

## તરંગો

- 8.1 પ્રસ્તાવના
- 8.2 તરંગો
- 8.3 તરંગોનું વર્ગીકરણ
- 8.4 તરંગનો કંપવિસ્તાર, તરંગમાં ઊર્જાનું પ્રસરણ, તરંગલંબાઈ અને આવૃત્તિ
- 8.5 તરંગ-સમીકરણ
- 8.6 તરંગ-ઝડપ અને કળા-ઝડપ
- 8.7 માધ્યમમાં તરંગ-ઝડપ
- 8.8 સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત અને તરંગનું પરાવર્તન
- 8.9 સ્થિત-તરંગો
- 8.10 નળીમાં સ્થિત-તરંગો
- 8.11 સ્પંદ
- 8.12 ડોપ્લર-અસર
  - સારાંશ
  - સ્વાધ્યાય

### 8.1 પ્રસ્તાવના (Introduction)

વિદ્યાર્થીમિત્રો, અગાઉ આપણે ભણી ગયા કે બ્રહ્માંડ એ દ્રવ્ય અને વિકિરણનું બનેલું છે. આ વિકિરણ એ તરંગ સ્વરૂપે પ્રસરણ પામે છે. ભૌતિકવિજ્ઞાનની લગભગ બધી જ શાખાઓમાં તરંગો પાયાની અગત્ય ધરાવે છે. પ્રકાશ અને ધ્વનિ-ઊર્જાનું પ્રસરણ તરંગ સ્વરૂપે થાય છે. સૂર્યમાંથી ઉદ્ભવતી અલગ-અલગ પ્રકારની વિકિરણ-ઊર્જાઓ એ તરંગ સ્વરૂપે આપણા સુધી પહોંચે છે. વાજિંત્રોમાંથી ઉદ્ભવેલું સંગીત આપણા કાન સુધી ‘ધ્વનિ-તરંગો’ સ્વરૂપે પહોંચે છે. રેડિયો, ટેલિવિઝન અને મોબાઇલ ફોન દ્વારા થતો આધુનિક સંદેશાવ્યવહાર એ તરંગોને આભારી છે. 20મી સદીમાં ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં પ્રવેશેલી દ્રવ્યતરંગ (matter waves)ની વિભાવનાને પરિણામે તરંગોનું મહત્વ અનેક ગણું વધી ગયું છે.

પ્રસ્તુત પ્રકરણમાં આપણે તરંગો, તરંગોના પ્રકાર, જુદા-જુદા માધ્યમમાં તરંગોની ઝડપ, તરંગોનું પરાવર્તન અને તેમનું સંપાતીકરણ, સ્પંદ અને ડોપ્લર અસર જેવી ઘટનાઓનો અભ્યાસ કરીશું.

### 8.2 તરંગ (Waves)

અવકાશમાં જ્યારે કણ ગતિ કરે ત્યારે તેની સાથે સંકળાયેલી ગતિ-ઊર્જાનું પણ પરિવહન થાય છે. અવકાશમાં ઊર્જા એ બીજી રીતે પણ વહન પામે છે. જેમાં કણ પોતાના સ્થાન નજીક દોલનો કરી દૂર સુધી ઊર્જા પહોંચાડે છે.

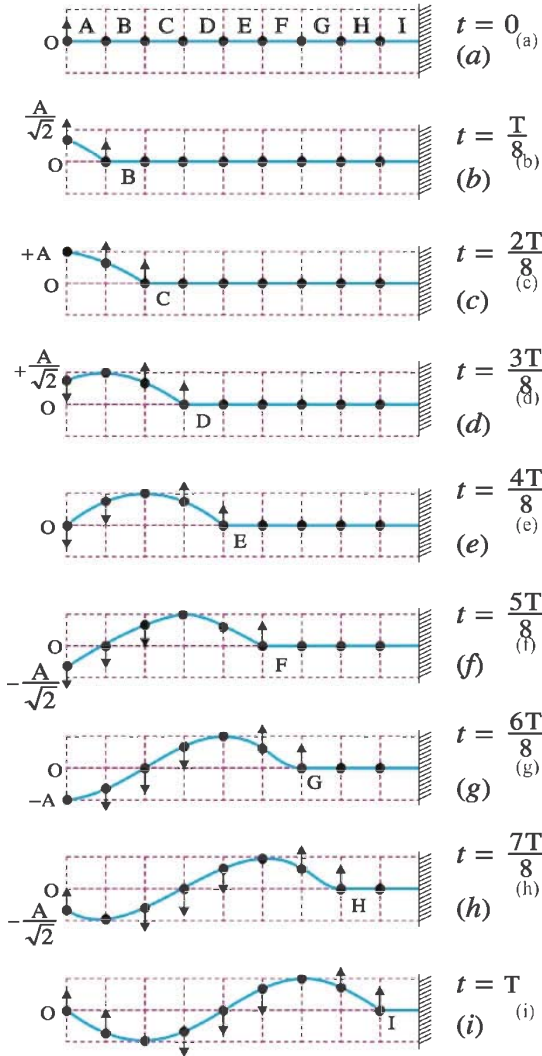
હવામાં ધ્વનિ આ રીતે પ્રસરણ પામે છે. જ્યારે તમે તમારા મિત્રને ‘Hello’ કહો છો, ત્યારે તમારા હોઠ આગળના માધ્યમના કણો ગતિ કરીને તમારા મિત્રના કાન સુધી પહોંચતા નથી, પરંતુ તમે તમારા હોઠની નજીક રહેલા માધ્યમમાં વિક્ષોભ ઉત્પન્ન કરો છો, જે તરંગ સ્વરૂપે પ્રસરણ પામીને મિત્રના કાન સુધી પહોંચે છે.

તરંગનો ખ્યાલ સ્પષ્ટ રીતે મેળવવા માટે લાંબી, સ્થિતિસ્થાપક અને જડિત આધારે બાંધેલી તણાવવાળી દોરીને ધ્યાનમાં લો. ધારો કે, આ દોરીને કોઈ વ્યક્તિએ ખેંચીને તણાવવાળી સ્થિતિમાં રાખેલી છે. અહીં દોરી એ એક પારિમાણિક સ્થિતિસ્થાપક માધ્યમ છે. આકૃતિ 8.1માં દર્શાવ્યા અનુસાર A, B, C, ..... I એ દોરીના માધ્યમના કણ છે. પ્રારંભમાં માધ્યમના બધા જ કણો સમતોલનની અવસ્થામાં છે. (આકૃતિ 8.1a.)

(i) ધારો કે  $t = 0$  સમયે વ્યક્તિ દ્વારા કણ Aમાં એવો વિક્ષોભ ઉત્પન્ન કરવામાં આવે છે, જેથી તે  $y = A \sin \omega t$  અનુસાર સરળ આવર્તદોલન કરે છે. આ દોલનનો આવર્તકાળ T છે.

(ii) માધ્યમના સ્થિતિસ્થાપકતાના ગુણધર્મને લીધે  $t = 0$  સમયે A પાસે ઉદ્ભવેલ વિક્ષોભની અસર  $\frac{T}{8}$  સમયે ધારો કે કણ B પર પહોંચે છે.  $\frac{T}{8}$  સમય દરમિયાન કણ Aનું સ્થાનાંતર  $y = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}\right)\left(\frac{T}{8}\right) = \frac{A}{\sqrt{2}}$  જેટલું થયું હશે ત્યારે કણ B એ સ.આ.ગ. શરૂ કરવાની તૈયારીમાં હશે. (આકૃતિ 8.1b)

(iii) હવે, વધારાનો  $\frac{T}{8}$  જેટલો સમયગાળો પસાર થતાં એટલે કે  $\frac{T}{8} + \frac{T}{8} = \frac{T}{4}$  જેટલા સમયગાળા બાદ A કણના દોલનની અસર કણ C પર પહોંચે છે અને તે દોલન શરૂ કરવાની તૈયારીમાં આવે છે.  $\frac{T}{4}$  સમય દરમિયાન કણ Aનું સ્થાનાંતર,  $y = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}\right)\left(\frac{T}{4}\right) = A$



દોરી પર તરંગનો ઉદ્ભવ

આકૃતિ 8.1

એટલે કે કંપવિસ્તાર જેટલું થાય છે અને કણ B નું સ્થાનાંતર

$\frac{A}{\sqrt{2}}$  જેટલું થાય છે (જુઓ આકૃતિ 8.1c).

(iv) આમ, A પર ઉત્પન્ન કરેલ વિક્ષોભને લીધે ક્રમશઃ આવતા કણો એક પછી એક દોલનો શરૂ કરતા જાય છે અને પોતાના દોલનોની અસર પોતાનાથી આગળના કણો પર પહોંચાડતા જાય છે અને વિક્ષોભ માધ્યમમાં આગળ પ્રસરતો જાય છે.

(v) આ રીતે વિક્ષોભ આગળ વધતા  $\frac{3T}{8}$  સમયે તે D કણ પર,  $\frac{4T}{8}$  સમયે તે E કણ પર, ..... અને T સમયે તે કણ I પર પહોંચે છે. આ T સમયમાં કણ Aનું એક દોલન પૂરું થાય છે ત્યારે કણ I દોલન શરૂ કરવાની તૈયારીમાં હોય છે.

આ સમગ્ર પરિસ્થિતિ આકૃતિ 8.1માં દર્શાવી છે. યાદ રાખો કે, માધ્યમના કણો સ્થિર સમતુલન અવસ્થામાં હતાં. તેમાં  $t = 0$  સમયે કણ A પર આપણે સરળ આવર્તદોલન પ્રકારનો વિક્ષોભ ઉત્પન્ન કર્યો, જે  $t = T$  સમયે માધ્યમમાં પ્રસરણ પામતો, I પર પહોંચે છે.

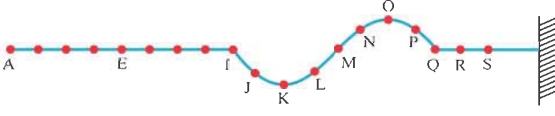
(vi) અહીં, કણ Aને આપેલ વિક્ષોભ સરળ આવર્તગતિ (sine પ્રકારની) પ્રકારનો હતો, તેથી દોરીમાં ઉત્પન્ન થતો આકાર sine વક્ર જેવો જોવા મળે છે. જો કણ Aનું સ્થાનાંતર કે દોલન બીજા કોઈ પ્રકારનું હોત, તો દોરી પર રચાતો આકાર તે દોલનના પ્રકાર અનુસાર મળે. અર્થાત્, **દોરી (માધ્યમ)માં રચાતો આકાર તેમાં ઉત્પન્ન કરેલ વિક્ષોભના પ્રકારને દર્શાવે છે.** ઉદાહરણ તરીકે, જો દોરીના મુક્ત છેડાને ફક્ત એક વાર ઝડપથી ઉપર-નીચે કરવામાં આવે, તો આકૃતિ 8.2માં દર્શાવ્યા અનુસાર આકાર ઉત્પન્ન થાય છે, જેને **તરંગસ્પંદ (pulse) કહે છે.**



વિક્ષોભ અનુરૂપ દોરીમાં ઉદ્ભવતો આકાર

આકૃતિ 8.2

જેમજેમ સમય પસાર થાય છે તેમ આકૃતિ 8.1માં દર્શાવેલ વિક્ષોભ (કે આકાર) કણ J, K, L,..... વગેરે પરથી પસાર થતો જાય છે.  $t = T$  સમયે sine વક્ર જેવો આકાર A અને I કણ વચ્ચે રહેલો હતો. આ આકાર દોરી પર આગળ વધે છે અને  $t = 2T$  સમયે તે આકૃતિ 8.3માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે I અને Q કણ વચ્ચે આવી જાય છે. આ દરમિયાન Aથી I વચ્ચેના દોલનો બંધ પડી જાય છે અને દોરી તે વિભાગમાં મૂળ સ્થિતિમાં આવી જાય છે.



$t = 2T$  સમયે દોરીનો આકાર

આકૃતિ 8.3

આમ, દોરી પર કોઈ કણ પાસે વિક્ષોભ ઉત્પન્ન કરતાં તે વિક્ષોભના પ્રકાર અનુસાર આકાર ઉત્પન્ન થઈ તે આકાર ‘પોતાનું સ્વરૂપ’ જાળવી રાખી દોરી પર ગતિ કરે છે. એટલે કે દોરીના માધ્યમમાં વિક્ષોભ પ્રસરણ પામતો જાય છે. **માધ્યમ (અવકાશ)માં વિક્ષોભની આવી ગતિને તરંગ-સ્પંદ અથવા સામાન્ય રીતે તરંગ કહે છે.**

અહીં યાદ રાખો કે દોરીના કણો A, B, C... એ સમગ્રપણે એક એકમ તરીકે માધ્યમમાં ગતિ કરતા નથી, પરંતુ તેઓ સમતુલન સ્થાનની આસપાસ માત્ર દોલન કે સ્થાનાંતર જ કરે છે. આમ, તરંગ એ માધ્યમમાં આગળ વધતી કોઈ ભૌતિક ‘વસ્તુ’ નથી. માધ્યમના કોઈ એક ભાગમાં ઉદ્ભવેલ વિક્ષોભની અસર માધ્યમના જુદા-જુદા કણો દ્વારા ક્રમશઃ જેમજેમ અનુભવાતી જાય તેમતેમ તરંગ આગળ વધતું જાય છે, તેમ કહેવાય. **કોઈ પણ કણ પાસેથી વિક્ષોભ પસાર થઈ ગયા પછી તે કણ ફરી પાછો પોતાની સમતુલિત અવસ્થામાં આવી જાય છે.**

રેલવે ટ્રેન સાથે જ્યારે એન્જિનનું જોડાણ થાય છે, ત્યારે એન્જિન પાસેનો પ્રથમ ડબો ધ્રુજે છે. ત્યાર પછી બીજો અને ત્યાર પછી ત્રીજો ડબો ધ્રુજારી અનુભવે છે. આમ, ધ્રુજારી પ્રથમ ડબાથી લઈને છેલ્લા ડબા સુધી આગળ વધે છે. આ ઘટના ‘રેલવેના ડબાઓથી બનતા’ માધ્યમમાં પ્રસરતા તરંગની જ કહેવાય.

### તરંગમાળા (Wavetrain)

ઉપરોક્ત ચર્ચામાં જો કણ Aના સરળ આવર્તદોલન સતત નિયમિત ચાલુ રાખવામાં આવે, તો પ્રથમ દોલનને કારણે ઉત્પન્ન થયેલ આકાર આગળ વધે તેની તરત પાછળ બીજા દોલનને કારણે ઉદ્ભવતો આકાર ગોઠવાઈ જાય છે. આમ, માધ્યમમાં એક પછી એક આકારો સતત ગતિ કરતા જણાય છે. **વિક્ષોભોની આવી હારમાળાને તરંગમાળા કહે છે.**

આપણે જે કિસ્સાની ચર્ચા કરી તેમાં તરંગ-ઘટનામાં ભાગ લેતાં કણો સરળ આવર્તગતિ કરતા હોય (અથવા તરંગને લીધે માધ્યમમાં ઉદ્ભવતા આકાર sine અથવા cosine વક્રો હોય) તેવા તરંગોને **હાર્મોનિક તરંગો (harmonic wave)** કહે છે.

જો માધ્યમમાં તરંગો સતત આગળ ને આગળ ગતિ કરતા હોય તેવા તરંગોને **પ્રગામીતરંગો (progressive waves)** કહે છે.

### 8.3 તરંગોનું વર્ગીકરણ (Classification of Waves)

(i) **યાંત્રિક તરંગો (Mechanical waves)** : જે તરંગોને પ્રસરણ માટે સ્થિતિસ્થાપક માધ્યમની જરૂર છે તેવા તરંગોને યાંત્રિક તરંગો કહે છે. આવા તરંગો માધ્યમના સ્થિતિસ્થાપક ગુણધર્મને લીધે પ્રસરે છે. દા. ત., દોરી પરના તરંગો, પાણીની સપાટી પર પ્રસરતા તરંગો, ધ્વનિના તરંગો, ધરતીકંપના તરંગો (seismic waves). આ તરંગોની ખાસિયત એ છે કે તેઓ ન્યૂટનના નિયમોને અનુસરે છે.

(ii) **વિદ્યુતચુંબકીય તરંગો (Electromagnetic waves)** : વિદ્યુતચુંબકીય તરંગોના પ્રસરણ માટે માધ્યમની જરૂર નથી. તે શૂન્યાવકાશમાં પણ પ્રસરણ પામે છે. આ પ્રકારના તરંગમાં, અવકાશમાં વિદ્યુત અને ચુંબકીય ક્ષેત્રો સાથે સંકળાયેલ વિક્ષોભ પ્રસરણ પામે છે. તેમાં કણોને બદલે બધા બિંદુઓ પર વિદ્યુત અને ચુંબકીય ક્ષેત્રની તીવ્રતાના સંદિશો ‘દોલન’ કરે છે.

પ્રકાશના તરંગો, રેડિયો-તરંગો, માઈક્રોવેવ તરંગો, X-ray વિગેરે એ વિદ્યુતચુંબકીય તરંગોના ઉદાહરણો છે. (આ તરંગોની વધારે સમજૂતી ધોરણ 12માં મેળવશો.)

(iii) **દ્રવ્ય-તરંગો (Matter waves)** : દ્રવ્ય-તરંગો એ ગતિમાન ઇલેક્ટ્રોન, પ્રોટોન, ન્યુટ્રોન અને બીજા મૂળભૂત કણો તેમજ અણુ અને પરમાણુઓ સાથે સંકળાયેલ છે. આ કણો દ્રવ્યની રચના કરતા હોવાથી તેને દ્રવ્ય-તરંગો કહે છે. આ પ્રકારના તરંગની વિભાવનાનો અભ્યાસ તમે ધોરણ 12માં કરશો. આધુનિક ટેક્નોલોજીમાં આ તરંગની વિભાવના પરથી આધુનિક વૈજ્ઞાનિક ઉપકરણો બનાવવામાં આવ્યાં છે. ઉદાહરણ તરીકે, ઇલેક્ટ્રોન સાથે સંકળાયેલ દ્રવ્ય-તરંગની વિભાવના પરથી ઇલેક્ટ્રોન માઈક્રોસ્કોપ વિકસાવવામાં આવેલ છે.

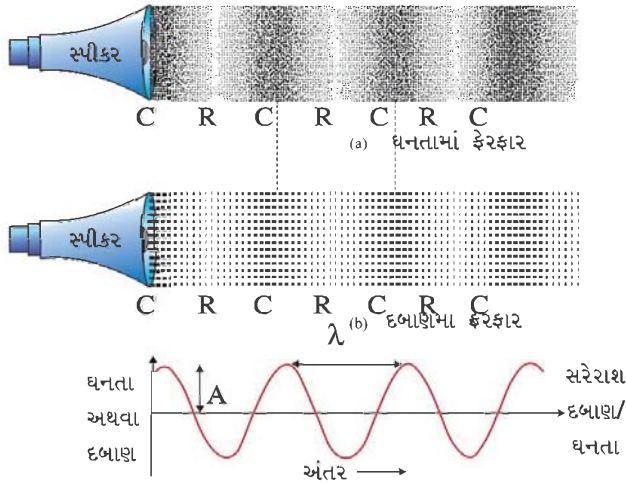
પ્રસ્તુત પ્રકરણમાં આપણે ફક્ત યાંત્રિક-તરંગો વિશે અભ્યાસ કરીશું.

**લંબગત તરંગ (Transverse wave)** : જે તરંગમાં માધ્યમના કણોના સ્થાનાંતરની દિશા તરંગના પ્રસરણની દિશાને લંબ હોય, તેવા તરંગને **લંબગત તરંગ** કહે છે. પરિચ્છેદ 8.2 માં ચર્ચેલા દોરી પરના તરંગો એ લંબગત તરંગો છે. વિદ્યુતચુંબકીય તરંગો (દા. ત. પ્રકાશના તરંગો) એ લંબગત તરંગો છે. આ તરંગોમાં એક તરફના મહત્તમ સ્થાનાંતરોને **શુંગ (crest)** અને તેની વિરુદ્ધ દિશામાંના

મહત્તમ સ્થાનાંતરોને **ગર્ત (trough)** કહે છે. આ તરંગો માધ્યમમાં ક્રમશઃ શૂંગ અને ગર્ત રચીને પ્રસરણ પામે છે.

**સંગત તરંગો (Longitudinal wave) :** જે તરંગમાં માધ્યમના કણોનું સ્થાનાંતર તરંગ-પ્રસરણ દિશા પર જ હોય, તેવા તરંગને **સંગત તરંગ** કહે છે. દા. ત., હવામાં પ્રસરતા ધ્વનિના તરંગો. આ તરંગો માધ્યમમાં ક્રમશઃ સંઘનન અને વિઘનન રચીને પ્રસરણ પામતા હોય છે. માધ્યમમાં પ્રસરતા તરંગોમાં માધ્યમના કણો તરંગ-પ્રસરણની દિશા પર પોતાના સમતોલન સ્થાનની આસપાસ દોલન કરતા હોય છે.

સરળતા ખાતર હવામાંથી પસાર થતાં સંગત તરંગોના કિસ્સામાં માધ્યમના કણોની સ્થિતિ, કોઈ એક ક્ષણે કેવી હોય તે આકૃતિ 8.4માં દર્શાવ્યું છે.



હવામાં પ્રસરતા સંગત તરંગો

આકૃતિ 8.4

સંગત તરંગો (ધ્વનિ-તરંગો) હવામાંથી પસાર થાય ત્યારે અમુક વિભાગમાં હવાના અણુઓ તેમનાં દોલનો દરમિયાન એકબીજાની ખૂબ નજીક ધકેલાય છે. પરિણામે તે વિભાગોમાંથી હવાની ઘનતામાં અને પરિણામે હવાના દબાણમાં વધારો થાય છે અને આ વિભાગમાં **સંઘનન (condensation)** રચાયું છે તેમ કહેવાય. બે ક્રમિક સંઘનનો વચ્ચેના વિભાગમાં હવાના અણુઓ છૂટા પડેલા દેખાય છે. આ વિભાગમાં હવાની ઘનતા અને દબાણમાં ઘટાડો થાય છે અને આ વિભાગમાં **વિઘનન (rarefaction)** રચાયું છે, તેમ કહેવાય. (જુઓ આકૃતિ 8.4).

આમ, ધ્વનિના પ્રસરણ દરમિયાન માધ્યમના સ્તરો પોતાના મધ્યમાન સ્થાનની આસપાસ દોલનો ચાલુ રાખે છે અને આ પ્રક્રિયા દરમિયાન ક્રમિક રીતે માધ્યમમાં સંઘનનો અને વિઘનનો રચાતાં જાય છે. જેમજેમ દોલનોની અસર એક પછી એક સ્તર પર પહોંચતી જાય છે, તેમ સંઘનનો

અને વિઘનનો માધ્યમમાં આગળ વધતાં જાય છે. આ રીતે માધ્યમમાં ધ્વનિના તરંગોનું પ્રસરણ થાય છે. સંગત તરંગોના પ્રસરણ દરમિયાન માધ્યમના જુદા-જુદા વિભાગોનું દબાણ, સમય અને સ્થાન સાથે બદલાતું જતું હોવાથી આવા તરંગોને **દબાણ-તરંગો (pressure waves)** પણ કહે છે.

લંબગત તરંગોના કિસ્સામાં માધ્યમના કણોનાં દોલનો તરંગના પ્રસરણની દિશાને લંબ હોવાથી જ્યારે આવા તરંગો માધ્યમમાં પ્રસરે છે, ત્યારે માધ્યમનો દરેક ખંડ કે ઘટક આકાર-વિકૃતિ (shearing strain) અનુભવે છે. માત્ર ઘન માધ્યમમાં જ આકાર-પ્રતિબળ (shearing stress) સંભવ હોવાથી લંબગત તરંગો દોરી, તાર કે સળિયા જેવાં ઘન માધ્યમોમાં જ પ્રસરણ પામી શકે છે અને પ્રવાહી કે વાયુમાં લંબગત તરંગો શક્ય નથી.

સંગત તરંગના પ્રસરણમાં માધ્યમના કણોનાં દોલનો પ્રસરણની દિશામાં જ થતાં હોવાથી આવા તરંગના પ્રસરણ દરમિયાન દાબીય વિકૃતિ (compressive strain) ઉત્પન્ન થાય છે અને દાબ-પ્રતિબળ (compressive stress) તો ઘન, પ્રવાહી કે વાયુ એમ દરેક માધ્યમમાં શક્ય હોવાથી સંગત તરંગો બધાં જ માધ્યમોમાં શક્ય છે.

આમ, ઘન માધ્યમમાં લંબગત અને સંગત એમ બંને પ્રકારના તરંગોનું પ્રસરણ શક્ય છે અને તરલ માધ્યમમાં માત્ર સંગત યાંત્રિક તરંગોનું જ પ્રસરણ શક્ય છે.

[ધરતીકંપના લીધે પૃથ્વીમાં લંબગત અને સંગત એમ બંને પ્રકારના તરંગો ઉદ્ભવે છે, જેને અનુક્રમે S-તરંગ (secondary wave) અને P-wave (primary wave) કહે છે. પૃથ્વીની સપાટીના અંદરના ભાગમાં ધ્વનિ-તરંગ જેવા સંગત તરંગ (P-તરંગ) ઉદ્ભવે છે, જેની ઝડપ આશરે 4–8 km/s જેટલી હોય છે અને S-તરંગની ઝડપ આશરે 2–5 km/s જેટલી હોય છે. S-તરંગમાં પૃથ્વીની સપાટીનો અંદરનો ભાગ તરંગ પ્રસરણની દિશાને લંબ દિશામાં દોલન કરે છે. સિસ્મોગ્રાફમાં પહેલું P-તરંગ એ પહેલા S-તરંગ કરતાં કેટલું વહેલું નોંધાય છે. તે પરથી સિસ્મોગ્રાફથી ધરતીકંપનું ઉદ્ગમસ્થાન (epi-centre)નું અંતર નક્કી કરી શકાય છે.]

**8.4 તરંગોમાં કંપવિસ્તાર, તરંગમાં ઊર્જાનું પ્રસરણ, તરંગલંબાઈ અને આવૃત્તિ (Amplitude of a Wave, Propagation of Energy in a Wave, Wavelength and Frequency)**

**તરંગનો કંપવિસ્તાર (Amplitude of a wave) :**

તરંગમાં 'કણો'ના દોલનના કંપવિસ્તારને તરંગનો



કંપવિસ્તાર કહે છે. આકૃતિ 8.5માં દર્શાવ્યા મુજબ તરંગનો કંપવિસ્તાર A છે.

### તરંગમાં ઊર્જાનું પ્રસરણ (Propagation of energy in a wave) :

માધ્યમમાં તરંગ ઉત્પન્ન કરવા માટે તો કોઈ કણ (વિભાગ)ને દોલિત અથવા સ્થાનાંતરિત કરવો પડે છે. આ માટે તેના પર કાર્ય કરવું પડે છે. આ કાર્ય જેટલી ઊર્જા કણને મળે છે. જે તેના દોલન દરમિયાન તેની સ્થિતિ-ઊર્જા અને ગતિ-ઊર્જાના સ્વરૂપમાં હોય છે. ક્રમશઃ આવતા કણો જેમજેમ વિક્ષોભ અનુભવતા જાય, તેમતેમ આ ઊર્જા માધ્યમના આગળને આગળના કણોને મળતી જાય છે. આમ, તરંગમાં ઊર્જાનું પ્રસરણ થાય છે. માધ્યમમાં આંતરિક ઘર્ષણબળ હોય તો ઊર્જાનું ઉષ્મા ઊર્જા સ્વરૂપે વિખેરણ થતું જાય છે અને આગળ વધતું તરંગ મંદ પડતું જાય છે.

તરંગની પ્રસરણની દિશાને લંબ એવી એકમ ક્ષેત્રફળ-વાળી સપાટીમાંથી એક સેકન્ડમાં પસાર થતી ઊર્જાને તરંગની તીવ્રતા (intensity) કહે છે.

$$\text{તરંગની તીવ્રતા (I)} = \frac{\text{ઊર્જા/સમય}}{\text{ક્ષેત્રફળ}}$$

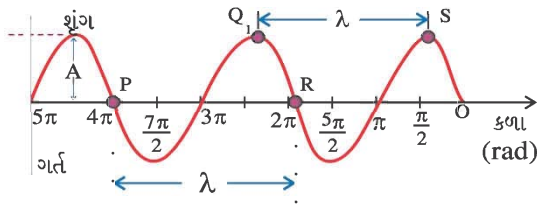
$$\text{તરંગની તીવ્રતાનો SI એકમ } \frac{\text{J/s}}{\text{m}^2} \text{ અથવા } \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \text{ છે.}$$

તેનું પારિમાણિક સૂત્ર  $M^1L^0T^{-3}$  છે.

કણના દોલનની ઊર્જા  $E = \frac{1}{2}kA^2$ , હોવાથી તરંગની તીવ્રતા, તરંગના કંપવિસ્તારના વર્ગના સમપ્રમાણમાં હોય છે. ( $I \propto A^2$ ).

### તરંગલંબાઈ (Wavelength)

તરંગપ્રસરણમાં જે બે ક્રમિક કણો (બિંદુઓ)ના દોલનની કળાનો તફાવત  $2\pi$  rad હોય છે તેમની વચ્ચેના અંતરને તરંગની તરંગલંબાઈ ( $\lambda$ ) કહે છે. તેનો SI એકમ m છે.



તરંગનો કંપવિસ્તાર અને તરંગલંબાઈ

આકૃતિ 8.5

આકૃતિ 8.5 દર્શાવ્યા અનુસાર કણ P અને Rની વચ્ચે દોલનની કળાનો તફાવત  $4\pi - 2\pi = 2\pi$  rad છે. આથી, તેમની વચ્ચેનું અંતર એ તરંગની તરંગલંબાઈ ( $\lambda$ ) દર્શાવે

છે. આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે બે ક્રમિક શૃંગ અથવા બે ક્રમિક ગર્ત વચ્ચે દોલનનો કળા તફાવત  $2\pi$  rad હોવાથી તેમની વચ્ચેનું અંતર પણ એ તરંગની તરંગલંબાઈ ( $\lambda$ ) દર્શાવે છે. આ જ રીતે ધ્વનિ-તરંગોના કિસ્સામાં બે ક્રમિક સંઘનન અથવા વિઘનન વચ્ચેના અંતરને ધ્વનિ-તરંગની તરંગલંબાઈ કહે છે.

### તરંગ-સંખ્યા અને તરંગ-સદિશ (Wave number and wave vector) :

એકમઅંતર દીઠ તરંગોની સંખ્યા ( $\frac{1}{\lambda}$ )ને તરંગ-સંખ્યા કહે છે. તરંગ-સંખ્યાનો એકમ  $m^{-1}$  છે.

તરંગ-પ્રસરણમાં  $\lambda$  અંતરે આવેલા બે કણોના દોલનની કળાનો તફાવત  $2\pi$  rad હોય છે. આથી એકમઅંતરે રહેલા બે કણોના દોલનની કળાનો તફાવત  $\frac{2\pi}{\lambda}$  rad થાય.  $\frac{2\pi}{\lambda}$  ને તરંગ-સદિશ અથવા કોણીય તરંગ-સંખ્યા અથવા પ્રસરણ-અચળાંક (propagation constant) ( $k$ ) કહે છે.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$k$  નો SI એકમ rad/m છે. તેનું પારિમાણિક સૂત્ર  $M^0L^{-1}T^0$  છે. તરંગ-સદિશની દિશા તરંગ-પ્રસરણની દિશામાં લેવાય છે.

### તરંગની આવૃત્તિ (Frequency of a wave) :

એક સેકન્ડમાં માધ્યમના કણ પૂર્ણ કરેલ દોલનોની સંખ્યાને કણની આવૃત્તિ ( $f$ ) કહે છે. તરંગની આવૃત્તિ ( $f$ ) એ માધ્યમના કણોના દોલનની આવૃત્તિ જ છે. તરંગ-પ્રસરણમાં કોઈ સ્થાન (કે બિંદુ) પાસેથી એક સેકન્ડમાં પસાર થતા તરંગોની સંખ્યાને તરંગની આવૃત્તિ કહે છે.

તેનો SI એકમ  $s^{-1}$  અથવા Hz (Hertz) છે.

$\omega = 2\pi f$  ને તરંગની કોણીય આવૃત્તિ કહે છે.

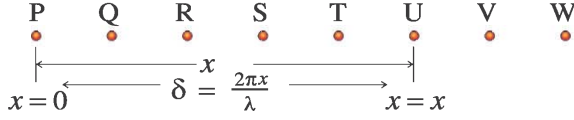
$$T = \frac{1}{f} \text{ ને તરંગનો આવર્તકાળ કહે છે.}$$

### 8.5 તરંગ-સમીકરણ (Wave Equation)

તરંગ-પ્રસરણની ઘટનામાં ભાગ લેતાં દરેક કણોના સ્થાનાંતર દરેક સમયે જાણી શકાય, તો તરંગ-પ્રસરણની ઘટનાનું વર્ણન કરી શકાય. એક પારિમાણિક તરંગો માટે  $x$ -યામ ધરાવતા કોઈ પણ કણનું કોઈ પણ  $t$  સમયે સ્થાનાંતર આપતું આપણે સમીકરણ મેળવીશું. આ સમીકરણમાં  $x$  અને  $t$ ના જુદાં-જુદાં મૂલ્યો મૂકીને જુદા-જુદા કણોનાં જુદા-જુદા સમયે કણોનાં સ્થાનાંતરો જાણી શકાય છે અને સમગ્ર

ઘટનાનું વર્ણન મેળવી શકાય છે. આવા સમીકરણને (પ્રસ્તુત કિસ્સામાં એક પારિમાણિક) તરંગ-સમીકરણ કહે છે.

આપણે પ્રગામી, હાર્મોનિક, એક-પારિમાણિક તરંગનું સમીકરણ મેળવીશું. ઘન  $x$  દિશામાં ગતિ કરતા તરંગ માટે તરંગ-સમીકરણ આકૃતિ 8.6માં દર્શાવેલા કોઈક માધ્યમના કણોને ધ્યાનમાં લો.



તરંગ-સમીકરણ

આકૃતિ 8.6

ધારો કે,  $t = 0$  સમયે કણ P શૂન્ય પ્રારંભિક કળા સાથે સરળ આવર્તદોલનો શરૂ થાય છે. એટલે કે P પાસેથી  $t = 0$  સમયે તરંગ ઉદ્ભવે છે.

કણ Pનો  $x$ -યામ શૂન્ય અને પ્રારંભિક કળા શૂન્ય હોવાથી  $t = 0$  સમયે તેનું સ્થાનાંતર,

$$y = A \sin \omega t \quad (8.5.1)$$

હવે, Pમાંથી ઉદ્ભવેલ તરંગ જ્યારે  $x$  અંતર કાપશે ત્યારે, P થી  $x$  અંતરે આવેલો માધ્યમનો કણ (U) એ સરળ આવર્તગતિની શરૂઆત કરશે. તેના દોલનની કળા Pના દોલનની કળા કરતાં ઓછી હશે. ધારો કે તેની કળા P કણની કળા કરતાં  $\delta$  જેટલી ઓછી છે. આથી,  $x$  અંતરે આવેલ કણની સરળ આવર્તગતિનું સમીકરણ,

$$y = A \sin(\omega t - \delta) \quad (8.5.2)$$

ધારો કે તરંગની તરંગલંબાઈ  $\lambda$  છે. આપણે જાણીએ છીએ કે Pથી  $\lambda$  અંતરે આવેલા કણની કળા એ કણ Pની કળા કરતાં  $2\pi$  જેટલી ઓછી હોય છે. આથી Pથી  $x$  અંતરે આવેલા કણની કળા Pની પ્રારંભિક કળા કરતાં  $\frac{2\pi x}{\lambda}$  જેટલી ઓછી હશે.

$$\therefore \delta = \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (8.5.3)$$

ઠીક મૂલ્ય સમીકરણ (8.5.2)માં મૂકતાં,

$$y = A \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$\text{પરંતુ } \frac{2\pi}{\lambda} = k$$

$$\therefore y = A \sin(\omega t - kx) \quad (8.5.4)$$

અહીં  $(\omega t - kx)$ ને ઉદ્ગમથી  $x$  અંતરે  $t$  જેટલા સમયે તરંગની કળા કહે છે.  $k$  સદિશની દિશા તરંગ-પ્રસરણની દિશામાં લેવામાં આવે છે.

સમીકરણ (8.5.4) એ  $x$ ના વધતા મૂલ્યની દિશામાં ગતિ કરતાં પ્રગામી હાર્મોનિક તરંગ માટેનું તરંગ-સમીકરણ છે. જો તરંગ  $x$ ના ઘટતા મૂલ્યની દિશામાં ગતિ કરતા હોય તો ઉપરના સમીકરણમાં  $\omega t - kx$ ને બદલે  $\omega t + kx$  લેવું.

$$y = A \sin(\omega t + kx) \quad (8.5.5)$$

સમીકરણ (8.5.4)માં  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  અને  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  મૂકતાં

$$y = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad (8.5.6)$$

ઉપર્યુક્ત સમીકરણમાં  $\lambda = vT$  મૂકતાં

$$y = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{vT}\right)$$

$$y = A \sin 2\pi f\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad (\because \frac{1}{T} = f) \quad (8.5.7)$$

હવે,

$$y = A \sin 2\pi \frac{f}{v} (vt - x)$$

$$\therefore y = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x) \quad (\because v = f \lambda) \quad (8.5.8)$$

ઉપર્યુક્ત સમીકરણો (8.5.6), (8.5.7) અને (8.5.8) એ પ્રગામી હાર્મોનિક તરંગો માટેના તરંગ-સમીકરણનાં જુદાં-જુદાં સ્વરૂપો છે.

જો કણ Pની પ્રારંભિક કળા  $\phi$  હોય તો તરંગ-સમીકરણ (8.5.4)ને નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$y = A \sin(\omega t - kx + \phi) \quad (8.5.9)$$

### 8.6 તરંગ-ઝડપ અને કળા-ઝડપ (Wave Speed and Phase Speed)

તરંગ તેના એક આવર્તકાળ  $T$  દરમિયાન  $\lambda$  જેટલું અંતર કાપે છે. આથી, તરંગ-ઝડપ

$$\therefore v = \frac{\text{અંતર}}{\text{સમય}} = \frac{\lambda}{T}$$

$$\text{પરંતુ } \frac{1}{T} = f$$

$$\therefore v = f \lambda \quad (8.6.1)$$

$$= \frac{\lambda(2\pi f)}{2\pi}$$

$$\text{પરંતુ, } 2\pi f = \omega \text{ અને } \frac{2\pi}{\lambda} = k$$

$$\therefore v = \frac{\omega}{k} \quad (8.6.2)$$

અત્યાર સુધીની ચર્ચામાં આપણે જોયું કે તરંગ-પ્રસરણની ઘટનામાં ભાગ લેતા કણનો કંપવિસ્તાર ( $A$ ) તેનાં દોલનોનો આવર્તકાળ ( $T$ ) અને આવૃત્તિ ( $f$ ) અનુક્રમે એ જ તરંગનો

કંપવિસ્તાર, તરંગનો આવર્તકાળ અને તરંગની આવૃત્તિ છે. પરંતુ **દોલન કરતાં કણનો વેગ અને તરંગનો વેગ જુદો છે.**

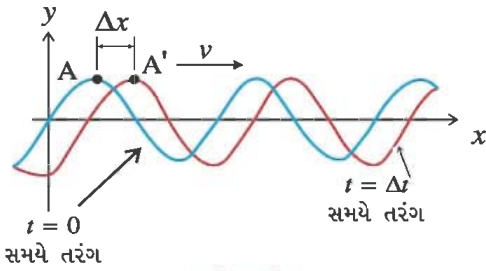
યાદ રાખો કે તરંગની આવૃત્તિ એ ઉદ્ગમનો ગુણધર્મ છે, જ્યારે તરંગલંબાઈ એ માધ્યમનો ગુણધર્મ છે. જુદા-જુદા માધ્યમમાં તરંગની ઝડપ જુદી-જુદી હોય છે. આથી તરંગલંબાઈ પણ જુદી-જુદી હોય છે, પરંતુ આપેલ માધ્યમમાં તરંગની ઝડપ અચળ હોય છે.

### કળા-ઝડપ

આકૃતિ 8.7માં દર્શાવ્યા અનુસાર તરંગ એ  $x$ ના વધતા મૂલ્યની દિશામાં ગતિ કરે છે. અહીં સંપૂર્ણ તરંગભાત (wave pattern)એ  $\Delta t$  સમયમાં  $\Delta x$  જેટલું સ્થાનાંતર કરે છે. તરંગભાત પરના દરેક બિંદુઓ (દા. ત., બિંદુ A)એ ગતિ દરમિયાન તેમનું સ્થાનાંતર જાળવી રાખે છે. (યાદ રાખો કે દોરી પરના બિંદુઓનું સ્થાનાંતર બદલાય છે, પરંતુ તરંગભાત પરનાં નહિ) તરંગભાત પરના દરેક બિંદુઓની કળા અચળ હોય છે. આકૃતિ 8.7માં A અને A'ની કળા સમાન છે. આથી,

$$\therefore \omega t - kx = \text{અચળ} \quad (8.6.3)$$

અહીં,  $x$  અને  $t$  બંને બદલાય છે. જેમ  $t$  વધે છે તેમ  $x$  પણ એવી રીતે વધવો જોઈએ કે જેથી  $\omega t - kx$  એ અચળ રહે. જે દર્શાવે છે કે તરંગભાત  $x$ ના વધતા મૂલ્યની દિશામાં ગતિ કરે છે.



તરંગ-ગતિ

આકૃતિ 8.7

ઉપર્યુક્ત સમીકરણનું  $t$ ની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$\frac{d}{dt}(\omega t - kx) = 0$$

$$\therefore \omega - k \frac{dx}{dt} = 0$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = v = \frac{\omega}{k} \quad (8.6.4)$$

અહીં  $v$  ને તરંગની **કળા-ઝડપ (phase speed)** કહે છે.

ઉપર્યુક્ત સમીકરણ (8.6.4) એ સમીકરણ (8.6.2)જેવું જ છે. આમ, આપણે જે તરંગ-ઝડપ શોધીએ છીએ તે ખરેખર તો તરંગની કળા ઝડપ છે.

**ઉદાહરણ 1 :** અમદાવાદ વિવિધભારતી પરથી પ્રસારિત રેડિયો-તરંગની આવૃત્તિ 96.7 MHz છે. આ તરંગોની તરંગલંબાઈ, તરંગ-સદિશ અને કોણીય આવૃત્તિ શોધો. રેડિયો-તરંગોની હવામાં ઝડપ  $3 \times 10^8$  m/s છે.

### ઉકેલ :

$$f = 96.7 \text{ MHz} = 96.7 \times 10^6 \text{ Hz}$$

$$v = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$\text{તરંગ-ઝડપ, } v = f\lambda$$

$$\therefore \lambda = \frac{v}{f} = \frac{3 \times 10^8}{96.7 \times 10^6} = 3.102 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \text{તરંગ-સદિશ, } k &= \frac{2\pi}{\lambda} \\ &= \frac{2 \times 3.14}{3.102} \\ &= 2.024 \text{ rad/m} \end{aligned}$$

$$\text{કોણીય આવૃત્તિ, } \omega = 2\pi f$$

$$= 2 \times 3.14 \times 96.7 \times 10^6$$

$$= 6.07 \times 10^8 \text{ rad/s}$$

**ઉદાહરણ 2 :** એક તરંગનું તરંગ-સમીકરણ

$$y = 0.5 \sin(x - 60t) \text{ cm છે.}$$

(i) તરંગનો કંપવિસ્તાર (ii) તરંગ-સદિશ (iii) તરંગલંબાઈ (iv) તરંગની કોણીય આવૃત્તિ અને આવૃત્તિ (v) આવર્તકાળ અને (vi) તરંગની ઝડપ શોધો.

### ઉકેલ :

$$y = -0.5 \sin(60t - x) \text{ ને}$$

$$y = A \sin(\omega t - kx) \text{ સાથે સરખાવતાં,}$$

$$(i) \text{ તરંગનો કંપવિસ્તાર } A = -0.5 \text{ cm}$$

$$(ii) \text{ તરંગ-સદિશ } k = 1 \text{ rad/cm}$$

$$\begin{aligned} (iii) \text{ તરંગ-લંબાઈ } \lambda &= \frac{2\pi}{k} \\ &= \frac{2 \times 3.14}{1} = 6.28 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$(iv) \text{ તરંગની કોણીય આવૃત્તિ } \omega = 60 \text{ rad/s}$$

$$\text{હવે, } \omega = 2\pi f, \text{ પરથી તરંગની આવૃત્તિ}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{60}{2 \times 3.14} = 9.55 \text{ Hz}$$

$$(v) \text{ આવર્તકાળ } T = \frac{1}{f} = \frac{1}{9.55} = 0.105 \text{ s}$$

$$(vi) \text{ તરંગ-ઝડપ } v = \frac{\omega}{k} = \frac{60}{1} = 60 \text{ cm/s.}$$

**ઉદાહરણ 3 :** એક સ્વરકાંટાની આવૃત્તિ 250 Hz છે. જ્યારે સ્વરકાંટો 50 દોલનો પૂરાં કરશે, ત્યારે તેમાંથી ઉદ્ભવતો ધ્વનિએ કેટલું અંતર કાપ્યું હશે ? હવામાં ધ્વનિનો વેગ 340 m/s છે.

**ઉકેલ :** સ્વરકાંટામાંથી ઉદ્ભવતા તરંગની તરંગલંબાઈ,

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{250} = 1.36 \text{ m}$$

હવે, એક દોલન દરમિયાન તરંગ એ તરંગલંબાઈ

(λ) જેટલું અંતર કાપે છે, આથી 50 દોલનો બાદ,

$$\text{તરંગે કાપેલું અંતર} = 50 \times \lambda$$

$$= 50 \times 1.36 = 68 \text{ m.}$$

**ઉદાહરણ 4 :** એક વ્યક્તિ 100 m ઊંચા ટાવર પરથી એક પથ્થરને મુક્તપતન કરાવતાં તે તળાવમાં પડે છે. આ પથ્થર તળાવના પાણી સાથે અથડાતાં, તેમાંથી ઉત્પન્ન થતો ધ્વનિ એ વ્યક્તિએ પથ્થરને મુક્ત પતન કર્યા પછી કેટલા સમય પછી સંભળાશે ? ધ્વનિનો હવામાં વેગ 340 m/s છે.

**ઉકેલ :** ધારો કે પથ્થર ટાવરની ટોચ પરથી તળાવમાં પડતા  $t_1$  જેટલો સમય લે છે. અને પથ્થર પાણી સાથે ટકરાતા ઉત્પન્ન થતો ધ્વનિ એ ટાવરની ટોચ સુધી પહોંચતા  $t_2$  જેટલો સમય લે છે. આથી, ટાવર પર ઊભેલી વ્યક્તિને  $t = t_1 + t_2$  સમય બાદ અથડામણનો ધ્વનિ સંભળાશે.

હવે, પથ્થરને પાણીની સપાટી સુધી પહોંચતાં લાગતા સમય  $t_1$  નીચેના સૂત્ર પરથી શોધી શકાય.

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} g t_1^2$$

$$s = 100 \text{ m, } v_0 = 0, g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

$$\therefore 100 = 0 + \frac{1}{2} (9.8) t_1^2$$

$$\therefore t_1 = 4.52 \text{ s.}$$

હવે, પાણીની સપાટી આગળથી ઉદ્ભવતા ધ્વનિને ટાવરની ટોચ સુધી પહોંચતાં લાગતો સમય,

$$t_2 = \frac{\text{અંતર}}{\text{તરંગ-ઝડપ}} = \frac{100}{340} = 0.29 \text{ s}$$

$$\therefore t = t_1 + t_2 = 4.52 + 0.29 = 4.81 \text{ s}$$

**ઉદાહરણ 5 :** એક પરિમાણિક પ્રગામી, હાર્મોનિક લંબગત તરંગનું સમીકરણ,

$$y = 5 \sin 30\pi \left( t - \frac{x}{240} \right) \text{ છે.}$$

અહીં  $y$  મીટરમાં અને  $t$  સેકન્ડમાં છે.

(i) ઉદ્ગમબિંદુએ શૂન્ય સમયે કણ ધન  $Y$  કે ઋણ  $Y$  માંથી કઈ દિશામાં ગતિ કરવાની શરૂઆત કરતું હશે ? એટલે ત્યાં પ્રથમ ગર્ત ઉત્પન્ન થશે કે શુંગ ?

(ii)  $t = 2 \text{ s}$  ને અંતે ઉદ્ગમબિંદુથી 480 m અંતરે આવેલ કણનું સ્થાનાંતર, કણના દોલનનો વેગ અને તરંગનો ઢાળ શોધો.

(iii) તરંગની ઝડપ શોધો.

**ઉકેલ :**

(i)  $x = 0$  પાસે  $t = 0$  સમયથી શરૂ કરી  $y$  જો ઋણ દિશામાં વધતો હોય, તો ગર્ત ઉત્પન્ન થશે અને જો  $y$  ધન દિશામાં વધતો હોય, તો શુંગ ઉત્પન્ન થશે.

અહીં,  $x = 0$ , પર  $y = 5 \sin 30\pi t$  માટે  $t = 0$  સમયથી શરૂ કરતાં  $y$  ધન દિશામાં વધતો હોવાથી પહેલાં શુંગ ઉત્પન્ન થશે.

(ii)  $t = 2 \text{ s}$  ના અંતે ઉદ્ગમબિંદુથી  $x = 480 \text{ m}$  અંતરે સ્થાનાંતર

$$y = 5 \sin 30\pi \left( 2 - \frac{480}{240} \right) \\ = 5 \sin 30\pi(0) = 0 \text{ m}$$

કણના દોલનનો વેગ,

$$v = \frac{dy}{dt} = 150\pi \cos 30\pi \left( t - \frac{x}{240} \right) \\ = 150\pi \cos 30\pi \left( 2 - \frac{480}{240} \right) \\ = 150\pi \text{ m/s}$$

તરંગનો ઢાળ,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5\pi}{8} \cos 30\pi \left( t - \frac{x}{240} \right) \\ = -\frac{5\pi}{8} \cos 30\pi \left( 2 - \frac{480}{240} \right) \\ = -\frac{5\pi}{8}$$

(iii) આપેલ સમીકરણને,

$$y = A \sin 2\pi f \left( t - \frac{x}{v} \right) \text{ સાથે સરખાવતાં}$$

$$\therefore \text{તરંગ-ઝડપ } v = 240 \text{ m/s}$$

અહીં, નોંધો કે તરંગ-ઝડપ અને તરંગ-પ્રસરણમાં ભાગ લેતાં કણના દોલનનાં વેગનું મૂલ્ય સરખું નથી.



## 8.7 માધ્યમમાં તરંગ-ઝડપ (Speed of Waves in a Medium)

### 8.7.1 તણાવવાળી દોરી પર લંબગત તરંગની ઝડપ (Speed of Transverse Wave on Stretched String) :

અગાઉ આપણે જોયું કે દોરીના કણો વિક્ષોભ પસાર થયા બાદ દોલન કરી, મૂળ સ્થાને પાછા આવે છે. આ માટે માધ્યમમાં પુનઃસ્થાપક બળ અને તેથી માધ્યમની સ્થિતિસ્થાપકતા આવશ્યક છે. તરંગની અસર હેઠળ દોલિત કણ કેટલું સ્થાનાંતર કરશે તે માધ્યમના જડત્વ પર આધારિત છે. આમ, **યાંત્રિક તરંગોના પ્રસરણ માટે માધ્યમમાં સ્થિતિસ્થાપકતા અને જડત્વ જરૂરી છે.** માધ્યમના આ બે ગુણધર્મો વડે તરંગની ઝડપ નક્કી થાય છે.

અભ્યાસો પરથી જણાયું છે કે, તણાવવાળી દોરી જેવા માધ્યમમાં લંબગત તરંગોની ઝડપ બે બાબતો (i) દોરીની રેખીય દળ ઘનતા ( $\mu$ ) અને (ii) દોરીમાંના તણાવબળ  $T$  પર આધાર રાખે છે.

અહીં, આપણે દોરી પર તરંગ-ઝડપ એ પારિમાણિક વિશ્લેષણની મદદથી મેળવીશું.

દોરીની રેખીય દળ ઘનતા એટલે એકમલંબાઈ દીઠ દોરીનું દળ.

$\mu$ નું પારિમાણિક સૂત્ર,

$$\mu = \frac{\text{દોરીનું કુલ દળ}}{\text{દોરીની લંબાઈ}} = \frac{M^1}{L^1}$$

$$= M^1 L^{-1} T^0$$

તણાવબળ  $T$ નું પારિમાણિક સૂત્ર  $= M^1 L^1 T^{-2}$

ધારો કે તરંગ-ઝડપ,

$$v = k \mu^a T^b \quad (8.7.1)$$

અહીં,  $k$  = એ પરિમાણરહિત અંક અને  $[a, b] \in R$  છે.

બન્ને બાજુનાં પરિમાણો લખતાં

$$\begin{aligned} M^0 L^1 T^{-1} &= [M^1 L^{-1} T^0]^a [M^1 L^1 T^{-2}]^b \\ &= M^{a+b} L^{-a+b} T^{-2b} \end{aligned}$$

બન્ને બાજુના પરિમાણો સરખાવતાં,  $a + b = 0$ ,  $-a + b = 1$  અને  $-2b = -1$

$$\text{આ પરથી, } a = -\frac{1}{2} \text{ અને } b = \frac{1}{2}$$

સમીકરણ (8.7.1)માં  $a$  અને  $b$ નાં મૂલ્યો મૂકતાં,

$$v = k \mu^{-\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}}$$

પ્રાયોગિક અને અન્ય અભ્યાસો પરથી  $k = 1$  મળે છે.

$$\therefore v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (8.7.2)$$

ઉપરોક્ત સમીકરણ દર્શાવે છે કે તરંગની ઝડપ એ તરંગની આવૃત્તિ કે કંપવિસ્તાર પર આધારિત નથી.

**ઉદાહરણ 6 :** સમાન ત્રિજ્યાઓ ધરાવતા બે તાર PQ અને QRને જોડીને તાર PQR બનાવેલ છે. તાર PQની લંબાઈ 4.8 m અને દળ 0.06 kg છે. તાર QRની લંબાઈ 2.56 m અને દળ 0.2 kg છે. તાર PQRમાં પ્રવર્તતું તણાવ 80 N છે. P છેડે ઉત્પન્ન કરેલ તરંગને R છેડે પહોંચતાં કેટલો સમય લાગશે ?

**ઉકેલ :** તાર PQ માટે એકમલંબાઈ દીઠ દળ,

$$\mu_1 = \frac{0.06}{4.8} = \frac{1}{80} \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

તાર QR માટે એકમલંબાઈ દીઠ દળ,

$$\mu_2 = \frac{0.2}{2.56} = \frac{10}{128} \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

$\therefore$  તાર PQમાં તરંગ-ઝડપ

$$v_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{80}{\frac{1}{80}}} = 80 \text{ m/s}$$

$\therefore$  તાર QR માં તરંગ-ઝડપ

$$v_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}} = \sqrt{\frac{80}{\frac{10}{128}}} = 32 \text{ m/s}$$

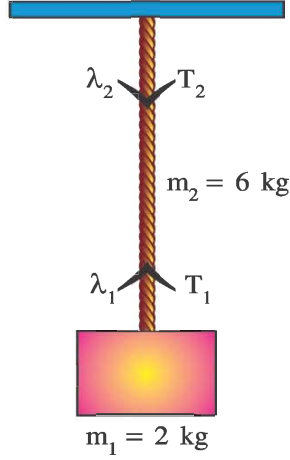
$\therefore$  તરંગને Pથી R પહોંચવા લાગતો સમય

$$t = t_1 + t_2$$

$$\begin{aligned} &= \frac{PQ}{v_1} + \frac{QR}{v_2} \\ &= \frac{4.8}{80} + \frac{2.56}{32} \\ &= 0.14 \text{ s} \end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 7 :** જડિત આધાર પરથી લટકાવેલ નિયમિત દોરડાની લંબાઈ 12 m અને દળ 6 kg છે. દોરડાના મુક્ત છેડે 2 kg દળનો બ્લોક લટકાવેલ છે. દોરડાના નીચેના છેડે 0.06 m જેટલી તરંગલંબાઈવાળું એક તરંગ ઉત્પન્ન કરવામાં આવે છે. આ તરંગ દોરડાના ઉપરના છેડે (જડિત આધાર આગળ) પહોંચે ત્યારે તેની તરંગલંબાઈ કેટલી હશે ?

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.8

અહીં દોરડું ભારે હોવાથી દોરડાના નીચેના છેડે અને ઉપરના છેડે તણાવબળ (T) અલગ-અલગ હશે.

દોરડાનું દળ  $m_2 = 6 \text{ kg}$

બ્લૉકનું દળ  $m_1 = 2 \text{ kg}$

દોરડાના નીચેના છેડે તણાવબળ,

$$T_1 = m_1 g = 2g$$

દોરડાના ઉપરના છેડે તણાવબળ,

$$T_2 = (m_1 + m_2)g = (6 + 2)g = 8g$$

$$\text{હવે દોરડામાં તરંગની ઝડપ } v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$\therefore f\lambda = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (\because v = f\lambda)$$

દોરડામાં પ્રસરતા તરંગની આવૃત્તિ દોરડાના દરેક ભાગમાં સમાન હોય છે. તેમજ  $\mu$  પણ દોરડાના દરેક ભાગમાં સમાન છે. આથી,

$$\lambda \propto \sqrt{T}$$

$$\text{દોરડાના નીચેના છેડે તરંગલંબાઈ } \lambda_1 \propto \sqrt{T_1}$$

$$\text{દોરડાના ઉપરના છેડે તરંગલંબાઈ } \lambda_2 \propto \sqrt{T_2}$$

$$\therefore \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

$$\text{અને } \lambda_2 = \lambda_1 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

$$= (0.06) \sqrt{\frac{8g}{2g}}$$

$$= 0.12 \text{ m}$$

**ઉદાહરણ 8 :** એક તારની લંબાઈ 50 cm, અને આડછેદનું ક્ષેત્રફળ 1 mm અને દળ 5.0 g છે. તારનો યંગ મોડ્યુલસ  $16 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$  છે. તારમાંથી પસાર થતાં તરંગની ઝડપ 80 m/s છે. આ તરંગ પ્રસરણને લીધે તારની મૂળ લંબાઈમાં થતો વધારો શોધો.

ઉકેલ :

તારની લંબાઈ  $L = 50 \text{ cm} = 50 \times 10^{-2} \text{ m}$   
તારનું દળ  $m = 5 \text{ g} = 5 \times 10^{-3} \text{ kg}$

તારના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ

$$A = 1 \text{ mm}^2 = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

તારનો યંગ મોડ્યુલસ  $Y = 16 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$

તારમાં તરંગની-ઝડપ  $v = 80 \text{ m/s}$ .

તારનું એકમ લંબાઈ દીઠ દળ

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{5 \times 10^{-3}}{50 \times 10^{-2}} = 1 \times 10^{-2} \text{ kg/m}$$

$$\text{તારમાં તરંગ-ઝડપ } v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$\therefore \text{તારમાં તણાવબળ } T = F = \mu v^2 = (1 \times 10^{-2}) (80)^2 = 64 \text{ N}$$

$$\text{યંગ મોડ્યુલસ } Y = \frac{F/A}{\Delta L/L}$$

$\therefore$  આથી, તારની લંબાઈમાં વધારો

$$\begin{aligned} \Delta L &= \frac{FL}{AY} \\ &= \frac{(64)(50 \times 10^{-2})}{(1 \times 10^{-6})(16 \times 10^{11})} \\ &= 0.02 \text{ mm} \end{aligned}$$

**8.7.2 માધ્યમમાં ધ્વનિ-તરંગો (સંગત-તરંગો)ની ઝડપ (Speed of sound waves (longitudinal wave) in a medium) :**

અભ્યાસો પરથી જાણી શકાયું છે કે માધ્યમમાં ધ્વનિ (સંગત-તરંગ) તરંગોની ઝડપ (i) માધ્યમના સ્થિતિસ્થાપક અંક E અને (ii) માધ્યમની ઘનતા  $\rho$  પર આધાર રાખે છે.

આ હકીકતનો ઉપયોગ કરી અને પારિમાણિક વિશ્લેષણની મદદથી સંગત તરંગોની ઝડપ નીચે પ્રમાણે મેળવી શકાય :

$$\text{તરંગ-ઝડપ } v = kE^a \rho^b$$

અહીં,  $k$  એ પરિમાણરહિત અચળાંક અને  $[a, b] \in \mathbb{R}$  છે.

$$\text{હવે, } [E] = M^1 L^{-1} T^{-2}, [\rho] = M^1 L^{-3} T^0$$

બંને બાજુએ પારિમાણિક સૂત્રો લખતાં,

$$M^0 L^1 T^{-1} = [M^1 L^{-1} T^{-2}]^a [M^1 L^{-3} T^0]^b \\ = M^{a+b} L^{-a-3b} T^{-2a}$$

બંને બાજુનાં પરિમાણો સરખાવતાં,

$$a + b = 0, -a - 3b = 1 \text{ અને } -2a = -1$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} \text{ અને } b = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore v = k E^{\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}}$$

પ્રાયોગિક તેમજ બીજા અભ્યાસો પરથી  $k = 1$  મળે છે.

$$\therefore v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (8.7.3)$$

તરલ માધ્યમમાં ધ્વનિ જેવા સંગત-તરંગોનું પ્રસરણ સંઘનન-વિઘનન વડે થતું હોય છે. આ પરિસ્થિતિમાં માધ્યમમાં જુદા-જુદા વિસ્તારોમાં દબાણના ફેરફારોના કારણે અહીં સ્થિતિસ્થાપક-અંક તરીકે બલ્ક મોડ્યુલસ (B) લેવામાં આવે છે.

$$\therefore v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (8.7.4)$$

સળિયા જેવા રેખીય માધ્યમમાં સંગત-તરંગોનાં પ્રસરણ દરમિયાન રેખીય વિકૃતિ જોવા મળે છે. આથી સમીકરણ(8.7.3)માં સ્થિતિસ્થાપક-અંક તરીકે યંગ મોડ્યુલસ (Y) લેતાં,

$$\therefore v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad (8.7.5)$$

ટેબલ 8.1માં જુદાં-જુદાં માધ્યમમાં ધ્વનિ-તરંગોની ઝડપ દર્શાવી છે.

**ટેબલ 8.1**

**કેટલાંક માધ્યમોમાં ધ્વનિની ઝડપ (માત્ર જાણકારી માટે)**

માધ્યમ	ઝડપ (m/s)
<b>વાયુઓ</b>	
હવા (0°C)	331
હવા (20°C)	343
હિલિયમ	965
હાઈડ્રોજન	1284
<b>પ્રવાહી</b>	
પાણી (0°C)	1402
પાણી (20°C)	1482
દરિયાનું પાણી	1522
<b>ઘન પદાર્થ</b>	
એલ્યુમિનિયમ	6420
કોપર	3560
સ્ટીલ	5941
રબર	54

ટેબલ (8.1) પરથી સ્પષ્ટ છે કે પ્રવાહી અને ઘન પદાર્થોની ઘનતા, વાયુ કરતાં વધુ હોવા છતાં તે માધ્યમોમાં તરંગની ઝડપ વધુ છે. કારણ કે વાયુની સરખામણીમાં પ્રવાહી અને ઘન પદાર્થો ઓછા દબનીય હોય છે. એટલે કે તેમનો બલ્ક મોડ્યુલસ (B) વધુ હોય છે.

**ન્યૂટનનું સૂત્ર :** ન્યૂટને અનુમાન કર્યું કે વાયુ (હવા)માં ધ્વનિના પ્રસરણ દરમિયાન વાયુમાં ઉદ્ભવતાં સંઘનન અને વિઘનનની ઘટના સમતાપી હોવી જોઈએ. આથી સમીકરણ 8.7.4માં આઈસોથર્મલ (સમતાપી) બલ્ક મોડ્યુલસ-અંક વાપરવો જોઈએ.

સમતાપી પ્રક્રિયા માટે  $PV = \text{અચળ}$ ,

(T અચળ હોવાથી  $PV = \mu RT = \text{અચળ}$ )

Vની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$P \frac{dV}{dV} + V \frac{dP}{dV} = 0$$

$$\therefore P = -V \frac{dP}{dV} = -\frac{dP}{\frac{dV}{V}} = \text{બલ્ક મોડ્યુલસ B}$$

$$P = \text{બલ્ક મોડ્યુલસ B} \quad (\because B = -\frac{dP}{\frac{dV}{V}})$$

આમ, વાયુનો આઈસોથર્મલ બલ્ક મોડ્યુલસ (B) એ વાયુના દબાણ P જેટલો હોય છે.

$$\therefore v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{P}{\rho}} \quad (8.7.6)$$

આ સૂત્ર હવામાં ધ્વનિની ઝડપ શોધવા માટેનું ન્યૂટનનું સૂત્ર છે.

**ઉદાહરણ 9 :** ન્યૂટનના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી STP એ હવામાં ધ્વનિની ઝડપ મેળવો.

એક મોલ હવાનું દળ =  $29.0 \times 10^{-3} \text{ kg}$ .

( $P = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ )

**ઉકેલ :** STPએ 1 mole હવાનું કદ =  $22.4 \text{ L} = 22.4 \times 10^{-3} \text{ m}^3$

આથી, STPએ હવાની ઘનતા  $\rho = \frac{\text{દળ}}{\text{કદ}}$

$$\therefore \rho = \frac{29.0 \times 10^{-3}}{22.4 \times 10^{-3}} = \frac{29.0}{22.4} = 1.29 \text{ kg/m}^3$$

$\therefore$  ન્યૂટનના સૂત્ર અનુસાર,

$$\text{STP એ હવામાં ધ્વનિની ઝડપ } v = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$$

$$= \sqrt{\frac{1.01 \times 10^5}{1.29}} = 279.3 \text{ m/s}$$

### લાખ્યાસનો સુધારો :

ન્યૂટનના સૂત્રથી મળતું ધ્વનિની ઝડપનું મૂલ્ય 279.3 m/s છે. પ્રાયોગિક રીતે STP એ મળતું મૂલ્ય 332 m/s છે. જે દર્શાવે છે કે સમીકરણ (8.7.6)માં કંઈક ક્ષતિ છે.

લાખ્યાસે સૂચવ્યું કે, જ્યાં સંઘનન રચાય છે, તે ભાગનું તાપમાન વધે છે અને જ્યાં વિઘનન રચાય છે, ત્યાં તાપમાન ઘટે છે. આથી ધ્વનિના પ્રસરણની ઘટના સમતાપી ન ગણી શકાય.

માધ્યમમાં સંઘનન અને વિઘનન રચાવાની પ્રક્રિયા એટલી ઝડપી હોય છે કે સંઘનન દરમિયાન ઉત્પન્ન થયેલ ઉષ્મા બહાર વિખેરણ પામે તે પહેલા તે સ્થાને રચાતા વિઘનન દરમિયાન શોષાઈ જાય છે. તેમજ વાયુઓની પ્રમાણમાં ઓછી ઉષ્માવાહકતા પણ ઉષ્માને બહાર ન જવા દેવામાં મદદ કરે છે. આમ, **વાયુમાં ધ્વનિ-પ્રસરણની ઘટના સમતાપી નહિ, પરંતુ સમોષ્મી છે.** આથી સમીકરણ (8.7.6)માં વાયુનો સમોષ્મી (adiabatic) બલ્ક મોડ્યુલસ વાપરવો જોઈએ.

આદર્શવાયુની સમોષ્મી પ્રક્રિયા માટે

$$PV^\gamma = \text{અચળ}$$

જ્યાં,  $\gamma$  એ વાયુની બે વિશિષ્ટ ઉષ્માઓ  $C_p$  અને  $C_v$ નો ગુણોત્તર છે.

Vની સાપેક્ષે સમીકરણનું વિકલન કરતાં,

$$P \cdot \gamma V^{\gamma-1} + V^\gamma \frac{dP}{dV} = 0$$

$$\therefore \gamma P + V \frac{dP}{dV} = 0$$

$$\therefore \gamma P + V \frac{dP}{dV} = 0$$

$$\therefore \frac{-dP}{dV/V} = \gamma P$$

$$\therefore B = \gamma P$$

આમ, સમોષ્મી પ્રક્રિયા માટે બલ્ક મોડ્યુલસ  $B = \gamma P$ .

સમીકરણ (8.7.4) માં Bનું મૂલ્ય મૂકતાં, તરંગ-ઝડપ

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \quad (8.7.7)$$

હવા માટે  $\gamma = 1.41$  છે અને STP એ ઝડપ  $v$  શોધતાં તે 331.6 m/s મળે છે, જે પ્રાયોગિક મૂલ્ય સાથે મળતું આવે છે. આદર્શવાયુ જેવા માધ્યમમાં તરંગ-ઝડપ

મેળવવા માટે ન્યૂટનના સૂત્રને બદલે લાખ્યાસના સૂત્ર (સમીકરણ 8.7.7)નો ઉપયોગ કરવો જોઈએ.

### ધ્વનિની ઝડપ પર અસર કરતાં વિવિધ પરિબલો :

એક મોલ આદર્શવાયુ માટે અવસ્થા-સમીકરણ

$$PV = RT \quad (\mu = 1 \text{ mol})$$

$$\therefore P = \frac{RT}{V}$$

ધ્વનિની ઝડપના સૂત્ર  $v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$  માં Pનું મૂલ્ય મૂકતાં,

$$\therefore v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\rho V}}$$

પરંતુ,  $\rho V =$  એક મોલ વાયુનું દળ = વાયુનો અણુભાર M

$$\therefore \text{ઝડપ } v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad (8.7.9)$$

ઉપર્યુક્ત સમીકરણ પરથી સ્પષ્ટ છે કે વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ તેના નિરપેક્ષ તાપમાનના વર્ગમૂળના સમપ્રમાણમાં હોય છે.

એટલે કે,  $v \propto \sqrt{T}$

જો તાપમાન અચળ રાખીને જો વાયુનું દબાણ (P) બદલવામાં આવે, તો વાયુની ઘનતા  $\rho$  પણ દબાણના સમપ્રમાણમાં બદલાતી હોવાથી  $\frac{P}{\rho}$  અચળ રહે છે. આથી અચળ તાપમાને અને આદ્રતા (humidity) એ **વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ વાયુના દબાણ પર આધારિત નથી.**

અચળ દબાણે પાણીની બાષ્પની ઘનતા સૂકી હવાની ઘનતા કરતાં ઓછી હોય છે. આથી, **વાતાવરણમાં ભેજ**

**વધતા  $v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$  સૂત્ર પ્રમાણે ધ્વનિની ઝડપ વધે છે.**

**ઉદાહરણ 10 :** સાબિત કરો કે  $t$  તાપમાને વાયુમાં

ધ્વનિ-તરંગની ઝડપ  $v_t = v_0 \left(1 + \frac{t}{546}\right)$  હોય છે.  $v_0$  એ  $0^\circ\text{C}$  તાપમાને વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ છે. ( $t \ll 273$ )

**ઉકેલ :** આપણે જાણીએ છીએ કે વાયુમાં ધ્વનિની

$$\text{ઝડપ } v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \text{ છે.}$$

એટલે કે,  $v \propto \sqrt{T}$

$v_t = t^\circ\text{C}$  તાપમાને વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ



$v_0 = 0^\circ\text{C}$  તાપમાને વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ

$$\therefore \frac{v_t}{v_0} = \sqrt{\frac{273+t}{273}}$$

( $\because T(K) = t(^{\circ}\text{C}) + 273$ )

$$\therefore v_t = v_0 \left(1 + \frac{t}{273}\right)^{\frac{1}{2}}$$

હવે, દ્વિપદી વિસ્તરણનો ઉપયોગ કરતાં અને ઉચ્ચ ઘાતવાળાં પદો અવગણતાં,

$$v_t = v_0 \left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{t}{273}\right)$$

$$v_t = v_0 \left(1 + \frac{t}{546}\right)$$

[નોંધ : જો  $0^\circ\text{C}$  તાપમાને વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ  $332 \text{ m/s}$  હોય, તો  $1^\circ\text{C}$  તાપમાને ધ્વનિની ઝડપ,  
 $v_t = 332 \left(1 + \frac{1}{546}\right) = v_0 \left(1 + \frac{t}{546}\right) = 332.61 \text{ m/s}$ .

આમ, તાપમાનમાં  $1^\circ\text{C}$  જેટલો વધારો થતાં વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપમાં  $332.61 - 332 = 0.61 \text{ m/s}$  જેટલો વધારો થાય છે.]

**ઉદાહરણ 11 :**  $27^\circ\text{C}$  તાપમાન અને  $76 \text{ cm}$  દબાણે વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ  $345 \text{ m/s}$  છે, તો  $127^\circ\text{C}$  તાપમાન અને  $75 \text{ cm}$  દબાણે વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ શોધો.

**ઉકેલ :** યાદ રાખો કે વાયુમાં દબાણ બદલાતા ધ્વનિની ઝડપ બદલાતી નથી. આથી,

જો  $v_1$  અને  $v_2$  એ અનુક્રમે  $27^\circ\text{C}$  અને  $127^\circ\text{C}$  તાપમાને ધ્વનિની ઝડપ હોય તો,

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \sqrt{\frac{273+127}{273+27}} = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$\therefore 127^\circ\text{C}$  તાપમાને ધ્વનિની ઝડપ,

$$v_2 = v_1 \times \sqrt{\frac{4}{3}} = 345 \times \sqrt{\frac{4}{3}} = 398.4 \text{ m/s}$$

**ઉદાહરણ 12 :** STP એ સૂકી હવામાં ધ્વનિની ઝડપ  $332 \text{ m s}^{-1}$  છે. ધારો કે હવામાં કદની દૃષ્ટિએ 4 ભાગ નાઈટ્રોજન અને એક ભાગ ઓક્સિજન છે. STP એ નાઈટ્રોજન અને ઓક્સિજનની ઘનતાનો ગુણોત્તર

$16 : 14$  હોય, તો આ સ્થિતિમાં ઓક્સિજનમાં ધ્વનિની ઝડપ શોધો.

**ઉકેલ :** હવાની ઘનતા =  $\frac{\text{કુલ દળ}}{\text{કુલ કદ}}$

$$\rho_a = \frac{\text{ઓક્સિજનનું દળ} + \text{નાઈટ્રોજનનું દળ}}{\text{ઓક્સિજનનું કદ} + \text{નાઈટ્રોજનનું કદ}}$$

$$\rho_a = \frac{(V \times \rho_0) + (4V \times \rho_N)}{V + 4V}$$

$$= \frac{\rho_0 + 4\rho_N}{5}$$

$$= \frac{\rho_0 \left(1 + 4 \times \frac{\rho_N}{\rho_0}\right)}{5}$$

$$= \frac{\rho_0 \left(1 + 4 \times \frac{14}{16}\right)}{5}$$

$$= 0.9\rho_0$$

$$\text{ધ્વનિની ઝડપ } v \propto \frac{1}{\sqrt{\rho}} \quad (\because v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}})$$

$$\therefore \text{ઓક્સિજનમાં ધ્વનિની ઝડપ } v_0 \propto \frac{1}{\sqrt{\rho_0}}$$

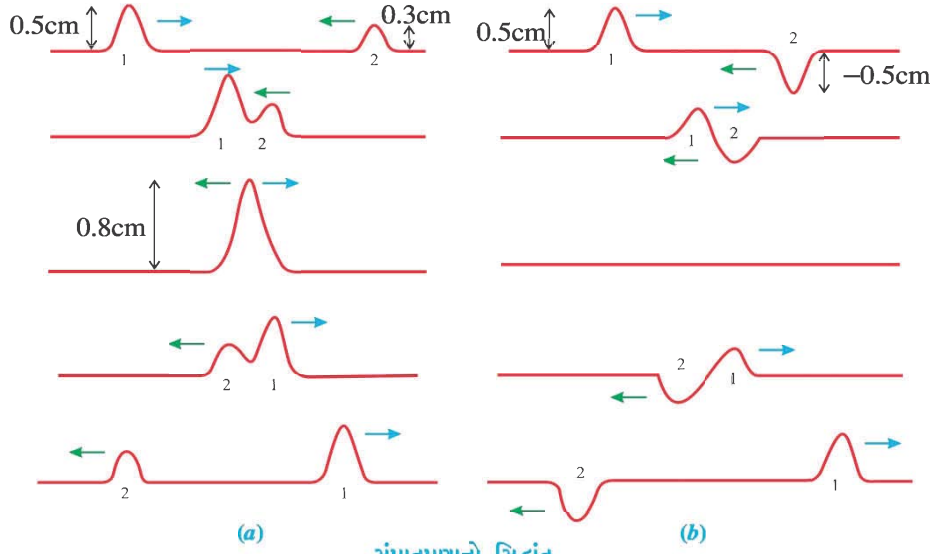
$$\text{અને હવામાં ધ્વનિની ઝડપ } v_a = \frac{1}{\sqrt{\rho_a}}$$

$$\therefore \frac{v_0}{v_a} = \sqrt{\frac{\rho_a}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{0.9\rho_0}{\rho_0}} = 0.9487$$

$$\therefore v_0 = v_a \times 0.9487 = 332 \times 0.9487 = 314.77 \text{ m/s}$$

## 8.8 સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત (Principle of Superposition)

અત્યાર સુધી આપણે માધ્યમ (દોરી)માં પ્રસરતા ફક્ત એક જ તરંગની ચર્ચા કરી. ધારો કે બે વ્યક્તિઓ દોરીના બંને છેડેથી પકડીને દોરીને હલાવે, તો આકૃતિ 8.9(a)માં દર્શાવ્યા અનુસાર દોરી પર બે તરંગ-સ્પંદો એકબીજા તરફ ગતિ કરતા જણાશે. અહીં માધ્યમ એક જ હોવાથી બંને તરંગ-સ્પંદની ઝડપ સમાન હશે.



સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત

આકૃતિ 8.9

ધારો કે પહેલા તરંગમાં કણનું મહત્તમ સ્થાનાંતર 0.5 cm છે અને બીજા તરંગમાં તે 0.3 cm છે. અહીં બંને તરંગો એકબીજા તરફની દિશામાં ગતિ કરે છે. આથી કોઈ એક ક્ષણે તેઓ દોરીના કોઈ વિભાગ આગળ એકબીજા પર સંપાત થાય છે અને ત્યાર બાદ તેઓ પોતાની મૂળ દિશામાં પોતાનો આકાર જાળવી રાખીને ગતિ કરે છે. બંને તરંગો દોરીના જે વિભાગમાં સંપાત થાય છે, ત્યાં કણનું મહત્તમ સ્થાનાંતર  $0.5 \text{ cm} + 0.3 \text{ cm} = 0.8 \text{ cm}$  જેટલું થાય છે.

આકૃતિ 8.9(b)માં દર્શાવ્યા અનુસાર જો બંને વ્યક્તિઓ દોરીને એવી રીતે દોલિત કરે જેથી દોરીના એક છેડે ઉત્પન્ન થયેલ તરંગ-સ્પંદમાં મહત્તમ સ્થાનાંતર ઊર્ધ્વ દિશામાં 0.5 cm જેટલું મળે અને બીજા છેડે ઉત્પન્ન થયેલા તરંગ-સ્પંદમાં આ સ્થાનાંતર અધોદિશામાં 0.5 cm જેટલું મળે. જ્યારે આ બંને તરંગો દોરી પર ગતિ કરતાં, દોરીના કોઈ એક વિભાગમાં કોઈ એક સમયે સંપાત થશે. ત્યારે બધા કણોનું સ્થાનાંતર  $0.5 \text{ cm} + (-0.5 \text{ cm}) = 0$  થશે. અહીં કણનું સ્થાનાંતર શૂન્ય થાય છે, પરંતુ કણનો વેગ શૂન્ય થતો નથી. આ સ્થિતિમાં દોરી સીધી થઈ જાય છે. ત્યાર બાદ બંને તરંગ-સ્પંદ છૂટા પડી પોતાની મૂળ દિશામાં ગતિ કરે છે.

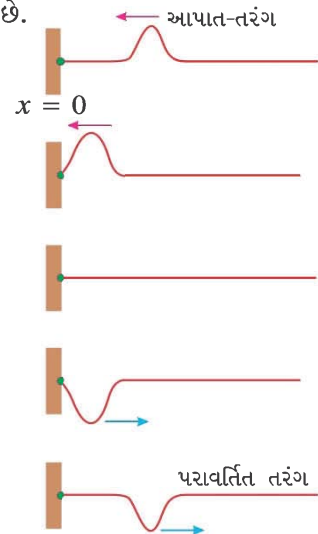
ઉપરનાં અવલોકનો પરથી સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત નીચે મુજબ લખી શકાય.

“જ્યારે માધ્યમનો કોઈ કણ એકીસાથે બે કે તેથી વધારે તરંગોની અસર હેઠળ આવે છે, એટલે કે કોઈ કણ પાસે બે કે બે કરતાં વધારે તરંગો સંપાત થાય છે, ત્યારે તે કણનું સ્થાનાંતર તે દરેક તરંગ વડે ઉદ્ભવતાં સ્વતંત્ર સ્થાનાંતરોના સદિશ સરવાળા જેટલું હોય છે.”

### તરંગનું પરાવર્તન (Reflection of Waves) :

#### (a) જડિત આધાર પાસેથી તરંગનું પરાવર્તન (Reflection of waves from a rigid support) :

આકૃતિ 8.10માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ધારો કે  $y = A \sin(\omega t + kx)$  વડે રજૂ થતું એક પ્રગામી તરંગ  $x$ ના ઘટતાં મૂલ્યની દિશામાં ગતિ કરતાં  $x = 0$  બિંદુ પાસે આવે છે. તરંગ જડિત આધાર પાસે આવતાં તે જડિત આધાર (દીવાલ) પર બળ લગાડે છે. ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમ અનુસાર દીવાલ એ દોરી પર પ્રતિક્રિયા બળ લગાડે છે. જે જડિત આધાર આગળ દોરી પર તરંગ ઉત્પન્ન કરે છે. આ તરંગ એ આપાત તરંગની વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરે છે, જેને પરાવર્તિત તરંગ કહે છે.



દૃઢ આધાર આગળથી તરંગનું પરાવર્તન

આકૃતિ 8.10

આપાત-તરંગ  $y = A \sin(\omega t + kx)$  ને કારણે  $x = 0$  બિંદુ પરનાં દોલનો

$$y_i = A \sin \omega t \quad (8.8.1)$$

વડે રજૂ કરી શકાય.  $x = 0$  આગળનો છેડો જડિત હોવાથી તેનું સ્થાનાંતર તો શૂન્ય જ રહેવાનું છે. આથી સંપાતપણાના સિદ્ધાંત અનુસાર  $x = 0$  આગળ પરાવર્તિત તરંગનું સ્થાનાંતર નીચે મુજબ આપી શકાય.

$$y_r = -A \sin \omega t \quad (8.8.2)$$

સમીકરણ (8.8.2) ને નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$y_r = A \sin(\omega t + \pi) \quad (8.8.3)$$

આ દર્શાવે છે કે **તરંગ જ્યારે દૃઢ આધાર પરથી પરાવર્તન પામે છે, ત્યારે તેની કળામાં  $\pi$ , જેટલો વધારો થાય છે.** પરાવર્તન પામતી વખતે તરંગનો ‘આકાર’ ઉલટાઈ જાય છે. અર્થાત્ ગર્ત એ શૂંગરૂપે અને શૂંગ એ ગર્તરૂપે પરાવર્તિત થાય છે.

આ પરાવર્તિત તરંગ  $x$ ના વધતા મૂલ્યની દિશામાં ગતિ કરતો હોવાથી તેનું તરંગ-સમીકરણ નીચે મુજબ મળે,

$$y_r = A \sin(\omega t + \pi - kx)$$

$$\therefore y_r = A \sin(\omega t - kx) \quad (8.8.4)$$

જો આપાત તરંગ વધતા  $x$ ની દિશામાં ગતિ કરતું હોય, તો

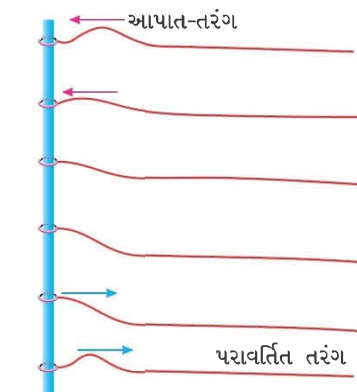
$$y_i = A \sin(\omega t - kx) \quad (8.8.5)$$

અને પરાવર્તિત તરંગનું સમીકરણ નીચે મુજબ લખી શકાય.

$$y_r = -A \sin(\omega t + kx) \quad (8.8.6)$$

**(b) મુક્ત આધાર પાસેથી તરંગનું પરાવર્તન (Reflection of waves from a free end) :**

આકૃતિ 8.11માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે દોરીનો એક છેડો ખૂબ જ હળવી રિંગ સાથે બાંધેલ છે અને આ રિંગ શિરોલંબ રાખેલ સળિયા પર ઘર્ષણરહિત સરકી શકે છે. અહીં દોરીનો આ છેડો મુક્ત છે તેમ કહેવાય અને આવા મુક્ત છેડેથી તરંગનું પરાવર્તન થાય ત્યારે શું થાય છે તે સમજીશું.



મુક્ત આધાર પાસેથી તરંગનું પરાવર્તન  
આકૃતિ 8.11

દોરીના બીજા છેડેથી ઉત્પન્ન કરેલ તરંગનો ધારો કે શૂંગ જેવો વિભાગ રિંગ પાસે પહોંચે છે. રિંગ દૃઢ આધાર સાથે બાંધેલી ન હોવાથી રિંગ ઉપર તરફ ધકેલાય છે. આથી તેની સાથે બાંધેલી દોરી પણ ઉપર તરફ ખેંચાય છે. પરિણામે દોરીમાં આ છેડેથી પરાવર્તિત તરંગ ઉત્પન્ન થાય છે, જેની કળા આપાત તરંગ જેટલી જ હોય છે. અર્થાત્ આ પ્રકારના પરાવર્તનમાં આકાર ઊલટાતો નથી અને શૂંગ એ શૂંગરૂપે તથા ગર્ત એ ગર્તરૂપે જ પરાવર્તન પામે છે. આવી પરિસ્થિતિમાં રિંગ પર બંને તરંગો સાથે હોવાથી રિંગનું સળિયા પરનું સ્થાનાંતર આપાત-તરંગના કંપવિસ્તારથી બમણું હોય છે.

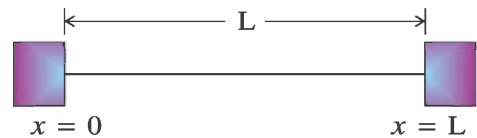
આ ચર્ચા પરથી સ્પષ્ટ છે કે જો આપાત-તરંગનું સમીકરણ  $y_i = A \sin(\omega t + kx)$  હોય, તો મુક્ત છેડેથી તેના પરાવર્તિત તરંગનું સમીકરણ નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$y_r = A \sin(\omega t - kx) \quad (8.8.7)$$

**આમ, પ્રગામી તરંગ જ્યારે દૃઢ આધાર અથવા બંધ છેડા પરથી પરાવર્તન પામે છે ત્યારે તેની કળામાં  $\pi$  rad જેટલો વધારો થાય છે અને મુક્ત છેડા પરથી પરાવર્તન પામે ત્યારે તેની કળામાં કોઈ તફાવત ઉદ્ભવતો નથી.**

### 8.9 સ્થિત-તરંગો (Stationary or Standing Waves)

સમાન કંપવિસ્તારવાળા અને સમાન તરંગલંબાઈવાળાં પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતાં અને સંપાતીકરણ અનુભવતાં તરંગોની સમાસ અસર રૂપે મળતાં તરંગો પ્રગામીપણાનો ગુણધર્મ ગુમાવી બેસે છે. આ રીતે રચાતા સમાસ-તરંગો માધ્યમમાં સ્થિત ભાત ઊપજાવે છે. આવાં તરંગોને સ્થિત-તરંગો કહે છે.



દૃઢ આધાર પર જડિત કરેલ દોરી

આકૃતિ 8.12

આકૃતિ 8.12માં દર્શાવ્યા મુજબ બંને છેડે દૃઢ આધાર પર જડિત કરેલી,  $L$  લંબાઈની તણાવવાળી દોરીને ધ્યાનમાં લો. આ દોરીમાં હાર્મોનિક તરંગ ઉત્પન્ન કરતાં તેનું દૃઢ આધારો પરથી વારંવાર પરાવર્તન થાય છે અને દોરીનો દરેક કણ આપાત-તરંગ અને પરાવર્તિત તરંગની અસર હેઠળ આવે છે.

ધારો કે, દોરી પર  $x$  ના વધતાં મૂલ્યોની દિશામાં ગતિ કરતું તરંગ (આપાત-તરંગ),

$$y_1 = A \sin(\omega t - kx) \quad (8.9.1)$$

વળી, દૃઢ આધાર આગળથી પરાવર્તન પામી  $x$ નાં ઘટતાં મૂલ્યોની દિશામાં ગતિ કરતું તરંગ (પરાવર્તિત તરંગ)

$$y_2 = -A \sin(\omega t + kx) \quad (8.9.2)$$

સંપાતપણાના સિદ્ધાંત અનુસાર દોરીના કોઈ પણ કણનું સ્થાનાંતર,

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 \\ &= A \sin(\omega t - kx) - A \sin(\omega t + kx) \\ \therefore y &= -2A \cos \omega t \sin kx \quad (\text{જુઓ ફૂટનોટ}) \\ &= -2A \sin kx \cos \omega t \quad (8.9.3) \end{aligned}$$

સમીકરણ (8.9.3)માં તરંગ-વિધેયનું સ્વરૂપ એ  $f(\omega t \pm kx)$  પ્રકારનું નથી એટલે કે આ તરંગ પ્રગામી તરંગ નથી. સમીકરણ (8.9.3)એ સ્થિત-તરંગનું સમીકરણ છે. આવા તરંગ દ્વારા ઊર્જાનું વહન થતું નથી, આથી તેને સ્થિત-તરંગ કહે છે.

સમીકરણ (8.9.3)માંનું પદ ‘ $\cos \omega t$ ’ સૂચવે છે કે દોરીનો દરેક કણ સરળ આવર્તગતિ કરે છે અને તેમના કંપવિસ્તારો  $2A \sin kx$  અનુસાર કણના સ્થાન  $x$  પર આધાર રાખે છે. અહીં બધા જ કણનો કંપવિસ્તાર સમાન હોતો નથી. જે કણોના સ્થાન  $x$  એવાં છે, જેથી  $\sin kx = 0$  થાય, તેવા કણોના કંપવિસ્તાર શૂન્ય છે. આવા કણોનું સ્થાનાંતર હંમેશાં શૂન્ય જ રહે છે. આવા બિંદુઓને નિસ્પંદ-બિંદુઓ (Nodes) કહે છે.

સ્થિત-તરંગમાં જે સ્થાનોએ કંપવિસ્તાર હંમેશા શૂન્ય રહે છે. તે સ્થાનોને નિસ્પંદ-બિંદુઓ કહે છે.

$$\text{હવે, } \sin kx = 0$$

$$\therefore kx = n\pi \quad \text{જ્યાં, } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\begin{aligned} \therefore x &= \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{2\pi/\lambda} \\ \therefore x &= \frac{n\lambda}{2} \quad (8.9.4) \end{aligned}$$

આ દર્શાવે છે કે  $x = 0$  થી  $x = \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \dots, \frac{n\lambda}{2}$  વગેરે અંતરોએ રહેલા બિંદુઓ નિસ્પંદ-બિંદુઓ છે. બે અનુક્રમે આવતા નિસ્પંદ-બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર  $\frac{\lambda}{2}$  છે.

$$\text{ફૂટનોટ : } \sin C - \sin D = 2 \cos \left( \frac{C+D}{2} \right) \sin \left( \frac{C-D}{2} \right)$$

હવે, જે કણોના સ્થાન  $\sin kx = \pm 1$  વડે આપી શકાય છે, તેવા કણો મહત્તમ કંપવિસ્તાર સાથે દોલનો કરે છે. તે બિંદુઓને પ્રસ્પંદ-બિંદુઓ (Antinodes) કહે છે.

સ્થિત-તરંગમાં જે સ્થાનોએ કંપવિસ્તાર હંમેશા મહત્તમ રહે છે તે સ્થાનોને પ્રસ્પંદ-બિંદુઓ કહે છે. આવાં બિંદુઓનો કંપવિસ્તાર  $2A$  હોય છે.

$$\text{હવે, } \sin kx = \pm 1$$

$$\therefore kx = (2n - 1) \frac{\pi}{2} \quad \text{જ્યાં, } n = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} \therefore x &= \frac{(2n - 1)\pi}{2k} \\ &= (2n - 1) \frac{\lambda}{4} \quad (8.9.5) \end{aligned}$$

આમ, દોરીના  $x = 0$  છેડાથી પ્રસ્પંદ-બિંદુઓ અનુક્રમે  $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots$  અંતરે આવેલાં છે. અહીં પણ બે અનુક્રમે આવતાં પ્રસ્પંદ-બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર  $\frac{\lambda}{2}$  છે. વળી, અનુક્રમે આવતાં નિસ્પંદ-બિંદુઓ અને પ્રસ્પંદ-બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર  $\frac{\lambda}{4}$  હોય છે.

આકૃતિ 8.13માં પ્રસ્પંદ-બિંદુઓને (Antinodes) A વડે અને નિસ્પંદ-બિંદુઓને (Nodes) N વડે દર્શાવ્યા છે.

અહીં, દોરીના બંને છેડા  $x = 0$  તેમજ  $x = L$  પાસે દૃઢ આધાર સાથે બાંધેલી હોવાથી તે છેડાનું સ્થાનાંતર પણ બધા જ સમયે શૂન્ય રહેવું જોઈએ.

$$\therefore \sin kL = 0 \quad \text{થવું જોઈએ.}$$

$$\therefore kL = n\pi \quad \text{જ્યાં, } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\therefore \frac{2\pi}{\lambda} L = n\pi$$

$$\therefore \lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (8.9.6)$$

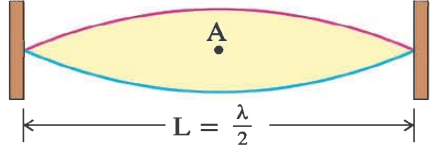
આ સમીકરણ દર્શાવે છે કે,  $n$ ના જુદાં-જુદાં મૂલ્યો અનુસાર, અત્રે આપેલ  $L$  લંબાઈની દોરીમાં  $2L, L, \frac{2L}{3}, \frac{L}{2}, \dots$  જેવી અમુક નિશ્ચિત તરંગલંબાઈનાં તરંગો માટે સ્થિત-તરંગો જોવા મળશે. આમ, આપેલી તણાવવાળી દોરીમાં ગમે તે તરંગલંબાઈના તરંગો ઉત્પન્ન કરી સ્થિત-તરંગોની રચના મેળવી શકાય નહિ.

દોરી પર ઉત્પન્ન થતા સ્થિત-તરંગોની શક્ય એવી તરંગલંબાઈઓને અનુરૂપ આવૃત્તિ,

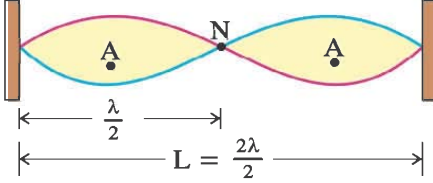
$$f_n = \frac{v}{\lambda_n}$$

$$\text{સમીકરણ 8.9.6 પરથી, } f_n = \frac{nv}{2L} \quad (8.9.7)$$

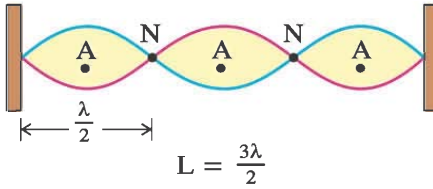


(a)  $n = 1$ 

મૂળભૂત આવૃત્તિ

(b)  $n = 2$ 

દ્વિતીય હાર્મોનિક અથવા પ્રથમ ઓવરટોન

(c)  $n = 3$ 

તૃતીય હાર્મોનિક અથવા દ્વિતીય ઓવરટોન

દોરી પર સ્થિત-તરંગો

આકૃતિ 8.13

$$\text{અથવા } f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (8.9.8)$$

$$\text{જ્યાં, } v = \text{દોરી પર તરંગની ઝડપ} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

સમીકરણ (8.9.7)માં  $n = 1$  મૂકતાં,

$$f_1 = \frac{v}{2L}$$

અહીં,  $f_1$  ને દોરીની મૂળભૂત આવૃત્તિ અથવા પ્રથમ હાર્મોનિક કહે છે. $n = 2$  લેતાં,

$$f_2 = \frac{2v}{2L} = 2f_1$$

 $f_2$  ને દ્વિતીય (second) હાર્મોનિક અથવા પ્રથમ ઓવરટોન કહે છે. $n = 3$  લેતાં,

$$f_3 = \frac{3v}{2L} = 3f_1$$

 $f_3$  ને તૃતીય હાર્મોનિક અથવા દ્વિતીય ઓવરટોન કહે છે.આમ, સમીકરણ (8.9.7)માં  $n$  ના જુદાં-જુદાં મૂલ્યો લઈને દોરીના શક્ય પ્રકારનાં દોલનો મેળવી શકાય અને

તેને અનુરૂપ આવૃત્તિઓ શોધી ચતુર્થ.....વગેરે હાર્મોનિક્સ મેળવી શકાય.

પ્રથમ, દ્વિતીય અને તૃતીય હાર્મોનિક્સ સાથે દોરી પર થતાં દોલનો આકૃતિ 8.13માં દર્શાવ્યાં છે. આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે દોરી પર ઉત્પન્ન થતાં ગાળાઓની સંખ્યા  $n$  જેટલી છે.

આમ, જુદી-જુદી નિશ્ચિત આવૃત્તિઓ સાથેના શક્ય દોલનોને દોરીનાં પ્રસામાન્યરીતિ દોલનો (Normal Modes of Vibration) કહે છે.

જુદા-જુદા નોર્મલ મોડ્સ ઓફ વાઈબ્રેશનને અનુરૂપ આવૃત્તિઓ નીચેના સૂત્રથી મેળવી શકાય.

$$f_n = \frac{nv}{2L} = nf_1 \text{ જ્યાં, } n = 1, 2, 3, \dots$$

જ્યાં, દોરી પર ઉત્પન્ન થતી આવૃત્તિ  $f_n$  ને  $n$ -મી હાર્મોનિક અથવા  $(n - 1)$ મો ઓવરટોન કહે છે. અહીં,  $n$  એ દોરી પર રચાતા ગાળાઓની સંખ્યા પણ દર્શાવે છે.**ઉદાહરણ 13 :** 60 cm લાંબી એક દોરીમાં ઉત્પન્નકરેલા સ્થિત-તરંગો  $y = 4\sin\left(\frac{\pi x}{15}\right) \cos(96\pi t)$  સમીકરણ વડે રજૂ કરવામાં આવે છે. અહીં  $x$  અને  $y$  cmમાં અને  $t$  સેકન્ડમાં છે.

(1) નિસ્પંદ-બિંદુઓનાં સ્થાન શોધો.

(2) પ્રસ્પંદ-બિંદુઓનાં સ્થાન શોધો.

(3)  $x = 5$  cm અંતરે રહેલા કણનું મહત્તમ સ્થાનાંતર શોધો.

(4) આ સ્થિત-તરંગ જે ઘટક-તરંગોનું બનેલું હોય તે ઘટક-તરંગોનાં સમીકરણો શોધો.

$$\text{ઉકેલ : } y = 4\sin\left(\frac{\pi x}{15}\right) \cos(96\pi t) \text{ ને}$$

 $y = 2A\sin(kx) \cos(\omega t)$  સાથે સરખાવતાં,

$$A = 2 \text{ cm, } k = \frac{\pi}{15} \frac{\text{rad}}{\text{cm}} \text{ અને } \omega = 96\pi \text{ rad/s.}$$

$$\text{પરંતુ, } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\therefore \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{15} \Rightarrow \lambda = 30 \text{ cm}$$

(1) નિસ્પંદ-બિંદુઓનાં સ્થાન

$$= \frac{n\lambda}{2}, \text{ જ્યાં, } n = 1, 2, \dots$$

$$= 15 \text{ cm, } 30 \text{ cm, } 45 \text{ cm}$$

(0 cm અને 60 cm અંતરે રહેલા કણો તો જકડેલા રાખેલા છે, એટલે ગણતરીમાં તેમનો સમાવેશ કર્યો નથી.)

(2) પ્રસ્પંદ-બિંદુઓનાં સ્થાન

$$= (2n - 1) \frac{\lambda}{4}, \text{ જ્યાં, } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$= 7.5 \text{ cm}, 22.5 \text{ cm}, 37.5 \text{ cm}, 52.5 \text{ cm}$$

(3)  $x = 5 \text{ cm}$  અંતરે રહેલ કણનું મહત્તમ સ્થાનાંતર

$$= 2A \sin kx$$

$$= 4 \sin \left( \frac{\pi x}{15} \right)$$

$$= 4 \sin \left( \frac{\pi}{3} \right) (\because x = 5 \text{ cm})$$

$$= 4 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$(4) y = 4 \sin \left( \frac{\pi x}{15} \right) \cos (96\pi t)$$

$$= 2 \sin \left( \frac{\pi x}{15} + 96\pi t \right) + 2 \sin \left( \frac{\pi x}{15} - 96\pi t \right)$$

$$\therefore \text{ ઘટક-તરંગ } y_1 = 2 \sin \left( \frac{\pi x}{15} + 96\pi t \right) \text{ cm અને,}$$

$$y_2 = 2 \sin \left( \frac{\pi x}{15} - 96\pi t \right) \text{ cm}$$

**ઉદાહરણ 14 :** એક માધ્યમમાં પ્રસરતા પ્રગામી, હાર્મોનિક તરંગનું સમીકરણ  $y_i = A \cos(ax + bt)$  છે, જ્યાં  $A$ ,  $a$  અને  $b$  ધન અચળાંકો છે.  $x = 0$  સ્થાને રાખેલ દૃઢ આધારથી આ તરંગનું પરાવર્તન થાય છે અને પરાવર્તિત તરંગની તીવ્રતા એ આપાત-તરંગની તીવ્રતાથી 0.64 ગણી છે, તો

(a) આપાત-તરંગની તરંગલંબાઈ અને આવૃત્તિ શોધો.

(b) પરાવર્તિત તરંગનું સમીકરણ મેળવો.

(c) આપાત અને પરાવર્તિત તરંગોના સંપાતીકરણથી મળતા પરિણામી તરંગને પ્રગામી તરંગ અને સ્થિત-તરંગનાં સમીકરણો રૂપે દર્શાવો.

**ઉકેલ :**

$$(a) \text{ આપાત-તરંગ } y_i = A \cos(ax + bt)$$

આ સમીકરણને તરંગ-સમીકરણ  $y = A \cos(kx + \omega t)$  સાથે સરખાવતાં,

$$\therefore \text{ તરંગ-સંદિશ } k = a$$

$$\therefore \frac{2\pi}{\lambda} = a$$

$$\therefore \lambda = \frac{2\pi}{a}$$

$$\text{કોણીય આવૃત્તિ } \omega = 2\pi f = b$$

$$\therefore f = \frac{b}{2\pi}$$

(b) તરંગ-તીવ્રતા  $I \propto A^2$ , જ્યાં  $A$  = કંપવિસ્તાર.

અહીં  $A_1$  અને  $A_2$  આપાત અને પરાવર્તિત તરંગોના કંપવિસ્તાર તથા  $I_1$  અને  $I_2$  અનુક્રમે તેઓની તીવ્રતાઓ છે.

$$\therefore \frac{I_2}{I_1} = \frac{(A_2)^2}{(A_1)^2}$$

$$\therefore \frac{A_2}{A_1} = \left( \frac{I_2}{I_1} \right)^{\frac{1}{2}} = (0.64)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore A_2 = 0.8 A (\because A_1 = \text{આપાત તરંગનો કંપવિસ્તાર} = A)$$

$$\therefore \text{ પરાવર્તિત તરંગનો કંપવિસ્તાર } A_2 = 0.8 A$$

પરાવર્તિત તરંગનું સમીકરણ

$$y_r = -A_2 \cos(bt - ax)$$

$$\therefore y_r = -0.8 A \cos(bt - ax)$$

$$(c) \text{ પરિણામી તરંગ } y = y_i + y_r$$

$$= A \cos(bt + ax) - 0.8 A \cos(bt - ax)$$

$$= 0.8 A [\cos(bt + ax) - \cos(bt - ax)]$$

$$+ 0.2 A \cos(bt + ax)$$

$$= -1.6 A \sin(ax) \cdot \sin(bt) + 0.2 A \cos(bt + ax),$$

જ્યાં સ્થિત-તરંગ

$$y_s = -1.6 A \sin(ax) \cdot \sin(bt) \text{ અને}$$

$$\text{પ્રગામી તરંગ } y_p = 0.2 A \cos(bt + ax) \text{ છે.}$$

**ઉદાહરણ 15 :** સોનોમીટરના તારના મુક્ત છેડે એક બ્લોક લટકાવેલ છે. આ પરિસ્થિતિમાં તારનાં દોલનો માટે મૂળભૂત  $f_1 \text{ Hz}$  છે. આ બ્લોકને પાણીમાં ડુબાડતાં તે જ તાર માટે મૂળભૂત આવૃત્તિ  $f_2 \text{ Hz}$  થાય છે. તે પછી બ્લોકને એક પ્રવાહીમાં ડુબાડતાં આ તાર માટે  $f_3 \text{ Hz}$  મૂળભૂત આવૃત્તિ મળે છે, તો બ્લોકના દ્રવ્યની અને પ્રવાહીની વિશિષ્ટ ઘનતાઓ શોધો.

**ઉકેલ :** બ્લોકને હવામાં, પાણીમાં અને પ્રવાહીમાં રાખતાં તેના પર જુદું-જુદું ઉત્પલાવક બળ (force of buoyancy) લાગે છે. આથી દરેક કિસ્સામાં અસરકારક વજન બદલાતાં તારમાં તણાવ બદલાય છે અને પરિણામે આપેલ લંબાઈના એક જ દ્રવ્યના તાર માટે આવૃત્તિ પણ બદલાય છે.

ધારો કે બ્લોકનું વજન, હવામાં  $W_1$ , પાણીમાં  $W_2$  અને પ્રવાહીમાં  $W_3$  છે.

$$\text{મૂળભૂત આવૃત્તિનું સૂત્ર } f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \text{ છે.}$$

અહીં,  $L$  અને  $\mu$  અચળ હોવાથી,

$$f \propto \sqrt{T}$$

$\therefore T = kf^2$  જ્યાં,  $k$  = સમપ્રમાણતાનો અચળાંક  
પરંતુ તણાવ  $T = W$

$$\therefore W = kf^2$$

$$\therefore W_1 = kf_1^2; W_2 = kf_2^2; W_3 = kf_3^2$$

આર્કિમિડિઝના સિદ્ધાંત અનુસાર,

બ્લોકના (ઘન પદાર્થના) દ્રવ્યની વિશિષ્ટ ઘનતા

$$\begin{aligned} &= \frac{\text{હવામાં બ્લોકનું વજન}}{\text{પાણીમાં બ્લોકના વજનમાં ઘટાડો}} \\ &= \frac{W_1}{W_1 - W_2} = \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} \end{aligned}$$

પ્રવાહીની વિશિષ્ટ ઘનતા

$$\begin{aligned} &= \frac{\text{પ્રવાહીમાં બ્લોકના વજનમાં ઘટાડો}}{\text{પાણીમાં બ્લોકના વજનમાં ઘટાડો}} \\ &= \frac{W_1 - W_3}{W_1 - W_2} = \frac{kf_1^2 - kf_3^2}{kf_1^2 - kf_2^2} \\ &= \frac{f_1^2 - f_3^2}{f_1^2 - f_2^2} \end{aligned}$$

## 8.10 નળીમાં સ્થિત-તરંગો (Stationary Wave in Pipes)

જેમ દોરીમાં નિશ્ચિત આવૃત્તિવાળા લંબગત તરંગોનું પરાવર્તન થતાં, આપાત અને પરાવર્તિત તરંગોના સંપાતીકરણને લીધે સ્થિત-તરંગો રચાય છે તેવી જ રીતે નળી (pipe) માં રહેલા હવાના સંતંબમાં પણ નિશ્ચિત આવૃત્તિવાળા સંગત-તરંગોના નળીના છેડેથી થતાં પરાવર્તનના કારણે સ્થિત-તરંગો રચાય છે. વાંસળી, ટ્રમ્પેટ (trumpet), ક્લેરિનેટ (clarinet) જેવાં સંગીતનાં વાદ્યો પણ આવી નળીઓ-ઓર્ગન પાઈપ્સ છે. જેમાં સ્થિર-તરંગો રચાય છે.

નળીઓ બે પ્રકારની હોય છે : (1) જે નળીમાં બંને છેડા ખુલ્લા હોય તેવી નળીને ઓપન પાઈપ (open pipe)

કહે છે. દા.ત., વાંસળી. (2) જેમાં એક છેડો ખુલ્લો અને બીજો છેડો બંધ હોય તેવી નળીને ક્લોઝ્ડ પાઈપ (closed pipe) કહે છે. દા.ત., ક્લેરિનેટ.

જેમ દોરીના કિસ્સામાં જડિત છેડે હંમેશા નિસ્પંદ બિંદુ જ હોય છે, તેવી જ રીતે પાઈપના બંધ છેડેથી સંગત-તરંગનું પરાવર્તન એવી રીતે થાય છે કે તે છેડે **નિસ્પંદ-બિંદુ** જ બને. પરંતુ સંગત-તરંગની તરંગલંબાઈની સરખામણીમાં પાઈપ સાંકડી હોય, તો **ખુલ્લા છેડે (કે તેની સહેજ બહાર) પ્રસ્પંદ બિંદુ** મળે છે. (પાઈપના ખુલ્લા છેડેથી થતા સંગત તરંગોના પરાવર્તનની પ્રક્રિયા થોડી જટિલ હોય છે.)

### ક્લોઝ્ડ પાઈપમાં સ્થિર-તરંગો :

ક્લોઝ્ડ પાઈપમાં સ્થિત-તરંગો મળે તે માટે તરંગલંબાઈ ( $\lambda$ ) એવી હોવી જોઈએ કે જેથી પાઈપના બંધ છેડે નિસ્પંદ બિંદુ અને ખુલ્લા છેડે પ્રસ્પંદ-બિંદુ મળે. સ્થિત-તરંગોમાં નિસ્પંદ અને પ્રસ્પંદ-બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર  $\frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots, (2n-1) \frac{\lambda}{4}$  હોય છે. આથી વ્યાપક રીતે, ક્લોઝ્ડ પાઈપની આપેલી લંબાઈ  $L$  માટે તરંગોની તરંગલંબાઈ  $\lambda$  એવી હોય કે જેથી,

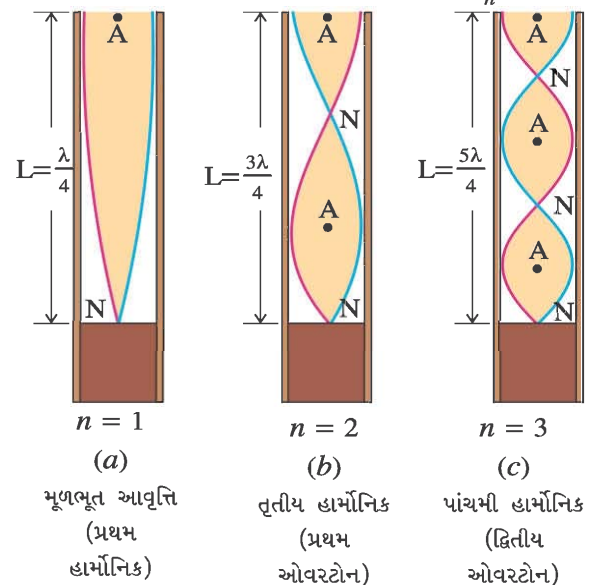
$$L = (2n - 1) \frac{\lambda}{4} \text{ જ્યાં, } n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.10.1)$$

થાય તો જ નળીમાં સ્થિત-તરંગો ઉદ્ભવે.

આથી, ક્લોઝ્ડ પાઈપમાં ઉદ્ભવતાં સ્થિત-તરંગોની શક્ય એવી તરંગલંબાઈઓ નીચેના સૂત્રમાં  $n$ નાં જુદાં-જુદાં

$$\text{મૂલ્યો મૂકવાથી મળે છે. } \lambda_n = \frac{4L}{(2n-1)} \quad (8.10.2)$$

પાઈપમાં સ્થિત-તરંગોની આવૃત્તિ  $f_n = \frac{v}{\lambda_n}$ ,



### ક્લોઝ્ડ પાઈપમાં સ્થિત-તરંગો

આકૃતિ 8.14

$$\therefore f_n = \frac{v}{4L} (2n - 1) \quad (8.10.3)$$

જ્યાં,  $v$  એ તરંગની ઝડપ છે.

(i)  $n = 1$  લેતાં,

$$f_1 = \frac{v}{4L}$$

$f_1$  ને **મૂળભૂત આવૃત્તિ** અથવા **પ્રથમ હાર્મોનિક** કહે છે (જુઓ આકૃતિ 8.14(a)).

(ii)  $n = 2$  લેતાં,

$$f_2 = \frac{3v}{4L} = 3f_1 \quad (\because f_1 = \frac{v}{4L})$$

$f_2$  ને **તૃતીય હાર્મોનિક** અથવા **પ્રથમ ઓવરટોન** કહે છે (જુઓ આકૃતિ 8.14(b)).

(iii) આ જ રીતે  $n = 3$  લેતાં

$$f_3 = \frac{v}{4L} (2(3) - 1) = \frac{5v}{4L} = 5f_1$$

$f_3$  ને **પાંચમી હાર્મોનિક** અથવા **દ્વિતીય ઓવરટોન** કહે છે.

આમ, વ્યાપક રીતે ક્લોઝ્ડ પાઈપમાં  $n$ માં પ્રસામાન્ય, રીતી દોલનોની આવૃત્તિ નીચે મુજબ આપી શકાય.

$$f_n = \frac{v}{4L} (2n - 1) = (2n - 1)f_1 \quad (8.10.4)$$

જ્યાં,  $n = 1, 2, 3, \dots$

જ્યાં,  $f_n$  એ  $(2n - 1)$ મી હાર્મોનિક અથવા  $(n - 1)$ મો ઓવરટોન દર્શાવે છે.

આમ, ક્લોઝ્ડ પાઈપ માટે બધા જ હાર્મોનિક શક્ય નથી, મૂળભૂત આવૃત્તિના એકી પૂર્ણાંક હાર્મોનિક ( $f_1, 3f_1, 5f_1, \dots$ ) જ શક્ય છે.

[આ સંદર્ભમાં સમીકરણ (8.10.3)ને નીચે મુજબ પણ લખી શકાય.

$$f_n = nf_1 = \frac{nv}{4L} \quad \text{જ્યાં, } n = 1, 3, 5, \dots$$

જ્યાં,  $f_n$  એ  $n$ મી હાર્મોનિક અથવા  $\left(\frac{n-1}{2}\right)$ મી ઓવરટોન કહે છે.]

નળીમાં જે આવૃત્તિઓવાળાં સ્થિત-તરંગો રચાય છે, તે આવૃત્તિઓનો (જુદા-જુદા હાર્મોનિક્સને) નળીની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિઓ (natural or characteristics frequencies) કહે છે.

**ઓપન પાઈપ (ખુલ્લી નળી)માં સ્થિત-તરંગો :** ઓપન પાઈપમાં બંને છેડે પ્રસ્પંદ-બિંદુઓ રચાય છે. આપણે જાણીએ છીએ કે પ્રસ્પંદ-બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર  $\frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \dots, \frac{n\lambda}{2}$  હોય છે. જ્યાં,  $n = 1, 2, 3, \dots$

આથી વ્યાપક રીતે, ઓપન પાઈપની આપેલી લંબાઈ  $L$  માટે તરંગોની તરંગલંબાઈ  $\lambda$  એવી હોય કે જેથી,

$$L = \frac{n\lambda}{2}$$

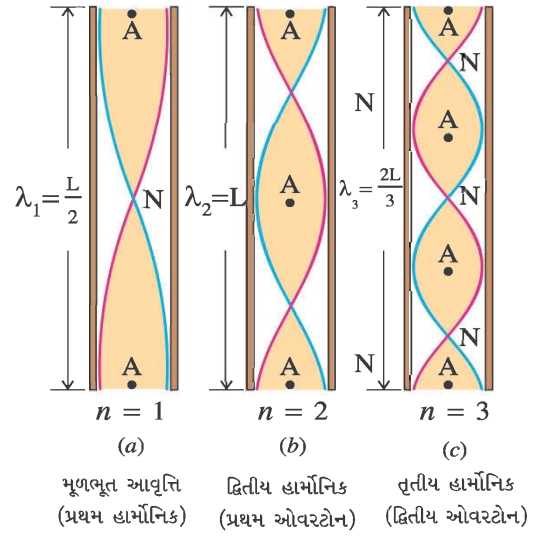
થાય તો જ નળીમાં સ્થિત-તરંગો ઉદ્ભવે,

$$\text{આથી, } \lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (8.10.5)$$

ઓપન પાઈપમાં સ્થિત-તરંગોની આવૃત્તિ,

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{nv}{2L} \quad (8.10.6)$$

જ્યાં,  $v$  એ તરંગની ઝડપ છે.



**ઓપન પાઈપમાં સ્થિત-તરંગો**

**આકૃતિ 8.15**

(i) સમીકરણ (8.10.6)માં  $n = 1$  મૂકતાં,

$$f_1 = \frac{v}{2L} \quad (8.10.7)$$

અહીં,  $f_1$  ને **મૂળભૂત આવૃત્તિ** અથવા **પ્રથમ હાર્મોનિક** કહે છે. (જુઓ આકૃતિ 8.15a) જે ક્લોઝ્ડ પાઈપની મૂળભૂત આવૃત્તિ કરતાં બમણી છે. ( $\because f_1 = \frac{v}{4L}$ ).

(ii)  $n = 2$  લેતાં,

$$f_2 = \frac{2v}{2L} = \frac{v}{L} = 2f_1$$

$f_2$  ને **દ્વિતીય હાર્મોનિક** અથવા **પ્રથમ ઓવરટોન** કહે છે. (જુઓ આકૃતિ 8.15b)

આમ, સમીકરણ (8.10.6)માં  $n$ નાં જુદાં-જુદાં મૂલ્યો લઈને તૃતીય, ચતુર્થ, ..... હાર્મોનિક્સ મેળવી શકાય છે. વ્યાપક રૂપે ઓપન પાઈપમાં  **$n$ મી હાર્મોનિક અથવા  $(n - 1)$ માં ઓવરટોન માટે,**



$$f_n = \frac{nv}{2L} = nf_1 \quad (8.10.8)$$

જ્યાં,  $n = 1, 2, 3, \dots$

આમ, **ઓપન પાઈપ માટે દરેક હાર્મોનિક ( $f_1, 2f_1, 3f_1, \dots$ ) શક્ય છે.**

આમ, બંને પ્રકારની પાઈપ્સમાં પણ હવાના સ્તંભ માટે નોર્મલ મોડ્સ ઓફ વાઈબ્રેશન મળે છે.

**ઉદાહરણ 16 :** ક્લોઝ્ડ પાઈપનો દ્વિતીય ઓવરટોન અને ઓપન પાઈપનો તૃતીય ઓવરટોન સમાન હોય, તો બંને પાઈપની લંબાઈનો ગુણોત્તર શોધો.

**ઉકેલ :**

ક્લોઝ્ડ પાઈપ માટે દ્વિતીય ઓવરટોન એટલે પાંચમી હાર્મોનિક્સ. આથી નીચેના સમીકરણમાં  $n = 5$  મૂકતાં,

$$f = \frac{nv}{4L} = \frac{5v}{4L_1}.$$

ઓપન પાઈપ માટે ત્રીજી ઓવરટોન એટલે ચોથી હાર્મોનિક્સની આવૃત્તિ આથી નીચેના સમીકરણમાં  $n = 4$

$$\text{મૂકતાં, } f = \frac{nv}{2L} = \frac{4v}{2L_2}.$$

હવે, બંને પાઈપ્સની આવૃત્તિ સમાન હોવાથી,

$$\frac{5v}{4L_1} = \frac{4v}{2L_2}$$

$$\therefore \frac{L_1}{L_2} = \frac{5}{8} \text{ OR } L_1 : L_2 = 5 : 8$$

**ઉદાહરણ 17 :** અનુનાદ-નળીના પ્રયોગમાં જ્યારે હવાના સ્તંભની (નળીની) લંબાઈ 9.75 cm હોય, ત્યારે 800 Hz આવૃત્તિવાળા સ્વરકાંટા સાથે પ્રથમ અનુનાદ થાય છે. હવે હવાના સ્તંભની (નળીની) લંબાઈ વંધારીને 31.25 cm કરવામાં આવે ત્યારે પાછો તેજ સ્વરકાંટા સાથે અનુનાદ સર્જાય છે. આ અવલોકનો પરથી હવામાં ધ્વનિની ઝડપ શોધો.

**ઉકેલ :** અનુનાદ-નળીના પ્રયોગમાં ઓપન પાઈપનો એક છેડો પાણીમાં ડુબાડેલો રાખીને ક્લોઝ્ડ પાઈપની રચના મેળવી શકાય છે.

જો નળીમાંના હવાના સ્તંભને તેની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ જેટલી જ આવૃત્તિ ધરાવતા સ્વરકાંટાથી દોલિત કરવામાં આવે તો હવાનો સ્તંભ મોટા કંપવિસ્તાર સાથે દોલનો કરે છે. આ સ્થિતિમાં પ્રબળ અવાજ સંભળાય છે. આને **અનુનાદની ઘટના** કહે છે.

અહીંયા,  $f = 800 \text{ Hz}$ ,  $L_1 = 9.75 \text{ cm}$ ,  $L_2 = 31.25 \text{ cm}$ .

અનુનાદ-નળી એ ક્લોઝ્ડ પાઈપ છે. ક્લોઝ્ડ પાઈપ

માટે પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ નીચેના સમીકરણ વડે અપાય છે.

$$f = (2n - 1) \frac{v}{4L}$$

પ્રથમ અનુનાદ વખતે ઉપર્યુક્ત સમીકરણમાં  $n = 1$  લેતાં,

$$f = \frac{v}{4L_1}$$

$$\therefore L_1 = \frac{v}{4f}$$

બીજા અનુનાદ માટે  $n = 2$  મૂકતાં,

$$f = (2 \times 2 - 1) \frac{v}{4L_2} = \frac{3v}{4L_2}$$

$$\therefore L_2 = \frac{3v}{4f}$$

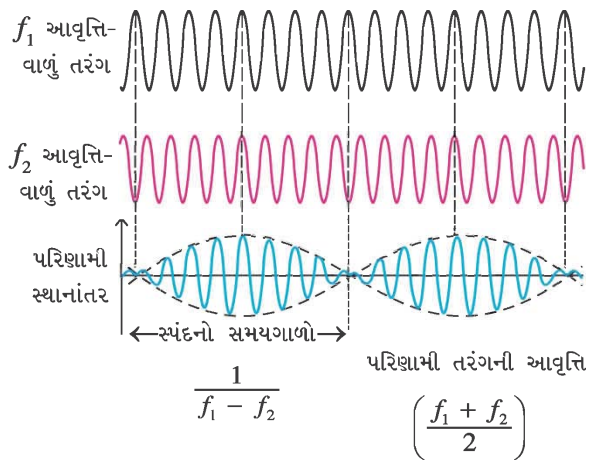
$$\therefore L_2 - L_1 = \frac{3v}{4f} - \frac{v}{4f} = \frac{2v}{4f} = \frac{v}{2f}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ધ્વનિની ઝડપ } v &= (L_2 - L_1) (2f) \\ &= (31.25 - 9.75) (2 \times 800) \\ &= 34400 \text{ cm/s} \\ &= 344 \text{ m/s} \end{aligned}$$

### 8.11 સ્પંદ (Beats)

આગળના પરિચ્છેદમાં આપણે એકસમાન કંપવિસ્તાર વાળા, સમાન આવૃત્તિવાળા અને પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતાં તરંગો માટે સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત લાગુ પાડ્યો, જે માધ્યમમાં અપ્રગામી એવા સ્થિત-તરંગો રચે છે.

હવે, સંપાતપણાના સિદ્ધાંતથી આપણે સમાન કંપવિસ્તારવાળાં પણ સહેજ જુદી પડતી આવૃત્તિવાળાં હાર્મોનિક તરંગો માધ્યમમાં એક જ દિશામાં ગતિ કરે, તો માધ્યમનું કણ કેવી દોલિત ગતિ કરશે તેનો અભ્યાસ કરીશું.



સ્પંદની ઘટના

આકૃતિ 8.16

ધારો કે માધ્યમમાં પ્રસરતાં બે હાર્મોનિક તરંગો,

$$y_1 = A \sin \omega_1 t = A \sin 2\pi f_1 t \text{ અને}$$

$$y_2 = A \sin \omega_2 t = A \sin 2\pi f_2 t$$

અહીં, સરળતા ખાતર આપણે બંને તરંગોની પ્રારંભિક કળા શૂન્ય લીધી છે.  $f_1$  અને  $f_2$  એ અનુક્રમે પ્રથમ અને બીજા તરંગની આવૃત્તિઓ છે. યાદ રાખો કે આપણે અહીં બંને તરંગોની અસર હેઠળ માધ્યમના કોઈ એક કણનું અવલોકન કરી રહ્યા છીએ.

સંપાતપણાના સિદ્ધાંત અનુસાર  $t$  સમયે કથિત કણનું સ્થાનાંતર  $y$  હોય તો,

$$y = y_1 + y_2 \\ = A \sin 2\pi f_1 t + A \sin 2\pi f_2 t$$

$$\therefore y = [2A \cos 2\pi \left( \frac{f_1 - f_2}{2} \right) t] \sin 2\pi \left( \frac{f_1 + f_2}{2} \right) t \quad (8.11.1)$$

$$y = A' \sin 2\pi \left( \frac{f_1 + f_2}{2} \right) t$$

$$\text{અથવા } y = A' \sin 2\pi f t \quad (8.11.2)$$

ઉપર્યુક્ત સમીકરણ દર્શાવે છે કે કથિત કણનું પરિણામી

દોલન  $f = \left( \frac{f_1 + f_2}{2} \right)$  આવૃત્તિ સાથેનાં આવર્તદોલનો છે.

$f$  એ બંને તરંગોની સરેરાશ આવૃત્તિ દર્શાવે છે. આ દોલનોનો કંપવિસ્તાર,

$$A' = 2A \cos 2\pi \left( \frac{f_1 - f_2}{2} \right) t \quad (8.11.3)$$

કંપવિસ્તાર સમય સાથે આવર્ત રીતે બદલાતો જાય છે. કંપવિસ્તારનું આ પદ સમયમાં આવર્ત-વિધેય છે. આ

વિધેયની આવૃત્તિ  $\left( \frac{f_1 - f_2}{2} \right) = f'$  છે. આથી, તેનો

આવર્તકાળ,

$$T = \frac{1}{f'} = \frac{2}{f_1 - f_2} \quad (8.11.4)$$

હવે, એક આવર્તકાળ ( $T$ ) જેટલા સમયગાળા દરમિયાન cosine વિધેય બેવાર મહત્તમ મૂલ્યો અને બે વાર શૂન્ય મૂલ્ય ધારણ કરે છે. તેથી એકમસમયમાં આ વિધેય  $f_1 - f_2$  વખત મહત્તમ મૂલ્ય ધારણ કરે છે. અર્થાત્ કણનાં પરિણામી દોલનોનો કંપવિસ્તાર એકમસમયમાં  $f_1 - f_2$  વખત મહત્તમ અને  $f_1 - f_2$  વખત શૂન્ય બને છે.

$$\text{ફૂટનોટ : } \sin C + \sin D = 2 \sin \left( \frac{C+D}{2} \right) \cos \left( \frac{C-D}{2} \right)$$

જો તરંગો ધ્વનિ-તરંગો હોય તો ધ્વનિની પ્રબળતા કંપવિસ્તારના વર્ગ ( $I \propto A^2$ ) ના સમપ્રમાણમાં હોવાથી બંને તરંગો માધ્યમના જે વિસ્તારમાં સંપાત થાય છે, ત્યાં એકમસમયમાં ધ્વનિ  $f_1 - f_2$  વખત મહત્તમ અને  $f_1 - f_2$  વખત શૂન્ય થાય છે.

આમ, **સમાન કંપવિસ્તારવાળા પણ સહેજ જુદી પડતી આવૃત્તિઓવાળાં તરંગોના સંપાતીકરણને કારણે આવર્ત રીતે કંપવિસ્તાર અને પરિણામે ધ્વનિની પ્રબળતા મહત્તમ બનવાની ઘટનાને સ્પંદ કહે છે. એકમસમય દીઠ સ્પંદની સંખ્યા  $f_1 - f_2$  છે.** જેને સ્પંદની આવૃત્તિ પણ કહે છે.

**નોંધ :** ધ્વનિના કિસ્સામાં સ્પંદ સ્પષ્ટ રીતે અનુભવાય તે માટે  $f_1 - f_2$  આશરે 6 થી 7 કરતાં વધારે ન હોવો જોઈએ.

સ્પંદનો અનુભવ કરવા માટે સમાન આવૃત્તિવાળા બે સ્વરકાંટા લો. તેમાંથી એક સ્વરકાંટાનાં પાંખિયાં પર મીણ ચોંટાડો. આમ, કરવાથી તેની આવૃત્તિ થોડી ઘટશે. (જો તેના પાંખિયાને ઘસવામાં આવે તો સ્વરકાંટાની આવૃત્તિ વધે છે.) હવે બંને સ્વરકાંટાને કંપિત કરી પાસ પાસે રાખતા તમને નિયમિત સમયાંતરે ધ્વનિમાં થતી પ્રબળતાના ફેરફારનો અનુભવ થશે. સંગીતકારો તેમનાં જુદાં-જુદાં વાંજિત્રોને tune કરવા માટે સ્પંદની ઘટનાનો ઉપયોગ કરે છે.

#### ઉદાહરણ 18 : સ્વરકાંટો A અને સ્વરકાંટો B ને

એક સાથે કંપિત કરતાં 8 સેકન્ડમાં 20 સ્પંદ ઉત્પન્ન થાય છે. કોઈ એક સ્વરકાંટા પર મીણ લગાડતાં તેઓ 8 સેકન્ડમાં 32 સ્પંદ ઉત્પન્ન કરે છે. જે સ્વરકાંટા પર મીણ લગાવ્યું નથી, તેની આવૃત્તિ 512 Hz હોય, તો બીજા સ્વરકાંટાની આવૃત્તિ શોધો.

**ઉકેલ :** ધારો કે સ્વરકાંટા B પર મીણ લગાવવામાં આવે છે. સ્વરકાંટા Aની આવૃત્તિ

$$f_A = 512 \text{ Hz.}$$

$$\text{સ્વરકાંટાની B મૂળ આવૃત્તિ } f_B = ?$$

મીણ લગાડ્યા પહેલા, એકમસમયમાં ઉત્પન્ન થતાં,

$$\text{સ્પંદોની સંખ્યા} = \frac{20}{8} = 2.5 \text{ Hz.}$$

$\therefore$  આથી, મીણ લગાડ્યા પહેલાં સ્વરકાંટા Bની આવૃત્તિ

$$512 + 2.5 = 514.5 \text{ Hz}$$

$$\text{અથવા } 512 - 2.5 = 509.5 \text{ Hz}$$

હવે, સ્વરકાંટા B પર મીણ લગાવ્યા બાદ એકમ સમયમાં ઉત્પન્ન થતાં સ્પંદોની સંખ્યા

$$= \frac{32}{8} = 4 \text{ Hz.}$$

આથી મીણ લગાવ્યા બાદ સ્વરકાંટા Bની આવૃત્તિ,  
 $512 + 4 = 516 \text{ Hz}$

અથવા  $512 - 4 = 508 \text{ Hz}$

પરંતુ, મીણ લગાવ્યા બાદ સ્વરકાંટા Bની આવૃત્તિ ઘટશે. ઉપર્યુક્ત ગણતરીમાં જોઈ શકાય છે કે મીણ લગાવ્યા પહેલાં સ્વરકાંટા Bની આવૃત્તિ 509.5 Hz અને ત્યાર બાદ તે 508 Hz થાય છે.

આથી, સ્વરકાંટા Bની મૂળ આવૃત્તિ 509.5 Hz હશે.

### 8.12 ડોપ્લર-અસર (Doppler Effect)

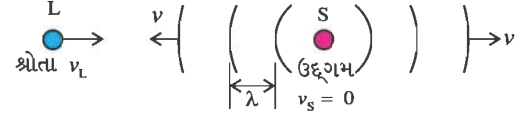
જ્યારે ધ્વનિ-ઉદ્ગમ અથવા શ્રોતા અથવા બંને હવાના માધ્યમની સાપેક્ષે અને એકબીજાની સાપેક્ષે ગતિ કરે ત્યારે શ્રોતા દ્વારા અનુભવાતી ધ્વનિની આવૃત્તિ, ઉદ્ગમ દ્વારા ઉત્સર્જાતી ધ્વનિની આવૃત્તિ કરતાં જુદી સંભળાય છે. આ ઘટનાને **ડોપ્લર અસર** કહે છે. આ અસર કિશ્ચયન જહોન ડોપ્લર (1803–1853) નામના ઓસ્ટ્રિયન વિજ્ઞાનીએ શોધી હતી.

આપણી તરફ ગતિ કરતી ટ્રેનની વ્હીસલની આવૃત્તિ મૂળ આવૃત્તિ કરતાં વધુ અનુભવાતાં વ્હીસલનો ધ્વનિ વધુ તીક્ષ્ણ લાગે છે. ટ્રેન બરાબર આપણી પાસેથી પસાર થાય ત્યારે અનુભવાતી આવૃત્તિ એ મૂળ ઉત્સર્જાતી આવૃત્તિ જેટલી અનુભવાય છે અને ટ્રેન આપણાથી દૂર જાય ત્યારે અનુભવાતી આવૃત્તિ એ મૂળભૂત આવૃત્તિ કરતાં ઓછી હોઈ અવાજ ઓછો તીક્ષ્ણ લાગે છે.

ડોપ્લર અસર સમજવા માટે આપણે આકૃતિ 8.17 માં દર્શાવ્યા અનુસાર સુરેખ પથ પર, સ્થિર હવા (માધ્યમ)ની સાપેક્ષે શ્રોતાનો વેગ  $v_L$  અને ધ્વનિ ઉદ્ગમનો વેગ  $v_s$  લઈશું. તેમજ શ્રોતાથી ઉદ્ગમ તરફ જતી દિશામાંના વેગોને ધન ગણીશું અને તેનાથી વિરુદ્ધ દિશામાંના વેગોને ઋણ ગણીશું. ધ્વનિની ઝડપ  $v$  હંમેશાં ધન ગણીશું. આવી પ્રણાલિકા સ્વીકારવાથી એક વ્યાપક પરિણામ મેળવી શકાય છે અને બીજા કિસ્સાઓ તેના ખાસ કિસ્સા તરીકે ચર્ચી શકાય છે.

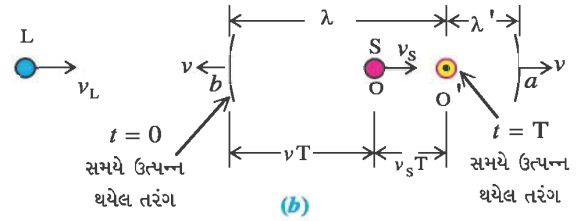
**ગતિમાન શ્રોતા :** ધારો કે શ્રોતા L એ  $v_L$  વેગથી સ્થિર ધ્વનિ ઉદ્ગમ S તરફ ગતિ કરે છે. (જુઓ આકૃતિ 8.17) ધ્વનિ-ઉદ્ગમમાંથી ઉત્સર્જાતાં તરંગોની આવૃત્તિ  $f_s$

છે. આથી તેમની તરંગલંબાઈ  $\lambda = \frac{v}{f_s}$  થશે. જ્યાં  $v$  એ ધ્વનિ-તરંગનો વેગ છે.



(a)

શ્રોતા ગતિમાં અને ધ્વનિ-ઉદ્ગમ સ્થિર



(b)

શ્રોતા અને ધ્વનિ-ઉદ્ગમ બંને ગતિમાં

ડોપ્લર અસર

આકૃતિ 8.17

આ તરંગો શ્રોતા તરફ ગતિ કરતાં હોવાથી, શ્રોતાની સાપેક્ષે ધ્વનિ-તરંગોનો વેગ  $v + v_L$  થશે. આથી, શ્રોતા વડે અનુભવાતી આવૃત્તિ

$$f_L = \frac{v + v_L}{\lambda} \quad (8.12.1)$$

**ગતિમાન ઉદ્ગમ અને ગતિમાન શ્રોતા :** હવે, ધારો કે ધ્વનિ ઉદ્ગમ એ  $v_s$  જેટલા વેગથી L થી S તરફથી દિશામાં ગતિ કરે છે. (જુઓ આકૃતિ 8.17 b).

$t = 0$  સમયે ધ્વનિ-ઉદ્ગમ (S) એ O સ્થાન પર અને

$t = T$  સમયે તે O' સ્થાન પર છે, જ્યાં  $T = \frac{1}{f_s}$  એ

ઉદ્ભવતાં તરંગનો આવર્તકાળ છે.

આ T સમયમાં ધ્વનિ ઉદ્ગમે કાપેલું અંતર,  $OO' = v_s T$  થશે અને ધ્વનિ ઉદ્ગમે  $t = 0$  સમયે ઉત્પન્ન કરેલું તરંગ (શૂંગ) એ T સમયમાં  $vT$  અંતર કાપશે. આકૃતિ પરથી,  $Oa = Ob = vT$ .

હવે,  $t = T$  સમયે ઉદ્ગમ O' પાસે હશે ત્યારે તે બીજું ક્રમિક ધ્વનિ તરંગ (શૂંગ) ઉત્પન્ન કરે છે અને શ્રોતા તરફ ગતિ કરતું તરંગ O'b વચ્ચે અને શ્રોતાથી દૂર જતું તરંગ O'a વિસ્તારમાં હશે.

શ્રોતા તરફ જતાં તરંગની તરંગલંબાઈ,

$\lambda = O'b$  વિસ્તારમાં બે ક્રમિક તરંગ (શૃંગ) વચ્ચેનું અંતર

$$= v_s T + vT$$

$$\therefore \lambda = \frac{v_s + v}{f_s} \quad (\because T = \frac{1}{f_s}) \quad (8.12.3)$$

સમીકરણ (8.12.1) માંથી  $\lambda$  નું મૂલ્ય મૂકતાં,

$$f_L = \frac{v + v_L}{v + v_s} \cdot f_s \quad (8.12.3)$$

$$\text{અથવા } \frac{f_L}{v + v_L} = \frac{f_s}{v + v_s} \quad (8.12.4)$$

આકૃતિ (8.17) પરથી સ્પષ્ટ છે કે ધ્વનિ-ઉદ્ગમની ગતિને લીધે ઉદ્ગમના આગળના વિસ્તાર ( $O'a$ ) માં તરંગો દબાય છે અને તરંગલંબાઈ ઘટે છે, જ્યારે પાછળના વિસ્તારમાં ( $O'b$ ) તરંગ ફેલાય છે અને તેની તરંગલંબાઈ વધે છે. અહીં, તરંગ એક જ માધ્યમ (હવા)માં પ્રસરતું હોવા છતાં તેની તરંગલંબાઈ બદલાય છે ? કેમ આમ થયું ? આ માટે તરંગ અને ધ્વનિ-ઉદ્ગમનું સાપેક્ષ સ્થાનાંતર જવાબદાર છે.

**કેટલાક ખાસ કિસ્સાઓ :**

(i) શ્રોતા સ્થિર હોય અને ધ્વનિ-ઉદ્ગમ શ્રોતા તરફ ગતિ કરતું હોય, તો આપણે ઉપર આપેલી વેગોની સંજ્ઞાની પ્રણાલિકા અનુસાર સમીકરણ (8.12.3)માં  $v_L = 0$  અને  $v_s = -v_s$  લેતાં,

$$\text{શ્રોતાને સંભળાતી આવૃત્તિ } f_L = \frac{v}{v - v_s} f_s$$

આ દર્શાવે છે કે શ્રોતાને સંભળાતી આવૃત્તિ એ મૂળ આવૃત્તિ કરતાં ઊંચી આવૃત્તિ સંભળાશે. ( $f_L > f_s$ )

(ii) શ્રોતા સ્થિર હોય અને ધ્વનિ-ઉદ્ગમ શ્રોતાથી દૂર થાય તે કિસ્સામાં  $v_L = 0$  અને  $v_s = +v_s$  થશે.

$$\text{શ્રોતાને સંભળાતી આવૃત્તિ } f_L = \frac{v}{v + v_s} f_s$$

આ દર્શાવે છે કે  $f_L < f_s$  એટલે કે શ્રોતાને મૂળ આવૃત્તિ કરતાં નીચી આવૃત્તિ સંભળાશે.

(iii) શ્રોતા અને ધ્વનિ-ઉદ્ગમ બંને એકબીજાં તરફ ગતિ કરતાં હોય, તો  $v_L = +v_L$  અને  $v_s = -v_s$  થશે. આથી શ્રોતાને સંભળાતી આવૃત્તિ,

$$f_L = \frac{v + v_L}{v - v_s} f_s$$

આ કિસ્સામાં પણ  $f_L > f_s$  થશે.

(iv) શ્રોતા અને ધ્વનિ-ઉદ્ગમ એકબીજાંથી દૂર જતાં હોય તે કિસ્સામાં  $v_L = -v_L$  અને  $v_s = +v_s$  લેવા પડે.

$$\therefore f_L = \frac{v - v_L}{v + v_s} f_s$$

આ કિસ્સામાં  $f_L < f_s$  થશે.

આ ગણતરીમાં આપણે માધ્યમ (હવા)ને સ્થિર ધારેલ છે. જો પવન ધ્વનિની ગતિની દિશામાં જ (ઉદ્ગમથી શ્રોતા તરફ)  $v_w$  જેટલા વેગથી ગતિ કરતો હોય, તો સમીકરણ 8.12.3માં ધ્વનિ-તરંગોનો વેગ  $v$ ને બદલે  $v + v_w$  અને જો પવન ધ્વનિ-તરંગોની વિરુદ્ધ દિશામાં (શ્રોતાથી ઉદ્ગમ તરફ) ગતિ કરતો હોય તો ધ્વનિ-તરંગોનો વેગ  $v - v_w$  લેવો.

આવા બધા કિસ્સાઓમાં આપણે શ્રોતા અને ઉદ્ગમનો વેગ ધ્વનિના વેગ કરતાં ઓછો ધાર્યો છે.

**ઉદાહરણ 19 :** એક પોલીસકારની સાઈરનમાંથી ઉદ્ભવતાં ધ્વનિની આવૃત્તિ 300 Hz છે. ધ્વનિની હવામાં ઝડપ 340 m/s છે. (a) પોલીસકાર સ્થિર હોય, ત્યારે સાયરનમાંથી ઉદ્ભવતા તરંગની તરંગલંબાઈ શોધો. (b) જો પોલીસકાર 108 km/hની ઝડપે ગતિ કરતી હોય તો કારની આગળના વિસ્તારમાં અને કારની પાછળના વિસ્તારમાં ધ્વનિ-તરંગોની તરંગલંબાઈ શોધો.

**ઉકેલ :** (a) પોલીસકાર સ્થિર હોય ત્યારે,

$$f_s = 300 \text{ Hz}, v = 340 \text{ m/s}.$$

સાયરનમાંથી ઉદ્ભવતાં તરંગની તરંગલંબાઈ

$$\lambda = \frac{v}{f_s} = \frac{340}{300} = 1.13 \text{ m}.$$

(b) પોલીસકારની ઝડપ  $v_s = 108 \text{ km/h} = 30 \text{ m/s}$ .

$$\text{હવે } f_L = \frac{v + v_L}{v + v_s} f_s$$

ગતિમાન કારની આગળના વિસ્તારમાં શ્રોતા ઊભો હોય, તો  $v_L = 0$  થશે અને  $v_s = -v_s$

$$\therefore f_{\text{front}} = \frac{v}{v - v_s} f_s$$



$$\therefore \frac{v}{\lambda_{\text{front}}} = \frac{v}{v - v_s} f_s$$

$$\therefore \lambda_{\text{front}} = \frac{v - v_s}{f_s} = \frac{340 - 30}{300} = 1.033 \text{ m}$$

હવે, ગતિમાન પોલીસકારની પાછળના વિસ્તાર માટે

$$v_L = 0 \text{ અને } v_s = +v_s.$$

$$f_{\text{behind}} = \frac{v}{v + v_s} f_s$$

$$\therefore \lambda_{\text{behind}} = \frac{v + v_s}{f_s} = \frac{340 + 30}{300} = 1.233 \text{ m}.$$

**ઉદાહરણ 20 :** દરિયામાં સ્થિર રહેલી સબમરીનમાં ગોકલેલ SONAR તંત્રમાંથી ઉદ્ભવતાં ધ્વનિ-તરંગોની આવૃત્તિ 40 kHz છે. દુશ્મનની સબમરીન એ SONAR તંત્ર તરફ 360 kmh<sup>-1</sup>ની ઝડપે ગતિ કરી રહી છે. દુશ્મનની સબમરીન દ્વારા પરાવર્તિત થતાં ધ્વનિની આવૃત્તિ કેટલી હશે ? પાછીમાં ધ્વનિ-તરંગોની ઝડપ 1450 m s<sup>-1</sup> છે.

**ઉકેલ :**  $f_s = 40 \text{ kHz}$ ,  $v = 1450 \text{ m/s}$ .

અહીં, SONAR માંથી ઉદ્ભવતાં ધ્વનિ-તરંગની આવૃત્તિ બે તબક્કામાં બદલાય છે.

(i) SONAR થી દુશ્મનની ગતિમાન સબમરીન તરફ જતાં આવૃત્તિ બદલાશે. આ કિસ્સામાં SONAR એ ધ્વનિ

ઉદ્ગમ (S) તરીકે અને સબમરીન એ શ્રોતા (L) તરીકે વર્તશે.

આથી,  $v_s = 0$  અને

$$v_L = 360 \text{ km/h} = \frac{360 \times 1000}{3600} = 100 \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned} \text{હવે, } f_{L_1} &= \frac{v + v_L}{v + v_s} \times f_s \\ &= \frac{1450 + 100}{1450 + 0} \times 40 \times 10^3 \\ &= 42.758 \text{ kHz} \end{aligned}$$

(ii) બીજા તબક્કામાં દુશ્મન સબમરીન એ 42.758 kHzની આવૃત્તિને પરાવર્તિત કરે છે. આ કિસ્સામાં સબમરીન એ ધ્વનિ-ઉદ્ગમ (S) તરીકે અને SONAR એ શ્રોતા (L) તરીકે વર્તશે.

$$f_s = 42.758 \text{ kHz}, v_L = 0, v_s = -100 \text{ m/s}$$

પરાવર્તિત તરંગની આવૃત્તિ,

$$\begin{aligned} f_{L_2} &= \frac{v + v_L}{v + v_s} \times f_s \\ &= \frac{1450 + 0}{1450 - 100} \times 42.758 \times 10^3 \\ &= 45.92 \text{ kHz} \end{aligned}$$

આમ, સબમરીનથી પરાવર્તિત થઈ SONAR તરફ જતાં ધ્વનિની આવૃત્તિ 45.92 kHz હશે.

### સારાંશ

- 1. તરંગ :** માધ્યમ (કે અવકાશ)માં વિક્ષોબની ગતિને તરંગ-સ્પંદ અથવા સામાન્ય રીતે તરંગ કહે છે.
- 2. તરંગનો કંપવિસ્તાર :** તરંગમાં 'કણો'ના દોલનના કંપવિસ્તારને તરંગનો કંપવિસ્તાર (A) કહે છે.
- 3. તરંગલંબાઈ અને આવૃત્તિ :** તરંગ-પ્રસરણમાં જે બે ક્રમિક કણોના દોલનની કળાનો તફાવત  $2\pi$  rad હોય, તેમની વચ્ચેના અંતરને તરંગની તરંગલંબાઈ ( $\lambda$ ) કહે છે.  
તરંગ-પ્રસરણમાં માધ્યમના કણોના દોલનની આવૃત્તિને તરંગની આવૃત્તિ ( $f$ ) કહે છે.

$$v = f \lambda = \frac{\omega}{k}$$

જ્યાં,  $v$  એ માધ્યમમાં તરંગની ઝડપ છે.

- 4. યાંત્રિક-તરંગો :** જે તરંગોને પ્રસરવા માટે સ્થિતિસ્થાપક માધ્યમની જરૂર પડે છે, તેને યાંત્રિક-તરંગો કહે છે.
- 5. લંબગત અને સંગત-તરંગો :** તરંગમાં માધ્યમના કણોના સ્થાનાંતર (દોલન)ની દિશા તરંગ પ્રસરણની દિશાને લંબ હોય તેવા તરંગને લંબગત તરંગ કહે છે.

જે તરંગમાં માધ્યમના કણોનું સ્થાનાંતર તરંગ-પ્રસરણની દિશા પર જ હોય, તેવા તરંગને સંગત-તરંગ કહે છે.

- 6. તરંગ-સમીકરણ :** એક પારિમાણિક તરંગ-પ્રસરણની ઘટનામાં ભાગ લેતાં દરેક કણનું કોઈ પણ સમયે સ્થાનાંતર દર્શાવતા સમીકરણને તરંગ-સમીકરણ કહે છે. તરંગ-સમીકરણનાં જુદાં-જુદાં સ્વરૂપો નીચે મુજબ છે :

$$(i) y = A \sin (\omega t - kx), \quad (ii) y = A \sin \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right),$$

$$(iii) y = A \sin 2\pi f \left( t - \frac{x}{v} \right), \quad (iv) y = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x).$$

ઉપર્યુક્ત સમીકરણો  $x$ નાં વધતાં મૂલ્યોની દિશામાં ગતિ કરતાં તરંગ માટે છે. જો તરંગ  $x$ નાં ઘટતાં મૂલ્યોની દિશામાં પ્રસરતું હોય, તો સમીકરણમાં ‘-’ ને બદલે ‘+’ મૂકવું.

- 7.** યાંત્રિક-તરંગોના પ્રસરણ માટે માધ્યમની સ્થિતિસ્થાપકતા અને જડત્વ જરૂરી છે.

- 8.** તણાવવાળી દોરી જેવા માધ્યમમાં લંબગત તરંગનો વેગ  $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ . જ્યાં,  $T$  = દોરીમાં તણાવ,  
 $\mu$  = એકમલંબાઈ દીઠ દોરીનું દળ =  $\frac{m}{L}$

- 9.** સ્થિતિસ્થાપક માધ્યમમાં ધ્વનિ-તરંગનો વેગ  $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ . જ્યાં,  $E$  = માધ્યમનો સ્થિતિસ્થાપક-અંક,  
 $\rho$  = માધ્યમની ઘનતા

વાયુ જેવા તરલ માધ્યમમાં સંગત-તરંગનો વેગ  $v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$ . જ્યાં,  $B$  = બલક મોડ્યુલસ  
 $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = 1.41$  (હવા માટે)

સળિયા જેવા રેખીય માધ્યમમાં સંગત-તરંગનો વેગ :  $v = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho}}$

જ્યાં,  $\gamma$  = યંગ મોડ્યુલસ,  $\rho$  = માધ્યમની ઘનતા, વાયુમાં ધ્વનિનો વેગ (અચળ દબાણે અને આદ્રતાએ) તેના નિરપેક્ષ તાપમાનના વર્ગમૂળના સમપ્રમાણમાં હોય છે.  $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$   
 $\therefore v \propto \sqrt{T}$ . ધ્વનિનો વેગ દબાણના ફેરફાર સાથે બદલાતો નથી.

- 10. સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત :** જ્યારે માધ્યમના કોઈ કણ પાસે બે કે બે કરતાં વધારે તરંગો સંપાત થાય છે, ત્યારે તે કણનું સ્થાનાંતર તે દરેક તરંગ વડે ઉદ્ભવતા સ્વતંત્ર સ્થાનાંતરોના સદિશ સરવાળા જેટલું હોય છે.

- 11. સ્થિત-તરંગો :** સમાન કંપવિસ્તારવાળાં અને સમાન આવૃત્તિઓવાળાં પણ પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતા અને સંપાતીકરણ અનુભવતાં તરંગોની સમાસ અસર રૂપે મળતાં તરંગો પ્રગામીપણાના ગુણધર્મ ગુમાવી બેસે છે. આવાં તરંગોને સ્થિત-તરંગો કહે છે.

સ્થિત-તરંગનું સમીકરણ  $y = -2A \sin kx \cos \omega t$ , આ સ્થિત-તરંગનો કંપવિસ્તાર  $2A \sin kx$

સ્થિત-તરંગમાં નિસ્પંદ-બિંદુઓનાં સ્થાન  $x_n = \frac{n\lambda}{2}$ .

જ્યાં,  $n = 1, 2, 3, \dots$  આ બિંદુઓ પાસે કંપવિસ્તાર શૂન્ય હોય છે.

સ્થિત-તરંગમાં પ્રસંદ-બિંદુઓનાં સ્થાન  $x_n = (2n - 1) \frac{\lambda}{4}$

જ્યાં,  $n = 1, 2, 3, \dots$  આ બિંદુઓ પાસે કંપવિસ્તાર  $2A$  હોય છે.

- 12.** બંને છેડે તણાવ સાથે બાંધેલી દોરીમાં ઉદ્ભવતા નોર્મલ મોડ્સ ઓફ વાઇબ્રેશનને અનુરૂપ શક્ય આવૃત્તિઓ,

$$f_n = \frac{nv}{2L} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \text{જ્યાં, } n = 1, 2, 3, \dots$$

- 13.** ક્લોઝ્ડ પાઇપમાં સ્થિત તરંગભાત મેળવવા માટે શક્ય તરંગલંબાઈઓ,

$$\lambda_n = \frac{4L}{(2n - 1)} \quad \text{અને પાઇપની લંબાઈ શક્ય આવૃત્તિઓ } f_n = (2n - 1) \frac{v}{4L} = (2n - 1)f_1$$

જ્યાં,  $n = 1, 2, 3, \dots$  અને  $L =$  પાઇપની લંબાઈ

ક્લોઝ્ડ પાઇપમાં  $f_1, 3f_1, 5f_1, \dots$  જેવી હાર્મોનિક જ શક્ય છે.

- 14.** ઓપન પાઇપમાં સ્થિત તરંગભાત મેળવવા માટે શક્ય તરંગલંબાઈઓ,

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad \text{જ્યાં, } n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{અને } L = \text{પાઇપની લંબાઈ}$$

$$\text{શક્ય આવૃત્તિઓ } f_n = \frac{nv}{2L} = nf_1$$

ઓપન પાઇપમાં  $f_1, 2f_1, 3f_1, \dots$  જેવી બધી જ હાર્મોનિક શક્ય છે.

- 15. સ્પંદ :** સમાન કંપવિસ્તારવાળા પણ સહેજ જુદી પડતી આવૃત્તિઓવાળાં તરંગોના સંપત્તીકરણને કારણે આવર્ત રીતે કંપવિસ્તાર અને પરિણામે ધ્વનિની પ્રબળતા મહત્તમ બનવાની ઘટનાને સ્પંદ કહે છે.

$$\text{એક સેકન્ડમાં ઉત્પન્ન થતાં સ્પંદોની સંખ્યા} = f_1 - f_2$$

- 16. ડોપ્લર-અસર :** જ્યારે ધ્વનિ-ઉદ્ગમ કે શ્રોતા કે બંને હવાના માધ્યમની સાપેક્ષે અને એકબીજાની સાપેક્ષે ગતિ કરે છે, ત્યારે શ્રોતા દ્વારા અનુભવાતી ધ્વનિની આવૃત્તિ, ઉદ્ગમ દ્વારા ઉત્સર્જીત ધ્વનિની આવૃત્તિ કરતાં જુદી હોય છે. આ ઘટનાને ડોપ્લર-અસર કહે છે.

$$\text{શ્રોતાને સંભળાતી આવૃત્તિ, } f_L = \frac{v \pm v_L}{v \pm v_S} f_s$$

જ્યાં,  $v =$  ધ્વનિનો વેગ

$v_L =$  શ્રોતાનો વેગ

$v_S =$  ઉદ્ગમનો વેગ

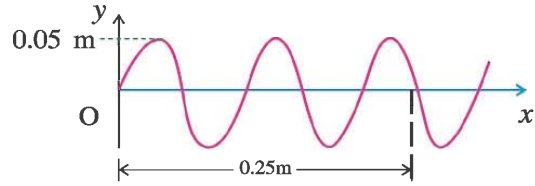
$f_s =$  ઉદ્ગમ દ્વારા ઉત્સર્જીત ધ્વનિની આવૃત્તિ

## સ્વાધ્યાય

નીચેનાં વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

- યાંત્રિક તરંગો ..... નું વહન કરે છે.  
 (A) ઊર્જા (B) દ્રવ્ય  
 (C) ઊર્જા અને દ્રવ્ય બંને (D) એક પણ નહિ
- એક સ્વરકાંટો (tunign fork) એ એક સેકન્ડમાં 256 વાર ધ્રુજારી અનુભવે છે. જો માધ્યમમાં ધ્વનિની ઝડપ 330 m/s હોય, તો સ્વરકાંટાની ઉત્પન્ન થતાં તરંગની તરંગલંબાઈ ..... હશે.  
 (A) 0.56 cm (B) 0.89 m (C) 1.11 m (D) 1.29 m
- જ્યારે 300 Hz આવૃત્તિવાળો ધ્વનિ માધ્યમમાંથી પસાર થાય છે, ત્યારે માધ્યમના કણનું મહત્તમ સ્થાનાંતર 0.1 cm છે. આ કણનો મહત્તમ વેગ ..... હશે.  
 (A)  $60\pi$  cm/s (B)  $30\pi$  cm/s (C) 30 cm/s (D) 60 cm/s
- 500 Hz આવૃત્તિવાળા એક તરંગની ઝડપ  $360 \text{ m s}^{-1}$  છે. તેના પર  $60^\circ$  જેટલો કળા-તફાવત ધરાવતા બે કણો વચ્ચેનું લઘુત્તમ અંતર ..... છે.  
 (A) 0.23 m (B) 0.12 m (C) 8.33 m (D) 60 m

- આકૃતિમાં દર્શાવેલ તરંગની માધ્યમમાં ઝડપ 330 m/s છે. આ તરંગ ધન  $x$ -દિશામાં ગતિ કરતું હોય તો તેનું તરંગ સમીકરણ .....

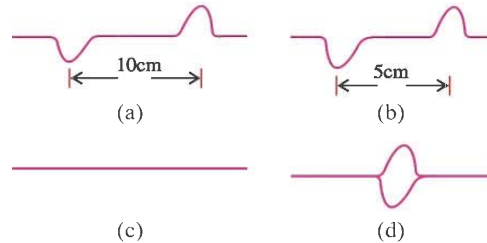


આકૃતિ 8.18

- (A)  $y = 0.05 \sin 2\pi (4000 t - 12.5x)$  m  
 (B)  $y = 0.05 \sin 2\pi (4000 t - 122.5x)$  m  
 (C)  $y = 0.05 \sin 2\pi (3300 t - 10x)$  m  
 (D)  $y = 0.05 \sin 2\pi (3300 t - 10t)$  m
- $y = A \sin^2 (kx - \omega t)$  તરંગ-સમીકરણ ધરાવતા તરંગનો કંપવિસ્તાર ..... અને આવૃત્તિ ..... હશે.

- (A)  $A, \omega/2\pi$  (B)  $\frac{A}{2}, \frac{\omega}{\pi}$  (C)  $2A, \frac{\omega}{4\pi}$  (D)  $\sqrt{A}, \frac{\omega}{2\pi}$

- આકૃતિમાં દર્શાવ્યા અનુસાર બે સમાન તરંગ-સ્પંદો, દોરી પર પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં  $2.5 \text{ cm/s}$ ની ઝડપથી ગતિ કરે છે. પ્રારંભમાં આ બે તરંગ-સ્પંદ વચ્ચેનું અંતર 10 cm છે. બે સેકન્ડ બાદ દોરીની સ્થિતિ કેવી હશે ?



આકૃતિ 8.19

- $y = 10 \sin(100 t) \cos(0.01x)$  થી રજૂ થતાં સ્થિત તરંગનાં ઘટક-તરંગોની ઝડપ ..... છે. અહીં,  $x$  એ  $y$ માં અને  $t$  એ  $s$ માં છે.  
 (A)  $1 \text{ m s}^{-1}$  (B)  $10^2 \text{ m s}^{-1}$  (C)  $10^3 \text{ m s}^{-1}$  (D)  $10^4 \text{ m s}^{-1}$



9. 7 m લાંબી દોરીનું દળ 0.035 kg છે. જો દોરી પરનો તણાવ 60.5 N હોય, તો દોરી પર તરંગની ઝડપ ..... .  
 (A) 77 m s<sup>-1</sup> (B) 102 m s<sup>-1</sup> (C) 110 m s<sup>-1</sup> (D) 165 m s<sup>-1</sup>
10. બે તરંગોના સંપાતીકરણથી ઉદ્ભવતા સ્પંદમાં મહત્તમ તીવ્રતા એ આપાત થતા મૂળ તરંગોની તીવ્રતાથી  $x$  ગણી હોય, તો  $x = \dots\dots\dots$  .  
 (A) 1 (B)  $\sqrt{2}$  (C) 2 (D) 4
11. 2.00 m અને 2.02 m તરંગલંબાઈ ધરાવતા બે તરંગો એકબીજા પર સંપાત થઈને 1 s માં 2 સ્પંદ ઉત્પન્ન કરે છે. જો બંને તરંગોની ઝડપ સમાન હોય, તો સમાન ઝડપ ..... .  
 (A) 400 m/s (B) 402 m/s (C) 404 m/s (D) 406 m/s
12. એક માધ્યમમાં 1200 m/s જેટલા ઘટક-તરંગોની ઝડપ ધરાવતા સ્થિત-તરંગોમાં ક્રમિક પ્રસ્પંદ-બિંદુ અને નિસ્પંદ-બિંદુ વચ્ચેનું અંતર 1 m હોય, તો સ્થિત તરંગની આવૃત્તિ ..... .  
 (A) 300 Hz (B) 400 Hz (C) 600 Hz (D) 1200 Hz
13. ધ્વનિ ઉદ્ગમ અને શ્રોતા બંને એકબીજાની સામે 50 m/s ની સમાન ઝડપે સુરેખ પથ પર ગતિ કરી રહ્યા છે. જો શ્રોતાને સંભળાતી આવૃત્તિ 440 Hz હોય, તો ધ્વનિની મૂળ આવૃત્તિ કેટલી હશે ? (હવામાં ધ્વનિની ઝડપ 340 m/s છે.)  
 (A) 327 s<sup>-1</sup> (B) 367 s<sup>-1</sup> (C) 390 s<sup>-1</sup> (D) 591 s<sup>-1</sup>
14. એક કલોઝ્ડ પાઈપ માટે હવાના સ્તંભની મૂળભૂત આવૃત્તિ 512 Hz છે. જો આ પાઈપ બંને છેડેથી ખુલ્લી હોય, તો મૂળભૂત આવૃત્તિ ..... Hz થાય.  
 (A) 1024 (B) 512 (C) 256 (D) 128
15. કલોઝ્ડ પાઈપમાં હવાના સ્તંભની લંબાઈ ..... cm હોય, તો તેનો હવાનો સ્તંભ 264 Hz આવૃત્તિવાળા સ્વરકાંટા સાથે પ્રથમ અનુનાદમાં હોય, ધ્વનિની હવામાં ઝડપ 330 m/s.  
 (A) 31.25 (B) 62.50 (C) 93.75 (D) 125
16. એક આદર્શવાયુના તાપમાનમાં 600 K જેટલો વધારો કરતાં, તેમાં ધ્વનિ-તરંગની ઝડપ એ પ્રારંભિક ઝડપ કરતાં  $\sqrt{3}$  ગણી થાય છે. આ વાયુનું પ્રારંભિક તાપમાન ..... .  
 (A) -73 °C (B) 27 °C (C) 127 °C (D) 327 °C
17. બે તરંગો  $y_1 = A \sin (2000\pi)t$  (m) અને  $y_2 = A \sin (2008\pi)t$  (m)ના સંપાતીકરણથી માધ્યમમાં સ્પંદ ઉત્પન્ન થાય છે. એક સેકન્ડમાં અનુભવતાં સ્પંદોની સંખ્યા ..... હશે.  
 (A) 0 (B) 1 (C) 4 (D) 8
18. એક સ્થિર શ્રોતા તરફ, ધ્વનિ ઉદ્ગમ એ ધ્વનિની ઝડપના 1/10 ગણી ઝડપે ગતિ કરી રહ્યું છે. શ્રોતાને સંભળાતી આવૃત્તિ અને સાચી આવૃત્તિનો ગુણોત્તર ..... .  
 (A) 10/9 (B) 11/10 (C) (11/10)<sup>2</sup> (D) (9/10)<sup>2</sup>
19. એક લંબગત તરંગનું સમીકરણ  $y = A \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$  છે. તો કઈ તરંગલંબાઈ માટે કણનો મહત્તમ વેગ એ તરંગ-વેગથી બમણો થાય ?  
 (A)  $\lambda = \frac{\pi A}{4}$  (B)  $\lambda = \frac{\pi A}{2}$  (C)  $\lambda = \pi A$  (D)  $\lambda = 2\pi A$

20. કયા તાપમાને હવામાં ધ્વનિની ઝડપ એ  $0^\circ\text{C}$  તાપમાને ઝડપ હોય તેના કરતાં બમણી થશે ?

- (A) 273 K (B) 546 K (C) 1092 K (D) 0 K

**જવાબો**

1. (A) 2. (D) 3. (A) 4. (B) 5. (C) 6. (B)  
 7. (C) 8. (D) 9. (C) 10. (D) 11. (C) 12. (A)  
 13. (A) 14. (A) 15. (A) 16. (B) 17. (C) 18. (A)  
 19. (C) 20. (C)

**નીચે આપેલ પ્રશ્નોના જવાબ ટૂંકમાં આપો :**

- તરંગ તીવ્રતાની વ્યાખ્યા લખો અને તેનો SI એકમ જણાવો.
- તરંગની કોણીય તરંગસંખ્યા (તરંગસંદિશ) એટલે શું ?
- એક પ્રગામી તરંગની તરંગલંબાઈ  $\lambda$  અને આવૃત્તિ  $f$  હોય, તો  $t$  સેકન્ડમાં તરંગે કાપેલું અંતર કેટલું થશે ?
- યાંત્રિક તરંગના પ્રસરણ માટે માધ્યમના કયા ગુણધર્મો જરૂરી છે ?
- દબાણના તરંગો કોને કહેવાય ?
- માધ્યમના તાપમાન સાથે તેમાં પ્રસરતા તરંગની ઝડપ કેવી રીતે બદલાય છે ?
- જો તારમાં રહેલું તણાવબળ ચાર ગણું કરવામાં આવે, તો તારમાં તરંગની ઝડપમાં શો ફેરફાર થશે ?
- માધ્યમમાં દબાણમાં થતો ફેરફાર તેમાંથી પસાર થતાં તરંગની ઝડપ પર શું અસર કરશે ?
- એક તરંગનું તરંગ સમીકરણ  $y = 5 \sin (0.01x - 2t)$  છે. જ્યાં  $x$  અને  $y$  એ cmમાં છે. આ તરંગની ઝડપ કેટલી હશે ?
- દોરી પર પ્રસરતું તરંગ જ્યારે જડિત આધારથી પરાવર્તિત થાય, તો તેની કળામાં કેટલો ફેરફાર થાય ?
- સ્થિત-તરંગમાં નિસ્પંદ-બિંદુ અને પ્રસ્પંદ-બિંદુનો કંપવિસ્તાર કેટલો હશે ?
- સ્થિત-તરંગમાં ક્રમિક નિસ્પંદ-બિંદુ અને પ્રસ્પંદ-બિંદુ વચ્ચેનું અંતર 5 cm હોય, તો બે ક્રમિક પ્રસ્પંદ-બિંદુ વચ્ચેનું અંતર કેટલું હશે ?
- ક્લોઝ્ડ પાઈપની મૂળભૂત આવૃત્તિ 300 Hz છે, તો તેના દ્વિતીય ઓવરટોનની આવૃત્તિ કેટલી હશે ?
- ધ્વનિઉદ્ગમની આવૃત્તિ 440 Hz છે. જો ધ્વનિઉદ્ગમ અને શ્રોતાનો સાપેક્ષ વેગ શૂન્ય હોય તો શ્રોતાને કઈ આવૃત્તિ સંભળાશે ?
- સ્પંદ એટલે શું ?

**નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :**

- તરંગોનું વર્ગીકરણ સમજાવો. પ્રત્યેક તરંગનાં ઉદાહરણ આપો.
- તરંગની તરંગલંબાઈ, તરંગસંખ્યા અને આવૃત્તિ સમજાવો.
- પારિમાણિક વિશ્લેષણની મદદથી તણાવવાળી દોરી પર પ્રસરતા તરંગના વેગનું સૂત્ર મેળવો.
- માધ્યમમાં ધ્વનિ-તરંગોનું પ્રસરણ કેવી રીતે થાય છે તે સમજાવો.
- હવામાં ધ્વનિની ઝડપ માટે ન્યૂટનનું સૂત્ર લખો. ન્યૂટનના સૂત્રમાં લાખ્લાસે કરેલો સુધારો સમજાવો.

6.  $x$ ના વધતા મૂલ્યની દિશામાં ગતિ કરતા એક પારિમાણિક પ્રગામી તરંગનું તરંગ-સમીકરણ  $y = A \sin (\omega t - kx)$  મેળવો.
7. તરંગોના સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત લખો અને સમજાવો.
8. સ્થિત-તરંગો એટલે શું ? બે છેડેથી જડિત કરેલ દોરીમાં ઉદ્ભવતા સ્થિત-તરંગનું સમીકરણ મેળવો.
9. દર્શાવો કે કલોઝ્ડ પાઈપમાં રચાતા સ્થિત-તરંગમાં ફક્ત મૂળભૂત આવૃત્તિના એકી પૂર્ણાંક હાર્મોનિક જ શક્ય છે.
10. ડોપ્લર-અસર એટલે શું ? ધ્વનિઉદ્ગમ સ્થિર હોય અને શ્રોતા ઉદ્ગમ તરફ ગતિ કરતો હોય તે કિસ્સામાં શ્રોતા તરફ જતાં તરંગની તરંગલંબાઈનું સૂત્ર મેળવો.

#### નીચેના દાખલા ગણો :

1. પ્રગામી હાર્મોનિક તરંગના કિસ્સામાં સાબિત કરો કે કોઈ પણ કણના દોલનના તાત્કાલિક વેગના મૂલ્ય અને તરંગ-ઝડપનો ગુણોત્તર તરંગથી રચાતા આકારના આ બિંદુ પાસેના તે સમયના ઢાળના ત્રણ મૂલ્ય જેટલો હોય છે.
2. ધરતીકંપના કારણે પૃથ્વીમાં લંબગત (S) અને સંગત (P) એમ બંને પ્રકારના ધ્વનિના તરંગો ઉદ્ભવે છે. S તરંગની ઝડપ લગભગ 4.0 km/s અને P તરંગની ઝડપ લગભગ 8.0 km/s હોય છે. ધરતીકંપ નોંધાતા સિસ્મોગ્રાફ પર પહેલું P તરંગ એ પહેલાં S તરંગ કરતાં 4 મિનિટ વહેલું નોંધાય છે. તરંગો સુરેખપથ પર પ્રસરે છે, તેવું ધારીને આ સિસ્મોગ્રાફથી કેટલા અંતરે ધરતીકંપનું ઉદ્ગમસ્થાન હશે તેનક્કી કરો. [જવાબ : લગભગ 1920 km.]
3. એક પ્રગામી હાર્મોનિક તરંગનો કંપવિસ્તાર 10 m છે. આ તરંગ-પ્રસરણની ઘટનામાં ઉદ્ગમથી 2 m અંતરે આવેલા કણનું 2 સેકન્ડને અંતે સ્થાનાંતર 5 m છે અને ઉદ્ગમથી 16 m અંતરે આવેલા કણનું 8 સેકન્ડના અંતે સ્થાનાંતર  $5\sqrt{3}$  m છે. આ તરંગની કોણીય આવૃત્તિ અને તરંગસંદિશ શોધો. [જવાબ :  $\omega = \pi/8$  rad/s,  $k = \pi/24$  rad/m]
4. તણાવવાળી દોરી પર  $x$ -દિશામાં ગતિ કરતાં તરંગનું તરંગ સમીકરણ,  
 $y = 3 \sin [(3.14)x - (314)t]$  છે. જ્યાં  $x$  એ cm અને  $t$  એ સેકન્ડમાં છે.  
 (i) દોરી પરના કણની મહત્તમ ઝડપ શોધો.  
 (ii) ઊગમબિંદુથી  $x = 6.0$  cm અંતરે આવેલા દોરી પરના કણનો  $t = 0.11$  સેકન્ડે પ્રવેગ શોધો. [જવાબ : મહત્તમ વેગ = 9.4 m/s,  $a = 0$ ]
5.  $0^\circ\text{C}$  તાપમાને 250 Hz આવૃત્તિવાળો એક ધ્વનિઉદ્ગમ હવામાં 1.32 m તરંગ લંબાઈવાળા તરંગો ઉત્પન્ન કરે છે, તો  $27^\circ\text{C}$  તાપમાને તેની તરંગલંબાઈમાં કેટલો વધારો થયો હશે ? [જવાબ : 0.06 m]
6. હાઈડ્રોજન વાયુના કેટલા તાપમાને તેમાંથી પસાર થતાં ધ્વનિની ઝડપ એ  $1200^\circ\text{C}$  તાપમાને રહેલા ઓક્સિજન વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ જેટલી હશે ? ઓક્સિજનની ઘનતા, હાઈડ્રોજનની ઘનતા કરતાં 16 ગણી છે. [જવાબ :  $-180.9^\circ\text{C}$ ]
7. બે છેડે તણાવ સાથે બાંધેલા એક તારની લંબાઈ 110 cm છે. બે ટેકાઓ  $s_1$  અને  $s_2$  યોગ્ય સ્થાનોએ મૂકીને તારને એવી રીતે કંપિત કરવામાં આવે છે, કે તેના ત્રણ વિભાગોમાં રચાતા સ્થિત-તરંગોની મૂળભૂત આવૃત્તિઓ  $f_1 : f_2 : f_3 = 1 : 2 : 3$  હોય, તો ટેકાઓનાં સ્થાન (કે તારના વિભાગોની લંબાઈઓ) શોધો. [જવાબ :  $L_1 = 60$  cm,  $L_2 = 30$  cm,  $L_3 = 20$  cm]