1

વિદ્યુતભાર અને વિદ્યુતક્ષેત્ર

1.1 પ્રસ્તાવના

આધુનિક યુગમાં માનવજાત જે ભૌતિક સુખ-સગવડો ભોગવી રહ્યો છે, તેમાં ટેક્નોલૉજીના વિકાસનો મહત્ત્વનો ફાળો છે. માનવજાતની સુખાકારી માટે ઊર્જાનાં જુદાં-જુદાં સ્વરૂપો પૈકી વિદ્યુત-ઊર્જા અગત્યનું સ્થાન ધરાવે છે. વિદ્યુત-ઊર્જાને સહેલાઈથી સંગ્રહી શકાય છે તેમજ તેનું બીજા પ્રકારની ઊર્જામાં રૂપાંતર પણ કરી શકાય છે. વિદ્યુત એ ટેક્નોલૉજીની માતા છે, તેવું કહેવું અતિશયોક્તિ નહિ ગણાય. આવી વિદ્યુતના પાયાના પથ્થરો એટલે વિદ્યુતભારો.

પ્રસ્તુત પ્રકરણમાં આપણે સ્થિર વિદ્યુતભારો, તેમના ગુણધર્મો અને તેમની વચ્ચે થતી આંતરક્રિયાઓ વિશે અભ્યાસ કરીશું, જેને સ્થિત-વિદ્યુતશાસ્ત્ર (Static electricity) કહે છે. આવા સ્થિત-વિદ્યુતશાસ્ત્રનો ઉપયોગ copier મશીન, લેસર પ્રિન્ટર, ટેલિવિઝન વિગેરે જેવાં ઉપકરણોમાં થાય છે. આકાશમાં થતી વીજળીના ચમકારા જેવી કુદરતી ઘટનાઓ પણ સ્થિત-વિદ્યુતશાસ્ત્રથી સમજી શકાય છે. પ્રસ્તુત પ્રકરણમાં આપણે જુદા-જુદા પ્રકારનાં વિદ્યુતભારતંત્રોથી ઉત્પન્ન થતાં વિદ્યુતક્ષેત્ર તેમજ તેની લાક્ષણિકતાઓ જોઈશું.

1.2 વિદ્યુતભાર (Electric Charge)

કોઈ પણ દ્રવ્ય અમુક મૂળભૂત કણોનું બનેલું હોય છે. મૂળભૂત કણો 100 કરતાં વધુ છે, પરંતુ તે પૈકી ત્રણ કણો ઈલેક્ટ્રૉન, પ્રોટોન અને ન્યુટ્રૉન વ્યાવહારિક રીતે અગત્યના છે. આ કણો પોતાના દળના કારણે એકબીજા પર ગુરુત્વાકર્ષી બળ લગાડે છે. દા.ત., એકબીજાથી 1 cm અંતરે રહેલા બે ઈલેક્ટ્રૉન વચ્ચે 5.5×10^{-67} N જેટલું ગુરુત્વાકર્ષી બળ લાગે, જે આકર્ષી પ્રકારનું છે. પરંતુ વ્યવહારમાં આટલા જ અંતરે રહેલા બે ઈલેક્ટ્રૉન વચ્ચે 2.3×10^{-24} N જેટલું અપાકર્ષી બળ લાગે છે. ગુરુત્વાકર્ષણ ઉપરાંત આ વધારાનું બળ તે વિદ્યુતબળ છે. **જે મૂળભૂત આંતરિક (intrinsic) ગુણધર્મને કારણે આવું બળ લાગે છે, તેને કણ પરનો વિદ્યુતભાર (electric charge) કહે છે.**

જે રીતે બે કણો વચ્ચે ગુરુત્વાકર્ષી બળ ઉદ્ભવવાનું કારણ તેમનાં દળ છે, તે જ રીતે તેમની વચ્ચે વિદ્યુતબળ ઉદ્ભવવાનું કારણ તેમના પર રહેલા વિદ્યુતભાર છે.

જો બે પ્રોટોનને 1 cm જેટલા અંતરે મૂકીએ, તો તેમની વચ્ચે પણ 2.3×10^{-24} N જેટલું અપાકર્ષી બળ લાગે છે, જે દર્શાવે છે કે પ્રોટોનને પણ વિદ્યુતભાર છે અને તેનું મૂલ્ય ઈલેક્ટ્રૉન પરના વિદ્યુતભાર જેટલું છે. હવે ઈલેક્ટ્રૉન અને પ્રોટોનને આટલા જ અંતરે મૂકતાં તેમની વચ્ચે 2.3×10^{-24} N જેટલું જ બળ લાગે છે, પરંતુ તે આકર્ષી પ્રકારનું હોય છે.

આ પરથી આપણે તારણ કાઢી શકીએ કે ઈલેક્ટ્રૉન અને પ્રોટોન પરના વિદ્યુતભારનું મૂલ્ય સમાન છે, પરંતુ તેઓ વિરુદ્ધ પ્રકારના છે.

વિદ્યુતભાર બે પ્રકારના છે. ધન વિદ્યુતભાર અને ઋણ વિદ્યુતભાર. પ્રણાલિકાગત રીતે પ્રોટોનના વિદ્યુતભારને ધન અને ઈલેક્ટ્રૉનના વિદ્યુતભારને ઋણ ગણવામાં આવે છે. પરંતુ જો આના કરતાં ઊલટી સંજ્ઞા સ્વીકારવામાં આવે તો ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં કોઈ ફેર ના પડે.

બે સમાન (like) વિદ્યુતભારો વચ્ચે અપાકર્ષણ અને અસમાન (unlike) વિદ્યુતભારો વચ્ચે આકર્ષણ ઉદ્ભવે છે.

સામાન્ય સ્થિતિમાં દરેક પદાર્થમાં ઇલેક્ટ્રૉનની સંખ્યા અને પ્રોટોનની સંખ્યા સમાન હોય છે. આથી તેઓ વિદ્યુતની દૃષ્ટિએ તટસ્થ હોય છે. પદાર્થમાં ઇલેક્ટ્રૉન એ ન્યુક્લિયસમાંના પ્રોટોનની સરખામણીમાં ઓછા બળથી જકડાયેલા હોય છે. પરિણામે બે પદાર્થો વચ્ચેની યોગ્ય પ્રક્રિયા (દા.ત., ઘર્ષણની પ્રક્રિયા)ને કારણે ફક્ત ઇલેક્ટ્રૉન્સ જ એક પદાર્થ પરથી બીજા પદાર્થ પર જાય છે, જે પદાર્થ આ વધારાના ઇલેક્ટ્રૉન્સ મેળવે છે, તે ઋણ વિદ્યુતભારિત થાય છે. જે પદાર્થ ઇલેક્ટ્રૉન્સ ગુમાવે છે તે ધન વિદ્યુતભારિત થાય છે. કારણ કે તેમાં પ્રોટોનની સંખ્યા ઇલેક્ટ્રૉન્સની સંખ્યા કરતાં વધુ હોય છે. આથી જ્યારે કાચના સળિયાને રેશમના કપડાં સાથે ઘસવામાં આવે છે, ત્યારે કાચ પરના કેટલાક ઇલેક્ટ્રૉન્સ રેશમના કપડા પર જાય છે અને કાચનો સળિયો ધન વિદ્યુતભારિત થાય છે. રેશમનું કપડું વધારાના ઇલેક્ટ્રૉન્સ મેળવતું હોવાથી તે ઋણ વિદ્યુતભારિત થાય છે. પદાર્થ પરના વિદ્યુતભારને પારખવા માટે વપરાતાં સાદા ઉપકરણને **ઇલેક્ટ્રૉસ્કોપ (Electroscope)** કહે છે.

વિદ્યુતભાર પણ દળ જેવો જ એક મૂળભૂત ગુણધર્મ છે. તેની વ્યાખ્યા આપવી મુશ્કેલ છે. વિદ્યુતભારના જથ્થાનો SI એકમ કુલંબ (coulomb) છે. તેની સંજ્ઞા C છે.

એક ઍમ્પિયર વિદ્યુતપ્રવાહનું વહન કરતા વાહક તારના કોઈ પણ આડછેદમાંથી એક સેકન્ડમાં પસાર થતા વિદ્યુતભારના જથ્થાને 1 coulomb કહે છે. પ્રોટોન પરનો વિદ્યુતભાર $e = +1.6 \times 10^{-19}$ C છે. ઇલેક્ટ્રૉન પરનો વિદ્યુતભાર $e = -1.6 \times 10^{-19}$ C છે.

વિદ્યુતભારનું ક્વૉન્ટમીકરણ (Quantization of Electric Charge)

અત્યાર સુધી થયેલા બધા જ પ્રયોગો દર્શાવે છે કે કુદરતમાં મળી આવતા બધા જ વિદ્યુતભારોનાં મૂલ્યો મૂળભૂત વિદ્યુતભારના મૂલ્યના પૂર્ણ ગુણાંકમાં જ હોય છે.

$Q = ne$

આ હકીકતને વિદ્યુતભારોનું ક્વૉન્ટમીકરણ કહે છે. આ મૂળભૂત વિદ્યુતભાર એટલે ઇલેક્ટ્રૉન અથવા પ્રોટોનનો વિદ્યુતભાર, જેને e વડે દર્શાવવામાં આવે છે. eને વિદ્યુતભારનો પ્રાથમિક એકમ કહે છે.

દ્રવ્યના બંધારણના પાયામાં રહેલા હોવાનું કહેવાતા 'પ્રાથમિક કણો'માંના બધા જ વિદ્યુતભારિત કણોના વિદ્યુતભારો e જેટલા જ મળ્યા છે. દા. ત., પ્રોટોન અને પૉઝિટ્રૉન (positron = positive electron) પરનો વિદ્યુતભાર $+e$ છે. જ્યારે ઇલેક્ટ્રૉન પરનો વિદ્યુતભાર $-e$ છે. આથી, કોઈ પણ પદાર્થ પરનો વિદ્યુતભાર eના પદમાં જ વધારી અથવા ઘટાડી શકાય. વિદ્યુતભારોનું ક્વૉન્ટમીકરણ સૌપ્રથમ અંગ્રેજ વૈજ્ઞાનિક ફેરેડે દ્વારા સૂચવવામાં આવ્યું હતું, જેનું પ્રાયોગિક નિર્દેશન મિલિકને 1912 કર્યું હતું.

હજુ સુધી કોઈ વાદ વિદ્યુતભારનું ક્વૉન્ટમીકરણ સંતોષજનક રીતે સમજાવી શક્યો નથી.

આધુનિક સંશોધન અનુસાર પ્રોટોન અને ન્યુટ્રૉન પણ **ક્વાર્ક્સ quarks** તરીકે ઓળખાતા મૂળભૂત કણોના બનેલા છે. પ્રોટોન અને ન્યુટ્રૉન દરેક ત્રણ ક્વાર્ક્સ ધરાવે છે. આ ક્વાર્ક્સના બે પ્રકાર છે :

$+\frac{2}{3}e$ વિદ્યુતભાર ધરાવતા ક્વાર્ક્સને up quark (u) અને $-\frac{1}{3}e$ વિદ્યુતભાર ધરાવતા ક્વાર્ક્સને down quark (d) કહે છે. (પ્રોટોનનું બંધારણ uud અને ન્યુટ્રૉન બંધારણ udd વડે દર્શાવાય છે.) આમ, આવા **ક્વાર્ક્સ અને ઇલેક્ટ્રૉન્સ દ્રવ્યની રચના કરે છે.** જોકે ક્વાર્ક્સનું સ્વતંત્ર અસ્તિત્વ હજુ સુધી મળી શક્યું નથી.

વિદ્યુતભારનું સંરક્ષણ (Conservation of Electric Charge)

'વિદ્યુતની દૃષ્ટિએ અલગ કરેલ તંત્રમાં ગમે તે પ્રક્રિયા થાય તોપણ તંત્રમાંના વિદ્યુતભારોનો બૈજિક સરવાળો અચળ રહે છે.' આ વિધાનને વિદ્યુતભારના સંરક્ષણનો નિયમ કહે છે.

વિદ્યુતની દૃષ્ટિએ અલગ કરેલ તંત્રમાં બહારથી કોઈ વિદ્યુતભાર તંત્રમાં પ્રવેશતો નથી કે અંદરથી કોઈ વિદ્યુતભાર બહાર જતો નથી. કોઈ પણ વિદ્યુતભારવિહીન વસ્તુ તંત્રની અંદર-બહાર આવ-જા કરી શકે છે.

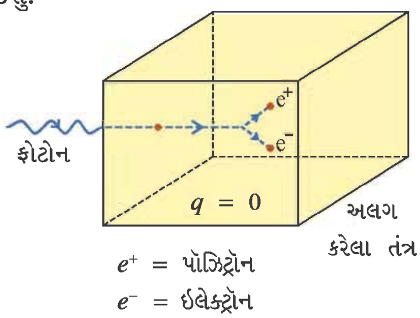
કાચના સળિયા સાથે રેશમી કપડું ઘસવાના પ્રયોગમાં ઘસવાની ક્રિયા પહેલાં કાચના સળિયા તેમજ રેશમી કપડા પરનો ચોખ્ખો વિદ્યુતભાર શૂન્ય છે. ઘસવાની ક્રિયા બાદ કાચનો સળિયો જેટલો ધન વિદ્યુતભારિત થાય છે, તેટલો જ

ઋણ વિદ્યુતભાર રેશમી કપડા પર ઉદ્ભવે છે. આથી ઘર્ષણની ક્રિયા બાદ (કાચનો સળિયો + રેશમી કપડા) પરનો કુલ ચોખ્ખો વિદ્યુતભાર પણ શૂન્ય રહે છે.

હવે આપણે વિદ્યુતભારનું સંરક્ષણ સમજવા માટે બીજું ઉદાહરણ જોઈશું.

આકૃતિ 1.1માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પાતળી દીવાલવાળી પેટીમાં પ્રારંભમાં વિદ્યુતભાર શૂન્ય છે. આ અલગ કરેલા તંત્રમાં શક્તિશાળી ફોટોન પ્રવેશે છે. ફોટોન એ વિદ્યુતભાર ધરાવતો નથી. ફોટોન પેટીમાં દાખલ થતાં ઈલેક્ટ્રૉન અને પૉઝિટ્રૉનનું જોડકું (pair production) ઉત્પન્ન થાય છે. ઈલેક્ટ્રૉન અને પૉઝિટ્રૉનના વિદ્યુતભારો વિજાતીય પ્રકારના અને સમાન મૂલ્યના હોવાથી તંત્રનો કુલ વિદ્યુતભાર શૂન્ય જ રહે છે. જે પ્રારંભમાં પણ શૂન્ય હતો. આમ, આ ઘટનામાં વિદ્યુતભારનું સંરક્ષણ થાય છે.

બીજી રીતે કહીએ તો વિદ્યુતની દૃષ્ટિએ અલગ કરેલા તંત્રમાં વિદ્યુતભાર સાથે સંકળાયેલી એવી જ પ્રક્રિયાઓ થઈ શકે કે જેમાં સમાન મૂલ્યના વિજાતીય વિદ્યુતભારો કાં તો ઉત્પન્ન થાય અથવા તો નાશ પામે.



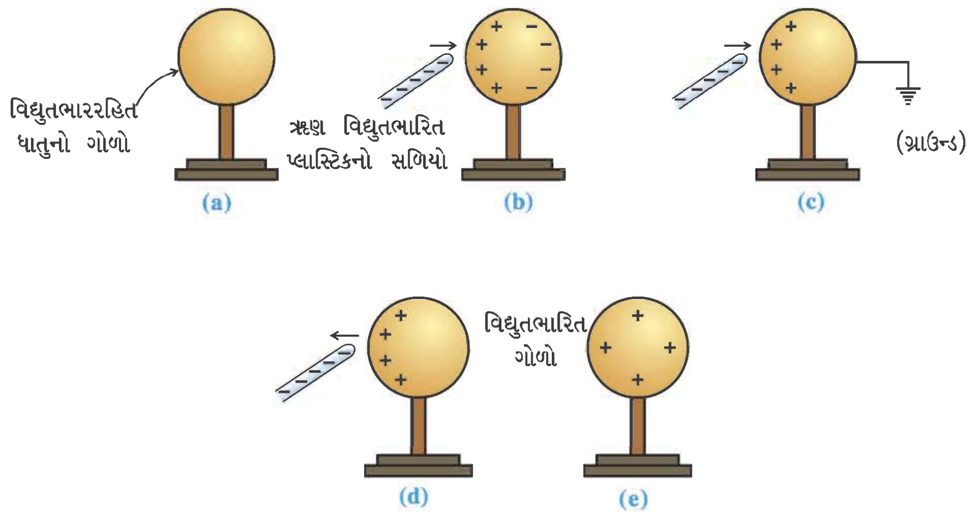
આકૃતિ 1.1 વિદ્યુતભારનું સંરક્ષણ

વિદ્યુતભારનું પ્રેરણ (Charging by Induction)

અવાહક સ્ટૅન્ડ પર મૂકેલા ધાતુના બે સમાન (identical) ગોળાઓમાંના એક ગોળા પર ધારો કે +Q જેટલો ચોખ્ખો (net) વિદ્યુતભાર છે. એટલે કે તે ધન વિદ્યુતભારિત છે અને બીજો ગોળો વિદ્યુતભારવિહીન છે. આ બે ગોળાઓને એકબીજા સાથે સંપર્કમાં લાવવામાં આવે અથવા વાહકતાર વડે સંપર્કમાં લાવતાં વિદ્યુતભારવિહીન ગોળા પરથી કેટલાક ઈલેક્ટ્રૉન ધન વિદ્યુતભારિત ગોળા પર જાય છે. પરિણામે ધન વિદ્યુતભારિત ગોળા પરનો ધન વિદ્યુતભાર ઓછો થાય છે અને વિદ્યુતભારવિહીન ગોળો ઈલેક્ટ્રૉન ગુમાવવાને કારણે ધન વિદ્યુતભારિત થાય છે. હવે બંને ગોળા સમાન હોવાથી સંપર્ક બાદ બંને ગોળા પર $+\frac{Q}{2}$ જેટલો સમાન વિદ્યુતભાર હશે. આમ, સંપર્ક દ્વારા બીજા ગોળા પર $\frac{Q}{2}$ જેટલો વિદ્યુતભાર પ્રસ્થાપિત કર્યો તેમ કહેવાય અથવા તે બીજા ગોળાનું ચાર્જિંગ કર્યું કહેવાય.

વસ્તુને ચાર્જિંગ કરવાની બીજી પણ રીત છે, તે રીતમાં વિદ્યુતભારિત પદાર્થ પોતાનો વિદ્યુતભાર ગુમાવ્યા વગર તેમજ બીજી વસ્તુના ભૌતિક સંપર્કમાં આવ્યા વગર તે વિરુદ્ધ પ્રકારનો વિદ્યુતભાર બીજી વસ્તુ પર પ્રેરિત કરે છે, તેને **વિદ્યુતભારનું પ્રેરણ** કહે છે.

આકૃતિ 1.2(a)માં ધાતુનો એક અલગ કરેલો ગોળો દર્શાવ્યો છે. આ ગોળા પર net વિદ્યુતભાર શૂન્ય છે. આકૃતિ 1.2(b)માં દર્શાવ્યા મુજબ ઋણ વિદ્યુતભારિત પ્લાસ્ટિકના સળિયાને ગોળાની નજીક લાવતાં ગોળામાંના મુક્ત ઈલેક્ટ્રૉન અપાકર્ષણને પરિણામે ગોળા પર સળિયાથી દૂરના ભાગમાં જતા રહે છે અને સળિયાની નજીકના ભાગ પર (ઈલેક્ટ્રૉનની ઊણપને કારણે) ધન વિદ્યુતભાર ખુલ્લો થાય છે.



આકૃતિ 1.2 વિદ્યુતભારનું પ્રેરણ

આકૃતિ 1.2(c)માં દર્શાવ્યા મુજબ જ્યારે આ ગોળાને પૃથ્વી સાથે સુવાહક તાર વડે જોડવામાં આવે છે, ત્યારે ગોળા પરના કેટલાક ઇલેક્ટ્રૉન જમીનમાં જતા રહે છે. (પૃથ્વી એ સુવાહક છે અને તે અસંખ્ય (વ્યાવહારિક રીતે અનંત) ઇલેક્ટ્રૉનના સ્રોત તરીકે વર્તી શકે છે તેમજ તે અસંખ્ય ઇલેક્ટ્રૉનને શોષી શકે છે.)

હવે આકૃતિ 1.2(d)માં દર્શાવ્યા મુજબ ગોળાનું પૃથ્વી સાથેનું જોડાણ દૂર કરવામાં આવે તોપણ ગોળા પરનો ધન વિદ્યુતભાર તેની તે જ પરિસ્થિતિમાં રહે છે. જ્યારે પ્લાસ્ટિકના સળિયાને ગોળાથી દૂર લઈ જવામાં આવે ત્યારે ગોળામાંના બાકી રહેલા ઇલેક્ટ્રૉન ગોળા પર એવી રીતે પુનઃવિતરિત થાય છે. જેથી સમગ્ર ગોળા પર પહેલા જે ધન વિદ્યુતભાર હતો તેટલો જ ધન વિદ્યુતભાર વિતરિત થયેલો જણાય છે. જુઓ આકૃતિ 1.2(e).

1.3 કુલંબનો નિયમ (Coulomb's Law)

ફ્રેંચ વૈજ્ઞાનિક ચાર્લ્સ કુલંબે (1736-1806) પ્રયોગો દ્વારા બે વિદ્યુતભારો વચ્ચે થતા આકર્ષણ અને અપાકર્ષણને માત્રાત્મક રૂપે માપીને તેમની વચ્ચે પ્રવર્તતા બળનો નિયમ તારવ્યો, જે કુલંબના નિયમ તરીકે ઓળખાય છે. આ નિયમ નીચે મુજબ છે :

'બે બિંદુવત્ સ્થિર વિદ્યુતભારો વચ્ચે પ્રવર્તતું વિદ્યુતબળ (કુલંબીય બળ) તે વિદ્યુતભારોનાં મૂલ્યોના ગુણાકારના સમપ્રમાણમાં અને તેમની વચ્ચેના અંતરના વર્ગના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય છે.' આ બળ બે વિદ્યુતભારોને જોડતી રેખા પર હોય છે. કુલંબના નિયમ અનુસાર, r અંતરે રહેલા બે બિંદુવત્ વિદ્યુતભારો q_1 અને q_2 વચ્ચે પ્રવર્તતું બળ,

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$$\therefore \; F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{1.3.1}$$

જ્યાં, k એ કુલંબ અચળાંક છે. જેનું મૂલ્ય q_1, q_2 અને rના એકમ પર આધાર રાખે છે. SI એકમ પદ્ધતિમાં, શૂન્યાવકાશ માટે પ્રાયોગિક રીતે kનું મૂલ્ય 8.9875×10^9 Nm^2C^{-2} જેટલું મળે છે. વ્યાવહારિક હેતુ માટે $k = 9 \times 10^9$ Nm^2C^{-2} લેવામાં આવે છે. (CGS પદ્ધતિમાં kનું મૂલ્ય 1 જેટલું છે.).

વિદ્યુતને લગતાં ઘણાં સૂત્રોને સરળ બનાવવા માટે SI પદ્ધતિમાં kને બદલે $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ લેવામાં આવે છે.

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

જ્યાં, ε_0 એ શૂન્યાવકાશની પરમિટિવિટી (પરાવૈદ્યુતાંક) છે. ઉપર્યુક્ત સમીકરણ પરથી શૂન્યાવકાશની પરમિટિવિટી,

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = \frac{1}{4\pi \times 8.9875 \times 10^9} \approx 8.854 \times 10^{-12} \; C^2N^{-1}m^{-2}$$

$$\text{આમ, } F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{1.3.2}$$

જો વિદ્યુતભારો શૂન્યાવકાશને બદલે બીજા કોઈ અવાહક માધ્યમમાં r જેટલા અંતરે હોય, તો સમીકરણ (1.3.2)માં શૂન્યાવકાશની પરમિટિવિટી ε_0ના સ્થાને તે માધ્યમની પરમિટિવિટી ε મૂકવી જોઈએ. તે માધ્યમમાં વિદ્યુતીય બળ,

$$F_m = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{1.3.3}$$

આમ, બે બિંદુવત્ વિદ્યુતભારો વચ્ચે લાગતું કુલંબીય બળ તે વિદ્યુતભારો કયા માધ્યમમાં આવેલા છે, તેના પર પણ આધાર રાખે છે. સમીકરણ (1.3.2) અને (1.3.3)નો ગુણોત્તર લેતાં,

$$\frac{F}{F_m} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r = K$$

$$\therefore \; F_m = \frac{F}{K} \tag{1.3.4}$$

જ્યાં, ε_rને માધ્યમની સાપેક્ષ પરમિટિવિટી અથવા ડાઈઈલેક્ટ્રિક અચળાંક (K) કહે છે. આ વિશે વિગતે અભ્યાસ આપણે પ્રકરણ 2માં કરીશું. સમીકરણ (1.3.4) પરથી સ્પષ્ટ છે કે અવાહક માધ્યમમાં મૂકેલા વિદ્યુતભારો વચ્ચે લાગતું બળ, તેટલા જ અંતરે શૂન્યાવકાશમાં આવેલા વિદ્યુતભારો વચ્ચે લાગતાં બળ કરતાં $\frac{1}{K}$ ગણું જેટલું એટલે કે(Kમા ભાગ) હોય છે.

યાદ રાખો કે, કુલંબનો નિયમ એ બિંદુવત્ એવા સ્થિર વિદ્યુતભારો માટે જ છે. વ્યવહારમાં વિદ્યુતભારિત વસ્તુઓનાં કદ તેમની વચ્ચેના અંતરની સરખામણીમાં અત્યંત નાનાં હોય ત્યારે પણ આ નિયમ લાગુ પાડી શકાય.

કુલંબનો નિયમ એ ગુરુત્વાકર્ષણના વ્યસ્ત વર્ગના નિયમને મળતો આવે છે. કુલંબના નિયમમાં q એ mનો ભાગ ભજવે છે. ગુરુત્વીય બળો હંમેશાં આકર્ષી હોય છે, પરંતુ કુલંબીય બળ આકર્ષી અથવા અપાકર્ષી હોઈ શકે છે. કારણ કે વિદ્યુતભારો બે પ્રકારના છે.

ઉદાહરણ 1 : સમાન દળ અને સમાન વિદ્યુતભાર ધરાવતા બે કણો જ્યારે એકબીજાથી અમુક અંતરે રહેલા હોય ત્યારે તેમની વચ્ચે લાગતું અપાકર્ષી વિદ્યુતબળ તેમનામાંથી એકના વજન જેટલું હોય, તો તેમની વચ્ચેનું અંતર શોધો. કણનું દળ $= 1.6 \times 10^{-27}$ kg, વિદ્યુતભાર $= 1.6 \times 10^{-19}$ C, $k = 9 \times 10^9$ MKS અને $g = 10\ ms^{-2}$ લો.

ઉકેલ : અત્રે,

બે કણો વચ્ચે લાગતું અપાકર્ષી બળ = એક કણનું વજનબળ

$$\therefore\ k\frac{q_1 q_2}{r^2} = mg$$

$$\therefore\ r^2 = \frac{k\, q_1 q_2}{mg} = \frac{9\times10^9\times(1.6\times10^{-19})^2}{(1.6\times10^{-27})(10)} = 1.44 \times 10^{-2}$$

$$\therefore\ r = 0.12\ m$$

ઉદાહરણ 2 : તાંબાના દરેક 1 g દળના બે ગોળાઓ એકબીજાથી 1 mના અંતરે રાખેલા છે. જો તેમાં પ્રોટોનની સંખ્યા કરતાં ઇલેક્ટ્રૉનની સંખ્યા 1% જેટલી ઓછી હોય, તો તેમની વચ્ચે લાગતું વિદ્યુતબળ શોધો. તાંબાનો પરમાણુભાર 63.54 g/mol, પરમાણુક્રમાંક 29, એવોગ્રેડ્રો-અંક $N_A = 6.023 \times 10^{23}$ mol^{-1} અને $k = 9 \times 10^9$ SI.

ઉકેલ : તાંબાના તટસ્થ પરમાણુમાં 29 પ્રોટોન અને 29 ઇલેક્ટ્રૉન હોય છે. અત્રે, દરેક પરમાણુમાં પ્રોટોનની સંખ્યાના 1% જેટલા ઇલેક્ટ્રૉન ઓછા છે.

$$\therefore\ \text{એક પરમાણુ પરનો ચોખ્ખો વિદ્યુતભાર } q' = \begin{pmatrix}\text{પ્રોટોન પરનો કુલ}\\ \text{વિદ્યુતભાર}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{ઇલેક્ટ્રૉન પરનો કુલ}\\ \text{વિદ્યુતભાર}\end{pmatrix}$$

$$= +29e + (-29e) - (-0.29e)$$

$$= +\ 0.29e$$

$$\therefore\ 1\ g \text{ તાંબામાં કુલ ધન વિદ્યુતભાર, } q = \begin{pmatrix}\text{1 g તાંબામાં રહેલા}\\ \text{પરમાણુની સંખ્યા}\end{pmatrix} \times 0.29e = \frac{6.023\times10^{23}}{63.54} \times 0.29e$$

$\therefore$ તાંબાના બે ગોળાઓ વચ્ચે લાગતું વિદ્યુતીય બળ

$$F = k\frac{q\,q}{r^2} = k\frac{q^2}{r^2} = \frac{9\times10^9}{1^2} \times \left(\frac{6.023\times10^{23}\times0.29\times1.6\times10^{-19}}{63.54}\right)^2$$

$$= 1.74 \times 10^{15}N$$

આ ઉદાહરણ પરથી સ્પષ્ટ છે કે કોઈ પણ દ્રવ્યમાં ધન વિદ્યુતભારો અને ઋણ વિદ્યુતભારો વચ્ચે ફક્ત 1% જેટલી અસમાનતા હોય તોપણ મોટા પ્રમાણમાં વિદ્યુતીય બળ ઉદ્ભવે છે. મોટા ભાગનાં દ્રવ્યો વિદ્યુતની દૃષ્ટિએ તટસ્થ હોવાથી તેમના પર અત્યંત નબળા એવા ગુરુત્વાકર્ષણ બળનું પ્રભુત્વ હોય છે.

ઉદાહરણ 3 : એક પદાર્થ પર Q જેટલો વિદ્યુતભાર પથરાયેલો છે. આ પદાર્થના બે ટુકડા કેવી રીતે કરવા જોઈએ કે જેથી તેમના પર રહેલ વિદ્યુતભારો વચ્ચે આપેલા અંતર માટે લાગતું બળ મહત્તમ હોય.

ઉકેલ : ધારો કે Q વિદ્યુતભારિત પદાર્થના બે ટુકડા એવી રીતે કરવામાં આવે છે કે જેથી એક પર q અને બીજા પર $Q - q$ જેટલો વિદ્યુતભાર હોય. આ બંને વચ્ચે કોઈ પણ અંતર r માટે લાગતું બળ,

$$F = k\frac{q(Q-q)}{r^2}$$

આ બળ મહત્તમ થવા માટે,

$y = q(Q - q) = Qq - q^2$ મહત્તમ થવું જોઈએ. આ માટેની શરત એ છે કે $\frac{dy}{dq}$ શૂન્ય થવું જોઈએ.

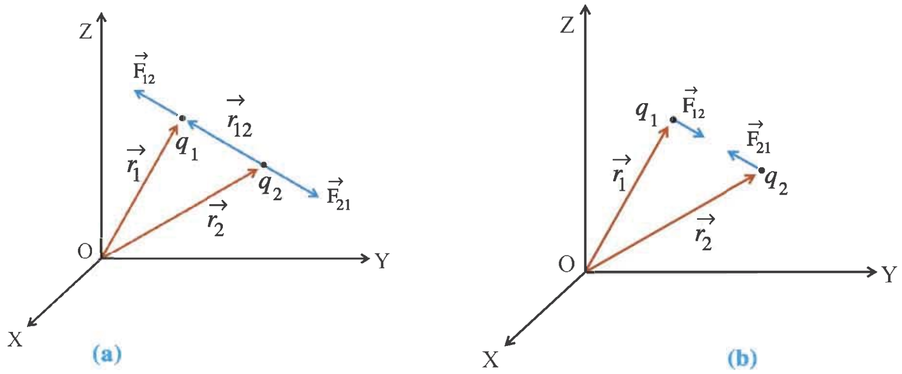
$$\therefore \frac{dy}{dq} = Q - 2q = 0$$

$$\therefore q = \frac{Q}{2}$$

આમ, પદાર્થના બે ભાગ એવી રીતે કરવા જોઈએ, જેથી બંને ટુકડા પર સમાન વિદ્યુતભાર હોય.

કુલંબનો નિયમ સદિશ સ્વરૂપે (Coulomb's law in vector form)

બળ એ સદિશ રાશિ હોવાથી કુલંબના નિયમને સદિશ સ્વરૂપે નીચે મુજબ રજૂ કરી શકાય :



આકૃતિ 1.3 કુલંબનો નિયમ સદિશ સ્વરૂપે

આકૃતિ 1.3(a)માં દર્શાવ્યા મુજબ, બે સમાન પ્રકારના વિદ્યુતભારો q_1 અને q_2ના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે $\vec{r}_1$ અને $\vec{r}_2$ છે. વિદ્યુતભાર q_2થી q_1 તરફના સદિશને $\vec{r}_{12}$ વડે દર્શાવતાં,

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 .$$

કુલંબના નિયમ અનસાર q_2 વિદ્યુતભાર વડે q_1 વિદ્યુતભાર પર લાગતું વિદ્યુતીય બળ,

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\,\hat{r}_{12} \qquad (1.3.5)$$

જ્યાં, $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ એ બે વિદ્યુતભારો વચ્ચેનું અંતર છે અને $\hat{r}_{12}$ એ q_2થી q_1ની દિશામાં $\vec{r}_{12}$ સદિશનો એકમસદિશ છે.

$$\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

$$\therefore \vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}\cdot\frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (1.3.6)$$

ઉપર્યુક્ત સમીકરણ એ કોઈ પણ પ્રકારના વિદ્યુતભારો માટે સત્ય છે. જો વિદ્યુતભારો q_1 અને q_2 બંને સમાન પ્રકારના (બંને ધન અથવા બંને ઋણ વિદ્યુતભાર) હશે, તો $\vec{F}_{12}$ એ $\hat{r}_{12}$ની દિશામાં મળશે, જે દર્શાવે છે કે આ બળ અપાકર્ષી પ્રકારનું છે. જો વિદ્યુતભારો વિરુદ્ધ પ્રકારના (એક ધન અને બીજો ઋણ વિદ્યુતભાર) હશે, તો $\vec{F}_{21}$ની દિશા એ $-\hat{r}_{12}$ની દિશામાં મળશે. જે દર્શાવે છે કે વિદ્યુતભારો વચ્ચે આકર્ષી બળ લાગે છે. (જુઓ આકૃતિ 1.3(b)).

આ જ રીતે, q_1 વિદ્યુતભાર વડે q_2 વિદ્યુતભાર પર લાગતું કુલંબીય બળ,

$$\vec{F}_{21} = k\frac{q_1 q_2}{r_{21}^2}\hat{r}_{21} \quad (1.3.7)$$

$$= k\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (1.3.8)$$

જ્યાં, $\vec{r}_{21}$ એ q_1થી q_2ની દિશાનો એકમસદિશ છે. અત્રે સ્પષ્ટ છે કે,

અહીં, $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = -(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

આથી, સમીકરણ (1.3.6) પરથી

$$\vec{F}_{21} = -k\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\vec{F}_{12}$$

આમ, કુલંબનો નિયમ એ ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમનું પણ સમર્થન કરે છે.

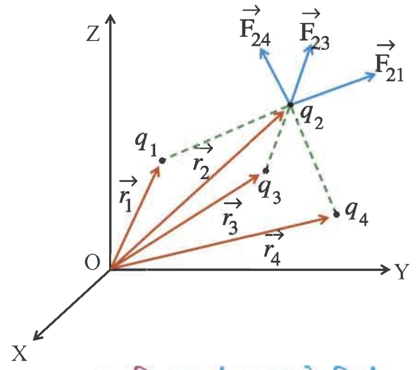
1.4 બે કરતાં વધારે વિદ્યુતભારો વચ્ચે લાગતાં બળો : સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત : (Forces between more than Two Charges : The Superposition Principle)

બે વિદ્યુતભારો વચ્ચે લાગતું બળ શોધવા માટે કુલંબનો નિયમ વાપરી શકાય છે. પરંતુ જ્યારે બે કરતાં વધુ વિદ્યુતભારો (ધારો કે q_1, q_2, ..., q_n) હાજર હોય, તો તેમાંના કોઈ એક વિદ્યુતભાર પર બાકીના વિદ્યુતભારો વડે લાગતું બળ શોધવા માટે કુલંબના નિયમ ઉપરાંત સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત જરૂરી છે.

સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત : જ્યારે કોઈ વિદ્યુતભાર પર એક કરતાં વધારે કુલંબ બળો લાગતાં હોય ત્યારે પરિણામી કુલંબ બળ દરેક સ્વતંત્ર કુલંબ બળના સદિશ સરવાળા જેટલું હોય છે.

આમ, બે વિદ્યુતભારો વચ્ચે ઉદ્ભવતા કુલંબીય બળ પર ત્રીજાં કોઈ વિદ્યુતભારની હાજરીની અસર થતી નથી. આથી કુલંબ બળને Two Body Force કહે છે..

આકૃતિ 1.4માં દર્શાવ્યા અનુસાર q_1, q_2, q_3 અને q_4 એમ ચાર વિદ્યુતભારોના તંત્રનો વિચાર કરો. આપેલ યામ પદ્ધતિમાં આ વિદ્યુતભારોના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ અને $\vec{r}_4$ છે. અહીં આપણે q_2 વિદ્યુતભાર પર બાકીના વિદ્યુતભારને લીધે લાગતું કુલ બળ $\vec{F}_2$ શોધીશું.



આકૃતિ 1.4 સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત

q_2 વિદ્યુતભાર પર q_1 વડે લાગતું બળ, $\vec{F}_{21} = k\frac{q_1 q_2}{r_{21}^2}\hat{r}_{21}$

q_2 વિદ્યુતભાર પર q_3 વડે લાગતું બળ, $\vec{F}_{23} = k\frac{q_2 q_3}{r_{23}^2}\hat{r}_{23}$

q_2 વિદ્યુતભાર પર q_4 વડે લાગતું બળ, $\vec{F}_{24} = k\frac{q_2 q_4}{r_{24}^2}\hat{r}_{24}$

હવે, સંપાતપણાના સિદ્ધાંત અનુસાર,

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{24} = k\frac{q_1 q_2}{r_{21}^2}\hat{r}_{21} + k\frac{q_2 q_3}{r_{23}^2}\hat{r}_{23} + k\frac{q_2 q_4}{r_{24}^2}\hat{r}_{24}$$

$$= kq_2\left[\frac{q_1}{r_{21}^2}\hat{r}_{21} + \frac{q_3}{r_{23}^2}\hat{r}_{23} + \frac{q_4}{r_{24}^2}\hat{r}_{24}\right]$$

$$= kq_2\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^{4}\frac{q_j}{r_{2j}^2}\hat{r}_{2j} \tag{1.4.1}$$

અથવા

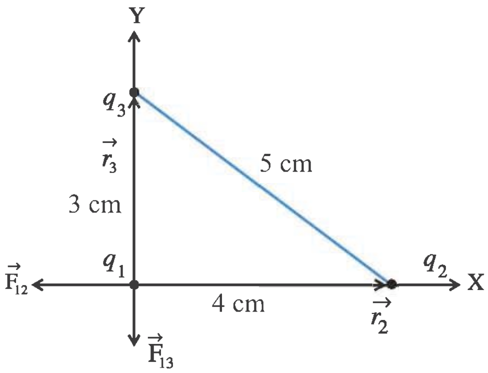
$$\vec{F}_2 = kq_2\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^{4}\frac{q_j}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_j|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_j) \tag{1.4.2}$$

વ્યાપક રીતે n વિદ્યુતભારોના તંત્ર માટે q_i વિદ્યુતભાર લાગતું કુલ બળ,

$$\vec{F}_i = kq_i\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\frac{q_j}{r_{ij}^2}\hat{r}_{ij}$$

$$\vec{F}_i = kq_i\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \tag{1.4.3}$$

ઉદાહરણ 4 : 2 μC જેટલો સમાન વિદ્યુતભાર ધરાવતાં ત્રણ કણોને એક કાટકોણ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ પર મૂકેલ છે. કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓની લંબાઈ 3cm, 4cm અને 5cm છે. આ ત્રિકોણના કાટકોણ (Right Angled Corner) પર મૂકેલા વિદ્યુતભાર પર લાગતું કુલ બળ શોધો. $k = 9.0 \times 10^9$ SI.



ઉકેલ : આકૃતિમાં આપેલ પરિસ્થિતિ દર્શાવેલ છે.

$q_1 = q_2 = q_3 = q = 2 \times 10^{-6}$C

q_1, q_2 અને q_3ના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે,

$\vec{r}_1 = (0, 0)$

$\vec{r}_2 = (4, 0)$cm $= (0.04, 0)$m

$\vec{r}_3 = (0, 3)$cm $= (0, 0.03)$m.

આપેલ કાટકોણ ત્રિકોણના કાટખૂણા પર q_1 વિદ્યુતભાર છે. q_1 પર લાગતું કુલ બળ,

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$$

$$= k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^{\ 2}}\hat{r}_{12} + k\frac{q_1 q_3}{r_{13}^{\ 2}}\hat{r}_{13} = kq^2\left[\frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^{\ 2}} + \frac{\hat{r}_{13}}{r_{13}^{\ 2}}\right] (\because\ q_1 = q_2 = q) \qquad (1)$$

હવે, $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (0,\ 0) - (0.04,\ 0) = (-0.04,\ 0)\text{m}$

$\therefore\ r_{12} = \sqrt{(-0.04)^2 + (0)^2} = 0.04\text{m}$

$$\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_{12}|} = \frac{(-0.04, 0)}{0.04} = (-1,\ 0)\text{m}$$

$\vec{r}_{13} = \vec{r}_1 - \vec{r}_3 = (0,\ 0) - (0,\ 0.03) = (0,\ -0.03)\text{m}$

$r_{13} = \sqrt{(0)^2 + (-0.03)^2} = 0.03\text{m}$

$$\hat{r}_{13} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_{13}|} = \frac{(0, -0.03)}{0.03} = (0,\ -1)\text{m}$$

આ બધાં જ મૂલ્યો સમીકરણ (1)માં મૂકતાં,

$$\vec{F}_1 = (9 \times 10^9)\ (2 \times 10^{-6})^2 \left[\frac{(-1, 0)}{(0.04)^2} + \frac{(0, -1)}{(0.03)^2}\right]$$

$= 36 \times 10^{-3}[625\ (-1,\ 0) + 1111.1\ (0,\ -1)]$

$= (-22.5,\ -40)\text{N}$

આ બળનું મૂલ્ય

$\therefore\ |\vec{F}_1| = \sqrt{(-22.5)^2 + (-40)^2} = 45.88\text{N}$

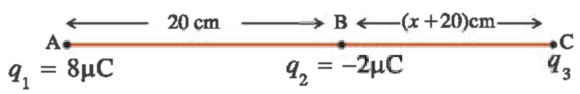
આ બળની દિશા,

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{\text{Fy}}{\text{Fx}}\right) = tan^{-1}\left(\frac{-40}{-22.5}\right) = tan^{-1}(1.777)$$

$$= 60.6^{\circ}$$

જે ઋણ X-અક્ષ સાથેનો ખૂણો દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ 5 : $8.0\mu\text{C}$ અને $-2.0\mu\text{C}$ જેટલો વિદ્યુતભાર ધરાવતા બે કણો વચ્ચેનું અંતર 20cm છે. કોઈ ત્રીજા વિદ્યુતભારને ક્યા બિંદુ પર મૂકીએ તો તેના પર લાગતું પરિણામી બળ શૂન્ય થાય ?



ઉકેલ : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે $q_1 = 8\mu\text{C}$ અને $q_2 = -2\mu\text{C}$ વિદ્યુતભારને અનુક્રમે A અને B પર મૂકેલા છે. આ બે વિદ્યુતભારો વડે ત્રીજા વિદ્યુતભાર (ધારો કે q_3) પર લાગતાં બળોનું પરિણામી બળ તો જ શૂન્ય થાય, જો આ બળોનાં મૂલ્યો સમાન અને દિશા પરસ્પર વિરુદ્ધ હોય. આ ત્યારે જ શક્ય બને જ્યારે આ

ત્રીજા વિદ્યુતભારને આ બે વિદ્યુતભારોને જોડતી રેખા પર કોઈક બિંદુએ મૂકવામાં આવે. q_1 અને q_2 બંને વિરુદ્ધ પ્રકારના હોવાથી આ બિંદુ A અને Bની વચ્ચે તો સંભવી શકે જ નહિ. A પરના વિદ્યુતભારનું મૂલ્ય વધુ હોઈને એ પણ સ્પષ્ટ છે કે ત્રીજો વિદ્યુતભાર A કરતાં Bની વધુ નજીક હોવો જોઈએ.

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે ત્રીજો વિદ્યુતભાર q_3 બિંદુ C પર મૂકેલ છે. BC = x cm છે.

સંપાતપણાના સિદ્ધાંત અનુસાર q_3 પર લાગતું કુલ બળ,

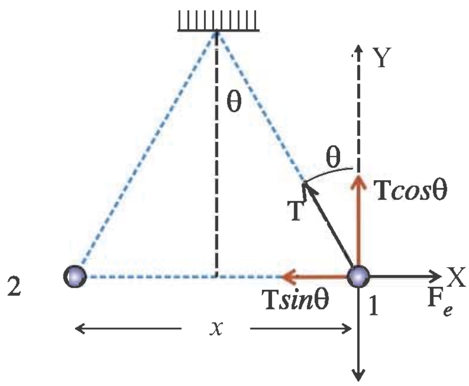
$$F_3 = F_{31} + F_{32}$$

$$0 = k\frac{q_1 q_3}{(r+x)^2} + k\frac{q_2 q_3}{x^2} = \frac{q_1}{(r+x)^2} + \frac{q_2}{x^2} = \frac{8\times10^{-16}}{(20+x)^2} - \frac{2\times10^{-16}}{x^2}$$

$$\therefore \frac{20+x}{x} = 2 \qquad \therefore x = 20\text{cm}$$

ઉદાહરણ 6 : સમાન ત્રિજ્યા અને સમાન દળ ધરાવતા બે ગોળાઓને સમાન લંબાઈની દોરીઓ વડે એવી રીતે લટકાવવામાં આવ્યા છે કે જેથી તેમની સપાટીઓ એકબીજાને સ્પર્શે. આ ગોળાઓને 4×10^{-7}C જેટલો વિદ્યુતભાર આપતાં તેઓ એકબીજાને અપાકર્ષે છે અને પરિણામસ્વરૂપ દોરીઓ એકબીજા સાથે $60°$નો કોણ બનાવે છે. જો આધારબિંદુથી ગોળાના કેન્દ્ર સુધીનું અંતર 20cm હોય, તો ગોળાનું દળ શોધો. $k = 9 \times 10^9$ SI લો તથા $g = 10\text{ms}^{-2}$ લો.

ઉકેલ : બંને ગોળાઓ બધી રીતે સમાન હોઈને, 4×10^{-7}Cનો વિદ્યુતભાર તેમના પર સમાન રીતે વહેંચાશે. એટલે કે દરેક ગોળા પર 2×10^{-7}C વિદ્યુતભાર છે. ગોળા 1નું સમતોલન વિચારતાં, તેના પર લાગતાં બળો :



(1) વજન, mg અધોદિશામાં

(2) બે ગોળા વચ્ચે ઉદ્ભવતું વિદ્યુત અપાકર્ષણ બળ F_e

(3) દોરીમાં ઉદ્ભવતો તણાવ T

આ બળોના, આકૃતિમાં દર્શાવેલ યામાક્ષ પદ્ધતિમાં X અને Y ઘટકો લઈ સમતોલન વિચારતાં,

$$F_e = T\sin\theta$$

$$\therefore k\frac{q^2}{x^2} = T\sin\theta \qquad ...(1)$$

$$\text{અને } mg = T\cos\theta \qquad ...(2)$$

સમીકરણ (1) અને (2) પરથી,

$$\frac{kq^2}{x^2 mg} = \tan\theta \Rightarrow m = \frac{kq^2}{x^2 g\tan\theta}$$

વળી, આકૃતિ પરથી, $\sin\theta = \frac{\frac{x}{2}}{l} = \frac{x}{2l}$

$$\therefore x = 2l\sin\theta$$

$$\therefore m = \frac{kq^2}{g.4l^2\sin^2\theta\tan\theta}$$

$$\therefore m = \frac{(9\times10^9)(2\times10^{-7})^2}{10\times4(20\times10^{-2})^2\times(\sin30°)^2\times(\tan30°)} = 1.56 \times 10^{-3}\text{kg}$$

1.5 વિદ્યુતક્ષેત્ર (Electric Field)

અવકાશમાં આપેલા કોઈ વિદ્યુતભાર qની આસપાસના વિસ્તારમાં કોઈ બિંદુ P પાસે બીજો વિદ્યુતભાર q_0 મૂકતાં, વિદ્યુતભાર q વડે તેના પર વિદ્યુતીય બળ લાગે છે. હવે જો વિદ્યુતભાર q_0ને દૂર કરવામાં આવે, તો આપેલા વિસ્તારમાં

શું રહેશે ? કંઈ જ નહિ ? જો આ વિસ્તારમાં કશું જ ના હોય તો વિદ્યુતભાર q_0 પર બળ લાગ્યું કઈ રીતે ? આ પ્રશ્નનો ઉત્તર મેળવવા માટે વિદ્યુતક્ષેત્રની સંકલ્પના ખૂબ જ ઉપયોગી છે

વિદ્યુતભારની આસપાસ રહેલા અવકાશમાં વિદ્યુતભારને લીધે એક જાતની અસર ઉત્પન્ન થાય છે. વિદ્યુતભારની આજુબાજુ જેટલા વિસ્તારમાં તેની અસર પ્રવર્તમાન હોય તે વિસ્તારને વિદ્યુતક્ષેત્ર કહે છે. આ વિદ્યુતક્ષેત્ર તેમાં મૂકેલા બીજા કોઈ વિદ્યુતભાર q_0 પર પ્રક્રિયા કરી શકે છે અને તેની પર બળ $\vec{F}$ લગાડે છે. (જેના દ્વારા વિદ્યુતક્ષેત્ર ઉત્પન્ન થાય છે, તે વિદ્યુતભાર પર આ વિદ્યુતક્ષેત્ર બળ લગાડતું નથી.) આમ, વિદ્યુતક્ષેત્ર એ q અને q_0 વચ્ચે મધ્યસ્થી તરીકે કાર્ય કરે છે.

ધારો કે કોઈ એક વિદ્યુતભાર Qને યામપદ્ધતિના ઊગમબિંદુ પર મૂકેલો છે. તેના વિદ્યુતક્ષેત્રમાં કોઈ એક બિંદુએ q_0 વિદ્યુતભારને એવી રીતે મૂકવામાં (લાવવામાં) આવે છે, જેથી Qનું સ્થાન બદલાય નહિ. જો આ બિંદુનો સ્થાન સદિશ $\vec{r}$ હોય, તો તે બિંદુ આગળ વિદ્યુતક્ષેત્ર નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q_0} \tag{1.5.1}$$

અહીં, $\vec{E}$ ને આપેલા વિદ્યુતભાર Qનું $\vec{r}$ સ્થાન આગળનું વિદ્યુતક્ષેત્ર અથવા વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા કહે છે. આ રીતે મળતી રાશિ q_0થી સ્વતંત્ર છે. તે વિદ્યુતતંત્રના વિદ્યુતભારોના મૂલ્ય પર, તેમની ગોઠવણી પર અને q_0ના સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ પર આધારિત છે.

વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતાનું મૂલ્ય નક્કી કરવા માટે વપરાતા વિદ્યુતભાર q_0ને પરીક્ષણ વિદ્યુતભાર (Test Charge) અને વિદ્યુતક્ષેત્ર ઉત્પન્ન કરતાં વિદ્યુતભારને વિદ્યુતક્ષેત્રનાં પ્રાપ્તિસ્થાનો (Sources) કહે છે.

SI પદ્ધતિમાં વિદ્યુતક્ષેત્રનો એકમ NC^{-1} અથવા Vm^{-1} છે.

સમીકરણ (1.5.1)માં જો $q_0 = 1C$ હોય, તો $\vec{E} = \vec{F}$ થાય. આ પરથી વિદ્યુતક્ષેત્રની વ્યાખ્યા નીચે મુજબ આપી શકાય.

'કોઈ પણ વિદ્યુતભાર તંત્રની આસપાસના વિસ્તારમાં કોઈ બિંદુ પાસે એકમ ધન વિદ્યુતભાર પર લાગતા વિદ્યુતબળને તે વિદ્યુતતંત્રનું વિદ્યુતક્ષેત્ર અથવા વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા $\vec{E}$ કહે છે.'

વિદ્યુતક્ષેત્ર એ સદિશ રાશિ છે અને તે પરીક્ષણ વિદ્યુતભાર પર લાગતા વિદ્યુતીય બળની દિશામાં હોય છે.

જો વિદ્યુભારનું તંત્ર એક કરતાં વધુ વિદ્યુતભારોનું બનેલું હોય તો તેના કારણે ઉત્પન્ન થતાં વિદ્યુતક્ષેત્રમાં કોઈ બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા એ કુલંબના નિયમ અને સંપાતપણાના સિદ્ધાંતની મદદથી મેળવી શકાય છે.

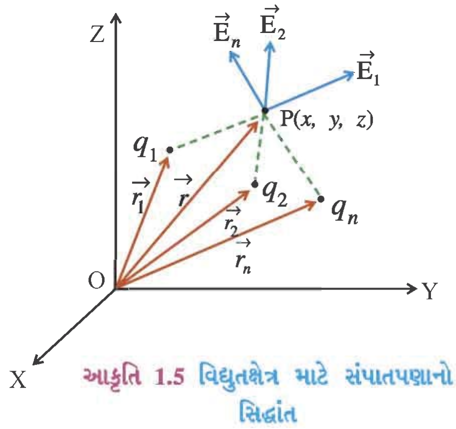
હવે, q_1, q_2, ..., q_n વિદ્યુતભારોથી બનેલા તંત્રને ધ્યાનમાં લો. તેમના સ્થાનસદિશો ઊગમબિંદુની સાપેક્ષે અનુક્રમે $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$, ..., $\vec{r_n}$ છે. આ તંત્રની આસપાસના વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર ઉત્પન્ન થાય છે. આ વિસ્તારમાં સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ ધરાવતા બિંદુ P(x, y, z) પાસે વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધવું છે. આ માટે અતિ સૂક્ષ્મ એવા પરીક્ષણ વિદ્યુતભાર q_0ને મૂકીને સંપાતપણાના સિદ્ધાંતથી તે બિંદુ આગળ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા મેળવી શકાય.

q_1 વિદ્યુતભારને લીધે બિંદુ P આગળ વિદ્યુતક્ષેત્ર,

$$\vec{E_1} = \frac{\vec{F_1}}{q_0} = k\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r_1}|^3}(\vec{r}-\vec{r_1})$$

q_2 વિદ્યુતભારને લીધે બિંદુ P આગળ વિદ્યુતક્ષેત્ર,

$$\vec{E_2} = \frac{\vec{F_2}}{q_0} = k\frac{q_2}{|\vec{r}-\vec{r_2}|^3}(\vec{r}-\vec{r_2})$$



આકૃતિ 1.5 વિદ્યુતક્ષેત્ર માટે સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત

આ જ રીતે q_n વિદ્યુતભારને લીધે P બિંદુ આગળ વિદ્યુતક્ષેત્ર,

$$\vec{E}_n = \frac{\vec{F}_n}{q_0} = k\frac{q_n}{|\vec{r}-\vec{r}_n|^3}(\vec{r}-\vec{r}_n)$$

સંપાતપણાના સિદ્ધાંત અનુસાર બિંદુ P પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર,

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ... + \vec{E}_n$$

$$= k\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}-\vec{r}_1) + k\frac{q_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}-\vec{r}_2) + ... + k\frac{q_n}{|\vec{r}-\vec{r}_n|^3}(\vec{r}-\vec{r}_n)$$

$$\vec{E} = k\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3}(\vec{r}-\vec{r}_j) \qquad (1.5.2)$$

અહીં, q_1, q_2, ..., q_n એ પ્રાપ્તિસ્થાનો છે.

વિદ્યુતક્ષેત્ર અંગે નીચેના મુદ્દાઓ ઉલ્લેખનીય છે :

(1) વિદ્યુતક્ષેત્ર નક્કી કરતી વખતે જુદાં-જુદાં બિંદુ પાસે મૂકવામાં આવતા પરીક્ષણ વિદ્યુતભાર(q_0)ની અસરના કારણે મૂળ વિદ્યુતભાર તંત્રમાં કોઈ ફેરફાર થવો જોઈએ નહિ. આ માટે પરીક્ષણ વિદ્યુતભાર શક્ય તેટલો નાનો હોવો જોઈએ. વિદ્યુતક્ષેત્ર વધુ ચોકસાઈથી વ્યાખ્યાયિત કરવા માટે $q_0 \to 0$ હોવો જોઈએ. પરંતુ, q_0નું લઘુતમ મૂલ્ય 1.6×10^{-19}C છે.

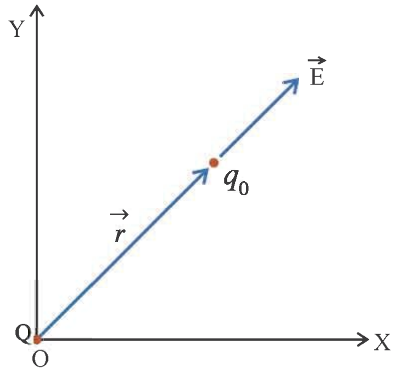
(2) સમીકરણ 1.5.2 એ કોઈ પણ બિંદુ $\vec{r}\,(x, y, z)$ પર મૂકેલ એકમ ધન વિદ્યુતભાર પરનું બળ દર્શાવે છે. એક વખત $\vec{E}(\vec{r})$ નક્કી થઈ જાય પછી તે ક્ષેત્ર શાને લીધે ઉદ્ભવે છે, તેની ચિંતા કરવાની રહેતી નથી. આ અર્થમાં ક્ષેત્ર પોતે જ, જ્યાં સુધી બીજા વિદ્યુતભારો પરની અસરને લાગેવળગે છે, ત્યાં સુધી ક્ષેત્ર ઉત્પન્ન કરતા વિદ્યુતભાર તંત્રની વિશિષ્ટ રજૂઆત છે. આવી રજૂઆત કરી લીધા પછી આપેલા બિંદુએ q વિદ્યુતભાર મૂકતાં તેના પર લાગતું બળ નીચેના સૂત્ર પરથી મેળવી શકાય.

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) \qquad (1.5.3)$$

(3) વિદ્યુતક્ષેત્રમાં કોઈ પણ બિંદુ પાસે મૂકેલ એકમ ધન વિદ્યુતભાર પર લાગતા બળની દિશાને તે બિંદુ પાસે વિદ્યુતક્ષેત્રની દિશા ગણવામાં આવે છે.

(4) વિદ્યુતક્ષેત્રનો ખ્યાલ સૌપ્રથમ ફેરેડેએ આપ્યો હતો. વિદ્યુતક્ષેત્ર એ માત્ર ખ્યાલ જ નથી પણ ભૌતિક વાસ્તવિકતા છે.

1.6 બિંદુવત્ વિદ્યુતભારનું વિદ્યુતક્ષેત્ર (Electric Field Due to a Point Charge)



આકૃતિ 1.6 બિંદુવત્ વિદ્યુતભારથી ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર

આકૃતિ 1.6માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે બિંદુવત્ વિદ્યુતભાર Q વડે ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધવા માટે Qને કાર્તેઝિયન યામપદ્ધતિના ઊગમબિંદુ પર લો.

આ વિદ્યુતભારથી r અંતરે વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધવા માટે પરીક્ષણ વિદ્યુતભાર q_0ને ત્યાં મૂકો. Q વિદ્યુતભારને લીધે q_0 પર લાગતું બળ,

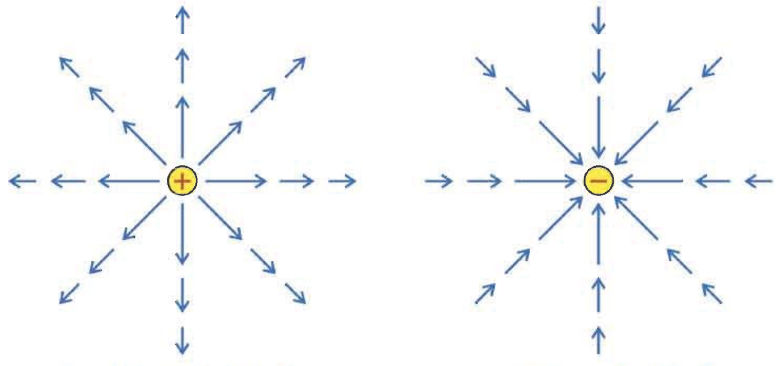
$$\vec{F} = k\frac{Qq_0}{r^2}\hat{r}$$

r અંતરે વિદ્યુતભાર Qના વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા,

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = k\frac{Q}{r^2}\hat{r} \qquad (1.6.1)$$

આકૃતિ 1.7માં દ્વિ-પરિમાણમાં કોઈ બિંદુવત્ વિદ્યુતભારના વિદ્યુતક્ષેત્રને ક્ષેત્ર-સદિશો વડે રજૂ કર્યું છે.

આકૃતિ 1.7 પરથી સ્પષ્ટ છે કે ધન વિદ્યુતભાર ($Q > 0$) માટે તેના ક્ષેત્રસદિશોની દિશા બહાર તરફ જતી છે અને ઋણ વિદ્યુતભાર ($Q < 0$) માટે ક્ષેત્રસદિશો અંદર તરફથી દિશામાં છે. વિદ્યુતભારથી દૂર જતા તીરની લંબાઈ ઘટતી જાય છે, જે વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતાના ઘટાડાનું સૂચન કરે છે.



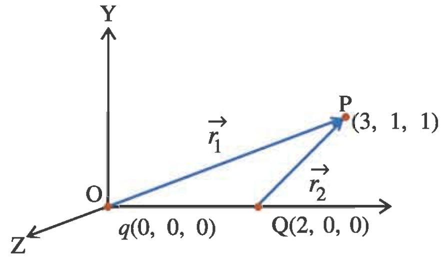
આકૃતિ 1.7 બિંદુવત્ વિદ્યુતભારથી ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર

ઉદાહરણ 7 : કાર્તેઝિયન યામપદ્ધતિના ઊગમબિંદુ પર $+10^{-9}$C જેટલો વિદ્યુતભાર મૂકેલો છે. બીજો વિદ્યુતભાર Q એ (2, 0, 0)m યામ પર છે. જો (3, 1, 1)m યામ સ્થાને વિદ્યુતક્ષેત્રનો x-ઘટક શૂન્ય હોય તો Qનું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ,

$q = 10^{-9}$Cનો સ્થાનસદિશ (0, 0, 0)m અને Qનો સ્થાનસદિશ (2, 0, 0)m છે.

બિંદુ Pના યામ (3, 1, 1)m છે.



$$\therefore \vec{r}_1 = (3, 1, 1) - (0, 0, 0) = (3, 1, 1)$$

$$= 3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

$$|\vec{r}_1| = \sqrt{(3)^2+(1)^2+(1)^2} = \sqrt{11}\text{ m.}$$

$$\vec{r}_2 = (3, 1, 1) - (2, 0, 0) = (1, 1, 1)\text{m}$$

$$= \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

$$|\vec{r}_2| = \sqrt{(1)^2+(1)^2+(1)^2} = \sqrt{3}\text{ m.}$$

બિંદુ P આગળ કુલ વિદ્યુતક્ષેત્ર, $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

$$= k\frac{q}{r_1^3}\vec{r}_1 + k\frac{Q}{r_2^3}\vec{r}_2 = k\left[\frac{10^{-9}(3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})}{(\sqrt{11})^3} + \frac{Q(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})}{(\sqrt{3})^3}\right]$$

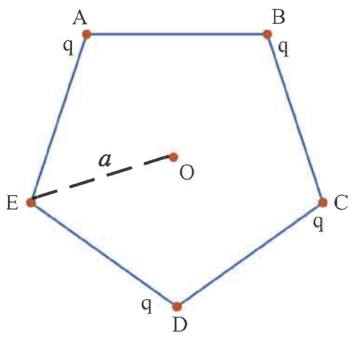
વિદ્યુતક્ષેત્રનો x ઘટક શૂન્ય હોવાથી,

$$\therefore E_x = k\left[\frac{10^{-9}\times 3}{(11)^{\frac{3}{2}}} + \frac{Q}{(3)^{\frac{3}{2}}}\right] = 0$$

$$\therefore Q = -\left(\frac{3}{11}\right)^{\frac{3}{2}} \times 3 \times 10^{-9} = -0.43 \times 10^{-9}\text{ C}$$

ઉદાહરણ 8 : q વિદ્યુતભાર ધરાવતા ચાર કણોને નિયમિત પંચકોણનાં ચાર શિરોબિંદુઓ પર મૂકેલા છે. પંચકોણના કેન્દ્રથી તેના દરેક શિરોબિંદુ વચ્ચેનું અંતર a છે. આ કેન્દ્ર પર વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે પંચકોણનાં ચાર શિરોબિંદુઓ A, B, C અને D પર q જેટલો વિદ્યુભાર છે. હવે જો શિરોબિંદુ E પર q જેટલો વિદ્યુતભાર મૂકવામાં આવે, તો આકૃતિની સંમિતિ પરથી કહી શકાય કે તેના કેન્દ્ર O પર વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય હશે.



આમ, $\vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C + \vec{E}_D + \vec{E}_E = 0$

$\therefore \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C + \vec{E}_D = -\vec{E}_E$

એટલે કે, A, B, C અને D પર મૂકેલા વિદ્યુતભારથી કેન્દ્ર પર ઉદ્‌ભવતું પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર એ E પર મૂકેલા વિદ્યુતભારથી ઉદ્‌ભવતા વિદ્યુતક્ષેત્ર જેટલું જ પરંતુ વિરુદ્ધ દિશામાં હશે.

હવે, E પર મૂકેલા વિદ્યુભાર qથી કેન્દ્ર પર ઉદ્‌ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર,

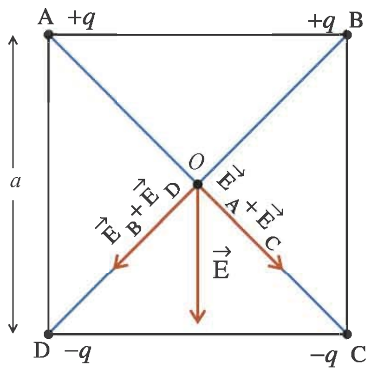
$\vec{E}_E = k\dfrac{q}{a^2}$ (EO દિશામાં)

આથી, A, B, C અને D પર મૂકેલા વિદ્યુતભારોથી કેન્દ્ર પર ઉદ્‌ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર,

$\vec{E} = k\dfrac{q}{a^2}$ (OE દિશામાં)

ઉદાહરણ 9 : ચાર વિદ્યુતભારો $+q$, $+q$, $-q$ અને $-q$ને અનુક્રમે એક ચોરસનાં શિરોબિંદુઓ A, B, C અને D પર મૂકેલ છે. ચોરસની બાજુની લંબાઈ a છે, તો ચોરસના કેન્દ્ર પર પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા ગણો.

ઉકેલ : દરેક વિદ્યુતભાર ચોરસના કેન્દ્ર Oથી સમાન અંતરે હોઈને, બિંદુ O પર બધાનાં વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતાનું મૂલ્ય સમાન હશે. આમ, જો શિરોબિંદુઓમાંથી કેન્દ્રનું અંતર r હોય, તો



$E_A = E_B = E_C = E_D = \dfrac{kq}{r^2}$

આ વિદ્યુતક્ષેત્રોની દિશાઓ આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે.

જો E_A અને E_Cનું પરિણામી ક્ષેત્ર E' હોય તો,

$$E' = E_A + E_C = 2\frac{kq}{r^2} \quad (1)$$

આ જ રીતે E_B અને E_Dનું પરિણામી ક્ષેત્ર E'' હોય, તો

$$E'' = E_B + E_D = 2\frac{kq}{r^2} \quad (2)$$

પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર, $\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}''$

$\therefore E = \sqrt{(E')^2 + (E'')^2}$ ($\because$ આકૃતિ પરથી $\vec{E}'$ અને $\vec{E}''$ વચ્ચેનો ખૂણો 90° છે.)

$= \sqrt{\left(2\dfrac{kq}{r^2}\right)^2 + \left(2\dfrac{kq}{r^2}\right)^2}$ (સમીકરણ (1) અને (2) પરથી)

$$= \sqrt{\left(\frac{8k^2q^2}{r^4}\right)} = \left(\frac{2\sqrt{2}kq}{r^2}\right) \quad (3)$$

આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે, $(2r)^2 = a^2 + a^2$

$\therefore\ 2r = \sqrt{2a^2} \quad \therefore\ r = \frac{a}{\sqrt{2}}$

rનું મૂલ્ય ઉપરના સમીકરણ (3)માં મૂકતાં,

$$E = \frac{2\sqrt{2}kq}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = 4\sqrt{2}\,\frac{kq}{a^2}$$

(Eની દિશા AD (અથવા BC)ને સમાંતર છે.)

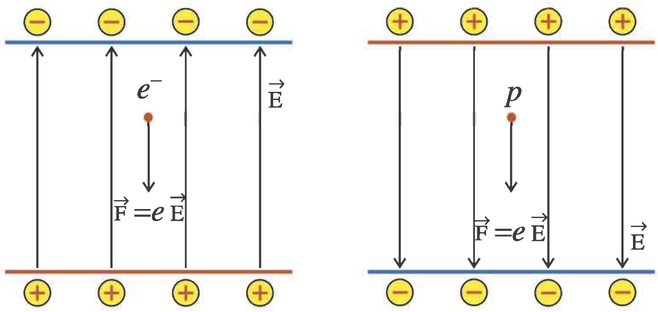
ઉદાહરણ 10 : એક ઇલેક્ટ્રૉન 2.0×10^4 N C^{-1} જેટલી તીવ્રતાવાળા સમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં 1.5 cm જેટલું ગુરુત્વમુક્ત અવકાશમાં પતન કરે છે આકૃતિ (a). ત્યાર બાદ આ વિદ્યુતક્ષેત્રનું મૂલ્ય તેટલું જ રાખી તેની દિશા ઊલટાવવામાં આવે છે અને તેમાં એક પ્રોટોન પણ આટલું જ પતન કરે છે આકૃતિ (b). તો આ માટે બંનેએ લીધેલ સમય ગણો.

$m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg, $m_p = 1.7 \times 10^{-27}$ kg અને $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C લો.

ઉકેલ : ધારો કે આકૃતિ (a)માં દર્શાવ્યા અનુસાર વિદ્યુતક્ષેત્ર ઊર્ધ્વ દિશામાં છે અને તેથી તેમાં ઇલેક્ટ્રૉન પર eE જેટલું બળ અધોદિશામાં લાગશે.

ઇલેક્ટ્રૉનનો પ્રવેગ,

$$a_e = \frac{eE}{m_e}$$



આકૃતિ (a) આકૃતિ (b)

ગતિના સમીકરણ $d = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ પરથી ($v_0 = 0$ હોઈને) h જેટલું અંતર કાપતાં ઇલેક્ટ્રૉનને લાગતો સમય

$$t_e = \sqrt{\frac{2h}{a_e}} = \sqrt{\frac{2hm_e}{eE}}$$

આપેલ કિંમતો અવેજ કરતાં $t_e = 2.9 \times 10^{-9}$s $= 2.9$ ns (નેનો-સેકન્ડ)

આકૃતિ (b)માં દર્શાવ્યા અનુસાર વિદ્યુતક્ષેત્ર અધોદિશામાં છે અને તેથી તેમાં પ્રોટોન પર eE જેટલું બળ અધોદિશામાં લાગશે.

પ્રોટોનનો પ્રવેગ $a_p = \frac{eE}{m_p}$.

h જેટલું અંતર કાપતાં પ્રોટોનનો લાગતો સમય $t_p = \sqrt{\frac{2hm_p}{eE}}$

આપેલ કિંમતો અવેજ કરતાં $t_p = 1.3 \times 10^{-7}$s $= 0.13\mu$s (માઇક્રોસેકન્ડ)

આમ, જોઈ શકાય છે કે સમાન તીવ્રતાવાળા વિદ્યુતક્ષેત્રમાં સમાન અંતર કાપવા માટે સમાન વિદ્યુભારવાળા કણો પૈકી વધુ દળવાળા કણ(પ્રોટોન)ને વધુ સમય લાગે છે.

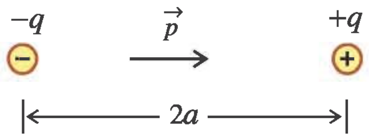
(આથી ઊલટું આપણે ધોરણ 11માં ભણી ગયાં કે ગુરુત્વીય ક્ષેત્રમાં મુક્ત પતન કરતા પદાર્થને લાગતો સમય પદાર્થના દળ પર આધારિત નથી.

1.7 વિદ્યુત-ડાઈપોલ (Electric Dipole)

એકબીજાથી પરિમિત (finite) અંતરે રહેલા બે વિજાતીય અને સમાન વિદ્યુતભારોના તંત્રને વિદ્યુત-ડાઈપોલ (દ્વિધ્રુવી) કહે છે.

આકૃતિ 1.8માં દર્શાવ્યા અનુસાર વિદ્યુત-ડાઈપોલના વિદ્યુતભારો $+q$ અને $-q$ છે અને તેમની વચ્ચેનું અંતર $2a$ છે. આ તંત્રની ડાઈપોલ-મોમેન્ટ ($\vec{p}$) નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

$$\vec{p} = q(2\vec{a}) \qquad (1.7.1)$$



આકૃતિ 1.8 વિદ્યુત-ડાઈપોલ

ડાઈપોલ-મોમેન્ટ $\vec{p}$નો એકમ (coulomb-meter) (Cm) છે. વિદ્યુત-ડાઈપોલ મોમેન્ટ એ સદિશ રાશિ છે અને તેની દિશા ઋણ વિદ્યુતભાર ($-q$)થી ધન વિદ્યુતભાર ($+q$) તરફની લેવામાં આવે છે.

વિદ્યુત-ડાઈપોલ પરનો કુલ વિદ્યુતભાર શૂન્ય ($-q + q = 0$) હોય છે. પરંતુ તેનું વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય હોતું નથી. કારણ કે બંને વિદ્યુતભારોનાં સ્થાન અલગ-અલગ છે.

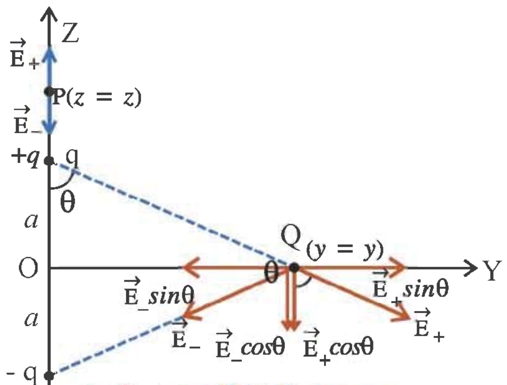
$\vec{p} = 2\vec{a}q$માં $\lim 2a \rightarrow 0$ અને $q \rightarrow \infty$ લક્ષમાં મળતી ડાઈપોલને બિંદુ ડાઈપોલ (Point Dipole) કહે છે.

વિદ્યુત-ડાઈપોલનું વિદ્યુતક્ષેત્ર (Electric Field of a Dipole)

વિદ્યુત-ડાઈપોલનું વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધવા માટે આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ કાર્તેઝિયન યામપદ્ધતિને એવી રીતે ગોઠવો કે જેથી તેની Z-અક્ષ ડાઈપોલ પર સંપાત થાય અને ડાઈપોલના મધ્યબિંદુ પર ઊગમબિંદુ સંપાત થાય. ડાઈપોલ તંત્રના વિદ્યુતભારો $+q$ અને $-q$ વચ્ચેનું અંતર $2a$ છે.

અહીં આપણે ડાઈપોલની અક્ષ પરના કોઈ બિંદુ પાસે અને ડાઈપોલની વિષુવરેખા પરના કોઈ બિંદુ પાસે વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા મેળવીશું.

ડાઈપોલની અક્ષ પર વિદ્યુતક્ષેત્ર



આકૃતિ 1.9 ડાઈપોલની અક્ષ પર વિદ્યુતક્ષેત્ર

આકૃતિ 1.9માં દર્શાવ્યા અનુસાર ડાઈપોલની અક્ષ પરના બિંદુ P પાસે વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધવું છે. બિંદુ P એ ઊગમબિંદુથી z જેટલા અંતરે આવેલું છે. આથી આ બિંદુનું $+q$થી અંતર $z - a$ અને $-q$થી અંતર $z + a$ થશે.

$+q$ વિદ્યુતભાર વડે બિંદુ P આગળ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા

$$\vec{E}_+ = k\frac{q}{(z-a)^2}\,\hat{p} \qquad (1.7.2)$$

જ્યાં, $\hat{p}$ એ ડાઈપોલની અક્ષ પર $-q$ થી $+q$ની દિશાનો એકમ-સદિશ છે.

હવે, $-q$ વિદ્યુતભાર વડે બિંદુ P આગળ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા, $\vec{E}_- = -k\frac{q}{(z+a)^2}\,\hat{p}$ (1.7.3)

સંપાતપણાના સિદ્ધાંત અનુસાર બિંદુ P આગળ પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર,

$$\vec{E}(z) = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = kq\left[\frac{1}{(z-a)^2} - \frac{1}{(z+a)^2}\right]\hat{p} = kq\frac{4za}{(z^2-a^2)^2}\,\hat{p}$$

$$\therefore\ \vec{E}(z) = \frac{2kpz}{(z^2-a^2)^2}\hat{p}\quad (\because\ 2aq = p) \tag{1.7.4}$$

If $z >> a$, હોય તો z^2ની સરખામણીમાં a^2 અવગણતાં,

$$\vec{E}(z) = \frac{2kp}{z^3}\hat{p}\qquad (z >> a) \tag{1.7.5}$$

આ પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર એ Oથી P તરફની દિશામાં છે.

ડાઈપોલની વિષુવરેખા પર વિદ્યુતક્ષેત્ર

ડાઈપોલના વિદ્યુતભારોને જોડતી રેખાના લંબદ્વિભાજકને ડાઈપોલની વિષુવરેખા કહે છે. આ વિષુવરેખા પરના બિંદુ Q પાસે વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધવું છે. બિંદુ Q એ ડાઈપોલના કેન્દ્રથી y જેટલા અંતરે છે. તેમજ બિંદુ Q એ $+q$ અને $-q$ બંને વિદ્યુતભારોથી સમાન અંતરે આવેલ હોવાથી તેમના દ્વારા Q આગળ ઉદ્‌ભવતા વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતાનું મૂલ્ય સમાન હશે.

$+q$ વિદ્યુતભારથી ઉદ્‌ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્રનું મૂલ્ય,

$$E_+ = k\frac{q}{(y^2+a^2)} \tag{1.7.6}$$

$-q$ વિદ્યુતભારથી ઉદ્‌ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્રનું મૂલ્ય,

$$E_- = k\frac{q}{(y^2+a^2)} \tag{1.7.7}$$

Q આગળ $\vec{E}_+$ અને $\vec{E}_-$ની દિશા આકૃતિ 1.9માં દર્શાવી છે.

$\vec{E}_+$ અને $\vec{E}_-$ના ડાઈપોલની અક્ષને લંબદિશામાં ઘટકો લેતાં અનુક્રમે $E_+ sin\theta$ અને $E_- sin\theta$ મળશે, જે સમાન મૂલ્યના અને પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશાના હોવાથી તેઓ એકબીજાની અસર નાબૂદ કરશે.

હવે, $\vec{E}_+$ અને $\vec{E}_-$ના ડાઈપોલની અક્ષને સમાંતર એવા ઘટકો અનુક્રમે $E_+ cos\theta$ અને $E_- cos\theta$ છે, જેઓ સમાન દિશામાં હોવાથી તેઓનો સરવાળો થશે.

બિંદુ Q આગળનું પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{p}$ની વિરુદ્ધ દિશામાં હોવાથી,

$$\vec{E}(y) = -(E_+ + E_-)cos\theta\,\hat{p}$$

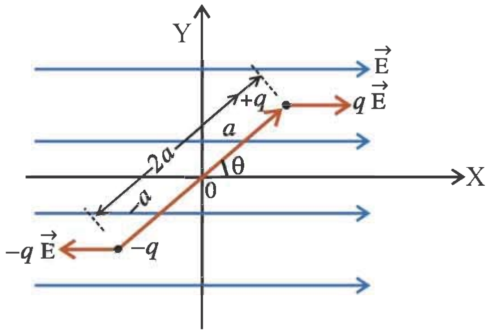
$$= -\left(\frac{kq}{(y^2+a^2)}+\frac{kq}{(y^2+a^2)}\right)\left(\frac{a}{(y^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\hat{p} = -k\frac{(2aq)}{(y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{p}$$

$$\therefore\ \vec{E}(y) = -\frac{kp}{(y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{p} \tag{1.7.8}$$

જો $y >> a$ હોય, તો

$$\vec{E}(y) = -\frac{kp}{y^3}\hat{p}\qquad (y >> a) \tag{1.7.9}$$

સમીકરણ (1.7.5) અને (1.7.9) પરથી સ્પષ્ટ છે કે ડાઈપોલથી દૂરનાં અંતરોએ તેનું વિદ્યુતક્ષેત્ર $\frac{1}{r^2}$ અનુસાર ઘટવાને બદલે $\frac{1}{r^3}$ અનુસાર ઘટે છે.



આકૃતિ 1.10 સમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં વિદ્યુત-ડાઈપોલ

સમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં વિદ્યુત-ડાઈપોલની વર્તણૂક (Behaviour of an Electric Dipole in a Uniform Electricfield)

આકૃતિ 1.10માં દર્શાવ્યા અનુસાર સમાન તીવ્રતાવાળા વિદ્યુતક્ષેત્રમાં એક વિદ્યુત-ડાઈપોલ $|\vec{p}| = q|2\vec{a}|$ મૂકેલ છે. કાર્તેઝિયન યામપદ્ધતિનું ઊગમબિંદુ ડાઈપોલના કેન્દ્ર O પર સંપાત થાય છે અને વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ એ ધન X-દિશામાં છે. ધારો કે, કોઈ એક ક્ષણે $\vec{p}$ અને $\vec{E}$ વચ્ચેનો કોણ θ છે.

ડાઈપોલના $+q$ અને $-q$ વિદ્યુતભારો પર અનુક્રમે $q\vec{E}$ અને $-q\vec{E}$ બળો લાગે છે. આ બળો સમાન મૂલ્યના અને પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં હોવાથી તેમનું પરિણામી બળ શૂન્ય થાય છે. આથી, ડાઈપોલ રેખીય સંતુલનમાં રહે છે.

પરંતુ, આ બળોની કાર્યરેખાઓ જુદી-જુદી હોવાથી ડાઈપોલ પર ટૉર્ક લાગશે. $+q$ વિદ્યુતભાર પર લાગતા બળ $q\vec{E}$ને કારણે O બિંદુને અનુલક્ષીને લાગતું ટૉર્ક,

$$\vec{\tau}_1 = (\vec{a} \times q\vec{E}) \qquad (1.7.10)$$

આ જ રીતે, $-q$ વિદ્યુતભાર પર લાગતા બળ $-q\vec{E}$ને કારણે O બિંદુને અનુલક્ષીને લાગતું ટૉર્ક,

$$\vec{\tau}_2 = (-\vec{a}) \times (-q\vec{E}) = (\vec{a} \times q\vec{E}) \qquad (1.7.11)$$

અહીં, $\vec{a}$ અને $-\vec{a}$ એ અનુક્રમે $+q$ અને $-q$ના સ્થાનસદિશો છે.

સમીકરણ (1.7.10) અને (1.7.11) પરથી ડાઈપોલ પર લાગતું પરિણામી ટૉર્ક,

$$\vec{\tau} = (\vec{a} \times q\vec{E}) + (\vec{a} \times q\vec{E}) = 2\vec{a} \times q\vec{E} = 2\vec{a}q \times \vec{E}$$

$$\therefore \vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \qquad (1.7.12)$$

ટૉર્કનું મૂલ્ય, $|\vec{\tau}| = pE\sin\theta$ (1.7.13)

ડાઈપોલ પર લાગતું $\vec{\tau}$ એ સમતલને (પુસ્તકના પાનને) લંબ અને સમતલમાં અંદર તરફ જતી દિશામાં છે.

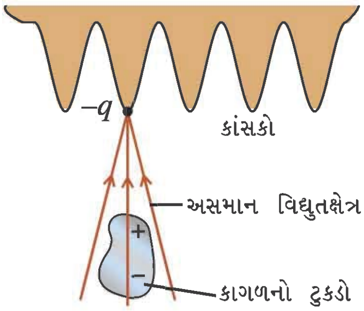
આ ટૉર્કને લીધે ડાઈપોલ એ રીતે ભ્રમણ કરશે, જેથી ખૂણો θ ઘટે. (આપેલ કિસ્સામાં તે સમઘડી દિશામાં ભ્રમણ કરશે.) જ્યારે (θ = 0) એટલે કે ડાઈપોલ વિદ્યુતક્ષેત્રની દિશામાં ગોઠવાય ત્યારે ટૉર્ક શૂન્ય થાય છે. વિદ્યુતક્ષેત્રમાં ડાઈપોલની આ સંતુલિત સ્થિતિ છે. આ સ્થિતિમાંથી જો તેને ક્ષેત્ર સાથે θ કોણે ગોઠવવી હોય તો ટૉર્ક વિરુદ્ધ કાર્ય કરવું પડે છે. આ કાર્ય ડાઈપોલની સ્થિતિ-ઊર્જાના ફેરફાર જેટલું હોય છે.

અસમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં ડાઈપોલની વર્તણૂક

જો વિદ્યુતક્ષેત્ર અસમાન હોય એટલે કે જુદાં-જુદાં બિંદુઓ પાસે વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા જુદી-જુદી હોય, તો વિદ્યુત-ડાઈપોલના ધન અને ઋણ વિદ્યુતભારો પર લાગતાં બળો અસમાન હોય છે. આ સંજોગોમાં ડાઈપોલ પર પરિણામી બળ અને ટૉર્ક બંને લાગે છે. આથી ડાઈપોલના પરિભ્રમણની સાથે તેનું રેખીય સ્થાનાંતર પણ થાય છે. ડાઈપોલ ભ્રમણ કરતા-કરતા જ્યારે વિદ્યુતક્ષેત્રને સમાંતર ગોઠવાઈ જશે પછી તેનું ભ્રમણ બંધ થશે. પરંતુ તે તેની રેખીય ગતિ ચાલુ રાખશે.

આપણો સામાન્ય અનુભવ છે કે સૂકા વાળમાં ફેરવેલ કાંસકા વડે કાગળના નાના ટુકડાઓ આકર્ષાય છે. કાંસકાને વાળમાં ફેરવતાં ઘર્ષણના લીધે કાંસકો ઋણ વિદ્યુતભારિત થાય છે. પરંતુ કાગળ તો વિદ્યુતભારરહિત છે, છતાં તે કાંસકા તરફ કેમ આકર્ષાય છે ?

કાંસકા પર રહેલા વિદ્યુતભારને લીધે અસમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર ઉત્પન્ન થાય છે. આવો વિદ્યુતભારિત કાંસકો કાગળના ટુકડાઓ નજીક લાવતાં ટુકડાઓમાં કાંસકાના અસમાન વિદ્યુતક્ષેત્રની દિશામાં પ્રેરિત વિદ્યુત ડાઈપોલ ઉદ્‌ભવે છે. આથી ટુકડાઓ પર પરિણામી બળ લાગે છે. આથી તેઓ કાંસકા તરફ ગતિ કરે છે.



આકૃતિ 1.11 કાંસકાનું વિદ્યુતક્ષેત્ર

ઉદાહરણ 11 : 4×10^{-9} Cm જેટલી ડાઈપોલ-મોમેન્ટ ધરાવતા એક વિદ્યુત-ડાઈપોલ 5×10^4 NC^{-1}ના સમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં ક્ષેત્ર સાથે 30^oના કોણ બનાવતી દિશામાં ગોઠવાય ત્યારે તેના પર લાગતા ટૉર્કનું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : $p = 4 \times 10^{-9}$ Cm, $E = 5 \times 10^4$ NC^{-1}, $\theta = 30^o$, $\tau = ?$

$\tau = pE\sin\theta = (4 \times 10^{-9})(5 \times 10^4)\sin 30^o = 10^{-4}$ Nm.

1.8 વિદ્યુતભારોનું સતત વિતરણ (Continuous Distribution of Charges)

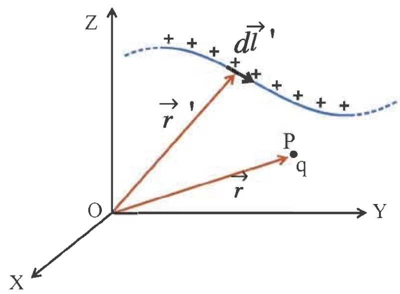
અવકાશમાં રહેલા અસતત (છૂટા-છૂટા) બિંદુવત્ વિદ્યુતભારો માટે તેમના દ્વારા બીજા બિંદુવત્ વિદ્યુતભાર પર લાગતું બળ કુલંબના નિયમ અને સંપાતપણાના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી મેળવી શકાય છે. પરંતુ વ્યવહારમાં આપણને સતત વિદ્યુતભારોની ગોઠવણી જોવા મળે છે. દા.ત., પૃષ્ઠ પર સતત વિતરિત થયેલા વિદ્યુતભારો. આ સ્થિતિમાં તેમની અસર સંપાતપણાના સિદ્ધાંતથી શોધવી મુશ્કેલ પડે છે. આથી સતત રીતે વહેંચાયેલા વિદ્યુતભારના તંત્રને વર્ણવવા માટે વિદ્યુતભાર ઘનતાનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. આ ઘનતાનું મૂલ્ય સમગ્ર તંત્રમાં અચળ ન પણ હોય.

વિદ્યુતભારોનું સતત વિતરણ ત્રણ પ્રકારનું હોઈ શકે છે :

(1) રેખીય વિતરણ (2) પૃષ્ઠ-વિતરણ અને (3) કદ-વિતરણ

(1) રેખીય વિતરણ (Line Distribution) : આકૃતિ 1.12માં દર્શાવ્યા મુજબ કોઈ રેખા પર સતત રીતે પથરાયેલ વિદ્યુતભાર વિતરણ ધ્યાનમાં લો. આ વિદ્યુતભાર વડે P સ્થાને આવેલ q વિદ્યુતભાર પર લાગતું બળ શોધવું છે.

ધારો કે આ રેખા પર એકમલંબાઈ દીઠ વિદ્યુતભાર λ છે. તેને વિદ્યુતભારની રેખીય ઘનતા કહે છે.



આકૃતિ 1.12 વિદ્યુતભારનું રેખીય વિતરણ

$\lambda = \dfrac{\text{રેખા પરનો કુલ વિદ્યુતભાર}}{\text{રેખાની લંબાઈ}} = \dfrac{Q}{l}$, λનો એકમ Cm^{-1} છે.

જો વિતરણ નિયમિત ન હોય તો, રેખા પરનાં જુદાં-જુદાં બિંદુઓ પાસે λનું મૂલ્ય જુદું-જુદું હોય, તેવા સંજોગોમાં રેખા પરના $\vec{r}\,'$ સ્થાનસદિશ ધરાવતા બિંદુ પાસે રેખીય વિદ્યુતભારઘનતા $\lambda(\vec{r}\,')$ વડે દર્શાવી શકાય.

આ રેખાને dl' જેટલી સૂક્ષ્મ લંબાઈ ધરાવતા અનેક રેખાખંડોમાં વિભાગેલો કલ્પો. આકૃતિ 1.12માં દર્શાવ્યા મુજબ ઊગમબિંદુ Oને અનુલક્ષીને આ રેખાખંડ $\vec{dl}\,'$નો સ્થાનસદિશ $\vec{r}\,'$ છે. આથી, $\vec{dl}\,'$ રેખાખંડ પરનો વિદ્યુતભાર

$$dq = \lambda(\vec{r}\,')\,|\vec{dl}\,'| \qquad (1.8.1)$$

આ વિદ્યુતભારને લીધે q વિદ્યુતભાર પર લાગતું બળ,

$$d\vec{F} = k\frac{(q)(dq)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}(\vec{r}-\vec{r}\,') \qquad (1.8.2)$$

$d\vec{l}\,'$ જેવા અનેક સૂક્ષ્મ ખંડોને કારણે q પર ઉદ્‌ભવતું કુલ બળ શોધવા માટે જુદા-જુદા રેખાખંડોને અનુરૂપ મળતાં $d\vec{F}$ જેવાં પદોનો સમગ્ર રેખા પર સરવાળો કરવો જોઈએ. અહીં રેખાખંડો સતત હોવાથી આવો સરવાળો નીચે મુજબ રેખીય સંકલનમાં પરિણમે છે.

આથી કુલ બળ,

$$\vec{F} = \int_l d\vec{F} = \int_l \frac{k(q)(dq)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

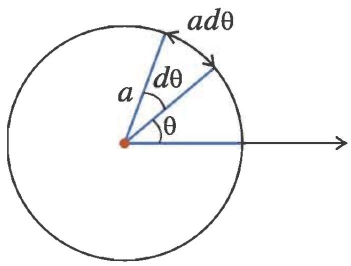
$$\therefore \vec{F} = kq\int_l \frac{\lambda(\vec{r}\,')|\vec{dl}\,'|}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}(\vec{r}-\vec{r}\,') \qquad \text{(સમીકરણ 1.8.2 પરથી)} \qquad (1.8.3)$$

જો P સ્થાને મૂકેલ વિદ્યુતભાર અતિ સૂક્ષ્મ ($q \rightarrow 0$) હોય, તો વિદ્યુતભારના રેખીય વિતરણને લીધે P આગળ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = k\int_l \frac{\lambda(\vec{r}\,')|\vec{dl}\,'|}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}(\vec{r}-\vec{r}\,') \qquad (1.8.4)$$

ઉદાહરણ 12 : a ત્રિજ્યાના વર્તુળના પરિઘ પર વિદ્યુતભારની રેખીય ઘનતા $\lambda = \lambda_0 cos^2\theta$ છે, તો તેના (પરિઘ) પર રહેલ કુલ વિદ્યુતભાર શોધો. [**Hint :** $\int_0^{2\pi} cos^2\theta\, d\theta = \pi$]

ઉકેલ : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ વર્તુળ પરના સૂક્ષ્મ રેખાખંડની લંબાઈ $ad\theta$ હોઈને તેટલા ખંડ પર રહેલા વિદ્યુતભાર $dq = \lambda a d\theta = \lambda_0 cos^2\theta\, ad\theta$ હશે. આ રીતે પરિઘ પરના બધા રેખાખંડ પર રહેલા વિદ્યુતભારોનું સમગ્ર પરિઘ પર સંકલન કરીને તેના પર રહેલ કુલ વિદ્યુતભાર Q મેળવી શકાય છે.



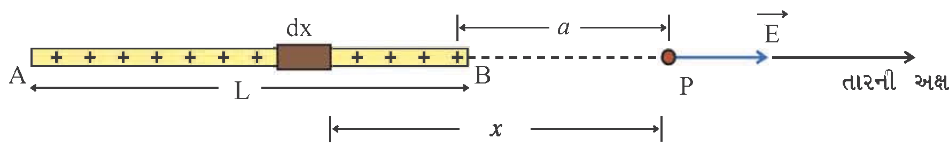
$$\therefore Q = \oint dq$$

અહીં સંકેત $\oint$ એ સમગ્ર બંધમાર્ગ (અત્રે પરિઘ) પરનું સંકલન સૂચવે છે.

$$\therefore Q = \int_0^{2\pi} \lambda_0 cos^2\theta\, ad\theta = a\lambda_0 \int_0^{2\pi} cos^2\theta d\theta = \pi a\lambda_0$$

ઉદાહરણ 13 : એક સુરેખ વાહક તારની લંબાઈ L છે. તેના પર q જેટલો વિદ્યુતભાર સમાન રીતે વિતરિત થયેલો છે. તારની અક્ષ પર તારના કોઈ એક છેડાથી a જેટલા અંતરે આવેલા બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધો. (તારની જાડાઈ અવગણો.)

ઉકેલ : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ બિંદુ P થી x અંતરે આવેલ તાર AB પરનો સૂક્ષ્મખંડ dx વિચારો. P એ તારની અક્ષ પરનું બિંદુ છે, જ્યાં વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધવું છે.



આ dx ખંડમાં સમાયેલ વિદ્યુતભાર,

$$dq = \frac{q}{L}dx$$

આ વિદ્યુતભારથી બિંદુ P આગળ વિદ્યુતક્ષેત્ર,

$$dE = k\frac{dq}{x^2} = k\frac{q}{L}\frac{dx}{x^2}$$

આથી, સમગ્ર તારથી ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર,

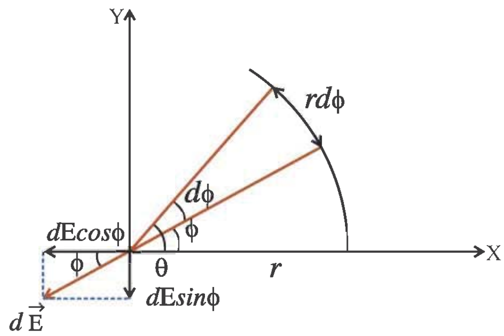
$$E = \int_a^{L+a} dE = \frac{kq}{L}\int_a^{L+a}\frac{dx}{x^2} = \frac{kq}{L}\left[-\frac{1}{x}\right]_a^{L+a} = \frac{kq}{L}\left[-\frac{1}{L+a}+\frac{1}{a}\right] = k\frac{q}{a(L+a)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a(L+a)}$$

નોંધ : જો L << a હશે, તો $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2}$, જે બિંદુવત્ વિદ્યુતભારથી ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર છે. જો સળિયા પરનો વિદ્યુતભાર q ધન હશે, તો વિદ્યુતક્ષેત્ર AP દિશામાં હશે.

ઉદાહરણ 14 : યામપદ્ધતિના ઊગમબિંદુ પાસે, X-અક્ષની સાથે θ કોણ બનાવતી r ત્રિજ્યાના વર્તુળાકાર ચાપ પર λ જેટલી નિયમિત રેખીય વિદ્યુતભારઘનતા ધરાવતો વિદ્યુતભાર રહેલો છે, તો ઊગમબિંદુ પર આ વિદ્યુતભારના કારણે ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધો.

ઉકેલ : $d\phi$ ખૂણા વડે આંતરાતા ચાપ પરનો વિદ્યુતભાર, $dq = \lambda r d\phi$. આ વિદ્યુતભારના કારણે ઊગમબિંદુ પર ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર,

$$dE = \frac{k\lambda r d\phi}{r^2}$$



આ ક્ષેત્રનો સદિશ $d\vec{E}$ આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે.

$d\vec{E}$ના બે ઘટકો લેતાં,

$$d\vec{E}_x = -\frac{k\cdot\lambda r d\phi}{r^2}\cos\phi\ \hat{i} \text{ અને}$$

$$d\vec{E}_y = -\frac{k\cdot\lambda r d\phi}{r^2}\sin\phi\ \hat{j}$$

હવે, $\vec{E}_x = \int_0^\theta dE_x = -\frac{k\lambda}{r}\int_0^\theta \cos\phi\, d\phi\,\hat{i} = -\frac{k\lambda}{r}\left[\sin\phi\right]_0^\theta\hat{i}$

$$\therefore\ \vec{E}_x = -\frac{k\lambda}{r}\sin\theta\,\hat{i} \qquad (1)$$

હવે, $\vec{E}_y = -\frac{k\lambda}{r}\int_0^\theta \sin\phi\, d\phi\,\hat{j} = -\frac{k\lambda}{r}\left[-\cos\phi\right]_0^\theta\hat{j}$

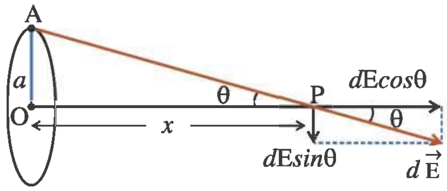
$$\therefore\ \vec{E}_y = \frac{k\lambda}{r}\left[\cos\theta - 1\right]\hat{j} \qquad (2)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y = -\frac{k\lambda}{r}\sin\theta\,\hat{i} + \frac{k\lambda}{r}(\cos\theta - 1)\,\hat{j}$$ (સમીકરણ (1) અને (2) પરથી)

$$\therefore\ \vec{E} = \frac{k\lambda}{r}\left[(-\sin\theta)\hat{i} + (\cos\theta - 1)\hat{j}\right]$$

ઉદાહરણ 15 : a જેટલી ત્રિજ્યાની એક વીંટીના પરિઘ Q જેટલો વિદ્યુતભાર સમાન રીતે વિતરિત થયેલો છે. આ વીંટીની અક્ષ પર, તેના કેન્દ્રથી x અંતરે આવેલા બિંદુ પાસે ઉદ્ભવતા વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા ગણો.

ઉકેલ : આકૃતિમાં આ પરિસ્થિતિ દર્શાવી છે. આ વીંટી પર બિંદુ A પાસે પરિઘ પર એક સૂક્ષ્મ રેખાખંડ કલ્પો. આ ખંડમાંના વિદ્યુતભાર dqને લીધે વીંટીની અક્ષ પર, તેના કેન્દ્ર x જેટલા અંતરે, આવેલ બિંદુ P પર વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા $d\vec{E}$ નું મૂલ્ય-



$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{AP^2} = k\frac{dq}{(a^2+x^2)} \qquad (1)$$

તેની દિશા Aથી P તરફ છે.

હવે આ તીવ્રતા $d\vec{E}$ના બે ઘટકો : (i) વીંટીની અક્ષને લંબ $dE\sin\theta$, અને (ii) આ અક્ષને સમાંતર $dE\cos\theta$ વિચારો.

અહીં સ્પષ્ટ છે કે જ્યારે સમગ્ર વીંટી પરના બધા જ ખંડો વડે મળતી તીવ્રતાઓના સદિશોનો સરવાળો કરવામાં આવશે, ત્યારે સામસામેના (વ્યાસાંત) ખંડો વડે મળતી તીવ્રતાઓના $dE\sin\theta$ જેવા ઘટકો પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં હોઈ એકબીજાની અસરો નાબૂદ કરશે.

આથી સરવાળો (કે સંકલન) કરવા માટે માત્ર $dE\cos\theta$ ઘટકો જ ધ્યાનમાં લેવા પડશે.

$\therefore$ બિંદુ P પાસે કુલ વિદ્યુતક્ષેત્ર,

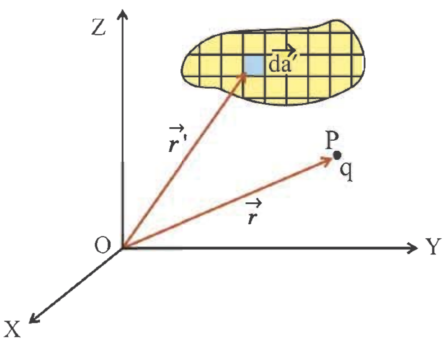
$$E = \int dE\cos\theta = \int k\frac{dq}{(a^2+x^2)}\frac{OP}{AP} \qquad \left(\because \cos\theta = \frac{OP}{AP}\right)$$

$$E = k\int\frac{dq}{(a^2+x^2)}\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{(સમીકરણ (1) પરથી)}$$

$$\therefore E = k\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\int_{\text{પરિઘ}} dq = \frac{kxQ}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{xQ}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(2) પૃષ્ઠ-વિતરણ (Surface Distribution) : આકૃતિ 1.13માં દર્શાવ્યા મુજબ કોઈ પૃષ્ઠ પર વિદ્યુતભાર સતત રીતે પથરાયેલો છે. આ વિદ્યુતભારને લીધે $\vec{r}$ સ્થાનસદિશ ધરાવતા બિંદુ P પર મૂકેલા q વિદ્યુતભાર પર લાગતું બળ શોધવું છે. અહીં, પૃષ્ઠ પર સતત વિતરિત થયેલા વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠઘનતા $\sigma(\vec{r}\,')$ છે.

વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠઘનતા એટલે એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ વિદ્યુતભાર



આકૃતિ 1.13 વિદ્યુતભારનું પૃષ્ઠ-વિતરણ

$$\sigma = \frac{\text{પૃષ્ઠ પરનો કુલ વિદ્યુતભાર}}{\text{પૃષ્ઠનું ક્ષેત્રફળ}} = \frac{Q}{A}, \ \sigma \text{ એકમ } Cm^{-2} \text{ છે.}$$

હવે, સમગ્ર પૃષ્ઠને $\vec{da}\,'$ જેવા અનેક સૂક્ષ્મ ખંડોમાં વિભાગેલો કલ્પો. આ સૂક્ષ્મ ખંડમાં સમાયેલ વિદ્યુતભાર,

$$dq = \sigma(\vec{r}\,')\,|\vec{da}\,'| \qquad (1.8.5)$$

આ વિદ્યુતભારને લીધે q વિદ્યુતભાર પર લાગતું બળ,

$$d\vec{F} = k\frac{(q)(dq)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}(\vec{r}-\vec{r}\,') \qquad (1.8.6)$$

સમગ્ર સપાટી પરના વિદ્યુતભારને લીધે q વિદ્યુતભાર પર લાગતું કુલ બળ એ ઉપર્યુક્ત સમીકરણનું પૃષ્ઠ-સંકલન લઈ શોધી શકાય. સમીકરણ (1.8.5) અને (1.8.6) પરથી,

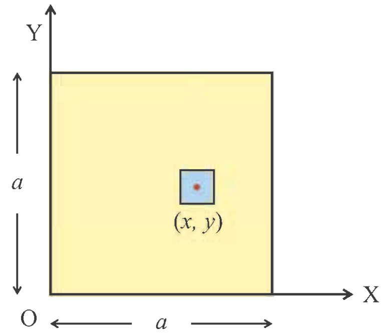
$$\vec{F} = \int_s d\vec{F} = kq\int_s \frac{\sigma(\vec{r}')|d\vec{a}'|}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}') \tag{1.8.7}$$

જો બિંદુ P આગળ આવેલ વિદ્યુતભાર અતિ સૂક્ષ્મ હોય, તો તે બિંદુ આગળ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા,

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = k\int_s \frac{\sigma(\vec{r}')|d\vec{a}'|}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}') \tag{1.8.8}$$

ઉદાહરણ 16 : આકૃતિમાં દર્શાવેલ a લંબાઈના ચોરસ પર વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠઘનતા $\sigma = \sigma_0 xy$ છે, તો આ ચોરસ પર કુલ વિદ્યુતભાર શોધો. યામાક્ષ પદ્ધતિ આકૃતિમાં દર્શાવી છે.

ઉકેલ : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે બિંદુ (x, y) પાસે પૃષ્ઠખંડ $dxdy$ ધ્યાનમાં લો.



આ પૃષ્ઠખંડ પર વિદ્યુતભાર, $dq = \sigma_0 xy\ dx\ dy$

$\therefore$ સમગ્ર પૃષ્ઠ પર કુલ વિદ્યુતભાર,

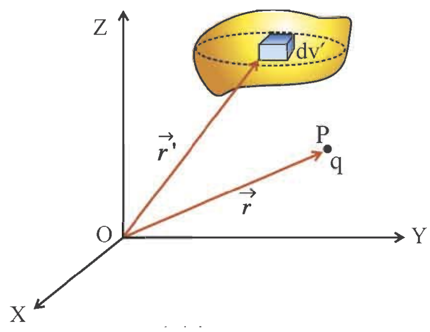
$$Q = \sigma_0 \int_0^a x\,dx \cdot \int_0^a y\,dy = \sigma_0\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^a = \sigma_0\left(\frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{a^2}{2}\right)$$

$$\therefore Q = \frac{\sigma_0 a^4}{4}$$

(3) કદ-વિતરણ (Volume Distribution) : આકૃતિ 1.14માં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે વિદ્યુતભાર કોઈ કદ (ઘનફળ)માં સતત રીતે વિતરિત થયેલો છે. આ વિદ્યુતભારની કદઘનતા $\rho(\vec{r}')$ છે.

એકમકદ દીઠ વિદ્યુતભારને વિદ્યુતભારની કદઘનતા કહે છે.

$$\rho = \frac{\text{કુલ વિદ્યુતભાર}}{\text{કુલ કદ}} = \frac{Q}{V},$$ ρનો એકમ Cm^{-3} છે.



આકૃતિ 1.14 વિદ્યુતભારનું કદ-વિતરણ

આપેલ કદને dV' જેવા સૂક્ષ્મ ખંડોમાં વિભાગેલો કલ્પો. આ કદ ખંડમાં રહેલો વિદ્યુતભાર,

$$dq = \rho(\vec{r}')dV'$$

આ વિદ્યુતભારથી, $\vec{r}$ સ્થાનસદિશ ધરાવતા બિંદુ P પરના q વિદ્યુતભાર પર લાગતું બળ,

$$d\vec{F} = \frac{k(q)(dq)}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r} - \vec{r}')$$

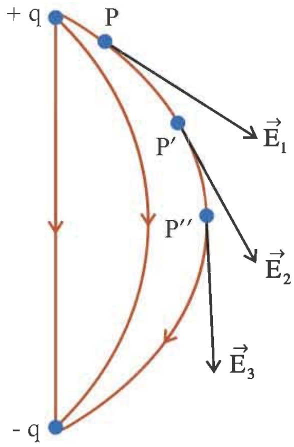
ઉપર સમજાવ્યા મુજબ સમગ્ર કદમાં સમાયેલ વિદ્યુતભારથી q પર લાગતું કુલ બળ એ કદ-સંકલન (volume integration) લઈ મેળવી શકાય.

$$\vec{F} = \int_V d\vec{F} = kq\int_V \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

આગળ સમજાવ્યા મુજબ વિદ્યુતભાર q અતિ સૂક્ષ્મ હોય, તો બિંદુ P આગળ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા,

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = k\int_V \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r} - \vec{r}')$$

1.9 વિદ્યુતક્ષેત્રરેખાઓ (Electricfield Lines)



આકૃતિ 1.15 ડાઈપોલની વિદ્યુતક્ષેત્રરેખા દોરવી

વિદ્યુતભારથી ઉદ્‌ભવતા વિદ્યુતક્ષેત્રનું ચિત્રાત્મક સ્વરૂપ એટલે વિદ્યુતક્ષેત્ર-રેખાઓ. માઈકલ ફેરેડે નામના વિજ્ઞાનીએ વિદ્યુતક્ષેત્રરેખાઓની કલ્પના કરીને વિદ્યુતને લગતાં અગત્યનાં પરિણામો મેળવ્યા હતાં. (ફેરેડેએ વિદ્યુતરેખાઓને બળરેખાઓ એવું નામ આપેલું હતું.)

વિદ્યુતક્ષેત્રરેખા એ વિદ્યુતક્ષેત્રમાં એવી રીતે દોરેલ વક્ર છે કે તેના કોઈ બિંદુએ દોરેલ સ્પર્શક તે બિંદુ પાસે પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્રની દિશામાં હોય.

હકીકતમાં, મુક્ત રીતે ગતિ કરી શકે તેવા એકમ ધન વિદ્યુતભારને ક્ષેત્રમાં મૂકતાં તે જે પથ પર ગતિ કરે છે, તે પથ વિદ્યુતક્ષેત્રરેખા દર્શાવે છે.

કોઈ વિદ્યુતક્ષેત્રની ક્ષેત્રરેખાઓ કેવી રીતે દોરવી તે સમજવા વિદ્યુતડાઈપોલના ક્ષેત્રનું ઉદાહરણ લઈશું.

વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતાના સમીકરણનો ઉપયોગ કરીને કોઈ પણ બિંદુ આગળ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા શોધી શકાય. આકૃતિ 1.15માં દર્શાવ્યા મુજબ P બિંદુએ જે તીવ્રતા હોય તેટલી તીવ્રતાનો ($\vec{E}_1$ જેટલો) સદિશ (મૂલ્ય અને દિશા સહિત) દોરો.

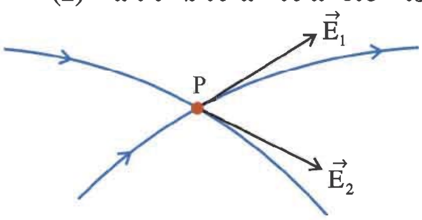
હવે Pની તદ્દન નજીક બીજું બિંદુ P' લો. P' આગળ તીવ્રતા શોધો. તેને $\vec{E}_2$ સદિશ વડે દર્શાવો. આ જ પ્રમાણે P'ની તદ્દન નજીક P'' બિંદુ આગળ સદિશ $\vec{E}_3$ દોરો. આ રીતે બીજા સદિશો દોરી શકાય.

P, P', P'' બિંદુઓ અત્યંત નજીક હોવાથી સદિશોના પુચ્છમાંથી એક સતત વક્ર દોરો. આ વક્રને **ક્ષેત્રરેખા** કહે છે. આમ, અત્યંત નજીક એવાં બિંદુઓ (P, P', P'' જેવાં) પાસે દોરેલા ક્ષેત્રસદિશો, જેનાં જે-તે બિંદુઓ પાસે સ્પર્શક બને તેવા વક્રને ક્ષેત્રરેખા કહે છે.

વિદ્યુતક્ષેત્રની લાક્ષણિકતાઓ

(1) વિદ્યુતક્ષેત્રરેખાઓ ધન વિદ્યુતભારમાંથી ઉદ્‌ભવે છે અને નજીકના ઋણ વિદ્યુતભાર પર અંત પામે છે.

(2) આપેલ ક્ષેત્રરેખા પરના કોઈ પણ બિંદુ પાસે, ક્ષેત્રરેખાને દોરેલ સ્પર્શક, તે બિંદુ પાસે ક્ષેત્રની દિશા દર્શાવે છે.

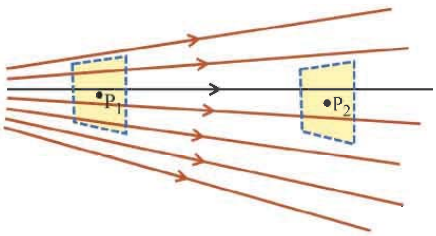


આકૃતિ 1.16

(3) બે ક્ષેત્રરેખાઓ એકબીજાને છેદતી નથી. જો કોઈ બિંદુ પાસે બે ક્ષેત્રરેખાઓ એકબીજાને છેદે, તો છેદનબિંદુ પાસે બંને રેખાઓને દોરેલ સ્પર્શક તે જ બિંદુ પાસે વિદ્યુતક્ષેત્રને બે દિશા હોવાનું સૂચન કરે છે, જે શક્ય નથી. (જુઓ આકૃતિ 1.16)

(4) સ્થિર વિદ્યુતભાર તંત્રની વિદ્યુતક્ષેત્રરેખાઓ ક્યારેય બંધ ગાળા રચતી નથી.

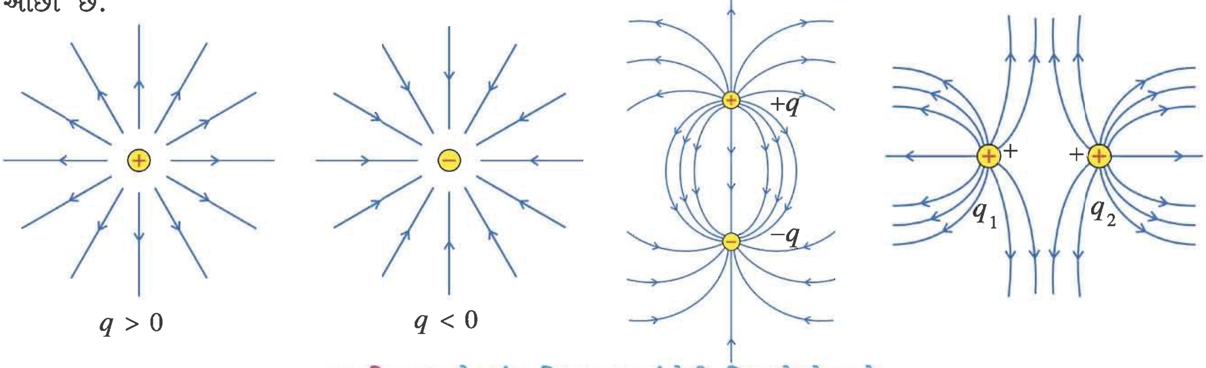
(5) ક્ષેત્રના કોઈ વિસ્તારમાં ક્ષેત્રરેખાઓનું યોગ્ય રીતે કરેલું વિસ્તરણ તે વિસ્તારમાં ક્ષેત્રની તીવ્રતાનો ખ્યાલ આપે છે.



આકૃતિ 1.17 વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા

સામાન્ય રીતે કોઈ પણ વિસ્તારમાંથી પસાર થતી ક્ષેત્રરેખાઓની સંખ્યા એવી રીતે નિશ્ચિત કરવામાં આવે છે, જેથી તે વિસ્તારના કોઈ બિંદુ પાસે ક્ષેત્રરેખાને લંબરૂપે કલ્પેલી એકમક્ષેત્રફળવાળી સમતલ સપાટીમાંથી પસાર થતી ક્ષેત્રરેખાઓની સંખ્યા તે બિંદુ પાસેના ક્ષેત્રની તીવ્રતાને સમપ્રમાણ થાય. આથી, જે વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર તીવ્ર હશે, તે વિસ્તારમાં ક્ષેત્રરેખાઓ ગીચોગીચ (પાસપાસે) હશે અને જે વિસ્તારમાં તીવ્રતા ઓછી હશે, તે વિસ્તારમાં ક્ષેત્રરેખાઓ પ્રમાણમાં એકબીજાથી દૂર હશે.

આકૃતિ 1.17 પરથી સ્પષ્ટ છે કે બિંદુ P_1 આગળ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા વધુ છે, જ્યારે P_2 આગળ ક્ષેત્રની તીવ્રતા ઓછી છે.



આકૃતિ 1.18 કેટલાંક વિદ્યુતભાર તંત્રોની વિદ્યુતક્ષેત્રરેખાઓ

(6) સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર દર્શાવતી ક્ષેત્રરેખાઓ એકબીજાને સમાંતર અને એકબીજાથી સમાન અંતરે હોય છે.

નોંધ : ક્ષેત્રરેખાઓ વાસ્તવિક નથી પરંતુ ક્ષેત્ર વાસ્તવિક છે. ક્ષેત્રરેખાઓ એ ક્ષેત્રને રજૂ કરવા માટેની ભૌમિતીય રચના છે.

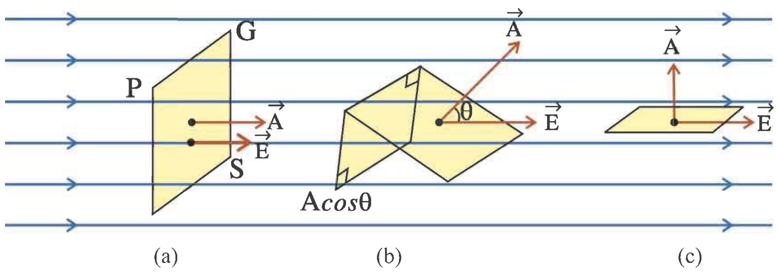
આકૃતિ 1.18માં કેટલાક વિદ્યુતભારોનાં તંત્ર માટે વિદ્યુતક્ષેત્રરેખાઓ દર્શાવી છે.

(આકૃતિમાં દર્શાવેલ ક્ષેત્રરેખાઓ સમતલમાં દોરેલી છે, પરંતુ તે અવકાશ (ત્રિ-પરિમાણ)માં હોય છે.)

1.10 વિદ્યુત-ફ્લક્સ (Electric Flux)

કુલંબનો નિયમ એ સ્થિરવિદ્યુતનો મૂળભૂત નિયમ છે. તેની મદદથી કોઈ પણ બિંદુ આગળનું વિદ્યુતક્ષેત્ર જાણી શકાય છે. કુલંબના નિયમને સમતુલ્ય એવો બીજો ગૉસનો નિયમ છે. આ નિયમની મદદથી સંમિતિ ધરાવતા વિદ્યુતભાર તંત્રથી કોઈ બિંદુ આગળ ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર સરળતાથી મેળવી શકાય છે. આપણે ગોસના નિયમની ચર્ચા કરીએ તે પહેલાં વિદ્યુત-ફ્લક્સની સંકલ્પના જોઈશું.

ફ્લક્સની વિચારધારા વડે વિદ્યુતક્ષેત્રને તેનાં પ્રાપ્તિસ્થાનો સાથે સાંકળી શકાય છે. ફ્લક્સ એ ગાણિતીય સંકલ્પના છે અને તેનું ભૌતિક અર્થઘટન કરી શકાય છે. ફ્લક્સ એ બધાં જ સદિશ ક્ષેત્રોનો એક ગુણધર્મ છે.



$\theta = 0,\ \phi = EA \qquad \phi = EA\cos\theta \qquad \theta = 90^{o},\ \phi = 0$

આકૃતિ 1.19 સમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં વિદ્યુત-ફ્લક્સ

વિદ્યુત-ફ્લક્સ એ વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકેલા પૃષ્ઠમાંથી પસાર થતી વિદ્યુતક્ષેત્રરેખાઓને સમપ્રમાણમાં હોય છે. (અહીં આપણે 'સમપ્રમાણ' શબ્દપ્રયોગ એટલે કર્યો છે, કારણકે ક્ષેત્રરેખાઓની સંખ્યા આપણે યાદચ્છિક રીતે નક્કી કરી શકીએ છીએ.) આકૃતિ 1.19માં દર્શાવ્યા મુજબ સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ માં ક્ષેત્રરેખાઓને લંબ એવું પૃષ્ઠ વિચારો. ધારો કે પૃષ્ઠનું ક્ષેત્રફળ $\vec{A}$ છે. ક્ષેત્રફળ $\vec{A}$ સદિશ રાશિ છે અને તે પૃષ્ઠને લંબ બહાર તરફની દિશામાં હોય છે. અહીં ક્ષેત્રફળનો સદિશ $\vec{A}$ અને $\vec{E}$ એક જ દિશામાં છે.

વિદ્યુતક્ષેત્રની વ્યાખ્યા વિદ્યુતક્ષેત્રરેખાઓના સંદર્ભમાં પણ આપી શકાય છે. કોઈ પણ બિંદુ આગળનું વિદ્યુતક્ષેત્ર એટલે તે બિંદુ આગળ વિદ્યુતક્ષેત્રને લંબરૂપે મૂકેલા એકમક્ષેત્રફળવાળા પૃષ્ઠમાંથી પસાર થતી વિદ્યુતક્ષેત્રરેખાઓની સંખ્યા. આથી, A ક્ષેત્રફળવાળા પૃષ્ઠમાંથી પસાર થતી ક્ષેત્રરેખાઓની સંખ્યા EA થશે. જેને આપેલ પૃષ્ઠ સાથે

સંકળાયેલ વિદ્યુત-ફ્લક્સ ϕ કહે છે. આમ, વિદ્યુત-ફ્લક્સ એ વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકેલા પૃષ્ઠમાંથી પસાર થતી અથવા પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ વિદ્યુતક્ષેત્રરેખાઓની સંખ્યા છે, જેને ϕ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

$$\therefore \ \phi = EA \tag{1.10.1}$$

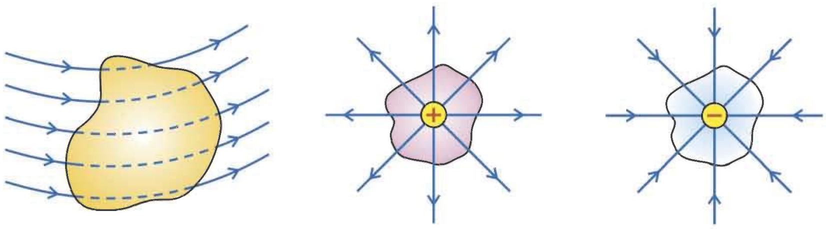
હવે, જો આપેલ પૃષ્ઠ એ વિદ્યુતક્ષેત્રને લંબ ના હોય તો તેમાંથી પસાર થતી ક્ષેત્રરેખાઓની સંખ્યા ઘટશે. આકૃતિ 1.19(b)માં દર્શાવ્યા મુજબ આપેલ પૃષ્ઠ વિદ્યુતક્ષેત્ર સાથે ϕ કોણ બનાવતું હોય તો આ પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ વિદ્યુત-ફ્લક્સ શોધવા માટે પૃષ્ઠના ક્ષેત્રફળના સદિશ $\vec{A}$ નો વિદ્યુતક્ષેત્રને સમાંતર (કે પ્રતિસમાંતર) દિશાને ઘટક $A\cos\theta$ ગણતરીમાં લેવો પડે. આથી પૃષ્ઠ $\vec{E}$ સાથે સંકળાયેલ વિદ્યુત-ફ્લક્સ,

$$\phi = EA\cos\theta \tag{1.10.2}$$

ઉપર્યુક્ત સમીકરણને સદિશ સ્વરૂપે દર્શાવતાં,

$$\phi = \vec{E} \cdot \vec{A} \tag{1.10.3}$$

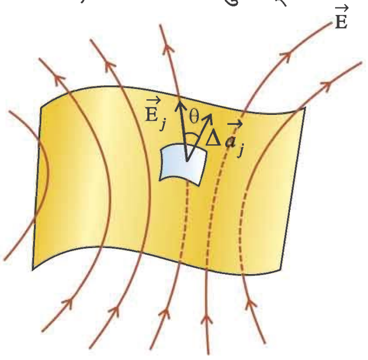
વિદ્યુત-ફ્લક્સ એ અદિશ રાશિ છે. તેનો SI પદ્ધતિમાં એકમ $Nm^2 \ C^{-1}$ અથવા Vm છે. સમીકરણ (1.10.2) પરથી સ્પષ્ટ છે કે વિદ્યુત-ફ્લક્સ ધન, ઋણ કે શૂન્ય હોઈ શકે છે. જો પૃષ્ઠ વિદ્યુતક્ષેત્રને સમાંતર હશે, તો $\vec{A} \perp \vec{E}$ થશે. આથી, પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ ફ્લક્સ $\phi = EA\cos 90^\circ = 0$ થશે. $\theta < 90^\circ$ માટે, ϕ ધન મળે છે, જ્યારે $\theta > 90^\circ$ માટે ϕ ઋણ મળે છે. બંધ વક્ર-સપાટીઓમાં પ્રવેશતી ક્ષેત્રરેખાઓથી રચાતું ફ્લક્સ ઋણ ગણાય છે, જ્યારે નિર્ગમન પામતી રેખાઓથી રચાતું ફ્લક્સ ધન ગણાય છે. (જુઓ આકૃતિ 1.20).



$\phi = 0$ $\qquad$ $\phi > 0$ (ધન ફ્લક્સ) $\qquad$ $\phi < 0$ (ઋણ ફ્લક્સ)

આકૃતિ 1.20 વિદ્યુત-ફ્લક્સ

હવે, આપણે વિદ્યુત-ફ્લક્સની વ્યાપક વ્યાખ્યા વિચારીશું.



આકૃતિ 1.21 અસમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ વિદ્યુત-ફ્લક્સ

આકૃતિ 1.21માં દર્શાવ્યા મુજબ અસમાન (non-uniform) વિદ્યુતક્ષેત્રમાં એક યાદચ્છિક પૃષ્ઠ કલ્પો. સમગ્ર પૃષ્ઠને અનેક સૂક્ષ્મ ખંડોમાં વિભાગેલું કલ્પો. જો પૃષ્ઠખંડો ખૂબ જ સૂક્ષ્મ હોય અને કથિત પૃષ્ઠ ખૂબ ખાંચાઓવાળું ન હોય, તો દરેક પૃષ્ઠખંડને એક સમતલ ગણી શકાય અને આવા નાના ખંડ પર વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ અચળ ગણી શકાય. આવા દરેક પૃષ્ઠખંડને તેના ક્ષેત્રફળના સદિશ વડે દર્શાવી શકાય. કોઈ પણ પૃષ્ઠખંડને દર્શાવતો સદિશ પૃષ્ઠખંડના ક્ષેત્રફળ જેટલા મૂલ્યનો અને પૃષ્ઠખંડને લંબરૂપે લેવામાં આવે છે. જો પૃષ્ઠ બંધ હોય, એટલે કે પૃષ્ઠ ઘનફળ ઘેરતું હોય તો આવા સદિશો બંધ પૃષ્ઠમાંથી બહાર આવતી દિશામાં દોરવામાં આવે છે.

ધારો કે jમાં પૃષ્ઠખંડનો ક્ષેત્રફળનો સદિશ $\Delta\vec{a}_j$ અને આ પૃષ્ઠખંડ પરનું વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}_j$ છે. અહીં પૃષ્ઠખંડ અતિ સૂક્ષ્મ હોવાથી પૃષ્ઠખંડ પરનાં બધાં જ બિંદુઓએ $\vec{E}_j$ ખાસ બદલાતો નથી. આથી, jમાં પૃષ્ઠખંડ સાથે સંકળાયેલ વિદ્યુત-ફ્લક્સ,

$$\phi_j = \vec{E}_j \cdot \Delta\vec{a}_j \tag{1.10.4}$$

આ જ રીતે દરેક પૃષ્ઠખંડ સાથે સંકળાયેલ ફ્લક્સનો સરવાળો કરી સમગ્ર પૃષ્ઠમાંથી પસાર થતું કુલ વિદ્યુત-ફ્લક્સ ϕ શોધી શકાય.

$$\phi = \sum_j \vec{E}_j \cdot \Delta\vec{a}_j \tag{1.10.5}$$

$\lim\limits_{|\Delta\vec{a}_j| \to 0}$, લેતાં એટલે કે દરેક પૃષ્ઠખંડને શૂન્યવત્ નાનો લેતાં સમીકરણ (1.10.5)ને માં રહેલા સરવાળાને સંકલનના રૂપમાં લખી શકાય.

$$\phi = \lim_{|\Delta\vec{a}_j| \to 0} \sum_j \vec{E}_j \cdot \Delta\vec{a}_j$$

$$\phi = \int_{\text{પૃષ્ઠ}} \vec{E} \cdot d\vec{a} \tag{1.10.6}$$

સમીકરણ (1.10.6)ને વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ નું પૃષ્ઠ a પરનું પૃષ્ઠ-સંકલન (surface integration) કહે છે.

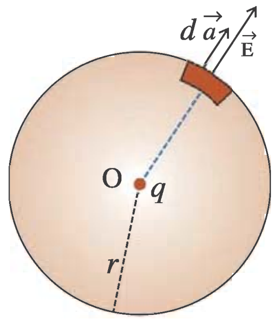
આમ, વ્યાપક વ્યાખ્યા નીચે મુજબ આપી શકાય :

"કોઈ પણ પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ ફ્લક્સ એટલે (સદિશ) ક્ષેત્રનું તે પૃષ્ઠ પરનું પૃષ્ઠ-સંકલન."

1.11 ગાઉસનો નિયમ (Gauss's Law)

વિદ્યુતભાર જેનાથી ઘેરાયેલો છે એવા બંધ પૃષ્ઠ પર વિદ્યુતક્ષેત્રનું પૃષ્ઠસંકલન ગાઉસના નિયમ તરફ દોરી જાય છે. ગાઉસનો નિયમ એ કુદરતના મૂળભૂત નિયમોમાંનો એક છે. આ નિયમ સમજવા માટે આપણે નીચેનું ઉદાહરણ સમજીશું :

જેના કેન્દ્ર O પર $+q$ વિદ્યુતભાર આપેલો છે, તેવો r ત્રિજ્યાનો પોલો ગોળો (sphere) વિચારો (જુઓ આકૃતિ 1.22). આપણે આ ગોળાની સપાટી સાથે સંકળાયેલ કુલ ફ્લક્સ ગણીશું.



આકૃતિ 1.22 ગોળા સાથે સંકળાયેલ ફ્લક્સ

ફ્લક્સની વ્યાખ્યા અનુસાર, ગોળાકાર સપાટી સાથે સંકળાયેલું કુલ ફ્લક્સ,

$$\phi = \int_s \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_s E\, da\, cos\theta \tag{1.11.1}$$

સપાટી પરનાં દરેક બિંદુઓ કેન્દ્રથી સરખા અંતરે આવેલાં હોવાથી દરેક બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ નું મૂલ્ય સરખું હશે. બિંદુવત્ વિદ્યુતભારથી ઉદ્‌ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ ત્રિજ્યાવર્તી છે. આથી ગોળાની સપાટી પરના દરેક ખંડના ક્ષેત્રફળનો સદિશ $d\vec{a}$ એ $\vec{E}$ ની દિશામાં જ હશે. આથી, ($\theta = 0$) થશે. સમીકરણ (1.11.1) પરથી,

$$\phi = \int_s E\, da \quad (\because cos\theta = 1)$$

$$= E\int da = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \times 4\pi r^2$$ ($4\pi r^2$ એ ગોળાની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ છે.)

$$\phi = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{1.11.2}$$

અહીં, ફ્લક્સ એ ગોળાની ત્રિજ્યા પર આધારિત નથી, આથી તે ગમે તે આકારના બંધ પૃષ્ઠ માટે સત્ય છે. સમીકરણ (1.11.2) એ ગાઉસના નિયમનું વ્યાપક પરિણામ છે. ગાઉસના નિયમનું કથન નીચે મુજબ છે, જેને આપણે સાબિતી વગર સ્વીકારી લઈશું :

ગાઉસનો નિયમ : કોઈ બંધ પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ વિદ્યુત-ફ્લક્સ, પૃષ્ઠ વડે ઘેરાતા કુલ વિદ્યુતભાર અને ε_0ના ગુણોત્તર જેટલું હોય છે.

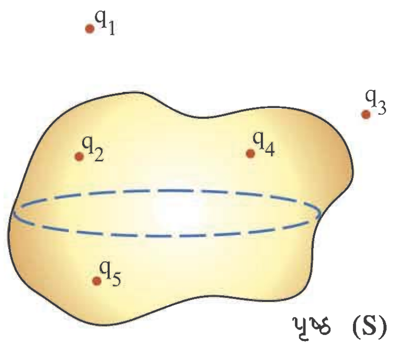
કોઈ બંધ પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ ફ્લક્સ $\phi = \int_s \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{\Sigma q}{\varepsilon_0}$ (1.11.3)

આ નિયમ દર્શાવે છે કે બંધ પૃષ્ઠ દ્વારા ઘેરાતો કુલ (ચોખ્ખો) વિદ્યુતભાર શૂન્ય હોય, તો બંધ પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ કુલ ફ્લક્સ પણ શૂન્ય હોય છે.

ગાઉસના નિયમ માટે આપણે કેટલાક મુદ્દાઓ નોંધી લઈએ :

(1) ગાઉસનો નિયમ એ બંધ પૃષ્ઠના કોઈ પણ પ્રકારના આકાર અને સાઇઝ (size) માટે સત્ય છે.

(2) સમીકરણ (1.11.3)માં દર્શાવેલ જમણી બાજુનો વિદ્યુતભાર એ બંધ પૃષ્ઠ વડે ઘેરાતા વિદ્યુતભારોનો પરિણામી વિદ્યુતભાર છે. આ વિદ્યુતભારો બંધ પૃષ્ઠમાં ગમે તે સ્થાને હોઈ શકે છે.



આકૃતિ 1.23

(3) સમીકરણ (1.11.3)માં ડાબી બાજુ આવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ એ વિદ્યુતભાર તંત્રના વિદ્યુતભારો વડે ઉદ્‌ભવતું પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર છે, પછી તે વિદ્યુતભારો સપાટીની અંદર હોય કે બહાર.

ઉદાહરણ તરીકે આકૃતિ 1.23માં q_1, q_2, q_3, q_4 અને q_5 વિદ્યુતભારો દર્શાવ્યા છે. પૃષ્ઠ Sમાંથી પસાર થતું વિદ્યુત-ફ્લક્સ શોધવા માટે બધા જ વિદ્યુતભારો વડે ઉત્પન્ન થતાં વિદ્યુતક્ષેત્રોનો સદિશ સરવાળો કરી પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ શોધવામાં આવે છે, જે સમીકરણ 1.11.3ની ડાબી બાજુએ વાપરવાનું છે, પરંતુ જમણી બાજુએ આવતો કુલ વિદ્યુતભાર Σq ગણવા માટે ફક્ત q_2, q_4 અને q_5નો પરિણામી વિદ્યુતભાર જ ગણવાનો.

પૃષ્ઠ S સાથે સંકળાયેલ કુલ ફ્લક્સ,

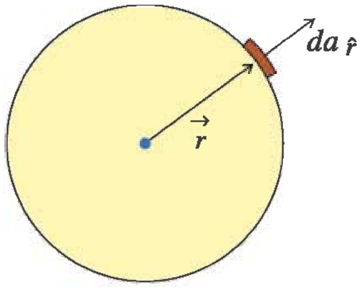
$$\phi = \frac{q_2 + q_4 + q_5}{\varepsilon_0}$$

(4) ગાઉસના નિયમ માટે નક્કી કરવામાં આવેલ બંધ સપાટીને ગાઉસિયન પૃષ્ઠ કહે છે.

(5) ગાઉસના નિયમનો ઉપયોગ કરીને સંમિત વિદ્યુતભાર વિતરણો વડે ઉદ્‌ભવતાં વિદ્યુતક્ષેત્રો સહેલાઈથી શોધી શકાય છે.

ઉદાહરણ 17 : કોઈ વિસ્તારમાં પ્રવર્તમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર ફક્ત x અને y-યામો પર, સૂત્ર $\vec{E} = b\frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{x^2 + y^2}$ મુજબ, આધારિત છે. અહીં b અચળાંક છે. યામાક્ષોના ઊગમબિંદુ પર જેનું કેન્દ્ર હોય તેવા r ત્રિજ્યાના ગોળાના પૃષ્ઠ સાથે સંકળાતું વિદ્યુત-ફ્લક્સ શોધો.

ઉકેલ : આકૃતિમાં દર્શાવેલ $\vec{r}$ની દિશામાં એકમ સદિશ



$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}}{r} \quad \text{હવે,} \quad \vec{E} = b\frac{x\hat{i}+y\hat{j}}{x^2+y^2}$$

$$\therefore \quad \vec{E}.d\vec{a} = b\left(\frac{x\hat{i}+y\hat{j}}{x^2+y^2}\right).\frac{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}}{r}da = \frac{b\,da}{r}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = \frac{b}{r}da$$

$$\therefore \quad \int \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{b}{r}\int da = \frac{b}{r}.4\pi r^2 = 4\pi br$$

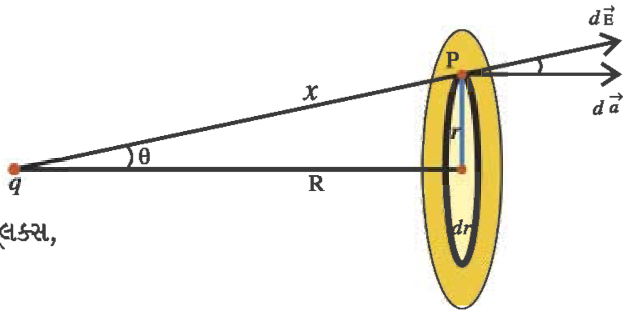
$$\therefore \quad \phi = 4\pi br$$

ઉદાહરણ 18 : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે q જેટલા બિંદુવત્ વિદ્યુતભારથી R અંતરે રહેલી a ત્રિજ્યાની વર્તુળાકાર તકતી સાથે 'q'ના કારણે સંકળાયેલ વિદ્યુત-ફ્લક્સ શોધો.

[**Hint :** $\int\frac{rdr}{(R^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{(R^2+r^2)}}$]

ઉકેલ : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે તકતીમાં r ત્રિજ્યાની અને dr પહોળાઈની એક રિંગ વિચારો. આ રિંગનાં P જેવાં બિંદુઓ પાસે વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા,

$$|d\vec{E}| = \frac{kq}{x^2}$$



હવે, આ રિંગનું ક્ષેત્રફળ, $|d\vec{a}| = 2\pi rdr$.

$d\vec{a}$ રિંગના સમતલને લંબરૂપે છે અને $d\vec{E}$ સાથે θ કોણ બનાવે છે. હવે આ રિંગમાં પસાર થતું ફ્લક્સ,

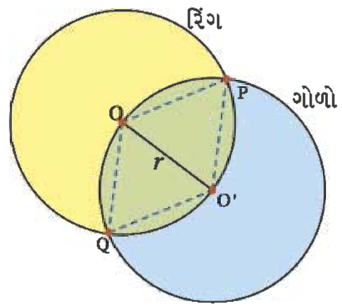
$$d\phi = |d\vec{E}|\ |d\vec{a}|cos\theta$$

$$= \frac{kq}{x^2} \times 2\pi rdr \times \frac{R}{x} = 2\pi kqR \times \frac{rdr}{x^3} = 2\pi kqR \times \frac{rdr}{(R^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\because\ x^2 = R^2 + r^2)$$

$$\therefore \text{ કુલ ફ્લક્સ } \phi = 2\pi kqR\int_0^a\frac{rdr}{(R^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi kqR\left[-\frac{1}{\sqrt{(R^2+r^2)}}\right]_0^a = 2\pi kqR\left[\frac{1}{R}-\frac{1}{\sqrt{(R^2+a^2)}}\right]$$

ઉદાહરણ 19 : r ત્રિજ્યાની એક રિંગ પર Q જેટલો વિદ્યુતભાર સમાન રીતે વહેંચાયેલો છે. હવે r ત્રિજ્યાનો ગોળો એવી રીતે દોરવામાં આવે છે કે જેથી આ ગોળાનું કેન્દ્ર રિંગના પરિઘ પર હોય, તો આ ગોળાના પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ વિદ્યુત-ફ્લક્સ શોધો.

ઉકેલ : આકૃતિની ભૂમિતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે OP = OO' અને O'P = O'O. માટે, ΔOPO' એ સમબાજુ ત્રિકોણ થશે.



$\therefore\ \angle POO' = 60^\circ$ or $\angle POQ = 120^\circ$

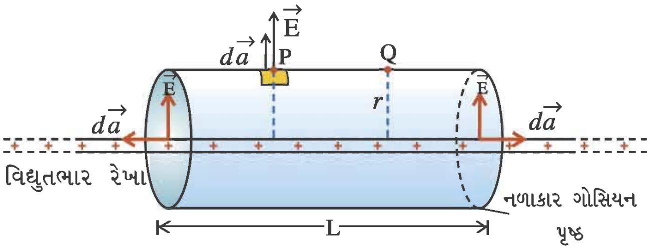
આમ, રિંગના ચાપ PO'Q તેના કેન્દ્ર પર 120°નો ખૂણો આંતરે છે. માટે સ્પષ્ટ છે કે ચાપ PO'Qની લંબાઈ એ રિંગના પરિઘ કરતાં ત્રીજા ભાગની થશે અને માટે આટલા ચાપ (કે જો ગોળાના પૃષ્ઠ વડે ઘેરાય છે.) પર $\frac{Q}{3}$ જેટલો વિદ્યુતભાર હશે.

ગાઉસના નિયમ પરથી, ગોળાના પૃષ્ઠમાંથી પસાર થતું ફ્લક્સ $= \frac{Q}{3\varepsilon_0}$.

1.12 ગાઉસના નિયમના ઉપયોગો (Application's of Gauss's Law)

ગાઉસના નિયમનો ઉપયોગ કરી સંમિત વિદ્યુતભાર વિતરણો વડે ઉદ્ભવતાં વિદ્યુતક્ષેત્રો સહેલાઈથી શોધી શકાય છે. તેનાં કેટલાંક ઉદાહરણો આપણે જઈશું.

(1) અનંત લંબાઈના વિદ્યુતભારિત સુરેખ તાર (સુરેખીય નિયમિત વિદ્યુતભાર વિતરણ) વડે ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર(Electric Field Due to an Infinitely Long Straight Uniformly Charged Wire)



આકૃતિ 1.24 રેખીય વિદ્યુતભાર વિતરણવાળો અનંત લંબાઈનો તાર

ધારો કે આકૃતિ 1.24માં દર્શાવ્યા મુજબના અનંત લંબાઈના, λ જેટલી સમાન (નિયમિત) રેખીય વિદ્યુતભારઘનતા ધરાવતા સુરેખીય વિદ્યુતભાર વિતરણને લીધે r અંતરે આવેલા બિંદુ P પાસે વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા શોધવી છે.

તારની લંબાઈ અનંત હોવાથી P, Q, ... જેવાં બિંદુઓ સમતુલ્ય બિંદુઓ જ ગણાય. તારથી સમાન લંબ અંતરે રહેલાં આવાં બિંદુઓએ વિદ્યુતક્ષેત્ર સમાન જ હોય અને તે ત્રિજ્યાની દિશામાં હશે.

હવે વિદ્યુતભાર રેખાને અક્ષ તરીકે લઈ r ત્રિજ્યાનું અને L લંબાઈનું બંધ નળાકારીય ગાઉસિયન પૃષ્ઠ વિચારો (જુઓ આકૃતિ 1.24). આ નળાકારના વક્રપૃષ્ઠ પર દરેક બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર સમાન અને ત્રિજ્યાની દિશામાં હોય છે. આ નળાકારની વક્રસપાટીના પૃષ્ઠનું ક્ષેત્રફળ $2\pi r L$ અને આડછેદની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ πr^2 છે. L લંબાઈના નળાકારની અંદર ઘેરાયેલો વિદ્યુતભાર $q = \lambda L$ થશે.

આકૃતિમાં દર્શાવેલ r ત્રિજ્યાના અને L લંબાઈના નળાકાર પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ ફ્લક્સ,

$$\phi_1 = \int \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int E\, da \cos 0 = E \int da$$

$$\therefore \phi_1 = E(2\pi r L) \qquad (1.12.1)$$

હવે અક્ષને લંબ એવા નળાકારના બે છેડા પરની સપાટીઓ સાથે સંકળાયેલ ફ્લક્સ

$$\phi_2 = \int \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int E\, da \cos 90^\circ = 0$$

$\therefore$ કુલ ફ્લક્સ $\phi = \phi_1 + \phi_2 = (2\pi r L)E$

ગાઉસના નિયમ અનુસાર

$$\phi = (2\pi r L)E = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow (2\pi r L)E = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

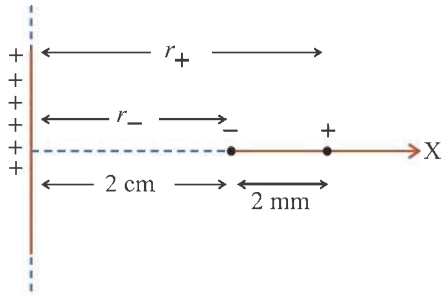
$$\therefore E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \qquad (1.12.3)$$

વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ ત્રિજ્યાની દિશામાં છે, આથી ત્રિજ્યાની દિશામાં એકમસદિશ $\hat{r}$ લેતાં,

$$\therefore \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \hat{r} \qquad (1.12.4)$$

ઉદાહરણ 20 : 2×10^{-8}Cના વિદ્યુતભારોને એકબીજાથી 2 mm દૂર મૂકીને એક વિદ્યુત-ડાઈપોલ રચવામાં આવે છે. 4×10^{-4}C/m જેટલી રેખીય વિદ્યુતભારઘનતા ધરાવતા ખૂબ જ લાંબા તારની પાસે આ ડાઈપોલને, આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ, એવી રીતે મૂકેલ છે કે જેથી ડાઈપોલનો ઋણ વિદ્યુતભાર તારથી 2 cmના અંતરે રહે, તો આ ડાઈપોલ પર લાગતું બળ શોધો. $k = 9 \times 10^9$ Nm^{2}C^{-2} લો.

ઉકેલ : અનંત લંબાઈના, λ જેટલી સમાન રેખીય વિદ્યુતભાર-ઘનતા ધરાવતા, સુરેખીય વિદ્યુતભાર વિતરણને લીધે, રેખાથી લંબરૂપે r અંતરે આવેલા બિંદુ પાસે વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતાના સૂત્ર



$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{2k\lambda}{r} \text{ પરથી, } \vec{F}_- = \frac{-2k\lambda q}{r_-}\hat{i} \text{ અને } \vec{F}_+ = \frac{2k\lambda q}{r_+}\hat{i}$$

$$\therefore \text{ પરિણામી બળ, } \vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = 2k\lambda q\left[\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right]\hat{i}$$

$$= 2 \times 9\times 10^9 \times 4 \times 10^{-4} \times 2 \times 10^{-8}\left[\frac{1}{2.2\times10^{-2}} - \frac{1}{2.0\times10^{-2}}\right]\hat{i}$$

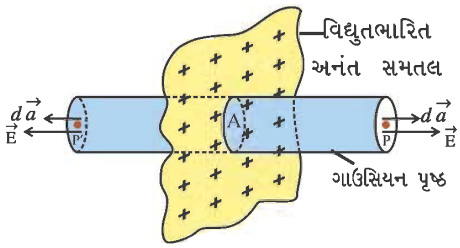
$$= -0.65\,\hat{i}\text{ N}$$

(2) અનંત વિસ્તારના સમતલીય સમાન વિદ્યુતભાર વિતરણ વડે ઉદ્‌ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર (Electric Field Due to a Uniformly Charged Infinite Plane Sheet or Sheet of Charge) :

ધારો કે, આકૃતિ 1.25માં દર્શાવ્યા મુજબના અનંત વિસ્તારના σ જેટલી સમાન પૃષ્ઠ વિદ્યુતભારઘનતા ધરાવતા એક અવાહક સમતલને લીધે સમતલથી લંબરૂપે r અંતરે આવેલા P પાસે વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા શોધવી છે. (આકૃતિમાં આવા સમતલનો થોડોક જ ભાગ દર્શાવ્યો છે.)

સંમિતિ પરથી કહી શકાય કે સમતલની બંને બાજુએ સમતલથી એકસરખા અંતરે આવેલાં P અને P' જેવાં બિંદુઓ માટે વિદ્યુતક્ષેત્રો સમાન મૂલ્યનાં હોય છે, પરંતુ તેમની દિશા સમતલને લંબરૂપે એકબીજાથી વિરુદ્ધ હોય છે. (જો સમતલ પરનો વિદ્યુતભાર ધન હોય, તો સમતલથી દૂર જતી દિશામાં અને વિદ્યુતભાર ઋણ હશે, તો સમતલ તરફની દિશામાં $\vec{E}$ હોય છે.)

આકૃતિ 1.25માં દર્શાવ્યા મુજબ સમતલની બંને બાજુએ સરખી લંબાઈનું અને A અને આડછેદના ક્ષેત્રફળવાળું બંધ નળાકારીય ગાઉસિયન પૃષ્ઠ વિચારો. સમતલ પરની પૃષ્ઠ વિદ્યુતભારઘનતા σ હોવાથી બંધ નળાકાર દ્વારા ઘેરાતો વિદ્યુતભાર $q = \sigma A$ થશે.



આકૃતિ 1.25 અનંત વિસ્તારના સમતલીય સમાન વિદ્યુતભાર વિતરણ વડે ઉદ્‌ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર

નળાકારની વક્રસપાટી સાથે સંકળાયેલું ફ્લક્સ,

$$\phi_1 = \int \vec{E}\cdot d\vec{a} = \int E\,da\cos 90^\circ = 0 \qquad (1.12.5)$$

કારણ કે વક્રસપાટી માટે $\vec{E}$ અને $\vec{da}$ પરસ્પર લંબ છે. નળાકારના છેડે આવેલા બિંદુ P આગળની A ક્ષેત્રફળવાળી સપાટી સાથે સંકળાયેલ ફ્લક્સ,

$$\phi_p = \int \vec{E}\cdot d\vec{a} = \int E\,da\cos 0 = \int E\,da = EA \qquad (1.12.6)$$

આ જ રીતે બિંદુ P' આગળની સપાટી A ક્ષેત્રફળવાળી સપાટી સાથે સંકળાયેલ ફ્લક્સ.

$$\phi_{p'} = EA \qquad (1.12.7)$$

આમ, કુલ ફ્લક્સ, $\phi = \phi_1 + \phi_p + \phi_{p'} = 0 + E_A + E_A = 2E_A$

આથી, ગાઉસના નિયમ અનુસાર, $\phi = 2EA = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$ ($\because q = \sigma A$)

$$\therefore E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad (1.12.8)$$

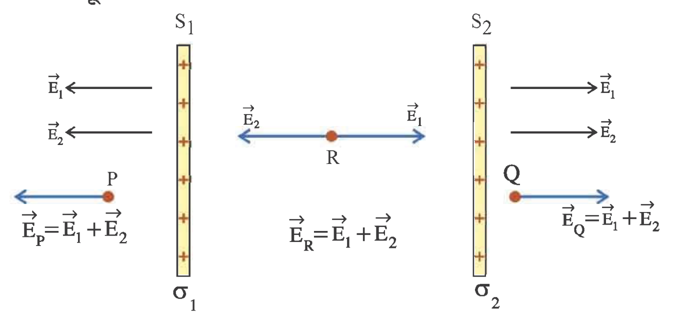
આ સૂત્ર દર્શાવે છે કે પ્રસ્તુત કિસ્સામાં કોઈ પણ બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા સમતલથી તે બિંદુના અંતર પર આધારિત નથી.

વિદ્યુતક્ષેત્રને સદિશ સ્વરૂપે દર્શાવતાં,

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}, \quad (1.12.9)$$

જ્યાં, $\hat{n}$ એ સમતલને લંબરૂપે સમતલથી દૂર તરફ જતી દિશાનો એકમસદિશ છે. જો સમતલ પરનો વિદ્યુતભાર ઋણ હશે, તો $\vec{E}$ સમતલને લંબ અને સમતલ તરફની દિશામાં હશે.

સમીકરણ (1.12.8)ની મદદથી σ_1 અને σ_2 પૃષ્ઠ ઘનતાવાળા બે સમાંતર વિદ્યુતભારિત સમતલો વડે ઉદ્ભવતાં ક્ષેત્રનાં મૂલ્યો અને દિશા જાણી શકાય છે.



આકૃતિ 1.26

આકૃતિ 1.26માં σ_1 અને σ_2 પૃષ્ઠ ઘનતા ધરાવતાં સમતલો S_1 અને S_2 પરસ્પર સમાંતર છે. S_1થી ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}_1$ અને S_2થી ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર E_2 છે. આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે, બિંદુ P આગળ વિદ્યુતક્ષેત્ર

$$\vec{E}_P = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0} \quad (S_2 S_1 \text{ દિશામાં})$$

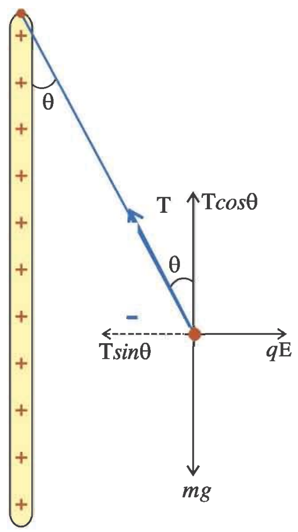
બિંદુ Q આગળ વિદ્યુતક્ષેત્ર,

$$\vec{E}_Q = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0} \quad (S_1S_2 \text{ દિશામાં})$$

બિંદુ R આગળ વિદ્યુતક્ષેત્ર નું મૂલ્ય, (જો $\sigma_1 > \sigma_2$ હોય, તો)

$$\vec{E}_R = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2\varepsilon_0} \quad (\text{દિશા } S_1 \text{ થી } S_2 \text{ તરફ}) \quad (1.12.10)$$

ઉદાહરણ 21 : m દળ અને $+q$ વિદ્યુતભાર ધરાવતા કણને દોરીના એક છેડે બાંધેલ છે. દોરીનો બીજો છેડો ઊર્ધ્વ દિશામાં ગોઠવેલ ધન વિદ્યુતભારિત મોટા સમતલ સાથે બાંધેલો છે. આ સમતલની નિયમિત પૃષ્ઠ વિદ્યુતભારઘનતા σ છે, તો સંતુલિત સ્થિતિમાં દોરી આ ઊર્ધ્વ સમતલ સાથે કેટલો કોણ બનાવશે ?



ઉકેલ : ધન વિદ્યુતભારિત સમતલથી ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર,

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

વિદ્યુતભાર પર લાગતાં બળો અને દોરીમાં ઉદ્ભવતા તણાવબળ (T) ના ઘટકો આકૃતિમાં દર્શાવ્યા છે. સંતુલિત સ્થિતિમાં,

$$T\cos\theta = mg \text{ અને } T\sin\theta = qE$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{qE}{mg} = \frac{q\sigma}{2mg\varepsilon_0}$$

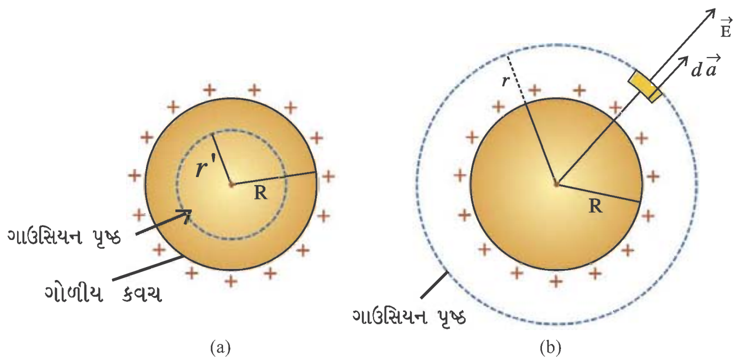
$$\therefore \theta = tan{-1}\left(\frac{q\sigma}{2mg\varepsilon_0}\right)$$

(3) વિદ્યુતભારિત પાતળી ગોળીય કવચ વડે ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર (Electric Field Due to a Uniformly Charged Thin Spherical Shell)

ધારો કે આકૃતિ 1.27માં દર્શાવેલ R ત્રિજ્યાના વિદ્યુતભાર કવચ (shell) પરની વિદ્યુતભાર પૃષ્ઠઘનતા σ છે, આથી કવચ પરનો કુલ વિદ્યુતભાર,

$$q = \sigma A = \sigma(4\pi R^2) \tag{1.12.11}$$

કવચ પરના આ વિદ્યુતભારથી ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર ત્રિજ્યાવર્તી હોય છે. આવા વિદ્યુતતંત્ર વડે કવચની અંદર અને બહારનાં બિંદુઓએ વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધવું છે.



આકૃતિ 1.27 ગોળાકાર કવચનું વિદ્યુતક્ષેત્ર

(1) કવચની અંદરના બિંદુ માટે : કવચની અંદરના બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધવા માટે કવચની અંદર, કવચના કેન્દ્ર પર જેનું કેન્દ્ર સંપાત થાય તેવું r'(જ્યાં $r' < R$), ત્રિજ્યાનું ગોળાકાર ગાઉસિયન પૃષ્ઠ વિચારો. (જુઓ આકૃતિ 1.43)

આ પૃષ્ઠ વડે ઘેરાતો વિદ્યુતભાર $(q = 0)$ હોવાથી ગાઉસના પ્રમેય અનસાર,

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{\varepsilon_0} = 0 \qquad (\because q = 0)$$

$$\therefore \vec{E} = 0 \tag{1.12.12}$$

આમ, **વિદ્યુતભારિત ગોળીય કવચના અંદરના વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય હોય છે.**

(2) કવચની બહારના બિંદુ માટે : કવચની બહાર E શોધવા માટે r ત્રિજ્યાવાળું $r(r > R)$ ગાઉસિયન ગોળાકાર પૃષ્ઠ વિચારો. (જુઓ આકૃતિ 1.27 (b)) આ ગાઉસિયન પૃષ્ઠથી ઘેરાતો વિદ્યુતભાર q થશે.

ગાઉસના નિયમ અનુસાર, આ પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ ફ્લક્સ.

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\int E\, da \cos 0 = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad (\because \vec{E} \text{ અને } d\vec{a} \text{ એક જ દિશામાં છે.})$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \tag{1.12.3}$$

કવચની સપાટી પરના વિદ્યુતક્ષેત્ર માટે $r = R$ મૂકતાં,

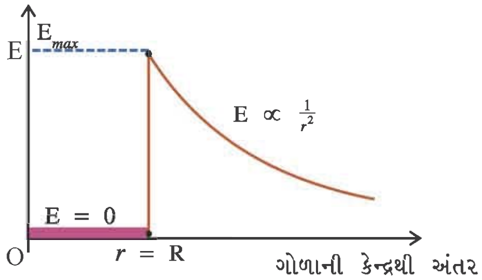
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^2} \tag{1.12.4}$$

સમીકરણ (1.12.3) અને (1.12.4) પરથી સ્પષ્ટ છે કે કવચ પર રહેલ વિદ્યુતભાર, જ્યાં સુધી કવચ બહારના અને કવચની સપાટી પરના ક્ષેત્રને લાગેવળગે છે, ત્યાં સુધી કેન્દ્ર પર જાણે કે સંકેન્દ્રિત થયો હોય તેમ ગણી શકાય.

સમીકરણ (1.12.4)માં $q = (4\pi R^2)\sigma$ મૂકતાં

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(4\pi R^2)\sigma}{r^2}$$

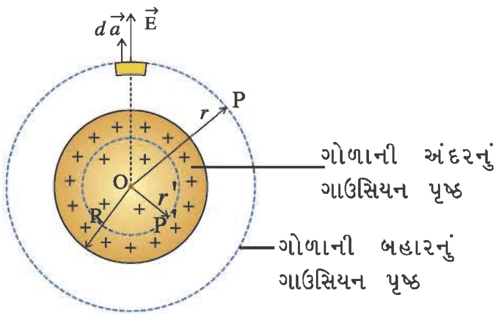
$$\therefore\ E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r^2} \qquad (1.12.5)$$



આકૃતિ 1.28 ગોળીય કવચનું વિદ્યુતક્ષેત્ર

આકૃતિ 1.28માં દર્શાવેલ આલેખમાં ગોળીય કવચ પરના વિદ્યુતભારથી ગોળાના કેન્દ્ર Oથી લઈ કવચની બહારના વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર કેવી રીતે બદલાય છે તે દર્શાવ્યું છે. આલેખ પરથી સ્પષ્ટ છે કે ગોળાના કવચની અંદરના વિસ્તારમાં $\vec{E} = 0$ છે. કવચની સપાટી પર (r = R) મહત્તમ છે, જ્યારે કવચની બહારના વિસ્તારમાં તે $\frac{1}{r^2}$ અનુસાર ઘટે છે.

(4) સમાન વિદ્યુતભારઘનતાવાળા ગોળા વડે ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર (Electric Field Intensity Due to Uniformly Charged Sphere) :



આકૃતિ 1.29 સમાન વિદ્યુતભારઘનતાવાળા ગોળા વડે ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર

ધારો કે આકૃતિ 1.29માં દર્શાવેલ R ત્રિજ્યાના વિદ્યુતભારિત ગોળા (sphere)ની વિદ્યુતભાર કદ ઘનતા ρ છે. આ ગોળામાં સમાયેલો વિદ્યુતભાર

$$q = (\tfrac{4}{3}\pi R^3)\rho. \qquad (1.12.6)$$

આવા ગોળાને લીધે ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર ત્રિજ્યાવર્તી હોય છે. આવા વિદ્યુતતંત્ર વડે ગોળાની અંદર અને બહારનાં બિંદુઓએ વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધવું છે.

(1) ગોળાની અંદરના બિંદુ માટે : ગોળાની અંદર કેન્દ્રથી r' અંતરે આવેલા P' બિંદુએ તીવ્રતા શોધવા આ ગોળાના કેન્દ્ર પર જેનું કેન્દ્ર સંપાત થાય તેવું $r'(r' < R)$ ત્રિજ્યાનું ગોળાકાર ગાઉસિયન પૃષ્ઠ વિચારો. આ ગાઉસિયન પૃષ્ઠ વડે ઘેરાતો વિદ્યુતભાર,

$$q' = (\tfrac{4}{3}\pi r'^3)\rho \qquad (1.12.7)$$

$$= \frac{4}{3}\pi r'^3 \times \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \qquad \text{(સમીકરણ (1.12.6) પરથી)}$$

$$\therefore\ q' = q\frac{r'^3}{R^3} \qquad (1.12.8)$$

આ ગાઉસિયન પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ ફ્લક્સ

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{q'}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r'^2) = \frac{qr'^3}{\varepsilon_0 R^3} \qquad \text{(સમીકરણ 1.12.8 પરથી)}$$

$$\therefore\ E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r'}{R^3} \quad (r' \le R \text{ માટે}) \tag{1.12.9}$$

એટલે કે ગોળાના અંદરના વિસ્તારમાં $E \alpha r'$

સમીકરણ (1.12.6) પરથી qનું મૂલ્ય મૂકતાં વિદ્યુતક્ષેત્રને વિદ્યુતભાર ઘનતાના સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય.

$$E = \frac{\rho r'}{3\varepsilon_0} \quad (r' \le R \text{ માટે}) \tag{1.12.10}$$

(2) ગોળાની બહારના બિંદુ માટે : આ માટે આકૃતિમાં દર્શાવ્યા અનુસાર r (જ્યાં $r > R$) ત્રિજ્યાનું ગોળાકાર ગાઉસિયન પૃષ્ઠ વિચારો. આ પૃષ્ઠથી ઘેરાતો વિદ્યુતભાર q છે. આથી ગાઉસના નિયમ અનુસાર,

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore\ \int E\, da = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

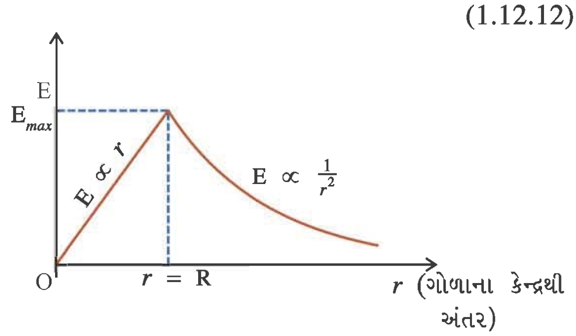
$$\therefore\ E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \quad (r \ge R \text{ માટે}) \tag{1.12.11}$$

આ દર્શાવે છે કે ગોળાની બહારના બિંદુ માટે ગોળાનો સમગ્ર વિદ્યુતભાર ગોળાના કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયેલો ગણી શકાય છે. ગોળાની બહારના વિસ્તાર માટે, $E \alpha \frac{1}{r^2}$.

ઉપર્યુક્ત સમીકરણમાં $q = (\frac{4}{3}\pi R^3)\rho$ મૂકતાં, Eને ρના સ્વરૂપમાં લખી શકાય.

$$E = \frac{R^3\rho}{3r^2\varepsilon_0} \tag{1.12.12}$$

આકૃતિ 1.30માં દર્શાવેલ આલેખ એ વિદ્યુતભાર ઘનતાવાળા ગોળાથી ગોળાના કેન્દ્ર Oથી લઈ ગોળાના બહારના વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર કેવી રીતે બદલાય છે તે દર્શાવેલ છે. અહીં નોંધો કે ગોળાની સપાટી પર વિદ્યુતક્ષેત્ર $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}$ જેટલું મહત્તમ છે.



આકૃતિ 1.30 વિદ્યુતભારઘનતાવાળા ગોળાનું વિદ્યુતક્ષેત્ર

સારાંશ

1. **વિદ્યુતભાર :** જે રીતે બે કણો વચ્ચે ગુરુત્વાકર્ષણ બળ ઉદ્ભવવાનું કારણ તેમના દળ છે તે જ રીતે તેમની વચ્ચે વિદ્યુતબળ ઉદ્ભવવાનું કારણ તેમના પર રહેલ વિદ્યુતભાર છે. વિદ્યુતભાર એ કણનો આંતરિક ગુણધર્મ છે. વિદ્યુતભાર બે પ્રકારના છે : (1) ધન વિદ્યુતભાર (2) ઋણ વિદ્યુતભાર

   બે સમાન વિદ્યુતભારો વચ્ચે અપાકર્ષણ અને અસમાન વિદ્યુતભારો વચ્ચે આકર્ષણબળ લાગે છે. વિદ્યુતભારના જથ્થાનો SI એકમ coulomb (C) છે.

2. **વિદ્યુતભારનું ક્વૉન્ટમીકરણ :** કુદરતમાં મળી આવતા બધા જ વિદ્યુતભારોનાં મૂલ્યો એક મૂળભૂત વિદ્યુતભારના મૂલ્યના પૂર્ણ ગુણાંકમાં જ હોય છે. $Q = ne$. જ્યાં, eને વિદ્યુતભારનો પ્રાથમિક એકમ કહે છે.

3. **વિદ્યુતભારના સંરક્ષણનો નિયમ :** વિદ્યુતની દૃષ્ટિએ અલગ કરેલા તંત્રમાં ગમે તે પ્રક્રિયા થાય તોપણ તંત્રમાંના વિદ્યુતભારોનો બૈજિક સરવાળો અચળ રહે છે.

4. **કુલંબનો નિયમ :** બે બિંદુવત્ સ્થિર વિદ્યુતભારો વચ્ચે પ્રવર્તતું વિદ્યુતબળ તે વિદ્યુતભારોના મૂલ્યના ગુણાકારના સમપ્રમાણમાં અને તેમની વચ્ચેના અંતરના વર્ગના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય છે.

$$F = k\frac{q_1q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}$$

જો $q_1q_2 > 0$ હોય તો વિદ્યુતભારો વચ્ચે અપાકર્ષણ થાય છે અને $q_2q_2 < 0$ હોય, તો વિદ્યુતભારો વચ્ચે આકર્ષણ થાય છે.

5. **વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા :** કોઈ પણ વિદ્યુતભાર તંત્રની આસપાસના વિસ્તારમાં કોઈ બિંદુ પાસે એકમ ધન વિદ્યુતભાર પર લાગતા વિદ્યુતબળને તે વિદ્યુતતંત્રનું વિદ્યુતક્ષેત્ર અથવા વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા ($\vec{E}$) કહે છે.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$\vec{E}$નો SI એકમ NC^{-1} અથવા Vm^{-1} છે.

q_1, q_2, ..., q_n વિદ્યુતભારોના સ્થાનસદિશ અનુક્રમે $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$, ... $\vec{r_n}$ હોય, તો $\vec{r}$ સ્થાને ઉદ્‌ભવતું પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર,

$$\vec{E} = k\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j}{|\vec{r}-\vec{r_n}|^3}(\vec{r} - \vec{r_j})$$

6. **વિદ્યુત-ડાઈપોલ :** એકબીજાથી પરિમિત અંતરે રહેલા બે વિજાતીય અને સમાન મૂલ્યના વિદ્યુતભારોના તંત્રને વિદ્યુત-ડાઈપોલ કહે છે.

વિદ્યુત-ડાઈપોલની ડાઈપોલ-મોમેન્ટ $\vec{p} = (2\vec{a})q$

$\vec{p}$ એ ઋણ વિદ્યુતભારથી ધન વિદ્યુતભારની દિશામાં હોય છે.

7. ડાઈપોલની અક્ષ પરના $z = z$ બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર,

$$\vec{E}(z) = \frac{2kp}{z^3}\hat{p} \quad (z >> a \text{ માટે})$$

ડાઈપોલની વિદ્યુતરેખા પરના $y = y$ બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર,

$$\vec{E}(y) = -\frac{kp}{y^3}\hat{p} \quad (y >> a \text{ માટે})$$

8. સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર ($\vec{E}$)માં θ કોણે મૂકેલા ડાઈપોલ પર લાગતું ટૉર્ક,

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}, \; |\vec{\tau}| = pE\sin\theta$$

9. વિદ્યુત-ફ્લક્સ : સમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકેલા પૃષ્ઠનો ક્ષેત્રફળ સદિશ $\vec{A}$ હોય, તો પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ વિદ્યુત-ફ્લક્સ,

$$\phi = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA\cos\theta$$

જ્યાં θ = $\vec{E}$ અને $\vec{A}$ વચ્ચેનો કોણ.

તેનો SI એકમ Nm^2C^{-1} અથવા Vm છે.

10. ગાઉસનો નિયમ : કોઈ પણ બંધ પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ કુલ વિદ્યુત-ફ્લક્સ,

$$\phi = \int_s \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{\Sigma q}{\varepsilon_0}$$

જ્યાં Σq એ બંધ પૃષ્ઠ દ્વારા ઘેરાતો ચોખ્ખો (net) વિદ્યુતભાર છે.

11. અનંત લંબાઈના વિદ્યુતભારિત સુરેખ તાર વડે ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર,

$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \hat{r}$, જ્યાં r એ વિદ્યુતભારિત તારથી લંબઅંતર છે.

12. અનંત વિસ્તારના સમાન વિદ્યુતભાર વિતરણ વડે ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર, $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

13. વિદ્યુતભારિત ગોળીય કવચ વડે ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર

(1) કવચના અંદરના વિસ્તારમાં $\vec{E} = 0$.

(2) કવચની બહાર કેન્દ્રથી r અંતરે વિદ્યુતક્ષેત્ર, $E = k\frac{q}{r^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{R^2}{r^2}$

જ્યાં, R = ગોળીય કવચની ત્રિજ્યા છે.

14. R ત્રિજ્યાના સમાન વિદ્યુતભાર ઘનતાવાળા ગોળા વડે ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર :

(1) ગોળાની અંદરના વિસ્તારમાં :

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r}{R^3} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

(2) ગોળાની બહારના બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} = \frac{R^3\rho}{3r^2\varepsilon_0}$$

જ્યાં, Q = ગોળામાંનો કુલ વિદ્યુતભાર.

સ્વાધ્યાય

નીચે વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. બે બિંદુવત્ વિદ્યુતભારોને એકબીજાથી અમુક અંતરે ગોઠવતાં તેમની વચ્ચે લાગતું વિદ્યુતબળ ϕ છે. હવે આ વિદ્યુતભારોનાં મૂલ્યો બમણાં કરી તેમની વચ્ચેનું અંતર અડધું કરવામાં આવે, તો તેમની વચ્ચે લાગતું વિદ્યુતબળ .... હશે. .

   (A) ϕ (B) 4ϕ (C) 8ϕ (D) 16ϕ

2. એક વિદ્યુત-ડાઇપોલને સમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકતાં તેના પર લાગતું પરિણામી બળ ....

   (A) હંમેશાં શૂન્ય હોય છે.
   (B) વિદ્યુત-ડાઇપોલની ક્ષેત્રની સાપેક્ષ ગોઠવણ પર આધારિત છે.
   (C) કદી પણ શૂન્ય હોઈ શકે નહિ
   (D) વિદ્યુત-ડાઇપોલ-મોમેન્ટ પર આધારિત છે.

3. એક વિદ્યુત-ડાઈપોલને કોઈ બિંદુવત્ વિદ્યુતભારના ક્ષેત્રમાં મૂકેલ હોય તો..........
(A) તે ડાઈપોલ પર લાગતું પરિણામી વિદ્યુતબળ શૂન્ય જ હોય.
(B) તે ડાઈપોલ પર લાગતું પરિણામી વિદ્યુતબળ શૂન્ય હોઈ શકે.
(C) તે ડાઈપોલ પર લાગતું ટૉર્ક શૂન્ય હોઈ શકે.
(D) તે ડાઈપોલ પર લાગતું ટૉર્ક શૂન્ય જ હોય.

4. એક ઈલેક્ટ્રૉન અને એક પ્રોટોનને સમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકતાં ....
(A) તે બંને પર લાગતાં બળોનાં મૂલ્ય અને દિશા સમાન હોય.
(B) તે બંને પર લાગતાં બળોનાં મૂલ્યો સમાન હોય.
(C) તે બંનેમાં ઉદ્ભવતા પ્રવેગ સમાન હોય.
(D) તે બંનેમાં ઉદ્ભવતા પ્રવેગનાં મૂલ્યો સમાન હોય.

5. શૂન્યાવકાશમાં એકબીજાથી અમુક અંતરે મૂકેલા બે બિંદુવત્ વિદ્યુતભારો વચ્ચે ઉદ્ભવતું વિદ્યુતબળ α છે. જો આ જ બે વિદ્યુતભારોને આટલાં જ અંતરે પરંતુ K જેટલો ડાઇઇલેક્ટ્રિક અચળાંક ધરાવતા માધ્યમમાં મૂકવામાં આવે, તો તેમની વચ્ચે લાગતું વિદ્યુતબળ .... જેટલું હશે.
(A) α (B) $K\alpha$ (C) $K^2\alpha$ (D) α/K

6. બે બિંદુવત્ વિદ્યુતભારો $4q$ અને $-q$ વચ્ચેનું અંતર r છે. આ બંને વિદ્યુતભારોની બરાબર વચ્ચે એક ત્રીજો વિદ્યુતભાર Q મૂકવામાં આવે છે. જો વિદ્યુતભાર $-q$ પર લાગતું પરિણામી બળ શૂન્ય હોય, તો Q .... હશે.
(A) $-q$ (B) q (C) $-4q$ (D) $4q$

7. a ત્રિજ્યાના વર્તુળના પરિઘ પર રેખીય વિદ્યુતભારઘનતા $\lambda = \lambda_0 cos\theta$ છે તો તેના પરનો કુલ વિદ્યુતભાર .... હશે.
(A) શૂન્ય (B) અનંત (C) $\pi a\lambda_0$ (D) $2\pi a$

8. ધાતુના બે સમાન (indentical) ગોળાઓ A અને B પર સમાન વિદ્યુતભાર q છે. જ્યારે આ બે ગોળાઓને એકબીજાથી r જેટલા અંતરે રાખવામાં આવે, ત્યારે તેમની વચ્ચે લાગતું બળ F છે. હવે આ ગોળાઓ જેવા જ એક ત્રીજા વિદ્યુતભારરહિત ગોળા Cનો A સાથે સ્પર્શ કરાવી છૂટો પાડવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ ગોળા Cને B સાથે સ્પર્શ કરાવી છૂટો પાડવામાં આવે છે, તો હવે A અને B વચ્ચે .... બળ લાગશે. (બંને ગોળાઓ વચ્ચેનું અંતર બદલાતું નથી.)
(A) F (B) 2F (C) $\frac{3F}{8}$ (D) $\frac{F}{4}$

9. બે બિંદુવત્ વિદ્યુતભારો q અને $4q$ને એકબીજાથી 30 cmના અંતરે મૂકેલા છે, તો તેમને જોડતી રેખા પર .... રહેલા બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા શૂન્ય હશે.
(A) $4q$ વિદ્યુતભારની 20 cm દૂર (B) q વિદ્યુતભારની 7.5 cm દૂર
(C) $4q$ વિદ્યુતભારની 15 cm દૂર (D) q વિદ્યુતભારની 5 cm દૂર

10. પરમિટિવિટી $[\epsilon_0]$નાં પરિમાણ .... છે. અહીં, વિદ્યુતભારનું પરિમાણસૂત્ર Q લો.
(A) $M^1L^{-2}T^{-2}Q^{-2}$ (B) $M^{-1}L^2T^{-3}Q^{-1}$ (C) $M^{-1}L^{-3}T^2Q^2$ (D) $M^{-1}L^3T^{-2}Q^{-2}$

11. HCL અણુની વિદ્યુત-ડાઇપોલ-મોમેન્ટ 3.4×10^{-30} Cm છે. આ અણુના બંને પરમાણુ પર સમાન મૂલ્યના વિજાતીય વિદ્યુતભારો છે, તેમ કલ્પીએ, તો આ વિદ્યુતભારનું મૂલ્ય .... હશે. આ બે પરમાણુઓ વચ્ચેનું અંતર 1 Å છે.
(A) 1.7×10^{-20}C (B) 3.4×10^{-20}C (C) 6.8×10^{-20}C (D) 3.4×10^{-10}C

12. 100 N/Cનું વિદ્યુતક્ષેત્ર Z-દિશામાં અસ્તિત્વમાં છે, તો આ વિદ્યુતક્ષેત્રનું XY સમતલમાં મૂકેલા 10 cmની બાજુવાળા ચોરસમાંથી પસાર થતું ફ્લક્સ .... હશે.
(A) 1.0 Nm^2/C (B) 2.0 Vm (C) 10 Vm (D) 4.0 Nm^2/C

13. એક (સુવાહક) ગોળીય કવચની ત્રિજ્યા 10 mm છે અને તેના પર 100 μCનો વિદ્યુતભાર મૂકેલ છે. આ કવચના કેન્દ્ર પર 10 μC જેટલો વિદ્યુતભાર મૂકવામાં આવે, તો તેના પર લાગતું વિદ્યુતબળ .... હશે. $k = 9 \times 10^9$ MKS લો.

(A) 10^3N (B) 10^2N (C) શૂન્ય (D) 10^5N

14. કોઈ બંધ પૃષ્ઠ વડે ઘેરાતો વિદ્યુતભાર 10 μC હોય, ત્યારે તે પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ ફ્લક્સનું મૂલ્ય ϕ છે. હવે આ જ પૃષ્ઠની અંદર બીજો એક વિદ્યુતભાર −10 μC દાખલ કરવામાં આવે, તો હવે આ પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ ફ્લક્સ .... થશે.

(A) 2ϕ (B) ϕ (C) 4ϕ (D) શૂન્ય

15. કોઈ એક ગોળાના કેન્દ્ર પર એક વિદ્યુત-ડાઈપોલ મૂકવામાં આવે, તો ગોળાના પૃષ્ઠ સાથે સંકળાતું વિદ્યુત-ફ્લક્સ .... હશે.

(A) અનંત (B) શૂન્ય (C) કંઈ કહી શકાય નહિ (D) $\frac{2q}{\varepsilon_0}$

16. q જેટલો વિદ્યુતભાર ધરાવતા બે ભારે ગોળાઓને 1m લંબાઈની દોરીઓ વડે એક જ આધારબિંદુ પરથી ગુરુત્વમુક્ત અવકાશમાં લટકાવેલ છે. આ બે ગોળા વચ્ચેનું અંતર .... m.

(A) 0 (B) 0.5 (C) 2 m (D) કશું કહી શકાય નહિ.

17. એક બિંદુવત્ વિદ્યુતભાર Q કોઈ એક બિંદુ P પાસે મૂક્યો છે. P બિંદુ નજીક એક બંધ પૃષ્ઠ મૂક્યું છે. આ પૃષ્ઠમાંથી પસાર થતું વિદ્યુત-ફ્લક્સ.

(A) $Q\ \varepsilon_0$ (B) $\frac{\varepsilon_0}{Q}$ (C) $\frac{Q}{\varepsilon_0}$ (D) શૂન્ય

18. n બાજુવાળા એક નિયમિત બહુકોણના $(n - 1)$ શિરોબિંદુ પર, દરેક પર Q જેટલો વિદ્યુતભાર મૂકેલ છે. બહુકોણના કેન્દ્રથી દરેક શિરોબિંદુનું અંતર r છે, તો કેન્દ્ર પર વિદ્યુતક્ષેત્ર.

(A) $k\frac{Q}{r^2}$ (B) $(n - 1)\ k\frac{Q}{r^2}$ (C) $\frac{n}{n-1}k\frac{Q}{r^2}$ (D) $\frac{n-1}{n}k\frac{Q}{r^2}$

19. 2Q અને −Q વિદ્યુતભાર ધરાવતા ધાતુના બે સમાન ગોળાઓને એકબીજાથી અમુક અંતરે મૂકતાં તેમની વચ્ચે F બળ લાગે છે. હવે તેમને વાહક તારથી જોડી અને છૂટા પાડી પછી એટલા જ અંતરે મૂકવામાં આવે છે. તો તેમની વચ્ચે લાગતું બળ ....

(A) F (B) $\frac{F}{2}$ (C) $\frac{F}{4}$ (D) $\frac{F}{8}$

20. 1C વિદ્યુતભારમાંથી બહાર નીકળતી વિદ્યુતભારની વિદ્યુતક્ષેત્રરેખાઓની સંખ્યા ....

($\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ MKS)

(A) 9×10^9 (B) 8.85×10^2 (C) 1.13×10^{11} (D) અનંત

21. કોઈ એક પ્રક્રિયા દ્વારા ધાતુની તટસ્થ પ્લેટમાંથી 10^{19} ઈલેક્ટ્રૉનને દૂર કરવામાં આવે, તો ધાતુની પ્લેટ પરનો વિદ્યુતભાર ....

(A) −1.6 C (B) + 1.6 C (D) 10^9 C (D) 10^{-19} C

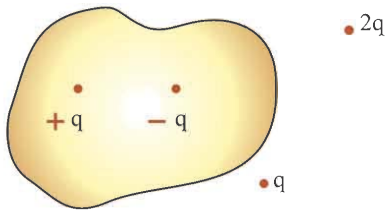
22. સમઘનના કેન્દ્ર પર વિદ્યુતભાર Q મૂકેલો છે. સમઘનના કોઈ એક પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલું વિદ્યુત-ફ્લક્સ ....

(A) $\frac{Q}{\varepsilon_0}$ (B) $\frac{Q}{2\varepsilon_0}$ (C) $\frac{Q}{4\varepsilon_0}$ (D) $\frac{Q}{6\varepsilon_0}$

23. m દળના પ્રવાહીના બુંદ પર વિદ્યુતભાર q છે. આ બુંદને સંતુલિત કરવા માટે વિદ્યુતક્ષેત્ર Eનું મૂલ્ય કેટલું હોવું જોઈએ ?

(A) $\frac{mg}{q}$ (B) $\frac{E}{m}$ (C) mgq (D) $\frac{mq}{g}$

24. આકૃતિમાં દર્શાવેલ બંધ પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલું વિદ્યુત-ફ્લક્સ ....



(A) $\frac{3q}{\varepsilon_0}$ (B) $\frac{2q}{\varepsilon_0}$

(C) $\frac{q}{\varepsilon_0}$ (D) શૂન્ય

25. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ એક છેડેથી ખુલ્લા નળાકારના ખુલ્લા છેડે કેન્દ્ર પર q વિદ્યુતભાર મૂકેલો છે. આ નળાકારના પૃષ્ઠમાંથી પસાર થતું કુલ ફ્લક્સ ....

(A) $\frac{q}{\varepsilon_0}$ (B) $\frac{2q}{\varepsilon_0}$

(C) $\frac{q}{2\varepsilon_0}$ (D) શૂન્ય

જવાબો

1. (D)	**2.** (A)	**3.** (C)	**4.** (B)	**5.** (D)	**6.** (A)
7. (A)	**8.** (C)	**9.** (A)	**10.** (C)	**11.** (B)	**12.** (A)
13. (C)	**14.** (D)	**15.** (B)	**16.** (C)	**17.** (D)	**18.** (A)
19. (D)	**20.** (C)	**21.** (B)	**22.** (D)	**23.** (A)	**24.** (D)
25. (C)					

નીચે આપેલ પ્રશ્નોના જવાબ ટૂંકમાં આપો :

1. 1 μC વિદ્યુતભાર કેટલા પ્રોટોનને સમતુલ્ય છે ?
2. સમાન ત્રિજ્યાવાળા બે સુવાહક ગોળાઓ પૈકી એક ગોળા પર 1000 ઇલેક્ટ્રૉન જેટલો વિદ્યુતભાર અને બીજા ગોળા પર 600 પ્રોટોન જેટલો વિદ્યુતભાર છે. બંને ગોળાને તાંબાના તાર વડે સંપર્કમાં લાવ્યા બાદ દરેક ગોળા પર કેટલો વિદ્યુતભાર હશે ?
3. જો $q_1 q_2 > 0$ હોય, તો બંને વિદ્યુતભારો વચ્ચે કેવા પ્રકારનું બળ લાગશે ?
4. પરીક્ષણ વિદ્યુતભાર કોને કહે છે ? તેનું મૂલ્ય કેટલું હોવું જોઈએ ?
5. વિદ્યુત-ડાઇપોલ-મોમેન્ટ વ્યાખ્યાયિત કરો અને તેનો SI એકમ જણાવો.
6. વિદ્યુત-ડાઇપોલને વિદ્યુતક્ષેત્રને સમાંતર મૂકવામાં આવે, તો તેના કેટલું ટૉર્ક લાગશે ?
7. અસમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકેલા ડાઇપોલની વર્તણૂક જણાવો.
8. ગાઉસના પ્રમેયનું કથન આપો.
9. શા માટે બે વિદ્યુતક્ષેત્રરેખાઓ એકબીજાને છેદતી નથી ?
10. વિદ્યુત-ડાઇપોલની વિદ્યુતક્ષેત્રરેખાઓ દોરો.
11. એક ગોળાકાર ગાઉસિયન પૃષ્ઠ દ્વારા ઘેરાતો વિદ્યુતભાર 8.85×10^{-8}C છે, તો આ પૃષ્ઠ સાથે સંકળાયેલ વિદ્યુત-ફ્લક્સ કેટલું હશે ? જો ગોળાકારની ત્રિજ્યા બમણી કરવામાં આવે, તો વિદ્યુત-ફ્લક્સ કેટલું થશે ?

12. વિદ્યુતભારના સંરક્ષણનો નિયમ લખો.

13. એક વિદ્યુત-ડાઇપોલને સમઘનના કેન્દ્ર પર મૂકેલો છે. આ સમઘનનાં પૃષ્ઠો સાથે સંકળાયેલ કુલ વિદ્યુત-ફ્લક્સ કેટલું હશે ?

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. કુલંબનો નિયમ લખો અને બે વિદ્યુતભારો વચ્ચે લાગતાં બળોને સદિશના રૂપમાં રજૂ કરો.
2. વિદ્યુતભારની રેખીય ઘનતા, પૃષ્ઠઘનતા અને કદઘનતા સમજાવો અને તેમના એકમો જણાવો.
3. વિદ્યુતક્ષેત્ર એટલે શું ? સમજાવો અને તેની વિશેષતાઓ જણાવો.
4. વિદ્યુત-ડાઇપોલની અક્ષ પરના કોઈ બિંદુએ ઉદ્ભવતા વિદ્યુતક્ષેત્રનું સૂત્ર મેળવો.
5. સમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકેલા વિદ્યુત-ડાઇપોલ પર લાગતા ટૉર્કનું સૂત્ર મેળવો.
6. વિદ્યુતક્ષેત્રરેખાઓની લાક્ષણિકતાઓ જણાવો.
7. ગાઉસના પ્રમેયનું વિધાન આપો અને સમજાવો.
8. સુરેખીય નિયમિત વિદ્યુતભાર વિતરણ ધરાવતાં અનંત લંબાઈના તારથી તારને લંબદિશામાં ઉદ્ભવતા વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતાનું સૂત્ર મેળવો.
9. અનંત વિસ્તારના વિદ્યુતભારિત સમતલથી ઉદ્ભવતા વિદ્યુતક્ષેત્રનું સૂત્ર તારવો.
10. ગાઉસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી નિયમિત વિદ્યુતકદ ઘનતાવાળા ગોળા વડે ગોળાની અંદર તેમજ ગોળાની બહાર ઉદ્ભવતા વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા શોધો.

નીચેના દાખલા ગણો :

1. ધાતુના એક વિદ્યુતભારિત ગોળા Aને નાઇલોનના દોરા વડે લટકાવેલ છે. ધાતુના બીજા વિદ્યુતભારિત ધાતુના બીજા સમાન ગોળા Bને ગોળા Aની નજીક d અંતરે લાવતાં તેમની વચ્ચે F જેટલું અપાકર્ષણ બળ લાગે છે. ત્યાર બાદ ગોળા Aને ધાતુના બીજા સમાન પણ વિદ્યુતભારરહિત ગોળા C સાથે અને ગોળા Bને બીજા સમાન પણ વિદ્યુતભારરહિત ગોળા D સાથે સંપર્કમાં લાવીને પછી અલગ કરવામાં આવે છે. હવે ગોળા Bને ગોળા Aની નજીક $\frac{d}{2}$ જેટલા અંતરે લાવતાં તેમની વચ્ચે કેટલું બળ લાગશે ? [જવાબ : F]

2. સમાન વિદ્યુતભાર ધરાવતા બે સમાન ગોળાઓને આધારબિંદુથી સરખી લંબાઈની અવાહક દોરી વડે લટકાવેલ છે. જ્યારે તેમને કેરોસીનમાં ડુબાડવામાં આવે છે, ત્યારે બે દોરી વચ્ચેનો કોણ જ્યારે ગોળાઓ હવામાં હતાં, ત્યારે હતો તેટલો જ રહે છે, તો ગોળાઓના દ્રવ્યની ઘનતા શોધો. કેરોસીનનો ડાઇઇલેક્ટ્રિક અચળાંક 2 અને ઘનતા 800 kg m^{-3} છે. [જવાબ : 1600 kg m^{-3}]

3. 0.5 μC, −0.25 μC અને 0.1 μC જેટલો વિદ્યુતભાર ધરાવતા ત્રણ કણોને એક સમબાજુ ત્રિકોણ ABCનાં શિરોબિંદુઓ અનુક્રમે A, B અને C પર મૂકેલ છે. ત્રિકોણની બાજુની લંબાઈ 5.0 cm છે, તો C પર રહેલ વિદ્યુતભાર પર લાગતું પરિણામી બળ શોધો.

   $k = 9 \times 10^9$ MKS. [જવાબ : $\vec{F}_3 = 0.045\ (3, \sqrt{3})$N]

4. સમબાજુ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ પર સમાન વિદ્યુતભાર q ધરાવતા ત્રણ કણો રહેલા છે. આ ત્રિકોણના મધ્યકેન્દ્ર પર $2q$ જેટલો વિદ્યુભાર મૂકવામાં આવે, તો તેના પર લાગતું પરિણામી વિદ્યુતબળ ગણો. (મધ્યકેન્દ્રથી શિરોબિંદુ વચ્ચેનું અંતર 1 m છે.).

   [જવાબ : શૂન્ય]

5. એક વિદ્યુત-ડાઇપોલ $\vec{p}$ને સમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકી છે. હવે તેને તેની સમતોલન સ્થિતિમાંથી θ જેટલા સૂક્ષ્મ કોણે ભ્રમણ આપી છોડી દેવામાં આવે છે, તો સાબિત કરો કે આ ડાઇપોલ $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{pE}{I}}$ આવૃત્તિ સાથે સરળ આવર્તગતિ કરે છે. અત્રે, I એ ડાઇપોલની જડત્વની ચાકમાત્રા છે.

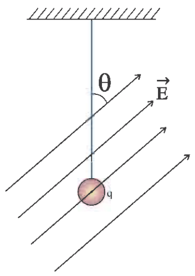
6. એક ખૂબ જ મોટા પૃષ્ઠ પર વિદ્યુતભાર પૃષ્ઠઘનતા $-3.0 \times 10^{-6} Cm^{-2}$ છે. હવે 150 eV ઊર્જાવાળા ઇલેક્ટ્રૉનને કેટલા અંતરેથી પૃષ્ઠ તરફ ફેંકવો જોઈએ કે જેથી તેનો વેગ પૃષ્ઠ પર પહોંચતા શૂન્ય થઈ જાય ? ઇલેક્ટ્રૉનનો વિદ્યુતભાર = 1.6×10^{-19}C. 1 eV = 1.6×10^{-19}J, $\varepsilon_0 = 9 \times 10^{-12}$ SI

[જવાબ : 9×10^{-4}m]

7. એક ધન વિદ્યુતભારિત અને બીજો ઋણ વિદ્યુતભારિત સમાન ગોળાઓને એકબીજાથી 0.5m અંતરે રાખતાં તેમની વચ્ચે 0.108N જેટલું આકર્ષણબળ ઉદ્‌ભવે છે. બંને ગોળાઓને સંપર્કમાં લાવી છુટા પાડી 0.5m અંતરે રાખતાં તેમની વચ્ચે 0.036N જેટલું અપાકર્ષણ બળ ઉદ્‌ભવે છે. આ ગોળાઓ પર પ્રારંભમાં વિદ્યુતભાર કેટલો હશે ?

[જવાબ : $q_1 = \pm 3.0 \times 10^{-6}$C, $q_2 = \mp 1.0 \times 10^{-6}$C]

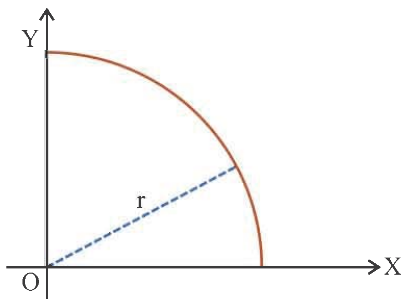
8. m અને 2m દળ ધરાવતાં બે વિદ્યુતભારિત કણ પરનો વિદ્યુતભાર અનુક્રમે $+2q$ અને $+q$ છે. બંને કણો સમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં એકબીજાથી દૂરના અંતરે મૂકેલા છે. હવે, બંને કણોને t સમય માટે ગતિ કરવા માટે મુક્ત કરતાં તેમની ગતિ-ઊર્જાનો ગુણોત્તર શોધો. [જવાબ : 8 : 1]

9. 

એક સાદું લોલક આકૃતિમાં દર્શાવેલ સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ માં રાખેલ છે. જો લોલકની લંબાઈ l હોય, તો આ લોલકનો આવર્તકાળ કેટલો હશે ? લોલકના ગોળા પરનો વિદ્યુભાર q અને ગોળાનું દળ m છે.

[જવાબ : $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{l}{\left(g^2 + \dfrac{q^2E^2}{m^2} - \dfrac{2gqE}{m}\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}}}}$]

10. 1 cm ત્રિજ્યાવાળા એક ગોળા પર 4×10^{-8}C જેટલો વિદ્યુતભાર સમાન રીતે વિતરિત થયેલ છે. આ ગોળાની સાથે સમકેન્દ્રિય હોય તેવો 5 cm ત્રિજ્યાનો એક પોલો, વાહક ગોળો રાખેલ છે, તો ગોળાના કેન્દ્રથી 2 cm દૂર આવેલ બિંદુ પાસે વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધો.
$k = 9 \times 10^9$ SI લો. [જવાબ : 9×10^5 NC^{-1}]

11. 

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પ્રથમ ચરણમાં રહેલી r ત્રિજ્યાની ચાપ પરના, λ જેટલી નિયમિત રેખીય ઘનતા ધરાવતા વિદ્યુતભારને કારણે ઊગમબિંદુ પર વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતાનાં મૂલ્ય અને દિશા શોધો.

[જવાબ : $E = \dfrac{\sqrt{2}k\lambda}{r}$, ઋણ X-અક્ષ સાથે તૃતીય ચરણમાં 45°]

12. 5×10^{-9}kg દળના એક કણને ખૂબ મોટા વિસ્તારમાં ફેલાયેલા એક વિદ્યુતભારિત સમક્ષિતિજ સમતલથી અમુક અંતરે ઉપર પકડી રાખેલ છે. આ સમતલ પર વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠઘનતા 4×10^{-6}C/m^2 જેટલી છે. આ કણને જેટલો વિદ્યુતભાર આપવો જોઈએ કે જેથી તેને મુક્ત કરતાં તે સ્થિર રહે ? $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} C^{-2}N^{-1}m^{-2}$. $g = 9.8$ ms^{-2} [જવાબ : $q = 2.17 \times 10^{-13}$ C]

13. હાઇડ્રોજન પરમાણુમાં પ્રોટોનની આજુબાજુ ભ્રમણ કરતાં ઇલેક્ટ્રૉનના ભ્રમણકક્ષાની ત્રિજ્યા 0.53 Å છે. તો ઇલેક્ટ્રૉનનો ત્રિજ્યાવર્તી પ્રવેગ અને તેનો કોણીય વેગ શોધો.

[જવાબ : $a_r = 9.01 \times 10^{22}$ m/s^2, $\omega = 3.9 \times 10^{16}$ rad/s)