પ્રકરણ 2

# સંકર સંખ્યાઓ

***A mathematician is a device for turning coffee into theorems.***

**- Paul Erdos**

***As far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain and as far as they are certain, they do not refer to reality.***

**- Albert Einstein**

## 2.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે અગાઉનાં ધોરણોમાં સંખ્યાઓના ગણ N, Z, Q અને R નો અભ્યાસ કરી ગયાં. આપણે જાણીએ છીએ કે સંમેય સંખ્યાઓનો ગણ અને અસંમેય સંખ્યાઓનો ગણ ભેગા મળીને વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ રચે છે. આપણે સંખ્યાઓના ગુણધર્મો તેમજ એક ચલ અને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણોના ઉકેલનો અભ્યાસ કરી ગયાં. તદુપરાંત આપણે એક ચલ દ્વિઘાત સમીકરણોના ઉકેલની પણ ચર્ચા કરી ગયાં. આપણે જોયું કે જો વિવેચક $b^2 - 4ac < 0$ હોય, તો દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in$ R, $a \neq 0$ ને વાસ્તવિક ઉકેલ નથી. ઉદાહરણ તરીકે $x^2 + 1 = 0$ ને R માં ઉકેલ નથી. ઋણ સંખ્યાઓનું વર્ગમૂળ મેળવવા માટે વાસ્તવિક સંખ્યાગણનો તેનાથી મોટા ગણમાં વિસ્તાર કરવો પડે. વાસ્તવમાં ઋણ સંખ્યાઓનું વર્ગમૂળ વાસ્તવિક સંખ્યાગણમાં અસ્તિત્વ ધરાવતું નથી તે સૌથી પહેલાં ગ્રીકવાસીઓ જોઈ શક્યા હતા. ભારતીય ગણિતશાસ્ત્રી **મહાવીરે** અથવા **મહાવીરાચાર્યે** (850 A.D.) પણ તેમના ગ્રંથ **'ગણિતસાર સંગ્રહ'**માં આ મુશ્કેલીનો ઉલ્લેખ કર્યો છે. વાસ્તવિક સંખ્યાગણનો વિસ્તાર એવી રીતે થવો જોઈએ કે જેથી સરવાળો, બાદબાકી, ગુણાકાર, ભાગાકાર જેવી બૈજિક ક્રિયાઓ યોગ્ય રીતે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય અને તે મર્યાદિત ઉપગણ R માં હાલ વ્યાખ્યાયિત બૈજિક ક્રિયાઓ સાથે સુસંગત રહે. આ નવા ગણને **સંકર સંખ્યાઓનો ગણ (set of complex numbers)** કહેવાય છે અને તેને સંકેતમાં **C** વડે દર્શાવાય છે.

## 2.2 ગણ R × R અને સંકર સંખ્યા

સંકર સંખ્યાનો ગણ C મેળવવા માટે આપણે વાસ્તવિક સંખ્યાગણ R થી શરૂઆત કરીએ. R × R એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓની ક્રમયુક્ત જોડનો ગણ છે.

$\mathrm{R} \times \mathrm{R} = \{(a, b) \mid a \in \mathrm{R}, b \in \mathrm{R}\}$

આપણે R × R ના બે ઘટકોની સમાનતા તથા તેમનો સરવાળો અને ગુણાકાર વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

**(1) સમાનતા : જો $a = c$ અને $b = d$ તો R × R ના બે ઘટકો $(a, b)$ અને $(c, d)$ સમાન થાય.**

**આમ, $a = c, b = d \Rightarrow (a, b) = (c, d)$**

ઉદાહરણ તરીકે, $(1, 0) = (sin^2x + cos^2x, \log 1)$ પરંતુ, $(1, 4) \neq (4, 1)$

**(2) સરવાળો :** $R \times R$ ના બે ઘટકો $(a, b)$ અને $(c, d)$ નો સરવાળો નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરીએ છીએ :

$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

ઉદાહરણ તરીકે, $(5, 2) + (2, 3) = (5 + 2, 2 + 3) = (7, 5)$

**(3) ગુણાકાર :** $R \times R$ ના બે ઘટકો $(a, b)$ અને $(c, d)$ નો ગુણાકાર નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરીએ છીએ.

$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

ઉદાહરણ તરીકે, $(5, 2)(2, 3) = (5 \times 2 - 2 \times 3, 5 \times 3 + 2 \times 2) = (4, 19)$

**આ બધા નિયમો સાથેના ગણ $R \times R$ ને સંકર સંખ્યાઓનો ગણ કહે છે તથા તેને C વડે દર્શાવાય છે.**

**સામાન્ય રીતે આપણે સંકર સંખ્યાને $z$ વડે દર્શાવીશું.**

## 2.3 સંકર સંખ્યાઓના મૂળભૂત બૈજિક ગુણધર્મો

સરવાળા અને ગુણાકારની ક્રિયાઓ વિશે ગણ R માં સંવૃત્તતા, ક્રમ, જૂથ અને વિભાજનના ગુણધર્મોની ચર્ચા આપણે કરી ગયાં છીએ. આ ક્રિયાઓ વિશે ગણ C માં પણ આ જ ગુણધર્મો સાચા છે તે હવે આપણે જોઈશું.

સરવાળા વિશેની ક્રિયા નીચેના ગુણધર્મોનું પાલન કરે છે :

**(1) સંવૃત્તતાનો નિયમ :** બે સંકર સંખ્યાઓનો સરવાળો સંકર સંખ્યા હોય છે.

એટલે કે, $z_1 + z_2 \in C \quad \forall z_1, z_2 \in C$

આ નિયમને માટે એમ પણ કહેવાય છે કે C પર સરવાળો એ દ્વિક્ક્રિયા છે.

**(2) ક્રમનો નિયમ :** $z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \forall z_1, z_2 \in C$

**(3) જૂથનો નિયમ :** $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in C$

**(4) સરવાળા માટે એકમ સંખ્યાનું અસ્તિત્વ :** સંકર સંખ્યા $O = (0, 0)$ એવી મળે છે કે જેથી $z + O = z = O + z$ $\forall z \in C$. $O = (0, 0)$ ને સરવાળા માટેનો એકમ ઘટક કે શૂન્ય સંકર સંખ્યા કહે છે. સરવાળા માટેનો એકમ ઘટક O અનન્ય છે તેમ સાબિત કરી શકાય.

ખરેખર જો, $(a, b) + (x, y) = (a, b) \qquad \forall (a, b) \in C$

તો $a + x = a, \qquad b + y = b$

$\therefore \; x = 0, \qquad y = 0$. આમ, $(x, y) = (0, 0)$

વળી, $(a, b) + (0, 0) = (a, b)$.

**(5) સરવાળા માટે વિરોધી સંખ્યાનું અસ્તિત્વ :** પ્રત્યેક સંકર સંખ્યા $z = (a, b)$, ને સંગત સંકર સંખ્યા $(-a, -b)$ મળે કે જેથી $z + (-a, -b) = O$. આ સંકર સંખ્યા $(-a, -b)$ ને $-z$ વડે દર્શાવાય છે અને તે $z$ ની સરવાળા માટેની વિરોધી સંખ્યા છે.

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, $z + (-z) = (a, b) + (-a, -b)$

$= (a + (-a), b + (-b))$

$= (0, 0)$

$= O$ (O સરવાળા માટેની એકંમ સંખ્યા છે.)

વળી, $(-z) + z = O$

આપણે સાબિત કરી શકીએ કે **પ્રત્યેક $z \in C$ માટે તેની વિરોધી સંખ્યા $-z$ અનન્ય છે.**

**નોંધ :** $(a, b) + (x, y) = (0, 0)$ માટે $a + x = 0 = b + y$ જરૂરી છે.

$\therefore \; x = -a, y = -b$

$\therefore$ **$(-a, -b)$ એ $(a, b)$ને સંગત સરવાળા માટેની વિરોધી સંખ્યા છે.**

ગુણાકાર વિશેની ક્રિયા નીચેના ગુણધર્મોનું પાલન કરે છે :

**(1) સંવૃત્તતાનો નિયમ : બે સંકર સંખ્યાઓનો ગુણાકાર સંકર સંખ્યા હોય છે.**

એટલે કે, $z_1z_2 \in C \qquad \forall z_1, z_2 \in C$

**આમ, ગુણાકાર પણ C પર દ્વિક્ક્રિયા છે.**

**(2) ક્રમનો નિયમ : $z_1z_2 = z_2z_1 \quad \forall z_1, z_2 \in C$**

**(3) જૂથનો નિયમ : $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3) \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in C$**

**(4) ગુણાકાર માટેના એકમ ઘટકનું અસ્તિત્વ : સંકર સંખ્યા (1, 0) એવી મળે છે કે જેથી**

**$z(1, 0) = z = (1, 0)z \quad \forall z \in C$**

$z = (a, b)$ લેતાં, $z(1, 0) = (a, b)(1, 0) = (a - 0, 0 + b) = (a, b) = z$

વળી, $(1, 0)z = z$

$\therefore$ **$z(1, 0) = (1, 0)z = z$**

**(1, 0) ને ગુણાકાર માટેનો એકમ ઘટક કહે છે. ગુણાકાર માટેનો એકમ ઘટક (1, 0) અનન્ય છે.**

**નોંધ :** જો $(a, b)(x, y) = (a, b) \quad \forall (a, b) \in C$, તો

$ax - by = a$ અને $ay + bx = b, \quad \forall a, b \in R.$

વિશેષતઃ $a = 1, b = 0$ માટે $x = 1, y = 0.$

આમ, $(a, b)(1, 0) = (a, b) \quad \forall (a, b) \in C.$

**(5) ગુણાકાર માટેની વ્યસ્ત સંખ્યાનું અસ્તિત્વ : શૂન્યેતર સંકર સંખ્યા $z = (a, b)$ ને સંગત સંકર સંખ્યા $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ મળે કે જેથી $z\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = (1, 0)$. સંકર સંખ્યા $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ ને $z^{-1}$ વડે દર્શાવાય છે અને તેને $z$ ની વ્યસ્ત સંખ્યા કહેવાય છે.**

((1, 0) એ ગુણાકાર માટેનો એકમ ઘટક છે.).

$(a, b) \neq (0, 0)$ હોવાથી $a^2 + b^2 \neq 0$. તેથી $z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) \in C$ અને

$$z \cdot z^{-1} = (a, b)\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

$$= \left(a \cdot \frac{a}{a^2+b^2} - b \cdot \frac{-b}{a^2+b^2}, a \cdot \frac{-b}{a^2+b^2} + b \cdot \frac{a}{a^2+b^2}\right)$$

$$= \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab+ab}{a^2+b^2}\right) = (1, 0)$$

વળી, $z^{-1} \cdot z = (1, 0)$

અહીં નોંધીએ કે પ્રત્યેક શૂન્યેતર સંકર સંખ્યા $z \in C$ માટે તેનો વ્યસ્ત અનન્ય છે. $z^{-1}$ ને $\frac{1}{z}$ વડે પણ દર્શાવાય છે.

**નોંધ :** ધારો કે $z'$ એવી સંકર સંખ્યા છે કે જેથી $zz' = (1, 0)$

ધારો કે $z' = (x, y)$

$\therefore \quad zz' = (a, b)(x, y) = (1, 0)$

$\therefore \quad (ax - by, ay + bx) = (1, 0)$

$\therefore \quad ax - by = 1, ay + bx = 0$

આ સમીકરણો ઉકેલતાં $x = \frac{a}{a^2+b^2}, y = \frac{-b}{a^2+b^2}$

$\therefore \quad z' = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

$\therefore \quad z = (a, b) \neq (0, 0)$ હોવાથી $a^2 + b^2 \neq 0$.

$\therefore \quad z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

ગુણાકાર માટેની વ્યસ્ત સંખ્યાઓના અસ્તિત્વ પરથી ફલિત કરી શકાય કે જો $z_1z_2 = 0$ તો $z_1 = 0$ અથવા $z_2 = 0$. (ચકાસો !)

**(6) વિભાજનનો નિયમ : કોઈ પણ ત્રણ સંકર સંખ્યાઓ $z_1, z_2, z_3$ માટે**

**(a)** $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$

**(b)** $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$

## 2.4 C ના ઉપગણ તરીકે R

વ્યાખ્યા પરથી પ્રત્યેક સંકર સંખ્યા એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓની એક ક્રમયુક્ત જોડ છે. જે સંકર સંખ્યા $(a, b)$ માં $b = 0$ હોય તેવી સંકર સંખ્યાઓના ગણને R' વડે દર્શાવીએ. આમ, $R' = \{(a, 0) \mid a \in R\}$. સ્પષ્ટ છે કે $R' \subset C$. R' ના કોઈ પણ બે ઘટકો $(a, 0)$ અને $(b, 0)$ માટે,

**(1)** $(a, 0) = (b, 0) \Leftrightarrow a = b$

**(2)** $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \in R'$

**(3)** $(a, 0)(b, 0) = (ab, 0) \in R'$

આમ, R' ની કોઈ પણ બે સંકર સંખ્યાઓનો સરવાળો અને ગુણાકાર R' માં જ છે. વળી, R' ની બે સંખ્યાઓ $(a, 0)$ અને $(b, 0)$ નો સરવાળો કે ગુણાકાર કરવામાં વાસ્તવિક રીતે તો બે ક્રમયુક્ત જોડની પ્રથમ સંખ્યાઓ $a$ અને $b$ નો જ સરવાળો કે ગુણાકાર કરવાનો રહે છે. ક્રમયુક્ત જોડની બીજી સંખ્યા તો શૂન્ય જ રહે છે. ખરેખર, C ની માફક R' માં પણ સરવાળો તથા ગુણાકાર માટે સંવૃત્તતાના નિયમનું પાલન થાય છે. $(a, 0)$ પ્રકારની સંકર સંખ્યા ખરેખર તો વાસ્તવિક સંખ્યાની જેમ જ વર્તે છે. તેથી આપણે $(a, 0)$ ને $a$ ની સાથે સંગત કરીશું અને $(a, 0) = a$ લખીશું. $(4, 0) = 4$, $(0, 0) = 0$ વગેરે. આ પ્રકારે આપણે દરેક વાસ્તવિક સંખ્યા $a$ ને સંકર સંખ્યા $(a, 0)$ તરીકે જોઈ શકીએ. તેથી આપણે R' ને R તરીકે ઓળખી શકીએ તથા $R' = R \subset C$. આમ હવે **$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$**. હવે, $(0, 0) = 0$, સરવાળા માટે તટસ્થ ઘટક, $(1, 0) = 1$ ગુણાકાર માટે તટસ્થ ઘટક મળે.

## 2.5 સંકર સંખ્યાનું $a + ib$ સ્વરૂપમાં નિરૂપણ

$(a, 0)$ ને $a$ તરીકે લખવાથી આપણે કોઈ પણ સંકર સંખ્યા $(a, b)$ ને એક અન્ય સ્વરૂપમાં દર્શાવીશું.

પ્રથમ આપણે એક મહત્ત્વની સંકર સંખ્યા $(0, 1)$ નો પરિચય મેળવીએ. તેને આપણે સંકેતમાં $i$ વડે દર્શાવીશું. આમ, સંકર સંખ્યા $i = (0, 1)$.

હવે, $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$. ઈ.સ. 1737 માં **ઓઈલરે (Euler)** પ્રથમ વખત સંકેત $i$ રજૂ કર્યો, જ્યાં $i^2 = -1$. $i = (0, 1)$ ને **કાલ્પનિક સંખ્યા (Imaginary number)** કહે છે.

હવે, $(a, b) = (a, 0) + (0, b)$

$= (a, 0) + (0, 1)(b, 0) \qquad ((0, 1)(b, 0) = (0 - 0, 0 + b) = (0, b))$

$= a + ib$

$\therefore \quad (a, b) = a + ib$

**આમ, પ્રત્યેક સંકર સંખ્યા $(a, b)$ ને $a + ib$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય છે, જ્યાં $a, b \in R$ અને $i^2 = -1$.**

$\therefore \quad \mathbf{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbf{R}\}$

ગુણાકાર વિશેના ક્રમના નિયમ પરથી, $ib = bi$.

$\therefore \quad a + ib$ ને $a + bi$ તરીકે પણ લખી શકાય.

ઉદાહરણ તરીકે, $(3, 5) = 3 + 5i$, $(0, 7) = 0 + 7i$, $(5, 0) = 5 + 0i = 5$

સંકર સંખ્યા $z = a + bi$ માં $a$ ને $z$નો **વાસ્તવિક ભાગ (real part)** કહે છે. તેને સંકેતમાં $Re(z)$ વડે દર્શાવાય છે. $b$ ને $z$ નો **કાલ્પનિક ભાગ (imaginary part)** કહે છે. તેને સંકેતમાં $Im(z)$ વડે દર્શાવાય છે.

આમ, $z = a + ib = Re(z) + iIm(z)$. ઉદાહરણ તરીકે જો $z = 3 + 2i$, તો $Re(z) = 3$ અને $Im(z) = 2$.

આપણે નોંધીએ કે સંકર સંખ્યા $z$ નો વાસ્તવિક અને કાલ્પનિક ભાગ એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ જ છે.

જો કોઈ સંકર સંખ્યાનો વાસ્તવિક ભાગ શૂન્ય હોય અને કાલ્પનિક ભાગ શૂન્ય ન હોય, તો તે સંકર સંખ્યાને **શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા (purely imaginary number)** કહેવાય છે. ઉદાહરણ તરીકે, $9i = 0 + 9i$ એ શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા છે.

હવે સંકર સંખ્યાઓ $a + bi$ સ્વરૂપમાં હોય ત્યારે બૈજિક ક્રિયાઓની ચર્ચા કરીએ.

**બે સંકર સંખ્યાઓની સમાનતા :**

બે સંકર સંખ્યાઓ $z_1 = a + bi$ અને $z_2 = c + di$ સમાન હોય એટલે કે $(a, b) = (c, d)$ તો $a = c$ તથા $b = d$.

**જો $z = a + bi = 0 + 0i$ એટલે કે $(0, 0)$ હોય, તો $a = 0$ તથા $b = 0$.**

**ઉદાહરણ 1 :** જો $3x + (3x - y)i = 4 + (-6)i$, જ્યાં $x, y \in \mathbf{R}$ તો $x$ અને $y$ શોધો.

**ઉકેલ :** અહીં $3x + (3x - y)i = 4 + (-6)i$. જો $a + bi = c + di$ તો $a = c$ તથા $b = d$.

આથી $3x = 4$, $3x - y = -6$. સમીકરણો ઉકેલતાં, $x = \frac{4}{3}$, $y = 10$.

**બે સંકર સંખ્યાઓનો સરવાળો :**

ધારો કે $z_1 = a + bi$ તથા $z_2 = c + di$ બે સંકર સંખ્યાઓ છે. $z_1 = (a, b)$ અને $z_2 = (c, d)$ વચ્ચેનો સરવાળો નીચે પ્રમાણે મળશે :

$$z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = a + c + (b + d)i$$

ઉદાહરણ તરીકે, $(2 + 2\sqrt{2}\,i) + (-3 + \sqrt{2}\,i) = (2 - 3) + (2\sqrt{2} + \sqrt{2})i$

$= -1 + 3\sqrt{2}\,i$

**બે સંકર સંખ્યાઓનો તફાવત :**

ધારો કે $z_1$ અને $z_2$ બે સંકર સંખ્યાઓ છે. તેમનો તફાવત $z_1 - z_2$ નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થાય છે :

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

ધારો કે, $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d)$

$\therefore \quad -z_2 = (-c, -d)$

$$\begin{aligned}\therefore \quad z_1 - z_2 &= z_1 + (-z_2)\\ &= (a, b) + (-c, -d)\\ &= (a - c, b - d)\\ &= (a - c) + (b - d)i\end{aligned}$$

ઉદાહરણ તરીકે, $(2 + \sqrt{3}i) - (-3 + 2\sqrt{3}i) = 2 - (-3) + (\sqrt{3} - 2\sqrt{3})\,i$

$= 5 - \sqrt{3}i$

**બે સંકર સંખ્યાઓનો ગુણાકાર :**

ધારો કે $z_1 = a + bi$ અને $z_2 = c + di$ બે સંકર સંખ્યાઓ છે.

$z_1 = (a, b), z_2 = (c, d)$

$\therefore \quad z_1 z_2 = (ac - bd, ad + bc)$

$\therefore \quad \boldsymbol{z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i}$

ઉદાહરણ તરીકે, $(2 + \sqrt{3}i)(-3 + \sqrt{3}i) = (2 \times (-3) - \sqrt{3}\sqrt{3}) + (2\sqrt{3} + \sqrt{3} \times (-3))i$

$$= (-6 - 3) + (2\sqrt{3} - 3\sqrt{3})i = -9 - \sqrt{3}i$$

વિભાજનનો નિયમ તથા જૂથનો નિયમ હોવાથી આપણે બે કૌંસનો ગુણાકાર કરી સાદું રૂપ આપી શકીએ.

**બે સંકર સંખ્યાઓનો ભાગાકાર :**

ધારો કે $z_1$ અને $z_2$ બે સંકર સંખ્યાઓ છે, જ્યાં $z_2 \neq 0$. તેમનો ભાગાકાર $\frac{z_1}{z_2}$ નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થાય છે :

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = z_1 \frac{1}{z_2}$$

ખરેખર, $\frac{1}{z} = z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}$

ઉદાહરણ તરીકે, $\frac{6+3i}{10+8i} = (6 + 3i)(10 + 8i)^{-1}$

$$= (6 + 3i)\frac{(10 - 8i)}{164}$$

$$= \frac{60 + 30i - 48i - 24i^2}{164}$$

$$= \frac{84 - 18i}{164} \qquad (i^2 = -1)$$

$$= \frac{21}{41} + \frac{(-9)}{82}i$$

***i* ના ઘાતાંકો**

સંકર સંખ્યાઓના પૂર્ણાંક ઘાતાંકો માટે આપણે ઘાતાંકના નિયમો સત્ય છે તે સ્વીકારી લઈશું.

આપણે જાણીએ છીએ કે $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 i = -i$, $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$ વગેરે.

યાદ રાખો, $\boldsymbol{i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1}$

વળી, $i^{-1} = \frac{1}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{-1} = -i$, $i^{-2} = -1$, $i^{-3} = i$, $i^{-4} = 1$ વગેરે.

વ્યાપક રીતે, કોઈ પણ પૂર્ણાંક $k$ માટે, $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$

ગણિતમાં **ત્રિવિધ** વિકલ્પના નિયમ (law of trichotomy) પ્રમાણે બે વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટે $x < y$, $x = y$ અથવા $x > y$ પૈકી એક અને માત્ર એક જ વિકલ્પ શક્ય છે. આ ત્રિવિધ વિકલ્પનો નિયમ કોઈ પણ બે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની સરખામણી કરવા માટેનો છે. આ નિયમ સંકર સંખ્યાઓ માટે સાચો નથી. C માં ક્રમ નથી.

**ઉદાહરણ 2 :** કિંમત શોધો : (i) $\left[i^{19} + \left(\frac{1}{i}\right)^{25}\right]^2$ (ii) $i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + ... + i^{1000}$

**ઉકેલ : (i)** $\left[i^{19} + \left(\frac{1}{i}\right)^{25}\right]^2 = \left[i^{16} i^3 + \left(\frac{1}{i}\right)^{24}\left(\frac{1}{i}\right)\right]^2$

$$= (-i - i)^2 = (-2i)^2 = -4$$

**(ii)** $i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + ... + i^{997} + i^{998} + i^{999} + i^{1000}$

$= (i - 1 - i + 1) + (i - 1 - i + 1) + ... + (i - 1 - i + 1)$ (250 કૌંસ સુધી)

$= 0 + 0 + ... + 0 = 0$

**સંકર સંખ્યાની અનુબદ્ધ સંખ્યા :**

જો $z = (a, b) = a + bi$ તો તેની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા $a - bi = (a, -b)$ તરીકે વ્યાખ્યાયિત થાય છે. તેને સંકેતમાં $\bar{z}$ વડે દર્શાવાય છે.

આપણે નોંધીએ કે $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2$. આમ, કરણીની માફક $\bar{z}$ એ સંમેયકારક અવયવની જેમ વર્તે છે. $z\bar{z} = a^2 + b^2$ વાસ્તવિક સંખ્યા હોવાથી આપણે સંકર સંખ્યા $\frac{p}{q}$ ને $\frac{p\bar{q}}{q\bar{q}}$ તરીકે દર્શાવી શકીએ. આમ કરવાથી છેદ $q\bar{q}$ વાસ્તવિક સંખ્યા બને. ચાલો આપણે આ સંકલ્પનાને કેટલાંક ઉદાહરણો દ્વારા સમજીએ.

**ઉદાહરણ 3 :** નીચેની સંખ્યાઓને $a + ib$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો, $a, b \in R$

(1) $\frac{(2-8i)(7+8i)}{1+i}$ (2) $(3 + 4i)^{-1}$ (3) $\frac{(1+i)^3}{4+3i}$ (4) $\frac{1}{1+\cos\theta - i\sin\theta}$

**ઉકેલ :** (1) $\frac{(2-8i)(7+8i)}{1+i} = \frac{14+16i-56i-64i^2}{1+i}$

$= \frac{14-40i+64}{1+i}$ $(i^2 = -1)$

$= \frac{78-40i}{1+i}$

$= \frac{78-40i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i}$ (1 + $i$ ની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા વડે ગુણતાં અને ભાગતાં)

$= \frac{78-78i-40i+40i^2}{1-i^2}$

$= \frac{38-118i}{2}$

$= 19 - 59i$

(2) $(3 + 4i)^{-1} = \frac{1}{3+4i} = \frac{1}{3+4i} \times \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{3-4i}{9+16} = \frac{3}{25} + i\left(-\frac{4}{25}\right)$

અથવા સીધી રીતે, $(3 + 4i)^{-1} = \frac{3-4i}{3^2+4^2} = \frac{3-4i}{25} = \frac{3}{25} - \frac{4i}{25}$ ($z^{-1}$નું સૂત્ર)

(3) $\frac{(1+i)^3}{4+3i} = \frac{1^3+3\cdot1^2\cdot i+3\cdot1\cdot i^2+i^3}{4+3i}$

$= \frac{1+3i-3-i}{4+3i}$

$= \frac{-2+2i}{4+3i}$

$= \frac{(-2+2i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}$

$= \frac{-8+8i+6i-6i^2}{16+9}$

$= -\frac{2}{25} + \frac{14}{25}i$ $(i^2 = -1)$

(4) $\frac{1}{1+\cos\theta - i\sin\theta} = \frac{1}{1+\cos\theta - i\sin\theta} \times \frac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{1+\cos\theta + i\sin\theta}$

$= \frac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}$

$= \frac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{1+\cos^2\theta + 2\cos\theta + \sin^2\theta}$

$= \frac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{2+2\cos\theta}$

$= \frac{1+\cos\theta}{2(1+\cos\theta)} + i\,\frac{\sin\theta}{2(1+\cos\theta)}$

$= \frac{1}{2} + i\,\frac{\sin\theta}{2(1+\cos\theta)}$

**નોંધ :** પ્રકરણ 5 શીખ્યા પછી તમે $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}$ લખી શકશો.

**ઉદાહરણ 4 :** નીચેનાં સમીકરણોમાંથી $x, y \in R$ શોધો :

(1) $\frac{(1+i)x - 2i}{3+i} + \frac{(2-3i)y + i}{3-i} = i$ (2) $\frac{iy}{ix+1} - \frac{3y+4i}{3x+y} = 0$

**ઉકેલ :** (1) $\frac{(1+i)x - 2i}{3+i} + \frac{(2-3i)y + i}{3-i} = i$

$\therefore$ $[x + (x-2)i](3-i) + [2y + (1-3y)i](3+i) = (3+i)(3-i)i$

(બંને બાજુએ $(3 + i)(3 - i)$ વડે ગુણતાં)

$\therefore$ $3x + (x-2) + [3(x-2) - x]i + 6y - (1-3y) + [2y + 3(1-3y)]i = (9+1)i$

$\therefore$ $(4x + 9y - 3) + (2x - 7y - 3)i = 10i$

$\therefore$ $4x + 9y - 3 = 0$ અને $2x - 7y - 3 = 10$ (સંકર સંખ્યાઓની સમાનતા)

$\therefore$ $4x + 9y - 3 = 0$ અને $2x - 7y - 13 = 0$

ઉપરની સમીકરણ સંહતિને ઉકેલતાં, $x = 3, y = -1$

(2) $\frac{iy}{ix+1} - \frac{3y+4i}{3x+y} = 0$

$\therefore$ $iy(3x+y) - (3y+4i)(ix+1) = 0$ (બંને બાજુ $(ix + 1)(3x + y)$ વડે ગુણતાં)

$\therefore$ $(-3y + 4x) + i(3xy + y^2 - 3xy - 4) = 0 + i0$

$\therefore$ $(-3y + 4x) + i(y^2 - 4) = 0 + i0$

$\therefore$ $-3y + 4x = 0$ અને $y^2 - 4 = 0$ ($a + bi = 0 \Rightarrow a = 0, b = 0$)

$y^2 - 4 = 0$ પરથી $y = \pm 2$.

$y = 2$ માટે $x = \frac{3}{2}$ તથા $y = -2$ માટે $x = -\frac{3}{2}$.

$\therefore$ ઉકેલગણ $\left\{\left(\frac{3}{2}, 2\right), \left(-\frac{3}{2}, -2\right)\right\}$ છે.

## સ્વાધ્યાય 2.1

**1.** નીચેની સંકર સંખ્યાઓને $a + bi$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો :

(1) $(\sqrt{2} - i) - i(1 - \sqrt{2}i)$ (2) $(2 - 3i)(-2 + i)$

(3) $(3 + i)(3 - i)\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}i\right)$ (4) $\frac{4+i}{2-3i}$ ($(2 - 3i)^{-1}$નો ઉપયોગ કરીને)

(5) $\frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i}$

(6) $\frac{5i}{(1-i)(2-i)(3-i)}$

(7) $(1 - i)^4$

(8) $\left[i^{17} - \left(\frac{1}{i}\right)^{34}\right]^2$

(9) $\left(\frac{4i^3 - 1}{2i + 1}\right)^2$

(10) $\frac{(3+\sqrt{5}i)(3-\sqrt{5}i)}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)-(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)}$

**2.** નીચેનાં સમીકરણોમાંથી $x, y \in R$ શોધો :

(1) $x + 4yi = xi + y + 3$

(2) $(4 + 5i)x + (3 - 2i)y + i^2 + 6i = 0$

(3) $\frac{x}{1-i} + \frac{y}{1+i} = 1 + 3i$

(4) $(x^4 + 2xi) - (3x^2 + yi) = (3 - 5i) + (1 + 2yi)$

(5) $(3x - 2yi)(2 + i)^2 = 10(1 + i)$

**3.** નીચેની સંકર સંખ્યાઓની વ્યસ્ત સંકર સંખ્યા મેળવો :

(1) $3 - 2i$ (2) $-1 + i\sqrt{3}$ (3) $\frac{4+3i}{5-3i}$ (4) $(2 - 3i)^2$ (5) $-i$

**4.** બતાવો કે, (1) $Re(iz) = -Im(z)$ (2) $Im(iz) = Re(z)$

**5.** ચકાસો કે સંકર સંખ્યાઓ $z = 1 \pm i$ એ સમીકરણ $z^2 - 2z + 2 = 0$ નો ઉકેલ છે.

*

## 2.6 અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા તથા સંકર સંખ્યાનો માનાંક

**અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા :** આપણે જાણીએ છીએ કે જો $z = a + bi$ તો $\bar{z} = a - bi$.

ઉદાહરણ તરીકે,

(1) જો $z = 3 + 5i$ તો $\bar{z} = 3 - 5i$

(2) જો $z = 5 - 3i$ તો $\bar{z} = 5 + 3i$

(3) જો $z = 3 = 3 + 0i$ તો $\bar{z} = 3 - 0i = 3$

(4) જો $z = 3i = 0 + 3i$ તો $\bar{z} = 0 - 3i = -3i$

અનુબદ્ધ સંખ્યાઓનાં કેટલાંક મૂળભૂત પરિણામો નોંધીએ.

કોઈ પણ ત્રણ સંકર સંખ્યાઓ $z, z_1, z_2$ નીચેના ગુણધર્મો અસ્તિત્વ ધરાવે છે :

**(1)** $\overline{(\bar{z})} = z$

**(2)** $\frac{z+\bar{z}}{2} = Re(z)$

**(3)** $\frac{z-\bar{z}}{2i} = Im(z)$

**(4)** $z = \bar{z} \Leftrightarrow z$ **એ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.**

**(5)** $\bar{z} = -z \Leftrightarrow z$ **એ શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા છે.**

**(6)** $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

**(7)** $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

**(8)** $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, **જ્યાં** $z_2 \neq 0$

ઉપરના ગુણધર્મોની સાબિતી સરળ છે. ચાલો, આપણે કેટલાક ગુણધર્મો સાબિત કરીએ :

ધારો કે $z = a + ib$

(1) $\bar{z} = a - ib$

$\therefore \quad \overline{(\bar{z})} = \overline{a - ib} = a + ib = z$

(2) $z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2Re(z)$ $(a = Re(z))$

$\therefore \quad \frac{z+\bar{z}}{2} = Re(z)$

(3) $z - \bar{z} = a + ib - a + ib = 2ib = 2i\, Im(z)$ $(b = Im(z))$

$\therefore \quad \frac{z-\bar{z}}{2i} = Im(z)$

(4) $z = \bar{z} \Leftrightarrow a + ib = a - ib \Leftrightarrow b = -b \Leftrightarrow 2b = 0 \Leftrightarrow b = 0.$

આમ, $z = \bar{z} \Leftrightarrow z$ એ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

**સંકર સંખ્યાનો માનાંક :**

સંકર સંખ્યા $z = a + ib$ નો માનાંક, નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત થાય છે :

**$z$ નો માનાંક = $\sqrt{a^2+b^2}$.** $z$ ના માનાંક માટેનો સંકેત $|z|$ છે.

$\therefore \quad |z| = \sqrt{a^2+b^2}$, જ્યાં $z = a + bi$

આપણે નોંધીએ કે, $|z|$ એ વાસ્તવિક સંખ્યા છે અને $|z| \geq 0 \quad \forall z \in C$.

ઉદાહરણ તરીકે, જો $z = 3 + 4i$ હોય તો,

$|z| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

જો $z$ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય (એટલે કે $z = a + 0i$ ) તો, $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$ જ્યાં $z$ નો માનાંક $|z|$ એ સંકર સંખ્યાનો માનાંક છે અને $a$ નો માનાંક $|a|$ એ વાસ્તવિક સંખ્યાનો માનાંક છે. (આપણે જાણીએ છીએ કે કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા $a$ માટે $\sqrt{a^2} = |a|$).

**સંકર સંખ્યાના માનાંકના ગુણધર્મો :**

**(1)** $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

**(2)** $|z| \geq |Re(z)|, |z| \geq |Im(z)|$

**(3)** $z\bar{z} = |z|^2$

**(4)** $|z| = |\bar{z}|$

**(5)** $|z| = |-z|$

**(6)** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$, **જ્યાં** $z_2 \neq 0$

**(7)** $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$

**(8)** $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, **જ્યાં** $z_2 \neq 0$

**(9)** $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ **(ત્રિકોણીય અસમતા) (શા માટે ત્રિકોણીય ?)**

**(10)** $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

ચાલો આપણે ઉપરના પૈકી કેટલાક ગુણધર્મો ચકાસીએ :

(1) $|z| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ તથા $b = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(2) $|z|^2 = a^2 + b^2 = (Re(z))^2 + (Im(z))^2 \geq (Re(z))^2$

$\therefore \quad |z| \geq |Re(z)|$. તે જ રીતે $|z| \geq |Im(z)|$

(3) $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$

(4) $|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2+b^2}$ અને $|\bar{z}| = |a - bi| = \sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$.

તેથી $|z| = |\bar{z}|$.

(7) $|z_1z_2|^2 = (z_1z_2)(\overline{z_1z_2})$

$= (z_1z_2)(\overline{z_1}\,\overline{z_2})$

$= (z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2})$

$= |z_1|^2 |z_2|^2$

$\therefore \quad |z_1z_2| = |z_1||z_2|$

(9) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2})$

$= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}}$ $\qquad (\overline{z_1\overline{z_2}} = \overline{z_1}\,\overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1}z_2)$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re\,(z_1\overline{z_2})$

$\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||\overline{z_2}|$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|$

$= (|z_1| + |z_2|)^2$

$\therefore \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(10) $z_1 - z_2 + z_2 = z_1$

$\therefore \quad |z_1 - z_2 + z_2| = |z_1| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$

$\therefore \quad |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$

તે જ રીતે, $|z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1| = |z_1 - z_2|$

પરંતુ, $|z_1| - |z_2|$ અથવા $|z_2| - |z_1| = \big||z_1| - |z_2|\big|$. $\qquad$ **(જો $a \in$ R તો $|a| = a$ or $-a$)**

$\therefore \quad \big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$ એટલે કે $|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$.

**ઉદાહરણ 5 :** નીચેની સંખ્યાઓની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા તથા માનાંક શોધો : (1) $(2 - 3i)^2$ (2) $\frac{-3+7i}{1+i}$

**ઉકેલ :** (1) $(2 - 3i)^2 = 4 - 12i - 9 = -5 - 12i$

$\therefore \quad (2 - 3i)^2$ ની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા $-5 + 12i$ છે અને

$|(2 - 3i)^2| = |2 - 3i|^2 = 4 + 9 = 13$

(2) ધારો કે $z = \frac{-3+7i}{1+i}$

$= \frac{-3+7i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i}$

$= \frac{-3+3i+7i+7}{1-i^2}$ $\qquad$ **($i^2 = -1$)**

$= \frac{4+10i}{2} = 2 + 5i$

$\therefore \quad \overline{z} = 2 - 5i$ અને $|z| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$

**અથવા** $|z| = \frac{|-3+7i|}{|1+i|} = \frac{\sqrt{49+9}}{\sqrt{2}} = \sqrt{29}$

**ઉદાહરણ 6 :** જો $z = x + yi$ અને $| 3z | = | z - 4 |$, તો સાબિત કરો કે $x^2 + y^2 + x = 2$

**ઉકેલ :** અહીં $| 3z | = | z - 4 |$

$\therefore \quad | 3x + 3yi | = | (x - 4) + yi |$

$\therefore \quad 3\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$

$\therefore \quad 9(x^2 + y^2) = (x - 4)^2 + y^2$

$\therefore \quad 9x^2 + 9y^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2$

$\therefore \quad 8x^2 + 8x + 8y^2 = 16$

$\therefore \quad x^2 + y^2 + x = 2$

**ઉદાહરણ 7 :** જો $z_1 = 3 + 4i$ અને $z_2 = 12 - 5i$ તો ચકાસો કે

(1) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ (2) $| z_1 + z_2 | < | z_1 | + | z_2 |$ (3) $| z_1 z_2 | = | z_1 | \, | z_2 |$

અહીં, $z_1 = 3 + 4i$ અને $z_2 = 12 - 5i$

(1) $z_1 z_2 = (3 + 4i)(12 - 5i) = 36 - 15i + 48i - 20i^2$

$= 36 - 15i + 48i + 20$

$= 56 + 33i$

$\therefore \quad \overline{z_1 z_2} = 56 - 33i$

હવે, $\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (3 - 4i)(12 + 5i) = 36 - 48i + 15i - 20i^2 = 56 - 33i$

આમ, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ ચકાસી શકાય છે.

(2) $z_1 + z_2 = 3 + 4i + 12 - 5i = 15 - i$

$\therefore \quad | z_1 + z_2 | = \sqrt{225 + 1} = \sqrt{226}$

વળી, $| z_1 | = \sqrt{9 + 16} = 5$, $| z_2 | = \sqrt{144 + 25} = 13$

આમ, $| z_1 | + | z_2 | = 5 + 13 = 18 = \sqrt{324}$

સ્પષ્ટ છે કે $\sqrt{226} < \sqrt{324}$

આમ, $| z_1 + z_2 | < | z_1 | + | z_2 |$ ચકાસી શકાય છે.

(3) $| z_1 z_2 | = \sqrt{56^2 + 33^2} = \sqrt{3136 + 1089} = \sqrt{4225} = 65$ **((1) પરથી)**

વળી, $| z_1 | \, | z_2 | = 5 \cdot 13 = 65$

આમ, $| z_1 z_2 | = | z_1 | \, | z_2 |$ ચકાસી શકાય છે.

**ઉદાહરણ 8 :** (1) જો $z \in C$ અને $| z + 3 | \le 8$, તો $| z - 2 |$ ની મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ કિંમતો શોધો.

(2) જો $z \in C$ અને $| z - 4 | \le 4$, તો $| z + 1 |$ ની મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ કિંમતો શોધો.

**ઉકેલ :** (1) અહીં $| z + 3 | \le 8$

$| z - 2 | = | (z + 3) - 5 | \le | z + 3 | + | -5 |$ **(ત્રિકોણીય અસમતા)**

$\le 8 + 5 = 13$

$\therefore \quad | z - 2 | \le 13$

જો આપણે $z = -11$ લઈએ, તો $|z + 3| = |-11 + 3| = 8$ અને $|z - 2| = 13$

$\therefore$ $|z + 3| \le 8$ શરતને આધીન $|z - 2|$ની મહત્તમ કિંમત 13 થાય. ($z = -11$ માટે)

હવે, $|z - 2| \ge 0$ એ હંમેશાં સત્ય છે.

$z = 2$ માટે $|z + 3| \le 8$ સત્ય છે અને $|z - 2| = 0$.

$|z + 3| \le 8$ શરતને આધીન $|z - 2|$ ની ન્યૂનતમ કિંમત 0 થાય. ($z = 2$ માટે)

(2) અહીં $|z - 4| \le 4$

$$|z + 1| = |(z - 4) + 5| \le |z - 4| + |5| \le 4 + 5 = 9 \quad \text{(ત્રિકોણીય અસમતા)}$$

$$\therefore \quad |z + 1| \le 9$$

જો આપણે $z = 8$ લઈએ, તો $|z - 4| = 4$ અને $|z + 1| = 9$.

$\therefore$ $|z - 4| \le 4$ શરતને આધીન $|z + 1|$ની મહત્તમ કિંમત 9 છે. ($z = 8$ માટે)

હવે, $|z + 1| \ge 0$. જો આપણે $z = -1$ લઈએ તો $|z + 1| = 0$ થાય.

પરંતુ $|z - 4| = |-1 - 4| = 5 \nleq 4$.

આમ, $z = -1$ માટે $|z - 4| \le 4$ શરતનું પાલન થતું નથી.

હવે, $|z + 1| = |(z - 4) + 5| = |(z - 4) - (-5)| \ge ||z - 4| - |-5||$

$(|z_1 - z_2| \ge ||z_1| - |z_2||)$

$$\ge 5 - 4 = 1$$

$\therefore$ $|z + 1| \ge 1$

જો આપણે $z = 0$ લઈએ, તો $|z - 4| = 4$ અને $|z + 1| = 1$.

$\therefore$ $|z - 4| \le 4$ શરતને આધીન $|z + 1|$ની ન્યૂનતમ કિંમત 1 થાય. ($z = 0$ માટે)

**ઉદાહરણ 9 :** $z \in C$ માટે $\frac{z-1}{z+1}$ $(z \ne -1)$ એ શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા હોય તો બતાવો કે, $|z| = 1$.

**ઉકેલ :** ધારો કે $z = x + iy$.

$$\therefore \quad \frac{z-1}{z+1} = \frac{x+iy-1}{x+iy+1} = \frac{(x-1)+iy}{(x+1)+iy} \times \frac{(x+1)-iy}{(x+1)-iy} = \frac{(x^2+y^2-1)+2iy}{(x+1)^2+y^2}$$

$\frac{z-1}{z+1}$ શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા હોવાથી, $Re\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = 0$.

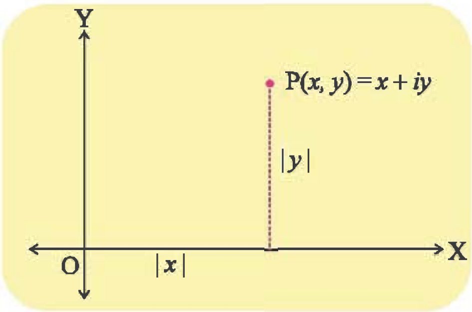
$$\therefore \quad \frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2} = 0$$

$$\therefore \quad x^2 + y^2 = 1$$

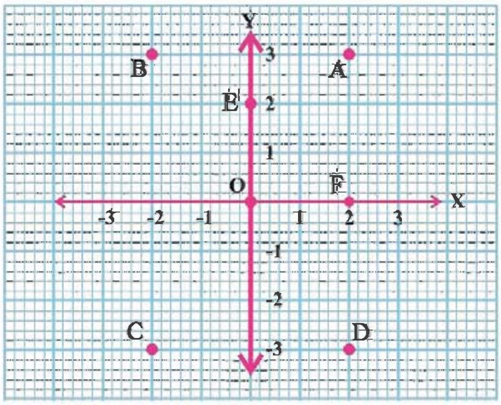
$\therefore$ $|z| = 1$. $\left(|z| = \sqrt{x^2+y^2}\right)$

## 2.7 આર્ગન્ડ આકૃતિ અને ધ્રુવીય સ્વરૂપ

ઐતિહાસિક રીતે જોતાં સંકર સંખ્યાનું સમતલના બિંદુ તરીકેનું ભૌમિતિક નિરૂપણ ઉપયોગી છે, કારણ કે સંકર સંખ્યાને $R^2$ માં ક્રમયુક્ત જોડ તરીકે દર્શાવવાથી તેની સાથે ભૂમિતિની સંકલ્પનાને જોડી શકાય છે. આપણે જાણીએ છીએ કે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની ક્રમયુક્ત જોડ અને XY-સમતલનાં બિંદુઓ વચ્ચે એક-એક સંગતતા છે. સંકર સંખ્યા $x + iy$ ને સંગત ક્રમયુક્ત જોડ $(x, y)$ ને XY-સમતલના અનન્ય બિંદુ $P(x, y)$ તરીકે ભૌમિતિક રીતે દર્શાવી શકાય તેમજ XY-સમતલના બિંદુ $P(x, y)$ ને સંગત અનન્ય સંકર સંખ્યા $x + iy$ મળે. (જુઓ આકૃતિ 2.1.)




આકૃતિ 2.1



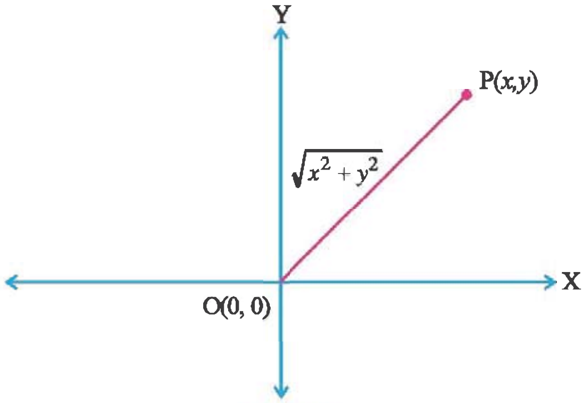

આકૃતિ 2.2

સંકર સંખ્યાઓ જેવી કે $2 + 3i$, $-2 + 3i$, $-2 - 3i$, $2 - 3i$, $0 + 2i$, $2 + i0$ એટલે કે ક્રમયુક્ત જોડ (2, 3), (−2, 3), (−2, −3), (2, −3), (0, 2), (2, 0) ને સંગત બિંદુઓ અનુક્રમે A, B, C, D, E, F આકૃતિ 2.2 માં દર્શાવેલ છે.

યામ સમતલના પ્રત્યેક બિંદુને અનન્ય સંકર સંખ્યા સાથે સંગત કરી શકાય છે અને તેને **સંકર સમતલ (Complex plane) અથવા આર્ગન્ડ સમતલ (Argand plane)** કહેવાય છે. X-અક્ષ પરના બિંદુઓને સંગત સંકર સંખ્યા $a + i0$ (વાસ્તવિક સંખ્યા) સ્વરૂપમાં હોય છે અને Y-અક્ષ પરનાં બિંદુઓને સંગત સંકર સંખ્યા $0 + ib$ (શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા) સ્વરૂપમાં હોય છે. આર્ગન્ડ સમતલમાં X-અક્ષ અને Y-અક્ષને અનુક્રમે વાસ્તવિક અક્ષ તથા કાલ્પનિક અક્ષ કહેવાય છે.

(**જેન રોબર્ટ આર્ગન્ડ (Jean-Robert Argand)** (1768 - 1822) એક પ્રતિભાશાળી ગણિતજ્ઞ હતો. 1806 માં જ્યારે તે પૅરિસમાં એક પુસ્તકની દુકાન સંભાળતો હતો ત્યારે તેણે સંકર સંખ્યાઓના ભૌમિતિક નિરૂપણનો ખ્યાલ આપ્યો. તે નિરૂપણને આપણે આર્ગન્ડ આકૃતિ તરીકે ઓળખીએ છીએ.)

### સંકર સંખ્યાના માનાંકનું ભૌમિતિક નિરૂપણ :

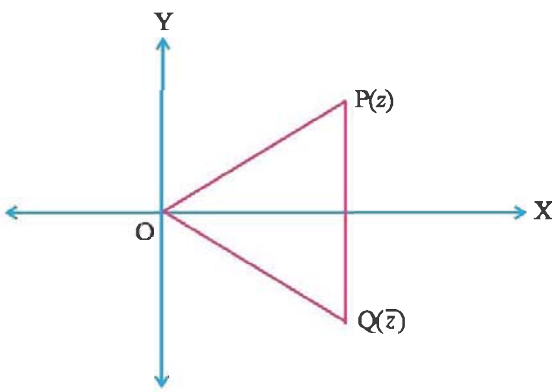



આકૃતિ 2.3

આર્ગન્ડ આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ સંકર સંખ્યા $x + iy$ નો માનાંક એ ઊગમબિંદુ O(0,0) થી P(x,y) વચ્ચેનું અંતર દર્શાવે છે. (આકૃતિ 2.3)

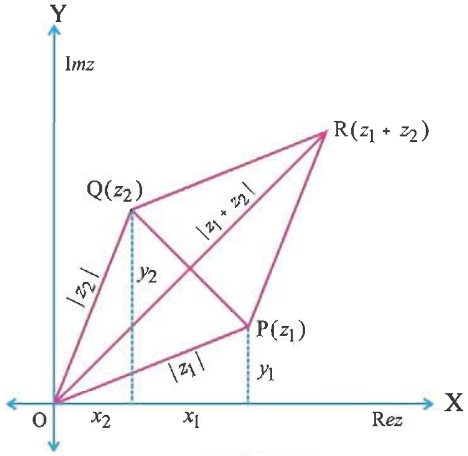
### અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યાનું ભૌમિતિક નિરૂપણ :

સંકર સંખ્યા $z = x + iy$ અને તેની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા $\bar{z} = x - iy$ ને આર્ગન્ડ આકૃતિમાં અનુક્રમે બિંદુઓ P(x,y) અને Q(x,−y) વડે દર્શાવાય છે. ભૌમિતિક રીતે બિંદુ Q(x,−y) ને બિંદુ P(x,y) નું વાસ્તવિક અક્ષને સાપેક્ષ **આરસી પ્રતિબિંબ (Mirror Image)** કહેવાય છે. (આકૃતિ 2.4)




આકૃતિ 2.4

## બે સંકર સંખ્યાઓના સરવાળાનું ભૌમિતિક નિરૂપણ :



આકૃતિ 2.5

આકૃતિ 2.5 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે આર્ગન્ડ સમતલમાં P, Q તથા R અનુક્રમે $z_1$, $z_2$ તથા $z_1 + z_2$ દર્શાવે છે, જ્યાં $z_1 = x_1 + iy_1$ તથા $z_2 = x_2 + iy_2$ છે. $\overline{OR}$ તથા $\overline{PQ}$ નું મધ્યબિંદુ $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ છે.

$\therefore$ $\overline{OR}$ તથા $\overline{PQ}$ પરસ્પર દુભાગે છે.

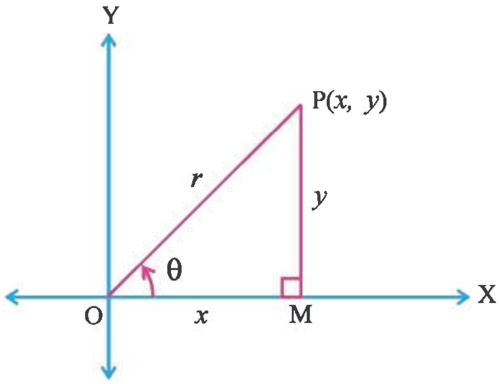
$\therefore$ OPRQ સ.બા.ચ. છે.

વળી, O, P, Q સમરેખ નથી એમ ધારી લેવામાં આવ્યું છે.

ભૌમિતિક રીતે અનુક્રમે $z_1$, $z_2$ અને $z_1 + z_2$ ના માનાંક $|z_1| = OP$, $|z_2| = OQ = PR$ અને $|z_1 + z_2| = OR$. છે. આપણે જાણીએ છીએ કે ત્રિકોણની બે બાજુઓના માપનો સરવાળો તેની ત્રીજી બાજુના માપ કરતા મોટો હોય છે. તેથી $\Delta ORP$ માં $OR < OP + PR$. આથી $|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$. આ કારણથી સંકર સંખ્યાઓની આ અસમતાને ત્રિકોણીય અસમતા કહે છે. (ખરેખર તો ત્રિકોણીય અસમતા $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ છે. તેમાં સમાનતા ક્યારે થાય ?)

## સંકર સંખ્યાનું ધ્રુવીય સ્વરૂપ :

સંકર સંખ્યા $z = x + iy$ ને બીજા એક સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય છે. તેને સંકર સંખ્યાનું **ધ્રુવીય સ્વરૂપ (Polar form)** કહેવાય છે. ચાલો આપણે કોઈ પણ સંકર સંખ્યાને તેના ધ્રુવીય સ્વરૂપમાં કેવી રીતે દર્શાવી શકાય તે સમજીએ. ધારો કે સંકર સંખ્યા $x + iy$ ને આર્ગન્ડ આકૃતિમાં બિંદુ $P(x, y)$ વડે દર્શાવી છે. (આકૃતિ 2.6) $\overline{PM} \perp \overleftrightarrow{OX}$ દોરો. $M \in \overleftrightarrow{OX}$ માટે $OM = x$ અને $PM = y$. ધારો કે $OP = r$ અને $m\angle MOP = \theta$. તો $x = r\cos\theta$ અને $y = r\sin\theta$.



આકૃતિ 2.6

**નોંધ :** અહીં P પ્રથમ ચરણમાં છે તથા $x > 0$, $y > 0$ છે. પરંતુ જો $P(x, y)$ આર્ગન્ડ સમતલનું ઊગમબિંદુ સિવાયનું કોઈ પણ બિંદુ હોય તો પણ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ સત્ય છે.

$\therefore \quad z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

અહીં, $r^2 = x^2 + y^2$. $\qquad (r = OP > 0)$

$\therefore \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (r > 0)$

$\therefore \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ અને $\tan\theta = \frac{y}{x}$.

સંકર સંખ્યા $z = x + iy$ ના $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ સ્વરૂપને તેનું **ધ્રુવીય સ્વરૂપ (Polar Form)** કહેવાય છે. $\theta$ ને $z$ નો **કોણાંક (Argument)** કહે છે, તેને સંકેતમાં **arg(z)** વડે દર્શાવાય છે. *sine* અને *cosine* વિધેયો આવર્તી હોવાથી $x = r\cos\theta$ અને $y = r\sin\theta$ નું સમાધાન કરે તેવી $\theta$ ની ઘણી કિંમતો મળે. આવો દરેક $\theta$ એ $z$ નો કોણાંક છે. $x = r\cos\theta$ અને $y = r\sin\theta$ નું સમાધાન કરતી $\theta$ ની અનન્ય કિંમત $-\pi < \theta \le \pi$ માં આવેલી હોય તે કિંમતને $z$ નો **મુખ્ય કોણાંક**

**(Principal argument)** કહેવાય છે. જ્યારે આપણે કોઈ પણ સંકર સંખ્યાને તેના ધ્રુવીય સ્વરૂપમાં દર્શાવીએ ત્યારે **arg(z) ને મુખ્ય કોણાંક** જ લઈશું. જો અન્યથા દર્શાવેલ ન હોય તો સંકેત arg(z) નો અર્થ arg(z) નો મુખ્ય કોણાંક. જ્યારે આપણે arg(z) ની કિંમત શોધીએ ત્યારે બિંદુ $P(x, y)$નું સ્થાન સમતલમાં ક્યાં આવેલું છે તેનું ધ્યાન રાખવું જોઈએ.

આપણે નોંધીએ કે, **સંકર સંખ્યા 0 નો કોણાંક વ્યાખ્યાયિત નથી. (કેમ ?)**

$$arg(x + i0) = \begin{cases} 0, & \text{જો} \quad x > 0 \\ \pi, & \text{જો} \quad x < 0 \end{cases} \qquad arg(0 + iy) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{જો} \quad y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{જો} \quad y < 0 \end{cases}$$

$\therefore$ ધન વાસ્તવિક સંખ્યાનો મુખ્ય કોણાંક 0 અને ઋણ વાસ્તવિક સંખ્યાનો મુખ્ય કોણાંક $\pi$ છે. તે જ રીતે શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા $yi$ નો મુખ્ય કોણાંક $y > 0$ માટે $\frac{\pi}{2}$ છે અને $y < 0$ માટે $-\frac{\pi}{2}$ છે.

વળી, $cos\theta = \frac{x}{r}$, $sin\theta = \frac{y}{r}$ તથા $-\pi < \theta \le \pi$.

(i) જો $x > 0, y > 0$ તો, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ થાય તેવો $\theta$ મળે કે જેથી $cos\theta = \frac{x}{r}$, $sin\theta = \frac{y}{r}$.

(ii) જો $x < 0, y > 0$ તો $\alpha$ શોધો કે જેથી $cos\alpha = \frac{|x|}{r}$, $sin\alpha = \frac{|y|}{r}$.

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. $\theta = \pi - \alpha$ મળે કે જેથી $cos\theta = \frac{x}{r}$, $sin\theta = \frac{y}{r}$.

(ii) જો $x < 0, y < 0$ તો $\alpha$ શોધો કે જેથી $cos\alpha = \frac{|x|}{r}$, $sin\alpha = \frac{|y|}{r}$.

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. $\theta = -\pi + \alpha$ મળે કે જેથી $cos\theta = \frac{x}{r}$, $sin\theta = \frac{y}{r}$

(iv) જો $x > 0, y < 0$ તો $\alpha$ શોધો કે જેથી $cos\alpha = \frac{|x|}{r}$, $sin\alpha = \frac{|y|}{r}$.

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. $\theta = -\alpha$ મળે કે જેથી $cos\theta = \frac{x}{r}$, $sin\theta = \frac{y}{r}$.

**ઉદાહરણ 10 :** નીચેની સંકર સંખ્યાઓને ધ્રુવીય સ્વરૂપમાં વ્યક્ત કરો. દરેકના માનાંક તથા મુખ્ય કોણાંક પણ મેળવો :

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) $1 + i$ | (2) $-1 + \sqrt{3}i$ | (3) $-\sqrt{3} - i$ | (4) $1 - i$ |
| (5) $-3$ | (6) $-2i$ | (7) 1 | (8) $2i$ |

**ઉકેલ :** (1) ધારો કે $z = 1 + i = x + iy$

$\therefore$ $x = 1, y = 1$

$\therefore$ $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$

$cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ તથા $sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ $P(\theta)$ નું સ્થાન પ્રથમ ચરણમાં છે.

$\therefore$ $\theta = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ $z$ નું ધ્રુવીય સ્વરૂપ $\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$ છે.

$|z| = r = \sqrt{2}$, $arg\, z = \theta = \frac{\pi}{4}$.

(2) ધારો કે $z = -1 + \sqrt{3}i = x + iy$

$\therefore$ $x = -1, y = \sqrt{3}$.

$\therefore$ $r = |z| = \sqrt{1 + 3} = 2$

$cos\theta = \frac{-1}{r} = \frac{-1}{2}$ અને $sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ $cos\alpha = \frac{1}{2}$, $sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $(|x| = 1, |y| = \sqrt{3})$

$\therefore$ $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ $x < 0$ તથા $y > 0$ હોવાથી, $P(\theta)$ દ્વિતીય ચરણમાં છે.

$\therefore$ $\theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ $z$ નું ધ્રુવીય સ્વરૂપ $2\left(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}\right)$ છે.

$\therefore$ $|z| = r = 2$, $arg\,z = \theta = \frac{2\pi}{3}$.

(3) ધારો કે $z = -\sqrt{3} - i = x + iy$

$\therefore$ $x = -\sqrt{3}$, $y = -1$

$\therefore$ $r = |z| = \sqrt{3+1} = 2$

$cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ અને $sin\theta = \frac{-1}{2}$

$\therefore$ $cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $sin\alpha = \frac{1}{2}$ $(|x| = \sqrt{3}, |y| = 1)$

$\therefore$ $\alpha = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ $x < 0$ તથા $y < 0$ હોવાથી, $P(\theta)$ ત્રીજા ચરણમાં છે.

$\theta = -\pi + \alpha = -\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{-5\pi}{6}$

$\therefore$ $z$ નું ધ્રુવીય સ્વરૂપ $2\left(cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

વળી, $|z| = r = 2$, $arg\,z = \theta = \frac{-5\pi}{6}$.

(4) ધારો કે $z = 1 - i = x + iy$

$\therefore$ $x = 1$, $y = -1$

$\therefore$ $r = |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ અને $sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ $cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $(|x| = 1, |y| = 1)$

$\therefore$ $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ $x > 0$ તથા $y < 0$ હોવાથી, $P(\theta)$ ચતુર્થ ચરણમાં છે.

$\therefore$ $\theta = -\alpha = -\frac{\pi}{4}$

$\therefore$ $z$ નું ધ્રુવીય સ્વરૂપ $\sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

વળી, $|z| = r = \sqrt{2}$, $arg\,z = \theta = -\frac{\pi}{4}$.

(5) ધારો કે $z = -3$. અહીં $z = x + i0$ તથા $x < 0$.

આથી તેનું ધ્રુવીય સ્વરૂપ $z = 3(cos\pi + i\,sin\pi)$ થાય.

વળી, $|z| = 3$, $arg\,z = \theta = \pi$.

(6) ધારો કે $z = -2i$. અહીં $z = 0 + iy$ તથા $y < 0$. આથી તેનું ધ્રુવીય સ્વરૂપ $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ થાય.

વળી, $|z| = 2$, $\arg z = \theta = -\frac{\pi}{2}$.

(7) ધારો કે $z = 1$. અહીં $z = x + i0$ તથા $x > 0$. આથી તેનું ધ્રુવીય સ્વરૂપ $1(\cos 0 + i\sin 0)$ થાય.

વળી, $|z| = 1$, $\arg z = \theta = 0$.

(8) ધારો કે $z = 2i$. અહીં $z = 0 + iy$ તથા $y > 0$. આથી તેનું ધ્રુવીય સ્વરૂપ $2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ થાય.

વળી, $|z| = 2$, $\arg z = \theta = \frac{\pi}{2}$.

## સ્વાધ્યાય 2.2

**1.** નીચેની સંકર સંખ્યાઓના માનાંક તથા મુખ્ય કોણાંક શોધો :

(1) $\frac{1+7i}{(2-i)^2}$ (2) $\left(\frac{2+i}{3-i}\right)^2$ (3) $\sqrt{3} - i$ (4) $\frac{(1+i)(1+\sqrt{3}i)}{1-i}$ (5) $-3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$

**2.** જો $z = 3 + 2i$, તો નીચેનાં પરિણામ ચકાસો.

(1) $|z| = |\bar{z}|$ (2) $-|z| \le Re(z) \le |z|$ (3) $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

**3.** જો $z_1 = 3 + 2i$ અને $z_2 = 2 - i$, તો નીચેનાં પરિણામ ચકાસો :

(1) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ (2) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ (3) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ (4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

**4.** જો $z$ એ શૂન્યેતર સંકર સંખ્યા હોય, તો બતાવો કે $\overline{(z^{-1})} = (\bar{z})^{-1}$

**5.** જો $(a + ib)^2 = \frac{1+i}{1-i}$, હોય તો બતાવો કે $a^2 + b^2 = 1$.

**6.** $z_1$ અને $z_2$ એવી સંકર સંખ્યાઓ છે કે જેથી $|z_1| = |z_2|$. તો $z_1 = z_2$ સાબિત થાય ? કેમ ?

**7.** જો સંકર સંખ્યા $z = a + ib$ માટે, $\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{4}$ તો સાબિત કરો કે, $a^2 + b^2 - 2b = 1$.

**8.** જો $z \in C$, $|z| \le 3$ હોય તો $|1 + z + z^2 + z^3|$ ની મહત્તમ કિંમત શોધો.

**9.** (1) જો $z = a + ib$ અને $2|z - 1| = |z - 2|$, તો સાબિત કરો કે $3(a^2 + b^2) = 4a$

(2) જો $z \in C$ હોય, અને $|2z - 3| = |3z - 2|$, તો સાબિત કરો કે $|z| = 1$.

(3) જો $z \in C$ હોય, અને $|2z - 1| = |z - 2|$, તો સાબિત કરો કે $|z| = 1$.

**10.** સાબિત કરો કે સંકર સંખ્યા $-3 + 2i$ એ $1 + 4i$ કરતાં ઊગમબિંદુથી વધુ નજીક છે.

**11.** સંખ્યાઓ $-2 + 3i$, $-2 - i$ અને $4 - i$ ને આર્ગન્ડ આકૃતિમાં દર્શાવો અને સાબિત કરો કે તે કાટકોણ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.

**12.** જેનો માનાંક 4 અને મુખ્ય કોણાંક $\frac{5\pi}{6}$ હોય તેવી સંકર સંખ્યા શોધો.

**13.** જો $z_1$ અને $z_2$ એકબીજાની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા હોય તથા $(1 - 5i)z_1 - 2z_2 = 3 - 7i$ હોય, તો $z_1$ અને $z_2$ શોધો.

**14.** જો $(a + ib)^2 = x + iy$ હોય, તો સાબિત કરો કે $x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)^2$.

**15.** જો $\frac{(1+i)^2}{2-i} = x + iy$ હોય, તો $x + y$ ની કિંમત શોધો.

*

## 2.8 સંકર સંખ્યાનું વર્ગમૂળ

જો $(a + ib)^2 = z = x + iy$, તો આપણે $a + ib$ ને $z = x + iy$ નું વર્ગમૂળ કહીશું.

ધારો કે $z = x + iy$. ધારો કે $z$ નું વર્ગમૂળ સંકર સંખ્યા $a + ib$ છે. (જો અસ્તિત્વ ધરાવે તો)

$\therefore \quad x + iy = (a + ib)^2$

$\therefore \quad x + iy = (a^2 - b^2) + (2ab)i$

$\therefore \quad a^2 - b^2 = x$ અને $2ab = y$ **(i)**

હવે, $a^2 + b^2 = \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ **((i) પરથી) (ii)**

(i) અને (ii) પરથી $2a^2 = |z| + x$ એટલે કે, $a = \pm\sqrt{\frac{|z| + x}{2}}$ અને $b = \pm\sqrt{\frac{|z| - x}{2}}$

જો $y > 0$, તો $a$ અને $b$ બંને ધન અથવા બંને ઋણ

$\therefore \quad x + iy$ નાં વર્ગમૂળ $\pm\left(\sqrt{\frac{|z| + x}{2}} + i\sqrt{\frac{|z| - x}{2}}\right)$

જો $y < 0$, તો $a$ અને $b$ પૈકી એક ધન અને બીજો ઋણ હોય.

$\therefore \quad x + iy$ નાં વર્ગમૂળ $\pm\left(\sqrt{\frac{|z| + x}{2}} - i\sqrt{\frac{|z| - x}{2}}\right)$ થાય.

હવે, આપણે સાબિત કર્યું કે દરેક સંકર સંખ્યાને બે વર્ગમૂળ મળે છે.

**ઉદાહરણ 11 :** નીચેની સંખ્યાઓનાં વર્ગમૂળ મેળવો : (1) $\sqrt{3} - i$ (2) $7 + 24i$

**ઉકેલ :** (1) : ધારો કે $z = \sqrt{3} - i$. અહીં $x = \sqrt{3}$ તથા $y = -1 < 0$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$

આપણે જાણીએ છીએ કે જો $y < 0$ હોય તો $x + iy$ નાં વર્ગમૂળ $\pm\left(\sqrt{\frac{|z| + x}{2}} - i\sqrt{\frac{|z| - x}{2}}\right)$

આમ, $\sqrt{3} - i$ નાં વર્ગમૂળ $\pm\left(\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} - i\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}\right)$.

હવે, $2 + \sqrt{3} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2}$

$\therefore \quad \sqrt{3} - i$ નાં વર્ગમૂળ $\pm\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2} - i\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)$ છે. **($\sqrt{2}\sqrt{2} = 2$ લીધાં છે.)**

(2) ધારો કે $z = 7 + 24i$. અહીં $x = 7$, $y = 24 > 0$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{49 + 576} = 25$

આપણે જાણીએ છીએ કે જો $y > 0$, હોય તો $x + iy$ નાં વર્ગમૂળ $\pm\left(\sqrt{\frac{|z| + x}{2}} + i\sqrt{\frac{|z| - x}{2}}\right)$

આમ, $7 + 24i$ નાં વર્ગમૂળ $\pm\left(\sqrt{\frac{25 + 7}{2}} + i\sqrt{\frac{25 - 7}{2}}\right) = \pm(4 + 3i)$ છે.

**ઉદાહરણ 12 :** નીચેની સંખ્યાઓનાં વર્ગમૂળ શોધો : (1) 1 (2) $-1$ (3) $i$ (4) $-i$

(1) ધારો કે $z = 1$

$\therefore \quad |z| = 1$. ધારો કે $z$ નું વર્ગમૂળ $a + ib$ છે.

$\therefore \quad (a + ib)^2 = 1$

$\therefore \quad a^2 - b^2 + 2abi = 1 = 1 + 0i$

$\therefore$ $a^2 - b^2 = 1$, $2ab = 0$. $2ab = 0$ પરથી $a = 0$ અથવા $b = 0$.

$a = 0$ પરથી $-b^2 = 1$. પરંતુ $b \in$ R હોવાથી તે શક્ય નથી.

$\therefore$ $2ab = 0$ પરથી $b = 0$. આમ $a^2 - b^2 = 1$ માં $b = 0$ લેતાં,

$a^2 = 1$

$\therefore$ $a = \pm 1$

$\therefore$ $a + ib = \pm 1$

$\therefore$ 1 નાં વર્ગમૂળ $\pm 1$ છે.

**નોંધ : આપણે જાણીએ છીએ કે, R માં 1 નાં વર્ગમૂળ $\pm 1$ છે.**

(2) ધારો કે $z = -1$. ધારો કે $z$ નું વર્ગમૂળ $a + ib$ છે.

$\therefore$ $(a + ib)^2 = -1$

$\therefore$ $a^2 - b^2 + 2abi = -1$

$\therefore$ $a^2 - b^2 = -1$, $2ab = 0$

$2ab = 0$ પરથી $a = 0$ અથવા $b = 0$

પરંતુ $b = 0$ પરથી $a^2 = -1$ જે $a \in$ R માટે શક્ય નથી.

$\therefore$ $a = 0$ અને $b^2 = 1$

$\therefore$ $b = \pm 1$

$\therefore$ $-1$ નાં વર્ગમૂળ $\pm i$ છે. (જે આપણી ધારણા મુજબ યથાર્થ છે, કારણ કે $i^2 = -1$)

**યાદ રાખો કે $i^2 = -1$.**

**તે જ રીતે $-4$ નાં વર્ગમૂળ $\pm 2i$**

**$-3$ નાં વર્ગમૂળ $\pm\sqrt{3}i$**

(3) ધારો કે $i$ નું વર્ગમૂળ $a + ib$ છે.

$\therefore$ $(a + ib)^2 = i$

$\therefore$ $a^2 - b^2 + 2iab = i$

$\therefore$ $a^2 - b^2 = 0$ અને $2ab = 1$

$\therefore$ $a = b$ અથવા $a = -b$

પરંતુ $a = -b$ પરથી $-2a^2 = 1$ કારણ કે $2ab = 1$. આ શક્ય નથી.

$\therefore$ $a = b$ અને $2a^2 = 1$

$\therefore$ $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ તથા $a = b$ હોવાથી $b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ $i$ નાં વર્ગમૂળ $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$.

(4) $z = -i$ આગળ (3)ની જેમ $a^2 - b^2 = 0$, $2ab = -1$

$\therefore$ $a = b$ અથવા $a = -b$

જો $a = b$ તો $2a^2 = -1$ જે શક્ય નથી.

$\therefore$ $a = -b$ તથા $2a^2 = 1$

$\therefore$ $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ અથવા $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ $-i$ નાં વર્ગમૂળ $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ છે.

## 2.9 સંકર બીજ ધરાવતાં દ્વિઘાત સમીકરણો

આપણે દ્વિઘાત સમીકરણોનો અભ્યાસ કરી ગયાં. જ્યારે વિવેચક અનૃણ હોય એટલે કે $D \geq 0$ હોય ત્યારે તેમના ઉકેલોની ચર્ચા કરી હતી. હવે આપણે અનુત્તર પ્રશ્નનો જવાબ આપી શકીશું. $D < 0$ હોય તો શું ?

આપણે દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b\ c \in R$, $a \neq 0$ નો ઉકેલ જ્યારે $D = b^2 - 4ac < 0$ હોય ત્યારે મેળવવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= \frac{1}{a}(a^2x^2 + abx + ac) \\ &= \frac{1}{a}\left[\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + ac - \frac{b^2}{4}\right] \\ &= \frac{1}{a}\left[\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4}\right] \end{aligned}$$

જો $ax^2 + bx + c = 0$ તો $\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4}$

હવે, $b^2 - 4ac < 0$.

$\therefore$ $\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2$નું વર્ગમૂળ એ $\frac{b^2 - 4ac}{4}$ નું વર્ગમૂળ છે, જે $\frac{\pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2}$ છે.

$\therefore$ $ax + \frac{b}{2} = \frac{\pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2}$

$\therefore$ $x = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$ **$(a \neq 0)$**

આમ, જો $D < 0$ હોય, તો $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ $\frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}$ છે.

**બીજગણિતનો મૂળભૂત પ્રમેય :**

**સંકર સહગુણકોવાળા અને એક અથવા એક કરતાં વધારે ઘાતવાળા દરેક બહુપદીય સમીકરણને ઓછામાં ઓછું એક સંકર બીજ હોય છે.**

**ઉદાહરણ 13 :** ઉકેલો : (1) $x^2 + 3 = 0$ (2) $2x^2 + x + 1 = 0$ (3) $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x + 3\sqrt{3} = 0$.

**ઉકેલ :** (1) $x^2 + 3 = 0$

$\therefore$ $x^2 = -3$

$\therefore$ $x = \pm\sqrt{3}i$

(2) અહીં, $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$

$\therefore$ $b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -7 < 0$

$\therefore$ માંગેલ ઉકેલ, $x = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{4}$

(3) અહીં, $a = \sqrt{3}$, $b = -\sqrt{2}$, $c = 3\sqrt{3}$

$\therefore$ $b^2 - 4ac = 2 - 4\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2 - 36 = -34 < 0$

$\therefore$ માંગેલ ઉકેલ, $x = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a} = \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{34}}{2\sqrt{3}} = \frac{1 \pm \sqrt{17}i}{\sqrt{6}}$

## 2.10 1 નાં ઘનમૂળ

ધારો કે $z$ એ 1નું ઘનમૂળ છે.

$\therefore$ $z^3 = 1$

$\therefore$ $z^3 - 1 = 0$

$\therefore \quad (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$

$\therefore \quad z = 1$ અથવા $z^2 + z + 1 = 0$

$\therefore \quad z = 1$ અથવા $z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ **($a = 1, b = 1, c = 1, D = -3$)**

આમ, 1 નાં ઘનમૂળ 1, $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ છે.

**1 નાં ઘનમૂળના ગુણધર્મો :**

(1) 1 નાં બંને અવાસ્તવિક ઘનમૂળ એકબીજાના વર્ગ બરાબર છે.

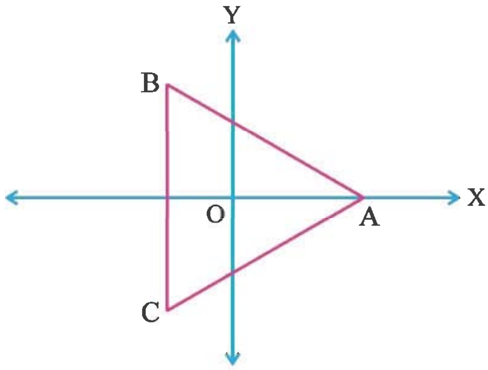
ધારો કે $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$. તો $\omega^2 = \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\sqrt{3}i + 3i^2) = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

વળી, $(\omega^2)^2 = \omega^4 = \omega^3\omega = \omega$. આમ, 1નાં ઘનમૂળ 1, $\omega$, $\omega^2$ છે.

(2) આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે 1 ના ત્રણેય ઘનમૂળનો સરવાળો 0 થાય છે. એટલે કે $1 + \omega + \omega^2 = 0$

(3) સહેલાઈથી ચકાસી શકાય છે કે 1ના ત્રણેય ઘનમૂળનો ગુણાકાર 1 થાય. એટલે કે $1 \cdot \omega \cdot \omega^2 = \omega^3 = 1$

(4) જો 1, $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ને આર્ગન્ડ આકૃતિમાં અનુક્રમે A, B, C વડે દર્શાવવામાં આવે તો A(1, 0), $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ અને $C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. આપણે નોંધીએ કે AB = BC = AC = $\sqrt{3}$. તેથી A, B, C એ સમબાજુ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ થશે. (આકૃતિ 2.7)




આકૃતિ 2.7

**સ્વાધ્યાય 2.3**

**1.** ઉકેલો :

(1) $x^2 + 2 = 0$ (2) $x^2 + x + 1 = 0$ (3) $\sqrt{5}x^2 + x + \sqrt{5} = 0$

(4) $x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$ (5) $x^2 + \frac{x}{\sqrt{2}} + 1 = 0$ (6) $3x^2 - 4x + \frac{20}{3} = 0$

**2.** નીચેની સંખ્યાઓનાં વર્ગમૂળ મેળવો :

(1) $4 + 4\sqrt{3}i$ (2) $5 - 12i$ (3) $-48 + 14i$ (4) $3 - 4\sqrt{10}i$

(5) $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} + \frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^6}$ (6) $4i$ (7) $-16i$ (8) $-25$ (9) $-10$

**3.** $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ ક્યારે થાય ? તમારું અનુમાન સાબિત કરો.

**4.** આર્ગન્ડ આકૃતિમાં જો બિંદુ Pને $z$ દ્વારા તથા બિંદુ Qને $iz$ દ્વારા દર્શાવવામાં આવે તો સાબિત કરો કે OP = OQ અને $m\angle POQ = \frac{\pi}{2}$. ભૌમિતિક અર્થઘટન પણ કરો.

**5.** આર્ગન્ડ આકૃતિમાં બિંદુઓ $z$, $iz$, $-z$ તથા $-iz$ એ ચોરસનાં શિરોબિંદુઓ છે તેમ સાબિત કરો.

**6.** આર્ગન્ડ આકૃતિમાં $z$ અને $\bar{z}$ વચ્ચે કયો સંબંધ છે ?

*

**પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો :**

**ઉદાહરણ 14 :** $\bar{z} = z^2$ શરતનું પાલન કરતી બધી સંકર સંખ્યાઓ $z$ શોધો.

**ઉકેલ :** ધારો કે $z = x + iy$, $\bar{z} = z^2$

$\therefore \quad x - iy = (x^2 - y^2) + i(2xy)$

સંકર સંખ્યાઓની સમાનતાની વ્યાખ્યા અનુસાર $x = x^2 - y^2$ અને $-y = 2xy$

બીજા પરિણામ પરથી, $y = 0$ અથવા $x = -\frac{1}{2}$.

પ્રથમ ધારો કે $y = 0$.

$x = x^2 - y^2$ પરથી $x = x^2$

$\therefore \quad x = 0$ અથવા $x = 1$.

$\therefore \quad z = 0$ અથવા $z = 1$. $\quad$ ($y = 0$ છે.)

હવે, જો $x = -\frac{1}{2}$, તો $-\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - y^2$ $\quad$ ($x = x^2 - y^2$)

$\therefore \quad y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

આમ, $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ અથવા $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

પરિણામે $\bar{z} = z^2$ શરતનું પાલન કરતી ચાર સંકર સંખ્યાઓ $0, 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ મળે.

**ઉદાહરણ 15 :** જો $\frac{3 + 2i\sin\theta}{1 - 2i\sin\theta}$ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય તો $\theta \in R$ શોધો તથા સંખ્યા શોધો.

**ઉકેલ :** $\frac{3 + 2i\sin\theta}{1 - 2i\sin\theta} = \frac{3 + 2i\sin\theta}{1 - 2i\sin\theta} \times \frac{1 + 2i\sin\theta}{1 + 2i\sin\theta}$

$$= \frac{3 + 6i\sin\theta + 2i\sin\theta + 4i^2\sin^2\theta}{1 + 4\sin^2\theta}$$

$$= \frac{3 - 4\sin^2\theta}{1 + 4\sin^2\theta} + i\frac{8\sin\theta}{1 + 4\sin^2\theta}$$

આપણે જાણીએ છીએ કે જો સંકર સંખ્યા વાસ્તવિક સંખ્યા હોય તો તેનો કાલ્પનિક ભાગ 0 થાય.

$\therefore \quad \frac{8\sin\theta}{1 + 4\sin^2\theta} = 0$

$\therefore \quad \sin\theta = 0$

$\therefore \quad \theta = k\pi, k \in Z$. આથી સંખ્યા $\frac{3 + 0}{1 - 0} = 3$

## સ્વાધ્યાય 2

1. નીચેની સંખ્યાઓનું પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં રૂપાંતર કરો :

   (1) $\left[i^{18} + \left(\frac{1}{i}\right)^{25}\right]^3$ $\quad$ (2) $\left(\frac{1}{1 - 4i} - \frac{2}{1 + i}\right)\left(\frac{3 - 4i}{5 + i}\right)$

2. $\frac{1 + i}{1 - i} - \frac{1 - i}{1 + i}$ નો માનાંક શોધો.

3. કોઈ પણ બે સંકર સંખ્યાઓ $z_1$ અને $z_2$ માટે સાબિત કરો કે,

   $Re(z_1 z_2) = Re(z_1)Re(z_2) - Im(z_1)Im(z_2)$.

**4.** $f(z) = \frac{1}{1-z}$ માટે $z = 7 + 2i$ આગળ $Re(f(z))$ અને $Im(f(z))$ની કિંમત શોધો.

**5.** બતાવો કે $|z - 1| = |z + i|$ નો બિંદુગણ ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી અને $-1$ ઢાળવાળી રેખા દર્શાવે છે.

**6.** સાબિત કરો કે $|(2\bar{z} + 5)(\sqrt{2} - i)| = \sqrt{3}|2z + 5|$.

**7.** જો $z_1$ અને $z_2$ ભિન્ન સંકર સંખ્યાઓ હોય તથા $|z_2| = 1$ તો $\left|\frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z_1}z_2}\right|$ની કિંમત શોધો.

**8.** જો $\frac{1}{\alpha + i\beta} + \frac{1}{a + ib} = 1$, જ્યાં $\alpha, \beta, a, b \in R$; તો $b$ ને $\alpha$ તથા $\beta$ના સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

**9.** જો $(x + iy)^3 = a + ib$, તો સાબિત કરો કે $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 4(x^2 - y^2)$.

**10.** ઉકેલો : (1) $x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$ (2) $27x^2 - 10x + 1 = 0$ (3) $21x^2 - 28x + 10 = 0$

**11.** જો $z \in C$ અને $|z| \le 2$, તો $|z - 3|$ની મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ કિંમતો શોધો.

**12.** $z = 3 - 2i$ માટે બતાવો કે $z^2 - 6z + 13 = 0$. આ પરથી $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 17$ની કિંમત શોધો.

**13.** $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m = 1$ થાય તેવી $m$ની ન્યૂનતમ કિંમત શોધો. જ્યાં, $m \in N$.

**14.** જો $(x - iy)^2 = \frac{a - ib}{c - id}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $(x^2 + y^2)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}$ થાય.

**15.** સમીકરણ $|z| - z = 1 + 2i$ નું સમાધાન કરતાં $z$ની કિંમત શોધો.

**16.** જો સંકર સંખ્યાઓ $z_1, z_2, z_3$ એ સમબાજુ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ દર્શાવે તથા $|z_1| = |z_2| = |z_3|$, તો બતાવો કે $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

**17.** બતાવો કે આર્ગન્ડ આકૃતિમાં સંકર સંખ્યાઓ $z$, $iz$ અને $z + iz$ થી બનતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $\frac{1}{2}|z|^2$ હોય.

**18.** જો $z = x + iy$ અને $w = \frac{1 - iz}{z - i}$, તો બતાવો કે $|w| = 1 \Rightarrow z$ એ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય.

**19.** જો $z = -5 + 4i$, તો બતાવો કે $z^4 + 9z^3 + 35z^2 - z + 164 = 0$.

**20.** જો $z = x + iy$, તો સાબિત કરો કે $|x| + |y| \le \sqrt{2}|z|$.

**21.** નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

**(1)** $|z - 4| < |z - 2|$ નો ઉકેલ... ☐

(a) $Re(z) > 0$ (b) $Re(z) < 0$ (c) $Re(z) > 3$ (d) $Re(z) > 2$

**(2)** જો $|z - 1|^2 = |z|^2 + 1$, તો આર્ગન્ડ આકૃતિમાં $z$ નું સ્થાન ...... પર છે. ☐

(a) $x^2 + y^2 = 1$ (b) કાલ્પનિક અક્ષ (c) વાસ્તવિક અક્ષ (d) $2x + 3 = 0$

**(3)** જો $|z + 4| \le 3$, તો $|z + 1|$ નું મહત્તમ મૂલ્ય ...... છે. ☐

(a) 6 (b) 0 (c) 4 (d) 10

**(4)** એક સંકર સંખ્યાની અનુબદ્ધ સંખ્યા $\frac{1}{i-1}$ છે, તો તે સંકર સંખ્યા ...... છે. ☐

(a) $\frac{1}{i-1}$ (b) $\frac{-1}{i-1}$ (c) $\frac{1}{i+1}$ (d) $\frac{-1}{i+1}$

**(5)** $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3}$ ની કિંમત ...... છે. ☐

(a) 1 (b) $-1$ (c) 0 (d) $i^n$

**(6)** $\frac{3+4i}{4-5i}$ નો વ્યસ્ત...

(a) $-\frac{8}{25} + \frac{31}{25}i$ (b) $\frac{8}{25} - \frac{31}{25}i$ (c) $-\frac{8}{25} - \frac{31}{25}i$ (d) $\frac{8}{25} + \frac{31}{25}i$

**(7)** જો $x + iy = \frac{u+iv}{u-iv}$ હોય, તો $x^2 + y^2 =$ ........

(a) 1 (b) −1 (c) 0 (d) 2

**(8)** જેથી $(1 + i)^{2n} = (1 - i)^{2n}$ થાય તેવી ન્યૂનતમ પ્રાકૃતિક સંખ્યા $n$ ...... છે.

(a) 4 (b) 8 (c) 2 (d) 12

**(9)** આર્ગન્ડ આકૃતિમાં સંકર સંખ્યા $\frac{1+2i}{1-i}$ નું સ્થાન ...... ચરણમાં છે.

(a) પ્રથમ (b) દ્વિતીય (c) તૃતીય (d) ચતુર્થ

**(10)** $arg(-1) =$ ......

(a) 0 (b) $\pi$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $-\pi$

**(11)** $sinx + icos2x$ અને $cosx - isin2x$ એ એકબીજાની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યાઓ હોય, તો...

(a) $x = k\pi, k \in Z$ (b) $x = 0$

(c) $x = \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi, k \in Z$ (d) એવો કોઈ $x$ ન મળે.

**(12)** જો એક સંકર સંખ્યા ત્રીજા ચરણમાં હોય, તો તેની અનુબદ્ધ સંખ્યા ...... ચરણમાં હોય ?

(a) પ્રથમ (b) દ્વિતીય (c) તૃતીય (d) ચતુર્થ

**(13)** જેનો માનાંક 2 અને મુખ્ય કોણાંક $\frac{2\pi}{3}$ હોય તેવી સંકર સંખ્યા ...... છે.

(a) $-1 + i\sqrt{3}$ (b) $-1 - i\sqrt{3}$ (c) $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

**(14)** $1 - i\sqrt{3}$ નો મુખ્ય કોણાંક ...... છે.

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$ (c) $-\frac{\pi}{3}$ (d) $-\frac{2\pi}{3}$

**(15)** જો 1નાં ઘનમૂળ $1, \omega, \omega^2$ હોય, તો $1 + \omega + \omega^2 =$ ......

(a) 1 (b) 0 (c) −1 (d) $\omega$

*

## સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. $a + ib$, જ્યાં $a, b \in R$ સ્વરૂપની સંખ્યાને સંકર સંખ્યા કહે છે. અહીં $i^2 = -1$.
2. ધારો કે $z_1 = a + ib$ અને $z_2 = c + id$ બે સંકર સંખ્યાઓ છે.
   $z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$, $z_1z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$
3. $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$
4. શૂન્યેતર સંકર સંખ્યા $z = a + ib$ની વ્યસ્ત સંખ્યા $\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-bi}{a^2+b^2}$ છે.
5. $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$
6. સંકર સંખ્યા $z = a + bi$ ની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા $\overline{z} = a - ib$ છે.

7. $z = a + ib$ નો માનાંક $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ છે.

8. સંકર સંખ્યા $x + iy$ ને સંગત ક્રમયુક્ત જોડ $(x, y)$ ને ભૌમિતિક રીતે XY-સમતલમાં બિંદુ $P(x, y)$ તરીકે દર્શાવવામાં આવે છે અને આનાથી ઊલટું પણ સાચું છે.

9. $x + iy$ નાં વર્ગમૂળ $\begin{cases} \pm\left(\sqrt{\dfrac{|z|+x}{2}} + i\sqrt{\dfrac{|z|-x}{2}}\right), & y > 0 \\ \pm\left(\sqrt{\dfrac{|z|+x}{2}} - i\sqrt{\dfrac{|z|-x}{2}}\right), & y < 0 \end{cases}$

10. 1 નાં ઘનમૂળ 1, $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\omega^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ છે.

11. જો $b^2 - 4ac < 0$, તો દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ જ્યાં $a, b, c \in R$, $a \neq 0$ નાં બીજ $\frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}\,i}{2a}$ છે.

**Brahmagupta** was the first to use zero as a number. He gave rules to compute with zero. Negative numbers did not appear in *Brahmasphuta siddhanta* but in the Nine Chapters on the Mathematical Art (Jiu zhang suan-shu) around 200 BC. Brahmagupta's most famous work is his *Brahmasphutasiddhanta*.

Brahmagupta gave the solution of the general linear equation in chapter eighteen of *Brahmasphutasiddhanta*.

The difference between *rupas*, when inverted and divided by the difference of the unknowns, is the unknown in the equation. The *rupas* are [subtracted on the side] below that from which the square and the unknown are to be subtracted. which is a solution equivalent to $x = \frac{e-c}{b-d}$, where rupas represent constants. He further gave two equivalent solutions to the general quadratic equation.

Diminish by the middle [number] the square-root of the rupas multiplied by four times the square and increased by the square of the middle; divide the remainder by twice the square. The middle whatever is the square-root of the rupas multiplied by the square [and] increased by the square of half the unknown, diminish that by half the unknown [and] divide [the remainder] by its square. [The result is] the unknown, which are, respectively, solutions equivalent to, $x = \frac{\sqrt{4ac+b^2} - b}{2a}$

Brahmagupta then goes on to give the sum of the squares and cubes of the first $n$ integers.

The sum of the squares is that [sum] multiplied by twice the [number of] step[s] increased by one [and] divided by three. The sum of the cubes is the square of that [sum] Piles of these with identical balls [can also be computed].

It is important to note here Brahmagupta found the result in terms of the sum of the first $n$ integers.

He gives the sum of the squares of the first $n$ natural numbers as n(n+1)(2n+1)/6 and the sum of the cubes of the first $n$ natural numbers as $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.