સંબંધ અને વિધેય 1

The roots of education are bitter but the fruit is sweet.

– Gauss

Mathematicians do not study objects but relations between them. Thus they are free to replace some objects by others so long as the relations remain unchanged. Content to them is irrelevent. They are interested in form only.

– Henri Poincare

1.1 સંબંધ

ગયા વર્ષે આપણે સંબંધ અને વિધેયની સંકલ્પનાનો અભ્યાસ કર્યો. આપણે વિધેયો પરની બૈજિક ક્રિયાઓ અને સંબંધના તથા વિધેયના આલેખનો પણ અભ્યાસ કર્યો. આ પ્રકરણમાં આપણે આ સંકલ્પનાઓનો વધુ વિસ્તારથી અભ્યાસ કરીશું.

'સંબંધ' શબ્દ સામાજિક બંધનના અનુસંધાનમાં વપરાય છે. સામાજિક તથા કૌટુંબિક દૃષ્ટિએ શબ્દ 'સંબંધ' જે રીતે ઉપયોગમાં લેવાય છે તેને આપણે ગાણિતિક સંબંધ સાથે સાંકળીશું.

મનુષ્યોના ગણ H પર આપણે નીચે પ્રમાણે સંબંધ વ્યાખ્યાયિત કરીએ :

$S = \{(x, y) \mid x \in H, y \in H, x$ એ yનો ભાઈ છે.$\}$

'દેવ એ રુચાનો ભાઈ છે.' આમ, ક્રમયુક્ત જોડ (દેવ, રુચા) $\in$ S.

પરંતુ, જો સીતા તથા ગીતા બે બહેનો હોય, તો (સીતા, ગીતા) $\notin$ S.

ધારો કે ગણ C એ ઈ.સ. 2011 સુધીના ભારતીય ક્રિકેટ ટીમના કપ્તાનોનો ગણ છે.

ધારો કે $S = \{(x, y) \mid x$ એ yનો પુરોગામી છે. $x, y \in C\}$

તો (કપિલદેવ, એમ. એસ. ધોની) $\in$ S.

પરંતુ (એમ. એસ. ધોની, કપિલદેવ) $\notin$ S.

પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના ગણ Nમાં જો કોઈક $k \in N$ માટે $y = x + k$ તો x એ yનો પુરોગામી છે. ધારો કે $S = \{(x, y) \mid x$ એ yનો પુરોગામી છે. $x \in N, y \in N\}$ તો $(3, 5) \in S$ કારણ કે $5 = 3 + 2$ પરંતુ $(5, 3) \notin S$.

જો S એ ગણ A પરનો સંબંધ હોય એટલે કે, $S \subset (A \times A)$ અને $(x, y) \in S$ તો આપણે કહીએ છીએ કે x એ y સાથે S દ્વારા સંબંધ ધરાવે છે તથા આને સંકેતમાં xSy દ્વારા દર્શાવાય છે.

ધારો કે સંબંધ S એ ગણ N પર નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે.

$S = \{(x, y) \mid |x - y|$ યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે. $x, y \in N\}$, તો જ્યારે $(x, y) \in S$ હોય, ત્યારે $(y, x) \in S$.

વળી, નોંધીએ કે $(x, x) \notin S$. (કેમ ?)

હવે આપણે કેટલાક જુદા જુદા પ્રકારના સંબંધ વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

ખાલી અથવા રિક્ત (Void) સંબંધ : ગણ A પરના એક પણ ઘટક ન ધરાવતા સંબંધને ખાલી સંબંધ કહે છે. $\emptyset \subset (A \times A)$. સંબંધ $\emptyset$ ને ખાલી સંબંધ કહે છે.

સંબંધ S એ N પર નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે :

$S = \{(x, y) \mid x + y = 0, x \in N, y \in N\}$. તો S એ ખાલી સંબંધ છે કારણ કે બે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો ક્યારેય શૂન્ય ન થઈ શકે.

સાર્વત્રિક સંબંધ (Universal Relation) : જો ગણ A પરનો સંબંધ $A \times A$ હોય, તો તેને સાર્વત્રિક સંબંધ કહે છે.

વાસ્તવિક સંખ્યાગણ R પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ

$S = \{(x, y) \mid x \le y$ અથવા $y \le x\}$ એ ત્રિવિધ વિકલ્પના નિયમના કારણે સાર્વત્રિક સંબંધ છે.

વિદ્યમાન વ્યક્તિઓના ગણ પર સંબંધ S નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત છે :

$S = \{(x, y) \mid x$ અને y વચ્ચેની ઉંમરનો તફાવત 200 વર્ષ કરતાં ઓછો હોય$\}$. સ્પષ્ટ છે કે S એ સાર્વત્રિક સંબંધ છે.

સ્વવાચક સંબંધ (Reflexive Relation) : જો S એ ગણ A પરનો સંબંધ હોય અને aSa, $\forall a \in A$ એટલે કે $(a, a) \in S$, $\forall a \in A$ તો S એ સ્વવાચક સંબંધ છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ તરીકે ત્રિકોણની સમરૂપતા, ત્રિકોણની એકરૂપતા, સંખ્યાઓની સમાનતા, ઘાતગણમાં ઉપગણ હોવાનો સંબંધ ($A \subset A$, $A \in P(U)$) વગેરે સ્વવાચક સંબંધનાં ઉદાહરણો છે.

$<$ એ R પર સ્વવાચક સંબંધ નથી, કારણ કે $a < a$ $\forall a \in R$ એ સત્ય નથી. (ખરેખર તો $a < a$ કોઈ પણ $a \in R$ માટે સત્ય નથી.)

પરંતુ $\leq$ એ R પર સ્વવાચક સંબંધ છે. $a \leq a$ $\forall a \in R$

સંમિત સંબંધ (Symmetric Relation) : જો S એ ગણ A પરનો સંબંધ હોય અને $aSb \Rightarrow bSa$ એટલે કે, $(a, b) \in S \Rightarrow (b, a) \in S$, $\forall a, b \in A$ તો S એ સંમિત સંબંધ છે તેમ કહેવાય.

જો સંગતતા $ABC \leftrightarrow PQR$ એ સમરૂપતા હોય, તો સંગતતા $PQR \leftrightarrow ABC$ પણ સમરૂપતા હોય. આમ, ત્રિકોણોની સમરૂપતાનો સંબંધ સંમિત છે.

પૂર્ણાંકોના ગણ ઉપર આપણે એક સંબંધ S નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરીએ છીએ :

$(a, b) \in S \Leftrightarrow a - b$ એ d વડે વિભાજ્ય છે, જ્યાં d નિશ્ચિત શૂન્યેતર પૂર્ણાંક છે.

સ્પષ્ટ છે કે જો $a - b$ એ d વડે વિભાજ્ય હોય તો $b - a$ એ પણ d વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ $(a, b) \in S \Leftrightarrow (b, a) \in S$, $\forall a, b \in Z$

આથી S સંમિત છે.

જો $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ તો $\Delta ABC \cong \Delta PQR$. આ બધાં સંમિત સંબંધનાં ઉદાહરણો છે.

બે ગણ A અને B માટે A એ Bનો ઉચિત ઉપગણ હોય, તો B એ Aનો ઉચિત ઉપગણ ન હોય.

તેથી ઉચિત ઉપગણનો સંબંધ એ P(U) પર સંમિત સંબંધ નથી.

પરંપરિત સંબંધ (Transitive Relation) : જો S એ ગણ A પરનો સંબંધ હોય અને

aSb તથા $bSc \Rightarrow aSc$, $\forall a, b, c \in A$ એટલે કે

$(a, b) \in S$ તથા $(b, c) \in S \Rightarrow (a, c) \in S$, $\forall a, b, c \in A$ તો S એ પરંપરિત સંબંધ છે તેમ કહેવાય.

$A \subset B$ અને $B \subset C \Rightarrow A \subset C$. $\forall A, B, C \in P(U)$ સત્ય હોવાથી સંબંધ $\subset$ એ P(U) પર પરંપરિત છે.

તે જ રીતે, $a < b$ અને $b < c \Rightarrow a < c$, $\forall a, b, c \in R$ સત્ય હોવાથી સંબંધ $<$ એ R પર પરંપરિત છે.

સામ્ય સંબંધ (Equivalence Relation) : જો ગણ A પરનો સંબંધ S એ સ્વવાચક, સંમિત તથા પરંપરિત હોય, તો S ને ગણ A પરનો સામ્ય સંબંધ કહે છે.

જો S સામ્ય સંબંધ હોય તથા $(x, y) \in S$ તો $x \sim y$ લખવામાં આવે છે.

સંખ્યાઓની સમાનતા એ R પર સામ્ય સંબંધ છે. ત્રિકોણોની એકરૂપતા એ સમતલીય ત્રિકોણોના ગણ પર સામ્ય સંબંધ છે.

ઉદાહરણ 1 : સાબિત કરો કે Z પર વ્યાખ્યાયિત નીચેનો સંબંધ સામ્ય સંબંધ છે :

$x \equiv y \pmod m$ (વંચાય : x એ yને સમશેષ છે.) $\Leftrightarrow$ નિશ્ચિત ધનપૂર્ણાંક m એ $x - y$નો ભાજક છે.

ઉકેલ : સ્વવાચકતા : $a - a = 0$ એ કોઈ પણ શૂન્યેતર પૂર્ણાંક સંખ્યા વડે વિભાજ્ય હોવાથી $a \equiv a \pmod m$.

[**નોંધ :** 0 કોઈ પણ શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યા વડે વિભાજ્ય છે, પરંતુ કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા 0 વડે વિભાજ્ય નથી.]

સંમિતતા : જો $a \equiv b \pmod m$, તો $a - b$ એ m વડે વિભાજ્ય હોય.

ધારો કે $a - b = mn$ $\quad n \in Z$

$\therefore$ $b - a = -mn = m(-n)$ $\quad -n \in Z$

$\therefore$ $b \equiv a \pmod m$

આમ, જો $a \equiv b \pmod m$, તો $b \equiv a \pmod m$

$\therefore$ $\equiv$ એ Zમાં સંમિત સંબંધ છે.

પરંપરિતતા : જો $a \equiv b \pmod m$ અને $b \equiv c \pmod m$ તો $m \mid (a - b)$ અને $m \mid (b - c)$.

($m \mid (a - b)$ એટલે કે $(a - b)$ એ m વડે વિભાજ્ય છે)

$\therefore$ કોઈક $k \in Z$, $t \in Z$ માટે $a - b = mk$ અને $b - c = mt$

$\therefore$ $a - b + b - c = mk + mt$

$\therefore$ $a - c = m(k + t)$ $\quad k + t \in Z$

$\therefore$ $a \equiv c \pmod{m}$

આમ, જો $a \equiv b \pmod{m}$ અને $b \equiv c \pmod{m}$, તો $a \equiv c \pmod{m}$

$\therefore$ Z પર વ્યાખ્યાયિત સમશેષતાનો સંબંધ એ સામ્ય સંબંધ છે.

ઉદાહરણ 2 : સાબિત કરો કે ત્રિકોણની સમરૂપતા એ સમતલના બધા જ ત્રિકોણના ગણ પર સામ્ય સંબંધ છે.

ઉકેલ : કોઈપણ ΔABC માટે સંગતતા $ABC \leftrightarrow ABC$ માટે $\Delta ABC \sim \Delta ABC$.

જો $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, તો $\Delta PQR \sim \Delta ABC$.

વળી, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ અને $\Delta PQR \sim \Delta XYZ$, તો $\Delta ABC \sim \Delta XYZ$.

$\therefore$ $\sim$ એ સામ્ય સંબંધ છે.

(**નોંધ :** ત્રિકોણની એકરૂપતા પણ સમતલના બધા જ ત્રિકોણના ગણ પર સામ્ય સંબંધ છે.)

ઉદાહરણ 3 : A = સમતલમાં આવેલ બધી જ રેખાઓનો ગણ

$S = \{(x, y) \mid x = y$ અથવા રેખા x એ રેખા yને સમાંતર હોય.$\}$

S એ ગણ A પર સામ્ય સંબંધ છે ?

ઉકેલ : અહીં $l = l$ હોવાથી, $(l, l) \in S$ (આપેલ છે)

તેથી S સ્વવાચક સંબંધ છે.

ધારો કે $(l, m) \in S$. આથી $l \parallel m$ અથવા $l = m$.

જો $l \parallel m$, તો $m \parallel l$ અથવા જો $l = m$ તો $m = l$.

$\therefore$ $(l, m) \in S$ તો $(m, l) \in S$.

$\therefore$ S સંમિત સંબંધ છે.

ધારો કે $(l, m) \in S$ તથા $(m, n) \in S$.

જો l, m, n ભિન્ન રેખાઓ હોય તો $l \parallel m$ અને $m \parallel n$ અને તેથી $l \parallel n$.

જો $l \parallel m$ અને $m = n$ અથવા જો $l = m$ અને $m \parallel n$ તો $l \parallel n$.

$\therefore$ જો $l = m$ અને $m = n$, તો $l = n$.

$\therefore$ જો $(l, m) \in S$ તથા $(m, n) \in S$ તો $(l, n) \in S$.

$\therefore$ S એ પરંપરિત સંબંધ છે.

આમ, S એ સ્વવાચક, સંમિત અને પરંપરિત છે.

$\therefore$ S એ સામ્ય સંબંધ છે.

ઉદાહરણ 4 : ગણ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ પર સંબંધ $S = \{(a, b) \mid |a - b|$ યુગ્મ પૂર્ણાંક છે.$\}$ એ સામ્ય સંબંધ છે તેમ સાબિત કરો.

ઉકેલ : |અયુગ્મ પૂર્ણાંક − અયુગ્મ પૂર્ણાંક| = |યુગ્મ પૂર્ણાંક − યુગ્મ પૂર્ણાંક| = યુગ્મ પૂર્ણાંક

$\therefore$ $S = \{(1, 3), (3, 1), (1, 5) (5, 1), (3, 5), (5, 3), (1, 7), (7, 1), (3, 7), (7, 3), (5, 7), (7, 5), (2, 4), (4, 2), (2, 6), (6, 2), (4, 6), (6, 4), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7)\}$

$(x, x) \in S$ હોવાથી S સ્વવાચક સંબંધ છે.

ધારો કે $(x, y) \in S$.

$|x - y| = |y - x|$ હોવાથી $(x, y) \in S \Rightarrow (y, x) \in S$. આથી, S સંમિત સંબંધ છે.

ધારો કે $(x, y) \in S$ તથા $(y, z) \in S$.

$|x - y|$ અને $|y - z|$ બંને યુગ્મ સંખ્યા હોવાથી x તથા y બંને અયુગ્મ હોય અથવા બંને યુગ્મ હોય તેમજ y અને z બંને અયુગ્મ હોય અથવા બંને યુગ્મ હોય. આથી x અને z બંને યુગ્મ હોય અથવા બંને અયુગ્મ હોય.

$\therefore$ $|x - z|$ યુગ્મ હોય.

$\therefore$ જો $(x, y) \in S$ અને $(y, z) \in S$ તો $(x, z) \in S$

$\therefore$ S પરંપરિત સંબંધ છે.

આમ, S એ સ્વવાચક, સંમિત અને પરંપરિત સંબંધ છે.

$\therefore$ S એ સામ્ય સંબંધ છે.

વિસંમિત સંબંધ (Antisymmetric Relation) : જો S એ ગણ A પર કોઈ સંબંધ હોય અને જો $(a, b) \in S$ અને $(b, a) \in S$, $\forall a, b \in A \Rightarrow a = b$, તો S એ વિસંમિત સંબંધ છે.

ગણ U ના ઘાતગણ P(U) માટે $A \subset B$ અને $B \subset A \Rightarrow A = B$, $\forall A, B \in P(U)$ હોવાથી $\subset$ એ P(U) પર વિસંમિત સંબંધ છે.

વાસ્તવિક ગણ R માં $a \le b$ અને $b \le a \Rightarrow a = b$ $\forall a, b \in R$ હોવાથી $\le$ એ R પર વિસંમિત સંબંધ છે.

ઉદાહરણ 5 : નીચે મુજબની શરતનું પાલન કરતા સંબંધનું ઉદાહરણ આપો : (1) સ્વવાચક અને સંમિત હોય પરંતુ પરંપરિત ન હોય (2) સ્વવાચક અને પરંપરિત હોય પરંતુ સંમિત ન હોય (3) સંમિત અને પરંપરિત હોય પરંતુ સ્વવાચક ન હોય.

ઉકેલ :

(1) A = સમતલમાં આવેલ બધી રેખાનો ગણ

$S = \{(x, y) \mid x = y$ અથવા x એ y ને લંબ હોય $x, y \in A\}$ એ A પરનો સંબંધ છે.

$l = l$ હોવાથી $(l, l) \in S$. તેથી S સ્વવાચક છે.

જો $(l, m) \in S$ તો $l = m$ અથવા l એ m ને લંબ હોય.

$\therefore$ $m = l$ અથવા m એ l ને લંબ હોય.

$\therefore$ $(l, m) \in S \Rightarrow (m, l) \in S$. તેથી S એ સંમિત છે.

ધારો કે $(l, m) \in S$ અને $(m, n) \in S$, $l \ne m$, $m \ne n$

$\therefore$ ભિન્ન રેખાઓ l, m, n માટે, $l \perp m$ અને $m \perp n$.

$l \perp m$ અને $m \perp n$ હોવાથી $l \parallel n$

$\therefore$ $(l, n) \notin S$

$\therefore$ S સ્વવાચક અને સંમિત સંબંધ છે પરંતુ પરંપરિત સંબંધ નથી.

(2) વાસ્તવિક સંખ્યાગણ R પર $\le$ એ સંબંધ છે.

$a \le a$ $\forall a \in R$ અને $a \le b$ અને $b \le c \Rightarrow a \le c$ $\forall a, b\ c \in R$

$\therefore$ $\le$ સ્વવાચક તથા પરંપરિત સંબંધ છે.

જો $a \le b$, તો $b \nleq a$ સિવાય કે $a = b$.

આમ, $(3, 5) \in S$, પરંતુ $(5, 3) \notin S$ જ્યાં S એ $\le$ સંબંધ છે.

$\therefore$ S એ સ્વવાચક અને પરંપરિત સંબંધ છે, પરંતુ સંમિત નથી.

(3) ધારો કે $A = \{1, 2, 3\}$.

$S = \{(1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2)\}$

અહીં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે S સંમિત તથા પરંપરિત છે પરંતુ સ્વવાચક નથી કારણ કે $(3, 3) \notin S$.

ઉદાહરણ 6 : નીચે પ્રમાણેની શરતનું પાલન કરતા સંબંધનું ઉદાહરણ આપો : (1) સ્વવાચક હોય પરંતુ સંમિત અથવા પરંપરિત ન હોય. (2) સંમિત હોય પરંતુ સ્વવાચક અથવા પરંપરિત ન હોય. (3) પરંપરિત હોય પરંતુ સ્વવાચક અથવા સંમિત ન હોય.

ઉકેલ : (1) ધારો કે $A = \{1, 2, 3\}$.

$S = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}$

$(1, 1), (2, 2), (3, 3) \in S$. આથી S એ સ્વવાચક છે.

$(1, 2) \in S$ પરંતુ $(2, 1) \notin S$. આથી, S સંમિત નથી.

$(1, 2) \in S$, $(2, 3) \in S$ પરંતુ $(1, 3) \notin S$.

$\therefore$ S પરંપરિત નથી.

$\therefore$ S સ્વવાચક છે પરંતુ સંમિત અથવા પરંપરિત નથી.

(2) ધારો કે $A = \{1, 2, 3\}$, $S = \{(1, 2), (2, 1)\}$

S સંમિત છે પરંતુ સ્વવાચક અથવા પરંપરિત નથી.

(3) R માં સંબંધ $<$ વિશે વિચાર કરીએ.

$a < b$ અને $b < c \Rightarrow a < c$ $\forall a, b\ c \in R$

પરંતુ $a \nless a$ અને જો $a < b$ તો $b \nless a$.

$\therefore$ $<$ એ પરંપરિત છે પરંતુ સ્વવાચક કે સંમિત નથી.

ઉદાહરણ 7 : એક એવા સંબંધનું ઉદાહરણ આપો કે જે સ્વવાચક ન હોય, સંમિત ન હોય કે પરંપરિત ન હોય.

ઉકેલ : ધારો કે A = {1, 2, 3}, S = {(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 3)}.

(3, 3) $\notin$ S. તેથી S સ્વવાચક નથી.

(1, 2) $\in$ S પરંતુ (2, 1) $\notin$ S. તેથી S સંમિત નથી.

(1, 2) $\in$ S અને (2, 3) $\in$ S પરંતુ (1, 3) $\notin$ S. તેથી S પરંપરિત નથી.

$\therefore$ S સ્વવાચક નથી, સંમિત નથી, પરંપરિત નથી.

ઉદાહરણ 8 : જો સંબંધ સંમિત અને પરંપરિત હોય, તો સ્વવાચક પણ હોય તેની સાબિતી નીચે પ્રમાણે આપેલ છે. આ સાબિતીમાં રહેલી ભૂલ શોધો.

ધારો કે xSy

$\therefore$ ySx (સંમિતતા)

xSy અને ySx હોવાથી xSx (પરંપરિતતા)

$\therefore$ S એ સ્વવાચક છે.

ઉકેલ : આ દલીલ બરાબર નથી.

પ્રત્યેક $x \in$ A માટે કોઈક એવો y મળે કે જેથી $(x, y) \in$ S એ સત્ય ન પણ હોય.

આથી ઉપરની દલીલ અયોગ્ય છે.

ઉદાહરણ તરીકે, ધારો કે A = {1, 2, 3, 4}

S = {(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (2, 3), (3, 2)}

અહીં, (4, 4) $\notin$ S કારણ કે કોઈ પણ x માટે $(x, 4) \in$ S થતું નથી.

$\therefore$ S સ્વવાચક નથી. S સંમિત અને પરંપરિત તો છે.

ઉદાહરણ 9 : જો xSy અને yS$z \Rightarrow z$Sx હોય, તો સંબંધ Sને વૃત્તીય સંબંધ કહે છે. સાબિત કરો કે જો સંબંધ સ્વવાચક અને વૃત્તીય હોય, તો તે સામ્ય સંબંધ હોય.

ઉકેલ : સંબંધ S સ્વવાચક છે. (આપેલ છે)

ધારો કે xSy. વળી, ySy તો છે જ.

$\therefore$ xSy અને yS$y \Rightarrow y$Sx (S વૃત્તીય છે.)

$\therefore$ xS$y \Rightarrow y$Sx

$\therefore$ S એ સંમિત સંબંધ છે.

ધારો કે xSy અને ySz.

$\therefore$ zSx (S વૃત્તીય છે.)

$\therefore$ xSz (S સંમિત છે.)

$\therefore$ S પરંપરિત છે.

$\therefore$ S એ સામ્ય સંબંધ છે.

સ્વૈર યોગ અને છેદ : ધારો કે I એ વાસ્તવિક સંખ્યાનો કોઈ પણ અરિક્ત ઉપગણ છે. ધારો કે પ્રત્યેક $i \in$ Iને સંગત એક ગણ A_i મળે છે.

સ્વૈર યોગ અને છેદ આ પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય : $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = \{x \mid$ કોઈક $i \in$ I માટે $x \in A_i\}$

$$\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \{x \mid \text{દરેક } i \in \text{I માટે } x \in A_i\}$$

ઉદાહરણ તરીકે, ધારો કે I = [0, 1]. ધારો કે $A_i = [0, i]$

ઉદાહરણ તરીકે, $A_{\frac{1}{2}} = \left[0, \frac{1}{2}\right]$. આથી $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = [0, 1]$, $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \{0\}$

સામ્ય વર્ગો (Equivalent Classes) : ધારો કે S એ ગણ A પર સામ્ય સંબંધ છે. જો xSy હોય, તો આપણે $x \sim y$ (x એ yને સામ્ય છે) તેમ કહીશું. ($\sim$ ને wiggle વંચાય છે.)

ધારો કે $A_p = \{x \mid x \sim p, x \in A\}$

આપણે નીચેનું પરિણામ સાબિત કરીશું :

જો $p \sim q$ તો $A_p = A_q$ અને જો p એ q ને સામ્ય ન હોય, તો $A_p \cap A_q = \emptyset$

જો $A_p \cap A_q \neq \emptyset$, તો ધારો કે $x \in (A_p \cap A_q)$

$\therefore \quad x \in A_p$ અને $x \in A_q$

$\therefore \quad x \sim p$ અને $x \sim q$

$\therefore \quad p \sim x$ અને $x \sim q$

$\therefore \quad p \sim q$

$\therefore \quad p \in A_q$ અને $q \in A_p$

$\therefore \quad A_p \subset A_q$ અને $A_q \subset A_p$

$\therefore \quad A_p = A_q$.

આમ, જો $A_p \cap A_q \neq \emptyset$, તો $A_p = A_q$.

વળી, $p \sim p$.

$\therefore \quad p \in A_p \quad \forall p \in A$

$\therefore \quad \bigcup_{p \in A} A_p = A$

આમ, A નું A_p માં એવી રીતે અલગ-અલગ વર્ગમાં વર્ગ વિભાજન થાય છે કે જેથી,

(i) જો p અને q સામ્ય ન હોય, તો $A_p \cap A_q = \emptyset$ (ii) $\bigcup_{p \in A} A_p = A$

આ વર્ગો A_p ને $\sim$ ને સંગત મળતા સામ્ય વર્ગો કહેવાય છે.

વળી, Aના કોઈ પણ વર્ગ વિભાજનથી Aમાં સામ્ય સંબંધનો ઉદ્ભવ થાય છે.

જો x અને y બંને એક જ વર્ગ A_p માં આવેલ હોય, તો $x \sim y$ છે તેમ આપણે વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

x અને x બંને એક જ વર્ગમાં હોવાથી $x \sim x$.

x અને y બંને એક જ વર્ગમાં હોય તો y અને x બંને એક જ વર્ગમાં હોય. એટલે કે, જો $x \sim y$, તો $y \sim x$

જો $x \sim y$ અને $y \sim z$, તો x અને y તથા y અને z બંને એક જ વર્ગમાં હોય. તેથી x અને z પણ એક જ વર્ગમાં હોય.

$\therefore \quad x \sim z$

$\therefore \quad \sim$ એ સામ્ય સંબંધ છે.

ઉદાહરણ 10 : એક સંબંધ $\equiv$ એ Z પર વ્યાખ્યાયિત કરીએ. જો $a - b$ યુગ્મ પૂર્ણાંક હોય, તો $a \equiv b \pmod 2$. સાબિત કરો કે $\equiv$ એ Z પર સામ્ય સંબંધ છે. સામ્ય વર્ગો દર્શાવો.

ઉકેલ : $a - a = 0$ અને 0 યુગ્મ પૂર્ણાંક હોવાથી $a \equiv a \pmod 2$ $(\forall a \in Z)$

જો $a \equiv b \pmod 2$, તો $b \equiv a \pmod 2$ કારણ કે $a - b$ યુગ્મ પૂર્ણાંક છે $\Leftrightarrow$ $b - a$ યુગ્મ પૂર્ણાંક છે.

જો $a \equiv b \pmod 2$ અને $b \equiv c \pmod 2$, તો $a \equiv c \pmod 2$, કારણ કે $a - b$ યુગ્મ પૂર્ણાંક છે અને $b - c$ યુગ્મ પૂર્ણાંક છે, તો

$a - c = a - b + b - c$ યુગ્મ પૂર્ણાંક છે.

$\therefore \quad \equiv$ એ સામ્ય સંબંધ છે.

$\ldots -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots$ બધા એક સામ્યવર્ગ A_1 માં છે, કારણ કે $-7 \equiv 1 \pmod 2$, $-3 \equiv 1 \pmod 2$, વગેરે.

$\ldots -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots$ બધા એક સામ્યવર્ગ A_2 માં છે, કારણ કે $-8 \equiv 2 \pmod 2$, $-2 \equiv 2 \pmod 2$, વગેરે.

બધા જ પૂર્ણાંકો બે સામ્ય વર્ગમાં વહેંચાયેલા છે.

A_1 = બધા જ અયુગ્મ પૂર્ણાંકનો ગણ, A_2 = બધા જ યુગ્મ પૂર્ણાંકનો ગણ

ઉદાહરણ 11 : ધારો કે $Z = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, જ્યાં $A_1 = \{....1, 4, 7,...\}$

$A_2 = \{....2, 5, 8,...\}$

$A_3 = \{....3, 6, 9,...\}$

જેના સામ્ય વર્ગો A_1, A_2 અને A_3 હોય તેવો સામ્ય સંબંધ શોધો.

ઉકેલ : aSb નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરીએ. $3 \mid (a - b)$ અથવા $a \equiv b \pmod 3$ તો aSb.

$a \equiv a$ કારણ કે 3 વડે $a - a = 0$ વિભાજ્ય છે.

$$a \equiv b \pmod 3 \Rightarrow 3 \mid (a - b)$$
$$\Rightarrow 3 \mid (b - a)$$
$$\Rightarrow b \equiv a \pmod 3$$

$\therefore \quad aSb \Rightarrow bSa \quad \forall\ a, b \in Z$

$3 \mid (a - b)$ અને $3 \mid (b - c) \Rightarrow 3 \mid [(a - b) + (b - c)] = a - c$. આથી aSb અને $bSc \Rightarrow aSc$. આથી S સામ્ય સંબંધ છે. આમ હવે aSb માટે $a \sim b$ લખી શકાય. આ સામ્ય સંબંધ માટે,

$A_1 = \{....1, 4, 7, 10,...\}$, $A_2 = \{....2, 5, 8...\}$, $A_3 = \{....3, 6, 9...\}$ સામ્ય વર્ગો છે. આ સંબંધ માટે જો x અને y એક જ સામ્ય વર્ગમાં હોય, તો અને તો જ $x - y$ એ 3 વડે વિભાજ્ય હોય.

ઉદાહરણ 12 : ધારો કે ગણ L એ XY-સમતલમાં આવેલ બધી રેખાઓનો ગણ છે. L પર સંબંધ S નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત છે. $S = \{(L_1, L_2) \mid L_1 = L_2$ અથવા L_1 એ L_2ને સમાંતર છે.$\}$. સાબિત કરો કે S સામ્ય સંબંધ છે. તથા (i) X-અક્ષ અને (ii) Y-અક્ષને સમાવતા સામ્ય વર્ગો શોધો.

ઉકેલ : આપણે આગળ જોયું કે S એ સામ્ય સંબંધ છે.

X-અક્ષને સમાવતો સામ્ય વર્ગ એ રેખાઓ $y = b$, $b \in R$ પ્રકારની રેખાઓથી બનતો ગણ થશે.

Y-અક્ષને સમાવતો સામ્ય વર્ગ એ રેખાઓ $x = a$, $a \in R$ પ્રકારની રેખાઓથી બનતો ગણ થશે.

ઉદાહરણ 13 : સાબિત કરો કે ગણ $S = \{(P, Q) \mid P(x, y)$ અને $Q(x_1, y_1)$ના ઊગમબિંદુથી અંતર સમાન છે. $P, Q \in R^2\}$ તો S એ સામ્ય સંબંધ છે. બિંદુ (1, 0)ને સમાવતો સામ્ય વર્ગ લખો.

ઉકેલ : $d(P, O) = d(P, O)$. તેથી $(P, P) \in S$. તેથી S સ્વવાચક છે.

જો $d(P, O) = d(Q, O) = r$, તો $d(Q, O) = d(P, O) = r$. તેથી $(P, Q) \in S \Rightarrow (Q, P) \in S$. તેથી S સંમિત છે.

જો $d(P, O) = d(Q, O) = r$ અને $d(Q, O) = d(R, O) = r$ તો $d(P, O) = d(R, O) = r$

$\therefore \quad (P, Q) \in S, (Q, R) \in S \Rightarrow (P, R) \in S$. તેથી S પરંપરિત છે.

$\therefore \quad$ S એ સામ્ય સંબંધ છે.

$d(A(1, 0), O) = 1$

(1, 0) ને સમાવતો સામ્ય વર્ગ સમતલનાં એવાં બિંદુઓનાં ગણ છે કે જેનું ઊગમબિંદુથી અંતર 1 હોય, એટલે કે તે એકમ વર્તુળ થશે.

સ્વાધ્યાય 1.1

1. **નીચે આપેલામાંથી કયા સંબંધ સ્વવાચક, સંમિત કે પરંપરિત છે ?**

   (1) $A = \{1, 2, 3,...., 10\}$. $S = \{(x, y) \mid y = 2x\}$

   (2) $A = N$, $S = \{(x, y) \mid x$ એ y વડે વિભાજ્ય હોય$\}$

   (3) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $S = \{(x, y) \mid x$ એ y વડે વિભાજ્ય હોય$\}$

   (4) $A = Z$, $S = \{(x, y) \mid x - y \in Z\}$

   (5) $A = R$, $S = \{(x, y) \mid y = x + 1\}$

2. જો $6 \mid (a - b)$, તો aSb, $a, b \in Z$. સાબિત કરો કે S એ સામ્ય સંબંધ છે તથા સામ્ય વર્ગો લખો.

3. સાબિત કરો કે P(U) પર સંબંધ $\subset$ એ સ્વવાચક, વિસંમિત અને પરંપરિત છે.

4. (1) $f : N \to N$, $f(x) = x^2$ વિધેય છે. જો $f(x) = f(y)$ તો xSy. S સામ્ય સંબંધ છે ? સામ્ય વર્ગો કયા થશે ?

   (2) જો $f : Z \to Z$, $f(x) = x^2$, હોય તો ઉપરના સામ્ય સંબંધ માટે સામ્ય વર્ગો કયા થશે ?

5. $f : N \times N \to N \times N$, $f((m, n)) = (n, m)$. જો $f((a, b)) = f((c, d))$ તો (a, b) S (c, d). S સામ્ય સંબંધ છે ? (1, 2) ને સમાવતો સામ્ય વર્ગ કયો થશે ?

6. ધારો કે L એ XY સમતલમાં આવેલ રેખાઓનો ગણ છે. L પર સંબંધ S નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે :

$xSy \Leftrightarrow x = y$ અથવા $x \perp y$ અથવા $x \parallel y$.

S એ સામ્ય સંબંધ છે ? જો હા તો, સામ્ય વર્ગો દર્શાવો. X-અક્ષને સમાવતો સામ્ય વર્ગ કયો થાય ? જો L એ અવકાશમાં આવેલ બધી રેખાઓનો ગણ હોય, તો શું કહી શકાય ?

*

1.2 એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય

આપણે વિશિષ્ટ પ્રકારના સંબંધ 'વિધેય'નો અભ્યાસ કરી ગયા.

આપણે જાણીએ છીએ કે જો $A \neq \emptyset$ અને $B \neq \emptyset$ અને $f \subset (A \times B)$ અને $f \neq \emptyset$ તથા પ્રત્યેક $x \in A$ને સંગત અનન્ય ક્રમયુક્ત જોડ $(x, y) \in f$ હોય, તો f ને વિધેય કહેવાય છે.

આમ, f એ સંબંધ છે તથા તેનો પ્રદેશ A છે. આપણે વિધેયના આલેખ તથા વિધેયો પરની બૈજિક ક્રિયાઓ જેમકે સરવાળો, બાદબાકી, ગુણાકાર, ભાગાકારનો અભ્યાસ કરી ગયા.

નીચે આપેલાં બે વિધેયનો વિચાર કરો :

$f : N \to N,\ f(x) = x^2$

$\therefore\ f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16),....\}$

અહીં, જો $x_1 \neq x_2$ તો $f(x_1) \neq f(x_2)$.

$g : Z \to Z,\ g(x) = x^2$

$g = \{(0, 0), (1, 1), (-1, 1), (2, 4), (-2, 4).....\}$

અહીં $-1 \neq 1$, પરંતુ $g(-1) = g(1) = 1$.

f જેવા વિધેયને એક-એક વિધેય (one-one function) કહે છે અને g જેવા વિધેયને અનેક-એક વિધેય (many-one function) કહે છે.

ચાલો આપણે આ સંકલ્પનાને વ્યાખ્યાયિત કરીએ :

એક-એક વિધેય : જો $f : A \to B$ વિધેય હોય અને $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, તો $f : A \to B$ ને એક-એક વિધેય (one-one function, injection) કહે છે.

સામાન્ય રીતે આપણે સરળતા ખાતર ઉપરોક્ત અસમાનતાની જગ્યાએ સમાનાર્થી પ્રેરણનો ઉપયોગ કરીને સમતાથી એક-એક વિધેયને વ્યાખ્યાયિત કરીએ છીએ.

જો $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2,\ \forall x_1, x_2 \in A$, તો $f : A \to B$ એક-એક વિધેય છે.

વિધેય $f : A \to A$ ના સંદર્ભમાં $S = \{(x_1, x_2) \mid f(x_1) = f(x_2);\ x_1, x_2 \in A\}$ એ Aમાં સામ્ય સંબંધ છે.

$f(x_1) = f(x_1)$. આથી $(x_1, x_1) \in S$ **(સ્વવાચકતા)**

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$. તેથી $(x_1, x_2) \in S \Rightarrow (x_2, x_1) \in S$ **(સંમિતતા)**

$f(x_1) = f(x_2)$ અને $f(x_2) = f(x_3) \Rightarrow f(x_1) = f(x_3)$ **(પરંપરિતતા)**

આથી $(x_1, x_2) \in S,\ (x_2, x_3) \in S \Rightarrow (x_1, x_3) \in S$

$\therefore$ S એ સામ્ય સંબંધ છે.

એક-એક વિધેય $f : A \to A$ માટે x_1 ને સમાવતો સામ્ય વર્ગ ફક્ત $\{x_1\}$ થશે.

આમ, $A = \bigcup\limits_{x \in A} \{x\}$ એ ઉપરના મુજબના સામ્ય સંબંધને સંગત Aનું વર્ગવિભાજન થશે.

$f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{2, 3, 6, 7, 8\}$

$f = \{(1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 6), (5, 6)\}$ માટે

$f(1) = f(2) = 2$ હોવાથી f એક-એક વિધેય નથી.

અનેક-એક વિધેય : $f : A \to B$ વિધેય છે. જો કોઈક $x_1, x_2 \in A$ માટે $x_1 \neq x_2$ અને $f(x_1) = f(x_2)$, થાય તો $f : A \to B$ ને અનેક-એક વિધેય કહે છે.

અહીં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે અનેક-એક વિધેયની વ્યાખ્યાનું વિધાન એ એક-એક વિધેયની વ્યાખ્યાના વિધેયનું નિષેધ છે.

$f(C) = \{y \mid y = f(x), x \in C, C \subset A, C \neq \emptyset\}$ અને

$f^{-1}(D) = \{x \mid y = f(x), x \in A, y \in D, D \subset B\}$ વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

અહીં $f(C)$ અને $f^{-1}(D)$ ફક્ત સંકેતો છે.

આપણે નોંધીએ કે $f(C)$ ક્યારેય ખાલી ગણ ન થાય. $f^{-1}(D)$ રિક્ત હોઈ શકે.

ઉપરના ઉદાહરણમાં જો $C = \{2, 3, 4\}$ હોય, તો $f(C) = \{2, 3, 6\}$

જો $C = \{1, 2\}$, $\quad f(C) = \{2\}$

જો $D = \{8\}$, $\quad f^{-1}(D) = \emptyset$

જો $D = \{2\}$, $\quad f^{-1}(D) = \{1, 2\}$

જો $D = \{2, 6\}$, $\quad f^{-1}(D) = \{1, 2, 4, 5\}$

અહીં, $f(A)$ એ વિધેય $f : A \to B$નો વિસ્તાર થશે.

$f^{-1}(D)$ એ D ના ઘટકોના પૂર્વપ્રતિબિંબનો ગણ થશે.

$f^{-1}(B) = A$

ચાલો કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ :

ઉદાહરણ 14 : $f : N \to N, f(x) = 2x$ એક-એક વિધેય છે કે નહિ તે નક્કી કરો.

ઉકેલ : ધારો કે $x_1, x_2 \in N$.

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore$ $f : N \to N,\ f(x) = 2x$ એક-એક વિધેય છે.

ઉદાહરણ 15 : જો $f : R \to Z, f(x) = [x] = x$ નો પૂર્ણાંક ભાગ (અથવા floor function) તો $f : R \to Z$ એક-એક વિધેય છે ?

ઉકેલ : ના. અહીં, $f(2.1) = [2.1] = 2$

$f(2.23) = [2.23] = 2$

$\therefore$ f એક-એક વિધેય નથી.

ઉદાહરણ 16 : જો $f : R \to R^+ \cup \{0\}, f(x) = |x|$ એક-એક વિધેય છે ?

ઉકેલ : ના, $f(-1) = f(1) = 1$

$\therefore$ $f : R \to R^+ \cup \{0\}$ એક-એક વિધેય નથી.

ઉદાહરણ 17 : જો $f : N \cup \{0\} \to N \cup \{0\}, f(x) = x - 3\left[\frac{x}{3}\right]$, તો f એક-એક વિધેય છે ?

સંબંધ $S = \{(x_1, x_2) \mid f(x_1) = f(x_2)\}$ માટે સામ્ય વર્ગો શોધો.

ઉકેલ : $f(1) = 1 - 3\left[\frac{1}{3}\right] = 1, f(2) = 2, f(3) = 3 - 3 = 0, f(4) = 4 - 3\left[\frac{4}{3}\right] = 1,$

$f(5) = 5 - 3\left[\frac{5}{3}\right] = 2, f(6) = 6 - 3\left[\frac{6}{3}\right] = 0.$

ખરેખર, $f(n) = n$ ને 3 વડે ભાગતાં મળતી શેષ.

$\therefore$ $f(1) = f(4) = f(7) = f(10) = ... = 1$

$f(2) = f(5) = f(8) = f(11) = ... = 2$

$f(3) = f(6) = f(9) = f(12) = ... = 0$

$\therefore$ f એક-એક વિધેય નથી.

$\{1, 4, 7, 10,...\}, \{2, 5, 8, 11,...\}, \{0, 3, 6, 9, 12,...\}$ એ સામ્ય વર્ગો થશે.

વ્યાપ્ત વિધેય : **જો વિધેય $f : A \to B$ નો વિસ્તાર તથા તેનો સહપ્રદેશ B સમાન ગણ હોય, તો f ને વ્યાપ્ત વિધેય (onto function, surjection) કહે છે.**

જો $R_f = f(A) = B$ તો f વ્યાપ્ત હોય.

આમ, જો પ્રત્યેક $y \in B$ માટે, કોઈક $x \in A$નું અસ્તિત્વ હોય કે જેથી $y = f(x)$ થાય તો $f : A \to B$ એ વ્યાપ્ત વિધેય છે. જો કોઈક $y \in B$ માટે એવો કોઈ $x \in A$ ન મળે કે જેથી $y = f(x)$ થાય તો $f : A \to B$ વ્યાપ્ત વિધેય નથી.

ઉદાહરણ 18 : નીચે માગ્યા પ્રમાણે વિધેયનું એક ઉદાહરણ આપો : **(1)** એક-એક અને વ્યાપ્ત **(2)** એક-એક હોય પરંતુ વ્યાપ્ત ન હોય, **(3)** અનેક-એક અને વ્યાપ્ત **(4)** અનેક-એક હોય અને વ્યાપ્ત ન હોય.

ઉકેલ : (1) $f : N \to E$, જ્યાં E યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ, $f(x) = 2x$ એ વિધેય છે.

$f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), ...\}$

$\therefore \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore \quad f$ એક-એક વિધેય છે.

$R_f = \{2, 4, 6, ...\} = E$

પ્રત્યેક $y \in E$ એ કોઈક $n \in N$ માટે $2n$ સ્વરૂપનો છે અને $f(n) = 2n = y \in E$

$\therefore \quad R_f = E$

$\therefore \quad f$ એ વ્યાપ્ત વિધેય છે.

(2) $f : N \to N, f(x) = 2x$

$f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), ...\}$

(1) પ્રમાણે f એક-એક વિધેય છે.

$\therefore \quad R_f = \{2n \mid n \in N\} = E$, યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ

$\therefore \quad R_f = E \neq N$

$\therefore \quad f$ વ્યાપ્ત વિધેય નથી.

(3) $f : R \to Z, f(x) = [x]$

$f(1.1) = 1, f(1.3) = 1$

$\therefore \quad f$ અનેક-એક વિધેય છે.

પરંતુ $R_f = Z$. જો $n \in Z$ તો $f(n) = n$. તેથી પ્રત્યેક પૂર્ણાંક fના વિસ્તારમાં છે.

$\therefore \quad f$ એ વ્યાપ્ત વિધેય છે.

(4) $f : Z \to Z, f(x) = x^2$

$f(-1) = f(1) = 1$. તેથી f એક-એક વિધેય નથી પરંતુ અનેક-એક વિધેય છે.

$R_f = \{0, 1, 4, 9, ...\} \neq Z$

$\therefore \quad f$ વ્યાપ્ત વિધેય નથી.

એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય :

જો $f : A \to B$ એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય હોય, તો તેને એક-એક, વ્યાપ્ત વિધેય (Bijection) કહે છે.

ઉદાહરણ 19 : સાબિત કરો કે $f : R \to R, f(x) = ax + b, a \neq 0$ એ એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય છે.

ઉકેલ : ધારો કે $f(x_1) = f(x_2)$

$\therefore \quad ax_1 + b = ax_2 + b$

$\therefore \quad ax_1 = ax_2$

$\therefore \quad x_1 = x_2 \qquad (a \neq 0)$

$\therefore \quad f$ એક-એક વિધેય છે.

$y = ax + b \Leftrightarrow x = \frac{y - b}{a} \qquad (a \neq 0)$

$\therefore$ પ્રત્યેક $y \in R$ ને સંગત $x \in R$ એવો મળે કે જેથી,

$$f(x) = f\left(\frac{y-b}{a}\right) = a\left(\frac{y-b}{a}\right) + b = y - b + b = y$$

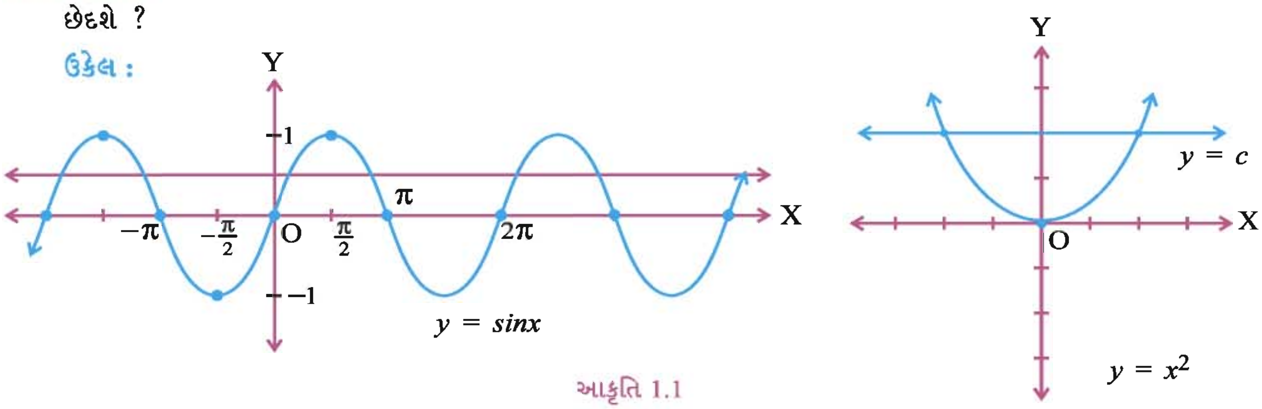
$\therefore$ f નો વિસ્તાર R છે.

$\therefore$ $f : R \to R$ વ્યાપ્ત વિધેય છે.

$\therefore$ $f : R \to R$ એ એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય છે.

ઉદાહરણ 20 : જો વિધેય $y = f(x)$ એક-એક હોય, તો કોઈ પણ સમક્ષિતિજ રેખા વિધેય f ના આલેખને કેટલાં બિંદુઓમાં છેદશે ?

ઉકેલ :



આકૃતિ 1.1

જો વિધેય $f : A \to B$ એક-એક હોય, તો કોઈ પણ સમક્ષિતિજ રેખા $y = c$ વિધેયના આલેખને વધુમાં વધુ એક બિંદુમાં છેદે.

જો $f : R \to R$, $f(x) = x^2$ હોય, તો સમક્ષિતિજ રેખા $y = c$ $(c > 0)$ એ f ના આલેખને બે બિંદુમાં છેદશે.

જો $f : R \to R$, $f(x) = x^2$ ને આપણે $g : R^+ \to R^+$ $g(x) = x^2$ માં મર્યાદિત કરીએ તો g એક-એક વિધેય થશે અને રેખા $y = c$ $(c > 0)$ $y = x^2$ ના આલેખને એક જ બિંદુમાં છેદશે. તે જ પ્રમાણે $y = sinx$ ના આલેખ માટે થશે. જો $x_1 \neq x_2$ તો $f(x_1) \neq f(x_2)$ થવું જોઈએ. જો $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ વગેરે તો સમક્ષિતિજ રેખા $y = c$ $(-1 \leq c \leq 1)$ એ $y = sinx$ના આલેખને વધુમાં વધુ એક બિંદુમાં છેદે. અન્યથા રેખા $y = c$ એ $y = sinx$, $x \in R$ ના આલેખને અનંત બિંદુઓમાં છેદે. $(-1 \leq c \leq 1)$

ઉદાહરણ 21 : જો $A = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ હોય, તો સાબિત કરો કે વિધેય $f : A \to A$ એક-એક હોય, તો અને તો જ વ્યાપ્ત હોય.

ઉકેલ : ધારો કે $f : A \to A$ એક-એક વિધેય છે.

$\therefore$ $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$ એ A ના ભિન્ન ઘટકો છે.

પરંતુ સહપ્રદેશ A માં n ઘટકો $x_1, x_2, ..., x_n$ છે.

$\therefore$ $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$ એ કોઈક ક્રમમાં $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ જ હોવા જોઈએ.

$\therefore$ $R_f = A$

$\therefore$ $f : A \to A$ વ્યાપ્ત છે.

વળી, ધારો કે $f : A \to A$ વ્યાપ્ત છે.

$\therefore$ $R_f = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$

હવે, $\{f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)\} = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$

$\therefore$ કોઈ પણ $f(x_i) = f(x_j)$ થાય તે શક્ય નથી. $(i \neq j)$

(જો કોઈક $f(x_i) = f(x_j)$, તો R_f માં તમામ $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ના હોય.)

$\therefore$ f એક-એક વિધેય છે.

ઉદાહરણ 22 : જો વિધેય $f : \{x_1, x_2,..., x_m\} \to \{y_1, y_2,..., y_n\}$ એક-એક હોય, તો સાબિત કરો કે $m \le n$.

ઉકેલ : f એક-એક વિધેય છે.

$\therefore$ $f(x_1), f(x_2),..., f(x_m)$ એ $\{y_1, y_2,..., y_n\}$ પૈકી m ભિન્ન ઘટકો છે.

$\therefore$ $m \le n$

ઉદાહરણ 23 : જો વિધેય $f : \{x_1, x_2,..., x_m\} \to \{y_1, y_2,..., y_n\}$ વ્યાપ્ત હોય તો સાબિત કરો કે $m \ge n$.

ઉકેલ : $f(x_1), f(x_2),..., f(x_m)$ પૈકી અમુક ઘટકો સમાન હોઈ શકે પરંતુ તે બધા જ મળીને ગણ $\{y_1, y_2,..., y_n\}$ બનાવે છે. (f વ્યાપ્ત છે.)

$\therefore$ જો $m < n$ હોય, તો $\{y_1, y_2,..., y_n\}$ પૈકી વધુમાં વધુ m ઘટકો fના વિસ્તારમાં હોય પરંતુ બધા જ n ઘટકો $y_1, y_2,..., y_n$ વિસ્તારમાં ન હોય.

$\therefore$ $m \ge n$

નોંધ : જો A, B સાન્ત ગણ હોય અને $f : A \to B$ એક-એક તથા વ્યાપ્ત હોય, તો $n(A) = n(B)$.

ઉદાહરણ 24 : $f : N \to Z$, $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ યુગ્મ} \\ -\frac{n-1}{2} & n \text{ અયુગ્મ} \end{cases}$

સાબિત કરો કે f એક-એક અને વ્યાપ્ત છે.

ઉકેલ : $f = \{(1, 0), (2, 1), (3, -1), (4, 2),...\}$

કારણ કે $f(1) = -\frac{1-1}{2} = 0$ (1 અયુગ્મ)

$f(2) = \frac{2}{2} = 1$ (2 યુગ્મ) વગેરે.

જો n ધનપૂર્ણાંક હોય, તો $f(2n) = \frac{2n}{2} = n$. $2n \in N$ હોવાથી $2n$ એ f ના પ્રદેશમાં છે.

જો n ઋણ પૂર્ણાંક અથવા શૂન્ય હોય, તો $f(-2n + 1) = -\left(\frac{-2n+1-1}{2}\right) = n$

વળી n ઋણ પૂર્ણાંક અથવા શૂન્ય હોય તો $-2n + 1$ એ ધનપૂર્ણાંક છે.

એટલે $(-2n + 1) \in N$

$\therefore$ $f : N \to Z$ના વિસ્તારમાં તમામ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ આવે.

$\therefore$ $R_f = Z$. તેથી f એ વ્યાપ્ત છે.

$f(n) = \frac{n}{2}$ અથવા $-\left(\frac{n-1}{2}\right)$

$\frac{n_1}{2} = \frac{n_2}{2} \Rightarrow n_1 = n_2$, $-\frac{n_1-1}{2} = -\frac{n_2-1}{2} \Rightarrow n_1 = n_2$

અને $\frac{n_1}{2} = -\frac{n_2-1}{2} \Rightarrow n_1 + n_2 = 1$, જે શક્ય નથી.

$\therefore$ કોઈ પણ $n_1, n_2 \in N$ માટે, $f(n_1) \ne f(n_2)$

$\therefore$ f એક-એક વિધેય છે.

$\therefore$ f એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય છે.

ઉદાહરણ 25 : સાબિત કરો કે $f : R - \{2\} \to R - \{2\}$, $f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$ એ એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય છે.

ઉકેલ : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1-1}{x_1-2} = \frac{2x_2-1}{x_2-2}$

$\Rightarrow 2x_1x_2 - x_2 - 4x_1 + 2 = 2x_1x_2 - x_1 - 4x_2 + 2$

$\Rightarrow 3x_1 = 3x_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore$ f એ એક-એક વિધેય છે.

ધારો કે $x \in R - \{2\}$.

ધારો કે $y = f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$

$\therefore \quad xy - 2y = 2x - 1$

$\therefore \quad (y - 2)x = 2y - 1$

$\therefore \quad x = \frac{2y-1}{y-2}$

$\therefore$ પ્રત્યેક $y \in R - \{2\}$ ને સંગત $x \in R - \{2\}$ એવો મળે કે જેથી,

$$y = f(x), \text{ કારણ કે } f(x) = f\left(\frac{2y-1}{y-2}\right) = \frac{2\left(\frac{2y-1}{y-2}\right) - 1}{\frac{2y-1}{y-2} - 2}$$

$$= \frac{4y-2-y+2}{2y-1-2y+4} = y$$

$\therefore \quad R_f = R - \{2\}$

$\therefore$ f વ્યાપ્ત વિધેય છે.

ઉદાહરણ 26 : $f : N \times N \to N,\ f((m, n)) = m + n$. f એક-એક છે ? f વ્યાપ્ત છે ?

ઉકેલ : $f((1, 2)) = 1 + 2 = 3, f((2, 1)) = 2 + 1 = 3$

પરંતુ $(1, 2) \neq (2, 1)$.

$\therefore$ f એક-એક વિધેય નથી.

$m \geq 1, n \geq 1 \Rightarrow m + n \geq 2$

$\therefore \quad f((m, n)) \geq 2$

$\therefore \quad 1 \notin R_f$

$\therefore$ f વ્યાપ્ત વિધેય નથી.

ઉદાહરણ 27 : $f : N \times N \to N \times N,\ f((m, n)) = (n, m)$. સાબિત કરો કે f એક-એક અને વ્યાપ્ત છે.

ઉકેલ : $\forall (m_1, n_1), (m_2, n_2) \in N \times N, f((m_1, n_1)) = f((m_2, n_2)) \Rightarrow (n_1, m_1) = (n_2, m_2)$

$$\Rightarrow n_1 = n_2, m_1 = m_2$$

$$\Rightarrow (m_1, n_1) = (m_2, n_2)$$

$\therefore$ f એક-એક વિધેય છે.

જો $(m, n) \in N \times N$, તો $f((n, m)) = (m, n)$. પ્રત્યેક $(m, n) \in R_f$.

$\therefore \quad R_f = N \times N$

$\therefore$ f વ્યાપ્ત વિધેય છે.

સ્વાધ્યાય 1.2

નીચે આપેલામાંથી કયાં વિધેય એક-એક છે ? કયા વ્યાપ્ત છે ? (1 થી 11)

1. $f : R \to R,\ f(x) = 5x + 7$
2. $f : R \to R,\ f(x) = 2 - 3x$
3. $f : R \to R,\ f(x) = x^2 + 4x + 5$
4. $f : R \to R,\ f(x) = x^2 - x - 2$
5. $f : N \to N,\ f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ યુગ્મ} \\ \frac{n+1}{2} & n \text{ અયુગ્મ} \end{cases}$
6. $f : R \to (-1, 1),\ f(x) = \frac{x}{1+|x|}$
7. $f : A \times B \to A,\ f((a, b)) = a$, A તથા B એકાકી ગણ નથી. $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$
8. $f : R \to R,\ f(x) = x^3$

9. $f : Z \to Z,\ f(n) = \begin{cases} n + 2 & n \text{ યુગ્મ} \\ 2n + 1 & n \text{ અયુગ્મ} \end{cases}$

10. $f : Z \to Z,\ f(n) = \begin{cases} n + 1 & n \text{ યુગ્મ} \\ n - 3 & n \text{ અયુગ્મ} \end{cases}$

11. $f : Z \to Z,\ f(n) = \begin{cases} n - 2 & n \text{ યુગ્મ} \\ 2n + 2 & n \text{ અયુગ્મ} \end{cases}$

12. ગણ $\{1, 2, 3,..., n\}$ પર કેટલાં એક-એક વિધેય મળી શકે ?

13. $A_1 = \{1\}, A_2 = \{1, 2\}, A_3 = \{1, 2, 3\}$

$f : A_i \to A_i$ ($i = 1, 2, 3$) પ્રકારના કેટલાં વ્યાપ્ત વિધેય મળી શકે ? આ પરિણામને તમે વ્યાપક બનાવી શકો ?

*

1.3 સંયોજિત વિધેય

આપણે સંયોજિત વિધેયની સંકલ્પનાનો અભ્યાસ કરી ગયાં. આપણે તેને યાદ કરીએ.

$f : A \to B$ અને $g : B \to C$ બે વિધેયો છે. તેમનું સંયોજિત વિધેય $gof : A \to C$,

$(gof)(x) = g(f(x))$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

જો $f : A \to B$ અને $g : C \to D$ વિધેયો હોય અને $R_f \subset D_g$, તો $gof : A \to D$

$(gof)(x) = g(f(x))$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

ઉદાહરણ 28 : જો $f : N \to N,\ f(x) = 2x + 3$ અને $g : N \to N, g(x) = 5x + 7$, તો gof અને fog શોધો.

ઉકેલ : $gof : N \to N$

$(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = 5(2x + 3) + 7 = 10x + 22$

$fog : N \to N$

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(5x + 7) = 2(5x + 7) + 3 = 10x + 17$

સામાન્ય રીતે, $gof \neq fog$.

ઉદાહરણ 29 : જો $f : R \to R,\ f(x) = x^3;\ \ g : R \to R,\ \ g(x) = x^5$, તો સાબિત કરો કે $gof = fog$.

ઉકેલ : $gof : R \to R, (gof)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = (x^3)^5 = x^{15}$

$fog : R \to R, (fog)(x) = f(g(x)) = f(x^5) = (x^5)^3 = x^{15}$

$\therefore\ gof = fog$

(નોંધ : $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$)

ઉદાહરણ 30 : $f : \{1, 2, 4, 5\} \to \{2, 3, 6, 7\}, f = \{(1, 2), (2, 3), (4, 6), (5, 7)\}$ અને

$g : \{2, 3, 6, 7, 8\} \to \{1, 3, 5, 6\}, g = \{(2, 1), (3, 1), (6, 1), (7, 5), (8, 6)\}$. gof અને fog પૈકી જે શક્ય હોય તે શોધો.

ઉકેલ : $R_f = \{2, 3, 6, 7\} \subset D_g = \{2, 3, 6, 7, 8\}$

$\therefore$ gof નું અસ્તિત્વ છે.

$(gof)(1) = g(f(1)) = g(2) = 1, (gof)(2) = g(f(2)) = g(3) = 1$ વગેરે.

$\therefore\ gof = \{(1, 1), (2, 1), (4, 1), (5, 5)\}$

$R_g = \{1, 5, 6\} \not\subset D_f = \{1, 2, 4, 5\}$

$\therefore$ fog નું અસ્તિત્વ નથી.

ઉદાહરણ 31 : જો $f : A \to B$ અને $g : B \to C$ એક-એક વિધેયો હોય, તો સાબિત કરો કે વિધેય $gof : A \to C$ એક-એક છે.

ઉકેલ : $(gof)(x_1) = (gof)(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ $\quad (x_1, x_2 \in A)$

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ $\quad$ (g એક-એક છે.)

$\Rightarrow x_1 = x_2$ $\quad$ (f એક-એક છે.)

$\therefore$ $gof : A \to C$ એક-એક વિધેય છે.

ઉદાહરણ 32 : જો $f : A \to B$ અને $g : B \to C$ વ્યાપ્ત વિધેયો હોય, તો સાબિત કરો કે વિધેય $gof : A \to C$ વ્યાપ્ત હોય.

ઉકેલ : ધારો કે $y \in C$.

$g : B \to C$ વ્યાપ્ત હોવાથી, $z \in B$ એવો મળે કે જેથી $g(z) = y$ થાય.

હવે, $f : A \to B$ વ્યાપ્ત છે અને $z \in B$ છે.

$\therefore$ $x \in A$ એવો મળે કે જેથી $f(x) = z$ થાય.

$\therefore$ $g(z) = y \Rightarrow g(f(x)) = y$

$\therefore$ $(gof)(x) = y$

$\therefore$ પ્રત્યેક $y \in C$ માટે $x \in A$ એવો મળે કે જેથી $(gof)(x) = y$ થાય.

$\therefore$ $gof : A \to C$ વ્યાપ્ત વિધેય છે.

ઉદાહરણ 33 : જો $gof : A \to C$ એક-એક વિધેય હોય, તો વિધેયો $f : A \to B$ અને $g : B \to C$ એક-એક હોય તેવું કહી શકાય ?

ઉકેલ : ના.

ધારો કે $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

$f : A \to B$, $f = \{(1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8), (5, 9)\}$

$$g : B \to B, \ g(x) = \begin{cases} x + 1 & x = 5, 6, 7, 8, 9 \\ 5 & x = 10, 11 \end{cases}$$

તો $gof : A \to B$, $gof = \{(1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9), (5, 10)\}$ એક-એક વિધેય થશે,

પરંતુ $g : B \to B$ એક-એક વિધેય નથી.

(**નોંધ :** અહીં $B = C$ લીધેલ છે.)

ઉદાહરણ 34 : જો $f : A \to B$ અને $g : B \to C$ બે વિધેયો હોય અને વિધેય $gof : A \to C$ એક-એક હોય, તો સાબિત કરો કે $f : A \to B$ એક-એક વિધેય હોય.

ઉકેલ : ધારો કે $f(x_1) = f(x_2)$ $\quad x_1, x_2 \in A$

$\therefore$ $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ $\quad (f(x_1) \in B, f(x_2) \in B)$

$\therefore$ $(gof)(x_1) = (gof)(x_2)$

$\therefore$ $x_1 = x_2$ $\quad$ (gof એક-એક છે.)

$\therefore$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore$ $f : A \to B$ એક-એક વિધેય છે.

ઉદાહરણ 35 : જો $gof : A \to C$ વ્યાપ્ત વિધેય હોય, તો વિધેયો $f : A \to B$ અને $g : B \to C$ વ્યાપ્ત થાય ?

ઉકેલ : ના. ધારો કે, $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $f(x) = x + 1$

$g : \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} \to \{4, 6, 8, 10\}$, $g(x) = 2x$, જ્યાં $x \neq 6$ અથવા 7

$g(6) = g(7) = 10$

તેથી $gof : \{1, 2, 3, 4\} \to \{4, 6, 8, 10\}$,

$gof = \{(1, 4), (2, 6), (3, 8), (4, 10)\}$

$\therefore$ $gof : A \to C$ વ્યાપ્ત છે, પરંતુ $f : A \to B$ વ્યાપ્ત નથી કારણ કે $6, 7 \notin R_f$

ઉદાહરણ 36 : જો $f : A \to B$ અને $g : B \to C$ બે વિધેયો હોય અને જો $gof : A \to C$ વ્યાપ્ત વિધેય હોય, તો સાબિત કરો કે $g : B \to C$ વ્યાપ્ત હોય.

ઉકેલ : $gof : A \to C$ વ્યાપ્ત વિધેય છે.

ધારો કે $z \in C$

$\therefore$ $x \in A$ એવો મળે કે જેથી $(gof)(x) = z$ થાય.

$\therefore$ $g(f(x)) = z$

$x \in A$ અને $f : A \to B$ વિધેય છે.

$\therefore$ $f(x) \in B$. ધારો કે $y = f(x)$.

$\therefore$ $g(y) = z$, જ્યાં $y \in B$.

$\therefore$ આમ, પ્રત્યેક $z \in C$ માટે $y \in B$ એવો મળે કે જેથી $g(y) = z$ થાય.

$\therefore$ $g : B \to C$ વ્યાપ્ત વિધેય છે.

સ્વાધ્યાય 1.3

1. $f : R \to R$, $g : R \to R$, $h : R \to R$ વિધેયો છે.

   સાબિત કરો કે : (i) $(fog)oh = fo(goh)$ (2) $(f + g)oh = foh + goh$

2. નીચે આપેલાં વિધેયો માટે gof અને fog શોધો :

   (1) $f : R \to R$, $f(x) = |x|$, $g : R \to R$, $g(x) = x^2$

   (2) $f : R^+ \to R^+$, $f(x) = x^3$, $g : R^+ \to R^+$, $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$

3. $f : R^+ \to R$, $f(x) = (3 - x^3)$નું ઘનમૂળ, તો fof શોધો.

4. $f : R \to R$, $f(x) = x^2 - x - 2$, તો fof શોધો.

5. $f : R - \{-1\} \to R - \{-1\}$, $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, તો fof શોધો.

6. $f : R \to R$ ચિહ્ન વિધેય છે.

   $$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

   $g : R \to Z$, $g(x) = [x]$, તો fog અને gof શોધો.

7. $f : Z \to Z$ અને $g : Z \to Z$ નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે :

   $$f(n) = \begin{cases} n + 2 & n \text{ યુગ્મ} \\ 2n - 1 & n \text{ અયુગ્મ} \end{cases} \qquad g(n) = \begin{cases} 2n & n \text{ યુગ્મ} \\ \frac{n-1}{2} & n \text{ અયુગ્મ} \end{cases}$$

   fog અને gof શોધો.

8. (1) જો $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ અને $f : A \to B$ એક-એક વિધેય હોય, તો સાબિત કરો કે કોઈક વિધેય $g : B \to A$ એવું મળે કે જેથી $gof = I_A$. (I તદેવ વિધેય છે.) થાય. (g ને fનો ડાબી બાજુનો વ્યસ્ત કહે છે.)

(2) જો $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ અને $f : A \to B$ વ્યાપ્ત વિધેય હોય, તો સાબિત કરો કે કોઈક વિધેય $g : B \to A$ એવું મળે કે જેથી $fog = I_B$ થાય. (gને fનો જમણી બાજુનો વ્યસ્ત કહે છે.)

(3) જો $f : A \to B$ એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય હોય, તો પરિણામ (1) અને (2) પરથી શું તારણ મળે ?

*

1.4 પ્રતિવિધેય

આપણે જાણીએ છીએ કે $3 \cdot 1 = 3$ જ્યાં 1 ગુણાકાર માટેનો તટસ્થ ઘટક છે. $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ અને $\frac{1}{3}$ એ 3નો વ્યસ્ત છે. તે જ પ્રમાણે આપણે ધોરણ XI માં જોઈ ગયા કે વિધેય $f : A \to B$ માટે $foI_A = f$ અને $I_Bof = f$ જ્યાં I_A અને I_B એ અનુક્રમે A અને B પરનાં તદેવ વિધેય છે. આપણને પ્રશ્ન થાય કે એવા કોઈ વિધેય $g : B \to A$નું અસ્તિત્વ હોઈ શકે કે જેથી $gof = I_A$ અને $fog = I_B$ થાય ? આ પ્રશ્નનો જવાબ કેટલીક શરતોને આધીન હા માં છે. આપણે પ્રતિવિધેયને નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

વ્યાખ્યા : જો $f : A \to B$ વિધેય હોય તથા વિધેય $g : B \to A$ મળે કે જેથી $gof = I_A$ અને $fog = I_B$ બને તો $g : B \to A$ને $f : A \to B$ નું પ્રતિવિધેય (Inverse function) કહે છે અને તેને સંકેતમાં f^{-1} વડે દર્શાવાય છે.

$g : B \to A$ને $f : A \to B$ નું પ્રતિવિધેય નામ આપી f^{-1} સંકેતનો ઉપયોગ કરતાં પહેલાં સાબિત કરવું જોઈએ કે $g : B \to A$ અનન્ય છે.

અનન્યતા : ધારો કે $f : A \to B$ નાં બે પ્રતિવિધેયો $g : B \to A$ અને $h : B \to A$ છે.

$\therefore \quad gof = I_A, \; fog = I_B, \; hof = I_A, \; foh = I_B.$

$g = goI_B = go(foh) = (gof)oh = I_Aoh = h$

વળી, $g : B \to A$, $h : B \to A$ વિધેયો છે. આથી $g = h$.

$\therefore$ જો $f : B \to A$ના પ્રતિવિધેયનું અસ્તિત્વ હોય, તો તે અનન્ય હોય.

કોઈ પણ વિધેયને પ્રતિવિધેય ક્યારે મળે ? આ પ્રશ્નનો ઉત્તર આપણે નીચે આપેલા પ્રમેયમાં આપીશું.

પ્રમેય 1.1 : જો $f : A \to B$ નું પ્રતિવિધેય $g : B \to A$, મળે તો $f : A \to B$ એક-એક અને વ્યાપ્ત થાય.

સાબિતી : ધારો કે $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1, x_2 \in A$

$\therefore \quad g(f(x_1)) = g(f(x_2)), \quad f(x_1), f(x_2) \in B$

$\therefore \quad (gof)(x_1) = (gof)(x_2)$

$\therefore \quad I_A(x_1) = I_A(x_2)$ ($g : B \to A$ એ $f : A \to B$નું પ્રતિવિધેય છે.)

$\therefore \quad x_1 = x_2$

$\therefore$ $f : A \to B$ એક-એક વિધેય છે.

ધારો કે $y \in B$

$\therefore \quad I_B(y) = y$

$\therefore \quad (fog)(y) = y$ $(fog = I_B)$

$\therefore \quad f(g(y)) = y$

$g : B \to A$ વિધેય છે. $y \in B$. આથી $g(y) \in A$.

ધારો કે $g(y) = x$. તેથી $f(g(y)) = f(x) = y$

$\therefore$ $x \in A$ અને $f(x) = y$

$\therefore$ પ્રત્યેક $y \in B$ માટે $x \in A$ એવો મળે કે જેથી $y = f(x)$.

$\therefore$ $f : A \to B$ વ્યાપ્ત છે.

પ્રમેય 1.2 : જો f એક-એક અને વ્યાપ્ત હોય, તો $f : A \to B$ નું પ્રતિવિધેય $g : B \to A$ મળે.

સાબિતી : ધારો કે $f(x) = y$ $\quad x \in A$

$g(y) = x$ વ્યાખ્યાયિત કરો.

$f : A \rightarrow B$ વ્યાપ્ત હોવાથી પ્રત્યેક $y \in B$ માટે $x \in A$ એવો મળે કે જેથી $f(x) = y$ થાય અને આ x અનન્ય હોય કારણ કે $f : A \rightarrow B$ એક-એક વિધેય આપેલ છે.

$\therefore$ $g : B \rightarrow A$ વિધેય છે.

$(gof)(x) = g(f(x)) = g(y) = x$

$(fog)(y) = f(g(y)) = f(x) = y$

$\therefore$ $gof = I_A$ અને $fog = I_B$.

$\therefore$ g એ fનું પ્રતિવિધેય છે.

પ્રમેય 1.1 અને પ્રમેય 1.2નું સંયુક્ત પરિણામ નીચે પ્રમાણે મળે :

જો $f : A \rightarrow B$ એક-એક અને વ્યાપ્ત હોય તો અને તો જ તેનું પ્રતિવિધેય $g : B \rightarrow A$ મળે.

એક પરિણામ :

જો $f : A \rightarrow B$ અને $g : B \rightarrow C$ એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય હોય, તો $gof : A \rightarrow C$ પણ એક-એક અને વ્યાપ્ત હોય તથા $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$.

સાબિતી : આપણે જાણીએ છીએકે $gof : A \rightarrow C$ એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય છે. (ઉદાહરણ 31, 32)

$\therefore$ $(gof)^{-1} : C \rightarrow A$નું અસ્તિત્વ છે અને $(gof)^{-1} : C \rightarrow A$ એ વિધેય છે.

$f^{-1} : B \rightarrow A$ અને $g^{-1} : C \rightarrow B$ વિધેયો છે.

$\therefore$ $f^{-1}og^{-1} : C \rightarrow A$ વિધેય છે.

$$\begin{aligned}(gof)\, o\, (f^{-1}og^{-1}) &= go((fof^{-1})\ og^{-1}) \\ &= go(I_B og^{-1}) \\ &= gog^{-1} \\ &= I_C \\ (f^{-1}og^{-1})\, o\, (gof) &= f^{-1}o((g^{-1}og)\, of) \\ &= f^{-1}o(I_B of) \\ &= f^{-1}of \\ &= I_A\end{aligned}$$

$\therefore$ $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

ઉદાહરણ 37 : $f : N \rightarrow E$, $f(x) = 2x$ માટે f^{-1} શોધો તથા $fof^{-1} = I_E$, $f^{-1}of = I_N$ ચકાસો જ્યાં E એ યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ છે.

ઉકેલ : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore$ $f : N \rightarrow E$ એક-એક વિધેય છે.

જો $y \in E$, $y = 2n$, $n \in N$ તો $f(n) = 2n = y$

$\therefore$ પ્રત્યેક $y \in E$ માટે $n \in N$ એવો મળે કે જેથી $f(n) = y$ થાય.

$\therefore$ $f : N \rightarrow E$ વ્યાપ્ત થાય.

$y = f(x) = 2x \Rightarrow x = \frac{y}{2} \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y}{2}$ $\qquad (x = f^{-1}(y))$

$\therefore$ $f^{-1} : E \rightarrow N$, $f^{-1}(y) = \frac{y}{2}$ અથવા $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$

fof^{-1} તથા $f^{-1}of$ની ચકાસણી વાચક પર છોડેલ છે.

ઉદાહરણ 38 : $f : R \rightarrow R$, $f(x) = ax + b$ $\ a \neq 0$ માટે $f^{-1} : R \rightarrow R$ શોધો.

ઉકેલ :
$$\begin{aligned}f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow ax_1 + b = ax_2 + b \\ &\Rightarrow ax_1 = ax_2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \qquad (a \neq 0)\end{aligned}$$

$\therefore$ f એક-એક વિધેય છે.

ધારો કે $y \in R$.

$$y = ax + b \Rightarrow x = \frac{y-b}{a} \in R \qquad (a \neq 0)$$

$\therefore$ પ્રત્યેક $y \in R$ માટે એવો $x \in R$ મળે કે જેથી $f(x) = f\left(\left(\frac{y-b}{a}\right)\right) = a\left(\frac{y-b}{a}\right) + b = y$

$\therefore$ f એ R પર વ્યાપ્ત છે.

$\therefore$ $f^{-1} : R \to R, \quad x = f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$

અથવા આપણે લખી શકીએ કે $f^{-1} : R \to R, f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$

ઉદાહરણ 39 : જો $f : R^+ \to R^+, f(x) = x^2$, તો f^{-1} શોધો.

ઉકેલ : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow {x_1}^2 = {x_2}^2$

$\Rightarrow |x_1| = |x_2|$

$\Rightarrow x_1 = x_2 \qquad (x_1, x_2 \in R^+)$

$\therefore$ f એક-એક વિધેય છે.

ધારો કે $y \in R^+$

$\therefore$ $x \in R^+$ એવો મળે કે જેથી $x = \sqrt{y}$. આથી $f(x) = x^2 = (\sqrt{y})^2 = y$.

$\therefore$ f એ R^+ પર વ્યાપ્ત છે.

$\therefore$ $f^{-1} : R^+ \to R^+, f^{-1}(y) = \sqrt{y} \qquad (x = f^{-1}(y))$

અથવા આપણે $f^{-1} : R^+ \to R^+, f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ લખી શકીએ.

ઉદાહરણ 40 : $f : R - \left\{-\frac{3}{2}\right\} \to R - \left\{\frac{3}{2}\right\}, \quad f(x) = \frac{3x+2}{2x+3}$ તો f^{-1} શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $f(x_1) = f(x_2) \qquad x_1, x_2 \in R - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

$\therefore$ $\frac{3x_1+2}{2x_1+3} = \frac{3x_2+2}{2x_2+3}$

$\therefore$ $6x_1x_2 + 9x_1 + 4x_2 + 6 = 6x_1x_2 + 9x_2 + 4x_1 + 6$

$\therefore$ $5x_1 = 5x_2$

$\therefore$ $x_1 = x_2$

$\therefore$ f એક-એક વિધેય છે.

ધારો કે $y = \frac{3x+2}{2x+3}$ અને $x \in R - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

$\therefore$ $2xy + 3y = 3x + 2$

$\therefore$ $(2y - 3)x = 2 - 3y$

$\therefore$ $x = \frac{2-3y}{2y-3} \qquad y \neq \frac{3}{2}$

$\therefore$ પ્રત્યેક $y \in R - \left\{\frac{3}{2}\right\}$ માટે એવો $x \in R - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ મળે કે જેથી $f(x) = y$ થાય.

$\therefore$ f વ્યાપ્ત થાય.

$\therefore$ $f^{-1} : R - \left\{\frac{3}{2}\right\} \to R - \left\{-\frac{3}{2}\right\}, f^{-1}(y) = -\frac{3y-2}{2y-3}$ અથવા

$f^{-1} : R - \left\{\frac{3}{2}\right\} \to R - \left\{-\frac{3}{2}\right\}, f^{-1}(x) = -\frac{3x-2}{2x-3}$.

ઉદાહરણ 41 : જો $f : A \rightarrow B$ એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય હોય, તો સાબિત કરો કે $(f^{-1})^{-1}$નું અસ્તિત્વ હોય અને $(f^{-1})^{-1} = f$.

ઉકેલ : $f^{-1} : B \rightarrow A$ નું અસ્તિત્વ છે અને $fof^{-1} = I_B$, $f^{-1}of = I_A$ થાય.

જો $g : A \rightarrow B$ એવું વિધેય મળે કે જેથી $f^{-1}og = I_A$ તથા $gof^{-1} = I_B$ તો $f^{-1} : A \rightarrow B$ ને પ્રતિવિધેય છે તથા તે $g : A \rightarrow B$ છે તેમ કહેવાય. પરંતુ ઉપર્યુક્ત સમતાઓના કારણે આવું વિધેય, તો $f : A \rightarrow B$ છે. વળી પ્રતિવિધેય અનન્ય છે.

$\therefore$ $f^{-1} : A \rightarrow B$ નું પ્રતિવિધેય મળે અને $(f^{-1})^{-1} = f$.

ઉદાહરણ 42 : $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 4, 9\}$, $f : A \rightarrow B$, $f(x) = x^2$, તો f^{-1} શોધો અને $f^{-1}of = I_A$, $fof^{-1} = I_B$ ચકાસો.

ઉકેલ : $f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$

$\therefore$ f એક-એક વિધેય છે.

$R_f = \{1, 4, 9\} = B$

$\therefore$ f એ B પર વ્યાપ્ત છે.

$\therefore$ $f^{-1} : B \rightarrow A$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ તથા $f^{-1} = \{(1, 1), (4, 2), (9, 3)\}$.

$\therefore$ $fof^{-1} = \{(1, 1), (4, 4), (9, 9)\} = I_B$.

$\therefore$ $f^{-1}of = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} = I_A$.

ઉદાહરણ 43 : $f : R \rightarrow \{x \mid x \geq 5, x \in R\}$, $f(x) = x^2 + 4x + 9$ માટે જો શક્ય હોય, તો f^{-1} શોધો.

ઉકેલ :
$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow x_1^2 + 4x_1 + 9 = x_2^2 + 4x_2 + 9 \\ &\Rightarrow x_1^2 - x_2^2 + 4(x_1 - x_2) = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 4) = 0 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ અથવા } x_1 + x_2 + 4 = 0 \end{aligned}$$

ધારો કે $x_1 = 0$, $x_2 = -4$ **($x_1 + x_2 + 4 = 0$ કરવા માટે)**

તો $f(x_1) = f(0) = 9$, $f(x_2) = f(-4) = 16 - 16 + 9 = 9$

$\therefore$ f એક-એક વિધેય ન બને.

$\therefore$ f^{-1}નું અસ્તિત્વ નથી.

નોંધ : $f(x) = x^2 + 4x + 9 = x(x + 4) + 9$

$\therefore$ $f(0) = 9$ તથા $f(-4) = (-4)0 + 9 = 9$

$\therefore$ f એક-એક નથી.

ઉદાહરણ 44 : જો $f : R - \{-1\} \rightarrow R - \{-1\}$, $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, તો સાબિત કરો કે f^{-1}નું અસ્તિત્વ છે અને $f = f^{-1}$.

ઉકેલ :
$$\begin{aligned} (fof)(x) &= f(f(x)) \\ &= f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \\ &= \frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}} \\ &= \frac{1+x-1+x}{1+x+1-x} \\ &= x = I_A(x), \text{ જ્યાં } A = R - \{-1\} \end{aligned}$$

$\therefore \quad fof = I_A$

$\therefore$ પ્રતિવિધેયની અનન્યતા અને f^{-1}ની વ્યાખ્યા પરથી, f^{-1}નું અસ્તિત્વ છે અને $f = f^{-1}$.

નોંધ : * કરેલા પ્રશ્ન માત્ર જાણકારી માટે છે, પરીક્ષા માટે નહીં.

***ઉદાહરણ 45 :** જો f, g, h એ A થી A પરનાં વિધેય હોય અને fog અને goh એક-એક અને વ્યાપ્ત હોય તો સાબિત કરો કે f, g, h એક-એક અને વ્યાપ્ત હોય.

ઉકેલ : (1) પ્રથમ આપણે f, g, h એક-એક વિધેય છે તેમ સાબિત કરીએ.

(i) ધારો કે $g(x_1) = g(x_2)$, $x_1, x_2 \in A$

$\therefore \quad f(g(x_1)) = f(g(x_2)), \quad g(x_1) \in A, g(x_2) \in A$

$\therefore \quad (fog)(x_1) = (fog)(x_2)$

$\therefore \quad x_1 = x_2$ (fog એક-એક છે.)

$\therefore \quad g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad x_1, x_2 \in A$

$\therefore \quad g : A \to A$ એક-એક વિધેય છે.

(ii) ધારો કે $h(x_1) = h(x_2)$, $x_1, x_2 \in A$

$\therefore \quad g(h(x_1)) = g(h(x_2)), \quad h(x_1) \in A, h(x_2) \in A$

$\therefore \quad (goh)(x_1) = (goh)(x_2)$

$\therefore \quad x_1 = x_2$ (goh એક-એક છે.)

$\therefore \quad h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad x_1, x_2 \in A$

$\therefore \quad h : A \to A$ એક-એક વિધેય છે.

(iii) ધારો કે $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1, x_2 \in A$

વિધેય goh એ Aમાં વ્યાપ્ત હોવાથી, એવા $y_1, y_2 \in A$ મળે કે જેથી $(goh)(y_1) = x_1$, $(goh)(y_2) = x_2$

$\therefore \quad f((goh)(y_1)) = f((goh)(y_2))$ ($f(x_1) = f(x_2)$)

$\therefore \quad (fog)(h(y_1)) = (fog)(h(y_2))$

$\therefore \quad h(y_1) = h(y_2)$ (fog એક-એક છે.)

$\therefore \quad g(h(y_1)) = g(h(y_2)), \quad h(y_1), h(y_2) \in A$

$\therefore \quad (goh)(y_1) = (goh)(y_2)$

$\therefore \quad x_1 = x_2$

$\therefore \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad x_1, x_2 \in A$

$\therefore \quad f : A \to A$ એક-એક વિધેય છે.

(2) હવે, આપણે f, g, h એ Aમાં વ્યાપ્ત છે તેમ સાબિત કરીએ.

ધારો કે $y \in A$

(i) વિધેય fog એ Aમાં વ્યાપ્ત હોવાથી $z \in A$ એવો મળે કે જેથી $(fog)(z) = y$ થાય.

$\therefore \quad f(g(z)) = y$

ધારો કે $g(z) = x$. તેથી $x \in A$. વળી, $f(x) = f(g(z)) = y$ અને $x \in A$

પ્રત્યેક $y \in A$ માટે $x \in A$ એવો મળે કે જેથી $f(x) = y$ થાય.

$\therefore \quad f$ એ Aમાં વ્યાપ્ત છે.

(ii) તે જ પ્રમાણે $z \in A$ એવો મળે કે જેથી $(goh)(z) = y$ થાય.

$\therefore \quad g(h(z)) = y$

ધારો કે $h(z) = x$. તેથી $g(x) = g(h(z)) = y$ જ્યાં $x \in A$

$\therefore \quad g$ એ Aમાં વ્યાપ્ત છે.

(iii) હવે $g(y) \in$ A.

વિધેય goh એ Aમાં વ્યાપ્ત હોવાથી $x \in$ A એવો મળે કે જેથી $(goh)(x) = g(y)$

$\therefore$ $g(h(x)) = g(y)$

પરંતુ g એક-એક વિધેય છે.

$\therefore$ $h(x) = y$

$\therefore$ પ્રત્યેક $y \in$ A માટે $x \in$ A એવો મળે કે જેથી $h(x) = y$ થાય.

$\therefore$ h એ Aમાં વ્યાપ્ત વિધેય છે.

***ઉદાહરણ 46 :** $f : A \to B$ અને $g : B \to C$ અને $h : B \to C$ વિધેયો છે.

(1) જો f વ્યાપ્ત વિધેય હોય અને $gof = hof$ હોય, તો $g = h$ સાબિત કરો.

(2) $gof = hof$ થાય પરંતુ $g \neq h$ હોય તેવું એક ઉદાહરણ આપો.

ઉકેલ : (1) ધારો કે $y \in$ B.

f એ Bમાં વ્યાપ્ત છે.

$\therefore$ $x \in$ A એવો મળે કે જેથી $f(x) = y$ થાય.

$\therefore$ $g(f(x)) = g(y)$ **($f(x) \in$ B)**

$\therefore$ $h(f(x)) = g(y)$ **($gof = hof$)**

$\therefore$ $h(y) = g(y)$

y એ Bનો કોઈ પણ યાદચ્છિક ઘટક હોવાથી અને $g : B \to C$ અને $h : B \to C$ વિધેયો હોવાથી $g = h$.

(2) $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{5, 6, 7\}$, $f = \{(1, 5), (2, 6), (3, 6), (4, 5)\}$

ધારો કે $g : \{5, 6, 7\} \to \{6, 8\}$, $g = \{(5, 6), (6, 8), (7, 8)\}$

ધારો કે $h : \{5, 6, 7\} \to \{6, 8\}$, $h = \{(5, 6), (6, 8), (7, 6)\}$

$gof = \{(1, 6), (2, 8), (3, 8), (4, 6)\}$

$hof = \{(1, 6), (2, 8), (3, 8), (4, 6)\}$

$\therefore$ $gof = hof$. પરંતુ $g \neq h$

***ઉદાહરણ 47 :** $f : A \to B$, $g : A \to B$ અને $h : B \to C$ વિધેય છે.

(1) જો $hof = hog$ અને h એક-એક વિધેય હોય, તો સાબિત કરો કે $f = g$.

(2) $hof = hog$ થાય, પરંતુ $f \neq g$ હોય તેવું એક ઉદાહરણ આપો.

ઉકેલ : (1) $hof : A \to C$ અને $hog : A \to C$ વિધેયો છે.

$(hof)(x) = (hog)(x), \ \forall x \in A$

$\therefore$ $h(f(x)) = h(g(x))$

$\therefore$ $f(x) = g(x) \quad \forall x \in A$ **(h એક-એક છે.)**

$\therefore$ $f = g$

(2) $f : \{1, 2, 3\} \to \{4, 5\}$, $f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$

$g : \{1, 2, 3\} \to \{4, 5\}$, $g = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5)\}$

$h : \{4, 5\} \to \{6, 7\}$, $h = \{(4, 6), (5, 6)\}$

$hof = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6)\} = hog$, પરંતુ $f \neq g$.

સ્વાધ્યાય 1.4

જો f^{-1}નું અસ્તિત્વ હોય તો તે શોધો : (1 to 6)

1. $f : R \to R, \quad f(x) = 2x + 3.$
2. $f : Z \to Z, \quad f(x) = x - 7.$
3. $f : R^+ \to R^+, \quad f(x) = x^3.$
4. $f : \{1, 2, 3, 4, ..., n\} \to \{2, 4, 6, ..., 2n\}, f(n) = 2n.$
5. $f : Z \to Z \times \{0, 1\}, f(n) = \begin{cases} \left(\frac{n}{2}, 0\right) & n \text{ યુગ્મ} \\ \left(\frac{n-1}{2}, 1\right) & n \text{ અયુગ્મ} \end{cases}$
6. $f : Z \to N, f(n) = \begin{cases} 4n & n > 0, \quad n \text{ યુગ્મ} \\ 4|n| + 1 & n \le 0, \quad n \text{ યુગ્મ} \\ 4n + 2 & n > 0, \quad n \text{ અયુગ્મ} \\ 4|n| + 3 & n < 0, \quad n \text{ અયુગ્મ} \end{cases}$

   સૂચન : $3 \notin R_f$. f વ્યાપ્ત નથી.
7. જો વિધેય $f : A \to B$ માટે એવું એક વિધેય $g : B \to A$ મળે કે જેથી $gof = I_A$ થાય, તો સાબિત કરો કે f એક-એક વિધેય હોય.
8. જો વિધેય $f : A \to B$ માટે એવું એક વિધેય $h : B \to A$ મળે કે જેથી $foh = I_B$ થાય, તો સાબિત કરો કે f એ Bમાં વ્યાપ્ત છે.
9. નીચે આપેલાં વિધેય માટે ચકાસો કે પ્રતિવિધેયનું અસ્તિત્વ છે કે નહીં. જો પ્રતિવિધેયનું અસ્તિત્વ હોય તો તે શોધો :

   (1) $f : R \to R \qquad f(x) = [x]$

   (2) $f : R \to R^+ \cup \{0\} \qquad f(x) = |x|$

   (3) $f : R \to [0, 1) \qquad f(x) = x - [x]$

   (4) $f : R \to Z \qquad f(x) = \lceil x \rceil$ (સિલિંગ વિધેય)

   (5) $f : C \to C \qquad f(z) = \overline{z}$ (C = સંકર સંખ્યાનો ગણ)

   (6) $f : N \times N \to N \qquad f((m, n)) = m + n$

   (7) $f : N \times N \to N \times N \qquad f((m, n)) = (n, m)$

*

1.5 દ્વિક્ક્રિયાઓ

આપણે જાણીએ છીએ કે બે પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો સરવાળો પ્રાકૃતિક સંખ્યા હોય છે.

એટલે કે, $a \in N, b \in N \Rightarrow a + b \in N$.

તે જ પ્રમાણે, $a, b \in Z$ તો, $a - b \in Z$

$a, b \in R$ તો, $a \times b \in R$

આમ, કોઈક અરિક્ત ગણ X અને $X \times X$ની ક્રમયુક્ત જોડ (a, b) ને સંગત ‘સરવાળો’, ‘ગુણાકાર’ વગેરે દ્વારા ગણ Xનો અનન્ય ઘટક મેળવી શકાય. આ ક્રિયાને X પરની દ્વિક્ક્રિયા કહે છે.

દ્વિક્ ક્રિયા : ધારો કે ગણ $A \neq \emptyset$. વિધેય $* : A \times A \rightarrow A$ ને A પરની દ્વિક્ક્રિયા (binary operation) કહે છે. આમ, $A \times A$ની પ્રત્યેક ક્રમયુક્ત જોડ (a, b)ને સંગત A નો અનન્ય ઘટક $*$ દ્વારા મળે છે. આ ઘટકને $f((a, b))$ અથવા $*(a, b)$, લખવાના બદલે $a * b$ લખાય છે. $*$ ને A પરની દ્વિક્ક્રિયા કહે છે. આમ, પ્રત્યેક $(a, b) \in A \times A$ને સંગત $*$ દ્વારા Aનો અનન્ય ઘટક $a * b$ મળે.

આમ, $+$ એ N, Z, Q, R, C પરની દ્વિક્ક્રિયા છે.

$\times$ એ N, Z, Q, R, C પરની દ્વિક્ક્રિયા છે.

$-$ એ Z, Q, R, C પરની દ્વિક્ક્રિયા છે. જો $a \in N$, $b \in N$ તો $a - b$ એ N માં હોય તે જરૂરી નથી. ઉદાહરણ તરીકે $3 \in N$, $7 \in N$, પરંતુ $3 - 7 = -4 \notin N$.

તે જ પ્રમાણે, $\div$ એ $Q - \{0\}$, $R - \{0\}$, $C - \{0\}$ પરની દ્વિક્ક્રિયા છે. જો $b = 0$ તો, $\frac{a}{b}$ એ Q અથવા R અથવા C પર વ્યાખ્યાયિત નથી.

$a \in N$, $b \in N$ પરંતુ $\frac{a}{b} \notin N$ સિવાય કે $b | a$.

આથી ભાગાકાર એ N પર દ્વિક્ક્રિયા નથી.

ક્રમનો નિયમ : $*$ એ ગણ A પરની દ્વિક્ક્રિયા છે. જો $a * b = b * a \quad \forall a, b \in A$, તો $*$ ક્રમના નિયમનું પાલન કરે છે તેમ કહેવાય.

$+$ એ N પર ક્રમના નિયમનું પાલન કરે છે.

$-$ એ Z પર ક્રમના નિયમનું પાલન ન કરે કારણ કે $a - b \neq b - a, \forall a, b \in Z$.

જૂથનો નિયમ : જો $(a * b) * c = a * (b * c) \quad \forall a, b, c \in A$, તો A પર વ્યાખ્યાયિત દ્વિક્ક્રિયા $*$ જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે તેમ કહેવાય.

આ નિયમની જરૂર શા માટે છે ?

$(a + b) + c = a + (b + c)$ એટલે કે $+$ એ R પર જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે તેથી આપણે $a + b + c$ એવું નિ:શંકપણે લખી શકીએ.

$(a - b) - c \neq a - (b - c)$

આથી, '$-$' એ R પર જૂથના નિયમનું પાલન ન કરે. તેથી જ્યારે '$-$'નો ઉપયોગ ત્રણ વાસ્તવિક સંખ્યા માટે આવે ત્યારે આપણે ફરજિયાતપણે કૌંસ દર્શાવવો પડે.

તટસ્થ ઘટક : $*$ એ ગણ A પરની દ્વિક્ક્રિયા છે. જો એવો ઘટક $e \in A$ મળે, જેથી

$a * e = e * a = a, \forall a \in A$ તો e ને $*$ માટેનો તટસ્થ ઘટક કહે છે.

$0 + a = a + 0 = a, \quad \forall a \in R$

$1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \quad \forall a \in R$

$\therefore$ Rમાં સરવાળા માટે તટસ્થ ઘટક 0 તથા ગુણાકાર માટે તટસ્થ ઘટક 1 છે.

$a \in R$ માટે $a - 0 \neq 0 - a$ સિવાય કે $a = 0$.

$\therefore$ '$-$' ને કોઈ તટસ્થ ઘટક નથી.

વ્યસ્ત ઘટક : જો ગણ A પરની દ્વિક્ક્રિયા $*$ માટે તટસ્થ ઘટક e હોય તથા $a \in A$ને સંગત ઘટક $a' \in A$ મળે, જેથી $a * a' = a' * a = e$ તો a' ને aનો વ્યસ્ત ઘટક કહે છે અને તેને સંકેતમાં a^{-1} વડે દર્શાવાય છે.

$\therefore \quad a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

ગણ R માં, કોઈ પણ શૂન્યેતર ઘટક aનો ગુણાકાર માટે વ્યસ્ત ઘટક $\frac{1}{a}$ છે.

R માં સરવાળા માટે કોઈ પણ ઘટક aનો વ્યસ્ત (વિરોધી) $-a$ છે.

0 ને R માં ગુણાકાર માટે વ્યસ્ત ન મળે.

ક્રિયા કોષ્ટક : જો A સાન્ત ગણ હોય અને $n(A)$ 'નાનો' હોય તો આપણે નીચે પ્રમાણે કોષ્ટક બનાવી શકીએ :

$*$	a_1	a_2	a_3	a_n
a_1				
a_2				
a_3				
.				
.				
.				
a_n				

$a_i * a_j$ એ i મી હાર અને j મો સ્તંભ જ્યાં છેદે તે ઘટક છે.

જો $*$ સમક્રમી હોય, તો કોષ્ટક મુખ્ય વિકર્ણની સાપેક્ષે સંમિત હોય.

ઉદાહરણ 48 : $N \cup \{0\}$ પર $*$ એ $a * b = |a - b|$ વડે વ્યાખ્યાયિત છે. $*$ દ્વિક્ક્રિયા છે ?

ઉકેલ : હા. $a - b \in Z$ અને $|a - b| \in N \cup \{0\}$

$\therefore$ $*$ એ દ્વિક્ક્રિયા છે.

ઉદાહરણ 49 : નીચે પ્રમાણેની ક્રિયા $*$ સમક્રમી છે ? જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે ?

(1) $N \cup \{0\}$ પર $a * b = 2^{ab}$

(2) R^+ પર $a * b = \frac{a}{b+1}$

ઉકેલ : (1) $a * b = 2^{ab} = 2^{ba} = b * a \quad \forall a, b \in N \cup \{0\}$

$\therefore$ દ્વિક્ક્રિયા $*$ સમક્રમી છે.

$(2 * 3) * 4 = 2^6 * 4 = 2^{2^6 \cdot 4} = 2^{256} = 2^{2^8}$

$2 * (3 * 4) = 2 * 2^{12} = 2^{2 \cdot 2^{12}} = \ = 2^{2^{13}}$

$\therefore$ દ્વિક્ક્રિયા $*$ જૂથના નિયમનું પાલન કરતી નથી.

(2) $a * b = \frac{a}{b+1}$, $b * a = \frac{b}{a+1}$

$$\frac{a}{b+1} = \frac{b}{a+1} \Rightarrow a^2 + a = b^2 + b$$

$$\Rightarrow (a - b)(a + b) + (a - b) = 0$$

$$\Rightarrow (a - b)(a + b + 1) = 0$$

$\therefore$ જો $a = b$ અથવા $a + b + 1 = 0$ તો $a * b = b * a$.

$2 * 3 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad 3 * 2 = \frac{3}{3} = 1$

$\therefore$ દ્વિક્ક્રિયા $*$ સમક્રમી નથી.

$$(2 * 3) * 4 = \frac{2}{4} * 4 = \frac{1}{2} * 4 = \frac{\frac{1}{2}}{4+1} = \frac{1}{10}$$

$$2 * (3 * 4) = 2 * \frac{3}{5} = \frac{2}{\frac{3}{5}+1} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$\therefore$ દ્વિક્ક્રિયા $*$ જૂથના નિયમનું પાલન કરતી નથી.

ઉદાહરણ 50 : $\wedge : R \times R \rightarrow R$, $\wedge(a, b) = a \wedge b = min(a, b)$ (a તથા b પૈકી નાની સંખ્યા) વડે વ્યાખ્યાયિત છે. ઉપગણ $\{2, 3, 4, 7, 8\}$ માટે $\wedge$ થી રચાતું ક્રિયા-કોષ્ટક બનાવો.

ઉકેલ :

$\wedge$	2	3	4	7	8
2	2	2	2	2	2
3	2	3	3	3	3
4	2	3	4	4	4
7	2	3	4	7	7
8	2	3	4	7	8

ઉદાહરણ 51 : ગણ $\{2, 4, 6, 8\}$ પર $*$ એ $a * b = (a, b)$નો ગુ.સા.અ. વડે વ્યાખ્યાયિત છે. $*$ માટે ક્રિયા કોષ્ટક બનાવો. દ્વિક્ક્રિયા $*$ સમક્રમી છે ?

ઉકેલ :

ગુ.સા.અ.	2	4	6	8
2	2	2	2	2
4	2	4	2	4
6	2	2	6	2
8	2	4	2	8

ગુ.સા.અ. (a, b) = ગુ.સા.અ. (b, a) થાય જ.

$\therefore$ $*$ સમક્રમી છે.

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે કોષ્ટક વિકર્ણની સાપેક્ષ સંમિત છે.

ઉદાહરણ 52 : N પર $*$ એ $a * b = a$ તથા b નો લ.સા.અ. વડે વ્યાખ્યાયિત દ્વિક્ક્રિયા છે.

(1) $8 * 10$, $5 * 3$, $12 * 24$ શોધો.

(2) $*$ સમક્રમી છે ?

(3) $*$ જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે ?

(4) જો શક્ય હોય, તો $*$ માટેનો તટસ્થ ઘટક શોધો.

(5) જે ઘટકના વ્યસ્ત અસ્તિત્વ ધરાવતા હોય તે શોધો.

ઉકેલ : (1) $8 * 10 = 8$ તથા 10 નો લ.સા.અ. $= 40$

$5 * 3 = 5$ તથા 3 નો લ.સા.અ. $= 15$

$12 * 24 = 12$ તથા 24 નો લ.સા.અ. $= 24$

(2) a તથા b નો લ.સા.અ. = b તથા a નો લ.સા.અ.

$\therefore$ $*$ સમક્રમી છે.

(3) $*$ જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે.

(4) $a * e = a, \quad \forall a \in$ N એટલે કે દરેક $a \in$ N માટે a તથા e નો લ.સા.અ. a થાય.

$\therefore$ $e | a \quad \forall a \in$ N

$\therefore$ વિશિષ્ટ કિસ્સામાં $e | 1$

$\therefore$ $e = 1$

$\therefore$ લ.સા.અ.ની દ્વિક્ક્રિયા માટે 1 તટસ્થ ઘટક છે.

(5) a તથા b નો લ.સા.અ. $\geq a$ અને a તથા b નો લ.સા.અ. $\geq b$.

$\therefore$ a તથા b નો લ.સા.અ. $\neq 1$ સિવાય કે $a = b = 1$. આથી માત્ર 1નો વ્યસ્ત મળે અને તે 1 છે.

ઉદાહરણ 53 : ધારો કે $X \neq \emptyset$. સાબિત કરો કે યોગક્રિયા અને છેદક્રિયા એ P(X) પર દ્વિક્ક્રિયા છે. તે સમક્રમી છે ? તે જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે ? $\cup$ અને $\cap$ માટે તટસ્થ ઘટક અને વ્યસ્ત ઘટક જો હોય, તો શોધો.

ઉકેલ : જો $A, B \in P(X)$ તો $A \cup B \in P(X)$ અને $A \cap B \in P(X)$

$\therefore$ $\cup$ અને $\cap$ એ $P(X)$ પર દ્વિક્ક્રિયા છે.

ધારો કે $A, B, C \in P(X)$.

$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$

અને $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$\therefore$ $\cup$ અને $\cap$ સમક્રમી છે તથા જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે.

વળી, $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A \quad \forall A \in P(X)$

$\therefore$ $\emptyset$ એ યોગક્રિયા માટે તટસ્થ ઘટક છે.

$A \cap X = X \cap A = A \quad \forall A \in P(X)$

$\therefore$ X એ છેદક્રિયા માટે તટસ્થ ઘટક છે.

$A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow A = B = \emptyset$.

$\therefore$ યોગક્રિયા માટે $P(X)$ના ફક્ત એક ઘટક $\emptyset$ ને વ્યસ્ત મળે છે અને તે $\emptyset$ છે.

$(A \cap B) \subset A$. આથી $A \cap B \neq X$ સિવાય કે $A = B = X$.

$\therefore$ છેદક્રિયા માટે $P(X)$ ના ફક્ત એક ઘટક Xને વ્યસ્ત મળે છે અને તે X છે.

ઉદાહરણ 54 : ગણ N પર $*$ એ $a * b = a + 2b$ વડે વ્યાખ્યાયિત છે. $*$ સમક્રમી છે ? $*$ જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે ? તટસ્થ ઘટક કે વ્યસ્ત ઘટકનું N માં અસ્તિત્વ છે ?

ઉકેલ : $2 * 3 = 2 + 6 = 8$

$3 * 2 = 3 + 4 = 7$

$\therefore$ $*$ સમક્રમી નથી.

$(2 * 3) * 4 = 8 * 4 = 8 + 8 = 16$

$2 * (3 * 4) = 2 * 11 = 2 + 22 = 24$

$\therefore$ $*$ જૂથના નિયમનું પાલન કરે નહીં.

જો $a * e = e * a = a, \quad \forall a \in N$, તો $a + 2e = e + 2a = a$

$\therefore$ $a + 2e = a$

$\therefore$ $e = 0$

પરંતુ $0 \notin N$.

$\therefore$ $*$ માટે તટસ્થ ઘટકનું અસ્તિત્વ નથી. આથી વ્યસ્ત વિશે પ્રશ્ન ઊભો થતો નથી.

ઉદાહરણ 55 : Z પર $*$ એ $a * b = a + b + 1$ વડે વ્યાખ્યાયિત છે. $*$ જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે ? તટસ્થ ઘટક તથા વ્યસ્ત ઘટકનું અસ્તિત્વ હોય તો શોધો.

ઉકેલ : $(a * b) * c = (a + b + 1) * c$

$= a + b + 1 + c + 1 = a + b + c + 2$

$a * (b * c) = a * (b + c + 1) = a + (b + c + 1) + 1 = a + b + c + 2$

$\therefore$ $*$ જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે.

ધારો કે $a * e = e * a = a, \quad \forall a \in Z$

$\therefore$ $a + e + 1 = a$

$\therefore$ $e = -1$

$a * (-1) = a + (-1) + 1 = a$. Also $(-1) * a = (-1) + a + 1 = a$.

$\therefore$ -1 એ $*$ માટે તટસ્થ ઘટક છે.

$a * b = a + b + 1 = -1 \Rightarrow b = -2 - a$

વળી, $a * (-a - 2) = a + (-a - 2) + 1 = -1$

$\therefore$ $-a - 2$ એ aનો વ્યસ્ત છે.

ઉદાહરણ 56 : દ્વિક્ક્રિયા $*$ એ જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે તથા e એ તટસ્થ ઘટક છે. જો ઘટક a ને વ્યસ્ત મળે તો તે અનન્ય હોય તેમ સાબિત કરો.

ઉકેલ : ધારો કે aને બે વ્યસ્ત a' અને a'' મળે છે.

$\therefore$ $a * a' = a' * a = e$

$a * a'' = a'' * a = e$

હવે, $a' = a' * e = a' * (a * a'')$

$= (a' * a) * a''$

$= e * a''$

$= a''$

$\therefore$ વ્યસ્ત મળે તો તે અનન્ય હોય.

ઉદાહરણ 57 : ગણ R પર $*$, $a * b = a + b - (ab)^2$ વડે વ્યાખ્યાયિત છે.

(1) સાબિત કરો કે $*$ સમક્રમી છે પરંતુ જૂથના નિયમનું પાલન કરે નહીં.

(2) $*$ માટે તટસ્થ ઘટક શોધો.

(3) સાબિત કરો કે 1 ને $*$ માટે બે વ્યસ્ત મળે છે.

(4) જો $a \in R$ હોય, તો સાબિત કરો કે a ને વધુમાં વધુ બે વ્યસ્ત મળે છે.

(5) કયા ઘટકને વ્યસ્ત ન મળે ? કયા ઘટકને ફક્ત એક વ્યસ્ત મળે ? કયા ઘટકને બે વ્યસ્ત મળે ?

ઉકેલ : (1) $a * b = a + b - (ab)^2 = b + a - (ba)^2 = b * a$

$\therefore$ $*$ સમક્રમી છે.

$(2 * 3) * (-2) = (2 + 3 - 36) * (-2) = (-31) * (-2)$

$= -31 - 2 - (62)^2$

$= -33 - 3844$

$= -3877$

$2 * (3 * (-2)) = 2 * (3 - 2 - (-6)^2) = 2 * (-35)$

$= 2 + (-35) - 4900$

$= -4933$

$\therefore$ $*$ દ્વારા જૂથના નિયમનું પાલન થતું નથી.

(2) $a * e = a + e - (ae)^2 = e + a - (ae)^2 = a \Rightarrow e - a^2e^2 = 0 \quad \forall a \in R \Rightarrow e = 0$

(વિશિષ્ટ કિસ્સામાં $a = 0$ લો.)

$a * 0 = a + 0 - 0 = a = 0 * a$

$\therefore$ 0 એ $*$ માટે તટસ્થ ઘટક છે.

(3) ધારો કે $1^{-1} = a$.

$1 * a = 1 + a - a^2 = 0$

$\therefore$ $a^2 - a - 1 = 0$

$\therefore$ $a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\therefore$ $1^{-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ અથવા $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\therefore$ 1 ને બે વ્યસ્ત મળે છે.

(4) ધારો કે b એ aનો વ્યસ્ત છે. $a \in R$.

જો $a * b = 0$ તો $a + b - a^2b^2 = 0$ (0 તટસ્થ ઘટક છે.)

$\therefore$ $b^2a^2 - b - a = 0$

આ bમાં દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

$\therefore$ આ સમીકરણને વધુમાં વધુ બે બીજ મળે કારણ કે $\Delta = 1 + 4a^3$ અને Δની કિંમત ધન અથવા ઋણ અથવા શૂન્ય હોય.

$\therefore$ દરેક ઘટક a ને વધુમાં વધુ બે વ્યસ્ત મળે.

(5) જો $4a^3 < -1$, તો $\Delta < 0$

$\therefore$ aને વ્યસ્ત ન મળે.

જો $4a^3 > -1$, તો aને બે વ્યસ્ત મળે.

જો $a^3 = \frac{-1}{4}$, તો aને ફક્ત એક વ્યસ્ત મળે.

$\therefore$ જો $a = \sqrt[3]{\frac{-1}{4}}$, તો aને ફક્ત એક વ્યસ્ત b મળે, $b = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a^3}}{2a^2} = \frac{1}{2a^2}$

$\therefore$ $a * \frac{1}{2a^2} = a + \frac{1}{2a^2} - \left(\frac{1}{2a}\right)^2 = a + \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{4a^2} = a + \frac{1}{4a^2} = \frac{4a^3+1}{4a^2} = 0$

$\therefore$ $a = \sqrt[3]{\frac{-1}{4}}$ ને ફક્ત એક વ્યસ્ત મળે, જે $\frac{1}{2a^2}$ છે.

(નોંધ : અહીં * એ જૂથના નિયમનું પાલન કરે નહીં. વ્યસ્તની અનન્યતા જળવાતી નથી.)

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 58 : જો xSy અને xS$z \Rightarrow y$Sz થાય તો સંબંધ S ને ત્રિકોણીય સંબંધ કહે છે.

સાબિત કરો કે S એ સામ્ય સંબંધ છે. $\Leftrightarrow$ S એ સ્વવાચક અને ત્રિકોણીય સંબંધ હોય.

ઉકેલ : ધારો કે S એ સામ્ય સંબંધ છે.

$\therefore$ S સ્વવાચક છે.

ધારો કે xSy અને xSz

$\therefore$ ySx અને xSz (S એ સંમિત છે)

$\therefore$ ySz (S એ પરંપરિત છે)

$\therefore$ xSy અને xS$z \Rightarrow y$Sz

$\therefore$ S ત્રિકોણીય છે.

હવે, ધારો કે S એ સ્વવાચક અને ત્રિકોણીય છે.

ધારો કે xSy. વળી, xSx.

$\therefore$ ySx

$\therefore$ xS$y \Rightarrow y$Sx

$\therefore$ S એ સંમિત છે.

ધારો કે xSy અને ySz

$\therefore$ ySx અને ySz (S એ સંમિત છે)

$\therefore$ xSz

$\therefore$ S એ પરંપરિત છે.

$\therefore$ S એ સામ્ય સંબંધ છે.

ઉદાહરણ 59 : ગણ Rમાં જો $x - y \in Z$ તો $x\text{S}y$. સાબિત કરો કે S એ સામ્ય સંબંધ છે. સામ્ય વર્ગો કયા થાય ?

ઉકેલ : $x - x \in Z$ કારણ કે $0 \in Z$

$\therefore$ $x\text{S}x$

$\therefore$ S એ સ્વવાચક છે.

જો $x - y \in Z$, તો $y - x \in Z$

$\therefore$ $x\text{S}y \Rightarrow y\text{S}x$

$\therefore$ S એ સંમિત છે.

જો $x - y \in Z$ અને $y - z \in Z$, તો

$x - y + y - z = x - z \in Z$

$\therefore$ જો $x\text{S}y$ અને $y\text{S}z$, તો $x\text{S}z$

$\therefore$ S પરંપરિત છે.

$\therefore$ S એ સામ્ય સંબંધ છે.

હવે S ને બદલે $\sim$ નો ઉપયોગ કરીએ.

હવે, $x \sim y \Leftrightarrow x - y$ એ પૂર્ણાંક સંખ્યા હોય.

જેમકે, જો $x = 7.82$, $y = 2.82$, તો $x - y = 5 \in Z$

$\therefore$ $x \sim y$

$x - [x] = 7.82 - 7 = 0.82$

$y - [y] = 5.82 - 5 = 0.82$ સમાન છે.

$x - [x]$ અને $y - [y]$ એવી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે જેમના દશાંશચિહ્ન પછીની દશાંશ અભિવ્યક્તિ સમાન હોય.
એટલે કે, જો $x - [x] = y - [y]$ અથવા $x - y = [x] - [y]$, તો સંખ્યા y એ x ના સામ્ય વર્ગમાં મળે.

$x - y = [x] - [y]$ તો x અને y એક સામ્ય વર્ગમાં મળે.

ઉદાહરણ 60 : વિધેય $f : \text{R} - \{-2\} \rightarrow \text{R} - \{1\}$, $f(x) = \frac{x}{x+2}$ એક-એક અને વ્યાપ્ત છે તેમ સાબિત કરો. f^{-1} શોધો.

ઉકેલ : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{x_1+2} = \frac{x_2}{x_2+2}$

$\Rightarrow x_1x_2 + 2x_1 = x_1x_2 + 2x_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore$ f એક-એક છે.

ધારો કે $x \in \text{R} - \{-2\}$

ધારો કે $y = \frac{x}{x+2}$

$\therefore$ $xy + 2y = x$

$x(y - 1) = -2y$

$x = \frac{-2y}{y-1} = \frac{2y}{1-y}$ $\qquad (y \in \text{R} - \{1\})$

$\therefore$ પ્રત્યેક $y \in \text{R} - \{1\}$ માટે $x \in \text{R} - \{-2\}$ એવો મળે કે જેથી $y = f(x)$ થાય.

$\therefore$ $\text{R}_f = \text{R} - \{1\}$

$\therefore$ f એ $\text{R} - \{1\}$માં વ્યાપ્ત થાય.

$\therefore$ $f^{-1} : \text{R} - \{1\} \rightarrow \text{R} - \{-2\}$, $f^{-1}(x) = \frac{2x}{1-x}$

ઉદાહરણ 61 : ગણ R પર $*$ એ $a * b = a + b - ab$ વડે વ્યાખ્યાયિત છે. $*$ માટે તટસ્થ ઘટક મળે ? $a \in R$ માટે જો અસ્તિત્વ ધરાવે તો તેનો વ્યસ્ત કયો મળે ?

ઉકેલ : $a * e = e * a = a, \forall a \in R \Rightarrow a + e - ae = a \quad \forall a \in R$

$\Rightarrow e - ae = 0 \quad \forall a \in R$

$\Rightarrow e = 0$ ($a = 0$ લેતાં)

વળી, $a * 0 = 0 * a = a + 0 - 0 = a$

$\therefore$ 0 એ $*$ માટે તટસ્થ ઘટક થશે.

હવે, $a * b = a + b - ab = 0 \Rightarrow (1 - a)b = -a$

$\Rightarrow b = \frac{a}{a-1}$, જ્યાં $a \neq 1$

જો $a \neq 1$ તો a^{-1} નું અસ્તિત્વ છે અને $a^{-1} = \frac{a}{a-1}$

ઉદાહરણ 62 : $Z - \{0\} \times Z - \{0\}$ પર સંબંધ S આ પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થાય છે. $(a, b)S(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$. સાબિત કરો કે આ સંબંધ સામ્ય સંબંધ છે. સામ્ય વર્ગો વિશે શું કહી શકાય ?

ઉકેલ : $ab = ba$ હોવાથી $(a, b)S(a, b)$

$\therefore$ S સ્વવાચક છે.

જો $(a, b)S(c, d)$, તો $ad = bc$

$\therefore$ $cb = da$

$\therefore$ $(c, d)S(a, b)$

$\therefore$ S સંમિત છે.

ધારો કે $(a, b)S(c, d)$ અને $(c, d)S(e, f)$

$\therefore$ $ad = bc$ અને $cf = de$

$\therefore$ $ade = bce$ અને $acf = ade$

$\therefore$ $acf = bce$

$\therefore$ $af = be \quad (c \neq 0)$

$\therefore$ $(a, b)S(e, f)$

$\therefore$ S પરંપરિત છે.

$\therefore$ S એ સામ્ય સંબંધ છે.

જો $ad = bc$ તો $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\therefore$ $\frac{2}{4} \sim \frac{3}{6} \sim \frac{1}{2} \sim \frac{5}{10} \ldots$

$\therefore$ અપૂર્ણાંકો (a, b)નો સામ્ય વર્ગ સંમેય સંખ્યા $\frac{a}{b}$ દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ 63 : $a * b = \frac{ab}{10} \quad a, b \in Q^+$

$*$ માટે તટસ્થ ઘટક શોધો. 4^{-1} અને $(4 * 5)^{-1}$ શોધો.

ઉકેલ : $a * b = a \Rightarrow \frac{ab}{10} = a \Rightarrow b = 10$ ($a \neq 0$)

વળી, $a * 10 = 10 * a = \frac{a \cdot 10}{10} = a$

$\therefore$ 10 એ $*$ માટે તટસ્થ ઘટક છે.

ધારો કે $4 * a = 10$

$\therefore$ $\frac{4a}{10} = 10$

$\therefore \quad a = 25$

$\therefore \quad 4^{-1} = 25$ $\qquad \left(4 * 25 = \frac{4 \cdot 25}{10} = 10\right)$

$\therefore \quad 4 * 5 = \frac{4 \cdot 5}{10} = 2$

હવે, $2 * a = 10 \Rightarrow \frac{2a}{10} = 10$

$\Rightarrow a = 50$

$\therefore \quad (4 * 5)^{-1} = 2^{-1} = 50$

સ્વાધ્યાય 1

1. સાબિત કરો કે $\{1, 2, 3\}$ પરના $(1, 2)$ અને $(1, 3)$ને સમાવતાં હોય તથા સ્વવાચક હોય, સંમિત હોય પરંતુ પરંપરિત ન હોય તેવા સંબંધોની સંખ્યા 1 હોય.
2. સાબિત કરો કે $\{1, 2, 3\}$ પરના $(1, 2)$ને સમાવતાં સામ્ય સંબંધોની સંખ્યા 2 હોય.
3. ગણ R પર S આ પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે : $(a, b) \in S \Leftrightarrow 1 + ab > 0 \quad \forall a, b \in R$
સાબિત કરો કે S સ્વવાચક છે, સંમિત છે પરંતુ પરંપરિત નથી.
(સૂચન : $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{-1}{2}$, $c = -8$ લો. $(a, b) \in S$, $(b, c) \in S$ તથા $(a, c) \notin S$)
4. $A = \{1, 2, 3, ..., 14, 15\}$, $S = \{(x, y) \mid y = 5x, x, y \in A\}$
ચકાસો કે S સ્વવાચક, સંમિત કે પરંપરિત છે ?
5. ગણ R પર Sનો સંબંધ નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત છે :
$S = \{(a, b) \mid a \leq b^2, a, b \in R\}$
સાબિત કરો કે S સ્વવાચક નથી, સંમિત નથી અને પરંપરિત નથી.
6. ધારો કે $S \subset (R \times R)$. $S = \{(A, B) \mid d(A, B) < 2\}$. સાબિત કરો કે S પરંપરિત નથી.
7. $N \times N$ પર S નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત છે :
$(a, b)\ S\ (c, d) \Leftrightarrow ad(b + c) = bc(a + d)$. સાબિત કરો કે S સામ્ય સંબંધ છે.
8. **નીચે આપેલાં વિધેય એક-એક છે કે નહિ તથા વ્યાપ્ત છે કે નહિ તે નક્કી કરો :**

(1) $f : R \to R, \quad f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$

(2) $f : R \to R, \quad f(x) = \begin{cases} -x + 1 & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$

(3) $f : Z \to Z, \quad f(n) = \begin{cases} n - 1 & n \text{ અયુગ્મ} \\ n & n \text{ યુગ્મ} \end{cases}$

(4) $f : Z \to Z, \quad f(n) = \begin{cases} n & n \text{ યુગ્મ} \\ \frac{n-1}{2} & n \text{ અયુગ્મ} \end{cases}$

(5) $f : R \times (R - \{0\}) \to R, f((x, y)) = \frac{x}{y}$

(6) $f : Z \to Z, f(n) = \begin{cases} n & n \text{ યુગ્મ} \\ 2n + 3 & n \text{ અયુગ્મ} \end{cases}$ (સૂચન : $3 \in R_f$ છે ?)

(7) $f : [-1, 1] \to [-1, 1], f(x) = x \mid x \mid$

(8) $f : N \to N \cup \{0\}, f(n) = n + (-1)^n$

(9) $f : N - \{1\} \to N$, $f(n) = n$નો મહત્તમ અવિભાજ્ય અવયવ

(10) $f : R - \{3\} \to R - \{1\}$, $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$

(11) $f : R \to R$, $f(x) = x - [x]$

9. $f : [0, 1] \to [0, 1]$, $f(x) = \begin{cases} x & x \in Q \\ 1 - x & x \notin Q \end{cases}$

સાબિત કરો કે $(fof)(x) = x$.

10. $f : Z \to Z$, $f(n) = 5n$ અને

$g : Z \to Z$, $g(n) = \begin{cases} \frac{n}{5} & \text{જો } 5 \mid n \\ 0 & \text{અન્યથા} \end{cases}$ તો gof અને fog શોધો.

11. $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

અને $g : R \to R$, $g(x) = [x]$. સાબિત કરો કે $(fog)(x) = (gof)(x)$ $\forall x \in [-1, 0)$

12. જો બે વિધેય $f : A \to B$ અને $g : B \to A$ એવાં હોય કે જેથી $gof = I_A$ થાય તો સાબિત કરો કે f એક-એક છે અને g એ Aમાં વ્યાપ્ત છે.

13. વિધેય $f : A \to B$ અને $g : B \to C$ માટે નીચે પ્રમાણે સાબિત કરો :

(1) જો $gof : A \to C$ એ Cમાં વ્યાપ્ત હોય, તો $g : B \to C$ એ Cમાં વ્યાપ્ત હોય.

(2) જો $gof : A \to C$ એક-એક હોય, તો $f : A \to B$ એક-એક હોય.

(3) જો $gof : A \to C$ વ્યાપ્ત અને $g : B \to C$ એક-એક હોય, તો $f : A \to B$ વ્યાપ્ત હોય.

(4) જો $gof : A \to C$ એક-એક અને $f : A \to B$ એ Bમાં વ્યાપ્ત હોય, તો $g : B \to C$ એક-એક હોય.

14. $f : R^+ \cup \{0\} \to R^+ \cup \{0\}$, $f(x) = \sqrt{x}$, $g : R \to R$, $g(x) = x^2 - 1$. fog અને gof પૈકી જે શક્ય હોય તે શોધો.

15. જો $f : N \cup \{0\} \to N \cup \{0\}$, $f(n) = \begin{cases} n + 1 & n \text{ યુગ્મ} \\ n - 1 & n \text{ અયુગ્મ} \end{cases}$ તો સાબિત કરો કે $f = f^{-1}$ થાય.

16. $f : R \to (-1, 1)$, $f(x) = \dfrac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$. જો અસ્તિત્વ હોય, તો f^{-1} શોધો.

17. $f : R - \left\{\frac{2}{3}\right\} \to R$, $f(x) = \dfrac{4x+3}{6x-4}$. સાબિત કરો કે $(fof)(x) = x$. f^{-1} વિશે શું કહી શકાય ?

18. R પર $*$, $a * b = a + b + ab$ વડે વ્યાખ્યાયિત છે. $*$ સમક્રમી છે ? $*$ જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે ? જો $a * b = a - b + ab$ હોય, તો ઉપર પ્રમાણેના પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો.

19. નીચે આપેલી દ્વિક્ક્રિયા સમક્રમી છે કે નહિ ? જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે કે નહિ ?

(1) N પર $a * b = a^b$

(2) N પર $a * b = (a, b)$નો ગુ.સા.અ.

(3) Q પર $a * b = a - b$

(4) Q પર $a * b = a^2b$

(5) R પર $a * b = a + b - 5$

(6) $R - \{-1\}$ પર $a * b = \frac{a}{b+1}$

(7) Q પર $a * b = \frac{a+b}{2}$

(8) Q પર $a * b = \frac{a-b}{2}$

(9) Z પર $a * b = a + b - 2$

(10) Z પર $a * b = a + 2b - 3$

20. નીચે આપેલી દ્વિક્ક્રિયા માટે તટસ્થ ઘટક શોધો અને જો અસ્તિત્વ હોય, તો વ્યસ્ત શોધો (જો તટસ્થ ઘટકનું અસ્તિત્વ હોય, તો)

(1) $Q - \{-1\}$ પર $a * b = a + b + ab$

(2) $Q - \{0\}$ પર $a * b = \frac{ab}{2}$

(3) Z પર $a * b = a + b - 2$

(4) $R - \{1\}$ પર $a * b = a + b - ab$

(5) R પર $a * b = \sqrt{|a^2 - b^2|}$

(6) R પર $a * b = 3a + 4b - 2$

(7) Z પર $a * b = a + 3b^2$

(8) N પર $a * b =$ ગુ.સા.અ. (a, b)

(9) P(X) ઉપર $A * B = A \cap B$ જ્યાં, $X \neq \emptyset$

(10) P(X) ઉપર $A * B = A \cup B$ જ્યાં, $X \neq \emptyset$

વિભાગ A (1 ગુણ)

1. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) ગણ {1, 2, 3, 4, 5} પરનો સંબંધ S = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)} એ ...... ☐

(a) ફક્ત સંમિત હોય (b) ફક્ત સ્વવાચક હોય

(c) ફક્ત પરંપરિત હોય (d) સામ્ય સંબંધ હોય

(2) ગણ A = {1, 2, 3} પરના (1, 3)ને સમાવતા સામ્ય સંબંધોની સંખ્યા .... હોય. ☐

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 8

(3) Z પર સંબંધ S આ પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે : $(x, y) \in S \Leftrightarrow |x - y| \leq 1$. S એ ...... ☐

(a) સ્વવાચક અને પરંપરિત છે, સંમિત નથી. (b) સ્વવાચક અને સંમિત છે, પરંપરિત નથી.

(c) સંમિત અને પરંપરિત છે, સ્વવાચક નથી. (d) સામ્ય સંબંધ છે.

(4) $R - \{0\}$ પર સંબંધ S આ પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે : $(x, y) \in S \Leftrightarrow xy > 0$. S એ ...... ☐

(a) સામ્ય સંબંધ છે (b) ફક્ત સ્વવાચક

(c) ફક્ત સંમિત (d) ફક્ત પરંપરિત

(5) Z પર વ્યાખ્યાયિત નીચે આપેલામાંથી કયો સંબંધ સામ્ય સંબંધ નથી. ☐

(a) $(x, y) \in S \Leftrightarrow x \geq y$ (b) $(x, y) \in S \Leftrightarrow x = y$

(c) $(x, y) \in S \Leftrightarrow x - y$ એ 3નો ગુણક હોય (d) જો $|x - y|$ યુગ્મ $\Leftrightarrow (x, y) \in S$

(6) જો Z પર $a * b = a^2 + b^2$, તો $(2 * 3) * 4 =$ ......

(a) 13 (b) 16 (c) 185 (d) 13

(7) જો Z પર $a * b = a^2 + b^2 + ab + 2$, તો $3 * 4 =$ ......

(a) 40 (b) 39 (c) 25 (d) 41

(8) જો Q^+ પર $a * b = \frac{ab}{2}$ તો $*$ માટે તટસ્થ ઘટક ...... છે.

(a) 2 (b) 3 (c) 0 (d) 1

(9) જો Q^+ પર $a * b = \frac{ab}{3}$, તો શૂન્યેતર aનો $*$ માટે વ્યસ્ત ...... છે.

(a) $\frac{3}{a}$ (b) $\frac{9}{a}$ (c) $\frac{1}{a}$ (d) $\frac{2}{a}$

(10) ગણ {1, 2} પર દ્વિક્ક્રિયાઓની કુલ સંખ્યા ...... છે.

(a) 16 (b) 8 (c) 2 (d) 4

(11) ગણ $\{1, 2, 3, ..., n\}$ પર દ્વિક્ક્રિયાઓની કુલ સંખ્યા ...... છે.

(a) 2^n (b) n^{n^2} (c) n^3 (d) n^{2n}

(12) ગણ $R - \{-1\}$ પર $a * b = a + b + ab$, તો a^{-1} ...... છે.

(a) a^3 (b) $\frac{1}{a}$ (c) $\frac{-a}{a+1}$ (d) $\frac{1}{a^2}$

(13) ગણ Z પર $a * b = a + b + 10$ માટે તટસ્થ ઘટક ...... છે.

(a) 0 (b) -5 (c) -10 (d) 1

(14) ગણ {1, 2} પર સમક્રમી દ્વિક્ક્રિયાઓની સંખ્યા ...... છે.

(a) 8 (b) 4 (c) 16 (d) 27

(15) જો Q^+ પર $a * b = \frac{ab}{100}$ હોય, તો 0.1નો વ્યસ્ત ...... છે.

(a) 100000 (b) 10000 (c) 1000 (d) 10

વિભાગ B (2 ગુણ)

(16) $A = [-1, 1]$, $B = [0, 1]$, $C = [-1, 0]$

$S_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x \in A, y \in A\}$

$S_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x \in A, y \in B\}$

$S_3 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x \in A, y \in C\}$

$S_4 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x \in B, y \in C\}$ તો...

(a) S_1 વિધેયનો આલેખ નથી. (b) S_2 વિધેયનો આલેખ નથી.

(c) S_3 વિધેયનો આલેખ નથી. (d) S_4 વિધેયનો આલેખ નથી.

(17) $f : R \to R$, $f(x) = 3^x + 3^{|x|} =$ ......

(a) એક-એક અને વ્યાપ્ત છે. (b) એક-એક છે પરંતુ વ્યાપ્ત નથી.

(c) અનેક-એક છે અને વ્યાપ્ત છે. (d) અનેક-એક છે પરંતુ વ્યાપ્ત નથી.

(18) $f : R - \{q\} \to R - \{1\}$, $f(x) = \frac{x-p}{x-q}$, $p \neq q$, તો f એ ......

(a) એક-એક અને વ્યાપ્ત છે. (b) અનેક-એક છે અને વ્યાપ્ત નથી.

(c) એક-એક છે અને વ્યાપ્ત નથી. (d) અનેક-એક છે અને વ્યાપ્ત છે.

(19) $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1], f(x) = -x\,|x|$ એ ......

(a) એક-એક અને વ્યાપ્ત છે. (b) અનેક-એક અને વ્યાપ્ત છે.

(c) અનેક-એક છે અને વ્યાપ્ત નથી. (d) એક-એક છે અને વ્યાપ્ત નથી.

(20) જો $f : R \rightarrow R, f(x) = 2x - 3$, તો ...

(a) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2x-3}$ (b) $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$ (c) f^{-1} નું અસ્તિત્વ નથી. (d) $f^{-1}(x) = 3x - 2$

(21) જો $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ એ એક-એક અને વ્યાપ્ત હોય, તો $f(x) =$ ...... શક્ય છે.

(a) $f(x) = |x|$ (b) $f(x) = sinx$ (c) $f(x) = x^2$ (d) $f(x) = cosx$

(22) $f : R \rightarrow R, f(x) = x^2 + 2x + 3$ એ...

(a) એક-એક અને વ્યાપ્ત છે. (b) એક-એક છે પરંતુ વ્યાપ્ત નથી.

(c) વ્યાપ્ત છે પરંતુ એક-એક ન નથી. (d) અનેક-એક છે અને વ્યાપ્ત નથી.

(23) જો R પર $a * b = ab + 1$ તો $*$ એ...

(a) સમક્રમી છે પરંતુ જૂથના નિયમનું પાલન ન કરે.

(b) જૂથના નિયમનું પાલન કરે પરંતુ સમક્રમી નથી.

(c) સમક્રમી નથી અને જૂથના નિયમનું પાલન ન કરે.

(d) સમક્રમી છે અને જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે.

(24) જો Z પર $a * b = a^2 + b^2$, તો $*$ એ...

(a) સમક્રમી છે તથા જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે.

(b) સમક્રમી છે તથા જૂથના નિયમનું પાલન ન કરે.

(c) સમક્રમી નથી અને જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે.

(d) સમક્રમી નથી અને જૂથના નિયમનું પાલન કરતું નથી.

(25) જો $Q - \{1\}$ પર $a * b = a + b - ab$, હોય તો $*$ માટે અનુક્રમે તટસ્થ ઘટક ...... તથા aનો વ્યસ્ત ...... છે.

(a) 0 અને $\frac{a}{a-1}$ (b) 1 અને $\frac{a-1}{a}$ (c) -1 અને a (d) 0, $\frac{1}{a}$

(26) જો Q^+ પર $a * b = \frac{ab}{3}$, તો $3 * \left(\frac{1}{5} * \frac{1}{2}\right)$ એ ...... છે.

(a) $\frac{5}{160}$ (b) $\frac{1}{30}$ (c) $\frac{3}{160}$ (d) $\frac{3}{60}$

(27) જો P(X) $(X \neq \emptyset)$ પર Δ એ $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$, વડે વ્યાખ્યાયિત હોય, તો...

(a) Δ માટે તટસ્થ ઘટક $\emptyset$ અને Aનો વ્યસ્ત A હોય છે.

(b) Δ માટે તટસ્થ ઘટક A અને Aનો વ્યસ્ત $\emptyset$ હોય છે.

(c) Δ માટે તટસ્થ ઘટક A' અને Aનો વ્યસ્ત A હોય છે.

(d) Δ માટે તટસ્થ ઘટક X અને Aનો વ્યસ્ત $\emptyset$ હોય છે.

વિભાગ C (3 ગુણ)

(28) $N \times N$ પર S આ પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે : $((a, b), (c, d)) \in S \Leftrightarrow a + d = b + c$...

(a) S સ્વવાચક છે પરંતુ સંમિત નથી. (b) S ફક્ત સ્વવાચક અને પરંપરિત છે.

(c) S સામ્ય સંબંધ છે. (d) S ફક્ત પરંપરિત છે.

(29) ગણ $A = \{5, 6, 7, 8\}$ પર સંબંધ S નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત છે :

$S = \{(5, 6), (6, 6), (5, 5), (8, 8), (5, 7), (7, 7), (7, 6)\}$, તો...

(a) S સ્વવાચક અને સંમિત છે પરંતુ પરંપરિત નથી.

(b) S સ્વવાચક અને પરંપરિત છે પરંતુ સંમિત નથી.

(c) S સંમિત અને પરંપરિત છે પરંતુ સ્વવાચક નથી.

(d) S સામ્ય સંબંધ છે.

(30) જો $f : R^+ \to R$, તો $f(x) = \frac{x}{x+1}$ એ ......

(a) એક-એક છે અને વ્યાપ્ત છે. (b) એક-એક છે અને વ્યાપ્ત નથી.

(c) એક-એક નથી અને વ્યાપ્ત નથી. (d) વ્યાપ્ત છે પરંતુ એક-એક નથી.

(31) જો $f : R \to R$, $f(x) = [x]$, $g : R \to R$, $g(x) = sinx$, $h : R \to R$, $h(x) = 2x$, તો

$ho(gof)$ = ...

(a) $sin[x]$ (b) $[sin2x]$ (c) $2(sin[x])$ (d) $sin2[x]$

(32) $f : R \to (-1, 1)$, $f(x) = \frac{-x|x|}{1+x^2}$, તો $f^{-1}(x)$ = ...

(a) $\frac{1}{x^2+1}$ (b) $-\text{signum}\, x\sqrt{\frac{|x|}{1-|x|}}$ (c) $-\frac{\sqrt{x}}{1-x}$ (d) $\frac{x^2}{x^2+1}$

(33) $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

$g : R \to R$, $g(x) = 1 + x - [x]$, તો પ્રત્યેક x માટે, $f(g(x))$ = ...

(a) 1 (b) 2 (c) 0 (d) −1

વિભાગ D (4 ગુણ)

(34) જો $f : \{x \mid x \ge 1, x \in R\} \to \{x \mid x \ge 2, x \in R\}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$ તો $f^{-1}(x)$ = ...

(a) $\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$ (b) $\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}$ (c) $\frac{x^2+1}{x}$ (d) $\sqrt{x^2-4}$

(35) જો $f : R \to R$, $f(x) = x - [x]$, તો $f^{-1}(x)$ ......

(a) નું અસ્તિત્વ નથી. (b) $= x$ (c) $= [x]$ (d) $= x - [x]$

(36) જો $f : R^+ \to R^+$ $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, તો $(fo(fof))(x)$ = ...

(a) $\frac{x}{1+x^2}$ (b) $\frac{1+x^2}{x}$ (c) $\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$ (d) $\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$

(37) જો $f : R \to R$, $f(x) = x^2$, $g : R \to R$, $g(x) = 2^x$, તો $\{x \mid (fog)(x) = (gof)(x)\}$ = ...

(a) $\{0\}$ (b) $\{0, 1\}$ (c) R (d) $\{0, 2\}$

(38) $f : R \rightarrow Z, f(x) = [x]$ એ ......

(a) એક-એક છે અને વ્યાપ્ત છે અને તેના વ્યસ્તનું અસ્તિત્વ છે.

(b) અનેક-એક છે અને વ્યાપ્ત નથી, વ્યસ્તનું અસ્તિત્વ નથી.

(c) અનેક-એક છે અને વ્યાપ્ત છે, વ્યસ્તનું અસ્તિત્વ નથી.

(d) એક-એક છે અને વ્યાપ્ત નથી, વ્યસ્તનું અસ્તિત્વ નથી.

(39) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. જો $a, b \in A$, $a * b = ab$ ને 7 વડે ભાગતા મળતી શેષ, તો દ્વિક્ક્રિયાના કોષ્ટક પરથી 2 નો $*$ માટેનો વ્યસ્ત ...... છે.

(a) 1 (b) 5 (c) 6 (d) 4

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચે આપેલા મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. સંબંધ અને સામ્ય સંબંધ
2. એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય
3. વિધેયોનું સંયોજન
4. વિધેયનું પ્રતિવિધેય
5. ગણ પરની દ્વિક્ક્રિયાઓ

Srinivasa Ramanujan

Born in Erode, Madras Presidency, to a poor Brahmin family, Ramanujan first encountered formal mathematics at age 10. He demonstrated a natural ability, and was given books on advanced trigonometry written by S. L. Loney. He mastered them by age 12, and even discovered theorems of his own, including independently re-discovering Euler's identity. He demonstrated unusual mathematical skills at school, winning accolades and awards. By 17, Ramanujan conducted his own mathematical research on Bernoulli numbers and the Euler–Mascheroni constant. He received a scholarship to study at Government College in Kumbakonam, but lost it when he failed his non-mathematical coursework. He joined another college to pursue independent mathematical research, working as a clerk in the Accountant-General's office at the Madras Port Trust Office to support himself. In 1912–1913, he sent samples of his theorems to three academics at the University of Cambridge. Only Hardy recognised the brilliance of his work, subsequently inviting Ramanujan to visit and work with him at Cambridge. He became a Fellow of the Royal Society and a Fellow of Trinity College, Cambridge, dying of illness, malnutrition and possibly liver infection in 1920 at the age of 32.

During his short lifetime, Ramanujan independently compiled nearly 3900 results (mostly identities and equations). Although a small number of these results were actually false and some were already known, most of his claims have now been proven correct. He stated results that were both original and highly unconventional, such as the Ramanujan prime and the Ramanujan theta function, and these have inspired a vast amount of further research. However, the mathematical mainstream has been rather slow in absorbing some of his major discoveries. The Ramanujan Journal, an international publication, was launched to publish work in all areas of mathematics influenced by his work.