નિશ્ચાયક 3

In mathematics, the art of proposing a question must be held of higher value than solving it.

– Georg Cantor

*

Mathematics is the cheapest science. Unlike Physics and Chemistry, it does not require any expensive equipment. All one needs is a pencil and paper.

– George Polya

3.1 પ્રાસ્તાવિક

અભિવ્યક્તિ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ને 2×2 નિશ્ચાયક કહે છે અને તેનું મૂલ્ય $ad - bc$ વડે વ્યાખ્યાયિત થાય છે. વાસ્તવિક સંખ્યા $ad - bc$ ને રજૂ કરવાની આ એક બીજી સાંકેતિક પદ્ધતિ છે. R^2 માં આપેલ બે સુરેખ સમીકરણની સંહતિનો ઉકેલ મેળવવાની ચોકડી ગુણાકારની રીત તો તમને યાદ હશે જ. તમને આ બે વચ્ચેના જોડાણનો ખ્યાલ આવે છે ?

3.2 દ્વિહાર નિશ્ચાયક

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ને દ્વિહાર નિશ્ચાયક (Second order determinant) કહે છે. વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a, b, c, d ને નિશ્ચાયકના ઘટકો (elements or entries) કહેવામાં આવે છે. $a \quad b$ ને પ્રથમ હાર (first row), $c \quad d$ ને દ્વિતીય હાર (second row), $\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}$ ને પ્રથમ સ્તંભ (first column), $\begin{matrix} b \\ d \end{matrix}$ ને દ્વિતીય સ્તંભ (second column), $\begin{matrix} a & \\ & d \end{matrix}$ ને અગ્ર વિકર્ણ (principal diagonal), $\begin{matrix} & b \\ c & \end{matrix}$ ને પ્રતિવિકર્ણ (secondary diagonal) કહે છે. $ad - bc$ ને આ દ્વિહાર નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય કહે છે. આપણે $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ લખીશું.

આમ, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = **અગ્રવિકર્ણ પરના ઘટકોનો ગુણાકાર – પ્રતિવિકર્ણ પરના ઘટકોનો ગુણાકાર.**

ઉદાહરણ તરીકે, $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = (1)(6) - (4)(5) = 6 - 20 = -14$

3.3 ત્રિહાર નિશ્ચાયક

જો આપણે ત્રણ ચલના ત્રણ સુરેખ સમીકરણોની સંહતિનો ઉકેલ મેળવવો હોય, તો આપણને **ત્રિહાર નિશ્ચાયક (Third order determinant)**ની જરૂરિયાત પડશે.

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ને ત્રિહાર નિશ્ચાયક કહે છે.

અહીં a_i, b_i, c_i (i = 1, 2, 3) વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે. આ વાસ્તવિક સંખ્યાઓને ત્રિહાર નિશ્ચાયકના ઘટકો કહે છે. $a_1 \ b_1 \ c_1$; $a_2 \ b_2 \ c_2$; $a_3 \ b_3 \ c_3$ ને અનુક્રમે પ્રથમ, દ્વિતીય અને તૃતીય હાર કહે છે. $\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix}$; $\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_2 \end{matrix}$; $\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix}$ ને અનુક્રમે પ્રથમ, દ્વિતીય અને તૃતીય સ્તંભ કહે છે.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 (b_2c_3 - b_3c_2) - b_1 (a_2c_3 - a_3c_2) + c_1 (a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1$$

આ અભિવ્યક્તિને આપેલ **ત્રિહાર નિશ્ચાયકનું વિસ્તરણ** અથવા **મૂલ્ય** કહે છે.

આપણે નિશ્ચાયકના મૂલ્ય તથા નિશ્ચાયક બંને માટે સંકેત D જ વાપરીશું.

નોંધ : ત્રિહાર નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય મેળવવા માટે, a_1 નો ગુણિત શોધવા આપણે a_1 જે હાર અને જે સ્તંભમાં છે, તે હાર અને સ્તંભને દૂર કરતાં અને બાકીના ઘટકોને તે જ સ્થિતિમાં રાખતાં દ્વિહાર નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ મળે. આ દ્વિહાર નિશ્ચાયક a_1 નો ગુણિત થશે. આ જ પ્રમાણે b_1 અને c_1ના ગુણિત મેળવીશું.

3.4 કેટલાક સંકેતો

આપણે નિશ્ચાયક વિશે કામ કરતા હોઈએ ત્યારે નિશ્ચાયકને એક સ્વરૂપમાંથી બીજા સ્વરૂપમાં ફેરવવાની આપણને જરૂર પડે છે. આ માટે આપણે અવારનવાર નિશ્ચાયક પર કેટલીક ક્રિયાઓ કરવી પડે છે. આ ક્રિયાઓને ટૂંકા સ્વરૂપમાં દર્શાવવા માટે આપણે કેટલાક સંકેતોનો ઉપયોગ કરીએ છીએ. તે વિષે હવે આપણે જોઈએ.

(1) $R_i \to C_i$: પ્રત્યેક હારને અનુરૂપ સ્તંભમાં (અથવા પ્રત્યેક સ્તંભને અનુરૂપ હારમાં) ફેરવવાની ક્રિયા માટે આપણે આ સંકેતનો ઉપયોગ કરીશું.

આમ, $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ પર $R_i \to C_i$ ક્રિયા કરતાં મળતો નવો નિશ્ચાયક $D' = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ થાય.

(2) R_{ij} (C_{ij}) ($i \neq j$) : આ સંકેત આપણે i મી હાર (સ્તંભ) તથા j મી હાર (સ્તંભ)ની અદલબદલ કરવાની ક્રિયા માટે વાપરીશું.

ઉદાહરણ તરીકે, C_{23} એટલે કે બીજા અને ત્રીજા સ્તંભની અદલબદલ કરવાની ક્રિયા.

જો $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ હોય, તો તેના પર C_{23} ક્રિયા કરતાં મળતો નવો નિશ્ચાયક $D' = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}$ થશે.

(3) $R_i(k)$ [$C_i(k)$] : આ સંકેત આપણે i મી હાર (સ્તંભ)ના પ્રત્યેક ઘટકને $k \in R$ ($k \neq 0$) વડે ગુણવાની ક્રિયા માટે વાપરીશું. (આપણે i મી હાર (સ્તંભ)ને k વડે ગુણતાં, એમ કહીશું.)

આમ, $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ પર $R_1(3)$ ક્રિયા કરતાં મળતો નિશ્ચાયક $D' = \begin{vmatrix} 3a_1 & 3b_1 & 3c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ થાય.

(4) $R_{ij}(k)$ $[C_{ij}(k)]$ $(i \neq j)$: આ સંકેત આપણે નિશ્ચાયકની i મી હાર (સ્તંભ)ના દરેક ઘટકને શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યા k વડે ગુણીને j મી હાર (સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકમાં ઉમેરવાની ક્રિયા માટે વાપરીશું.

આમ, $R_{31}(-2)$ ક્રિયા કરતાં મળતો નવો નિશ્ચાયક $D' = \begin{vmatrix} a_1 - 2a_3 & b_1 - 2b_3 & c_1 - 2c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ થશે.

ઉદાહરણ 1 : મૂલ્ય શોધો : (1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ x & x-1 \end{vmatrix}$.

ઉકેલ : (1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - (-2) \cdot 3 = -4 + 6 = 2$

(2) $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ x & x-1 \end{vmatrix} = (x + 1)(x - 1) - (x)(x) = x^2 - 1 - x^2 = -1$

ઉદાહરણ 2 : મૂલ્ય શોધો $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$.

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$

$= 2(-6 - 3) - 3(-3 + 6) - 2(1 + 4)$

$= -18 - 9 - 10$

$= -37$

સ્વાધ્યાય 3.1

1. મૂલ્ય શોધો :

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 11 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 2+\sqrt{3} & 3+\sqrt{11} \\ 3-\sqrt{11} & 2-\sqrt{3} \end{vmatrix}$

2. ઉકેલો :

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -1 \\ 5 & x \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 4 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}$.

3. ત્રિહાર નિશ્ચાયકનાં મૂલ્ય મેળવો :

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 9 & -5 & 4 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 1 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

4. સાબિત કરો : $\begin{vmatrix} -\cos\alpha & \sin\beta & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\alpha & 0 & -\sin\beta \end{vmatrix} = 0$

*

3.5 નિશ્ચાયકના ગુણધર્મો

હવે આપણે નિશ્ચાયકના કેટલાક ગુણધર્મો સાબિત કરીશું. આપણે આ ગુણધર્મોની સાબિતી ત્રિહાર નિશ્ચાયકો માટે જ આપીશું. પરંતુ તે દ્વિહાર નિશ્ચાયકો માટે પણ સત્ય છે.

પ્રમેય 3.1 : નિશ્ચાયકની બધી જ હારને અનુરૂપ સ્તંભોમાં ફેરવવામાં આવે, તો નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય બદલાતું નથી.

[જો $R_i \to C_i$ કરીએ તો નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય બદલાતું નથી.]

સાબિતી : ધારો કે $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ આપેલ નિશ્ચાયક છે.

નિશ્ચાયકની બધી જ હારને અનુરૂપ સ્તંભમાં ફેરવતાં ($R_i \to C_i$ ક્રિયા કરતાં) મળતો નવો નિશ્ચાયક D' હોય, તો

$$D' = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$
$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$
$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1$$
$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$
$$= D$$

આમ, નિશ્ચાયકની બધી જ હારને અનુરૂપ સ્તંભમાં ફેરવવાથી નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય બદલાતું નથી.

ઉદાહરણ 3 : $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ નું વિસ્તરણ કરો તથા D પર $R_i \to C_i$ ક્રિયા કરવાથી D નું મૂલ્ય બદલાતું નથી તેમ ચકાસો.

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 2(16 + 6) - 1(12 - 10) + (-1)(-9 - 20)$

$= 44 - 2 + 29 = 71$

હવે, D પર $R_i \to C_i$ પ્રક્રિયા કરવાથી મળતો નવો નિશ્ચાયક D' હોય તો,

$D' = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2(16 + 6) - 3(4 - 3) + 5(2 + 4)$

$= 44 - 3 + 30 = 71$

તેથી D = D'.

પ્રમેય 3.2 : નિશ્ચાયકની કોઈ પણ બે હાર (સ્તંભ)ની અદલાબદલી કરતાં મળતા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય, આપેલા નિશ્ચાયકના મૂલ્યની વિરોધી સંખ્યા છે.

[જો D પર R_{ij} (C_{ij}) પ્રક્રિયા કરીએ અને તેથી નવો નિશ્ચાયક D' મળે, તો D' = –D થાય.]

સાબિતી : ધારો કે $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ એ આપેલ નિશ્ચાયક છે.

D ની પ્રથમ અને દ્વિતીય હારની અદલાબદલી (R_{12} કરતાં) મળતો નવો નિશ્ચાયક D' હોય તો,

$$\begin{aligned}
D' &= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= a_2(b_1c_3 - b_3c_1) - b_2(a_1c_3 - a_3c_1) + c_2(a_1b_3 - a_3b_1) \\
&= a_2b_1c_3 - a_2b_3c_1 - b_2a_1c_3 + b_2a_3c_1 + c_2a_1b_3 - c_2a_3b_1 \\
&= -[a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1] \\
&= -[a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)] \\
&= -D
\end{aligned}$$

આમ, નિશ્ચાયકની કોઈ પણ બે હાર (સ્તંભ)ની અદલબદલ કરવાથી મળતા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય, આપેલા નિશ્ચાયકના મૂલ્યની વિરોધી સંખ્યા છે તેમ સાબિત થાય છે. સ્તંભનો ઉપયોગ કરતાં પણ આ જ પરિણામ મળે. (સ્વ-પ્રયત્ને મેળવો !)

ઉદાહરણ 4 : $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય મેળવો તથા ચકાસો કે D પર C_{23} ક્રિયા કરવાથી મળતા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય D ના મૂલ્યની વિરોધી સંખ્યા છે.

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1(16 + 1) - 2(-12 + 2) + 3(-3 - 8)$

$= 17 + 20 - 33 = 4$

હવે D પર C_{23} ક્રિયા કરતાં મળતો નવો નિશ્ચાયક D' હોય તો,

$$D' = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1 - 16) - 3(-3 - 8) + 2(-12 + 2)$$

$= -17 + 33 - 20 = -4$

આમ, D' = −D.

પ્રમેય 3.3 : નિશ્ચાયકની કોઈ પણ હાર (સ્તંભ)ના પ્રત્યેક ઘટકને વાસ્તવિક સંખ્યા k વડે ગુણી મળતા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય, આપેલા નિશ્ચાયકના મૂલ્ય કરતાં k ગણું હોય છે.

[જો D પર $R_i(k)$ અથવા $C_i(k)$ પ્રક્રિયા કરવામાં આવે અને નવો નિશ્ચાયક D' મળે, તો D' = kD.]

સાબિતી : ધારો કે $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ એ આપેલ નિશ્ચાયક છે.

નિશ્ચાયકની પ્રથમ હારના બધા ઘટકોને k વડે ગુણતાં ($R_1(k)$ ક્રિયા કરતાં) મળતો નવો નિશ્ચાયક D' હોય, તો

$$\begin{aligned}
D' = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= ka_1(b_2c_3 - b_3c_2) - kb_1(a_2c_3 - a_3c_2) + kc_1(a_2b_3 - a_3b_2) \\
&= k[a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)] \\
&= kD
\end{aligned}$$

તેથી, $\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. $\qquad k \in R$

નોંધ : જો કોઈ નિશ્ચાયકની હાર (સ્તંભ)ના બધા જ ઘટકોને **શૂન્યેતર** વાસ્તવિક સંખ્યા k વડે ગુણીએ અને મળતા નિશ્ચાયકના મૂલ્યને k વડે ભાગીએ, તો નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય તે જ રહે.

એટલે કે, $\frac{1}{k}\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

ઉદાહરણ 5 : વિસ્તરણ કરો : $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ તથા D પર $C_1(3)$ પ્રક્રિયા કરતાં મળતા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય D ના મૂલ્યના 3 ગણા જેટલું છે તેમ બતાવો.

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 3(10 + 18) - 2(8 - 6) + 1(-12 - 5)$

$= 84 - 4 - 17 = 63$

હવે, D પર $C_1(3)$ ક્રિયા કરતાં મળતો નવો નિશ્ચાયક D' હોય તો,

$$D' = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 12 & 5 & 6 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 9(10 + 18) - 2(24 - 18) + 1(-36 - 15)$$

$= 252 - 12 - 51$
$= 189$
$= 3(63)$

$\therefore \quad D' = 3D.$

પ્રમેય 3.4 : $\begin{vmatrix} a_1+d_1 & b_1+e_1 & c_1+f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

સાબિતી : ડા.બા. $= (a_1 + d_1)(b_2c_3 - b_3c_2) - (b_1 + e_1)(a_2c_3 - a_3c_2) + (c_1 + f_1)(a_2b_3 - a_3b_2)$

$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + d_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) - e_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) + f_1(a_2b_3 - a_3b_2)$

$= [a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)] + [d_1(b_2c_3 - b_3c_2) - e_1(a_2c_3 - a_3c_2) + f_1(a_2b_3 - a_3b_2)]$

$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ = જ.બા.

[આમ, નિશ્ચાયકને બે નિશ્ચાયકોના સરવાળા તરીકે લખી શકાય. આ ક્રિયા આપણે કોઈ પણ હાર અથવા સ્તંભ માટે કરી શકીએ. પ્રમેય 3.3 અને 3.4 એ, નિશ્ચાયક એ સુરેખ (બહુચલ સુરેખ) વિધેય છે તેમ સૂચવે છે. આમ, નિશ્ચાયક એ બહુચલ સુરેખ વિધેય છે. પ્રમેય 3.2 ના કારણે આ પ્રમેય કોઈ પણ હાર કે સ્તંભના ઘટક વિભાજન માટે સત્ય છે.]

પ્રમેય 3.5 : જો કોઈ નિશ્ચાયકમાં કોઈ પણ બે હાર (સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકો સમાન હોય, તો તે નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય શૂન્ય થાય છે.

સાબિતી : ધારો કે નિશ્ચાયકની પ્રથમ અને દ્વિતીય હારના અનુરૂપ ઘટકો સમાન છે.

એટલે કે, $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

D ની પ્રથમ અને દ્વિતીય હારની અદલાબદલી કરતાં (R_{12} ક્રિયા કરતાં) મળતો નવો નિશ્ચાયક D' હોય, તો D' = −D થાય. **(પ્રમેય 3.2)**

પરંતુ પ્રથમ બે હાર સમાન હોવાથી D બદલાતો નથી, એટલે કે D' = D જ છે.

તેથી D' = −D તથા D' = D હોવાથી D = −D

$\therefore$ 2D = 0 તેથી D = 0

આમ, જો નિશ્ચાયકની બે હાર (સ્તંભ) સમાન હોય, તો નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય શૂન્ય મળે છે.

પ્રમેય 3.6 : નિશ્ચાયકની કોઈ પણ હાર (સ્તંભ)ના પ્રત્યેક ઘટકને વાસ્તવિક સંખ્યા *k* વડે ગુણી અન્ય હાર (સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકમાં ઉમેરતાં નિશ્ચાયકની કિંમત બદલાતી નથી. ($k \neq 0$)

સાબિતી : ધારો કે $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

હવે $R_{21}(k)$ ક્રિયા કરતાં મળતો નિશ્ચાયક D' હોય, તો

$$D' = \begin{vmatrix} a_1 + ka_2 & b_1 + kb_2 & c_1 + kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\therefore D' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ **(પ્રમેય 3.4)**

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ **(પ્રમેય 3.3)**

$= D + k(0)$ **(પ્રમેય 3.5)**

$= D$

આમ, નિશ્ચાયકમાં કોઈ પણ હાર (સ્તંભ)ના પ્રત્યેક ઘટકને શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યા *k* વડે ગુણીને અન્ય હાર (સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકોમાં ઉમેરતાં નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય બદલાતું નથી.

ઉદાહરણ 6 : સાબિત કરો કે $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a+b & b \\ 1 & a & a+b \end{vmatrix} = ab$

ઉકેલ : ધારો કે $D = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a+b & b \\ 1 & a & a+b \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -b & 0 \\ 1 & a+b & b \\ 1 & a & a+b \end{vmatrix}$$ **$[R_{21}(-1)]$**

$= b(a + b - b)$ **(0 ના ગુણિત 0 થાય.)**

$= ab$

ઉદાહરણ 7 : વિસ્તરણ કર્યા સિવાય સાબિત કરો કે $\begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 0$

ઉકેલ : ધારો કે D $= \begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$ **$(R_i \to C_i)$**

$= (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$ **$(R_i(-1),\ i = 1, 2, 3)$**

$= -D$

આમ, $D = -D$ મળે. તેથી $2D = 0$ એટલે કે $D = 0$.

ઉદાહરણ 8 : સાબિત કરો કે $\begin{vmatrix} cos(\theta+\phi) & -sin(\theta+\phi) & cos2\phi \\ sin\theta & cos\theta & sin\phi \\ -cos\theta & sin\theta & cos\phi \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય θ પર આધારિત નથી.

ઉકેલ : ધારો કે D $= \begin{vmatrix} cos(\theta+\phi) & -sin(\theta+\phi) & cos2\phi \\ sin\theta & cos\theta & sin\phi \\ -cos\theta & sin\theta & cos\phi \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} cos\theta\, cos\phi - sin\theta\, sin\phi & -sin\theta\, cos\phi - cos\theta\, sin\phi & cos2\phi \\ sin\theta & cos\theta & sin\phi \\ -cos\theta & sin\theta & cos\phi \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & cos2\phi+1 \\ sin\theta & cos\theta & sin\phi \\ -cos\theta & sin\theta & cos\phi \end{vmatrix}$ **$(R_{21}(sin\phi),\ R_{31}(cos\phi))$**

$= (cos2\phi + 1)(sin^2\theta + cos^2\theta)$

$= 1 + cos2\phi$, જે θ પર આધારિત નથી.

ઉદાહરણ 9 : સાબિત કરો કે $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$, 11 વડે વિભાજ્ય છે.

ઉકેલ : $C_{13}(100)$ અને $C_{23}(10)$ ક્રિયા કરતાં,

$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 264 \\ 5 & 0 & 506 \\ 3 & 5 & 352 \end{vmatrix}$ થાય.

$= \begin{vmatrix} 2 & 6 & 11\times 24 \\ 5 & 0 & 11\times 46 \\ 3 & 5 & 11\times 32 \end{vmatrix}$

$$= 11\begin{vmatrix} 2 & 6 & 24 \\ 5 & 0 & 46 \\ 3 & 5 & 32 \end{vmatrix} \qquad C_3\left(\frac{1}{11}\right)$$

$$= 11 \cdot n \qquad (n \in Z)$$

$\therefore$ આપેલ નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય 11 વડે વિભાજ્ય છે.

ઉદાહરણ 10 : પ્રમેયોનો ઉપયોગ કરી સાબિત કરો : $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a - b)(b - c)(c - a).$

$(a \neq b,\ b \neq c,\ c \neq a)$

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \\ a-b & b-c & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (પ્રથમ $C_{21}(-1)$ અને પછી $C_{32}(-1)$)

$$= (a - b)(b - c)\begin{vmatrix} a+b & b+c & c^2 \\ 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \left(C_1\left(\frac{1}{a-b}\right),\ C_2\left(\frac{1}{b-c}\right),\ a \neq b,\ b \neq c\right)$$

$$= (a - b)(b - c)\begin{vmatrix} a-c & b+c & c^2 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad [C_{21}(-1)]$$

$$= (a - b)(b - c)(a - c)\begin{vmatrix} 1 & b+c & c^2 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \left(C_1\left(\frac{1}{a-c}\right),\ (a \neq c)\right)$$

$$= (a - b)(b - c)(a - c) \cdot (1)$$

$$= -(a - b)(b - c)(c - a)$$

(**નોંધ :** જો $a = b$ અથવા $b = c$ અથવા $c = a$ તો બે સ્તંભ સમાન થવાથી $D = 0$ = જ.બા.)

ઉદાહરણ 11 : વિસ્તરણ કર્યા સિવાય સાબિત કરો : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 0$

ઉકેલ : ધારો કે $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x+y+z & x+y+z & x+y+z \end{vmatrix} \qquad [R_{23}(1)]$$

$$= (x + y + z)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \left(C_3\left(\frac{1}{x+y+z}\right),\ x + y + z \neq 0\right)$$

$$= (x + y + z)\ (0) \qquad [R_1 = R_3]$$

$$= 0$$

(**નોંધ :** જો $x + y + z = 0$ તો $R_3 = 0$ અને તેથી $D = 0$.)

ઉદાહરણ 12 : $\begin{vmatrix} 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix} = 0$ નો ઉકેલગણ શોધો.

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore \begin{vmatrix} 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ x+2 & 2x+4 & 6x+12 \end{vmatrix} = 0$ **[$R_{13}(-1)$]**

$\therefore \begin{vmatrix} x+1 & x+1 & x+1 \\ x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ x+2 & 2(x+2) & 6(x+2) \end{vmatrix} = 0$ **[$R_{21}(-1)$]**

$\therefore (x+1)(x+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$ **(પ્રમેય 3.3)**

$\therefore (x+1)(x+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+2 & x+1 & x+1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$ **($C_{23}(-1)$ અને $C_{12}(-1)$)**

$\therefore (x+1)(x+2)[(x+1)4 - 1(x+1)] = 0$

$\therefore 3(x+1)(x+2) \cdot (x+1) = 0$

$\therefore x = -1$ અથવા $x = -2$

$\therefore$ ઉકેલગણ $\{-1, -2\}$ મળે.

ઉદાહરણ 13 : સમીકરણ $\begin{vmatrix} x & 4 & 6 \\ 2 & 3 & -9 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 2x-1 & -8 & -11 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ ઉકેલો.

ઉકેલ : $(-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ x & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 6 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 1-2x & 8 & 11 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ **(પ્રથમ નિશ્ચાયક પર R_{12}, બીજા નિશ્ચાયક પર R_{13} ક્રિયા કરતાં અને ત્રીજા નિશ્ચાયક પર $R_2(-1)$ ક્રિયા કરતાં)**

$\therefore \begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ x & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 6 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 1-2x & 8 & 11 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

$\therefore \begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ x+6 & 8 & 11 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 1-2x & 8 & 11 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ **(પ્રમેય 3.4)**

$\therefore \begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ x+6 & 8 & 11 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 1-2x & 8 & 11 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\therefore \begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 3x+5 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (3x + 5) \begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ (પ્રમેય 3.3)

$\therefore$ $3x + 5 = 0$ (નિશ્ચાયક $\neq 0$)

$\therefore$ $x = -\frac{5}{3}$

$\therefore$ ઉકેલગણ $\left\{-\frac{5}{3}\right\}$ છે.

સ્વાધ્યાય 3.2

1. પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો :

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = (x - y)(y - z)(z - x).$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ 1 & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix} = (x - y)(y - z)(z - x)(x + y + z).$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ (x+1)^2 & (y+1)^2 & (z+1)^2 \end{vmatrix} = (x - y)(y - z)(z - x).$

(4) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x-y & y-z & z-x \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$

(5) $\begin{vmatrix} 0 & ab^2 & ac^2 \\ a^2b & 0 & bc^2 \\ a^2c & b^2c & 0 \end{vmatrix} = 2a^3b^3c^3.$

2. વિસ્તરણ કર્યા સિવાય સાબિત કરો : $\begin{vmatrix} cos\alpha & sin\alpha & cos(\alpha+\delta) \\ cos\beta & sin\beta & cos(\beta+\delta) \\ cos\gamma & sin\gamma & cos(\gamma+\delta) \end{vmatrix} = 0$

3. $\begin{vmatrix} x & 5 & 9 \\ 16 & 3x+8 & 36 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0$ નો ઉકેલગણ શોધો.

4. સાબિત કરો : $\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 3a & 4a+3b & 5a+4b+3c \\ 6a & 9a+6b & 11a+9b+6c \end{vmatrix} = -a^3.$

5. ઉકેલો : $\begin{vmatrix} 1+sin^2\theta & cos^2\theta & 4sin4\theta \\ sin^2\theta & 1+cos^2\theta & 4sin4\theta \\ sin^2\theta & cos^2\theta & 1+4sin4\theta \end{vmatrix} = 0;\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$

6. સાબિત કરો : $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$

7. $\begin{vmatrix} x-2 & 2x-3 & 3x-4 \\ x-4 & 2x-9 & 3x-16 \\ x-8 & 2x-27 & 3x-64 \end{vmatrix} = 0$ નો ઉકેલગણ મેળવો.

8. સાબિત કરો કે $\begin{vmatrix} a+x & a-x & a-x \\ a-x & a+x & a-x \\ a-x & a-x & a+x \end{vmatrix} = 0$ નાં બીજ $x = 0$ અને $x = 3a$ છે.

9. સાબિત કરો : $\begin{vmatrix} x^2 & yz & zx+z^2 \\ x^2+xy & y^2 & zx \\ xy & y^2+yz & z^2 \end{vmatrix} = 4x^2y^2z^2$.

10. સાબિત કરો : $\begin{vmatrix} a+bx & d+ex & p+qx \\ ax+b & dx+e & px+q \\ c & f & r \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a & d & p \\ b & e & q \\ c & f & r \end{vmatrix}$.

11. સાબિત કરો : $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & ab & ca \\ ab & (c+a)^2 & bc \\ ca & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc\,(a+b+c)^3$.

*

3.6 ઉપનિશ્ચાયક અને સહઅવયવ

ઉપનિશ્ચાયક : નિશ્ચાયકનો કોઈ પણ ઘટક જે હાર અને જે સ્તંભમાં હોય તે હાર અને તે સ્તંભને દૂર કરી બાકી રહેતા ઘટકોને તે જ સ્થિતિમાં રાખવાથી મળતા નિશ્ચાયકને તે ઘટકનો ઉપનિશ્ચાયક (Minor) કહે છે.

ઉદાહરણ તરીકે,

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ માં c_3નો ઉપનિશ્ચાયક મેળવીએ. D માં ઘટક c_3 એ ત્રીજી હાર અને ત્રીજા સ્તંભમાં છે. આ ઘટકોને દૂર કરી બાકી રહેતા ઘટકોને તે જ સ્થાનમાં તે જ ક્રમમાં રાખતાં, આપણને નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ મળે છે. આ નિશ્ચાયકને c_3નો ઉપનિશ્ચાયક કહે છે.

સહઅવયવ : નિશ્ચાયકનો કોઈ પણ ઘટક i મી હાર તથા j મા સ્તંભમાં હોય તો તે ઘટકના ઉપનિશ્ચાયકને $(-1)^{i+j}$ વડે ગુણવાથી મળતા મૂલ્યને તે ઘટકનો સહઅવયવ (Cofactor) કહે છે.

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ માં a_2નો ઉપનિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ છે, તેને $(-1)^{2+1}$ વડે ગુણતાં a_2નો સહઅવયવ મળે છે.

(a_2 એ બીજી હાર તથા પહેલા સ્તંભમાં છે.)

આમ, a_2નો સહઅવયવ $(-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -(b_1c_3 - b_3c_1)$ થાય.

D ના ઘટકો a_i, b_i, c_i ના સહઅવયવોને અનુક્રમે A_i, B_i, C_i વડે દર્શાવાય છે, જ્યાં $i = 1, 2, 3$.

ઉચ્ચ ગણિતમાં, આપણે D ને નીચે પ્રમાણે લખીએ છીએ :

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

અહીં, a_{ij} એટલે કે i મી હાર અને j મા સ્તંભનો ઘટક.

a_{ij} નો સહઅવયવ = $(-1)^{i+j}$ (a_{ij} નો ઉપનિશ્ચાયક)

સામાન્ય રીતે બાજુમાં દર્શાવેલ ચિહ્નવાળા 'નિશ્ચાયક'નું સ્વરૂપ યાદ રાખો : $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$.

કોઈ પણ વિકર્ણના ઘટકોના ઉપનિશ્ચાયકનું ચિહ્ન + અને તે સિવાયના ઉપનિશ્ચાયકનું ચિહ્ન − લેવાથી આપણને જે-તે ઘટકનો સહઅવયવ મળે છે.

[**નોંધ :** નિશ્ચાયકના કોઈ પણ ઘટકનો સહઅવયવ એટલે કે, તે નિશ્ચાયકના વિસ્તરણમાં તે ઘટકનો સહગુણક.]

જો $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ હોય, તો

$A_1 = b_2c_3 - b_3c_2$ $\quad$ $B_1 = -(a_2c_3 - a_3c_2)$ $\quad$ $C_1 = a_2b_3 - a_3b_2$

$A_2 = -(b_1c_3 - b_3c_1)$ $\quad$ $B_2 = a_1c_3 - a_3c_1$ $\quad$ $C_2 = -(a_1b_3 - a_3b_1)$

$A_3 = b_1c_2 - b_2c_1$ $\quad$ $B_3 = -(a_1c_2 - a_2c_1)$ $\quad$ $C_3 = a_1b_2 - a_2b_1$ મળે.

ઉદાહરણ 14 : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 7 & -5 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ માં 2 અને −1ના ઉપનિશ્ચાયક તથા સહઅવયવ શોધો.

ઉકેલ : 2 નો ઉપનિશ્ચાયક = $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ મળે છે.

2 નો સહઅવયવ = $(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \times 4 = -4$ થશે.

−1 નો ઉપનિશ્ચાયક = $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 7 & -5 \end{vmatrix}$ મળે છે.

−1 નો સહઅવયવ = $(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = 1 \times (-59) = -59$ થશે.

ઉદાહરણ 15 : $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ ના ઘટકોના સહઅવયવોથી બનતા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

1નો સહઅવયવ $A_1 = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times (6 + 1) = 7$ છે.

4 નો સહઅવયવ $B_1 = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix} = (-1)(-12) = 12$ છે.

0 નો સહઅવયવ $C_1 = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix} = (1)(4) = 4$ છે.

-4 નો સહઅવયવ $A_2 = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}4 & 0\\ -1 & 3\end{vmatrix} = (-1)(12) = -12$ છે.

2 નો સહઅવયવ $B_2 = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix} = (1)(3) = 3$ છે.

તે જ પ્રમાણે, $C_2 = 1$, $A_3 = 4$, $B_3 = -1$, $C_3 = 18$. (સ્વપ્રયત્ને શોધો !)

$\therefore$ ઉપરના સહઅવયવો વડે બનતો નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix}7 & 12 & 4\\ -12 & 3 & 1\\ 4 & -1 & 18\end{vmatrix}$ થશે.

$$\text{તેનું મૂલ્ય} = 7(54 + 1) - 12(-216 - 4) + 4(12 - 12)$$
$$= 385 + 2640 + 0$$
$$= 3025$$

(**નોંધ :** જુઓ કે D નું મૂલ્ય 55 છે અને D ના ઘટકોના સહઅવયવો વડે બનતા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય $3025 = (55)^2$ છે. વ્યાપક રીતે આ પરિણામ સત્ય છે.)

પ્રમેય 3.7 : ત્રિહાર નિશ્ચાયકમાં કોઈ પણ હાર (સ્તંભ)ના ઘટકોને અનુરૂપ સહઅવયવો વડે ગુણીને ઉમેરતાં નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય મળે છે.

સાબિતી : ધારો કે $D = \begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$ છે. ઘટકો a_2, b_2, c_2ના સહઅવયવો અનુક્રમે A_2, B_2, C_2 થશે, જ્યાં

$$A_2 = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_3 & c_3\end{vmatrix} = -(b_1c_3 - b_3c_1)$$

$$B_2 = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_3 & c_3\end{vmatrix} = a_1c_3 - a_3c_1$$

$$C_2 = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{vmatrix} = -(a_1b_3 - a_3b_1).$$

હવે, $a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 = -a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + b_2(a_1c_3 - a_3c_1) - c_2(a_1b_3 - a_3b_1)$

$$= -a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + b_2a_1c_3 - b_2a_3c_1 - c_2a_1b_3 + c_2a_3b_1$$
$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - b_1a_2c_3 + b_1a_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1$$
$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$
$$= \begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix} = D$$

$\therefore \quad a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 = D$ **(i)**

તે જ રીતે, $a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 = D$ **(ii)**

$a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 = D$ **(iii)**

$a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 = D$ **(iv)**

$b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3 = D$ **(v)**

$c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3 = D$ **(vi)**

અહીં, (i), (ii) અને (iii) ને અનુક્રમે દ્વિતીય, પ્રથમ અને તૃતીય હાર દ્વારા નિશ્ચાયકનું વિસ્તરણ કહે છે. (iv), (v), (vi)ને અનુક્રમે પ્રથમ, દ્વિતીય અને તૃતીય સ્તંભ દ્વારા નિશ્ચાયકનું વિસ્તરણ કહે છે.

પ્રમેય 3.8 : ત્રિહાર નિશ્ચાયકની કોઈ પણ હાર (સ્તંભ)ના ઘટકોને અન્ય હાર (સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકોના સહઅવયવો વડે ગુણી ઉમેરતાં મળતો સરવાળો શૂન્ય થાય છે.

સાબિતી : નિશ્ચાયક $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ની પ્રથમ હારના ઘટકો a_1, b_1, c_1 ને બીજી હારના અનુરૂપ ઘટકોના સહઅવયવો A_2, B_2, C_2 વડે ગુણી તેમનો સરવાળો $a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2$ મેળવીએ.

હવે, $A_2 = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -(b_1c_3 - b_3c_1)$

$B_2 = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1c_3 - a_3c_1$

$C_2 = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = -(a_1b_3 - a_3b_1).$

આમ, $a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = -a_1(b_1c_3 - b_3c_1) + b_1(a_1c_3 - a_3c_1) - c_1(a_1b_3 - a_3b_1)$

$= -a_1b_1c_3 + a_1b_3c_1 + a_1b_1c_3 - a_3b_1c_1 - a_1b_3c_1 + a_3b_1c_1$

$= 0$

તે જ રીતે, $a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3 = 0$

$a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = 0$

$a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3 = 0$

$a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 = 0$

$a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2 = 0$

(**નોંધ :** સ્તંભ માટે પણ આવાં જ પરિણામ મળે. $a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2$ = પ્રથમ અને દ્વિતીય હાર સમાન $a_1\ b_1\ c_1$ હોય તેવા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય થાય.

$\therefore\ a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = 0$)

3.7 બે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણની સંહતિનો ઉકેલ

ધારો કે R^2 માં સમીકરણ સંહતિ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ નો ઉકેલ મેળવવો છે, જ્યાં a_i, b_i, $c_i \in R$ અને $a_i^2 + b_i^2 \neq 0$. $(i = 1, 2)$.

આપણે માત્ર a_1, a_2, b_1, b_2 પૈકી કોઈ પણ શૂન્ય ન હોય તેવાં જ સમીકરણોનો વિચાર કરીશું. (જો આમાંના કેટલાંક શૂન્ય હોય, તો સરળતાથી સમીકરણનો ઉકેલ મેળવી શકાય.)

બે સુરેખ સમીકરણની સંહતિના ઉકેલની **ચોકડી ગુણાકાર**ની રીત તમે શીખી ગયા છે. જે રીતમાં,

$$\frac{x}{\begin{matrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{matrix}} = \frac{y}{\begin{matrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}} \text{ એટલે કે } \frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\therefore \quad \frac{x}{\begin{matrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{matrix}} = -\frac{y}{\begin{matrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}}$$

આ પ્રકરણમાં આપણે નિશ્ચાયકના સંકેતનો ઉપયોગ કરીશું.

$$\text{તેથી } x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ અને } y = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \text{ જ્યાં } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

ઉકેલ મેળવવાની આ પદ્ધતિને **ક્રેમરનો નિયમ** કહે છે.

નોંધ : (1) જો $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, પરંતુ $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$ અથવા $b_1c_2 - b_2c_1 \neq 0$ તો ઉપરના સમીકરણોનો ઉકેલગણ $\emptyset$ છે.

(2) જો $a_1b_2 - a_2b_1 = b_1c_2 - b_2c_1 = a_1c_2 - a_2c_1 = 0$ તો સમીકરણ સંહતિનો ઉકેલ અનન્ય નથી પરંતુ અનંતગણ છે. $\{(x, y) \mid a_1x + b_1y + c_1 = 0, x, y \in R]$ ઉકેલગણ છે.

સુસંગત સમીકરણો : જો સમીકરણ સંહતિનો ઉકેલગણ ખાલીગણ ન હોય, તો તેને સુસંગત (Consistent) સમીકરણોની સંહતિ કહે છે.

સમાન સમીકરણો : સમીકરણો $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ માટે કોઈક વાસ્તવિક શૂન્યેતર સંખ્યા k મળે કે જેથી $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$, $c_1 = kc_2$ થાય, તો સમીકરણો $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ને **સમાન સમીકરણો (Equivalent Equations)** કહે છે, જો આ સમીકરણો સમાન ન હોય, તો તેમને **ભિન્ન (distinct)** સમીકરણો કહે છે.

ઉદાહરણ 16 : ક્રેમરના સૂત્રની મદદથી ઉકેલો : $2x + 3y - 8 = 0$ અને $5x - 4y + 3 = 0$.

ઉકેલ : અહીં, $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 15 = -23 \neq 0.$

તેથી આપણને અનન્ય ઉકેલ મળશે.

$$\text{ક્રેમરના નિયમ પ્રમાણે, } x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}}{-23} = \frac{9 - 32}{-23} = \frac{-23}{-23} = 1$$

$$\text{અને } y = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}{-23} = -\frac{6 + 40}{-23} = \frac{-46}{-23} = 2$$

તેથી, $(x, y) = (1, 2)$.

$\therefore$ ઉકેલગણ $\{(1, 2)\}$ મળે.

ઉદાહરણ 17 : સમીકરણ ઉકેલો : $2x + 3y = 13xy$ અને $5x - 2y = 4xy$.

ઉકેલ : આ સમીકરણો સુરેખ સમીકરણો નથી. તે x અને y માં દ્વિઘાત સમીકરણો છે. તેથી તેમને બે ઉકેલ છે.

એક ઉકેલ $x = 0$ અને $y = 0$ છે. **$(x = 0 \Rightarrow 0 + 3y = 0 \Rightarrow y = 0)$**

જો $x \neq 0$ તો $y \neq 0$ છે. $(y = 0 \Rightarrow x = 0)$

તેથી આપણે આ સમીકરણોને નીચે પ્રમાણે સુરેખ સ્વરૂપમાં ફેરવી શકીએ. $xy \neq 0$ લેતાં, સમીકરણોની બંને બાજુએ $xy \neq 0$ વડે ભાગતાં, આપણને

$\frac{2}{y} + \frac{3}{x} = 13$ અને $\frac{5}{y} - \frac{2}{x} = 4$ સ્વરૂપમાં સમીકરણ મળે.

હવે આપણે $\frac{1}{y} = m$ અને $\frac{1}{x} = n$ લઈએ, તો સમીકરણ સંહતિ $2m + 3n - 13 = 0$, $5m - 2n - 4 = 0$ થશે.

વળી, $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 15 = -19 \neq 0$.

તેથી આપેલ સમીકરણ સંહતિનો બીજો ઉકેલ મળશે.

$$(m, n) = \left(\frac{\begin{vmatrix} 3 & -13 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}}{D}, -\frac{\begin{vmatrix} 2 & -13 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}}{D} \right) = \left(\frac{-12-26}{-19}, -\frac{-8+65}{-19} \right) = \left(\frac{-38}{-19}, \frac{-57}{-19} \right) = (2, 3)$$

$\therefore \quad (m, n) = (2, 3)$.

પરંતુ $m = \frac{1}{y}$ અને $n = \frac{1}{x}$

$\therefore \quad \left(\frac{1}{y}, \frac{1}{x} \right) = (2, 3)$, એટલે કે $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right) = (3, 2)$

તેથી $(x, y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right)$

$\therefore \quad$ ઉકેલગણ : $\left\{ (0, 0), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right) \right\}$.

3.8 ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

જો ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓના યામ આપ્યા હોય, ત્યારે તે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવા વિશે આપણે XI માં ધોરણમાં શીખી ગયાં છીએ.

જો ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુના યામ (x_1, y_1), (x_2, y_2) અને (x_3, y_3) હોય, તો તે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

$\frac{1}{2} [(x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$ ના માનાંક જેટલું છે.

આપણે ઉપરની અભિવ્યક્તિને નિશ્ચાયક સ્વરૂપમાં $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકીએ.

ક્ષેત્રફળ હંમેશાં ધન સંખ્યા છે. તેથી આપણે ઉપરના નિશ્ચાયકનો માનાંક લઈશું. આપણે ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળને Δ વડે દર્શાવીશું.

આમ, $\Delta = \frac{1}{2}|D|$ જ્યાં, $D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર એ ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળને અસર કરતું નથી.

જો આપણે ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર (h, k) બિંદુએ કરીએ તો ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓના યામ (x_1, y_1), (x_2, y_2) અને (x_3, y_3) બદલાઈને તેમના નવા યામ અનુક્રમે $(x_1 - h, y_1 - k)$, $(x_2 - h, y_2 - k)$ અને $(x_3 - h, y_3 - k)$ થશે.

હવે ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર કર્યા પછી ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ, $\Delta = \frac{1}{2}|\,D'\,|$.

જ્યાં, $D' = \begin{vmatrix} x_1 - h & y_1 - k & 1 \\ x_2 - h & y_2 - k & 1 \\ x_3 - h & y_3 - k & 1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ ($C_{31}(h)$ અને $C_{32}(k)$ ક્રિયાઓ કરતાં)

$= D$

$\therefore \quad \Delta = \frac{1}{2}|\,D'\,| = \frac{1}{2}|\,D\,|$

આમ, ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ તેનું તે જ રહે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, (2, 3), (5, 1), (7, −2) શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ મેળવીએ.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2(3) - 3(-2) + 1(-17)$$

$$= 6 + 6 - 17 = -5$$

$\therefore \quad \Delta = \frac{1}{2}|\,D\,| = \frac{1}{2}|\,-5\,| = \frac{5}{2}$

હવે આપણે ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર (2, 3) બિંદુએ કરીએ, તો આપેલા શિરોબિંદુઓના નવા યામ આ રીતે મળશે. A(2, 3)ના (0, 0). B(5, 1)ના નવા યામ (5 − 2, 1 − 3) = (3, −2) અને C(7, −2)ના નવા યામ (7 − 2, −2 − 3) = (5, −5) થશે.

$$D' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = -15 + 10 = -5$$

$\therefore \quad \Delta = \frac{1}{2}|\,D'\,| = \frac{1}{2}|\,-5\,| = \frac{5}{2}$

આમ, ક્ષેત્રફળ સમાન રહે છે.

ઉદાહરણ 18 : (5, 4), (2, 5), (2, 3) શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ મેળવો.

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5(5 - 3) - 4(2 - 2) + 1(6 - 10)$

$= 10 - 0 - 4$

$= 6$

$\therefore \quad \Delta = \frac{1}{2}|\,D\,| = \frac{1}{2}|\,6\,| = 3$

$\therefore$ ક્ષેત્રફળ 3 થશે.

ઉદાહરણ 19 : (8, 2), (k, 4) અને (6, 7) શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 13 હોય, તો k શોધો.

ઉકેલ : $D = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ k & 4 & 1 \\ 6 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 8(4 - 7) - 2(k - 6) + 1(7k - 24)$

$= -24 - 2k + 12 + 7k - 24$

$= 5k - 36$

હવે, $\Delta = \frac{1}{2}|D|$

$\therefore \quad 13 = \frac{1}{2}|5k - 36|$

$\therefore \quad 5k - 36 = 26$ અથવા $5k - 36 = -26$

$\therefore \quad 5k = 62$ અથવા $5k = 10$

$\therefore \quad k = \frac{62}{5}$ અથવા $k = 2$

$\therefore \quad k = 2$ અથવા $\frac{62}{5}$.

રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ :

જ્યારે રેખા પરના બે ભિન્ન બિંદુઓ આપ્યાં હોય ત્યારે રેખાનું સમીકરણ મેળવવાની રીત આપણે XI માં ધોરણમાં શીખી ગયાં છીએ.

જો $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ એ $\overleftrightarrow{AB}$ પરના બે ભિન્ન બિંદુઓ હોય, તો $\overleftrightarrow{AB}$નું સમીકરણ $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ થાય. **(અહીં રેખા $\overleftrightarrow{AB}$ કોઈ પણ અક્ષને લંબ નથી.)**

આ અભિવ્યક્તિને આપણે નિશ્ચાયકના સ્વરૂપે નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકીએ :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

ઉદાહરણ 20 : (7, 8) અને (5, −2) માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ નિશ્ચાયકથી તથા બે બિંદુ સ્વરૂપની રીતથી મેળવો.

ઉકેલ : સ્પષ્ટ છે કે રેખા કોઈ પણ અક્ષને સમાંતર નથી.

રેખાનું સમીકરણ $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ જ્યાં, $(x_1, y_1) = (7, 8)$ અને $(x_2, y_2) = (5, -2)$

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 7 & 8 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore \quad x(8 + 2) - y(7 - 5) + 1(-14 - 40) = 0$

$\therefore \quad 10x - 2y - 54 = 0$

$\therefore \quad 5x - y - 27 = 0$

હવે, બે બિંદુ સ્વરૂપે રેખાનું સમીકરણ, $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

$\therefore \quad \frac{y - 8}{-2 - 8} = \frac{x - 7}{5 - 7}$

$\therefore \quad \frac{y - 8}{-10} = \frac{x - 7}{-2}$

$\therefore \quad -2y + 16 = -10x + 70$

$\therefore \quad 10x - 2y - 54 = 0$

$\therefore \quad 5x - y - 27 = 0$

સ્વાધ્યાય 3.3

1. ક્રેમરના સૂત્રથી નીચે આપેલી સમીકરણ સંહતિના ઉકેલ મેળવો :

(1) $4x + 10y = 2xy$
$5x + 16y = 3xy$

(2) $x - 2y = 17$
$5x - 3y = 6$

(3) $\frac{2}{y} + \frac{5}{x} = 9$
$\frac{4}{y} + \frac{3}{x} = 11, (xy \neq 0)$

2. $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & -7 \end{vmatrix}$ ની ત્રીજી હારના સહઅવયવોનો ઉપયોગ કરી વિસ્તરણ કરો.

3. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ ના બીજા સ્તંભના સહઅવયવોનો ઉપયોગ કરી વિસ્તરણ કરો.

4. નીચે આપેલાં શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ નિશ્ચાયકની મદદથી મેળવો :

(1) (11, 8), (3, 2), (8, 12) (2) (7, 9), (10, 8), (12, 10)

5. (2, 2), (6, 6) અને (5, k) શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 4 હોય, તો k શોધો.

6. (5, a), (−2, 5) અને (−2, 3) શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 7 હોય, તો a શોધો.

7. આપેલાં બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ નિશ્ચાયકની મદદથી મેળવો :

(1) (3, −2), (−1, 4) (2) (5, −1), (5, 3) (3) (1, −3), (5, −2)

8. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ નિશ્ચાયકના સહઅવયવો વડે બનતા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય મેળવો.

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 21 : સાબિત કરો : $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(a+b)(b+c)(c+a)$

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b+c & a+c & a+b \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}$ ($R_{21}(1)$ અને $R_{31}(1)$)

$= \begin{vmatrix} a+b+2c & 2a+b+c & a+b \\ a-b & c-b & b+c \\ a+b+2c & b-c & -2c \end{vmatrix}$ (પ્રથમ $C_{21}(1)$ અને પછી $C_{32}(1)$)

$= \begin{vmatrix} 0 & 2(a+c) & a+b+2c \\ 2(a+c) & 0 & b-c \\ a+b+2c & b-c & -2c \end{vmatrix}$ ($R_{31}(-1)$ અને $R_{32}(1)$)

$= -2(a+c)\,[-4c(a+c) - (b-c)(a+b+2c)] + (a+b+2c) \cdot 2(a+c)(b-c)$

$= 8c(a+c)^2 + 2(a+c)(b-c)(a+b+2c) + 2(a+c)(b-c)(a+b+2c)$

$= 8c(a+c)^2 + 4(a+c)(b-c)(a+b+2c)$

$= 4(a+c)\,[2c(a+c) + (b-c)(a+b+2c)]$

$= 4(a+c)\,(2ac + 2c^2 + ab + b^2 + 2bc - ac - bc - 2c^2)$

$= 4(a+c)\,(ac + ab + b^2 + bc)$

$= 4(a+c)\,(a+b)(b+c)$

ઉદાહરણ 22 : સાબિત કરો : $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1+y & 1+2y & 1 \\ 1+z & 1+z & 1+3z \end{vmatrix} = 2xyz\left(3+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$.

$\left(xyz \neq 0, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 3 \neq 0\right)$

ઉકેલ : ડા.બા. $= xyz\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{x} & \frac{1}{x} & \frac{1}{x} \\ 1+\frac{1}{y} & 2+\frac{1}{y} & \frac{1}{y} \\ 1+\frac{1}{z} & 1+\frac{1}{z} & 3+\frac{1}{z} \end{vmatrix}$ $\quad \left(R_1\left(\frac{1}{x}\right), R_2\left(\frac{1}{y}\right), R_3\left(\frac{1}{z}\right), xyz \neq 0\right)$

$= xyz\begin{vmatrix} 3+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} & 3+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} & 3+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \\ 1+\frac{1}{y} & 2+\frac{1}{y} & \frac{1}{y} \\ 1+\frac{1}{z} & 1+\frac{1}{z} & 3+\frac{1}{z} \end{vmatrix}$ $\quad$ ($R_{21}(1)$ અને $R_{31}(1)$)

$= xyz\left(3+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+\frac{1}{y} & 2+\frac{1}{y} & \frac{1}{y} \\ 1+\frac{1}{z} & 1+\frac{1}{z} & 3+\frac{1}{z} \end{vmatrix}$ $\quad \left(R_1\left(\frac{1}{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\right)\right)$

$= xyz\left(3+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+\frac{1}{y} & 1 & -1 \\ 1+\frac{1}{z} & 0 & 2 \end{vmatrix}$ $\quad$ ($C_{12}(-1)$ અને $C_{13}(-1)$)

$= 2xyz\left(3+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

ઉદાહરણ 23 : $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1 + a^2 + b^2)^3$ સાબિત કરો.

ઉકેલ : ડા.બા. $= \begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1+a^2+b^2 & 0 & -2b \\ 0 & 1+a^2+b^2 & 2a \\ b(1+a^2+b^2) & -a(1+a^2+b^2) & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$ $\quad$ ($C_{31}(-b)$ અને $C_{32}(a)$)

$= (1 + a^2 + b^2)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2b \\ 0 & 1 & 2a \\ b & -a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$ $\quad \left(C_1\left(\frac{1}{1+a^2+b^2}\right), C_2\left(\frac{1}{1+a^2+b^2}\right)\right)$

$= (1 + a^2 + b^2)^2 [(1 - a^2 - b^2 + 2a^2) - 2b(-b)]$

$= (1 + a^2 + b^2)^2 (1 + a^2 + b^2)$

$= (1 + a^2 + b^2)^3$

= જ.બા.

ઉદાહરણ 24 : જો $\begin{vmatrix} x-3 & x-4 & x-a \\ x-2 & x-3 & x-b \\ x-1 & x-2 & x-c \end{vmatrix} = 0$, તો સાબિત કરો કે a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} x-3 & x-4 & x-a \\ x-2 & x-3 & x-b \\ x-1 & x-2 & x-c \end{vmatrix} = 0$

$$\therefore \begin{vmatrix} -1 & -1 & b-a \\ -1 & -1 & c-b \\ x-1 & x-2 & x-c \end{vmatrix} = 0 \qquad (R_{21}(-1) \text{ અને પછી } R_{32}(-1))$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2b-a-c \\ -1 & -1 & c-b \\ x-1 & x-2 & x-c \end{vmatrix} = 0 \qquad [R_{21}(-1)]$$

$\therefore$ $(2b - a - c)\ [-1(x - 2) - (x - 1)(-1)] = 0$

$\therefore$ $(2b - a - c)\ (-x + 2 + x - 1) = 0$

$\therefore$ $2b - a - c = 0$

$\therefore$ $2b = a + c$

$\therefore$ a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

ઉદાહરણ 25 : નિશ્ચાયકની બે હાર સમાન હોય, તો તેનું મૂલ્ય શૂન્ય હોય છે. તે હકીકતનો ઉપયોગ કરી સાબિત કરો કે નિશ્ચાયકની બે હારની અદલબદલ કરતાં તેની કિંમત મૂળ નિશ્ચાયકથી વિરોધી સંખ્યા મળે છે.

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & c_1+c_2 \\ a_1+a_2 & b_1+b_2 & c_1+c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

$$\therefore \begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & c_1+c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & c_1+c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

સ્વાધ્યાય 3

1. ઉકેલો : $\begin{vmatrix} x+5 & x \\ x+9 & x-2 \end{vmatrix} = 0$

2. ઉકેલો : $\begin{vmatrix} 3x+4 & x+2 & 2x+3 \\ 4x+5 & 2x+3 & 3x+4 \\ 10x+17 & 3x+5 & 5x+8 \end{vmatrix} = 0$

3. ઉકેલો : $\begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ 7 & -2 & -6 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & -2 & -6 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 4 & 7 & -2 \\ 3 & 8 & -6 \end{vmatrix}$

4. જો $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 8 \\ x-3 & -8 & -16 \\ 3 & 9 & 4 \end{vmatrix} = 0$, તો x નું મૂલ્ય મેળવો.

5. સાબિત કરો : $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$.

6. સાબિત કરો : $\begin{vmatrix} y+z & x & x \\ y & z+x & y \\ z & z & x+y \end{vmatrix} = 4xyz$.

7. બતાવો કે $\begin{vmatrix} x^2 & (y-z)^2 - x^2 & yz \\ y^2 & (z-x)^2 - y^2 & zx \\ z^2 & (x-y)^2 - z^2 & xy \end{vmatrix} = -(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)$.

8. સાબિત કરો : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$.

9. સાબિત કરો : $\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ (x+1)^2 & (y+1)^2 & (z+1)^2 \\ (x-1)^2 & (y-1)^2 & (z-1)^2 \end{vmatrix} = -4(x-y)(y-z)(z-x)$.

10. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

વિભાગ A (1 ગુણ)

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4x & 6x & 8x \\ 5 & 7 & 8 \end{vmatrix} = ...$ ☐

(a) $18x$ (b) 0 (c) 1 (d) $18x^3$

(2) $\begin{vmatrix} 2008 & 2009 \\ 2010 & 2011 \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય ...... છે. ☐

(a) -1 (b) 1 (c) -2 (d) 2

(3) $\begin{vmatrix} x & 1 & y+z \\ y & 1 & z+x \\ z & 1 & x+y \end{vmatrix} = ...$ ☐

(a) $x+y+z$ (b) $(x+y)(y+z)(z+x)$

(c) 3 (d) 0

(4) $\begin{vmatrix} sin40^o & -cos40^o \\ sin50^o & cos50^o \end{vmatrix} = ...$

(a) 0 (b) 1 (c) −1 (d) નું અસ્તિત્વ નથી.

(5) જો $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 7 & 4 & -1 \end{vmatrix}$, D પર $R_{12}(-1)$ ક્રિયા કરતાં D ...... થાય.

(a) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 7 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 7 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

વિભાગ B (2 ગુણ)

(6) $\begin{vmatrix} 5^2 & 5^3 & 5^4 \\ 5^1 & 5^2 & 5^3 \\ 5^3 & 5^4 & 5^5 \end{vmatrix} = ...$

(a) 5^9 (b) 5^{12} (c) 5^0 (d) 0

(7) જો $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & yz & x \\ 1 & zx & y \\ 1 & xy & z \end{vmatrix}$ અને $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$, તો ......

(a) $D_1 + 2D_2 = 0$ (b) $2D_1 + D_2 = 0$ (c) $D_1 + D_2 = 0$ (d) $D_1 = D_2$

(8) જો $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ અને $\begin{vmatrix} 0 & x^2+a & x^4+b \\ x^2-a & 0 & x-c \\ x^3-b & x^2+c & 0 \end{vmatrix} = 0$, તો $x = ...$

(a) 1 (b) 0 (c) $a + b + c$ (d) $-(a + b + c)$

(9) જો $x, y, z \in R$, $x > y > z$, તો $D = \begin{vmatrix} (x+1)^2 & (y+1)^2 & (z+1)^2 \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ એ ...... છે.

(a) ઋણ (b) ધન (c) શૂન્ય (d) વાસ્તવિક નથી.

(10) જો $D = \begin{vmatrix} 1 & cos\theta & 1 \\ -cos\theta & 1 & cos\theta \\ -1 & -cos\theta & 1 \end{vmatrix}$, તો D ...... અંતરાલમાં છે.

(a) $(2, \infty)$ (b) $(2, 4)$ (c) $[2, 4]$ (d) $[-2, 2]$

વિભાગ C (3 ગુણ)

(11) જો $\begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix} = 0$ અને $ax^2 + 2bxy + cy^2 \neq 0$ તો ......

(a) a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં છે.
(b) a, b, c સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.
(c) a, b, c સમાંતર શ્રેણી તથા સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.
(d) a, b, c સમાંતર કે સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં નથી.

(12) જો $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & x & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ તો $x = ...$

(a) 2 (b) -2 (c) 5 (d) -5

(13) $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x & 1-x \\ 1-x & 1+x & 1-x \\ 1-x & 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 0$ નાં બીજ ...... છે.

(a) 0, 1 (b) 0, -1 (c) 0, -3 (d) 0, 3

વિભાગ D (4 ગુણ)

(14) $\begin{vmatrix} x & -6 & -1 \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{vmatrix} = 0$ તો $x = ...$.

(a) $-3, -2, 1$ (b) $-3, 2, -1$ (c) $-3, 2, 1$ (d) $3, 2, 1$

(15) $\begin{vmatrix} \sqrt{14}+\sqrt{3} & \sqrt{20} & \sqrt{5} \\ \sqrt{15}+\sqrt{28} & \sqrt{25} & \sqrt{10} \\ 3+\sqrt{70} & \sqrt{15} & \sqrt{25} \end{vmatrix} = ...$.

(a) $25\sqrt{3} - 15\sqrt{2}$ (b) $15\sqrt{2} + 25\sqrt{3}$ (c) $-25\sqrt{3} - 15\sqrt{2}$ (d) $15\sqrt{2} - 25\sqrt{3}$

(16) $\begin{vmatrix} a & b & ax+b \\ b & c & bx+c \\ ax+b & bx+c & 0 \end{vmatrix} = 0$ તો a, b, c ...... માં છે.

(a) સમાંતર શ્રેણી (b) સમગુણોત્તર શ્રેણી (c) વધતી શ્રેણી (d) ઘટતી શ્રેણી

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓ શીખ્યા :

1. દ્વિહાર નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ અને તેનું મૂલ્ય $ad - bc$.

2. ત્રિહાર નિશ્ચાયક $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$= a_1 (b_2c_3 - b_3c_2) - b_1 (a_2c_3 - a_3c_2) + c_1 (a_2b_3 - a_3b_2)$$

3. કેટલાંક સંકેતો :

(1) $R_i \to C_i$: બધી જ હારને અનુરૂપ સ્તંભોમાં ફેરવવાની ક્રિયા.

(2) R_{ij} (C_{ij}) $(i \neq j)$: i મી અને j મી હાર (સ્તંભ)ની અદલાબદલીની ક્રિયા.

(3) $R_i(k)$ $[C_i(k)]$: i મી હાર (સ્તંભ)ના બધા ઘટકોને k વડે ગુણવાની ક્રિયા

(4) $R_{ij}(k)$ $[C_{ij}(k)]$ $(i \neq j)$: i મી હાર (સ્તંભ)ના ઘટકોને k વડે ગુણી j મી હાર (સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકોમાં ઉમેરવાની ક્રિયા.

4. નિશ્ચાયકના ગુણધર્મો :

(1) નિશ્ચાયકની બધી જ હારને અનુરૂપ સ્તંભમાં ફેરવતાં નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય બદલાતું નથી.

(2) નિશ્ચાયકની કોઈ પણ બે હાર (સ્તંભ)ની અદલાબદલી કરતાં મળતા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય આપેલ નિશ્ચાયકના મૂલ્યની વિરોધી સંખ્યા છે.

(3) નિશ્ચાયકની કોઈ પણ હાર (સ્તંભ)ના બધા જ ઘટકોને k વડે ગુણતાં મળતા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય, મૂળ નિશ્ચાયકના મૂલ્ય કરતાં k ગણું થાય છે.

(4) $$\begin{vmatrix} a_1+d_1 & b_1+e_1 & c_1+f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(5) નિશ્ચાયકની કોઈ પણ બે હાર (સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકો સમાન હોય, તો નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય શૂન્ય થાય છે.

(6) જો નિશ્ચાયકની કોઈ પણ હાર (સ્તંભ)ના ઘટકોને k વડે ગુણીને અન્ય હાર (સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકોમાં ઉમેરતાં મળતા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય, મૂળ નિશ્ચાયકના મૂલ્યની બરાબર થાય છે.

5. ઉપનિશ્ચાયક : નિશ્ચાયકનો કોઈ પણ ઘટક જે હાર અને સ્તંભમાં હોય તે હાર અને સ્તંભને દૂર કરીને બાકી રહેતા ઘટકોને તે જ સ્થાને રાખી મળતા નિશ્ચાયકને તે ઘટકનો ઉપનિશ્ચાયક કહે છે.

6. સહઅવયવ : ત્રિહાર નિશ્ચાયકનો કોઈ પણ ઘટક i મી હાર તથા j મા સ્તંભમાં હોય, તો તેના ઉપનિશ્ચાયકને $(-1)^{i+j}$ વડે ગુણવાથી મળતા મૂલ્યને તે ઘટકનો સહઅવયવ કહે છે.

7. નિશ્ચાયકની કોઈ પણ હાર (સ્તંભ)ના ઘટકોને અનુરૂપ સહઅવયવો વડે ગુણીને ઉમેરતાં નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય મળે છે.

8. નિશ્ચાયકની કોઈ પણ હાર (સ્તંભ)ના ઘટકોને અન્ય હાર (સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકોના સહઅવયવો વડે ગુણીને ઉમેરતાં મળતો સરવાળો શૂન્ય થાય છે.

9. ક્રેમરના સૂત્રની મદદથી બે સુરેખ સમીકરણોની સંહતિનો ઉકેલ મેળવી શકાય છે.

10. (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ,

$$\frac{1}{2}|\,D\,| \text{ જ્યાં } D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

11. ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર કરતાં ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ બદલાતું નથી.

12. બે ભિન્ન બિંદુઓ (x_1, y_1) અને (x_2, y_2) માંથી પસાર થતી રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ છે.}$$

: નિશ્ચાયક એક વિધેય તરીકે :

આપણે સદિશ વિશે ધોરણ XI માં અભ્યાસ કર્યો, $\overline{x} = (x_1, x_2)$ એ R^2 નો અને $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ એ R^3 નો સદિશ છે.

હવે આપણે એક વિધેય $D : R^3 \times R^3 \times R^3 \rightarrow R$ વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

$\overline{x} = (a_1, b_1, c_1)$, $\overline{y} = (a_2, b_2, c_2)$ અને $\overline{z} = (a_3, b_3, c_3)$ હોય, તો

$$D(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

તે જ પ્રમાણે $\overline{x} = (a_1, b_1)$, $\overline{y} = (a_2, b_2)$ હોય, તો

$D : R^2 \times R^2 \rightarrow R$, $D(\overline{x}, \overline{y}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ લઈ શકાય છે.

આમ, નિશ્ચાયક એક વાસ્તવિક વિધેય છે, જેનો પ્રદેશ R^3 ના સદિશોની ક્રમયુક્ત ત્રય અથવા R^2 ના સદિશોની ક્રમયુક્ત જોડનો બનેલો છે.

આમ, $k \in R$ તો $D(k\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = k \cdot D(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$

પ્રત્યેક ચલ $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ માટે આ રીતે લખી શકાય :

જો $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ તો $D(\overline{x} + \overline{u}, \overline{y}, \overline{z}) = D(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) + D(\overline{u}, \overline{y}, \overline{z})$

આ પરિણામ પ્રત્યેક ચલ માટે સત્ય છે.

આમ, નિશ્ચાયક વિધેય પ્રત્યેક ચલમાં સુરેખ (અન્ય ચલ અચળ રહે તો) વિધેય છે. આમ નિશ્ચાયક વિધેય એ બહુચલ સુરેખ વિધેય છે.

વળી, $D(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = -D(\overline{y}, \overline{x}, \overline{z})$

આવા વિધેયને એકાંતરિત વિધેય કહે છે.

આ પરથી આપણે મેળવી શકીએ કે $D(\overline{x}, \overline{x}, \overline{z}) = 0$

આ રીતે, ઉદાહરણ 25 ને સમજી શકાય :

$$D(\overline{x} + \overline{y}, \overline{x} + \overline{y}, \overline{z}) = 0$$

$$\therefore \quad D(\overline{x} + \overline{y}, \overline{x}, \overline{z}) + D(\overline{x} + \overline{y}, \overline{y}, \overline{z}) = 0$$

$$\therefore \quad D(\overline{x}, \overline{x}, \overline{z}) + D(\overline{y}, \overline{x}, \overline{z}) + D(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) + D(\overline{y}, \overline{y}, \overline{z}) = 0$$

$$\therefore \quad D(\overline{y}, \overline{x}, \overline{z}) = -D(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$$