વિકલ સમીકરણો 5

Mathematics is the art of giving the same name to different things.

– Jules Henri

5.1 પ્રાસ્તાવિક

જો વિધેય y એ ચલ x નું વિધેય હોય તો તેને $y = f(x)$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. અહીં x ને **સ્વતંત્ર ચલ (Independent Variable)** અને y ને **અવલંબી ચલ (Dependent Variable)** તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. $\frac{dy}{dx}$ કે $f'(x)$ શોધવાની વિવિધ રીતો આપણે અગાઉ શીખી ગયા. વળી સમીકરણ $f'(x) = g(x)$ એટલે કે $\frac{dy}{dx} = g(x)$ આપેલ હોય તો તે પરથી અનિયત સંકલન દ્વારા વિધેય f શોધવાની રીત પણ આપણે શીખી ગયા.

સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = g(x)$ માં સ્વતંત્ર ચલ x અને y નું x ને સાપેક્ષ વિકલિત આપેલા છે. આવા પ્રકારનાં સમીકરણને વિકલ સમીકરણ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. વિકલ સમીકરણની ગાણિતીક અર્થસભર વ્યાખ્યા હવે પછીથી આપીશું.

વિવિધ ક્ષેત્રોના વિવિધ પ્રકારના પ્રશ્નોના ઉકેલમાં વિકલ સમીકરણનો ઉપયોગ ખૂબ જ અગત્યનો પૂરવાર થયો છે; જેમ કે ભૌતિક શાસ્ત્ર, રસાયણ વિજ્ઞાન, જૈવિકશાસ્ત્ર, ઈજનેરી વિજ્ઞાન વગેરે. આપણે વિકલ સમીકરણની પાયાની સંકલ્પના, વિકલ સમીકરણના ઉકેલ અને પ્રથમ કક્ષાના એક પરિમાણી વિકલ સમીકરણના ઉકેલ તથા ઉપયોગોનો અભ્યાસ કરીશું.

નોંધ : જો વિધેય $y = f(x)$ એ ચલ x નું વિકલનીય વિધેય હોય, તો તેના પ્રથમ કક્ષાના વિકલિત ને $\frac{dy}{dx}$, y_1, y' કે $f'(x)$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. જો $f'(x)$ પણ ચલ x નું વિકલનીય વિધેય હોય, તો વિધેય $y = f(x)$ ના દ્વિતીય કક્ષાના વિકલિતને $\frac{d^2y}{dx^2}$, y_2, y'' કે $f''(x)$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. આ જ રીતે તૃતીય કક્ષાનાં, ચતુર્થ કક્ષાનાં વગેરે... વિકલિતો મેળવી શકાય છે. વ્યાપક રીતે વિધેય $y = f(x)$ ના n માં વિકલિતને $\frac{d^ny}{dx^n}$, y_n, $y^{(n)}$ કે $f^{(n)}(x)$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. અહીં $y_n = \frac{d}{dx}(y_{n-1})$.

5.2 વિકલ સમીકરણ

સ્વતંત્ર ચલ, અવલંબી ચલ અને સ્વતંત્ર ચલને સાપેક્ષ અવલંબી ચલના વિકલિતો ને સમાવતા સમીકરણને વિકલ સમીકરણ (Differential equation) કહે છે.

x સ્વતંત્ર ચલ હોય, x પર અવલંબી ચલ y હોય એટલે કે $y = f(x)$ અથવા $G(x, y) = 0$ અને y ના x પ્રત્યેના વિકલિતો $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots$ હોય તો વિધેયાત્મક સંબંધ $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$ ને વિકલ સમીકરણ કહે છે. (સમીકરણમાં વિકલિતનું અસ્તિત્વ હોવુ જરૂરી છે)

ઉદાહરણ તરીકે (1) $\frac{dy}{dx} + y\ cosx = sinx$ (2) $\frac{d^2y}{dx^2} = 2x$

(3) $\frac{dy}{dx} + y = x^2$ (4) $2y = x\frac{dy}{dx} + \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

(5) $2x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 5y\frac{dy}{dx} = 2xy$ (6) $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = 5\frac{d^2y}{dx^2}$

(7) $e^{\frac{dy}{dx}} + \frac{dy}{dx} = ky$ (8) $\log\left|\frac{dy}{dx}\right| = kx$

5.3 વિકલ સમીકરણની કક્ષા અને પરિમાણ

વિકલ સમીકરણની કક્ષા :

વિકલ સમીકરણમાં અવલંબી ચલના સ્વતંત્ર ચલને સાપેક્ષ વિકલિતોમાં ઉચ્ચતમ કક્ષાના વિકલિતની કક્ષાને વિકલ સમીકરણની કક્ષા (Order) કહે છે.

(1) $\frac{dy}{dx} + y\cos x = sinx$

અહીં ઉચ્ચતમ કક્ષાનું વિકલિત પ્રથમ વિકલિત છે. આથી વિકલ સમીકરણની કક્ષા 1 છે.

(2) $2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = e^x$

અહીં ઉચ્ચતમ કક્ષાનું વિકલિત દ્વિતીય વિકલિત છે. આથી વિકલ સમીકરણની કક્ષા 2 છે.

(3) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 6y + x = 0.$

અહીં ઉચ્ચતમ કક્ષાનું વિકલિત પ્રથમ વિકલિત છે. આથી વિકલ સમીકરણની કક્ષા 1 છે.

(4) $\frac{d^4y}{dx^4} - 6\left(\frac{dy}{dx}\right)^6 - 4y = 0.$

અહીં ઉચ્ચતમ કક્ષાનું વિકલિત ચતુર્થ વિકલિત છે. આથી વિકલ સમીકરણની કક્ષા 4 છે.

(5) $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{\frac{dy}{dx}+5}.$

અહીં ઉચ્ચતમ કક્ષાનું વિકલિત દ્વિતીય વિકલિત છે. આથી વિકલ સમીકરણની કક્ષા 2 છે.

વિકલ સમીકરણનું પરિમાણ :

વિકલ સમીકરણ વિકલિતોની બહુપદી સ્વરૂપે આપેલ હોય, તો વિકલ સમીકરણમાં આવતા ઉચ્ચતમ કક્ષાના વિકલિતના ઉચ્ચતમ ઘાતાંકને વિકલ સમીકરણનું પરિમાણ (Degree) કહે છે.

એટલે કે વિકલ સમીકરણનું પરિમાણ મેળવવા આપણે સમીકરણને મૂળ અને અપૂર્ણાંક ઘાત થી મુક્ત કરવું જોઈએ.

વિકલ સમીકરણનું પરિમાણ હમેશાં ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા હોય છે.

(1) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y = sinx.$

આ સમીકરણમાં આવેલા ઉચ્ચતમ કક્ષાના વિકલિત $\frac{dy}{dx}$ નો ઉચ્ચતમ ઘાતાંક 2 છે. તેથી આ વિકલ સમીકરણનું પરિમાણ 2 છે.

(2) $\frac{d^3y}{dx^3} + 7\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - 4y = 0$

આ સમીકરણમાં ઉચ્ચતમ કક્ષાનું વિકલિત $\frac{d^3y}{dx^3}$ તૃતીય વિકલિત છે. તેનો ઉચ્ચતમ ઘાતાંક 1 છે. તેથી તેનું પરિમાણ 1 છે. (4 કેમ નહિં ?)

(3) $x = y\dfrac{dy}{dx} + \sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

આ સમીકરણને વિકલિતોની બહુપદી સ્વરૂપમાં ફેરવતાં,

$(y^2-1)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\dfrac{dy}{dx} + x^2 - 1 = 0$ મળે છે.

અહીં ઉચ્ચતમ કક્ષાના વિકલિત $\dfrac{dy}{dx}$ નો મહત્તમ ઘાતાંક 2 છે. તેથી વિકલ સમીકરણનું પરિમાણ 2 છે.

નોંધ : વિકલ સમીકરણનું પરિમાણ મેળવવા તેને વિકલિતોની બહુપદીના સ્વરૂપમાં ફેરવવામાં આવે છે. જો સમીકરણને વિકલિતોની બહુપદીના સ્વરૂપમાં ન દર્શાવી શકાય તો તેનું પરિમાણ વ્યાખ્યાયિત નથી.

(1) $x\dfrac{dy}{dx} + sin\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = 0$ એ આપેલ વિકલ સમીકરણ છે. તેની કક્ષા 1 છે. પરિમાણ અવ્યાખ્યાયિત છે કારણ કે સમીકરણ વિકલિત $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ માં બહુપદી નથી.

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \log\left(\dfrac{dy}{dx}\right) + y$, ની કક્ષા 2 છે, જ્યારે પરિમાણ અવ્યાખ્યાયિત છે કારણકે સમીકરણ વિકલિતમાં બહુપદી નથી.

ઉદાહરણ 1 : નીચેનાં વિકલ સમીકરણોની કક્ષા અને પરિમાણ (શક્ય હોય તો) મેળવો.

(1) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y = x^2$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sqrt[3]{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

(3) $xe^{\frac{dy}{dx}} + \dfrac{dy}{dx} + 2 = 0$

(4) $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4 + xy = 0$

(5) $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = siny + 3x$

ઉકેલ : (1) અહીં ઉચ્ચતમ કક્ષાનું વિકલિત $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ છે. તેનો ઘાતાંક 1 છે.

$\therefore$ વિકલ સમીકરણની કક્ષા 3 અને પરિમાણ 1 છે.

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sqrt[3]{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

મૂળ દૂર કરવા માટે આપણે બંને બાજુએ ઘન કરીએ.

$\therefore \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = 1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$

અહીં વિકલ સમીકરણની કક્ષા 2 અને પરિમાણ 3 છે.

(3) અહીં ઉચ્ચતમ કક્ષાનું વિકલિત $\dfrac{dy}{dx}$ છે. તેથી વિકલ સમીકરણની કક્ષા 1 છે. અહીં સમીકરણને વિકલિતોની બહુપદીમાં દર્શાવી શકાય નહી. તેથી પરિમાણ અવ્યાખ્યાયિત છે.

(4) અહીં ઉચ્ચતમ કક્ષાનું વિકલિત $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ છે. તેથી વિકલ સમીકરણની કક્ષા 2 છે અને તેનું પરિમાણ 1 છે.

(5) અહીં ઉચ્ચતમ કક્ષાનું વિકલિત $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ છે. તેથી વિકલ સમીકરણની કક્ષા 2 છે અને તેનું પરિમાણ 3 છે.

સ્વાધ્યાય 5.1

નીચેના વિકલ સમીકરણોની કક્ષા અને પરિમાણ (શક્ય હોય તો) મેળવો.

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} = 2$

2. $x + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = \sqrt{1+y}$

3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + sin\left(\dfrac{dy}{dx}\right) + y = 0$

4. $y^{\frac{dy}{dx}} = x$

5. $\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^4 + x \log y = 0$

6. $\sqrt[3]{\dfrac{d^2y}{dx^2}} = \sqrt{\dfrac{dy}{dx}}$

7. $\left(\dfrac{dy}{dx}\right) + \dfrac{x}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = 0$

8. $\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = 0$

9. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 3sin\, 3x$

10. $x\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^5 - 5y = 0$

*

5.4 વિકલ સમીકરણની રચના

હવે આપણે વક્રોની સંહતિની સંકલ્પના સમજીશું. સમીકરણ $x^2 + y^2 = r^2$ નો વિચાર કરીએ. **(i)**

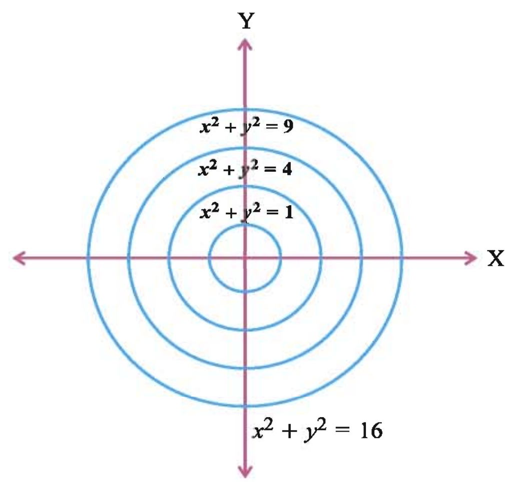
r ની ભિન્ન કિંમતો લેતાં,

જો $r = 1$ હોય, તો $x^2 + y^2 = 1$

જો $r = 2$ હોય, તો $x^2 + y^2 = 4$

જો $r = 3$ હોય, તો $x^2 + y^2 = 9$

જો $r = 4$ હોય, તો $x^2 + y^2 = 16$



આકૃતિ 5.1

આમ ઉપરોક્ત સમીકરણો જોતાં સ્પષ્ટ છે કે સમીકરણ (i) એ જેનું કેન્દ્ર ઊગમબિંદુ હોય અને ત્રિજ્યાઓ ભિન્ન હોય તેવાં **સમકેન્દ્રી વર્તુળોની સંહતિ (Family of Circles)** દર્શાવે છે.

હવે સંહતિનો દરેક ઘટક જે વિકલ સમીકરણનું સમાધાન કરે તેવું વિકલ સમીકરણ મેળવવું છે. ઉપરોક્ત વિકલ સમીકરણમાં એક જ સ્વૈર અચળ r છે. હવે r થી મુક્ત હોય તેવું સમીકરણ મેળવીએ.

$x^2 + y^2 = r^2$ નું x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

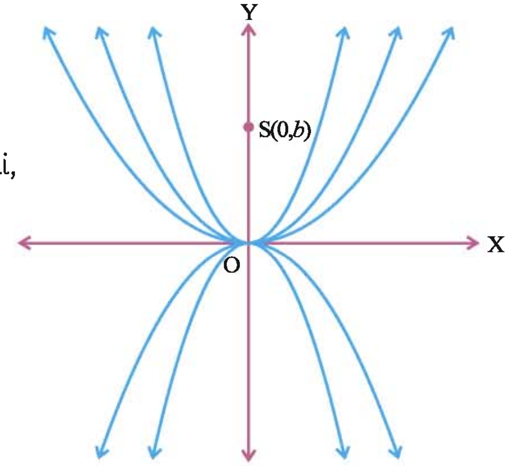
$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

આ સમીકરણ સંહતિ $x^2 + y^2 = r^2$ ના દરેક વક્ર વડે સંતોષાય છે. તેથી વિકલ સમીકરણ આ સમકેન્દ્રી વર્તુળો $x^2 + y^2 = r^2$ ના તમામ ઘટકોની સંહતિ દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ છે. તે સ્વૈર અચળાંક r થી મુક્ત છે તેની નોંધ લો.

ઉદાહરણ 2 : જેનું શીર્ષ ઊગમબિંદુ હોય અને Y-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત હોય તેવા પ્રમાણિત પરવલયોની સંહતિનું વિકલ સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે શીર્ષ ઊગમબિંદુ હોય અને Y-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત હોય તેવા પરવલયોની સંહતિનું પ્રમાણિત સમીકરણ $x^2 = 4by$ છે.



આકૃતિ 5.2

અહીં S(0, b) એ કોઈ એક પરવલયનું નાભિ છે.

b એ સ્વૈર અચળ છે.

હવે સમીકરણ $x^2 = 4by$ નું x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$2x = 4b\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad 2xy = 4by\frac{dy}{dx}$$

પરંતુ $4by = x^2$

$$\therefore \quad x^2\frac{dy}{dx} = 2xy \quad \text{કે} \quad x^2\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$$

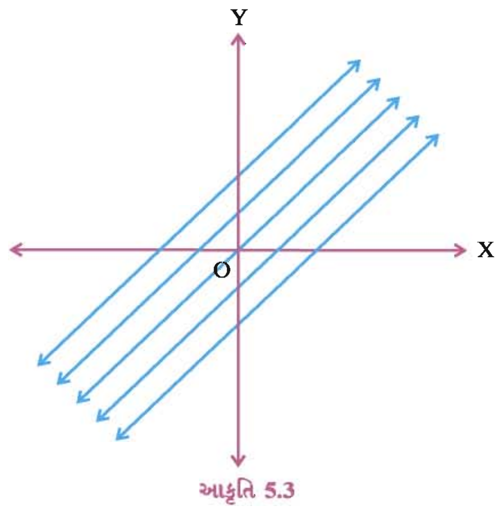
$$\therefore \quad x\frac{dy}{dx} = 2y \qquad (x \neq 0)$$

આપેલ પરવલયોની સંહતિ દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ છે.

> **નોંધ :** જો $x = 0$, તો $y = 0$, કેમકે $x^2 = 4by$.
>
> $\therefore$ (0, 0) પણ $x\frac{dy}{dx} = y$ નું સમાધાન કરે છે.

ઉદાહરણ 3 : જેનો ઢાળ 2 હોય તેવી તમામ સમાંતર રેખાઓની સંહતિ $y = 2x + c$ નું વિકલ સમીકરણ મેળવો. c એ સ્વૈર અચળ છે.

ઉકેલ : આપેલ રેખાનું સમીકરણ $y = 2x + c$ છે. c એ સ્વૈર અચળ છે.



આકૃતિ 5.3

c ની ભિન્ન કિંમતો માટે એકબીજીને સમાંતર હોય તેવી ભિન્ન રેખાઓ મળે.

તેથી $y = 2x + c$ એ જેનો ઢાળ 2 હોય તેવી તમામ સમાંતર રેખાઓની સંહતિ દર્શાવે છે.

હવે આપણે સ્વૈર અચળથી મુક્ત આ તમામ સમાંતર રેખાઓની સંહતિના સભ્યો જેનું સમાધાન કરે છે તેવું સમીકરણ મેળવીશું.

સમીકરણ $y = 2x + c$ નું x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = 2 \text{ મળે.}$$

સ્વૈર અચળથી મુક્ત ઉપરોક્ત સમીકરણ રેખાઓની સંહતિ દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 4 : વક્રોની સંહતિ $y = a\, sin(x + b)$ (જ્યાં a અને b સ્વૈર અચળો છે.) દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં વક્રોની સંહતિ $y = a\, sin(x + b)$ છે.

x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં $\frac{dy}{dx} = a\, cos(x + b)$.

ફરીથી x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a\,sin(x + b)$$

$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -y$ અથવા $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ એ આપેલ સંહતિ દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ થશે.

અહીં આપેલા ઉદાહરણ 2 અને 3, પરથી જોયું કે એક સ્વૈર અચળવાળા વક્રોની સંહતિ દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ એક કક્ષા વાળું છે. ઉદાહરણ 4 પરથી જોયું કે બે સ્વૈર અચળોવાળા વક્રોની સંહતિ દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ બે કક્ષાવાળું છે. આ ઉદાહરણો પરથી વિકલ સમીકરણની રચનાની સમજ નીચે પ્રમાણે મેળવીએ.

(a) જો આપેલ વક્રોની સંહતિમાં માત્ર એક જ સ્વૈર અચળ c હોય તો તેને સમીકરણ $f(x, y, c) = 0$ દ્વારા દર્શાવી શકાય. સમીકરણનું x પ્રત્યે વિકલન કરતાં મળતું નવું વિધેય x, y, y' અને c વચ્ચેના સંબંધો દર્શાવતું વિધેય હશે. તેને $g(x, y, y', c) = 0$ કહીએ.
અહીં સમીકરણો $f(x, y, c) = 0$ તથા $g(x, y, y', c) = 0$ માંથી c નો લોપ કરતાં મળતું સમીકરણ $F(x, y, y') = 0$ એ આપેલ સંહતિ $f(x, y, c) = 0$ ને દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ થશે.

(b) જો આપેલ વક્રોની સંહતિમાં બે સ્વૈર અચળો c_1 તથા c_2 હોય તો તેને સમીકરણ $f(x, y, c_1, c_2) = 0$ દ્વારા દર્શાવી શકાય.
x પ્રત્યે વિકલન કરતાં x, y, y', c_1 અને c_2 વચ્ચે સંબંધ દર્શાવતું સમીકરણ $g(x, y, y', c_1, c_2) = 0$ મળે. પરંતુ માત્ર આ બે સમીકરણોથી બંને સ્વૈર અચળો c_1 અને c_2 દૂર થઈ શકશે નહિ. આથી સમીકરણ $g(x, y, y', c_1, c_2) = 0$ નું x પ્રત્યે ફરીથી વિકલન કરતાં x, y, y', y'', c_1 અને c_2 વચ્ચે સંબંધો દર્શાવતું સમીકરણ $h(x, y, y', y'', c_1, c_2) = 0$ મેળવીએ.
$f(x, y, c_1, c_2) = 0$, $g(x, y, y', c_1, c_2) = 0$ તથા $h(x, y, y', y'' c_1, c_2) = 0$ મળે.
અને હવે ઉપરોક્ત સમીકરણોમાંથી સ્વૈર અચળો c_1 અને c_2 લોપ કરતાં સમીકરણ $F(x, y, y', y'') = 0$ મળે.
$F(x, y, y', y'') = 0$ આપેલ સંહતિ $f(x, y, c_1, c_2) = 0$ ને દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ થશે.

ટૂંકમાં n સ્વૈર અચળોવાળા વિધેયાત્મક સંબંધ $f(x, y, c_1, c_2,..., c_n) = 0$ નું n વખત વિકલન કરતાં આપેલા સંબંધ સહિત કુલ $(n + 1)$ સમીકરણ મળે.

તેમનામાંથી $c_1, c_2,..., c_n$ નો લોપ કરતાં આપેલ સંહતિનું વિકલ સમીકરણ મળે. જુઓ કે સ્વૈર અચળોની સંખ્યા n હોય તો મળતા વિકલ સમીકરણની કક્ષા n હોય.

ઉદાહરણ 5 : જેનું કેન્દ્ર ઊગમબિંદુ હોય અને નાભિઓ X-અક્ષ પર અથવા Y-અક્ષ પર હોય તેવા પ્રમાણિત ઉપવલયોની સંહતિનું વિકલ સમીકરણ મેળવો.

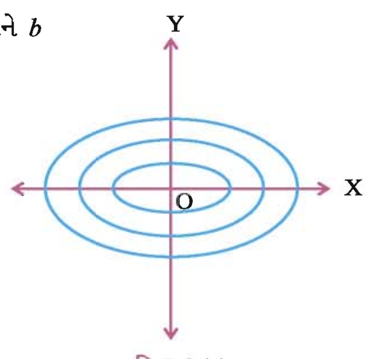
ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે ઉપવલયની સંહતિનું સમીકરણ

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ છે જ્યાં a અને b સ્વૈર અચળ છે. $(a \neq b)$ (i)

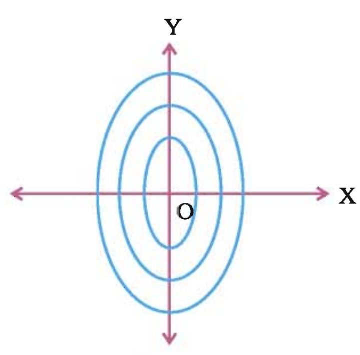
સમીકરણ (i) નું x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0$ મળે.

$\therefore \quad y\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}x$ (ii)



આકૃતિ 5.4 (a)



આકૃતિ 5.4 (b)

ઉપરોક્ત સમીકરણનું x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2} \text{ મળે.}$$

બંને બાજુ x વડે ગુણતાં,

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2}x$$

$$\therefore \quad x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy\frac{d^2y}{dx^2} = y\frac{dy}{dx}$$ ((ii)નો ઉપયોગ કરતાં)

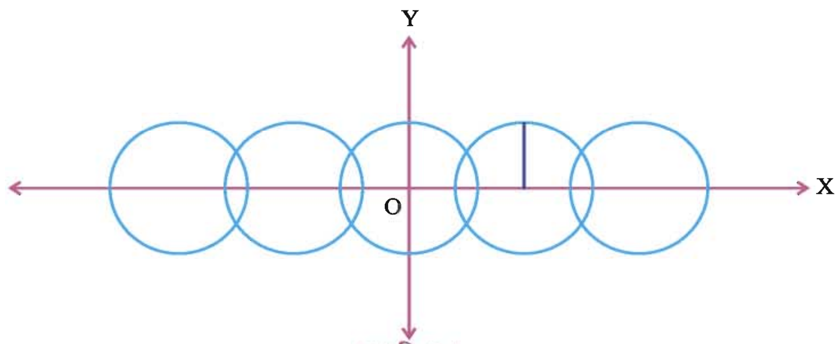
$$\therefore \quad x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy\frac{d^2y}{dx^2} - y\frac{dy}{dx} = 0$$

આપેલ ઉપવલયોની સંહતિનું વિકલ સમીકરણ છે.

નોંધ : અહીં બે સ્વૈર અચળ છે. આથી આપણે બે વખત વિકલન કર્યું છે. વિકલ સમીકરણની કક્ષા 2 છે.

ઉદાહરણ 6 : 1 એકમ ત્રિજ્યા અને X-અક્ષ પર જેનાં કેન્દ્રો હોય તેવાં વર્તુળોની સંહતિ દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ :



આકૃતિ 5.4

અહીં વર્તુળોની સંહતિમાં આવેલાં વર્તુળોનાં કેન્દ્ર X-અક્ષ પર છે. ધારો કે તે પૈકી કોઈ એક વર્તુળનું કેન્દ્ર $(a, 0)$ છે, જ્યાં $a \in R$ અને તમામ વર્તુળોની ત્રિજ્યા 1 છે.

$\therefore$ આ સંહતિનું સમીકરણ $(x - a)^2 + y^2 = 1$ થાય (i)

x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\therefore \quad 2(x - a) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \quad (x - a) + y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \quad (x - a) = -y\frac{dy}{dx} \qquad \text{(ii)}$$

સ્વૈર અચળ a નો લોપ કરવા સમીકરણ (i) માં $(x - a)$ ની કિંમત મુકતાં.

$$\left(-y\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 1$$

$\therefore \quad y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 - 1 = 0$ આપેલ વર્તુળોની સંહતિનું વિકલ સમીકરણ છે.

નોંધ : અહીં એક જ સ્વૈર અચળાંક છે. તેથી એક જ વખત વિકલન કરતાં આપણને પ્રથમ કક્ષાનું વિકલ સમીકરણ મળે છે.

5.5 વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ

વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ એટલે વિકલિતોથી મુક્ત હોય અને ચલ વચ્ચે સંબંધ દર્શાવતું હોય અને જે તેના વિકલિતો સહિત વિકલ સમીકરણનું સમાધાન કરે તેવું વિધેય $y = f(x)$ અથવા વિધેયાત્મક સંબંધ $f(x, y) = 0$ થી મળતાં વિધેયો.

જો વિધેય $y = f(x)$, કોઈ અંતરાલમાં વ્યાખ્યાયિત હોય તથા તેના n કક્ષા સુધીના વિકલિતો અસ્તિત્વ ધરાવતા હોય અને જો વિધેય f એ તેના તમામ વિકલિતો સાથે આપેલ વિકલ સમીકરણનું સમાધાન કરે તો તેવા વિધેય $y = f(x)$ ને આપેલા વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ (Solution) કહે છે.

કોઈ વિધેય $y = f(x)$ આપેલા વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ બની શકે તે માટે વિધેયના પ્રદેશ અને સાતત્ય અંગેની તથા અન્ય શરતોનું પાલન થવું જરૂરી હોય છે. બીજા શબ્દોમાં આપેલ વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ, જો મળી શકતો હોય તો તેવા અનુકૂળ શરતો સાથેના સંજોગોમાં મેળવવાની ચર્ચા કરવામાં આવતી હોય છે. વિકલ સમીકરણના ઉકેલની પ્રાપ્યતા સંબંધી ચર્ચાનું વિશ્લેષણ અહીં કરીશું નહીં. આપણે તો ઉકેલ મળી શકે તેવા સંજોગોમાં (આ સંજોગો કે તેની શરતોનો ઉલ્લેખ કર્યા સિવાય જ) ઉકેલ મેળવવા માટેની કેટલીક પદ્ધતિઓનો અભ્યાસ કરીશું.

વિકલ સમીકરણોનો ઉકેલ :

વિધેય $y = 2x + c$, $x \in R$ એ વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = 2$ નો ઉકેલ છે. કારણ કે વિધેય $y = 2x + c$ એ વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = 2$નું સમાધાન કરે છે. ચાલો બીજું ઉદાહરણ જોઈએ.

$y = sinx$, $x \in R$ એ વિકલ સમીકરણ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ નો ઉકેલ છે.

x ને સાપેક્ષ $y = sinx$ નું વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = cosx$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -sinx = -y$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

$y = cosx$, $x \in R$ એ પણ વિકલ સમીકરણ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ નો ઉકેલ છે.

અહીં $y = cosx$

x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = -sin\,x$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -cosx = -y$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

ઉપર્યુક્ત ઉદાહરણો પરથી એવું કહી શકીએ કે સામાન્ય રીતે વિકલ સમીકરણને એક કરતાં વધુ ઉકેલો હોઈ શકે છે.

વ્યાપક અને વિશિષ્ટ ઉકેલ

વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ અથવા સામાન્ય ઉકેલ (General Solution) એટલે વિકલ સમીકરણની કક્ષા જેટલા સ્વૈર અચળાંકો ધરાવતો ઉકેલ.

વ્યાપક સ્વરૂપે n કક્ષાના વિકલ સમીકરણ

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$ ના ઉકેલમાં n સ્વૈર અચળ હોય છે.

આ ઉકેલને $G(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0$ દ્વારા દર્શાવાય છે, જ્યાં $c_1, c_2, ..., c_n$ સ્વૈર અચળો છે.

ચલ x, y તથા વિકલિતો $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ...$ પરની કોઈ નિશ્ચિત શરતો દ્વારા વિકલ સમીકરણના વ્યાપક ઉકેલમાં આવતા સ્વૈર અચળોની નિશ્ચિત કિંમતો મળે તો સ્વૈર અચળોની નિશ્ચિત કિંમત ધરાવતા વિકલ સમીકરણના આ ઉકેલને આપેલ વિકલ સમીકરણનો વિશિષ્ટ ઉકેલ (Particular Solution) કહે છે તથા આપેલી શરતોને પ્રારંભિક શરતો (Initial Conditions) કહે છે.

જો વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ સિવાયનો ઉકેલ એ તેના વ્યાપક ઉકેલમાંથી વિશિષ્ટ ઉકેલ તરીકે ન મળતો હોય તો આવા ઉકેલને વિકલ સમીકરણનો અસામાન્ય ઉકેલ (Singular Solution) કહે છે.

ઉદાહરણ 7 : વિધેય $y = A\cos x + B\sin x$, જ્યાં A અને B સ્વૈર અચળ છે એ વિકલ સમીકરણ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ નો વ્યાપક ઉકેલ છે કે નહિં તે ચકાસો.

ઉકેલ : અહીં $y = A\cos x + B\sin x$ એ આપેલ વિધેય છે.

બંને બાજુ x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = -A\sin x + B\cos x$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -A\cos x - B\sin x$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -(A\cos x + B\sin x)$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -y$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

તેથી આપેલ વિધેય $y = A\cos x + B\sin x$ એ વિકલ સમીકરણ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ નો વ્યાપક ઉકેલ છે. કારણ કે દ્વિતિય કક્ષાના વિકલ સમીકરણના આ ઉકેલમાં બે સ્વૈર અચળાંકો છે.

ઉદાહરણ 8 : $y = cx + \frac{1}{c}$ એ વિકલ સમીકરણ $y\frac{dy}{dx} = x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1$, નો ઉકેલ છે તેમ ચકાસો. (c એ સ્વૈર અચળ છે.)

ઉકેલ : અહીં $y = cx + \frac{1}{c}$ (c એ સ્વૈર અચળ)

x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં $\frac{dy}{dx} = c$

$c = \frac{dy}{dx}$ એ સમીકરણ $y = cx + \frac{1}{c}$ માં મૂકતાં,

$$y = \left(\frac{dy}{dx}\right)x + \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

$$\therefore \quad y\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 x + 1$$

તેથી આપેલ વિધેય $y = cx + \frac{1}{c}$ એ આપેલા વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 9 : સમીકરણ $y = cx^4$ જ્યાં c એ સ્વૈર અચળ છે એ વિકલ સમીકરણ $x\dfrac{dy}{dx} - 4y = 0$ નો ઉકેલ છે કે નહીં તે ચકાસો.

ઉકેલ : અહીં આપેલ સમીકરણ $y = cx^4$ છે (i)

સમીકરણ (i) નું x પ્રત્યે વિકલન કરતાં $\dfrac{dy}{dx} = 4cx^3$ (ii)

$\therefore \quad x\dfrac{dy}{dx} = 4cx^4 = 4y$

$\therefore \quad x\dfrac{dy}{dx} - 4y = 0$

તેથી $y = cx^4$ આપેલ વિકલ સમીકરણ $x\dfrac{dy}{dx} - 4y = 0$ નો ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 10 : ચકાસો કે $y = ax + a^2$ (a એ સ્વૈર અચળ છે.) એ વિકલ સમીકરણ $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + x\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = y$ નો વ્યાપક ઉકેલ છે. $a = 3$ માટે વિશિષ્ટ ઉકેલ મેળવો. વધુમાં બતાવો કે $x^2 + 4y = 0$ એ વિકલ સમીકરણનો અસામાન્ય ઉકેલ છે.

ઉકેલ : અહીં $y = ax + a^2$ (a એ સ્વૈર અચળ)

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx} = a$

$a = \dfrac{dy}{dx}$ એ સમીકરણ $y = ax + a^2$ માં મૂકતાં (એટલે કે a નો લોપ કરતાં) આપણને વિકલ સમીકરણ

$$y = x\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} \text{ મળે.}$$

વળી $y = ax + a^2$ માં એક જ સ્વૈર અચળ છે.

તેથી $y = ax + a^2$ એ $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + x\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = y$ નો વ્યાપક ઉકેલ છે.

હવે વ્યાપક ઉકેલમાં $a = 3$ મૂકતાં, $y = 3x + 9$ વિશિષ્ટ ઉકેલ મળે.

હવે $x^2 + 4y = 0$

$\therefore \quad 4y = -x^2$

$\therefore \quad 4\dfrac{dy}{dx} = -2x$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{2}$

$\dfrac{dy}{dx}$ ની કિંમત આપેલા વિકલ સમીકરણમાં મૂકતાં.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{x^2}{4} + x\left(-\frac{x}{2}\right) = -\frac{x^2}{4} = y$$

જે દર્શાવે છે કે $x^2 + 4y = 0$ આપેલા વિકલ સમીકરણને સંતોષે છે.

આમ $x^2 + 4y = 0$ એ આપેલ વિકલ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે. તેથી તે વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ થાય. પરંતુ આ ઉકેલ તેના વ્યાપક ઉકેલમાં a ની કોઈપણ કિંમત મૂકતાં મળશે નહીં. તેથી આ વિકલ સમીકરણનો અસામાન્ય ઉકેલ છે.

> **નોંધ :** વ્યાપક ઉકેલ એ રેખાઓની સંહતી દર્શાવે છે જ્યારે અસામાન્ય ઉકેલ $x^2 + 4y = 0$ એ પરવલય દર્શાવે છે.

સ્વાધ્યાય 5.2

1. પ્રથમ ચરણમાં આવેલા અને બંને અક્ષોને સ્પર્શતાં વર્તુળોની સંહતિનું વિકલ સમીકરણ મેળવો.

2. રેખાઓની સંહતિ $y = mx + c$ (જ્યાં m અને c સ્વૈર અચળો છે) ને દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ મેળવો.

3. સમીકરણ $y^2 = m(a^2 - x^2)$ ને દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ મેળવો. (જ્યાં m અને a સ્વૈર અચળો છે.)

4. X-અક્ષ ને ઊગમબિંદુ આગળ સ્પર્શતાં હોય તેવાં તમામ વર્તુળોની સંહતિને દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ શોધો.

5. દર્શાવો કે વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x^3$ નો ઉકેલ $y = 2(x^2 - 1) + ce^{-x^2}$ છે. (જ્યાં c એ સ્વૈર અચળ છે.)

6. વિકલ સમીકરણ $y\left[1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = 2x\frac{dy}{dx}$ નો ઉકેલ $y^2 = 4b(x + b)$ છે તેમ ચકાસો. (b સ્વૈર અચળ છે.)

7. બતાવો કે $y = a\,cos(\log x) + b\,sin(\log x)$ એ વિકલ સમીકરણ $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$ નો ઉકેલ છે. (a અને b સ્વૈર અચળો છે.)

8. ચકાસો કે $y = a\,cos^{-1}x + b$ એ વિકલ સમીકરણ $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$ નો ઉકેલ છે. (a અને b સ્વૈર અચળો છે.)

9. નીચેના વક્રોની સંહતિ માટે વિકલ સમીકરણ શોધો. (a અને b સ્વૈર અચળો છે.)

(1) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (3) $(y - b)^2 = 4(x - a)$ (4) $y = \left(ax + \frac{b}{x}\right)$

(5) $y = ax^3$ (6) $y = e^{2x}(a + bx)$ (7) $y^2 = a(b^2 - x^2)$

10. ચકાસો કે $y = 5sin4x$ એ વિકલ સમીકરણ $\frac{d^2y}{dx^2} + 16y = 0$ નો ઉકેલ છે.

11. બતાવો કે $Ax^2 + By^2 = 1$ એ વિકલ સમીકરણ

$x\left[y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = y\left(\frac{dy}{dx}\right)$ નો ઉકેલ છે. (A, B સ્વૈર અચળો છે.)

12. બતાવો કે $y = \frac{a}{x} + b$ એ વિકલ સમીકરણ $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} = 0$ નો ઉકેલ છે.

*

5.6 પ્રથમ કક્ષાનાં એક પરિમાણીય વિકલ સમીકરણ :

પ્રથમ કક્ષાનાં એક પરિમાણીય વિકલ સમીકરણને $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$, $x \in I$ (I કોઈ અંતરાલ છે) વડે દર્શાવાય છે.

$F(x, y) = -\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ લેતાં,

$f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$ એ પ્રથમ કક્ષાના એક પરિમાણીય સમીકરણનું બીજું સ્વરૂપ છે. પ્રથમ કક્ષાના વિકલ સમીકરણ હંમેશા ઉકેલનીય હોય જ એવું નથી, પરંતુ આપણે આ સમીકરણના એવાં કેટલાંક વિશિષ્ટ સ્વરૂપોનો અભ્યાસ કરીશું કે જેમનો વ્યાપક ઉકેલ મળી શકે.

હવે આપણે પ્રથમ કક્ષાના એક પરિમાણીય વિકલ સમીકરણો ને ઉકેલવા માટેની કેટલીક વિવિધ રીતોનો અભ્યાસ કરીશું.

(1) વિયોજનીય ચલની રીત (Method of Variables Separable) : પ્રથમ કક્ષાના એક પરિમાણી વિકલ સમીકરણના વ્યાપક સ્વરૂપ $f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$ માં જો $f(x, y)$ એ માત્ર ચલ x નું વિધેય $p(x)$ હોય અને $g(x, y)$ એ માત્ર ચલ y નું વિધેય $q(y)$ હોય તો પ્રથમ કક્ષાના એક પરિમાણવાળા વિકલ સમીકરણનું વ્યાપક સ્વરૂપ $p(x)dx + q(y)dy = 0$ પ્રકારનું થાય. આ પ્રકારના વિકલ સમીકરણને વિયોજનીય ચલ પ્રકારનું વિકલ સમીકરણ કહે છે.

$\int p(x)dx + \int q(y)dy = c$ તેનો વ્યાપક ઉકેલ થાય. (c સ્વૈર અચળ છે.)

નોંધ : વિકલ સમીકરણના વ્યાપક ઉકેલમાં સ્વૈર અચળ આપણી અનુકૂળતા પ્રમાણે લઈ શકાય છે.

ઉદાહરણ 11 : વિકલ સમીકરણ $x(1 + y^2)dx - y(1 + x^2)dy = 0$ ઉકેલો.

ઉકેલ : અહીં $x(1 + y^2)dx = y(1 + x^2)dy$

$$\therefore \quad \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{y}{1+y^2}\,dy \qquad \text{(વિયોજનીય ચલ)}$$

$$\therefore \quad \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{2y}{1+y^2}\,dy$$

સંકલન કરતાં,

$$\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{2y}{1+y^2}\,dy$$

$\therefore$ $\log|1 + x^2| = \log|1 + y^2| + \log c$ (અહીં સ્વૈર અચળ c ના સ્થાને $\log c$ લીધેલ છે.)

$$\therefore \quad \log\left(\frac{1+x^2}{1+y^2}\right) = \log c \quad (c > 0) \qquad (1 + x^2 > 0,\ 1 + y^2 > 0)$$

$$\therefore \quad \frac{1+x^2}{1+y^2} = c$$

$$\therefore \quad (1 + x^2) = c(1 + y^2)$$

આ આપેલ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ છે. અહીં c એ સ્વૈર ધન અચળ છે.

ઉદાહરણ 12 : વિકલ સમીકરણ $(e^x + e^{-x})\frac{dy}{dx} = e^x - e^{-x}$ ઉકેલો.

ઉકેલ : અહીં $(e^x + e^{-x})\frac{dy}{dx} = e^x - e^{-x}$

$$\therefore \quad dy = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx \qquad \text{(વિયોજનીય ચલની રીત)}$$

બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\int dy = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$$

$$y = \log|e^x + e^{-x}| + c$$

આ આપેલ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ છે.

આ ઉકેલને $y = \log(e^x + e^{-x}) + c$ પણ લખી શકાય કારણ કે $e^x + e^{-x} > 0$.

ઉદાહરણ 13 : વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = y\,tanx$ નો $x = 0,\ y = 1$ માટે વિશિષ્ટ ઉકેલ મેળવો. $(y \neq 0)$

ઉકેલ : $\frac{dy}{dx} = y\,tanx$

$\therefore \quad \frac{1}{y}\,dy = tanx\ dx$ (i)

સમીકરણ (i) નું બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$\int \frac{1}{y}\,dy = \int tanx\ dx$

$\therefore \quad \log|y| = \log|secx| + \log|c|$ ($\log|c|$ સ્વૈર અચળ)

$\therefore \quad \log|y| = \log|c\ sec\,x|$

$\therefore \quad y = c\ sec\,x$ (ii)

આપેલ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ છે.

સમીકરણ (ii) માં $x = 0$ અને $y = 1$ મૂકતાં સ્વૈર અચળ c ની એક કિંમત મળે છે. તે વિકલ સમીકરણનો વિશિષ્ટ ઉકેલ આપે છે.

$1 = sec0 \cdot c$

$1 = 1 \cdot c$

$c = 1$

$\therefore \quad y = sec\,x$ માંગેલ વિશિષ્ટ ઉકેલ છે.

નોંધ : જો y એ x નું વિધેય હોય તો તેને $y = y(x)$ વડે પણ દર્શાવવામાં આવે છે. તેથી $y(x) = x^2$ તો $y(1) = 1$, $y(2) = 4$ વગેરે. $y(2)$ શોધો તેનો અર્થ $x = 2$ હોય ત્યારે $y(x)$ શોધો. ઉપરોક્ત ઉદાહરણમાં $y(0) = 1$ છે.

ઉદાહરણ 14 : વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$ ઉકેલો.

ઉકેલ : અહીં $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$.

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y} + \frac{x^2}{e^y}$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^x + x^2}{e^y}$

$\therefore \quad e^y\,dy = (e^x + x^2)\,dx$

સંકલન કરતાં,

$\int e^y\,dy = \int (e^x + x^2)\,dx$

$\therefore \quad e^y = e^x + \frac{x^3}{3} + c$ (c સ્વૈર અચળ)

આ આપેલ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 15 : ઉકેલો : $\frac{dy}{dx} = (x + y)^2$

ઉકેલ : અહીં આપેલ વિકલ સમીકરણને $p(x)\,dx + q(y)\,dy = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાતું નથી. આથી પ્રથમ દૃષ્ટિએ આ વિકલ સમીકરણ વિયોજનીય ચલ રીતનું નથી, પરંતુ તેને આ પ્રકારના વિકલ સમીકરણમાં રૂપાંતરિત કરી શકાય.

અહીં $\frac{dy}{dx} = (x + y)^2$ માં $x + y = z$ આદેશ લેતાં, (i)

$\therefore \quad 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$

સમીકરણ (i) પરથી,

$\therefore \quad \frac{dz}{dx} - 1 = z^2$

$\therefore \quad \frac{dz}{dx} = 1 + z^2$

$\therefore \quad \frac{dz}{1+z^2} = dx$ (વિયોજનીય ચલ પ્રકાર)

બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int dx$$

$\therefore \quad tan^{-1}z = x + c$ (c સ્વૈર અચળ)

$\therefore \quad tan^{-1}(x + y) = x + c$ એ વ્યાપક ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 16 : ઉકેલો : $cos(x - y)dy = dx$

ઉકેલ : અહીં $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos\,(x-y)}$ (i)

$x - y = t$ આદેશ લેતાં, (ii)

$1 - \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dt}{dx}$ (iii)

સમીકરણો (i), (ii) અને (iii) પરથી

$1 - \frac{dt}{dx} = \frac{1}{cos\,t}$

$\therefore \quad 1 - \frac{1}{cos\,t} = \frac{dt}{dx}$

$\therefore \quad \frac{cos t - 1}{cos t} = \frac{dt}{dx}$

$\therefore \quad \frac{-(1 - cos t)}{cos t} = \frac{dt}{dx}$

$\therefore \quad -dx = \frac{cos t}{1 - cos t}dt$

બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$\therefore \quad -\int dx = \int \frac{cos\,t}{1 - cos\,t} \times \frac{1 + cos t}{1 + cos t}\, dt$

$\therefore \quad -\int dx = \int \frac{cos\,t + cos^2 t}{sin^2\, t}\, dt$

$\therefore \quad -\int dx = \int cosec\, t \cdot cot\, t\, dt + \int cot^2\, t\, dt$

$\therefore \quad -\int dx = \int cosec\, t \cdot cot\, t\, dt + \int (cosec^2\, t - 1)\, dt$

$\therefore \quad -x + c = -cosec\, t - cot\, t - t$

$\therefore \quad -x + c = -cosec(x - y) - cot(x - y) - (x - y)$

$\therefore \quad cosec(x - y) + cot(x - y) + c = y$

સ્વાધ્યાય 5.3

1. નીચેનાં વિકલ સમીકરણો ઉકેલો. વધુમાં પ્રારંભિક શરતો આપેલ હોય ત્યારે વિશિષ્ટ ઉકેલ મેળવો :

(1) $xy(y + 1)\, dy = (x^2 + 1)\, dx$

(2) $y(1 + e^x)\, dy = (y + 1)\, e^x\, dx$

(3) $\frac{dy}{dx} = -tanx\ tany$

(4) $\frac{dy}{dx} - y\ tanx = -\ y\ sec^2x$

(5) $(e^y + 1)\, cosx\ dx + e^y\ sin\, x\ dy = 0$

(6) $\frac{dy}{dx} = (1 + x^2)(1 + y^2)$

(7) $y \log y\ dx - x\ dy = 0$

(8) $\frac{dy}{dx} = -4xy^2;\ y(0) = 1$

(9) $x\, dy = (2x^2 + 1)\, dx \quad (x \neq 0);\ y(1) = 1$

(10) $xy \frac{dy}{dx} = y + 2;\quad y(2) = 0$

(11) $\frac{dy}{dx} = 2e^x y^3;\ y(0) = \frac{1}{2}$

(12) $x \frac{dy}{dx} + cot\ y = 0;\quad y(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$

(13) $e^{\frac{dy}{dx}} = x + 1;\quad y(0) = 3,\ x > -1$

(14) $sin\left(\frac{dy}{dx}\right) = a$ જ્યાં $x = 0,\ y = 1,\ (a \in R)$

(15) $\frac{dy}{dx} = y\ tanx,\ y(0) = 1$

(16) $(x + 1)^2 \frac{dy}{dx} = xe^x$

2. નીચેનાં વિકલ સમીકરણો ઉકેલો :

(1) $\frac{dy}{dx} = sin(x + y)$

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{(x - y) + 3}{2(x - y) + 5}$

(3) $(x + y + 1) \frac{dy}{dx} = 1$

(4) $\frac{dy}{dx} = e^{x + y}$

(5) $(x + y)^2 \frac{dy}{dx} = a^2$

*

5.7 સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણ

ચાલો નીચેના વિધેયનો અભ્યાસ કરીએ

$$f(x,\ y) = 3x^2 + 2xy + y^2$$

$$= x^2\left(3 + 2\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)$$

$$= x^2\ \phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\therefore \quad f(x,\ y) = x^2\ \phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

અહીં આપણે વિધેય $f(x, y)$ ને $x^n\ \phi\left(\frac{y}{x}\right)$ સ્વરૂપે દર્શાવ્યુ છે. જો દ્વિચલ વિધેય $f(x, y)$ ને $f(x, y) = x^n\ \phi\left(\frac{y}{x}\right)$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય તો વિધેય $f(x, y)$ ને n ઘાતવાળું સમપરિમાણીય વિધેય કહે છે.

હવે ચાલો બીજી રીતે વિચારીએ. x અને y ની જગ્યાએ અનુક્રમે λx અને λy મૂકતાં (λ શૂન્યેતર અચળ)

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= 3(\lambda x)^2 + 2(\lambda x)(\lambda y) + (\lambda y)^2 \\ &= 3\lambda^2 x^2 + 2\lambda^2 xy + \lambda^2 y^2 \\ &= \lambda^2 (3x^2 + 2xy + y^2) \\ &= \lambda^2 f(x, y) \end{aligned}$$

અહીં આપણે વિધેય ને $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$ સ્વરૂપમાં દર્શાવ્યું છે. તેથી વિધેય $f(x, y)$ ને n ઘાતવાળું સમપરિમાણીય વિધેય કહે છે.

$f(x, y) = tanx + tany$ પ્રકારના વિધેયને $f(x, y) = x^n \phi\left(\frac{y}{x}\right)$ ને સ્વરૂપે લખી ન શકાય. તેથી તેને સમપરિમાણિય વિધેય કહી ન શકાય.

સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણ :

જો વિકલ સમીકરણ $f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy = 0$ માં વિધેય $f(x, y)$ અને $g(x, y)$ એ ચલ x અને y માં સમાન ઘાતવાળાં સમપરિમાણ વિધેયો હોય તો તેને સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણ કહે છે.

નોંધ : $\phi\left(\frac{y}{x}\right)$ સ્વરૂપનાં વિધેયો હંમેશા સમપરિમાણ વિધેય હોય છે.

સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ :

સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણ $f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy = 0$ ને $\frac{dy}{dx} = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$ સ્વરૂપે લખી શકાય.

$\frac{y}{x} = v$ આદેશ લેતાં, $y = vx$

'x' ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore \quad v + x\frac{dv}{dx} = \phi(v) \qquad \left(\frac{dy}{dx} = \phi\left(\frac{y}{x}\right) = \phi(v)\right)$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = \phi(v) - v$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{\phi(v) - v} = \frac{dx}{x} \qquad \text{(વિયોજનીય ચલ સ્વરૂપ)}$$

બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\int \frac{dv}{\phi(v) - v} = \int \frac{1}{x}\, dx$$

$$\therefore \quad \int \frac{dv}{\phi(v) - v} = \log|x| + c$$

આને સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ કહે છે. અહીં c એ સ્વૈર અચળ છે.

ઉદાહરણ 17 : ઉકેલો $\frac{dy}{dx} + \frac{y(x+y)}{x^2} = 0$

ઉકેલ : $\frac{dy}{dx} = -\frac{y(x+y)}{x^2} = -\left[\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right]$ **(i)**

$\frac{y}{x} = v$ આદેશ લેતાં, $y = vx$ **(ii)**

તેથી $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ **(iii)**

$\therefore \quad v + x\frac{dv}{dx} = -v - v^2$ **(i), (ii), (iii) પરથી**

$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = -(2v + v^2)$

$\therefore \quad \frac{dv}{2v + v^2} = -\frac{dx}{x}$ **(વિયોજનીય ચલ સ્વરૂપ)**

$\therefore \quad \int \frac{1}{v(v+2)}\, dv = \int -\frac{1}{x}\, dx$ **(બંને બાજુ સંકલન કરતાં)**

$\therefore \quad \frac{1}{2}\int \frac{v+2-v}{(v+2)v}\, dv = -\int \frac{1}{x}\, dx$

$\therefore \quad \frac{1}{2}\int \frac{1}{v}\, dv - \frac{1}{2}\int \frac{1}{v+2}\, dv = -\int \frac{1}{x}\, dx$

$\therefore \quad \frac{1}{2}\log|v| - \frac{1}{2}\log|v+2| = -\log|x| + \frac{1}{2}\log|c|$ **(c એ સ્વૈર અચળ)**

$\therefore \quad \log|v| - \log|v+2| = -2\log|x| + \log|c|$

$\therefore \quad \log\left|\frac{v}{v+2}\right| = \log\left|\frac{c}{x^2}\right|$

$\therefore \quad \log\left|\frac{y}{y+2x}\right| = \log\left|\frac{c}{x^2}\right|$ **$(v = \frac{y}{x})$**

$x^2y = c(2x + y)$ માંગેલ વ્યાપક ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 18 : ઉકેલો : $x^2\frac{dy}{dx} = x^2 + xy + y^2$.

ઉકેલ : $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$ **(i)**

$\frac{y}{x} = v$ આદેશ લેતાં, $y = vx$ **(ii)**

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ **(iii)**

સમીકરણો (i), (ii) અને (iii) પરથી,

$v + x\frac{dv}{dx} = 1 + v + v^2$

$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = 1 + v^2$

$\therefore \quad \dfrac{dv}{1+v^2} = \dfrac{dx}{x}$ $\quad (x \neq 0) \quad$ (વિયોજનીય ચલ સ્વરૂપ)

બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\int \frac{1}{1+v^2}\, dv = \int \frac{1}{x}\, dx$$

$tan^{-1} v = \log |x| + \log |c|$ (c એ સ્વૈર અચળ)

$tan^{-1} v = \log |xc|$

$tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) = \log |xc|$ એ આપેલ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 19 : ઉકેલો : $x \sin\left(\dfrac{y}{x}\right) \dfrac{dy}{dx} + x - y \sin\left(\dfrac{y}{x}\right) = 0$. તથા પ્રારંભિક શરત $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$ ને અધિન વિશિષ્ટ ઉકેલ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં $x \sin\left(\dfrac{y}{x}\right) \dfrac{dy}{dx} + x - y \sin\left(\dfrac{y}{x}\right) = 0$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y \sin\left(\frac{y}{x}\right) - x}{x \sin\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) - 1}{\sin\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad \text{(i)}$$

$\dfrac{y}{x} = v$ લેતાં $y = vx$. (ii)

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad \text{(iii)}$$

સમીકરણો (i), (ii) અને (iii) પરથી,

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v \sin v - 1}{\sin v}$$

$$\therefore \quad v + x\frac{dv}{dx} = v - \frac{1}{\sin v}$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\sin v}$$

$$\therefore \quad \sin v\, dv = -\frac{dx}{x}$$

બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\int \sin v\, dv = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\therefore \quad -\cos v = -\log |x| - \log |c|$$

$$\therefore \quad \cos\left(\frac{y}{x}\right) = \log |x| + \log |c|$$

$$\therefore \quad \cos\frac{y}{x} = \log |cx| \qquad \text{(iv)}$$

આ વ્યાપક ઉકેલ છે.

હવે $y(1) = \frac{\pi}{2}$ આપેલ છે. એટલે કે $x = 1$ અને $y = \frac{\pi}{2}$.

સમીકરણ (iv) પરથી, $cos \frac{\pi}{2} = \log |c|$

$\therefore \quad \log |c| = 0$

$\therefore \quad |c| = 1$

$\therefore \quad cos \left(\frac{y}{x}\right) = \log |x| \ (x \neq 0)$ માંગેલ વિશિષ્ટ ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 20 : $\left[x \, sin^2 \left(\frac{y}{x}\right) - y\right] dx + x \, dy = 0$ ઉકેલો. પ્રારંભિક શરત $y(1) = \frac{\pi}{4}$ ને અધિન વિશિષ્ટ ઉકેલ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં $\left[x \, sin^2 \left(\frac{y}{x}\right) - y\right] dx + x \, dy = 0$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - sin^2 \frac{y}{x}$ (i)

$\frac{y}{x} = v$ આદેશ લેતાં, $y = vx$ (ii)

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$ (iii)

પરિણામ (i), (ii) અને (iii) પરથી,

$\therefore \quad v + x \frac{dv}{dx} = v - sin^2 v$

$x \frac{dv}{dx} = - sin^2 v$

$\therefore \quad \frac{1}{sin^2 v} \, dv = - \frac{dx}{x}$ (વિયોજનીય ચલ સ્વરૂપ)

બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$\int cosec^2 v \, dv = - \int \frac{1}{x} \, dx$

$- cot \, v = - \log |x| - \log |c|$

$cot \left(\frac{y}{x}\right) = \log |cx|$ વ્યાપક ઉકેલ છે.

હવે, $y(1) = \frac{\pi}{4}$ આપેલ છે એટલે કે $x = 1, \ y = \frac{\pi}{4}$

$cot \frac{\pi}{4} = \log |c|$

$\therefore \quad \log |c| = 1$

$\therefore \quad |c| = e$

$\therefore \quad cot \frac{y}{x} = \log |ex| = \log |x| + \log e$

$\therefore \quad cot\,\dfrac{y}{x} = \log|x| + 1$ $\qquad (x \neq 0)$

આ માંગેલ વિશિષ્ટ ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 21 : ઉકેલો : $2xy + y^2 - 2x^2\dfrac{dy}{dx} = 0$. વળી, પ્રારંભિક શરત $y(1) = 2$ પરથી વિશિષ્ટ ઉકેલ શોધો.

ઉકેલ : અહીં $2xy + y^2 - 2x^2\dfrac{dy}{dx} = 0$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 \qquad \text{(i)}$$

$\dfrac{y}{x} = v$ આદેશ લેતાં, $y = vx$ $\qquad$ (ii)

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad \text{(iii)}$$

સમીકરણો (i), (ii) અને (iii) પરથી,

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + \frac{1}{2}v^2$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}v^2$$

$$\frac{2}{v^2}\,dv = \frac{dx}{x} \qquad \text{(વિયોજનીય સ્વરૂપ)}$$

બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$2\int \frac{1}{v^2}\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$-\frac{2}{v} = \log|x| + c$$

$-\dfrac{2x}{y} = \log|x| + c$ વ્યાપક ઉકેલ છે.

અહીં, $y(1) = 2$. તેથી $x = 1$, $y = 2$.

$$\therefore \quad -\frac{2}{2} = \log|1| + c$$

$$\therefore \quad c = -1$$

$$-\frac{2x}{y} = \log|x| - 1$$

$$y = \frac{2x}{1 - \log|x|} \quad (x \neq 0,\ x \neq e)$$

સ્વાધ્યાય 5.4

1. નીચેનાં વિકલ સમીકરણો ઉકેલો :

(1) $(x^2 + xy)\,dy = (x^2 + y^2)\,dx$

(2) $\left(x\,cos\,\dfrac{y}{x} + y\,sin\,\dfrac{y}{x}\right)y = \left(y\,sin\,\dfrac{y}{x} - x\,cos\,\dfrac{y}{x}\right)x\dfrac{dy}{dx}$

(3) $x\frac{dy}{dx} - y + x\, sin\left(\frac{y}{x}\right) = 0$

(4) $y\, e^{\frac{x}{y}}\, dx = (x\, e^{\frac{x}{y}} + y^2)\, dy$

(5) $x\, sin\left(\frac{y}{x}\right) \frac{dy}{dx} = y\, sin\left(\frac{y}{x}\right) + x$

(6) $y + 2ye^{\frac{x}{y}} \frac{dx}{dy} = 2xe^{\frac{x}{y}}$

(7) $x^2 \frac{dy}{dx} = x^2 - 2y^2 + xy$

(8) $(1 + e^{\frac{x}{y}})\, dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$

(9) $x\frac{dy}{dx} = x + y$

(10) $y\, dx + x\log\left(\frac{y}{x}\right) dy = 2x\, dy$

(11) $(xe^{\frac{y}{x}} + y)\, dx = x\, dy$

(12) $\frac{dy}{dx} + \frac{y(x+y)}{x^2} = 0$

(13) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + tan\left(\frac{y}{x}\right)$

2. આપેલ પ્રારંભિક શરતોને અધિન નીચેનાં વિકલ સમીકરણોનો વિશિષ્ટ ઉકેલ મેળવો :

(1) $(x^2 + y^2)\, dx + xy\, dy = 0;\ y(1) = 1$

(2) $x\, e^{\frac{y}{x}} - y + x\frac{dy}{dx} = 0;\ y(e) = 0$

(3) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + cosec\,\frac{y}{x} = 0;\ y(1) = 0$

(4) $(x^2 - 2y^2)\, dx + 2xy\, dy = 0;\ y(1) = 1$

(5) $2xy + y^2 - 2x^2\frac{dy}{dx} = 0;\ y(1) = 2$

(6) $(x^2 + 3xy + y^2)\, dx - x^2\, dy = 0;\ y(1) = 0$

*

5.8 સુરેખ વિકલ સમીકરણ :

જો $P(x)$ અને $Q(x)$ ચલ x નાં વિધેયો હોય તો વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$ ને પ્રથમ કક્ષાનું સુરેખ વિકલ સમીકરણ (Linear Differential Equation) કહે છે.

ઉદાહરણ તરીકે (1) $\frac{dy}{dx} + xy = cos\,x$ $\quad P(x) = x,\ Q(x) = cos\,x$

(2) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = e^x$ $\quad P(x) = -\frac{1}{x},\ Q(x) = e^x$

(3) $x\frac{dy}{dx} + 2y = x^3$ $\quad P(x) = \frac{2}{x},\ Q(x) = x^2$

(4) $\frac{dy}{dx} + y = x$ $\quad P(x) = 1,\ Q(x) = x$

સુરેખ વિકલ સમીકરણના ઉકેલની રીત :

ધારો કે વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$ આપેલ સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે.

બંને બાજુ $e^{\int P(x)\,dx}$ વડે ગુણતાં $\frac{dy}{dx} e^{\int P(x)\,dx} + y\, e^{\int P(x)\,dx} \cdot P(x) = Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}$

$\therefore \quad \frac{d}{dx}\,[ye^{\int P(x)\,dx}] = Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}$

બંને બાજુ x ને સાપેક્ષ સંકલન કરતાં,

$$ye^{\int P(x)\,dx} = \int [Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}]\ dx$$

નોંધ : અહીં, સુરેખ વિકલ સમીકરણને $e^{\int P(x)\,dx}$ વડે બંને બાજુ ગુણતાં સરળતાથી સંકલન કરી શકાય તેવા સ્વરૂપમાં ફેરવી શકાય છે. તેથી $e^{\int P(x)\,dx}$ ને 'સંકલ્યકારક અવયવ' - (Integrating Factor, I.F) કહે છે.

$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ ને પ્રથમ કક્ષાનું સુરેખ સમીકરણ કહે છે.

x ના વિધેય $h(x)$ વડે બંને બાજુ ગુણતાં,

$$h(x)\frac{dy}{dx} + h(x)\,P(x)y = h(x)Q(x) \qquad \text{(i)}$$

અહીં વિધેય $h(x)$ એવું પસંદ કરો કે જેથી $h(x)Q(x)$ એ $y\,h(x)$ નું વિકલિત બને.

$$\therefore\ h(x)\frac{dy}{dx} + h(x)\,P(x)y = \frac{d}{dx}yh(x)$$

$$\therefore\ h(x)\frac{dy}{dx} + h(x)\,P(x)y = h(x)\frac{dy}{dx} + yh'(x)$$

$$\therefore\ h(x)\,P(x)y = yh'(x)$$

$$\therefore\ h(x)\,P(x) = h'(x)$$

$$\therefore\ P(x) = \frac{h'(x)}{h(x)}$$

બંને બાજુ x ને સાપેક્ષ સંકલન કરતાં,

$$\therefore\ \int P(x)\,dx = \int \frac{1}{h(x)}\,h'(x)\,dx$$

$$\therefore\ \int P(x)\,dx = \log|(h(x))|$$

$$\therefore\ h(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

સમીકરણ (i) માં $h(x)$ ની કિંમત મૂકતાં,

$$\therefore\ e^{\int P(x)\,dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)\,dx}\,P(x)y = e^{\int P(x)\,dx}\,Q(x)$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)\,dx}y\right) = e^{\int P(x)\,dx}\,Q(x)$$

$$\therefore\ e^{\int P(x)\,dx}y = \int e^{\int P(x)\,dx}\,Q(x)\,dx.$$

આ રીતે સુરેખ વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ મેળવવામાં આવે છે.

વિધેય $h(x) = e^{\int P(x)\,dx}$ ને સંકલ્યકારક અવયવ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 22 : ઉકેલો $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$.

ઉકેલ : આ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$ પ્રકારનું સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે.

અહીં, $P(x) = \frac{1}{x}$ અને $Q(x) = x^2$

$$\therefore\ \text{I.F.} = e^{\int P(x)\,dx}$$

$$= e^{\int \frac{1}{x}\,dx}$$

$$= e^{\log|x|} = |x|$$

I.F. તરીકે x લઈ શકાય કારણ કે વિકલ સમીકરણની બંને બાજુ x વડે ગુણતાં તેમાં ફેર પડતો નથી. I.F. સંકલ્યકારક અવયવ છે. x વડે ગુણતાં પણ સંકલન શક્ય બને છે.

બંને બાજુ x વડે ગુણતાં,

$$x\frac{dy}{dx} + y = x^3$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(xy) = x^3$$

$$\therefore \quad xy = \int x^3\, dx$$

$$\therefore \quad xy = \frac{x^4}{4} + c$$ (c એ સ્વૈર અચળ)

આ આપેલ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 23 : ઉકેલો $\frac{dy}{dx} + y\sec x = \tan x$.

ઉકેલ : $\frac{dy}{dx} + y\sec x = \tan x$ સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે.

અહીં $P(x) = \sec x$, $Q(x) = \tan x$

$$\therefore \quad I.F. = e^{\int P(x)\, dx}$$

$$= e^{\int \sec x\, dx}$$

$$= e^{\log|\sec x + \tan x|}$$

$$= |\sec x + \tan x|$$

I.F. $= \sec x + \tan x$ લઈ શકાય.

આપેલ સમીકરણની બંને બાજુએ I.F. વડે ગુણતાં,

$$(\sec x + \tan x)\frac{dy}{dx} + \sec x\,(\sec x + \tan x)\,y = \tan x\,(\sec x + \tan x)$$

$$\frac{d}{dx}[y(\sec x + \tan x)] = \tan x\,(\sec x + \tan x)$$

$$\therefore \quad y(\sec x + \tan x) = \int \tan x\,(\sec x + \tan x)\, dx$$

$$\therefore \quad y(\sec x + \tan x) = \int \sec x \tan x\, dx + \int \tan^2 x\, dx$$

$$\therefore \quad y(\sec x + \tan x) = \int \sec x \tan x\, dx + \int (\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$\therefore \quad y(\sec x + \tan x) = \sec x + \tan x - x + c$$ (c એ સ્વૈર અચળ)

આ આપેલ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 24 : $\frac{dy}{dx} = y \tan x + e^x$ ઉકેલો.

ઉકેલ : $\frac{dy}{dx} = y \tan x + e^x$ સમીકરણ એ સુરેખ વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ સ્વરૂપમાં છે.

અહીં $P(x) = -\tan x$ અને $Q(x) = e^x$

હવે, I.F. $= e^{\int P(x)\, dx}$

$$= e^{\int -\tan x\, dx}$$

$$= e^{-\log|\sec x|}$$

$$= e^{\log|\cos x|}$$

$$= \cos x$$

$\therefore$ I.F. $= \cos x$ લઈ શકાય.

∴ સુરેખ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ

$y \cos x = \int e^x \cos x \, dx$ $\left(ye^{\int P(x)\,dx} = \int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx} dx\right)$

∴ $y \cos x = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + c$ માંગેલ વ્યાપક ઉકેલ છે. (c સ્વૈર અચળ છે.)

ઉદાહરણ 25 : ઉકેલો $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \log x$

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણ એ સુરેખ વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ સ્વરૂપમાં છે.

અહીં $P(x) = \frac{1}{x}$ અને $Q(x) = \log x$

$$\text{I.F.} = e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{\log|x|} = |x|$$

I.F. તરીકે x લઈ શકાય.

વ્યાપક ઉકેલની રીતે

$$ye^{\int P(x)\,dx} = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)\,dx} dx$$

$$yx = \int x \log x \, dx$$

∴ $yx = \log x \int x\,dx - \int\left(\frac{d}{dx}(\log x)\int x\,dx\right)dx$

∴ $yx = \log x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{2}\,dx$

∴ $yx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{4}x^2 + c$ માંગેલ વ્યાપક ઉકેલ છે. (c એ સ્વૈર અચળ)

સ્વાધ્યાય 5.5

નીચેનાં વિકલ સમીકરણો ઉકેલો :

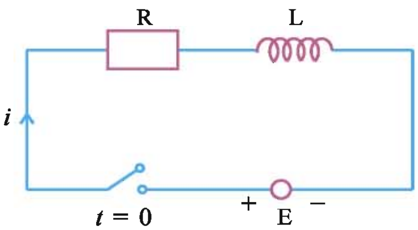
1. $\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$
2. $x\frac{dy}{dx} - y = (1 + x)e^{-x}$
3. $x\frac{dy}{dx} = x + y$
4. $\frac{dy}{dx} - \frac{2xy}{1+x^2} = x^2 + 1$
5. $\frac{dy}{dx} = x + y$
6. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = e^x$
7. $4\frac{dy}{dx} + 8y = 5e^{-3x}$
8. $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy - 4x^2 = 0$
9. $(1 + y^2)\,dx = (\tan^{-1}y - x)\,dy$
10. $x \log x \frac{dy}{dx} + y = \frac{2}{x}\log x, x > 0$
11. $\sin^2 x \frac{dy}{dx} + y = \cot x$
12. $y\,dx - (x + 2y^2)\,dy = 0$

*

5.9 વિકલ સમીકરણના ઉપયોગો :

આપણે જાણીએ છીએ તેમ વિવિધ શાખાઓ ગણિતશાસ્ત્ર, ભૌતિકશાસ્ત્ર, જૈવિકશાસ્ત્ર વગેરેના પાયાના પ્રશ્નોના ઉકેલના ભાગરૂપે વિકલ સમીકરણના અભ્યાસની શરૂઆત થઈ.

(1) ભૌતિકશાસ્ત્ર (R-L પરિપથ) : કોઈ R-L પરિપથ લેતાં, તેમાં અવરોધ (R) (Resistence) અને પ્રેરક (L) (Inductor) આવેલાં થવાથી તેને R-L પરિપથ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. અહીં $t = 0$, સમયે કળ બંધ હોવાથી પરિપથમાંથી વિદ્યુતપ્રવાહ પસાર થતો નથી. જ્યારે કળ ચાલુ કરવામાં આવે છે ત્યારે પરિપથમાંથી વિદ્યુતપ્રવાહ પસાર થાય છે. વિદ્યુતના નિયમ પ્રમાણે R અવરોધવાળા અવરોધક આગળ સ્થિત વૉલ્ટેજ Ri, અને પ્રેરક વૉલ્ટેજ $L\dfrac{di}{dt}$ છે, જ્યાં i એ વિદ્યુતપ્રવાહ છે.



આકૃતિ 5.5

ઉદાહરણ 26 : વિદ્યુત ચાલકબળ દર્શાવતું સમીકરણ $E = Ri + L\dfrac{di}{dt}$ છે, જ્યાં R એ અવરોધ અને L એ આત્મપ્રેરણ અને i એ વિદ્યુતપ્રવાહ છે. તો સમય (t) અને વિદ્યુતપ્રવાહ (i) વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવતું વિધેય મેળવો.

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણને $L\dfrac{di}{dt} = E - Ri$ સ્વરૂપે લખી શકાય.

$$\therefore \quad \frac{1}{E - Ri}\, di = \frac{1}{L}\, dt$$

$$\therefore \quad \frac{-R}{E - Ri}\, di = \frac{-R}{L}\, dt$$

(વિયોજનીય ચલ સ્વરૂપ)

બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\int \frac{-R}{E - Ri}\, di = \int \frac{-R}{L}\, dt$$

$$\therefore \quad \log (E - Ri) = \frac{-R}{L} t + \log c$$

$$\therefore \quad \log \frac{(E - Ri)}{c} = \frac{-R}{L} t$$

$$\therefore \quad E - Ri = ce^{\frac{-R}{L} t}$$

$$Ri = E - ce^{\frac{-R}{L} t}$$

$$\therefore \quad i = \frac{E}{R} - \frac{ce^{-\frac{R}{L}t}}{R}$$ માંગેલ સંબંધ દર્શાવતું સમીકરણ છે.

બીજી રીત :

આપેલ સમીકરણ $L\dfrac{di}{dt} = E - Ri$ છે.

$$\therefore \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L}$$

આપેલ સમીકરણ સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે.

$$\text{I.F.} = e^{\int \frac{R}{L} dt} = e^{\frac{R}{L} t}$$

બંને બાજુ I.F. વડે ગુણતાં, $e^{\frac{R}{L} t} \dfrac{di}{dt} + e^{\frac{R}{L} t} \dfrac{R}{L} i = \dfrac{E}{L} e^{\frac{R}{L} t}$

$\therefore \quad \frac{d}{dt}(e^{\frac{R}{L}t} i) = \frac{E}{L} e^{\frac{R}{L}t}$

બંને બાજુએ t પ્રત્યે સંકલન કરતાં,

$$e^{\frac{R}{L}t} \cdot i = \int \frac{E}{L} e^{\frac{R}{L}t} dt$$

$\therefore \quad e^{\frac{R}{L}t} \cdot i = \dfrac{\frac{E}{L} e^{\frac{R}{L}t}}{\frac{R}{L}} - \frac{c}{R}$ (સ્વૈર અચળ $-\frac{c}{R}$ લીધો છે.)

$\therefore \quad e^{\frac{R}{L}t} \cdot i = \frac{E}{R} e^{\frac{R}{L}t} - \frac{c}{R}$

$\therefore \quad i = \frac{E}{R} - \frac{c}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$ વ્યાપક ઉકેલ છે.

(2) ભૂમિતિમાં ઉપયોગ :

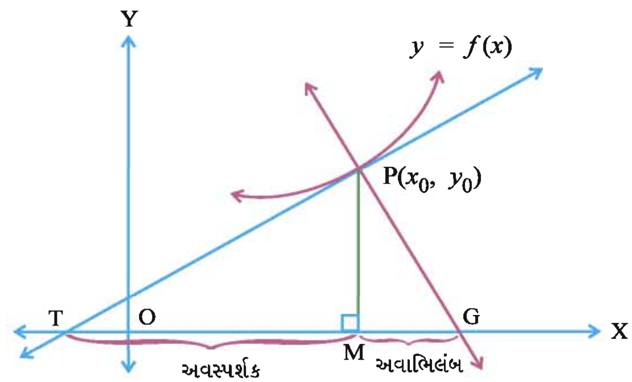
$y = f(x)$ એ આપેલ વક્ર છે.

જો y એ (x_0, y_0) આગળ વિકલનીય હોય તો બિંદુ (x_0, y_0) આગળ વક્રના સ્પર્શકનો ઢાળ $m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_0, y_0)}$ થાય.

(1) બિંદુ (x_0, y_0) આગળ વક્રને દોરેલ સ્પર્શકનું સમીકરણ

$$y - y_0 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_0, y_0)} (x - x_0) \text{ થાય.}$$

(2) બિંદુ (x_0, y_0) આગળ વક્રને દોરેલ અભિલંબનું સમીકરણ



આકૃતિ 5.6

$$y - y_0 = -\left(\frac{dx}{dy}\right)_{(x_0, y_0)} (x - x_0) \text{ થાય.} \qquad \left(\frac{dy}{dx} \neq 0\right)$$

અહીં, $M(x_0, 0)$ એ બિંદુ $P(x_0, y_0)$ માંથી X-અક્ષ પરનો લંબપાદ છે. ધારો કે P આગળનો સ્પર્શક X-અક્ષને T બિંદુમાં છેદે છે. $\overline{TM}$ ને વક્રનો **અવસ્પર્શક (Subtangent)** કહે છે.

$$\text{અવસ્પર્શકની લંબાઈ TM} = \left| \frac{y_0}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_0, y_0)}} \right|$$

ધારો કે P આગળનો અભિલંબ X-અક્ષને G માં છેદે છે. તો $\overline{MG}$ ને **અવાભિલંબ (Subnormal)** કહેવાય છે.

$$\text{અવાભિલંબની લંબાઈ MG} = \left| y_0 \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_0, y_0)} \right|$$

ઉદાહરણ 27 : વક્રના કોઈ પણ બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ, તે બિંદુના y-યામના વ્યસ્ત જેટલો છે. $(y \neq 0)$ વક્ર $(-1, 2)$માંથી પસાર થતો હોય તો આ વક્રનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે $P(x, y)$ એ વક્ર પરનું કોઈપણ બિંદુ છે.

વક્રના P(x, y) બિંદુ આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{dy}{dx}$ થાય.

પરંતુ P(x, y) બિંદુ આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{1}{y}$ આપેલ છે.

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$

$ydy = dx$

બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$\therefore \quad \int y \, dy = \int dx$

$\frac{y^2}{2} = x + \frac{c}{2}$ (c એ સ્વૈર અચળ)

$\therefore \quad y^2 = 2x + c,$

વક્ર (−1, 2) માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore \quad 4 = -2 + c$

$\therefore \quad c = 6$

$\therefore \quad y^2 = 2x + 6$ વક્રનું સમીકરણ છે.

(3) ઘાતાંકીય વૃદ્ધિદર (જેમ કે વસતી વધારો)

ધારો કે $p(t)$ એ સમય t ને સાપેક્ષ વધે છે. ધારો કે $t = 0$ સમયે $p(t) = p_0$

ધારો કે વૃદ્ધિદર એ જથ્થાના સમપ્રમાણમાં છે.

એટલે કે $\frac{d\,p(t)}{dt} \propto p(t)$

$\frac{d\,p(t)}{dt} = kp(t)$ $(k > 0)$

$\frac{1}{p(t)} \frac{d\,p(t)}{dt} = k$

બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$\int \frac{(d\,p(t))}{p(t)} = \int k\,dt$

$\log p(t) = kt + \log c$

$\therefore \quad \log p(t) - \log c = kt$

$\therefore \quad \log \frac{p(t)}{c} = kt$

$\therefore \quad p(t) = ce^{kt}$, જ્યાં c સ્વૈર અચળ છે.

$t = 0$ સમયે $p(t) = p_0$ આપેલ છે.

$\therefore \quad p_0 = ce^0$

$\therefore \quad c = p_0$

$\therefore \quad p(t) = p_0 e^{kt}$

આ ઉકેલ પરથી કોઈ પણ t સમયે જથ્થો $p(t)$ શોધી શકાય છે.

ઉદાહરણ 28 : એક શહેરની વસતીનો વધારો પ્રતિવર્ષે 2 % છે. તો કેટલા સમયમાં વસતી બમણી થશે ?

ઉકેલ : ધારો કે હાલમાં વસતી p_0 છે અને તે t સમયમાં $p(t)$ થશે.

વસતી વધારાનો દર 2 % છે.

તેથી, $\frac{dp}{dt} = \frac{2}{100}p$

$$\int \frac{dp}{p} = \frac{1}{50}\int dt$$

$\therefore \quad \log p = \frac{1}{50}t + \log c$

$\therefore \quad p = ce^{\frac{1}{50}t}$

હવે, $t = 0$, $p = p_0$

તેથી, $p_0 = ce^0$

$\therefore \quad c = p_0$

$\therefore \quad p = p_0 e^{\frac{1}{50}t}$

હવે વસતી બમણી થશે થાય ત્યારે $p = 2p_0$.

$\therefore \quad 2p_0 = p_0 e^{\frac{1}{50}t}$

$\therefore \quad \log_e 2 = \frac{1}{50}t$

$\therefore \quad t = 50 \log_e 2 = 34.65 \simeq 35$ વર્ષ

(4) ઘાતાંકીય ક્ષય :

ધારો કે $m(t)$ એ પદાર્થનો જથ્થો છે. તે સમય t સાથે ઘટે છે.

જો ક્ષયદર એ તેના જથ્થા m ના સમપ્રમાણમાં હોય તો,

$$\frac{dm}{dt} = -km \qquad (k > 0)$$

ઉપરની રીતે આપણે ક્ષય શોધી શકીએ.

ઉદાહરણ 29 : એક કિરણોત્સર્ગી પદાર્થ એ 2000 વર્ષમાં અડધો થાય છે. (આને તે પદાર્થનો અર્ધજીવનકાળ કહે છે.) તો તેના મૂળ જથ્થાનો દશમો ભાગ થતાં કેટલો સમય થશે ?

ઉકેલ : ધારો કે શરૂઆતમાં મૂળ જથ્થો m_0 ગ્રામ છે.

જો t સમયે પદાર્થનો જથ્થો m હોય તો, વિઘટન દર માટે

$$\frac{dm}{dt} = -km \qquad (k > 0)$$

$$\frac{dm}{m} = -k\,dt$$

$\therefore \quad \int \frac{dm}{m} = \int -k\,dt$

$\therefore \quad \log m = -kt + \log c$

$\therefore \quad m = ce^{-kt}$

$t = 0$ સમયે $m = m_0$

$$m_0 = ce^0$$

$$\therefore \quad c = m_0$$

$$\therefore \quad m = m_0 e^{-kt} \qquad \text{(i)}$$

હવે $t = 2000$ વર્ષ હોય ત્યારે $m = \frac{m_0}{2}$

તેથી, $\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-k \cdot 2000}$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} = e^{-k \cdot 2000}$$

$$\therefore \quad -k \cdot 2000 = -\log_e 2$$

$$\therefore \quad k = \frac{\log_e 2}{2000}$$

હવે ધારો કે કોઈ t સમયે, m એ $\frac{m_0}{10}$ થશે.

સમીકરણ (i) પરથી

$$\therefore \quad \frac{m_0}{10} = m_0 e^{-kt}$$

$$\therefore \quad -kt = \log_e \frac{1}{10}$$

$$\therefore \quad -kt = -\log_e 10$$

$$\therefore \quad kt = \log_e 10$$

$$\therefore \quad t = \frac{1}{k} \log_e 10 = \frac{2000}{\log_e 2} \cdot \log_e 10 \simeq 6644 \text{ વર્ષ}$$

(5) ન્યૂટનનો શીત નિયમ :

ન્યૂટનના નિયમ મુજબ પદાર્થના ઠંડા પડવાનો દર તે સમયના આસપાસના વાતાવરણના અચળ તાપમાન અને પદાર્થના તાપમાનના તફાવતના સમપ્રમાણમાં હોય છે.

ધારો કે S એ આસપાસના વાતાવરણનું અચળ તાપમાન છે. કોઈ t સમયે પદાર્થનું તાપમાન T છે. તો,

$$\frac{dT}{dt} \propto (T - S)$$

$$\therefore \quad \frac{dT}{dt} = -k(T - S) \qquad (k > 0 \text{ અચળ છે.})$$

$$\therefore \quad \frac{1}{T - S} \, dT = -k\,dt$$

બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\log |T - S| = -kt + \log c$$

$$\therefore \quad \log \left| \frac{T - S}{c} \right| = -kt$$

$$T - S = ce^{-kt}$$

ઉદાહરણ 30 : એક ઓરડામાં મૃતદેહનું તાપમાન 80° F છે. પાંચ મિનિટ બાદ મૃતદેહનું તાપમાન 60° F. થાય છે. ત્યાર બાદ બીજી 5 મિનિટ પછી તેનું તાપમાન 50° F થાય છે. તો તેના આસપાસના વાતાવરણનું અચળ તાપમાન શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે કોઈ t સમયે મૃતદેહનું તાપમાન T છે.

જો S એ આસપાસના વાતાવરણનું અચળ તાપમાન હોય (એટલે કે ઓરડાનું તાપમાન)
તો ન્યૂટનના શીતના નિયમ પ્રમાણે.

$$\frac{dT}{dt} \propto (T - S)$$

$$\therefore \quad \frac{dT}{dt} = -k(T - S)$$ ($k > 0$ અચળ છે. તાપમાન એ સમયગાળામાં ઘટે છે.)

$$\therefore \quad \frac{dT}{T - S} = -k\, dt$$

$$\therefore \quad \int \frac{dT}{T - S} = \int -k\, dt$$

$$\therefore \quad \log (T - S) = -kt + c \qquad \text{(i)}$$

હવે $t = 0$ ત્યારે $T = 80°$ F

$$\therefore \quad \log (80 - S) = c$$

સમીકરણ (i) પરથી,

$$\log (T - S) = -kt + \log (80 - S)$$

હવે $t = 5$ ત્યારે $T = 60°$ F

$$\therefore \quad \log (60 - S) = -5k + \log (80 - S) \qquad \text{(ii)}$$

વળી $t = 10$ ત્યારે $T = 50°$ F

$$\therefore \quad \log (50 - S) = -10k + \log (80 - S) \qquad \text{(iii)}$$

સમીકરણ (ii) અને (iii) પરથી,

$$\therefore \quad \frac{1}{5} \log \left(\frac{60 - S}{80 - S}\right) = -k = \frac{1}{10} \log \left(\frac{50 - S}{80 - S}\right)$$

$$\therefore \quad 2 \log \left(\frac{60 - S}{80 - S}\right) = \log \left(\frac{50 - S}{80 - S}\right)$$

$$\therefore \quad \left(\frac{60 - S}{80 - S}\right)^2 = \left(\frac{50 - S}{80 - S}\right)$$

$$\therefore \quad (60 - S)^2 = (80 - S)(50 - S)$$

$$\therefore \quad 3600 - 120S + S^2 = 4000 - 130S + S^2$$

$$\therefore \quad 10S = 400$$

$$\therefore \quad S = 40$$

$\therefore$ ઓરડાનું તાપમાન $40°$ F છે.

ઉદાહરણ 31 : સપ્તેશે ₹ 10,000 બૅન્કમાં નિયત મુદતની થાપણમાં મૂક્યા છે. તેના મુદલમાં થતા વધારાનો દર મુદલના 7 % જેટલો છે. તો તેની મૂળ રકમ કેટલા સમયમાં બમણી થશે ?

ઉકેલ : ધારો કે કોઈ t સમયે મુદલ P છે.

આપેલ માહિતી મુજબ

$$\frac{dP}{dt} = \frac{7P}{100}$$

$\therefore \quad \frac{dp}{P} = \frac{7}{100}\, dt$ (વિયોજનીય ચલ સ્વરૂપ)

બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\int \frac{dp}{P} = \int \frac{7}{100}\, dt$$

$\therefore \quad \log P = \frac{7}{100} t + \log c$

$\therefore \quad P = ce^{\frac{7t}{100}}$

હવે $t = 0$ ત્યારે P = ₹ 10,000

$10000 = ce^{0}$

$\therefore \quad c = 10000$

$\therefore \quad P = 10000\, e^{\frac{7t}{100}}$ (i)

ધારોકે t સમયમાં રકમ બમણી થાય છે.

t સમય બાદ P = 2 × મુદ્દલ

= 2 × 10,000

= ₹ 20,000

સમીકરણ (i) પરથી

$\therefore \quad 20000 = 10000\, e^{\frac{7t}{100}}$

$\therefore \quad 2 = e^{\frac{7t}{100}}$

$\therefore \quad \log_e 2 = \frac{7}{100} t$

$\therefore \quad t = \frac{100}{7} \log_e 2$, જે આશરે 9.9 વર્ષ થાય.

સ્વાધ્યાય 5.6

1. વક્રના કોઈ બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો X અંતઃ ખંડ એ તેના સ્પર્શબિંદુના y-યામ થી 4 ગણો છે. તે વક્રનું સમીકરણ શોધો.

2. એક પ્રયોગશાળામાં કરેલ પરીક્ષણ મુજબ બેક્ટેરિયાનો વૃદ્ધિ દર કોઈપણ સમયે હાજર બેક્ટેરિયાની સંખ્યાના પ્રમાણમાં છે. જો એક કલાકમાં બેક્ટેરિયાની સંખ્યા બમણી થાય તો,
   (1) 4 કલાકના અંતે બેક્ટેરિયાની સંખ્યા કેટલી હોય ?
   (2) જો 3 કલાક બાદ બેક્ટેરિયાની સંખ્યા 24,000 હોય, તો શરૂઆતમાં બેક્ટેરિયાની સંખ્યા કેટલી થશે ?

3. કોઈ એક વક્ર બિંદુ (3, –4) માંથી પસાર થાય છે. વક્રના બિંદુ (x, y) આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{2y}{x}$ છે. તો વક્રનું સમીકરણ શોધો.

4. બેંકમાં ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે મુકેલ મુદ્દલમાં થતા વધારાનો દર મુદ્દલ અને વાર્ષિક વ્યાજ દરના ગુણાકાર જેટલો છે.
   (1) જો બેંકનો વાર્ષિક વ્યાજ દર 5 %. હોય તો મુદ્દલ કેટલા સમયમાં બમણું થશે ?
   (2) જો 10 વર્ષમાં મુદ્દલ બમણું થાય તો વ્યાજ દર કયો હશે ?

5. એક કિરણોત્સર્ગી પદાર્થના વિઘટનનો દર તેના તે સમયના જથ્થાના સમપ્રમાણમાં છે. વિઘટન શરૂ થયાના એક વર્ષ બાદ પદાર્થનો જથ્થો 100 ગ્રામ હોય અને બે વર્ષ બાદ આ જથ્થો 80 ગ્રામ હોય, તો શરૂઆતમાં પદાર્થનો મૂળ જથ્થો કેટલો હશે ?

6. અચળ લંબાઈના અવાભિલંબ ધરાવતા તથા ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતા વક્રનું સમીકરણ મેળવો.

7. વક્રના કોઈ બિંદુ (x, y) આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ અને તે બિંદુના y યામનો ગુણાકાર એ બિંદુના x યામ જેટલો હોય તથા વક્ર બિંદુ $(1, 2)$ માંથી પસાર થતો હોય તો આ વક્રનું સમીકરણ મેળવો.

સ્વાધ્યાય 5

1. વિકલ સમીકરણ $y = x\left(\frac{dy}{dx}\right) + a\left(\frac{dx}{dy}\right)$ નો ઉકેલ $y = cx + \frac{a}{c}$ છે તેમ ચકાસો,

(જ્યાં c સ્વૈર અચળ છે.)

2. બતાવો કે વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = 1 + xy^2 + x + y^2$, $y(0) = 0$ નો ઉકેલ,

$y = tan\left(x + \frac{x^2}{2}\right)$ છે.

3. બતાવો કે $y = e^{-x} + ax + b$ એ વિકલ સમીકરણ $e^x \frac{d^2y}{dx^2} - 1 = 0$ નો ઉકેલ છે.

4. વિકલ સમીકરણ $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$ નો ઉકેલ $y = ae^{2x} + be^{-x}$ છે તેમ ચકાસો.

5. વક્રની સંહતિ $y^2 = a(b + x)(b - x)$ દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ શોધો.

$(a, b$ સ્વૈર અચળ$)$

6. ઉકેલો :

(1) $\frac{dy}{dx} = cos\,(x + y) + sin\,(x + y)$

(2) $\frac{dy}{dx} + \frac{4xy}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)^3}$

(3) $2ye^{\frac{x}{y}}\,dx + (y - 2xe^{\frac{x}{y}})\,dy = 0$

(4) $xy\frac{dy}{dx} = x^2 - y^2$

(5) $(x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0 \qquad y(1) = 1$

(6) $cos^2x\frac{dy}{dx} + y = tan\,x$

7. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c), (d)માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) $y = A sinx + B cosx$ જેનો વ્યાપક ઉકેલ હોય તેવા વિકલ સમીકરણની કક્ષા ......(જ્યાં A, B સ્વૈર અચળ છે.) ☐

(a) 4 (b) 2 (c) 0 (d) 3

(2) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + y = 0$ ની કક્ષા અને પરિમાણ અનુક્રમે ...... છે

(a) 3, 2 (b) 2, 3 (c) 3, વ્યાખ્યાયિત નથી (d) 2, 3

(3) $y' + y = \frac{5}{y'}$ નું પરિમાણ ...... છે.

(a) 1 (b) 2 (c) વ્યાખ્યાયિત નથી (d) -1

(4) વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = -\frac{x+y}{1+x^2}$ એ ...... વિકલ સમીકરણ છે.

(a) વિયોજનીય ચલનું (b) સમપરિમાણીય

(c) સુરેખ (d) દ્વિતીય કક્ષાનું

(5) સમપરિમાણ વિધેય $f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x+y}$ નું પરિમાણ ...... છે.

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) વ્યાખ્યાયિત નથી

(6) વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y+2}$ નો સંકલ્યકારક અવયવ ...... છે.

(a) e^x (b) e^{x+y+2} (c) e^{-y} (d) $\log|x + y + 2|$

(7) લંબાતિવલય $x^2 - y^2 = a^2$ સમુદાયનું વિકલ સમીકરણ ...... છે.

(a) $y_2 = 0$ (b) $xy + y_2 = 0$ (c) $yy_1 = x$ (d) $xy_1 + y = 0$

(8) વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2y}{dx^2} + xy = sinx$ ના કક્ષા અને પરિમાણ અનુક્રમે તો, ...

(a) 1, 1 (b) 2, 1 (c) 3, 2 (d) 2, અવ્યાખ્યાયિત

(9) નીચેના પૈકીનું કયું વિધેય સમીકરણ $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} + y = 0$ નો ઉકેલ છે ?

(a) $y = 4x$ (b) $y = 4$ (c) $y = 2x^2 + 4$ (d) $y = 2x - 4$

(10) વિકલ સમીકરણ $x\frac{dy}{dx} + y = 0$ નો ઉકેલ ...... છે

(a) $e^{xy} = c$ (b) $y = cx$ (c) $x = cy$ (d) $e^xy = c$

(11) વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 0$; $y(1) = 1$ નો વિશિષ્ટ ઉકેલ ......

(a) $y = \frac{1}{x}$ (b) $y = \frac{1}{x^2}$ (c) $x = \frac{1}{y^2}$ (d) $x^2 = \frac{1}{y^2}$

(12) દ્વિતીય કક્ષાના વિકલ સમીકરણના વ્યાપક ઉકેલમાં આવતા સ્વૈર અચળોની સંખ્યા ...... છે.

(a) 1 (b) 0 (c) 2 (d) 4

(13) દ્વિતીય કક્ષાના વિકલ સમીકરણના વિશિષ્ટ ઉકેલમાં આવતા સ્વૈર અચળોની સંખ્યા ...... છે.

(a) 4 (b) 2 (c) 1 (d) 0

(14) વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$ નો ઉકેલ ...... છે.

(a) $e^x + e^{-y} = c$ (b) $e^x + e^y = c$ (c) $e^{-x} + e^y = c$ (d) $e^{-x} + e^{-y} = c$

(15) વિકલ સમીકરણ $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right]^{\frac{2}{3}} = x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ નું પરિમાણ ...... છે.

(a) 3 (b) 2 (c) 6 (d) 1

(16) વિકલ સમીકરણ $2x\frac{dy}{dx} - y = 0;\ y(1) = 2$ નો ઉકેલ ...... દર્શાવે છે.

(a) રેખા (b) પરવલય (c) વર્તુળો (d) ઉપવલય

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. સ્વતંત્ર ચલ (x) અવલંબી ચલ (y) અને સ્વતંત્ર ચલને સાપેક્ષ અવલંબી ચલના વિકલિતોને સમાવતા સમીકરણને વિકલ સમીકરણ કહે છે.
2. વિકલ સમીકરણમાં આવતા સ્વતંત્ર ચલને સાપેક્ષ વિકલિતોમાં ઉચ્ચતમ કક્ષાના વિકલિતની કક્ષાને વિકલ સમીકરણની કક્ષા કહે છે.
3. વિકલ સમીકરણ વિકલિતોની બહુપદી સ્વરૂપે આપેલ હોય તો વિકલ સમીકરણમાં આવતા ઉચ્ચતમ કક્ષાના વિકલિતના ઉચ્ચતમ ઘાતાંકને સમીકરણનું પરિમાણ કહે છે.
4. n કક્ષાના વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ એ વિકલ સમીકરણની કક્ષા n જેટલા સ્વૈર અચળો ધરાવતું વિધેય હોય. તેને વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ કહે છે. સ્વૈર અચળથી મુક્ત ઉકેલને વિશિષ્ટ ઉકેલ કહે છે.
5. વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ મેળવવાની વિયોજનીય ચલની રીતમાં ચલોને સંપૂર્ણપણે અલગ કરવામાં આવે છે.
6. જો વિધેય $f(x, y) = x^n \phi\left(\frac{y}{x}\right)$ ના સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય તો તેને n કક્ષાનું સમપરિમાણ વિધેય કહે છે.
7. જો $P(x, y)$ તથા $Q(x, y)$ એક જ પરિમાણનાં સમપરિમાણ વિધેયો હોય, તો $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$ ને સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણ કહે છે.
8. જો $P(x)$ અને $Q(x)$ એ ચલ x નાં વિધેય હોય તો વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ ને સુરેખ વિકલ સમીકરણ કહે છે. તેનો ઉકેલ $ye^{\int P\,dx} = \int Qe^{\int P\,dx}\,dx$ છે.
9. વિકલ સમીકરણના ઉપયોગ