પ્રકરણ 7

શ્રેણી અને શ્રેઢી

7.1 પ્રાસ્તાવિક

ભાષામાં અને ગણિતશાસ્ત્રમાં શ્રેણી શબ્દ સમાન અર્થમાં વાપરવામાં આવે છે. **શ્રેણી (Sequence)** એ ઉદ્ભવના ક્રમ પર ભાર આપે છે. આપણે જ્યારે ઘટનાઓની શ્રેણી વિશે વાત કરીએ, ત્યારે એ સ્પષ્ટપણે ઘટનાઓના ઉદ્ભવના ક્રમનું સૂચન કરે છે. દાખલા તરીકે, ભારતે આઈસીસી વર્લ્ડકપ 2011 જીત્યો. આપણે જાણીએ છીએ કે આ માટે ભારતના ખેલાડીઓના જૂથે સ્પર્ધાની શ્રેણીમાં કેટલીક સ્પર્ધાઓ જીતી અને છેવટે આખરી સ્પર્ધા પર પહોંચ્યા. અહીં આપણે જોઈએ છીએ કે, કોઈ ચોક્કસ ક્રમમાં ઘટનાઓની શ્રેણી તરફ તે દોરી જાય છે. આ જ પ્રમાણે ગણિતમાં આપણે સંખ્યાઓથી બનતી શ્રેણીની વાત કરીએ, તો તે ચોક્કસપણે પ્રથમ સંખ્યા, દ્વિતીય સંખ્યા, તૃતીય સંખ્યા... એમ દર્શાવશે. ઐતિહાસિક રીતે જોઈએ, તો પ્રથમ n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના વર્ગના સરવાળાનું સૂત્ર, પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના ઘનના સરવાળાનું સૂત્ર વગેરે સૂત્રો આપનાર પ્રથમ ગણિતજ્ઞ **આર્યભટ્ટ (*Aryabhatta*)** હતા. તેમના ગ્રંથ **આર્યભટીયમ (*Aryabhatiyam*)** માં આ કાર્ય જોવા મળે છે. આ પ્રમાણેનું કાર્ય ઈટાલીના પ્રખ્યાત ગણિતજ્ઞ **ફિબોનાકી (*Fibonacci*)** (1175-1250) ના કાર્યમાં પણ જોવા મળે છે. ફિબોનાકી શ્રેણીની સંખ્યાઓ ફિબોનાકી સંખ્યાઓ તરીકે પણ ઓળખાય છે. અને આ સંખ્યાઓ માહિતીના ઘણા ક્ષેત્રોમાં જોવા મળે છે.

હવે આપણે ગાણિતિક દૃષ્ટિએ શ્રેણીની ચર્ચા કરીએ. યુગ્મ સંખ્યાઓની શ્રેણી 2, 4, 6,..., નું અવલોકન કરીએ. આપણે સહેલાઈથી જોઈ શકીએ છીએ કે, તે 2(1), 2(2), 2(3),..., શ્રેણી છે. તે પરથી આપણે વ્યાપક રીતે nમી યુગ્મ સંખ્યા $2(n)$ મેળવી શકીએ. તેથી આપણને વિધેય $f : N \rightarrow R$, $f(n) = 2n$ નો વિચાર આવે. આ જ પ્રમાણે શ્રેણી 1, 4, 9, 16,... ને આપણે $f : N \rightarrow R$, $f(n) = n^2$ સ્વરૂપમાં લખી શકીએ. તેથી આપણે **જે વિધેયનો પ્રદેશ N હોય અથવા** $\{1, 2, 3, ..., n\}$ **હોય તેવા વિધેયને શ્રેણી તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરીએ.**

શ્રેણી : વિધેય $f : N \rightarrow R$ અથવા $f : \{1, 2, 3, ..., n\} \rightarrow R$ ને શ્રેણી કહે છે.

$f : \{1, 2, 3, ..., n\} \rightarrow R$ ને સાન્ત શ્રેણી કહે છે.

દાખલા તરીકે, $f : N \rightarrow R$, $f(n) = 3n - 1$.

$n = 1, 2, 3,...$ લેતાં, $f(1) = 2$, $f(2) = 5$, $f(3) = 8$,.... મળે. આમ, 2, 5, 8,... ને અનુક્રમે શ્રેણીનાં પ્રથમ પદ, દ્વિતીય પદ, તૃતીય પદ,... કહે છે. **$f(n)$ ને શ્રેણીનું nમું પદ અથવા વ્યાપક પદ કહે છે.**

$f(n)$ ને a_n અથવા t_n અથવા T_n અથવા u_n વડે પણ દર્શાવાય છે.

શ્રેણીનું n મું પદ $f(n)$ અથવા a_n અથવા t_n હોય, તો તે શ્રેણી અનુક્રમે $\{f(n)\}$ અથવા $\{a_n\}$ અથવા $\{t_n\}$ વડે દર્શાવાય છે.

જેનો સહપ્રદેશ N, Z કે R હોય તેવી શ્રેણીને અનુક્રમે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓની શ્રેણી કે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓની શ્રેણી કે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની શ્રેણી કહે છે.

શ્રેણીનું n મું પદ એ સૂત્ર સ્વરૂપમાં હોઈ શકે, પરંતુ એ જરૂરી નથી કે હંમેશાં n મા પદ માટે સૂત્ર મળે. અવિભાજ્ય સંખ્યાઓની શ્રેણીનો વિચાર કરીએ. 2, 3, 5, 7, 11, 13,... અહીં n મી અવિભાજ્ય સંખ્યા મેળવવા માટે કોઈ સૂત્ર મળતું નથી. તેથી આ શ્રેણી કોઈ ચોક્કસ સૂત્રથી નિર્દિષ્ટ કરી શકાય નહીં.

આપણે એક શ્રેણી $f(n) = (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) + (2n - 1)$ જોઈએ. સ્પષ્ટપણે $f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 5$. આપણને એમ કહેવાની ઇચ્છા થઈ આવે કે $f(4) = 7$ થશે. પરંતુ તેમ નથી, તે 13 છે. આમ, **આપણે કેટલાંક પદોની મદદથી શ્રેણીના વ્યાપક પદ વિશે અનુમાન કરી શકીએ તે જરૂરી નથી.**

ઉદાહરણ 1 : $f : N \to R$, $f(n) = 2n^2 - 4$ નાં પ્રથમ પાંચ પદો મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $f(n) = 2n^2 - 4$

$\therefore$ $f(1) = 2(1)^2 - 4 = -2$, $f(2) = 2(2)^2 - 4 = 4$,

$f(3) = 2(3)^2 - 4 = 14$, $f(4) = 2(4)^2 - 4 = 28$, $f(5) = 2(5)^2 - 4 = 46$.

આમ, પ્રથમ પાંચ પદો $-2, 4, 14, 28, 46$ મળે.

ઉદાહરણ 2 : $f : N \to R$, $f(n) = n(-1)^n$ માટે 17 મા અને 16 મા પદોનો તફાવત શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $f(n) = n(-1)^n$

$\therefore$ $f(16) = 16(-1)^{16} = 16$ અને $f(17) = 17(-1)^{17} = -17$

હવે, $f(17) - f(16) = (-17) - (16) = -33$

$\therefore$ તફાવત $= | f(17) - f(16) | = 33$.

ઉદાહરણ 3 : $f : N \to R$, $f(n) = 8 - n^3$ માટે શ્રેણીનાં પ્રથમ ચાર પદો મેળવો.

ઉકેલ : $f(1) = 8 - (1)^3 = 7$, $f(2) = 8 - (2)^3 = 0$, $f(3) = 8 - (3)^3 = -19$ અને $f(4) = 8 - (4)^3 = -56$.

$\therefore$ પ્રથમ ચાર પદો $7, 0, -19$ અને -56 છે.

ઉદાહરણ 4 : શ્રેણી $f : N \to R$ એ $f(1) = 1$ અને $f(n) = f(n - 1) - 1$, $n \geq 2$ થી વ્યાખ્યાયિત છે. આ શ્રેણીનાં પ્રથમ પાંચ પદો શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $f(1) = 1$.

હવે $f(n) = f(n - 1) - 1$, $n \geq 2$ લેતાં,

$\therefore$ $f(2) = f(2 - 1) - 1 = f(1) - 1 = 1 - 1 = 0$

$f(3) = f(2) - 1 = -1$, $f(4) = f(3) - 1 = -2$, $f(5) = f(4) - 1 = -3$

$\therefore$ પ્રથમ પાંચ પદો $1, 0, -1, -2, -3$ છે.

ઉદાહરણ 5 : જો $f : N \to R$, $f(n) = cos\frac{n\pi}{2}$ હોય, તો આ શ્રેણીનાં પ્રથમ છ પદો શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $f(n) = cos\frac{n\pi}{2}$

$\therefore \quad f(1) = cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad f(2) = cos\pi = -1, \quad f(3) = cos\frac{3\pi}{2} = 0$

$f(4) = cos2\pi = 1, \quad f(5) = cos\frac{5\pi}{2} = 0, \quad f(6) = cos3\pi = -1$

તેથી પ્રથમ છ પદો : 0, −1, 0, 1, 0, −1 છે.

ઉદાહરણ 6 : શ્રેણી $f(n) = (n-1)(n+2)(n-3)$ નું 10 મું પદ કયું હશે ?

ઉકેલ : અહીં,, $f(n) = (n-1)(n+2)(n-3)$

$\therefore \quad f(10) = (10-1)(10+2)(10-3)$

$= 9 \cdot 12 \cdot 7$

$= 756$

$\therefore$ 10 મું પદ 756 છે.

7.2 શ્રેઢી

ધારો કે $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ શ્રેણી છે. હવે આપણે આપેલ શ્રેણીનાં પદોનો ઉપયોગ કરી નીચે પ્રમાણેની શ્રેણી બનાવવાનો વિચાર કરીએ.

$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \ldots, a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ આ પ્રમાણે કરવાથી મળતી નવી શ્રેણીને આપેલ શ્રેણી $\{a_n\}$ પરથી મેળવેલી **શ્રેઢી (Series)** કહે છે.

સામાન્યતઃ શ્રેણીના પ્રથમ n પદોના સરવાળાને S_n વડે દર્શાવાય છે. $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$ એ મૂળ શ્રેણીને સંબંધિત શ્રેઢી બને છે.

આમ, **દરેક શ્રેઢી એ શ્રેણી છે અને તેનું n મું પદ એ સંબંધિત શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો છે.**

દાખલા તરીકે, અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓની શ્રેણી લઈએ એટલે કે, 1, 3, 5, 7, 9,...

$\therefore \quad S_1 = a_1 = 1$

$S_2 = a_1 + a_2 = 1 + 3 = 4$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 3 + 5 = 9$

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$

.

.

.

આપણને એક શ્રેણી 1, 4, 9, 16,... મળશે, જે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના વર્ગની શ્રેણી છે, એટલે કે $S_n = n^2$. તેને શ્રેણી $f(n) = 2n - 1$ પરથી મેળવેલ **શ્રેઢી** કહે છે.

ચાલો, આપણે શ્રેણીના પ્રથમ n પદોના સરવાળા S_n પરથી તે જ શ્રેણીનું n મું પદ a_n મેળવીએ.

હવે, $S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3$

.

.

.

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n$

આપણને $n = 2, 3, 4, \ldots$ માટે $S_n = S_{n-1} + a_n$ મળે છે.

$\therefore \quad S_n - S_{n-1} = a_n \qquad \forall n \geq 2$ અને $S_1 = a_1$

આ સૂત્ર આપણને પ્રત્યેક $n \in N$ માટે પ્રથમ n પદોના સરવાળા S_n પરથી nમા પદનું સૂત્ર a_n આપે છે.

ઉદાહરણ 7 : શ્રેણી $\{a_n\}$ માટે $S_n = n^3 - 2n$ હોય, તો શ્રેણી $\{a_n\}$ નાં પ્રથમ ચાર પદો તથા 8 મું પદ મેળવો.

ઉકેલ : $S_n = n^3 - 2n$

$\therefore \quad S_1 = (1)^3 - 2(1) = 1 - 2 = -1 \qquad S_2 = (2)^3 - 2(2) = 8 - 4 = 4,$

$S_3 = (3)^3 - 2(3) = 27 - 6 = 21 \qquad S_4 = (4)^3 - 2(4) = 64 - 8 = 56.$

તેથી, $a_1 = S_1 = -1, \quad a_2 = S_2 - S_1 = 4 - (-1) = 5, \quad a_3 = S_3 - S_2 = 21 - 4 = 17$

$a_4 = S_4 - S_3 = 56 - 21 = 35.$

$\therefore$ $\{a_n\}$નાં પ્રથમ ચાર પદો : $-1, 5, 17, 35$ છે.

શ્રેણીનું 8 મું પદ, $a_8 = S_8 - S_7$

$= [(8)^3 - 2(8)] - [(7)^3 - 2(7)]$

$= [512 - 16] - [343 - 14] = 167$

ઉદાહરણ 8 : શ્રેઢી સૂત્ર $S_n = 4^n - 1$ પરથી તેને સંબંધિત શ્રેણી સૂત્ર મેળવો.

ઉકેલ : $a_1 = S_1 = 4 - 1 = 3.$

$S_n = 4^n - 1$

$\therefore \quad S_{n-1} = 4^{n-1} - 1$

$a_n = S_n - S_{n-1}, \forall n \geq 2 = (4^n - 1) - (4^{n-1} - 1)$

$= 4^n - 4^{n-1}$

$= 4^{n-1}(4 - 1)$

$= 3 \cdot 4^{n-1}, \quad \forall n \geq 2$

આ સૂત્રમાં $n = 1$ લેતાં, $3 \cdot 4^{1-1} = 3 = a_1$ અને $a_1 = 3$ છે જ.

$\therefore \quad a_n = 3 \cdot 4^{n-1}, \quad \forall n \geq 1$

સ્વાધ્યાય 7.1

1. નીચેની શ્રેણીઓનાં પ્રથમ પાંચ પદો લખો :

(1) $f(n) = 3n + 1$ (2) $f(n) = \frac{n - (-1)^n}{2}$, (3) $f(n) = n$ મી અવિભાજ્ય સંખ્યા

2. ફિબોનાકી શ્રેણી $a_1 = a_2 = 1$ અને $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n > 2$ હોય, તો a_3, a_4, a_5, a_6 શોધો.

3. નીચેની શ્રેણીઓ માટે a_2, a_3, a_4 શોધો :

(1) $a_1 = -3$ અને $a_n = 2a_{n-1} + 1, \forall n > 1$

(2) $a_1 = \frac{1}{2}$ અને $a_n = 3a_{n-1} + (-1)^n, \forall n \geq 2.$

4. શ્રેણી $\{a_n\}$ નાં પ્રથમ ત્રણ પદો તથા દશમું પદ શોધો :

(1) $S_n = n^2 - 1$ (2) $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

5. આપેલ શ્રેઢી સૂત્ર S_n પરથી તેને સંબંધિત શ્રેણી સૂત્ર મેળવો :

(1) $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, r \neq 1, a \neq 0$ (2) $S_n = 4\{1 - (-3)^{n-1}\}$

*

7.3 સમાંતર શ્રેણી

શ્રેણી 1, 3, 5, 7,.... નું અવલોકન કરીએ. અહીં દરેક પદ (પ્રથમ પદ પછીનું) તેની આગળના પદમાં 2 ઉમેરવાથી મળે છે. બે ક્રમિક પદો વચ્ચેનો તફાવત શૂન્યેતર અચળ છે. આવી શ્રેણીને **સમાંતર શ્રેણી (Arithmetic Progression, A.P.)** કહે છે. આપણે તેને નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

સમાંતર શ્રેણી : શ્રેણી $f : N \to R, f(n) = an + b, a, b \in R, a \neq 0$ ને સમાંતર શ્રેણી કહે છે. આમ સમાંતર શ્રેણી એ n નું સુરેખ વિધેય છે.

ઉદાહરણરૂપે, શ્રેણી $f(n) = 3n - 4, n \in N$ એ સમાંતર શ્રેણી છે તથા $-1, 2, 5, 8, 11,...$ તેનાં પદો છે. અહીં કોઈ પણ બે ક્રમિક પદોનો તફાવત 3 છે અને તે શૂન્યેતર અચળ છે.

ઉપરની ચર્ચામાં આપણે અવલોકન કરીએ કે બે ક્રમિક પદોનો તફાવત શૂન્યેતર અચળ છે અને f એ n નું સુરેખ વિધેય છે, જ્યાં $n \in N$. હવે આપણે આ બે ગુણધર્મોને નીચેના પ્રમેયમાં વ્યક્ત કરીએ.

પ્રમેય 1 : સમાંતર શ્રેણીનાં બે ક્રમિક પદોનો તફાવત શૂન્યેતર અચળ છે.

સાબિતી : ધારો કે $\{f(n)\} = \{an + b\}$ એ સમાંતર શ્રેણી છે, $a, b \in R, a \neq 0$.

કોઈ પણ $k \in N$ માટે, $f(k + 1) - f(k) = [a(k + 1) + b] - (ak + b)$

$= ak + a + b - ak - b$

$= a$, શૂન્યેતર અચળ

આમ, બે ક્રમિક પદો $f(k + 1)$ અને $f(k)$નો તફાવત શૂન્યેતર અચળ મળે છે. આપણે તેને સમાંતર શ્રેણીનો **સામાન્ય તફાવત (Common Difference)** કહીશું અને સામાન્ય રીતે આપણે તેને 'd' વડે દર્શાવીશું. હવે પછી આપણે સામાન્ય તફાવતને બદલે તફાવત શબ્દનો ઉપયોગ પણ કરીશું. અહીં $d = f(k + 1) - f(k)$ લઈશું અને તે ધન અથવા ઋણ હોઈ શકે.

ઉપરના પ્રમેયનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે. ધારો કે શ્રેણી $\{f(n)\}$નું પ્રથમ પદ 'a' છે અને પ્રત્યેક $k \in N$ માટે તફાવત $f(k + 1) - f(k) = d, d \neq 0$ છે. સ્પષ્ટ છે કે સમાંતર શ્રેણી મળશે. વ્યાપક રીતે, આપણે તારવીએ કે **સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ $f(n) = a + (n - 1)d$**, $d \neq 0$ છે અને તે nનું સુરેખ વિધેય છે. આપણે તેને ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી સાબિત કરીશું.

પ્રમેય 2 : જો શ્રેણી $\{f(n)\}$ નું પ્રથમ પદ a અને બે ક્રમિક પદોનો તફાવત $d \neq 0$ હોય, તો $f(n) = a + (n - 1)d$, $\forall n \in N$ થાય અને તેથી તે સમાંતર શ્રેણી છે.

સાબિતી : ધારો કે વિધાન $P(n) : f(n) = a + (n - 1)d, \forall n \in N$

(1) $n = 1$ લેતાં, $f(1) = a$, પ્રથમ પદ અને $a + (n - 1)d = a + (1 - 1)d = a$

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

(2) ધારો કે $P(k) : f(k) = a + (k - 1)d, k \in N$ માટે સત્ય છે. **(i)**

હવે આપણે $P(k + 1)$ સત્ય છે તેમ સાબિત કરીશું.

$f(k + 1) = f(k) + d$ **$(f(k + 1) - f(k) = d)$**

$= [a + (k - 1)d] + d$ **((i) પરથી)**

$\therefore f(k + 1) = a + kd$

$= a + [(k + 1) - 1]d$

આમ, $P(k)$ સત્ય છે $\Rightarrow P(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી $P(n)$ એ પ્રત્યેક $n \in N$ માટે સત્ય છે.

અહીં, $f(n) = a + (n - 1)d = dn + (a - d)$ એ n નું સુરેખ વિધેય છે $(d \neq 0)$. તેથી f એ સમાંતર શ્રેણી છે.

આપણે ઉપરના બે પ્રમેય પરથી તારવી શકીએ કે, જો સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 'a' અને સામાન્ય તફાવત 'd' હોય, તો તે સમાંતર શ્રેણી $a, a + d, a + 2d,..., a + (n - 1)d,...$ રીતે લખી શકાય.

આમ સમાંતર શ્રેણીના nમા પદનું સૂત્ર $f(n) = a + (n - 1)d$ થાય. n પદોની સાન્ત શ્રેણીના છેલ્લા પદ માટે પણ a_n નો ઉપયોગ થાય છે. તેનો પ્રદેશ $\{1, 2, 3,..., n\}$ છે.

જો આપણે n મા પદને t_n વડે દર્શાવીએ તો $t_n = a + (n - 1)d$, જ્યાં a એ પ્રથમ પદ અને d એ સામાન્ય તફાવત છે.

નોંધ : a, b, c સમાંતર શ્રેણીના ક્રમિક પદો છે $\Leftrightarrow b - a = c - b$

$\Leftrightarrow 2b = a + c$

ઉદાહરણ 9 : સમાંતર શ્રેણી 3, 8, 13, 18,... નું સત્તરમું અને ચાલીસમું પદ શોધો.

ઉકેલ : $a = 3, d = 5$

સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ $t_n = a + (n - 1)d$

$= 3 + (n - 1)5 = 5n - 2$

હવે, $n = 17$ લેતાં, $t_{17} = 5(17) - 2 = 83$ અને

$n = 40$ લેતાં, $t_{40} = 5(40) - 2 = 198$.

$\therefore$ 17 મું પદ 83 અને 40 મું પદ 198 છે.

ઉદાહરણ 10 : સમાંતર શ્રેણી 3, 14, 25, 36,... નું કેટલામું પદ તેના 37 મા પદ કરતાં 121 ઓછું છે ?

ઉકેલ : અહીં, $a = 3, d = 11, m = 37$

m મું પદ, $t_m = a + (m - 1)d$

$t_{37} = 3 + (37 - 1)11 = 3 + 396 = 399$

ધારો કે t_{37} કરતાં 121 ઓછું હોય તેવું પદ t_n છે.

$\therefore \quad t_n = t_{37} - 121 = 399 - 121 = 278$

$\therefore \quad a + (n - 1)d = 278$

$\therefore \quad 3 + (n - 1)11 = 278$

$\therefore \quad (n - 1)11 = 278 - 3 = 275$

$\therefore \quad n - 1 = 25$

$\therefore \quad n = 26$

આમ, 26 મું પદ એ 37 મા પદ કરતાં 121 ઓછું છે.

નોંધ : 121 જેટલું પદ ઓછું થાય તે માટે પદનો ક્રમાંક $\frac{121}{11} = 11$ ઓછો થવો જોઈએ. (તફાવત = 11)

$\therefore \quad 37 - 11 = 26$ મુ પદ માગ્યા પ્રમાણે મળે.

ઉદાહરણ 11 : જો કોઈ સમાંતર શ્રેણીનું 11 મું પદ શૂન્ય હોય, તો સાબિત કરો કે તે શ્રેણીનું 31મું પદ એ 21 મા પદ કરતાં બમણું છે.

ઉકેલ : $t_n = a + (n - 1)d$

$\therefore \quad t_{11} = a + 10d$

$\therefore \quad 0 = a + 10d$ (i)

હવે, $2 \cdot t_{21} = 2(a + 20d)$

$= 2a + 40d$

$= (a + 30d) + (a + 10d)$

$= t_{31} + 0$ ((i) પરથી)

આમ, 31મું પદ એ 21મા પદ કરતાં બમણું છે.

ઉદાહરણ 12 : જો સમાંતર શ્રેણીનું p મું પદ q હોય અને q મું પદ p હોય તો તે સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ મેળવો. $(p \neq q)$

ઉકેલ : અહીં, t_p એ $a + (p - 1)d = q$ (i)

અને t_q એ $a + (q - 1)d = p$ (ii)

(i) અને (ii)ને ઉકેલતાં,

$(p - q)d = q - p$

$\therefore \quad d = -1$ (કારણ કે $p \neq q$) અને $a = p + q - 1$

હવે nમું પદ $t_n = a + (n - 1)d$

$= p + q - 1 + (n - 1)(-1)$

$= p + q - n$

સમાંતર શ્રેઢી :

સમાંતર શ્રેણીને સંબંધિત શ્રેઢીને સમાંતર શ્રેઢી (Arithmetic series) કહે છે.

સમાંતર શ્રેણી $a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (n - 1)d$ ને સંબંધિત સમાંતર શ્રેઢીનું n મું પદ,

$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + [a + (n - 1)d]$

હવે આપણે સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોના સરવાળાની અભિવ્યક્તિ સાબિત કરીએ.

એટલે કે, ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$ સાબિત કરીએ.

પ્રમેય 3 : જે સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d હોય, તેનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$ થાય. $\forall n \in N$.

સાબિતી : ધારો કે વિધાન $P(n) : S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d], \forall n \in N$.

(1) $n = 1$ માટે $S_1 = \frac{1}{2}[2a + (1 - 1)d] = a$, એટલે કે પ્રથમ પદનો સરવાળો પ્રથમ પદ 'a' છે.

$\therefore \quad P(1)$ સત્ય છે.

(2) ધારો કે $P(k) : S_k = \frac{k}{2}[2a + (k - 1)d]$ એ $k \in N$ માટે સત્ય છે. (i)

$n = k + 1$ લેતાં,

$S_{k+1} = S_k + (k + 1)$મું પદ

$= \frac{k}{2}[2a + (k - 1)d] + a + [(k + 1) - 1]d$ ((i) પરથી)

$= \frac{1}{2}[2ak + k(k - 1)d + 2a + 2kd]$

$= \frac{1}{2}[2a(k + 1) + kd(k - 1 + 2)]$

$= \frac{1}{2}[2a(k + 1) + kd(k + 1)]$

$= \frac{k+1}{2}[2a + \{(k + 1) - 1\}d]$

આમ, P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતની મદદથી P(n) એ $\forall n \in$ N સત્ય છે.

નોંધ : n પદોની સાન્ત સમાંતર શ્રેણી માટે

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] = \frac{n}{2}[a + \{a + (n - 1)d\}] = \frac{n}{2}(a + l)$$

જ્યાં a પ્રથમ પદ અને l છેલ્લું પદ છે, એટલે કે $l = t_n = a + (n - 1)d$.

આમ, સમાંતર શ્રેણીના S_n માટનું સૂત્ર $= \frac{\text{પદોની કુલ સંખ્યા}}{2}$ [પ્રથમ પદ + છેલ્લું પદ]

ઉદાહરણ 13 : સમાંતર શ્રેણી 15, 11, 7, 3,...નાં પ્રથમ પંદર પદોનો સરવાળો કરો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 15$, $d = 11 - 15 = -4$ અને $n = 15$

હવે, $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

$\therefore \quad S_{15} = \frac{15}{2}[2(15) + (15 - 1)(-4)]$

$= \frac{15}{2}[30 - 56] = \frac{15}{2}[-26] = -195$

$\therefore$ પ્રથમ પંદર પદોનો સરવાળો -195 છે.

ઉદાહરણ 14 : બે સમાંતર શ્રેણીઓનાં પ્રથમ n પદોના સરવાળાનો ગુણોત્તર પ્રત્યેક $n \in$ N માટે $(3n + 6) : (5n - 13)$ છે. તેમના અગિયારમા પદોનો ગુણોત્તર મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે એક સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ a_1 અને સામાન્ય તફાવત d_1 છે તથા બીજી સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ a_2 અને સામાન્ય તફાવત d_2 છે.

હવે, $\frac{\text{પ્રથમ શ્રેણીનાં પ્રથમ } n \text{ પદોનો સરવાળો}}{\text{બીજી શ્રેણીનાં પ્રથમ } n \text{ પદોનો સરવાળો}} = \frac{3n+6}{5n-13}$

$\therefore \quad \frac{\frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d_1]}{\frac{n}{2}[2a_2 + (n - 1)d_2]} = \frac{3n+6}{5n-13}$

$\therefore \quad \frac{2a_1 + (n - 1)d_1}{2a_2 + (n - 1)d_2} = \frac{3n+6}{5n-13}$ (i)

શ્રેણીઓનાં n મા પદને અનુક્રમે t_n તથા t_n' વડે દર્શાવીએ તો,

હવે, $\frac{t_{11}}{t'_{11}} = \frac{a_1 + 10d_1}{a_2 + 10d_2}$

$= \frac{2a_1 + 20d_1}{2a_2 + 20d_2}$

$= \frac{2a_1 + (21 - 1)d_1}{2a_2 + (21 - 1)d_2}$

તેથી (i) માં $n = 21$ લેતાં,

$$\frac{t_{11}}{t'_{11}} = \frac{a_1 + 10d_1}{a_2 + 10d_2} = \frac{3(21) + 6}{5(21) - 13} = \frac{69}{92} = \frac{3}{4}$$

$\therefore$ આપેલ બે શ્રેણીઓનાં 11 માં પદોનો ગુણોત્તર 3 : 4 છે.

નોંધ : કેટલીક વખત સમાંતર શ્રેણીના કેટલાંક ક્રમિક પદોની આવશ્યકતા ઊભી થાય છે.

જો સમાંતર શ્રેણીનાં **ત્રણ** અથવા **પાંચ** અથવા **સાત** ક્રમિક પદો આપેલ હોય, ત્યારે આપણે તેમાંનું મધ્યમપદ 'a' ધારીશું અને તેની પહેલાનાં પદોમાં ક્રમશઃ 'd' ઘટાડતા જઈશું તથા તે પછીનાં પદોમાં ક્રમશઃ 'd' વધારતા જઈશું.

આમ, સમાંતર શ્રેણીનાં 3 ક્રમિક પદો : $a - d, a, a + d$

5 ક્રમિક પદો : $a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d$

7 ક્રમિક પદો : $a - 3d, a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d, a + 3d$ લઈ શકાય.

જો **ચાર** અથવા **છ** પદો આપેલ હોય, તો તેમાં બે મધ્યમપદ થશે, જેમને આપણે $a - d$ અને $a + d$ ધારીશું. અહીં બે ક્રમિક પદો વચ્ચેનો તફાવત '$2d$' લઈશું, તેથી પહેલાનાં પદો માટે ક્રમશઃ '$2d$' ઘટાડીશું અને પછીનાં પદો માટે '$2d$' વધારીશું.

આમ, સમાંતર શ્રેણીનાં 4 ક્રમિક પદો : $a - 3d, a - d, a + d, a + 3d$

6 ક્રમિક પદો : $a - 5d, a - 3d, a - d, a + d, a + 3d, a + 5d$ લઈ શકાય.

ઉદાહરણ 15 : સમાંતર શ્રેણીનાં ત્રણ ક્રમિક પદોનો સરવાળો અને ગુણાકાર અનુક્રમે 24 અને 312 છે. આ ત્રણ પદો શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે સમાંતર શ્રેણીનાં ત્રણ ક્રમિક પદો $a - d, a, a + d$ છે.

$(a - d) + a + (a + d) = 24$ અને $(a - d) \cdot a \cdot (a + d) = 312$

આમ, $3a = 24$ તેથી $a = 8$

$(8 - d) \cdot 8 \cdot (8 + d) = 312$

$\therefore$ $64 - d^2 = 39$

$\therefore$ $d^2 = 25$

$\therefore$ $d = 5$ અથવા $d = -5$

જો $a = 8$ અને $d = 5$ લઈએ, તો તે પદો 3, 8, 13 થશે અને જો $a = 8$ અને $d = -5$ લઈએ, તો તે 13, 8, 3 થશે.

આમ, માંગેલ પદો 3, 8, 13 છે.

ઉદાહરણ 16 : સમાંતર શ્રેણીનાં ચાર ક્રમિક પદોનો સરવાળો 24 છે અને પ્રથમ તથા છેલ્લાં પદોનો ગુણાકાર -45 છે, તો આ પદો શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે સમાંતર શ્રેણીનાં ચાર ક્રમિક પદો $a - 3d, a - d, a + d, a + 3d$ છે.

તેમનો સરવાળો $(a - 3d) + (a - d) + (a + d) + (a + 3d) = 24$

$\therefore$ $4a = 24$. તેથી $a = 6$

$(a - 3d)(a + 3d) = -45$

$\therefore$ $(6 - 3d)(6 + 3d) = -45$

$\therefore$ $36 - 9d^2 = -45$

$\therefore$ $9d^2 = 81$

$\therefore \quad d^2 = 9$

$\therefore \quad d = 3$ અથવા $d = -3$

જો $a = 6$ અને $d = 3$ લઈએ, તો તે પદો $-3, 3, 9, 15$ અને જો $a = 6$ અને $d = -3$ લઈએ, તો તે પદો $15, 9, 3, -3$ થશે.

ઉદાહરણ 17 : એક વ્યક્તિની પ્રથમ વર્ષની આવક ₹ 3,50,000 છે. તેની આવકમાં દર વર્ષે ₹ 15,000 નો ઈજાફો (વધારો) થાય છે. 15 મા વર્ષે તેની આવક કેટલી હશે ? 15 વર્ષમાં તે કુલ કેટલી રકમ મેળવશે ?

ઉકેલ : અહીં, પ્રથમ પદ $a = 3,50,000$ અને $d = 15,000$

હવે, $t_n = a + (n - 1)d$

$\therefore \quad t_{15} = 3,50,000 + 14(15000) = 5,60,000$

$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$

$= \frac{15}{2}(3,50,000 + 5,60,000) = 68,25,000$

$\therefore$ 15 મા વર્ષે તેની આવક ₹ 5,60,000 હશે અને 15 વર્ષમાં તે કુલ ₹ 68,25,000 મેળવશે.

સ્વાધ્યાય 7.2

1. નીચે આપેલી સમાંતર શ્રેણીઓમાં નિર્દેશિત પદો શોધો :

(1) $-17, -13, -9, \ldots$નું 16મું પદ,

(2) $101, 96, 91, \ldots$નું 31મું પદ,

(3) $3, \frac{9}{2}, 6, \frac{15}{2}, \ldots$નું 10મું પદ

2. એક સમાંતર શ્રેણીનું નવમું પદ 30 હોય, તો તેનાં પ્રથમ સત્તર પદોનો સરવાળો શોધો.

3. જેમને 5 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય તેવી 100 અને 500 વચ્ચેની તમામ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો કરો.

4. એક સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 4 છે અને પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો, તે પછીના પાંચ પદોના સરવાળાથી $\frac{1}{6}$ ગણો હોય, તો તેનું 8મું પદ શોધો.

5. જો સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો $3n^2 + 5n$ હોય, તો તેનું કેટલામું પદ 164 થશે ?

6. એક સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ m પદોનો સરવાળો n અને પ્રથમ n પદોનો સરવાળો m હોય, તો પ્રથમ $(m + n)$ પદોનો સરવાળો મેળવો.

7. એક સમાંતર શ્રેણીનું pમું, qમું અને rમું પદ અનુક્રમે l, m, n હોય, તો $l(q - r) + m(r - p) + n(p - q)$નું મૂલ્ય મેળવો.

8. બે સમાંતર શ્રેણીઓનાં પ્રથમ n પદોના સરવાળાનો ગુણોત્તર પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $(3n - 13) : (5n - 1)$ છે. તેમનાં 13માં પદોનો ગુણોત્તર મેળવો.

9. બે સમાંતર શ્રેણીઓનાં n માં પદોનો ગુણોત્તર પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $(2n - 1) : (4n + 3)$ છે. તેમનાં પ્રથમ 25 પદોના સરવાળાનો ગુણોત્તર મેળવો.

10. જે પૂર્ણાંકોને 2 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય પરંતુ 5 વડે નિઃશેષ ન ભાગી શકાય તેવા 100 થી 200 સુધીના પૂર્ણાંકોનો સરવાળો શોધો.

11. જો એક સમાંતર શ્રેણીનું 10મું પદ $\frac{1}{20}$ અને 20મું પદ $\frac{1}{10}$ હોય, તો તેનું 200 મું પદ શોધો.

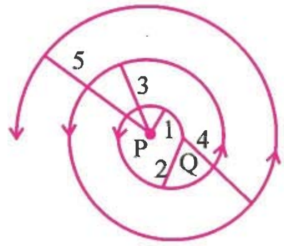
12. એક સમાંતર શ્રેણીનાં ત્રણ ક્રમિક પદોનો સરવાળો 9 અને તેમનાં વર્ગોનો સરવાળો 59 હોય, તો તે પદો મેળવો.

13. એક સમાંતર શ્રેણીનાં ચાર ક્રમિક પદોનો સરવાળો 32 છે અને તેનાં બીજા તથા ત્રીજા પદોનો ગુણાકાર 60 છે, તો આ પદો શોધો.

14. એક વ્યક્તિ તેની લોનની ચૂકવણી માટે પ્રથમ હપ્તામાં ₹ 200 ભરે છે. જો તે દર માસે હપતાની રકમમાં ₹ 20 વધારે, તો 20મા હપતાના અંતે તેણે કુલ કેટલી રકમ ભરપાઈ કરી હશે ?

15. ભાર્ગવ પ્રથમ અઠવાડિયે ₹ 50 બચાવે છે અને તે પ્રત્યેક અઠવાડિયે ₹ 17.50ની બચત વધારતો જાય છે. n મા અઠવાડિયાની તેની બચત ₹ 207.50 થતી હોય, તો n શોધો તથા તેની કુલ બચત શોધો.

16. વારાફરતી P અને Q ને કેન્દ્ર લઈ ક્રમિક અર્ધવર્તુળોની મદદથી એક **કુંતલ (spiral)** બનાવ્યું છે. પ્રથમ P ને કેન્દ્ર લઈ 1 સેમી, 3 સેમી, 5 સેમી. આ પ્રમાણે ત્રિજ્યાઓ લઈ અર્ધવર્તુળો દોરવામાં આવે છે અને પછી Q ને કેન્દ્ર લઈ 2 સેમી, 4 સેમી, 6 સેમી,... ત્રિજ્યાઓ લઈ અર્ધવર્તુળો દોરવામાં આવે છે. જો આવાં 20 અર્ધવર્તુળોની મદદથી કુંતલ બનાવ્યું હોય, તો તેની લંબાઈ શોધો. (જુઓ આકૃતિ 7.1)



આકૃતિ 7.1

*

7.3 સમગુણોત્તર શ્રેણી

આપણે કેટલીક શ્રેણીનું નિરીક્ષણ કરીએ :

(1) 3, 6, 12, 24,... (2) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...$ (3) 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001,...

આપણે નોંધીએ કે દરેક પદ (પ્રથમ પદ સિવાયનું) કોઈક ચોક્કસ ક્રમમાં આગળ વધે છે. (1) માં બીજું પદ અને તે પછીના દરેક પદો, આગળના પદથી બમણાં છે. (3) માં દરેક પદ આગળના પદ કરતાં 0.1 ગણું છે.

તેથી કોઈ પણ પદનો તેની આગળના પદ સાથેનો ગુણોત્તર અચળ છે. એટલે કે દરેક પદ (પ્રથમ પદ સિવાય) માટે તે સમાન છે. આ ગુણધર્મ ધરાવતી શ્રેણીને **સમગુણોત્તર શ્રેણી (Geometric Progression, G.P.) કહે છે, અચળ ગુણોત્તરને સમગુણોત્તર શ્રેણીનો સામાન્ય ગુણોત્તર કહે છે. આમ જો દરેક ક્રમિક પદોની જોડી માટે પદનો પૂર્વપદ સાથેનો ગુણોત્તર શૂન્યેતર અચળ હોય, તો તે શ્રેણીને સમગુણોત્તર શ્રેણી કહે છે.** આપણે સમગુણોત્તર શ્રેણીને નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

સમગુણોત્તર શ્રેણી : શ્રેણી $f : N \rightarrow R, f(n) = Ar^n, A \in R - \{0\}, r \in R - \{0\}$ ને સમગુણોત્તર શ્રેણી કહે છે. સમગુણોત્તર શ્રેણી એ ઘાતાંકીય વિધેય છે.

$n = 1, 2, 3,...$ લેતાં સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં પદો $Ar, Ar^2, Ar^3,...$ મળશે.

પ્રમેય 4 : સમગુણોત્તર શ્રેણીના કોઈ પણ બે ક્રમિક પદોનો ગુણોત્તર શૂન્યેતર અચળ હોય છે.

સાબિતી : ધારો કે $f : N \rightarrow R$ એક સમગુણોત્તર શ્રેણી છે. કોઈક $A \neq 0$ અને કોઈક $r \neq 0$ માટે, $f(n) = Ar^n$, $\forall n \in N$.

બે ક્રમિક પદો $f(k + 1)$ અને $f(k)$ નો ગુણોત્તર $\frac{f(k+1)}{f(k)} = \frac{Ar^{k+1}}{Ar^k} = r$, શૂન્યેતર અચળ.

આ પ્રમેયનું પ્રતીપ પ્રમેય પણ સત્ય છે.

ધારો કે શ્રેણીનું પ્રથમ પદ $a \neq 0$ અને પ્રત્યેક બે ક્રમિક પદોનો ગુણોત્તર r છે, જ્યાં $r \neq 0$. તો તે શ્રેણીનાં પદો $a, ar, ar^2, ..., ar^{n-1}$. આમ, તેનું n મું પદ $t_n = ar^{n-1}$ થાય.

આપણે આ સાબિતી ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી આપીશું.

પ્રમેય 5 : જો શ્રેણીનાં કોઈ પણ બે ક્રમિક પદોનો ગુણોત્તર શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો તે સમગુણોત્તર શ્રેણી છે.

સાબિતી : ધારો કે $f : N \rightarrow R$, $f(n) = ar^{n-1}$ $(a \neq 0, r \neq 0)$

$P(n) : f(n) = ar^{n-1}$ લઈએ. $a, r \in R - \{0\}$

(1) $n = 1$ માટે, $f(1) = ar^0 = a$, પ્રથમ પદ.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

(2) ધારો કે $P(k) : f(k) = ar^{k-1}$, $k \in N$ માટે સત્ય છે.

હવે આપણે $P(k + 1)$ સત્ય સાબિત કરીશું.

$\therefore \dfrac{f(k+1)}{f(k)} = r$ (પક્ષ)

$\therefore f(k + 1) = r \cdot f(k) = r \cdot (ar^{k-1}) = ar^k = ar^{(k+1)-1}$

$\therefore$ $P(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow$ $P(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પ્રમાણે પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $P(n)$ સત્ય છે.

$\{f(n)\}$ એ સમગુણોત્તર શ્રેણી છે.

આપણે નોંધીએ કે, જે શ્રેણીનું પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય ગુણોત્તર r છે, તે સમગુણોત્તર શ્રેણી $a, ar, ar^2, ..., ar^{n-1}, ...$ છે.

અહીં પણ આપણે સમગુણોત્તર શ્રેણીનું n મું પદ t_n દ્વારા દર્શાવીશું.

તેથી, $t_n = ar^{n-1}$, $a \neq 0$, $r \neq 0$.

નોંધ : (1) હવે પછી આપણે સામાન્ય ગુણોત્તરને 'ગુણોત્તર' જ કહીશું.

(2) જો a, b, c સમગુણોત્તર શ્રેણીના ક્રમિક પદો હોય, તો $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b}$ એટલે કે $b^2 = ac$ થાય.

ઉદાહરણ 18 : સમગુણોત્તર શ્રેણી 54, 36, 24, 16,...નું n મું અને 8 મું પદ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 54$, $r = \dfrac{t_2}{t_1} = \dfrac{36}{54} = \dfrac{2}{3}$.

હવે $t_n = ar^{n-1} = 54\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

$$= \frac{2 \times 3^3 \times 2^{n-1}}{3^{n-1}}$$

$\therefore t_n = 2^n \cdot 3^{4-n}$

t_n માં $n = 8$ લેતાં, $t_8 = 2^8 \cdot 3^{-4}$

$$= \frac{256}{81}$$

$\therefore$ શ્રેણીનું n મું પદ $2^n \cdot 3^{4-n}$ અને 8 મું પદ $\dfrac{256}{81}$ છે.

ઉદાહરણ 19 : એક સમગુણોત્તર શ્રેણીનું ત્રીજું પદ 18 અને છઠ્ઠું પદ 486 હોય, તો તેનું 9મું પદ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $t_3 = 18$ અને $t_6 = 486$.

હવે, $t_n = ar^{n-1}$

$\therefore t_3 = ar^2 = 18$ અને $t_6 = ar^5 = 486$

$\therefore \dfrac{t_6}{t_3} = \dfrac{ar^5}{ar^2} = \dfrac{486}{18}$

$\therefore r^3 = 27$

$\therefore r = 3$

વળી, $ar^2 = 18$. આથી, $9a = 18$

$\therefore \quad a = 2$

$\therefore \quad t_9 = ar^8 = 2(3)^8 = 13122$

$\therefore$ 9મું પદ 13122 છે.

સમગુણોત્તર શ્રેઢી

સમગુણોત્તર શ્રેણીને સંબંધિત શ્રેઢીને સમગુણોત્તર શ્રેઢી (Geometric Series) કહે છે.

જો સમગુણોત્તર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 'a' અને ગુણોત્તર 'r' હોય, તો સમગુણોત્તર શ્રેઢીનું n મું પદ

$S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$ થશે.

હવે આપણે ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી S_n નું સૂત્ર મેળવીએ.

પ્રમેય 6 : જો સમગુણોત્તર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ a અને ગુણોત્તર r હોય, તો તેના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$, $a \neq 0$, $r \neq 0$, $r \neq 1$, $n \in N$ તથા જો $r = 1$ તો $S_n = na$.

સાબિતી : ધારો કે વિધાન $P(n) : S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$, $a \neq 0$, $r \neq 0$, $r \neq 1$, $n \in N$.

(1) $n = 1$ માટે $S_1 = \frac{a(r - 1)}{r - 1} = a$ એટલે કે પ્રથમ પદનો સરવાળો એ પ્રથમ પદ 'a' જ થશે.

આમ, $P(1)$ સત્ય છે.

(2) ધારો કે $P(k) : S_k = \frac{a(r^k - 1)}{r - 1}$ એ $k \in N$ માટે સત્ય છે.

ધારો કે $n = k + 1$

$$S_{k+1} = \frac{a(r^k - 1)}{r - 1} + ar^{k + 1 - 1}$$

$$= \frac{a(r^k - 1)}{r - 1} + ar^k$$

$$= \frac{a}{r - 1}[r^k - 1 + r^{k+1} - r^k]$$

$$= \frac{a(r^{k+1} - 1)}{r - 1}$$

આમ, $P(k)$ સત્ય છે $\Rightarrow P(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતને આધારે પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $P(n)$ સત્ય છે.

જો $r = 1$ તો સ્પષ્ટ છે કે $S_n = a + a + ... + a$ (n વખત) $= n \cdot a$

નોંધ : જ્યારે $r < 1$ હોય, ત્યારે આપણે S_n ના સૂત્રનો ઉપયોગ $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$ સ્વરૂપે કરીશું.

ઉદાહરણ 20 : સમગુણોત્તર શ્રેણી માટે $t_2 = 6$ અને $t_5 = 48$ તો S_6 શોધો.

ઉકેલ : $t_2 = 6$ અને $t_5 = 48$

$\therefore \quad ar = 6$ અને $ar^4 = 48$

$\therefore \quad \frac{ar^4}{ar} = \frac{48}{6}$

$\therefore \quad r^3 = 8 = 2^3$

$\therefore \quad r = 2$ અને $ar = 6$

$\therefore \quad a = 3$

હવે, $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

$\therefore \quad S_6 = \frac{3(2^6 - 1)}{2 - 1} = 189$

ઉદાહરણ 21 : એક સમગુણોત્તર શ્રેણીનું ત્રીજું પદ $\frac{3}{4}$ છે. પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો એ પ્રથમ દશ પદોના સરવાળાથી $\frac{32}{33}$ ગણો હોય, તો પ્રથમ ચાર પદોનો સરવાળો શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $t_3 = \frac{3}{4}$ અને $S_5 = \frac{32}{33} \cdot S_{10}$

$\therefore \quad ar^2 = \frac{3}{4}$ અને $\frac{a(r^5 - 1)}{r - 1} = \frac{32}{33} \cdot \frac{a(r^{10} - 1)}{r - 1}$

$\therefore \quad \frac{33}{32} = r^5 + 1$

$\therefore \quad r^5 = \frac{33}{32} - 1$

$\therefore \quad r^5 = \frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$\therefore \quad r = \frac{1}{2}$

વળી, $ar^2 = \frac{3}{4}$ પરથી $a\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

$\therefore \quad a = 3$

હવે, $S_4 = \frac{a(1 - r^4)}{1 - r} = \frac{3\left(1 - \frac{1}{16}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 6\left(\frac{15}{16}\right)$

$\therefore \quad S_4 = \frac{45}{8}$

$\therefore$ પ્રથમ ચાર પદોનો સરવાળો $\frac{45}{8}$ છે.

નોંધ : કેટલીક વખત આપણે સમગુણોત્તર શ્રેણીના કેટલાંક ક્રમિક પદો ધારવાં આવશ્યક હોય છે.

જો સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં **ત્રણ** અથવા **પાંચ** અથવા **સાત** ક્રમિક પદો આપ્યાં હોય, તો આપણે મધ્યમપદને 'a' ધારીશું અને તેની પહેલાનાં પદો માટે a ને $r, r^2, r^3,\ldots$ વડે ભાગીશું તથા પાછળનાં પદો માટે a ને $r, r^2, r^3,\ldots$ વડે ગુણીશું. આપણે સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં,

3 ક્રમિક પદો : $\frac{a}{r}, a, ar$

5 ક્રમિક પદો : $\frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2$

7 ક્રમિક પદો : $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2, ar^3$ લઈશું.

જો સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં **ચાર** અથવા **છ** ક્રમિક પદો આપ્યાં હોય, તો બે મધ્યમપદો $\frac{a}{r}$ અને ar ધારીશું તથા $\frac{a}{r}$ ની પહેલાનાં પદો માટે $\frac{a}{r}$ ને $r^2, r^4, r^6,\ldots$ વડે ભાગીશું અને ar પછીનાં પદો માટે $r^2, r^4, r^6,\ldots$ વડે ar ને ગુણીશું. આપણે, સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં

4 ક્રમિક પદો : $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$

6 ક્રમિક પદો : $\frac{a}{r^5}, \frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3, ar^5$ લઈશું.

ઉદાહરણ 22 : ત્રણ સંખ્યાઓ સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં ત્રણ ક્રમિક પદો છે. તેમનો સરવાળો અને ગુણાકાર અનુક્રમે $\frac{31}{5}$ અને 1 છે. આ સંખ્યાઓ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં ત્રણ ક્રમિક પદો $\frac{a}{r}, a, ar$ છે.

તેમનો ગુણાકાર $\left(\frac{a}{r}\right)(a)(ar) = 1$ અને સરવાળો $\frac{a}{r} + a + ar = \frac{31}{5}$

$\therefore$ $a^3 = 1$ તેથી $a = 1$ અને $\frac{1}{r} + 1 + r = \frac{31}{5}$

$\therefore$ $5r^2 - 26r + 5 = 0$

$\therefore$ $(5r - 1)(r - 5) = 0$

$\therefore$ $r = \frac{1}{5}$ અથવા $r = 5$

$a = 1$ અને $r = \frac{1}{5}$ લેતાં, તે સંખ્યાઓ $5, 1, \frac{1}{5}$ થશે.

(જો આપણે $r = 5$ લઈએ તો આ જ સંખ્યાઓ મળે.)

ઉદાહરણ 23 : શ્રેણી 5, 55, 555,...નાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો કરો.

ઉકેલ : $S_n = 5 + 55 + 555 + \ldots$ n પદો

$= \frac{5}{9}[9 + 99 + 999 + \ldots$ n પદો$]$

$= \frac{5}{9}[(10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \ldots$ n પદો$]$

$= \frac{5}{9}[(10 + 10^2 + 10^3 + \ldots$ n પદો$) - (1 + 1 + 1 + \ldots n$ પદો$)]$

$= \frac{5}{9}\left[\frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n\right]$ **(અહીં, $a = 10, r = 10$)**

$= \frac{5}{9}\left[\frac{10}{9}(10^n - 1) - n\right]$

$= \frac{50}{81}(10^n) - \frac{50}{81} - \frac{5n}{9}.$

ઉદાહરણ 24 : ચોક્કસ પ્રકારના સૂક્ષ્મ જીવાણું (બૅક્ટેરિયા) દર કલાકે 4 % પ્રમાણે વધે છે. શરૂઆતમાં 40 જીવાણુઓ હોય, તો ચોથા કલાકના અંતે કેટલા જીવાણુઓ હાજર હશે ? ચોથા કલાકમાં કેટલા જીવાણુઓ વધ્યા હશે ?

ઉકેલ : શરૂઆતના બૅક્ટેરિયાની સંખ્યા 40 છે. પ્રથમ કલાકના અંતે 4 % જીવાણુઓ વધે છે.

તેથી પ્રથમ કલાકના અંતે જીવાણુઓની સંખ્યા

$$40 + 40\left(\frac{4}{100}\right) = 40(1 + 0.04) = 40(1.04)$$

બીજા કલાકના અંતે જીવાણુઓની સંખ્યા $40(1.04)^2$ થશે.

ત્રીજા કલાકના અંતે જીવાણુઓની સંખ્યા $40(1.04)^3$ છે.

આમ, ક્રમિક કલાકોમાં જીવાણુઓની સંખ્યા એ એક સમગુણોત્તર શ્રેણી બનાવે છે. શરૂઆતમાં $T_1 = a = 40$ અને $r = 1.04$.

હવે, ચોથા કલાકના અંતે જીવાણુઓની સંખ્યા $40(1.04)^4 = 46.7943$

એટલે કે લગભગ 47 બૅક્ટેરિયા 4 કલાકના અંતે હાજર હોય.

ચોથા કલાકમાં વધેલા જીવાણુઓની સંખ્યા

= ચાર કલાકના અંતે જીવાણુઓની સંખ્યા − ત્રણ કલાકના અંતે જીવાણઉઓની સંખ્યા

$= 40[(1.04)^4 - (1.04)^3]$

$= 40(1.04)^3\ (1.04 - 1)$

$= 40(1.04)^3\ (0.04)$

$= 1.7987$

$\therefore$ ચોથા કલાકમાં લગભગ 2 જીવાણુ વધે.

સ્વાધ્યાય 7.3

1. નીચેની સમગુણોત્તર શ્રેણીઓ માટે દર્શાવેલ પદો શોધો :

(1) $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \ldots$નું 12 મું પદ

(2) $7, \frac{-7}{2}, \frac{7}{4}, \frac{-7}{8}, \ldots$નું 11 મું પદ

(3) $-2, -2\sqrt{2}, -4, -4\sqrt{2}, \ldots$નું 8 મું પદ

2. નીચેની સમગુણોત્તર શ્રેણીઓ માટે માગ્યા પ્રમાણે ગણો :

(1) $t_7 = 96$, $r = 2$, તો t_{10} શોધો. (2) $a = 2$, $r = \sqrt{2}$, $t_n = 128$ તો n શોધો.

(3) $a = 3$, $r = 3$, $S_n = 363$, તો n શોધો. (4) $r = \frac{1}{3}$, $S_3 = \frac{585}{4}$, તો a શોધો.

3. સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં પ્રથમ ત્રણ પદોનો સરવાળો 21 અને તે પછીનાં ત્રણ પદોનો સરવાળો 168 હોય, તો પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો કરો.

4. જો સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં પ્રથમ બે પદોનો સરવાળો $\frac{9}{2}$ અને છઠ્ઠું પદ એ તેના ત્રીજા પદથી 8 ગણું હોય, તો તે શ્રેણી શોધો.

5. શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો કરો :

(1) 7, 77, 777, 7777,... (2) 3, 33, 303, 3003,...

6. સરવાળો કરો : $a(a + b) + a^2(a^2 + b^2) + a^3(a^3 + b^3) + \ldots$ n પદો સુધી. $(a,\ b \neq 0, \pm 1)$

7. સમગુણોત્તર શ્રેણીની પાંચ ક્રમિક ધન સંખ્યાઓનો ગુણાકાર 32 અને સૌથી મોટી અને સૌથી નાની સંખ્યાઓનો ગુણોત્તર 81 : 1 હોય, તો તે સંખ્યાઓ શોધો.

8. એક સમગુણોત્તર શ્રેણીનું $(p + q)$મું પદ m અને $(p - q)$મું પદ n છે. આ શ્રેણીનું p મું પદ m અને n માં શોધો.

9. જો 1, a, b, c, 2 એ સમગુણોત્તર શ્રેણીના ક્રમિક પદો હોય, તો abc ની કિંમત શોધો.

10. સમગુણોત્તર શ્રેણીનું pમું, qમું અને rમું પદ પણ અન્ય સમગુણોત્તર શ્રેણીના ત્રણ ક્રમિક પદો હોય, તો સાબિત કરો કે p, q, r સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

11. જો x, y, z સમગુણોત્તર શ્રેણીના ક્રમિક પદો હોય, તો સાબિત કરો કે, $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{y}$.

12. સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં ચાર ક્રમિક પદોનો ગુણાકાર 16 છે તથા બીજી અને ત્રીજી સંખ્યાનો સરવાળો 5 છે, તો તે સંખ્યાઓ શોધો.

13. એક મોટરસાઇકલ ₹ 60,000 માં ખરીદી, જો દર વર્ષે તેની કિંમતમાં 10 % ઘટાડો થતો હોય, તો ચોથા વર્ષના અંતે તેની કિંમત કેટલી હશે ?

*

7.4 મધ્યકો

સમાંતર મધ્યક : જો ત્રણ ભિન્ન સંખ્યાઓ a, A, b સમાંતર શ્રેણીનાં ત્રણ ક્રમિક પદો હોય તો A ને બે સંખ્યાઓ a અને b નો **સમાંતર મધ્યક (Arithmetic Mean)** કહે છે. સમાંતર મધ્યકને સંકેત A વડે દર્શાવાય છે.

a, A અને b એ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore \quad A - a = b - A$

$\therefore \quad 2A = a + b$

$\therefore \quad A = \frac{a+b}{2}$

આમ, a અને bનો સમાંતર મધ્યક $A = \frac{a+b}{2}$ છે. તે a અને bની સરેરાશ છે.

જેમકે, 4 અને 12 નો સમાંતર મધ્યક $A = \frac{4+12}{2} = 8$ છે.

સમાંતર મધ્યકો : બે ભિન્ન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a અને b માટે જો સંખ્યાઓ $a, A_1, A_2, A_3, ..., A_n, b$ સમાંતર શ્રેણીનાં ક્રમિક પદો હોય, તો $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ ને બે ભિન્ન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a અને b વચ્ચેના n સમાંતર મધ્યકો કહેવાય.

ધારો કે, $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ એ a અને b વચ્ચેના n સમાંતર મધ્યકો છે.

અહીં, આપણને સમાંતર શ્રેણીનાં $n + 2$ પદો મળે છે. તેમાં પ્રથમ પદ a અને $(n + 2)$મું પદ b છે.

$\therefore \quad t_{n+2} = b = a + [(n + 2) - 1]\, d$

$\therefore \quad b - a = (n + 1)d$

$\therefore \quad \frac{b-a}{n+1} = d$

અહીં, સમાંતર મધ્યક $A_1 = a + d = a + \left(\frac{b-a}{n+1}\right)$

આમ, $A_1 = a + \left(\frac{b-a}{n+1}\right)$, $A_2 = a + 2\left(\frac{b-a}{n+1}\right)$, $A_3 = a + 3\left(\frac{b-a}{n+1}\right)$,...

તેથી a અને b વચ્ચેના n સમાંતર મધ્યકો $A_k = a + k\left(\frac{b-a}{n+1}\right)$, જ્યાં $k = 1, 2, 3, ..., n$.

અહીં, A_k એ a અને b વચ્ચેના n સમાંતર મધ્યકો પૈકીનો kમો સમાંતર મધ્યક છે.

અહીં, $n = 1$ માટે $A_1 = a + \frac{b-a}{n+1} = \frac{a+b}{2}$, જે a અને bનો સમાંતર મધ્યક છે.

આમ, બે ભિન્ન સંખ્યાઓ a અને b માટેનો સમાંતર મધ્યક $A = \frac{a+b}{2}$ છે.

ઉદાહરણ 25 : 8 અને 23 વચ્ચે ચાર સમાંતર મધ્યકો શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 8$, $b = 23$ અને $n = 4$

તેથી, $d = \frac{b-a}{n+1} = \frac{23-8}{4+1} = \frac{15}{5} = 3$

$\therefore$ 8 અને 23 વચ્ચેના ચાર સમાંતર મધ્યકો,

$8 + 3, 8 + 2(3), 8 + 3(3), 8 + 4(3)$. મધ્યકો 11, 14, 17 અને 20 છે.

ઉદાહરણ 26 : 1 અને 31 વચ્ચે n સમાંતર મધ્યકો એવી રીતે મૂકવામાં આવે છે કે જેથી, $(n - 1)$મા અને 7 મા મધ્યકનો ગુણોત્તર 9 : 5 થાય, તો n શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 1$, $b = 31$.

સામાન્ય તફાવત $d = \frac{b-a}{n+1} = \frac{31-1}{n+1} = \frac{30}{n+1}$

$$\frac{(n - 1)\text{મો મધ્યક}}{7\text{મો મધ્યક}} = \frac{9}{5}$$

$$\therefore \quad \frac{1+(n-1)\left(\frac{30}{n+1}\right)}{1+7\left(\frac{30}{n+1}\right)} = \frac{9}{5}$$

$$\therefore \quad \frac{n+1+30n-30}{n+1+210} = \frac{9}{5}$$

$\therefore \quad 5(31n - 29) = 9(n + 211)$

$\therefore \quad 155n - 145 = 9n + 1899$

$\therefore \quad 146n = 2044$

$\therefore \quad n = 14$

સમગુણોત્તર મધ્યક : આપેલી બે ભિન્ન ધન સંખ્યાઓ a અને b માટે ધન સંખ્યા G એવી મળે કે જેથી, a, G, b સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં ક્રમિક પદો હોય, તો G ને a અને b નો **સમગુણોત્તર મધ્યક (Geometric Mean)** અથવા **ગુણોત્તર મધ્યક** કહે છે. a અને b ના સમગુણોત્તર મધ્યકને G વડે દર્શાવાય છે.

a, G, b સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore \quad \frac{G}{a} = \frac{b}{G}$

$\therefore \quad G^2 = ab$

$\therefore \quad \mathbf{G = \sqrt{ab}}$

જેમકે, 2 અને 18 નો ગુણોત્તર મધ્યક $G = \sqrt{2 \times 18} = 6$ છે.

ગુણોત્તર મધ્યકો : આપેલ ભિન્ન ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a અને b માટે ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ $G_1, G_2, ..., G_n$ મળે કે જેથી, $a, G_1, G_2, G_3, ... G_n, b$ સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં ક્રમિક પદો હોય, તો $G_1, G_2, G_3, ..., G_n$ ને a અને b વચ્ચેના ગુણોત્તર મધ્યકો કહે છે.

હવે, a અને b વચ્ચેના n ગુણોત્તર મધ્યકો માટેનું સૂત્ર મેળવીશું.

ધારો કે, $G_1, G_2, G_3, ..., G_n$ એ a અને b વચ્ચેના n ગુણોત્તર મધ્યકો છે. તેથી $a, G_1, G_2, G_3, ..., G_n, b$ સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં ક્રમિક પદો છે, જેનું પ્રથમ પદ a અને $(n + 2)$મું પદ b છે.

$\therefore \quad t_{n+2} = b = ar^{n+1}$, જ્યાં r એ સમગુણોત્તર શ્રેણીનો સામાન્ય ગુણોત્તર છે.

$$\therefore \quad r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

આમ, $G_1 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}, G_2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}, G_3 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{n+1}}, ...$

$\therefore$ **a અને b વચ્ચેના n ગુણોત્તર મધ્યકો, $G_k = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n+1}}$, જ્યાં, $k = 1, 2, 3, ..., n$**

અહીં, G_k એ a અને b વચ્ચેના n ગુણોત્તર મધ્યકો પૈકીનો kમો ગુણોત્તર મધ્યક છે.

$n = 1$ માટે, $G_1 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{1+1}} = \sqrt{ab}$, જે a અને bનો ગુણોત્તર મધ્યક છે.

આમ, બે ભિન્ન ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a અને b નો ગુણોત્તર મધ્યક $G = \sqrt{ab}$ થાય.

ઉદાહરણ 27 : 2 અને $\frac{2}{81}$ વચ્ચેના ત્રણ ગુણોત્તર મધ્યક શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 2$, $b = \frac{2}{81}$, $n = 3$.

$\therefore \quad r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}} = \left(\frac{2}{81} \times \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3+1}} = \left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$

હવે, $G_1 = ar = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $G_2 = ar^2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$, $G_3 = ar^3 = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{2}{27}$.

$\therefore$ 2 અને $\frac{2}{81}$ વચ્ચેના ત્રણ ગુણોત્તર મધ્યકો $\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}$ છે.

ઉદાહરણ 28 : જો બે ધન સંખ્યાઓનો સમાંતર મધ્યક અને ગુણોત્તર મધ્યક અનુક્રમે 7 અને $2\sqrt{6}$ હોય, તો તે બે સંખ્યાઓ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે બે ધન સંખ્યાઓ a તથા b નો સમાંતર મધ્યક 7 અને સમગુણોત્તર મધ્યક $2\sqrt{6}$ છે.

$A = \frac{a+b}{2} = 7$ અને $G = \sqrt{ab} = 2\sqrt{6}$

$\therefore \quad a + b = 14$ અને $ab = 24$

$\therefore \quad b = \frac{24}{a}$

$\therefore \quad a + \frac{24}{a} = 14$

$\therefore \quad a^2 - 14a + 24 = 0$

$\therefore \quad (a - 12)(a - 2) = 0$

$\therefore \quad a = 12$ અથવા $a = 2$

હવે $a = 12$, તો $b = 2$ અને $a = 2$ તો $b = 12$

$\therefore$ માંગેલ સંખ્યાઓ 2 અને 12 છે.

ઉદાહરણ 29 : જો a અને b નો ગુણોત્તર મધ્યક G તથા A_1 અને A_2 એ a અને b વચ્ચેના બે સમાંતર મધ્યકો હોય, તો સાબિત કરો કે $G^2 = (2A_1 - A_2)(2A_2 - A_1)$.

ઉકેલ : A_1, A_2 એ a અને b વચ્ચેના બે સમાંતર મધ્યકો છે.

$\therefore \quad a, A_1, A_2, b$ સમાંતર શ્રેણીનાં ક્રમિક પદો છે.

$\therefore \quad A_1 = \frac{a + A_2}{2}$ અને $A_2 = \frac{A_1 + b}{2}$

$\therefore \quad 2A_1 - A_2 = a$ અને $2A_2 - A_1 = b$

હવે $G^2 = ab = (2A_1 - A_2)(2A_2 - A_1)$

પ્રમેય 7 : જો બે ભિન્ન ધન સંખ્યાઓ a અને b ના સમાંતર મધ્યક અને સમગુણોત્તર મધ્યક અનુક્રમે A અને G હોય, તો સાબિત કરો કે, A > G.

સાબિતી : a અને b એ ભિન્ન ધન સંખ્યાઓ છે.

તેથી, $A = \frac{a+b}{2}$ અને $G = \sqrt{ab}$

$\therefore \quad A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$

$= \frac{1}{2}(a + b - 2\sqrt{ab})$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0$ **($a \neq b;\ a, b > 0$)**

$\therefore \quad A > G$

ઉદાહરણ 30 : બે ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓના સમાંતર મધ્યક અને ગુણોત્તર મધ્યકનો તફાવત 12 છે તથા તે બે સંખ્યાઓનો ગુણોત્તર 1 : 9 છે. આ સંખ્યાઓ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે માંગેલ સંખ્યાઓ a અને b છે, $a, b \in R^+$.

$\therefore \quad A = \frac{a+b}{2}$ અને $G = \sqrt{ab}$

હવે, $A > G$ હોવાથી $A - G = 12$ અને $\frac{a}{b} = \frac{1}{9}$

$\therefore \quad \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = 12$ અને $b = 9a$

$\therefore \quad \frac{a+9a}{2} - \sqrt{a \cdot 9a} = 12$

$\therefore \quad 5a - 3a = 12$

$\therefore \quad a = 6$ અને $b = 54$

$\therefore$ માંગેલ બે સંખ્યાઓ 6 અને 54 છે.

ઉદાહરણ 31 : ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a, b, c માટે સાબિત કરો કે $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

તે જ પ્રમાણે $\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}$ અને $\frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}$.

ઉપરના પરિણામોની અનુરૂપ બાજુઓનો ગુણાકાર કરતાં, $\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b+c}{2}\right)\left(\frac{c+a}{2}\right) \geq abc$

$\therefore \quad (a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$

સ્વાધ્યાય 7.4

1. 3 અને 4 વચ્ચે પાંચ સમાંતર મધ્યકો મૂકો.
2. −3 અને 29 વચ્ચે ત્રણ સમાંતર મધ્યકો મૂકો.
3. $\frac{1}{8}$ અને 8 વચ્ચેના પાંચ ગુણોત્તર મધ્યકો શોધો.
4. 2 અને $\frac{1}{2}$ વચ્ચે ત્રણ ગુણોત્તર મધ્યકો મૂકો.
5. જે બે ધન સંખ્યાઓના સમાંતર અને ગુણોત્તર મધ્યકો અનુક્રમે 25 અને 15 હોય, તે સંખ્યાઓ શોધો.
6. દ્વિઘાત સમીકરણના બે બીજના સમાંતર અને ગુણોત્તર મધ્યકો અનુક્રમે 10 અને 8 હોય, તો તે દ્વિઘાત સમીકરણ મેળવો.

7. જો $sec(x + y)$, $secx$, $sec(x - y)$ એ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો સાબિત કરો કે $cosx = \pm\sqrt{2}\ cos\frac{y}{2}$, જ્યાં $cosx \neq 1$; $cosy \neq 1$.

8. જો $\frac{1}{q}$ એ $\frac{1}{p}$ અને $\frac{1}{r}$નો સમાંતર મધ્યક હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{r+p}{q}$ એ $\frac{p+q}{r}$ અને $\frac{q+r}{p}$નો સમાંતર મધ્યક છે, જ્યાં $p, q, r \neq 0$.

*

7.5 કેટલીક વિશિષ્ટ શ્રેણીઓના સરવાળા

પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના ઘાતની શ્રેણી : આપણે સમાંતર શ્રેણી અને સમગુણોત્તર શ્રેણીના પ્રથમ n પદોના સરવાળા માટેનાં સૂત્ર મેળવ્યાં, પરંતુ દરેક શ્રેણી માટે આવાં સૂત્ર મેળવવા શક્ય નથી. કેટલીક અગત્યની શ્રેણીઓ એવી છે કે જેઓ સમાંતર શ્રેણી નથી તેમજ સમગુણોત્તર શ્રેણી પણ નથી અને છતાં આપણે તેમનાં n પદોના સરવાળાની ગણતરી કરી શકીએ છીએ. આપણે આવી કેટલીક વિશિષ્ટ શ્રેણીઓને ધ્યાનમાં લઈએ. આપણે પ્રથમ n પ્રાકૃતિક સંખ્યા, તેમનાં વર્ગ, તેમના ઘનના સરવાળાનાં સૂત્રો શોધીએ.

આપણે 'Σ' (Σને સીગ્મા વંચાય) સંકેતનો ઉપયોગ કરીશું. તેનો આવી શ્રેણીઓ માટે વિશિષ્ટ ઉપયોગ છે. તે કેપીટલ ગ્રીક અક્ષર સીગ્માનું એક વિશિષ્ટ સ્વરૂપ છે. Σ નો અર્થ **સરવાળો** એમ થાય છે.

$\sum\limits_{n=2}^{n=6} t_n$ ને આપણે 'સીગ્મા t_n જ્યાં n નું મૂલ્ય 2 થી 6 તેમ વાંચીશું.' તે $n = 2, 3, 4, 5$ અને 6 માટે t_n નો સરવાળો સૂચવે છે. એટલે કે, $\sum\limits_{n=2}^{n=6} t_n = t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6$.

દાખલા તરીકે,

$$\sum_{n=2}^{n=6} (2n+3) = \{2(2)+3\} + \{2(3)+3\} + \{2(4)+3\} + \{2(5)+3\} + \{2(6)+3\}$$

$$= 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 55$$

એટલે કે, આપણે $n = 2, 3, 4, 5$ અને 6 ને $(2n + 3)$ માં મૂકીને આપણે પરિણામે જે સંખ્યાઓ મળે તેનો સરવાળો કરીશું.

$\sum\limits_{n=2}^{n=6} t_n$ ને બદલે $\sum\limits_{n=2}^{6} t_n$ લખવું અનુકૂળ રહેશે.

Σ સંકેતના નીચે પ્રમાણે સહેલાઈથી સાબિત થઈ શકે તેવા ગુણધર્મો છે :

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n} ma_i = m\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, જ્યાં m એ i પર આધારિત ન હોય તેવી અચળ સંખ્યા છે.

(3) $\sum\limits_{i=1}^{n} 1 = \sum\limits_{i=1}^{n} (i)^0 = 1^0 + 2^0 + 3^0 + ... + n^0$

$= 1 + 1 + 1 + ...$ n વખત $= n$

(4) $\sum\limits_{i=1}^{n} m = m\sum\limits_{i=1}^{n} 1 = mn$, જ્યાં m અચળ

નોંધ : (1) $\sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot b_i) \neq \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i$

(2) $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{b_i}\right) \neq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i}$, $b_i \neq 0, \forall i \in N$

હવે આપણે કેટલીક વિશિષ્ટ શ્રેણીઓના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો શોધીએ,

(1) $\sum_{r=1}^{n} r$, (2) $\sum_{r=1}^{n} r^2$, (3) $\sum_{r=1}^{n} r^3$.

હવે, $\sum_{r=1}^{n} r = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ એ આપણે સમાંતર શ્રેણી માટે પ્રથમ n પદોના સરવાળાના સૂત્રની મદદથી સાબિત કરી શકીએ. (પ્રયત્ન કરો !)

નોંધ : એવું માનવામાં આવે છે કે મહાન ગણિતજ્ઞ ગૉસે લગભગ 5 થી 6 વર્ષની ઉંમરે 1 + 2 + 3 +...+ 100નો સરવાળો મેળવ્યો હતો. જ્યારે તેના શિક્ષકે તેને 1 થી 100 નો સરવાળો કરવાનું કહ્યું, તો તેણે આ પ્રશ્ન ગણતરીની ક્ષણોમાં જ ઉકેલ મેળવ્યો હતો. તેને 1 + 100 = 101, 2 + 99 = 101, 3 + 98 = 101,... 50 + 51 = 101, જેવી જોડીઓ બનાવી આ જોડીઓનો સરવાળો કર્યો, દરેક જોડીમાં સરવાળો 101 બને છે અને તેવી 50 જોડીઓ છે. તેથી 1 થી 100 સુધીનો સરવાળો 50 × 101 = 5050.

આ પરથી પણ આપણને $\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2}$ સૂત્ર મળે.

પ્રમેય 8 : $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in N$

સાબિતી : અહીં, $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$.

આપણે એક નિત્યસમ લઈએ : $x^3 - (x-1)^3 = 3x^2 - 3x + 1$

તેમાં, $x = 1, 2, 3, ..., n$, લેતાં,

$1^3 - 0^3 = 3(1)^2 - 3(1) + 1$

$2^3 - 1^3 = 3(2)^2 - 3(2) + 1$

$3^3 - 2^3 = 3(3)^2 - 3(3) + 1$

$\vdots$

$n^3 - (n-1)^3 = 3(n)^2 - 3(n) + 1$

ઉપરના પરિણામોનો સરવાળો કરતાં,

$n^3 - 0^3 = 3[1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2] - 3[1 + 2 + 3 + ... + n] + [1 + 1 + 1 + ... + 1, n \text{ વખત}]$

$\therefore \quad n^3 = 3 \cdot S_n - 3 \sum_{r=1}^{n} r + n$

$\therefore \quad 3S_n = n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n$

$$\therefore \quad S_n = \frac{1}{6}\left(2n^3 + 3n^2 + 3n - 2n\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(2n^3 + 3n^2 + n\right)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot n\left(2n^2 + 3n + 1\right)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot n\,(n + 1)(2n + 1)$$

$$\therefore \quad \sum_{r=1}^{n} r^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}\,n\,(n + 1)(2n + 1)$$

પ્રમેય 9 : $\sum_{r=1}^{n} r^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},\ n \in N$

સાબિતી : અહીં, $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$.

આપણે એક નિત્યસમ લઈએ : $x^4 - (x - 1)^4 = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1$

તેમાં, $x = 1, 2, 3, ..., n$, લેતાં,

$1^4 - 0^4 = 4(1)^3 - 6(1)^2 + 4(1) - 1$

$2^4 - 1^4 = 4(2)^3 - 6(2)^2 + 4(2) - 1$

$3^4 - 2^4 = 4(3)^3 - 6(3)^2 + 4(3) - 1$

.
.
.

$n^4 - (n - 1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$

ઉપરના પરિણામોનો સરવાળો કરતાં,

$n^4 - 0^4 = 4[1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3] - 6[1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2]$

$+ 4[1 + 2 + 3 + ... + n] - [1 + 1 + 1 + ... + 1,\ n$ વખત$]$

$$\therefore \quad n^4 = 4S_n - 6\sum_{r=1}^{n} r^2 + 4\sum_{r=1}^{n} r - n$$

$$\therefore \quad 4S_n = n^4 + 6\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\,\frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{1}{4}\left[n^4 + n(n + 1)(2n + 1) - 2n(n + 1) + n\right]$$

$$= \frac{1}{4} \cdot n\left[n^3 + (n + 1)(2n + 1) - 2(n + 1) + 1\right]$$

$$= \frac{1}{4} \cdot n\left(n^3 + 2n^2 + 3n + 1 - 2n - 2 + 1\right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot n\left(n^3 + 2n^2 + n\right)$$

$$= \frac{1}{4}n \cdot n\left(n^2 + 2n + 1\right)$$

$$= \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$$

$\therefore \quad S_n = \frac{1}{4} \cdot n^2(n + 1)^2$ અથવા $S_n = \left[\frac{1}{2}\,n(n + 1)\right]^2$

$\therefore \quad \sum_{r=1}^{n} r^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

આપણે $\sum_{r=1}^{n} r$, $\sum_{r=1}^{n} r^2$, $\sum_{r=1}^{n} r^3$ ને અનુક્રમે Σn, Σn^2, Σn^3 વડે દર્શાવીશું.

ઉદાહરણ 32 : નીચેના સરવાળા કરો :

(1) $\sum_{r=7}^{16} 2r^3$, (2) $\sum_{r=10}^{20} (3r - r^2)$

ઉકેલ : (1) $\sum_{r=7}^{16} 2r^3 = 2\sum_{r=7}^{16} r^3$

$$= 2\left[\sum_{r=1}^{16} r^3 - \sum_{r=1}^{6} r^3\right]$$

$$= 2\left[\frac{(16)^2 \cdot (17)^2}{4} - \frac{(6)^2 \cdot (7)^2}{4}\right]$$

$$= 2\ [18496 - 441] = 2\ [18055] = 36110$$

(2) $\sum_{r=10}^{20} (3r - r^2) = 3\left[\sum_{r=1}^{20} r - \sum_{r=1}^{9} r\right] - \left[\sum_{r=1}^{20} r^2 - \sum_{r=1}^{9} r^2\right]$

$$= 3\left[\frac{20(20+1)}{2} - \frac{9(9+1)}{2}\right] - \left[\frac{20(20+1)\ (20(2)+1)}{6} - \frac{9(9+1)\ (2(9)+1)}{6}\right]$$

$$= 3\left[\frac{(20)\ (21)}{2} - \frac{9(10)}{2}\right] - \left[\frac{20(21)\ (41)}{6} - \frac{9(10)\ (19)}{6}\right]$$

$$= 3\ (210 - 45) - (2870 - 285) = 495 - 2585 = -2090$$

ઉદાહરણ 33 : $1^3 + 3^3 + 5^3 + ...$ n પદોનો સરવાળો કરો.

ઉકેલ : આપણે સમાંતર શ્રેણી 1, 3, 5,...ના n મા પદ (વ્યાપક પદ)નો વિચાર કરીએ. તેનું પ્રથમ પદ $a = 1$ અને $d = 2$ છે.

$\therefore \quad t_n = a + (n-1)d = 1 + (n-1)2 = 2n - 1$

$\therefore$ આપેલ શ્રેણીનું n મું પદ $(2n-1)^3$ થશે.

નોંધ : જ્યારે આપણે વ્યાપક પદ મેળવવું હોય, તો તે મેળવવા માટેની પદ્ધતિ બતાવવાની જરૂર રહેતી નથી. દાખલા તરીકે આ પ્રશ્નમાં 1, 3, 5,... એ અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓની શ્રેણી છે. જેથી સ્વાભાવિક રીતે, nમી અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા $2n - 1$ છે.

હવે, $S_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n-1)^3$

$$= \sum_{r=1}^{n} (2r-1)^3$$

$$= \sum_{r=1}^{n} (8r^3 - 12r^2 + 6r - 1)$$

$$= 8 \sum_{r=1}^{n} r^3 - 12 \sum_{r=1}^{n} r^2 + 6 \sum_{r=1}^{n} r - \sum_{r=1}^{n} 1$$

$$= 8 \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 12 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n$$

$$= n(n + 1) [2n(n + 1) - 2(2n + 1) + 3] - n$$

$$= n(n + 1) (2n^2 + 2n - 4n - 2 + 3) - n$$

$$= n(n + 1) (2n^2 - 2n + 1) - n$$

$$= n[(n + 1)(2n^2 - 2n + 1) - 1]$$

$$= n(2n^3 + 2n^2 - 2n^2 - 2n + n + 1 - 1)$$

$$= n(2n^3 - n)$$

$$= n^2(2n^2 - 1)$$

ઉદાહરણ 34 : શ્રેઢી $1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + ...$ n પદો સુધીનો સરવાળો કરો અને તે પરથી પ્રથમ 50 પદોનો સરવાળો મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, શરૂઆતમાં આપણે 1, 2, 3,... અને 4, 5, 6,... નું n મું પદ મેળવીએ, જે અનુક્રમે n તથા $(n + 3)$ થશે.

$$\therefore \quad t_n = n(n + 3)$$

$$\therefore \quad S_n = \sum_{r=1}^{n} r(r + 3)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} (r^2 + 3r)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} r^2 + 3 \sum_{r=1}^{n} r$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 9n(n+1)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1+9)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+5)}{3}$$

$n = 50$, મૂકતાં,

$$S_{50} = \frac{50(51)(55)}{3} = 46750$$

આમ, પ્રથમ n પદોનો સરવાળો $S_n = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}$ અને પ્રથમ 50 પદોનો સરવાળો 46750 થાય.

ઉદાહરણ 35 : $(1 + x) + (1 + x + x^2) + (1 + x + x^2 + x^3) + \dots$ પ્રથમ n પદોનો સરવાળો કરો. $(x \neq 1)$

ઉકેલ : અહીં, $S_n = \frac{1 - x^2}{1 - x} + \frac{1 - x^3}{1 - x} + \frac{1 - x^4}{1 - x} + \dots$ n પદો

$$= \frac{1}{1 - x}\,[(1 + 1 + 1 + \dots n \text{ પદો}) - (x^2 + x^3 + x^4 + \dots n \text{ પદો})]$$

$$= \frac{1}{1 - x}\left[n - \frac{x^2(1 - x^n)}{1 - x}\right]$$

($x^2 + x^3 + x^4 + \dots$ n પદો એ સમગુણોત્તર શ્રેણી છે, જ્યાં; $a = x^2$, $r = x$)

ઉદાહરણ 36 : જો શ્રેઢી $1^2 + 2 \cdot 2^2 + 3^2 + 2 \cdot 4^2 + 5^2 + \dots + 2(n - 1)^2 + n^2$. ના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો $\frac{n(n+1)^2}{2}$ હોય, જ્યાં n યુગ્મ સંખ્યા હોય, તો જ્યારે n અયુગ્મ હોય, ત્યારે આ શ્રેઢીનો સરવાળો કેટલો થશે ?

ઉકેલ : જ્યારે n અયુગ્મ હોય, ત્યારે છેલ્લું પદ n^2 થશે.

$\therefore$ $1^2 + 2 \cdot 2^2 + 3^2 + 2 \cdot 4^2 + 5^2 + \dots + 2(n - 1)^2 + n^2$.

$$= \frac{(n-1)[(n-1)+1]^2}{2} + n^2 \qquad ((n - 1) \text{ યુગ્મ છે.})$$

$$= \frac{(n-1) \cdot n^2 + 2n^2}{2}$$

$$= \frac{n^2(n - 1 + 2)}{2}$$

$$= \frac{n^2(n+1)}{2}$$

ઉદાહરણ 37 : શ્રેણી $1 + \frac{1}{2}(1 + 2) + \frac{1}{3}(1 + 2 + 3) + \dots$ 16 પદ સુધીનો સરવાળો કરો.

ઉકેલ : અહીં, $t_n = \frac{1}{n}(1 + 2 + 3 + \dots + n)$

$$= \frac{1}{n}\Sigma n = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n+1}{2}$$

$$\therefore \quad S_n = \sum_{r=1}^{16}\left(\frac{r+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{r=1}^{16} r + \sum_{r=1}^{16} 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{16(17)}{2} + 16\right]$$

$$= \frac{1}{2}(136 + 16)$$

$$= \frac{1}{2}(152) = 76$$

સ્વાધ્યાય 7.5

1. નીચે આપેલા સરવાળા મેળવો :

(1) $\sum_{r=1}^{10} (2r^2 + 3)$ (2) $\sum_{r=2}^{10} (4r^2 - 28r + 49)$ (3) $\sum_{r=6}^{15} (r^2 - r - 1)$ (4) $\sum_{r=8}^{20} (2 - r^2)$

2. નીચે આપેલ પ્રથમ n પદના સરવાળા મેળવો :

(1) $3^2 + 7^2 + 11^2 + ...$

(2) $1^3 + 4^3 + 7^3 + ...$

(3) $2 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 8 \cdot 5 + ...$

(4) $3 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 6 \cdot 5 + 5 \cdot 8 \cdot 5 + ...$

(5) $(5^4 - 1^4) + (8^4 - 4^4) + (11^4 - 7^4) + ...$

(6) $1^2 + \left(\frac{1^2 + 2^2}{2}\right) + \left(\frac{1^2 + 2^2 + 3^2}{3}\right) + ...$

(7) $(2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + (6^2 - 5^2) + ...$

(8) $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + ...$

(9) $(n^2 - 1^2) + 2(n^2 - 2^2) + 3(n^2 - 3^2) + ...$

3. નીચેના સરવાળા મેળવો :

(1) $2^3 - 3^3 + 4^3 - 5^3 + ... + 22^3 - 23^3$

(2) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + ... + 29^2 - 30^2$

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 38 : જો α_1, α_2, α_3 અનુક્રમે પ્રથમ n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો, તેમના વર્ગોનો સરવાળો તથા તેમના ઘનનો સરવાળો દર્શાવે, તો સાબિત કરો કે, $9\alpha_2^2 = \alpha_3 (1 + 8\alpha_1)$.

ઉકેલ : $\alpha_1 = \frac{n(n+1)}{2}$, $\alpha_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\alpha_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

હવે, $\alpha_3 [1 + 8\alpha_1] = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \left[1 + 8 \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right]$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} [4n^2 + 4n + 1]$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{4} \times \frac{9}{9}$$

$$= \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)^2 \cdot 9$$

$$= 9\alpha_2^2$$

ઉદાહરણ 39 : સરવાળો કરો :

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 + ...$ n પદો $(x \neq 0, x \neq \pm 1)$

ઉકેલ : $\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^4 + 2 + \frac{1}{x^4}\right) + \left(x^6 + 2 + \frac{1}{x^6}\right) + ...$ n પદો

$= (x^2 + x^4 + x^6 + ... +$ n પદો$) + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} + ...\right.$ n પદો$\left.\right) + (2 + 2 + 2 + ...$ n પદો$)$

$$= \frac{x^2(x^{2n} - 1)}{x^2 - 1} + \frac{\frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{x^{2n}}\right)}{1 - \frac{1}{x^2}} + 2n$$

$$= \frac{x^2(x^{2n} - 1)}{x^2 - 1} + \frac{x^{2n} - 1}{(x^2 - 1) \cdot x^{2n}} + 2n$$

સ્વાધ્યાય 7

1. 5, 0, −5, −10,... શ્રેણીનું 30 મું પદ શોધો. તેનું કેટલામું પદ −200 થશે ?

2. એક સમાંતર શ્રેણીનું 12મું પદ 64 અને 20મું પદ 112 હોય તો તે શ્રેણી મેળવો.

3. રામુ 40 કિમી./ક.ની ઝડપે મુસાફરી કરે છે. જો તે તેની ઝડપ દર કલાકે 4 કિમી ઓછી કરતો હોય, તો 216 કિમી અંતર કાપતાં તેને કેટલો સમય લાગશે ?

4. 200 લાકડાના લંબઘનને હારમાં એવી રીતે ગોઠવવામાં આવે છે કે જેથી સૌથી નીચેની હારમાં 20 લંબઘન, તેની ઉપરની હારમાં 19, આ હારની તરત જ ઉપરની હારમાં 18 આ પ્રમાણે લંબઘન ગોઠવ્યાં છે. આ લંબઘનની કેટલી હાર થશે ? સૌથી ઉપરની હારમાં કેટલા લંબઘન હશે ?

5. સમગુણોત્તર શ્રેણીના p, q અને r મા પદો અનુક્રમે 1, 5 અને 25 છે. સાબિત કરો કે p, q, r સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

6. જો a, b, c સમાંતર શ્રેણીના ક્રમિક પદો અને a, $c - b$, $b - a$ સમગુણોત્તર શ્રેણીના ક્રમિક પદો હોય, તો $a : b : c$ શોધો.

7. $6 + 6.6 + 6.66 + 6.666 + \ldots$ n પદ સુધી સરવાળો મેળવો.

8. જો સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n, $2n$, $3n$ પદોનો સરવાળા અનુક્રમે α, β, γ હોય, તો સાબિત કરો કે $\gamma = 3(\beta - \alpha)$.

9. જો સમાંતર શ્રેણી માટે $t_3 = 7$ અને t_7 એ t_3ના ત્રણ ગણાં કરતાં 2 વધારે હોય તો S_{20} શોધો.

10. જો a, b, c સમાંતર શ્રેણીનાં ક્રમિક પદો, a^2, b^2, c^2 સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં ક્રમિક પદો અને $a + b + c = \frac{3}{2}$ હોય તો a શોધો. $(a < b < c)$

11. જો $a_n = 3 - 5n$, તો S_n શોધો.

12. જો સમાંતર શ્રેણી માટે $S_{30} = 1635$ અને $t_{30} = 98$ હોય, તો સમાંતર શ્રેણી મેળવો.

13. જો બે ધન સંખ્યાઓ a અને b માટે તેમનો સમાંતર મધ્યક એ તેમના સમગુણોત્તર મધ્યક કરતાં ત્રણ ગણો હોય તો $a : b$ શોધો.

14. સરવાળો કરો : $1 + \frac{1^3 + 2^3}{2} + \frac{1^3 + 2^3 + 3^3}{3} + \ldots + \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 20^3}{20}$.

15. સમાંતર શ્રેણીના છ ક્રમિક પદોનો સરવાળો 48 અને પ્રથમ તથા છેલ્લી સંખ્યાઓનો ગુણાકાર 39 હોય, તો તે સંખ્યાઓ શોધો.

16. સમગુણોત્તર શ્રેણીના પાંચ ક્રમિક પદોનો ગુણાકાર 243 છે. જો બીજી અને ચોથી સંખ્યાનો સરવાળો $\frac{51}{4}$ હોય, તો તે સંખ્યાઓ શોધો.

17. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) શ્રેણી $\left\{\frac{n + (-1)^n}{2}\right\}$માં 12મા અને 21મા પદોનો તફાવત ...... થાય. ☐

(a) 0 (b) $\frac{-1}{2}$ (c) $\frac{7}{2}$ (d) $\frac{33}{2}$

(2) સમાંતર શ્રેણીનું 5મું પદ 7 હોય, તો પ્રથમ 9 પદોનો સરવાળો ...... થાય. ☐

(a) 36 (b) 49 (c) 45 (d) 63

(3) સમાંતર શ્રેણીનું ત્રીજું પદ 9 અને દશમું પદ 21 હોય, તો તેનાં પ્રથમ 12 પદોનો સરવાળો ...... થાય. ☐

(a) 180 (b) 360 (c) 150 (d) 210

(4) બે ધન સંખ્યાઓનો સમાંતર મધ્યક 2 છે, જો મોટી સંખ્યામાં 1 ઉમેરવામાં આવે તો તેમનો ગુણોત્તર મધ્યક પણ 2 થાય, તો તે બે સંખ્યાઓ ...... છે. ☐

(a) 1, 3 (b) $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{2}$ (c) $\frac{2}{3}$, $\frac{10}{3}$ (d) 0.7, 3.3

(5) સમગુણોત્તર શ્રેણી માટે $r = \frac{1}{3}$ અને $S_4 = \frac{80}{27}$ હોય, તો a = ...

(a) $\frac{2}{3}$ (b) 3 (c) 2 (d) $\frac{3}{2}$

(6) જો 25, $x - 6$ અને $x - 12$ સમગુણોત્તર શ્રેણીના ક્રમિક પદો હોય, તો x = ...

(a) 8 (b) 12 (c) 16 (d) 20

(7) $\sum\limits_{r=1}^{n} \left(\sum\limits_{m=1}^{r} m\right)$ = ...

(a) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (b) $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ (c) $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ (d) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$

(8) જો સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n_1, n_2, n_3 પદોના સરવાળા અનુક્રમે S_1, S_2 અને S_3 હોય, તો

$\frac{2S_1}{n_1}(n_2 - n_3) + \frac{2S_2}{n_2}(n_3 - n_1) + \frac{2S_3}{n_3}(n_1 - n_2)$ = ...

(a) 0 (b) 1 (c) $S_1 \ S_2 \ S_3$ (d) $n_1 \ n_2 \ n_3$

(9) જો સમગુણોત્તર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 3 અને સામાન્ય ગુણોત્તર 2 હોય, તો તેના 5મા પદથી 10મા પદ સુધીનો સરવાળો ...... થાય.

(a) 2976 (b) 3024 (c) 1488 (d) 3114

(10) 3 + 4 + 8 + 9 + 13 + 14 + 18 + 19 +... 20 પદ સુધીનો સરવાળો ...... થાય.

(a) 511 (b) 536 (c) 549 (d) 520

(11) જો સમગુણોત્તર શ્રેણીનું ત્રીજું પદ 3 હોય, તો પ્રથમ પાંચ પદોનો ગુણાકાર ...... થાય.

(a) 3^5 (b) 5^3 (c) 3^3 (d) 5^5

(12) a અને b વચ્ચે બે સમાંતર મધ્યકો A_1 અને A_2 તથા G_1 અને G_2 બે ગુણોત્તર મધ્યકો મૂકવામાં આવે, તો $\frac{G_1G_2}{A_1 + A_2}$ = ...

(a) $\frac{a+b}{2ab}$ (b) $\frac{a+b}{ab}$ (c) $\frac{2ab}{a+b}$ (d) $\frac{ab}{a+b}$

(13) જો કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓની લંબાઈ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તો તેના લઘુકોણનાં *cosines* ...... થાય.

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}$ (b) $\frac{5}{13}, \frac{12}{13}$ (c) $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ (d) $\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}$

(14) જો $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2^n - 1}$, $n \in N$, હોય, તો ....

(a) $S_{100} < 100$ (b) $S_{100} > 100$ (c) $S_{200} = 100$ (d) $S_{200} > 200$

(15) $a_1, a_2, a_3, ... a_n$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે, જો તેનો સામાન્ય તફાવત d હોય તો
$\sin d \,[\operatorname{cosec} a_1 \cdot \operatorname{cosec} a_2 + \operatorname{cosec} a_2 \cdot \operatorname{cosec} a_3 + ... + \operatorname{cosec} a_{n-1} \cdot \operatorname{cosec} a_n]$ = ...

(a) $\operatorname{cosec} a_1 - \operatorname{cosec} a_n$ (b) $\sec a_1 - \sec a_n$

(c) $\cot a_1 - \cot a_n$ (d) $\tan a_1 - \tan a_n$

(16) સમાંતર શ્રેણી માટે જો $4t_4 = 7t_7$, તો t_{11} = ...

(a) −1 (b) 0 (c) 11 (d) 44

(17) $-\frac{\pi}{2} < \theta \le \frac{\pi}{2}$, તો $sin^3\theta + cosec^3\theta$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય ...... છે.

(a) 2 (b) 1 (c) 0 (d) શક્ય નથી.

(18) જો a, b, c, d, e, f સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો $d - b =$ ......

(a) $2(c - a)$ (b) $2(f - c)$ (c) $2(d - c)$ (d) $2(f - b)$

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. જો S_n નું સૂત્ર આપ્યું હોય, તો a_n નું સૂત્ર નીચે પ્રમાણે મેળવી શકાય :
   $a_1 = S_1$; $a_n = S_n - S_{n-1}$, $n > 1$
2. સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ $t_n = a + (n - 1)d$, જ્યાં a પ્રથમ પદ, d સામાન્ય તફાવત છે.
3. સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\}$.
4. સમગુણોત્તર શ્રેણીનું nમું પદ $t_n = ar^{n-1}$, $a \ne 0$, $r \ne 0$, જ્યાં a પ્રથમ પદ અને r સામાન્ય ગુણોત્તર છે.
   સમગુણોત્તર શ્રેણીના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો $S_n = \begin{cases} \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} & r \ne 1 \\ na & r = 1 \end{cases}$
5. બે સંખ્યાઓ a અને b નો સમાંતર મધ્યક $A = \frac{a+b}{2}$ થાય. જો a અને b વચ્ચે n સમાંતર મધ્યકો મૂકવામાં આવે
   તો $d = \frac{b-a}{n+1}$ થાય અને kમો મધ્યક $A_k = a + k\left(\frac{b-a}{n+1}\right)$, જ્યાં $k = 1, 2, 3,...n$.
6. બે ધન સંખ્યાઓ a અને b નો સમગુણોત્તર મધ્યક $G = \sqrt{ab}$ થાય. જો a અને b વચ્ચે n સમગુણોત્તર મધ્યક મૂકવામાં આવે તો $r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ થાય; kમો મધ્યક $G_k = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n+1}}$, જ્યાં $k = 1, 2, 3,...n$
7. $\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{r=1}^{n} r^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Bhaskara (1114–1185), also known as Bhaskara II and Bhaskaracharya ("Bhaskara the teacher"), was an Indian mathematician and astronomer. He was born near Vijayvada. Bhaskara is said to have been the head of an astronomical observatory at Ujjain, the leading mathematical center of ancient India.

Bhaskara and his works represent a significant contribution to mathematical and astronomical knowledge in the 12th century. He has been called the greatest mathematician of medieval India. His main work was the *Siddhanta Shiromani*, Sanskrit for "Crown of treatises," is divided into four parts called *Lilavati* , *Bijaganita*, *Grahaganita* and *Goladhyaya*. These four sections deal with arithmetic, algebra, mathematics of the planets, and spheres respectively.