2 સ્થિત-વિદ્યુતસ્થિતિમાન અને કૅપેસિટન્સ

2.1 પ્રસ્તાવના (Introduction)

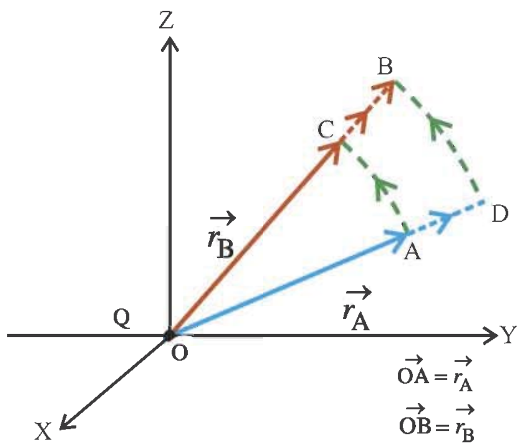
પ્રકરણ 1માં આપણે વિદ્યુતભારના પ્રકાર, વિદ્યુતભારો વચ્ચે લાગતાં બળ, બિંદુવત્ વિદ્યુતભારથી અને જુદાં-જુદાં વિદ્યુતભાર-વિતરણથી ઉદ્ભવતાં વિદ્યુતક્ષેત્ર અને ગૉસના પ્રમેય વિષે ભણી ગયા. વિદ્યુતક્ષેત્રની માહિતી પરથી કોઈ આપેલા **વિદ્યુતભાર q** પર લાગતું **બળ** શોધી શકાય છે. જો આ બળને લીધે વિદ્યુતભાર ગતિ કરી શકે તેમ હોય, તો તે ગતિ કરવા લાગશે અને આવી ગતિમાં કાર્ય થશે. તેથી હવે આપણે વિદ્યુતભાર પર થતા કાર્ય અંગે માહિતી આપતી ભૌતિક રાશિઓ–વિદ્યુત સ્થિતિ–ઊર્જા, વિદ્યુતસ્થિતિમાન–અંગે આ પ્રકરણમાં વિગતવાર અભ્યાસ કરીશું. વળી, વિદ્યુતસ્થિતિમાન અને વિદ્યુતક્ષેત્ર એ બંને રાશિઓ એકબીજા પરથી મેળવી શકાય છે. આપણે તેમની વચ્ચેનો સંબંધ પણ જાણીશું.

વિદ્યુતભાર અને વિદ્યુત-ઊર્જાનો સંગ્રહ કરતી એક સાદી રચના એ કૅપેસિટર છે. આ કૅપેસિટરનું કૅપેસિટન્સ, કૅપેસિટરોનાં શ્રેણી અને સમાંતર પ્રકારનાં જોડાણો, તેમાં સંગ્રહ પામેલી વિદ્યુત-ઊર્જા વગેરેનો અભ્યાસ પણ કરીશું. આવાં કૅપેસિટર વિવિધ ઇલેક્ટ્રિકલ અને ઇલેક્ટ્રોનિક સાધનોમાં વપરાય છે. દા.ત., ઇલેક્ટ્રિક મોટર, કૅમેરાની flashgun, pulsed lasers, રેડિયો, ટી.વી....વગેરે. પ્રકરણના અંતમાં આપણે વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો બહુ મોટો તફાવત મેળવી શકાય તેવી રચના - વાન્ દ્ ગ્રાફ જનરેટર-વિષે જોઈશું.

2.2 વિદ્યુતક્ષેત્રમાં વિદ્યુતભારની ગતિ દરમિયાન થતું કાર્ય (Work Done During the Motion of an Electric Charge in the Electric Field)

આપણે પ્રકરણ-1 માં જોયું કે કોઈ વિદ્યુતભાર qને વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ ધરાવતા બિંદુએ મૂકીએ તો તેના પર $\vec{F} = q\vec{E}$ બળ લાગે છે. જો આ વિદ્યુતભાર ગતિ કરવા માટે મુક્ત હોય તો તે ગતિ કરશે. આવી ગતિમાં થતા કાર્યની ચર્ચા કરવામાં આપણે શરૂઆતમાં એકમ ધન વિદ્યુતભારનો વિચાર કરીશું.

આકૃતિ 2.1માં દર્શાવ્યા મુજબ બિંદુવત્ વિદ્યુતભાર (Q)થી ઉદ્ભવતા વિદ્યુતક્ષેત્રમાં એકમ ધન વિદ્યુતભાર (q = +1 C વિદ્યુતભાર)ને આપણે Aથી B બિંદુએ લઈ જવા માંગીએ છીએ અને આ ગતિ દરમિયાન **વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થતું કાર્ય** શોધવું છે. Aથી B સુધી જવાના અનેક માર્ગો વિચારી શકાય. આકૃતિ 2.1માં નમૂના રૂપે ACB અને ADB માર્ગો દર્શાવ્યા છે.



આકૃતિ 2.1 વિદ્યુતભારની ગતિ દરમિયાન કાર્ય

વ્યાખ્યા મુજબ આપેલા બિંદુએ એકમ ધન વિદ્યુતભાર પર લાગતું બળ તે બિંદુ આગળનું વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ છે અને $E = \frac{kQ(1)}{r^2}$ સૂત્ર મુજબ આ બળ અંતર સાથે સતત બદલાય છે. તેથી વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે એકમ ધન વિદ્યુતભાર પર થતું કાર્ય, સૂક્ષ્મ સ્થાનાંતરમાં $dW = \vec{E} \cdot d\vec{r}$ સૂત્ર પરથી અને Aથી B સુધીમાં

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \tag{2.2.1}$$

સૂત્ર પરથી મળી શકશે. અહીં $\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$ ને A અને B બિંદુઓ વચ્ચેનું **વિદ્યુતક્ષેત્રનું રેખા-સંકલન (line-integral)** કહે છે.

(1) ACB માર્ગ : પ્રથમ આપણે OA ત્રિજ્યાના વર્તુળાકાર ચાપ AC પર Aથી C જઈશું અને પછી $\vec{OC}$ દિશામાં Cથી B જઈશું.

ચાપ AC પર દરેક બિંદુએ Qથી ઉદ્‌ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર ચાપને લંબરૂપે છે. ($\vec{E}$ અને $d\vec{r}$ વચ્ચેનો કોણ 90°). તેથી $W_{AC} = \int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$ થશે. હવે CB માર્ગે વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થતું કાર્ય,

$$W_{CB} = \int_C^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \tag{2.2.2}$$

$$= \int_C^B \frac{kQ}{r^2} \hat{r}_B \cdot dr \hat{r}_B = kQ \int_C^B \frac{1}{r^2} dr = kQ \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_C}^{r_B}$$

$$W_{CB} = kQ \left[\frac{1}{r_C} - \frac{1}{r_B}\right] \tag{2.2.3}$$

આમ, ACB માર્ગે વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થતું કાર્ય,

$$W_{ACB} = W_{AC} + W_{CB} = kQ \left[\frac{1}{r_C} - \frac{1}{r_B}\right] \tag{2.2.4}$$

અહીં $r_C < r_B$ હોવાથી આ કાર્ય ધન છે, તે સ્વયંસ્પષ્ટ છે.

(2) ADB માર્ગ : Aથી D સુધીના માર્ગ પર વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થતું કાર્ય ઉપર ગણ્યું તે જ રીતે $W_{AD} = kQ \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_D}\right]$ જેટલું મળે. વળી, ચાપ DB પર વિદ્યુતક્ષેત્ર ચાપને લંબ હોવાથી તે ગતિમાં થતું કાર્ય $W_{DB} = 0$.

આથી ADB માર્ગે વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થતું કાર્ય,

$$W_{ADB} = W_{AD} + W_{DB} = kQ\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_D}\right] \tag{2.2.5}$$

હવે $|\vec{r}_D| = |\vec{r}_B|$ અને $|\vec{r}_A| = |\vec{r}_C|$ હોવાથી,

સમીકરણ (2.2.4) અને (2.2.5) પરથી, $W_{ACB} = W_{ADB} = W_{AB} = kQ\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right]$ (2.2.6)

આમ, વિદ્યુતક્ષેત્રમાં એકમ ધન વિદ્યુતભારને એક બિંદુથી બીજા બિંદુ સુધી લઈ જવામાં **વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થતું કાર્ય, તે બે બિંદુઓના માત્ર સ્થાન પર જ આધારિત છે અને તેમને જોડતા માર્ગ પર આધારિત નથી.**

હવે જો એકમ ધન વિદ્યુતભારને Bથી A બિંદુ પર ગમે તે માર્ગે લઈ જઈએ, તો વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થતું કાર્ય, સમીકરણ (2.2.6) પરથી

$$W_{BA} = kQ\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right] \tag{2.2.7}$$

મુજબ મળશે.

જો એકમ ધન વિદ્યુતભારને A બિંદુથી ગમે તે માર્ગે B પર લઈ જઈ, અને ગમે તે માર્ગે A બિંદુ પર પાછો લાવીએ તો એક બંધ ગાળો રચાય. (દા.ત., ACBDA અથવા ADBCA) અને આ બંધ ગાળા પર વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થતું કુલ કાર્ય ($\oint \vec{E}\cdot d\vec{r}$); $W_{AB} + W_{BA} = 0$ થશે. (સમીકરણો (2.2.6) અને (2.2.7) પરથી). આવો ગુણધર્મ ધરાવતા ક્ષેત્રને સંરક્ષી ક્ષેત્ર કહે છે તે તમે જાણો જ છો. આમ, વિદ્યુતક્ષેત્ર પણ સંરક્ષી ક્ષેત્ર છે. [ધોરણ 11માં તમે જોઈ ગયા છો કે ગુરુત્વક્ષેત્ર પણ સંરક્ષી ક્ષેત્ર છે.]

અત્રે, આપણે એકમ ધન વિદ્યુતભાર પર થતા કાર્યની વાત કરી હોવા છતાં એ બધી બાબતો કોઈ પણ વિદ્યુતભાર q પર થતાં કાર્યને પણ લાગુ પડે જ છે, પણ તે માટે કાર્ય માટેના ઉપરના દરેક સમીકરણની જમણી બાજુને q વડે ગુણવી પડે. દા. ત., A થી B સુધીમાં થતું કાર્ય $W_{AB} = \int_A^B q\vec{E}\cdot d\vec{r}$.

વળી, આપણે વિદ્યુક્ષેત્ર વડે થતું કાર્ય શોધવાને બદલે જો વિદ્યુતક્ષેત્રની વિરુદ્ધમાં બાહ્ય બળ વડે કરવું પડતું (પ્રવેગ રહિત ગતિ માટેનું) કાર્ય શોધવું હોય, તો ઉપરના કાર્યના સમીકરણ (2.2.1)ની જમણી બાજુએ ઋણ ચિહ્ન મૂકવું પડશે, એ તો તમે સમજી શકશો. આથી એકમ ધન વિદ્યુતભાર માટે આવું કાર્ય $W'_{AB} = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r}$ પરથી મળશે, જે સમીકરણ (2.2.1) પરથી મળતા કાર્ય Wના મૂલ્ય જેટલું જ છે પણ તેનાથી વિરુદ્ધ ચિહ્ન ધરાવે છે. વળી, q વિદ્યુતભાર માટે આવું કાર્ય $W''_{AB} = -\int_A^B q\vec{E}\cdot d\vec{r}$ પરથી મળે છે.

આ ચર્ચા પરથી આપણે ખાસ યાદ રાખીશું કે $\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r}$, એટલે કે Aથી B વચ્ચેનું વિદ્યુતક્ષેત્રનું રેખા-સંકલન-એકમ ધન વિદ્યુતભારને Aથી B લઈ જવા દરમિયાન વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થતું કાર્ય છે અને તે માર્ગ પર આધારિત નથી તેમજ $\oint \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$. થાય છે. વળી, $\vec{E}\cdot d\vec{r}$ ને ઘણી વખત $\vec{E}\cdot d\vec{l}$ તરીકે પણ લખાય છે, જ્યાં $d\vec{l}$ પણ સૂક્ષ્મ સ્થાનાંતર સદિશ જ છે.

2.3 સ્થિત-વિદ્યુતસ્થિતિમાન (Electrostatic Potential)

આપણે જાણીએ છીએ કે વિદ્યુતક્ષેત્રમાં એક બિંદુથી બીજા બિંદુ સુધી એકમ ધન (+1 C) વિદ્યુતભારને લઈ જવામાં વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થતું કાર્ય, માત્ર તે બે બિંદુઓનાં સ્થાન પર જ આધારિત છે. તેમને જોડતા માર્ગ પર નહિ.

જો આપણે કોઈ એક બિંદુ Aને સંદર્ભબિંદુ તરીકે લઈને એકમ ધન વિદ્યુતભારને વિદ્યુતક્ષેત્રમાંના Aથી B, Aથી C, Aથી D... વગેરે બિંદુએ લઈ જઈએ, તો વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થતું કાર્ય અનુક્રમે $W_{AB} = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r}$, $W_{AC} = \int_A^C \vec{E}\cdot d\vec{r}$, $W_{AD} = \int_A^D \vec{E}\cdot d\vec{r}$,... સૂત્રો પરથી મળે. વળી, સંદર્ભબિંદુ A તો નિશ્ચિત કરી દીધેલું છે, તેથી ઉપર્યુક્ત કાર્ય પેલાં બીજાં બિંદુઓ (B, C, D, ...) ના સ્થાન પર જ આધારિત બને છે. રૈવાજિક રીતે સંદર્ભબિંદુ તરીકે વિદ્યુતક્ષેત્રના ઉદ્‌ગમથી અનંત અંતરનું બિંદુ લેવામાં આવે છે. તે બિંદુથી એકમ ધન વિદ્યુતભારને ક્ષેત્રમાંના કોઈ P બિંદુ સુધી લાવતાં વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થતું કાર્ય $W_{\infty P} = \int_{\infty}^{P} \vec{E}\cdot d\vec{r}$ સૂત્ર પરથી મળે, અને તે માત્ર P બિંદુનું સ્થાનવિધેય બને. પરંતુ આવી ગતિ પ્રવેગરહિત ગતિ બને

તે માટે વિદ્યુતક્ષેત્રની **વિરુદ્ધમાં** એટલે કે બાહ્ય બળ વડે કરવું પડતું કાર્ય શોધવું હોય તો તે માટે $W'_{\infty P} = -\int_{\infty}^{P} \vec{E}\cdot d\vec{r}$ સૂત્રનો ઉપયોગ કરવો પડે.

વિદ્યુતક્ષેત્રની એક અગત્યની લાક્ષણિકતા કે જેને **વિદ્યુતસ્થિતિમાન** કહે છે, તેને એકમ ધન વિદ્યુતભાર પર થતા કાર્યના સંદર્ભમાં નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે :

એકમ ધન વિદ્યુતભારને અનંત અંતરેથી વિદ્યુતક્ષેત્રમાંના આપેલા બિંદુએ લાવતાં વિદ્યુતક્ષેત્રની વિરુદ્ધ કરવા પડતા કાર્યને તે બિંદુ પાસેનું સ્થિત-વિદ્યુતસ્થિતિમાન (V) કહે છે. અહીં વિદ્યુતક્ષેત્રની વિરુદ્ધ એટલે ખરેખર તો **વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે લાગતા બળની વિરુદ્ધ.** સ્થિત-વિદ્યુતસ્થિતિમાનને આપણે ટૂંકમાં વિદ્યુતસ્થિતિમાન કહીશું.

આ વ્યાખ્યા મુજબ વિદ્યુતક્ષેત્રમાંના કોઈ P બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન

$$V_P = -\int_{\infty}^{P} \vec{E}\cdot d\vec{r} \tag{2.3.1}$$

સૂત્ર પરથી મળે. બીજા શબ્દોમાં આ સૂત્ર વિદ્યુતસ્થિતિમાનની વ્યાખ્યાને જ રજૂ કરે છે.

આ સૂત્ર પરથી Q અને P બિંદુઓ વચ્ચેનો વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત

$$V_Q - V_P = \left(-\int_{\infty}^{Q} \vec{E}\cdot d\vec{r}\right) - \left(-\int_{\infty}^{P} \vec{E}\cdot d\vec{r}\right) \tag{2.3.2}$$

$$= \int_{Q}^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{r} + \int_{\infty}^{P} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{Q}^{P} \vec{E}\cdot d\vec{r} \tag{2.3.3}$$

$$V_Q - V_P = -\int_{P}^{Q} \vec{E}\cdot d\vec{r} \tag{2.3.4}$$

પરથી મળે. વળી, **તે એકમ ધન વિદ્યુતભારને Pથી Q સુધી લઈ જતાં વિદ્યુતક્ષેત્રની વિરુદ્ધ કરવું પડતું કાર્ય દર્શાવે છે.** તેથી તે એક રીતે Pની સાપેક્ષમાં Qનું સ્થિતિમાન પણ દર્શાવે છે.

આ વિદ્યુતસ્થિતિમાનના તફાવત potential differenceને ઘણીવાર **ટૂંકમાં p.d.** તરીકે પણ લખાય છે. વિદ્યુતસ્થિતિમાન અને તેથી વિદ્યુતસ્થિતિમાનના તફાવતનો પણ એકમ joule / coulomb છે. તેને વિજ્ઞાની વોલ્ટાની યાદમાં volt (સંજ્ઞા V) કહે છે.

અત્રે, volt $= \dfrac{\text{joule}}{\text{coulomb}}$ અથવા $V = \dfrac{J}{C}$. તેનું પારિમાણિક સૂત્ર $M^1L^2T^{-3}A^{-1}$.

વિદ્યુતસ્થિતિમાન અદિશ રાશિ છે. વળી, આપણે સદિશ રાશિ - વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ પરથી વિદ્યુતસ્થિતિમાન મેળવ્યું છે. (જુઓ સમીકરણ 2.3.1). આગળ ઉપર આપણે વિદ્યુતસ્થિતિમાન પરથી વિદ્યુતક્ષેત્ર પણ મેળવીશું. વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ સાથેની ગણતરીઓમાં તેના ત્રણ ઘટકો E_x, E_y, E_z ધ્યાનમાં લેવા પડે છે અને ગણતરીઓ લાંબી થાય છે. જ્યારે વિદ્યુતસ્થિતિમાન સાથેની ગણતરીમાં **એક જ અદિશ** આવે છે, તેથી ગણતરીઓ ટૂંકી અને સહેલી બને છે. આથી વિદ્યુતસ્થિતિમાનની સંકલ્પનાનો વ્યાપકપણે ઉપયોગ થાય છે.

વિદ્યુતસ્થિતિમાનના નિરપેક્ષ મૂલ્યનું કંઈ મહત્ત્વ નથી. માત્ર વિદ્યુતસ્થિતિમાનના તફાવતનું જ મહત્ત્વ છે.

[**માત્ર જાણકારી માટે :** ગેલ્વેની (1737–1798) નામના વિજ્ઞાનીએ દેડકાની સ્નાયુપેશીઓમાં બે અસમાન ધાતુઓના ઇલેક્ટ્રૉડ ગોઠવીને વિદ્યુત મેળવેલ અને આ વિદ્યુતને તેણે **પ્રાણી જ વિદ્યુત** (animal electricity) એવું નામ આપેલ. વોલ્ટાએ દર્શાવ્યું કે આ કોઈ પ્રાણીની સ્નાયુપેશીઓનો વિશિષ્ટ ગુણધર્મ નથી, પરંતુ કોઈ પણ ભીના પદાર્થ (Wet body)ની

આસપાસ બે અસમાન ધાતુઓના ઈલેક્ટ્રૉડ મૂકીને વિદ્યુત મેળવી શકાય છે. આ પરથી તેણે જે વિદ્યુત-રાસાયણિક કોષ બનાવ્યો, તેને આપણે અગાઉ વોલ્ટાના કોષ તરીકે ભણી ગયાં છીએ.

જેવું મહત્ત્વ hydrostaticsમાં તરલના સ્તરની ઊંચાઈનું અને થરમૉડાઇનેમિક્સમાં તાપમાનનું છે, તેવું જ મહત્ત્વ સ્થિત-વિદ્યુતશાસ્ત્રમાં વિદ્યુતસ્થિતિમાનનું છે. જે રીતે પ્રવાહી વધુ ઊંચાઈવાળા ભાગ તરફથી ઓછી ઊંચાઈવાળા ભાગ (અથવા વધુ દબાણવાળા ભાગ તરફથી ઓછા દબાણવાળા ભાગ તરફ વહે છે, ઉષ્મા-ઊર્જા વધુ તાપમાનવાળા ભાગ તરફથી ઓછા તાપમાનવાળા ભાગ તરફ વહે છે, તે જ રીતે વિદ્યુતનું વહન ધન વિદ્યુત ભારનું વહન એટલે કે વિદ્યુતપ્રવાહ) પણ ઊંચા વિદ્યુતસ્થિતિમાનવાળા વિદ્યુતભારિત પદાર્થથી નીચા વિદ્યુતસ્થિતિમાનવાળા વિદ્યુતભારિત પદાર્થ તરફ થાય છે. આમ, બે વિદ્યુતભારિત પદાર્થો વચ્ચે વિદ્યુતપ્રવાહ કઈ દિશામાં વહેશે તે તેમનાં વિદ્યુતસ્થિતિમાનો પરથી નક્કી થાય છે.]

ઉદાહરણ 1 : ધારો કે કોઈ સ્થિર વિદ્યુતભાર વિતરણને લીધે ઉદ્‌ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E} = ky\hat{i} + kx\hat{j}$ છે, જ્યાં k અચળાંક છે. (a) આકૃતિમાં ઊગમબિંદુ Oને P(2, 8), બિંદુ સાથે જોડતા સુરેખ માર્ગ પર વિદ્યુતક્ષેત્રનું રેખા-સંકલન શોધો. (b) OP રેખા પરના કોઈ પણ બિંદુ પાસે (0, 0)ની સાપેક્ષે વિદ્યુતસ્થિતિમાનનું સૂત્ર મેળવો.

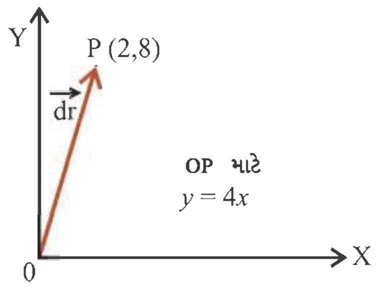
ઉકેલ : (a) OP સુરેખા પર સ્થાનાંતર સદિશ $\vec{dr} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$

$$\therefore \vec{E}\cdot d\vec{r} = (ky\hat{i} + kx\hat{j})\cdot(dx\hat{i} + dy\hat{j})$$
$$= kydx + kxdy = k(ydx + xdy)$$

વળી, સમગ્ર OP રેખા પર $y = 4x$ ($\because$ સુરેખાનો ઢાળ અચળ હોય છે.)

$\therefore\ dy = 4dx$

$\therefore$ O થી P સુધી વિદ્યુતક્ષેત્રનું રેખા-સંકલન



$$\int_O^P \vec{E}\cdot d\vec{r} = k\int_O^P (ydx + xdy) = k\int_{(0,0)}^{(2,8)} [4xdx + x(4dx)] = k\int_0^2 8x\,dx \qquad .....(A)$$

$$= 8k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 16k$$

(b) OP રેખા પરના કોઈ પણ બિંદુ Q(x, y) પાસે (0, 0)ની સાપેક્ષે વિદ્યુતસ્થિતિમાન મેળવવા માટે આપણે $V(Q) = -\int_O^Q \vec{E}\cdot d\vec{l}$ નો ઉપયોગ કરી શકીએ.

$$\therefore\ V(Q) = -\int_{(0)}^{(x)} 8kx\,dx \quad ...\ [\text{સમીકરણ (A) પરથી}]$$

$$= -8k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x = -4kx^2$$

ઉદાહરણ 2 : λ જેટલી રેખીય વિદ્યુતભારઘનતા ધરાવતા અનંતલંબાઈના તારથી તારની લંબાઈને લંબરૂપે r અંતરે વિદ્યુતક્ષેત્ર $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$, તારને લંબ દિશામાં છે, તો તારથી a અંતરે આવેલા બિંદુની સાપેક્ષે, તારથી b અંતરે આવેલા બિંદુનું સ્થિતિમાન શોધો. ($a > b$). [**Hint :** $\int \frac{1}{r}dr = ln\ r$].

ઉકેલ : $V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r}$

$$= -\int_a^b \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} dr \quad (\because \vec{E} \parallel \vec{dr})$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \int_a^b \frac{1}{r} dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} [ln\, r]_a^b = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} [ln\, b - ln\, a]$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} [ln\, a - ln\, b]$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln \left(\frac{a}{b}\right)$$

સંદર્ભબિંદુ a માટે $V_a = 0$ લેવાથી,

$$\therefore V_b = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \left(\frac{a}{b}\right)$$

ઉદાહરણ 3 : એક વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E} = Ax\hat{i}$ વડે રજૂ થાય છે, જ્યાં $A = 10 \frac{V}{m^2}$ છે. આ ક્ષેત્રમાં (10, 20)m બિંદુની સાપેક્ષે ઊગમબિંદુનું સ્થિતિમાન શોધો.

ઉકેલ : $\vec{E} = Ax\hat{i} = 10x\hat{i}$

$$V(0,\ 0) - V(10,\ 20) = -\int_{(10,\,20)}^{(0,\,0)} \vec{E} \cdot \vec{dr}$$

$$= -\int_{(10,\,20)}^{(0,\,0)} (10x\hat{i}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j}) = -\int_{10}^{0} 10x\, dx$$

$$= -10\left[\frac{x^2}{2}\right]_{10}^{0} = [0 - (-500)] = 500 \text{ volt}$$

$V(10,\ 20) = 0$ લેવાનું હોવાથી $V(0,\ 0) = 500$ volt

2.4 વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા

અગાઉના પરિચ્છેદ (2.2)માં આપણે એકમ ધન વિદ્યુતભાર પર અને પછી q વિદ્યુતભાર પર પણ વિદ્યુતક્ષેત્રમાંની ગતિ દરમિયાન વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થતા કાર્યની ચર્ચા કરી. વળી, આપણે વિદ્યુતક્ષેત્રની વિરુદ્ધમાં બાહ્ય બળ વડે કરવા પડતા કાર્યની વાત પણ કરી, જેમાં આપણે, વિદ્યુતભારની **માત્ર પ્રવેગરહિત ગતિનો જ વિચાર કરવાનો છે.** આથી તેનો વેગ અચળ રહે છે અને વિદ્યુતભારની ગતિ-ઊર્જામાં કંઈ ફેરફાર થતો નથી. પરંતુ આ બાહ્ય બળ વડે કરવું પડતું કાર્ય તે વિદ્યુતભારની સ્થિતિ-ઊર્જા રૂપે સંગ્રહ પામે છે. આ પરથી વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જાની વ્યાખ્યા નીચે મુજબ અપાય છે :

“આપેલ વિદ્યુતભાર (q)ને અનંત અંતરેથી, વિદ્યુતક્ષેત્રમાંના આપેલા બિંદુએ લાવતાં વિદ્યુતક્ષેત્ર વિરુદ્ધ કરવા પડતા કાર્યને તે બિંદુ આગળ તે વિદ્યુતભારની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા કહે છે.” અહીં **“કરવા પડતા કાર્ય”**ના ઉલ્લેખમાં **“પ્રવેગરહિત ગતિ”**નો સમાવેશ થઈ જાય છે.

વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા અને વિદ્યુતસ્થિતિમાનની વ્યાખ્યા પરથી, P બિંદુએ q વિદ્યુતભારની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા માટે,

$$U_P = -\int_{\infty}^{P} q\vec{E}\cdot\vec{dr} = -q\int_{\infty}^{P}\vec{E}\cdot\vec{dr} \qquad (2.4.1)$$

$$= qV_P \qquad (2.4.2)$$

સૂત્રો લખી શકીએ. વળી, P બિંદુ આગળના વિદ્યુતસ્થિતિમાનને આપણે એકમ ધન વિદ્યુતભાર (q = +1 C)ની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા પણ કહી શકીએ, એટલે કે

$$\begin{Bmatrix}\text{આપેલા બિંદુએ} \\ \text{વિદ્યુતસ્થિતિમાન}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\text{તે બિંદુએ એકમ ધન} \\ \text{વિદ્યુતભારની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા}\end{Bmatrix}$$

આ ચર્ચામાં વધુ સ્પષ્ટતા માટે આપણે કેટલાક મહત્ત્વના મુદ્દાઓની નીચે મુજબ નોંધ લઈશું :

(1) q વિદ્યુતભારને (કે એકમ ધન વિદ્યુતભારને) અનંત અંતરેથી કોઈ આપેલા બિંદુએ લાવીએ કે ક્ષેત્રમાં જ એક બિંદુથી બીજા બિંદુએ લાવીએ, ત્યારે **ક્ષેત્રને ઉત્પન્ન કરતા પદાર્થો (વિદ્યુતભારો)ના સ્થાનમાં કંઈ ફેરફાર થતો નથી.** (કોઈ અદૃશ્ય બળ દ્વારા આપણે આ પદાર્થોને તેમનાં સ્થાનો પર સ્થિર જકડેલા કલ્પીશું !!)

(2) વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જાના નિરપેક્ષ મૂલ્યનું કંઈ જ મહત્ત્વ નથી. માત્ર તેના મૂલ્યમાં થતા ફેરફારનું જ મહત્ત્વ છે. અત્રે, q વિદ્યુતભારને Pથી Q બિંદુએ **પ્રવેગરહિત ગતિથી લઈ જતાં બાહ્ય બળ વડે કરવું પડતું કાર્ય** તે બે બિંદુઓ આગળની વિદ્યુતભાર qની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જાનો તફાવત ($U_Q - U_P$) દર્શાવે છે.

$$\therefore\ U_Q - U_P = -q\int_{P}^{Q}\vec{E}\cdot\vec{dr} \qquad (2.4.3)$$

(3) અહીં વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા એ ક્ષેત્રને ઉત્પન્ન કરનાર વિદ્યુતભારો અને જેને આપણે ગતિ કરાવી છે તે વિદ્યુતભાર q વડે બનતા તંત્રની **કોઈ એક સંરચના** (configuration) **માટે તે સમગ્ર તંત્રની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા** છે અને સંરચના બદલાય એટલે તે તંત્રની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જામાં પણ ફેરફાર થાય છે. દા.ત., તેમની વચ્ચે અમુક અંતર r હોય તેવી એક સંરચના કહેવાય અને અંતર r બદલાય તો સંરચના બદલાઈ એમ કહેવાય અને તેથી તે તંત્રની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા પણ બદલાઈ એમ કહેવાય. પરંતુ ક્ષેત્રને ઉત્પન્ન કરનાર પદાર્થોની પરિસ્થિતિમાં કંઈ જ ફેરફાર થતો ન હોવાથી વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જાનો સમગ્ર ફેરફાર **આ વિદ્યુતભાર** (કે જેને આપણે ગતિ કરાવી તે) **q જ અનુભવે છે,** તેથી $U_Q - U_P$ને માત્ર આ વિદ્યુતભાર qની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જાના તફાવત તરીકે પણ લખી શકીએ છીએ. આ જ કારણસર આપણે સમીકરણ (2.4.1) માટે P બિંદુએ "q વિદ્યુતભારની સ્થિતિ-ઊર્જા" અને તે પછીની ચર્ચામાં "એકમ ધન વિદ્યુતભારની સ્થિતિ-ઊર્જા" એવો ઉલ્લેખ કરેલો છે.

2.5 બિંદુવત્ વિદ્યુતભારને કારણે વિદ્યુતસ્થિતિમાન (Electric Potential Due to a Point Charge)

બિંદુવત્ વિદ્યુતભાર qને લીધે, તેનાથી r અંતરે આવેલા કોઈ P બિંદુએ આપણે વિદ્યુતસ્થિતિમાન V(P) શોધવું છે.

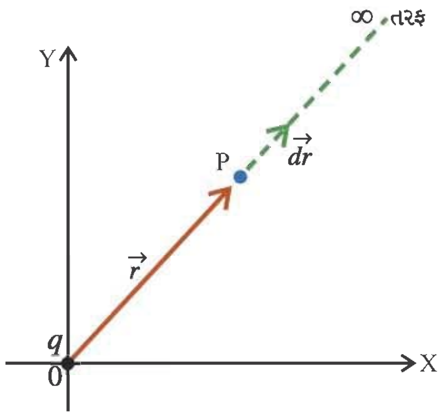
આ માટે યામાક્ષોનું ઊગમબિંદુ O, તે વિદ્યુતભારના સ્થાન પર મૂકીશું. જુઓ આકૃતિ 2.2. અત્રે $\vec{OP} = \vec{r}$. આપણે વિદ્યુતસ્થિતિમાનની વ્યાખ્યા મુજબ સમીકરણ

$$V(P) = -\int_{\infty}^{P}\vec{E}\cdot d\vec{r} \qquad (2.5.1)$$

નો ઉપયોગ કરી શકીએ. વળી, આ સમીકરણને બીજા સ્વરૂપમાં આપણે

$$V(P) = \int_{P}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r} \qquad (2.5.2)$$

તરીકે પણ લખી શકીએ. (કારણ કે $\int_{\infty}^{P}\vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_{P}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}$)



આકૃતિ 2.2 બિંદુવત્ વિદ્યુતભારને કારણે વિદ્યુતસ્થિતિમાન

આ P બિંદુએ $\vec{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$ છે. (2.5.3)

$\therefore$ સમીકરણ 2.5.2 પરથી,

$$V(P) = \int_{P}^{\infty} \frac{kq}{r^2}\hat{r}\cdot dr\hat{r} = \int_{r}^{\infty} \frac{kq}{r^2} dr \quad (2.5.4)$$

$$= kq \int_{r}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = kq \left[-\frac{1}{r}\right]_r^{\infty} \quad (2.5.5)$$

$$\therefore \ V(P) = \frac{kq}{r} \quad (2.5.6)$$

અથવા $V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$ (2.5.7)

આ સમીકરણ ધન કે ઋણ કોઈ પણ વિદ્યુતભાર માટે સાચું છે. ધન વિદ્યુતભારથી ઉદ્ભવતું સ્થિતિમાન ધન મળે છે અને ઋણ વિદ્યુતભારથી ઉદ્ભવતું સ્થિતિમાન (ઉપરનાં સમીકરણમાં qને ઋણ ચિહ્ન સાથે મૂકવાનું હોવાથી) ઋણ મળે છે.

અંતર r વધતાં વિદ્યુતસ્થિતિમાન $\frac{1}{r}$ મુજબ ઘટે છે, તે સમીકરણ 2.5.6 પરથી સ્વયં સ્પષ્ટ છે. વિદ્યુતસ્થિતિમાનની બાબતમાં પણ સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત લાગુ પડે છે. એટલે એક કરતાં વધુ બિંદુવત્ વિદ્યુતભારોથી આપેલા બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન શોધવા માટે દરેક વિદ્યુતભારથી ઉદ્ભવતું સ્થિતિમાન સમીકરણ (2.5.7) મુજબ શોધીને તેમનો બૈજિક સરવાળો કરવો જોઈએ.

ઉદાહરણ 4 : એક બિંદુ P 2 μC વિદ્યુતભારથી 20 m દૂર છે અને 4 μC વિદ્યુતભારથી 40 m દૂર છે. P આગળનું વિદ્યુતસ્થિતિમાન શોધો.

(1) 0.2 C વિદ્યુતભારને અનંત અંતરેથી P બિંદુએ લાવવા માટે કરવું પડતું કાર્ય શોધો.

(2) −0.4 C વિદ્યુતભારને અનંત અંતરેથી P બિંદુએ લાવવા માટે કરવું પડતું કાર્ય શોધો.

$[k = 9 \times 10^9 \ N \ m^2 \ C^{-2}]$

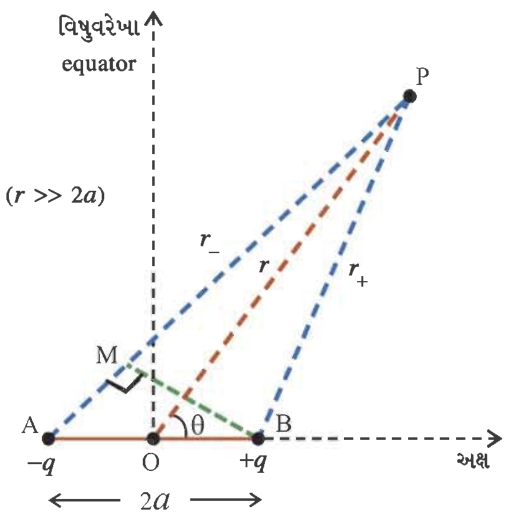
ઉકેલ : $V_P = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} = k\left[\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right]$

$$= 9 \times 10^9 \left[\frac{2\times10^{-6}}{20} + \frac{4\times10^{-6}}{40}\right] = 1800 \text{ volt}$$

(1) $W_1 = V_P \ q_1' = (1800)(0.2) = 360$ J

(2) $W_2 = V_P \ q_2' = (1800)(-0.4) = -720$ J

2.6 વિદ્યુત-ડાઈપોલથી ઉદ્ભવતું વિદ્યુતસ્થિતિમાન (Electric Potential due to an Electric Dipole)



આકૃતિ 2.4 વિદ્યુત-ડાઈપોલને લીધે સ્થિતિમાન

પ્રકરણ 1માં આપણે જોયું છે કે એકબીજાથી પરિમિત (= $2a$) અંતરે રહેલા બે સમાન મૂલ્યના પરંતુ વિરુદ્ધ પ્રકારના વિદ્યુતભારો ($+q$ અને $-q$)થી બનતી રચનાને વિદ્યુત-ડાઈપોલ કહે છે. આકૃતિ 2.4માં આવી એક ડાઈપોલ દર્શાવી છે, જેમાં યામતંત્રનું ઊગમબિંદુ O, તેના મધ્યબિંદુ પર મૂકેલ છે. આ ડાઈપોલની ડાઈપોલ-મોમેન્ટ (ચાકમાત્રા)નું મૂલ્ય $p = q(2a)$ છે અને તેની દિશા ઋણથી ધન વિદ્યુતભાર તરફ - એટલે કે AB દિશામાં છે.

ડાઈપોલના મધ્યબિંદુ Oથી ઘણે દૂર આવેલા અને ડાઈપોલની અક્ષ સાથે θ કોણ બનાવતી દિશામાંના P બિંદુએ આપણે વિદ્યુતસ્થિતિમાન શોધવું છે. ધારો કે OP = r, AP = r_- અને BP = r_+.

P બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન, દરેક વિદ્યુતભારથી ઉદ્ભવતાં વિદ્યુતસ્થિતિમાનના સરવાળા જેટલું છે.

$$\therefore \ V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_+} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-q)}{r_-} \tag{2.6.1}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{r_- - r_+}{r_- r_+}\right] \tag{2.6.2}$$

P બિંદુ ઘણે દૂરનું બિંદુ હોવાથી $r >> 2a$ હોય અને આ સંજોગોમાં AP || OP || BP લઈ શકાય. આ સંજોગોમાં

$$\left.\begin{array}{l}\text{આકૃતિ 2.3 પરથી સમીકરણ (2.6.2)ના અંશ માટે } r_- - r_+ = AM = 2a\ cos\theta \\ \text{અને છેદ માટે } r_- \approx r_+ \approx r\end{array}\right\} \tag{2.6.3}$$

આપણે ડાઈપોલની લંબાઈ ($2a$) કરતાં ઘણાં મોટા અંતરના બિંદુનો વિચાર કર્યો છે. અણુકીય ડાઈપોલ્સ ખૂબ નાની હોવાથી આવી સંનિકટતા (approximation) તેમને ઘણી સારી રીતે લાગુ પડે છે. સમીકરણો (2.6.2) અને (2.6.3) પરથી,

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2a\ cos\theta}{r^2}\right) \tag{2.6.4}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\ cos\theta}{r^2} \tag{2.6.5}$$

$\overrightarrow{OP}$ દિશામાંના એકમસદિશને $\hat{r}$ તરીકે લખતાં, $\vec{p}\cdot\hat{r} = p\cos\theta$

$$\therefore \ V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2} (r >> 2a \text{ માટે}) \tag{2.6.6}$$

નોંધ : $q \to \infty$ અને $a \to 0$ લક્ષમાં મળતી ડાઈપોલને બિંદુ ડાઈપોલ (point dipole) કહે છે. આવી બિંદુ ડાઈપોલ માટે ઉપરનું સમીકરણ વધારે સચોટ છે, જ્યારે વાસ્તવમાં મળતી એટલે કે physical-dipole માટે આ સમીકરણ વિદ્યુતસ્થિતિમાનનું સંનિકટ (approximate) મૂલ્ય આપે છે.

સમીકરણ (2.6.4) પરથી ફલિત થતા મુદ્દાઓની નીચે મુજબ નોંધ લઈએ :

(1) **અક્ષ પરનું સ્થિતિમાન :** ડાઈપોલની અક્ષ પરના બિંદુ માટે $\theta = 0$ અથવા π. $\therefore \ V = \pm\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^2}$

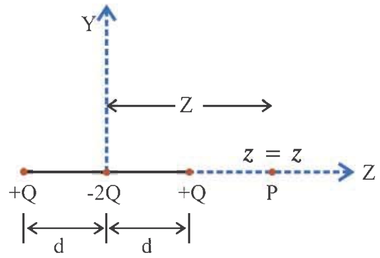
આપેલા બિંદુથી જો **નજીકનો વિદ્યુતભાર $+q$** હોય તો V ધન અને નજીકનો વિદ્યુતભાર $-q$, હોય તો V ઋણ મળશે.

(2) **વિષુવરેખા પરનું સ્થિતિમાન :** વિષુવરેખા પરના બિંદુ માટે $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\therefore \ V = 0$

(3) કોઈ બિંદુએ સ્થિતિમાન તેના સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ અને $\vec{p}$ વચ્ચેના ખૂણા પર આધારિત છે.

(4) ડાઈપોલથી ઉદ્‌ભવતું સ્થિતિમાન અંતર સાથે $\frac{1}{r^2}$ મુજબ ઘટે છે. (જ્યારે બિંદુવત્ વિદ્યુતભારથી ઉદ્‌ભવતું સ્થિતિમાન અંતર સાથે $\frac{1}{r}$ મુજબ ઘટે છે.) (ડાઈપોલથી ઉદ્‌ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર $\frac{1}{r^3}$ મુજબ ઘટે છે, તે આપણે પ્રકરણ 1માં જોયું છે.)

ઉદાહરણ 5 : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે બે ડાઈપોલ્સને એક રેખા પર પરસ્પર વિરુદ્ધ ગોઠવતાં મળતાં તંત્રને રેખીય quadrupole (ચતુર્ધ્રુવી) કહે છે. (1) $z > d$ સંતોષતા, quadrupoleની અક્ષ પરના $z = z$ બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન શોધો અને (2) જો $z >> d$, હોય તો દર્શાવો કે,



$$V(z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2d^2}{z^3}$$

નોંધ : $2|Q|d^2$ ને quadrupole મોમેન્ટ કહે છે.

ઉકેલ : (1) ધારો કે બિંદુ P નો z-યામ z છે. ઊગમબિંદુથી ડાબી બાજુના + Q વિદ્યુતભારને કારણે P પાસે સ્થિતિમાન

$$V_1 = \frac{kQ}{z+d} \qquad (1)$$

જમણી બાજુના + Q વિદ્યુભારને લીધે P પાસે સ્થિતિમાન,

$$V_2 = \frac{kQ}{z-d} \qquad (2)$$

ઊગમબિંદુ પરના –2Q વિદ્યુતભારને લીધે P પાસે સ્થિતિમાન,

$$V_3 = -\frac{k(2Q)}{z} \qquad (3)$$

∴ P પાસેનું કુલ સ્થિતિમાન,

$$V(z) = V_1 + V_2 + V_3 = kQ\left[\frac{1}{z+d}+\frac{1}{z-d}-\frac{2}{z}\right]$$

$$= kQ\left[\frac{2z}{z^2-d^2}-\frac{2}{z}\right] = kQ\left[\frac{2d^2}{z(z^2-d^2)}\right]$$

(2) જો $z >> d$ હોય તો, ઉપરના સમીકરણની જમણી બાજુના છેદમાં z^2 ની સરખામણીમાં d^2ને અવગણી શકાય છે. $\therefore V(z) = \frac{kQ(2d^2)}{z^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2d^2}{z^3}$

ઉદાહરણ 6 : R ત્રિજ્યાના અવાહક ગોળામાં વિદ્યુતભાર Q નિયમિત રીતે વિતરિત કરેલો છે, તો ગોળાના કેન્દ્રથી $r(<R)$ અંતરે વિદ્યુતસ્થિતિમાન શોધો. ગોળાના કેન્દ્રથી $r(r < R)$ અંતરે વિદ્યુતક્ષેત્ર $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}r\hat{r}$ લો. ગોળાના કેન્દ્ર પર પણ વિદ્યુતસ્થિતિમાન શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, આવા ગોળાના પૃષ્ઠ પર વિદ્યુતસ્થિતિમાન

$V(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$ હોય છે.

આથી, આપણે $V(r) - V(R) = -\int_R^r \vec{E}\cdot\vec{dr}$ નો ઉપયોગ કરી શકીએ.

$$\therefore V(r) - V(R) = -\int_R^r \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}rdr\,\hat{r}\cdot\hat{r} \qquad (\because \vec{dr} = dr\hat{r})$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\int_R^r rdr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left[\frac{r^2}{2}\right]_R^r$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{R^2}{2}\right]$$

$$\therefore \ V(r) = V(R) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left[\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right]$$

$$\therefore \ V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} + \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(R^2 - r^2)$$

$$\therefore \ V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad r < R$$

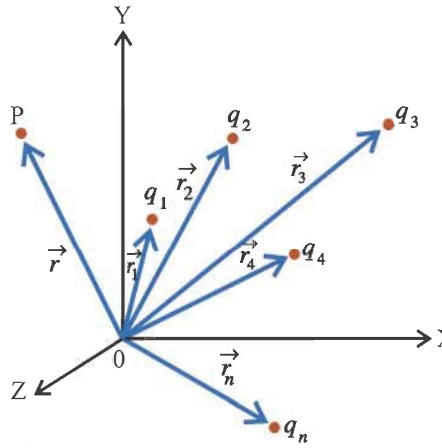
ગોળાના કેન્દ્ર પર $r = 0$, $\therefore$ V (કેન્દ્ર) $= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3Q}{2R}\right)$.

2.7 વિદ્યુતભારોના તંત્ર વડે ઉદ્ભવતું વિદ્યુતસ્થિતિમાન (Electrical Potential due to a System of Charges)

વિદ્યુતભારોના કોઈક તંત્રમાં બિંદુવત્ વિદ્યુતભારો અસતત રીતે (એટલે કે છૂટા-છૂટા) વિતરિત થયેલા (વહેંચાયેલા) હોઈ શકે છે, તો કોઈક તંત્રમાં તેઓ એકબીજાની સાથે, સાથે સતત રીતે વિતરિત થયેલા પણ હોઈ શકે છે. વળી, કોઈક તંત્રમાં આ બંને પ્રકારનાં વિતરણોનું ગમે તે પ્રકારનું મિશ્રણ પણ હોઈ શકે છે.

(a) વિદ્યુતભારોનું અસતત વિતરણ (Descrete Distribution of Charges) :

આકૃતિ 2.4માં બિંદુવત્ વિદ્યુતભારો $q_1, q_2, q_3 \ldots\ldots q_n$ નું અસતત વિતરણ થયેલું દર્શાવ્યું છે. યામાક્ષોના ઊગમબિંદુને અનુલક્ષીને આ વિદ્યુતભારોના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \ldots \vec{r}_n$ છે. આ તંત્રને લીધે સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ ધરાવતા P બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન શોધવું છે. આ માટે દરેક બિંદુવત્ વિદ્યુતભારથી ઉદ્ભવતું વિદ્યુતસ્થિતિમાન શોધીશું અને તેનો કુલ સરવાળો કરીશું.



આકૃતિ 2.4 અસતત વિદ્યુતભારોથી સ્થિતિમાન

એટલે કે, $V = V_1 + V_2 + \ldots. + V_n$ (2.7.1)

$$\therefore \ V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{1p}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{2p}} + \ldots\ldots + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_n}{r_{np}} \qquad)$$

જ્યાં, $r_{1p} = q_1$થી P નું અંતર $= |\vec{r} - \vec{r}_1|$

તે જ રીતે $r_{2p}, \ldots., r_{np}$ એ અનુરૂપ અંતરો છે.

$$\therefore \ V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} + \ldots\ldots + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_n}{|\vec{r} - \vec{r}_n|} \qquad (2.7.3)$$

$$\therefore \ V = \sum_{i=1}^{n}\frac{kq_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \qquad (2.7.4)$$

(b) સતત વિદ્યુતભાર-વિતરણથી ઉદ્ભવતું વિદ્યુતસ્થિતિમાન (Electric Potential due to a Continuous Distribution of Charges) :

ધારો કે કોઈ વિસ્તારમાં વિદ્યુતભાર સતત રીતે વિતરિત થયેલો છે. આ વિતરણના વિસ્તારને દરેક અત્યંત સૂક્ષ્મ કદ ધરાવતા ખૂબ મોટી સંખ્યાના કદ-ખંડોમાં વિભાગેલો કલ્પો. $\vec{r}$ સ્થાનસદિશ ધરાવતા આવા ખંડનું કદ $d\tau'$ અને તે સ્થાને વિદ્યુતભારની કદ-ઘનતા $\rho(\vec{r}\,')$, હોય તો તે ખંડમાંનો વિદ્યુતભાર $\rho(\vec{r}\,')d\tau'$ થશે અને તેને બિંદુવત્ ગણી શકાશે. આ સૂક્ષ્મ કદ-ખંડને લીધે $\vec{r}$ સ્થાનસદિશ ધરાવતા P બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}\,')d\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \qquad (2.7.5)$$

વિદ્યુતભાર-વિતરણના સમગ્ર કદ પર આ સમીકરણનું સંકલન કરતાં P આગળનું કુલ સ્થિતિમાન મળે છે, જે નીચે મુજબ લખી શકાય છે :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\text{કદ}} \frac{\rho(\vec{r}\,')d\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \qquad (2.7.6)$$

જો વિદ્યુતભાર-વિતરણ નિયમિત હોય તો $\rho(\vec{r}\,')$ને અચળ $(= \rho)$ ગણી શકાય છે.

(c) સમાન વિદ્યુતભાર-વિતરણ ધરાવતું ગોળીય કવચ (Spherical Shell with Uniform Charge Distribution)

પ્રકરણ 1માં આપણે જોયું કે નિયમિત (સમાન) વિદ્યુતભાર-વિતરણ ધરાવતા ગોળીય **કવચની બહારના બિંદુએ** તેમજ **સપાટી પરના બિંદુએ** મળતું વિદ્યુતક્ષેત્ર એ જાણે કે કવચ પરનો સમગ્ર વિદ્યુતભાર કવચના કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયેલો છે, તેમ ગણીને મળતા વિદ્યુતક્ષેત્ર જેટલું હોય છે. આપણે વિદ્યુતસ્થિતિમાન પણ વિદ્યુતક્ષેત્ર પરથી $(V = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot \vec{dr})$ મેળવેલ છે. વિદ્યુતસ્થિતિમાન માટે પણ બધો વિદ્યુતભાર કવચના કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયેલો ગણી શકાય છે. આથી q વિદ્યુતભાર અને R ત્રિજ્યા ધરાવતી આવી કવચની બહારના બિંદુએ તેમજ પૃષ્ઠ પરના બિંદુએ સ્થિતિમાન

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} \quad (r \geq R \text{ માટે}) \qquad (2.7.7)$$

જ્યાં, $r =$ કવચના કેન્દ્રથી આપેલ બિંદુનું અંતર

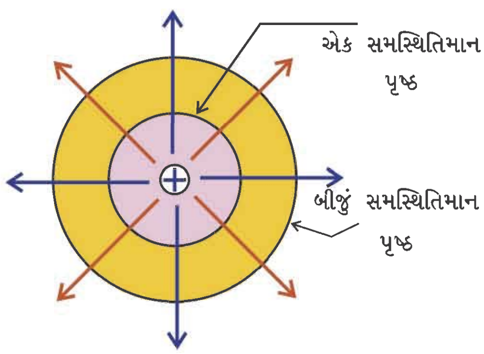
વળી, આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે કવચની અંદર તો વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય હોય છે. આથી **કવચની અંદર એકમ ધન વિદ્યુતભારની ગતિ દરમિયાન કંઈ કાર્ય કરવું પડતું નથી.** આથી કવચની અંદરનાં બધાં બિંદુઓએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન એકસમાન હોય છે, અને તે કવચની સપાટી પરના સ્થિતિમાનના મૂલ્ય જેટલું હોય છે. એટલે કે

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R} \quad (r \leq R \text{ માટે}) \qquad (2.7.8)$$

(અહીં એકમ ધન વિદ્યુતભારને માત્ર ∞ થી કવચની સપાટી સુધી જે ગતિ કરાવીએ તેમાંનું કાર્ય જ ગણતરીમાં આવેલ છે તે નોંધો.)

2.8 સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો (Equipotential Surfaces)

જે પૃષ્ઠ (સપાટી) **પરનાં બધાં બિંદુએ** વિદ્યુતસ્થિતિમાન **એકસમાન** હોય તે પૃષ્ઠને સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠ કહે છે.



આકૃતિ 2.5 સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો

બિંદુવત્ વિદ્યુતભારથી ઉદ્ભવતું વિદ્યુતસ્થિતિમાન $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}$ સૂત્ર પરથી મળે છે. આથી જો r અચળ હોય તો V પણ અચળ થાય. આ પરથી કહી શકીએ કે એકલ બિંદુવત્ વિદ્યુતભાર (Single Point Charge) q માટે સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો, આ વિદ્યુતભારને કેન્દ્ર તરીકે લઈને દોરેલા ગોળાઓની સપાટીઓ છે. (જુઓ આકૃતિ 2.5) આવી બે જુદી-જુદી સપાટીઓ પર સ્થિતિમાન જુદાં-જુદાં પણ **એક જ સપાટી** પરનાં બધાં બિંદુઓ માટે **એકસમાન** છે. બિંદુવત્ વિદ્યુતભારથી ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર તેમાંથી દોરેલી ત્રિજ્યાવર્તી રેખાઓ (દિશાઓ) પર હોય છે.

[$+q$ માટે તેનામાંથી બહાર જતી અને $-q$ માટે તેનામાં અંદર આવતી ત્રિજ્યાવર્તી દિશામાં હોય છે.] આ ત્રિજ્યાવર્તી રેખાઓ પેલી સમસ્થિતિમાન સપાટીઓને દરેક બિંદુએ લંબ હોય છે. તેથી આપેલા બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્રની દિશા તે બિંદુમાંથી પસાર થતા સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠને લંબરૂપે હોય છે. આ બાબત માત્ર બિંદુવત્ વિદ્યુતભાર માટે જ નહિ પણ કોઈ પણ વિદ્યુતભાર સંરચના (Charge Configuration) માટે વ્યાપકપણે સાચી છે, તેમ હવે આપણે સાબિત કરીશું.

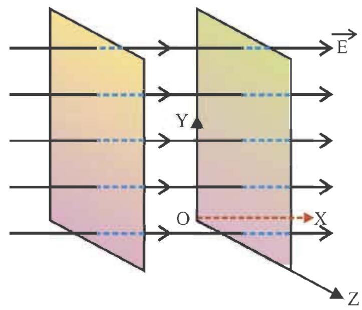
ધારો કે કોઈ સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠ પર (પૃષ્ઠને સમાંતર) એકમ ધન વિદ્યુતભારને એક બિંદુથી $d\vec{l}$ જેટલું સૂક્ષ્મ સ્થાનાંતર કરાવીએ છીએ. આ ક્રિયામાં વિદ્યુતક્ષેત્રની વિરુદ્ધમાં (બાહ્ય બળ વડે) કરવું પડતું કાર્ય $dW = -\vec{E}\cdot d\vec{l}$ = તે બે બિંદુઓ વચ્ચેનો વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત.

પરંતુ સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠ પર વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત = 0.

$$\therefore\ \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow E\,dl\,cos\theta = 0$$

જ્યાં, θ = $\vec{E}$ અને $d\vec{l}$ વચ્ચેનો કોણ. પણ $E \neq 0$ અને $dl \neq 0$

$$\therefore\ cos\theta = 0 \ \therefore\ \theta = \frac{\pi}{2} \ \therefore\ \vec{E} \perp d\vec{l}.$$



આકૃતિ 2.6 સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર માટે સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠ

પણ $d\vec{l}$ તો પૃષ્ઠ પર (પૃષ્ઠને સમાંતર) છે. આથી વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$, તે બિંદુએ સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠને લંબ છે. વિદ્યુતક્ષેત્રને દર્શાવવા માટે જે રીતે ક્ષેત્ર રેખાઓની સંકલ્પના ઉપયોગી થાય છે, તે જ રીતે સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો એ પણ વિદ્યુતક્ષેત્રના નિરૂપણ માટેની એક ઉપયોગી સંકલ્પના છે.

X દિશામાં પ્રવર્તતા સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર માટે ક્ષેત્ર રેખાઓ X-અક્ષને સમાંતર અને સમાન રીતે વહેંચાયેલી-equispaced-હોય છે, જ્યારે સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો એ X-અક્ષને લંબ (એટલે કે YZ સમતલને સમાંતર) હોય છે (જુઓ આકૃતિ 2.8).

ડાયપોલનાં સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો
(a) (માત્ર જાણકારી માટે)

બે સમાન મૂલ્યનાં ધન વિદ્યુભારોના તંત્ર માટે સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો
(b) (માત્ર જાણકારી માટે)

આકૃતિ 2.7

વિદ્યુત-ડાઈપોલનાં સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો આકૃતિ 2.7(a)માં દર્શાવ્યાં છે.

બે સમાન મૂલ્યના ધન વિદ્યુતભારોથી બનેલા તંત્ર માટે સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠો આકૃતિ 2.7(b)માં દર્શાવ્યાં છે.

2.9 વિદ્યુતક્ષેત્ર અને વિદ્યુતસ્થિતિમાન વચ્ચેનો સંબંધ

આપણે પરિચ્છેદ 2.3માં વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ પરથી વિદ્યુતસ્થિતિમાન V $\left(= -\int_{\infty}^{P}\vec{E}\cdot\vec{dr}\right)$ મેળવ્યું. હવે જો આપણે કોઈ વિસ્તારમાં વિદ્યુતસ્થિતિમાન વિષે જાણતા હોઈએ, તો તે પરથી વિદ્યુતક્ષેત્ર પણ મેળવી શકીએ છીએ.

આપણે પરિચ્છેદ 2.3માં જોયું છે કે P અને Q બિંદુઓ વચ્ચેના વિદ્યુતક્ષેત્રના રેખા-સંકલનની મદદથી તે બે બિંદુઓ વચ્ચેનો વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત મળી શકે છે (સમીકરણ 2.3.4), જે નીચે મુજબ છે :

$$V_Q - V_P = \Delta V = -\int_P^Q \vec{E}\cdot\vec{dl} \tag{2.9.1}$$

હવે જો આ P અને Q બિંદુઓ એકબીજાની અત્યંત નજીક હોય તો તેવા સૂક્ષ્મ સ્થાનાંતર $d\vec{l}$ માટે સંકલન કરવાની જરૂર ન પડે અને માત્ર એક જ પદ $\vec{E}\cdot d\vec{l}$ રાખી શકાય.

$$\therefore\ dV = -\vec{E}\cdot d\vec{l} \tag{2.9.2}$$

જો $d\vec{l}$ એ વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ ની દિશામાં હોય તો, $\vec{E}\cdot d\vec{l} = E\ dl\ cos0^{o} = E\ dl$

$$\therefore\ dV = -E\ dl$$

$$\therefore\ E = \frac{-dV}{dl} \tag{2.9.3}$$

આ સમીકરણ સ્થાનાંતર $d\vec{l}$ ની દિશામાંના વિદ્યુતક્ષેત્રનું માન આપે છે.

અત્રે, $\frac{dV}{dl}$ = એકમ અંતર દીઠ વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત. તેને **વિદ્યુતસ્થિતિમાન પ્રચલન** (Potential gradient) કહે છે. તેનો એકમ $\frac{V}{m}$ સમીકરણ (2.9.3) પરથી વિદ્યુતક્ષેત્રનો એકમ પણ $\frac{V}{m}$ તરીકે લખી શકાય છે, જે $\frac{N}{C}$ ને સમતુલ્ય છે.

જો આપણે સ્થાનાંતર $d\vec{l}$ વિદ્યુતક્ષેત્રની દિશામાં **ન લીધું** હોત પણ બીજી કોઈ દિશામાં લીધું હોત, તો $\frac{-dV}{dl}$ વડે આપણને **વિદ્યુતક્ષેત્રનો તે સ્થાનાંતરની દિશામાંનો ઘટક મળત.** દા.ત., જો વિદ્યુતક્ષેત્ર X દિશામાં જ હોય અને સ્થાનાંતર ગમે તે દિશામાં (ત્રિપરિમાણમાં) કરીએ તો,

$$\vec{E} = E_x\hat{i} \text{ અને } d\vec{l} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

$$\therefore\ dV = -(E_x\hat{i})\ .\ (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k})$$

$$= -E_x\ dx \tag{2.9.4}$$

$$\therefore\ E_x = \frac{-dV}{dx} \tag{2.9.5}$$

આ જ રીતે જો વિદ્યુતક્ષેત્ર અનુક્રમે માત્ર Y અને માત્ર Z દિશામાં હોત તો,

$$E_y = \frac{-dV}{dy} \tag{2.9.6}$$

$$E_z = \frac{-dV}{dz} \tag{2.9.7}$$

હવે જો વિદ્યુતક્ષેત્ર પણ ($x-$, $y-$, $z-$) ત્રણેય ઘટકો ધરાવતું હોય, તો સમીકરણ (2.9.5) (2.9.6) અને (2.9.7) પરથી વ્યાપક રૂપેનીચે મુજબ લખી શકાય.

$$E_x = \frac{-\partial V}{\partial x},\ E_y = \frac{-\partial V}{\partial y},\ E_z = \frac{-\partial V}{\partial z} \tag{2.9.8}$$

$$\text{અને } \vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right) \tag{2.9.9}$$

અહીં $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ એ $V(x, y, z)$નાં અનુક્રમે x, y, z સાપેક્ષે આંશિક વિકલન (Partial Differentiation) દર્શાવે છે. વળી, $V(x, y, z)$નું x સાપેક્ષે આંશિક વિકલન એટલે $V(x, y, z)$ના સૂત્રમાં y અને zને અચળ ગણીને માત્ર xની સાપેક્ષે મળતું Vનું વિકલન $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$.

સમીકરણ (2.9.1)માં P અને Q વચ્ચેનાં બધાં બિંદુ આગળના $\vec{E}$ નાં મૂલ્યો ગણતરીમાં આવે છે. જ્યારે સમીકરણ (2.9.3) અને (2.9.8) માત્ર આપેલા બિંદુ આગળના સ્થિતિમાનના ફેરફાર અને તે બિંદુ આગળના વિદ્યુતક્ષેત્ર વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે છે.

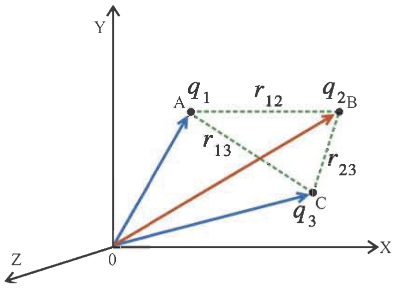
વિદ્યુતક્ષેત્રની દિશા, જે દિશામાં વિદ્યુતસ્થિતિમાનના ઘટાડાનો અંતર સાથેનો દર $\left(\frac{-dV}{dr}\right)$ મહત્તમ હોય તે દિશામાં હોય છે અને આવી દિશા સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠને હંમેશાં લંબરૂપે જ હોય છે.

આ સમગ્ર ચર્ચા વિદ્યુતક્ષેત્ર સંરક્ષી ક્ષેત્ર છે એ ગુણધર્મ પર આધારિત છે.

2.10 બિંદુવત્ વિદ્યુતભારોના તંત્રની સ્થિતિ-ઊર્જા

આકૃતિ 2.8માં દર્શાવ્યા મુજબ વિદ્યુતભારોના એક તંત્રમાં ત્રણ બિંદુવત્ વિદ્યુતભારો q_1, q_2 અને q_3 અનુક્રમે A, B અને C બિંદુ પર સ્થિર ગોઠવાયેલા છે. કોઈ યામતંત્રના ઊગમબિંદુથી તેમના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$ અને $\vec{r_3}$ છે. આપણે આ તંત્રની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા શોધવા માંગીએ છીએ.

$\vec{OA} = \vec{r_1}$, $\vec{OB} = \vec{r_2}$, $\vec{OC} = \vec{r_3}$



આકૃતિ 2.8 બિંદુવત્ વિદ્યુતભારોનું તંત્ર

પ્રારંભમાં આપણે આ બધા વિદ્યુતભારોને ઊગમબિંદુથી અનંત અંતરે અને એકબીજાથી પણ અનંત અંતરે રહેલા છે તેમ કલ્પીશું. આ સ્થિતિમાં તેમની વચ્ચે લાગતું વિદ્યુતબળ શૂન્ય છે અને તેમની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા પણ શૂન્ય છે.

વળી, A, B અને C આગળ વિદ્યુતક્ષેત્ર પણ શૂન્ય છે. આવી સ્થિતિમાંથી ઉપર દર્શાવેલી સ્થિતિમાં વિદ્યુતભારોને ગોઠવવામાં બાહ્ય બળો વડે (વિદ્યુતક્ષેત્રો વિરુદ્ધ) જે કુલ કાર્ય કરવું પડે તે આ તંત્રની સ્થિતિ-ઊર્જા રૂપે સંગ્રહ પામે છે.

સૌપ્રથમ આપણે વિદ્યુતભાર q_1ને અનંત અંતરેથી A બિંદુ પર લાવીએ. આ ક્રિયામાં કોઈ વિદ્યુતક્ષેત્ર હાજર ન હોવાથી વિદ્યુતક્ષેત્રની વિરુદ્ધમાં બાહ્ય બળ વડે કરવું પડતું કાર્ય W_1 = શૂન્ય છે. (આમાં આ વિદ્યુતભારનું પોતાનું ક્ષેત્ર તો ગણવાનું છે જ નહિ એ તમે જાણો જ છો.)

હવે A બિંદુ પર સ્થાપિત થયેલો q_1 વિદ્યુતભાર પોતાની આસપાસ વિદ્યુતક્ષેત્ર અને વિદ્યુતસ્થિતિમાન ઉત્પન્ન કરે છે. આ q_1ને લીધે તેનાથી r_{12} અંતરે રહેલા B બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન (સમીકરણ 2.5.7 પરથી)

$$V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{12}} \tag{2.10.1}$$

જ્યાં, $r_{12} = |\vec{r_2} - \vec{r_1}|$

આથી હવે q_2 વિદ્યુતભારને અનંત અંતરેથી B બિંદુએ લાવવા માટે બાહ્ય બળ વડે કરવું પડતું કાર્ય

$$W_2 = (V_B)q_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} \tag{2.10.2}$$

(સમીકરણ 2.4.2 પરથી)

(જો આપણે આ **બે જ વિદ્યુતભારો**ના તંત્રનો વિચાર કરવો હોય, તો આ કુલ કાર્ય $W_1 + W_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\,q_2}{r_{12}}$ એ આ તંત્રની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા U થાય.)

હવે q_1 અને q_2 બંને વિદ્યુતભારો પોતાની આસપાસ વિદ્યુતક્ષેત્ર અને વિદ્યુતસ્થિતિમાન ઉત્પન્ન કરશે. તેમના વડે C બિંદુએ ઉદ્‌ભવતું વિદ્યુતસ્થિતિમાન

$$V_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{23}} \tag{2.10.3}$$

આથી, હવે q_3 વિદ્યુતભારને અનંત અંતરેથી C બિંદુએ લાવવા માટે કરવું પડતું કાર્ય

$$W_3 = (V_C)q_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_3}{r_{23}} \tag{2.10.4}$$

આથી આ ત્રણ વિદ્યુતભારોના તંત્રની આ મુજબની ગોઠવણીમાં કરવું પડતું કુલ કાર્ય ($= W_1 + W_2 + W_3$) આ તંત્રની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા U છે.

$$\therefore\ U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_3}{r_{23}} \tag{2.10.5}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}}\right] \tag{2.10.6}$$

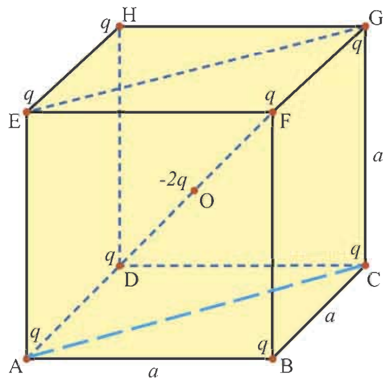
$$= k\left[\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}}\right] \tag{2.10.7}$$

આ પરથી વ્યાપક રૂપે n-વિદ્યુતભારોથી બનતાં તંત્ર માટે વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા

$$U = \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{n} \frac{kq_iq_j}{r_{ij}} \tag{2.10.8}$$

તરીકે લખી શકાય.

વિદ્યુતક્ષેત્ર સંરક્ષી હોવાથી તંત્રમાં ગમે તે વિદ્યુતભારને પ્રથમ લાવીએ કે પછીથી લાવીએ તો પણ વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જામાં કંઈ ફેર પડતો નથી. (એટલે કે સમીકરણ 2.10.8) વડે જ અપાય છે.



ઉદાહરણ 7 : આકૃતિમાં દર્શાવેલ વિદ્યુતભાર તંત્રની સ્થિતિ-ઊર્જા ગણો.

ઉકેલ : આકૃતિમાં દર્શાવેલ તંત્રની સ્થિતિ-ઊર્જા = વિદ્યુતભારોની બધી જ જોડ (pairs)ની સ્થિતિ-ઊર્જાનો સરવાળો. અહીં,

(1) AB જેવી 12 જોડ છે. આવી દરેક જોડના વિદ્યુતભારો વચ્ચેનું અંતર = a

આવી જોડોની સ્થિતિ-ઊર્જા,

$$U_1 = \frac{kq^2}{a} \times 12 \tag{1}$$

(2) AC જેવી પણ 12 જોડ છે. આવી દરેક જોડના વિદ્યુતભારો વચ્ચેનું અંતર $a\sqrt{2}$ છે.

$(\because\ AC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2})$

તેમની સ્થિતિ-ઊર્જા $U_2 = \frac{kq^2}{a\sqrt{2}} \times 12$ (2)

(3) AG જેવી 4 જોડ છે. દરેક જોડમાં વિદ્યુતભારો વચ્ચેનું અંતર $a\sqrt{3}$ છે.

($\because$ AG $= \sqrt{AC^2+CG^2} = \sqrt{2a^2+a^2} = \sqrt{3}\,a^2 = a\sqrt{3}$)

તેમની સ્થિતિ-ઊર્જા $U_3 = \frac{kq^2}{a\sqrt{3}} \times 4$ (3)

(4) AO જેવી 8 જોડ, દરેક જોડના વિદ્યુતભારો વચ્ચેનું અંતર $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ છે. (AO $= \frac{AG}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$)

તેમની સ્થિતિ-ઊર્જા $U_4 = -\frac{kq\,2q}{\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \times 8$ (4)

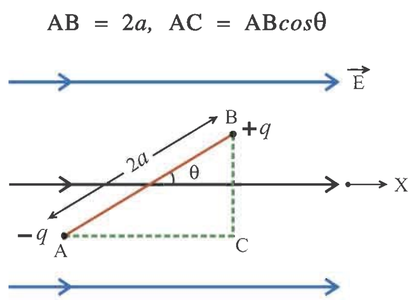
$\therefore$ કુલ સ્થિતિ-ઊર્જા $U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4$

$$\therefore U = \frac{12kq^2}{a} + \frac{12kq^2}{a\sqrt{2}} + \frac{4kq^2}{a\sqrt{3}} - \frac{32kq^2}{a\sqrt{3}}$$

$$= \frac{kq^2}{a}\left[12+\frac{12}{\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{3}}-\frac{32}{\sqrt{3}}\right] = \frac{kq^2}{a}\left[12(1+\frac{1}{\sqrt{2}})-\frac{28}{\sqrt{3}}\right]$$

2.11 બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રમાં વિદ્યુત-ડાઈપોલની સ્થિતિ-ઊર્જા

આકૃતિ 2.9માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક વિદ્યુત-ડાઈપોલ ABને X દિશામાંના સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ માં એવી રીતે મૂકેલ છે કે ડાઈપોલની અક્ષ ક્ષેત્ર $\vec{E}$ સાથે θ કોણ બનાવે છે. તેની ડાઈપોલ-મોમેન્ટ $p = q(2a)$; AB દિશામાં છે. આ વિદ્યુત-ડાઈપોલની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા એટલે તેના બંને વિદ્યુતભારોની ($+q$ અને $-q$ની) વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જાનો બૈજિક સરવાળો. આપણે યાદચ્છિક રીતે $-q$ વિદ્યુતભાર પાસે વિદ્યુતસ્થિતિમાન શૂન્ય લઈશું. આથી તેની સ્થિતિ-ઊર્જા શૂન્ય થશે. હવે તેની સાપેક્ષે $+q$ની સ્થિતિ-ઊર્જા શોધીએ, તો તે સમગ્ર ડાઈપોલની સ્થિતિ-ઊર્જા થશે.



આકૃતિ 2.9 ડાયપોલની સ્થિતિ-ઊર્જા

અત્રે વિદ્યુતક્ષેત્ર X દિશામાં જ હોવાથી

$$E = \frac{-\Delta V}{\Delta x} = \frac{-(V_B - V_A)}{AC}$$

$$= \frac{-V_B}{2a\,cos\theta} \quad (\because V_A = 0) \tag{2.11.1}$$

$$\therefore V_B = -E\,(2a\ cos\theta) \tag{2.11.2}$$

$\therefore$ B આગળ $+q$ વિદ્યુતભારની સ્થિતિ-ઊર્જા,

$$U = qV_B = q[-E\ 2a\ cos\theta] \tag{2.11.3}$$

$$= -E(q\ 2a\ cos\theta)$$

$$= -E\ p\ cos\theta\ [\because q(2a) = p]$$

$$= -\vec{E}\cdot\vec{p} \tag{2.11.4}$$

∴ સમગ્ર ડાઈપોલની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા U

$$= -\vec{E} \cdot \vec{p} = -\vec{p} \cdot \vec{E} \tag{2.11.5}$$

કેટલાક મુદ્દા નોંધી લઈએ :

(1) જો ડાઈપોલની અક્ષ ક્ષેત્રને લંબ હોય, તો $\theta = \frac{\pi}{2}$ અને

$$U = Ep\ cos\frac{\pi}{2} = 0$$

(2) જો ડાઈપોલની અક્ષ ક્ષેત્રને સમાંતર હોય (($\vec{AB} \parallel \vec{E}$ હોય)

તો $\theta = 0$ ∴ $U = -pE$. સ્થિતિ-ઊર્જાનું આ **લઘુતમ મૂલ્ય** છે. (કોઈ પણ તંત્ર તેની સ્થિતિ-ઊર્જા લઘુતમ બને તેવી સ્થિતિમાં રહેવાનો પ્રયત્ન કરે છે.)

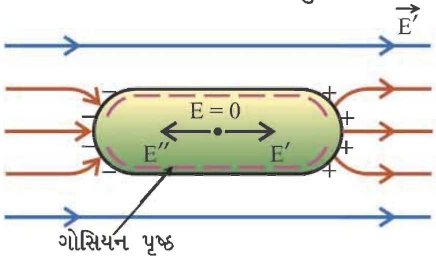
તેથી અહીં, ડાઈપોલ તેની અક્ષ, વિદ્યુતક્ષેત્રને સમાંતર ગોઠવવાનો પ્રયત્ન કરે છે, જેથી $\vec{p}$, $\vec{E}$ ને સમાંતર બને. આ સ્થિતિમાં ડાઈપોલ સ્થિર સમતુલનમાં રહે છે. ($\theta = \pi$ માટે ડાઈપોલ અસ્થિર સંતુલનમાં હોય છે.)

2.12 સુવાહકોનું સ્થિત-વિદ્યુતશાસ્ત્ર (Electrostatics of Conductors)

ધાત્વિક સુવાહકોને વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકવામાં આવે અથવા આવા સુવાહકો પર વિદ્યુતભાર મૂકવામાં આવે ત્યારે તેમાં કેવી અસરો થાય છે તે જાણવું રસપ્રદ છે.

(a) સુવાહકો પર બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રની અસર

ધાત્વિક સુવાહકોમાં લેટિસ બિંદુઓ પર ગોઠવાયેલાં ધન આયનો અને આવાં આયનો વચ્ચેના અવકાશમાં અસ્તવ્યસ્ત ગતિ કરતા મુક્ત ઇલેક્ટ્રૉન હોય છે. તેઓ ધાતુમાં ગતિ કરવા માટે મુક્ત છે, પણ ધાતુમાંથી બહારનીકળી જવા માટે મુક્ત નથી. આવા વાહકને બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ 'માં મૂકીએ ત્યારે મુક્ત ઇલેક્ટ્રૉન્સ ક્ષેત્રની વિરુદ્ધ દિશામાં લાગતા બળની અસર હેઠળ ગતિ કરીને વાહકના એક છેડાની સપાટી પર જમા થાય છે અને તેટલા જ પ્રમાણમાં બીજા છેડા પર **ધન વિદ્યુતભાર** 'જમા' થયેલો ગણી શકાય છે. આમ, વિદ્યુતભારો **પ્રેરિત** થાય છે. આ પ્રેરિત વિદ્યુતભારો, વાહકના અંદરના વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}''$ ઉત્પન્ન કરે છે, જે બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રની **વિરુદ્ધ** દિશામાં હોય છે. આ બન્ને વિદ્યુતક્ષેત્રો સમાન મૂલ્યનાં થાય ત્યારે વાહકના અંદરના વિસ્તારમાં પરિણામી (net) વિદ્યુતક્ષેત્ર ($\vec{E}$) શૂન્ય થાય છે. (જુઓ આકૃતિ 2.10). હવે વાહકમાં વિદ્યુતભારોની ગતિ અટકી જાય છે અને વિદ્યુતભારો છેડાના પૃષ્ઠ પર સ્થિર થઈ જાય છે.



આકૃતિ 2.10 વિદ્યુતક્ષેત્રમાં સુવાહક

હવે આકૃતિ 2.10માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સપાટીની નજીક જ અંદરના વિસ્તારમાં ત્રુટક રેખા વડે દર્શાવેલા પૃષ્ઠ જેવું એક ગૉસિયન પૃષ્ઠ વિચારીએ. આ પૃષ્ઠ પરનું દરેક બિંદુ વાહકની અંદરનું બિંદુ હોવાથી સમગ્ર પૃષ્ઠ પર વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ શૂન્ય છે. આથી તેના વડે ઘેરાતો વિદ્યુતભાર પણ શૂન્ય છે. ($\because \int \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{q}{\varepsilon_0}$).

આમ બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકેલ ધાત્વિક સુવાહકોના કિસ્સામાં,

(1) વાહકના પૃષ્ઠ પર સ્થિર વિદ્યુતભાર વિતરણ પ્રેરિત થાય છે.

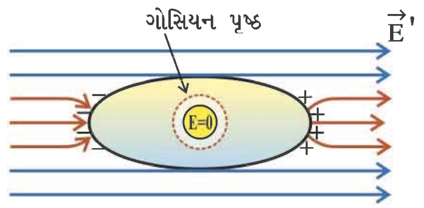
(2) વાહકના અંદરના વિસ્તારમાં પરિણામી (net) વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય હોય છે.

(3) વાહકના અંદરના વિસ્તારમાં ચોખ્ખો (net) વિદ્યુતભાર શૂન્ય હોય છે.

(4) વાહકની બહારના પૃષ્ઠ પરના દરેક બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર સ્થાનિક રીતે પૃષ્ઠને લંબરૂપે હોય છે. જો વિદ્યુતક્ષેત્ર લંબરૂપે ન હોત તો, વિદ્યુતક્ષેત્રનો પૃષ્ઠને સમાંતર કંઈક ઘટક મળત અને તેને લીધે વિદ્યુતભાર સપાટી પર ગતિ કરત. પણ હવે તો ગતિ અટકી ગઈ છે અને વિદ્યુતભારો સ્થિર થઈ ગયા છે. આમ વિદ્યુતક્ષેત્રનો પૃષ્ઠને સમાંતર ઘટક શૂન્ય હશે, તેથી વિદ્યુતક્ષેત્ર પૃષ્ઠને લંબરૂપે હશે.

(5) સુવાહકની અંદર બધે $\vec{E} = 0$ હોવાથી સુવાહકના સમગ્ર કદના વિસ્તારમાં (એટલે કે અંદર) વિદ્યુતસ્થિતિમાન અચળ હોય છે અને સપાટી પરના સ્થિતિમાનના મૂલ્ય જેટલું હોય છે.

(6) વાહકની અંદર કોઈ બખોલ (cavity) હોય તો વાહકને બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્ર ($\vec{E}'$) માં મૂકવા છતાં વાહકની અંદર તેમજ બખોલની અંદર પણ પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય જ થાય છે. આકૃતિ 2.11માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે બખોલની ફરતે એક ગૉસિયન પૃષ્ઠ વિચારો. આ પૃષ્ઠ પરનું દરેક બિંદુ વાહકની અંદરનું બિંદુ હોવાથી આ સમગ્ર પૃષ્ઠ પર વિદ્યુતક્ષેત્ર ($\vec{E}$) શૂન્ય છે. આથી બખોલની સપાટી પરનો કુલ વિદ્યુતભાર શૂન્ય છે, ($\int \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{q}{\varepsilon_0}$) અને બખોલની અંદર પણ વિદ્યુતભાર ન હોવાથી બખોલની અંદર બધે વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય છે.



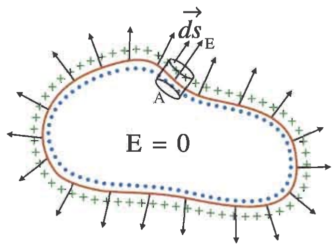
આકૃતિ 2.11 સુવાહકમાં બખોલ

આ હકીકતને ઇલેક્ટ્રૉસ્ટેટિક શિલ્ડિંગ (electrostatic shielding) કહે છે. આપણે કારમાં બેઠા હોઈએ અને બહાર વીજળીના કડાકા-ભડાકા થતા હોય તો વીજળીથી બચવા માટે કારનાં બારી-બારણાં (કારને સમગ્રપણે ધાતુની જ ધારી લઈએ !) બંધ કરી દેવાં જોઈએ. આમ કરવાથી આપણે 'કારની બખોલ'માં આવી જઈએ છીએ અને ઇલેક્ટ્રૉસ્ટેટિક શિલ્ડિંગ થતાં આપણને વીજળીથી રક્ષણ મળે છે.

(b) સુવાહક પર વિદ્યુતભાર મૂકતાં થતી અસરો : ઉપરની ચર્ચામાં આપણે ધાત્ત્વિક વાહકને બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકતાં કેવી અસરો થાય છે, તેનો વિચાર કર્યો. હવે **બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રની ગેરહાજરી**માં ધાતુ પદાર્થ પર વિદ્યુતભાર મૂકીએ તો ઉદ્‌ભવતી અસરોની નોંધ કરીશું :

(1) ધાત્ત્વિક વાહકને બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકેલ હોય કે ન હોય તથા તેના પર વિદ્યુતભાર પણ મૂકેલ હોય કે ન હોય તેવી બધી (પણ સ્થાયી) પરિસ્થિતિમાં વાહકની **અંદરના ભાગમાં** તો **બધે વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય જ** હોય છે. આ એક અત્યંત મહત્ત્વની અને વ્યાપક હકીકત છે. (સુવાહકને વ્યાખ્યાયિત કરવાના ગુણધર્મ તરીકે આ બાબતને લઈ શકાય છે.)

(2) ધાતુ પદાર્થ પર મૂકેલો વિદ્યુતભાર તે વાહકના **બાહ્ય પૃષ્ઠ પર જ વિતરિત થાય છે.** ધાતુના અંદરના વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય હોય છે તે બાબત પરથી આપણે આ બાબત સમજી શકીએ છીએ. સુવાહકના પૃષ્ઠની અંદર તદ્દન નજીક, બિંદુઓ વડે દર્શાવેલા ગાઉસિયન પૃષ્ઠનો વિચાર કરો (આકૃતિ 2.12). તેના પરનું દરેક બિંદુ વાહકના પૃષ્ઠ પર નહિ પણ પૃષ્ઠની અંદર આવેલું છે, તેથી દરેક બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય છે. આથી ગૉસના પ્રમેય પરથી તે પૃષ્ઠ વડે ઘેરાયેલા વિદ્યુતભાર પણ શૂન્ય હોય છે.



આકૃતિ 2.12

(3) સ્થાયી પરિસ્થિતિમાં આ વિદ્યુતભારો પૃષ્ઠ પર સ્થિર હોય છે. આ પરથી કહી શકાય કે વિદ્યુતક્ષેત્ર સ્થાનિક રીતે પૃષ્ઠને લંબ હોય છે, જુઓ આકૃતિ (2.12).

(4) વિદ્યુતભારિત વાહકના પૃષ્ઠ પરના કોઈ પણ બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$ જેટલું હોય છે, જ્યાં $\hat{n}$ = પૃષ્ઠમાંથી બહાર આવતા લંબની દિશામાંનો એકમસદિશ.

આ બાબતને સાબિત કરવા માટે આપણે આકૃતિ (2.12)માં દર્શાવેલ એક સૂક્ષ્મ લંબાઈ અને સૂક્ષ્મ આડછેદ ધરાવતી પિલ-બૉક્સ (નળાકાર) જેવી ગૉસિયન સપાટીનો વિચાર કરીશું. તેનો થોડો ભાગ પૃષ્ઠની અંદર અને થોડો ભાગ પૃષ્ઠની બહાર છે. આ પિલ-બૉક્સની બંધ સપાટી વડે ઘેરાયેલો વિદ્યુતભાર $q = \sigma ds$; જ્યાં σ = સુવાહક પર વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠઘનતા. વાહકના પૃષ્ઠના દરેક બિંદુએ $\vec{E}$, પૃષ્ઠ-ખંડને લંબ છે, તેથી પૃષ્ઠ સદિશને સમાંતર ($\vec{E} \parallel \vec{ds}$) થશે.

પરંતુ પૃષ્ઠની અંદર $\vec{E} = 0$ છે. તેથી પૃષ્ઠની અંદરના પિલ-બૉક્સના આડછેદમાંથી બહાર આવતું ફ્લક્સ = 0. તેની બાજુ માટે દરેક બિંદુ આગળ ક્ષેત્રફળ સદિશ $\vec{E}$ને લંબ છે. તેથી તેમાંથી ફ્લક્સ = 0. પૃષ્ઠની બહારના પિલ-બૉક્સના આડછેદમાંથી બહાર આવતું ફ્લક્સ $\vec{E} \cdot \vec{ds} = Eds$

$\therefore$ કુલ ફ્લક્સ $= E\, ds$

$$\therefore \text{ ગૉસના પ્રમેય અનુસાર } E\, ds = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\, ds}{\varepsilon_0} \tag{2.12.1}$$

$$\therefore E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{2.12.2}$$

$$\text{સદિશ સ્વરૂપમાં } \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n} \tag{2.12.3}$$

જો σ ધન હોય તો $\vec{E}$ પૃષ્ઠમાંથી બહારની તરફના લંબની દિશામાં છે. જો σ ઋણ હોય તો, $\vec{E}$ પૃષ્ઠની અંદર તરફના લંબની દિશામાં છે.

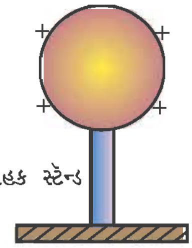
(5) જો કોઈ વાહકની બખોલમાં વિદ્યુતભાર મૂકવામાં આવે તો, આ વિદ્યુતભારને કારણે બખોલની સપાટી અને વાહકની બાહ્ય સપાટી પર વિદ્યુતભારો એવી રીતે પ્રેરિત થશે કે વાહકના અંદરના પણ બખોલની બહાર હોય તેવા વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય જ થાય છે. બખોલની અંદર વિદ્યુતક્ષેત્ર અશૂન્ય હોય છે. તેમજ વાહકની બહારના ભાગમાં પણ તે વિદ્યુતભારને લીધે વિદ્યુતક્ષેત્ર અશૂન્ય હોય છે.

નોંધ (માત્ર જાણકારી પૂરતી) : ઉપરની સમગ્ર ચર્ચામાં વાહકોને અલગ કરેલા (insulated) કલ્પેલ છે. વાહકના **અણીવાળા ભાગ**ના પૃષ્ઠ પર પૃષ્ઠ વિદ્યુતઘનતા ઘણી મોટી હોય છે. પરિણામે આવા ભાગ પાસેના વિસ્તારમાં **વિદ્યુતક્ષેત્ર પ્રબળ** હોય છે. હવે જો આ વિદ્યુતક્ષેત્ર પૂરતું પ્રબળ બની જાય તો પૃષ્ઠ પરના **ઈલેક્ટ્રૉન** તેમને ધાતુ સાથે જકડી રાખતાં બળોનો સામનો **કરી પૃષ્ઠ પરથી છટકી** જાય. આ ઘટનાને **કોરોના ડિસ્ચાર્જ** કહે છે. (વ્યાપક રીતે આ ઘટનાને **ડાઈઈલેક્ટ્રિક બ્રેકડાઉન** કહે છે.)

પૃષ્ઠમાંથી છટકી ગયેલ ઈલેક્ટ્રૉન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં પ્રવેગિત ગતિ કરે છે અને માર્ગમાં આવતા હવાના કણો સાથે અથડાય છે. પરિણામે, ઉત્તેજિત થયેલ કણો વિકિરણનું ઉત્સર્જન કરે છે અને લીલાશ પડતો ગ્લો ઉત્પન્ન થાય છે. વળી, અથડામણ દરમિયાન હવાના અણુઓનું આયનીકરણ પણ થાય છે.

જૂના જમાનામાં ખલાસીઓને પોતાના વહાણના શઢના અણીવાળા ભાગો પાસે આવા ગ્લો દેખાતા હોય, ત્યારે તેઓ તેમને Elmo's fire એવું નામ આપતા.

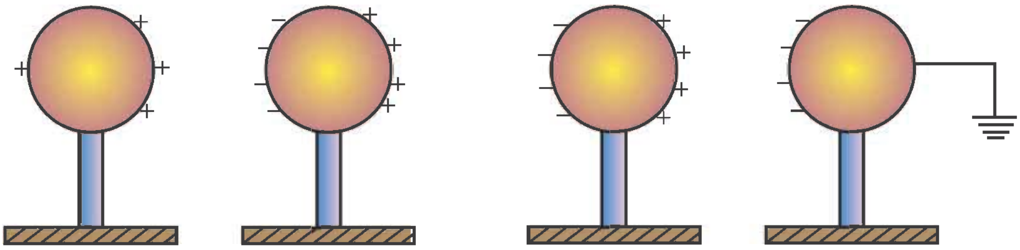
2.13 કૅપેસિટર્સ અને કૅપેસિટન્સ (Capacitors and Capacitance)



આકૃતિ 2.13

આકૃતિ 2.13માં દર્શાવેલ એક અલગ કરેલા વાહક ગોળાને ધ્યાનમાં લો. ધારો કે આ ગોળા પર ક્રમશઃ ધન વિદ્યુતભાર મૂકવામાં આવે છે. જેમજેમ ગોળા પર ધન વિદ્યુતભાર (Q) વધતો જાય તેમતેમ ગોળાની સપાટી પરનું સ્થિતિમાન (V) અને ગોળાની આસપાસના વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર ($\vec{E}$) પણ ક્રમશઃ વધતાં જાય છે. આમ કરતાં કોઈ એક તબક્કે વિદ્યુતક્ષેત્ર ગોળાની આસપાસની હવાના કણોનું આયનીકરણ કરવા જેટલું પ્રબળ બની જાય છે. આથી ગોળા પરનો વિદ્યુતભાર હવામાંથી વહન પામે છે, એટલે હવે હવાનો અવાહકતાનો ગુણધર્મ ભાંગી પડે છે. (જળવાતો નથી)

આ અસરને ડાઈઈલેક્ટ્રિક બ્રેકડાઉન કહે છે. આમ, ગોળા પરનો વિદ્યુતભાર leak થવા લાગે છે અને હવે ગોળો કોઈ વધારાના વિદ્યુતભારનો સંગ્રહ કરી શકતો નથી. આ સમગ્ર પ્રક્રિયા દરમિયાન ગોળા પરના વિદ્યુતભાર (Q) અને ગોળા પરના સ્થિતિમાન (V)નો ગુણોત્તર અચળ હોય છે. આ ગુણોત્તરને ગોળાનું કૅપેસિટન્સ (C) કહે છે. $[C = \frac{Q}{V}]$



આકૃતિ 2.14 કૅપેસિટર

કોઈ અવાહક માધ્યમ જે મહત્તમ વિદ્યુતક્ષેત્ર સુધી પોતાનો અવાહકતાનો ગુણધર્મ જાળવી શકે છે, તેને તે માધ્યમની ડાઈઈલેક્ટ્રિક સ્ટ્રૅન્થ (dielectric strength) કહે છે. (અથવા જે લઘુતમ વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે આપેલા અવાહક માધ્યમમાં આયનીકરણ શરૂ થાય તેને પણ તે માધ્યમની ડાઈઈલેક્ટ્રિક સ્ટ્રૅન્થ કહે છે.) હવા માટે ડાઈઈલેક્ટ્રિક સ્ટ્રૅન્થનું મૂલ્ય લગભગ $3000 \frac{V}{mm}$ છે.

હવે, જો ઉપર ચર્ચેલ ગોળાની વિદ્યુતભાર સંગ્રહ કરવાની ક્ષમતા (કૅપેસિટન્સ C) વધારવી હોય તો બીજા એક અલગ કરેલા વાહક ગોળાને પ્રથમ ગોળાની નજીક લાવીને મૂકો. આમ કરવાથી બીજા ગોળામાં વિદ્યુતભાર પ્રેરિત થશે. જુઓ આકૃતિ 2.14(b) જો બીજા ગોળાનું આકૃતિ 2.14(c) મુજબ અર્થિંગ કરવામાં આવે તો પૃથ્વીમાંથી ઈલેક્ટ્રૉન્સ ગોળા પર જઈ ગોળા પરના ધન વિદ્યુતભારને તટસ્થ કરી દે છે. હવે બીજા ગોળા પરના ઋણ વિદ્યુતભારને લીધે પ્રથમ ગોળાની સપાટી પરના સ્થિતિમાનમાં અને તેની નજીકના વિદ્યુતક્ષેત્રમાં પણ ઘટાડો થાય છે. પ્રથમ ગોળા પર હવે અગાઉ કરતાં વિદ્યુતભાર સંગ્રહ કરવાની ક્ષમતા વધે છે. આ સ્થિતિમાં પણ દરેક તબક્કે ગોળા પરના વિદ્યુતભાર Q અને બંને ગોળા વચ્ચેના p.d. (V) નો ગુણોત્તર અચળ માલૂમ પડે છે. આ ગુણોત્તરને આ બે ગોળાના તંત્રનું કૅપેસિટન્સ (C) કહે છે. આ કૅપેસિટન્સનું મૂલ્ય ગોળાઓનાં પરિમાણ, તેમની સાપેક્ષ ગોઠવણી અને તેમની વચ્ચેના માધ્યમ પર આધાર રાખે છે.

"એકબીજાથી અલગ કરેલા બે સુવાહકથી બનતી રચનાને કૅપેસિટર કહે છે." આવા સુવાહકોને કૅપેસિટરની પ્લેટો કહે છે. ધન વિદ્યુતભાર ધરાવતા સુવાહકને ધન પ્લેટ અને ઋણ વિદ્યુતભાર ધરાવતા સુવાહકને ઋણ પ્લેટ કહે છે. ધન પ્લેટ પરના વિદ્યુતભારને કૅપેસિટર પરનો વિદ્યુતભાર અને બંને વાહકો વચ્ચેના વિદ્યુતસ્થિતિમાનના તફાવત (V)ને કૅપેસિટરની બે પ્લેટો વચ્ચેનો વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત (p.d.) કહે છે. અહીં કૅપેસિટરનું કૅપેસિટન્સ $C = \frac{Q}{V}$.

કૅપેસિટન્સનો SI એકમ coulomb / volt છે અને તે મહાન વિજ્ઞાની માઈકલ ફેરેડેની સ્મૃતિમાં Farad તરીકે ઓળખાય છે. તેની સંજ્ઞા F છે. Farad એ વ્યાવહારિક હેતુઓ માટે મોટો એકમ છે અને તેથી વ્યવહારમાં નાના એકમો microfarad ($1\ \mu F = 10^{-6}F$), nenofarad ($1\ nF = 10^{-9}F$) અને picofarad ($1\ pF = 10^{-12}F$) વપરાય છે.

નિશ્ચિત કૅપેસિટન્સ ધરાવતા કૅપેસિટરને ⊣⊢ સંજ્ઞા દ્વારા અને ચલ કૅપેસિટન્સ ધરાવતા કૅપેસિટરને સંજ્ઞા દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે.

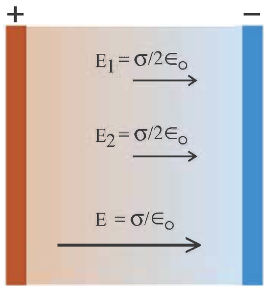
વળી, Q વિદ્યુતભાર ધરાવતા R ત્રિજ્યાના **એક જ વાહક ગોળાને** પણ કૅપેસિટર કહી શકાય, કારણ કે તેની પણ વિદ્યુતભાર સંગ્રહ કરવાની 'કંઈક' ક્ષમતા તો છે જ. આવા કૅપેસિટર માટે બીજો વાહક (–Q વિદ્યુતભારવાળો) અનંત અંતરે હોય તેમ ગણવામાં આવે છે. ગોળાથી અનંત અંતરે સ્થિતિમાન શૂન્ય ગણતાં આ ગોળાની સપાટી પરનું સ્થિતિમાન $V = \frac{kQ}{R}$, આથી આ ગોળા અને અનંત અંતરે કલ્પિત ગોળા વચ્ચેનો વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત પણ આ $V = \frac{kQ}{R}$ જેટલો થાય.

$\therefore$ આ ગોળાનું કેપેસિટન્સ $C = \frac{Q}{V} = \frac{QR}{kQ} = \frac{R}{k} = 4\pi\varepsilon_0 R$ ($\because k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$). પૃથ્વીને પણ કેપેસિટર ગણી શકાય, તમે તેનું કેપેસિટન્સ ગણી જુઓ.

2.14 સમાંતર પ્લેટ કેપેસિટર (Parallel Plate Capacitor)

આવા કેપેસિટરમાં સમાન ક્ષેત્રફળ (A) ધરાવતી એકબીજાથી અલગ કરેલી બે વાહક પ્લેટોને એકબીજાથી અમુક (d) અંતરે એકબીજાને સમાંતર રાખેલી હોય છે. (જુઓ આકૃતિ 2.15) તેમની વચ્ચેના અવાહક માધ્યમ તરીકે શૂન્યાવકાશ (કે હવા) છે તેમ ધારીને આપણે તેના કેપેસિટન્સનું સૂત્ર મેળવીશું.

ધારો કે આ કેપેસિટર પરનો વિદ્યુતભાર Q છે, તેથી તેની પ્લેટો પર વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠઘનતાનું મૂલ્ય $\sigma = \frac{Q}{A}$ અહીં dનું મૂલ્ય દરેક પ્લેટના પરિમાણની સરખામણીએ ઘણું નાનું રાખવામાં આવે છે. આમ કરવાથી પ્લેટના છેડા નજીકના વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્રની અનિયમિતતા અવગણી શકાય છે અને પ્લેટો વચ્ચેના સમગ્ર વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ સમાન ગણી શકાય છે.



આકૃતિ 2.15 સમાંતર પ્લેટ કેપેસિટર

ધન પ્લેટને લીધે બે પ્લેટ વચ્ચેના વિસ્તારમાં ઉદ્ભવતું સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \text{ (ધનથી ઋણ પ્લેટની દિશામાં)} \quad (2.14.1)$$

તે જ પ્રમાણે ઋણ પ્લેટને લીધે તે જ વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર

$$E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad (2.14.2)$$

(તે પણ ધનથી ઋણ પ્લેટ તરફ)

આ બન્ને વિદ્યુતક્ષેત્રો એક જ દિશામાં હોવાથી, પરિણામી સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર...

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (2.14.3)$$

તે ધન પ્લેટથી ઋણ પ્લેટની દિશામાં મળે છે.

$$\therefore E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \quad (2.14.4)$$

વળી, બન્ને પ્લેટોની બીજી તરફના વિસ્તારમાં E_1 અને E_2 સમાન મૂલ્યના અને પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં હોવાથી ત્યાં પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય થાય છે.

જો આ બન્ને પ્લેટો વચ્ચેનો વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત (p.d) V હોય, તો $V = Ed$. (2.14.5)

$\therefore$ સમીકરણ (2.14.4) અને (2.14.5) પરથી,

$$V = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} d \quad (2.14.6)$$

આથી સમાંતર પ્લેટ કેપેસિટરનું કેપેસિટન્સ $C = \frac{Q}{V}$; સૂત્ર પરથી

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \quad (2.14.7)$$

સમીકરણ (2.14.7) પરથી સ્પષ્ટ છે કે જો દરેક 1 m × 1 mની હોય તેવી બે પ્લેટો વચ્ચેનું અંતર 1 mm હોય, તો તેનું કેપેસિટન્સ $C = \frac{(8.85\times10^{-12})(1)}{10^{-3}} = 8.85 \times 10^{-9}$F થશે, અને જો 1 F જેટલું કેપેસિટન્સ જોઈએ, તો 1 mm અંતરે રાખેલી બન્ને પ્લેટમાંની દરેકનું ક્ષેત્રફળ

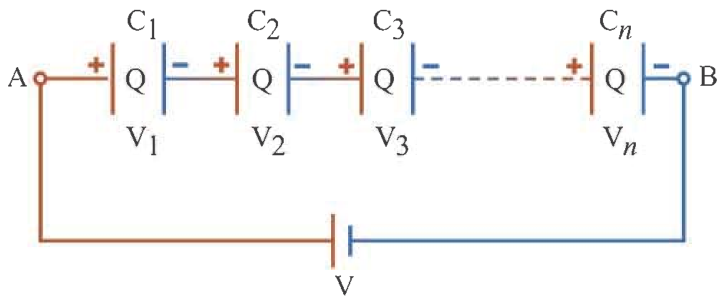
$A = \frac{Cd}{\varepsilon_0} = \frac{(1\times10^{-3})}{8.85\times10^{-12}} = 1.13 \times 10^8 \text{ m}^2$ હોવું જોઈએ, એટલે કે દરેક પ્લેટની લંબાઈ અને પહોળાઈ દરેક લગભગ 1×10^4 m = 10 km હોવી જોઈએ.

2.15 કેપેસિટરોનાં જોડાણ (Combinations of Capacitors)

C_1, C_2, ..., C_n કેપેસિટન્સ ધરાવતાં કેપેસિટરોનું જોડાણ કરવાથી બનતા તંત્રનું કંઈક સમતુલ્ય (અસરકારક) કેપેસિટન્સ C હોય છે. આપણે આવા બે પ્રકારનાં જોડાણોની ચર્ચા કરીશું.

(a) કેપેસિટરોનું શ્રેણીજોડાણ (Series Combination of Capacitors)

C_1, C_2, C_3, ..., C_n જેટલાં કેપેસિટન્સ ધરાવતા કેપેસિટરોને આકૃતિ 2.16માં દર્શાવ્યા અનુસાર વાહક તાર વડે જોડતાં બનતી ગોઠવણને કેપેસિટરોનું શ્રેણીજોડાણ કહે છે.



આકૃતિ 2.16 કેપેસિટરોનું શ્રેણી જોડાણ

આવી સ્થિતિમાં દરેક કેપેસિટર પર સમાન મૂલ્યનો વિદ્યુતભાર Q હોય છે, બૅટરી વડે એક પ્લેટ પર (–Q) વિદ્યુતભાર જમા થાય એટલે તેના વડે બીજી પ્લેટ પર +Q વિદ્યુતભાર પ્રેરિત થાય છે. આ માટે તે બીજી પ્લેટ પરથી – Q વિદ્યુતભાર નજીકના કેપેસિટરની એક પ્લેટ પર જમા થાય છે અને તેના વડે તેની બીજી પ્લેટ પર + Q વિદ્યુતભાર પ્રેરિત થાય છે. આવું આગળ ચાલે છે. આમ, આવા જોડાણમાં બધાં કેપેસિટર પરનો વિદ્યુતભાર સમાન હોય છે, પરંતુ બે પ્લેટો વચ્ચેનો વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત (p. d.) જુદાંજુદાં કેપેસિટરો માટે જુદો-જુદો હોય છે. આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે ,

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots\ldots + V_n \tag{2.15.1}$$

$$= \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \ldots\ldots + \frac{Q}{C_n} \tag{2.15.2}$$

($\because$ $C_1 = \frac{Q}{V_1}$, ... વગેરે.)

$$\therefore \frac{V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots\ldots + \frac{1}{C_n} \tag{2.15.3}$$

જો આ શ્રેણી જોડાણનું અસરકારક કેપેસિટન્સ C હોય તો,

$$\frac{V}{Q} = \frac{1}{C} \tag{2.15.4}$$

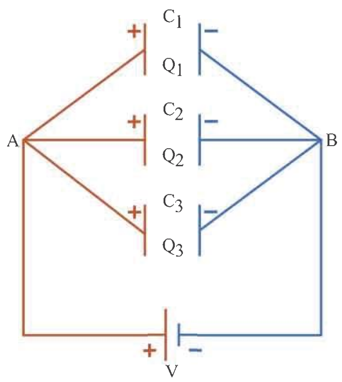
$$\therefore \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots\ldots + \frac{1}{C_n} \tag{2.15.5}$$

આમ, અસરકારક કેપેસિટન્સ Cનું મૂલ્ય જોડાણમાંના કેપેસિટન્સના સૌથી નાના મૂલ્ય કરતાં પણ ઓછું છે.

(અવરોધોના સમાંતર જોડાણમાં અસરકારક (સમતુલ્ય) અવરોધનું જે સૂત્ર મળતું હતું તેના જેવું સૂત્ર અહીં શ્રેણી-જોડાણમાં મળે છે, તે નોંધો.)

(b) કેપેસિટરોનું સમાંતર જોડાણ (Parallel Combination of Capacitors)

C_1, C_2, C_3 કેપેસિટન્સ ધરાવતાં કેપેસિટરોને આકૃતિ 2.17 મુજબ વાહક તારો વડે જોડતાં બનતી ગોઠવણને કેપેસિટરોનું સમાંતર જોડાણ કહે છે.



આકૃતિ 2.17 કૅપેસિટરોનું સમાંતર જોડાણ

આવા જોડાણમાં દરેક કૅપેસિટરની બે પ્લેટો વચ્ચેનો વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત (V) સમાન હોય છે અને તે તેમનાં બે સામાન્ય બિંદુઓ A અને B વચ્ચેના વિદ્યુતસ્થિતિમાનના તફાવત જેટલો હોય છે, પરંતુ દરેક કૅપેસિટર પર વિદ્યુતભાર Q જુદા-જુદા મૂલ્યનો હોય છે.

અત્રે,
$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= C_1V \\ Q_2 &= C_2V \\ Q_3 &= C_3V \end{aligned}\right\} \qquad (2.15.6)$$

અને કુલ વિદ્યુતભાર

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 + Q_3 \\ &= C_1V + C_2V + C_3V \\ &= (C_1 + C_2 + C_3)V \end{aligned} \qquad (2.15.7)$$

હવે જો આ સમાંતર જોડાણનું અસરકારક કૅપેસિટન્સ C હોય તો,

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q}{V} \\ &= C_1 + C_2 + C_3 \end{aligned} \qquad (2.15.8)$$

જો આવાં n કૅપેસિટરોનું સમાંતર જોડાણ કરેલું હોય, તો અસરકારક કૅપેસિટન્સ

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + ... + C_n \qquad (2.15.9)$$

અત્રે કૅપેસિટન્સનું મૂલ્ય, જોડાણમાંના કૅપેસિટન્સના સૌથી મોટા મૂલ્ય કરતાં પણ વધુ હોય છે.

(અવરોધોના શ્રેણીજોડાણમાં સમતુલ્ય (અસરકારક) અવરોધનું જે સૂત્ર મળતું હતું, તેના જેવું સૂત્ર અહીં સમાંતર જોડાણમાં મળે છે તે નોંધો.)

ઉદાહરણ 8 : સમાંતર પ્લેટ કૅપેસિટરમાં એક પ્લેટ પર બીજી પ્લેટને લીધે લાગતું બળ $F = \frac{1}{2}\frac{CV^2}{d}$. હોય છે, તેમ સાબિત કરો.

ઉકેલ : અત્રે, એક પ્લેટ વડે ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર, $E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ (1)

આ ક્ષેત્રમાં σA વિદ્યુતભાર ધરાવતી બીજી પ્લેટ રહેલી છે.

$\therefore$ બીજી પ્લેટ પર લાગતું બળ $F = (\sigma A)E_1$

સમીકરણ (1)માંથી E_1નું મૂલ્ય મૂકતાં,

$$F = \frac{\sigma^2 A}{2\varepsilon_0}$$

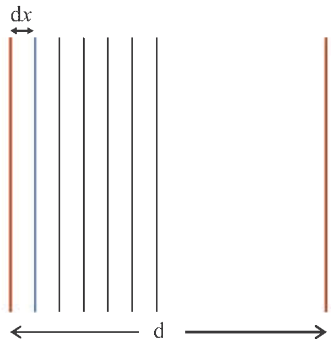
પણ $\sigma = \frac{Q}{A}$

$$\therefore F = \frac{\frac{Q^2}{A^2}.A}{2\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A} = \frac{Q^2/d}{2\varepsilon_0 A/d} = \frac{Q^2}{2dC} \qquad \left(\because \frac{\varepsilon_0 A}{d} = C\right)$$

$$\therefore F = \frac{1}{2}\frac{CV^2}{d} \qquad (\because Q = CV)$$

ઉદાહરણ 9 : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે d અંતરમાં ક્રમિક પ્લેટો વચ્ચે dx જેટલું સૂક્ષ્મ અંતર રહે તેમ સૂક્ષ્મ જાડાઈ ધરાવતી અસંખ્ય સમાન પ્લેટ મૂકી એક કૅપેસિટર તૈયાર કરવામાં આવ્યું છે, તો આ રીતે બનતા કૅપેસિટરનું કૅપેસિટન્સ ગણો.

ઉકેલ : સંયોજનમાં રહેલા દરેક કૅપેસિટરનું કૅપેસિટન્સ,



$$dC = \frac{\varepsilon_0 A}{dx}$$

આ બધાં કૅપેસિટર એકબીજાં સાથે શ્રેણીજોડાણમાં છે.

$\therefore$ કુલ કૅપેસિટન્સ C માટે, $\frac{1}{C} = \frac{1}{dC} + \frac{1}{dC} + \dots$

$$= \frac{dx}{\varepsilon_0 A} + \frac{dx}{\varepsilon_0 A} + \dots = \frac{1}{\varepsilon_0 A}(dx + dx + \dots\dots + dx)$$

$$\therefore \frac{1}{C} = \frac{d}{\varepsilon_0 A}$$

$$\therefore C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

આ મૂલ્ય પ્રથમ અને છેલ્લી પ્લેટ વડે બનતા કૅપેસિટરના કૅપેસિટન્સ જેટલું છે.

2.16 વિદ્યુતભારિત કૅપેસિટરમાં સંગ્રહિત ઊર્જા (Energy Stored in a Charged Capacitor)

કૅપેસિટર પર વિદ્યુતભાર પ્રસ્થાપિત કરવા માટે વિદ્યુતભાર પર કાર્ય કરવું પડે છે. આ કાર્ય પ્રસ્થાપિત થયેલ વિદ્યુતભારની સ્થિતિ-ઊર્જાના સ્વરૂપમાં સંગ્રહ પામે છે. આવી સ્થિતિ-ઊર્જાને કૅપેસિટરની ઊર્જા કહે છે.

ધારો કે, એક સમાંતર પ્લેટ કૅપેસિટર પર Q જેટલો વિદ્યુતભાર છે. આ સ્થિતિમાં કૅપેસિટરની દરેક પ્લેટ બીજી પ્લેટના વિદ્યુતક્ષેત્રમાં રહેલી છે તેમ કહેવાય.

કૅપેસિટરની એક પ્લેટ વડે ઉદ્‌ભવતા સમાન વિદ્યુતક્ષેત્રનું મૂલ્ય $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ (2.16.1)

જ્યાં, $\sigma = \frac{Q}{A}$ અને A = દરેક પ્લેટનું ક્ષેત્રફળ.

આથી આ પ્લેટ પરનું સ્થિતિમાન યાદચ્છિક રીતે શૂન્ય લેતાં તેનાથી d અંતરે રહેલી બીજી પ્લેટ પરનું સ્થિતિમાન

$= \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)d$ થાય. (2.16.2)

આ પરથી પ્રથમ પ્લેટની સ્થિતિ-ઊર્જા શૂન્ય થશે અને બીજી પ્લેટની

સ્થિતિ-ઊર્જા = (સ્થિતિમાન) × (તેના પરનો વિદ્યુતભાર Q) = $\left(\frac{\sigma d}{2\varepsilon_0}\right)Q$ (2.16.3)

$\therefore$ કૅપેસિટરમાં સંગ્રહિત ઊર્જા

$$U_E = \frac{\sigma d Q}{2\varepsilon_0} \tag{2.16.4}$$

$$= \left(\frac{Q}{A}\right)\frac{dQ}{2\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A/d}$$

$$= \frac{Q^2}{2C} \tag{2.16.5}$$

જ્યાં $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$ = કૅપેસિટરનું કૅપેસિટન્સ

વળી, $C = \frac{Q}{V}$ હોવાથી તથા સમીકરણ (2.16.5) પરથી

આપણે $U_E = \frac{VQ}{2}$ (2.16.6)

અને $U_E = \frac{1}{2}CV^2$ પણ લખી શકીએ. (2.16.7)

આપણે આ પરિણામો (2.16.5), (2.16.6) અને (2.16.7) સમાંતર પ્લેટ કૅપેસિટર માટે મેળવ્યાં છે, પરંતુ તે વ્યાપકપણે બધા પ્રકારના કૅપેસિટર માટે પણ સાચાં છે.

કૅપેસિટરમાં સંગ્રહિત ઊર્જાને ઊર્જા-ઘનતાના સ્વરૂપમાં દર્શાવવી :

કૅપેસિટરમાં સંગ્રહિત ઊર્જા $U_E = \frac{1}{2}CV^2$ છે. આ ઊર્જા કૅપેસિટરોની બે પ્લેટોની વચ્ચેના વિસ્તારમાં એટલે કે Ad કદમાં સંગ્રહ પામેલી છે, જ્યાં A = દરેક પ્લેટનું ક્ષેત્રફળ અને d = બે પ્લેટ વચ્ચેનું અંતર, આથી કૅપેસિટરની પ્લેટો વચ્ચેના વિસ્તારમાં **એકમકદ દીઠ ઊર્જા** - એટલે કે ઊર્જાઘનતા ρ_E તરીકે લખીએ તો,

$$\rho_E = \frac{U_E}{\text{કદ}} = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{Ad} \tag{2.16.8}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0 A}{d}\right)\frac{V^2}{Ad} \tag{2.16.9}$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{V}{d}\right)\left(\frac{V}{d}\right) \tag{2.16.10}$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \tag{2.16.11}$$

જ્યાં $\frac{V}{d}$ = E બે પ્લેટો વચ્ચેનું વિદ્યુતક્ષેત્ર

આમ, કૅપેસિટરમાં સંગ્રહિત ઊર્જા તેની પ્લેટો વચ્ચેના વિદ્યુતક્ષેત્રમાં સંગ્રહિત ઊર્જારૂપે ગણી શકાય છે.

આ સૂત્ર આપણે સમાંતર પ્લેટ કૅપેસિટર માટે મેળવ્યું છે, પરંતુ તે એક વ્યાપક પરિણામ છે અને કોઈ પણ પ્રકારના વિદ્યુતભાર-વિતરણના વિદ્યુતક્ષેત્ર માટે પણ વાપરી શકાય છે.

ઉદાહરણ 10 : 4 μFના એક કૅપેસિટરને 50 V સુધી ચાર્જ કરેલ છે. હવે, તેને 2 μFના એકબીજા કૅપેસિટર સાથે **સમાંતર**માં જોડવામાં આવે છે. આ સંયોજનની કુલ ઊર્જા ગણો. બીજું કૅપેસિટર પ્રારંભમાં ચાર્જ કરેલું નથી. આ પ્રક્રિયામાં ગુમાવાતી ઊર્જા અવગણો.

ઉકેલ : પ્રારંભિક ઊર્જા (એક કૅપેસિટરની)

$$W_1 = \frac{1}{2}C_1V^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times (50)^2 = 2 \times 2500 = 5000 \ \mu J$$

હવે બંને કૅપેસિટરો સમાંતરમાં જોડાય છે. ધારો કે જોડાણ બાદ C_1 અને C_2 પરના વિદ્યુતભારો અનુક્રમે q_1 અને q_2 છે. વળી, જો તેમનો સામાન્ય સ્થિતિમાનનો તફાવત V' હોય, તો $\left(\left(V' = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}\right)\right.$ પરથી)

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

$$\therefore \frac{q_1+q_2}{q_2} = \frac{C_1+C_2}{C_2} \tag{1}$$

પણ વિદ્યુતભારના સંરક્ષણ અનુસાર

$$q_1 + q_2 = Q \tag{2}$$

જ્યાં Q એ પ્રારંભિક વિદ્યુતભાર છે.

હવે, $Q = C_1V = (4)(50)$

$= 200 \ \mu C$

સમીકરણ (1)માં સમીકરણ (2) વાપરી, તેમાં Qનું મૂલ્ય મૂકતાં,

$$\frac{200}{q_2} = \frac{(4+2)}{2}$$

$$\therefore\ q_2 = \frac{200\times2}{6} = \frac{200}{3}\ \mu C$$

હવે સમીકરણ (2) પરથી

$$q_1 = 200 - \frac{200}{3}$$

$$= \frac{400}{3}\ \mu C$$

ઊર્જા માટે : પ્રથમ કેપેસિટરની ઊર્જા $\frac{q_1^2}{2C_1} = \left(\frac{400}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2\times4} = 2222\ \mu J$

બીજા કેપેસિટરની ઊર્જા, $\frac{q_2^2}{2C_2} = \left(\frac{200}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2\times2} = 1111\ \mu J$

જોડાણ બાદની કુલ ઊર્જા $= 2222 + 1111 = 3333 = \mu J$

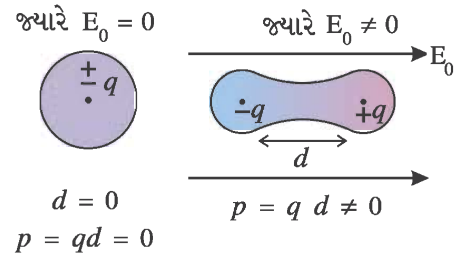
આમ, ઊર્જામાં $5000 - 3333 = 1667\ \mu J$. નો ઘટાડો થયો. આટલી ઊર્જા ઉષ્મા રૂપે વિખેરાયેલ છે.

2.17 ડાઈઇલેક્ટ્રિક પદાર્થો અને તેમનું પોલરાઇઝેશન (ધ્રુવીભવન) (Dielectric Substances and their Polarisation)

અવાહક પદાર્થોને **ડાઈઇલેક્ટ્રિક** કહે છે. ફેરેડે નામના વિજ્ઞાનીએ એમ શોધ્યું કે કેપેસિટરની પ્લેટો વચ્ચે અવાહક પદાર્થ મૂકવામાં આવે તો કેપેસિટરના કેપેસિટન્સમાં વધારો થાય છે. આવું કેવી રીતે થાય છે તે જાણવા, ડાઈઇલેક્ટ્રિકને વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકતાં તેનામાં ઉત્પન્ન થતી અસરો વિશે જાણવું જોઈએ. ડાઈઇલેક્ટ્રિક બે પ્રકારનાં હોય છે : (1) ધ્રુવીય (polar) અને (2) અધ્રુવીય (non-polar.)

જે ડાઈઇલેક્ટ્રિકના અણુઓ (કે પરમાણુઓ) કાયમી વિદ્યુત-ડાઇપોલ ચાકમાત્રા (ડાયપોલ-મોમેન્ટ) ધરાવે છે. તેમને ધ્રુવીય ડાઈઇલેક્ટ્રિક કહે છે. દા. ત., HCl, H_2O, ... વગેરે. જે ડાઈઇલેક્ટ્રિકના અણુઓ કાયમી વિદ્યુત-ડાઇપોલ ચાકમાત્રા ધરાવતા નથી તેમને અધ્રુવીય ડાઈઇલેક્ટ્રિક કહે છે. દા. ત., H_2, O_2, CO_2, ...વગેરે.

(a) અધ્રુવીય અણુ : તેમાં સંમિતિને કારણે ધન વિદ્યુતભારનું કેન્દ્ર અને ઋણ વિદ્યુતભારનું કેન્દ્ર એકબીજા પર સંપાત થયેલાં હોય છે. તેથી તેઓ કાયમી વિદ્યુત-ડાઇપોલ ચાકમાત્રા ધરાવતા નથી. હવે તેને સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર ($\vec{E}_0$)માં મૂકવામાં આવે ત્યારે આ કેન્દ્રો એકબીજાથી વિરુદ્ધ દિશાઓમાં સ્થાનાંતરિત થાય છે. આથી હવે તે $p = qd$ જેટલી ડાઇપોલ ચાકમાત્રા (મોમેન્ટ) ધરાવતો થાય છે; જ્યાં d = સ્થાનાંતરિત થયા બાદ આ કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર, q = ધન અથવા ઋણ વિદ્યુતભારનું મૂલ્ય. જુઓ આકૃતિ 2.18.



આકૃતિ 2.18 અધ્રુવીય અણુનું પોલરાઇઝેશન

આમ, તેનામાં વિદ્યુત-ડાઇપોલ પ્રેરિત થાય છે. બીજા શબ્દોમાં બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રને લીધે આવા અણુઓથી બનેલા ડાઈઇલેક્ટ્રિકનું પોલરાઇઝેશન (polarisation) થયું એમ કહેવાય છે. જો બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્ર ($\vec{E}_0$) બહુ પ્રબળ ન હોય, તો એવું જણાય છે કે અણુની ડાઇપોલ ચાકમાત્રા $\vec{p}$, $\vec{E}_0$ના સમપ્રમાણમાં હોય છે.

$$\therefore\ \vec{p} = \alpha \vec{E}_0 \qquad (2.17.1)$$

જ્યાં αને અણુની ધ્રુવીયતા (polarisability) કહે છે.

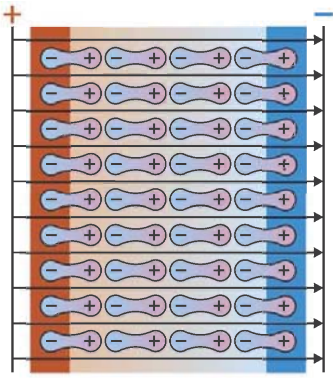
$\vec{p}$ અને $\vec{E}_0$ના એકમો પરથી αનો એકમ $C^2\ m\ N^{-1}$ મળે છે.

(b) ધ્રુવીય અણુ : ધ્રુવીય અણુને કાયમી ડાઈપોલ ચાકમાત્રા (મોમેન્ટ) $\vec{p}$ હોય છે, પણ બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રની ગેરહાજરીમાં પદાર્થના જુદા-જુદા અણુઓની ડાઈપોલ ચાકમાત્રાઓ બધી દિશાઓમાં અસ્તવ્યસ્ત ગોઠવાયેલી હોવાથી પદાર્થની પરિણામી ડાઈપોલ ચાકમાત્રા શૂન્ય બને છે.

હવે બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્ર લગાડતાં દરેક અણુકીય ડાઈપોલ પર ટૉર્ક લાગે છે. તેથી તે ભ્રમણ કરે છે અને વિદ્યુતક્ષેત્રને સમાંતર બનવાનો પ્રયત્ન કરે છે. આમ કુલ પરિણામી ડાઈપોલ ચાકમાત્રા ઉત્પન્ન થાય છે. આ રીતે આવા અણુઓથી બનેલા ડાઈઈલેક્ટ્રિકનું પોલરાઈઝેશન થયું એમ કહેવાય છે. વળી, ઉષ્મીય દોલનોને લીધે ડાઈપોલ ચાકમાત્રા વિદ્યુતક્ષેત્રને સમાંતર સ્થિતિમાંથી ચલાયમાન પણ થાય છે. જો તાપમાન T હોય તો અણુ દીઠ સરેરાશ ઉષ્મીય ઊર્જા ($\frac{3}{2}k_BT$), ડાઈપોલની વિદ્યુતક્ષેત્રમાંની સ્થિતિ-ઊર્જાને ($U = -\vec{p}\cdot\vec{E}_0$)ને સમતોલે તેવી સ્થિતિમાં ડાઈપોલ્સ ગોઠવાય છે. 0 K તાપમાને જોકે ઉષ્મીય ઊર્જા શૂન્ય હોવાથી ડાઈપોલ્સ વિદ્યુતક્ષેત્રને સમાંતર ગોઠવાય છે. આપણે માત્ર આ આદર્શ પરિસ્થિતિની ચર્ચા કરીશું.

(c) વિદ્યુતભારિત કૅપેસિટરની બે પ્લેટો વચ્ચે હવા (અથવા શૂન્યાવકાશ) હોય ત્યારે વિદ્યુતક્ષેત્ર

$$E_0 = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_0} \tag{2.17.2}$$



આકૃતિ 2.19 ડાઈઈલેક્ટ્રિકમાં ધ્રુવીભવન

જ્યાં, σ_f = દરેક પ્લેટ પરની પૃષ્ઠ વિદ્યુતભાર ઘનતાનું મૂલ્ય. આ પ્લેટો પરનો વિદ્યુતભાર મુક્ત (free) વિદ્યુતભાર કહેવાય છે. કારણ કે આ વિદ્યુતભારનું મૂલ્ય આપણી ઇચ્છા મુજબનું (યોગ્ય બૅટરી જોડીને) રાખી શકીએ છીએ. દરેક પ્લેટનું ક્ષેત્રફળ = A છે.

હવે પ્લેટો વચ્ચેના વિસ્તારમાં (ધ્રુવીય કે અધ્રુવીય) ડાઈઈલેક્ટ્રિકનું એક ચોસલું (slab) મૂકતાં તેનામાં આ વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}_0$ વડે ઉદ્ભવતું ધ્રુવીભવન બાજુની આકૃતિ 2.19માં દર્શાવ્યું છે. આપણે ડાઈઈલેક્ટ્રિકમાંનું વિદ્યુતક્ષેત્ર શોધવા માંગીએ છીએ.

આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે ચોસલાના અંદરના ભાગમાં અનુક્રમે આવતી ડાઈપોલ્સના પરસ્પર વિરુદ્ધ પ્રકારના વિદ્યુતભારો અત્યંત નજીક હોવાથી એકબીજાની અસરો નાબૂદ કરે છે અને માત્ર પ્લેટો નજીકની ચોસલાની બાજુઓ પર ચોખ્ખો (net) વિદ્યુતભાર રહે છે. આવા વિદ્યુતભારોને **પ્રેરિત વિદ્યુતભારો** અથવા **બદ્ધ વિદ્યુતભારો (bound charges)** અથવા **પોલરાઈઝેશન વિદ્યુતભારો (polarisation charges)** કહે છે. ધન પ્લેટની નજીકની ચોસલાની સપાટી પર ($-\sigma_b A$) જેટલો ઋણ વિદ્યુતભાર અને ઋણ પ્લેટની નજીકની સપાટી પર $+\sigma_b A$ જેટલો ધન વિદ્યુતભાર પ્રેરિત થાય છે, જ્યાં $-\sigma_b$ અને $+\sigma_b$ અનુરૂપ સપાટી પરની **બદ્ધ વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠઘનતા** છે. પ્રેરિત થયેલા આ વિદ્યુતભાર વડે ડાઈપોલ રચાય છે. તેની ડાઈપોલ ચાકમાત્રાનું મૂલ્ય $P_{total} = (\sigma_b A)d$ (2.17.3)

જ્યાં, d = ચોસલાની જાડાઈ = બે પ્લેટ વચ્ચેનું અંતર (જો ચોસલાની બાજુઓ પ્લેટોના સંપર્કમાં હોય)

અહીં, Ad = ચોસલાનું કદ = V (2.17.4)

એકમકદ દીઠ ઉદ્ભવતી ડાઈપોલ ચાકમાત્રાને **પોલરાઈઝેશન તીવ્રતા** અથવા ટૂંકમાં **પોલરાઈઝેશન (P)** કહે છે.

$$\therefore\ P = \frac{P_{total}}{\text{કદ}} = \frac{(\sigma_b A)d}{Ad} = \sigma_b \tag{2.17.5}$$

આમ ડાઈઈલેક્ટ્રિકમાં પોલરાઈઝેશન (P)નું મૂલ્ય તેની સપાટી પર પ્રેરિત થયેલી **બદ્ધ વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠઘનતા (σ_b)** જેટલું હોય છે. આ પ્રેરિત વિદ્યુતભારોથી ઉદ્ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}_0$ની વિરુદ્ધ દિશામાં છે.

હવે ડાઈઈલેક્ટ્રિકમાંનું પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર E, આ ($\sigma_f - \sigma_b$)ને લીધે ઉદ્ભવેલું છે.

$$\therefore\ E = \frac{\sigma_f - \sigma_b}{\varepsilon_0} \tag{2.17.6}$$

આમ ડાઇઇલેક્ટ્રિકની અંદરનું પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર, લાગુ પાડેલા બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્ર કરતાં ઓછું હોય છે. (પરંતુ યાદ કરો, સુવાહકમાં તો પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય જ હતું.)

વળી, એવું જણાયું છે કે જો બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્ર (E_0) બહુ પ્રબળ ન હોય તો પોલરાઇઝેશન (P), ડાઇઇલેક્ટ્રિકની અંદરના પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર (E)ને સમપ્રમાણમાં હોય છે, એટલે કે $P \propto E$

$$\therefore\ P = \varepsilon_0 x_e E \tag{2.17.7}$$

જ્યાં x_e = અચળાંક જેને, ડાઇઇલેક્ટ્રિક માધ્યમની ઇલેક્ટ્રિક સસેપ્ટિબિલિટી કહે છે. તે ડાઇઇલેક્ટ્રિક માધ્યમની જાત અને તાપમાન પર આધારિત છે. $P \propto E$નું પાલન કરતા ડાઇઇલેક્ટ્રિકને રેખીય (linear) ડાઇઇલેક્ટ્રિક કહે છે.

સમીકરણ (2.17.7) પરથી $x_e = \frac{P}{\varepsilon_0 E}$ (2.17.8)

સમીકરણ 2.17.6માં $E_0 = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_0}$ અને $P = \sigma_b$નો ઉપયોગ કરતાં

$$E = \frac{\varepsilon_0 E_0 - P}{\varepsilon_0} \tag{2.17.9}$$

$$\therefore\ \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 E_0 - \varepsilon_0 x_e E \quad (\because \text{ સમીકરણ 2.17.8 પરથી } P = \varepsilon_0 x_e E) \tag{2.17.10}$$

$$\therefore\ \varepsilon_0 E + \varepsilon_0 x_e E = \varepsilon_0 E_0 \tag{2.17.11}$$

$$E\varepsilon_0(1 + x_e) = E_0\varepsilon_0 \tag{2.17.12}$$

અહીં $\varepsilon_0(1 + x_e)$ને તે ડાઇઇલેક્ટ્રિક માધ્યમની પરમિટિવિટી ε કહે છે.

એટલે કે $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + x_e)$ (2.17.13)

$$\therefore\ E\varepsilon = E_0\varepsilon_0 \tag{2.17.14}$$

$$\therefore\ E = \frac{E_0}{\varepsilon / \varepsilon_0} \tag{2.17.15}$$

$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ને તે માધ્યમની સાપેક્ષ પરમિટિવિટી ε_r કહે છે. અને તેને ડાઇઇલેક્ટ્રિક અચળાંક K પણ કહે છે. Kનું મૂલ્ય હંમેશાં 1 કરતાં મોટું હોય છે.

આમ, $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r = K$ (2.17.16)

સમીકરણ (2.17.13) અને (2.17.16) પરથી

$$\frac{\varepsilon_0(1 + x_e)}{\varepsilon_0} = K$$

$$\therefore\ K = 1 + x_e \tag{2.17.17}$$

આ સમીકરણ ડાઇઇલેક્ટ્રિકના બે ગુણધર્મો x_e અને K વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે છે.

સમીકરણ (2.17.15) પરથી

$$E = \frac{E_0}{K} \tag{2.17.18}$$

આમ, મુક્ત અવકાશમાંના કોઈ વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર E_0 હોય, તો તે જ વિસ્તારમાં ડાઇઇલેક્ટ્રિક મૂકવાથી, ડાઇઇલેક્ટ્રિકમાંનું વિદ્યુતક્ષેત્ર, મુક્ત અવકાશમાંના મૂલ્ય કરતાં Kમા ભાગનું (એટલે કે $\frac{1}{K}$ ગણું) થાય છે.

વિદ્યુતસ્થાનાંતર : ડાઇઇલેક્ટ્રિકને કેપેસિટરની બે પ્લેટો વચ્ચે મૂકતાં ડાઇઇલેક્ટ્રિકની અંદર ઉદ્ભવતું પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર $E = \frac{\sigma_f - \sigma_b}{\varepsilon_0}$ સૂત્ર પરથી મળે છે.

જ્યાં σ_f = દરેક પ્લેટ પરની મુક્ત વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠઘનતાનું મૂલ્ય, σ_b = ડાઇઇલેક્ટ્રિકની બંને સપાટી પરની બદ્ધ વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠઘનતાનું મૂલ્ય

σ_b = પોલરાઇઝેશન P હોવાથી,

$$E = \frac{\sigma_f - P}{\varepsilon_0} \tag{2.17.19}$$

$$\therefore \varepsilon_0 E + P = \sigma_f \tag{2.17.20}$$

અત્રે $\vec{E}$ની દિશા અને $\vec{P}$ની દિશા એક જ હોય છે અને $\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ને વિદ્યુતસ્થાનાંતર $\vec{D}$ કહે છે.

$$\therefore \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \tag{2.17.21}$$

તે સદિશ ક્ષેત્ર છે. $\vec{D}$નો ઉપયોગ કરવાથી વિદ્યુતક્ષેત્રને લગતાં ઘણાં સમીકરણો સરળ સ્વરૂપનાં બને છે. ડાઇઇલેક્ટ્રિકની હાજરીમાં ગૉસનો નિયમ

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = q \tag{2.17.22}$$

તરીકે લખાય છે, જ્યાં q એ માત્ર મુક્ત વિદ્યુતભાર છે. (તેમાં બદ્ધ વિદ્યુતભારોનો સમાવેશ થતો નથી.) આમ, ડાઇઇલેક્ટ્રિકમાં **મુક્ત વિદ્યુતભારો** સાથે સંબંધિત ક્ષેત્ર **$\vec{E}$ નથી પણ $\vec{D}$ છે,** એટલે કે $\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ છે.

2.18 ડાઇઇલેક્ટ્રિક ધરાવતું કેપેસિટર (Capacitor with a Dielectric)

જ્યારે સમાંતર પ્લેટ કેપેસિટરની પ્લેટો વચ્ચે હવા (કે શૂન્યાવકાશ) હોય ત્યારે તેના કેપેસિટન્સનું સૂત્ર

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \tag{2.18.1}$$

છે. જ્યાં ε_0 = શૂન્યાવકાશની પરમિટિવિટી, A = દરેક પ્લેટનું ક્ષેત્રફળ, d = બે પ્લેટ વચ્ચેનું અંતર. હવે જો આ પ્લેટો વચ્ચેના **સમગ્ર વિસ્તારમાં** ε જેટલી પરમિટિવિટી ધરાવતું ડાઇઇલેક્ટ્રિક માધ્યમ મૂકવામાં આવે, તો તેના કેપેસિટન્સ C'નું સૂત્ર મેળવવા માટે ઉપરના સમીકરણમાં ε_0ને બદલે ε મૂકવું જોઈએ.

$$\therefore C' = \frac{\varepsilon A}{d} \tag{2.18.2}$$

$$\therefore \frac{C'}{C} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = K \tag{2.18.3}$$

જ્યાં K = તે માધ્યમનો ડાઇઇલેક્ટ્રિક અચળાંક

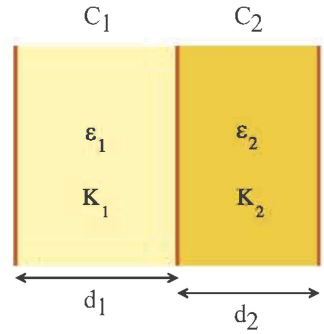
$$\therefore C' = KC \tag{2.18.4}$$

આમ કેપેસિટરની બે પ્લેટ વચ્ચે K જેટલા ડાઇઇલેક્ટ્રિક અચળાંક ધરાવતા માધ્યમને મૂકવાથી કેપેસિટરનું કેપેસિટન્સ K ગણું થઈ જાય છે અને કેપેસિટરની વિદ્યુતભારનો સંગ્રહ કરવાની ક્ષમતા પણ K ગણી થઈ જાય છે.

ઉદાહરણ 11 : સમાન ક્ષેત્રફળ A ધરાવતી ત્રણ સમાંતર પ્લેટોનું એક કેપેસિટર છે. તેમની વચ્ચેનાં અંતરો d_1 અને d_2 છે. તેમની વચ્ચેના અવકાશમાં ε_1 અને ε_2 પરમિટિવિટીવાળાં ડાઇઇલેક્ટ્રિક દ્રવ્યો ભર્યાં છે, તો (i) આ તંત્રનું કેપેસિટન્સ શોધો. (ii) આ કેપેસિટન્સનું મૂલ્ય K_1 અને K_2ના પદમાં દર્શાવો.

ઉકેલ : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે અત્રે રચાતાં બે કેપેસિટરો એકબીજાં સાથે શ્રેણીમાં છે. જો કુલ કેપેસિટન્સ C હોય તો,

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \text{પણ } C_1 = \frac{\varepsilon_1 A}{d_1} \text{ અને } C_2 = \frac{\varepsilon_2 A}{d_2}$$



$$\frac{1}{C} = \frac{d_1}{\varepsilon_1 A} + \frac{d_2}{\varepsilon_2 A}$$

$$= \frac{d_1\varepsilon_2 A + \varepsilon_1 A d_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2 A^2} = \frac{d_1\varepsilon_2 + d_2\varepsilon_1}{\varepsilon_1\varepsilon_2 A}$$

$$\therefore C = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 A}{d_1\varepsilon_2 + d_2\varepsilon_1} \quad \text{અથવા } C = \frac{A}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}}$$

$K_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}$; પરથી $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 K_1$.

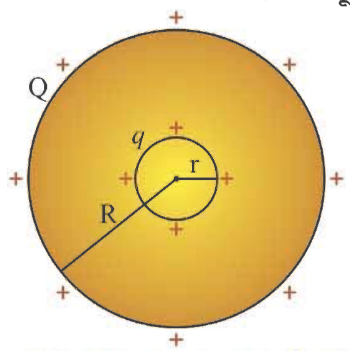
તે જ રીતે $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 K_2$; જ્યાં ε_0 = એ શૂન્યાવકાશની પરમિટિવિટી છે.

$$\therefore C = \frac{A}{\frac{d_1}{\varepsilon_0 K_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_0 K_2}} = \frac{A\varepsilon_0}{\frac{d_1}{K_1} + \frac{d_2}{K_2}}$$

2.19 વાન્-દ્-ગ્રાફ જનરેટર (Van-de-Graaff Generator)

આ યંત્ર વડે અમુક મિલિયન (મિલિયન = 10^6 = દસ લાખ) વૉલ્ટનો p.d પ્રસ્થાપિત કરી શકાય છે. આવા ઊંચા p.*d*.માંથી વિદ્યુતભારિત કણને યોગ્ય રીતે પસાર કરવાથી તે પ્રવેગિત થઈ (અત્યંત ઊંચો વેગ અને તેથી) અત્યંત ઊંચી ઊર્જા ($\frac{1}{2}mv^2$) પ્રાપ્ત કરે છે. આવી ઊર્જાને લીધે તેઓ દ્રવ્યમાં વધારે ઊંડે સુધી જઈ શકે છે. આથી તેમની મદદથી દ્રવ્યના સૂક્ષ્મ બંધારણનો અભ્યાસ કરી શકાય છે. આ યંત્રનો સિદ્ધાંતનીચે મુજબ છે :

આકૃતિ 2.20માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક અલગ કરેલી R ત્રિજ્યાની વાહક ગોળાકાર કવચ (spherical shell) પર ધારો કે Q જેટલો વિદ્યુતભાર છે અને આ કવચના કેન્દ્ર પર r ત્રિજ્યા (r < R) નો અને q વિદ્યુતભાર ધરાવતો વાહક ગોળો છે.



આકૃતિ 2.20 વાન્-દ્-ગ્રાફ જનરેટરનો સિદ્ધાંત

અત્રે, R ત્રિજ્યાની કવચના પૃષ્ઠ પર વિદ્યુતસ્થિતિમાન,

$$V_R = \frac{kQ}{R} + \frac{kq}{R} \tag{2.19.1}$$

અને r ત્રિજ્યાના ગોળાના પૃષ્ઠ પર વિદ્યુતસ્થિતિમાન

$$V_r = \frac{kQ}{R} + \frac{kq}{r} \tag{2.19.2}$$

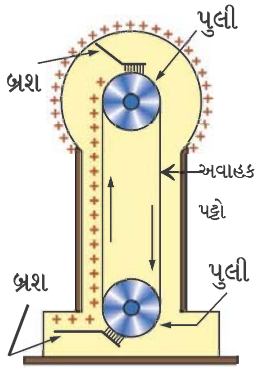
આ બંને સમીકરણો પરથી સ્પષ્ટ છે કે નાના ગોળા પર સ્થિતિમાન વધારે છે અને તેમની વચ્ચેનો વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત (p.d.)

$$V_r - V_R = \left(\frac{kQ}{R}+\frac{kq}{r}\right) - \left(\frac{kQ}{R}+\frac{kq}{R}\right)$$

$$= kq\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right] \quad (2.19.3)$$

આથી જો નાના ગોળાનો મોટા ગોળા સાથે વિદ્યુતસંપર્ક કરવામાં આવે, તો વિદ્યુતભાર નાના પરથી મોટા ગોળા પર જાય છે. વળી, જો નાના ગોળા પર કોઈક રીતે સતત વિદ્યુતભાર વધાર્યા કરીએ, તો સતત આ વિદ્યુતભાર મોટા ગોળા પર જાય છે. આમ, મોટા ગોળા પર ખૂબ જ મોટા પ્રમાણમાં વિદ્યુતભાર એકઠો કરી તેનું સ્થિતિમાન ખૂબ જ વધારી શકાય છે.

આ સિદ્ધાંત પર આધારિત વાન્-દ્-ગ્રાફે બનાવેલ યંત્રને વાન-દ્-ગ્રાફ જનરેટર કહે છે.



આકૃતિ 2.21
વાન્-દ્-ગ્રાફ જનરેટર

આકૃતિ 2.21માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે જમીનથી કેટલાક મીટરની ઊંચાઈએ થોડા મીટરની ત્રિજ્યાવાળો ગોળાકાર કવચ અવાહક પદાર્થ પર ટેકવેલ છે.

એક પુલી (ગરગડી) ઉપરના મોટા ગોળાના કેન્દ્ર પર અને બીજી પુલીનીચે જમીન પર રાખેલ છે. તેમના પર ઈલેક્ટ્રિક મોટર વડે એક અવાહક પટ્ટો (belt) ફરતો રહે તેવી ગોઠવણ કરવામાં આવે છે. ડિસ્ચાર્જ-ટ્યૂબની મદદથી ધન વિદ્યુતભારો મેળવવામાં આવે છે અને (તીક્ષ્ણ ધારવાળા) ધાતુના બ્રશ મારફતે નીચેની પુલી પાસેના પટ્ટા પર તેમનો સતત સ્પ્રે કરવામાં આવે છે.

આ ધન વિદ્યુતભાર પટ્ટા મારફતે ઉપરની પુલી તરફ જાય છે. ત્યાં બીજા બ્રશ વડે પટ્ટા પરથી દૂર થઈ કવચ પર જમા થાય છે. (કારણ કે ઉપરની પુલી પરના પટ્ટા કરતાં કવચ પરનું સ્થિતિમાન ઓછું છે.) આ રીતે મોટી ગોળાકાર કવચ પર મોટા પ્રમાણમાં (લગભગ 6થી 8 મિલિયન વૉલ્ટનો) વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત મેળવી શકાય છે.

ઉદાહરણ 12 : R_1 ત્રિજ્યાના એક વાહક ગોળા પર Q જેટલો વિદ્યુતભાર છે. હવે, આ ગોળાને R_2 ત્રિજ્યાના ગોળા સાથે એક વાહક તાર વડે જોડવામાં આવે છે, તો દરેક ગોળા પર વિદ્યુતભાર શોધો. આ બંને ગોળાઓ એકબીજાથી ઘણા દૂર છે.

ઉકેલ : ધારો કે, બંને ગોળાઓને વાહક તાર વડે જોડ્યા બાદ તેમના પરના વિદ્યુતભારો અનુક્રમે q_1 અને q_2 છે.

$$\therefore Q = q_1 + q_2 \quad (1)$$

હવે, બંને ગોળાઓ વાહક તાર વડે જોડ્યા હોવાથી, તેમનાં સ્થિતિમાનો સમાન હોવાં જોઈએ.

$$\therefore \frac{kq_1}{R_1} = \frac{kq_2}{R_2} \quad \therefore \frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad (2)$$

$$\therefore \frac{q_2+q_1}{q_2} = \frac{R_1+R_2}{R_2}$$

$$\therefore \frac{Q}{q_2} = \frac{R_1+R_2}{R_2}$$

$$\therefore q_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2}Q \quad (3)$$

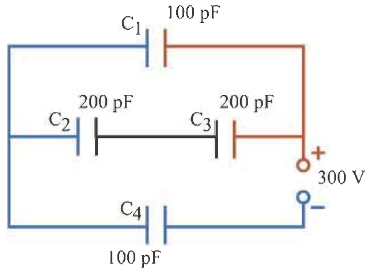
q_2 નું મૂલ્ય સમીકરણ (1)માં મૂકતાં,

$$Q = q_1 + \frac{R_2}{R_1+R_2}Q$$

આ પરથી, $q_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2}Q$

ઉદાહરણ 13 : આકૃતિમાં દર્શાવેલ નેટવર્કનું અસરકારક કૅપેસિટન્સ નક્કી કરો અને દરેક કૅપેસિટર પર વિદ્યુતભાર શોધો.

ઉકેલ : અત્રે C_2 અને C_3 શ્રેણીમાં છે. તેમનું સમતુલ્ય (અસરકારક) કૅપેસિટન્સ C' હોય તો, $C' = \dfrac{C_2C_3}{C_2+C_3} = \dfrac{200\times200}{200+200} = 100pF.$



આ C' અને C_1 સમાંતરમાં છે, તેથી તેમનું સમતુલ્ય કૅપેસિટન્સ C'' હોય, તો $C'' = C' + C_1 = 100 + 100 = 200\ pF.$

આ C'' અને C_4 શ્રેણીમાં છે તેથી તેમનું અસરકારક કૅપેસિટન્સ C''' હોય, તો $C''' = \dfrac{C''C_4}{C''+C_4} = \dfrac{200\times100}{200+100} = \dfrac{200}{3}\ pF.$

હવે બૅટરીએ પૂરો પાડેલો વિદ્યુતભાર $Q = C'''V = \left(\dfrac{200\times10^{-12}}{3}\right)(300) = 2 \times 10^{-8}C.$

હવે, C_4 અને C'' પરના વિદ્યુતભાર સમાન હોય અને દરેક $2 \times 10^{-8}C$ હોય.

$\therefore$ C_4 પરનો વિદ્યુતભાર $Q_4 = 2 \times 10^{-8}C = Q''$ (C'' પર)

$\therefore$ C'' પરનો વિદ્યુતભાર C' અને C_1 પર વહેંચાયેલો છે. C' અને C_1 સમાન મૂલ્યના હોવાથી સમાન પ્રમાણમાં વહેંચાયેલા છે.

$\therefore$ C_1 પરનો વિદ્યુતભાર

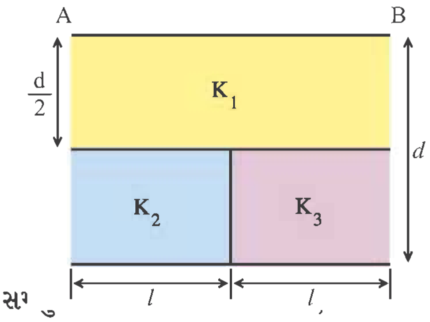
$Q_1 = \frac{1}{2}Q_1 = 1 \times 10^{-8}\ C = Q'$ (C' પર)

$\therefore$ C' પરનો વિદ્યુતભાર C_2 અને C_3 પરના સમાન વિદ્યુતભાર જેટલો છે.

$\therefore$ $Q_2 = Q_3 = 1 \times 10^{-8}C.$

ઉદાહરણ 14 : આકૃતિમાં દર્શાવેલ કૅપેસિટરનું કૅપેસિટન્સ શોધો. પ્લેટ ABનું ક્ષેત્રફળ A છે. K_1, K_2, K_3 તે દ્રવ્યોના ડાઈઈલેક્ટ્રિક અચળાંકો છે.

ઉકેલ : આપણે $C = \dfrac{\varepsilon A}{d} = \dfrac{K\varepsilon_0 A}{d}$ સૂત્રનો ઉપયોગ કરીશું અને કૅપેસિટરોના શ્રેણી અને સમાંતર જોડાણનાં સૂત્રો વાપરીશું. K_2 અને K_3થી બનતા કૅપેસિટરો સમાંતરમાં હોવાથી તેમનું સમતુલ્ય (અસરકારક) કૅપેસિટન્સ C_{23} હોય તો,



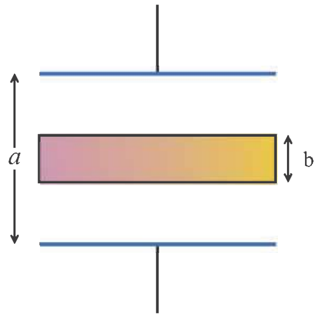
$$C_{23} = C_2 + C_3 = \frac{K_2\varepsilon_0(A/2)}{(d/2)} + \frac{K_3\varepsilon_0(A/2)}{(d/2)}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 A}{d}(K_2 + K_3)$$

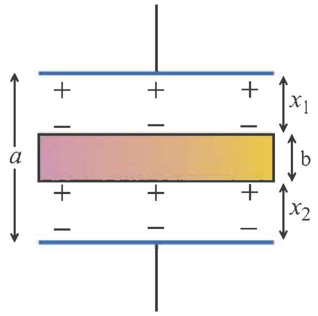
K_1થી બનતું કૅપેસિટર આ C_{23} સાથે શ્રેણીમાં ગણાય. $\therefore$ સમગ્ર તંત્રનું સ

$$C = \frac{C_1C_{23}}{C_1+C_{23}} = \frac{\left(\dfrac{K_1\varepsilon_0 A}{d/2}\right)\left[\dfrac{\varepsilon_0 A}{d}(K_2+K_3)\right]}{\left(\dfrac{K_1\varepsilon_0 A}{d/2}\right)+\left[\dfrac{\varepsilon_0 A}{d}(K_2+K_3)\right]} = \frac{2\varepsilon_0 A}{d}\cdot\frac{K_1(K_2+K_3)}{(2K_1+K_2+K_3)}$$

ઉદાહરણ 15 : એક કેપેસિટરની બે પ્લેટ વચ્ચે હવા છે અને તેમની વચ્ચેનું અંતર a છે. હવે આકૃતિ મુજબ તેમની વચ્ચે b જાડાઈનો ધાતુનો ટુકડો મૂકતાં કેપેસિટન્સનું મૂલ્ય $C = \frac{\varepsilon_0 A}{a-b}$ છે તેમ દર્શાવો. આ કેપેસિટન્સનું મૂલ્ય બે પ્લેટ વચ્ચે ધાતુના ટુકડાના સ્થાન પર આધારિત હશે ?



ઉકેલ : ઉપરના x_1 જાડાઈના ભાગમાં એક કેપેસિટર રચાય છે, જેનું કેપેસિટન્સ C_1 (ધારો કે) અનેનીચેના x_2 જાડાઈના ભાગમાં બીજું કેપેસિટર રચાય છે. તેનું કેપેસિટન્સ C_2 છે. b જાડાઈમાં ધાતુનો ટુકડો હોવાથી કંઈ કેપેસિટર રચાતું નથી. (કારણ કે તેની બે સપાટીઓ એકબીજાથી અલગ કરેલી ગણી શકાય નહિ.) અત્રે C_1 અને C_2 શ્રેણીમાં છે. આથી અસરકારક કેપેસિટન્સ C હોય તો,



$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{x_1}{\varepsilon_0 A} + \frac{x_2}{\varepsilon_0 A} = \frac{x_1 + x_2}{\varepsilon_0 A} \quad \therefore C = \frac{\varepsilon_0 A}{x_1 + x_2}.$$

પરંતુ આકૃતિ પરથી $x_1 + x_2 = a - b$

$$\therefore C = \frac{\varepsilon_0 A}{a-b}.$$

આ કેપેસિટન્સનું મૂલ્ય ધાતુના ટુકડાના સ્થાન પર આધારિત નથી. તેને ગમે ત્યાં મૂકો પણ $(x_1 + x_2)$ અચળ રહે અને આટલા અંતરમાં જ કેપેસિટર રચાય છે.

ઉદાહરણ 16 : એક સમાંતર પ્લેટ કેપેસિટરની દરેક પ્લેટનું ક્ષેત્રફળ 100 cm^2 અને તેમની વચ્ચેનું અંતર 1.0 cm છે. તેમની વચ્ચે હવા હોય ત્યારે કેપેસિટરને 100 Vની બૅટરી દ્વારા વિદ્યુતભારિત (charged) કરવામાં આવે છે. હવે બૅટરીને દૂર કરી તેમની વચ્ચે એક 0.4 cm જાડાઈનું ડાઇઇલેક્ટ્રિક ચોસલું મૂકવામાં આવે છે કે જેનો ડાઇઇલેક્ટ્રિક અચળાંક 4.0 છે. (a) ડાઇઇલેક્ટ્રિક દાખલ કર્યા અગાઉ કેપેસિટન્સ C_0 શોધો. (b) પ્લેટ પરનો મુક્ત વિદ્યુતભાર અને તેની પૃષ્ઠ ઘનતા શોધો. (c) પ્લેટ અને ડાઇઇલેક્ટ્રિકની વચ્ચેના વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર E_0 કેટલું હશે ? (d) ડાઇઇલેક્ટ્રિકની અંદર વિદ્યુતક્ષેત્ર કેટલું હશે ? (e) ડાઇઇલેક્ટ્રિકને દાખલ કર્યા બાદ બે પ્લેટો વચ્ચેનો વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત કેટલો હશે ?

ઉકેલ : $A = 100 \times 10^{-4} m^2;\ d = 1 \times 10^{-2} m,\ V_0 = 100\ V$

$d' = 0.4 \times 10^{-2} m,\ k = 4.0$

(a) પ્લેટો વચ્ચે હવા હોય ત્યારે કેપેસિટન્સ

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \frac{(8.85 \times 10^{-12})(100 \times 10^{-4})}{1 \times 10^{-2}} = 8.85 \times 10^{-12}\ F = 8.85\ pF$$

(b) $q_0 = C_0 V_0 = (8.85 \times 10^{-12})(100) = 8.85 \times 10^{-10}\ C$

આ મુક્ત વિદ્યુતભાર છે. વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠઘનતા

$$\sigma = \frac{q_0}{A} = \frac{8.85 \times 10^{-10}}{100 \times 10^{-4}} = 8.85 \times 10^{-8}\ C/m^2$$

(c) પ્લેટ અને ડાઇઇલેક્ટ્રિકની વચ્ચેના વિસ્તારમાંનું વિદ્યુતક્ષેત્ર E_0 પ્લેટ પરના એટલે કે મુક્ત વિદ્યુતભાર વડે રચાયેલ છે.

$$\therefore E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{8.85 \times 10^{-8}}{8.85 \times 10^{-12}} = 10000\ V/m$$

(d) ડાઇઇલેક્ટ્રિકની ગેરહાજરીમાં તે સ્થાને વિદ્યુતક્ષેત્ર E_0 જેટલું હોત

$\therefore$ ડાઇઇલેક્ટ્રિકમાંનું વિદ્યુતક્ષેત્ર $E = \frac{E_0}{K} = \frac{10000}{4} = 2500 \ \frac{V}{m}$.

(e) હવે, બે પ્લેટો વચ્ચેનો વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત ($V = Ed$ પરથી)

$$V' = E_0(1 - 0.4)\ 10^{-2} + E(0.4 \times 10^{-2})$$
$$= 10000\ (0.6 \times 10^{-2}) + 2500 \times 0.4 \times 10^{-2}$$
$$= 60 + 10 = 70\ V$$

ઉદાહરણ 17 : એક પદાર્થનો ડાઇઇલેક્ટ્રિક અચળાંક 2.0 અને ડાઇઇલેક્ટ્રિક સ્ટ્રેન્થ 20×10^6 V/m છે. તેને સમાંતર પ્લેટ કેપેસિટરમાં ડાઇઇલેક્ટ્રિક દ્રવ્ય તરીકે લેવામાં આવેલ છે. કેપેસિટન્સનું મૂલ્ય 8.85×10^{-2} μF બને અને તે પ્લેટો વચ્ચેના 2000 Vના વિદ્યુતસ્થિતિમાનના તફાવતને પણ ખમી શકે તે માટે તે દરેક પ્લેટનું ક્ષેત્રફળ ઓછામાં ઓછું કેટલું હોવું જોઈએ ?

ઉકેલ : $K = 2,\ E = 20 \times 10^6$ V/m, $C = (8.85 \times 10^{-2}) \times 10^{-6}$ F

$V = 2000$ V, $A = ?$

કેપેસિટર પરનો વિદ્યુતભાર $Q = CV = (8.85 \times 10^{-8})\ (2000) = 17.7 \times 10^{-5}$ C

પ્લેટ પર વિદ્યુતભારની પૃષ્ઠઘનતા $\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{17.7 \times 10^{-5}}{A}\ C/m^2$.

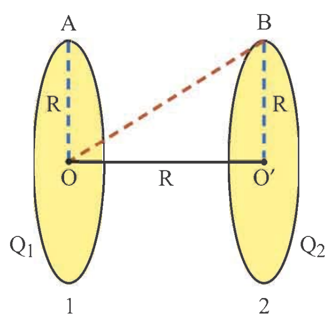
બે પ્લેટો વચ્ચે હવા હોત, તો વિદ્યુતક્ષેત્ર $E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, હોત, પરંતુ અત્રે ડાઇઇલેક્ટ્રિક મૂકેલ હોવાથી વિદ્યુતક્ષેત્ર

$$E = \frac{E_0}{K} = \frac{\sigma}{K\varepsilon_0};\ \therefore\ 20 \times 10^6 = \frac{17.7 \times 10^{-5}}{(A)(2)(8.85 \times 10^{-12})} \Rightarrow A = 0.5\ m^2$$

જો Aનું મૂલ્ય આનાથી નાનું હોય તો Eનું મૂલ્ય 20×10^6 કરતાં વધી જાય અને ડાઇઇલેક્ટ્રિક બ્રેકડાઉન થાય.

ઉદાહરણ 18 : દરેક R m ત્રિજ્યાની બે સમાન રિંગ એક જ અક્ષ પર એકબીજાથી R m અંતરે રાખેલી છે. જો તેમના પરના વિદ્યુતભાર અનુક્રમે Q_1 C અને Q_2 C હોય, તો એક રિંગના કેન્દ્રથી q C વિદ્યુતભારને બીજી રિંગના કેન્દ્ર સુધી લઈ જવામાં થતું કાર્ય શોધો.

ઉકેલ : આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે $AO' = BO = \sqrt{R^2 + R^2} = (\sqrt{2})R$ દરેક રિંગનું કેન્દ્ર બીજી રિંગના પરિઘથી $(\sqrt{2})R$ જેટલા સમાન અંતરે આવેલું છે.



$\therefore$ O આગળનું સ્થિતિમાન $V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{R\sqrt{2}}$

અને O'આગળનું સ્થિતિમાન $V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R\sqrt{2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{R}$

$\therefore$ વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત $\Delta V = V_1 - V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}(Q_1 - Q_2) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R\sqrt{2}}[Q_2 - Q_1]$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}(Q_1 - Q_2) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R\sqrt{2}}[Q_1 - Q_2]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}(Q_1 - Q_2)\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}(Q_1 - Q_2)\left[\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right] \text{ V}$$

$\therefore$ કાર્ય $W = q(\Delta V) = \frac{q(Q_1 - Q_2)}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right]$ J

સારાંશ

1. વિદ્યુતક્ષેત્રમાં વિદ્યુતભારને એક બિંદુથી બીજા બિંદુએ લઈ જતાં થતા કાર્યની માહિતી વિદ્યુતસ્થિતિમાન, વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા નામની રાશિઓ પરથી મળે છે.

2. $\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dr}$ એ A અને B બિંદુ વચ્ચેનું વિદ્યુતક્ષેત્રનું રેખા-સંકલન છે અને તે એકમ ધન વિદ્યુતભારને A થી B સુધી લઈ જવા દરમિયાન વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થતું કાર્ય દર્શાવે છે. વળી, તે માર્ગ પર આધારિત નથી, તેમજ $\oint \vec{E}\cdot\vec{dr} = 0$.

3. "એકમ ધન વિદ્યુતભારને અનંત અંતરેથી વિદ્યુતક્ષેત્રમાંના આપેલા બિંદુએ લાવતાં વિદ્યુતક્ષેત્રની વિરુદ્ધ કરવા પડતા કાર્યને તે બિંદુ પાસેનું સ્થિત વિદ્યુતસ્થિતિમાન (V) કહે છે."

   P બિંદુનું વિદ્યુતસ્થિતિમાન $V_p = -\int_\infty^P \vec{E}\cdot\vec{dr}$

   તેનો એકમ $\frac{\text{joule}}{\text{coulomb}}$ = volt છે. સંજ્ઞામાં $V = \frac{J}{C}$.

   તેનું પારિમાણિક સૂત્ર $M^1L^2T^{-3}A^{-1}$ છે.

   સ્થિતિમાનના નિરપેક્ષ મૂલ્યનું કોઈ મહત્ત્વ નથી, માત્ર તેનામાં થતા ફેરફારનું જ મહત્ત્વ છે.

4. "આપેલ વિદ્યુતભાર (q)ને અનંત અંતરેથી વિદ્યુતક્ષેત્રમાંના આપેલા બિંદુએ લાવતાં વિદ્યુતક્ષેત્ર વિરુદ્ધ કરવા પડતા કાર્યને તે બિંદુ આગળ તે વિદ્યુતભારની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા કહે છે."

   $U_p = -q\int_\infty^P \vec{E}\cdot\vec{dr} = qV_p$

   વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જાના નિરપેક્ષ મૂલ્યનું કંઈ મહત્ત્વ નથી. માત્ર તેનામાં થતા ફેરફારનું જ મહત્ત્વ છે.

5. બિંદુવત્ વિદ્યુતભાર q વડે તેનાથી r અંતરે આવેલા P બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન $V_p = \frac{kq}{r}$.

6. વિદ્યુત-ડાઈપોલથી r અંતરે આવેલા બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2}$ ($r >> 2a$ માટે)

   તેની અક્ષ પરનું સ્થિતિમાન $V = \pm\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^2}$. તેની વિષુવરેખા પરનું સ્થિતિમાન $V = 0$

7. બિંદુવત્ વિદ્યુતભારો q_1, q_2, ... q_n અનુક્રમે r_1, r_1, ... r_n સ્થાનો પર રહેલા હોય તેવા તંત્ર વડે $\vec{r}$ બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન $V = \sum_{i=1}^{n} \frac{kq_i}{|\vec{r} - \vec{r_i}|}$.

સતત વિદ્યુતભાર વિતરણને લીધે $\vec{r}$ બિંદુએ વિદ્યુત સ્થિતિમાન $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\text{volume}} \frac{\rho(\vec{r'})d\tau'}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$

ગોળીય કવચ વડે ઉદ્‌ભવતું વિદ્યુતસ્થિતિમાન

$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$ ... ($r \geq R$ માટે) અને $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$ ... ($r \geq R$ માટે)

8. જે પૃષ્ઠ (સપાટી) પરનાં **બધાં બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન એક સમાન** હોય તે પૃષ્ઠને સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠ કહે છે. વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$ની દિશા સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠને લંબરૂપે હોય છે.

9. $E = \frac{-dV}{dl}$ એ $\vec{dl}$ની દિશામાંના વિદ્યુતક્ષેત્રનું માન આપે છે. V પરથી $\vec{E}$ શોધવા માટે વ્યાપક રૂપે

$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)$ સૂત્રનો ઉપયોગ કરી શકાય.

વિદ્યુતક્ષેત્રની દિશા, જે દિશામાં વિદ્યુતસ્થિતિમાનના ઘટાડાનો અંતર સાથેનો દર $\left(\frac{-dV}{dl}\right)$ મહત્તમ હોય, તે દિશામાં હોય છે અને આવી દિશા સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠને લંબરૂપે જ હોય છે.

10. બિંદુવત્ વિદ્યુતભારો q_1, q_2, ... q_n અનુક્રમે r_1, r_2, ... r_n સ્થાનો પર રહેલા હોય તેવા તંત્રની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા

$U = \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{n} \frac{kq_iq_j}{r_{ij}}$, જ્યાં $r_{ij} = |\vec{r_j} - \vec{r_i}|$

11. બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્ર $\vec{E}$માં ડાઇપોલની સ્થિતિ-ઊર્જા $U = -\vec{E} \cdot \vec{p} = -E\ p\ cos\theta$.

12. **ધાત્ત્વિક સુવાહકને બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકતાં**

(1) વાહકના પૃષ્ઠ પર સ્થિર વિદ્યુતભાર-વિતરણ પ્રેરિત થાય છે.

(2) વાહકના અંદરના વિસ્તારમાં પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય હોય છે.

(3) વાહકના અંદરના વિસ્તારમાં ચોખ્ખો વિદ્યુતભાર શૂન્ય હોય છે.

(4) વાહકની બહારના પૃષ્ઠ પરના દરેક બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર સ્થાનિક રીતે પૃષ્ઠને લંબરૂપે હોય છે.

(5) વાહકની અંદરના વિસ્તારમાં બધે વિદ્યુતસ્થિતિમાન એકસમાન અચળ હોય છે.

(6) વાહકની અંદર કોઈ બખોલ હોય, તો વાહકને બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકવા છતાં વાહકની અંદર તેમજ બખોલની અંદર પણ પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય જ હોય છે. આ બાબતને ઇલેક્ટ્રૉસ્ટેટિક શિલ્ડિંગ કહે છે.

ધાત્ત્વિક સુવાહક પર વિદ્યુતભાર મૂકવામાં આવે ત્યારે,

(1) વાહકની અંદરના ભાગમાં બધે વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય જ હોય છે.

(2) તે વિદ્યુતભારવાહકના બાહ્ય પૃષ્ઠ પર જ વિતરિત થાય છે.

(3) તેની સપાટી પર વિદ્યુતક્ષેત્ર સ્થાનિક રીતે પૃષ્ઠને લંબ હોય છે અને $\vec{E} = \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)\hat{n}$ જેટલું હોય છે.

(4) જો વાહકની બખોલમાં વિદ્યુતભાર મૂકવામાં આવે તોપણ બખોલની બહાર હોય તેવા વાહકના અંદરના વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર શૂન્ય જ રહે છે.

13. "એકબીજાથી અલગ કરેલા બે સુવાહકથી બનતી રચનાને કેપેસિટર કહે છે." તેનું કેપેસિટન્સ

$C = \frac{Q}{V}$ = અચળ. Cનો એકમ coulomb/volt છે. તેને **farad** પણ કહે છે.

$1\ \mu F = 10^{-6}$ F; $1\ nF = 10^{-9}$ F; $1\ pF = 10^{-12}$ F

14. સમાંતર પ્લેટ કેપેસિટરનું કેપેસિટન્સ $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$.

15. કેપેસિટરોનાં શ્રેણી જોડાણમાં અસરકારક કેપેસિટન્સ C હોય તો

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + ...$$

કેપેસિટરોનાં સમાંતર જોડાણમાં અસરકારક કેપેસિટન્સ C હોય, તો

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + ...$$

16. કેપેસિટરમાં સંગ્રહિત ઊર્જા $U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{VQ}{2}$ અને ઊર્જાઘનતા = એકમ કદમાં સંગૃહિત ઊર્જા $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$; જ્યાં, E = વિદ્યુતક્ષેત્ર.

17. ડાઇઇલેક્ટ્રિકને બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્ર E_0માં મૂકતાં વિદ્યુતપ્રેરણ થવાથી ડાઇઇલેક્ટ્રિકનું પોલરાઇઝેશન થાય છે. આ પ્રેરિત વિદ્યુતભારો વડે ઉદ્‌ભવતું વિદ્યુતક્ષેત્ર બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રની વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે. આથી ડાઇઇલેક્ટ્રિકની અંદરનું પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર E બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્ર E_0 કરતાં ઓછું હોય છે.

એકમકદ દીઠ ઉદ્‌ભવતી ડાઇપોલ ચાકમાત્રાને પોલરાઇઝેશન તીવ્રતા અથવા ટૂંકમાં પોલરાઇઝેશન (P) કહે છે. $P = \sigma_b$.

$P \propto E$, હોવાથી $P = \varepsilon_0 x_e E$. x_eને ડાઇઇલેક્ટ્રિક માધ્યમની ઇલેક્ટ્રિક સસેપ્ટિબિલિટી કહે છે.

$\varepsilon_0(1 + x_e)$ને ડાઇઇલેક્ટ્રિક માધ્યમની પરમિટિવિટી ε કહે છે. $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ને તે માધ્યમની સાપેક્ષ પરમિટિવિટી ε_r કહે છે. અને તેને ડાઇઇલેક્ટ્રિક અચળાંક K પણ કહે છે. $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r = K$; $K = 1 + x_e$

$E = \frac{\varepsilon_1}{K}$; આમ, ડાઇઇલેક્ટ્રિકમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર Kમાં ભાગનું થઈ જાય છે. $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ને વિદ્યુત સ્થાનાંતર કહે છે. ડાઇઇલેક્ટ્રિકની હાજરીમાં ગૉસનો નિયમ $\oint \vec{D} \cdot \vec{ds} = q$ તરીકે લખાય છે, જ્યાં q એ માત્ર ચોખ્ખો મુક્ત વિદ્યુતભાર છે.

18. સમાંતર પ્લેટ કેપેસિટરની પ્લેટો વચ્ચે હવા (કે શૂન્યાવકાશ) હોય ત્યારે કેપેસિટન્સ $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$. આ પ્લેટો વચ્ચેના વિસ્તારમાં K ડાઇઇલેક્ટ્રિક અચળાંક ધરાવતું માધ્યમ મૂકતાં કેપેસિટન્સ $C' = KC$ આમ ડાઇઇલેક્ટ્રિકની હાજરીથી કેપેસિટન્સ K ગણું બની જાય છે.

19. વાન્-દ્-ગ્રાફ જનરેટર વડે અમુક મિલિયન વૉલ્ટનો વિદ્યુતસ્થિતિમાનનો તફાવત પ્રસ્થાપિત કરી શકાય છે.

સ્વાધ્યાય

નીચે વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. $\vec{E} = E_0(\hat{i})$ જેટલા સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર માટે જો $x = 0$ પાસે વિદ્યુતસ્થિતિમાન શૂન્ય હોય, તો $x = +x$ પાસે સ્થિતિમાનનું મૂલ્ય .... હશે.

(A) xE_0 (B) $-xE_0$ (C) x^2E_0 (D) $-x^2E_0$

2. એક બિંદુવત્ વિદ્યુતભાર Qના વિદ્યુતક્ષેત્રમાં Qને કેન્દ્ર તરીકે લઈ દોરેલા r ત્રિજ્યાના વર્તુળના પરિઘ પર વિદ્યુતક્ષેત્રનું રેખા-સંકલન .... હોય.

(A) $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$ (B) $\frac{Q}{2\varepsilon_0 r}$ (C) શૂન્ય (D) $2\pi Qr$

3. 10^{-8} C વિદ્યુતભાર ધરાવતો 1 g દળવાળો એક નાનો ગોળો એક વિદ્યુતક્ષેત્રમાં 600 Vના સ્થિતિમાન ધરાવતા બિંદુ Aથી શૂન્ય સ્થિતિમાન ધરાવતા B બિંદુ સુધી ગતિ કરે છે, તો તેની ગતિ-ઊર્જામાં થતો ફેરફાર કેટલો હશે ?

(A) -6×10^{-6} erg (B) -6×10^{-6} J

(C) 6×10^{-6} J (D) 6×10^{-6} erg

4. આકૃતિમાં દર્શાવેલ દરેક પ્લેટનું ક્ષેત્રફળ A અને પાસપાસેની પ્લેટો વચ્ચેનું અંતર d છે, તો a અને b બિંદુઓ વચ્ચે કેપેસિટન્સ કેટલું હશે ?

(A) ε_0 A/d (B) $2\varepsilon_0$ A/d

(C) $3\varepsilon_0$ A/d (D) $4\varepsilon_0$ A/d

5. એક m દળ અને q વિદ્યુતભાર ધરાવતા સ્થિર કણ પર સમાન વિદ્યુતક્ષેત્ર E લગાડતાં તે ગતિમાં આવે છે. આ કણ જ્યારે બળની દિશામાં y અંતર કાપે, ત્યારે તેની ગતિ-ઊર્જા કેટલી હશે ?

(A) qE^2y (B) qEy^2 (C) qEy (D) q^2Ey

6. એક સમાંતર પ્લેટ કેપેસિટરને વિદ્યુતભારિત કરીને અલગ કરેલ છે. હવે તેમાં એક ડાઈઈલેક્ટ્રિક સ્લેબ દાખલ કરવામાં આવે છે, તો નીચેનામાંથી કઈ રાશિ અચળ રહે છે ?

(A) વિદ્યુતભાર Q (B) સ્થિતિમાનનો તફાવત V

(C) કેપેસિટન્સ C (D) ઊર્જા U

7. એક ગતિમાન ઇલેક્ટ્રૉન બીજા ઇલેક્ટ્રૉન તરફ આવે છે, તો તંત્રની સ્થિતિ-ઊર્જાનું શું થશે ?

(A) અચળ રહેશે (B) વધશે

(C) ઘટશે (D) વધારો કે ઘટાડો ગમે તે થઈ શકે.

8. એક વિદ્યુતભારિત કેપેસિટરની ઊર્જા U છે. હવે બૅટરી દૂર કરી તેને તેના જેવા જ બીજા એક વિદ્યુતભારરહિત કેપેસિટર સાથે સમાંતરમાં જોડવામાં આવે છે. હવે દરેક કેપેસિટરની ઊર્જા કેટલી થશે ?

(A) $\frac{3U}{2}$ (B) U (C) $\frac{U}{4}$ (D) $\frac{U}{2}$

9. એક વિસ્તારમાં નિયમિત વિદ્યુતક્ષેત્ર Y દિશામાં પ્રવર્તે છે. A, B અને C બિંદુના યામ અનુક્રમે (0, 0), (2, 0) અને (0, 2) છે, તો આ બિંદુઓ પાસેનાં સ્થિતિમાનો માટે નીચેનામાંથી કયો વિકલ્પ સાચો છે ?

(A) $V_A = V_B$, $V_A > V_C$ (B) $V_A > V_B$, $V_A = V_C$

(C) $V_A < V_C$, $V_B = V_C$ (D) $V_A = V_B$, $V_A < V_C$

10. 4.0 cm વ્યાસ ધરાવતી વર્તુળાકાર પ્લેટોમાંથી બનાવેલા સમાંતર પ્લેટ કૅપેસિટરનું કૅપેસિટન્સ 200 cm વ્યાસના ગોળાના કૅપેસિટન્સ જેટલું છે, તો બે પ્લેટ વચ્ચેનું અંતર શોધો.

(A) 2×10^{-4} m (B) 1×10^{-4} m (C) 3×10^{-4} m (D) 4×10^{-4} m

11. 100 Vની બૅટરી સાથે જોડેલ એક ચલ (variable) કૅપેસિટરનું કૅપેસિટન્સ 2 μFથી 10 μF કરવામાં આવે છે. તેનામાં સંગૃહિત ઊર્જાનો ફેરફાર કેટલો હશે ?

(A) 2×10^{-2} J (B) 2.5×10^{-2} J (C) 6.5×10^{-2} J (D) 4×10^{-2} J

12. એક સમાંતર પ્લેટ કૅપેસિટરને બૅટરી વડે વિદ્યુતભારિત કરીને બૅટરીથી અલગ કરેલું છે. હવે તેની બે પ્લેટ વચ્ચેનું અંતર વધારતાં અનુક્રમે વિદ્યુતભાર, સ્થિતિમાનનો તફાવત અને કૅપેસિટન્સમાં કેવા ફેરફારો થશે ?

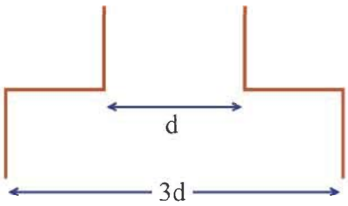
(A) અચળ રહે, ઘટે છે, ઘટે છે. (B) વધે છે, ઘટે છે, ઘટે છે.

(C) અચળ રહે છે, ઘટે છે, વધે છે. (D) અચળ રહે છે, વધે છે, ઘટે છે.

13. 6 સમાન કૅપેસિટરોને સમાંતરમાં જોડી 10 Vની બૅટરી વડે વિદ્યુતભારિત કર્યા છે. હવે તેમને બૅટરીથી અલગ કરીને એકબીજાં સાથે શ્રેણીમાં જોડવામાં આવે છે. આ સ્થિતિમાં જોડાણમાંની મુક્ત પ્લેટો વચ્ચેનો સ્થિતિમાનનો તફાવત કેટલો હશે ?

(A) 10 V (B) 30 V (C) 60 V (D) $\frac{10}{6}$ V

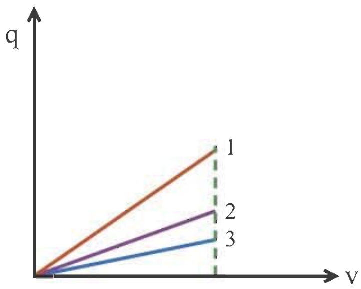
14. ધાતુની એક સમાન 6 ચોરસ પ્લેટોને આકૃતિ મુજબ ગોઠવેલ છે. દરેક પ્લેટની લંબાઈ l છે. આ ગોઠવણનું કૅપેસિટન્સ .... થશે.



(A) $\frac{3\varepsilon_0 l^2}{d}$ (B) $\frac{4}{3}\frac{\varepsilon_0 l^2}{d}$

(C) $\frac{3}{2}\frac{\varepsilon_0 l^2}{d}$ (D) $\frac{4\varepsilon_0 l^2}{d}$

15. નીચે ટેબલમાં ત્રણ કૅપેસિટર્સ માટે પ્લેટનાં ક્ષેત્રફળો અને પ્લેટો વચ્ચેનાં અંતરો આપેલાં છે. તેની બાજુની આકૃતિમાં તેમને માટે q – V આલેખ દર્શાવેલા છે. કયો આલેખ કયા કૅપેસિટર માટે છે, તે નક્કી કરો.



કૅપેસિટર	ક્ષેત્રફળ	અંતર
C_1	A	d
C_2	2A	d
C_3	A	$2d$

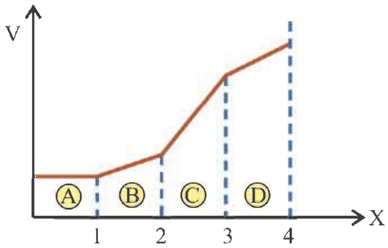
(A) $1 \rightarrow C_2$ $2 \rightarrow C_3$ $3 \rightarrow C_1$

(B) $1 \rightarrow C_1$ $2 \rightarrow C_2$ $3 \rightarrow C_3$

(C) $1 \rightarrow C_2$ $2 \rightarrow C_1$ $3 \rightarrow C_3$

(D) $1 \rightarrow C_3$ $2 \rightarrow C_1$ $3 \rightarrow C_2$

16. X-અક્ષ પર પ્રવર્તતા એક વિદ્યુતક્ષેત્ર માટે V – x આલેખ આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે. A, B, C, D વિસ્તારોમાંથી કયા વિસ્તારમાં વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતાનું માન મહત્તમ હશે ?



(A) A (B) B

(C) C (D) D

17. Q C અને 9Q C વિદ્યુતભારો વચ્ચેનું અંતર 4 m છે. તેમને જોડતી રેખા પરનાં જે બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્રની તીવ્રતા શૂન્ય હોય તે બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન કેટલું હશે ?

(A) 4 kQ V (B) 10 kQ V (C) 2 kQ V (D) 2.5 kQ V

18. 600 μF કેપેસિટન્સ ધરાવતા એક કેપેસિટરને 50 μC/s ના સમાન દરથી ચાર્જિંગ કરવામાં આવતું હોય, તો તેનું સ્થિતિમાન 10 વૉલ્ટ વધારવા માટે કેટલો સમય લાગશે ?

(A) 500 s (B) 6000 s (C) 12 s (D) 120 s

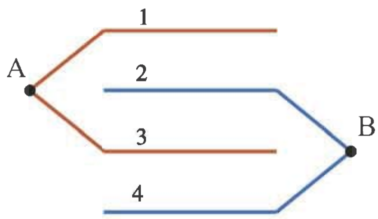
19. R_1 અને R_2 ત્રિજ્યા ધરાવતા ધાતુના બે ગોળાઓને વિદ્યુતભારિત કરવામાં આવે છે. હવે તેમને વાહક તારથી એકબીજાનો સંપર્ક કરાવીને પછી અલગ કરવામાં આવે છે. તેમની સપાટી પરનાં વિદ્યુતક્ષેત્રો અનુક્રમે E_1 અને E_2 હોય, તો E_1 / E_2 = ...

(A) R_2 / R_1 (B) R_1 / R_2 (C) R_2^2 / R_1^2 (D) R_1^2 / R_2^2

20. એક કેપેસિટરની બે પ્લેટ વચ્ચેનું અંતર $5x$ અને તેમની વચ્ચેનું વિદ્યુતક્ષેત્ર E_0 છે. હવે તેમની વચ્ચે x જાડાઈનું અને ડાઇઇલેક્ટ્રિક અચળાંક 3 ધરાવતું એક ચોસલું એક પ્લેટને અડકીને મૂકવામાં આવે છે. આ સ્થિતિમાં બે પ્લેટ વચ્ચેનો p.d. કેટલો હશે ?

(A) $\frac{13E_0x}{3}$ (B) 15 E_0x (C) 7 E_0x (D) $\frac{9E_0x}{2}$

21. આકૃતિમાં દરેક પ્લેટનું ક્ષેત્રફળ A અને ક્રમિક પ્લેટો વચ્ચેનું અંતર d છે તો A અને B બિંદુઓ વચ્ચેનું અસરકારક કેપેસિટન્સ કેટલું હશે ?



(A) $\varepsilon_0 A/d$ (B) $2\varepsilon_0 A/d$

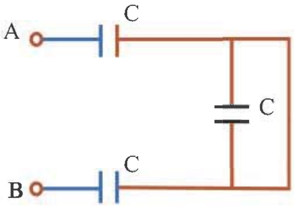
(C) $3\varepsilon_0 A/d$ (D) $4\varepsilon_0 A/d$

જવાબો

1. (B)	**2.** (C)	**3.** (C)	**4.** (B)	**5.** (C)	**6.** (A)
7. (B)	**8.** (C)	**9.** (A)	**10.** (B)	**11.** (D)	**12.** (D)
13. (C)	**14.** (B)	**15.** (C)	**16.** (C)	**17.** (A)	**18.** (D)
19. (A)	**20.** (A)	**21.** (C)			

નીચે આપેલ પ્રશ્નોના જવાબ ટૂંકમાં આપો :

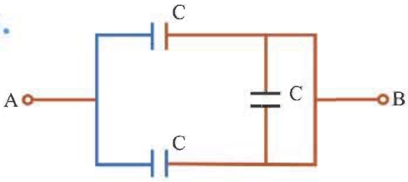
1. વિદ્યુતક્ષેત્રનું રેખા-સંકલન એટલે શું ? તે શું દર્શાવે છે ?
2. જો P બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન V_P હોય, તો આ બિંદુ પાસે q વિદ્યુતભારની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા કેટલી હશે ?
3. વિદ્યુત-ડાઈપોલની વિષુવરેખા પરના બિંદુએ વિદ્યુતસ્થિતિમાન કેટલું હશે ?
4. વિદ્યુતસ્થિતિમાન પ્રચલન એટલે શું ? તેનો એકમ આપો.
5. વિદ્યુતક્ષેત્ર હંમેશાં સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠને .... રૂપે અને જે દિશામાં સ્થિતિમાનના ઘટાડાનો દર .... હોય તે દિશામાં જ હોય છે.
6. કેપેસિટરોનાં શ્રેણી અને સમાંતર જોડાણમાં સમતુલ્ય (અસરકારક) કેપેસિટન્સનાં સૂત્રો આપો.
7. વિદ્યુતક્ષેત્ર સાથે સંકળાયેલ ઊર્જાઘનતા વિદ્યુતક્ષેત્રના મૂલ્ય પર કેવી રીતે આધારિત છે ?
8. અધ્રુવીય અણુ એટલે શું ?

9. પોલરાઇઝેશન તીવ્રતા (અથવા ટૂંકમાં પોલરાઇઝેશન) Pને વ્યાખ્યાયિત કરો.
10. x_e અને Pનો સંબંધ દર્શાવતું સૂત્ર લખો.
11. મુક્ત અવકાશમાં એક બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્ર 100 N/C છે. તે સ્થાને ડાઇઇલેક્ટ્રિક અચળાંક 5 ધરાવતું માધ્યમ મૂકવામાં આવે, તો તેમાં વિદ્યુતક્ષેત્ર કેટલું હશે ?
12. ડાઇઇલેક્ટ્રિક માધ્યમની સાપેક્ષ પરમિટિવિટી ε_r એટલે શું ?
13. વાન્-દ્-ગ્રાફ જનરેટરનો ઉપયોગ જણાવો.
14. 

આકૃતિમાં A અને B બિંદુઓ વચ્ચેનું સમતુલ્ય કૅપેસિટન્સ કેટલું હશે ?

[જવાબ : C/2]

[Hint : જમણી બાજુનો છેલ્લો કૅપેસીટર શોર્ટસર્કિટ થયો હોવાથી અસરકારક નથી.]

15. 

આકૃતિમાં દર્શાવેલ A અને B બિંદુઓ વચ્ચેનું સમતુલ્ય કૅપેસિટન્સ કેટલું હશે ?

[જવાબ : 2C]

[Hint : જમણી બાજુનો છેલ્લો કૅપેસીટર શોર્ટસર્કિટ થયેલ હોવાથી અસરકારક નથી.]

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. એકમ ધન વિદ્યુતભારને વિદ્યુતક્ષેત્રમાં એક બિંદુથી બીજા બિંદુએ લઈ જવામાં વિદ્યુતક્ષેત્ર વડે થયેલું કાર્ય તે બે બિંદુઓનાં સ્થાન પર જ આધારિત છે અને તેમને જોડતા માર્ગ પર આધારિત નથી, તેમ દર્શાવો.
2. વિદ્યુતસ્થિતિમાનની વ્યાખ્યા અને તેને અનુરૂપ સૂત્ર આપો. તેનાં એકમ અને પરિમાણ લખો.
3. વિદ્યુતસ્થિતિમાનની વ્યાખ્યા આપો અને બિંદુવત્ વિદ્યુતભારથી ઉદ્ભવતા વિદ્યુતસ્થિતિમાનનું સૂત્ર મેળવો.
4. વિદ્યુત-ડાઇપોલને લીધે તેનાથી દૂરના બિંદુએ સ્થિતિમાનનું સૂત્ર મેળવો.
5. સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠ એટલે શું ? આપેલા બિંદુએ વિદ્યુતક્ષેત્રની દિશા તે બિંદુમાંથી, પસાર થતા સમસ્થિતિમાન પૃષ્ઠને લંબરૂપે હોય છે, તેમ સાબિત કરો.
6. વિદ્યુતસ્થિતિમાન પરથી વિદ્યુતક્ષેત્ર મેળવી શકાય તે માટેનું જરૂરી સૂત્ર તારવો.
7. સમાન વિદ્યુતક્ષેત્રમાં વિદ્યુત-ડાઇપોલની સ્થિતિ-ઊર્જાનું સૂત્ર મેળવો.
8. બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્રમાં મૂકેલા ધાત્વિક સુવાહકમાં ઉદ્ભવતી અસરોની ટૂકમાં સમજૂતી આપો.
9. કૅપેસિટર એટલે શું ? કૅપેસિટન્સની વ્યાખ્યા અને એકમો આપો. કૅપેસિટન્સનું મૂલ્ય શાના પર આધારિત છે તે જણાવો. કૅપેસિટરની સંજ્ઞા આપો.
10. કૅપેસિટરોનાં શ્રેણી / સમાંતર જોડાણમાં સમતુલ્ય (અસરકારક) કૅપેસિટન્સનું સૂત્ર મેળવો.
11. સમાંતર પ્લેટ કૅપેસિટરના કૅપેસિટન્સનું સૂત્ર મેળવો.
12. કૅપેસિટરમાં સંગૃહીત ઊર્જાનું અને ઊર્જા ઘનતાનું સૂત્ર મેળવો.
13. ડાઇઇલેક્ટ્રિકને સમાંતર પ્લેટ કૅપેસિટરની બે પ્લેટો વચ્ચે મૂકતાં થતું પોલરાઇઝેશન સમજાવો અને $P = \sigma_b$ સૂત્ર મેળવો.
14. કૅપેસિટરની બે પ્લેટો વચ્ચે મૂકેલા ડાઇઇલેક્ટ્રિકની અંદરનું પરિણામી વિદ્યુતક્ષેત્ર $E = \dfrac{\sigma_f - \sigma_b}{\varepsilon_0}$ છે. તે પરથી $E = \dfrac{E_0}{K}$ સૂત્ર મેળવો, જ્યાં E_0 = ડાઇઇલેક્ટ્રિક પરનું બાહ્ય વિદ્યુતક્ષેત્ર.
15. $E = \dfrac{\sigma_f - \sigma_b}{\varepsilon_0}$નો ઉપયોગ કરી વિદ્યુત સ્થાનાંતર $\vec{D}$નું સૂત્ર મેળવો અને $\vec{D}$નું મહત્ત્વ જણાવો.
16. વાન્-દ્-ગ્રાફ જનરેટરનો સિદ્ધાંત દર્શાવતું સૂત્ર મેળવો.
17. માત્ર આકૃતિ દોરી વાન્-દ્-ગ્રાફ જનરેટરની કાર્યપદ્ધતિ સમજાવો.

નીચેના દાખલા ગણો :

1. $q_1 = 2C$ અને $q_2 = -3C$ વિદ્યુતભાર કાર્તેઝિયન યામપદ્ધતિના (0, 0) અને (100, 0)m બિંદુએ મૂકેલા છે, તો X-અક્ષ પર કયાં બિંદુએ (કે બિંદુઓએ) વિદ્યુતસ્થિતિમાન શૂન્ય હશે ?

[જવાબ : 40m, –200 m]

2. a અને b ત્રિજ્યાઓ ધરાવતા ધાતુના બે ગોળાઓને એકબીજાથી ઘણે દૂર મૂકીને તેમને વાહક તારથી જોડેલ છે. તેમના પરનો કુલ વિદ્યુતભાર Q છે. (i) દરેક ગોળા પરનો વિદ્યુતભાર અને દરેક ગોળાનું સ્થિતિમાન શોધો.

[જવાબ : $Q_a = \frac{aQ}{a+b}$, $Q_b = \frac{bQ}{a+b}$, $V_a = V_b = \frac{kQ}{a+b}$]

3. કોઈ એક વિસ્તારમાં વિદ્યુતસ્થિતિમાન $V(x, y, z) = 2x^2y + 3y^3z - 4z^4x$ સૂત્ર પરથી મળે છે. તેમાંના બિંદુ (1, 1, 1) પાસે વિદ્યુતક્ષેત્રના ઘટકો અને વિદ્યુતક્ષેત્ર સદિશ શોધો.

[જવાબ : $E_x = 0$, $E_y = -11$ એકમ, $E_z = 13$ એકમ, $\vec{E} = -11\hat{j} + 13\hat{k}$ એકમ]

4. પાણીનું એક ગોળાકાર બુંદ 3×10^{-10} C વિદ્યુતભાર ધરાવે છે. તેની સપાટી પરનું વિદ્યુતસ્થિતિમાન 500 V છે. આ બુંદની ત્રિજ્યા શોધો. હવે આવાં આઠ સમાન બુંદો (સમાન વિદ્યુતભાર અને સમાન ત્રિજ્યા) એકબીજામાં ભળી જઈને એક નવું બુંદ બનાવે, તો આ નવા બુંદની સપાટી પર સ્થિતિમાન કેટલું થશે. $k = 9 \times 10^9$ SI

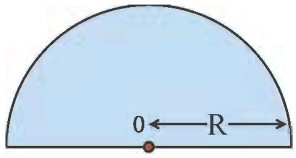
[જવાબ : પ્રથમ બુંદની ત્રિજ્યા = 0.54 cm, નવું સ્થિતિમાન = 2000 V]

5. R.ત્રિજ્યાના એક ગોળાની સપાટી પર Q જેટલો વિદ્યુતભાર છે, તો આ વિદ્યુતભાર તંત્રની સ્થિતિ-ઊર્જા શોધો.

[જવાબ : $\frac{1}{2}\frac{kQ^2}{R}$]

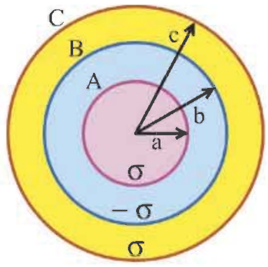
નોંધ : આ દાખલો ત્રણ રીતે ગણી શકાય : (1) પ્રારંભિક અને અંતિમ સ્થિતિમાનની સરેરાશ લઈને તેને વિદ્યુતભાર વડે ગુણીને, (2) આ ગોળાને એક કૅપેસિટર ગણી, કૅપેસિટરની ઊર્જાનું સૂત્ર વાપરીને અને (3) કોઈ ક્ષણે વિદ્યુતભાર q લઈ તેમાં dqનો વધારો કરવા થતું કાર્ય લઈ તેનું સંકલન કરવાથી. ગમે તે એક રીતે ગણો.

6. જો R ત્રિજ્યાના અર્ધગોળાની સપાટી પર નિયમિત વિદ્યુતભાર-ઘનતા σ હોય, તો આકૃતિમાં કેન્દ્ર પરના વિદ્યુતસ્થિતિમાનનું સૂત્ર મેળવો.



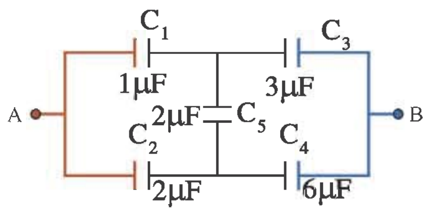
[જવાબ : $\frac{R\sigma}{2\varepsilon_0}$]

7. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે A, B અને C ત્રણ સમકેન્દ્રીય ધાતુની કવચો (shells). છે. તેમની ત્રિજ્યાઓ અનુક્રમે a, b અને c છે. ($a < b < c$) તેમની પૃષ્ઠ-વિદ્યુતભારઘનતાઓ અનુક્રમે σ, –σ અને σ છે, તો કવચ Aની સપાટી પરનું સ્થિતિમાન શોધો.



[જવાબ. : $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}[a - b + c]$]

8. આકૃતિમાં દર્શાવેલ કૅપેસિટર્સના જોડાણનું A અને B વચ્ચે સમતુલ્ય કૅપેસિટન્સ શોધો.

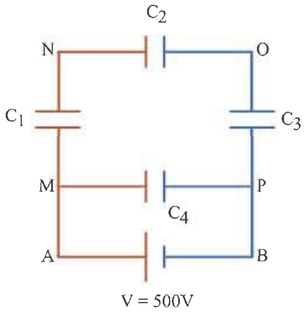


[જવાબ : $\frac{9}{4}$ μF]

9. (1) 900 pFનું એક કૅપેસિટર 100 Vની બૅટરી વડે ચાર્જ કર્યું છે. આ કૅપેસિટરની વિદ્યુત સ્થિતિ-ઊર્જા શોધો. (2) હવે આ કૅપેસિટરને બૅટરીથી છૂટું કરી, બીજા એક સમાન (identical) વિદ્યુતભારરહિત કૅપેસિટર સાથે સમાંતર જોડવામાં આવે છે, તો હવે તંત્રની કુલ ઊર્જા કેટલી હશે ?

[જવાબ : (1) 4.5×10^{-6} J (2) 2.25×10^{-6} J]

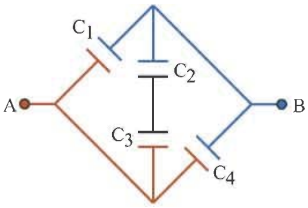
10.



આકૃતિમાં દર્શાવેલ કેપેસિટરોનાં જોડાણ માટે સમતુલ્ય કેપેસિટન્સ અને દરેક કેપેસિટર પર વિદ્યુતભારનું મૂલ્ય શોધો. દરેક કેપેસિટન્સ 10 μFનો છે.

[**જવાબ :** સમતુલ્ય કેપેસિટન્સ = 13.3 μF $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1.7 \times 10^{-3}$ C, $Q_4 = 5.0 \times 10^{-3}$ C]

11.

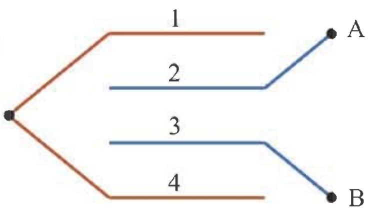


આકૃતિમાં દર્શાવેલ પરિપથમાં A અને B વચ્ચે સમતુલ્ય કેપેસિટન્સ શોધો.

$C_1 = C_4 = 1\mu F$; $C_2 = C_3 = 2\ \mu F$.

[**જવાબ :** 3 μF]

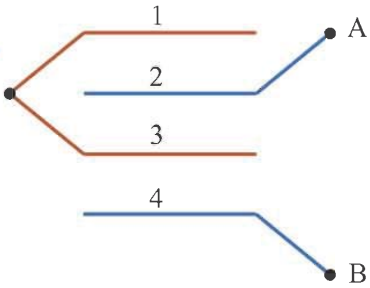
12.



આકૃતિમાં દર્શાવેલ દરેક પ્લેટનું ક્ષેત્રફળ A અને ક્રમિક પ્લેટો વચ્ચેનું અંતર d છે, તો A અને B બિંદુઓ વચ્ચેનું સમતુલ્ય કેપેસિટન્સ કેટલું હશે ?

[**જવાબ :** $\frac{3}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{d}$]

13.



આકૃતિમાં દર્શાવેલ દરેક પ્લેટનું ક્ષેત્રફળ A અને ક્રમિક પ્લેટો વચ્ચેનું અંતર d છે, તો A અને B બિંદુઓ વચ્ચેનું સમતુલ્ય કેપેસિટન્સ કેટલું હશે ?

[**જવાબ :** $\frac{2}{3}\frac{\varepsilon_0 A}{d}$]