ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયો 2

No matter how correct a mathematical theorem may appear to be, one caught never to be satisfied that there was not something imperfect about it untill it also gives the impression of being beautiful.

– George Boole

Mathematics consists of proving the most obvious things in the least obvious way.

– George Polya

2.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે શીખી ગયાં છીએ કે જો વિધેય એક-એક અને વ્યાપ્ત હોય તો અને તો જ તેનું પ્રતિવિધેય મળે. ઘણાં વિધેયો એવાં છે કે જે એક-એક નથી કે વ્યાપ્ત નથી કે બંનેમાંથી એક પણ નથી. આવાં વિધેયોનાં પ્રતિવિધેય ન મળે. ધોરણ XIમાં આપણે શીખી ગયાં કે બધાં જ ત્રિકોણમિતીય વિધેયો આવૃત્ત વિધેયો હોઈ, અનેક-એક સંગતતાવાળાં વિધેયો છે અને તેથી તેમનાં પ્રતિવિધેયો પ્રાપ્ત થશે નહિ. પરંતુ તેમના પ્રદેશગણ અને સહપ્રદેશગણ મર્યાદિત કરીએ, કે જેથી આ મર્યાદિત પ્રદેશગણ અને સહપ્રદેશમાં તે એક-એક અને વ્યાપ્ત થાય તો આ મર્યાદિત પ્રદેશગણમાં અને સહપ્રદેશગણમાં તેમનાં પ્રતિવિધેય અસ્તિત્વ ધરાવશે.

આપણે જાણીએ છીએ કે $f = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in A, y \in B\}$ એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય હોય, તો તેનું પ્રતિવિધેય એ $f^{-1} = \{(y, x) \mid y = f(x), x \in A, y \in B\}$ દ્વારા મળે.

વળી, $fof^{-1} = I_B$ અને $f^{-1}of = I_A$

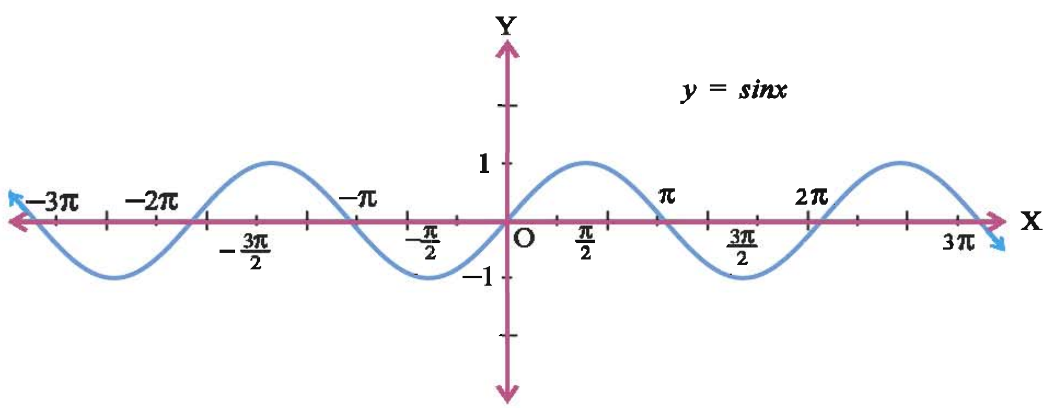
$\therefore \quad x \in A \Rightarrow (f^{-1}of)(x) = x, \ y \in B \Rightarrow (fof^{-1})(y) = y$

આ પ્રકરણમાં આપણે ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં પ્રતિવિધેયોના અસ્તિત્વ અંગે વિચારીશું અને તેમના ગુણધર્મોની ચર્ચા કરીશું.

2.2 *sine* વિધેયનું પ્રતિવિધેય

આપણે જાણીએ છીએ કે $sin : R \rightarrow R$ એ અનેક-એક વિધેય છે અને તેનો વિસ્તાર $[-1, 1]$ હોવાથી તે R પર વ્યાપ્ત નથી.

$sin = \{(x, y) \mid y = sinx, x \in R, y \in [-1, 1]\}$ એ R માં અનેક-એક વિધેય છે અને $[-1, 1]$માં વ્યાપ્ત વિધેય છે. તે અનેક-એક છે અને તે આવર્તી વિધેય છે તથા તેનું આવર્તમાન 2π છે. આપણે આલેખ પરથી જોઈ શકીએ છીએ કે જો *sine* વિધેયનો પ્રદેશગણ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ અથવા $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ અથવા $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ અથવા $\left[(2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right]$, $k \in Z$ લઈએ, તો તે એક-એક અને $[-1, 1]$ પર વ્યાપ્ત થાય.



આકૃતિ 2.1

તેથી *sine* વિધેયના પ્રતિવિધેયને વ્યાખ્યાયિત કરવા આપણે ઉપર લીધેલ કોઈ પણ અંતરાલને પ્રદેશગણ તરીકે લઈ શકીએ. આપણે મર્યાદિત પ્રદેશગણ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ લઈશું.

$sin = \left\{(x, y) \mid y = sinx, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], y \in [-1, 1]\right\}$ એક-એક સંગતતાવાળું અને વ્યાપ્ત વિધેય બનશે આથી તેનું પ્રતિવિધેય મળી શકે. *sine* વિધેયના પ્રતિવિધેયને sin^{-1} સંકેત વડે દર્શાવીશું.

$\therefore \quad sin^{-1} = \left\{(y, x) \mid y = sinx, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], y \in [-1, 1]\right\}.$

આમ વ્યાખ્યા અનુસાર $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ અને $y \in [-1, 1]$ માટે $y = sinx \Leftrightarrow sin^{-1}y = x$

sin^{-1} વિધેયનો પ્રદેશ $[-1, 1]$ અને વિસ્તાર $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ છે.

અહીં આપણે ધ્યાનમાં રાખીશું કે જો $y \in [-1, 1]$, તો $sin^{-1}y$ એ કોઈ પણ વાસ્તવિક x નથી કે જેને માટે $sinx = y$ થાય પરંતુ $sin^{-1}y$ તે એવી વાસ્તવિક સંખ્યા $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ છે કે જેને માટે $sinx = y$ થાય. ઉદાહરણ તરીકે, જો $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, તો આપણે જાણીએ છીએ કે $sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ અને $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. તેથી $sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$. પરંતુ $sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ પરંતુ આપણે $sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{3}$ નહીં લઈએ, કારણ કે, $\frac{2\pi}{3} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

ઉદાહરણ તરીકે, $sin\left(sin^{-1}\frac{5}{7}\right) = \frac{5}{7}$, કારણ કે $\frac{5}{7} \in [-1, 1]$. $sin^{-1}\left(sin\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{2\pi}{5}$, કારણ કે $\frac{2\pi}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. પરંતુ $sin^{-1}\left(sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right) \neq \frac{3\pi}{5}$, કારણ કે $\frac{3\pi}{5} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

જો $f : A \to B$ વિધેયનું પ્રતિવિધેય $f^{-1} : B \to A$ હોય, તો

$fof^{-1} = I_B$ અને $f^{-1}of = I_A$ થાય તે આપણે જાણીએ છીએ.

અહીં, $sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$નું પ્રતિવિધેય $sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ છે.

$\therefore \quad sin^{-1}(sinx) = x, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ અને $sin(sin^{-1}x) = x, \quad \forall x \in [-1, 1]$.

અહીં આપણે નોંધીશું કે,

(1) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow |x| \leq \frac{\pi}{2}$ અને

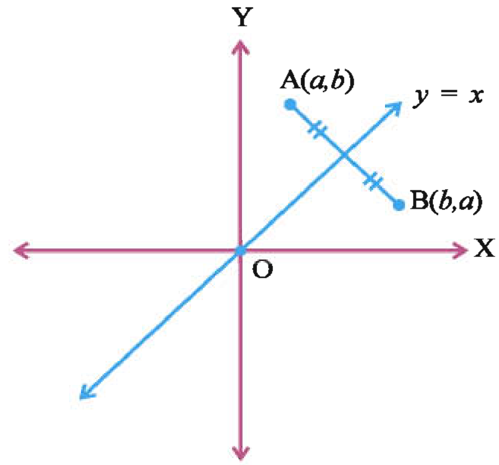
$y \in [-1, 1] \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 1 \Leftrightarrow |y| \leq 1$.

(2) $sin^{-1}x \neq \frac{1}{sinx}$, એટલે કે $sin^{-1}x \neq (sinx)^{-1}$

2.3 $y = sin^{-1}x$ નો આલેખ

sin^{-1} વિધેયનો પ્રદેશ $[-1, 1]$ અને વિસ્તાર $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ હોવાથી તેનો આલેખ શિરોલંબ રેખાઓ $x = -1$ અને $x = 1$ અને સમક્ષિતિજ રેખાઓ $y = -\frac{\pi}{2}$ અને $y = \frac{\pi}{2}$ વચ્ચેના મર્યાદિત પ્રદેશમાં મળશે.

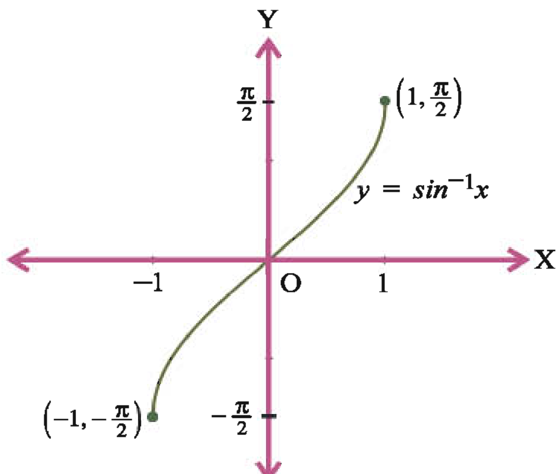
આપણે અહીં, $y = sinx$ વિધેયનો આલેખ દોરવાના જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરી $y = sin^{-1}x$ નો આલેખ મેળવીશું. આ માટે પ્રથમ જો વિધેય fનું પ્રતિવિધેય f^{-1} અસ્તિત્વ ધરાવતું હોય તો fના આલેખ પરથી f^{-1}નો આલેખ કેવી રીતે મળે તે વિચારવું જરૂરી છે. $y = f(x)$ અને $y = f^{-1}(x)$ના આલેખો વચ્ચે રસપ્રદ સંબંધ છે. જો બિંદુ (a, b) એ $y = f(x)$ આલેખ પરનું બિંદુ હોય તો $b = f(a)$ અને તેથી $a = f^{-1}(b)$. તેથી બિંદુ (b, a) એ આલેખ $y = f^{-1}(x)$ પરનું બિંદુ થશે. આ વિધાનનું પ્રતિપ પણ સત્ય છે. તેથી જો A(a, b) એ $y = f(x)$ ના આલેખ પર હોય તો અને તો જ B(b, a) એ $y = f^{-1}(x)$ ના આલેખ પર હોય.



આકૃતિ 2.2

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે $y = x$ રેખા એ A(a, b) અને B(b, a)ને જોડતા રેખાખંડનો લંબદ્વિભાજક છે. A(a, b) અને B(b, a)ને જોડતાં રેખાખંડનો ઢાળ $\dfrac{b-a}{a-b} = -1$ થશે. રેખા $y = x$ નો ઢાળ 1 છે. તેથી $\overleftrightarrow{AB}$ એ $y = x$ ને લંબ રેખા છે. વળી, $\overline{AB}$નું મધ્યબિંદુ $\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a+b}{2}\right)$ એ $y = x$ રેખા પર છે.

આમ, રેખા $y = x$ એ $\overline{AB}$નો લંબદ્વિભાજક છે. આમ, B(b, a) એ A(a, b)નું $y = x$ રેખાને સાપેક્ષ પ્રતિબિંબ થશે. આમ, $y = f^{-1}(x)$નો આલેખ એ $y = f(x)$ના આલેખનું $y = x$ રેખામાં પ્રતિબિંબ થશે.



આકૃતિ 2.3

આમ, $y = sin^{-1}x$ નો આલેખ એ sin વિધેયના આલેખનું $y = x$ રેખામાં પ્રતિબિંબ મેળવવાથી સહેલાઈથી મળી જશે. સૌ પ્રથમ એક કાગળ પર $y = sinx$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $y \in [-1, 1]$નો આલેખ દોરો. આ કાગળને $y = x$ રેખા ઉપર વાળો અને વાળેલા કાગળમાં દેખાતાં $y = sinx$ વિધેયના આલેખને વાળેલા કાગળ ઉપર દોરો. હવે કાગળને ઉલટાવી દો અને X-અક્ષને Y-અક્ષ તરીકે લઈ આલેખનું અવલોકન કરો. હવે તમને જે આલેખ દેખાશે તે $y = sin^{-1}x$નો આલેખ છે.

નોંધ : આ પ્રયોગ વિદ્યાર્થી વર્ગમાં સ્વયં કરે તે ઇચ્છનીય છે.

$y = sinx$ ના આલેખ માટે $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $y \in [-1, 1]$ અને $y = sin^{-1}x$ ના આલેખ માટે $x \in [-1, 1]$ અને $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

ઉદાહરણ 1 : મૂલ્ય મેળવો : (1) $sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, (2) $sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, (3) $sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

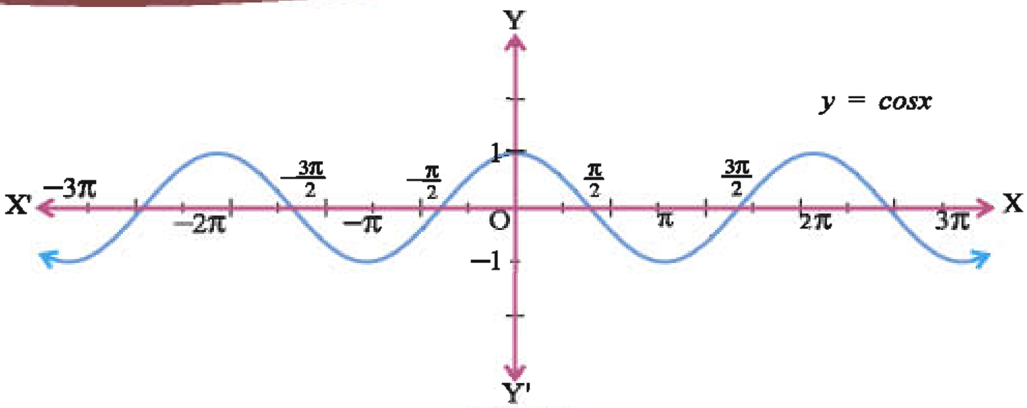
ઉકેલ : (1) $sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = sin^{-1}\left(sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$, કારણ કે $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(2) $sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = sin^{-1}\left(sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$, કારણ કે $\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(3) $sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right). = sin^{-1}\left(-sin\frac{\pi}{6}\right) = sin^{-1}\left(sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\pi}{6}$, કારણ કે $-\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2.4 *cosine* વિધેયનું પ્રતિવિધેય

આપણે જાણીએ છીએ કે $cos : R \to R$ એ અનેક-એક વિધેય છે અને તેનો વિસ્તાર $[-1, 1]$ હોવાથી તે વ્યાપ્ત નથી. $cos = \{(x, y) \mid y = cosx, x \in R, y \in [-1, 1]\}$ અનેક-એક અને $[-1, 1]$ પર વ્યાપ્ત વિધેય છે અને તેનું



આકૃતિ 2.4

આવર્તમાન 2π છે. આલેખ પરથી જોતાં જો *cosine* નો પ્રદેશ $[0, \pi]$ અથવા $[\pi, 2\pi]$ અથવા $[2\pi, 3\pi]$ અથવા... $[k\pi, (k + 1)\pi]$, $k \in Z$ લઈએ, તો વિધેય એક-એક અને વ્યાપ્ત થાય.

આપણે *cosine* વિધેયનું પ્રતિવિધેય વ્યાખ્યાયિત કરવા મર્યાદિત પ્રદેશગણ $[0, \pi]$ લઈશું.

$cos = \{(x, y) \mid y = cosx, x \in [0, \pi], y \in [-1, 1]\}$ એક-એક સંગતતાવાળું અને વ્યાપ્ત વિધેય બનશે. માટે તેનું પ્રતિવિધેય મેળવી શકાય. તેના પ્રતિવિધેયને cos^{-1} સંકેત વડે દર્શાવીશું.

$\therefore$ $cos^{-1} = \{(y, x) \mid y = cosx, x \in [0, \pi], y \in [-1, 1]\}$. આમ, વ્યાખ્યા અનુસાર $x \in [0, \pi]$ અને $y \in [-1, 1]$ માટે $y = cosx \Leftrightarrow cos^{-1}y = x$.

cos^{-1} વિધેયનો પ્રદેશ $[-1, 1]$ અને વિસ્તાર $[0, \pi]$ છે.

sine વિધેયની જેમ અહીં પણ આપણે ધ્યાન રાખીશું કે જો $y \in [-1, 1]$ તો $cos^{-1}y$ એ એવી કોઈ પણ વાસ્તવિક x નથી કે જેને માટે $cosx = y$ થાય પણ $cos^{-1}y$ એવી જ વાસ્તવિક સંખ્યા $x \in [0, \pi]$ છે કે જેને માટે $cosx = y$ થાય.

ઉદાહરણ તરીકે, $cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ અને $\frac{\pi}{6} \in [0, \pi]$. આથી $cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$. પણ $cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. પરંતુ $-\frac{\pi}{6} \notin [0, \pi]$. આથી, $cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \neq -\frac{\pi}{6}$.

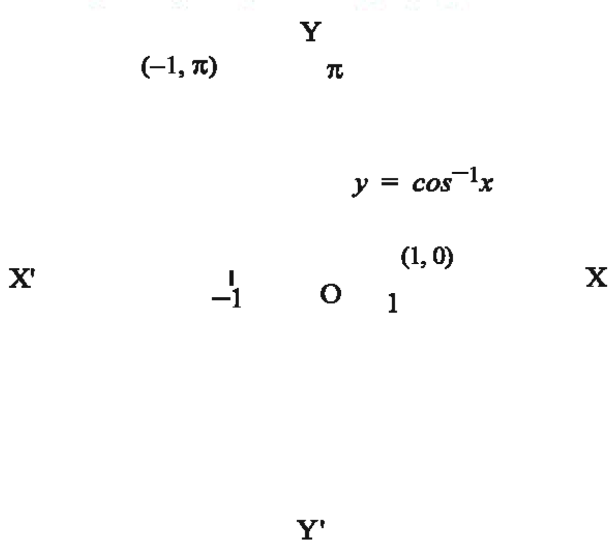
$cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$નું પ્રતિવિધેય $cos^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ છે.

આથી, $cos^{-1}(cosx) = x, \forall x \in [0, \pi]$ અને $cos(cos^{-1}x) = x, \forall x \in [-1, 1]$.

નોંધ : $\forall x \in R$, $sin^{-1}(sinx)$ અને $cos^{-1}(cosx)$નું અસ્તિત્વ છે, પરંતુ તે x ન પણ થાય. તેમ છતાં તે તેના મર્યાદિત પ્રદેશમાં x થાય છે. (ઉપરનો પ્રયોગ અહીં સહેજ ફેરફાર સાથે કરી શકાય.)

2.5 $y = cos^{-1}x$ નો આલેખ

આપણે આપેલ વિધેયના આલેખને આધારે તેના પ્રતિવિધેયનો આલેખ કેવી રીતે મેળવાય તેની ચર્ચા અગાઉ કરી. તે મુજબ cos^{-1} નો આલેખ sin^{-1}ના આલેખની જેમ $y = cosx$, $x \in [0, \pi]$ના આલેખ પરથી આકૃતિ 2.5 પ્રમાણે મળે.



આકૃતિ 2.5

ઉદાહરણ 2 : મૂલ્ય મેળવો : **(1)** $cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ **(2)** $cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ઉકેલ : (1) $cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = cos^{-1}\left(cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$, કારણ કે $\frac{\pi}{4} \in [0, \pi]$.

(2) $cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = cos^{-1}\left(cos\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6}$, કારણ કે $\frac{5\pi}{6} \in [0, \pi]$.

2.6 *tan* વિધેયનું પ્રતિવિધેય

આપણે જાણીએ છીએ કે $tan : R - \left\{(2k + 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\} \rightarrow R$ એ અનેક-એક વિધેય છે અને તેનો વિસ્તાર R હોવાથી તે વ્યાપ્ત છે.

$tan = \left\{(x, y) \mid y = tanx, x \in R - \left\{(2k + 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}, y \in R\right\}$ વિધેય અનેક-એક સંગતતાવાળું વ્યાપ્ત વિધેય છે તથા π આવર્તમાનવાળું વિધેય છે. જો તેનો પ્રદેશગણ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ અથવા $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ અથવા $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$ અથવા $\left((2k - 1)\frac{\pi}{2}, (2k + 1)\frac{\pi}{2}\right)$, $k \in Z$ લઈએ, તો વિધેય એક-એક અને વ્યાપ્ત થાય. અહીં આપેલ અંતરાલમાંથી કોઈ પણ અંતરાલને મર્યાદિત પ્રદેશગણ તરીકે લઈએ તો તેનું પ્રતિવિધેય મળે. આપણે $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ને મર્યાદિત પ્રદેશગણ લઈ તેનું પ્રતિવિધેય મેળવીશું અને તેને tan^{-1} સંકેત વડે દર્શાવીશું.

$$tan^{-1} = \left\{(y, x) \mid y = tanx, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), y \in R\right\}.$$

આમ, જો $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ અને $y \in R$ તો $y = tanx \Leftrightarrow tan^{-1}y = x$.

tan^{-1} વિધેયનો પ્રદેશગણ R અને વિસ્તાર $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ છે.

$tan^{-1}x \neq (tanx)^{-1}$, $tan^{-1}x \neq \frac{1}{tanx}$. $tan^{-1}x \neq \frac{sin^{-1}x}{cos^{-1}x}$.

$tan^{-1}(tanx) = x$, $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ અને $tan(tan^{-1}x) = x$, $\forall x \in R$.

$tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ અને $-\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ તેથી, $tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

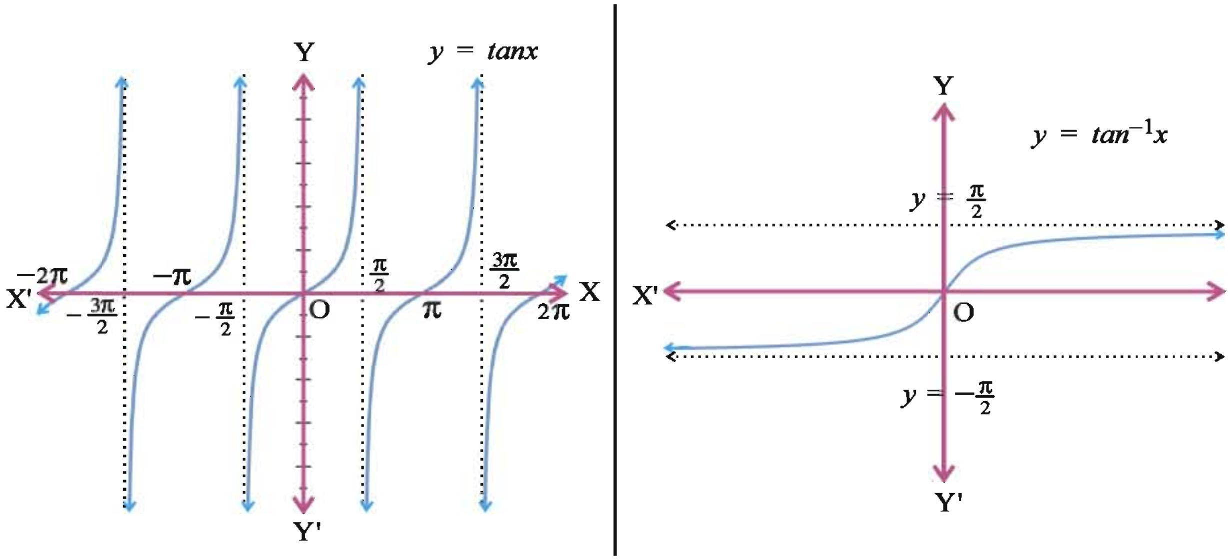
પરંતુ $tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$ હોવાથી $tan^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{4}$ સત્ય નથી, કારણ કે $\frac{3\pi}{4} \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$tan^{-1}\left(tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\pi}{6}$, કારણ કે $-\frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ અને $tan\left(tan^{-1}\left(\frac{533}{413}\right)\right) = \frac{533}{413}$.

પરંતુ $tan^{-1}\left(tan\frac{5\pi}{6}\right) \neq \frac{5\pi}{6}$ કારણ કે $\frac{5\pi}{6} \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

2.7 $y = tan^{-1}x$ નો આલેખ

$y = tanx$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $y \in R$ ના આલેખનું $y = x$ રેખામાં પ્રતિબિંબ મેળવતાં $y = tan^{-1}x$ નો આલેખ આકૃતિ 2.6 પ્રમાણે મળશે :



આકૃતિ 2.6

2.8 *cot* વિધેયનું પ્રતિવિધેય

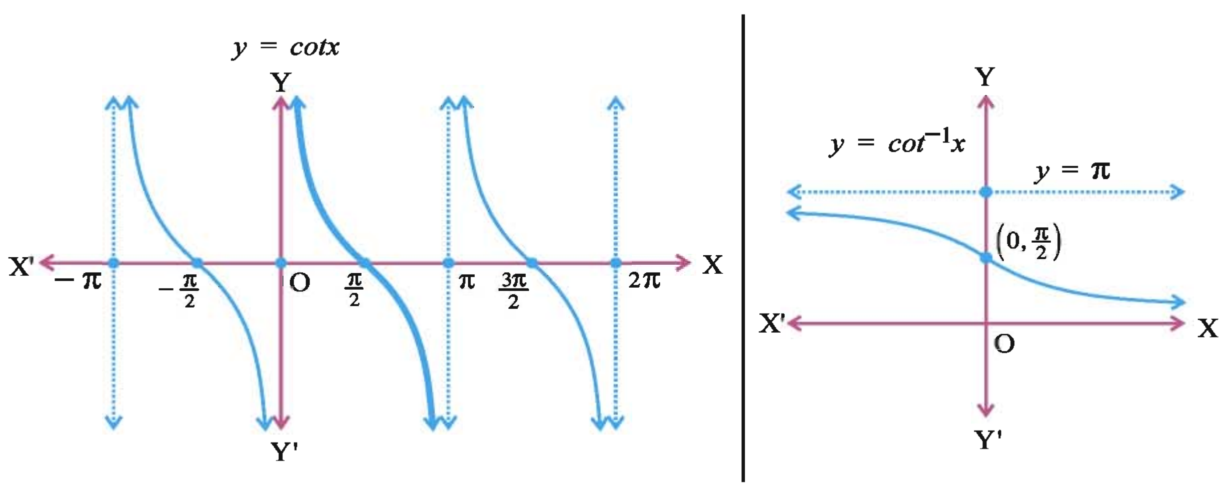
આપણે જાણીએ છીએ કે $cot : R - \{k\pi \mid k \in Z\} \rightarrow R$ એ અનેક-એક વિધેય છે અને તેનો વિસ્તાર R હોવાથી તે વ્યાપ્ત છે. $cot = \{(x, y) \mid y = cotx, x \in R - \{k\pi \mid k \in Z\}, y \in R\}$ વિધેય અનેક-એક સંગતતાવાળું વ્યાપ્ત વિધેય છે તથા π આવર્તમાનવાળું વિધેય છે. જો તેનો પ્રદેશગણ $(0, \pi)$ અથવા $(\pi, 2\pi)$ અથવા $(2\pi, 3\pi)$ અથવા $(k\pi, (k + 1)\pi)$, $k \in Z$ લઈએ તો વિધેય એક-એક અને વ્યાપ્ત થાય. અહીં આપણે મર્યાદિત પ્રદેશગણ $(0, \pi)$ લઈશું. *cot* ના પ્રતિવિધેયને cot^{-1} સંકેત વડે દર્શાવીશું.

તેથી, $cot^{-1} = \{(y, x) \mid y = cotx, x \in (0, \pi), y \in R\}$.

આમ, જો $x \in (0, \pi)$ અને $y \in R$ તો $y = cotx \Leftrightarrow cot^{-1}y = x$.

cot^{-1} વિધેયનો પ્રદેશગણ R અને વિસ્તાર $(0, \pi)$ છે.

$cot^{-1}(cotx) = x, x \in (0, \pi)$ અને $cot(cot^{-1}x) = x, x \in R$.



આકૃતિ 2.7

નોંધ : $cot^{-1}\left(cot\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \frac{3\pi}{4}$, કારણ કે $\frac{3\pi}{4} \in (0, \pi)$

વળી, $cot\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow cot^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{4}$. પરંતુ $cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ છતાં, $cot^{-1}(-1) \neq -\frac{\pi}{4}$ ન લેવાય કારણ કે $-\frac{\pi}{4} \notin (0, \pi)$.

$cot^{-1}\left(cot\frac{4\pi}{3}\right) \neq \frac{4\pi}{3}$, કારણ કે $\frac{4\pi}{3} \notin (0, \pi)$.

પરંતુ, $cot\left(\frac{4\pi}{3}\right) = cot\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = cot\frac{\pi}{3}$ અને $\frac{\pi}{3} \in (0, \pi)$.

તેથી $cot^{-1}\left(cot\frac{4\pi}{3}\right) = cot^{-1}\left(cot\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$.

$y = cotx$ અને $y = cot^{-1}x$ નાં આલેખ આકૃતિ 2.7 માં દર્શાવેલ પ્રમાણે મળશે.

2.9 *sec* વિધેયનું પ્રતિવિધેય

આપણે જાણીએ છીએ કે $cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ એક-એક તથા વ્યાપ્ત વિધેય છે.

$\therefore \quad sec : [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \rightarrow R - (-1, 1)$ એક-એક તથા વ્યાપ્ત વિધેય છે.

$\therefore \quad sec = \left\{(x, y) \mid y = secx, x \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}, y \in R - (-1, 1)\right\}$ એક-એક સંગતતાવાળું વ્યાપ્ત વિધેય છે. તેથી તેનું પ્રતિવિધેય મળે તેનાં પ્રતિવિધેયને સંકેતમાં sec^{-1} વડે દર્શાવાય છે.

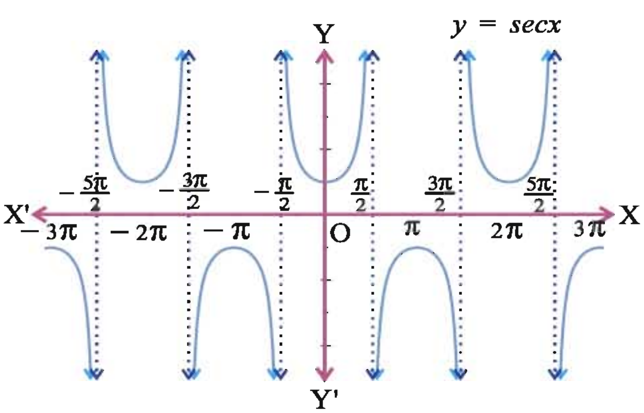
તેથી, **$sec^{-1} = \left\{(y, x) \mid y = secx, x \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}, y \in R - (-1, 1)\right\}$.**

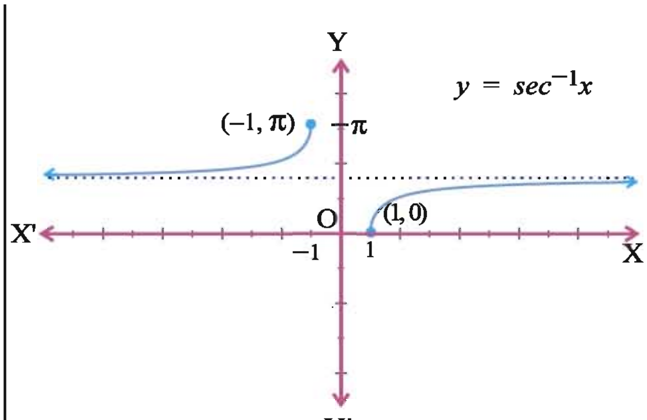
આમ, **જો $x \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}, y \in R - (-1, 1)$ તો $y = secx \Leftrightarrow sec^{-1}y = x$.**

sec^{-1} નો પ્રદેશ $R - (-1, 1)$ અને વિસ્તાર $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ છે.

વળી, $sec\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$. તેથી, $sec^{-1}(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$, કારણ કે $\frac{\pi}{4} \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

પરંતુ $sec\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ તેથી, $sec^{-1}(\sqrt{2}) = -\frac{\pi}{4}$ ન લખી શકાય, કારણ કે $-\frac{\pi}{4} \notin [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.





આકૃતિ 2.8

પ્રત્યેક $x \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ માટે $sec^{-1}(secx) = x$ અને પ્રત્યેક $x \in R - (-1, 1)$, $sec(sec^{-1}x) = x$.

અહીં આપણે નોંધીશું કે $x \in R - (-1, 1) \Leftrightarrow x \le -1$ અથવા $x \ge 1 \Leftrightarrow |x| \ge 1$.

$y = secx$ અને $y = sec^{-1}x$ ના આલેખ આકૃતિ 2.8માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે મળશે.

2.10 *cosec* વિધેયનું પ્રતિવિધેય

આપણે જાણીએ છીએ કે $sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ એક-એક તથા વ્યાપ્ત વિધેય છે.

$\therefore \quad cosec : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\} \to R - (-1, 1)$ એક-એક તથા વ્યાપ્ત વિધેય છે.

$\therefore \quad cosec = \left\{(x, y) \mid y = cosecx, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}, y \in R - (-1, 1)\right\}$ એક-એક તથા વ્યાપ્ત વિધેય છે અને તેનું પ્રતિવિધેય મળશે તેના પ્રતિવિધેયને $cosec^{-1}$ સંકેત વડે દર્શાવીએ તો,

$$cosec^{-1} = \left\{(y, x) \mid y = cosecx, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}, y \in R - (-1, 1)\right\}.$$

આમ, જો $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}, y \in R - (-1, 1)$ તો, $y = cosecx \Leftrightarrow cosec^{-1}y = x$.

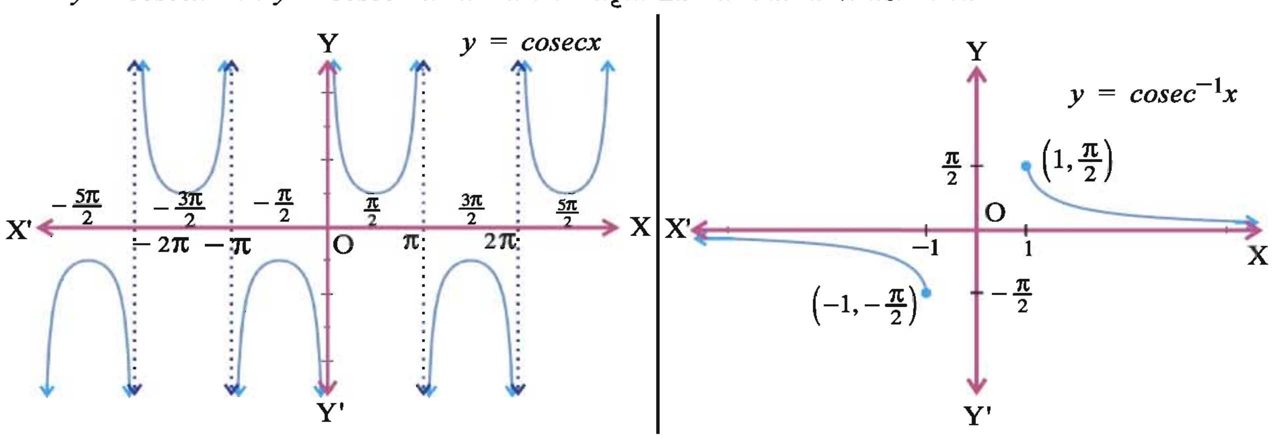
$cosec^{-1}$ નો પ્રદેશ $R - (-1, 1)$ અને વિસ્તાર $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ છે.

વળી, $cosec\frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$. તેથી, $cosec^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$.

દરેક $x \in R - (-1, 1)$ માટે $cosec(cosec^{-1}x) = x$ અને

પ્રત્યેક $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ માટે $cosec^{-1}(cosecx) = x$.

$y = cosecx$ અને $y = cosec^{-1}x$ ના આલેખ આકૃતિ 2.9 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે મળશે :



આકૃતિ 2.9

ઉદાહરણ 3 : કિંમત શોધો : (1) $tan^{-1}(\sqrt{3})$ (2) $cot^{-1}(-\sqrt{3})$ (3) $cosec^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

ઉકેલ : (1) $tan^{-1}(\sqrt{3}) = tan^{-1}\left(tan\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$ $\qquad \left(\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

(2) $cot^{-1}(-\sqrt{3}) = cot^{-1}\left(-cot\frac{\pi}{6}\right) = cot^{-1}\left(cot\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6}$ $\left(\frac{5\pi}{6} \in (0, \pi)\right)$

(3) $cosec^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = cosec^{-1}\left(-cosec\frac{\pi}{3}\right) = cosec^{-1}\left(cosec\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{3}$ $\left(-\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}\right)$

ઉદાહરણ 4 : કિંમત શોધો : (1) $cos^{-1}\left(cos\frac{2\pi}{3}\right)$ (2) $sin^{-1}\left(sin\frac{2\pi}{3}\right)$ (3) $tan^{-1}\left(tan\frac{3\pi}{4}\right)$

(4) $cot^{-1}\left(tan\frac{7\pi}{4}\right)$ (5) $cos^{-1}\left(sin\frac{\pi}{5}\right)$

ઉકેલ : (1) $cos^{-1}\left(cos\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$ $\left(\frac{2\pi}{3} \in [0, \pi]\right)$

(2) $sin^{-1}\left(sin\frac{2\pi}{3}\right) = sin^{-1}\left(sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right)$ $\left(\frac{2\pi}{3} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$

$= sin^{-1}\left(sin\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore$ $sin^{-1}\left(sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$ $\left(\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$

(3) $tan^{-1}\left(tan\frac{3\pi}{4}\right) = tan^{-1}\left(tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= tan^{-1}\left(-tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= tan^{-1}\left(tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$\therefore$ $tan^{-1}\left(tan\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}$ $\left(-\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

(4) $cot^{-1}\left(tan\frac{7\pi}{4}\right) = cot^{-1}\left(tan\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= cot^{-1}\left(-tan\frac{\pi}{4}\right)$

$= cot^{-1}\left(cot\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= cot^{-1}\left(cot\frac{3\pi}{4}\right)$

$\therefore$ $cot^{-1}\left(tan\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}$ $\left(\frac{3\pi}{4} \in (0, \pi)\right)$

(5) $cos^{-1}\left(sin\frac{\pi}{5}\right) = cos^{-1}\left(cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right)\right)$

$= cos^{-1}\left(cos\frac{3\pi}{10}\right)$

$\therefore$ $cos^{-1}\left(sin\frac{\pi}{5}\right) = \frac{3\pi}{10}$ $\left(\frac{3\pi}{10} \in [0, \pi]\right)$

ઉદાહરણ 5 : કિંમત શોધો :

(1) $cos\left(2sin^{-1}\frac{3}{4}\right)$ (2) $sin\left(2tan^{-1}\frac{4}{5}\right)$ (3) $tan^2\left(\frac{1}{2}cos^{-1}\frac{3}{4}\right)$ (4) $cos\left(3cos^{-1}\frac{2}{3}\right)$

ઉકેલ : (1) ધારો કે $sin^{-1}\frac{3}{4} = \theta$. $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. આથી $sin\theta = \frac{3}{4}$

તેથી, $cos\left(2sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = cos2\theta$

$= 1 - 2sin^2\theta = 1 - 2\left(\frac{9}{16}\right) = -\frac{1}{8}$

$\therefore \quad cos\left(2sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{8}$

(2) ધારો કે $tan^{-1}\frac{4}{5} = \theta$. $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. તેથી $tan\theta = \frac{4}{5}$

$sin\left(2tan^{-1}\frac{4}{5}\right) = sin2\theta$

$= \frac{2tan\theta}{1+tan^2\theta} = \frac{2\left(\frac{4}{5}\right)}{1+\frac{16}{25}} = \frac{40}{41}$

$\therefore \quad sin\left(2tan^{-1}\frac{4}{5}\right) = \frac{40}{41}$

(3) ધારો કે $cos^{-1}\frac{3}{4} = \theta$. $\theta \in [0, \pi]$. માટે $cos\theta = \frac{3}{4}$

તેથી, $tan^2\left(\frac{1}{2}cos^{-1}\frac{3}{4}\right) = tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-cos\theta}{1+cos\theta} = \frac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}} = \frac{4-3}{4+3} = \frac{1}{7}$

$\therefore \quad tan^2\left(\frac{1}{2}cos^{-1}\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{7}$

(4) ધારો કે $cos^{-1}\frac{2}{3} = \theta$. $\theta \in [0, \pi]$. માટે $cos\theta = \frac{2}{3}$

તેથી, $cos\left(3cos^{-1}\frac{2}{3}\right) = cos3\theta$

$= 4cos^3\theta - 3cos\theta$

$= 4\left(\frac{8}{27}\right) - 3\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32-54}{27} = -\frac{22}{27}$

$\therefore \quad cos\left(3cos^{-1}\frac{2}{3}\right) = -\frac{22}{27}$

ઉદાહરણ 6 : નીચે આપેલાને સરળ સ્વરૂપમાં ફેરવો :

(1) $tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-cosx}{1+cosx}}\right), -\pi < x < \pi$ **(2)** $tan^{-1}\left(\frac{cosx}{1+sinx}\right), -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : (1) $tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-cosx}{1+cosx}}\right) = tan^{-1}\left(\sqrt{tan^2\frac{x}{2}}\right) = tan^{-1}\left(\left|tan\frac{x}{2}\right|\right)$

વિકલ્પ 1 : જો $-\pi < x < 0$, તો $-\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < 0$

$\therefore \quad tan\frac{x}{2} < 0$

$\therefore \quad tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-cosx}{1+cosx}}\right) = tan^{-1}\left(-tan\frac{x}{2}\right)$

$= tan^{-1}\left(tan\left(-\frac{x}{2}\right)\right)$

હવે, $0 < -\frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$. તેથી $-\frac{\pi}{2} < -\frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-cosx}{1+cosx}}\right) = -\frac{x}{2}$

વિકલ્પ 2 : જો $0 \le x < \pi$, તો $0 \le \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad tan\frac{x}{2} \ge 0$

$$tan^{-1}\left(\left|tan\frac{x}{2}\right|\right) = tan^{-1}\left(tan\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} \qquad \left(0 \le \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore \quad tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-cosx}{1+cosx}}\right) = \begin{cases} \frac{x}{2} & 0 \le x < \pi \\ -\frac{x}{2} & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

(2) $$tan^{-1}\left(\frac{cosx}{1+sinx}\right) = tan^{-1}\left(\frac{cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2} + sin^2\frac{x}{2} + 2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}\right)$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{\left(cos\frac{x}{2} + sin\frac{x}{2}\right)\left(cos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2}\right)}{\left(cos\frac{x}{2} + sin\frac{x}{2}\right)^2}\right)$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{cos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2} + sin\frac{x}{2}}\right)$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{1 - tan\frac{x}{2}}{1 + tan\frac{x}{2}}\right) \qquad \left(cos\frac{x}{2} \ne 0, \text{ કેમ ?}\right)$$

$$= tan^{-1}\left(tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right)$$

હવે, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. આથી, $-\frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}$. માટે $-\frac{\pi}{4} < -\frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}$.

$\therefore \quad 0 < \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) < \frac{\pi}{2}$

હવે, $tan^{-1}\left(\frac{cosx}{1+sinx}\right) = tan^{-1}\left(tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$

$\therefore \quad tan^{-1}\left(\frac{cosx}{1+sinx}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

સ્વાધ્યાય 2.1

1. કિંમત શોધો :

(1) $tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (2) $sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (3) $sec^{-1}(-2)$

(4) $tan^{-1}(-\sqrt{3})$ (5) $sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ (6) $cosec^{-1}(-\sqrt{2})$

2. કિંમત શોધો :

(1) $cos^{-1}\left(sin\frac{\pi}{7}\right)$ (2) $sin^{-1}\left(cos\frac{\pi}{5}\right)$

(3) $tan^{-1}\left(tan\frac{5\pi}{4}\right)$ (4) $sec^{-1}\left(cosec\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$

3. કિંમત શોધો :

(1) $sin\left(2tan^{-1}\frac{2}{5}\right)$ (2) $tan^2\left(\frac{1}{2}cos^{-1}\frac{2}{3}\right)$

(3) $sin\left(2cos^{-1}\frac{4}{5}\right)$ (4) $tan^2\left(\frac{1}{2}sin^{-1}\frac{2}{3}\right)$ (5) $sin\left(3\,sin^{-1}\frac{1}{2}\right)$

4. સરળ સ્વરૂપમાં ફેરવો :

$tan^{-1}\left(\frac{cosx - sinx}{cosx + sinx}\right), -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$

*

2.11 વિરોધી સંખ્યાઓ માટે ત્રિ-પ્રતિવિધેયોનાં મૂલ્યો માટેનાં સૂત્રો

આપણે જોયું કે ત્રિકોણમિતીય વિધેયોના પ્રદેશગણ અને સહપ્રદેશગણને મર્યાદિત કરતાં તે એક-એક અને વ્યાપ્ત બને છે, જે પ્રતિવિધેય મેળવવા માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત છે. વળી આપણે મર્યાદિત પ્રદેશને એવી રીતે પસંદ કર્યો છે કે જેથી તે દરેકનો ઉપગણ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ હોય જ. એટલે કે વિધેયનું મૂલ્ય જ્યારે ધન હોય ત્યારે પ્રતિવિધેયનું મૂલ્ય $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ માં જ મળે. અહીં આપણે એ પણ નોંધીશું કે તેના મર્યાદિત પ્રદેશને એવી રીતે પસંદ કર્યો છે કે દરેક પ્રદેશમાં x હોય તો $-x$ પણ હોય જ. પ્રદેશગણ $[-1, 1]$ અથવા R અથવા $R - (-1, 1)$, એટલે કે $|x| \leq 1$ અથવા R અથવા $|x| \geq 1$ હોવાના કારણે જો A એ આમાંનો કોઈ પણ ગણ હોય, તો $x \in A \Leftrightarrow -x \in A$.

x અને $-x$ માટે ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોનાં મૂલ્યો નીચે આપેલા પ્રમેયમાં દર્શાવ્યા મુજબનો સંબંધ ધરાવે છે :

પ્રમેય 2.1 : (1) $sin^{-1}(-x) = -sin^{-1}x, \quad |x| \leq 1$

(2) $cos^{-1}(-x) = \pi - cos^{-1}x, \quad |x| \leq 1$

(3) $tan^{-1}(-x) = -tan^{-1}x, \quad x \in R$

(4) $cot^{-1}(-x) = \pi - cot^{-1}x, \quad x \in R$

(5) $cosec^{-1}(-x) = -cosec^{-1}x, \quad |x| \geq 1$

(6) $sec^{-1}(-x) = \pi - sec^{-1}x, \quad |x| \geq 1$

સાબિતી : (1) $|x| \leq 1$

ધારો કે $sin^{-1}x = \theta, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, તો $x = sin\theta$.

$sin(-\theta) = -sin\theta = -x$ (i)

$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} \geq -\theta \geq -\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq -\theta \leq \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ $-\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ અને $|x| = |-x|$. આથી $|x| \leq 1 \Rightarrow |-x| \leq 1$

$\therefore$ (i) પરથી, $sin(-\theta) = -x$ $\left(-\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], |-x| \leq 1\right)$

$\therefore$ $sin^{-1}(-x) = -\theta = -sin^{-1}x$

$\therefore$ $sin^{-1}(-x) = -sin^{-1}x$

(2) ધારો કે $cos^{-1}x = \theta, \theta \in [0, \pi], |x| \leq 1$, તો $x = cos\theta$.

વળી, $cos(\pi - \theta) = -cos\theta = -x$ (i)

$\theta \in [0, \pi] \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \pi$

$\Rightarrow 0 \geq -\theta \geq -\pi$

$\Rightarrow \pi \geq (\pi - \theta) \geq 0$

$\Rightarrow 0 \leq (\pi - \theta) \leq \pi$

$\therefore$ $(\pi - \theta) \in [0, \pi]$ અને $|x| = |-x|$. આથી $|x| \le 1 \Rightarrow |-x| \le 1$

$\therefore$ (i) પરથી, $cos(\pi - \theta) = -x$ $\quad (\pi - \theta \in [0, \pi], |-x| \le 1)$

$\therefore$ $cos^{-1}(-x) = \pi - \theta = \pi - cos^{-1}x$

$\therefore$ $cos^{-1}(-x) = \pi - cos^{-1}x$

(3) ધારો કે $tan^{-1}x = \theta$. અહીં, $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $x \in R$. આથી $x = tan\theta$.

હવે, $tan(-\theta) = -tan\theta = -x$ (i)

$\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} > -\theta > -\frac{\pi}{2}$

$\therefore$ $-\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ અને $x \in R$. આમ $-x \in R$

$\therefore$ (i) પરથી, $tan(-\theta) = -x$ $\quad \left(-\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), -x \in R\right)$

$\therefore$ $tan^{-1}(-x) = -\theta = -tan^{-1}x$

$\therefore$ $tan^{-1}(-x) = -tan^{-1}x$

આ જ પ્રમાણે (4), (5) અને (6) પણ સાબિત કરી શકાય.

ઉદાહરણ 7 : કિંમત શોધો :

(1) $sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (2) $cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (3) $tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (4) $cot^{-1}(-1)$

ઉકેલ : (1) $sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$

(2) $cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

(3) $tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$

(4) $cot^{-1}(-1) = \pi - cot^{-1}1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

2.12 વ્યસ્ત સંખ્યાઓ માટેનાં ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોનાં મૂલ્યો માટેનાં સૂત્રો

હવે આપણે શૂન્યેતર x ના વ્યસ્ત $\frac{1}{x}$ માટે ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોનાં મૂલ્યો માટેનાં સૂત્ર મેળવીએ.

પ્રમેય 2.2 : (1) $cosec^{-1}x = sin^{-1}\frac{1}{x}, |x| \ge 1$

(2) $sec^{-1}x = cos^{-1}\frac{1}{x}, |x| \ge 1$

(3) (a) $cot^{-1}x = tan^{-1}\frac{1}{x}, x > 0$

(b) $cot^{-1}x = tan^{-1}\frac{1}{x} + \pi, x < 0$

સાબિતી : (1) ધારો કે $cosec^{-1}x = \theta$. $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$. આથી, $x = cosec\theta$.

$|x| \ge 1$. તેથી $x \ne 0$ અને $\left|\frac{1}{x}\right| \le 1$.

$cosec\theta = x$

$\therefore$ $sin\theta = \frac{1}{x}$

$\therefore \quad \theta = sin^{-1}\frac{1}{x}$ $\left(\theta \in \left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}\right) \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \left|\frac{1}{x}\right| \le 1\right)$

$\therefore \quad cosec^{-1}x = sin^{-1}\frac{1}{x}$

(2) ધારો કે $sec^{-1}x = \theta$. $\theta \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. આથી, $x = sec\theta$.

$|x| \ge 1$. તેથી $\left|\frac{1}{x}\right| \le 1$ અને $x \ne 0$.

$sec\theta = x$

$\therefore \quad cos\theta = \frac{1}{x}$

$\therefore \quad \theta = cos^{-1}\frac{1}{x}$ $\left(\theta \in \left([0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}\right) \subset [0, \pi], \left|\frac{1}{x}\right| \le 1\right)$

$\therefore \quad sec^{-1}x = cos^{-1}\frac{1}{x}$

(3) **(a)** ધારો કે $cot^{-1}x = \theta$. $\theta \in (0, \pi)$, $x \in R$

$\therefore \quad cot\theta = x$

$x > 0$ અને તેથી $x \ne 0$. માટે $\frac{1}{x} \in R$.

$\therefore \quad tan\theta = \frac{1}{x}$ અને $\theta \in (0, \pi)$

હવે $x > 0$, હોવાથી આપણને $tan\theta = \frac{1}{x} > 0$ મળશે.

વળી, $0 < \theta < \pi$. તેથી $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. $(tan\theta > 0)$

આથી, $tan\theta = \frac{1}{x}$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \quad \theta = tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

$\therefore \quad cot^{-1}x = tan^{-1}\frac{1}{x}$

(b) આપણે ઉપર જોયું કે, જો $cot^{-1}x = \theta$, $\theta \in (0, \pi)$, $x \in R$ તો $cot\theta = x$.

$cot\theta = x < 0$ હોવાથી, $tan\theta < 0$ અને $\theta \in (0, \pi)$.

વળી, $x \ne 0$ માટે $\frac{1}{x} \in R$ અને $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ $(x < 0)$

$\therefore \quad \frac{\pi}{2} - \pi < (\theta - \pi) < \pi - \pi$

$\therefore \quad -\frac{\pi}{2} < (\theta - \pi) < 0$

આમ, $\theta - \pi \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ અને $\frac{1}{x} \in R$, જ્યાં $x \ne 0$.

$tan(\theta - \pi) = tan\theta = \frac{1}{x}$ (tan નું આવર્તમાન π છે)

$\therefore \quad tan(\theta - \pi) = \frac{1}{x}$

$\therefore \quad \theta - \pi = tan^{-1}\frac{1}{x}$ $\left(\theta - \pi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \frac{1}{x} \in R\right)$

$\therefore \quad tan^{-1}\frac{1}{x} = cot^{-1}x - \pi$

$\therefore \quad x < 0$ માટે $cot^{-1}x = tan^{-1}\frac{1}{x} + \pi$.

(નોંધ : આ પ્રમેય પરથી તારવી શકાય કે,

(1) $sin^{-1}x = cosec^{-1}\frac{1}{x}$, $x \in [-1, 1] - \{0\}$

(2) $cos^{-1}x = sec^{-1}\frac{1}{x}$, $x \in [-1, 1] - \{0\}$

(3) (a) $tan^{-1}x = cot^{-1}\frac{1}{x}$, $x > 0$

(b) $tan^{-1}x = cot^{-1}\frac{1}{x} - \pi$, $x < 0$

2.13 કોટિ સંખ્યાઓ માટે ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોનાં મૂલ્યોનાં સૂત્રો

પ્રમેય 2.3 : (1) $sin^{-1}x + cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$, $|x| \le 1$

(2) $cosec^{-1}x + sec^{-1}x = \frac{\pi}{2}$, $|x| \ge 1$

(3) $tan^{-1}x + cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$, $x \in R$

સાબિતી : (1) ધારો કે $sin^{-1}x = \theta$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $|x| \le 1$. તો $x = sin\theta$.

હવે, $sin\theta = x$

$\therefore \quad cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = x$

હવે, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} \ge -\theta \le -\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \pi \ge \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \ge 0$

$\Rightarrow 0 \le \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \le \pi$

$\therefore \quad \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \in [0, \pi]$ અને $|x| \le 1$ તથા $cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = x$

$\therefore \quad cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - sin^{-1}x$

$\therefore \quad sin^{-1}x + cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

(2) ધારો કે $cosec^{-1}x = \theta$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$, $|x| \ge 1$. તો $x = cosec\theta$.

હવે, $cosec\theta = x$

$\therefore \quad sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = x$

હવે, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \theta \ne 0$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} \ge -\theta \ge -\frac{\pi}{2}, \theta \ne 0$

$\Rightarrow \pi \ge \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \ge 0, \theta \ne 0$

$\Rightarrow 0 \le \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \le \pi, \theta \ne 0$

વળી, $\frac{\pi}{2} - \theta \ne \frac{\pi}{2}$ $(\theta \ne 0)$

એટલે કે, $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

$\therefore$ $\frac{\pi}{2} - \theta \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $|x| \geq 1$ તથા $sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = x$.

$\therefore$ $sec^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \theta$

$\therefore$ $\theta + sec^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ $cosec^{-1}x + sec^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

અથવા બીજી રીતે વિચારતાં, $cosec^{-1}x + sec^{-1}x = sin^{-1}\frac{1}{x} + cos^{-1}\frac{1}{x}$ $\left(|x| \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{|x|} \leq 1\right)$

$= \frac{\pi}{2}$ ((1) પરથી)

(1) પ્રમાણે (3) સાબિત કરી શકાય.

2.14 સરવાળા-બાદબાકી માટે મૂલ્યો

પ્રમેય 2.4 : જો $x > 0$, $y > 0$, હોય, તો

(1) $tan^{-1}x + tan^{-1}y = tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$, જ્યાં $xy < 1$

(2) $tan^{-1}x + tan^{-1}y = \pi + tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$, જ્યાં $xy > 1$

(3) $tan^{-1}x + tan^{-1}y = \frac{\pi}{2}$, જ્યાં $xy = 1$

(4) $tan^{-1}x - tan^{-1}y = tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$

સાબિતી : અહીં $x > 0$, $y > 0$.

ધારો કે $tan^{-1}x = \alpha$ અને $tan^{-1}y = \beta$, $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore$ $tan\alpha = x$ તથા $x > 0$ અને $tan\beta = y$ તથા $y > 0$

$\therefore$ $tan\alpha$ અને $tan\beta$ ધન છે તથા $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ હોવાથી $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(1) $tan(\alpha + \beta) = \frac{tan\alpha + tan\beta}{1 - tan\alpha\, tan\beta} = \frac{x+y}{1-xy}$

અહીં, $x > 0$, $y > 0$ અને $xy < 1$. તેથી, $(1 - xy) > 0$

$\therefore$ $\frac{x+y}{1-xy} > 0$. તેથી, $tan(\alpha + \beta) > 0$

વળી, $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ એટલે કે $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ અને $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ $0 < \alpha + \beta < \pi$

પરંતુ $tan(\alpha + \beta) > 0$. આથી, $\alpha + \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

હવે, $tan(\alpha + \beta) = \frac{x+y}{1-xy}$

$\therefore$ $\alpha + \beta = tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$. $\left((\alpha + \beta) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$\therefore$ $tan^{-1}x + tan^{-1}y = tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$.

(2) $tan(-\pi + \alpha + \beta) = tan(\alpha + \beta)$ (tan નું આવર્તમાન π છે.)

$$= \frac{tan\alpha + tan\beta}{1 - tan\alpha\, tan\beta}$$

$\therefore$ $tan(-\pi + \alpha + \beta) = \frac{x + y}{1 - xy}$

હવે, $x > 0$, $y > 0$. વળી, $xy > 1$ તેથી $1 - xy < 0$

$\therefore$ $\frac{x + y}{1 - xy} < 0$

$\therefore$ $tan(-\pi + \alpha + \beta) < 0$

હવે, $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$\therefore$ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ અને $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ $0 < \alpha + \beta < \pi$

$\therefore$ $-\pi < \alpha + \beta - \pi < 0$

પરંતુ, $tan(-\pi + \alpha + \beta) < 0$.

$\therefore$ $-\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta - \pi < 0$. આથી, $\alpha + \beta - \pi \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

હવે, $tan(-\pi + \alpha + \beta) = \frac{x + y}{1 - xy}$, $\alpha + \beta - \pi \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$\therefore$ $-\pi + \alpha + \beta = tan^{-1}\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right)$.

$\therefore$ $\alpha + \beta = tan^{-1}\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right) + \pi$

$\therefore$ $tan^{-1}x + tan^{-1}y = tan^{-1}\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right) + \pi$

(3) $tan^{-1}x + tan^{-1}y = tan^{-1}x + tan^{-1}\frac{1}{x}$ $(xy = 1)$

$= tan^{-1}x + cot^{-1}x$ $(x > 0)$

$= \frac{\pi}{2}$

(4) આપણે જોયું કે, $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

તેથી, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ અને $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ એટલે કે $-\frac{\pi}{2} < -\beta < 0$.

$\therefore$ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ અને $-\frac{\pi}{2} < -\beta < 0$.

$\therefore$ $-\frac{\pi}{2} < (\alpha - \beta) < \frac{\pi}{2}$

તેથી, $(\alpha - \beta) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$tan(\alpha - \beta) = \frac{tan\alpha - tan\beta}{1 + tan\alpha\, tan\beta}$$

$\therefore$ $tan(\alpha - \beta) = \frac{x - y}{1 + xy}$ $\alpha - \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore$ $\alpha - \beta = tan^{-1}\left(\frac{x - y}{1 + xy}\right)$ $\left(\frac{x - y}{1 + xy} \in \mathbf{R} \text{ અને } x > 0, y > 0\right)$

$\therefore$ $tan^{-1}x - tan^{-1}y = tan^{-1}\left(\frac{x - y}{1 + xy}\right)$

ઉદાહરણ 8 : સાબિત કરો :

(1) $tan^{-1}\frac{2}{11} + tan^{-1}\frac{7}{24} = tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

(2) $cot^{-1}\frac{1}{2} + cot^{-1}\frac{1}{3} = \frac{3\pi}{4}$

(3) $tan^{-1}\frac{1}{7} + tan^{-1}\frac{4}{7} + tan^{-1}\frac{9}{7} = \frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : **(1)** ડા.બા. $= tan^{-1}\frac{2}{11} + tan^{-1}\frac{7}{24}$

$$= tan^{-1}\left(\frac{\frac{2}{11}+\frac{7}{24}}{1-\frac{2}{11}\times\frac{7}{24}}\right) \qquad \left(\frac{2}{11}\times\frac{7}{24}<1\right)$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{48+77}{264-14}\right) = tan^{-1}\left(\frac{125}{250}\right) = tan^{-1}\frac{1}{2} = \text{જ.બા.}$$

(2) ડા.બા. $= cot^{-1}\frac{1}{2} + cot^{-1}\frac{1}{3}$

$$= tan^{-1}2 + tan^{-1}3 \qquad (2 > 0,\ 3 > 0)$$

$$= \pi + tan^{-1}\left(\frac{2+3}{1-2\times 3}\right) \qquad (2\times 3 > 1)$$

$$= \pi + tan^{-1}(-1)$$

$$= \pi - tan^{-1}(1) \qquad (tan^{-1}(-x) = -tan^{-1}x)$$

$$= \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} = \text{જ.બા.}$$

(3) ડા.બા. $= tan^{-1}\frac{1}{7} + tan^{-1}\frac{4}{7} + tan^{-1}\frac{9}{7}$

$$= tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{7}+\frac{4}{7}}{1-\frac{1}{7}\times\frac{4}{7}}\right) + tan^{-1}\frac{9}{7} \qquad \left(\frac{1}{7}\times\frac{4}{7}<1\right)$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{7+28}{49-4}\right) + tan^{-1}\frac{9}{7}$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{35}{45}\right) + tan^{-1}\left(\frac{9}{7}\right)$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{7}{9}\right) + tan^{-1}\left(\frac{9}{7}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} = \text{જ.બા.} \qquad \left(\frac{7}{9}\times\frac{9}{7}=1\right)$$

ઉદાહરણ 9 : સાબિત કરો કે $3sin^{-1}x = sin^{-1}(3x - 4x^3)$, જ્યાં, $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$.

ઉકેલ : ધારો કે $sin^{-1}x = \theta$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $|x| \le 1$. તો $x = sin\theta$.

હવે, $sin3\theta = 3sin\theta - 4sin^3\theta$

$\therefore \quad sin3\theta = 3x - 4x^3$

હવે, $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \Rightarrow sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \le sin\theta \le sin\frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{6} \qquad \left(sin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ પર } \uparrow \text{ છે.}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le 3\theta \le \frac{\pi}{2}$$

હવે, $sin3\theta = 3x - 4x^3$. $\quad -\frac{\pi}{2} \le 3\theta \le \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad 3\theta = sin^{-1}(3x - 4x^3)$

$\therefore \quad 3sin^{-1}x = sin^{-1}(3x - 4x^3)$

ઉદાહરણ 10 : સાબિત કરો : **(1)** $tan^{-1}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} = \frac{1}{2}cos^{-1}\frac{x}{a}, \ -a < x < a, \ a \in R^+$

(2) $cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+sinx}+\sqrt{1-sinx}}{\sqrt{1+sinx}-\sqrt{1-sinx}}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}, \ \frac{\pi}{2} < x < \pi$

(3) $tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}cos^{-1}x, \ 0 < x < 1.$

ઉકેલ : (1) $tan^{-1}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$, $-a < x < a, \ a \in R^+$ નો વિચાર કરીએ.

$$-a < x < a \Rightarrow -1 < \frac{x}{a} < 1 \qquad (a \in R^+)$$

$\therefore \quad \frac{x}{a} \in (-1, 1)$

$\therefore \quad \exists\theta \in (0, \pi), \ cos\theta = \frac{x}{a}$ અથવા $\theta = cos^{-1}\frac{x}{a}$

હવે, $tan^{-1}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} = tan^{-1}\sqrt{\frac{a - acos\,\theta}{a + acos\,\theta}}$

$$= tan^{-1}\sqrt{\frac{1-cos\,\theta}{1+cos\,\theta}}$$

$$= tan^{-1}\sqrt{tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= tan^{-1}\left|\,tan\frac{\theta}{2}\,\right|$$

$$= tan^{-1}\left(tan\frac{\theta}{2}\right) \qquad \left(0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\theta}{2} \qquad \left(\frac{\theta}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}cos^{-1}\frac{x}{a}$$

(2) ડા.બા. $= cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+sinx}+\sqrt{1-sinx}}{\sqrt{1+sinx}-\sqrt{1-sinx}}\right), \ \frac{\pi}{2} < x < \pi$

$$= cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{\left(cos\frac{x}{2}+sin\frac{x}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(cos\frac{x}{2}-sin\frac{x}{2}\right)^2}}{\sqrt{\left(cos\frac{x}{2}+sin\frac{x}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(cos\frac{x}{2}-sin\frac{x}{2}\right)^2}}\right)$$

$$= cot^{-1}\left(\frac{\left|cos\frac{x}{2}+sin\frac{x}{2}\right|+\left|cos\frac{x}{2}-sin\frac{x}{2}\right|}{\left|cos\frac{x}{2}+sin\frac{x}{2}\right|-\left|cos\frac{x}{2}-sin\frac{x}{2}\right|}\right)$$

હવે, $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$.

$\therefore \quad cos\frac{x}{2} < sin\frac{x}{2}$ અને $cos\frac{x}{2} > 0$, $sin\frac{x}{2} > 0$

વળી, $-\frac{\pi}{4} > -\frac{x}{2} > -\frac{\pi}{2}$. તેથી $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} > 0$.

$\therefore \quad 0 < \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}$.

$\therefore$ ડા.બા. $= cot^{-1}\left(\frac{\left(cos\frac{x}{2} + sin\frac{x}{2}\right) - \left(cos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2}\right)}{\left(cos\frac{x}{2} + sin\frac{x}{2}\right) + \left(cos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2}\right)}\right)$ $\quad \left(\left|cos\,\frac{x}{2} - sin\,\frac{x}{2}\right| = -\left(cos\,\frac{x}{2} - sin\,\frac{x}{2}\right)\right)$

$= cot^{-1}\left(tan\frac{x}{2}\right)$

$= cot^{-1}\left(cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)\right)$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} =$ જ.બા. $\quad$ ((i) પરથી)

(3) $tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}\right)$, $0 < x < 1$

ધારો કે $\theta = cos^{-1}x$, $\theta \in (0, \pi)$. $x \in (0, 1)$. તેથી $x = cos\theta$.

ડા.બા. $= tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+cos\,\theta} - \sqrt{1-cos\,\theta}}{\sqrt{1+cos\,\theta} + \sqrt{1-cos\,\theta}}\right)$

$= tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2cos^2\frac{\theta}{2}} - \sqrt{2sin^2\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{2cos^2\frac{\theta}{2}} + \sqrt{2sin^2\frac{\theta}{2}}}\right)$

$= tan^{-1}\left(\frac{\left|cos\frac{\theta}{2}\right| - \left|sin\frac{\theta}{2}\right|}{\left|cos\frac{\theta}{2}\right| + \left|sin\frac{\theta}{2}\right|}\right)$

હવે, $0 < x < 1 \Rightarrow 0 < cos\theta < 1$

$\Rightarrow cos\frac{\pi}{2} < cos\,\theta < cos0$

$\Rightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ $\quad$ (cos પ્રથમ ચરણમાં ↓ વિધેય છે.)

$\Rightarrow 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}$

વળી, $-\frac{\pi}{4} < -\frac{\theta}{2} < 0$

તેથી, $0 < \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) < \frac{\pi}{4}$

ડા.બા. $= tan^{-1}\left(\frac{cos\frac{\theta}{2} - sin\frac{\theta}{2}}{cos\frac{\theta}{2} + sin\frac{\theta}{2}}\right)$ $\quad \left(0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}\right)$

$= tan^{-1}\left(\frac{1 - tan\frac{\theta}{2}}{1 + tan\frac{\theta}{2}}\right)$ $\quad$ ($cos\frac{\theta}{2} \neq 0$. કેમ ?)

$= tan^{-1}\left(tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right)$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}cos^{-1}x =$ જ.બા. $\quad \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)\right)$

2.15 ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોના આંતર સંબંધો

(1) $sin^{-1}x = cos^{-1}\sqrt{1-x^2} = tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, જ્યાં $0 < x < 1$.

(2) $cos^{-1}x = sin^{-1}\sqrt{1-x^2} = tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, જ્યાં $0 < x < 1$.

(3) $tan^{-1}x = cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, જ્યાં $x > 0$

સાબિતી : ધારો કે, $sin^{-1}x = \theta$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. તેથી $sin\theta = x$.

$sin\theta = x$ તથા $x > 0$. તેથી, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. $\left(x \neq 0, 1 \Rightarrow \theta \neq 0, \frac{\pi}{2}\right)$

તેથી, $cos^2\theta = 1 - sin^2\theta = 1 - x^2$

$\therefore \quad cos\theta = \sqrt{1-x^2}$ $\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ માં } cos\theta > 0\right)$

$\therefore \quad \theta = cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$ $\left(\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), 0 < \sqrt{1-x^2} < 1\right)$

$\therefore \quad sin^{-1}x = cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$

હવે, $tan\theta = \dfrac{sin\theta}{cos\theta}$

$tan\theta = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore \quad \theta = tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$\therefore \quad sin^{-1}x = tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

આ જ રીતે (2) અને (3) પણ મેળવી શકાય.

ઉદાહરણ 11 : સાબિત કરો : $sin^{-1}\frac{3}{5} + cos^{-1}\frac{15}{17} + sin^{-1}\frac{36}{85} = \frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : ડા.બા. $= sin^{-1}\frac{3}{5} + cos^{-1}\frac{15}{17} + sin^{-1}\frac{36}{85}$

$$= tan^{-1}\frac{\frac{3}{5}}{\sqrt{1-\frac{9}{25}}} + tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\frac{225}{289}}}{\frac{15}{17}} + tan^{-1}\frac{\frac{36}{85}}{\sqrt{1-\frac{36^2}{85^2}}}$$

$$= tan^{-1}\frac{3}{\sqrt{25-9}} + tan^{-1}\frac{\sqrt{289-225}}{15} + tan^{-1}\frac{36}{\sqrt{85^2-36^2}}$$

$$= tan^{-1}\frac{3}{4} + tan^{-1}\frac{8}{15} + tan^{-1}\frac{36}{77}$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{\frac{3}{4}+\frac{8}{15}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{8}{15}}\right) + tan^{-1}\left(\frac{36}{77}\right) \qquad \left(\frac{3}{4}\times\frac{8}{15} < 1\right)$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{45+32}{60-24}\right) + tan^{-1}\left(\frac{36}{77}\right)$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{77}{36}\right) + tan^{-1}\left(\frac{36}{77}\right)$$

$= \frac{\pi}{2} =$ જ.બા. $\left(\frac{77}{36}\times\frac{36}{77} = 1\right)$

સ્વાધ્યાય 2.2

1. કિંમત શોધો :

(1) $\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\tan^{-1}(1)$

(2) $3\sin^{-1}\frac{1}{2} + 4\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} + \sec^{-1} 1$

(3) $\cot^{-1}(1) + 3\sin^{-1}\frac{1}{2} - \operatorname{cosec}^{-1}(-2) - 3\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$

(4) $5\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 4\tan^{-1}(-\sqrt{3}) + 3\sin^{-1}(1)$

(5) $\cos\left(\sin^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)\right) + \sin\left(\tan^{-1}\frac{3}{4}\right) + \cos\left(\operatorname{cosec}^{-1}\frac{5}{3}\right)$

(6) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\frac{3}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \sin^{-1}\frac{2}{7}\right) + \cot\left(\tan^{-1}\frac{7}{6}\right)$

(7) $\sin^{-1}\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right) + \cos^{-1}\left(\cos\frac{5\pi}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\tan\frac{7\pi}{3}\right)$

2. સાબિત કરો :

(1) $\tan^{-1}\frac{4}{5} + \tan^{-1}\frac{2}{3} = \tan^{-1}\frac{22}{7}$

(2) $\tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{13} = \tan^{-1}\frac{2}{9}$

(3) $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

(4) $\tan^{-1}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{8}$

(5) $\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{3} - \tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\frac{21}{53}$

(6) $\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

3. સાબિત કરો :

(1) $\cos^{-1}\frac{4}{5} + \sin^{-1}\frac{5}{13} = \tan^{-1}\left(\frac{56}{33}\right)$

(2) $\sin^{-1}\frac{3}{5} + \cos^{-1}\frac{4}{5} = \cot^{-1}\left(\frac{7}{24}\right)$

(3) $2\sin^{-1}\frac{5}{13} = \cos^{-1}\frac{119}{169}$

(4) $2\sin^{-1}\frac{3}{5} + \cos^{-1}\frac{24}{25} = \frac{\pi}{2}$

(5) $2\cot^{-1} 2 + \operatorname{cosec}^{-1}\frac{5}{3} = \frac{\pi}{2}$

(6) $\sin^{-1}\frac{3}{5} + \sin^{-1}\frac{8}{17} + \sin^{-1}\frac{36}{85} = \frac{\pi}{2}$

4. સાબિત કરો :

(1) $2\cot^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{3}{4} = \pi$

(2) $\cot^{-1} 1 + \tan^{-1} 2 + \cot^{-1}\frac{1}{3} = \pi$

(3) $\cot^{-1}\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\cot^{-1}\frac{12}{5} = \frac{\pi}{2}$

(4) $\sin^{-1}\frac{12}{13} + \cos^{-1}\frac{4}{5} + \tan^{-1}\frac{63}{16} = \pi$

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 12 : સાબિત કરો કે $cos^{-1} a + cos^{-1} b + cos^{-1} c = \pi \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$, જ્યાં $a, b, c \in [-1, 1]$.

ઉકેલ : ધારો કે $cos^{-1}a = \alpha$, $cos^{-1}b = \beta$, $cos^{-1}c = \gamma$ $\quad [\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]]$

$\therefore \quad a = cos\alpha, \ b = cos\beta, \ c = cos\gamma$

હવે, $cos^{-1}a + cos^{-1}b + cos^{-1}c = \pi$

$\therefore \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi$

$\therefore \quad \alpha + \beta = \pi - \gamma$

$\therefore \quad cos(\alpha + \beta) = cos(\pi - \gamma)$

$\therefore \quad cos\alpha \, cos\beta - sin\alpha \, sin\beta = -cos\gamma$

$\therefore \quad cos\alpha \, cos\beta + cos\gamma = sin\alpha \, sin\beta$

$\therefore \quad (cos\alpha \, cos\beta + cos\gamma)^2 = sin^2\alpha \, sin^2\beta$

$\therefore \quad (ab + c)^2 = (1 - a^2)(1 - b^2)$

$\therefore \quad a^2b^2 + 2abc + c^2 = 1 - a^2 - b^2 + a^2b^2$

$\therefore \quad a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$

ઉદાહરણ 13 : સાબિત કરો કે $cosec[tan^{-1}(cos(cot^{-1}(sec(sin^{-1} a))))] = \sqrt{3 - a^2}$, જ્યાં $0 < a < 1$.

ઉકેલ : ડા.બા. $= cosec[tan^{-1}(cos(cot^{-1}(sec(sin^{-1} a))))]$

$$= cosec\left[tan^{-1}\left(cos\left(cot^{-1}\left(sec\left(sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\right)\right)\right)\right)\right] \qquad \left(sin^{-1} a = cos^{-1}\sqrt{1-a^2}\right)$$

$$= cosec\left[tan^{-1}\left(cos\left(cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\right)\right)\right]$$

$$= cosec\left[tan^{-1}\left(cos\left(tan^{-1}\sqrt{1-a^2}\right)\right)\right] \qquad \left(\sqrt{1-a^2} > 0\right)$$

$$= cosec\left[tan^{-1}\left(cos\left(cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2-a^2}}\right)\right)\right] \qquad \left(tan^{-1}x = cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= cosec\left(tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2-a^2}}\right)$$

$$= cosec\left(sin^{-1}\frac{\frac{1}{\sqrt{2-a^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{2-a^2}}}\right) \qquad \left(tan^{-1}x = sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= cosec\left(sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3-a^2}}\right)$$

$$= cosec\left(cosec^{-1}\sqrt{3-a^2}\right)$$

$= \sqrt{3-a^2} =$ જ.બા.

ઉદાહરણ 14 : નીચે આપેલાં સમીકરણો ઉકેલો :

(1) $tan^{-1}\sqrt{3} + 2tan^{-1}x = \frac{5\pi}{6}$ $\qquad$ **(2)** $tan^{-1}2x + 2tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : (1) $tan^{-1}\sqrt{3} + 2tan^{-1}x = \frac{5\pi}{6}$

$\therefore \quad \frac{\pi}{3} + 2tan^{-1}x = \frac{5\pi}{6}$

$\therefore \quad 2tan^{-1}x = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}$

$\therefore \quad 2tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad tan^{-1}x = \frac{\pi}{4}$

$\therefore \quad x = tan\frac{\pi}{4}$

$\therefore \quad x = 1$

આ સમીકરણો ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયનાં સૂત્રોનો ઉપયોગ કરી સરળતાથી ઉકેલી શકાય છે. પ્રતિવિધેયો વ્યાખ્યાયિત કરવા માટે ત્રિકોણમિતીય વિધેયના પ્રદેશ અને વિસ્તાર મર્યાદિત કર્યા હોય છે તેથી ઉકેલ મેળવ્યા બાદ તેની ચકાસણી કરી ઉકેલ નક્કી કરવો જોઈએ.

ચકાસણી : સમીકરણમાં $x = 1$ લેતાં,

ડા.બા. $= tan^{-1}\sqrt{3} + 2tan^{-1}x = \frac{\pi}{3} + 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} =$ જ.બા.

$\therefore$ ઉકેલગણ $\{1\}$ છે.

(2) $tan^{-1}2x + 2tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

સ્પષ્ટ છે કે જો $x \geq 1$, તો $2tan^{-1}x \geq 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ $\qquad (x \geq 1)$

આથી, $tan^{-1}2x \leq 0$ જે શક્ય નથી.

જો $x < 0$, તો ડા.બા. < 0, જ.બા. > 0, જે શક્ય નથી.

$\therefore \quad 0 < x < 1.$

અહીં, $tan^{-1}2x + 2tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad tan^{-1}2x + tan^{-1}x + tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad tan^{-1}2x + tan^{-1}\left(\frac{x+x}{1-x^2}\right) = \frac{\pi}{2} \qquad (0 < x^2 < 1)$

$\therefore \quad tan^{-1}2x + tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = \frac{\pi}{2}$

આપણે જાણીએ છીએ કે $xy = 1 \Leftrightarrow tan^{-1}x + tan^{-1}y = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad 2x \cdot \frac{2x}{1-x^2} = 1$

$\therefore \quad 4x^2 = 1 - x^2$

$\therefore \quad 5x^2 = 1$

$\therefore \quad x^2 = \frac{1}{5}$

$\therefore \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. પરંતુ $x > 0$

$\therefore \quad x = \frac{1}{\sqrt{5}}$

ચકાસણી : $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ લેતાં,

ડા.બા. = $tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}} + 2tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}$

$= tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}} + tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} + tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}$

$= tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}} + tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\frac{1}{5}}\right)$

$= tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}} + tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{5-1}\right)$

$= tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}} + tan^{-1}\frac{\sqrt{5}}{2}$

$= \frac{\pi}{2}$ = જ.બા.

$\therefore$ ઉકેલગણ $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$ છે.

ઉદાહરણ 15 : જો $0 < x < 1$ અને $tan^{-1}(1 - x)$, $tan^{-1}x$ અને $tan^{-1}(1 + x)$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો સાબિત કરો કે $x^3 + x^2 = 1$.

ઉકેલ : અહીં, $tan^{-1}(1 - x)$, $tan^{-1}x$ અને $tan^{-1}(1 + x)$ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

$2tan^{-1}x = tan^{-1}(1 - x) + tan^{-1}(1 + x)$

$\therefore$ $tan^{-1}x + tan^{-1}x = tan^{-1}\frac{1-x+1+x}{1-(1-x^2)}$ **($1 - x > 0$, $1 + x > 0$, $0 < 1 - x^2 < 1$)**

$\therefore$ $tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = tan^{-1}\left(\frac{2}{x^2}\right)$ **($0 < x^2 < 1$)**

$\therefore$ $\frac{2x}{1-x^2} = \frac{2}{x^2}$ **(tan^{-1} એક-એક છે.)**

$\therefore$ $x^3 = 1 - x^2$

$\therefore$ $x^3 + x^2 = 1$

ઉદાહરણ 16 : ઉકેલો : $cos^{-1}x + sin^{-1}2x = \frac{\pi}{6}$

ઉકેલ : $cos^{-1}x + sin^{-1}2x = \frac{\pi}{6}$

ધારો કે $cos^{-1}x = \alpha$, $\alpha \in [0, \pi]$. તો $x = cos\alpha$

$\therefore$ $sin\alpha = \sqrt{1-cos^2\alpha} = \sqrt{1-x^2}$ **($sin\alpha \geq 0$ કારણ કે $\alpha \in [0, \pi]$)**

ધારો કે $sin^{-1}2x = \beta$, $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. તો $2x = sin\beta$

$\therefore$ $cos\beta = \sqrt{1-4x^2}$ **($cos\beta \geq 0$ કારણ કે $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$)**

હવે, $cos^{-1}x + sin^{-1}2x = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ $\alpha + \beta = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ $sin(\alpha + \beta) = sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore$ $sin\alpha\, cos\beta + cos\alpha\, sin\beta = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad \sqrt{1-x^2}\ \sqrt{1-4x^2} + x(2x) = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad \sqrt{1-x^2}\ \sqrt{1-4x^2} = \frac{1}{2} - 2x^2$

$\therefore \quad \sqrt{1-5x^2+4x^4} = \frac{1}{2} - 2x^2$

$\therefore \quad 1 - 5x^2 + 4x^4 = \left(\frac{1}{2} - 2x^2\right)^2$

$\therefore \quad 1 - 5x^2 + 4x^4 = \frac{1}{4} - 2x^2 + 4x^4$

$\therefore \quad 3x^2 = \frac{3}{4}$

$\therefore \quad x^2 = \frac{1}{4}$

$\therefore \quad x = \pm\frac{1}{2}$

ચકાસણી : $x = \frac{1}{2}$ માટે

ડા.બા. $= cos^{-1}\frac{1}{2} + sin^{-1}1 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{6} \neq$ જ.બા.

$x = -\frac{1}{2}$ માટે

ડા.બા. $= cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + sin^{-1}(-1)$

$= \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} =$ જ.બા.

$\therefore$ ઉકેલગણ $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ છે.

સ્વાધ્યાય 2

1. સાબિત કરો :

(1) $sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}) = 2sin^{-1}x, \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $cos^{-1}(2x^2 - 1) = 2cos^{-1}x, \quad 0 < x < 1$

(3) $cos^{-1}(4x^3 - 3x) = 3cos^{-1}x, \quad \frac{1}{2} < x < 1$

(4) $cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}tan^{-1}x$

(5) $sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 2tan^{-1}x, \ |x| \le 1$

(6) $tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right) = 3tan^{-1}x, \ 0 < x < \frac{1}{\sqrt{3}}.$

(7) $cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+sinx}+\sqrt{1-sinx}}{\sqrt{1+sinx}-\sqrt{1-sinx}}\right) = \frac{x}{2}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$

(8) $tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+cosx}+\sqrt{1-cosx}}{\sqrt{1+cosx}-\sqrt{1-cosx}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, \quad \pi < x < \frac{3\pi}{2}.$

(9) $tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}cos^{-1}x^2, \quad -1 < x < 1, \ x \neq 0$

(10) $tan^{-1}\left(\dfrac{acosx - bsinx}{bcosx + asinx}\right) = tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \frac{a}{b}\, tanx > -1$

(11) $sin^{-1}\left(\dfrac{sinx + cosx}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} + x, \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$

2. **(1)** જો $tan^{-1}x + tan^{-1}y + tan^{-1}z = \pi$, તો સાબિત કરો કે $x + y + z = xyz$

(2) જો $cot^{-1}\frac{1}{x} + cot^{-1}\frac{1}{y} + cot^{-1}\frac{1}{z} = \frac{\pi}{2}$, તો સાબિત કરો કે $xy + yz + zx = 1$

(3) જો $cot^{-1}a + cot^{-1}b + cot^{-1}c = \pi$, તો સાબિત કરો કે $ab + bc + ca = 1$

(4) જો $a > b > c > 0$, તો સાબિત કરો કે $cot^{-1}\left(\dfrac{ab+1}{a-b}\right) + cot^{-1}\left(\dfrac{bc+1}{b-c}\right) + cot^{-1}\left(\dfrac{ca+1}{c-a}\right) = \pi$.

(5) જો $tan^{-1}\frac{yz}{xr} + tan^{-1}\frac{zx}{yr} + tan^{-1}\frac{xy}{zr} = \frac{\pi}{2}$, તો સાબિત કરો કે $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

(6) જો $tan^{-1}\sqrt{\frac{ar}{bc}} + tan^{-1}\sqrt{\frac{br}{ca}} + tan^{-1}\sqrt{\frac{cr}{ab}} = \pi$, તો સાબિત કરો કે $a + b + c = r$. $(a, b, c, r > 0)$

(7) જો $sin^{-1}x + sin^{-1}y + sin^{-1}z = \pi$, તો સાબિત કરો કે $x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} + z\sqrt{1-z^2} = 2xyz$.

(8) સાબિત કરો કે $tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}cos^{-1}\frac{a}{b}\right) + tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}cos^{-1}\frac{a}{b}\right) = \frac{2b}{a}$

(9) સાબિત કરો : $\sum\limits_{r=1}^{n} tan^{-1}\left(\dfrac{1}{1 + r(r+1)}\right) = tan^{-1}(n + 1) - \frac{\pi}{4}$.

(10) $tan^{-1}\left(\frac{1}{2}tan2A\right) + tan^{-1}(cotA) + tan^{-1}(cot^3A) = \begin{cases} 0, \text{ જો } \frac{\pi}{4} < A < \frac{\pi}{2} \\ \pi, \text{ જો } 0 < A < \frac{\pi}{4} \end{cases}$

3. **નીચે આપેલાં સમીકરણો ઉકેલો :**

(1) $tan^{-1}\dfrac{x-1}{x-2} + tan^{-1}\dfrac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$.

(2) $tan^{-1}2x + tan^{-1}3x = \frac{\pi}{4}$.

(3) $2tan^{-1}(cosx) = tan^{-1}(2cosecx)$

(4) $sin^{-1}x + cos^{-1}2x = \frac{\pi}{6}$

(5) $sin^{-1}\frac{5}{x} + sin^{-1}\frac{12}{x} = \frac{\pi}{2}$

(6) $tan^{-1}(x + 1) + tan^{-1}(x - 1) = tan^{-1}\frac{8}{31}$

(7) $tan^{-1}2x + tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x+4}\right) = \frac{\pi}{2}$

4. **નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :**

વિભાગ A (1 ગુણ)

(1) $sin\left(3sin^{-1}\frac{1}{3}\right) = ...$ ☐

(a) $\frac{23}{27}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{27}{23}$ (d) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

(2) જો કોઈક $x \in (-1, 1)$ માટે $sin^{-1}x = \frac{\pi}{7}$ તો $cos^{-1}x = ...$

(a) $\frac{3\pi}{14}$ (b) $\frac{5\pi}{14}$ (c) $\frac{\pi}{14}$ (d) $\frac{6\pi}{7}$

(3) $sec^2(tan^{-1}2) + cosec^2(cot^{-1}3) = ...$.

(a) 15 (b) 6 (c) 13 (d) 25

(4) $cos^{-1}\left(cos\frac{7\pi}{6}\right) = ...$.

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{5\pi}{6}$ (c) $-\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{7\pi}{6}$

(5) cos^{-1} નો પ્રદેશગણ ...... છે.

(a) $(-\infty, \infty)$ (b) $[0, 1]$ (c) $[0, \pi]$ (d) $[-1, 1]$

(6) tan^{-1} નો વિસ્તાર ...... છે.

(a) $(-\pi, \pi)$ (b) R (c) $(0, \pi)$ (d) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

(7) $cos^{-1}\left(cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $-\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{4\pi}{3}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$

(8) $sin^{-1}\left(cos\frac{\pi}{6}\right) = ...$.

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{3\pi}{2}$

(9) $sin^{-1}\left(sin\frac{5\pi}{3}\right)$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $-\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{5\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$

(10) $cos\left(cos^{-1}\left(-\frac{1}{5}\right) + sin^{-1}\left(-\frac{1}{5}\right)\right) = ...$.

(a) $\frac{4}{9}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) 0 (d) $-\frac{1}{3}$

(11) $cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = ...$.

(a) $\frac{5\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{4\pi}{3}$ (d) $\frac{4\pi}{6}$

(12) $sin^{-1}\left(sin\frac{7\pi}{6}\right) = ...$.

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{5\pi}{6}$ (c) $\frac{-\pi}{6}$ (d) $\frac{7\pi}{6}$

(13) $sin\left\{\frac{\pi}{3} - sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right\} = ...$.

(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) 1

(14) $sin\left(cos^{-1}\frac{4}{5}\right)$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{3}{4}$

(15) $cos\left(tan^{-1}\frac{4}{3}\right)$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{3}{5}$

વિભાગ B (2 ગુણ)

(16) $2tan^{-1}5 + tan^{-1}\frac{5}{12} =$ ......

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$ (c) π (d) $\frac{\pi}{2}$

(17) જો $sin^{-1}x + sin^{-1}y = \frac{2\pi}{3}$, તો $cos^{-1}x + cos^{-1}y =$ ......

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) π

(18) $4sin^{-1}x + cos^{-1}x = \pi$, તો $x =$ ......

(a) $-\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $-\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$

(19) $sin\left(tan^{-1}\left(tan\frac{7\pi}{6}\right)\right) + cos\left(cos^{-1}\left(cos\frac{7\pi}{3}\right)\right) =$ ......

(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(20) જો $cos(2sin^{-1}x) = \frac{1}{9}$, તો x નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

(21) $sin[2sin^{-1}(cos\text{A})]$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $sin\text{A}$ (b) $cos\text{A}$ (c) $cos2\text{A}$ (d) $sin2\text{A}$

(22) $sin\left[3sin^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)\right]$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $-\frac{3}{5}$ (b) $\frac{79}{12}$ (c) $-\frac{71}{125}$ (d) $\frac{71}{125}$

(23) $tan^{-1}\left(-tan\frac{13\pi}{8}\right) =$ ......

(a) $-\frac{5\pi}{8}$ (b) $\frac{3\pi}{8}$ (c) $-\frac{3\pi}{8}$ (d) $\frac{13\pi}{8}$

(24) $sin^{-1}\left(sin\frac{32\pi}{7}\right) =$ ......

(a) $\frac{3\pi}{7}$ (b) $\frac{4\pi}{7}$ (c) $\frac{18\pi}{7}$ (d) $\frac{32\pi}{7}$

(25) $cos\left[\frac{\pi}{6} + cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (c) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (d) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

(26) $tan^{-1}2 + tan^{-1}3 =$ ......

(a) $-\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) $\frac{3\pi}{2}$

(27) $sin\left[tan^{-1}(-\sqrt{3}) + cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) -1 (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

(28) $sin^{-1}\frac{3}{5} + tan^{-1}\frac{1}{7}$ = ...

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) π (d) $sin^{-1}\frac{4}{5}$

(29) $tan\left(cos^{-1}\frac{3}{4} + sin^{-1}\frac{3}{4} - sec^{-1}3\right)$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (d) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

(30) $sec\left[tan^{-1}\left(\frac{b+a}{b-a}\right) - tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\right]$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) 1 (b) $\sqrt{2}$ (c) 2 (d) 4

વિભાગ C (3 ગુણ)

(31) $cot\left[\frac{\pi}{4} - 2cot^{-1}3\right]$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) 3 (b) 7 (c) 9 (d) $\frac{3}{4}$

(32) $tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) - tan^{-1}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$ = ... $\left(\frac{x}{y} \geq 0\right)$

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) π

(33) જો $x = \frac{1}{3}$, તો $cos(2cos^{-1}x + sin^{-1}x)$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $-\sqrt{\frac{8}{9}}$ (b) $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$

(34) $cos^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) + cosec^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$, તો x નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) 1 (b) 3 (c) 5 (d) 4

(35) $cot\left(cosec^{-1}\frac{5}{3} + tan^{-1}\frac{2}{3}\right)$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $\frac{3}{17}$ (b) $\frac{4}{17}$ (c) $\frac{5}{17}$ (d) $\frac{6}{17}$

(36) $tan\left(2cos^{-1}\frac{3}{5}\right)$ = ...

(a) $\frac{8}{3}$ (b) $\frac{24}{25}$ (c) $\frac{7}{25}$ (d) $-\frac{24}{7}$

(37) $tan\left[\frac{1}{2}cos^{-1}\frac{\sqrt{5}}{3}\right]$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (d) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

(38) જો $0 < x < 1$, તો $tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}\right)$ = ...

(a) $\frac{1}{2}sin^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}$ (b) $\frac{1}{2}cos^{-1}x$ (c) $\frac{1}{2}cot^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ (d) $\frac{1}{2}tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

(39) જો $cos(2tan^{-1}x) = \frac{1}{2}$, તો x નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $1 - \sqrt{3}$ (c) $1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\sqrt{3}$

(40) $tan\left\{sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + cos^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)\right\}$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $-\frac{24}{5}$ (b) $-\frac{22}{15}$ (c) $-\frac{63}{16}$ (d) $-\frac{47}{12}$

(41) જો $sin^{-1}\frac{x}{5} + cosec^{-1}\frac{5}{4} = \frac{\pi}{2}$, તો $x =$ ......

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(42) $sin^{-1}(cos(sin^{-1}x)) + cos^{-1}(sin(cos^{-1}x)) =$ ......

(a) 0 (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{3\pi}{4}$

વિભાગ D (4 ગુણ)

(43) $cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-sinx}+\sqrt{1+sinx}}{\sqrt{1-sinx}-\sqrt{1+sinx}}\right) =$ ...... $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

(a) $\frac{x}{2}$ (b) $\frac{\pi}{2} - 2x$ (c) $2\pi - x$ (d) $\pi - \frac{x}{2}$

(44) જો $sin^{-1}\frac{1}{x} = 2tan^{-1}\frac{1}{7} + cos^{-1}\frac{3}{5}$, તો $x =$ ......

(a) $\frac{24}{117}$ (b) $\frac{7}{3}$ (c) $\frac{125}{117}$ (d) $-\frac{117}{44}$

(45) જો $\alpha = cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$, $\beta = tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$, $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, તો $\alpha - \beta =$ ......

(a) $sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{13}}$ (b) $tan^{-1}\left(\frac{1}{18}\right)$ (c) $cos^{-1}\left(\frac{1}{5\sqrt{3}}\right)$ (d) $sin^{-1}\left(\frac{6}{5\sqrt{13}}\right)$

(46) નીચે આપેલા પૈકી કઈ જોડ સાચી છે ?

વિભાગ (A)	વિભાગ (B)
(1) $tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$	(a) $\frac{\pi}{2}$
(2) $sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + sin^{-1}\left(\frac{8}{17}\right) + sin^{-1}\left(\frac{36}{85}\right)$	(b) π
(3) $tan^{-1}(1) + cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$	(c) $tan^{-1}\left(\frac{7}{11}\right)$
(4) $2tan^{-1}(5) + tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$	(d) $\frac{3\pi}{4}$

(a) 1 – c, 2 – b, 3 – d, 4 – a (b) 1 – c, 2 – a, 3 – d, 4 – b

(c) 1 – c, 2 – a, 3 – b, 4 – d (d) 1 – a, 2 – b, 3 – d, 4 – c

(47) $\tan\left(2\tan^{-1}\frac{1}{5} - \frac{\pi}{4}\right) = ...$ ☐

(a) $\frac{14}{33}$ (b) $\frac{-7}{17}$ (c) $\frac{17}{7}$ (d) $\frac{24}{25}$

(48) જો $\sin^{-1}(1 - x) - 2\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$, તો $x = ...$ ☐

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) 0 (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{2}$

(49) $\tan^{-1}(x + 1) + \tan^{-1}x + \tan^{-1}(x - 1) = \tan^{-1}3x$ સમીકરણનું સમાધાન કરતી xની કિંમતોની સંખ્યા ...... છે. ☐

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) અનંત

(50) જો $\cot^{-1}x + \cot^{-1}y + \cot^{-1}z = \frac{\pi}{2}$, તો $x + y + z = ...$ ☐

(a) $xy + yz + zx$ (b) xyz (c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ (d) $\frac{xy + yz + zx}{3}$

(51) જો $\sin^{-1}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{2b}{1+b^2}\right) = 2\tan^{-1}x$, તો $x = ...$ $(0 < a, b < 1)$ ☐

(a) $\frac{a-b}{1+ab}$ (b) $\frac{a+b}{1-ab}$ (c) $\frac{b}{1-ab}$ (d) $\frac{b}{1+ab}$

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચે આપેલા મુદ્દાઓ શીખ્યા :

1. ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોની વ્યાખ્યા
2. ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોના આલેખ
3. (1) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x, \quad |x| \le 1$

   (2) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x, \quad |x| \le 1$

   (3) $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}x, \quad x \in R$

   (4) $\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1}x, \quad x \in R$

   (5) $\mathrm{cosec}^{-1}(-x) = -\mathrm{cosec}^{-1}x, \quad |x| \ge 1$

   (6) $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1}x, \quad |x| \ge 1$
4. (1) $\mathrm{cosec}^{-1}x = \sin^{-1}\frac{1}{x}, \quad |x| \ge 1$

   (2) $\sec^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1}{x}, \quad |x| \ge 1$

   (3) $\cot^{-1}x = \tan^{-1}\frac{1}{x}, \quad x > 0$

   $= \pi + \tan^{-1}\frac{1}{x}, \quad x < 0$

5. (1) $sin^{-1}x + cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}, \qquad |x| \le 1$

(2) $cosec^{-1}x + sec^{-1}x = \frac{\pi}{2}, \qquad |x| \ge 1$

(3) $tan^{-1}x + cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}, \qquad x \in R$

6. જો $x > 0$, $y > 0$, તો

(1) $tan^{-1}x + tan^{-1}y = tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$, જ્યાં $xy < 1$

(2) $tan^{-1}x + tan^{-1}y = \pi + tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$, જ્યાં $xy > 1$

(3) $tan^{-1}x + tan^{-1}y = \frac{\pi}{2}$, જ્યાં $xy = 1$

(4) $tan^{-1}x - tan^{-1}y = tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$

7. (1) $sin^{-1}x = cos^{-1}\sqrt{1-x^2} = tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, જ્યાં $0 < x < 1$

(2) $cos^{-1}x = sin^{-1}\sqrt{1-x^2} = tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, જ્યાં $0 < x < 1$

(3) $tan^{-1}x = cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, જ્યાં $x > 0$

Srinivasa Ramanujan : Adulthood in India

On 14 July 1909, Ramanujan was married to a nine-year old bride, Janaki Ammal. In the branch of Hinduism to which Ramanujan belonged, marriage was a formal engagement that was consummated only after the bride turned 17 or 18, as per the traditional calendar.

After the marriage, Ramanujan developed a hydrocele testis, an abnormal swelling of the tunica vaginalis, an internal membrane in the testicle. The condition could be treated with a routine surgical operation that would release the blocked fluid in the scrotal sac. His family did not have the money for the operation, but in January 1910, a doctor volunteered to do the surgery for free.

After his successful surgery, Ramanujan searched for a job. He stayed at friends' houses while he went door to door around the city of Madras (now Chennai) looking for a clerical position. To make some money, he tutored some students at Presidency College who were preparing for their F.A. exam.

In late 1910, Ramanujan was sick again, possibly as a result of the surgery earlier in the year. He feared for his health, and even told his friend, R. Radakrishna Iyer, to "hand these [my mathematical notebooks] over to Professor Singaravelu Mudaliar [mathematics professor at Pachaiyappa's College] or to the British professor Edward B. Ross, of the Madras Christian College." After Ramanujan recovered and got back his notebooks from Iyer, he took a northbound train from Kumbakonam to Villupuram, a coastal city under French control.