ગણ $\{bb\}$ થશે અને ગણ $\{0\}$ના પૂર્વપ્રતિબિંબનો ગણ $\{gg\}$ થશે. વળી, ગણ $\{0, 1, 2\}$ના પૂર્વપ્રતિબિંબનો ગણ $\{bb, bg, gb, gg\} = U$ થશે.

આમ, વિધેય X દ્વારા ગણ $\{0, 1, 2\}$માં ધારણ કરેલી કોઈ એક કિંમતને અનુરૂપ નિદર્શાવકાશ Uની એક નિશ્ચિત ઘટના સંગત થાય છે.

જેમ કે $X(u) = 0$, $u \in U$ને સંગત ઘટના $\{gg\}$ છે. તેથી $X(u) = 0$ હોય તેની સંભાવના એ ઘટના $\{gg\}$ની સંભાવનાની બરાબર થશે. એટલે કે $P(X(u) = 0) = P(\{gg\}) = \frac{1}{4}$.

આમ, Xના વિસ્તાર ગણની કિંમતો સાથે સંકળાયેલી સંભાવના નીચે આપેલા કોષ્ટક દ્વારા વ્યક્ત કરી શકાય :

Uનો ઘટક u	ઘટના $\{u\}$ની સંભાવના $P(\{u\})$	$X(u) = x$	$P(X(u) = x)$
bb	$P(\{bb\}) = \frac{1}{4}$	2	$\frac{1}{4}$
bg	$P(\{bg\}) = \frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
gb	$P(\{gb\}) = \frac{1}{4}$		
gg	$P(\{gg\}) = \frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$

અહીં આપણે નિદર્શાવકાશ પર વ્યાખ્યાયિત Xથી દર્શાવેલા વાસ્તવિક વિધેયને **યાદચ્છિક ચલ** કહીશું અને x ને યાદચ્છિક ચલ X એ ધારણ કરેલી વાસ્તવિક કિંમત કહીશું. વધુમાં યાદચ્છિક ચલ X જે સંભાવના સાથે કિંમત x ધારણ કરે તેને સંકેત $p(x)$ વડે દર્શાવીશું.

અર્થાત્ $p(x) = P(X = x) = P(X(u) = x)$ ને યાદચ્છિક ચલ X એ ધારણ કરેલ કિંમત x ની સંભાવના કહેવાય. આમ, ઉપર આપેલા કોષ્ટકમાં યાદચ્છિક ચલ X એ ધારણ કરેલી વિવિધ વાસ્તવિક કિંમત અને તેને અનુરૂપ સંભાવનાને નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય.

$X = x$	0	1	2
$p(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

સ્પષ્ટ છે કે $\sum_{x=0}^{2} p(x) = p(0) + p(1) + p(2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$

આ કોષ્ટકને યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના-વિતરણ કહેવાય છે અને $p(x)$ ને યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિધેય કહેવાય.

હવે આપણે યાદચ્છિક ચલ X અને તેના સંભાવના-વિતરણની વ્યાખ્યા આપીશું.

યાદચ્છિક ચલ (Random Variable) : ધારો કે U એક યાદચ્છિક પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ નિદર્શાવકાશ છે. U પર વ્યાખ્યાયિત વાસ્તવિક વિધેય $X : U \to R$ ને યાદચ્છિક ચલ કહે છે.

આંકડાશાસ્ત્રીય અભ્યાસમાં સામાન્ય રીતે બે પ્રકારના યાદચ્છિક ચલ પ્રચલિત છે : અસતત યાદચ્છિક ચલ અને સતત યાદચ્છિક ચલ. જો વાસ્તવિક વિધેય $X : U \to R$ નો વિસ્તાર વાસ્તવિક સંખ્યાઓની સાન્ત અથવા અનંત શ્રેણી હોય, તો X ને અસતત ચલ કહેવાય. જો Xનો વિસ્તાર R પરનો કોઈ અંતરાલ હોય તો X ને સતત ચલ કહેવાય.

આપણે માત્ર અસતત ચલ અને તેના સંભાવના-વિતરણનો અભ્યાસ કરીશું તથા અસતત ચલ $X : U \to R$ નો વિસ્તાર ગણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓની સાન્ત શ્રેણી $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ છે એમ માની લઈશું.

યાદચ્છિક ચલનું સંભાવના-વિતરણ :

ધારો કે $X : U \to R$ એક યાદચ્છિક ચલ છે. ધારો કે યાદચ્છિક ચલ X નો વિસ્તાર $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ છે. ધારો કે X એ ધારણ કરેલી કિંમત x_i ની સંભાવના $p(x_i) = P(X = x_i)$ છે.

જો (i) $p(x_i) \geq 0$, $i = 1, 2, ..., n$ અને (ii) $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$, હોય, તો વાસ્તવિક કિંમતોના ગણ $\{p(x_1), p(x_2), ..., p(x_n)\}$ ને યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ કહે છે.

યાદચ્છિક ચલ Xના સંભાવના-વિતરણને કોષ્ટકના રૂપમાં નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$X = x$	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$p(x)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$p(x_3)$	...	$p(x_n)$

ઉદાહરણ 12 : એક સમતોલ સિક્કાને ત્રણ વખત ઉછાળવામાં આવે છે અને એ પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ નિદર્શાવકાશ U છે. યાદચ્છિક ચલ $X : U \to R$ આ પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે : પ્રત્યેક $u \in U$ માટે $X(u) = u$ માં આવેલી છાપની સંખ્યા. જો Uના પરિણામો સમસંભાવી હોય તો Xનું સંભાવના-વિતરણ મેળવો.

ઉકેલ : સમતોલ સિક્કાને ત્રણ વખત ઉછાળતાં મળતો નિદર્શાવકાશ

U = {HHH, HHT, HTH, THH, THT, HTT, TTH, TTT}

જો u = HHH, તો યાદચ્છિક ચલ Xની વ્યાખ્યા મુજબ X(HHH) = 3.

જો u = HHT અથવા HTH અથવા THH, તો $X(u) = 2$

જો u = THT અથવા HTT અથવા TTH, તો $X(u) = 1$

જો u = TTT, તો $X(u) = 0$

આમ, યાદચ્છિક ચલ Xનો વિસ્તારગણ {0, 1, 2, 3} થાય. હવે Uની પ્રાથમિક ઘટનાઓ સમસંભાવી હોવાથી,

$P(\{HHH\}) = P(\{HHT\}) = P(\{HTH\}) = P(\{THH\}) = P(\{THT\}) = P(\{HTT\}) = P(\{TTH\}) = P(\{TTT\}) = \frac{1}{8}$

યાદચ્છિક ચલ Xની વિવિધ કિંમતો સાથે સંકળાયેલી સંભાવના નીચે કોષ્ટકમાં મેળવી છે :

Uનો ઘટક u	સંભાવના $P(\{u\})$	$X(u) = x$	$P(X = x)$
HHH	$\frac{1}{8}$	3	$\frac{1}{8}$
HHT	$\frac{1}{8}$		
HTH	$\frac{1}{8}$	2	$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
THH	$\frac{1}{8}$		
TTH	$\frac{1}{8}$		
THT	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
HTT	$\frac{1}{8}$		
TTT	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$

આમ, યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના-વિતરણ નીચે મુજબ છે :

$X = x$	0	1	2	3
$p(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

ઉદાહરણ 13 : 16 સારી પાકેલી કેરી અને 4 ખરાબ કેરી મિશ્ર થઈ ગઈ છે. જો 2 કેરી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે તો ખરાબ કેરી પસંદ થાય તેનું સંભાવના-વિતરણ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે X એ પસંદ થયેલ કેરીમાં ખરાબ કેરીની સંખ્યા દર્શાવે છે. અહીં 16 સારી પાકેલી અને 4 ખરાબ કેરી મિશ્ર થયેલ છે અને તેમાંથી 2 કેરી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. X ની કિંમત 0, 1 અને 2 હોઈ શકે.

હવે, $P(X = 0)$: 0 ખરાબ કેરી પસંદ થાય તેની સંભાવના

$$= \frac{\binom{16}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{16 \times 15}{2} \times \frac{2}{20 \times 19} = \frac{12}{19}$$

$P(X = 1)$: 1 ખરાબ કેરી પસંદ થાય તેની સંભાવના

$$= \frac{\binom{4}{1}\binom{16}{1}}{\binom{20}{2}} = \frac{4 \times 16 \times 2}{20 \times 19} = \frac{32}{95}$$

અને $P(X = 2)$: 2 ખરાબ કેરી પસંદ થાય તેની સંભાવના

$$= \frac{\binom{4}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{4 \times 3}{2} \times \frac{2}{20 \times 19}$$

$$= \frac{3}{95}$$

આમ, યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે :

$X = x$	0	1	2
$p(x)$	$\frac{12}{19}$	$\frac{32}{95}$	$\frac{3}{95}$

ઉદાહરણ 14 : સંભાવના વિતરણ $p(x) = c\binom{5}{x}$, $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે, તો અચળ c શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $p(x) = c\binom{5}{x}$, $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$p(x)$ એ યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ હોવાથી,

$$p(0) + p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) = 1$$

$$\therefore \quad c\left[\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}\right] = 1$$

$$\therefore \quad c(2^5) = 1$$

$$\therefore \quad 32c = 1$$

$$\therefore \quad c = \frac{1}{32}$$

વળી, પ્રત્યેક x માટે, $p(x) = \binom{5}{x} > 0$

$\therefore$ c ની માંગેલ કિંમત $\frac{1}{32}$ છે.

ઉદાહરણ 15 : અસતત યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના વિતરણ નીચેના કોષ્ટકમાં આવેલું છે :

$X = x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$p(x)$	0.08	0.14	0.19	0.27	0.17	0.09	0.06

(1) યાદચ્છિક ચલ X ની કિંમત ઋણ હોવાની સંભાવના શોધો.

(2) $P(0 \le x < 3)$નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : (1) X ની કિંમત ઋણ હોવાની સંભાવના

$$p(-3) + p(-2) + p(-1) = 0.08 + 0.14 + 0.19 = 0.41$$

(2) $P(0 \le x < 3) = p(0) + p(1) + p(2)$

$$= 0.27 + 0.17 + 0.09$$

$$= 0.53$$

સ્વાધ્યાય 7.3

1. નીચે આપેલા પ્રત્યેક સંભાવના વિતરણ માટે c શોધો :

(1) $p(x) = cx$, $x = 1, 2, 3, 4$

(2) $p(x) = cx^2$, $x = 1, 2, ..., 10$

(3) $p(x) = c \cdot 3^x$, $x = 0, 1, 2, 3$

(4) $p(x) = c\left(\frac{1}{4}\right)^x$, $x = 1, 2, 3$

(5) $p(x) = c\binom{4}{x}$, $x = 0, 1, 2, 3, 4$

2. ચકાસો કે યાદચ્છિક ચલ X માટે નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત વિધેય $p(x)$ સંભાવના વિતરણ છે કે નહિ ?

$p(x) = \frac{2x}{n(n+1)}$, $x = 1, 2, 3, ..., n$

3. X એ યાદચ્છિક રીતે પસંદ થયેલી શાળાના કોઈ પણ દિવસ દરમિયાન અભ્યાસના કલાક દર્શાવે છે. X એ કિંમત x ધારણ કરે તેની સંભાવના નીચે પ્રમાણે છે, જ્યાં k અચળ છે.

$$P(X = x) = \begin{cases} 0.1, & x = 0 \text{ માટે} \\ kx, & x = 1 \text{ અથવા } 2 \text{ માટે} \\ k(5 - x), & x = 3 \text{ અથવા } 4 \text{ માટે} \\ 0, & \text{અન્યથા} \end{cases}$$

(1) kની કિંમત શોધો :

નીચે મુજબના અભ્યાસના કલાકની સંભાવના શોધો :

(2) ઓછામાં ઓછા બે કલાક **(3)** બરાબર બે કલાક **(4)** વધુમાં વધુ બે કલાક

4. બે સમતોલ પાસાને એક વખત ઉછાળવાના પ્રયોગ સાથે સંબંધિત નિદર્શાવકાશ U પર યાદચ્છિક ચલ X નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત છે :

$u \in U$ માટે $X(u) = u$ માંના પૂર્ણાંકોનો સરવાળો. તો યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ મેળવો.

5. એક પેટીમાં આવેલ 4 દડામાં 2 કાળા અને 2 સફેદ દડા છે. બે દડા યાદચ્છિક રીતે પૂરવણી સહિત પસંદ કરવામાં આવે છે. જો X એ પસંદ થયેલ બે દડા પૈકી કાળા દડાની સંખ્યા દર્શાવે તો યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ મેળવો.

6. વીજળીના 10 ગોળાના સમૂહમાં 3 ગોળા ખરાબ છે. 2 ગોળાની પસંદગી યાદચ્છિક રીતે કરવામાં આવે છે. ખરાબ ગોળાની સંખ્યા માટેનું સંભાવના વિતરણ મેળવો.

7. નીચેના કોષ્ટકમાં અસતત યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ આપેલ છે.

$X = x$	0	1	2
$p(x)$	$3c^3$	$4c - 10c^2$	$5c - 1$

જ્યાં $c > 0$.

(1) c **(2)** $P(X < 2)$ તથા **(3)** $P(1 < X \le 2)$ની કિંમત શોધો.

8. આપણે એકસરખી 8 કાગળની ચિઠ્ઠીઓ બનાવીએ. એક ચિઠ્ઠી પર અંક 0, ત્રણ ચિઠ્ઠી પર અંક 1, ત્રણ ચિઠ્ઠી પર અંક 2 તથા એક ચિઠ્ઠી પર અંક 3 લખવામાં આવે છે. આ ચિઠ્ઠીઓને વાળીને પેટીમાં મૂકી મિશ્ર કરવામાં આવે છે. એક ચિઠ્ઠીની યાદચ્છિક પસંદગી કરવામાં આવે છે. જો યાદચ્છિક ચલ X એ ચિઠ્ઠી પરનો અંક દર્શાવે તો Xનું સંભાવના વિતરણ મેળવો.

*

7.5 ગાણિતિક અપેક્ષા

ધારો કે અસતત યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે :

$X = x$	x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_n
$p(x)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$p(x_3)$	...	$p(x_{n-1})$	$p(x_n)$

(i)

જ્યાં પ્રત્યેક x_i માટે $p(x_i) \ge 0$ અને $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$

મધ્યક : ધારો કે યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ (i) મુજબ વ્યાખ્યાયિત છે. X ની **ગાણિતિક અપેક્ષા (Mathematical Expectation)** E(X) વડે દર્શાવાય છે અને તેની વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે છે :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i) \qquad \text{(ii)}$$

યાદચ્છિક ચલ X ની ગાણિતીક અપેક્ષાને X નું અપેક્ષિત મૂલ્ય અથવા X નો મધ્યક પણ કહેવાય છે. E(X) ને μ વડે પણ દર્શાવાય છે. ખરેખર, Xનો મધ્યક એ Xની શક્ય કિંમતોનો ભારિત મધ્યક છે, જ્યાં X જે કિંમત ધારણ કરે તેની સંભાવના એ ભાર છે.

ધારો કે Y = g(X) અસતત યાદચ્છિક ચલનું વાસ્તવિક વિધેય છે. તો Y = g(X) પણ અસતત યાદચ્છિક ચલ થશે અને તેની ગાણિતિક અપેક્ષા નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત થાય.

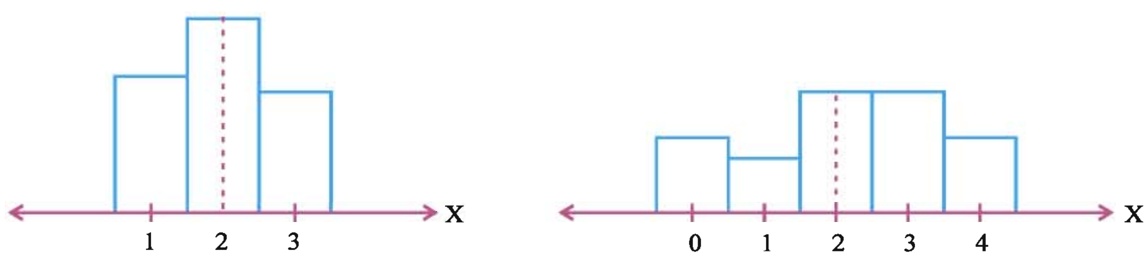
$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\, p(x_i) \qquad \text{(iii)}$$

ઉદાહરણ તરીકે, $g(X) = X^2$ હોય, તો

$$E[g(X)] = E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, p(x_i) \qquad \text{(iv)}$$

યાદચ્છિક ચલ Xનું વિચરણ (Variance) :

આંકડાશાસ્ત્રમાં યાદચ્છિક ચલ Xનો મધ્યક ખાસ ઉપયોગી છે કારણ કે તે સંભાવના વિતરણનો મધ્યભાગ દર્શાવે છે. આમ છતાં ફક્ત મધ્યક એ સંભાવના વિતરણ માટેની પૂરતી માહિતી નથી. આપણે સંભાવના વિતરણના ચલનનું પણ વર્ણન કરવું જોઈએ. સમાન મધ્યક μ = 2 વાળા બે અસતત યાદચ્છિક ચલના સંભાવના વિતરણના સ્તંભાલેખ આકૃતિ 7.2 માં દર્શાવેલ છે. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે તેમના અવલોકનોનું મધ્યકથી ચલન ખૂબ જ જુદું પડે છે.



આકૃતિ 7.2

યાદચ્છિક ચલ X નાં ચલનના એક ખૂબ જ અગત્યના માપને તેનું **વિચરણ** કહે છે. તેને આપણે સંકેત σ_X^2 અથવા V(X) દ્વારા દર્શાવીએ છીએ. જો યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ (i)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનું હોય, તો Xનું **વિચરણ** નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થાય :

$$V(X) = \sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

સૂત્રો (ii) અને (iv) નો ઉપયોગ કરતાં σ_X^2 નું સૂત્ર નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, p(x_i) - \left[\sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i)\right]^2 \qquad \text{(v)}$$

યાદચ્છિક ચલ Xનું પ્રમાણિત વિચલન (Standard Deviation) :

યાદચ્છિક ચલ Xના વિચરણ σ_X^2ના ધન વર્ગમૂળને Xનું પ્રમાણિત વિચલન કહે છે અને તેને સંકેત σ_X અથવા $\sqrt{V(X)}$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

ગાણિતિક અપેક્ષા વિશે કેટલાંક પરિણામો :

ધારો કે યાદચ્છિક ચલ Xની ગાણિતિક અપેક્ષા અને વિચરણ અનુક્રમે E(X) અને σ_X^2 છે. વાસ્તવિક અચલો a, b અને c માટે ધારો કે $Y = aX + b$ અને $Z = aX^2 + bX + c$ બંને X નાં વિધેયો છે. નીચે આપેલાં પરિણામો આપણે સાબિતી આપ્યા વગર સ્વીકારી લઈશું.

$$E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b \tag{vi}$$

$$\sigma_Y^2 = V(Y) = V(aX + b) = a^2\ V(X) = a^2 \sigma_X^2 \tag{vii}$$

$$\sigma_Y = \sqrt{V(Y)} = |\ a\ |\ \sigma_X \tag{viii}$$

$$E(Z) = E(aX^2 + bX + c) = aE(X^2) + bE(X) + c \tag{ix}$$

ઉદાહરણ 16 : યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે :

$X = x$	−2	−1	0	1	2	3
$p(x)$	0.05	0.14	0.23	0.31	0.16	0.11

E(X) અને σ_X શોધો.

ઉકેલ : $E(X) = \Sigma x_i\ p(x_i)$

$= (-2)(0.05) + (-1)(0.14) + (0)(0.23) + (1)(0.31) + (2)(0.16) + (3)(0.11)$

$= -0.10 - 0.14 + 0 + 0.31 + 0.32 + 0.33$

$= 0.72$

$\therefore\ E(X) = 0.72$

$\sigma_X^2 = \sum_i x_i^2\ p(x_i) - [E(X)]^2$

$= \{4(0.05) + 1(0.14) + 0(0.23) + 1(0.31) + 4(0.16) + 9(0.11)\} - (0.72)^2$

$= 2.28 - 0.5184 = 1.7616$

$\therefore\ \sigma_X^2 = 1.7616$ અને

$\sigma_X = \sqrt{1.7616} = 1.3272$

ઉદાહરણ 17 : એક યાદચ્છિક ચલ Xના મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે $E(X) = 5$ અને $\sigma_X = 3$ છે, તો $E(X^2)$, $E((3X + 2)^2)$ શોધો. વધુમાં $2 - 3X$નું પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $E(X) = 5$ અને $\sigma_X = 3$

આપણે જાણીએ છીએ કે, $\sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

$\therefore\ E(X^2) = \sigma_X^2 + [E(X)]^2$

$= 9 + 25$

$E(X^2) = 34$

$E((3X + 2)^2) = E(9X^2 + 12X + 4)$

$= 9E(X^2) + 12E(X) + 4$

$= 9 \cdot 34 + 12 \cdot 5 + 4$

$= 306 + 60 + 4$

$E((3X + 2)^2) = 370$

હવે, $V(2 - 3X) = 3^2V(X) = 9V(X) = 9\ \sigma_X^2 = 9 \cdot 9 = 81$

$\therefore$ $2 - 3X$નું પ્રમાણિત વિચલન $\sqrt{81} = 9$.

કોઈ રમત રમતા બે ખેલાડીઓનું અપેક્ષિત મળતર શૂન્ય હોય તો તે રમતને સમતોલ રમત કહેવાય. જો કોઈ ખેલાડીનું અપેક્ષિત મળતર ધન સંખ્યા હોય તો રમત તે ખેલાડીની તરફેણમાં છે એમ કહેવાય. જો તેનું અપેક્ષિત મળતર ઋણ હોય, તો રમત તે ખેલાડીની વિરુદ્ધમાં છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 18 : એક સમતોલ પાસા ઉછાળવાની એક રમતમાં ભાગ લેનાર ખેલાડીને પાસા પર મળતો પૂર્ણાંક 3 અથવા 4 હોય તો તેના હરીફ કે પ્રતિસ્પર્ધી તરફથી ₹ 10 મળે છે. જો પાસા પર પૂર્ણાંક 1, 2, 5 અથવા 6 મળે, તો ખેલાડીએ તેના હરીફને કેટલી રકમ ચૂકવવી જોઈએ કે જેથી રમત સમતોલ થાય ?

ઉકેલ : પાસા ઉછાળવાની રમતમાં સંકળાયેલ નિદર્શાવકાશ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. આપણે U પર યાદચ્છિક ચલ X નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરીએ :

$$X(u) = \begin{cases} 10 & u = 3, 4 \\ a & u = 1, 2, 5, 6 \end{cases}$$

અહીં a એ ખેલાડીએ તેના હરીફને ચૂકવવાની રકમ રૂપિયામાં દર્શાવે છે.

Xનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ થાય છે :

$X = x$	10	a
$p(x)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$

હવે, $E(X) = 10 \cdot \frac{2}{6} + a \cdot \frac{4}{6}$

$= \frac{4a + 20}{6}$

પાસા ઉછાળવાની રમત સમતોલ હોવાથી $E(X) = 0$.

$\therefore$ $\frac{4a + 20}{6} = 0$

$\therefore$ $4a + 20 = 0$

$\therefore$ $a = -5$

આમ, ખેલાડીએ તેના હરીફને ₹ 5 ચૂકવવા પડે.

સ્વાધ્યાય 7.4

1. બે સમતોલ પાસાને એક વખત ઉછાળવામાં આવે છે. બંને પાસા પર મળતા પૂર્ણાંકોમાં ન્યૂનતમ પૂર્ણાંક એ યાદચ્છિક ચલ X છે. આ અસતત યાદચ્છિક ચલ X માટે સંભાવના વિતરણ, Xની ગાણિતિક અપેક્ષા, વિચરણ તથા પ્રમાણિત વિચલન મેળવો.
2. એક ખેલાડી 3 સમતોલ સિક્કા ઉછાળે છે. જો ત્રણ છાપ આવે તો તે ₹ 500 જીતે છે, જો બે છાપ આવે તો તે ₹ 300 જીતે છે અને એક છાપ આવે તો તે ₹ 100 જીતે છે. બીજી બાજુ તે ત્રણેય કાંટા આવે તો તે ₹ 1500 ગુમાવે છે. ખેલાડીનું અપેક્ષિત મળતર શોધો. આ રમત ખેલાડીની તરફેણમાં છે ?
3. એક યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે :

$X = x$	1	2	3	4	5
$p(x)$	0.1	k	0.2	$3k$	0.3

(1) kની કિંમત શોધો.

(2) મધ્યક તથા વિચરણ શોધો.

4. એક યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે :

$X = x$	-1	0	1	2	3
$p(x)$	0.2	0.1	k	$2k$	0.1

(1) kની કિંમત શોધો.

(2) મધ્યક, વિચરણ તથા પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

5. એક સમતોલ પાસો ઉછાળતાં પાસા પર મળતા અંકોનું વિચરણ શોધો.

6. એક યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે :

$X = x$	-2	-1	0	1	2
$p(x)$	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

(1) E(X) **(2)** V(X) **(3)** E(3X + 2) **(4)** V(3X + 2) શોધો.

7. એક બેકરીના માલિકને તેના ભૂતકાળના અનુભવને આધારે માલૂમ પડે છે કે તેની બેકરીમાં બનાવેલી ચૉકલેટ કેકની સંખ્યાનું કોઈ પણ દિવસનું વેચાણ એક યાદચ્છિક ચલ X છે, જેનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે :

કેકની સંખ્યા $X = x$	0	1	2	3	4	5
$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

પ્રત્યેક કેકના વેચાણ દીઠ તેને ₹ 5 નો નફો થાય છે અને જો વેચાણ ન થાય તો નહિ વેચાયેલી કેક દીઠ તેને ₹ 2 ખોટ થાય છે. જો બેકરીનો માલિક કોઈ એક દિવસે 3 કેકનું ઉત્પાદન કરે તો તે દિવસના તેના નફાનું અપેક્ષિત મૂલ્ય કેટલું થશે ?

8. એક યાદચ્છિક ચલ Xના મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે 10 અને 5 છે. તો $E(X^2)$, $E[X(X + 1)]$, $E\left(\left(\frac{X-10}{5}\right)\right)$ અને $E\left(\left(\frac{X-10}{5}\right)^2\right)$ શોધો.

*

7.6 દ્વિપદી વિતરણ

આપણે આ પ્રકરણના અગાઉના વિભાગોમાં યાદચ્છિક ચલ અને તેના સંભાવના વિતરણનો અભ્યાસ કર્યો. આ પરિચ્છેદમાં આપણે એક વિશિષ્ટ સંભાવના વિતરણ, **દ્વિપદી વિતરણ (Binomial Distribution)**નો અભ્યાસ કરીશું.

દ્વિપદી વિતરણની શોધ સ્વીસ ગણિતશાસ્ત્રી **જેમ્સ બર્નુલી (1654-1705)** એ 1700માં કરી હતી. આથી દ્વિપદી વિતરણને **'બર્નુલી વિતરણ'** પણ કહે છે.

આપણે એક સિક્કાને ઉછાળવાના યાદચ્છિક પ્રયોગનો વિચાર કરીએ. આ સિક્કાને આપણે એકવાર ઉછાળીએ તો પ્રયોગના બે શક્ય પરિણામો 'છાપ' અથવા 'કાંટો' મળે છે. આપણે છાપને **સફળતા (Success)** અને કાંટાને **નિષ્ફળતા (Failure)** કહીશું. આમ, આ પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ $U = \{S, F\}$ થશે, જ્યાં S સફળતા અને F નિષ્ફળતાના સંકેત દર્શાવે છે. ધારો કે S મળવાની સંભાવના p છે અને F મળવાની સંભાવના q છે. એટલે કે $P(\{S\}) = p$ અને $P(\{F\}) = q$. આ પ્રયોગનાં માત્ર બે જ પરિણામો હોવાથી $p + q = 1$ અને તેથી $q = 1 - p$.

ધારો કે સિક્કાને સમાન પરિબળો હેઠળ n વખત ઉછાળવામાં આવે છે. બીજી રીતે કહીએ તો સમાન પરિબળો હેઠળ સિક્કો ઉછાળવાના યાદચ્છિક પ્રયોગનું n વખત પુનરાવર્તન કરવામાં આવે છે. આ પ્રયોગના n વખત થતા પુનરાવર્તનને આપણે n પ્રયત્નો પણ કહી શકીએ. પ્રયોગનું પુનરાવર્તન સમાન પરિબળો હેઠળ થતું હોવાથી n પૈકીના દરેક પ્રયત્ને સફળતા 'S' મળવાની સંભાવના સમાન એટલે કે p રહેશે. આ પ્રકારના ગુણધર્મ ધરાવતા યાદચ્છિક પ્રયોગના n પ્રયત્નોને **બર્નુલી પ્રયત્નો** કહેવામાં આવે છે. બર્નુલી પ્રયત્નો આપણે નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

બર્નુલી પ્રયત્નો : **ધારો કે એક યાદચ્છિક પ્રયોગનાં બે શક્ય પરિણામો સફળતા (S) અને નિષ્ફળતા (F) છે. જો આ પ્રયોગના n વખતના પુનરાવર્તન પૈકીના દરેક પ્રયત્ને સફળતા મળવાની સંભાવના p $(0 < p < 1)$ અચળ હોય, તો આવા પ્રયત્નોને બર્નુલી પ્રયત્નો કહે છે.**

બર્નુલી પ્રયત્નો નીચે મુજબના ગુણધર્મો ધરાવે છે :

(1) દરેક બર્નુલી પ્રયત્નમાં સફળતા (S) મળવાની સંભાવના કે નિષ્ફળતા (F) મળવાની સંભાવના અચળ હોય છે.

(2) બર્નુલી પ્રયત્નો પરસ્પર નિરપેક્ષ હોય છે.

(3) જો કોઈ પણ બર્નુલી પ્રયત્નમાં સફળતા (S) મળવાની સંભાવના p $(0 < p < 1)$ હોય, તો નિષ્ફળતા (F) મળવાની સંભાવના $q = 1 - p$ થશે.

ધારો કે જેની સફળતાની સંભાવના p હોય તેવા યાદચ્છિક પ્રયોગના બર્નુલી પ્રયત્નોની શ્રેણીમાં X સફળતાની સંખ્યા દર્શાવે છે. ધારો કે યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ નીચેના સૂત્ર દ્વારા વ્યાખ્યાયિત થાય છે :

$$p(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, x = 0, 1, 2, ... n \quad \text{(i)}$$

જ્યાં $0 < p < 1$ અને $q = 1 - p$

યાદચ્છિક ચલ Xના સૂત્ર (i) દ્વારા મળતા સંભાવના વિતરણને દ્વિપદી વિતરણ કહે છે અને યાદચ્છિક ચલ Xને દ્વિપદી યાદચ્છિક ચલ કહે છે. ધન પૂર્ણાંક n અને સફળતા Sની સંભાવના p ને દ્વિપદી વિતરણના પ્રચલો કહેવામાં આવે છે.

$x = 0, 1, 2, ..., n$ માટે (i) દ્વારા મળતાં સૂત્ર $p(x)$ ને $(p + q)^n$ના દ્વિપદી વિતરણ દ્વારા મેળવી શકાય. $(p + q)^n$ ના વિતરણનું x મું પદ $\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ થશે અને તે સૂત્ર (i) માં દર્શાવેલ છે. આથી યાદચ્છિક ચલ Xને દ્વિપદી વિતરણ કહે છે. સ્પષ્ટ છે કે, બધા પ્રયત્નોની સંભાવનાનો સરવાળો

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = (p + q)^n = 1^n = 1 \text{ થાય છે.}$$

દ્વિપદી વિતરણ નીચેની પરિસ્થિતિમાં ઉદ્ભવે છે : તકની રમત (ઉદાહરણ તરીકે પાસો ફેંકવાની રમત), ગુણવત્તાની ચકાસણી (ઉદાહરણ તરીકે ખામીવાળી ઉત્પાદિત વસ્તુની ગણતરી), મતનો અંદાજ કાઢવો (ઉદાહરણ તરીકે સમયમાં કરેલ ફેરફાર માટે કેટલા કર્મચારી તરફેણમાં છે), તબીબીશાસ્ત્ર (ઉદાહરણ તરીકે નવી શોધાયેલી દવાથી કેટલા દર્દી સાજા થયા) વગેરે.

પરિણામ : પ્રચલો n અને p વાળા દ્વિપદી યાદચ્છિક ચલ Xના મધ્યક અને વિચરણ અનુક્રમે np અને npq થાય.

ઉદાહરણ 19 : એવો દાવો કરવામાં આવે છે કે સૂર્યપ્રકાશથી ચાલતાં કુલ ઉપકરણોમાંથી 60 % ઉપકરણો એવાં છે કે તે બેસાડવાથી વપરાશનું બીલ ઓછામાં ઓછું ત્રીજા ભાગનું ઘટી જાય છે.

(1) પાંચ ઉપકરણોમાંથી ચાર ઉપકરણો

(2) પાંચ ઉપકરણોમાંથી ઓછામાં ઓછા ચાર ઉપકરણો બેસાડવાથી વીજવપરાશનું બીલ ઓછામાં ઓછું ત્રીજા ભાગનું ઘટી જાય તેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે યાદચ્છિક ચલ X એ સૂર્યપ્રકાશથી ચાલતા 5 ઉપકરણોમાંથી પસંદ થયેલાં ઉપકરણોની સંખ્યા દર્શાવે છે. આ ઉપકરણો એવાં છે કે તેમને બેસાડવાથી વપરાશનું બીલ ઓછામાં ઓછું ત્રીજા ભાગનું ઘટી જાય છે.

અહીં X એ દ્વિપદી યાદચ્છિક ચલ છે જ્યાં પ્રચલો $n = 5$ અને $p = 0.60$ છે. Xનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ થશે :

$$p(x) = \binom{5}{x}\left(\frac{6}{10}\right)^x\left(\frac{4}{10}\right)^{5-x}, x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

(1) પાંચ ઉપકરણોમાંથી ચાર ઉપકરણો બેસાડવાથી વપરાશનું બીલ ઓછામાં ઓછું ત્રીજા ભાગનું ઘટી જાય તેની સંભાવના $p(x)$ દ્વારા $x = 4$ મૂકવાથી મળે.

$\therefore \quad p(4) = \binom{5}{4}\left(\frac{6}{10}\right)^4\left(\frac{4}{10}\right)^{5-4}$

$= 5(0.6)^4\ (0.4)$

$= 0.2592$ **(i)**

(2) પાંચ ઉપકરણોમાંથી ઓછામાં ઓછા ચાર ઉપકરણો બેસાડવાથી વપરાશનું બીલ ઓછામાં ઓછું ત્રીજા ભાગનું ઘટી જાય તેની સંભાવના $p(4) + p(5)$ થશે. હવે,

$\therefore \quad p(5) = \binom{5}{5}\left(\frac{6}{10}\right)^5\left(\frac{4}{10}\right)^{5-5}$

$= (0.6)^5$

$= 0.07776$

આમ, માંગેલી સંભાવના $= p(4) + p(5)$

$= 0.2592 + 0.07776$ **((i) પરથી)**

$= 0.337$

ઉદાહરણ 20 : એક દ્વિપદી વિતરણના મધ્યક અને વિચરણ અનુક્રમે 3 અને 2 છે. યાદચ્છિક ચલની કિંમત 2 અથવા 2થી ઓછી હોય તેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે n અને p પ્રચલવાળા દ્વિપદી વિચરણ માટે

મધ્યક $np = 3$ **(i)**

અને વિચરણ $npq = 2$ **(ii)**

ભાગાકાર કરતાં, $\frac{npq}{np} = \frac{2}{3}$

$\therefore \quad q = \frac{2}{3}$. તેથી, $p = 1 - q = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$np = 3$ માં p ની કિંમત મૂકતાં, $n \cdot \frac{1}{3} = 3$. તેથી, $n = 9$

$\therefore$ દ્વિપદી યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે :

$p(x) = \binom{9}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{9-x},\ x = 0, 1, 2, \ldots, 9$

યાદચ્છિક ચલ X ની કિંમત 2 અથવા 2થી ઓછી હોય તેની સંભાવના $P(x \le 2)$ થાય.

$P(x \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$= p(0) + p(1) + p(2)$

$= \binom{9}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^9 + \binom{9}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^8 + \binom{9}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^7$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^7\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 9 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{9 \cdot 8}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^7\left[\frac{4}{9} + 2 + 4\right]$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^7 \frac{58}{9} = \left(\frac{2^7}{3^9}\right)58 = \frac{7424}{19683}$

સ્વાધ્યાય 7.5

1. એક શિક્ષણશાસ્ત્રી દાવો કરે છે કે ઉચ્ચતર માધ્યમિક પરીક્ષામાં ઉત્તીર્ણ થનારા વિદ્યાર્થીઓ પૈકી 80 ટકા વિદ્યાર્થીઓ યુનિવર્સિટી શિક્ષણ માટે કૉલેજમાં પ્રવેશ મેળવે છે. ઉચ્ચતર માધ્યમિક પરીક્ષામાં ઉત્તીર્ણ થયેલા 10 વિદ્યાર્થીઓ પૈકી (1) 5 વિદ્યાર્થીઓ અને (2) 8 થી વધુ વિદ્યાર્થીઓ કૉલેજમાં પ્રવેશ મેળવે તેની સંભાવના કેટલી ?
2. અમુક પ્રકારની દવા ઉંદરોને આપવાથી 40 ટકા ઉંદરો ઉત્તેજિત થાય છે એવું દવાના પરીક્ષણ પ્રયોગ દ્વારા માલૂમ પડે છે. તો 5 ઉંદરોને આ દવા આપવાથી (1) ત્રણ અને (2) બધા જ ઉંદરો ઉત્તેજિત થાય તેની સંભાવના કેટલી ?
3. પાશ્ચાત્ય દેશના એક શહેરમાં પરિણિત વ્યક્તિઓ પૈકી 70 ટકા વ્યક્તિઓ છૂટાછેડા લે છે. 4 પરિણિત વ્યક્તિઓ પૈકી ઓછામાં ઓછી ત્રણ વ્યક્તિઓ છૂટાછેડા લે તેની સંભાવના શોધો.
4. હરિત નિશાન તાકવાની હરીફાઈમાં ભાગ લે છે. તેની નિશાન તાકવાની સંભાવના 0.2 છે. 5 વખત નિશાન તાકવાના પ્રયોગમાં તે બરાબર ત્રણ વખત નિશાન તાકી શકશે તેની સંભાવના કેટલી ?
5. એક દ્વિપદી યાદચ્છિક ચલ X ના મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે 8 અને 2 છે. તો Xના સંભાવના વિતરણના પ્રચલો શોધો અને $P(X = 0)$ અને $P(1 \le X \le 3)$ની કિંમત મેળવો.
6. 500 પાનાંના એક પુસ્તકમાં 50 મુદ્રણદોષ છે. આ પુસ્તકમાંથી 4 પાનાંની યાદચ્છિક પસંદગીમાં વધુમાં વધુ 2 મુદ્રણદોષ હોય તેની સંભાવના શોધો.
7. દ્વિચક્રી વાહન ચલાવતી 12 વ્યક્તિઓમાંથી 4 વ્યક્તિઓ પોતાની સાથે ડ્રાઇવિંગ લાઇસન્સ રાખતા હોતા નથી. જો ટ્રાફિક પોલીસ યાદચ્છિક રીતે 4 દ્વિચક્રી વાહન ચલાવતા વ્યક્તિઓની તપાસ કરે ત્યારે નીચે મુજબની સંભાવના શોધો : (1) 1 વ્યક્તિ પાસે ડ્રાઇવિંગ લાઇસન્સ ન હોય. (2) ઓછામાં ઓછી 2 વ્યક્તિ પાસે ડ્રાઇવિંગ લાઇસન્સ ન હોય.
8. નિશાન તાકવાની હરીફાઈમાં એક માણસ નિશાન તાકવાની સંભાવના $\frac{2}{5}$ છે. જો તે 5 વખત નિશાન તાકે તો માગ્યા પ્રમાણેની સંભાવના શોધો : (1) ઓછામાં ઓછી બે વખત નિશાન બરાબર લાગે. (2) વધુમાં વધુ બે વખત નિશાન બરાબર લાગે.
9. એક ગુણનિયંત્રક ઈજનેર 20 ગણનયંત્રોના જૂથમાં 3 ગણનયંત્રો યાદચ્છિક રીતે તપાસે છે. આવા જૂથમાં 4 ગણનયંત્રો થોડીક ખામીવાળા છે. માગ્યા મુજબની સંભાવના શોધો : (1) ખામીવાળા ગણનયંત્ર પસંદ ન થાય. (2) 1 ખામીવાળું ગણનયંત્ર પસંદ થાય. (3) ઓછામાં ઓછા બે ગણનયંત્ર ખામીવાળા પસંદ થાય.
10. ખામીવાળા બૉલ્ટ પસંદ થવાની સંભાવના 0.1 છે. કુલ 400 બૉલ્ટમાંથી ખામીવાળા બૉલ્ટ પસંદ થાય તે વિતરણ માટે (1) મધ્યક (2) વિચરણ શોધો.

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 21 : ધારો કે E અને F નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે જ્યાં $P(E) < P(F)$. જો $P(E \cap F) = \frac{1}{12}$ અને $P(E' \cap F') = \frac{1}{2}$, તો $P(E)$ અને $P(F)$ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ છે કે, $P(E \cap F) = \frac{1}{12}$ અને $P(E' \cap F') = \frac{1}{2}$.

E અને F નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોવાથી, E' અને F' પણ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ થશે.

$P(E \cap F) = \frac{1}{12}$ હોવાથી $P(E)\,P(F) = \frac{1}{12}$ અને

$P(E' \cap F') = \frac{1}{2}$ હોવાથી $P(E')\,P(F') = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad [1 - P(E)]\,[1 - P(F)] = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad 1 - P(E) - P(F) + P(E)\,P(F) = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad 1 - P(E) - P(F) + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad P(E) + P(F) = 1 + \frac{1}{12} - \frac{1}{2}$

$\therefore \quad P(E) + P(F) = \frac{7}{12}$

આપણે જાણીએ છીએ કે જે સમીકરણનાં બીજ a અને b હોય તેવું દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ થાય.

$\therefore \quad$ P(E) અને P(F) બીજ ધરાવતું સમીકરણ

$x^2 - [P(E) + P(F)]x + P(E)\ P(F) = 0$

$\therefore \quad x^2 - \frac{7}{12}x + \frac{1}{12} = 0$

$\therefore \quad 12x^2 - 7x + 1 = 0$

$\therefore \quad (3x - 1)(4x - 1) = 0$

$\therefore \quad x = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$

$P(E) < P(F)$ આપેલ હોવાથી, $P(E) = \frac{1}{4}$ અને $P(F) = \frac{1}{3}$.

ઉદાહરણ 22 : એક સમતોલ સિક્કાને કેટલી વખત ઉછાળવાથી ઓછામાં ઓછી એક વખત છાપ મળે તેની સંભાવના ઓછામાં ઓછી 0.95 થાય ?

ઉકેલ : ધારો કે માંગેલ શરત અનુસાર સમતોલ સિક્કાને n વખત ઉછાળવામાં આવે છે. યાદચ્છિક ચલ X એ સિક્કાને n વખત ઉછાળવાથી મળતી છાપની સંખ્યા દર્શાવે છે. અહીં ચલ X એ દ્વિપદી યાદચ્છિક ચલ થશે જ્યાં પ્રચલ n અને $p = \frac{1}{2}$ છે. X નું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ થશે :

$$p(x) = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{n-x},\ x = 0, 1, 2, ..., n$$

હવે, P(સિક્કા પર ઓછામાં ઓછી એક વખત છાપ મળે) $= P(X \geq 1)$

$= 1 - P(X = 0)$

$= 1 - p(0)$

$= 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{n-0}$

$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

આપેલ છે કે, P(સિક્કા પર ઓછામાં ઓછી એક વખત છાપ મળે) ≥ 0.95

$\therefore \quad 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0.95$

$\therefore \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0.05$

$\therefore \quad \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{20}$

$\therefore \quad 2^n \geq 20$

$\therefore \quad n \geq 5$

$\therefore \quad n$ ની ન્યૂનતમ કિંમત 5 થાય.

આમ, આપેલ શરત અનુસાર સમતોલ સિક્કાને ઓછામાં ઓછી 5 વખત ઉછાળવો પડે.

ઉદાહરણ 23 : એક યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શાવકાશ $U = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ છે. ઘટનાઓ A, B, C નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરેલ છે :

$A = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0)\}$, $B = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0)\}$, $C = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1)\}$

બતાવો કે ઘટનાઓ A, B, C જોડયુક્ત નિરપેક્ષ છે, પરંતુ પરસ્પર નિરપેક્ષ નથી.

ઉકેલ : અહીં, $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$A \cap B = B \cap C = A \cap C = \{(0, 0, 0)\} = A \cap B \cap C$

$\therefore \quad P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A \cap B \cap C)$

હવે, $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)\ P(B)$

$P(B \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(B)\ P(C)$

$P(A \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)\ P(C)$

$\therefore$ A, B, C જોડયુક્ત નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.

પરંતુ $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)\ P(B)\ P(C)$

$\therefore$ A, B, C પરસ્પર નિરપેક્ષ ઘટનાઓ નથી.

નોંધ : ચતુષ્ફલક OABC ના ચાર શિરોબિંદુઓમાંથી જો એક બિંદુ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે તો નિદર્શાવકાશ

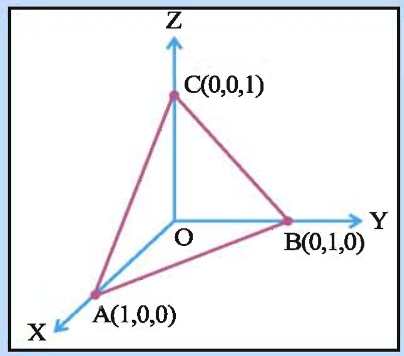
$U = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ થશે.

ઘટના A : પસંદ થયેલ શિરોબિંદુ X-અક્ષ પર હોય.

ઘટના B : પસંદ થયેલ શિરોબિંદુ Y-અક્ષ પર હોય.

ઘટના C : પસંદ થયેલ શિરોબિંદુ Z-અક્ષ પર હોય.

તો ઘટનાઓ A, B, C ઉદાહરણ 23 મુજબની થશે.



સ્વાધ્યાય 7

1. એક પેટીમાં 1 થી 10 ક્રમાંક ધરાવતાં 10 પત્તાં મૂકવામાં આવે છે અને તેને બરાબર મિશ્ર કરવામાં આવે છે. આ પેટીમાંથી એક પત્તું યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. જો પસંદ થયેલ પત્તાં પરનો અંક 3 થી વધુ છે તેમ આપેલું હોય તો તે યુગ્મ અંક હોય તેની સંભાવના શોધો.
2. એક દંપતીને બે બાળકો છે. માગ્યા મુજબની સંભાવના શોધો : (1) એક બાળક છોકરો હોય તેમ આપેલ હોય ત્યારે બંને બાળકો છોકરાઓ હોય અને (2) પ્રથમ બાળક છોકરો હોય તેમ આપેલ હોય ત્યારે બંને બાળકો છોકરાઓ હોય.
3. એક પેટીમાં 10 કાળા અને 5 સફેદ દડા છે. એક પછી એક પેટીમાંથી બે દડા પૂરવણી સિવાય પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ થયેલા બંને દડા કાળા હોય તેની સંભાવના કેટલી થાય ?
4. એક પેટીમાં 4 લાલ અને 7 ભૂરા રંગના દડા છે. બે દડા પૂરવણી સહિત પસંદ કરવામાં આવે છે. માંગેલ સંભાવના શોધો : (1) બંને દડા લાલ રંગના હોય (2) બંને દડા ભૂરા રંગના હોય (3) એક લાલ અને બીજો ભૂરા રંગનો દડો પસંદ થાય.

5. A પાંચ પ્રયત્નોમાંથી ચાર વખત નિશાન તાકી શકે છે, B ચાર પ્રયત્નોમાંથી ત્રણ વખત નિશાન તાકી શકે છે અને C ત્રણ પ્રયત્નોમાંથી બે વખત નિશાન તાકી શકે છે. નીચે પ્રમાણેની સંભાવના શોધો :

(1) A, B, C ત્રણે નિશાન તાકી શકે. (2) B, C નિશાન તાકી શકે પરંતુ A નિષ્ફળ જાય.

(3) A, B અને C પૈકી ગમે તે બે નિશાન તાકી શકે. (4) ત્રણેયમાંથી કોઈ પણ નિશાન ન તાકી શકે.

6. એક વર્ષના સમયગાળા માટે વાહનોનો વીમો ઉતારતી એક સામાન્ય વીમાકંપની તેના વીમેદારોનું નીચેના ત્રણ પરસ્પર નિવારક સમૂહોમાં વર્ગીકરણ કરે છે :

સમૂહ T_1 : અતિશય જોખમી પ્રકૃતિવાળા

સમૂહ T_2 : જોખમી પ્રકૃતિવાળા

સમૂહ T_3 : ઓછા જોખમી પ્રકૃતિવાળા

ભૂતકાળના અનુભવને આધારે કંપનીને માલૂમ પડે છે કે તેના વીમેદારો પૈકીના 30 % સમૂહ T_1 માં, 50 % સમૂહ T_2 માં અને બાકીના સમૂહ T_3 માં સમાવિષ્ટ છે. જો સમૂહ T_1, T_2 અને T_3 માં સમાવિષ્ટ હોય તેવા વીમેદારોને વીમાના વર્ષમાં અકસ્માત નડે તેની સંભાવના અનુક્રમે 0.30, 0.15 અને 0.05 હોય, તો એક વર્ષનો વીમો ધરાવતાં વીમેદારોને અકસ્માત નડે તેનું પ્રમાણ કેટલું ? જો યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ વીમેદારને અકસ્માત ન નડ્યો હોય તો તે T_2 સમૂહનો સભ્ય હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

7. રાજેશ પાસો ઉછાળવાની રમત રમવા માટે સંમત થાય છે. જો પાસા પરનો ક્રમાંક 1 અથવા 2 આવે તો તે ₹ 2 ગુમાવે છે. જો પાસા પરનો ક્રમાંક 3 અથવા 4 અથવા 5 આવે તો તે ₹ 5 મેળવે છે અને જો ક્રમાંક 6 આવે તો તે ₹ 10 મેળવે છે. જો રાજેશને મળતી રકમને આપણે યાદચ્છિક ચલ X લઈએ તો Xનું સંભાવના વિતરણ મેળવો.

8. એક યાદચ્છિક ચલ X એ 1 થી 100 પૂર્ણાંકમાંથી કોઈ પણ એક પૂર્ણાંક ધારણ કરે તેની સંભાવના સમાન છે : $E(X)$, $E(X^2)$ અને σ_X^2 શોધો.

9. નવ સમતોલ સિક્કાને એક સાથે એક વખત ઉછાળવામાં આવે છે. નીચે પ્રમાણેની સંભાવના શોધો :

(1) ચાર છાપ આવે અને (2) ઓછામાં ઓછી છ છાપ આવે.

10. દ્વિપદી વિતરણનું સંભાવના વિધેય આ પ્રમાણે છે : $p(x) = \binom{6}{x} p^x q^{6-x}$, $x = 0, 1, 2, ..., 6$.

જો $3p(2) = 2p(3)$ તો pની કિંમત શોધો.

11. જો દ્વિહાર નિશ્ચાયકનો દરેક ઘટક 0 અથવા 1 હોય તો નિશ્ચાયકની કિંમત ધન થાય તેની સંભાવના કેટલી ? (નિશ્ચાયકનો કોઈ પણ ઘટક સ્વતંત્ર રીતે પસંદ કરી શકાય છે.)

12. એક ભોજનાલયમાં A અને B એમ બે પ્રકારનાં વિશિષ્ટ ભોજન પીરસવામાં આવે છે. ભોજનાલયના ગ્રાહકોમાં 60 % પુરુષો અને 40 % સ્ત્રીઓ હોય છે. 80 % પુરુષો A પ્રકારનું ભોજન મંગાવે છે જ્યારે બાકીના પુરુષો B પ્રકારનું ભોજન મંગાવે છે. 70 % સ્ત્રીઓ B પ્રકારનું ભોજન મંગાવે છે જ્યારે બાકીની સ્ત્રીઓ A પ્રકારનું ભોજન મંગાવે છે. ભોજનાલયે બંને પ્રકારનું ભોજન (A થી B) કેટલા પ્રમાણમાં તૈયાર કરવું જોઈએ ?

13. એક રેલવે રિઝર્વેશન કાર્યાલયમાં બે કારકુન રિઝર્વેશન ફોર્મની ચકાસણી કરે છે. પ્રથમ કારકુન સરેરાશ 55 % ફૉર્મની ચકાસણી કરે છે જ્યારે બાકીના ફોર્મની ચકાસણી બીજો કારકુન કરે છે. પ્રથમ કારકુનની ફોર્મ ચકાસણીમાં ભૂલનું પ્રમાણ 0.03 હોય છે જ્યારે બીજા કારકુનની ફોર્મ ચકાસણીમાં ભૂલનું પ્રમાણ 0.02 છે. દિવસ દરમિયાન ચકાસણી થયેલ ફોર્મમાંથી એક ફોર્મ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે અને માલૂમ પડ્યું કે તેમાં ચકાસણી દરમિયાન ભૂલ થઈ છે. આ ભૂલ બીજા કારકુનથી થઈ હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

14. એક સમતોલ સિક્કાને બે વખત ઉછાળવાનો પ્રયોગ કરવામાં આવે છે. નીચે મુજબની ઘટનાઓ વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે :

ઘટના A : પ્રથમ પ્રયત્નમાં છાપ મળે.

ઘટના B : બીજા પ્રયત્નમાં છાપ મળે.

ઘટના C : બંને પ્રયત્નમાં સરખું પરિણામ મળે.

ઘટનાઓ A, B, C જોડયુક્ત નિરપેક્ષ છે, પરંતુ પરસ્પર નિરપેક્ષ નથી તેમ બતાવો.

15. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

વિભાગ A : (1 ગુણ)

(1) બરાબર ચીપેલાં 52 પત્તાના ઢગમાંથી એક પછી એક બે પત્તાં પસંદ કરવામાં આવે છે. જો આ પસંદગી પૂરવણી વગર કરવામાં આવે તો પસંદ થયેલ બંને પત્તાં એક્કા હોય તેની સંભાવના ...... છે. ☐

(a) 0.0045 (b) 0.0385 (c) 0.045 (d) 0.0059

(2) એક ગોળાકાર ચક્ર પર 1 થી 20 અંક અંકિત કરેલા છે. આ ચક્રને બે વખત ગોળ ફેરવવામાં આવે છે. બંને વખત અંક 13 આવે તેની સંભાવના ...... છે. ☐

(a) $\frac{1}{20}$ (b) $\frac{1}{40}$ (c) $\frac{1}{400}$ (d) $\frac{1}{200}$

(3) ધારો કે A અને B ઘટનાઓ છે. જ્યાં $P(A) = 0.4$, $P(A \cup B) = 0.7$ અને $P(B) = p$. જો A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય, તો pની કિંમત ...... છે. ☐

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{5}{6}$

(4) બે સમતોલ સિક્કાને ઉછાળવામાં આવે છે. જો પ્રથમ સિક્કા પર છાપ આવે ત્યારે બીજા સિક્કા પર પણ છાપ આવે તેની સંભાવના ...... છે. ☐

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{8}$ (d) 1

(5) ગણિતનો એક પ્રશ્ન ત્રણ વિદ્યાર્થીઓ A, B, C ને આપવામાં આવે છે. A, B, C પ્રશ્ન ઉકેલી શકે તેની સંભાવના અનુક્રમે $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ અને $\frac{1}{4}$ છે. પ્રશ્ન ઉકેલી શકાય તેની સંભાવના ...... છે. ☐

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{1}{3}$

(6) એક પાસાને 5 વખત ઉછાળવામાં આવે છે. અયુગ્મ અંક આવે તેને સફળતા ગણવામાં આવે તો આ યાદૃચ્છિક ચલના વિતરણનું વિચરણ ...... છે. ☐

(a) $\frac{8}{3}$ (b) $\frac{3}{8}$ (c) $\frac{4}{5}$ (d) $\frac{5}{4}$

(7) વ્યક્તિ A સાચું બોલે તેની સંભાવના $\frac{4}{5}$ છે અને વ્યક્તિ B સાચું બોલે તેની સંભાવના $\frac{3}{4}$ છે. કોઈ પણ ઘટના વિશે બોલવાનું હોય ત્યારે બંને વ્યક્તિઓનો અભિપ્રાય વિરોધાભાસી હોય તેની સંભાવના ...... છે. ☐

(a) $\frac{7}{20}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) $\frac{3}{20}$ (d) $\frac{4}{5}$

(8) જો A અને B એવી ઘટનાઓ હોય જ્યાં, $P(A) > 0$ અને $P(B) \neq 1$, તો $P(A \mid B') =$ ...... ☐

(a) $1 - P(A \mid B')$ (b) $1 - P(A \mid B)$ (c) $\frac{P(A')}{P(B)}$ (d) $1 - P(A' \mid B')$

(9) વિદ્યાર્થી તરવૈયો ન હોય તેની સંભાવના $\frac{4}{5}$ છે. 5 વિદ્યાર્થીઓમાંથી 4 વિદ્યાર્થીઓ તરવૈયા હોય તેની સંભાવના ...... છે.

(a) $\left(\frac{1}{5}\right)^3$ (b) $4\left(\frac{1}{5}\right)^4$ (c) ${}_5C_4\left(\frac{4}{5}\right)^4$ (d) $\left(\frac{4}{5}\right)^4$

(10) ધારો કે યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે :

$X = x$	0	1	2	3
$p(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

$E(2X + 3)$ની કિંમત ...... છે.

(a) $\frac{3}{2}$ (b) 1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 6

વિભાગ B : (2 ગુણ)

(11) એક ચોક્કસ પ્રકારની દવાથી દર્દીના રોગના લક્ષણમાં ફેર પડે છે કે નહિ તેનો અભ્યાસ કરવામાં આવ્યો. અભ્યાસનું પરિણામ નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે :

	ફેર પડે છે.	ફેર પડતો નથી.	કુલ
દવા સાથે	270	530	800
દવા વગર	120	280	400
કુલ	390	810	1200

જો દર્દીને દવા આપવામાં આવેલ હોય તેમ આપેલ હોય ત્યારે તેના રોગના લક્ષણમાં ફેર પડ્યો હોય તેની સંભાવના કેટલી થાય ?

(a) 0.4375 (b) 0.225 (c) 0.3375 (d) 0.3205

(12) પ્રશ્ન 11ના કોષ્ટકનો ઉપયોગ કરીને નીચે મુજબની સંભાવના શોધો : દર્દીના રોગના લક્ષણમાં ફેર પડે છે તેમ આપેલ હોય ત્યારે દર્દીને દવા આપવામાં આવી હોય તેની સંભાવના શોધો.

(a) 0.225 (b) 0.667 (c) 0.792 (d) 0.692

(13) એક પેટીમાં એક સરખા માપની ચાર લાલ, બે સફેદ અને ત્રણ લીલા રંગની લખોટીઓ છે. પેટીમાંથી એક પછી એક બે લખોટીઓ પસંદ કરવામાં આવે છે. (પૂરવણી વગર). પસંદ થયેલી બંને લખોટીઓ સરખા રંગની હોય તેની સંભાવના કેટલી થાય ?

(a) 0.67 (b) 0.5 (c) 0.14 (d) 0.28

(14) એક કંપનીને ત્રણ ઉત્પાદન સ્થળો છે. ઉત્પાદન સ્થળ A માં 30 % ઉત્પાદન થાય છે, B સ્થળે 50 % ઉત્પાદન થાય છે જ્યારે C સ્થળે બાકીનું ઉત્પાદન થાય છે. ધારો કે A, B, C સ્થળે ઉત્પાદિત વસ્તુઓમાં અનુક્રમે 1 %, 4 % અને 3 % ખામીવાળી વસ્તુઓનું ઉત્પાદન થાય છે. કુલ ઉત્પાદિત વસ્તુઓમાંથી ગમે તે એક વસ્તુ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. આ વસ્તુનું ઉત્પાદન B સ્થળે થયું હોય અને તે ખામીવાળી હોય તેની સંભાવના શોધો.

(a) 0.5 (b) 0.2 (c) 0.02 (d) 0.04

(15) જો દ્વિપદી વિતરણના યાદચ્છિક ચલ Xનો મધ્યક અને વિચરણ અનુક્રમે 4 અને 2 હોય, તો $P(X = 1) =$ ......

(a) $\frac{1}{16}$ (b) $\frac{1}{8}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{32}$

(16) જો બે ઘટનાઓ A અને B એવી હોય કે જ્યાં $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A \mid B) = \frac{1}{2}$, $P(B \mid A) = \frac{2}{3}$, તો $P(B) =$ ......

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{2}{3}$

(17) જો બે ઘટનાઓ A અને B એવી હોય કે જ્યાં $P(A') = 0.3$, $P(B) = 0.5$ અને $P(A \cap B) = 0.3$, તો $P(B \mid A \cup B') =$ ......

(a) 0.375 (b) 0.32 (c) 0.31 (d) 0.28

(18) જો દ્વિપદી વિતરણના પ્રચલો $n = 5$ અને $p = 0.30$ હોય, તો મધ્યક ...... અને વિચરણ .... હોય.

(a) 1.5, 1.5 (b) 1.5, 1.05 (c) 1.5, 1.40 (d) 1.5, 1.15

વિભાગ C : (3 ગુણ)

(19) એક કંપનીને ત્રણ ઉત્પાદન સ્થળો છે. ઉત્પાદન સ્થળ A માં 30 % ઉત્પાદન થાય છે, B સ્થળે 50 % ઉત્પાદન થાય છે, C સ્થળે 20 % ઉત્પાદન થાય છે. ધારો કે A, B, C સ્થળે ઉત્પાદિત વસ્તુઓમાં અનુક્રમે 1 %, 4 % અને 3 % ખામીવાળી વસ્તુઓનું ઉત્પાદન થાય છે. કુલ ઉત્પાદિત વસ્તુઓમાંથી ગમે તે એક વસ્તુને યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ થયેલ વસ્તુ ખામીવાળી હોય તેની સંભાવના કેટલી થાય ?

(a) 0.029 (b) 0.29 (c) 0.025 (d) 0.08

(20) કોઈ પણ પ્રયોગમાં પ્રથમ પ્રયત્ને ઘટના Aનો ઉદ્ભવ થાય તેની સંભાવના 0.4 છે. આ પ્રયોગના ત્રણ નિરપેક્ષ પ્રયત્નોમાં ઓછામાં ઓછી એક વખત ઘટના A ઉદ્ભવે તેની સંભાવના ...... થાય.

(a) 0.936 (b) 0.784 (c) 0.904 (d) 0.874

(21) યાદૃચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે :

$X = x$	0	1	2	3
$p(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

$g(X) = 2X + 3$નું વિચરણ ..... છે.

(a) 6 (b) 36 (c) 4 (d) 8

વિભાગ D : (4 ગુણ)

(22) યાદૃચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે :

$X = x$	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(x)$	0.15	0.23	0.12	0.10	0.20	0.08	0.07	0.05

ઘટના E = {X એ અવિભાજ્ય સંખ્યા હોય} અને ઘટના $F = \{X < 4\}$, હોય તો $P(E \cup F) =$ ......

(a) 0.35 (b) 0.77 (c) 0.87 (d) 0.50

(23) યાદૃચ્છિક ચલ X એ બધી જ અનૃણ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ ધરાવે છે. જો યાદૃચ્છિક ચલ X કિંમત r ધારણ કરે તેની સંભાવના α^r $(0 < \alpha < 1)$ના સમપ્રમાણમાં હોય, તો $P(X = 0) =$ ......

(a) $1 - \alpha$ (b) α (c) $\frac{\alpha}{2}$ (d) α^2

(24) યાદચ્છિક ચલ Xનો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે 10 અને 5 છે. યોગ્ય જોડ શોધો.

A		B	
(i)	$E(X^2)$	(p)	0
(ii)	$E(X(X+1))$	(q)	135
(iii)	$E\left(\left(\frac{X-10}{5}\right)\right)$	(r)	125
(iv)	$E\left(\left(\frac{X-10}{5}\right)^2\right)$	(s)	1

(a) (i) : (q), (ii) : (r), (iii) : (p), (iv) : (s) (b) (i) : (r), (ii) : (q), (iii) : (s), (iv) : (p)

(c) (i) : (r), (ii) : (q), (iii) : (p), (iv) : (s) (d) (i) : (p), (ii) : (q), (iii) : (r), (iv) : (s)

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચે આપેલા મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. ઘટના B ઉદ્ભવે છે તેમ આપેલ હોય ત્યારે ઘટના Aની શરતી સંભાવના

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \ P(B) \neq 0.$$

2. $0 \leq P(A \mid B) \leq 1, \quad P(A' \mid B) = 1 - (A \mid B)$

$P((A \cup B) \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C) - P((A \cap B) \mid C)$

3. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A), \quad P(A) \neq 0$

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B), \quad P(B) \neq 0$

4. જો B_1 અને B_2 પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ હોય તથા $P(B_1) \neq 0$, $P(B_2) \neq 0$, તો S ની કોઈ પણ ઘટના A માટે

$P(A) = P(B_1)\,P(A \mid B_1) + P(B_2)\,P(A \mid B_2)$

5. જો B_1, B_2 અને B_3 પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ હોય તથા A કોઈ પણ ઘટના હોય જ્યાં

$P(A) \neq 0$ તથા $P(B) \neq 0$ તો $P(B_i \mid A) = \dfrac{P(A \mid B_i)\,P(B_i)}{P(A \mid B_1)\,P(B_1) + P(A \mid B_2)\,P(B_2) + P(A \mid B_3)\,P(B_3)}$, $i = 1, 2, 3$

6. જો A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય તો $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

7. જો A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય, તો A અને B', A' અને B તથા A' અને B' પણ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ થાય.

8. યાદચ્છિક ચલ એ વાસ્તવિક વિધેય છે કે જેનો પ્રદેશ યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ હોય.

9. યાદચ્છિક ચલ X ના સંભાવના-વિતરણને કોષ્ટકના રૂપમાં નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$X = x$	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$p(x)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$p(x_3)$	...	$p(x_n)$

10. **મધ્યક :** $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p(x_i)$

વિચરણ : $V(X) = \sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, p(x_i) - \left[\sum_{i=1}^{n} x_i \, p(x_i)\right]^2$$

પ્રમાણિત વિચલન : $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

11. $E(aX + b) = aE(X) + b$
12. $V(aX + b) = a^2 \, V(X)$
13. **બર્નુલી પ્રયત્નો :**
    (1) દરેક બર્નુલી પ્રયત્નમાં સફળતા (S) અથવા નિષ્ફળતા (F) મળવાની સંભાવના અચળ હોય છે.
    (2) બર્નુલી પ્રયત્નો પરસ્પર નિરપેક્ષ હોય છે.
    (3) જો કોઈ પણ બર્નુલી પ્રયત્નમાં સફળતા (S) મળવાની સંભાવના p $(0 < p < 1)$, હોય, તો નિષ્ફળતા (F) મળવાની સંભાવના $q = 1 - p$ થશે.
14. **દ્વિપદી વિતરણ :** ધારો કે જેની સફળતાની સંભાવના p હોય તેવા યાદચ્છિક પ્રયોગના n બર્નુલી પ્રયત્નોની શ્રેણીમાં X સફળતાની સંખ્યા દર્શાવે છે. યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના વિતરણ

    $$p(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \; x = 0, 1, 2, ... n$$

    જ્યાં $0 < p < 1$ અને $q = 1 - p$ ને દ્વિપદી વિતરણ કહે છે. n અને pને દ્વિપદી વિતરણના પ્રચલો કહે છે.
15. પ્રચલો n અને p વાળા દ્વિપદી યાદચ્છિક ચલ X ના મધ્યક μ અને વિચરણ σ^2 અનુક્રમે np અને npq છે.

Ramanujan's notebooks

While still in Madras, Ramanujan recorded the bulk of his results in four notebooks of loose leaf paper. These results were mostly written up without any derivations. This is probably the origin of the misperception that Ramanujan was unable to prove his results and simply thought up the final result directly. Mathematician Bruce C. Berndt, in his review of these notebooks and Ramanujan's work, says that Ramanujan most certainly was able to make the proofs of most of his results, but chose not to.

This style of working may have been for several reasons. Since paper was very expensive, Ramanujan would do most of his work and perhaps his proofs on slate, and then transfer just the results to paper. Using a slate was common for mathematics students in the Madras Presidency at the time. He was also quite likely to have been influenced by the style of G. S. Carr's book studied in his teenage, which stated results without proofs. Finally, it is possible that Ramanujan considered his workings to be for his personal interest alone; and therefore only recorded the results.

The first notebook has 351 pages with 16 somewhat organized chapters and some unorganized material. The second notebook has 256 pages in 21 chapters and 100 unorganised pages, with the third notebook containing 33 unorganised pages. The results in his notebooks inspired numerous papers by later mathematicians trying to prove what he had found. Hardy himself created papers exploring material from Ramanujan's work as did G. N. Watson, B. M. Wilson, and Bruce Bert. A fourth notebook with 87 unorganised pages, the so-called "lost notebook", was rediscovered in 1976 by George Andrews.