6 સદિશનું બીજગણિત

> **Mathematics knows no races or geographic boundaries;**
> **for mathematics, the cultural world is one country.**
>
> **– Jules Henri**

6.1 પ્રાસ્તાવિક

જ્યારે આપણે દૈનિક સંવાદમાં કોઈ જથ્થા વિશે ચર્ચા કરતા હોઈએ છીએ, ત્યારે મહદંશે, આપણે જેને ફક્ત માન (માપ) હોય છે તેવા અદિશ જથ્થા વિશે ચર્ચા કરતા હોઈએ છીએ. જો આપણે એમ કહીએ કે મેં 50 કિમી ગાડી હંકારી (ચલાવી), તો આપણે મુસાફરી કરેલ અંતર વિશે વાત કરી કહેવાય. અહીં આપણે કઈ દિશામાં મુસાફરી કરી તે વિશે ચિંતા કરતા નથી. 50 કિમી એ એક 'અદિશ' રાશિ છે. હવે, જો આપણે આપણા ઘર તરફ ગાડી હંકારી ગયા હોઈએ, તો ફક્ત 50 કિમી ગાડી હંકારી ગયા એમ કહેવું પૂરતું નથી, પરંતુ આપણે એમ કહેવું જોઈએ કે, આપણે આપણા ઘરે પહોંચવા માટે દક્ષિણ દિશામાં 50 કિમી ગાડી હંકારી. આ હકીકત ફક્ત માન દર્શાવતી નથી પરંતુ આ માપ સાથે દિશા પણ સૂચવે છે. આવી રાશિને 'સદિશ' રાશિ કહે છે.

લેટિન શબ્દ **વેક્ટર (Vector)** નો અર્થ 'વાહક' (Carries) થાય છે. સદિશ એ બે બિંદુઓ (શરૂઆતનું બિંદુ અને અંતિમ બિંદુ) વચ્ચેના અંતરના માપનું તથા શરૂઆતના બિંદુથી અંતિમ બિંદુ તરફની દિશાનું 'વહન' કરે છે. મોટા ભાગની બૈજિક ક્રિયાઓ જેવી કે સરવાળો, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકારના નિયમો તથા સદિશ ક્રિયાઓનાં સરવાળા, બાદબાકી, અદિશ વડે ગુણાકારમાં સમાનતા જણાય છે. R પરના બૈજિક ગુણધર્મો જેવા કે, ક્રમ, જૂથના નિયમ પણ સદિશના સરવાળામાં દૃષ્ટિગોચર થાય છે.

ભૌતિકવિજ્ઞાનના અભ્યાસમાં સદિશ અગત્યનો ભાગ ભજવે છે. તેનું ખૂબ જ મહત્ત્વ છે. વેગ, પ્રવેગ, પદાર્થ પર લાગતું બળ જેવાં ઘણાં ભૌતિક પદોની રજુઆતમાં સદિશની આવશ્યકતા છે. ઘણાં ભૌતિક પદો અંતર દર્શાવતાં નથી, પરંતુ તેઓ સદિશ દ્વારા વ્યક્ત કરવામાં આવે છે અને તેથી જ ભૌતિકવિજ્ઞાનના સિદ્ધાંતો સમજવા માટે સદિશ ખૂબ જ અગત્યનો છે.

ભૌતિકવિજ્ઞાન મુખ્યત્વે ગુરુત્વાકર્ષણ, વિદ્યુતબળ, ચુંબકીયબળ, વિદ્યુતચુંબકીયબળ કે યાંત્રિકબળોનો અભ્યાસ કરે છે. ભૌતિકશાસ્ત્રીઓએ વૈજ્ઞાનિક પ્રયોગોથી એ શોધી કાઢ્યું હતું કે, આ બળો સામાન્ય પરિસ્થિતિમાં રૈખિક (સદિશ) કાર્યરત હોય છે તથા તેમનાં પરિણામી બળો એ પણ સદિશ સરવાળાનું જ પરિણામ છે, ઉદાહરણ તરીકે વિદ્યુતબળનો **કુલંબનો નિયમ (Coulomb's law of Electrostatics)**. તેથી આવાં બળોનો અભ્યાસ કરવા માટે સદિશ અવકાશ, તેની બૈજિકક્રિયા વગેરેનો વિકાસ થયો છે.

આપણે જે અક્ષરનો (ચલ) સદિશ દર્શાવવા ઉપયોગ કર્યો હોય, તેના ઉપરના ભાગમાં (મથાળે) તીર ($\rightarrow$) અથવા બાર (–) ચિહ્ન કરીએ છીએ અથવા છાપકામમાં ગાઢા અક્ષરથી પણ સદિશ દર્શાવાય છે. ગણિત, ભૌતિકવિજ્ઞાન અને ઈજનેરી શાખાઓના અભ્યાસમાં લંબાઈ, અંતર, ઝડપ, સમય, દ્રવ્ય વગેરે જેવી અદિશ રાશિ તથા સ્થાનાંતર, વેગ, પ્રવેગ, બળ, વજન જેવી સદિશ રાશિઓનો ડગલે ને પગલે ઉપયોગ થાય છે.

આપણે ધોરણ XI માં સદિશ અવકાશ R^2 તથા R^3 નો તેમજ સદિશ પરની કેટલીક ક્રિયાઓ જેવી કે, સદિશોના સરવાળા, સદિશનો અદિશ વડે ગુણાકાર અને તેમના ગુણધર્મો, સદિશનું માન, એકમ સદિશ વગેરેનો અભ્યાસ કર્યો. આ મુદ્દાઓ હવે પછીના આગળના અભ્યાસમાં ઉપયોગી છે. તેથી આ પ્રકરણમાં આપણે આ મુદ્દાઓનો સારાંશ આપીશું અને કેટલાંક ઉદાહરણો દ્વારા તેનું દૃઢીકરણ કરીશું.

6.2 સદિશ અવકાશના એક ઘટક તરીકે સદિશ :

$R^2 = \{(x, y) \mid x \in R, y \in R\}$

$R^3 = \{(x, y, z) \mid x \in R, y \in R, z \in R\}$

આપણે સમાનતા, સરવાળા તથા અદિશ વડે ગુણાકારના પૃષ્ઠ 192 પર આપેલા નિયમથી મળતા ગણ R^2 અને R^3 ને R પરના સદિશ અવકાશ કહીશું.

સદિશ અવકાશ R^2 અને R^3 ના ઘટકોને $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ વગેરે વડે દર્શાવાય છે. $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ વગેરેને સદિશ કહીશું. Rના ઘટકોને અદિશ કહીશું.

સદિશોની સમાનતા :

$(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$ અને $z_1 = z_2$.

સદિશનો સરવાળો :

$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

અદિશ વડે ગુણાકાર :

$k(x_1, y_1, z_1) = (kx_1, ky_1, kz_1), \quad k \in R$

R^3 ના ઘટકોના સરવાળા તથા અદિશ વડે ગુણાકારના ગુણધર્મો :

(1) **સંવૃત્તતા :** $\forall \bar{x}, \bar{y} \in R^3, \bar{x} + \bar{y} \in R^3$

(2) **સરવાળા માટે ક્રમનો નિયમ :** $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}; \forall \bar{x}, \bar{y} \in R^3$

(3) **સરવાળા માટે જૂથનો ગુણધર્મ :** $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}); \forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in R^3$

(4) **સરવાળા માટે તટસ્થ ઘટકનું અસ્તિત્વ :** સદિશ $\bar{0} \in R^3$ એવો મળે કે જેથી $\bar{x} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{x} = \bar{x}$ $\forall \bar{x} \in R^3$. $\bar{0}$ ને શૂન્ય સદિશ કહે છે. $\bar{0} = (0, 0, 0)$

(5) **વિરોધી ઘટકનું અસ્તિત્વ :** પ્રત્યેક સદિશ $\bar{x} \in R^3$ માટે $-\bar{x} \in R^3$ એવો અસ્તિત્વ ધરાવે કે જેથી $\bar{x} + (-\bar{x}) = (-\bar{x}) + \bar{x} = \bar{0}$. આ સદિશ $-\bar{x}$ ને $\bar{x}$ નો વિરોધી ઘટક (Additive inverse) કહે છે.

(6) $\forall k \in R$ અને $\bar{x} \in R^3$; $k\bar{x} \in R^3$.

(7) $\forall k \in R, k(\bar{x} + \bar{y}) = k\bar{x} + k\bar{y}; \forall \bar{x}, \bar{y} \in R^3$

(8) $\forall k, l \in R, (k + l)\bar{x} = k\bar{x} + l\bar{x}; \forall \bar{x} \in R^3$

(9) $\forall l, k \in R, (kl)\bar{x} = k(l\bar{x}), \forall \bar{x} \in R^3$

(10) $1\bar{x} = \bar{x}, \forall \bar{x} \in R^3$

આવા જ નિયમો R^2 ના ઘટકોને માટે પણ સત્ય છે.

કેટલીક પાયાની સંકલ્પનાઓ :

સદિશનું માન : જો $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, તો સદિશ $\bar{x}$ નું માન $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ છે. તેને $|\bar{x}|$ વડે દર્શાવાય છે. તે જ રીતે, $\bar{x} = (x_1, x_2)$, તો $|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

ઉદાહરણ તરીકે, $\bar{x} = (1, 2, -2)$, તો $|\bar{x}| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-2)^2} = 3$.

નીચેના ગુણધર્મો સ્પષ્ટ છે : ($\bar{x} \in R^2$ અથવા $\bar{x} \in R^3$)

(1) $|\bar{x}| \geq 0$

(2) $|\bar{x}| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$

(3) $|k\bar{x}| = |k| \, |\bar{x}|, k \in R$

એકમ સદિશ : જો $|\bar{x}| = 1$, થાય, તો $\bar{x}$ ને એકમ સદિશ કહેવાય. $\bar{x}$ ને સંગત એકમ સદિશને $\hat{x}$ વડે દર્શાવાય છે.

ઉદાહરણ તરીકે, જો $\bar{x} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, હોય, તો $|\bar{x}| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$ અને તેથી $\bar{x}$ એકમ સદિશ છે.

$\hat{i} = (1, 0, 0)$, $\hat{j} = (0, 1, 0)$, $\hat{k} = (0, 0, 1)$ એ અનુક્રમે X-અક્ષ, Y-અક્ષ અને Z-અક્ષની ધન દિશાના એકમ સદિશો છે.

6.3 સદિશની દિશા

ધારો કે $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ એ R^2 અથવા R^3 ના શૂન્યેતર સદિશ છે તથા $k \in R$ છે.

જો (i) $\bar{x} = k\bar{y}$; $k > 0$, તો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ ની દિશા સમાન છે.

(ii) $\bar{x} = k\bar{y}$; $k < 0$, તો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ એક બીજાની વિરુદ્ધ દિશાના સદિશો છે.

(iii) કોઈપણ શૂન્યેતર $k \in R$ માટે $\bar{x} \neq k\bar{y}$, તો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ ભિન્ન દિશાના સદિશો છે.

જો શૂન્યેતર સદિશો $\bar{x}$ તથા $\bar{y}$ ની દિશા સમાન હોય અથવા પરસ્પર વિરુદ્ધ હોય તો તેમને સમરેખ સદિશ કહે છે.

$\therefore$ જો $\bar{x} = k\bar{y}$ તો અને તો જ $\bar{x}$ તથા $\bar{y}$ સમરેખ છે. ($\bar{x} \neq \bar{0}, \bar{y} \neq \bar{0}$)

સંકેત : $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ થી નિર્ણિત થતી દિશાને $<x_1, x_2, x_3>$ દ્વારા દર્શાવાય છે. $\overline{x}$ ની દિશાની વિરૂદ્ધ દિશાને $-<x_1, x_2, x_3>$ દ્વારા દર્શાવાય છે.

નીચેનું પરિણામ સ્પષ્ટ છે.

(i) જો $k > 0$ તો $<x_1, x_2, x_3> = <kx_1, kx_2, kx_3>$

(ii) જો $k < 0$ તો $-<x_1, x_2, x_3> = <kx_1, kx_2, kx_3>$

આપણે $\overline{x}$ ની દિશા (kx_1, kx_2, kx_3), $k \in R - \{0\}$ વડે પણ દર્શાવીશું.

આપણે નીચેનાં પ્રમેયો સાબિતી આપ્યા વગર સ્વીકારી લઈશું.

પ્રમેય 6.1 : જો શૂન્યેતર સદિશો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ સમાન હોય, તો અને તો જ $|\overline{x}| = |\overline{y}|$ તથા $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ સમદિશ છે.

પ્રમેય 6.2 : જો $\overline{x} \neq \overline{0}$ તો $\overline{x}$ થી નિર્ણિત થતી દિશામાં અનન્ય એકમ સદિશ હોય છે.

આપેલ સદિશની દિશામાં એકમ સદિશ : જો $\overline{x}$ એ શૂન્યેતર સદિશ હોય, તો $\frac{1}{|\overline{x}|}\overline{x}$ એ $\overline{x}$ ની દિશામાં એકમ સદિશ છે. તેને $\hat{x}$ વડે દર્શાવાય છે.

$\overline{y} = \frac{k\overline{x}}{|\overline{x}|}$, $k > 0$ એ $\overline{x}$ ની દિશાનો k માનવાળો સદિશ છે.

$\overline{y} = -\frac{k\overline{x}}{|\overline{x}|}$, $k > 0$ એ $\overline{x}$ ની વિરૂદ્ધ દિશાનો k માનવાળો સદિશ છે.

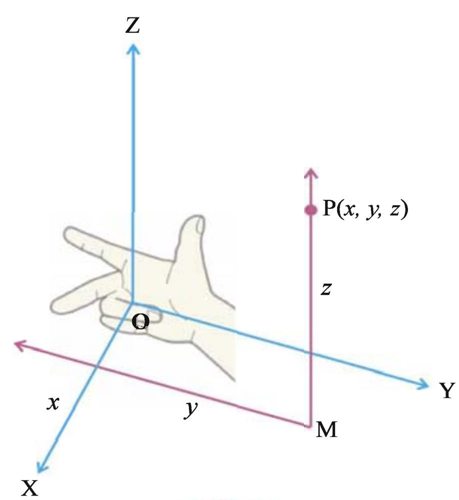
ઉદાહરણ 1 : $\overline{x} = (3, 0, -4)$ ની વિરૂદ્ધ દિશામાં 10 માનવાળો સદિશ શોધો.

ઉકેલ : $|\overline{x}| = \sqrt{9+0+16} = 5$

$\therefore$ $\overline{x}$ ની વિરૂદ્ધ દિશામાં 10 માનવાળો સદિશ

$\frac{-10}{|\overline{x}|}\overline{x} = \frac{-10}{5}(3, 0, -4) = (-6, 0, 8)$.

અવકાશના કોઈ બિંદુ O માંથી પસાર થતી ત્રણ પરસ્પર લંબ રેખાઓ લઈએ. તેમને X-અક્ષ, Y-અક્ષ તથા Z-અક્ષ તરીકે લઈશું. સામાન્ય રીતે X-અક્ષ તથા Y-અક્ષથી સમક્ષિતિજ સમતલ બને છે. Z-અક્ષ આ સમતલને લંબ હોય છે. **ત્રણે અક્ષની ધન દિશા જમણા હાથના અંગૂઠાના નિયમને** અનુસરે છે એટલે કે જો જમણા હાથની મુઠ્ઠીની વળેલી આંગળીઓ ધન X-અક્ષ તરફથી ધન Y-અક્ષ તરફ ઘડિયાળના કાંટાથી ઊલટી દિશામાં $\frac{\pi}{2}$ જેટલું પરિભ્રમણ સૂચવે, તો અંગૂઠો ધન Z-અક્ષની દિશામાં હોય છે.



આકૃતિ 6.1

6.4 સ્થાન સદિશ :

ધારો કે $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ એ એક સદિશ છે અને અવકાશમાં હોય તેવું બિંદુ $P(x_1, x_2, x_3)$ છે. જેનું આરંભબિંદુ O હોય અને અંત્યબિંદુ P હોય, તેવા દિશાયુક્ત રેખાખંડ $\overline{OP}$ ને બિંદુ P ના સ્થાન સદિશનું ભૌમિતિક નિરૂપણ કહે છે. તેને $\overrightarrow{OP}$ વડે દર્શાવાય છે. આમ P નો સ્થાન સદિશ $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ છે એટલે કે $\overrightarrow{OP} = (x_1, x_2, x_3)$. બિંદુનો સ્થાન સદિશ $\overline{x}$ હોય તો $\overrightarrow{OP} = \overline{x}$ એ સદિશનું ભૌમિતિક નિરૂપણ છે.

જો R^3 નાં બે ભિન્ન બિંદુઓ $A(x_1, x_2, x_3)$ અને $B(y_1, y_2, y_3)$ હોય, તો આરંભબિંદુ A ધરાવતો અને અંત્યબિંદુઓ B ધરાવતો સદિશ એ $\overrightarrow{AB}$ થશે.

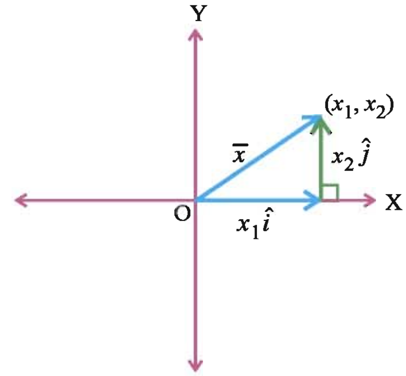
પ્રમેય 6.3 : (1) R^2 ના પ્રત્યેક સદિશને $\hat{i}$ તથા $\hat{j}$ ના સુરેખ સંયોજન તરીકે અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાય.

સાબિતી : ધારોકે $\overline{x} = (x_1, x_2) \in R^2$

તેથી $\overline{x} = (x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2)$

$= x_1(1, 0) + x_2(0, 1)$

$= x_1\hat{i} + x_2\hat{j}$



આકૃતિ 6.2

આમ $\overline{x}$ એ $\hat{i}$ તથા $\hat{j}$ નું **સુરેખ સંયોજન** છે. **(Linear Combination)** હવે ધારો કે $\overline{x}$ ને $\overline{x} = p\hat{i} + q\hat{j}$ પ્રમાણે $\hat{i}$ તથા $\hat{j}$ ના અન્ય સુરેખ સંયોજન તરીકે દર્શાવીએ તો,

$$(x_1, x_2) = \overline{x} = p\hat{i} + q\hat{j}$$
$$= p(1, 0) + q(0, 1)$$
$$= (p, 0) + (0, q)$$
$$= (p, q)$$

$\therefore$ $x_1 = p$ અને $x_2 = q$

$\therefore$ $p\hat{i} + q\hat{j}$ અને $x_1\hat{i} + x_2\hat{j}$ એક જ છે.

આમ $\overline{x} = x_1\hat{i} + x_2\hat{j}$ એ $\overline{x}$ નું $\hat{i}$ અને $\hat{j}$ ના સુરેખ સંયોજન તરીકે અનન્ય નિરૂપણ છે.

(2) R^3 ના પ્રત્યેક સદિશને $\hat{i}$, $\hat{j}$ તથા $\hat{k}$ ના સુરેખ સંયોજન તરીકે અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાય.

સાબિતી : ધારોકે $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$.

તેથી $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3)$

$= x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1)$

$= x_1\hat{i} + x_2\hat{j} + x_3\hat{k}$

જો $\overline{x} = p\hat{i} + q\hat{j} + r\hat{k}$, તો (1)ની જેમ જ આપણને $x_1 = p$, $x_2 = q$ અને $x_3 = r$ મળે.

આમ, $\overline{x} = x_1\hat{i} + x_2\hat{j} + x_3\hat{k}$ એ સદિશ $\overline{x}$ નું $\hat{i}$, $\hat{j}$ તથા $\hat{k}$ ના સુરેખ સંયોજન તરીકે અનન્ય નિરૂપણ છે.

ભૌમિતિક નિરૂપણ :

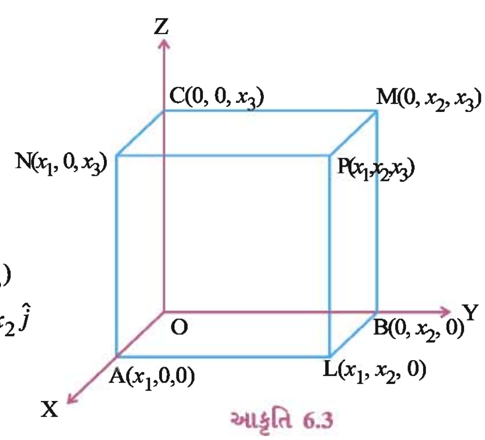
ધારો કે $\overrightarrow{OP} = (x_1, x_2, x_3)$.

બિંદુ P માંથી XY સમતલ પરનો લંબપાદ L છે. તેથી $L(x_1, x_2, 0)$ થશે. (આકૃતિ 6.3).

$\overrightarrow{LP} = \overrightarrow{OC} = x_3\hat{k}$.

તે જ પ્રમાણે P માંથી YZ અને ZX સમતલ પરના લંબપાદ અનુક્રમે M અને N છે. તેથી $M(0, x_2, x_3)$ અને $N(x_1, 0, x_3)$ થશે અને તેથી $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OA} = x_1\hat{i}$ અને $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{OB} = x_2\hat{j}$

મુક્ત સદિશો $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{NP}$ અને $\overrightarrow{LP}$ ને અનુરૂપ બદ્ધ **(Bound)** સદિશો અનુક્રમે $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ અને $\overrightarrow{OC}$ છે.



આકૃતિ 6.3

[A, B અને C ના યામ અનુક્રમે $(x_1, 0, 0)$, $(0, x_2, 0)$ અને $(0, 0, x_3)$ છે.]

હવે, $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = x_1\hat{i} + x_2\hat{j}$ $(\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AL})$

[તેથી L ના યામ $(x_1, x_2, 0)$. તે જ પ્રમાણે M ના યામ $(0, x_2, x_3)$ અને N ના યામ $(x_1, 0, x_3)$ છે.]

તથા $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LP} = x_1\hat{i} + x_2\hat{j} + x_3\hat{k}$.

$\overrightarrow{OP} = x_1\hat{i} + x_2\hat{j} + x_3\hat{k}$ સ્વરૂપને સદિશનું ઘટક **(component)** સ્વરૂપ કહે છે. અહીં x_1, x_2 અને x_3 એ $\overrightarrow{OP}$ ના **અદિશ ઘટકો** છે જ્યારે $x_1\hat{i}$, $x_2\hat{j}$ અને $x_3\hat{k}$ એ $\overrightarrow{OP}$ ના **સદિશ ઘટકો.** છે.

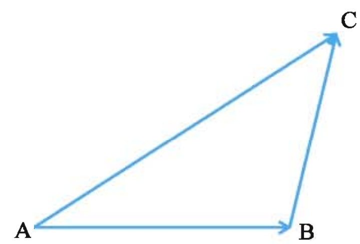
નોંધ : (1) બિંદુ $P(x_1, x_2, x_3)$ નું XY સમતલથી અંતર $PL = |x_3|$. તેજ પ્રમાણે P નું YZ સમતલથી અંતર $= PM = |x_1|$ અને ZX સમતલથી અંતર $= PN = |x_2|$.

(2) $P(x_1, x_2, x_3)$ નું X-અક્ષથી અંતર $AP = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$. તે જ પ્રમાણે Y-અક્ષથી અંતર $= BP = \sqrt{x_3^2 + x_1^2}$ અને Z-અક્ષથી અંતર $= CP = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

(3) $P(x_1, x_2, x_3)$ નું ઊગમબિંદુથી અંતર $OP = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

6.5 સદિશના સરવાળાનો ત્રિકોણનો નિયમ :

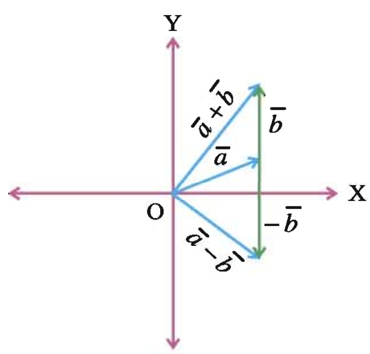
ધારો કે પદાર્થનું સ્થાનાંતર A થી B થાય છે. તેને $\overrightarrow{AB}$ વડે દર્શાવાય છે અને પછી આ પદાર્થનું સ્થાનાંતર B થી C થાય છે. તેને $\overrightarrow{BC}$ થી દર્શાવાય છે. આકૃતિ 6.4. માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે તે પદાર્થના A થી C સુધીના કુલ સ્થાનાંતર ને $\overrightarrow{AC}$ વડે દર્શાવાય છે અને તે $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ દ્વારા મેળવી શકાય છે. આ નિયમને **સદિશના સરવાળાનો ત્રિકોણનો નિયમ (Triangle Law of Vector Addition)** કહે છે.



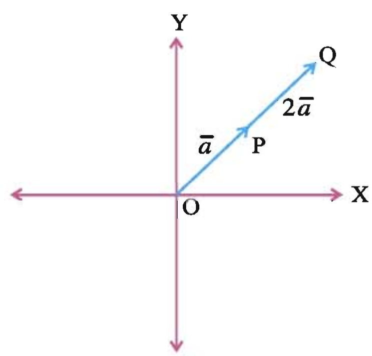
આકૃતિ 6.4

A, B, અને C ના સ્થાન સદિશ અનુક્રમે $\bar{a}$, $\bar{b}$ અને $\bar{c}$ લેતાં,

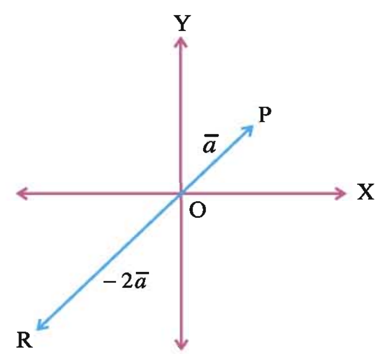
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (\bar{b} - \bar{a}) + (\bar{c} - \bar{b}) = \bar{c} - \bar{a} = \overrightarrow{AC}$$



આકૃતિ 6.5



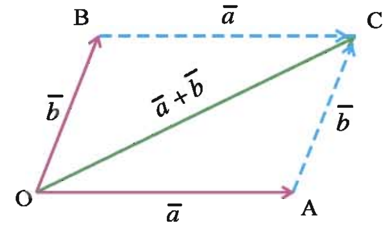
આકૃતિ 6.6



આકૃતિ 6.7

R^2 ના બે શૂન્યેતર સદિશો $\bar{a}$ અને $\bar{b}$ પર સરવાળા તથા તફાવતની સદિશની ક્રિયાઓ આકૃતિ 6.5 માં દર્શાવી છે આકૃતિ 6.6 અને 6.7 એ R^2 ના સદિશનો અદિશ વડે ગુણાકાર દર્શાવે છે. અહીં $\overrightarrow{OP} = \bar{a}$, $\overrightarrow{OQ} = 2\bar{a}$ અને $\overrightarrow{OR} = -2\bar{a}$ છે.

સદિશના સરવાળાનો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો નિયમ :



આકૃતિ 6.8

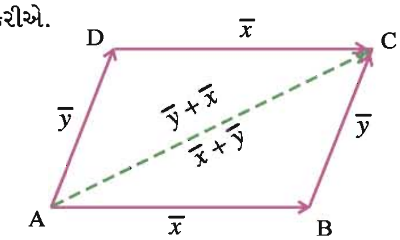
ધારો કે $\overrightarrow{OA} = \overline{a}$ અને $\overrightarrow{OB} = \overline{b}$ બે ભિન્ન સદિશો છે. આપણે આકૃતિ 6.8 માં બતાવ્યા પ્રમાણે એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ OACB ની રચના કરીએ. બંને સદિશોના સામાન્ય આરંભબિંદુથી શરૂ થતો સદિશ $\overrightarrow{OC}$ એ સદિશો $\overline{a}$ અને $\overline{b}$ નો સરવાળો દર્શાવે છે. આમ, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. આ નિયમને સદિશના સરવાળાનો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો નિયમ કહે છે.

નોંધ : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$ $\quad (\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

સદિશનાં સરવાળાના ગુણધર્મો (ભૌમિતિક રીતે) :

ગુણધર્મ 1 : કોઈપણ સદિશો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ માટે $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$ **(ક્રમનો નિયમ)**



આકૃતિ 6.9

$\overrightarrow{AB} = \overline{x}$ અને $\overrightarrow{AD} = \overline{y}$ લો. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD પૂર્ણ કરીએ.

$\therefore$ $\overrightarrow{BC} = \overline{y}$ અને $\overrightarrow{DC} = \overline{x}$ (પ્રમેય 6.1)

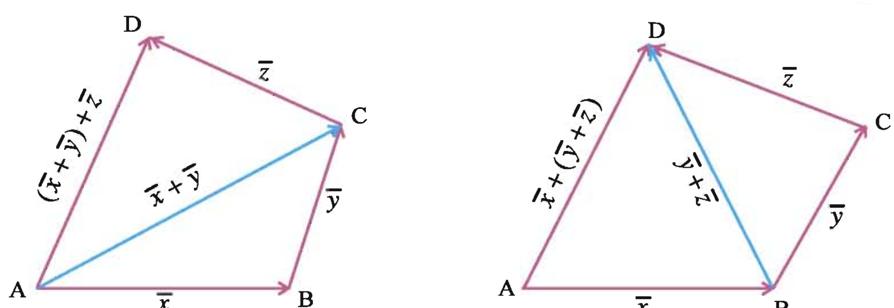
હવે ΔABC માટે સદિશના ત્રિકોણના નિયમના ઉપયોગથી, આપણને $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \overline{x} + \overline{y}$ મળશે.

તે જ પ્રમાણે, ΔADC પરથી $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$

$\therefore \overline{y} + \overline{x} = \overrightarrow{AC}$.

આમ, $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$.

ગુણધર્મ 2 : સદિશો $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, માટે $(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z})$ **(જૂથનો નિયમ)**



(a) (b)

આકૃતિ 6.10

$\overrightarrow{AB} = \overline{x}$, $\overrightarrow{BC} = \overline{y}$, અને $\overrightarrow{CD} = \overline{z}$ લો. સદિશોના સરવાળાના નિયમ પરથી.

આકૃતિ 6.10(a) માટે,

ΔABC પરથી,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\therefore \overline{x} + \overline{y} = \overrightarrow{AC}$.

ΔACD પરથી,

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

$\therefore (\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \overrightarrow{AD}$.

આકૃતિ 6.10(b) માટે,

ΔBCD પરથી,

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$

$\therefore \overline{y} + \overline{z} = \overrightarrow{BD}$.

ΔABD પરથી,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

$\therefore \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z}) = \overrightarrow{AD}$.

આમ, $(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z})$.

ઉદાહરણ 2 : આરંભબિંદુ (3, 2, −1) અને અંત્યબિંદુ (4, −2, 0) હોય તેવો સદિશ અને તેનું માન શોધો.

ઉકેલ : A(3, 2, −1) આરંભબિંદુ અને B(4, −2, 0) અંત્યબિંદુ હોય તેવો સદિશ $\overrightarrow{AB}$ છે.

$\therefore$ $\overrightarrow{AB}$ = B નો સ્થાન સદિશ − A નો સ્થાન સદિશ

$= (4, -2, 0) - (3, 2, -1)$

$= (1, -4, 1)$

$\overrightarrow{AB}$ નું માન $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1)^2 + (-4)^2 + (1)^2}$

$\therefore$ $AB = \sqrt{18}$

$= 3\sqrt{2}$

સ્વાધ્યાય 6.1

1. નીચેના સદિશોનું માન શોધો :

(1) $(2, 3, \sqrt{3})$ (2) $3\hat{i} - 4\hat{k}$ (3) $\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$

2. $2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ની દિશામાં એકમ સદિશ શોધો.
3. $2\sqrt{17}$ માનવાળો અને (3, −2, −2) ની દિશાનો સદિશ શોધો.
4. 20 માનવાળો અને $-3\hat{i} + 2\sqrt{3}\,\hat{j} - 2\hat{k}$ ની દિશાની વિરૂદ્ધ દિશાનો સદિશ શોધો.
5. $\overline{x} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ અને $\overline{y} = 2\hat{i} + \hat{j}$, સદિશો માટે $\overline{x} + 2\overline{y}$ ની દિશામાં એકમ સદિશ મેળવો.
6. આરંભબિંદુ (−2, 1, 0) અને અંત્યબિંદુ (1, −5, 7) હોય તેવા સદિશના સદિશ તેમજ અદિશ ઘટકો લખો.
7. બિંદુ P નો સ્થાન સદિશ (4, 5, −3) હોય તો P નું (i) ZX સમતલથી (ii) Y-અક્ષથી (iii) ઊગમબિંદુથી અંતર શોધો.

*

6.6 R^2 અને R^3 માં સદિશોનું અંતઃગુણન

જો $\overline{x} = (x_1, x_2)$ અને $\overline{y} = (y_1, y_2)$ એ R^2 ના સદિશો હોય, તો તેમનું અંતઃ ગુણન $x_1y_1 + x_2y_2$ તરીકે વ્યાખ્યાયિત થાય છે તથા તેને $\overline{x} \cdot \overline{y}$ વડે દર્શાવાય છે. આમ $\overline{x} \cdot \overline{y} = x_1y_1 + x_2y_2$.

તે જ પ્રમાણે જો, $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ અને $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ એ R^3 ના સદિશો હોય, તો

$\overline{x} \cdot \overline{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ થાય.

અહીં $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ બંને સદિશ છે, પરંતુ $\overline{x} \cdot \overline{y}$ એ સદિશ નથી, તે એક વાસ્તવિક સંખ્યા છે. આમ, બે સદિશોનું અંતઃગુણન અદિશ છે. તેથી અંતઃગુણનને **અદિશ ગુણાકાર (Scalar Product)** પણ કહે છે. આ ક્રિયાને **અદિશ ગુણાકારની ક્રિયા (Scalar Multiplication)** કહે છે. અંતઃગુણનના સંકેત માટે બે સદિશ વચ્ચે ટપકું-ડોટ (.) મૂકવામાં આવે છે. તેથી તેને માટે **ડોટ ગુણાકાર (Dot Product)** શબ્દ પણ પ્રયોજવામાં આવે છે.

નોંધ : અદિશ ગુણાકાર અને અદિશ વડે ગુણાકારનો તફાવત

અદિશ ગુણાકાર એ બે સદિશ રાશિ વચ્ચે કરવામાં આવે છે અને તેથી મળતું પરિણામ અદિશ છે, જ્યારે સદિશનો અદિશ વડે ગુણાકાર એ અદિશ અને સદિશ ને સાંકળે છે તથા મળતું પરિણામ સદિશ રાશિ છે.

જો $\overline{x} = (2, 3, -1)$ અને $\overline{y} = (-1, 2, -2)$ હોય, તો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ નો અદિશ ગુણાકાર

$\overline{x} \cdot \overline{y} = 2(-1) + 3 \cdot 2 + (-1)(-2) = -2 + 6 + 2 = 6$ અદિશ રાશિ છે.

જ્યારે $\overline{x} = (2, 3, -1)$ નો અદિશ 2 વડે ગુણાકાર $2\overline{x} = 2(2, 3, -1) = (4, 6, -2)$ મળે છે અને તે સદિશ રાશિ છે.

અંતઃગુણનના ગુણધર્મો :

ધારો કે $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ અને $\overline{z} = (z_1, z_2, z_3)$ એ R^3 ના સદિશો છે અને $k \in R$ છે.

(1) $\overline{x} \cdot \overline{x} \geq 0$ **અને** $\overline{x} \cdot \overline{x} = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{0}$.

$$\overline{x} \cdot \overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \cdot (x_1, x_2, x_3)$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0 \qquad \text{(R નો ગુણધર્મ)}$$

$$\overline{x} \cdot \overline{x} = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{0}$$

(2) $\overline{x} \cdot \overline{x} = |\overline{x}|^2$ કારણકે $\overline{x} \cdot \overline{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = |\overline{x}|^2$

(3) $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{y} \cdot \overline{x}$

(4) $\overline{x} \cdot (k\overline{y}) = (k\overline{x}) \cdot \overline{y} = k(\overline{x} \cdot \overline{y})$

(5) $\overline{x} \cdot (\overline{y} + \overline{z}) = \overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot \overline{z}$

$$\overline{x} \cdot (\overline{y} + \overline{z}) = (x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3)$$

$$= x_1(y_1 + z_1) + x_2(y_2 + z_2) + x_3(y_3 + z_3)$$

$$= x_1y_1 + x_1z_1 + x_2y_2 + x_2z_2 + x_3y_3 + x_3z_3 \qquad \text{(R માં વિભાજનનો નિયમ)}$$

$$= (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)$$

$$= \overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot \overline{z}$$

ઉપરના ગુણધર્મો R^2 ના સદિશો માટે પણ સત્ય છે.

ઉદાહરણ 3 : $\overline{x} = (1, 2, -1)$, $\overline{y} = (-3, 4, -2)$ હોય, તો $\overline{x} \cdot \overline{y}$ શોધો.

ઉકેલ : $\overline{x} \cdot \overline{y} = (1, 2, -1) \cdot (-3, 4, -2)$

$$= -3 + 8 + 2$$

$$= 7$$

ઉદાહરણ 4 : જો $\overline{x} = 5\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}$ અને $\overline{y} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$, તો $(\overline{x} + 2\overline{y}) \cdot (2\overline{x} - \overline{y})$ શોધો.

ઉકેલ : $\overline{x} + 2\overline{y} = (5\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}) + 2(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$

$$= 5\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k} + 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$= 9\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$$

અથવા $\overline{x} + 2\overline{y} = (5, 4, -3) + 2(2, -1, 2) = (5, 4, -3) + (4, -2, 4) = (9, 2, 1)$

$$2\overline{x} - \overline{y} = 2(5\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}) - (2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= 10\hat{i} + 8\hat{j} - 6\hat{k} - 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$$

$$= 8\hat{i} + 9\hat{j} - 8\hat{k}$$

અથવા $2\overline{x} - \overline{y} = 2(5, 4, -3) - (2, -1, 2) = (10, 8, -6) + (-2, 1, -2) = (8, 9, -8)$

હવે $(\overline{x} + 2\overline{y}) \cdot (2\overline{x} - \overline{y}) = (9\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (8\hat{i} + 9\hat{j} - 8\hat{k})$

$= (9, 2, 1) \cdot (8, 9, -8)$

$= 72 + 18 - 8$

$= 82$

R^3 માં સદિશોનું બહિર્ગુણન :

જો $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ અને $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ એ R^3 ના સદિશો હોય, તો તેમનું બહિર્ગુણન (Outer Product)

$$= \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

એટલે કે $(x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત થાય છે અને તેનો સંકેત $\overline{x} \times \overline{y}$ છે.

$\therefore \ \overline{x} \times \overline{y} = (x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$

અહીં, $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ સદિશો છે. તેમનું બહિર્ગુર્ણન $\overline{x} \times \overline{y}$ પણ સદિશ છે, તેથી બહિર્ગુર્ણનને **સદિશ ગુણાકાર (Vector Product)** કહે છે. બહિર્ગુર્ણનની પ્રક્રિયાને **સદિશ ગુણાકારની પ્રક્રિયા (Vector Multiplication)** કહે છે. બહિર્ગુણન એ બે સદિશો વચ્ચે ક્રોસ (×) વડે દર્શાવાતું હોવાથી બહિર્ગુણનને **ક્રોસ ગુણાકાર (Cross Product)** પણ કહે છે.

બહિર્ગુણનના ગુણધર્મો :

(1) $\overline{x} \times \overline{y} = -\overline{y} \times \overline{x}$ (નિશ્ચાયકની બે હારની અદલબદલનું પરિણામ)

(2) $\overline{x} \times \overline{x} = \overline{0}$ (નિશ્ચાયકની બે હાર સમાન હોવાથી)

(3) $\overline{x} \times (k\overline{y}) = (k\overline{x}) \times \overline{x} = k(\overline{x} \times \overline{y})$

(4) $\overline{x} \times (\overline{y} + \overline{z}) = \overline{x} \times \overline{y} + \overline{x} \times \overline{z}$

(5) $\overline{x} \times \overline{0} = \overline{0} \times \overline{x} = \overline{0}$

અંતઃગુણન અને બહિર્ગુણન વચ્ચેનો તફાવત :

(1) અંતઃગુણન એ અદિશ રાશિ છે જ્યારે બહિર્ગુણન એ સદિશ રાશિ છે.

(2) અંતઃગુણન એ R^2 તેમજ R^3 માં વ્યાખ્યાયિત છે જ્યારે બહિર્ગુણન એ R^2 માં વ્યાખ્યાયિત નથી.

(3) અંતઃગુણન સમક્રમી છે જ્યારે બહિર્ગુણન ક્રમનો ગુણધર્મ ધરાવતું નથી.

નોંધ : $\overline{x} \cdot \overline{x} = |\overline{x}|^2$, પરંતુ $\overline{x} \times \overline{x} = \overline{0}$.

ઉદાહરણ 5 : (1, 3, −2) અને $\overline{y} = (-2, 1, 5)$ હોય, તો $\overline{x} \times \overline{y}$ શોધો.

ઉકેલ : $\overline{x} \times \overline{y} = \left(\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right)$

$= (15 + 2, -(5 - 4), 1 + 6) = (17, -1, 7)$

ઉદાહરણ 6 : જો $\overline{x} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ અને $\overline{y} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, તો $|\overline{x} \times \overline{y}|$ શોધો.

ઉકેલ : $\overline{x} = (2, 1, -3)$

અને $\overline{y} = (3, -2, 1)$

$$\overline{x} \times \overline{y} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right)$$

$= (1 - 6, -(2 + 9), -4 - 3) = (-5, -11, -7)$

$\therefore \ |\overline{x} \times \overline{y}| = \sqrt{25 + 121 + 49} = \sqrt{195}$

સદિશોનું પેટીગુણન તથા ત્રિગુણન :

જો $\overline{x}$, $\overline{y}$ અને $\overline{z}$ એ R^3 ના સદિશો હોય, તો $\overline{x} \cdot (\overline{y} \times \overline{z})$ ને સદિશો $\overline{x}$, $\overline{y}$ અને $\overline{z}$ નું પેટીગુણન (Box Product) કહે છે. તેને સંકેતમાં $[\overline{x}\ \ \overline{y}\ \ \overline{z}]$ વડે દર્શાવાય છે.

$\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ અને $\overline{z} = (z_1, z_2, z_3)$ લેતાં,

$\overline{x} \cdot (\overline{y} \times \overline{z}) = (x_1, x_2, x_3) \cdot (y_2z_3 - y_3z_2, -(y_1z_3 - y_3z_1), y_1z_2 - y_2z_1)$

$\therefore\ [\overline{x}\ \ \overline{y}\ \ \overline{z}] = x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1)$

$$\therefore\ [\overline{x}\ \ \overline{y}\ \ \overline{z}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

પેટીગુણનના ગુણધર્મો :

(1) $[\overline{x}\ \ \overline{y}\ \ \overline{z}] = [\overline{y}\ \ \overline{z}\ \ \overline{x}] = [\overline{z}\ \ \overline{x}\ \ \overline{y}]$

સાબિતી : $[\overline{x}\ \ \overline{y}\ \ \overline{z}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$

$$= -\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \qquad (R_{12})$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \qquad (R_{23})$$

$= [\overline{y}\ \ \overline{z}\ \ \overline{x}]$

તે જ પ્રમાણે $[\overline{x}\ \ \overline{y}\ \ \overline{z}] = [\overline{z}\ \ \overline{x}\ \ \overline{y}]$ સાબિત કરી શકાય.

(2) $[\overline{x}\ \ \overline{x}\ \ \overline{y}] = 0$, $[\overline{x}\ \ \overline{y}\ \ \overline{x}] = 0$, $[\overline{x}\ \ \overline{y}\ \ \overline{y}] = 0$

(3) $[m\overline{x}\ \ \overline{y}\ \ \overline{z}] = m[\overline{x}\ \ \overline{y}\ \ \overline{z}]$; $[\overline{x}\ \ m\overline{y}\ \ \overline{z}] = m[\overline{x}\ \ \overline{y}\ \ \overline{z}]$; $[\overline{x}\ \ \overline{y}\ \ m\overline{z}] = m[\overline{x}\ \ \overline{y}\ \ \overline{z}]$; $m \in R$

(4) $[\overline{x}\ \ \overline{y}\ \ \overline{0}] = 0$

નોંધ : **(1)** જો સદિશોનો ક્રમ વૃત્તીય રીતે (cyclic) બદલાય તો પેટીગુણન બદલાતું નથી.

(2) જો $[\overline{x}\ \ \overline{y}\ \ \overline{z}]$ માં કોઈપણ બે સદિશની અદલાબદલી કરીએ, તો તેમાં નિશ્ચાયકની બે હારની જ અદલા-બદલી થાય છે અને તેથી પેટીગુણનનું ચિહ્ન બદલાય છે, એટલે કે $[\overline{x}\ \ \overline{y}\ \ \overline{z}] = -[\overline{y}\ \ \overline{x}\ \ \overline{z}]$.

સદિશો $\overline{x}$, $\overline{y}$ અને $\overline{z}$ ના ગુણાકાર $\overline{x} \times (\overline{y} \times \overline{z})$ ને સદિશનું ત્રિગુણન (vector triple product) કહે છે.

$\overline{x} \times (\overline{y} \times \overline{z}) = (\overline{x} \cdot \overline{z})\overline{y} - (\overline{x} \cdot \overline{y})\overline{z}$ છે તેમ સાબિત કરી શકાય.

તે જ પ્રમાણે $(\overline{x} \times \overline{y}) \times \overline{z} = (\overline{z} \cdot \overline{x})\overline{y} - (\overline{z} \cdot \overline{y})\overline{x}$ થાય.

આપણે નીચેનું પરિણામ સાબિત કરીએ.

પરિણામ : $\overline{x} \times (\overline{y} \times \overline{z}) = (\overline{x} \cdot \overline{z})\overline{y} - (\overline{x} \cdot \overline{y})\overline{z}$

સાબિતી : ધારો કે $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$, અને $\overline{z} = (z_1, z_2, z_3)$

હવે, $\overline{x} \times (\overline{y} \times \overline{z}) = (x_1, x_2, x_3) \times (y_2z_3 - y_3z_2, y_3z_1 - y_1z_3, y_1z_2 - y_2z_1)$

$= (p_1, p_2, p_3)$ (ધારો)

હવે $p_1 = x_2(y_1z_2 - y_2z_1) - x_3(y_3z_1 - y_1z_3)$

$= y_1(x_2z_2 + x_3z_3) - z_1(x_2y_2 + x_3y_3)$

$= y_1(x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3) - z_1(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)$ ($x_1y_1z_1$ ઉમેરતાં અને બાદ કરતાં)

$= y_1(\bar{x} \cdot \bar{z}) - z_1(\bar{x} \cdot \bar{y})$

તે જ પ્રમાણે $p_2 = y_2(\bar{x} \cdot \bar{z}) - z_2(\bar{x} \cdot \bar{y})$ અને $p_3 = y_3(\bar{x} \cdot \bar{z}) - z_3(\bar{x} \cdot \bar{y})$

$\therefore \quad \bar{x} \times (\bar{y} \times \bar{z}) = ((\bar{x} \cdot \bar{z})y_1 - (\bar{x} \cdot \bar{y})z_1, (\bar{x} \cdot \bar{z})y_2 - (\bar{x} \cdot \bar{y})z_2, (\bar{x} \cdot \bar{z})y_3 - (\bar{x} \cdot \bar{y})z_3)$

$= (\bar{x} \cdot \bar{z})(y_1, y_2, y_3) - (\bar{x} \cdot \bar{y})(z_1, z_2, z_3)$

$= (\bar{x} \cdot \bar{z})\bar{y} - (\bar{x} \cdot \bar{y})\bar{z}$

ઉદાહરણ 7 : જો $\bar{x} = (1, 2, 0)$, $\bar{y} = (3, -1, 2)$ અને $\bar{z} = (1, 1, 1)$ તો $[\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; \bar{z}]$ શોધો.

ઉકેલ : $[\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; \bar{z}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1(-3) - 2(1) + 0$

$= -5$

ઉદાહરણ 8 : જો $\bar{x} = (1, 2, 3)$, $\bar{y} = (2, 3, 5)$, $\bar{z} = (1, -1, -1)$ તો $\bar{x} \times (\bar{y} \times \bar{z})$ મેળવો.

ઉકેલ : રીત 1 : $\bar{x} \cdot \bar{z} = (1, 2, 3) \cdot (1, -1, -1) = 1 - 2 - 3 = -4$

$\bar{x} \cdot \bar{y} = (1, 2, 3) \cdot (2, 3, 5) = 2 + 6 + 15 = 23$

$\bar{x} \times (\bar{y} \times \bar{z}) = (\bar{x} \cdot \bar{z})\bar{y} - (\bar{x} \cdot \bar{y})\bar{z}$

$= -4(2, 3, 5) - 23(1, -1, -1)$

$= (-8, -12, -20) + (-23, 23, 23)$

$= (-31, 11, 3)$

રીત 2 : $\bar{y} = (2, 3, 5)$ અને

$\bar{z} = (1, -1, -1)$

$\therefore \quad \bar{y} \times \bar{z} = (-3 + 5, -(-2 - 5), -2 - 3) = (2, 7, -5)$

$\bar{x} = (1, 2, 3)$

તથા $\bar{y} \times \bar{z} = (2, 7, -5)$

$\therefore \quad \bar{x} \times (\bar{y} \times \bar{z}) = (-10 - 21, -(-5 - 6), 7 - 4) = (-31, 11, 3)$

ઉદાહરણ 9 : $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in R^3$, સાબિત કરો કે, $[(\bar{x} + \bar{y}) \times (\bar{y} + \bar{z})] \cdot (\bar{x} + \bar{z}) = 2[\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; \bar{z}]$

ઉકેલ : ડા.બા. $= [(\bar{x} + \bar{y}) \times (\bar{y} + \bar{z})] \cdot (\bar{x} + \bar{z})$

$= [\bar{x} \times \bar{y} + \bar{x} \times \bar{z} + \bar{y} \times \bar{y} + \bar{y} \times \bar{z}] \cdot (\bar{x} + \bar{z})$

$= [\bar{x} \times \bar{y} + \bar{x} \times \bar{z} + \bar{y} \times \bar{z}] \cdot (\bar{x} + \bar{z})$ $(\bar{y} \times \bar{y} = \bar{0})$

$= (\bar{x} \times \bar{y}) \cdot \bar{x} + (\bar{x} \times \bar{y}) \cdot \bar{z} + (\bar{x} \times \bar{z}) \cdot \bar{x} + (\bar{x} \times \bar{z}) \cdot \bar{z} + (\bar{y} \times \bar{z}) \cdot \bar{x} + (\bar{y} \times \bar{z}) \cdot \bar{z}$

$= [\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; \bar{x}] + [\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; \bar{z}] + [\bar{x} \;\; \bar{z} \;\; \bar{x}] + [\bar{x} \;\; \bar{z} \;\; \bar{z}] + [\bar{y} \;\; \bar{z} \;\; \bar{x}] + [\bar{y} \;\; \bar{z} \;\; \bar{z}]$

$= 0 + [\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; \bar{z}] + 0 + 0 + [\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; \bar{z}] + 0$ $([\bar{y} \;\; \bar{z} \;\; \bar{x}] = [\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; \bar{z}])$

$= 2[\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; \bar{z}] =$ જ.બા.

સ્વાધ્યાય 6.2

નીચેનામાં સદિશ અથવા અદિશ, જે માગ્યા હોય તે મેળવો :

1. $(2, 3, 1) \cdot (2, -1, 4)$
2. $(1, -1, 2) \times (2, 3, 1)$
3. $(2, -1, -2) \times (4, 1, 8)$
4. $|(2, 1, 3) \times (0, -4, -4)|$
5. $|(3, -4, -1) \cdot (1, 2, -2)|$
6. $(1, 1, 2) \times [(1, 2, 1) \times (2, 1, 1)]$
7. $(1, 0, 1) \cdot [(1, 1, 0) \times (1, 0, -1)]$
8. $(2, 3, 4) \cdot [(1, 1, 1) \times (3, 4, 5)]$
9. $[(1, 5, 1) \times (2, -1, 2)] \times (4, 1, -3)$
10. $|[(2, 3, 4) \cdot (-4, 3, -2)]\ (1, -1, 2)|$

*

6.7 લાગ્રાન્જનો નિત્યસમ

જો $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in R$, તો

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)^2 + (x_2y_3 - x_3y_2)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \quad \text{(ચકાસો !)}$$

આ નિત્યસમને લાગ્રાન્જનો નિત્યસમ કહે છે.

જો આપણે $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ અને $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ લઈએ તો, લાગ્રાન્જના નિત્યસમનું સદિશ સ્વરૂપ

$|\overline{x} \cdot \overline{y}|^2 + |\overline{x} \times \overline{y}|^2 = |\overline{x}|^2\, |\overline{y}|^2$ થાય.

કારણ કે $\overline{x} \cdot \overline{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, $\overline{x} \times \overline{y} = (x_2y_3 - x_3y_2, -(x_1y_3 - x_3y_1), x_1y_2 - x_2y_1)$

$|\overline{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ અને $|\overline{y}|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

ઉદાહરણ 10 : જો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ એકમ સદિશો હોય તથા $\overline{x} \cdot \overline{y} = 0$, તો સાબિત કરો કે $\overline{x} \times \overline{y}$ પણ એકમ સદિશ છે.

ઉકેલ : $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ એકમ સદિશો છે.

$\therefore \quad |\overline{x}| = 1 = |\overline{y}|$

લાગ્રાન્જના નિત્યસમ

$|\overline{x} \times \overline{y}|^2 + |\overline{x} \cdot \overline{y}|^2 = |\overline{x}|^2\, |\overline{y}|^2$ પરથી,

$\therefore \quad |\overline{x} \times \overline{y}|^2 + 0 = (1)(1)$

$\therefore \quad |\overline{x} \times \overline{y}| = 1$

$\therefore \quad \overline{x} \times \overline{y}$ એકમ સદિશ છે.

કોશી-સ્વાર્ઝની અસમતા :

$\overline{x}$ અને $\overline{y}$ એ R^2 અથવા R^3 ના સદિશો હોય, તો $|\overline{x} \cdot \overline{y}| \le |\overline{x}|\, |\overline{y}|$ ને કોશી-સ્વાર્ઝની અસમતા કહે છે.

R^3 માં લાગ્રાન્જના નિત્યસમ

$|\overline{x} \times \overline{y}|^2 + |\overline{x} \cdot \overline{y}|^2 = |\overline{x}|^2\, |\overline{y}|^2$ પરથી,

$\therefore \quad |\overline{x} \cdot \overline{y}|^2 \le |\overline{x}|^2\, |\overline{y}|^2 \qquad (|\overline{x} \times \overline{y}|^2 \ge 0)$

$\therefore \quad |\overline{x} \cdot \overline{y}| \le |\overline{x}|\, |\overline{y}|$

R^2 માટે $\overline{x} = (x_1, x_2)$ અને $\overline{y} = (y_1, y_2)$ લેતાં,

$\overline{x} \cdot \overline{y} = x_1y_1 + x_2y_2$

હવે $(x_1y_1 + x_2y_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 = (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)$ **(ચકાસો !)**

$\therefore \quad |x_1y_1 + x_2y_2|^2 \le (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) \qquad ((x_1y_2 - x_2y_1)^2 \ge 0)$

$\therefore \quad |\overline{x} \cdot \overline{y}|^2 \le |\overline{x}|^2 |\overline{y}|^2$

$\therefore \quad |\overline{x} \cdot \overline{y}| \le |\overline{x}||\overline{y}|$.

બીજી સાબિતી : આ સાબિતી R^2 અને R^3 બંને માટે સત્ય છે.

જો $\overline{x} = \overline{0}$ અથવા $\overline{y} = \overline{0}$, તો $\overline{x} \cdot \overline{y} = 0$ અને $|\overline{x}||\overline{y}| = 0$

તેથી $|\overline{x} \cdot \overline{y}| = |\overline{x}||\overline{y}|$

ધારો કે $\overline{x} \neq \overline{0}$ અને $\overline{y} \neq \overline{0}$ તથા $|\overline{x}| = 1$ અને $|\overline{y}| = 1$

હવે, $(\overline{x} - \overline{y}) \cdot (\overline{x} - \overline{y}) \geq 0$

$\therefore \quad \overline{x} \cdot \overline{x} - 2\overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{y} \cdot \overline{y} \geq 0$

$\therefore \quad |\overline{x}|^2 - 2\overline{x} \cdot \overline{y} + |\overline{y}|^2 \geq 0$

$\therefore \quad 2 - 2\overline{x} \cdot \overline{y} \geq 0$ $\quad (|\overline{x}| = |\overline{y}| = 1)$

તેથી $\overline{x} \cdot \overline{y} \leq 1$

તે જ પ્રમાણે $(\overline{x} + \overline{y}) \cdot (\overline{x} + \overline{y}) \geq 0$

$\therefore \quad |\overline{x}|^2 + 2\overline{x} \cdot \overline{y} + |\overline{y}|^2 \geq 0$

$\therefore \quad 2 + 2\overline{x} \cdot \overline{y} \geq 0$ $\quad (|\overline{x}| = |\overline{y}| = 1)$

$\therefore \quad -1 \leq \overline{x} \cdot \overline{y}$

આમ, $-1 \leq \overline{x} \cdot \overline{y} \leq 1$

$\therefore \quad |\overline{x} \cdot \overline{y}| \leq 1$

$\therefore \quad |\overline{x} \cdot \overline{y}| \leq |\overline{x}||\overline{y}|$ $\quad (|\overline{x}| = 1 = |\overline{y}|)$ (i)

અંતે $\overline{x} \neq \overline{0}$ અને $\overline{y} \neq \overline{0}$ લેતાં, $|\overline{x}| \neq 0$, $|\overline{y}| \neq 0$.

ધારો કે $\overline{u} = \dfrac{\overline{x}}{|\overline{x}|}$ અને $\overline{v} = \dfrac{\overline{y}}{|\overline{y}|}$. તેથી $|\overline{u}| = 1 = |\overline{v}|$

(i) પરથી $|\overline{u} \cdot \overline{v}| \leq |\overline{u}||\overline{v}|$

$\therefore \quad \left|\dfrac{\overline{x}}{|\overline{x}|} \cdot \dfrac{\overline{y}}{|\overline{y}|}\right| \leq \left|\dfrac{\overline{x}}{|\overline{x}|}\right| \left|\dfrac{\overline{y}}{|\overline{y}|}\right| = \dfrac{|\overline{x}|}{|\overline{x}|}\dfrac{|\overline{y}|}{|\overline{y}|} = 1$

$\therefore \quad |\overline{x} \cdot \overline{y}| \leq |\overline{x}||\overline{y}|$

શૂન્યેતર સદિશો $\overline{x}$, $\overline{y}$ માટે,

જો $\overline{x} \cdot \overline{y} = |\overline{x}||\overline{y}|$ હોય તો,

$$|t\overline{x} - \overline{y}|^2 = (t\overline{x} - \overline{y}) \cdot (t\overline{x} - \overline{y})$$

$$= t^2|\overline{x}|^2 - 2t\overline{x} \cdot \overline{y} + |\overline{y}|^2$$

$$= t^2|\overline{x}|^2 - 2t|\overline{x}||\overline{y}| + |\overline{y}|^2 \quad (\overline{x} \cdot \overline{y} = |\overline{x}||\overline{y}|)$$

$$= (t|\overline{x}| - |\overline{y}|)^2$$

$t = \dfrac{|\overline{y}|}{|\overline{x}|}$ લેતાં, $\quad (|\overline{x}| \neq 0)$

$|t\overline{x} - \overline{y}|^2 = 0$

$\therefore \quad t\overline{x} = \overline{y}$

$\therefore \quad \overline{y} = t\overline{x}$ $\quad (t > 0)$

$\therefore \quad \overline{x}, \overline{y}$ ની દિશા સમાન છે.

તે જ રીતે જો $\overline{x} \cdot \overline{y} = -|\overline{x}||\overline{y}|$ તો $|t\overline{x} - \overline{y}|^2 = (t|\overline{x}| + |\overline{y}|)^2$

$t = -\frac{|\overline{y}|}{|\overline{x}|}$ લેતાં,

$t\overline{x} - \overline{y} = 0$

$\therefore \quad \overline{y} = t\overline{x}$ $\quad (t < 0)$

$\therefore \quad \overline{x}$ તથા $\overline{y}$ ની દિશા પરસ્પર વિરુદ્ધ છે.

કોશી-સ્વાર્ઝની અસમતામાં જો $|\overline{x} \cdot \overline{y}| = |\overline{x}||\overline{y}|$ તો $\overline{x}$ તથા $\overline{y}$ ની દિશા સમાન અથવા પરસ્પર વિરુદ્ધ હોય.

ત્રિકોણીય અસમતા :

R^2 તથા R^3 ના સદિશો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ માટે $|\overline{x} + \overline{y}| \le |\overline{x}| + |\overline{y}|$.

સાબિતી : $|\overline{x} + \overline{y}|^2 = (\overline{x} + \overline{y}) \cdot (\overline{x} + \overline{y})$

$= \overline{x} \cdot \overline{x} + \overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{y} \cdot \overline{x} + \overline{y} \cdot \overline{y}$

$= |\overline{x}|^2 + 2\overline{x} \cdot \overline{y} + |\overline{y}|^2$ $\quad (\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{y} \cdot \overline{x})$

$\le |\overline{x}|^2 + 2|\overline{x} \cdot \overline{y}| + |\overline{y}|^2$ $\quad (\forall a \in R,\ a \le |a|)$

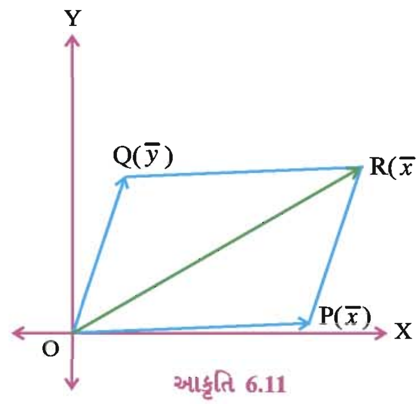
$\le |\overline{x}|^2 + 2|\overline{x}||\overline{y}| + |\overline{y}|^2$ $\quad$ (કોશી-સ્વાર્તઝ અસમતા)

$\le (|\overline{x}| + |\overline{y}|)^2$

$\therefore \quad |\overline{x} + \overline{y}| \le |\overline{x}| + |\overline{y}|$

ભૌમિતિક અર્થઘટન :

ધારો કે $P(\overline{x})$ અને $Q(\overline{y})$ બે ભિન્ન બિંદુઓ છે તથા O, P તથા Q સમરેખ નથી. આકૃતિ 6.11 માં બતાવ્યા પ્રમાણે □ OPRQ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. તેની બાજુઓ $\overline{OP}$ અને $\overline{OQ}$ સદિશ $\overrightarrow{OP}$ અને $\overrightarrow{OQ}$ દર્શાવે છે.



આકૃતિ 6.11

$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR}$

હવે ΔOPR માં OP + PR > OR

$\therefore$ OP + OQ > OR (સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓ એકરૂપ)

$\therefore \quad |\overline{x}| + |\overline{y}| > |\overline{x} + \overline{y}|$

હવે O, P, Q સમરેખ હોય તથા O–P–Q (આકૃતિ 6.12) અથવા O–Q–P હોય તો

OP + OQ = OR

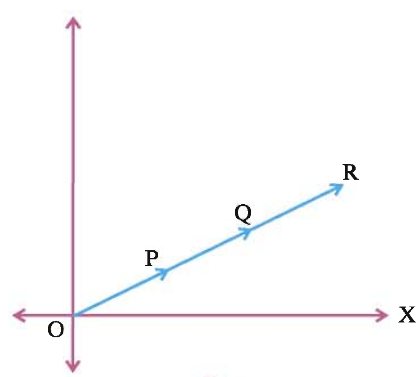
$\therefore \quad |\overline{x}| + |\overline{y}| = |\overline{x} + \overline{y}|$

તથા, જો O–P–Q અથવા O–Q–P ન હોય અને O, P, Q સમરેખ હોય તો OP + OQ > OR.

આમ, $|\overline{x}| + |\overline{y}| > |\overline{x} + \overline{y}|$

$\therefore \quad |\overline{x} + \overline{y}| \le |\overline{x}| + |\overline{y}|$

તમામ વિકલ્પમાં $|\overline{x} + \overline{y}| \le |\overline{x}| + |\overline{y}|$.



આકૃતિ 6.12

6.8 સમરેખ તથા સમતલીય સદિશો

આપણે જાણીએ છીએ કે, જો $\overline{x} \neq \overline{0}$, $\overline{y} \neq \overline{0}$ તથા $\overline{x} = k\ \overline{y}, k \neq 0$ તો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ સમદિશ અથવા વિરૂદ્ધ દિશાના સદિશો છે. નિયત સદિશને સમાન તમામ મૂકત સદિશો અથવા નિયત સદિશને શૂન્યેતર સંખ્યા વડે (અદિશ વડે ગુણાકાર) ગુણતાં મળતા સદિશોને સમાન મૂકત સદિશો રૂઢિગત રીતે સમાંતર સદિશો કહેવાય છે. જો નિયત સદિશો સમરેખ ન હોય, તો તેમની દિશા ભિન્ન છે. તેથી બે નિયત સદિશો સમરેખ છે અથવા તેમની દિશા ભિન્ન છે અને તેઓ સમાંતર નથી.

પ્રમેય 6.4 : R^2 ના શૂન્યેતર સદિશો $\overline{x} = (x_1, x_2)$ અને $\overline{y} = (y_1, y_2)$ સમરેખ હોય તો અને તો જ $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$.

સાબિતી : $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ સમરેખ છે $\Rightarrow \overline{x} = k\overline{y}, k \in R - \{0\}, \overline{x} \neq \overline{0}, \overline{y} \neq \overline{0}$

$\Rightarrow (x_1, x_2) = k(y_1, y_2)$

$\therefore \quad x_1 = ky_1, x_2 = ky_2$

$\therefore \quad x_1y_2 - x_2y_1 = ky_1y_2 - ky_2y_1 = 0$

આથી ઊલટું, ધારો કે $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$

$\therefore \quad x_1y_2 = x_2y_1$

$y_1 \neq 0, y_2 \neq 0$ લેતાં,

$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = k$ (ધારો).

જો $k = 0$, તો $x_1 = 0, x_2 = 0$ અને તેથી $\overline{x} = \overline{0}$, પરંતું $\overline{x} \neq \overline{0}$ હોવાથી, $k \neq 0$.

$\therefore \quad \overline{x} = (x_1, x_2) = (ky_1, ky_2) = k(y_1, y_2) = k\overline{y}, k \in R - \{0\}$

ધારો કે $y_1 = 0$ અથવા $y_2 = 0$. ($\overline{y} \neq \overline{0}$ હોવાથી બંને સાથે શૂન્ય નથી.)

ચોક્સાઈ માટે ધારો કે $y_2 = 0$ અને $y_1 \neq 0$

$\therefore \quad x_1y_2 = 0$

$\therefore \quad x_2y_1 = 0 \qquad (x_1y_2 = x_2y_1)$

$\therefore \quad x_2 = 0$ કારણ કે $y_1 \neq 0$

ધારો કે $\frac{x_1}{y_1} = k$

$\therefore \quad (x_1, x_2) = (ky_1, 0) = (ky_1, ky_2) \qquad (y_2 = 0)$

$= k(y_1, y_2)$

વળી $k = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0$. તેથી $\overline{x} = \overline{0}$, પરંતુ $\overline{x} \neq \overline{0}$.

$\therefore \quad \overline{x} = k\overline{y}, \quad k \in R - \{0\}$

$\therefore$ જો $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$, તો $k \in R - \{0\}$ માટે $\overline{x} = k\overline{y}$ અને તેથી $\overline{x}$ તથા $\overline{y}$ સમરેખ છે.

નોંધ : (1) જો શૂન્યેતર સદિશો $\overline{x}$ તથા $\overline{y}$ માટે $|\overline{x} \cdot \overline{y}| = |\overline{x}||\overline{y}|$, તો અને તો જ કોઈક $k \in R - \{0\}$ માટે $\overline{x} = k\overline{y}$

સાબિતી : ધારો કે $\overline{x} = k\overline{y}, k \in R - \{0\}$

$\therefore \quad |\overline{x} \cdot \overline{y}| = |(k\overline{y}) \cdot \overline{y}| = |k(\overline{y} \cdot \overline{y})|$

$= |k|\ |\overline{y} \cdot \overline{y}|$

$$= |k|\ |\overline{y}|^2$$

$$= |k|\ |\overline{y}|\ |\overline{y}|$$

$$= |k\overline{y}|\ |\overline{y}|$$

$$= |\overline{x}|\ |\overline{y}|$$

આથી ઉલટું, ધારો કે $|\overline{x} \cdot \overline{y}| = |\overline{x}|\ |\overline{y}|$.

લાગ્રાન્જનો સદિશ સ્વરૂપે નિત્યસમ

$|\overline{x} \times \overline{y}|^2 + |\overline{x} \cdot \overline{y}|^2 = |\overline{x}|^2 |\overline{y}|^2$

$\therefore$ $|\overline{x} \times \overline{y}|^2 = 0$ $\qquad (|\overline{x} \cdot \overline{y}| = |\overline{x}|\ |\overline{y}|)$

$\therefore$ $\overline{x} \times \overline{y} = \overline{0}$

આગળની જેમ આપણે કોઈક $k \in R - \{0\}$ માટે $\overline{x} = k\overline{y}$ સાબિત કરી શકીએ. **(સ્વાધ્યાય 6 જુઓ)**

આમ જો $|\overline{x} \cdot \overline{y}| < |\overline{x}|\ |\overline{y}|$ તો અને તો જ કોઈપણ $k \in R - \{0\}$ માટે $\overline{x} \neq k\overline{y}$, $\overline{x} \neq \overline{0}$, $\overline{y} \neq \overline{0}$.

(2) જો શૂન્યેતર સદિશો $\overline{x}$ તથા $\overline{y}$ માટે $|\overline{x} + \overline{y}| = |\overline{x}| + |\overline{y}|$, તો અને તો જ $\overline{x} = k\overline{y}$, $k > 0$, એટલે કે $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ ની દિશા સમાન છે.

સાબિતી : ધારો કે $\overline{x} = k\overline{y}$, $k > 0$.

$$\therefore\ |\overline{x} + \overline{y}| = |(k\overline{y}) + \overline{y}| = |(k + 1)\overline{y}| = |k + 1|\ |\overline{y}|$$

$$= (k + 1)\ |\overline{y}| \qquad (k > 0)$$

$$= k|\overline{y}| + |\overline{y}|$$

$$= |k|\ |\overline{y}| + |\overline{y}| \qquad (k > 0)$$

$$= |k\overline{y}| + |\overline{y}|$$

$$= |\overline{x}| + |\overline{y}|$$

આથી ઉલટું, ધારો કે શૂન્યેતર સદિશો $\overline{x}$ તથા $\overline{y}$ માટે $|\overline{x} + \overline{y}| = |\overline{x}| + |\overline{y}|$

$|\overline{x} + \overline{y}|^2 = (|\overline{x}| + |\overline{y}|)^2$

$\therefore$ $(\overline{x} + \overline{y}) \cdot (\overline{x} + \overline{y}) = |\overline{x}|^2 + 2|\overline{x}|\ |\overline{y}| + |\overline{y}|^2$

$\therefore$ $|\overline{x}|^2 + 2\overline{x} \cdot \overline{y} + |\overline{y}|^2 = |\overline{x}|^2 + 2|\overline{x}|\ |\overline{y}| + |\overline{y}|^2$

$\therefore$ $\overline{x} \cdot \overline{y} = |\overline{x}|\ |\overline{y}|$

$\therefore$ કોશી સ્વાર્ત્ઝની અસમતામાં મળતી સમતા પરથી $\overline{x} = k\overline{y}$, $k > 0$

$\therefore$ $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ સમદિશ સદિશ છે.

પ્રમેય 6.5 : R^3 ના શૂન્યેતર સદિશો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ સમરેખ હોય તો અને તો જ $\overline{x} \times \overline{y} = \overline{0}$.

સાબિતી : $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ સમરેખ છે.

$\therefore$ $\overline{x} = k\overline{y}$, $k \in R - \{0\}$, $\overline{x} \neq \overline{0}$, $\overline{y} \neq \overline{0}$

$\therefore$ $\overline{x} \times \overline{y} = (k\overline{y} \times \overline{y}) = k(\overline{y} \times \overline{y}) = k\overline{0} = \overline{0}$

આથી ઉલટું, ધારો કે $\bar{x} \times \bar{y} = \bar{0}$.

$|\bar{x} \cdot \bar{y}| = |\bar{x}|\,|\bar{y}|$ (લાગ્રાન્જનો નિત્યસમ)

$\therefore$ કોશી-સ્વાર્ટ્ઝની અસમતા પરથી $\bar{x} = k\bar{y}$ થશે, જ્યાં $\bar{x} \neq \bar{0}$ હોવાથી $k \in R - \{0\}$.

$\therefore$ $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ સમરેખ છે.

સમતલીય સદિશો : $\bar{x}$, $\bar{y}$ અને $\bar{z}$ એ R^3 ના સદિશો છે. જો $\alpha, \beta, \gamma \in R$ પૈકી ઓછામાં ઓછો એક શૂન્યેતર હોય અને $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \gamma\bar{z} = \bar{0}$ થાય, તો $\bar{x}$, $\bar{y}$ અને $\bar{z}$ ને સમતલીય સદિશો (coplanar vectors) કહે છે.

જો $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ સમતલીય ના હોય, તો તેમને અસમતલીય સદિશો અથવા સુરેખ સ્વાયત્ત સદિશો કહે છે. આમ જો, $\bar{x}$, $\bar{y}$ અને $\bar{z}$ અસમતલીય સદિશો હોય, તો $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \gamma\bar{z} = \bar{0} \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0$ અને $\gamma = 0$.

પ્રમેય 6.6 : R^3 ના ભિન્ન શૂન્યેતર સદિશો $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ સમતલીય હોય તો અને તો જ $[\bar{x}\ \ \bar{y}\ \ \bar{z}] = 0$.

સાબિતી : ધારો કે $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ સમતલીય છે.

$\therefore$ ઓછામાં ઓછો એક શૂન્યેતર હોય તેવા $\alpha, \beta, \gamma \in R$ મળે કે જેથી $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \gamma\bar{z} = \bar{0}$ થાય.

ધારો કે $\gamma \neq 0$

$\therefore$ $\bar{z} = \left(\frac{-\alpha}{\gamma}\right)\bar{x} + \left(\frac{-\beta}{\gamma}\right)\bar{y}$

$$\begin{aligned}
\therefore\ [\bar{x}\ \ \bar{y}\ \ \bar{z}] = (\bar{x} \times \bar{y}) \cdot \bar{z} &= (\bar{x} \times \bar{y}) \cdot \left[\left(\frac{-\alpha}{\gamma}\right)\bar{x} + \left(\frac{-\beta}{\gamma}\right)\bar{y}\right] \\
&= (\bar{x} \times \bar{y}) \cdot \left(\frac{-\alpha}{\gamma}\right)\bar{x} + (\bar{x} \times \bar{y}) \cdot \left(\frac{-\beta}{\gamma}\right)\bar{y} \\
&= \left(\frac{-\alpha}{\gamma}\right)((\bar{x} \times \bar{y}) \cdot \bar{x}) + \left(\frac{-\beta}{\gamma}\right)((\bar{x} \times \bar{y}) \cdot \bar{y}) \\
&= 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

$\therefore$ $[\bar{x}\ \ \bar{y}\ \ \bar{z}] = 0$

આથી ઉલટું, ધારો કે $[\bar{x}\ \ \bar{y}\ \ \bar{z}] = 0$.

$\therefore$ $\bar{x} \cdot (\bar{y} \times \bar{z}) = 0$

જો $\bar{y} \times \bar{z} = \bar{0}$, તો $\bar{y}$ અને $\bar{z}$ સમરેખ છે.

$\therefore$ $\bar{y} = k\bar{z}$, $k \neq 0$

$\therefore$ $0\bar{x} + 1\bar{y} - k\bar{z} = \bar{0}$

ઉપરના પરિણામને $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \gamma\bar{z} = \bar{0}$ સાથે સરખાવતાં, $\alpha = 0$, $\beta = 1$ અને $\gamma = -k \neq 0$

$\therefore$ $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ સમતલીય છે.

હવે, ધારો કે $\bar{y} \times \bar{z} \neq \bar{0}$.

$\therefore$ સંખ્યાઓ $y_1z_2 - y_2z_1$, $y_2z_3 - y_3z_2$ અને $y_1z_3 - y_3z_1$ પૈકી ઓછામાં ઓછી એક શૂન્યેતર છે.

ધારો કે $y_1z_2 - y_2z_1 \neq 0$

હવે, આપણે કોઈક $\alpha, \beta \in R$ માટે $\bar{x} - \alpha\bar{y} - \beta\bar{z} = \bar{0}$ સાબિત કરીએ, **(i)**

સમીકરણો $\alpha y_1 + \beta z_1 - x_1 = 0$ **(ii)**

$\alpha y_2 + \beta z_2 - x_2 = 0$ **(iii)**

અને $\alpha y_3 + \beta z_3 - x_3 = 0$ નો વિચાર કરીએ **(iv)**

$y_1z_2 - y_2z_1 \neq 0$, હોવાથી સમીકરણ (ii) અને (iii) ને ઉકેલી α અને β ની કિંમત મેળવીએ તો તે સમીકરણ (iv) નું સમાધાન કરશે, કારણ કે $[\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}] = 0$.

$\therefore$ આપણને $\alpha\bar{y} + \beta\bar{z} = \bar{x}$ થાય તેવા $\alpha, \beta \in R$ મળે.

અહીં $1\bar{x} - \alpha\bar{y} - \beta\bar{z} = \bar{0}$ થશે.

$\therefore$ $\bar{x} - \alpha\bar{y} - \beta\bar{z} = \bar{0}$ માં ઓછામાં ઓછો એક સહગુણક $1 \neq 0$ મળે છે.

આમ, $\bar{x}$, $\bar{y}$ અને $\bar{z}$ સમતલીય છે.

ઉદાહરણ 11 : સાબિત કરો કે $(-1, 0, -1)$, $(0, -1, 1)$ અને $(-1, 1, 0)$ અસમતલીય છે. તથા પ્રત્યેક $\bar{x} \in R^3$ ને $\bar{x} = \alpha(-1, 0, -1) + \beta(0, -1, 1) + \gamma(-1, 1, 0)$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય, જ્યાં α, β અને γ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1(-1) + 0 - 1(-1) = 2 \neq 0.$

$\therefore$ $(-1, 0, -1)$, $(0, -1, 1)$ અને $(-1, 1, 0)$ અસમતલીય છે.

ધારો કે $\bar{x} = \alpha(-1, 0, -1) + \beta(0, -1, 1) + \gamma(-1, 1, 0)$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$,

$\therefore$ $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ માટે,

$\therefore$ $(x_1, x_2, x_3) = (-\alpha - \gamma, -\beta + \gamma, -\alpha + \beta)$

$-\alpha - \gamma = x_1, \quad -\beta + \gamma = x_2, \quad -\alpha + \beta = x_3$

સમીકરણો ઉકેલતાં,

$$\alpha = -\frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}, \ \beta = \frac{x_3 - x_1 - x_2}{2}, \ \gamma = \frac{x_2 + x_3 - x_1}{2}$$

$$\therefore \quad \bar{x} = -\frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}(-1, 0, -1) + \frac{x_3 - x_1 - x_2}{2}(0, -1, 1) + \frac{x_2 + x_3 - x_1}{2}(-1, 1, 0).$$

ઉદાહરણ 12 : $|\bar{x} \cdot \bar{y}| < |\bar{x}||\bar{y}|$ થાય તેવા $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ નું એક ઉદાહરણ આપો.

ઉકેલ : ધારો કે $\bar{x} = (1, -1, 2)$ અને $\bar{y} = (2, 1, -2)$ ($\bar{x} \neq k\bar{y}$ તેવા $\bar{x}$ તથા $\bar{y}$ પસંદ કરો)

$\bar{x} \cdot \bar{y} = 2 - 1 - 4 = -3$

$\therefore$ $|\bar{x} \cdot \bar{y}| = 3$ (i)

$|\bar{x}||\bar{y}| = \sqrt{6} \cdot \sqrt{9}$

$= 3\sqrt{6}$ (ii)

પરિણામ (i) અને (ii), પરથી $3 < 3\sqrt{6}$ હોવાથી $|\bar{x} \cdot \bar{y}| < |\bar{x}||\bar{y}|$.

ઉદાહરણ 13 : $|\bar{x} + \bar{y}| = |\bar{x}| + |\bar{y}|$ ક્યારે થાય ? $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ માટે એક ઉદાહરણ લઈ તમારો જવાબ ચકાસો.

ઉકેલ : જો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ ની દિશા સમાન હોય તો $|\bar{x} + \bar{y}| = |\bar{x}| + |\bar{y}|$.

$\bar{x} = (1, -1, 1)$ અને $\bar{y} = (2, -2, 2)$ લેતાં,

$\bar{x} = \frac{1}{2}\bar{y}$; $\frac{1}{2} > 0$, હોવાથી $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ ની દિશા સમાન છે.

હવે $\bar{x} + \bar{y} = (3, -3, 3)$

$\therefore$ $|\bar{x} + \bar{y}| = 3|(1, -1, 1)| = 3\sqrt{3}$

$\therefore$ $|\bar{x} + \bar{y}| = 3\sqrt{3}$ (i)

$|\bar{x}| = \sqrt{3}$, $|\bar{y}| = 2\sqrt{3}$

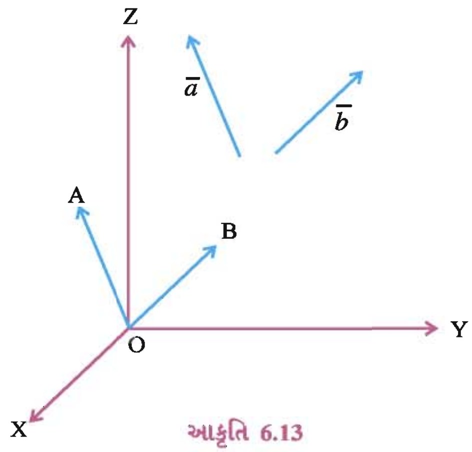
$\therefore$ $|\bar{x}| + |\bar{y}| = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

આથી $|\bar{x} + \bar{y}| = |\bar{x}| + |\bar{y}|$.

6.9 બે શૂન્યેતર સદિશો વચ્ચેનો ખૂણો

જો R^3 માં બે શૂન્યેતર સદિશો આપેલા હોય તો તેમને સંગત બે નિયત સદિશો વચ્ચેના ખૂણાના માપને આપેલ સદિશો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ કહીશું.

$\bar{a}$ તથા $\bar{b}$ ને સંગત નિયત સદિશો અનુક્રમે $\overrightarrow{OA}$ તથા $\overrightarrow{OB}$ છે. આમ $\bar{a}$ તથા $\bar{b}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ એટલે $\overrightarrow{OA}$ તથા $\overrightarrow{OB}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ કહેવાય.



આકૃતિ 6.13

ધારો કે $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ બે શૂન્યેતર સદિશો છે.

(1) જો $\bar{x} = k\bar{y}, k > 0$, તો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ ની દિશા સમાન છે. તેથી તેમના વચ્ચેના ખૂણાનું માપ 0 લઈશું.

(2) જો $\bar{x} = k\bar{y}, k < 0$, તો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ વિરુદ્ધ દિશાના સદિશો છે અને તેથી તેમના વચ્ચેના ખૂણાનું માપ π લઈશું.

(3) હવે, ધારો કે $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ ની દિશા ભિન્ન છે. કોશી-સ્વાર્ત્ઝની અસમતા પ્રમાણે,

$|\bar{x} \cdot \bar{y}| < |\bar{x}|\,|\bar{y}|$.

$\therefore \quad -|\bar{x}|\,|\bar{y}| < \bar{x} \cdot \bar{y} < |\bar{x}|\,|\bar{y}| \qquad (|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a)$

$\therefore \quad -1 < \dfrac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|} < 1$

$\therefore$ અનન્ય $\alpha \in (0, \pi)$ મળે કે જેથી,

$cos^{-1} \dfrac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|} = \alpha$ થાય.

સંખ્યા α ને સદિશો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ કહે છે તથા તેને $\alpha = (\bar{x}, \hat{\ } \bar{y})$ રીતે લખાય છે.

આમ, જો $\bar{x} \neq \bar{0}$, $\bar{y} \neq \bar{0}$ તો $(\bar{x}, \hat{\ } \bar{y}) = cos^{-1} \dfrac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|}$

વળી, જો $|\bar{x} \cdot \bar{y}| = |\bar{x}|\,|\bar{y}|$ તો $\bar{x} \cdot \bar{y} = |\bar{x}|\,|\bar{y}|$ અથવા $\bar{x} \cdot \bar{y} = -|\bar{x}|\,|\bar{y}|$. તેથી $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ ની દિશા અનુક્રમે સમાન અથવા પરસ્પર વિરુદ્ધ હોય તથા $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ અનુક્રમે 0 અથવા π થાય.

ચાલો, આપણે તેની યથાર્થતા ચકાસીએ.

જો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ ની દિશા સમાન હોય, તો $\bar{x} = k\bar{y}$, $k > 0$.

હવે $\dfrac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|} = \dfrac{(k\bar{y}) \cdot \bar{y}}{|k\bar{y}||\bar{y}|} = \dfrac{k(\bar{y} \cdot \bar{y})}{|k|\,|\bar{y}|\,|\bar{y}|} = \dfrac{k|\bar{y}|^2}{k|\bar{y}|^2} = 1 \qquad (k > 0)$

$\therefore \quad cos^{-1} \dfrac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|} = cos^{-1} 1 = 0$

વળી, જો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશાના સદિશ હોય, તો $\bar{x} = k\bar{y}$, $k < 0$.

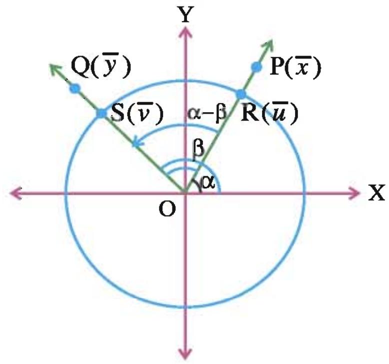
હવે, $\dfrac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|} = \dfrac{(k\bar{y}) \cdot \bar{y}}{|k\bar{y}||\bar{y}|} = \dfrac{k(\bar{y} \cdot \bar{y})}{|k|\,|\bar{y}|\,|\bar{y}|} = \dfrac{k|\bar{y}|^2}{-k|\bar{y}|^2} = -1 \qquad (k < 0)$

$\therefore \quad cos^{-1} \dfrac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|} = cos^{-1}(-1) = \pi$

આમ શૂન્યેતર સદિશો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ માટે $\alpha \in [0, \pi]$ મળે કે જેથી,

$\alpha = (\bar{x}, \hat{\ } \bar{y}) = cos^{-1} \dfrac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|}$ થાય.

R^2 માં ભૌમિતિક અર્થ : બે સદિશો વચ્ચેના ખૂણાની આપણી આ વ્યાખ્યા એ ખૂણાના માપની ભૌમિતિક સમજ સાથે સુસંગત છે. ધારો કે P તથા Q ના સ્થાન સદિશ અનુક્રમે $\bar{x}$ તથા $\bar{y}$ છે અને $\bar{x} \neq \bar{0}$, $\bar{y} \neq \bar{0}$.



આકૃતિ 6.14

ધારો કે $\frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} = \bar{u}$ અને $\frac{\bar{y}}{|\bar{y}|} = \bar{v}$ એ અનુક્રમે $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ ની દિશાના એકમ સદિશો છે.

$(\bar{x}, \hat{\ } \bar{y}) = (\bar{u}, \hat{\ } \bar{v})$

ધારો કે R તથા S ના સ્થાન સદિશ અનુક્રમે $\bar{u}$ તથા $\bar{v}$ છે. R તથા S એકમ વર્તુળ પર છે.

$\therefore$ $\bar{u} = (cos\alpha, sin\alpha)$ અને $\bar{v} = (cos\beta, sin\beta)$ લઈ શકાય. જ્યાં $0 \leq \alpha, \beta < 2\pi$.

હવે જો $\overrightarrow{OR}$ તથા $\overrightarrow{OS}$ દ્વારા બનતા ખૂણાનું રેડિયન માપ θ હોય તો,

$\theta = \alpha - \beta$ અથવા $\beta - \alpha$.

$$
\begin{aligned}
\text{હવે, } cos(\bar{x}, \hat{\ } \bar{y}) &= \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|} \\
&= \bar{u} \cdot \bar{v} \\
&= (cos\alpha, sin\alpha) \cdot (cos\beta, sin\beta) \\
&= cos\alpha\, cos\beta + sin\alpha\, sin\beta \\
&= cos(\alpha - \beta) \text{ અથવા } cos(\beta - \alpha) \\
&= cos\theta \qquad (0 < \theta < \pi, 0 < (\bar{x}, \hat{\ } \bar{y}) < \pi)
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad \theta = (\bar{x}, \hat{\ } \bar{y}) = cos^{-1} \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|}$$

આમ $\overrightarrow{OP}$ તથા $\overrightarrow{OQ}$ દ્વારા બનતા ખૂણાનું માપ θ અને $\bar{x}$ તથા $\bar{y}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $(\bar{x}, \hat{\ } \bar{y})$ બંને એક જ છે.

લંબ સદિશો : જો $\bar{x} \neq \bar{0}$ તથા $\bar{y} \neq \bar{0}$ અને $(\bar{x}, \hat{\ } \bar{y}) = \frac{\pi}{2}$ હોય, તો $\bar{x}$ તથા $\bar{y}$ ને પરસ્પર લંબ સદિશો કહે છે. $\bar{x}$ તથા $\bar{y}$ પરસ્પર લંબ છે તેને સંકેતમાં $\bar{x} \perp \bar{y}$ વડે દર્શાવાય છે.

બે શૂન્યેતર સદિશો પરસ્પર લંબ હોવા માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત :

ધારો કે $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ બે શૂન્યેતર સદિશો છે.

$$
\begin{aligned}
\bar{x} \perp \bar{y} &\Leftrightarrow (\bar{x}, \hat{\ } \bar{y}) = \frac{\pi}{2} \\
&\Leftrightarrow cos(\bar{x}, \hat{\ } \bar{y}) = cos\frac{\pi}{2} \\
&\Leftrightarrow \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|} = 0 \\
&\Leftrightarrow \bar{x} \cdot \bar{y} = 0
\end{aligned}
$$

આમ, $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ પરસ્પર લંબ હોય તો અને તો જ $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$.

પ્રમેય 6.7 : જો $\bar{x}, \bar{y} \in R^3$, $\bar{x} \neq \bar{0}$, $\bar{y} \neq \bar{0}$ અને $(\bar{x} \hat{,} \bar{y}) = \alpha$ તો,

(1) $\bar{x} \cdot \bar{y} = |\bar{x}|\,|\bar{y}|\, cos\alpha$

(2) $|\bar{x} \times \bar{y}| = |\bar{x}|\,|\bar{y}|\, sin\alpha$

(3) $\bar{x} \perp (\bar{x} \times \bar{y})$, $\bar{y} \perp (\bar{x} \times \bar{y})$

સાબિતી : (1) બે સદિશો વચ્ચેના ખૂણાના માપની વ્યાખ્યા પરથી $\alpha = cos^{-1} \dfrac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|}$

$\therefore \quad cos\alpha = \dfrac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|}$

$\therefore \quad \bar{x} \cdot \bar{y} = |\bar{x}|\,|\bar{y}|\, cos\alpha$

(2) લાગ્રાન્જના નિત્યસમ પરથી,

$|\bar{x} \times \bar{y}|^2 + |\bar{x} \cdot \bar{y}|^2 = |\bar{x}|^2\,|\bar{y}|^2$

$$\begin{aligned}\therefore \quad |\bar{x} \times \bar{y}|^2 &= |\bar{x}|^2\,|\bar{y}|^2 - |\bar{x} \cdot \bar{y}|^2\\ &= |\bar{x}|^2\,|\bar{y}|^2 - |\bar{x}|^2\,|\bar{y}|^2\, cos^2\alpha\\ &= |\bar{x}|^2\,|\bar{y}|^2 (1 - cos^2\alpha)\\ &= |\bar{x}|^2\,|\bar{y}|^2\, sin^2\alpha\end{aligned}$$

$\therefore \quad |\bar{x} \times \bar{y}| = |\bar{x}|\,|\bar{y}|\, sin\alpha$ $\qquad$ ($0 \leq \alpha \leq \pi$ હોવાથી $sin\alpha \geq 0$)

(3) ધારો કે $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ અને $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$

હવે, $\bar{x} \cdot (\bar{x} \times \bar{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0$

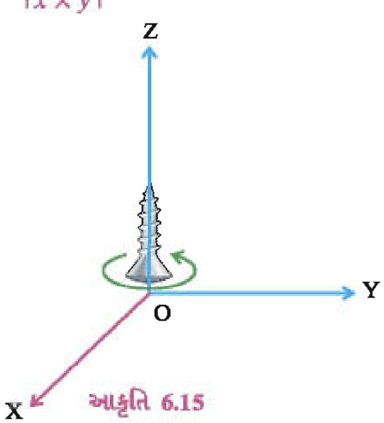
$\therefore \quad \bar{x} \perp (\bar{x} \times \bar{y})$

તે જ પ્રમાણે $\bar{y} \cdot (\bar{x} \times \bar{y}) = 0$. અને તેથી $\bar{y} \perp (\bar{x} \times \bar{y})$.

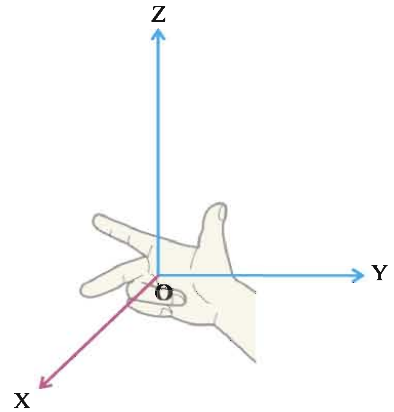
આમ $(\bar{x} \times \bar{y})$ એ $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ બંનેને લંબ સદિશ છે અને તેથી $\pm \dfrac{\bar{x} \times \bar{y}}{|\bar{x} \times \bar{y}|}$ એ $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ બંનેને લંબ એકમ સદિશો છે.

$\bar{x} \times \bar{y}$ નું ભૌમિતિક અર્થઘટન :

જમણી બાજુના આંટાવાળા સ્ક્રુને જ્યારે ધન X-અક્ષની દિશા તરફથી ધન Y-અક્ષની દિશા તરફ ઘડિયાળના કાંટાની વિરુદ્ધ દિશામાં ફેરવવામાં આવે ત્યારે આકૃતિ 6.15માં દર્શાવ્યા મુજબ તે ધન Z-અક્ષની દિશામાં આગળ વધે છે.



આકૃતિ 6.15

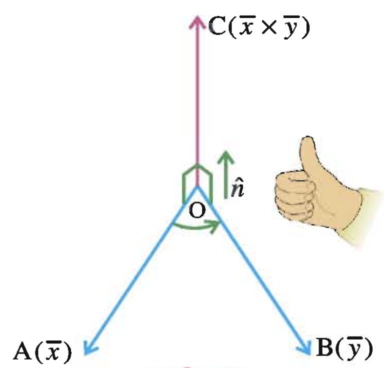


આકૃતિ 6.16

$|\overline{x} \times \overline{y}| = |\overline{x}| \, |\overline{y}| \, sin\theta$, $\theta = (\overline{x}, \hat{\ } \overline{y})$ હોવાથી,

$\overline{x} \times \overline{y} = |\overline{x}| \, |\overline{y}| \, sin\theta \, \hat{n}$, જ્યાં $\hat{n}$ એ $\overline{x} \times \overline{y}$ ની દિશાનો એકમ સદિશ છે.

જમણા હાથના અંગૂઠાના નિયમ પરથી $\overline{x} \times \overline{y}$ ની દિશા મેળવી શકાય. આપણે જમણા હાથની આંગળીઓને $\overline{x}$ ની દિશા તરફથી $\overline{y}$ ની દિશા તરફ વાળીએ તો જમણા હાથનો અંગૂઠો $\overline{x} \times \overline{y}$ ની દિશા સૂચવશે.



આકૃતિ 6.17

ઉદાહરણ 14 : સદિશો (1, −1, 2) અને (2, −1, 1) વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $\overline{x} = (1, -1, 2)$ અને $\overline{y} = (2, -1, 1)$

હવે, $cos(\overline{x}, \hat{\ } \overline{y}) = \frac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{|\overline{x}||\overline{y}|}$

$$= \frac{(1, -1, 2) \cdot (2, -1, 1)}{\sqrt{1+1+4}\sqrt{4+1+1}} = \frac{2+1+2}{\sqrt{6}\sqrt{6}}$$

$$= \frac{5}{6}$$

$\therefore \quad (\overline{x}, \hat{\ } \overline{y}) = cos^{-1} \frac{5}{6}$

ઉદાહરણ 15 : જો સદિશો $\sqrt{3}\,\hat{i} + \hat{j}$ અને $a\hat{i} + \sqrt{3}\,\hat{j}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{3}$, હોય, તો a શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $\overline{x} = \sqrt{3}\,\hat{i} + \hat{j} = (\sqrt{3}, 1)$ અને $\overline{y} = a\hat{i} + \sqrt{3}\,\hat{j} = (a, \sqrt{3})$

હવે, $(\overline{x}, \widehat{\ } \overline{y}) = \frac{\pi}{3}$

$\therefore \quad cos(\overline{x}, \widehat{\ } \overline{y}) = cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore \quad \frac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{|\overline{x}||\overline{y}|} = \frac{1}{2}$ (i)

હવે $\overline{x} \cdot \overline{y} = (\sqrt{3}, 1) \cdot (a, \sqrt{3}) = \sqrt{3}a + \sqrt{3}$, $|\overline{x}| = \sqrt{3+1} = 2$, $|\overline{y}| = \sqrt{a^2+3}$

$\therefore \quad \frac{\sqrt{3}a + \sqrt{3}}{2\sqrt{a^2+3}} = \frac{1}{2}$ ((i) પરથી)

$\therefore \quad \sqrt{3}(a + 1) = \sqrt{a^2+3}$ (ii)

$\therefore \quad 3(a^2 + 2a + 1) = a^2 + 3$

$\therefore \quad 2a^2 + 6a = 0$

$\therefore \quad 2a(a + 3) = 0$

$\therefore \quad a = 0$ અથવા $a = -3$

$a = -3$ એ (ii) નું સમાધાન કરશે નહીં કારણ કે $\sqrt{3}(-2) \neq \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$a = 0$ માટે, $\sqrt{3}(a + 1) = \sqrt{3}$, $\sqrt{a^2+3} = \sqrt{3}$. તેથી $a = 0$.

ઉદાહરણ 16 : જો $|\overline{x}| = |\overline{y}| = 1$ અને $(\overline{x}, \widehat{\ } \overline{y}) = \theta$ હોય તો સાબિત કરો કે $|\overline{x} - \overline{y}cos\theta| = sin\theta$

ઉકેલ : $|\overline{x} - \overline{y}cos\theta|^2 = |\overline{x}|^2 - 2\overline{x} \cdot \overline{y}cos\theta + |\overline{y}cos\theta|^2$

$= 1 - 2\,cos\theta \cdot cos\theta + |\overline{y}|^2\,cos^2\theta$ $(|\overline{x}| = 1)$

$\left(cos\theta = \frac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{|\overline{x}||\overline{y}|} \Rightarrow cos\theta = \frac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{1}\right)$

$= 1 - 2\,cos^2\theta + cos^2\theta$ $(|\overline{y}| = 1)$

$= 1 - cos^2\theta$

$= sin^2\theta$

$\therefore \quad |\overline{x} - \overline{y}cos\theta| = sin\theta$ $(0 \le \theta \le \pi)$

ઉદાહરણ 17 : જો $\overline{x} = \hat{i} + a\hat{j} + 3\hat{k}$ અને $\overline{y} = 2\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$ પરસ્પર લંબ સદિશો હોય તો a શોધો.

ઉકેલ : અહીં $\overline{x} = (1, a, 3)$, $\overline{y} = (2, -1, 5)$

$\overline{x} \perp \overline{y} \Leftrightarrow \overline{x} \cdot \overline{y} = 0$

$\Leftrightarrow 2 - a + 15 = 0$

$\Leftrightarrow a = 17$

$\therefore\ a = 17$

ઉદાહરણ 18 : (1, 2, 3) અને (2, −1, 4) બંનેને લંબ એકમ સદિશો શોધો.

ઉકેલ : $\overline{x} = (1, 2, 3)$,

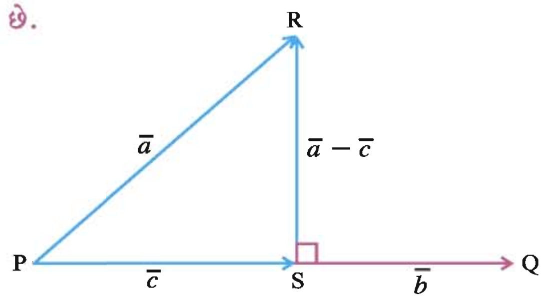
$\overline{y} = (2, -1, 4)$

$\therefore \quad \overline{x} \times \overline{y} = (11, 2, -5)$ અને $|\overline{x} \times \overline{y}| = \sqrt{121+4+25} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$

$\therefore$ આપેલા સદિશોને લંબ એકમ સદિશો $\pm \frac{\overline{x} \times \overline{y}}{|\overline{x} \times \overline{y}|} = \pm\left(\frac{11}{5\sqrt{6}}, \frac{2}{5\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$ છે.

6.10 સદિશનો પ્રક્ષેપ

જો $\overline{a}$ તથા $\overline{b}$ પરસ્પર લંબ ન હોય તેવા શૂન્યેતર સદિશો હોય, તો $\overline{a}$ નો $\overline{b}$ પરનો પ્રક્ષેપ સદિશ (Projection Vector) $\left(\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{b}|^2}\right)\overline{b}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત થાય છે. તેનો સંકેત $\text{Proj}_{\overline{b}}\overline{a}$ છે.



આકૃતિ 6.18

સમાન આરંભબિંદુ P હોય તેવા સદિશો $\overrightarrow{PR} = \overline{a}$ અને $\overrightarrow{PQ} = \overline{b}$ છે. S એ બિંદુ R માંથી $\overleftrightarrow{PQ}$ પરનો લંબપાદ છે.

તો $\overrightarrow{PS} = \text{Proj}_{\overline{b}}\overline{a}$ થશે. (આકૃતિ 6.18)

ધારો કે $\overline{c} = \overrightarrow{PS}$, $\overline{c} \neq \overline{0}$ (શા માટે ?)

$\overrightarrow{SR} = \overline{a} - \overline{c}$ કારણ કે $\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{PR} = \overline{a}$

$\overline{c}$ અને $\overline{b}$ ની દિશા સમાન અથવા પરસ્પર વિરૂદ્ધ હોવાથી,

$\therefore$ કોઈક $k \in R - \{0\}$ માટે $\overline{c} = k\overline{b}$ (i)

$\therefore$ $\overline{c}\cdot\overline{b} = k\overline{b}\cdot\overline{b} = k|\overline{b}|^2$

$\therefore$ $k = \frac{\overline{c}\cdot\overline{b}}{|\overline{b}|^2}$

$\overleftrightarrow{RS} \perp \overleftrightarrow{PS}$ હોવાથી, $(\overline{a} - \overline{c}) \perp \overline{b}$

$\therefore$ $(\overline{a} - \overline{c})\cdot\overline{b} = 0$

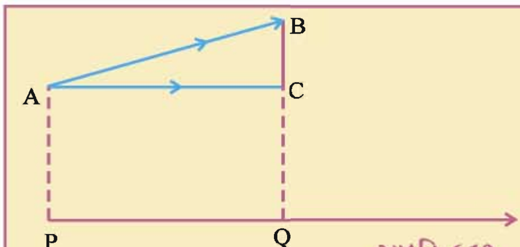
$\therefore$ $\overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{c}\cdot\overline{b}$

$\therefore$ $k = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{b}|^2}$, કારણ કે $k = \frac{\overline{c}\cdot\overline{b}}{|\overline{b}|^2}$

$\therefore$ $\overrightarrow{PS} = \overline{c} = \left(\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{b}|^2}\right)\overline{b} = \text{Proj}_{\overline{b}}\overline{a}$. ((i) પરથી)

પ્રક્ષેપ સદિશનું માન : $PS = \frac{|\overline{a}\cdot\overline{b}|}{|\overline{b}|^2}\,|\overline{b}| = \frac{|\overline{a}\cdot\overline{b}|}{|\overline{b}|}$ પ્રક્ષેપ સદિશનું માન છે.

$\frac{|\overline{a}\cdot\overline{b}|}{|\overline{b}|}$ ને $\overline{a}$ નો $\overline{b}$ ની દિશામાં ઘટક (Component) કહે છે. તેનો સંકેત $\text{Comp}_{\overline{b}}\overline{a}$ છે.

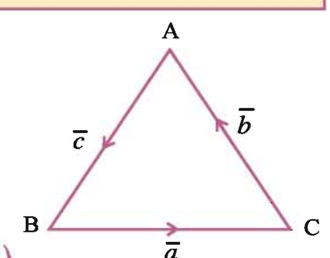


આકૃતિ 6.19

નોંધ : જો R^3 ના બે સદિશો આપેલા હોય તો તેમને સંગત બે નિયત સદિશોનો ઉપર પ્રમાણે વિચાર કરી શકાય.

$\overrightarrow{AB}$ તથા $\overrightarrow{PQ}$ એ R^3 ના સદિશો હોય તો જેનું આરંભબિંદુ A હોય તેવો $\overrightarrow{PQ}$ ને સમાન સદિશ લેવાથી આ જ પરિણામ મળશે. $\overrightarrow{AB}$ નો $\overrightarrow{PQ}$ પરનો પ્રક્ષેપ $\overrightarrow{AC}$ બને.

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ :



આકૃતિ 6.20

ΔABC માં $\overrightarrow{AB} = \overline{c}$, $\overrightarrow{BC} = \overline{a}$ અને $\overrightarrow{CA} = \overline{b}$.

ΔABC નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\,bc\,sinA$

$= \frac{1}{2}|\overline{b}|\,|\overline{c}|\,sinA$

$= \frac{1}{2}|\overline{b} \times \overline{c}|$

$\left((\overline{b}, \hat{\ } \overline{c}) = \pi - A \text{ અને } sin(\pi - A) = sinA\right)$

આમ ΔABC નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}|\overline{b} \times \overline{c}| = \frac{1}{2}|\overline{a} \times \overline{b}| = \frac{1}{2}|\overline{c} \times \overline{a}|$

નોંધ : ઉપરના સૂત્રનો ઉપયોગ R^3 માટે જ શક્ય છે.

વળી, ΔABC નું ક્ષેત્રફળ

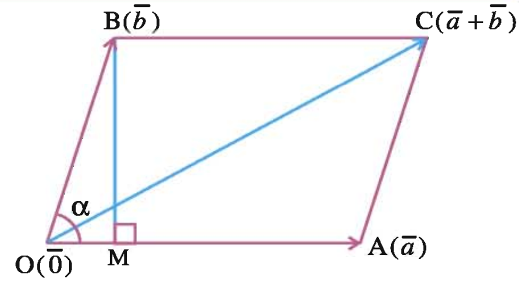
$$\Delta = \frac{1}{2} bc \sqrt{1-\cos^2 A}$$

$$= \frac{1}{2} |\bar{b}|\,|\bar{c}| \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{b}\cdot\bar{c}}{|\bar{b}||\bar{c}|}\right)^2}$$

$$\therefore \quad \Delta = \frac{1}{2} \sqrt{|\bar{b}|^2|\bar{c}|^2 - |\bar{b}\cdot\bar{c}|^2}$$

નોંધ : ઉપરના સૂત્રનો ઉપયોગ R^2 તેમજ R^3 બંને માટે શક્ય છે.

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ :



આકૃતિ 6.21

$\square$OACB એ $\overrightarrow{OA} = \bar{a}$ અને $\overrightarrow{OB} = \bar{b}$ હોય તેવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

હવે, $\overline{BM} \perp \overline{OA}$.

$\therefore$ જો $(\bar{a}, \widehat{\ } \bar{b}) = \alpha$ હોય તો,

$BM = OB\sin\alpha = |\bar{b}|\sin\alpha$

$\therefore$ $\square^m$ OACBનું ક્ષેત્રફળ $= OA \cdot BM$

$= |\bar{a}|\,|\bar{b}|\sin\alpha$

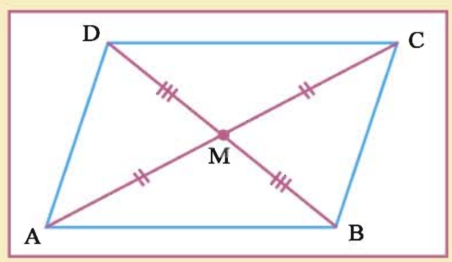
$\therefore$ **$\square^m$ OACBનું ક્ષેત્રફળ $= |\bar{a} \times \bar{b}|$**

નોંધ : જો $\overrightarrow{AC} = \bar{x}$ અને $\overrightarrow{BD} = \bar{y}$ તથા M એ વિકર્ણોનું છેદબિંદુ હોય,

તો $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\bar{x}$ અને $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\bar{y}$

હવે $\square^m$ABCD નું ક્ષેત્રફળ $= 4(\Delta ABM$ નું ક્ષેત્રફળ$)$

$= 4(\frac{1}{2}|\overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{BM}|)$



$\therefore$ **$\square^m$ABCD નું ક્ષેત્રફળ $= 2\left|\frac{1}{2}\bar{x} \times \frac{1}{2}\bar{y}\right| = \frac{1}{2}|\bar{x} \times \bar{y}|$** આકૃતિ 6.22

ઉદાહરણ 19 : સદિશ $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ નો $-4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ પરનો પ્રક્ષેપ સદિશ, પ્રક્ષેપ સદિશનું માન તથા પ્રક્ષેપ સદિશનો ઘટક શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $\bar{a} = (2, 1, 1)$, $\bar{b} = (-4, -2, 4)$

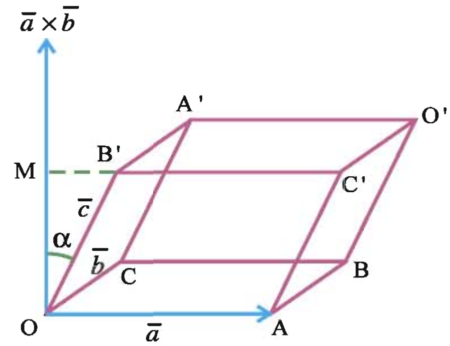
$\therefore \quad \bar{a}\cdot\bar{b} = -8 - 2 + 4 = -6$ અને $|b| = \sqrt{16+4+16} = 6$

$$\therefore \quad \text{Proj}_{\bar{b}}\,\bar{a} = \left(\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|^2}\right)\bar{b} = \frac{-6}{36}(-4, -2, 4) = \frac{1}{6}(4, 2, -4) = \frac{1}{3}(2, 1, -2)$$

$$\therefore \quad \text{Comp}_{\bar{b}}\,\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{-6}{6} = -1$$

$$\text{Proj}_{\bar{b}}\,\bar{a} \text{ નું માન} = \frac{|\bar{a}\cdot\bar{b}|}{|\bar{b}|} = \frac{|-6|}{6} = 1.$$

સમાંતર ફલકનું ઘનફળ :



આકૃતિ 6.23

જે ઘન પદાર્થના છ પૃષ્ઠ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય તેવા ઘન પદાર્થને **સમાંતરફલક (Parallelopiped)** કહે છે.

ધારો કે $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ અસમતલીય સદિશો છે

$\therefore \ (\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} \neq 0$

$\overrightarrow{OA} = \overline{a}$ તથા $\overrightarrow{OC} = \overline{b}$ એ અનુક્રમે સદિશ $\overline{a}$ તથા સદિશ $\overline{b}$ ના નિરૂપણ છે તથા O નો સ્થાન સદિશ $\overline{0}$ છે. અહીં, $\square$OABC એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

$\therefore \ \square^m$OABC નું ક્ષેત્રફળ $= |\overline{a} \times \overline{b}|$

વળી $\overline{a} \times \overline{b}$ (એટલે કે $\overrightarrow{OM}$) એ $\overline{a}$ તથા $\overline{b}$ બંનેને લંબ સદિશ છે.

$\therefore$ સમાંતરફલક OABC − B'C'O'A' ની ઊંચાઈ $= \overline{c}$ ના $\overline{a} \times \overline{b}$ પરના પ્રક્ષેપ સદિશનું માન (એટલે કે OM)

$$= \frac{|\overline{c} \cdot (\overline{a} \times \overline{b})|}{|\overline{a} \times \overline{b}|}$$

સમાંતરફલકનું ઘનફળ = પાયાનું ક્ષેત્રફળ × ઊંચાઈ

$$= |\overline{a} \times \overline{b}| \frac{|\overline{c} \cdot (\overline{a} \times \overline{b})|}{|\overline{a} \times \overline{b}|}$$

$$= |\overline{c} \cdot (\overline{a} \times \overline{b})|$$

$\therefore$ **સમાંતરફલકનું ઘનફળ** $= |[\overline{c}\ \overline{a}\ \overline{b}]| = |[\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}]|$

નોંધ : આપણે એ નોંધીએ કે $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ એ સમાંતર ફલકની પાસપાસેની ધારો છે.

ઉદાહરણ 20 : જેની ધારો $\overrightarrow{OA} = (2, 1, 1)$, $\overrightarrow{OB} = (3, -1, 1)$ અને $\overrightarrow{OC} = (-1, 1, -1)$ હોય તેવા સમાંતરફલકનું ઘનફળ શોધો.

ઉકેલ : $\overline{a} = (2, 1, 1)$, $\overline{b} = (3, -1, 1)$, $\overline{c} = (-1, 1, -1)$ લેતાં,

$$[\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(0) - 1(-2) + 1(2) = 4$$

સમાંતરફલકનું ઘનફળ $= |[\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}]| = |4| = 4$

6.11 સદિશની દિક્કોસાઈન, દિક્ખૂણાઓ અને દિક્ગુણોત્તર

આપણે જાણીએ છીએ કે, $\hat{i} = (1, 0, 0)$, $\hat{j} = (0, 1, 0)$ અને $\hat{k} = (0, 0, 1)$ એ અનુક્રમે X-અક્ષ, Y-અક્ષ અને Z-અક્ષની ધન દિશામાં R^3ના એકમ સદિશો છે. જો શૂન્યેતર સદિશ $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ એ X-અક્ષ, Y-અક્ષ અને Z-અક્ષની ધન દિશા સાથે અનુક્રમે α, β અને γ માપના ખૂણાઓ બનાવે, તો α, β અને γ ને સદિશ $\overline{x}$ ના દિક્ખૂણાઓનાં માપ (Direction Angles) કહે છે. $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ને $\overline{x}$ ની દિક્કોસાઈન (Direction Cosines) કહે છે.

α એ $\bar{x}$ અને $\hat{i}$, વચ્ચેના ખૂણાનું માપ છે. તેથી

$$cos\alpha = \frac{\bar{x} \cdot \hat{i}}{|\bar{x}||\hat{i}|} = \frac{(x_1, x_2, x_3)\cdot(1, 0, 0)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\cdot 1} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

તે જ પ્રમાણે, $cos\beta = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$ અને $cos\gamma = \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$.

જો આપણે $l = cos\alpha$, $m = cos\beta$, $n = cos\gamma$ લઈએ તો,

$$(l,\ m,\ n) = (cos\alpha,\ cos\beta,\ cos\gamma) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}\right)$$

$$= \left(\frac{x_1}{|\bar{x}|}, \frac{x_2}{|\bar{x}|}, \frac{x_3}{|\bar{x}|}\right)$$

$$\therefore\ (l,\ m,\ n) = \frac{1}{|\bar{x}|}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} = \hat{x}$$

હવે, $l^2 + m^2 + n^2 = cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 1$

વળી $(cos\alpha, cos\beta, cos\gamma) = \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} = \hat{x}$

$\therefore$ $\frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} = k\bar{x}$ જ્યાં $k = \frac{1}{|\bar{x}|} > 0$ હોવાથી, $(cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$ એ $\bar{x}$ ની દિશાનો એકમ સદિશ છે.

જો $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\bar{x} \neq \bar{0}$ અને $m \neq 0$ તો $m\bar{x} = (mx_1, mx_2, mx_3)$ થશે. $m\bar{x}$ના ઘટકો mx_1, mx_2 અને mx_3ને સદિશ $\bar{x}$ના દિક્ગુણોત્તર (દિક્સંખ્યાઓ) કહે છે. mના સ્થાને mk ($m \neq 0$, $k \neq 0$) મૂકતાં સદિશ $k\bar{x}$ ના દિક્ગુણોત્તર $m(kx_1)$, $m(kx_2)$, $m(kx_3)$ થશે. $m > 0$, માટે $\bar{x}$ અને $m\bar{x}$ ની દિક્કોસાઈન સમાન થશે, જ્યારે $m < 0$ માટે $\bar{x}$ અને $m\bar{x}$ ની દિક્કોસાઈન એકબીજાની વિરોધી સંખ્યા થશે.

$\bar{x}$ ના દિક્ખૂણાના માપ $\alpha = cos^{-1}\frac{x_1}{|\bar{x}|}$, $\beta = cos^{-1}\frac{x_2}{|\bar{x}|}$ અને $\gamma = cos^{-1}\frac{x_3}{|\bar{x}|}$ થશે.

> $\frac{m\bar{x}}{|m\bar{x}|} = \frac{m\bar{x}}{|m||\bar{x}|} = \frac{m\bar{x}}{m|\bar{x}|} = \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|}$, $m > 0$
>
> $\therefore$ જો $m > 0$ તો $\bar{x}$ અને $m\bar{x}$ ની દિક્કોસાઈન સમાન છે.
>
> તે જ રીતે જો $m < 0$ તો $|m| = -m$. $\bar{x}$ અને $m\bar{x}$ ની દિક્કોસાઈન એક બીજાની વિરોધી સંખ્યા છે.

ઉદાહરણ 21 : $\sqrt{2}\,\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ની દિક્કોસાઈન અને દિક્ખૂણાઓ શોધો.

ઉકેલ : $\bar{x} = (\sqrt{2}, -1, 1)$ લેતાં, $|\bar{x}| = \sqrt{2+1+1} = 2$

જો α, β અને γ એ $\bar{x}$ ના દિક્ખૂણાઓ હોય, તો $cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $cos\beta = -\frac{1}{2}$, $cos\gamma = \frac{1}{2}$

$\therefore$ $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \pi - cos^{-1}\frac{1}{2} = \frac{2\pi}{3}$ અને $\gamma = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ દિક્કોસાઈન $\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ અને દિક્ખૂણાઓ $\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}$ અને $\frac{\pi}{3}$ છે.

ઉદાહરણ 22 : સદિશ $\bar{x}$ એ X-અક્ષ અને Y-અક્ષ સાથે અનુક્રમે $\frac{\pi}{3}$ અને $\frac{2\pi}{3}$ માપના ખૂણા બનાવે તો તે Z-અક્ષ સાથે કેટલા માપનો ખૂણો બનાવશે ?

ઉકેલ : જો સદિશ $\bar{x}$ એ X-અક્ષ, Y-અક્ષ અને Z-અક્ષ સાથે અનુક્રમે α, β અને γ માપના ખૂણા બનાવે, તો $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$. અહીં, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ અને $\beta = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore \quad cos^2\frac{\pi}{3} + cos^2\frac{2\pi}{3} + cos^2\gamma = 1$

$\therefore \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + cos^2\gamma = 1$

$\therefore \quad cos^2\gamma = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \quad \gamma = \frac{\pi}{4}$ અથવા $\frac{3\pi}{4}$

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 23 : જો $|\bar{x}| = 2$, $|\bar{y}| = 4$, $|\bar{z}| = 1$ અને $\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} = \bar{0}$ તો $\bar{x}\cdot\bar{y} + \bar{y}\cdot\bar{z} + \bar{z}\cdot\bar{x}$ શોધો.

ઉકેલ : $|\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}|^2 = |\bar{x}|^2 + |\bar{y}|^2 + |\bar{z}|^2 + 2\bar{x}\cdot\bar{y} + 2\bar{y}\cdot\bar{z} + 2\bar{z}\cdot\bar{x}$.

$\therefore \quad 0 = 4 + 16 + 1 + 2(\bar{x}\cdot\bar{y} + \bar{y}\cdot\bar{z} + \bar{z}\cdot\bar{x})$

$\therefore \quad \bar{x}\cdot\bar{y} + \bar{y}\cdot\bar{z} + \bar{z}\cdot\bar{x} = -\frac{21}{2}$.

ઉદાહરણ 24 : A(1, 1, 1), B(0, 2, 5), C(−3, 3, 2) અને D(−1, 1, −6) R^3 નાં બિંદુઓ છે. $\overrightarrow{AB}$ અને $\overrightarrow{CD}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો. $\overrightarrow{AB}$ અને $\overrightarrow{CD}$ વિશે શું નિર્ણય કરશો ?

ઉકેલ : $\overrightarrow{AB} = (0, 2, 5) - (1, 1, 1) = (-1, 1, 4)$ અને $\overrightarrow{CD} = (-1, 1, -6) - (-3, 3, 2) = (2, -2, -8)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+1+16} = 3\sqrt{2}$ અને $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{4+4+64} = 6\sqrt{2}$

$$cos(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{CD}|} = \frac{-2-2-32}{3\sqrt{2}\times 6\sqrt{2}} = \frac{-36}{36} = -1$$

$\therefore \quad (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}) = \pi$

$\overrightarrow{AB}$ અને $\overrightarrow{CD}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ π હોવાથી $\overrightarrow{AB}$ અને $\overrightarrow{CD}$ એકબીજાની વિરૂદ્ધ દિશાના સદિશો છે.

વળી, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = \bar{0}$ હોવાથી $\overrightarrow{AB}$ અને $\overrightarrow{CD}$ સમરેખ છે.

નોંધ : $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$. હોવાથી $\overrightarrow{AB}$ અને $\overrightarrow{CD}$ સમરેખ છે.

ઉદાહરણ 25 : સદિશ $\bar{a}$ એ $\bar{y} = 2\hat{i} - \hat{k}$ ને સમાંતર હોય અને $\bar{b}$ એ $\bar{y}$ ને લંબ હોય તેવા બે સદિશો $\bar{a}$ અને $\bar{b}$ના સરવાળા સ્વરૂપે $\bar{x} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ને દર્શાવો.

ઉકેલ : $\bar{a}$ એ $\bar{y}$ ને સમાંતર છે.

તેથી, $\bar{a} = m\bar{y}$, $m \in R - \{0\}$

$\therefore \quad \bar{a} = 2m\hat{i} - m\hat{k} = (2m, 0, -m)$

હવે, $\bar{x} = \bar{a} + \bar{b}$

$\therefore \quad \bar{b} = \bar{x} - \bar{a} = (3, -1, 2) - (2m, 0, -m) = (3 - 2m, -1, 2 + m)$

વળી, $\bar{b} \perp \bar{y}$

$\therefore \quad \bar{b}\cdot\bar{y} = 0$

$\therefore \quad (3 - 2m, -1, 2 + m) \cdot (2, 0, -1) = 0$

$\therefore \quad 6 - 4m - 2 - m = 0$

$\therefore \quad m = \frac{4}{5}$

$\therefore \quad \bar{a} = \frac{8}{5}\hat{i} - \frac{4}{5}\hat{k}$ અને $\bar{b} = \left(3 - 2\left(\frac{4}{5}\right)\right)\hat{i} - \hat{j} + \left(2 + \frac{4}{5}\right)\hat{k} = \frac{7}{5}\hat{i} - \hat{j} + \frac{14}{5}\hat{k}$

આ $\bar{a}$ અને $\bar{b}$ માટે $\bar{x} = \bar{a} + \bar{b}$ થાય.

ઉદાહરણ 26 : સાબિત કરો : $\bar{a} \times [\bar{a} \times (\bar{a} \times \bar{b})] = |\bar{a}|^2(\bar{b} \times \bar{a})$

ઉકેલ : $\bar{a} \times [\bar{a} \times (\bar{a} \times \bar{b})] = [\bar{a} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})]\,\bar{a} - (\bar{a} \cdot \bar{a})(\bar{a} \times \bar{b})$

$= [\bar{a} \ \bar{a} \ \bar{b}]\,\bar{a} - |\bar{a}|^2(-(\bar{b} \times \bar{a}))$

$= \bar{0} + |\bar{a}|^2(\bar{b} \times \bar{a})$

$= |\bar{a}|^2(\bar{b} \times \bar{a})$

ઉદાહરણ 27 : જો શૂન્યેતર સદિશો $\bar{a}, \bar{b}$ અને $\bar{c}$ માટે $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{c}$ અને $\bar{b} \times \bar{c} = \bar{a}$ તો સાબિત કરો કે $|\bar{b}| = 1$.

ઉકેલ : $\bar{b} \times \bar{c} = \bar{a}$

$\therefore \quad (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$

$\therefore \quad [\bar{b} \ \bar{c} \ \bar{b}] = \bar{a} \cdot \bar{b}$

$\therefore \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ **(i)**

હવે, $\bar{b} \times \bar{c} = \bar{a}$

$\therefore \quad \bar{b} \times (\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{a}$ **($\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$)**

$\therefore \quad (\bar{b} \cdot \bar{b})\bar{a} - (\bar{b} \cdot \bar{a})\bar{b} = \bar{a}$ **((i) પરથી)**

$\therefore \quad |\bar{b}|^2\bar{a} = \bar{a}$

$\therefore \quad (|\bar{b}|^2 - 1)\bar{a} = \bar{0}$

$\therefore \quad \bar{a} \neq \bar{0}$ હોવાથી $|\bar{b}|^2 = 1$ **($\alpha\bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \alpha = 0$ અથવા $\bar{x} = \bar{0}$)**

$\therefore \quad |\bar{b}| = 1$

ઉદાહરણ 28 : જો A(1, 1, 2), B(2, 3, 5), C(1, 3, 4) અને D(0, 1, 1) એ સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણ ABCD નાં શિરોબિંદુઓ હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : રીત 1 : $\square^m$ABCD ની પાસપાસેની બાજુઓ

$\overrightarrow{AB} = (2, 3, 5) - (1, 1, 2) = (1, 2, 3)$ અને

$\overrightarrow{BC} = (1, 3, 4) - (2, 3, 5) = (-1, 0, -1)$

$\square^m$ABCD નું ક્ષેત્રફળ $= |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| = |(-2 - 0, -(-1 + 3), 0 + 2)|$

$= |(-2, -2, 2)|$

$= \sqrt{4 + 4 + 4}$

$= 2\sqrt{3}$

રીત 2 : સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ના વિકર્ણો $\overline{AC}$ અને $\overline{BD}$ દર્શાવતા સદિશો,

$\overrightarrow{AC} = (0, 2, 2)$ અને $\overrightarrow{BD} = (-2, -2, -4)$ છે.

$\therefore \quad \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD} = (-8 + 4, -(0 + 4), 0 + 4)$

$= (-4, -4, 4)$

$\therefore$ ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \, | \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD} |$

$= \frac{1}{2} \, |(-4, -4, 4)|$

$= \frac{1}{2} \sqrt{16 + 16 + 16}$

$= 2\sqrt{3}$

ઉદાહરણ 29 : જો α, β, γ એ સદિશ $\overline{x}$ ના દિક્‌ખૂણાઓ હોય, તો સાબિત કરો કે $sin^2\alpha + sin^2\beta + sin^2\gamma = 2$ તથા $cos2\alpha + cos2\beta + cos2\gamma$ નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : α, β, γ એ $\overline{x}$ ના દિક્‌ખૂણાઓ છે.

$\therefore \quad cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$

$\therefore \quad 1 - sin^2\alpha + 1 - sin^2\beta + 1 - sin^2\gamma = 1$

$\therefore \quad sin^2\alpha + sin^2\beta + sin^2\gamma = 2$

વળી, $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$

$\therefore \quad \frac{1 + cos2\alpha}{2} + \frac{1 + cos\,2\beta}{2} + \frac{1 + cos2\gamma}{2} = 1$

$\therefore \quad 3 + cos2\alpha + cos2\beta + cos2\gamma = 2$

$\therefore \quad cos2\alpha + cos2\beta + cos2\gamma = -1.$

ઉદાહરણ 30 : XY-સમતલમાં સદિશ $4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ને લંબ હોય તેવો એકમ સદિશ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે XY-સમતલનો એકમ સદિશ $(a, b, 0)$ છે તથા તે $(4, -3, 2)$ ને લંબ છે.

$\therefore \quad (a, b, 0) \cdot (4, -3, 2) = 0$

$\therefore \quad 4a - 3b = 0$

$\therefore \quad a = \frac{3b}{4}$

હવે, $(a, b, 0)$ એકમ સદિશ છે.

$\therefore \quad a^2 + b^2 = 1$

$\therefore \quad \frac{9b^2}{16} + b^2 = 1$

$\therefore \quad 25b^2 = 16$

$\therefore \quad b = \pm \frac{4}{5}, a = \pm \frac{3}{5}$

$\therefore$ માંગેલ સદિશ $\pm \frac{1}{5}(3, 4, 0)$ છે.

ઉદાહરણ 31 : $\overline{a}$ એ એકમ સદિશ છે તથા $\overline{b} = (3, 0, -4)$ છે. $\overline{a}$ અને $\overline{b}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{6}$ છે. જો કોઈ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો $(3\overline{a} + \overline{b})$ અને $(\overline{a} + 3\overline{b})$ હોય, તો તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \,|(3\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} + 3\bar{b})|$

$$= \frac{1}{2} \,|3(\bar{a} \times \bar{a}) + \bar{b} \times \bar{a} + 9(\bar{a} \times \bar{b}) + 3(\bar{b} \times \bar{b})|$$

$$= \frac{1}{2} \,|-(\bar{a} \times \bar{b}) + 9(\bar{a} \times \bar{b})| = 4\,|\bar{a} \times \bar{b}|$$

હવે, $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}| \sin(\bar{a}, \hat{\ } \bar{b})$

$$= (1)\left(\sqrt{9+16}\right)\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= (5)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{5}{2}$$

$\therefore$ ક્ષેત્રફળ $= 4 \times \frac{5}{2} = 10$

સ્વાધ્યાય 6

1. જો $\bar{x} = (-1, 2, 3)$, $\bar{y} = (2, -1, 3)$ અને $\bar{z} = (3, 2, 1)$ હોય, તો બતાવો કે $\bar{x} \times (\bar{y} \times \bar{z}) \neq (\bar{x} \times \bar{y}) \times \bar{z}$.
2. સાબિત કરો કે $[\bar{x} + \bar{y} \quad \bar{y} + \bar{z} \quad \bar{z} + \bar{x}] = 2\,[\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{z}]$.
3. જો $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{x} \cdot \bar{z}$ હોય તો $\bar{y} = \bar{z}$ કહેવાય ? શા માટે ?
4. જો $\bar{x} \times \bar{y} = \bar{x} \times \bar{z}$ હોય તો $\bar{y} = \bar{z}$ કહેવાય ? શા માટે ?
5. જો $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{x} \cdot \bar{z}$ અને $\bar{x} \times \bar{y} = \bar{x} \times \bar{z}$ અને $\bar{x} \neq \bar{0}$ હોય તો સાબિત કરો કે $\bar{y} = \bar{z}$.
6. જો $a(1, 3, 2) + b(1, -5, 6) + c(2, 1, -2) = (4, 10, -8)$ તો a, b, c શોધો.
7. જો $m\bar{a} = n\bar{b}$, $m, n \in \mathrm{N}$ તો સાબિત કરો કે $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|$. જો $m, n \in \mathrm{Z} - \{0\}$ હોય તો શું કહી શકાય ?
8. સાબિત કરો કે, $\bar{x} \times (\bar{y} \times \bar{z}) + \bar{y} \times (\bar{z} \times \bar{x}) + \bar{z} \times (\bar{x} \times \bar{y}) = \bar{0}$.
9. નીચેનાં સદિશોના દિક્ખૂણાઓ અને દિક્કોસાઈન શોધો :

   (1) $(1, 0, -1)$ (2) $\hat{j} + \hat{k}$ (3) $5\hat{i} + 12\hat{j} + 84\hat{k}$.
10. જો $(\bar{x}, \hat{\ } \bar{y}) = \alpha$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\,|\bar{x} - \bar{y}|$, જ્યાં $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ એકમ સદિશો છે.
11. R^2 માં $(5, -12)$ સદિશને લંબ એકમ સદિશ મેળવો.
12. જો $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ અસમતલીય હોય, તો સાબિત કરો કે $\bar{x} + \bar{y}$, $\bar{y} + \bar{z}$ અને $\bar{z} + \bar{x}$ અસમતલીય છે.
13. સાબિત કરો કે, $(\bar{a} - \mathrm{Proj}_{\bar{b}}\,\bar{a})$ એ $\bar{b}$ ને લંબ છે.
14. સાબિત કરો કે, $(1, 2, 3)$ અને $(2, 1, 3)$ અસમરેખ છે.
15. સાબિત કરો કે, $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 5)$ અને $(5, 8, 13)$ સમતલીય છે.
16. સદિશો $(a, 2)$ અને $(a, -2)$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{3}$ હોય, તો a શોધો.
17. સાબિત કરો કે સદિશ $a\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ એ $-a\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ને લંબ નથી.
18. જો $|\bar{a}| = 4$, $|\bar{b}| = 5$ અને $(\bar{a} \cdot \bar{b}) = -6$ હોય, તો $|\bar{a} \times \bar{b}|$ શોધો.
19. જો $(a, 1, 1)$, $(1, b, 1)$ અને $(1, 1, c)$ સમતલીય હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} = 1$.

20. $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{a} \times \overline{c}$, તથા $\overline{a} \neq \overline{0}$, $\overline{b} \neq \overline{c}$. સાબિત કરો કે $\overline{b} = \overline{c} + k\overline{a}$, $k \in R$

21. $\overline{a}$ એ $\overline{b}$ અને $\overline{c}$ ને લંબ સદિશ છે. $\overline{a}$, $\overline{b}$ અને $\overline{c}$ એકમ સદિશો છે. જો $(\overline{b}, \widehat{\ } \overline{c}) = \frac{\pi}{6}$, તો સાબિત કરો કે $\overline{a} = \pm 2(\overline{b} \times \overline{c})$.

22. સાબિત કરો $[(\overline{a} \times \overline{b}) \times (\overline{a} \times \overline{c})] \cdot \overline{d} = (\overline{a} \cdot \overline{d})[\overline{a} \quad \overline{b} \quad \overline{c}]$.

23. સદિશનો ઉપયોગ કરી $sin(\alpha + \beta) = sin\alpha \, cos\beta + cos\alpha \, sin\beta$ સાબિત કરો.

24. (4, –3, 1), (2, –4, 5) અને (1, –1, 0) શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ મેળવો.

25. $4\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ નો $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ પરનો પ્રક્ષેપ તથા તેનું માન મેળવો.

26. (a, b, c) નો Y-અક્ષ પરનો પ્રક્ષેપ અને તેનું માન શોધો.

27. જો A(3, 2, –4), B(4, 3, –4), C(3, 3, 3) અને D(4, 2, –3) હોય, તો $\overrightarrow{AD}$ નો $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ પરનો પ્રક્ષેપ શોધો.

28. ΔABC માટે, સદિશના ઉપયોગથી $\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC}$ સાબિત કરો.

29. સદિશના ઉપયોગથી ત્રિકોણ માટેનું *cosine* સૂત્ર મેળવો.

30. $2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ ને એવા બે સદિશના સરવાળા સ્વરૂપે દર્શાવો કે જેથી બે સદિશ પૈકીનો એક સદિશ એ $2\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$ ને લંબ હોય અને બીજો સદિશ એ $2\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$ ને સમાંતર હોય.

31. R^3 માં એવો એકમ સદિશ શોધો, જે $\hat{i}$ સાથે $\frac{\pi}{4}$ માપનો ખૂણો બનાવે અને $\hat{k}$ ને લંબ હોય.

32. જો બે એકમ સદિશોના સરવાળાનો સદિશ પણ એકમ સદિશ હોય, તો બતાવો કે તેમના તફાવત સદિશનું માન $\sqrt{3}$ છે.

33. $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{c}$ અને $\overline{a} \cdot \overline{b} = 3$ થાય તેવો સદિશ $\overline{b}$ શોધો, જ્યાં $\overline{a} = (1, 1, 1)$ અને $\overline{c} = (0, 1, -1)$.

34. જેની ધારો $\overrightarrow{OA} = (3, 1, 4)$, $\overrightarrow{OB} = (1, 2, 3)$ અને $\overrightarrow{OC} = (2, 1, 5)$ હોય, તેવા સમાંતરફલકનું ઘનફળ શોધો.

35. સાબિત કરો કે જો $\overline{x} \times \overline{y} = \overline{0}$ તો $\overline{x} = k\overline{y}$, $k \in R - \{0\}$, $\overline{x} \neq \overline{0}$, $\overline{y} \neq \overline{0}$

36. **નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) (d)માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :**

(1) $\overline{x} = (-2, 1, -2)$ ની દિશામાં એકમ સદિશ ...... છે. ☐

(a) $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (b) $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ (c) $\left(-\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, -\frac{2}{9}\right)$ (d) $\left(\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$

(2) ...... એકમ સદિશ નથી. $(\alpha \neq \frac{n\pi}{2}; n \in Z)$ ☐

(a) $(cos\alpha, sin\alpha)$ (b) $(-cos\alpha, -sin\alpha)$ (c) $(-cos2\alpha, sin2\alpha)$ (d) $(cos2\alpha, sin\alpha)$

(3) $\overline{x} \times \overline{y} = (7, 2, -3)$, તો $\overline{y} \times \overline{x} = $ ...... ☐

(a) (7, 2, –3) (b) (–3, 2, 7) (c) (–7, –2, 3) (d) (3, –2, –7)

(4) $|\overline{x}| = |\overline{y}| = 1$, $\overline{x} \perp \overline{y}$, તો $|\overline{x} + \overline{y}| = $ ...... ☐

(a) $\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{2}$ (c) 1 (d) 0

(5) જો $\overline{x} = 3\overline{y}$, તો $\overline{x} \times \overline{y} = $ ...... ☐

(a) $3|\overline{y}|^2$ (b) $3|\overline{x}|^2$ (c) $\overline{0}$ (d) $\frac{1}{3}|\overline{y}|^2$

(6) $\overline{x} = (2, 3)$, $\overline{y} = (5, -2)$ એ ...... સદિશો છે.

(a) સમરેખ (b) અસમરેખ (c) સમદિશ (d) વિરુદ્ધદિશાના

(7) જો $\overline{x} = (a, 4, 2a)$ અને $\overline{y} = (2a, -1, a)$ પરસ્પર લંબ હોય, તો $a =$ ....

(a) 2 (b) 1 (c) 4 (d) કોઈપણ વાસ્તવિક સંખ્યા

(8) $(a, 1, -2)$, $(1, 1, 3)$, $(8, 5, 0)$ સમતલીય હોય તો $a =$ ....

(a) -5 (b) 5 (c) -2 (d) 2

(9) જો $\overline{x} = (3, 1, 0)$, $\overline{y} = (2, 2, 3)$, $\overline{z} = (-1, 2, 1)$ માટે $\overline{x} \perp (\overline{y} + k\overline{z})$ તો $k =$ ......

(a) 8 (b) 4 (c) $\frac{1}{8}$ (d) $\frac{1}{4}$

(10) જો $\overline{x} = (1, 2, 4)$, $\overline{y} = (-1, -2, k)$, $k \neq -4$ તો $|\overline{x} \cdot \overline{y}|$ ...... $|\overline{x}||\overline{y}|$.

(a) $<$ (b) $>$ (c) $=$ (d) $\geq$

(11) $\overline{x} = (-1, 4, -2)$, $\overline{y} = (-4, 16, -8)$ તો $|\overline{x} + \overline{y}|$ ...... $|\overline{x}| + |\overline{y}|$.

(a) $=$ (b) $>$ (c) $\geq$ (d) $\leq$

(12) $(3, 6, -9)$ અને ...... ના દિક્‌ગુણોત્તર સમાન છે.

(a) $(1, 2, 3)$ (b) $(\pi, 2\pi, 3\pi)$ (c) $(-1, -2, 3)$ (d) $(1, 2, 0)$

(13) જો $\overline{a} = (-3, 1, 0)$ અને $\overline{b} = (1, -1, -1)$ તો $\text{Comp}_{\overline{a}}\overline{b} =$ ....

(a) $\frac{4}{\sqrt{10}}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (c) $\frac{-4}{\sqrt{10}}$ (d) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

(14) $\hat{j} + \hat{k}$ અને $\hat{i} + \hat{k}$ વિકર્ણ સદિશવાળા સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ ...... થાય.

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) 3 (d) $\sqrt{3}$

(15) $(-1, 2, -1)$ ના $\hat{i}$ પરના પ્રક્ષેપનું માન ...... થાય.

(a) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ (b) $-\frac{1}{\sqrt{6}}$ (c) 1 (d) -1

(16) જો $\overline{a}$ શૂન્યેતર સદિશ હોય, તો $\overline{a}$ સાથે સમરેખ થાય તેવા એકમ સદિશોની સંખ્યા .... છે.

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) અનંત

(17) જેની ક્રમિક બાજુઓ $\hat{i} + \hat{k}$ અને $\hat{i} + \hat{j}$ હોય તેવા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ .... છે.

(a) 3 (b) $\sqrt{3}$ (c) $\frac{3}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(18) જો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ શૂન્યેતર, અસમરેખ સદિશો હોય, તો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ બંનેને લંબ એકમ ...... સદિશ મળે.

(a) 2 (b) 4 (c) ન મળે (d) અનંત

(19) જો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ θ હોય તથા $\overline{x} \cdot \overline{y} \geq 0$ તો ......

(a) $0 \leq \theta \leq \pi$ (b) $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ (c) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (d) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

(20) સદિશો (1, 1, 1), (2, −1, −1) અને (0, 2, 6) ના સરવાળા સદિશની દિશામાં એકમ સદિશ ...... છે.

(a) $-\frac{1}{7}(3, 2, 6)$ (b) $\frac{1}{49}(3, 2, 6)$ (c) $\frac{1}{7}(3, -2, 6)$ (d) $\frac{1}{7}(3, 2, 6)$

(21) ...... અર્થ વિહીન છે.

(a) $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$ (b) $(\bar{a} \cdot \bar{b})\, \bar{c}$ (c) $\bar{a} \times (\bar{b} \cdot \bar{c})$ (d) $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$

(22) જો $\bar{x} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\bar{y} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ અને $\bar{z} = \hat{i} + a\hat{j} + b\hat{k}$ સમતલીય હોય તથા $|\bar{z}| = \sqrt{3}$, તો ......

(a) $a = 1, b = -1$ (b) $a = 1, b = \pm 1$ (c) $a = -1, b = \pm 1$ (d) $a = \pm 1, b = 1$

(23) A(3, −1), B(2, 3) અને C(5, 1) હોય, તો $m\angle A$ = ...

(a) $cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{34}}$ (b) $\pi - cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{34}}$ (c) $sin^{-1}\frac{5}{\sqrt{34}}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

(24) જો $|\bar{x} \cdot \bar{y}| = cos\alpha$, તો $|\bar{x} \times \bar{y}|$ = ...

(a) $\pm\, sin\alpha$ (b) $sin\alpha$ (c) $-sin\alpha$ (d) $sin^2\alpha$

(25) જો $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$ તો $\bar{x} \times (\bar{x} \times \bar{y})$ = ... જ્યાં $|\bar{x}| = 1$.

(a) $\bar{x} \times \bar{y}$ (b) $\bar{x}$ (c) $-\bar{y}$ (d) $\bar{y} \times \bar{x}$

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. $R^2 = \{(x, y) \mid x \in R, y \in R\}$ અને $R^3 = \{(x, y, z) \mid x \in R, y \in R, z \in R\}$ એ R પરના સદિશ અવકાશ છે.
2. સદિશ અવકાશના ગુણધર્મ
3. જો $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, તો $\bar{x}$ નું માન $|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

   $\hat{i} = (1, 0, 0)$, $\hat{j} = (0, 1, 0)$ અને $\hat{k} = (0, 0, 1)$ એ અનુક્રમે X-અક્ષ, Y-અક્ષ અને Z-અક્ષની ધન દિશાના એકમ સદિશો છે. જો $\bar{x} = (x_1, x_2)$ તો $|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. R^2 માં $\hat{i} = (1, 0)$ તથા $\hat{j} = (0, 1)$
4. **સદિશની દિશા :** $\bar{x} \neq \bar{0}$, $\bar{y} \neq \bar{0}$

   જો (i) $\bar{x} = k\bar{y}$, $k > 0$, તો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ ની દિશા સમાન.

   (ii) $\bar{x} = k\bar{y}$, $k < 0$ તો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ ની દિશા પરસ્પર વિરુદ્ધ.

   (iii) કોઈપણ $k \in R$ માટે $\bar{x} \neq k\bar{y}$ તો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ ભિન્ન દિશાના સદિશ છે.
5. જો શૂન્યેતર સદિશો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ સમાન હોય તો અને તો જ $|\bar{x}| = |\bar{y}|$ અને $\bar{x}$ તથા $\bar{y}$ ની દિશા સમાન છે.

6. જો $\overline{x} \neq \overline{0}$, તો $\frac{1}{|\overline{x}|}\overline{x}$ એ $\overline{x}$ ની દિશામાં એકમ સદિશ છે. તેને $\hat{x}$ વડે દર્શાવાય છે.

7. જો $A(x_1, x_2, x_3)$ અને $B(y_1, y_2, y_3)$ R^3નાં બે ભિન્ન બિંદુઓ હોય, તો

$\overrightarrow{AB} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$

8. જો $P(x_1, x_2, x_3) \in R^3$, તો

(i) બિંદુ P નું XY-સમતલથી અંતર $= |x_3|$, YZ-સમતલથી અંતર $= |x_1|$ અને ZX-સમતલથી અંતર $= |x_2|$.

(ii) P નું X-અક્ષથી અંતર $= \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$.

(iii) P નું ઊગમબિંદુથી અંતર $= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

9. **સદિશના સરવાળાનો ત્રિકોણનો નિયમ :** A, B અને C એ અસમરેખ બિંદુ હોય, તો $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

10. **અંતઃગુણન :** જો $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ અને $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ તો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ નું અંતઃગુણન

$\overline{x} \cdot \overline{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. $\overline{x} = (x_1, x_2)$, $\overline{y} = (y_1, y_2)$, તો $\overline{x} \cdot \overline{y} = x_1y_1 + x_2y_2$.

અંતઃગુણનના ગુણધર્મો.

11. **બહિર્ગુણન :** જો $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ અને $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ તો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$નું બહિર્ગુણન

$$\overline{x} \times \overline{y} = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

બહિર્ગુણનના ગુણધર્મો.

12. **પેટીગુણન :** જો $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ અને $\overline{z} = (z_1, z_2, z_3)$ હોય તો $\overline{x}$, $\overline{y}$ અને $\overline{z}$નું પેટીગુણન

$$\overline{x} \cdot (\overline{y} \times \overline{z}) = [\overline{x} \quad \overline{y} \quad \overline{z}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

પેટીગુણનના ગુણધર્મો.

13. **સદિશનું ત્રિગુણન :** જો $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in R^3$ તો $\overline{x}$, $\overline{y}$ અને $\overline{z}$નું ત્રિગુણન $\overline{x} \times (\overline{y} \times \overline{z}) = (\overline{x} \cdot \overline{z})\overline{y} - (\overline{x} \cdot \overline{y})\overline{z}$.

14. **લાગ્રાન્જનું નિત્યસમ :** $(\overline{x} \cdot \overline{y})^2 + |\overline{x} \times \overline{y}|^2 = |\overline{x}|^2 |\overline{y}|^2$

15. **કોશી-સ્વાર્ત્ઝની અસમતા** $|\overline{x} \cdot \overline{y}| \leq |\overline{x}| |\overline{y}|$

16. **ત્રિકોણીય અસમતા :** $|\overline{x} + \overline{y}| \leq |\overline{x}| + |\overline{y}|$.

17. **બે શૂન્યેતર સદિશ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ :** $(\overline{x} \,\widehat{,}\, \overline{y}) = cos^{-1} \frac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{|\overline{x}||\overline{y}|}$

18. $\overline{x} \cdot \overline{y} = 0 \Leftrightarrow \overline{x} \perp \overline{y}$

19. **સદિશનો પ્રક્ષેપ :** જો $\overline{a}$ અને $\overline{b}$ શૂન્યેતર સદિશો હોય તથા તેઓ પરસ્પર લંબ ન હોય, તો $\overline{a}$ નો $\overline{b}$ પરનો પ્રક્ષેપ સદિશ $\text{Proj}_{\overline{b}}\overline{a} = \left(\frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{b}|^2}\right)\overline{b}$.

$\overline{a}$ ના $\overline{b}$ પરના પ્રક્ષેપનો ઘટક $\text{Comp}_{\overline{b}}\overline{a} = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{b}|}$.

$\text{Proj}_{\overline{b}}\overline{a}$નું માન $= \frac{|\overline{a} \cdot \overline{b}|}{|\overline{b}|}$.

20. ΔABC નું ક્ષેત્રફળ : જો $\bar{a} = \overrightarrow{BC}$, $\bar{b} = \overrightarrow{CA}$, અને $\bar{c} = \overrightarrow{AB}$ તો,

ΔABC નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}|\bar{b} \times \bar{c}|$

$= \frac{1}{2}\sqrt{|\bar{b}|^2|\bar{c}|^2 - |\bar{b}\cdot\bar{c}|^2}$

21. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ : $\square^m$ ABCD નું ક્ષેત્રફળ $= |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|$

$= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}|$

22. સમાંતર ફલકનું ઘનફળ : જો $\bar{a}$, $\bar{b}$ અને $\bar{c}$ એ સમાંતરફલકની ધારો હોય,
તો સમાંતરફલકનું ઘનફળ $= |[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]|$.

23. સમરેખ સદિશો : R^2 ના શૂન્યેતર સદિશ $\bar{x} = (x_1, x_2)$ તથા $\bar{y} = (y_1, y_2)$ સમરેખ હોવાની આવશ્યક તથા પર્યાપ્ત શરત છે, $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$.

R^3 ના સદિશો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ સમરેખ હોય તો અને તો જ $\bar{x} \times \bar{y} = \bar{0}$.

24. સમતલીય સદિશો : જો α, β, γ પૈકી ઓછામાં ઓછો એક શૂન્યેતર હોય અને $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \gamma\bar{z} = \bar{0}$ તો $\bar{x}$, $\bar{y}$ અને $\bar{z}$ ને સમતલીય સદિશો કહે છે.

જે સદિશો સમતલીય ન હોય તો તે અસમતલીય છે.

25. R^3 ના ભિન્ન શૂન્યેતર સદિશો $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ સમતલીય હોવા માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત $[\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}] = 0$.

26. સદિશની દિક્‌કોસાઈન, દિક્‌ખૂણાઓ અને દિક્‌ગુણોત્તર : જો $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ એ R^3 નું શૂન્યેતર સદિશ હોય અને $\bar{x}$ એ X-અક્ષ, Y-અક્ષ અને Z-અક્ષની ધન દિશા સાથે અનુક્રમે α, β અને γ માપના ખૂણા બનાવે તો α, β અને γ એ $\bar{x}$ ના દિક્‌ખૂણાઓ છે. $cos\alpha$, $cos\beta$, $cos\gamma$ એ $\bar{x}$ની દિક્‌કોસાઈન છે.

અહીં $cos\alpha = \frac{\bar{x}\cdot\hat{i}}{|\bar{x}||\hat{i}|} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$, $cos\beta = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$ અને $cos\gamma = \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$.

$m \neq 0$ માટે mx_1, mx_2, mx_3 ને $\bar{x}$ ના દિક્‌ગુણોત્તર કહે છે.

■