પ્રકરણ 2

ચાકગતિ

2.1 પ્રસ્તાવના (Introduction)

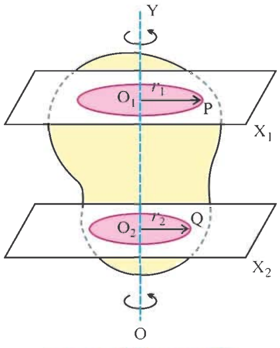
વિદ્યાર્થીમિત્રો, તમે પંખાની ગતિ, ભમરડાની ગતિ તેમજ ચકડોળની ગતિ જોઈ હશે. પૃથ્વી પોતાની અક્ષની આસપાસ ભ્રમણ કરે છે, જેનો તમને ખ્યાલ છે. પ્રસ્તુત પ્રકરણમાં આપણે આવા પ્રકારની ગતિનો અભ્યાસ કરીશું. આવી ગતિ ચાકગતિ છે.

પ્રથમ આપણે દઢ પદાર્થની સ્થિર ભ્રમણાને અનુલક્ષીને ચાકગતિની ચર્ચા કરીશું અને છેલ્લે સરક્યા વિના ગબડતા દઢ પદાર્થની ગતિની ચર્ચા કરીશું.

કણોના જે તંત્રમાં કણો વચ્ચેના સાપેક્ષ અંતરો અફર જળવાઈ રહેતા હોય તેને દઢ પદાર્થ (Rigid body) કહે છે.

દઢ પદાર્થ એક આદર્શ વિભાવના છે. ભૌતિકવિજ્ઞાનની દૃષ્ટિએ દઢ પદાર્થ અને ઘન પદાર્થ તદ્દન સમાન નથી. ઘન પદાર્થનું વિરૂપણ થઈ શકે છે, પરંતુ દઢ પદાર્થનું વિરૂપણ થઈ શકે નહિ. ઘણા વ્યાવહારિક હેતુઓ પૂરતું ઘન પદાર્થને દઢ પદાર્થ ગણી શકાય છે.

2.2 રોટેશનલ કાઇનેમેટિક્સ અને ડાઇનેમિક્સ (Ratational Kinematics and Dynamics)



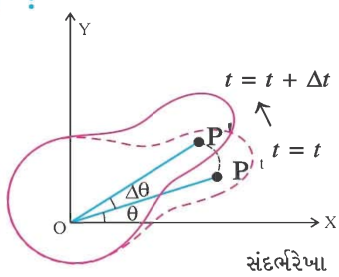
દઢ પદાર્થની ચાકગતિ
આકૃતિ 2.1

જો દઢ પદાર્થના બધા જ કણો વર્તુળગતિ કરતાં હોય અને આ વર્તુળોના કેન્દ્રો કોઈ એક નિશ્ચિત સુરેખા પર સ્થિર હોય, તો દઢ પદાર્થની તેવી ગતિને ચાકગતિ કહે છે. આ નિશ્ચિત સુરેખા (જે ભૌમિતિક રેખા છે)ને ભ્રમણાક્ષ કહે છે. આકૃતિ 2.1માં કોઈ એક દઢ પદાર્થના બે કણો P અને Q ને દર્શાવ્યા છે. તથા દઢ પદાર્થ ભ્રમણાક્ષ OYને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરે છે. O_1 અને r_1 કણ P જે વર્તુળ પર ગતિ કરે છે, તેના અનુક્રમે કેન્દ્ર તથા ત્રિજ્યા છે. તેવી જ રીતે O_2 અને r_2 કણ Q જે વર્તુળ પર ગતિ કરે છે, તેના અનુક્રમે કેન્દ્ર તથા ત્રિજ્યા છે. કણ P અને Q જે વર્તુળમાર્ગો પર ગતિ કરે છે, તે ભ્રમણાક્ષ OYને લંબસમતલોમાં આવેલા હોય છે.

આપણે પ્રથમ ચાકગતિનાં કારણોનો ઉલ્લેખ કર્યા સિવાય માત્ર ચાકગતિનું વર્ણન કરીશું. ભૌતિકવિજ્ઞાનના આ વિષયાંગને રોટેશનલ કાઈનેમેટિક્સ કહે છે. પદાર્થની ચાકગતિ માટે જવાબદાર કારણો તથા વસ્તુના ગુણધર્મો સાથે ચાકગતિનું વર્ણન કરવામાં આવે, તો તે વિષયાંગને રોટેશનલ ડાઈનેમિક્સ કહે છે.

2.3 ચાકગતિની ચલરાશિઓ અને રેખીય ગતિની ચલ રાશિઓ વચ્ચેના સંબંધો (Relation Between Variables of Rotational Motion and the Variables of Linear Motion)

(*a*) કોણીય સ્થાનાંતર (Angular Displacement) :



કોણીય સ્થાનાંતર
આકૃતિ 2.2

ધારો કે કોઈ દૃઢ પદાર્થ આકૃતિ 2.2માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પુસ્તકના પાનને લંબ રૂપે આવેલ સ્થિર ભ્રમણાક્ષ OZને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરે છે. અત્રે સ્પષ્ટ છે કે આ ભ્રમણાક્ષને લંબસમતલ (X–Y) પુસ્તકના પાનમાં આવેલ છે.

દૃઢ પદાર્થના પુસ્તકના પાન સાથેના આડછેદના t અને $t + \Delta t$ સમયે સ્થાન અનુક્રમે ત્રુટક રેખા અને સળંગ રેખા વડે દર્શાવાય છે.

દૃઢ પદાર્થના કોઈ એક કણ P ને ધ્યાનમાં લો. કોઈ એક સમયે (આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે) આ કણને તેના વર્તુળમાર્ગના કેન્દ્ર (O) સાથે જોડતી રેખાએ (જે તેના વર્તુળમાર્ગની ત્રિજ્યા છે.) આપેલી નિશ્ચિત સંદર્ભરેખા સાથે બનાવેલા કોણને તે સમયે તે કણનું કોણીય સ્થાન કહે છે. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે કણ P, t સમયે સંદર્ભરેખા OX સાથે θ કોણ રચે છે, જે કણ Pનું t સમયે કોણીય સ્થાન છે. $t + \Delta t$ સમયે કણ XY સમતલમાં વર્તુળગતિ કરી P થી P' બિંદુએ પહોંચે છે. આ સમયે કણનું કોણીય સ્થાન $\theta + \Delta\theta$ છે.

કણના કોણીય સ્થાનમાં થતા ફેરફારને કોણીય સ્થાનાંતર કહે છે. આમ કણ Pનું Δt જેટલા સમયગાળામાં કોણીય સ્થાનાંતર $\Delta\theta$ છે. (સંદર્ભરેખા તરીકે કોઈ પણ રેખા લઈ શકાય છે. સામાન્ય રીતે ધન X-અક્ષને સંદર્ભરેખા તરીકે લેવાય છે.)

દૃઢ પદાર્થમાં કણો વચ્ચેનાં સાપેક્ષ અંતરો અફર રહેતાં હોવાથી ચાકગતિ દરમિયાન બધા જ કણો સરખા સમયમાં સરખું કોણીય સ્થાનાંતર અનુભવે છે. માટે દૃઢ પદાર્થની ચાકગતિનું વર્ણન અસંખ્ય કણોમાંના કોઈ એક પ્રતિનિધિ કણની ગતિ પરથી કરી શકાય છે. આમ, ઉપર્યુક્ત ચર્ચામાં કોણીય સ્થાનાંતર $\Delta\theta$ એ દૃઢ વસ્તુનું કોણીય સ્થાનાંતર છે. તેનો SI એકમ radian છે.

(*b*) કોણીય ઝડપ અને કોણીય વેગ (Angular speed and angular velocity) :

Δt સમયગાળામાં કણનું $\Delta\theta$ જેટલું કોણીય સ્થાનાંતર થતું હોવાથી સરેરાશ કોણીય ઝડપની વ્યાખ્યા અનુસાર

$$\langle\omega\rangle = \frac{\text{કોણીય સ્થાનાંતર}}{\text{સમયગાળો}}$$

$$\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (2.3.1)$$

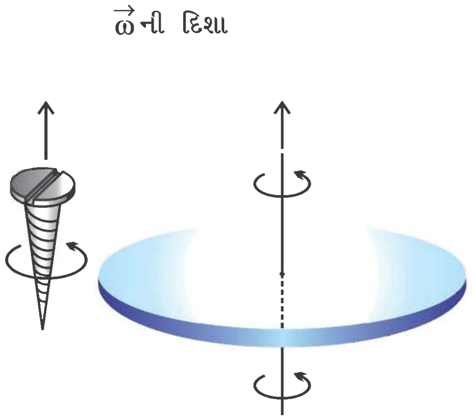
હવે $\Delta t \rightarrow 0$ લક્ષમાં આ ગુણોત્તરનું મૂલ્ય કણ Pની, t સમયે તત્કાલીન કોણીય ઝડપ થશે.

$$\therefore\ \omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\therefore\ \omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad (2.3.2)$$

જે સમગ્ર દૃઢ પદાર્થની પણ t સમયે કોણીય ઝડપ છે. હવે પછી કોણીય ઝડપ, એટલે તત્કાલીન કોણીય ઝડપ સમજીશું, સિવાય કે વિશેષ ઉલ્લેખ કરેલો હોય. ωનો એકમ rad s^{-1} અથવા rotation s^{-1} કોણીય ઝડપ સાથે જ્યારે યોગ્ય દિશા સાંકળવામાં આવે છે, ત્યારે તેને કોણીય વેગ કહે છે. રૈવાજિક રીતે કોણીય વેગ $\vec{\omega}$ની દિશા જમણા હાથના સ્ક્રૂના નિયમથી નક્કી કરવામાં આવે છે.

જમણા હાથના સ્ક્રૂને આકૃતિ 2.3માં દર્શાવ્યા અનુસાર ભ્રમણાક્ષને સમાંતર ગોઠવી વસ્તુ જે રીતે ભ્રમણ કરતી હોય તે જ રીતે ભ્રમણ આપતાં સ્ક્રૂ જે દિશામાં ખસે તેને કોણીય વેગ $\vec{\omega}$ની દિશા ગણવામાં આવે છે.



જમણા હાથના સ્ક્રૂનો નિયમ

આકૃતિ 2.3

(c) કોણીય વેગ અને રેખીય વેગ વચ્ચેનો અદિશ સંબંધ (Scalar Relation between Angular Velocity and Linear Velocity) :

આકૃતિ 2.2માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે કણ P, Δt સમયગાળામાં ચાપ PP'જેટલું રેખીય અંતર કાપે છે. આથી,

$$\text{સરેરાશ રેખીય ઝડપ } \langle v \rangle = \frac{\text{ચાપ PP'}}{\text{સમયગાળો } \Delta t}$$

જો કણ Pના વર્તુળપથની ત્રિજ્યા (ભ્રમણાક્ષથી કણ Pનું લંબઅંતર) r હોય તો, ચાપ PP' $= r\,\Delta\theta$

$$\therefore \langle v \rangle = \frac{r\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$= r\langle\omega\rangle \qquad (2.3.3)$$

$\Delta t \rightarrow 0$ લક્ષમાં ઉપર્યુક્ત ગુણોત્તરનું મૂલ્ય t સમયે કણ Pના તત્કાલીન રેખીય વેગનું મૂલ્ય આપે છે.

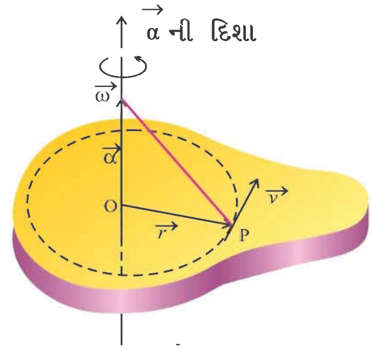
$$\therefore v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$= r\frac{d\theta}{dt}$$

$$\therefore v = r\omega \qquad (2.3.4)$$

જે પદાર્થના રેખીય વેગ અને કોણીય વેગ વચ્ચેનો અદિશ સંબંધ છે.

(d) કોણીય વેગ અને રેખીય વેગ વચ્ચેનો સદિશ સંબંધ (Vector Releation between Angular Velocity and Linear Velocity) :



કોણીય વેગ અને રેખીય વેગ વચ્ચેનો સદિશ સંબંધ

આકૃતિ 2.4

ચાકગતિ કરતા દઢ પદાર્થના કોઈ કણ Pના ભ્રમણાક્ષને લંબ આવેલ સમતલમાંના વર્તુળમાર્ગના કેન્દ્રને અનુલક્ષીને તેના સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ તથા રેખીય વેગ $\vec{v}$ ની સ્થિતિ આકૃતિ 2.4માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે હોય છે તથા કોણીય વેગ $\vec{\omega}$ જમણા હાથના નિયમ અનુસાર (આકૃતિમાં દર્શાવ્યા અનુસાર) ભ્રમણાક્ષને સમાંતર છે.

$\vec{\omega} \times \vec{r}$ ની દિશા જમણા હાથના સ્ક્રૂના નિયમ પરથી શોધતાં તે $\vec{v}$ ની દિશામાં મળે છે. તેમજ $\vec{\omega} \perp \vec{r}$ હોવાથી $\vec{\omega} \times \vec{r} = \omega r \sin 90 = \omega r = \vec{v}$ નું મૂલ્ય.

રેખીય વેગ સદિશ છે. વર્તુળગતિમાં કોઈ પણ બિંદુએ રેખીય વેગની દિશા તે બિંદુએ વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શકની દિશામાં હોય છે.

સમીકરણ $v = r\omega$માં ડાબી બાજુ રેખીય વેગનું મૂલ્ય જ્યારે જમણી બાજુએ આવતા r અને ω એ સદિશ રાશિઓ $\vec{r}$ અને $\vec{\omega}$નાં મૂલ્યો છે. આ હકીકત સૂચવે છે કે સદિશ રાશિઓ $\vec{r}$ અને $\vec{\omega}$નો એવો ગુણાકાર લેવામાં આવે કે જેનું ગણનફળ પણ સદિશ જ હોય. જેને આપણે બે સદિશોના સદિશ ગુણાકાર (ક્રોસ ગુણાકાર) તરીકે ઓળખીએ છીએ. અત્રે $\vec{\omega} \times \vec{r}$ ની દિશા જમણા હાથના સ્ક્રૂના નિયમ પરથી શોધતાં તે $\vec{v}$ ની દિશામાં મળે છે. તેમજ $\vec{\omega} \perp \vec{r}$ હોવાથી $|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin 90 = \omega r = \vec{v}$ નું મૂલ્ય. તેથી રેખીય વેગ $\vec{v}$ અને કોણીય વેગ $\vec{\omega}$ સદિશ સંબંધના સ્વરૂપમાં મૂકી શકાય. (તમે $\vec{r} \times \vec{\omega}$ની દિશા કઈ હશે તે વિચારો.)

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (2.3.5)$$

(e) કોણીય પ્રવેગ (Angular Acceleration) :

ધારો કે t અને $t + \Delta t$ સમયે કણ Pના તત્કાલીન કોણીય વેગ $\vec{\omega}$ અને $\vec{\omega} + \Delta\vec{\omega}$ છે.

તેથી વ્યાખ્યા અનુસાર,

સરેરાશ કોણીય પ્રવેગ $<\vec{\alpha}> = \dfrac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$ (2.3.6)

$\Delta t \rightarrow 0$, લક્ષમાં ઉપર્યુક્ત ગુણોત્તરનું મૂલ્ય એ t સમયે કણ Pનો તત્કાલીન કોણીય પ્રવેગ આપે $\vec{\alpha}$ છે.

$$\therefore \ \vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$$

$$\therefore \ \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (2.3.7)$$

$<\vec{\alpha}>$ની દિશા એ $\Delta\vec{\omega}$ (કોણીય વેગનો ફેરફાર) ની દિશામાં હોય છે. સ્થિર ભ્રમણાક્ષના કિસ્સામાં $\Delta\vec{\omega}$ની દિશા ભ્રમણાક્ષને સમાંતર હોય છે, તેથી $<\vec{\alpha}>$ની દિશા પણ ભ્રમણાક્ષને સમાંતર હોય છે. (જુઓ આકૃતિ 2.4) $\vec{\alpha}$ નો એકમ rad s^{-2} અથવા rotation s^{-2} છે.

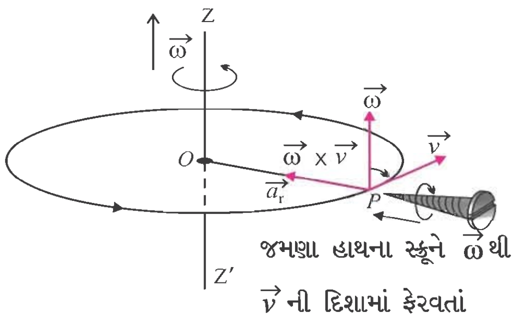
(*f*) રેખીય પ્રવેગ અને કોણીય પ્રવેગ વચ્ચેનો સંબંધ (Relation between Linear Acceleration and Angular Acceleration) :

રેખીય વેગનું સમય સાપેક્ષે વિકલન રેખીય પ્રવેગ ($\vec{a}$) આપે છે. સમીકરણ (2.3.5)નું સમય સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}$$

અત્રે $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ અને $\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha}$ હોવાથી

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\alpha} \times \vec{r} \qquad (2.3.8)$$



રેખીય પ્રવેગનો ત્રિજ્યાવર્તી ઘટક

આકૃતિ 2.4 (*a*)

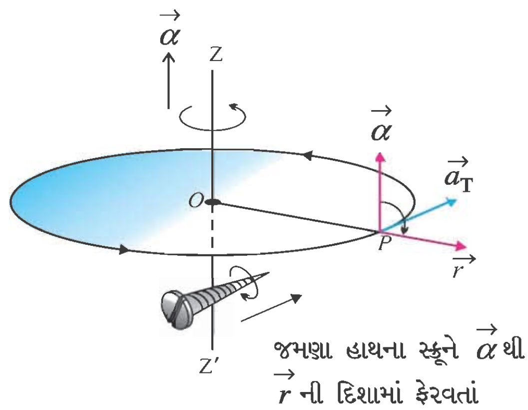
આમ રેખીય પ્રવેગ $\vec{a}$ ના બે સદિશ ઘટકો $\vec{\omega} \times \vec{v}$ અને $\vec{\alpha} \times \vec{r}$ છે.

આકૃતિ 2.4(*a*) અનુસાર જમણા હાથના સ્ક્રૂના નિયમનો ઉપયોગ કરી $\vec{\omega} \times \vec{v}$ની દિશા શોધતાં તે કેન્દ્ર તરફ ત્રિજ્યાવર્તી દિશામાં મળે છે. તેથી $\vec{\omega} \times \vec{v}$ને રેખીય પ્રવેગ $\vec{a}$ નો **ત્રિજ્યાવર્તી ઘટક** કહે છે. તેને $\vec{a}_r$ વડે દર્શાવાય છે. તેનું મૂલ્ય $\omega v \sin\frac{\pi}{2} = \omega v = \dfrac{v^2}{r} = r\omega^2$

($\because v = r\omega$)

આ જ પ્રમાણે $\vec{\alpha} \times \vec{r}$ની દિશા વર્તુળમાર્ગના સ્પર્શકની દિશામાં મળતી હોઈ તેને રેખીય પ્રવેગનો સ્પર્શીય ઘટક કહે છે (જુઓ આકૃતિ 2.4 (*b*)). તેને $\vec{a}_T$ વડે દર્શાવાય છે. તેનું મૂલ્ય $\alpha r \sin\frac{\pi}{2} = \alpha r$ છે.

$$\therefore \ \vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_T$$



રેખીય પ્રવેગનો સ્પર્શીય ઘટક

આકૃતિ 2.4(*b*)

ત્રિજ્યાવર્તી ઘટક $\vec{a}_r$ અને સ્પર્શીય ઘટક $\vec{a}_T$ પરસ્પર લંબ હોવાથી $\vec{a}$નું મૂલ્ય

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_T^2} = \sqrt{\omega^2 v^2 + \alpha^2 r^2} \qquad (2.3.9)$$

જો દઢ પદાર્થ અચળ કોણીય વેગથી ચાકગતિ કરતો હોય એટલે કે કોણીય પ્રવેગ $\alpha = 0$ હોય, તો તેનો રેખીય પ્રવેગનો સ્પર્શીય ઘટક શૂન્ય બને, પરંતુ તેનો ત્રિજ્યાવર્તી ઘટકનો અશૂન્ય જ હોય છે.

આ સ્થિતિ નિયમિત વર્તુળગતિમાં જોવા મળે છે. નિયમિત વર્તુળગતિમાં કેન્દ્રગામી પ્રવેગ $\dfrac{v^2}{r}$ હોય છે, તે તમે જાણો જ છો.

ઉપર્યુક્ત ચર્ચામાં આપણે જોયું કે કોણીય સ્થાનાંતર (θ), કોણીય વેગ ($\vec{\omega}$), કોણીય પ્રવેગ $\vec{\alpha}$ દૃઢ વસ્તુના દરેક કણ માટે સમાન છે. આમ, θ, $\vec{\omega}$ અને $\vec{\alpha}$ દૃઢ વસ્તુની લાક્ષણિકતાઓ છે અને તેમને રોટેશનલ કાઇનેમેટિક્સની ચલ રાશિઓ કહે છે.

અત્રે નોંધો કે સ્થિર ભ્રમણાક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતી દૃઢ પદાર્થના કોઈ એક કણની ગતિનું વર્ણન રેખીય ચલો ($\vec{r}$, $\vec{v}$ અને $\vec{a}$) અને કોણીય ચલો (θ, $\vec{\omega}$, $\vec{\alpha}$)ના સંદર્ભમાં કરી શકાય છે, પરંતુ જ્યારે દૃઢ પદાર્થના બધા કણોનો એક સાથે વિચાર કરવાનો હોય ત્યારે કોણીય ચલો (જે બધા જ કણો માટે સમાન છે.) વાપરવાથી સમગ્ર પદાર્થની ગતિનું વર્ણન સરળતાથી થઈ શકે છે.

ઉદાહરણ 1 : એક ઘડિયાળના સેકન્ડ-કાંટાની લંબાઈ 20 cm છે, તો તેની ટોચ પરના કણનાં (1) કોણીય વેગ (2) રેખીય વેગ (3) કોણીય પ્રવેગ (4) ત્રિજ્યાવર્તી પ્રવેગ (5) સ્પર્શીય પ્રવેગ (6) રેખીય પ્રવેગનાં મૂલ્યો શોધો.

ઉકેલ :

$r = 20$ cm

(1) સેકન્ડ-કાંટો એક મીનીટ (60 seconds)માં 2π rad કોણીય સ્થાનાંતર કરે છે. આથી કોણીય વેગ

$$\therefore \ \omega = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30} \text{ rad s}^{-1}$$

(2) રેખીય વેગ $v = \omega r = \frac{\pi}{30} \times 20$

$= \frac{2}{3}\pi$ cm s^{-1}

(3) ઘડિયાળનો સેકન્ડ-કાંટો અચળ કોણીય ઝડપથી ગતિ કરતો હોઈ $\therefore \ \alpha = 0$ rad s^{-1}

(4) ત્રિજ્યાવર્તી પ્રવેગ $= a_r = \frac{v^2}{r}$

$$= \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{20}\right) = \frac{\pi}{45}^2 \text{ cm s}^{-2}$$

(5) સ્પર્શીય પ્રવેગ $= a_T = \alpha r = 0$

(6) રેખીય પ્રવેગ $a = \sqrt{a_r^2 + a_T^2} = a_r = \frac{\pi}{45}^2$ cms^{-2}

(15 cm લંબાઈના મિનિટ તથા 10 cm લંબાઈના કલાકકાંટા માટે આવી જ ગણતરી જાતે કરી જુઓ.)

2.4 નિયમિત (અચળ) કોણીય પ્રવેગ સાથેની ચાકગતિનાં સમીકરણો (Equations of Rotational Motion with Constant Angular Acceleration)

ધારો કે $t = 0$ સમયે દૃઢ પદાર્થના કોઈ કણનું કોણીય સ્થાન $\theta = 0$ અને કોણીય વેગ એ ω_0 છે.

$t = t$ સમયે તેનું કોણીય સ્થાન એ $\theta = \theta$ અને કોણીય વેગ એ ω છે.

જો દૃઢ પદાર્થ સ્થિર ભ્રમણાક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતો હોય, તો $\vec{\omega}_0$, $\vec{\omega}$ અને તેનો અચળ કોણીય પ્રવેગ $\vec{\alpha}$ ની દિશા સ્થિર ભ્રમણાક્ષની દિશા પર હોય છે. આથી θ, $\vec{\omega}$ અને $\vec{\alpha}$ ના સંબંધોને અદિશ સ્વરૂપમાં લખી શકાય છે. α અચળ હોવાથી

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t} \qquad (2.4.1)$$

અથવા $$\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad (2.4.2)$$

આ સમીકરણ રેખીય ગતિના સમીકરણ $v = v_0 + at$ સાથે સામ્યતા ધરાવે છે.

અત્રે કોણીય પ્રવેગ અચળ હોવાથી, સરેરાશ કોણીય વેગનો ઉપયોગ કરી કોણીય સ્થળાંતર શોધી શકાય.

$\therefore$ કોણીય સ્થાનાંતર

θ = (સરેરાશ કોણીય વેગ) (t)

$$\therefore \ \theta = \left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\right)t \qquad (2.4.3)$$

આ સમીકરણ રેખીય ગતિના સમીકરણ

$x = \left(\frac{v + v_0}{2}\right)t$ સાથે સામ્યતા ધરાવે છે.

સમીકરણ (2.4.2)માંથી ωનું મૂલ્ય સમીકરણ (2.4.3)માં મૂકતાં

$$\theta = \left(\frac{\omega_0 + \alpha t + \omega_0}{2}\right)t$$

$$\therefore \ \theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (2.4.5)$$

આ સમીકરણ રેખીય ગતિના સમીકરણ $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ સાથે સામ્યતા ધરાવે છે.

સમીકરણ (2.4.1)માંથી tનું મૂલ્ય સમીકરણ (2.4.3)માં મૂકતાં

$$\theta = \left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\right)\left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right)$$

$$\therefore\ 2\alpha\theta = \omega^2 - \omega_0^2 \qquad (2.4.6)$$

આ સમીકરણ રેખીય ગતિના સમીકરણ $2ax = v^2 - v_0^2$ સાથે સામ્યતા ધરાવે છે.

ઉદાહરણ 2 : ચિલ્ડ્રનપાર્કમાં 18 km/hના રેખીય વેગથી દોડતી એક મીનીટ્રેનને બ્રેક લગાડતાં તેમાં અચળ કોણીય પ્રતિપ્રવેગ ઉત્પન્ન થઈ તે 10 sમાં સ્થિર થઈ જાય છે. જો મીની ટ્રેનના પૈડાની ત્રિજ્યા 30 cm, હોય, તો પૈડાનો કોણીય પ્રવેગ શોધો.

ઉકેલ :

$v_0 = 18$ km/h $= 5$ m/s; $r = 30$ cm $= 0.3$ m

$$\omega_1 = \frac{v_1}{r} = \frac{5}{0.3} = \frac{50}{3} \text{ rad s}^{-1}$$

$\omega_2 = 0, \quad t = 10$ s

$$\therefore\ \alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} = \frac{0 - \frac{50}{3}}{10}$$

$$= \frac{-5}{3} = -1.666 \text{ rad s}^{-2}$$

ઉદાહરણ 3 : એક ટ્રક 54 km/hની ઝડપથી દોડે છે. તેના પૈડાની ત્રિજ્યા 50 cm છે. બ્રેક લગાડતાં પૈડાં 20 ભ્રમણ કરીને સ્થિર થાય છે, તો તે દરમિયાન ટ્રક કેટલું રેખીય અંતર કાપશે ? પૈડાનો કોણીય પ્રવેગ પણ શોધો.

ઉકેલ : અત્રે $v_1 = 54$ km/h $= 15$ m/s; $r = 50$ cm $= 0.5$ m, $\theta = 20$ ભ્રમણ $= 20 \times 2\pi$ rad $= 40\pi$ rad; $d = ?$, $\alpha = ?$

$$v_1 = r\omega_1\ \therefore\ \omega_1 = \frac{v_1}{r} = \frac{15}{0.5} = 30 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 0;\ \alpha = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\theta} = \frac{0 - 900}{2 \times 40\pi}$$

$$= -3.58 \text{ rad/s}^2$$

હવે 1 પરિભ્રમણ $= 2\pi r$ રેખીય અંતર

$\therefore$ 20 પરિભ્રમણ $= 20 \times 2\pi r$ અંતર

$\therefore$ ટ્રકે કાપેલું રેખીય અંતર

$d = 20 \times 2 \times 3.14 \times 0.5$

$= 62.8$ m

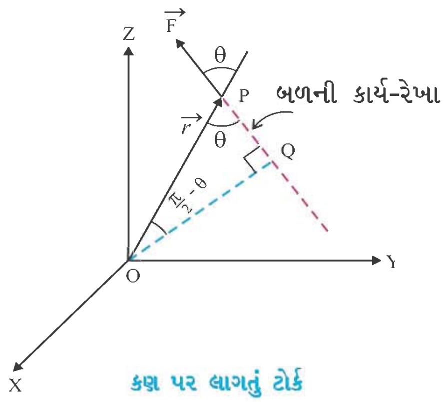
2.5 ટૉર્ક (Torque)

અત્યાર સુધી આપણે દૃઢ પદાર્થની ચાકગતિની ચાકગતિનાં કારણોની ચિંતા કર્યા સિવાય કરી. હવે આપણે તેના કારણ વિષે પણ વિચારીએ.

ટૉર્ક એ રોટેશનલ ડાઇનેમિક્સની અગત્યની ભૌતિક રાશિ છે. રેખીય ગતિમાં બળ જે ભાગ ભજવે છે, તેવો જ ભાગ ચાક ગતિમાં ટૉર્ક ભજવે છે.

પ્રથમ આપણે એક કણ પર લાગતા ટૉર્કની ચર્ચા કરીશું. ત્યાર બાદ કણોના તંત્ર પર લાગતા ટૉર્ક વિષે ચર્ચા કરીશું.

(a) કણ પર લાગતું ટૉર્ક (Torque Acting on a Particle) :



કણ પર લાગતું ટૉર્ક

આકૃતિ 2.5

આકૃતિ 2.5માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ધારો કે, કોઈ કણ P પર બળ $\vec{F}$ લાગે છે. આ બળની કાર્યરેખા QP છે. ઊગમબિંદુ Oના સાપેક્ષે Pનો સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ છે. $\vec{r}$ અને $\vec{F}$ વચ્ચેનો કોણ θ છે. અત્રે કણ P કોઈ દૃઢ પદાર્થનો કણ હોવો જરૂરી નથી.

$\vec{r}$ અને $\vec{F}$ના સદિશ ગુણાકારને O બિંદુની સાપેક્ષે કણ P પર લાગતું ટૉર્ક ($\vec{\tau}$) કહે છે.

$$\therefore\ \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (2.5.1)$$

$$\therefore\ \tau = rF\sin\theta$$

આકૃતિ 2.5 પરથી, $r\sin\theta = OQ =$ બળની કાર્યરેખાનું O થી લંબઅંતર

$\therefore\ \tau$ = (F) (બળની કાર્યરેખાનું Oથી લંબઅંતર)

= બિંદુ O ને અનુલક્ષીને બળની ચાકમાત્રા (moment of force) (વ્યાખ્યા અનુસાર)

આમ, **ટૉર્ક એ આપેલ સંદર્ભબિંદુને અનુલક્ષીને બળની ચાકમાત્રા છે.** તેનું પરિમાણિક સૂત્ર $M^1 L^2 T^{-2}$ છે અને તેનો SI એકમ N m છે.

યાદ રાખો કે,

(*i*) $\vec{\tau}$ ની દિશા સદિશ ગુણાકાર માટેના જમણા હાથના સ્ક્રૂના નિયમ અનુસાર $\vec{r}$ અને $\vec{F}$ વડે રચાતા સમતલને લંબ હોય છે.

(*ii*) $\vec{\tau}$ નું મૂલ્ય સંદર્ભબિંદુ પર આધાર રાખતું હોવાથી તેની વ્યાખ્યામાં સંદર્ભબિંદુનો ઉલ્લેખ અનિવાર્ય છે.

(*b*) કણોના તંત્ર પર લાગતું ટૉર્ક (Torque Acting on the System of Particles) :

તંત્રના કણો વચ્ચે લાગતાં પરસ્પર આંતરિક બળો સમાન અને વિરુદ્ધ દિશામાં હોવાથી તેમના વડે ઉદ્ભવતું પરિણામી બળ અને તેથી ટૉર્ક શૂન્ય બને છે.

તેથી ચર્ચામાં આપણે આંતરિક બળોને ધ્યાનમાં લઈશું નહિ. ધારો કે $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$ સ્થાનસદિશ ધરાવતા કણોના તંત્ર માટે કણો પર લાગતાં બાહ્ય બળો અનુક્રમે $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$. તંત્ર પરનું પરિણામી ટૉર્ક એટલે તંત્રના દરેક કણ પર લાગતા ટૉર્કનો સદિશ સરવાળો.

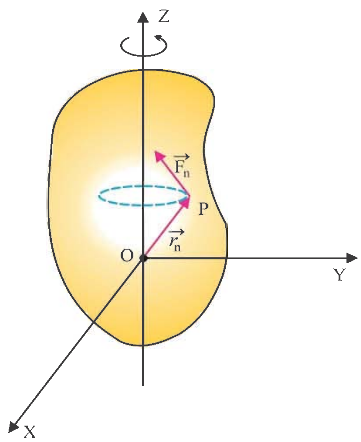
$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \ldots\ldots \vec{\tau}_n \qquad (2.5.2)$$

$\therefore$ પરિણામી ટૉર્ક

$$\vec{\tau} = (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) + (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2) + \ldots\ldots + (\vec{r}_n \times \vec{F}_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) \qquad (2.5.3)$$

(*c*) દૃઢ પદાર્થ પર લાગતું ટૉર્ક (Torque Acting on the Rigid Body) :



દૃઢ પદાર્થ પર લાગતું ટૉર્ક
આકૃતિ 2.6

આકૃતિ 2.6માં દર્શાવ્યા અનુસાર ધારો કે કોઈ એક દૃઢ પદાર્થ સ્થિર ભ્રમણાક્ષ OZને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરે છે. $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$ સ્થાનસદિશ ધરાવતા કણો પર લાગતાં બળો અનુક્રમે $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ છે. હવે $\vec{r}_n$ સદિશ ધરાવતા કણ પર લાગતા બળ $\vec{F}_n$ ને ધ્યાનમાં લઈએ તો વ્યાખ્યા અનુસાર તેના પર લાગતું ટૉર્ક $\vec{\tau}_n$

$$\vec{\tau}_n = \vec{r}_n \times \vec{F}_n$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_n & y_n & z_n \\ F_{nx} & F_{ny} & F_{nz} \end{vmatrix}$$

$$\therefore \vec{\tau}_n = (y_n F_{nz} - z_n F_{ny})\hat{i} + (z_n F_{nx} - x_n F_{nz})\hat{j} + (x_n F_{ny} - y_n F_{nx})\hat{k} \qquad (2.5.4)$$

સમીકરણ (2.5.4) પરથી સમગ્ર પદાર્થ પરનું ટૉર્ક બધા કણો પર લાગતા ટૉર્કના સદિશ સરવાળા સ્વરૂપે નીચે મુજબ થાય :

$$\vec{\tau} = \sum_n (y_n F_{nz} - z_n F_{ny})\hat{i} + (z_n F_{nx} - x_n F_{nz})\hat{j} + (x_n F_{ny} - y_n F_{nx})\hat{k} \qquad (2.5.5)$$

દૃઢ પદાર્થની Z-અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ માટે ઉપર્યુક્ત ટૉર્કનો Z ઘટક જ જવાબદાર છે. X-અક્ષ અથવા Y-અક્ષને અનુલક્ષીને થતી ચાકગતિ માટે અનુક્રમે ટૉર્કના X અને Y ઘટક જવાબદાર હોય. વ્યાપક રીતે **પરિભ્રમણ અક્ષ પરનો એકમસદિશ $\hat{n}$** હોય, તો $\vec{\tau} \cdot \hat{n}$ ઘટક ચાકગતિ માટે જવાબદાર હોય છે.

દૃઢ પદાર્થની ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરવા તેના બધા જ કણો પર બાહ્ય બળ લગાડવાં જરૂરી નથી. જેમકે બારણું ખોલવા કે બંધ કરવા માટે આપણે તેના બધા જ કણો પર બળ લગાડતાં નથી.

દૃઢ પદાર્થના બધા જ કણો વચ્ચેનાં સાપેક્ષ અંતરો અફર રહેતા હોવાથી **કોઈ એક જ કણ** પર બળ લગાડતાં

ઉદ્‌ભવતું ટૉર્ક સમગ્ર દૃઢ પદાર્થ પર લાગતું ટૉર્ક જ કહેવાય. કોઈ સંદર્ભબિંદુને અનુલક્ષીને $\vec{r}$ સ્થાનસદિશ ધરાવતા કોઈ એક જ કણ પર લાગતું બળ $\vec{F}$ હોય, તો દૃઢ પદાર્થ પર લાગતું ટૉર્ક $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$.

ઉદાહરણ 4 : એક દૃઢ પદાર્થના $\vec{r} = (4, 6, 12)$ m સ્થાનસદિશ ધરાવતા કણ પર લાગતું બળ $\vec{F} = (6, 8, 10)$ N છે, તો દૃઢ પદાર્થ કે જેના પરનો એકમસદિશ $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ તેવી ભ્રમણાક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરે છે. આ ચાકગતિ કરાવનાર ટૉર્કનું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : $\tau = \vec{r} \times \vec{F}$

જેના પર એકમસદિશ $\hat{n}$ હોય તેવા અક્ષને અનુલક્ષીને ટૉર્કનું મૂલ્ય

$$\tau_n = (\vec{r} \times \vec{F})\cdot\hat{n}$$

$$\text{હવે } \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 6 & 12 \\ 6 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= (-36)\hat{i} - (-32)\hat{j} + (-4)\hat{k}$$

$$\vec{\tau}_n = (-36, 32, -4) \text{ N m}$$

ચાકગતિ માટે જવાબદાર ટૉર્કનું મૂલ્ય.

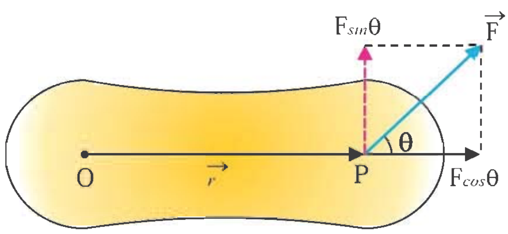
હવે, $(\vec{r} \times \vec{F})\cdot\hat{n}$

$$= (-36, 32, -4) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(-36 + 32 - 4)$$

$$= -\frac{8}{\sqrt{3}} \text{ N m}$$

(a) ટૉર્કની વ્યાખ્યા ભૌતિક સમજૂતી (Physical interpretation of the definition of torque)



ટૉર્કનો અસરકારક ઘટક

આકૃતિ 2.7

ધારો કે આકૃતિ 2.7માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે દૃઢ પદાર્થના કણ P પર બળ $\vec{F}$ લાગે છે. અત્રે બળ $\vec{F}$ એ ભ્રમણાક્ષને લંબ એવા સમતલમાં લીધેલ છે. ભ્રમણાક્ષ O બિંદુમાંથી પુસ્તકના પાનને લંબ રૂપે બહાર આવતી દિશામાં છે.

P નો પોતાના વર્તુળમાર્ગના કેન્દ્રને અનુલક્ષીને સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ છે. $\vec{F}$ અને $\vec{r}$ વચ્ચેનો કોણ θ છે. ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરવામાં $\vec{F}$ની અસરકારકતા જોવા માટે $\vec{F}$ના બે ઘટકો વિચારો.

(*i*) $F_1 = F\cos\theta$ જે $\vec{r}$ ને સમાંતર હોવાથી $\vec{r} \times \vec{F_1} = 0$ થશે, જે ટૉર્ક ઉત્પન્ન કરતો નથી, આથી તે ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરતો નથી.

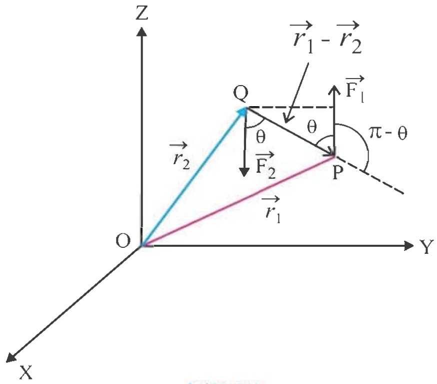
(*ii*) $F_2 = F\sin\theta$ જે $\vec{r}$ ને લંબ છે. આ ઘટક ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરે છે. જો Fનું અને/અથવા θનું મૂલ્ય વધારે હશે, તો $\vec{F}$ વધારે અસરકારક બનશે. વળી, આપણો સામાન્ય અનુભવ કહે છે જો $\vec{F}$ના લાગબિંદુનો સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ મોટો હોય તોપણ ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરવામાં $\vec{F}$ વધારે અસરકારક બને છે. આમ, ચાકગતિ માટે જવાબદાર રાશિ માત્ર $\vec{F}$ નહિ, પરંતુ r F sinθ છે.

આ રાશિને આપણે ટૉર્ક કહીએ છીએ. આ સૂત્ર સદિશ સ્વરૂપે લખતાં,

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2.5.6)$$

યાદ રાખો કે, **ટૉર્ક એ ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરવા માટે બળની અસરકારકતાનું માપ છે.**

(e) બળયુગ્મ (Couple) : બે સમાન મૂલ્યના અને પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાંના એકરેખસ્થ ન હોય તેવાં બળો બળયુગ્મની રચના કરે છે. આકૃતિ 2.8માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ધારો કે ઊગમબિંદુ Oને અનુલક્ષીને કોઈ એક દૃઢ પદાર્થના $\vec{r_1}$ અને $\vec{r_2}$ સ્થાનસદિશ ધરાવતા બે કણો P અને Q પર અનુક્રમે $\vec{F_1}$ અને $\vec{F_2}$ બળો લાગે છે. અહીં $|\vec{F_1}| = |\vec{F_2}|$ તથા $\vec{F_1}$ અને $\vec{F_2}$ ની દિશાઓ પરસ્પર વિરુદ્ધ છે. હવે $\vec{F_1}$ અને $\vec{F_2}$ બળોના કારણે ઉત્પન્ન થતા ટૉર્ક $\vec{\tau_1}$ અને $\vec{\tau_2}$ ના પરિણામી ટૉર્કને બળયુગ્મની ચાકમાત્રા ($\vec{\tau}$) કહે છે.



બળયુગ્મ

આકૃતિ 2.8

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2$$

$$\therefore \ \vec{\tau} = (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) + (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2)$$

$$= (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) - (\vec{r}_2 \times \vec{F}_1)$$

$$(\because \ \vec{F}_2 = -\vec{F}_1)$$

$$\therefore \ \vec{\tau} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1$$

$$= |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|(F_1) \sin(\pi - \theta)$$

$$= |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|(F_1) \sin\theta$$

જ્યાં $(\pi - \theta)$ એ $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ અને $\vec{F}_1$ વચ્ચેનો ખૂણો છે.

આકૃતિ પરથી $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \sin\theta$ = બે બળો વચ્ચેનું લંબ-અંતર

$\therefore$ બળયુગ્મની ચાકમાત્રા = (F_1) (બે બળો વચ્ચેનું લંબ અંતર)

= (બેમાંથી એક બળનો માનાંક) (બે બળો વચ્ચેનું લંબ અંતર) (2.5.8)

વિદ્યાર્થીમિત્રો, વ્યવહારમાં તમે બળયુગ્મનો ઉપયોગ કરો છો તે તમે જાણો છો ? તમે સાઈકલ, સ્કૂટર કે કાર ચલાવો ત્યારે આ વાહનને વાળવા માટે બે હાથે સ્ટિયરિંગ પર જે બળો લગાડો છો, તે બળયુગ્મ રચે છે.

(f) દૃઢ પદાર્થનું સંતુલન (Equilibrium of a rigid body) :

હવે આપણે દૃઢ પદાર્થ પર લાગતાં અનેક બળોની અસર હેઠળ દૃઢ પદાર્થના સંતુલનના ચર્ચા કરીશું. જો દૃઢ પદાર્થ પર લાગતાં બાહ્ય બળો $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots\ldots, \vec{F}_n$ હોય અને જો પરિણામી $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots.. + \vec{F}_n = 0$ (2.5.9) થાય તો દૃઢ પદાર્થ રેખીય સંતુલનમાં રહે છે.

ઉપર્યુક્ત સમીકરણને બળોના ઘટકોના સ્વરૂપમાં લખતાં

$$\sum_i F_{xi} = 0; \ \sum_i F_{yi} = 0; \ \text{અને} \ \sum_i F_{zi} = 0. \tag{2.5.9 a}$$

જો ઉપર્યુક્ત બળોને કારણે ઉદ્ભવતાં ટૉર્ક અનુક્રમે $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \ldots.., \vec{\tau}_n$ હોય, તો જ્યારે

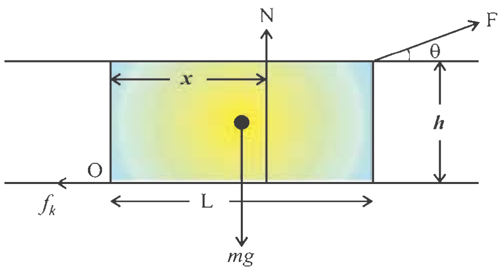
$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \ldots.. + \vec{\tau}_n = 0. \tag{2.5.10}$$

ત્યારે દૃઢ પદાર્થ **ચાકગતીય સંતુલનમાં** રહે છે. એટલે કે જો દૃઢ પદાર્થ સ્થિર હોય તો સ્થિર રહે અને જો ચાક-ગતિ કરતો હોય તો અચળ કોણીય વેગથી ચાકગતિ ચાલુ રાખે છે.

ઉપર્યુક્ત સમીકરણને ઘટકોના સ્વરૂપમાં લખતાં,

$$\sum_i \tau_{xi} = 0; \ \sum_i \tau_{yi} = 0; \ \text{અને} \ \sum_i \tau_{zi} = 0 \tag{2.5.10 a}$$

ઉદાહરણ 5 : આકૃતિ 2.9માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે m દળનો એક બ્લૉક સમક્ષિતિજ સાથે θ કોણ બનાવતી દિશામાં લાગતા બળ F ની અસર હેઠળ અચળ વેગથી ગતિ કરે છે. જો બ્લૉકની સપાટી અને સમક્ષિતિજ સપાટી વચ્ચે ઘર્ષણબળ f_k હોય, તો લંબ પ્રત્યાઘાતી બળ Nની કાર્યરેખાનું Oથી અંતર શોધો. બ્લૉકની લંબાઈ L અને ઊંચાઈ h છે.



આકૃતિ 2.9

ઉકેલ : બ્લૉક અત્રે જુદાં-જુદાં બળોની અસર હેઠળ હોવા છતાં ચાકગતિ કરતો નથી. પરિણામે તે ચાકગતિય સંતુલનમાં છે. આ સ્થિતિમાં જુદાં-જુદાં બળોને લીધે લાગતા ટૉર્કનો સદિશ સરવાળો શૂન્ય થવો જોઈએ. બિંદુ Oને અનુલક્ષીને બધાં ટૉર્ક લેતાં, $\tau = f_k(0) - (mg)\left(\frac{L}{2}\right) + N(x) - (F\cos\theta)(h) + F\sin\theta(L) = 0.$

(અત્રે સમઘડી દિશામાં ટૉર્ક ઋણ અને વિષમઘડી દિશામાં ટૉર્ક ધન લીધેલ છે).

$$\therefore \quad N(x) = (mg)\left(\frac{L}{2}\right) + (F\cos\theta)(h) - F\sin\theta\ (L) \qquad (1)$$

હવે રેખીય સંતુલન માટે,

$mg = N + F\sin\theta$ અને $F\cos\theta = f_k$

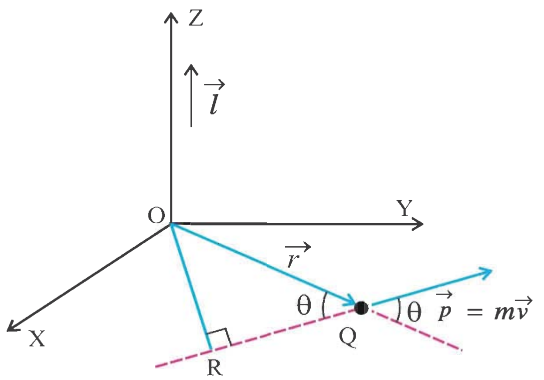
$\therefore\ N = mg - F\sin\theta$

આ મૂલ્યને સમીકરણ (1)માં મૂકતાં અને xને સૂત્રનો કર્તા બનાવતાં,

$$x = \frac{(mg)\left(\frac{L}{2}\right) + (F\cos\theta)(h) - (F\sin\theta)(L)}{mg - F\sin\theta}$$

2.6 કોણીય વેગમાન (Angular Momentum)

(a) કણનું કોણીય વેગમાન (Angular Momentum of a Particle) : ધારો કે આકૃતિ 2.10માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે m દળવાળા કોઈ કણ Qનો કાર્તેઝીય યામ-પદ્ધતિમાં સ્થાનસદિશ $\overrightarrow{OQ} = \vec{r}$ છે. આ કણનો રેખીય વેગ $\vec{v}$ છે. અને તેનું રેખીય વેગમાન $\vec{p} = m\vec{v}$ છે. અહીં કણ Q કોઈ દૃઢ પદાર્થનો કણ હોવો જરૂરી નથી. ધારો કે $\vec{p}$ અને $\vec{r}$ વચ્ચેનો કોણ θ છે. માત્ર સરળતા ખાતર જ કણ અને તેની ગતિને $(x - y)$ સમતલમાં લીધેલ છે. $\vec{r}$ અને $\vec{p}$ના સદિશ ગુણાકારને O બિંદુના સંદર્ભમાં કણનું કોણીય વેગમાન $\vec{l}$ કહે છે.



કણનું કોણીય વેગમાન

આકૃતિ 2.10

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad (2.6.1)$$

$\vec{l}$ નો SI એકમ kg $m^2\ s^{-1}$ અથવા J s.

(i) $\vec{l}$ નું મૂલ્ય સંદર્ભબિંદુની પસંદગી પર આધારિત હોવાથી તેની વ્યાખ્યામાં સંદર્ભબિંદુનો ઉલ્લેખ અનિવાર્ય છે.

(ii) $\vec{l}$ ની દિશા સદિશગુણાકારના જમણાહાથના સ્ક્રુના નિયમ વડે મળે છે. પ્રસ્તુત કિસ્સામાં $\vec{l}$ ની દિશા OZ દિશામાં છે.

(iii) હવે $|\vec{l}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = r\,p\,\sin\theta$

પણ આકૃતિ 2.10 પરથી, $\quad r\sin\theta = OR$

$\therefore\ l = (p)$ (અંતર OR)

આમ, કણનું કોણીય વેગમાન = (રેખીય વેગમાન) (સંદર્ભબિંદુથી રેખીય વેગમાનના સદિશનું લંબઅંતર)

= બિંદુ Oને અનુલક્ષીને રેખીય વેગમાનની ચાકમાત્રા (વ્યાખ્યા પ્રમાણે)

(iv) કણના કોણીય વેગમાનના કાર્તેઝીય ઘટકો :

કોણીય વેગમાનની વ્યાખ્યા આ પ્રમાણે છે.

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

$$= (yp_z - zp_y)\hat{i} + (zp_x - xp_z)\hat{j} + (xp_y - yp_x)\hat{k}$$

$$\vec{l} = l_x\hat{i} + l_y\hat{j} + l_z\hat{k}$$

અત્રે l_x, l_y અને l_z અનુક્રમે X, Y અને Z અક્ષને અનુલક્ષીને કણના કોણીય વેગમાનના ઘટકો છે.

(b) કણનું કોણીય વેગમાન અને તેના પર લાગતા ટૉર્ક વચ્ચેનો સંબંધ (The relation between angular momentum of a particle and torque acting on it) :

સમીકરણ (2.6.1)નું સમયની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}$$

પરંતુ $\dfrac{d\vec{p}}{dt}$ = રેખીય વેગમાનના ફેરફારનો દર

$= \vec{F}$ (બળ) અને $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ (વેગ)

$$\therefore \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} + \vec{v} \times \vec{p}$$

પરંતુ $\vec{v}$ અને $\vec{p}$ એક જ દિશામાં હોવાથી સદિશ ગુણાકાર $\vec{v} \times \vec{p} = 0$

$$\therefore \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} \qquad (2.6.2)$$

આમ, **કોણીય વેગમાનના ફેરફારનો સમય દર ટૉર્ક બરાબર હોય છે.**

આ પરિણામ ન્યૂટનના ગતિના બીજા નિયમ 'રેખીય વેગમાનના ફેરફારનો સમયદર બળ બરાબર હોય છે.' સાથે સામ્ય ધરાવે છે.

(c) કણોના તંત્રનું કોણીય વેગમાન (Angular momentum of system of particles) :

ધારો કે n કણોના બનેલા તંત્રના કણોનાં કોણીય વેગમાન $\vec{l_1}, \vec{l_2}, ...\vec{l_n}$ છે.

તેથી તંત્રનું કુલ કોણીય વેગમાન $\vec{L}$

$$\vec{L} = \vec{l_1} + \vec{l_2} + ... + \vec{l_n} \qquad (2.6.3)$$

$$\therefore \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{l_1}}{dt} + \frac{d\vec{l_2}}{dt} + ... + \frac{d\vec{l_n}}{dt} \qquad (2.6.4)$$

સમીકરણ (2.6.2)નો ઉપયોગ કરતાં

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau_1} + \vec{\tau_2} + ... + \vec{\tau_n}$$

$$\therefore \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} \qquad (2.6.5)$$

આમ, કણોના તંત્રના કોણીય વેગમાનના ફેરફારનો દર તંત્ર પર પ્રવર્તતા પરિણામી બાહ્ય ટૉર્ક બરાબર હોય છે.

(d) દૃઢ પદાર્થનું કોણીય વેગમાન (Angular momentum of a rigid body) :

દૃઢ વસ્તુમાં કણો વચ્ચેનાં સાપેક્ષ અંતરો અફર રહેતાં હોવાથી તે કણોના તંત્રનો ખાસ કિસ્સો છે. આપણે જાણીએ છીએ કે દૃઢ વસ્તુનો દરેક કણ ભ્રમણાક્ષને લંબ એવા સમતલમાં વર્તુળગતિ કરે છે. તેથી દરેક કણનું રેખીય વેગમાન પણ આ વર્તુળના સમતલમાં હોય છે. દરેક કણના વર્તુળમાર્ગના કેન્દ્રને સંદર્ભબિંદુ લઈને દરેક કણ માટે કોણીય વેગમાન મેળવતાં તે ભ્રમણાક્ષને સમાંતર મળે છે. વળી, દરેક કણ માટે $\vec{r}$ અને $\vec{p}$ પરસ્પર લંબ હોય છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\vec{L} = \vec{l_1} + \vec{l_2} + ... + \vec{l_n}$$

સમીકરણ (2.6.1)નો ઉપયોગ કરતાં

$$\vec{L} = \vec{r_1} \times \vec{p_1} + \vec{r_2} \times \vec{p_2} + ... + \vec{r_n} \times \vec{p_n}$$

અત્રે સદિશો $\vec{r}$ અને $\vec{p}$ પરસ્પર લંબ હોવાથી $\vec{L}$ નું મૂલ્ય

$$|\vec{L}| = r_1 p_1 + r_2 p_2 + ... + r_n p_n$$

($\because \vec{r} \perp \vec{p}$, હોવાથી $|\vec{r} \times \vec{p}| = rp \sin 90° = rp$ થશે)

$$\therefore |\vec{L}| = r_1 m_1 v_1 + r_2 m_2 v_2 + ... + r_n m_n v_n$$

($\because p = mv$)

આમ દરેક કણની કોણીય ઝડપ સમાન હોવાથી

$$|\vec{L}| = m_1 r_1^2 \omega + m_2 r_2^2 \omega + ... + m_n r_n^2 \omega$$

($\because v = r\omega$)

$$= (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + ... + m_n r_n^2)\omega$$

$$\therefore |\vec{L}| = I\ |\vec{\omega}| \qquad (2.6.6)$$

અત્રે $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + ... + m_n r_n^2$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

I ને દૃઢ પદાર્થની આપેલ ભ્રમણાક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા કહે છે, જેના વિશે વધુ માહિતી પરિચ્છેદ 2.9માં આપેલ છે. પ્રસ્તુત કિસ્સામાં $\vec{\omega}$ અને $\vec{L}$ બન્ને ભ્રમણાક્ષને સમાંતર હોવાથી I ને અદિશ લઈ શકાય. આ સંજોગોમાં સમીકરણ (2.6.6)ને સદિશ સ્વરૂપે નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \qquad (2.6.7)$$

$$\therefore \frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (2.6.8)$$

સમીકરણ (2.6.5) અને (2.6.8)નો સમન્વય કરતાં,

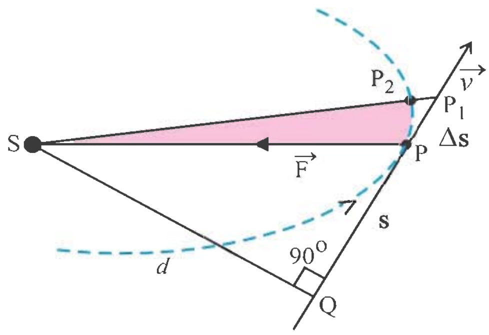
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha} = \vec{\tau} \qquad (2.6.9)$$

કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ (Law of conservation of angular momentum) :

સમીકરણ (2.6.9)માં જો $\vec{\tau} = 0$, ($\vec{L}$ = અચળ)

એટલે કે, **'જો દૃઢ પદાર્થ પર લાગતું પરિણામી બાહ્ય ટૉર્ક શૂન્ય હોય તો તે દૃઢ પદાર્થનું કોણીય વેગમાન અચળ રહે છે.'** આ વિધાનને **કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ કહે છે.**

2.7 કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણનું ભૌમિતિક નિરૂપણ (Geometrical Representation of the Law of Conservation of Angular Momentum)



કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણના નિયમનું ભૌમિતિક નિરૂપણ

આકૃતિ 2.11

આકૃતિ 2.11માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સૂર્યની ફરતે કોઈ એક ગ્રહ P લંબવૃત્તીય (elliptical) કક્ષામાં ગતિ કરે છે. (જે તૂટક રેખા વડે દર્શાવેલ છે.) ધારો કે P પાસે ગ્રહનો રેખીય વેગ $\vec{v}$ છે.

∴ સૂર્યને અનુલક્ષીને ગ્રહનું કોણીય વેગમાન

$$L = mvd \qquad (2.7.1)$$

હવે ત્રિકોણ SQPનું ક્ષેત્રફળ

$$A = \frac{1}{2}(SQ)\ (PQ)$$

$$= \frac{1}{2}(d)\ (s) \qquad (\because PQ = s)$$

Δt સમયમાં ગ્રહ Pથી P_2 પર જાય છે. તે દરમિયાન ત્રિકોણ SQPના ક્ષેત્રફળમાં થતો વધારો ΔA હોય તો,

$$\Delta A = \frac{1}{2}(d)(\Delta s)$$

હવે $lim\ \Delta t \to 0$ લક્ષમાં ત્રિકોણ SPP_2 અને ત્રિકોણ SPP_1નાં ક્ષેત્રફળો સમાન બને છે.

∴ ગ્રહને સૂર્ય સાથે જોડતી રેખા વડે આંતરાતાં ક્ષેત્રફળના ફેરફારનો સમયદર

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}(d)\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{1}{2}(d)(v)$$

બંને બાજુને m વડે ગુણતાં $m\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}mvd$

$$(2.7.2)$$

સમીકરણ (2.7.1)માંથી mvdનું મૂલ્ય મૂકતાં,

$$m\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}L \qquad (2.7.3)$$

હવે ગ્રહ પર સૂર્યને કારણે લાગતાં ગુરુત્વાકર્ષણ બળની કાર્ય રેખા Sમાંથી પસાર થતી હોવાથી આ બળ વડે મળતું સૂર્યને અનુલક્ષીને ટૉર્ક શૂન્ય થાય છે. પરિણામે ગ્રહનું કોણીય વેગમાન L અચળ હોય છે.

$$\therefore \frac{dA}{dt} = \text{અચળ} \qquad (2.7.4)$$

સમીકરણ (2.7.4) ગ્રહોની ગતિ માટેના કેપ્લરનો બીજો નિયમ રજૂ કરે છે. **"સૂર્ય અને ગ્રહને જોડતી રેખાએ એકમસમયમાં આંતરેલ ક્ષેત્રફળ (જેને ક્ષેત્રીય વેગ કહે છે.) અચળ હોય છે."**

આમ, **ક્ષેત્રીય વેગ અચળ હોવો એ કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણના નિયમની ભૌમિતિક રજૂઆત છે.**

2.8 જડત્વની ચાકમાત્રા (Moment of Inertia)

ધારો કે કોઈ દૃઢ પદાર્થના કણોના દળ m_1, m_2, ..., m_n છે. તથા કોઈ આપેલ અક્ષથી તેમના લંબઅંતરો અનુક્રમે r_1, r_2, ..., r_n છે તો $m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + ... + m_nr_n^2$ ને તે પદાર્થની તે અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા (I) કહે છે.

એટલે કે, $I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + ... + m_nr_n^2$

$$= \sum_i m_i r_i^2$$

જડત્વની ચાકમાત્રાનું મૂલ્ય અક્ષની પસંદગી અને તેને અનુલક્ષીને દ્રવ્યના વિતરણ પર આધારિત છે.

ચાકમાત્રાનો SI એકમ kg m^2 છે. તેનું પારિમાણિક સૂત્ર $M^1L^2T^0$ છે.

સમીકરણ $\vec{L} = I\vec{\omega}$ એ, રેખીય ગતિના સમીકરણ $\vec{p} = m\vec{v}$ સાથે સામ્યતા ધરાવે છે. ત્યા $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$ એ રેખીય ગતિના સમીકરણ $\vec{F} = m\vec{a}$ સાથે સામ્યતા ધરાવે છે. આ સામ્યતાના સંદર્ભમાં કહી શકાય કે, રેખીય ગતિમાં દળ જે ભાગ ભજવે છે, તેવો જ ભાગ ચાકગતિમાં જડત્વની ચાકમાત્રા ભજવે છે. **દળ એ રેખીય ગતિ માટે જડત્વ છે અને જડત્વની ચાકમાત્રા એ ચાકગતિ માટે જડત્વ છે.**

ઉદાહરણ 6 : પૃથ્વીને નિયમિત ઘનતા ધરાવતા નક્કર ગોળા તરીકે સ્વીકારી લઈએ અને માનીએ કે તેનું એકાએક સંકોચન થઈ દળમાં ફેરફાર વગર તેની ત્રિજ્યા અડધી થઈ જાય છે, તો હાલનો 24 કલાકનો દિવસ કેટલા કલાકનો થઈ જાય ?

ઉકેલ : પૃથ્વી પર કોઈ બાહ્ય ટૉર્ક લાગતું નથી એમ સ્વીકારીએ તો કોણીય વેગમાન અચળ લઈ શકાય. સમીકરણ (2.6.6) નો ઉપયોગ કરી બંને વખતના પૃથ્વીના કોણીય વેગમાન સરખાવતાં,

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \qquad (1)$$

હવે નક્કર ગોળા માટે તેના વ્યાસને અનુલક્ષીને

$I = \frac{2}{5}MR^2$ હોય છે. જ્યાં M = ગોળાનું દળ છે અને

R = ગોળાની ત્રિજ્યા છે. (જુઓ ટેબલ – 1).

$$\therefore\ I_1 = \frac{2}{5}MR_1^2 \text{ અને } I_2 = \frac{2}{5}MR_2^2$$

પરંતુ, $R_1 = 2R_2$ આ મૂલ્યો સમીકરણ (1)માં મૂકતાં $\omega_2 = 4\omega_1$.

આમ, પૃથ્વીનો નવો ભ્રમણદર ω_2 તેના હાલના ભ્રમણ દર ω_1 કરતાં ચાર ગણો થઈ જાય અને 24 કલાકનો દિવસ 6 કલાકનો થઈ જાય.

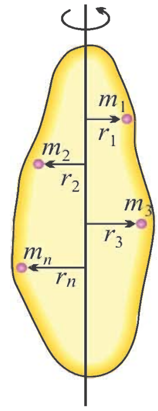
2.9 ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા (Radius of Gyration)

ધારો કે કોઈ દૃઢ પદાર્થનું દળ M છે. તેના દરેક કણનું દળ m હોય તેવા n કણોનો બનેલો છે.

$$\therefore\ m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m \ \therefore\ M = nm$$

આકૃતિ 2.12માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે આપેલ ભ્રમણાક્ષને અનુલક્ષીને પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રા

$$I = mr_1^2 + mr_2^2 + \ldots + mr_n^2$$



ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા

આકૃતિ 2.12

અત્રે r_1, r_2, ... r_n અનુક્રમે પદાર્થના કણોના આપેલ અક્ષથી લંબઅંતરો છે.

$$\therefore\ I = \frac{mn(r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2)}{n}$$

$$= M\frac{(r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2)}{n}$$

$$= MK^2 \qquad (2.9.1)$$

જ્યાં, $K^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2}{n}$

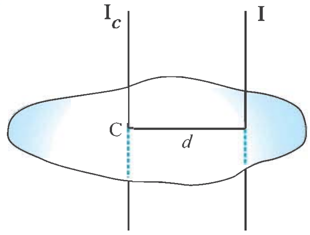
$$= \langle r^2 \rangle \qquad (2.9.2)$$

$$\therefore\ K = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2}{n}} \qquad (2.9.3)$$

અહીં, K^2 એ આપેલ ભ્રમણાક્ષથી પદાર્થના કણોના લંબઅંતરોના વર્ગોનું સરેરાશ (mean) મૂલ્ય દર્શાવે છે. K ને આપેલ ભ્રમણાક્ષને અનુલક્ષીને દૃઢ પદાર્થની **ચક્રાવર્તન ત્રિજ્યા** કહે છે. તેનો SI એકમ m છે.

2.10 જડત્વની ચાકમાત્રા અંગેના બે પ્રમેયો (Two Theorems Regarding Moment of Inertia)

(i) સમાંતર અક્ષનું પ્રમેય (Theorem of parallel axes) :



સમાંતર અક્ષનું પ્રમેય

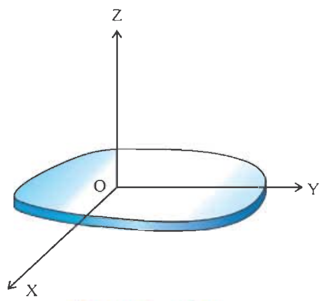
આકૃતિ 2.13

આ પ્રમેયનું કથન આ પ્રમાણે છે. ''પદાર્થની કોઈપણ અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા I એ તેના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી સમાંતર અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા I_c તથા પદાર્થના દળ M અને બે સમાંતર અક્ષો વચ્ચેના લંબઅંતર d ના વર્ગના ગુણાકારના સરવાળા બરાબર થાય છે.'' (જુઓ આકૃતિ 2.13)

$$I = I_c + Md^2 \qquad (2.10.1)$$

(*ii*) લંબઅક્ષનું પ્રમેય (Theorem of perpendicular axes) :

આ પ્રમેય સમતલીય (planar) પદાર્થોને જ લાગુ પડે છે. સમતલીય પદાર્થના સમતલમાં X અને Y-અક્ષો લઈએ (જુઓ આકૃતિ 2.14) તો સમતલને લંબ એવી Z-અક્ષને અનુલક્ષીને પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રા I_Z એ X-અક્ષને અને Y-અક્ષને અનુલક્ષીને મળતી જડત્વની ચાકમાત્રાઓના સરવાળા બરાબર હોય છે.



લંબઅક્ષનું પ્રમેય

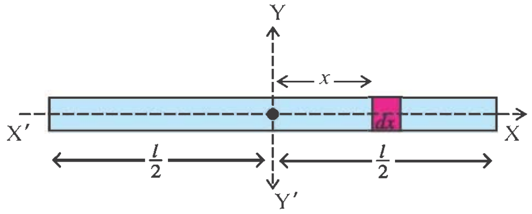
આકૃતિ 2.14

$$I_Z = I_X + I_Y \qquad (2.10.2)$$

જ્યાં I_X અને I_Y અનુક્રમે X અને Y અક્ષને અનુલક્ષીને પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રાઓ છે. જો સમતલીય પદાર્થ YZ સમતલમાં હોય તો $I_x = I_Y + I_Z$ અને જો તે XZ સમતલમાં હોય તો $I_Y = I_X + I_Z$ થશે.

2.11 જડત્વની ચાકમાત્રા અને ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યાની ગણતરી (Calculation of moment of inertia and radius of gyration)

નિયમિત પાતળા સળિયાની તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી તથા તેની લંબાઈને લંબઅક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા.



પાતળા સળિયાની જડત્વની ચાકમાત્રા

આકૃતિ 2.15

આકૃતિ 2.15 દર્શાવ્યા પ્રમાણે M દળ તથા l લંબાઈ ધરાવતો એક નિયમિત આડછેદ તથા નિયમિત દળ વિતરણ ધરાવતો સળિયો છે. સળિયાના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી તથા સળિયાની લંબાઈને લંબ હોય તેવા અક્ષ YY' ધ્યાનમાં લો. યામપદ્ધતિનું ઊગમબિંદુ સળિયાના કેન્દ્ર O પર સંપાત થાય છે અને X–અક્ષ સળિયાની લંબાઈ પર સંપાત થાય છે. ઊગમબિંદુથી x અંતરે dx લંબાઈ ધરાવતો સળિયાનો સૂક્ષ્મ ખંડ વિચારો.

સળિયાની એકમલંબાઈ દીઠ દળ $\lambda = \frac{M}{l}$

dx લંબાઈના ખંડનું દળ $\lambda dx = \frac{M}{l} dx$

આ ખંડ માટે, Y-અક્ષની સાપેક્ષે જડત્વની ચાકમાત્રા

$$dI = \frac{M}{l} dx \cdot x^2 \qquad (2.11.1)$$

અક્ષ Y ની સાપેક્ષે સમગ્ર સળિયાના જડત્વની ચાકમાત્રા શોધવા માટે સમીકરણ (2.11.1)નું $x = -l/2$ થી $x = l/2$ ના અંતરાલ વચ્ચે સંકલન કરતાં,

$$\therefore\ I = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{M}{l} dx\ x^2 = \frac{M}{l} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-l/2}^{+l/2}$$

$$= \frac{M}{3l} \left[\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8} \right]$$

$$I = \frac{Ml^2}{12} \qquad (2.11.2)$$

નિયમિત પાતળા સળિયા માટે તેનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર એ ભૌમિતિક કેન્દ્ર પર છે. આથી, આ જડત્વની ચાકમાત્રાને તેના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રમાંથી પસાર થતા અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા (I_c) પણ કહે છે.

ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા : સમીકરણ 2.11.2ને $I = MK^2$ સાથે સરખાવતાં,

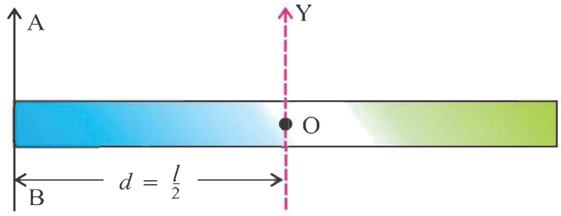
$$K^2 = \frac{l^2}{12}$$

$$\therefore\ K = \frac{l}{\sqrt{12}}$$

ઉદાહરણ 7 : M દળવાળા તથા l લંબાઈ અને નિયમિત આડછેદવાળા સળિયાની તેના એક છેડામાંથી પસાર થતી લંબાઈને લંબ એવી અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા અને ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે સળિયાનું દળ M અને લંબાઈ l છે. સળિયાના કેન્દ્રથી છેડા સુધીનું અંતર $d = l/2$ છે.

સમીકરણ (2.11.2) અનુસાર આવા સળિયાની તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી તથા લંબાઈને લંબ એવી અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા $I_c = \frac{Ml^2}{12}$.



આકૃતિ 2.16

સમાંતર અક્ષના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં સળિયાના છેડામાંથી પસાર થતી તથા લંબાઈને લંબ અક્ષને અનુલક્ષીની જડત્વની ચાકમાત્રા

$$I = I_c + Md^2$$

$$= \frac{Ml^2}{12} + \frac{Ml^2}{4} \quad (\because \ d = l/2)$$

$$\therefore \ I = \frac{Ml^2}{3}$$

હવે ઉપર્યુક્ત સમીકરણને $I = MK^2$ સાથે સરખાવતાં

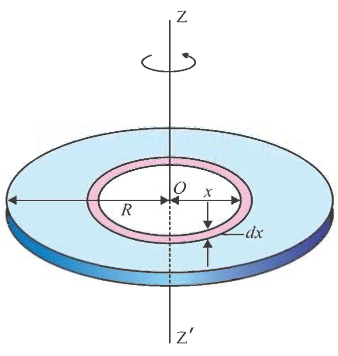
$$K^2 = \frac{l^2}{3}$$

$\therefore$ ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા $K = \frac{l}{\sqrt{3}}$

ઉદાહરણ 8 : નિયમિત વર્તુળાકાર તકતીની તેના ભૌમિતિક કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અને તેના સમતલને લંબ અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા તથા ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા શોધો :

ઉકેલ :

આકૃતિ 2.17માં દર્શાવ્યા મુજબ M દ્રવ્યમાન તથા R ત્રિજ્યા ધરાવતી નિયમિત વર્તુળાકાર તકતીને તેના ભૌમિતિક કેન્દ્ર Oમાંથી પસાર થતી તથા તેના સમતલને લંબ આવેલી ZZ' અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા શોધવી છે.



આકૃતિ 2.17

અત્રે તકતીનું ક્ષેત્રફળ $A = \pi R^2$ તથા તકતીનું એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ દ્રવ્યમાન

$$\sigma = \frac{\text{તકતીનું દ્રવ્યમાન}}{\text{તકતીનું ક્ષેત્રફળ}} = \frac{M}{\pi R^2}$$

આ તકતીને જુદી જુદી ત્રિજ્યાઓવાળી ઘણી બધી સમકેન્દ્રીય રિંગોની બનેલી કલ્પો તથા તેમનું કેન્દ્ર આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ O છે.

આકૃતિ 2.17માં દર્શાવ્યા મુજબ આવી કોઈ એક રિંગ ધ્યાન લો. ધારો કે તેની ત્રિજ્યા x છે તથા પહોળાઈ dx છે. આ રિંગનું ક્ષેત્રફળ $a = 2\pi x{\cdot}dx$ તથા

$$\text{દ્રવ્યમાન } m = \sigma{\cdot}a = \frac{M}{\pi R^2}(2\pi x{\cdot}dx)$$

$$= \frac{2Mx}{R^2}\,dx.$$

આ રિંગની ZZ' અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા dI કહીએ તો

$$dI = (\text{રિંગનું દ્રવ્યમાન})(\text{રિંગની ત્રિજ્યા})^2$$

$$= \frac{2Mx}{R^2}dx{\cdot}x^2 \qquad (1)$$

આમ, આવી જુદી-જુદી ત્રિજ્યાઓવાળી સમકેન્દ્રીય રિંગોની ZZ'ને અનુલક્ષીને ચાકમાત્રાઓ શોધી તેનો સરવાળો કરતાં સમગ્ર વર્તુળાકાર ZZ'ને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા મળે.

આ માટે સમીકરણ (1)નું $x = 0$ થી $x = R$ના અંતરાલ વચ્ચે સંકલન કરતાં,

$$I = \int dI = \int_0^R \frac{2Mx^3}{R^2} \cdot dx$$

$$I = \frac{2M}{R^2}\int_0^R x^3 \cdot dx$$

$$= \frac{2M}{R^2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^R$$

$$= \frac{2M}{R^2}\left[\frac{R^4}{4} - 0\right]$$

$$\therefore \ I = \frac{1}{2}MR^2 \qquad (2)$$

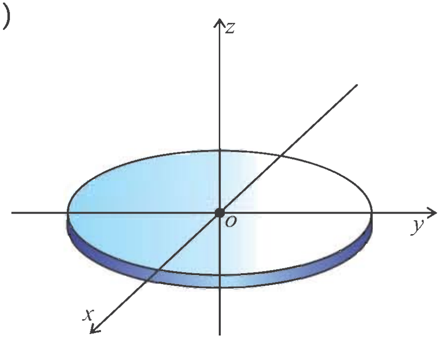
સમીકરણ (2)ને $I = MK^2$ સાથે સરખાવતાં

$$K^2 = \frac{1}{2}R^2$$

ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા $K = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

ઉદાહરણ 9 : નિયમિત ઘનતા ધરાવતી તકતીની તેના વ્યાસ સાથે સંપાત થતી કોઈ એક અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે M દળ અને R ત્રિજ્યા ધરાવતી તકતી XY સમતલમાં છે. તકતીના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી તથા તેના સમતલને લંબ Z અક્ષ છે. (જુઓ આકૃતિ 2.18)



આકૃતિ 2.18

આ અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા

$I_z = \frac{MR^2}{2}$ છે

લંબઅક્ષોના પ્રમેય અનુસાર

$I_z = I_x + I_y$

તકતી X અને Y અક્ષોને સંમિત હોવાથી

$\therefore I_x = I_y \qquad \therefore I_z = 2I_x$

વળી, $I_z = \frac{MR^2}{2}$

$$\therefore \frac{MR^2}{2} = 2I_x$$

$$\therefore I_x = \frac{MR^2}{4}$$

ઉદાહરણ 10 : એક પોલા નળાકારનું દળ 4 kg અને ત્રિજ્યા 0.1 m છે. તેની ભૌમિતિક અક્ષને અનુલક્ષીને તે ભ્રમણ કરી શકે છે. તેની ફરતે એક પાતળી દોરી વીંટાળી દોરડાના છૂટાછેડા પર નળાકારની સપાટીએ સ્પર્શક રૂપે રહે તેમ 50 N બળ લગાડતાં તે ચાકગતિ શરૂ કરે છે, તો નીચેના જવાબ શોધો.

(1) નળાકાર પર લાગતું ટૉર્ક (2) નળાકારનો કોણીય પ્રવેગ (3) 4 sના અંતે કોણીય વેગ (4) 4 sના અંતે કોણીય વેગમાન (5) 4 sના અંતે ચાકગતિ ઊર્જા (6) 4 sમાં કરેલું કોણીય સ્થાનાંતર (7) 4 s દરમિયાન નળાકાર પર થતું કાર્ય (8) 4 sના અંતે પાવર.

ઉકેલ :

(1) નળાકાર પર લાગતું ટૉર્ક :

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = rF \sin\theta\ \hat{n}$$

$$\therefore |\vec{\tau}| = rF \qquad (\because \theta = \frac{\pi}{2})$$

$= (0.1)\ (50) = 5$ N m

(2) નળાકારનો કોણીય પ્રવેગ (α) :

અત્રે $\tau = I\alpha = mr^2\alpha$

$\therefore 5 = (4)\ (0{\cdot}1)^2\ (\alpha) = 0.04\ \alpha$

$\therefore \alpha = 125$ rad s^{-2}

(3) કોણીય વેગ (ω) :

$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + (125)\ (4)$

$= 500$ rad s^{-1}

(4) કોણીય વેગમાન (L) :

$L = I\omega = mr^2\omega$

$\therefore L = (4)\ (0{\cdot}1)^2\ (500) = (0{\cdot}04)\ (500)$

$= 20$ kg m^2 s^{-1}

(5) ચાકગતિ-ઊર્જા :

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mr^2\ \omega^2$$

$$= \frac{1}{2}(4)\ (0{\cdot}1)^2\ (500)^2$$

$= 5000$ J

(6) 4 sમાં કરેલું કોણીય સ્થાનાંતર :

$$\theta = \left[\frac{\omega_0 + \omega}{2}\right]t$$

$$= \left[\frac{0+500}{2}\right]4$$

$= 1000$ rad

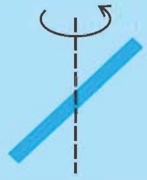
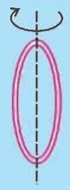
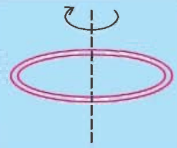
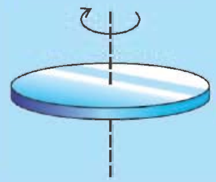
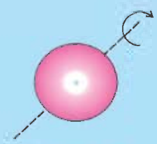
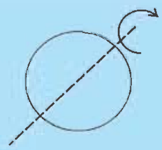
(7) 4 sમાં કરેલું કાર્ય W = આ સમયમાં નળાકારને મળેલી ગતિ-ઊર્જા = 5000 J

અથવા કાર્ય $\omega = \tau\theta = 5 \times 1000 = 5000$ J

(8) 4 sના અંતે પાવર

$P = \tau\omega = 5 \times 500 = 2500$ watt

ટેબલ 2.1 : કેટલાક સંમિત પદાર્થોની જડત્વની ચાકમાત્રા અને ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા

પદાર્થ	અક્ષ	આકૃતિ	I	K
L લંબાઈનો પાતળો સળિયો	તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી તથા સળિયાને લંબ		$\frac{1}{12}ML^2$	$\frac{L}{2\sqrt{3}}$
R ત્રિજ્યાની વીંટી	કોઈ પણ વ્યાસ		$\frac{1}{2}MR^2$	$\frac{R}{\sqrt{2}}$
R ત્રિજ્યાની વીંટી	કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અને વીંટીના સમતલને લંબ		MR^2	R
R ત્રિજ્યાની વર્તુળાકાર તકતી	કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અને તેના પૃષ્ઠને લંબ		$\frac{1}{2}MR^2$	$\frac{R}{\sqrt{2}}$
R ત્રિજ્યાની વર્તુળાકાર તકતી	કોઈ પણ વ્યાસ		$\frac{1}{4}MR^2$	$\frac{R}{2}$
R ત્રિજ્યાનો પોલો નળાકાર	નળાકારની ભૌમિતિક અક્ષ		MR^2	R
R ત્રિજ્યાનો નક્કર નળાકાર	નળાકારની ભૌમિતિક અક્ષ		$\frac{1}{2}MR^2$	$\frac{R}{\sqrt{2}}$
R ત્રિજ્યાનો નક્કર ગોળો	કોઈ પણ વ્યાસ		$\frac{2}{5}MR^2$	$\sqrt{\frac{2}{5}}R$
R ત્રિજ્યાનો પોલો ગોળો	કોઈ પણ વ્યાસ		$\frac{2}{3}MR^2$	$\sqrt{\frac{2}{3}}R$

ટેબલ 2.2 : રેખીય ગતિ અને ચાકગતિની ભૌતિક રાશિઓની સરખામણી

રેખીય ગતિ	ચાકગતિ
રેખીય સ્થાનાંતર, $\vec{d}$	કોણીય સ્થાનાંતર, θ
રેખીય વેગ, $\vec{v}$	કોણીય વેગ, $\vec{\omega}$
રેખીય પ્રવેગ, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	કોણીય પ્રવેગ, $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
દળ, m	જડત્વની ચાકમાત્રા, I
રેખીય વેગમાન, $\vec{p} = m\vec{v}$	કોણીય વેગમાન, $\vec{L} = I\vec{\omega}$
બળ, $\vec{F} = m\vec{a}$ ન્યૂટનનો બીજો નિયમ; $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	ટૉર્ક, $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$ ન્યૂટનના બીજા નિયમ જેવું જ પરિણામ, $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
રેખીય ગતિ-ઊર્જા, $K = \frac{1}{2}mv^2$	ચાકગતિ-ઊર્જા $K = \frac{1}{2}I\omega^2$
કાર્ય, $W = \vec{F}\cdot\vec{d}$	કાર્ય, $W = \tau\theta$
પાવર, $P = Fv$	પાવર, $P = \tau\omega$
અચળ પ્રવેગી રેખીય ગતિનાં સમીકરણો : $v = v_0 + at$ $d = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ $2ad = v^2 - v_0^2$	અચળ કોણીય પ્રવેગવાળી ચાકગતિનાં સમીકરણો : $\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $2\alpha\theta = \omega^2 - \omega_0^2$

ઉદાહરણ 11 : એક વર્તુળાકાર ટર્નટેબલ 20 rpm કોણીય ઝડપથી તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી ઊર્ધ્વ અક્ષને અનુલક્ષીને સમક્ષિતિજ તલમાં ભ્રમણ કરે છે. 60 kg દળવાળો માણસ આ ટેબલની કિનારી પર ઊભો છે. આ માણસ કિનારી પરથી કેન્દ્ર પર જાય, તો ટર્નટેબલ હવે કેટલી કોણીય ઝડપથી ભ્રમણ કરશે ? માણસને બિંદુવત્ પદાર્થ ગણો અને ટર્ન ટેબલને નિયમિત તકતી ગણો. ટર્નટેબલનું દળ 200 kg છે.

ઉકેલ : વ્યક્તિનું દળ $m = 60$ kg, ટર્નટેબલનું દળ $M = 200$ kg, $\omega_1 = 20$ rpm.

અત્રે તંત્ર પરનું બાહ્ય ટૉર્ક શૂન્ય છે. તેથી કોણીય વેગમાન અચળ રહે છે.

$\therefore$ (ટર્નટેબલનું + વ્યક્તિનું પ્રારંભિક કોણીય વેગમાન = તેમનું અંતિમ કોણીય વેગમાન

$$\left(\frac{MR^2}{2} + mR^2\right)\omega_1 = \frac{MR^2}{2}\omega_2$$

$$\therefore \left(\frac{M}{2} + m\right)\omega_1 = \frac{M}{2}\omega_2$$

$$\therefore (100 + 60)(20) = 100\omega_2$$

$$\therefore \omega_2 = 32 \text{ rpm}$$

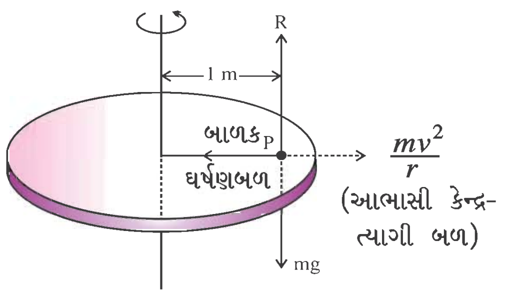
નોંધ : આ ઉદાહરણમાં અંતિમ ગતિ ઊર્જા, પ્રારંભિક ગતિ-ઊર્જા કરતાં વધારે મળશે તે ચકાસી જુઓ. ગતિ-

ઊર્જાનો આ વધારો માણસ વડે કિનારી પરથી કેન્દ્ર તરફ આવતાં થતું કાર્ય છે. આ ગણતરી કરવા ટર્ન ટેબલની ત્રિજ્યા R = 1·5 m લો.

ઉદાહરણ 12 : ચાકગતિ કરતા ચકડોળના પાટિયા પર તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અને તેના સમતલને લંબ એવી ભ્રમણાક્ષથી 1 m દૂર m દળનો એક બાળક બેઠેલ છે. આ ચકડોળને કેટલા કોણીય વેગથી ભ્રમણ કરાવીએ, તો આ બાળક ચકડોળના પાટિયા પર સરકવાની તૈયારીમાં હોય ? બાળક અને પાટિયાની સપાટી વચ્ચેનો ઘર્ષણાંક 0.25 છે.

$g = 10 \ m \ s^{-2}$ લો.

ઉકેલ : P બિંદુએ બાળક પર લાગતાં જુદાં-જુદાં બળો આકૃતિ 2.19માં દર્શાવ્યાં છે.



આકૃતિ 2.19

અહીં, R = લંબપ્રત્યાઘાતી બળ તથા $\frac{mv^2}{r}$ = કેન્દ્રત્યાગી (આભાસી) બળ છે. જ્યારે ઘર્ષણબળ $\mu R = \frac{mv^2}{r}$ થાય, ત્યારે બાળક ચકડોળના પાટિયા પર સરકવાની તૈયારીમાં હોય.

$$\frac{mv^2}{r} = \mu R = \mu mg \qquad (\because R = mg)$$

$$\therefore r^2\omega^2 = r\mu g \qquad (\because v = r\omega)$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{\mu g}{r}}$$

$$= \sqrt{\frac{0{\cdot}25 \times 10}{1}}$$

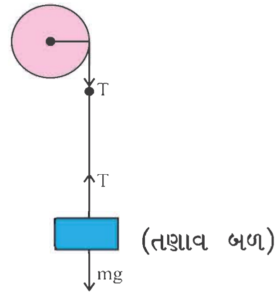
$$= 1{\cdot}58 \ \text{rad s}^{-1}.$$

ઉદાહરણ 13 : R ત્રિજ્યા અને દળ M વાળી લીસી તકતીને ફરતે દોરી વીંટાળી તેના મુક્ત છેડે m દળવાળો પદાર્થ લટકાવવામાં આવેલ છે. હવે આ પદાર્થને નીચે ઊતરવા દેવામાં આવે છે. દર્શાવો કે તકતીનો કોણીય પ્રવેગ $\alpha = \frac{mg}{R\left(m + \frac{M}{2}\right)}$ છે.

ઉકેલ : લટકાવેલ દળ અને તકતી પર લાગતાં બળો આકૃતિ 2.20માં દર્શાવ્યા છે. લટકાવેલ પદાર્થની રેખીય ગતિનું સમીકરણ

$ma = mg - T$ (જ્યાં, T = દોરીમાં તણાવ)

$\therefore T = m(g - a)$



આકૃતિ 2.20

હવે તકતી પર લાગતું ટૉર્ક $\tau = RT$

$$(\because \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F})$$

$$\therefore I\alpha = RT \ \therefore \alpha = \frac{RT}{I} = \frac{Rm(g-a)}{I}$$

$$\therefore \alpha = \frac{Rm(g-a)}{MR^2/2} \ \therefore \alpha = \frac{2m}{RM}(g - a)$$

પરંતુ $a = R\alpha$

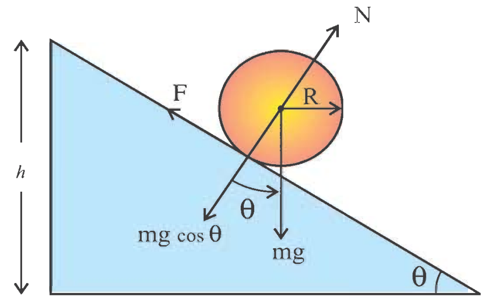
$$\therefore \alpha = \frac{2mg}{RM} - \frac{2mR\alpha}{RM}$$

$$= \frac{mg}{R\left(m + \frac{M}{2}\right)}$$

2.12 સરક્યા વિના ગબડતા દઢ પદાર્થો (Rigid Bodies Rolling Without Slipping)

દઢ પદાર્થ જ્યારે સરક્યા વિના ગબડતો હોય છે ત્યારે તેની ગતિ, રેખીય ગતિ અને ચાકગતિની મિશ્રિત ગતિ હોય છે. દઢ પદાર્થનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર રેખીય ગતિ કરતું હોય છે તથા પદાર્થ પોતે તેની અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતો હોય છે.

આવી મિશ્રિત ગતિનાં વર્ણનમાં ઉપર્યુક્ત બંને ગતિનું વર્ણન એકબીજાથી સ્વતંત્ર રીતે કરી શકાય છે.



સરક્યા વિના ગબડતા દૃઢ પદાર્થ

આકૃતિ 2.21

આકૃતિ 2.21માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ધારો કે કોઈ એક દૃઢ પદાર્થ h ઊંચાઈ અને સમક્ષિતિજ સાથે θ કોણ ધરાવતા ઢાળની ટોચ પરથી સરક્યા વિના ગબડે છે. અત્રે પદાર્થનું દળ m, જડત્વની ચાકમાત્રા I, ભૌમિતિક ત્રિજ્યા R અને ચક્રાવર્તન ત્રિજ્યા K છે. જ્યારે પદાર્થ ઢાળના તળિયે પહોંચે છે, ત્યારે તેની સ્થિતિ ઊર્જામાં mgh જેટલો ઘટાડો થાય છે. યાંત્રિક ઊર્જાસંરક્ષણના નિયમ અનુસાર સ્થિતિ-ઊર્જાનો આ ઘટાડો ગતિ-ઊર્જામાં વધારા તરીકે રૂપાંતરિત થતો હોય છે. અત્રે,

પદાર્થની ગતિ-ઊર્જા = રેખીય ગતિ-ઊર્જા + ચાક ગતિ-ઊર્જા

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

યાંત્રિક ઊર્જાના સંરક્ષણના નિયમ અનુસાર,

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad (2.12.1)$$

હવે, $\omega = v/R$ અને $I = MK^2$નો ઉપયોગ સમીકરણ (2.12.1)માં કરતાં,

(**નોંધ** : $\omega = v/R$ પદાર્થ સરક્યા વિના ગબડતો હોય ત્યારે જ લાગુ પડે છે. ગબડવા સાથે સરકતા પદાર્થ માટે આ સમીકરણ વાપરી શકાય નહીં.)

$$v^2 = \frac{2gh}{\left[1+\frac{K^2}{R^2}\right]} \qquad (2.12.2)$$

જો ઢાળની લંબાઈ d હોય અને પદાર્થ સ્થિર સ્થિતિમાંથી ગતિની શરૂઆત કરી a જેટલા રેખીય પ્રવેગ સાથે ઢાળના તળિયે પહોંચે તો,

$$\therefore\ v^2 = 2ad$$

આકૃતિની ભૂમિતિ પરથી,

$$d = \frac{h}{\sin\theta}$$

$$\therefore\ v^2 = \frac{2ah}{\sin\theta} \qquad (2.12.3)$$

સમીકરણ (2.11.2) અને (2.12.3)નો સમન્વય કરતાં,

$$a = \frac{g\sin\theta}{\left[1+\frac{K^2}{R^2}\right]} \qquad (2.12.4)$$

અત્રે રેખીય પ્રવેગ a ઢાળની સપાટીને સમાંતર હોવાથી તેનું મૂલ્ય gના ઢાળને સમાંતર ઘટક $g\ \sin\theta$ જેટલું થવું જોઈએ. પરંતુ સમીકરણ (2.12.4) અનુસાર

આ મૂલ્ય $\dfrac{g\sin\theta}{\left[1+\frac{K^2}{R^2}\right]}$ મળે છે.

∴ રેખીય પ્રવેગમાં થતો ઘટાડો

$$= g\sin\theta - \frac{g\sin\theta}{\left[1+\frac{K^2}{R^2}\right]}$$

$$= g\sin\theta \left[\frac{K^2}{K^2+R^2}\right]$$

રેખીય પ્રવેગમાં થતો આ ઘટાડો ગબડતા પદાર્થ પર લાગતાં ઘર્ષણબળ Fને આભારી છે.

આ ઘર્ષણ બળની વિરુદ્ધ થતું કાર્ય ચાકગતિમાં પરિણમે છે અને તેથી જ ઘર્ષણબળની હાજરીમાં પણ આપણે યાંત્રિક-ઊર્જાના સંરક્ષણનો નિયમ વાપરી શક્યા છીએ.

આમ, ઘર્ષણબળ

$$F = mg\sin\theta \left[\frac{K^2}{K^2+R^2}\right] \qquad (2.12.5)$$

હવે આકૃતિ 2.21માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે લંબપ્રત્યાઘાતી બળ N અને $mg\cos\theta$ એકબીજાને સમતોલતાં હોવાથી

$$N = mg\cos\theta \qquad (2.22.6)$$

સમીકરણ (2.11.5)ને સમીરણ (2.11.6) વડે ભાગતાં,

$$\frac{F}{N} = \left[\frac{K^2}{K^2+R^2}\right]\tan\theta$$

પરંતુ, $\frac{F}{N} = \mu_s$ (સ્થિત-ઘર્ષણાંક)

$$\therefore \mu_s = \left[\frac{K^2}{K^2+R^2}\right] tan\theta$$

$$\therefore \mu_s = \frac{1}{\left[1+\frac{R^2}{K^2}\right]} tan\theta \qquad (2.12.7)$$

અત્રે ગબડતાં પદાર્થની સપાટી પરની જે રેખા આપેલી ક્ષણે ઢાળને અટકે છે, તે તત્ક્ષણ પૂરતી સ્થિર હોય છે અને તેથી ઉપરના સમીકરણ (2.11.7)માં સ્થિત ઘર્ષણાંક વાપર્યો છે.

ઘર્ષણનાં કારણે પદાર્થ સરક્યા વિના ગબડતો હોવાથી સમીકરણ (2.12.7) પરથી કહી શકાય કે જો,

$$\mu_s \geq \frac{1}{\left[1+\frac{R^2}{K^2}\right]} tan\theta \qquad (2.12.8)$$

શરત પળાય તો જ પદાર્થ ઢાળ પરથી સરક્યા સિવાય ગબડી શકે છે.

ખાસ કિસ્સા :

(1) પાતળી વીંટી :

ટેબલ 1માંથી પાતળી વીંટી માટે K = R

Kનું આ મૂલ્ય સમીકરણ (2.12.8)માં મૂકતાં,

$$\mu_s \geq \frac{1}{2} tan\theta \qquad (2.12.9)$$

(2) વર્તુળાકાર તકતી : $K = \frac{R}{\sqrt{2}}$ (ટેબલ 1માંથી)

Kનું આ મૂલ્ય સમીકરણ (2.12.8)માં મૂકતાં,

$$\mu_s \geq \frac{1}{3} tan\theta \qquad (2.12.10)$$

(3) નક્કર ગોળો : $K = \sqrt{\frac{2}{5}} R$ (ટેબલ 1માંથી)

આ મૂલ્ય સમીકરણ (2.12.8)માં મૂકતાં

$$\mu_s \geq \frac{2}{7} tan\theta \qquad (2.12.11)$$

સારાંશ

1. **દૃઢ પદાર્થ :** જે તંત્રમાં કણો વચ્ચેનાં સાપેક્ષ અંતરો અફર જળવાઈ રહેતાં હોય તેને દૃઢ પદાર્થ **(rigid body)** કહે છે.

   રોટેશનલ કાઈનેમેટિક્સ : જ્યારે દૃઢ પદાર્થની ચાકગતિનાં કારણોની ચિંતા કર્યા સિવાય માત્ર ચાકગતિનું વર્ણન કરવામાં આવે, ત્યારે તે વિષયાંગને રોટેશનલ કાઈનેમેટિક્સ કહે છે.

   રોટેશનલ ડાઈનેમિક્સ : દૃઢ પદાર્થની ચાકગતિનું, તે માટે જવાબદાર કારણો તેમજ પદાર્થના ગુણધર્મો સાથે વર્ણન કરીએ, તો તે વિષયાંગને રોટેશનલ ડાઈનેમિક્સ કહે છે.

2. **કોણીય ઝડપ :** $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ તેનો SI એકમ rad s^{-1} અથવા rotation s^{-1}

   કોણીય વેગ અને રેખીય વેગ વચ્ચેનો અદિશ સંબંધ

   $v = r\omega$

   કોણીય વેગ અને રેખીય વેગ વચ્ચેનો સદિશ સંબંધ

   $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

   જમણા હાથના સ્ક્રૂનો નિયમ :

   જમણા હાથના સ્ક્રૂને ભ્રમણાક્ષને સમાંતર ગોઠવી, વસ્તુ જે રીતે ભ્રમણ કરતી હોય તે જ રીતે સ્ક્રૂને ભ્રમણ આપતાં સ્ક્રૂ જે દિશામાં ખસે, તેને $\vec{\omega}$ની દિશા ગણવામાં આવે છે.

   કોણીય પ્રવેગનું સૂત્ર :

   $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ તેનો SI એકમ rad s^{-2} અથવા rotation s^{-2}

   રેખીય પ્રવેગ $\vec{a}$ અને કોણીય પ્રવેગ $\vec{\alpha}$ વચ્ચેનો સંબંધ

   $\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\alpha} \times \vec{r} = \vec{\alpha_r} + \vec{\alpha_T}$

$\vec{\omega} \times \vec{v}$ ને રેખીય પ્રવેગનો ત્રિજ્યાવર્તી ઘટક a_r કહે છે.

$$a_r = \omega v = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

$\vec{\alpha} \times \vec{r}$ ને રેખીય પ્રવેગનો સ્પર્શીય ઘટક a_T કહે છે.

$$a_T = \alpha r$$

રેખીય પ્રવેગનાં માનાંક

$$a = \sqrt{a^2{}_r + a^2{}_T} = \sqrt{\omega^2 v^2 + \alpha^2 r^2}$$

3. અચળ કોણીય પ્રવેગવાળી ચાકગતિ અને અચળ રેખીય પ્રવેગવાળી રેખીય ગતિનાં સૂત્રો વચ્ચેની સામ્યતા.

રેખીય ગતિ	ચાક ગતિ
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$d = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}t^2$
$d = \left(\frac{v + v_0}{2}\right)t$	$\theta = \left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\right)\cdot t$
$d = \left(\frac{v^2 - v_0{}^2}{2a}\right)$	$\theta = \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha}\right)$

4. રેખીય ગતિમાં જે ભાગ બળ ભજવે છે, તે જ ભાગ ચાકગતિમાં ટૉર્ક ભજવે છે.

ટૉર્ક $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ = બળની ચાકમાત્રા.

તેની દિશા જમણા હાથના સ્ક્રૂના નિયમ પરથી મળે છે.

જો સ્થિર ભ્રમણાક્ષ પરનો એકમસદિશ $\hat{n}$ હોય, તો ટૉર્કનો $\vec{\tau}\cdot\hat{n}$ ઘટક ચાકગતિ માટે જવાબદાર હોય છે.

ટૉર્ક એ ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરવા માટે બળની અસરકારકતાનું માપ છે.

બળયુગ્મની ચાકમાત્રા = (બેમાંથી એક બળનું માન)(બે બળો વચ્ચેનું લંબઅંતર)

દૃઢ પદાર્થના રેખીય સંતુલન માટે જો દૃઢ પદાર્થ પર લાગતાં બળો

$\vec{F}_1, \vec{F}_2$ ..... $\vec{F}_n$ હોય, તો $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots\dots\dots + \vec{F}_n = 0$, થવું જરૂરી છે.

ઉપર્યુક્ત બળોને કારણે ઉદ્ભવતાં ટૉર્ક $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \dots\dots \vec{\tau}_n$ અને $\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \dots\dots + \vec{\tau}_n = 0$ ચાકગતીય સંતુલનની શરત છે.

5. રેખીય વેગમાનની ચાકમાત્રાને કોણીય વેગમાન કહે છે.

કોણીય વેગમાન $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$

કોણીય વેગમાનના ફેરફારનો સમયદર ટૉર્ક દર્શાવે છે.

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

કણોના તંત્ર પર પ્રવર્તતું ટૉર્ક

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

દૃઢ વસ્તુ માટે

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

જ્યાં I જડત્વની ચાકમાત્રા છે.

જડત્વની ચાકમાત્રા $I = m_1 r^2_1 + m_2 r^2_2 + ... + m_n r^2_n$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\alpha} = \vec{\tau}$$

6. કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ :

"જો દૃઢ પદાર્થ પર લાગતું પરિણામી ટૉર્ક શૂન્ય હોય, તો દૃઢ પદાર્થનું કોણીય વેગમાન અચળ રહે છે."

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{અચળ}$$

7. કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણના નિયમની ભૌમિતિક રજૂઆત પરથી ગ્રહોની ગતિ માટેનો કૅપ્લરનો બીજો નિયમ મળી શકે છે, જે નીચે મુજબ છે :

"સૂર્ય અને ગ્રહને જોડતી રેખાએ એકમસમયમાં આંતરેલ ક્ષેત્રફળ અચળ હોય છે."

સૂત્ર સ્વરૂપે લખતાં $\frac{dA}{dt}$ = અચળ. અત્રે $\frac{dA}{dt}$ ને ક્ષેત્રીય વેગ કહે છે.

8. દૃઢ પદાર્થ માટે વ્યાપક સ્વરૂપે $I = MK^2$

જ્યાં, $K = \sqrt{\frac{r_1^{\,2} + r_2^{\,2} + ... + r_n^{\,2}}{n}}$

અહીં K ને ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા કહે છે.

9. જડત્વની ચાકમાત્રા માટેનું સમાંતર અક્ષનું પ્રમેય :

$I = I_C + Md^2$ અહીં I_C દ્રવ્યમાનકેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા છે. M એ વસ્તુનું દળ છે અને I એ ઉપર્યુક્ત અક્ષને સમાંતર તથા તેનાથી (*d*) જેટલા લંબઅંતરે આવેલી અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા છે.

જડત્વની ચાકમાત્રા માટેનું લંબઅક્ષનું પ્રમેય :

જો I_x, I_y અને I_z, X, Y અને Z, અક્ષોને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રાઓ હોય તો, $I_z = I_x + I_y$.

10. સરક્યા વિના ઘન પદાર્થને ગબડવાની શરત,

$$\mu_s \geq \left[\frac{1}{1+\frac{R^2}{K^2}}\right] \tan\theta$$

ઉપરાંત ઢાળ પર સરક્યા સિવાય ગબડતા પદાર્થ માટે રેખીય વેગ અને રેખીય પ્રવેગનાં સૂત્રો અનુક્રમે,

$$v = \left[\frac{2gh}{1+\frac{K^2}{R^2}}\right]^{\frac{1}{2}} \text{ અને } a = \left[\frac{g\sin\theta}{\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)}\right].$$

સ્વાધ્યાય

નીચેનાં વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. દૃઢ પદાર્થની ભ્રમણાક્ષથી 10 cm અંતરે આવેલા કણની કોણીય ઝડપ 12 rad s^{-1} છે, તો તે ભ્રમણાક્ષથી 20 cm અંતરે આવેલા કણની કોણીય ઝડપ કેટલી હશે ?

(A) 2 rad s^{-1} (B) 15 rad s^{-1} (C) 12 rad s^{-1} (D) 10 rad s^{-1}

2. ભ્રમણાક્ષથી 10 cm અંતરે આવેલા કણની કોણીય ઝડપ 20 rad s^{-1} છે, તો તેની રેખીય ઝડપ કેટલી ?

(A) 1 cm s^{-1} (B) 20 cm s^{-1} (C) 200 cm s^{-1} (D) 400 cm s^{-1}

3. ઘડિયાળના મિનિટ-કાંટાની કોણીય ઝડપ કેટલી ?

(A) $\frac{\pi}{43200}$ rad s^{-1} (B) $\frac{\pi}{1800}$ rad s^{-1}

(C) $\frac{\pi}{6}$ rad s^{-1} (D) $\frac{\pi}{12}$ rad s^{-1}

4. એક વ્હીલ સ્થિર સ્થિતિમાંથી ગતિ શરૂ કરી 4 s ના અંતે 64 rad s^{-1} જેટલો કોણીય વેગ પ્રાપ્ત કરે છે, તો તેનો અચળ કોણીય પ્રવેગ .... હોય.

(A) 64 rad s^{-2} (B) 128 rad s^{-2} (C) 16 rad s^{-2} (D) 4 rad s^{-2}

5. પૃથ્વીની ફરતે ભ્રમણ કરતાં એક કૃત્રિમ ઉપગ્રહનું દળ 500 kg છે. તેનું કોણીય વેગમાન 4×10^7 J s હોય, તો તેનો ક્ષેત્રીય વેગ શોધો.

(A) 2×10^4 m^2 s^{-1} (B) 0

(C) 2×10^7 m^2 s^{-1} (D) 4×10^4 m^2 s^{-1}

6. ધારો કે પૃથ્વીનું દળ અચળ રહે તેમ એકાએક સંકોચન થઈ તેની ત્રિજ્યા $\frac{R}{4}$ થઈ જાય, તો પૃથ્વી પરનો 24 કલાકનો દિવસ કેટલા કલાકનો થઈ જાય ? R એ પૃથ્વીની હાલની ત્રિજ્યા છે.

(A) 1.5 *h* (B) 6 *h* (C) 48 *h* (D) 36 *h*

7. બે સમાન ઈંડામાં એક ઈંડુ કાચું છે તથા બીજું બાફેલું છે. બંને સમાન કોણીય ઝડપથી ભ્રમણ કરે છે. કયું ઈંડુ વહેલું સ્થિર થશે ?

(A) કંઈ કહી શકાય નહિ. (B) બંને ઈંડા એકી સાથે સ્થિર થશે.

(C) બાફેલું (D) કાચું

8. સમાન દળ અને ત્રિજ્યા ધરાવતાં એક પોલો નળાકાર અને નક્કર ગોળો આપેલ છે. આ બંને પર સરખું ટૉર્ક સમાન સમય માટે લગાડીને ભ્રમણ કરાવવામાં આવે છે, ત્યારે નળાકાર તેની ભૌમિતિક અક્ષને તથા ગોળો તેના વ્યાસને અનુલક્ષીને ભ્રમણ કરે છે. આ બંનેમાંથી કોની કોણીય ઝડપ વધારે હશે ?

(A) કહી ન શકાય. (B) બંનેની ઝડપ સમાન હશે.

(C) નળાકાર (D) ગોળો

9. એક ઢાળનો કોણ 30° છે. આ ઢાળ પર ગતિ કરતા નક્કર નળાકારનો ઢાળ સાથેનો સ્થિત ઘર્ષણાંક 0.35 છે, તો આ નળાકાર ઢાળ પર સરક્યા વગર ગબડશે ?

(A) નળાકાર ઢાળ પર સ્થિર રહેશે. (B) કશું કહી શકાય નહિ.

(C) હા. (D) ના.

10. ઘર્ષણયુક્ત ઢાળ પર સરક્યા સિવાય ગબડીને તળિયે આવતા નક્કર નળાકારનો વેગ શાના પર આધારિત છે ?

(A) નળાકારનું દળ (B) નળાકારની લંબાઈ

(C) ઢાળની ઊંચાઈ (D) નળાકારની ત્રિજ્યા

11. એક વર્તુળાકાર તકતીનું દળ 4 kg અને તેની ત્રિજ્યા 2 m છે. તેના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રમાંથી પસાર થતી તથા તેના સમતલને લંબ એવી અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા .... છે.

(A) 24 kg m^2 (B) 8 kg m^2 (C) 16 kg m^2 (D) 11 kg m^2

12. પૃથ્વીના ધ્રુવપ્રદેશોનો બરફ પીગળીને વિષુવવૃત્ત પર આવે, તો દિવસની લંબાઈ (હાલ 24 કલાક) પર શી અસર થાય ?

(A) દિવસ ટૂંકો બને. (B) દિવસ લાંબો બને.

(C) કોઈ જ ફેરફાર થાય નહિ.

(D) દિવસ અને રાતની લંબાઈ સમાન બને.

13. જો દૃઢ પદાર્થ પર લાગતું ટૉર્ક શૂન્ય હોય, તો નીચેનામાંથી કઈ ભૌતિક રાશિ અચળ રહેશે ?

(A) રેખીય વેગમાન (B) કોણીય વેગમાન

(C) બળ (D) રેખીય બળનો આઘાત

14. એક ફ્લાયવ્હીલ સ્થિર સ્થિતિમાંથી ભ્રમણ કરવાનું શરૂ કરી 4 મિનિટમાં 240 પરિભ્રમણ s^{-1} ની કોણીય ઝડપ પ્રાપ્ત કરે છે, તો તેનો સરેરાશ કોણીય પ્રવેગ કેટલો હશે ?

(A) 1 પરિભ્રમણ s^{-2} (B) 3 પરિભ્રમણ s^{-2}

(C) 4 પરિભ્રમણ s^{-2} (D) 2 પરિભ્રમણ s^{-2}

15. બે સમાન ગોળાઓ ઢાળ પર ગબડે છે. તેમાંનો એક નક્કર છે અને બીજો પોલો છે, તો નક્કર ગોળાની જડત્વની ચાકમાત્રા અને પોલા ગોળાની જડત્વની ચાકમાત્રાનો ગુણોત્તર (વ્યાસને અનુલક્ષીને ભ્રમણાક્ષ લેતાં).

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{2}{5}$

16. બે સમાન નળાકારોમાંનો એક નક્કર છે અને બીજો પોલો છે. જો તેમની ભ્રમણાક્ષો તરીકે તેમની ભૌમિતિક અક્ષો લેવામાં આવે, તો નક્કર નળાકારની ચક્રાવર્તન ત્રિજ્યા (radius of gyration) અને પોલા નળાકારની ચક્રાવર્તન ત્રિજ્યાનો ગુણોત્તર કેટલો હશે ?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) 2 (D) $\sqrt{2}$

17. M દ્રવ્યમાન અને R ત્રિજ્યાવાળી એક પાતળી વીંટી તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અને તેના સમતલને લંબ એવી અક્ષને અનુલક્ષીને ω જેટલા કોણીય વેગથી ગતિ કરે છે. હવે જો બિલકુલ હળવેથી બે બિંદુવત્ m દળવાળા કણ તેના વ્યાસના સામ સામેના છેડાઓ પર લાગડતા તેનો કોણીય વેગ કેટલો બનશે ?

(A) $\left(\frac{M}{M+2m}\right)\omega$ (B) $\left(\frac{M}{M+m}\right)\omega$

(C) $\left(\frac{M+2m}{M}\right)\omega$ (D) $\left(\frac{M-2m}{M+2m}\right)\omega$

18. r ત્રિજ્યા તથા m દળવાળી એક વીંટી તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી તથા તેના સમતલને લંબભ્રમણાક્ષને અનુલક્ષીને ચાક ગતિ કરે છે. તો તેની ચાકગતિ-ઊર્જા કેટલી હશે ?

(A) $\frac{1}{2}mr^2\omega^2$ (B) $\frac{1}{2}mr\omega^2$ (C) $mr^2\omega^2$ (D) $mr\omega^2$

19. ભૂસ્થિત ઉપગ્રહ (geostationary statellite)ના કક્ષીય કોણીય વેગના મૂલ્ય અને પૃથ્વીના તેની અક્ષને અનુલક્ષીને ભ્રમણગતિના કોણીય વેગના મૂલ્યનો ગુણોત્તર કેટલો હશે ?

(A) 3 : 1 (B) 4 : 3 (C) 1 : 1 (D) 1 : 2

20. સૂર્યને ફરતે ભ્રમણ કરતાં ગ્રહનો ક્ષેત્રીય-વેગ (areal velocity)

(A) વધ્યા કરે છે. (B) અચળ રહે છે.

(C) ઘટ્યા કરે છે. (D) કશું કહી શકાય નહિ.

જવાબો

1. (C)	**2.** (C)	**3.** (B)	**4.** (C)	**5.** (D)	**6.** (A)
7. (C)	**8.** (D)	**9.** (C)	**10.** (C)	**11.** (B)	**12.** (B)
13. (B)	**14.** (A)	**15.** (B)	**16.** (B)	**17.** (A)	**18.** (A)
19. (C)	**20.** (B)				

નીચે આપેલ પ્રશ્નોના જવાબ ટૂંકમાં આપો :

1. કોણીય વેગના અને કોણીય પ્રવેગના SI એકમ જણાવો.
2. અચળ કોણીય વેગથી ચાકગતિ કરતી દૃઢ પદાર્થના પ્રતિનિધિ કણના રેખીય પ્રવેગના સ્પર્શીય ઘટકનું મૂલ્ય કેટલું હશે ?
3. શું દૃઢ પદાર્થની ચાકગતિ માટે બધા કણોના રેખીય ચલો સમાન હોય છે ?
4. રેખીય ગતિમાં જે ભાગ બળ ભજવે છે, તેવો જ ભાગ ચાકગતિમાં કઈ ભૌતિક રાશિ ભજવે છે ?
5. ટૉર્કની દિશા કેવી રીતે શોધવામાં આવે છે ?
6. Z-અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ માટે ટૉર્કનો કયો ઘટક જવાબદાર હશે ?
7. ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરવા માટે બળની અસરકારકતાના માપને શું કહે છે ?
8. બળયુગ્મની ચાકમાત્રાનું સૂત્ર આપો.
9. રેખીય વેગમાનની ચાકમાત્રાને શું કહે છે ?
10. કોણીય વેગમાનના ફેરફારનો સમયદર શું દર્શાવે છે ?
11. કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ લખો.
12. ગ્રહને સૂર્ય સાથે જોડતી રેખા વડે આંતરાતા ક્ષેત્રફળના સમયદરને શું કહે છે ?
13. જડત્વની ચાકમાત્રા માટેના સમાંતર અક્ષના પ્રમેયનું વિધાન લખો.
14. જડત્વની ચાકમાત્રા માટેના લંબઅક્ષના પ્રમેયનું વિધાન લખો.
15. ઢાળ પર પદાર્થ સરક્યા સિવાય ગબડે તે માટેની શરત સૂત્ર સ્વરૂપે લખો.

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. દૃઢ પદાર્થના કોણીય સ્થાનાંતરને વ્યાખ્યાયિત કરી તેમની તત્કાલીન કોણીય ઝડપનું સૂત્ર મેળવો.

2. ચાકગતિ કરતા દૃઢ પદાર્થના કોઈ એક પ્રતિનિધિ કણ માટે રેખીય ઝડપ અને કોણીય ઝડપ વચ્ચેનો સંબંધ મેળવો.

3. કોણીય વેગની દિશા માટેનો જમણા હાથના સ્ક્રૂનો નિયમ લખી કોણીય વેગ અને રેખીય વેગ વચ્ચેનો સદિશ સંબંધ પ્રસ્થાપિત કરો.

4. રેખીય પ્રવેગ અને કોણીય પ્રવેગ વચ્ચેનો સંબંધ મેળવો.

5. અચળ કોણીય પ્રવેગ સાથેની ચાકગતિનાં સમીકરણો તારવો.

6. દૃઢ પદાર્થના સંતુલન માટેની શરતો જણાવો.

7. ટૉર્કની ભૌતિક સમજૂતી આપો.

8. બળયુગ્મ એટલે શું ? બળયુગ્મની ચાકમાત્રાનું સૂત્ર મેળવો.

9. કોણીય વેગમાન અને ટૉર્ક વચ્ચેનો સંબંધ મેળવો.

10. દૃઢ વસ્તુના કોણીય વેગમાનનું સૂત્ર $\vec{L} = I\vec{\omega}$ મેળવો.

11. θ કોણવાળા ઢાળ પર સરક્યા સિવાય ગબડતા પદાર્થ માટે $v^2 = \left[\dfrac{2gh}{1+\dfrac{K^2}{R^2}}\right]$ સૂત્ર મેળવો.

12. θ કોણવાળા ઢાળની ટોચ પરથી સરક્યા સિવાય પદાર્થ ગબડીને તળિયે આવતાં તેનો વેગ

$v = \sqrt{\dfrac{2gh}{1+\dfrac{K^2}{R^2}}}$ મળે છે, તેમ સ્વીકારી તેના રેખીય પ્રવેગ અને ઘર્ષણબળનું સૂત્ર મેળવો.

13. ઢાળ પરથી સરક્યા સિવાય ગબડતા પદાર્થનો પ્રવેગ $a = \dfrac{g\sin\theta}{1+\dfrac{K^2}{R^2}}$ સ્વીકારી સ્થિત ઘર્ષણાંકનું સૂત્ર મેળવો.

નીચેના દાખલા ગણો :

1. એક દૃઢ પદાર્થ 12 sમાં 600 radનું કોણીય સ્થાનાંતર અનુભવતી 100 rad s^{-1}ની કોણીય ઝડપ પ્રાપ્ત કરે છે, તો તેના અચળ કોણીય પ્રવેગ અને પ્રારંભિક કોણીય ઝડપ શોધો.

[**જવાબ :** 8.33 rad s^{-1}; 0 rad s^{-1}]

2. એક ચક્રની પ્રારંભિક કોણીય ઝડપ 20 rad s^{-1} છે. 10 s દરમિયાન તે 100 radનું કોણીય સ્થાનાંતર કરે છે, તો પ્રારંભથી માંડીને તે અટકી જાય ત્યાં સુધીમાં કેટલાં પરિભ્રમણ કરશે ? તેનો કોણીય પ્રવેગ કેટલો હશે ?

[**જવાબ :** $\theta = \dfrac{50}{\pi}$ પરિભ્રમણો; $\alpha = -2$ rad s^{-2}]

3. 1 m ત્રિજ્યાવાળી 20 kg દળની એક રિંગ તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અને તેના સમતલને લંબઅક્ષને અનુલક્ષીને ભ્રમણ કરે છે. આ રિંગની કોણીય ઝડપ 4 s માં 5 rad s^{-1} થી વધીને 25 rad s^{-1} થાય છે, તો (1) રિંગ પર પ્રવર્તતા ટૉર્કનું મૂલ્ય શોધો. (2) 4 s દરમિયાન આ ટૉર્ક પર થયેલું કાર્ય શોધો. [જવાબ : τ = 100 N m; W = 6000 J]

4. એક કણનો જ્યારે સ્થાનસદિશ (4, 6, 12) એકમ છે, ત્યારે તેનો વેગ-સદિશ (2, 3, 6) એકમ છે. જો કણનું દળ 50 એકમ હોય, તો આ કણનું કોણીય વેગમાન શોધો.

[જવાબ : શૂન્ય.]

5. એક પોલો નળાકાર θ કોણવાળા ઢાળ પરથી સરક્યા સિવાય ગબડે છે, તો ઢાળની સપાટીને સમાંતર તેનો રેખીય પ્રવેગ શોધો. [જવાબ : 0.5 $g\sin\theta$)]

6. 100 kg અને 200 kg ના બિંદુવત્ પદાર્થોના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે (2, 4, 6) m અને (3, 5, 7) m છે, તો આ તંત્રની Z-અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા શોધો.

[જવાબ : 8800 kg m^2]

7. એક નક્કર ગોળાનું દળ 8 kg છે. તે 70 m ઊંચાઈના ઢાળ પરથી સરક્યા વિના ગબડીને તળિયે આવે છે, તો ઢાળના તળિયે તેનો રેખીય વેગ કેટલો હશે ? તથા તે વખતે તેની ચાકગતિ-ઊર્જા શોધો. (g = 10 m s^{-2} લો.)

[જવાબ : રેખીય વેગ $v = 10\sqrt{10}$ m s^{-1}; ચાકગતિ-ઊર્જા = 16 × 10^2 J]

8. પૃથ્વીની પોતાની ધરીને અનુલક્ષીને ચાકગતિ માટે કોણીય વેગમાન શોધો. પૃથ્વીનું દળ = 6 × 10^{24} kg તથા પૃથ્વીની ત્રિજ્યા = 6400 km છે.

[જવાબ : 7.15 × 10^{33} kg m^2 s^{-1}]

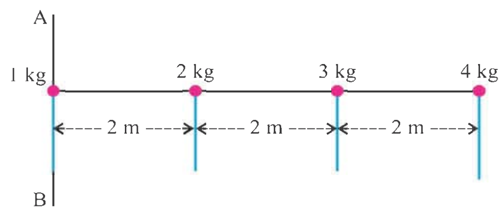
9. 200 kg દળ ધરાવતા એક પદાર્થ માટે દ્રવ્યમાનકેન્દ્રથી 3 m અંતરે રહેલી અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા 8200 kg m^2 છે, તો આ અક્ષને સમાંતર એવી દ્રવ્યમાનકેન્દ્રથી 5 m અંતરે રહેલી અક્ષને અનુલક્ષીને પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રા શોધો.

[જવાબ : 11400 kg m^2]

10. m જેટલા સમાન દળ ધરાવતા ચાર બિંદુવત્ કણ 'a' બાજુ ધરાવતા એક ચોરસના ચાર ખૂણાઓ પર મૂકેલા છે, તો આ ચોરસના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી તેના સમતલને લંબ આવેલ અક્ષને અનુલક્ષીને આ તંત્રની જડત્વની ચાકમાત્રા શોધો. [જવાબ : 2 ma^2]

11. M દળ તથા R ત્રિજ્યાવાળા ચાર નક્કર ગોળાઓ એક ચોરસના ચાર ખૂણાઓ પર મૂકેલા છે. જો ચોરસની બાજુનું માપ 'a' હોય, તો ચોરસની કોઈ એક બાજુને અક્ષ તરીકે લેતાં તેને અનુલક્ષીને આ તંત્રની જડત્વની ચાકમાત્રા શોધો. [જવાબ : $2\left(\frac{4}{5}MR^2 + Ma^2\right)$]

12. ચાર બિંદુવત્ કણના દળ 1 kg, 2 kg, 3kg અને 4 kg છે. તેમને એક વજનરહિત સળિયા સાથે આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે જોડેલા છે. તો આ તંત્રની AB અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા શોધો.



આકૃતિ 2.22

[જવાબ : 200 kg m^2]