પ્રકરણ 4

ત્રિકોણમિતીય વિધેયો

4.1 પ્રાસ્તાવિક

ત્રિકોણમિતિના અભ્યાસની શરૂઆત સૌપ્રથમ ભારતમાં થઈ. આર્યભટ્ટ (476 AD), બ્રહ્મગુપ્ત (598 AD), ભાસ્કર I (600 AD) અને ભાસ્કર II (1114 AD) વગેરે પ્રાચીન ભારતીય ગણિતશાસ્ત્રીઓએ મહત્ત્વનાં પરિણામો મેળવ્યાં. આ બધા જ જ્ઞાનનો ફેલાવો ભારતમાંથી સર્વપ્રથમ મધ્ય પૂર્વના વિસ્તારોમાં અને ત્યાંથી યુરોપમાં થયો. ગ્રીક ગણિતશાસ્ત્રીઓએ પણ ત્રિકોણમિતિના અભ્યાસની શરૂઆત કરી હતી, પણ તેમનો અભિગમ એટલો ગૂંચવાડા ભરેલો હતો કે ત્રિકોણમિતિમાં ભારતીય અભિગમ પ્રાપ્ય બનતાં જ દુનિયામાં તે સર્વત્ર તરત જ સ્વીકારાયો.

ગણિતના ઇતિહાસમાં '*Siddhantas*' (ખગોળશાસ્ત્રનું સંસ્કૃતમાં થયેલું કાર્ય) ભારતીય પ્રદાન છે. તેમાં આધુનિક ત્રિકોણમિતિનાં વિધેયો જેવા કે આપેલ ખૂણાનો *sine* અને *sine* વિધેયનાં પરિચયની પૂર્વગામી રજૂઆત છે.

ભાસ્કર I (લગભગ 600 AD)એ 90^{o}થી વધુ મૂલ્યના ખૂણા માટે *sine* વિધેયનાં મૂલ્યોનાં સૂત્રો આપ્યાં. સોળમી સદીના મલયાલમ સાહિત્ય '*Yuktibhasa*'માં $sin(A + B)$ના વિસ્તરણનું સૂત્ર છે. 18^{o}, 36^{o}, 54^{o}, 72^{o} વગેરેનાં *sine* તથા *cosine* ના ચોક્કસ મૂલ્યો ભાસ્કર IIએ આપ્યાં.

થેલ્સ (લગભગ 600 AD)નું નામ અંતર અને ઊંચાઈના કોયડાઓ સાથે સતત રીતે જોડાયેલ છે. જાણીતી ઊંચાઈના સ્તંભ અને પડછાયાની મદદથી ઇજિપ્તના પિરામીડની ઊંચાઈ માપવાનો યશ તેમને ફાળે જાય છે. તેના માટે તેમણે નીચેના ગુણોત્તરની સરખામણી કરી.

$\frac{H}{S} = \frac{h}{s} = tan$ (સૂર્યનો ઉત્સેધકોણ)

થેલ્સે સમરૂપ ત્રિકોણોનો ઉપયોગ કરીને સમુદ્રમાં રહેલા વહાણના અંતરની પણ ગણતરી કરી હતી તેમ પણ કહેવાય છે. અંતર અને ઊંચાઈને લગતા કોયડામાં સમરૂપતાનો ઉપયોગ પ્રાચીન ભારતીય કાર્યમાં પણ જોવા મળે છે.

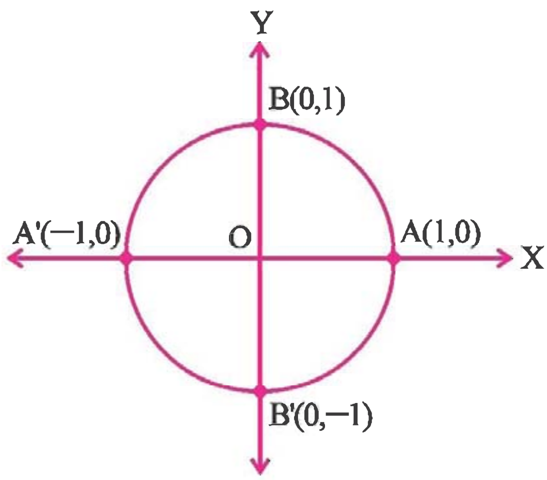
ત્રિકોણમિતિ અવકાશશાસ્ત્ર, ભૌતિકશાસ્ત્ર, ઇજનેરીવિદ્યા તથા ગણિતશાસ્ત્રની ઘણી શાખામાં બહોળો ઉપયોગ ધરાવે છે. ત્રિકોણમિતિ 'Trigonometry' બે ગ્રીક શબ્દો 'trigono' અને 'metron'નો બનેલો છે. 'trigono'નો અર્થ ત્રિકોણ થાય છે અને 'metron' શબ્દનો અર્થ માપન એવો થાય છે. આમ, 'Trigonometry' શબ્દનો અર્થ 'ત્રિકોણનું માપન – ત્રિકોણમિતિ' થાય. વર્તમાન સમયમાં

ત્રિકોણમિતિનો વ્યાપ ત્રિકોણથી પણ આગળ ગયો છે. ત્રિકોણમિતિય વિધેયોનો સમૂહ આવર્તી વિધેયોના અભ્યાસના પાયામાં છે અને તેનો ઉપયોગ યાંત્રિકી ધ્રુજારી તરંગોની ગતિ (Mechanical waves) વગેરેના અભ્યાસમાં થાય છે. ધોરણ 10માં આપણે ત્રિકોણમિતિનો પ્રારંભિક પરિચય મેળવ્યો. ત્યાં આપણે લઘુકોણના ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરો જેવા કે *sin, cos, tan* વગેરેનો અભ્યાસ કર્યો હતો અને તે અભ્યાસ ફક્ત કાટકોણ ત્રિકોણના સંદર્ભમાં સીમિત હતો. હવે આપણે ત્રિકોણમિતિય વિધેયોનો વ્યાપક સંદર્ભમાં અભ્યાસ કરીશું.

4.2 ત્રિકોણમિતિય બિંદુ

યામ-સમતલમાં ઊગમબિંદુ કેન્દ્ર તથા એકમ ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળને એકમ વર્તુળ (Unit Circle) કહે છે.

એકમ વર્તુળ X-અક્ષને A અને A' બિંદુઓમાં છેદે છે તથા Y-અક્ષને B અને B'માં છેદે છે. વર્તુળની ત્રિજ્યા 1 એકમ હોવાથી A(1, 0) અને A'(−1, 0) અને B(0, 1) અને B'(0, −1) છે.



આકૃતિ 4.1

જો θ એ કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો આ વાસ્તવિક સંખ્યા θ ને સંગત એકમ વર્તુળ પર અનન્ય બિંદુ નીચે પ્રમાણે મળે :

જો $\theta = 0$ હોય, તો તેને સંગત બિંદુ A(1, 0) લઈએ. જો $0 < \theta < 2\pi$ હોય, તો એકમ વર્તુળ પર એક અનન્ય બિંદુ P એવું મળે કે જેથી $l(\overparen{AP}) = \theta$. આપણે ચાપ A થી Pઘડિયાળના કાંટાથી ઉલ્ટી દિશામાં માપીએ છીએ. ચાપનું સાતત્ય હોઈ અને વર્તુળનો પરિઘ 2π હોવાથી પ્રત્યેક $\theta \in (0, 2\pi)$ માટે θ લંબાઈનું કોઈક ચાપ મળે, જેથી $l(\overparen{AP}) = \theta$. આ રીતે મેળવેલા બિંદુ P ને ત્રિકોણમિતિય બિંદુ (Trigonometric Point) કહે છે. આ બિંદુ $\theta \in [0, 2\pi)$ને સંગત બિંદુ છે અને તેને $P(\theta)$ વડે દર્શાવાય છે.

હવે પ્રત્યેક $\theta \in R$ માટે, ધારો કે, $\left[\frac{\theta}{2\pi}\right] = n$. હવે n એ પૂર્ણાંક છે અને $n \le \frac{\theta}{2\pi} < n + 1$

$$\therefore \quad 2n\pi \le \theta < 2n\pi + 2\pi$$

$$\therefore \quad 0 \le (\theta - 2n\pi) < 2\pi$$

ધારો કે $\theta - 2n\pi = \alpha$. તેથી $0 \le \alpha < 2\pi$.

હવે ઉપર ચર્ચા કર્યા મુજબ એકમ વર્તુળ પર α ને સંગત અનન્ય બિંદુ $P(\alpha)$ મળે અને $\alpha \in [0, 2\pi)$. આપણે $P(\theta) = P(\alpha)$ વ્યાખ્યાયિત કરીશું. આમ, કોઈ પણ $\theta \in R$ ને સંગત એકમ વર્તુળ પર અનન્ય બિંદુ $P(\theta)$ મળે. $P(\theta)$ને ત્રિકોણમિતિય બિંદુ અથવા ત્રિબિંદુ કહે છે.

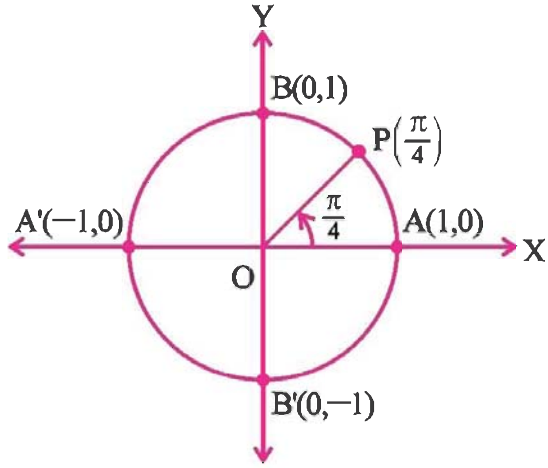
અહીં નોંધીએ કે, પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા θ માટે એક અનન્ય વાસ્તવિક સંખ્યા α એવી મળે કે જેથી કોઈક પૂર્ણાંક n માટે $\theta = 2n\pi + \alpha$ અને $0 \le \alpha < 2\pi$. દેખીતું છે કે જો $\theta \in [0, 2\pi)$ તો $n = 0$ અને $\theta = \alpha$. હવે આપણે થોડાં ત્રિકોણમિતિય બિંદુઓ મેળવીશું.

(1) $P\left(\frac{\pi}{4}\right)$

અહીં $\theta = \frac{\pi}{4}$ અને $0 < \frac{\pi}{4} < 2\pi$

વર્તુળનો પરિઘ 2π હોવાથી લંબાઈ $\widehat{AA'} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ અને લંબાઈ $\widehat{AB} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. આથી ચાપ $\widehat{AB}$નું મધ્યબિંદુ P એવું છે કે જેથી $l(\widehat{AP}) = \frac{\pi}{4}$.

આ બિંદુ P એ ત્રિબિંદુ $P\left(\frac{\pi}{4}\right)$ છે.



આકૃતિ 4.2

(2) $P\left(\frac{31\pi}{3}\right)$

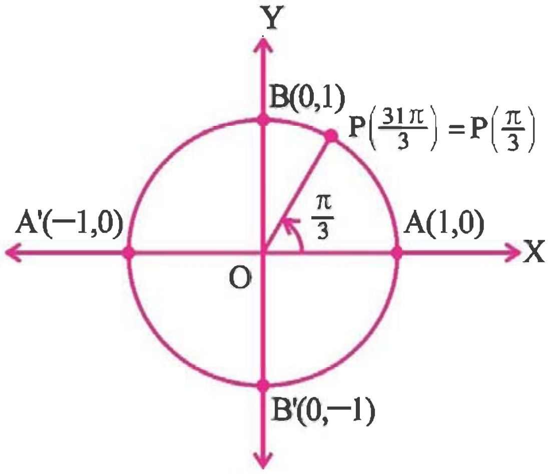
અહીં $\theta = \frac{31\pi}{3}$ અને $\theta \notin [0, 2\pi)$

વળી, $n = \left[\frac{\theta}{2\pi}\right] = \left[\frac{31\pi}{3} \times \frac{1}{2\pi}\right] = \left[\frac{31}{6}\right] = 5$

$\therefore \quad \alpha = \theta - 2n\pi = \frac{31\pi}{3} - 10\pi = \frac{\pi}{3}$

વળી, $P(\theta) = P(\alpha)$,

$\therefore \quad P\left(\frac{31\pi}{3}\right) = P\left(\frac{\pi}{3}\right)$.



આકૃતિ 4.3

(3) $P\left(\frac{-101\pi}{6}\right)$

અહીં $\theta = -\frac{101\pi}{6}$, $\theta \notin [0, 2\pi)$

$\therefore \quad n = \left[-\frac{101\pi}{6} \times \frac{1}{2\pi}\right] = \left[\frac{-101}{12}\right] = -9$

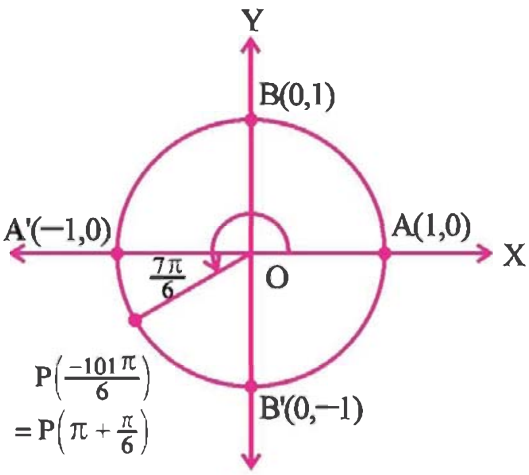
$\therefore \quad \alpha = \theta - 2n\pi = -\frac{101\pi}{6} + 18\pi$

$= \frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$

આમ, $P(\theta) = P(\alpha)$

$\therefore \quad P\left(\frac{-101\pi}{6}\right) = P\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

$\therefore \quad P\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ એ ત્રીજા ચરણમાં છે.



આકૃતિ 4.4

4.3 ત્રિકોણમિતિય બિંદુ વિધેય અને આવર્તમાન

આપણે જોયું કે પ્રત્યેક $\theta \in R$ માટે એકમ વર્તુળ પર અનન્ય બિંદુ $P(\theta)$ મળે છે. આ હકીકતને આપણે વિધેય તરીકે નિહાળીએ.

જો એકમ વર્તુળને C દ્વારા દર્શાવીએ તો $f : R \to C$, $f(\theta) = P(\theta) = P(x, y)$ ને ત્રિકોણમિતિય બિંદુ વિધેય અથવા ત્રિબિંદુ વિધેય કહે છે.

જો વિધેય માટે પ્રદેશના કોઈ પણ બે ભિન્ન ઘટક સાથે સહપ્રદેશના ભિન્ન ઘટક સંગત થાય તો તેવા વિધેયને એક-એક વિધેય કહે છે. એક-એક ના હોય તેવું વિધેય અનેક-એક વિધેય છે.

વ્યાખ્યા : ધારો કે $f : A \rightarrow B$ એ વાસ્તવિક ચલનું વિધેય છે. $A \subset R$ તથા f અચળ વિધેય નથી. ધારો કે $p' \in R, p' \neq 0$ એવી સંખ્યા મળે છે કે જેથી, જો $x \in A$ હોય, તો $x + p' \in A$, $\forall x \in A$ અને $f(x) = f(x + p')$, $\forall x \in A$ થાય, તો fને આવર્તી વિધેય (Periodic Function) કહેવાય છે અને p'ને fનું આવર્તમાન કહે છે. જો p એ ન્યૂનતમ ધન સંખ્યા એવી હોય કે જે ઉપર્યુક્ત ગુણધર્મ ધરાવતી હોય એટલે કે, જો $x \in A$ તો $x + p \in A$ અને $f(x) = f(x + p)$, $\forall x \in A$, તો pને fનું મુખ્ય આવર્તમાન (Principal Period) કહે છે.

આવર્તમાન (Period) : કોઈક પૂર્ણાંક k માટે $\theta_2 - \theta_1 = 2k\pi$, $k \in Z$ તેવી વાસ્તવિક સંખ્યા θ_1, θ_2 છે.

જો $\theta_1 = 2m\pi + \alpha$, $0 \leq \alpha < 2\pi$, $m \in Z$ હોય તો $P(\theta_1) = P(\alpha)$

હવે, $\theta_2 = \theta_1 + 2k\pi = 2m\pi + \alpha + 2k\pi$

$\therefore \quad \theta_2 = 2(m + k)\pi + \alpha, \quad m + k \in Z, 0 \leq \alpha < 2\pi$

ધારો કે $m + k = n$, $n \in Z$

$\therefore \quad \theta_2 = 2n\pi + \alpha$

$\therefore \quad P(\theta_2) = P(\alpha)$

આમ, $P(\theta_1) = P(\theta_2) = P(\theta_1 + 2k\pi)$

$\therefore \quad f(\theta_1) = f(\theta_2) = f(\theta_1 + 2k\pi), k \in Z$

આનાથી ફલિત થાય છે કે fની કિંમતો 2π ના અંતરાલ પર પુનરાવર્તન પામે છે. આમ, આ વિધેયના આવર્તમાન ...$-6\pi, -4\pi, -2\pi, 2\pi, 4\pi,$... છે.

જો વિધેય fનું મુખ્ય આવર્તમાન p હોય, તો $f(\theta) = f(\theta + p)$, $\forall \theta \in R$. જો $0 < q < p$, હોય, તો કોઈક $\theta \in R$ માટે $f(\theta) \neq f(\theta + q)$.

હવે આપણે ત્રિ-બિંદુવિધેયનું મુખ્ય આવર્તમાન 2π છે તેમ સાબિત કરીએ. ઉપર જણાવ્યા મુજબ fનું આવર્તમાન 2π છે તથા $2\pi > 0$. ધારો કે મુખ્ય આવર્તમાન q છે. જો $0 < q < 2\pi$ હોય તો દરેક $\theta \in R$ માટે $f(\theta) = f(\theta + q)$ થાય. જો $\theta = 0$ હોય, તો $f(0) = f(0 + q)$ જે શક્ય નથી, કારણ કે $f(0)$ બિંદુ $A(1, 0)$ છે. જ્યારે $f(q)$ એ એવું બિંદુ Q છે કે જેથી $\overset{\frown}{AQ}$ની લંબાઈ q થાય. $0 < q < 2\pi$ હોવાથી બિંદુ Q એ બિંદુ Aથી ભિન્ન બિંદુ થાય. કારણ કે વર્તુળની લંબાઈ 2π છે. આમ $f(0) \neq f(0 + q)$. માટે q એ fનું આવર્તમાન નથી. માટે $0 < q < 2\pi$ તો q એ મુખ્ય આવર્તમાન નથી.

આમ fનું આવર્તમાન 2π છે. 2πથી નાની કોઈ પણ ધન સંખ્યા fનું આવર્તમાન નથી માટે **ત્રિ-બિંદુ વિધેયનું મુખ્ય આવર્તમાન 2π છે.**

4.4 *sine* અને *cosine* વિધેયોની વ્યાખ્યા

આપણે જોયું કે ત્રિબિંદુ વિધેય f પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા θને સંગત એકમ વર્તુળ પર એક અનન્ય બિંદુ $P(\theta)$ આપે છે. હવે આપણે એકમ વર્તુળ C થી R નાં બે વિધેયો f અને g વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

$g : C \to R, g(P(x, y)) = x$ વ્યાખ્યાયિત કરીએ. આ વિધેય g એકમ વર્તુળ પરના પ્રત્યેક બિંદુને તેના અનન્ય x-યામ સાથે સંગત કરે છે. આકૃતિ 4.5 પરથી આ વિધેય સમજી શકાય.

$f : R \to C, f(\theta) = P(\theta) = P(x, y)$ તથા $g : C \to R, g(P(x, y)) = x$ ના સંયોજિત વિધેય $gof : R \to R$ ને *cosine* વિધેય કહે છે.

આ સંયોજિત વિધેય gof ને *cosine* વિધેય કહે છે અને ટૂંકમાં *cos* તરીકે લખાય છે.

$(gof)(\theta) = g(f(\theta)) = g(P(\theta)) = g(P(x, y)) = x$

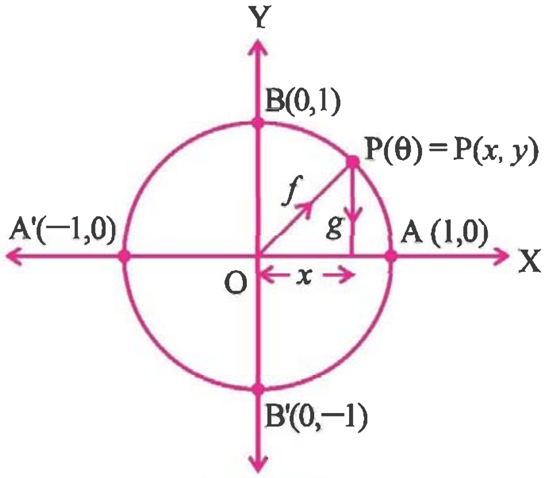
આમ $cos : R \to R, cos\theta = (gof)(\theta) = x$

હવે, ત્રિબિંદુ વિધેય અનેક-એક હોવાથી *cosine* વિધેય પણ અનેક-એક વિધેય છે. દાખલા તરીકે $cos0$ એ બિંદુ A(1, 0)નો x-યામ એટલે કે 1 થાય.

$2\pi = 2\pi \cdot 1 + 0$. આમ, $\theta = 2\pi$ માટે $\alpha = 0$

$\therefore \quad P(2\pi) = P(0) = A(1, 0)$

$\therefore \quad cos2\pi = 1 = cos0$



આકૃતિ 4.5

$h : C \to R, h(P(x, y)) = y$ એ એકમ વર્તુળ પરના પ્રત્યેક બિંદુ $P(x, y)$ ને સંગત તેનો અનન્ય y-યામ આપે છે.

હવે $f : R \to C, f(\theta) = P(\theta) = P(x, y)$ તથા $h : C \to R, h(P(x, y)) = y$ ના સંયોજિત વિધેય $hof : R \to R$ ને *sine* વિધેય કહે છે તથા તેને ટૂંકમાં *sin* તરીકે લખાય છે.

$(hof)(\theta) = h(f(\theta)) = h(P(\theta)) = h(P(x, y)) = y$

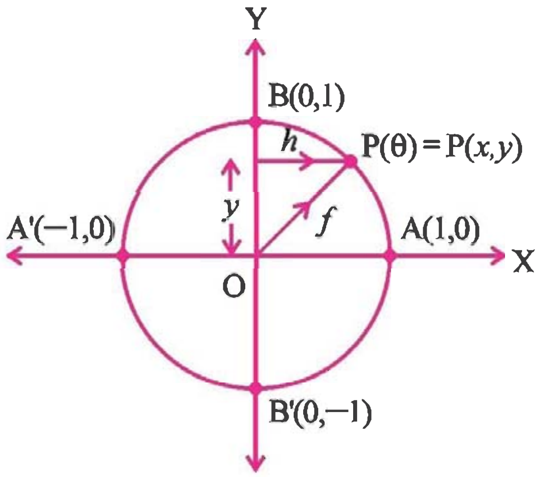
$\therefore \quad sin : R \to R$ તથા $sin\theta = (hof)(\theta) = y$

તે આકૃતિ 4.6માં દર્શાવેલ છે. આ વિધેય ટૂંકમાં *sin* તરીકે લખાય છે.

$sin : R \to R, sin\theta = y$

cos વિધેય જેવી જ દલીલો દ્વારા સાબિત કરી શકાય કે, $sin0 = sin2\pi = 0$.

આમ, *sine* વિધેય અનેક-એક વિધેય છે.



આકૃતિ 4.6

નોંધ આ વ્યાખ્યાઓ પરથી સ્પષ્ટ છે કે, એકમ વર્તુળ પરના કોઈ પણ બિંદુના યામ કોઈક $\theta \in R$ માટે $(cos\theta, sin\theta)$ હોય છે.

4.5 એક મૂળભૂત નિત્યસમ

આપણે ધોરણ 10માં અંતર-સૂત્રનો અભ્યાસ કરેલ છે. જો $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ યામ-સમતલમાં બે બિંદુઓ હોય, તો તેમની વચ્ચેનું અંતર AB એ અંતર-સૂત્ર

$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ દ્વારા મળે છે.

ધારો કે $P(\theta) = P(x, y)$ એકમ વર્તુળ પરનું કોઈ બિંદુ છે.

$\therefore$ $OP = 1$ **(એકમ વર્તુળની ત્રિજ્યા)**

$\therefore$ $OP^2 = 1$

$\therefore$ $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 1$

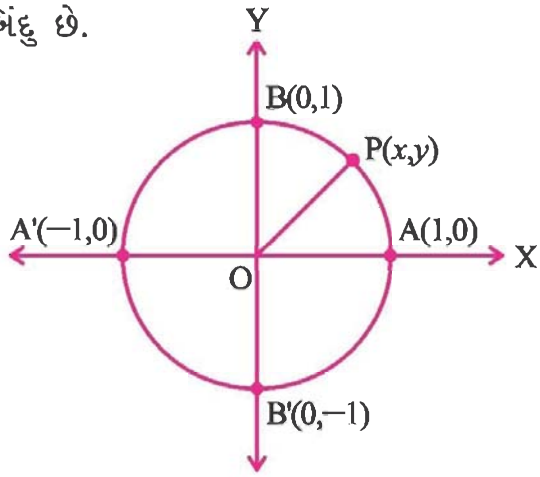
$\therefore$ $x^2 + y^2 = 1$

પરંતુ $x = cos\theta$ અને $y = sin\theta$

$\therefore$ $(cos\theta)^2 + (sin\theta)^2 = 1$

$(cos\theta)^2$ અને $(sin\theta)^2$ને અનુક્રમે $cos^2\theta$ અને $sin^2\theta$ લખવાનો રિવાજ છે.

આમ, પ્રત્યેક $\theta \in R$ માટે $cos^2\theta + sin^2\theta = 1$.



આકૃતિ 4.7

4.6 *cosine* અને *sine* વિધેયોના વિસ્તાર

પ્રત્યેક $\theta \in R$ માટે $cos^2\theta + sin^2\theta = 1$.

કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યાનો વર્ગ અનૃણ હોય તથા બે વાસ્તવિક સંખ્યાઓના વર્ગોનો સરવાળો 1 છે;

$0 \le cos^2\theta \le 1$ અને $0 \le sin^2\theta \le 1$. આથી, $| cos\theta | \le 1$, $| sin\theta | \le 1$

આમ, પ્રત્યેક $\theta \in R$ માટે $cos\theta \in [-1, 1]$, $sin\theta \in [-1, 1]$.

$\therefore$ આમ *cosine* અને *sine* વિધેયના વિસ્તાર $[-1, 1]$ના ઉપગણ થશે. ખરેખર તો વિસ્તાર સમગ્ર $[-1, 1]$ છે.

પ્રત્યેક $p \in [-1, 1]$ માટે, બિંદુ $(p, \sqrt{1-p^2})$ એકમ વર્તુળ પર છે,

કારણ કે $p^2 + (\sqrt{1-p^2})^2 = p^2 + 1 - p^2 = 1$

$\therefore$ હવે, આ બિંદુને સંગત $\theta \in R$ એવો મળે કે જેથી,

$f(\theta) = P(\theta) = (p, \sqrt{1-p^2})$.

હવે *cos* વિધેયની વ્યાખ્યા પરથી $P(\theta)$નો x-યામ $cos\theta$ છે.

$\therefore$ $cos\theta = p$ અને $p \in [-1, 1]$.

$\therefore$ પ્રત્યેક $p \in [-1, 1]$ માટે $\theta \in R$ એવો મળે કે જેથી $cos\theta = p$.

$\therefore$ ***cosine* વિધેયનો વિસ્તાર $[-1, 1]$ છે.**

તે જ રીતે પ્રત્યેક $p \in [-1, 1]$ માટે બિંદુ $(\sqrt{1-p^2}, p)$ એકમ વર્તુળ પર છે, માટે $\theta \in R$, એવો મળે કે જેથી $sin\theta = p$.

$\therefore$ ***sine* વિધેયનો વિસ્તાર $[-1, 1]$ છે.**

આપણે જાણીએ છીએ કે $|x| = \begin{cases} x & x \ge 0 \text{ માટે} \\ -x & x < 0 \text{ માટે} \end{cases}$

$\therefore |sin\theta| = \begin{cases} sin\theta & \text{જો } sin\theta \ge 0 \\ -sin\theta & \text{જો } sin\theta < 0 \end{cases}$

$\therefore \quad -1 \le sin\theta \le 1 \Leftrightarrow -1 \le sin\theta \le 0$ અથવા $0 \le sin\theta \le 1$

$\Leftrightarrow 0 \le -sin\theta \le 1$ અથવા $0 \le sin\theta \le 1$

$\Leftrightarrow |\, sin\theta \,| \le 1, \forall\theta \in R$

એ જ રીતે $|\, cos\theta \,| \le 1, \forall\theta \in R$

$\therefore$ **cosine અને sine વિધેયના વિસ્તાર $\{p \mid |\, p \,| \le 1, p \in R\}$ તરીકે પણ લખી શકાય.**

4.7 sine અને cosine વિધેયનાં શૂન્યો

કોઈ પણ વાસ્તવિક વિધેય $f : A \to B$ માટે $\{x \mid f(x) = 0, x \in A\}$ને વિધેય fનાં શૂન્યોનો ગણ કહેવાય છે.

sine વિધેયનાં શૂન્યો : ધારો કે કોઈક $\theta \in R$ માટે *sin* વિધેયનું મૂલ્ય શૂન્ય છે. એટલે કે $sin\theta = 0$.

$\therefore$ ત્રિબિંદુ $P(\theta)$નો y-યામ શૂન્ય છે.

$\therefore$ $sin\theta = 0$ હોય, તો $P(\theta)$ X-અક્ષ પર છે.

$\therefore$ $P(\theta) = A(1, 0)$ અથવા $A'(-1, 0)$

હવે, A અને A' અનુક્રમે $\alpha = 0$ અને $\alpha = \pi$ને સંગત છે. વ્યાપક રીતે, $\theta = 2n\pi + \alpha, n \in Z$.

જો $\alpha = 0$ હોય, તો $\theta = 2n\pi$ અને $\alpha = \pi$ હોય, તો $\theta = 2n\pi + \pi, n \in Z$.

$\therefore \quad \theta = 2n\pi$ અથવા $\theta = (2n + 1)\pi, n \in Z$

હવે $2n\pi$, πનો યુગ્મ ગુણક અને $(2n + 1)\pi$ એ πનો અયુગ્મ ગુણક છે.

સ્પષ્ટ છે કે $sin\theta = 0 \Rightarrow \theta$ એ πનો પૂર્ણાંક ગુણક છે એટલે કે $\theta = k\pi, k \in Z$.

આનાથી ઊલટું જો $\theta = k\pi, k \in Z$ હોય, તો $P(\theta)$ એ A અથવા A' થાય. આથી $sin\theta = 0$

આમ, **sinનાં શૂન્યોનો ગણ $\{k\pi \mid k \in Z\}$ છે.**

cosine વિધેયનાં શૂન્યો : ધારો કે કોઈક $\theta \in R$ માટે *cosine* વિધેયનું મૂલ્ય શૂન્ય છે એટલે કે $cos\theta = 0$.

$\therefore$ ત્રિબિંદુ $P(\theta)$નો x-યામ શૂન્ય છે.

$\therefore$ $P(\theta)$ એ Y-અક્ષ પર છે.

$\therefore$ $P(\theta) = B(0, 1)$ અથવા $B'(0, -1)$

આપણે જાણીએ છીએ કે B અને B', $\alpha = \frac{\pi}{2}$ અને $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ને સંગત છે.

વ્યાપક રીતે, $\theta = 2n\pi + \alpha, n \in Z$.

$\therefore \quad \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ અથવા $\theta = 2n\pi + \frac{3\pi}{2}, n \in Z$

આમ, $\theta = (4n + 1)\frac{\pi}{2}$ અથવા $\theta = (4n + 3)\frac{\pi}{2}, n \in Z$

$4n + 1 = 2(2n) + 1, 4n + 3 = 2(2n + 1) + 1$

$\therefore$ $4n + 1$ અને $4n + 3$ એ $2k + 1, k \in Z$નું સ્વરૂપ છે.

$\therefore$ $(4n + 1)$ અથવા $(4n + 3), n \in Z$ એ અયુગ્મ પૂર્ણાંકો છે. તેથી θ એ $\frac{\pi}{2}$ નો અયુગ્મ ગુણક છે.

$\therefore \quad \theta = (2k - 1)\frac{\pi}{2}$ અથવા $\theta = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$

આથી સ્પષ્ટ થાય છે કે $\theta = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$.

આથી ઊલટું ધારો કે $\theta = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$.

તેથી, $\theta = (2(2n) + 1)\frac{\pi}{2}$ અથવા $\theta = (2(2n + 1) + 1)\frac{\pi}{2}$

(kની કિંમત યુગ્મ કે અયુગ્મ હોય તે અનુસાર)

$\therefore \quad \theta = (4n + 1)\frac{\pi}{2}$ અથવા $(4n + 3)\frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ અથવા $\theta = 2n\pi + \frac{3\pi}{2}$

$\therefore \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$ અથવા $\frac{3\pi}{2}$

$\therefore \quad P(\theta) = P(\alpha) = B$ અથવા B'

$\therefore \quad P(\theta)$નો x-યામ શૂન્ય છે.

$\therefore \quad cos\theta = 0$

***cosine* વિધેયનાં શૂન્યોનો ગણ $\left\{(2k + 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$ અથવા $\left\{(2k - 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$ છે.**

4.8 અન્ય ત્રિકોણમિતિય વિધેયો

અન્ય ત્રિકોણમિતિય વિધેયોની વ્યાખ્યા આપતાં પહેલાં બે વિધેયોના ભાગાકારની વ્યાખ્યા યાદ કરીએ. ધારો કે $f : A \to R$, $g : B \to R$, $A \subset R$, $B \subset R$ વાસ્તવિક ચલનાં વાસ્તવિક વિધેયો હોય અને $A \cap B - \{x \mid g(x) = 0\} \neq \emptyset$ હોય, તો $\frac{f}{g} : A \cap B - \{x \mid g(x) = 0\} \to R$

જ્યાં, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

હવે આપણે નવું ત્રિકોણમિતિય વિધેય જેને tangent (અથવા *tan*) વિધેય કહે છે, તે વ્યાખ્યાયિત કરીશું. અહીં tangent વિધેય $sin : R \to R$ અને $cos : R \to R$ બે વિધેયોનું ભાગાકાર વિધેય છે.

હવે *cos*નાં શૂન્યોનો ગણ $\{x \mid cosx = 0\} = \left\{(2k + 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$ છે.

tangent વિધેય *sine* અને *cosine* વિધેયના ભાગાકાર તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવાનું છે.

$tan : R - \left\{(2k + 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\} \to R$, $tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta}$

$tan0 = \frac{sin\,0}{cos\,0} = \frac{0}{1} = 0$ અને $tan\,2\pi = \frac{sin2\pi}{cos2\pi} = \frac{0}{1} = 0$.

આમ, $tan0 = tan\,2\pi = 0$. આથી, *tan* અનેક-એક વિધેય છે.

tan વિધેયનો વિસ્તાર :

$p \in R$ હોય, તો $p^2 \geq 0$. આથી $1 + p^2 \geq 1$.

ધારો કે $x = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}$, $y = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$

$\therefore \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{1 + p^2} + \frac{p^2}{1 + p^2} = \frac{1 + p^2}{1 + p^2} = 1$

આમ, $(x, y) \in C$.

$\therefore$ $\theta \in R$ એવો મળે કે જેથી $P(\theta) = (x, y)$.

$\therefore$ $x = cos\theta, y = sin\theta$

$\therefore$ $cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}, sin\theta = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$

$\therefore$ $tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta} = p$

વળી, $cos\theta = x \neq 0$ કારણ કે જો $x = 0$ હોય, તો $\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = 0$, જે શક્ય નથી.

$\therefore$ $cos\theta \neq 0 \Leftrightarrow \theta \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$

આમ, પ્રત્યેક $p \in R$ માટે $\theta \in R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$ એવો મળે કે જેથી $tan\theta = p$.

આમ, *tan* વિધેયનો વિસ્તાર R છે.

***cot* વિધેય :** *cot* વિધેય *cos* વિધેય અને *sin* વિધેયના ભાગાકારથી વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

અહીં $sin : R \to R$ અને $cos : R \to R$

cot વિધેયનો પ્રદેશ $R \cap R - \{x \mid sinx = 0\} = R - \{k\pi \mid k \in Z\}$

$\therefore$ $cot : R - \{k\pi \mid k \in Z\} \to R, cot\theta = \frac{cos\,\theta}{sin\,\theta}$.

cot વિધેય પણ અનેક-એક વિધેય છે, કારણ કે

$$cot\frac{\pi}{2} = \frac{cos\,\frac{\pi}{2}}{sin\,\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0, \quad cot\frac{3\pi}{2} = \frac{cos\frac{3\pi}{2}}{sin\frac{3\pi}{2}} = \frac{0}{-1} = 0$$

tan વિધેયની જેમ જ *cot* વિધેયનો વિસ્તાર પણ R છે. આ માટે *tan* વિધેયની જેમ જ કોઈ પણ $p \in R$ માટે, $x = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \; y = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$. લેતાં, $x^2 + y^2 = 1$. આમ, $(x, y) \in C$.

હવે, (x, y) એકમ વર્તુળ પર હોવાથી $\theta \in R$ એવો મળે કે જેથી $P(\theta) = (x, y)$.

$x = cos\theta, y = sin\theta, cot\theta = \frac{cos\,\theta}{sin\,\theta} = \frac{x}{y} = p$

હવે આવી સંખ્યા θ માટે, $sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \neq 0 \Leftrightarrow \theta \neq k\pi$.

આમ પ્રત્યેક $p \in R$ માટે, $\theta \in R - \{k\pi \mid k \in Z\}$ એવો મળે કે જેથી $cot\theta = p$

આમ, *cot* નો વિસ્તાર R છે.

***sec* વિધેય :** $f : R \to R, f(x) = 1$ વિધેય છે અને $cos : R \to R$ વિધેય છે. f અને *cos* ના ભાગાકારને *secant* વિધેય કહેવાય છે.

sec વિધેયનો પ્રદેશ $= (R \cap R) - \{\theta \mid cos\theta = 0\}$

$$= R - \left\{(2k+1)\,\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{sec : R - \left\{(2k+1)\,\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\} \to R, sec\theta = \frac{1}{cos\theta}}$$

વળી, $sec0 = 1$ અને $sec2\pi = 1$ હોવાથી *sec* અનેક-એક વિધેય છે.

sec વિધેયનો વિસ્તાર :

આપણે જોયું કે $sec\theta = \frac{1}{cos\theta}$.

જો $cos\theta \neq 0$ હોય, તો $sec\theta$ વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

cos વિધેયનો વિસ્તાર $[-1, 1]$ છે.

$$-1 \leq cos\theta \leq 1,\ cos\theta \neq 0$$

$\Leftrightarrow\ -1 \leq cos\theta < 0$ અને $0 < cos\theta \leq 1$

$\Leftrightarrow\ -1 \geq \frac{1}{cos\theta}$ અથવા $\frac{1}{cos\theta} \geq 1$

$\Leftrightarrow\ -1 \geq sec\theta$ અથવા $sec\theta \geq 1$

$\Leftrightarrow\ sec\theta \leq -1$ અથવા $sec\theta \geq 1$

આથી sec એ -1 અને 1 વચ્ચેનું કોઈ મૂલ્ય ધરાવતું નથી.

આમ, $\forall\theta \in R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$, $sec\theta \in R - (-1, 1)$.

આથી ઊલટું, $p \in R - (-1, 1)$ અને $p \neq 0$ હોય, તો $\frac{1}{p} \in [-1, 1]$.

તથા $\theta \in R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$ એવો મળે કે જેથી $cos\,\theta = \frac{1}{p}$.

અને આવા θ માટે $sec\theta = p$. આમ, sec વિધેયનો વિસ્તાર $R - (-1, 1)$ છે.

cosec વિધેય :

વિધેય $f : R \to R$, $f(x) = 1$ અને $sin : R \to R$ના ભાગાકારને $cosec$ વિધેય કહે છે.

$cosec$ વિધેયનો પ્રદેશ $= (R \cap R) - \{\theta \mid sin\theta = 0\}$
$= R - \{k\pi \mid k \in Z\}$

$\therefore$ **$cosec : R - \{k\pi \mid k \in Z\} \to R$, $cosec\theta = \frac{1}{sin\theta}$.**

અન્ય ત્રિકોણમિતિય વિધેયોની માફક $cosec$ પણ અનેક-એક વિધેય છે, કારણ કે $cosec\frac{\pi}{2} = 1$ અને $cosec\frac{5\pi}{2} = 1$.

વધુમાં $-1 \leq sin\theta \leq 1$, $cosec\theta = \frac{1}{sin\theta}$ હોવાથી તે $sin\theta \neq 0$ હોય, તો વ્યાખ્યાયિત થાય. sec વિધેયમાં ચર્ચા કર્યા મુજબ જ $cosec$ વિધેયનો વિસ્તાર $R - (-1, 1)$ છે, તેમ સાબિત કરી શકાય.

$$|\,cos\theta\,| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|cos\theta|} \geq 1 \Leftrightarrow |\,sec\theta\,| \geq 1$$

sec વિધેય તથા $cosec$ વિધેયનો વિસ્તાર $\{\, p \mid |p| \geq 1, p \in R \,\}$ તરીકે પણ લખી શકાય.

4.9 અન્ય નિત્યસમો

આપણે જોયું કે $\forall\theta \in R$, $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$ (i)

$\theta \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z \Leftrightarrow cos\theta \neq 0$

હવે, સમીકરણ (i)ની બંને બાજુઓને $cos^2\theta$ વડે ભાગતાં,

$$\frac{cos^2\theta}{cos^2\theta} + \frac{sin^2\theta}{cos^2\theta} = \frac{1}{cos^2\theta}, \ \forall\theta \in R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$$

$$\therefore \ 1 + tan^2\theta = sec^2\theta, \ \forall\theta \in R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\} \qquad \text{(ii)}$$

તે જ રીતે $\theta \neq k\pi$, $k \in Z \Leftrightarrow sin\theta \neq 0$. હવે નિત્યસમ (i)ને $sin^2\theta$ વડે ભાગતાં,

$$\frac{cos^2\theta}{sin^2\theta} + \frac{sin^2\theta}{sin^2\theta} = \frac{1}{sin^2\theta}, \ \forall\theta \in R - \{k\pi \mid k \in Z\}$$

$$\therefore \ cot^2\theta + 1 = cosec^2\theta, \ \forall\theta \in R - \{k\pi \mid k \in Z\} \qquad \text{(iii)}$$

ઉદાહરણ 1 : નીચેનાં વિધેયોનાં શૂન્યોનો ગણ શોધો :

(1) $sin\ (x - 1)$ (2) $sin\ x - 1$ (3) $cos\ x + 1$ (4) $cot\ 5x$ (5) $sec\ 5x$

ઉકેલ : (1) $sin\ (x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1) = k\pi,\ k \in Z$

$\Leftrightarrow x = k\pi + 1,\ k \in Z$

$\therefore$ $sin(x - 1)$ નાં શૂન્યોનો ગણ $\{k\pi + 1 \mid k \in Z\}$ છે.

(2) $sin\ x - 1$ નાં શૂન્યોનો વિચાર કરીએ.

$sin\ x - 1 = 0 \Leftrightarrow sin\ x = 1$

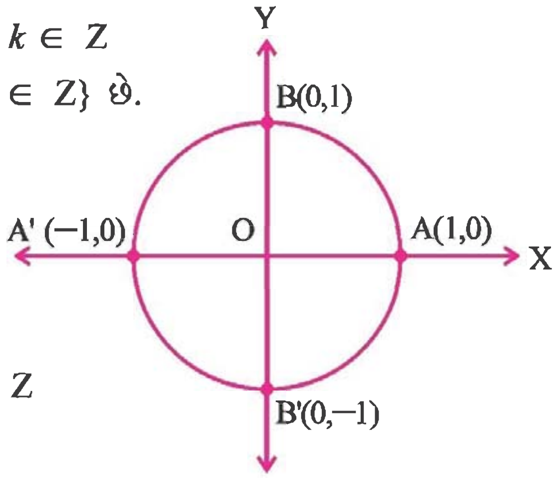
$\Leftrightarrow P(x) = B(0, 1)$

$\Leftrightarrow P(x) = P(\frac{\pi}{2})$

$\Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in Z$

$\Leftrightarrow x = \frac{4k\pi + \pi}{2}$

$\Leftrightarrow x = (4k + 1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z$



આકૃતિ 4.8

$\therefore$ $sin\,x - 1$ નાં શૂન્યોનો ગણ $\left\{(4k + 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$ છે.

(3) $cos\ x + 1$ નાં શૂન્યોનો વિચાર કરીએ.

$cos\ x + 1 = 0 \Leftrightarrow cos\ x = -1$

$\Leftrightarrow P(x) = A'(-1, 0)$

$\Leftrightarrow P(x) = P(\pi)$

$\Leftrightarrow x = 2k\pi + \pi,\ k \in Z$ $\qquad (\alpha = \pi,\ \theta = 2k\pi + \alpha)$

$\Leftrightarrow x = (2k + 1)\pi,\ k \in Z$

$\therefore$ $cos\,x + 1$નાં શૂન્યોનો ગણ $\{(2k + 1)\pi \mid k \in Z\}$ છે.

(4) $cot\ 5x = 0$ નો વિચાર કરીએ.

$cot\ 5x = 0 \Leftrightarrow 5x = (2k + 1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z$

$\Leftrightarrow x = (2k + 1)\frac{\pi}{10},\ k \in Z$

$\therefore$ માંગેલ ગણ $\left\{(2k + 1)\frac{\pi}{10} \mid k \in Z\right\}$ છે.

(5) $sec\ 5x$ નાં શૂન્યોનો વિચાર કરીએ.

secનો વિસ્તાર $R - (-1, 1)$ છે. એટલે કે sec વિધેય -1 અને 1 વચ્ચેનું કોઈ મૂલ્ય ધરાવતું નથી.

આમ, કોઈ પણ x માટે $sec\ 5x \neq 0$

$\therefore$ $sec\ 5x$ નાં શૂન્યોનો ગણ $\emptyset$ છે.

ઉદાહરણ 2 : નીચેનાં વિધેયોનો વિસ્તાર શોધો :

(1) $5cos3x - 2$ (2) $6 - 7sin^2x$ (3) $3cosec^2x - 2$ (4) $2 + 3sec\ x$

(5) $| 3 - 7cos^2x |$ (6) $a\ cos^2(px + q) + b$

ઉકેલ : (1) $-1 \le cos3x \le 1 \Leftrightarrow -5 \le 5cos3x \le 5$

$$\Leftrightarrow (-5 - 2) \le (5cos3x - 2) \le 5 - 2$$

$$\Leftrightarrow -7 \le (5cos3x - 2) \le 3$$

$\therefore$ $5cos3x - 2$નો વિસ્તાર $[-7, 3]$ છે.

(2) $-1 \le sin\ x \le 1 \Leftrightarrow -1 \le sin\ x \le 0$ અથવા $0 \le sin\ x \le 1$

$$\Leftrightarrow 0 \le sin^2x \le 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \ge -7sin^2x \ge -7$$

$$\Leftrightarrow -7 \le -7sin^2x \le 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \le 6 - 7sin^2x \le 6$$

$\therefore$ $6 - 7sin^2x$નો વિસ્તાર $[-1, 6]$ છે.

(3) $cosec^2x \ge 1 \Leftrightarrow 3cosec^2x \ge 3$

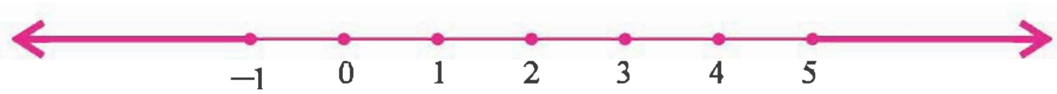
$$\Leftrightarrow (3cosec^2x - 2) \ge 1$$

$\therefore$ $3cosec^2x - 2$નો વિસ્તાર $[1, \infty)$ અથવા $\{p \mid p \ge 1, p \in R\}$

(4) $secx \le -1$ અથવા $secx \ge 1$

$\Leftrightarrow$ $3secx \le -3$ અથવા $3secx \ge 3$

$\Leftrightarrow$ $2 + 3secx \le -1$ અથવા $2 + 3secx \ge 5$



આકૃતિ 4.9

$\therefore$ $2 + 3sec\ x$નો વિસ્તાર $R - (-1, 5)$ અથવા $(-\infty, -1] \cup [5, \infty)$ છે.

આ ગણને $\{p \mid p \le -1$ અથવા $p \ge 5, p \in R\}$થી પણ દર્શાવી શકાય.

(5) $0 \le \cos^2 x \le 1 \Leftrightarrow 0 \ge -7\cos^2 x \ge -7$

$\Leftrightarrow -7 \le -7\cos^2 x \le 0$

$\Leftrightarrow -4 \le (3 - 7\cos^2 x) \le 3$

$\Leftrightarrow 3 - 7\cos^2 x \in [-4, 0] \cup [0, 3]$

$\Leftrightarrow |3 - 7\cos^2 x| \in [0, 4] \cup [0, 3]$

$\therefore$ $|3 - 7\cos^2 x|$નો વિસ્તાર $[0, 4]$ છે.

(6) **(1) જો $a > 0$ તો**

$0 \le \cos^2(px + q) \le 1 \Leftrightarrow 0 \le a\cos^2(px + q) \le a$

$\Leftrightarrow b \le a\cos^2(px + q) + b \le a + b$

(2) જો $a < 0$ તો

$0 \le \cos^2(px + q) \le 1 \Leftrightarrow 0 \ge a\cos^2(px + q) \ge a$

$\Leftrightarrow a \le a\cos^2(px + q) \le 0$

$\Leftrightarrow a + b \le a\cos^2(px + q) + b \le a$

$\therefore$ જો $a > 0$ હોય, તો $a\cos^2(px + q) + b$નો વિસ્તાર $[b, a + b]$ થાય અને $a < 0$ હોય, તો આ વિધેયનો વિસ્તાર $[a + b, b]$ થાય.

ઉદાહરણ 3 : સાબિત કરો કે, $1 + \frac{4\tan^2\theta}{(1 - \tan^2\theta)^2} = \frac{1}{1 - 4\sin^2\theta\cos^2\theta}$

ઉકેલ : ડા.બા. $= 1 + \frac{4\tan^2\theta}{(1 - \tan^2\theta)^2}$

$$= \frac{(1 - \tan^2\theta)^2 + 4\tan^2\theta}{(1 - \tan^2\theta)^2}$$

$$= \frac{(1 + \tan^2\theta)^2}{(1 - \tan^2\theta)^2} \qquad ((a - b)^2 + 4ab = (a + b)^2)$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)^2}{\left(1 - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)^2}$$

$$= \frac{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2}{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2}$$

$$= \frac{1}{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 - 4\sin^2\theta\cos^2\theta} \qquad ((a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab\ )$$

$$= \frac{1}{1 - 4\sin^2\theta\cos^2\theta} = \text{જ.બા.}$$

ઉદાહરણ 4 : સાબિત કરો કે, $\dfrac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \dfrac{\cos\theta}{1 - \sin\theta} = \dfrac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$.

ઉકેલ : ડા.બા. $= \dfrac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - (\sec\theta - \tan\theta)(\sec\theta + \tan\theta)}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta)\,(1 - (\sec\theta - \tan\theta))}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta)(1 - \sec\theta + \tan\theta)}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)}$$

$$= (\tan\theta + \sec\theta)$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta + 1}{\cos\theta} \qquad \text{(i)}$$

હવે, $\dfrac{\sin\theta + 1}{\cos\theta} = \dfrac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} \times \dfrac{1 - \sin\theta}{1 - \sin\theta}$

$$= \frac{1 - \sin^2\theta}{\cos\theta(1 - \sin\theta)}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta(1 - \sin\theta)} = \frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta} \qquad \text{(ii)}$$

(i) અને (ii) ઉપરથી માંગેલું પરિણામ સાબિત થાય છે.

ઉદાહરણ 5 : સાબિત કરો કે, $\sec^2\theta + \mathrm{cosec}^2\theta \geq 4$

ઉકેલ : $\sec^2\theta + \mathrm{cosec}^2\theta = 1 + \tan^2\theta + 1 + \cot^2\theta$

$$= 2 + \tan^2\theta + \cot^2\theta$$

$$= 2 + \tan^2\theta + \cot^2\theta - 2\tan\theta\cot\theta + 2\cot\theta\tan\theta$$

$$= 2 + (\tan\theta - \cot\theta)^2 + 2$$

$$= 4 + (\tan\theta - \cot\theta)^2$$

$$\geq 4 \qquad (\tan\theta - \cot\theta)^2 \geq 0$$

સ્વાધ્યાય 4.1

1. નીચેનાં વિધેયોનાં શૂન્યો શોધો :

(1) $\tan(2\theta + 1)$ (2) $\cos(3x + 2)$ (3) $\sin x + 1$

(4) $\cos x - 1$ (5) $\cot 3x$ (6) $\mathrm{cosec}\, 5x$

2. નીચેનાં વિધેયોનો વિસ્તાર શોધો :

(1) $5\ sin7x + 3$ (2) $3 - sec^2x$ (3) $3sin^2\ x - 4$

(4) $|\ 2 - 5\ sin^2x|$ (5) $|\ 3 - 4sec^2x\ |$ (6) $3\ cosec\ x - 2$

3. સાબિત કરો કે :

(1) જો $tan\theta + cot\theta = 2$, તો $tan^4\theta + cot^4\theta = 2$

(2) જો $sin\theta + cosec\theta = 2$, તો $sin^n\theta + cosec^n\theta = 2$

(3) $2\ sec^2\theta - sec^4\theta - 2cosec^2\theta + cosec^4\theta = cot^4\theta - tan^4\theta$

(4) $\frac{1 + tan^2\theta}{1 + cot^2\theta} = \left(\frac{1 - tan\theta}{1 - cot\theta}\right)^2$

(5) $\left(\frac{1 + sin\theta - cos\theta}{1 + sin\theta + cos\theta}\right)^2 = \frac{1 - cos\theta}{1 + cos\theta}$

(6) $\frac{1}{cosec\theta - cot\theta} - \frac{1}{sin\theta} = \frac{1}{sin\theta} - \frac{1}{cosec\theta + cot\theta}$

(7) $\frac{sin\theta + 1 - cos\theta}{sin\theta + cos\theta - 1} = \frac{1 + sin\theta}{cos\theta}$

(8) $\frac{sinA}{secA + tanA - 1} + \frac{cosA}{cosecA + cotA - 1} = 1$

(9) $\left(\frac{1}{sec^2A - cos^2A} + \frac{1}{cosec^2A - sin^2A}\right) sin^2A\ cos^2A = \frac{1 - sin^2A\, cos^2A}{2 + sin^2A\, cos^2A}$

4. જો $tan\theta = \frac{2x(x + 1)}{2x + 1}$, તો $sin\theta$ નું મૂલ્ય શોધો. $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$

5. જો $10sin^4\theta + 15cos^4\theta = 6$, તો $27cosec^2\theta + 8\ sec^2\theta$નું મૂલ્ય શોધો.

6. જો $cosec\theta + cot\theta = \frac{3}{2}$, તો $cos\theta$ શોધો.

7. $tan^2\theta - sin^2\theta = tan^2\theta \cdot sin^2\theta$ સાબિત કરો અને તેના પરથી $tan^2\theta \geq sin^2\theta$ તારવો.

*

4.10 ત્રિકોણમિતિય વિધેયોનાં આવર્તમાન

આપણે જાણીએ છીએ કે, ત્રિકોણમિતિય બિંદુ વિધેયનું મુખ્ય આવર્તમાન 2π છે.

$\therefore\quad P(2\pi + \theta) = P(\theta)$

આમ, જો કોઈ બિંદુ Pથી એક પૂર્ણ ભ્રમણ કરવામાં આવે તો તે જ બિંદુ P પર પાછા આવીએ. આથી જો θ, 2πના ગુણાંકમાં વધે અથવા ઘટે તો *sine* અને *cosine* વિધેયનાં મૂલ્યો બદલાતાં નથી, એટલે કે

$sin(2k\pi + \theta) = sin\theta$, $cos(2k\pi + \theta) = cos\theta$, $k \in Z$.

આ જ રીતે *sec* અને *cosec* અનુક્રમે *cos* અને *sin*નાં વ્યસ્ત વિધેયો હોવાથી,

$sec(2k\pi + \theta) = sec\theta$ અને $cosec(2k\pi + \theta) = cosec\theta$.

હાલ પૂરતું ધારી લઈએ કે જો θ, πના ગુણાંકમાં વધે અથવા ઘટે તો *tan* અને *cot* વિધેયોનાં મૂલ્યો બદલાતાં નથી. આમ,

આમ, *sin, cos, sec, cosec* ના મુખ્ય આવર્તમાન 2π છે તથા *tan* અને *cot* ના મુખ્ય આવર્તમાન π છે.

આમ, $tan(k\pi + \theta) = tan\theta$, $cot(k\pi + \theta) = cot\theta$, $k \in Z$.

ઉદાહરણ 6 : સાબિત કરો કે $sin\left(\frac{37\pi}{6}\right) = sin\frac{\pi}{6}$.

ઉકેલ : આપણે જોયું કે $sin(2k\pi + \theta) = sin\theta,\ k \in Z$

$$\therefore \quad sin\left(\frac{37\pi}{6}\right) = sin\left(6\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= sin\frac{\pi}{6}$$

($6\pi = 3(2\pi)$ એ sinનું આવર્તમાન છે.)

ઉદાહરણ 7 : સાબિત કરો કે $cos\left(\frac{-101\pi}{3}\right) = cos\frac{\pi}{3}$.

ઉકેલ : $cos\left(\frac{-101\pi}{3}\right) = cos\left(-34\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

$$= cos\frac{\pi}{3}$$

(-34π એ cosનું આવર્તમાન છે.)

ઉદાહરણ 8 : સાબિત કરો કે $tan\ \frac{22\pi}{3} = tan\frac{\pi}{3}$.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે $tan(k\pi + \theta) = tan\theta,\ k \in Z$.

$$\therefore \quad tan\ \frac{22\pi}{3} = tan\left(7\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= tan\frac{\pi}{3}$$

(7π એ tanનું આવર્તમાન છે.)

4.11 વધતાં અને ઘટતાં વિધેયો

આપણે જાણીએ છીએ કે વિધેય $f : R \to R, f(x) = 2x + 1$નો આલેખ રેખા છે. આ આલેખની રેખા ઊર્ધ્વગામી છે. આનો અર્થ એ થાય કે, જેમ x વધતો જાય તેમ $f(x)$ વધે છે.

$f : N \to N, f(x) = x^2$ માટે $f(1) = 1, f(2) = 4, f(3) = 9, f(4) = 16$ વગેરે. અહીં જોઈ શકાય છે કે જેમ-જેમ x વધે છે તેમ-તેમ $f(x)$ પણ વધે છે.

એટલે કે $4 > 3$ હોવાથી $f(4) > f(3)$ થાય છે.

આવા વિધેયને વધતું વિધેય કહેવાય. વિધેય $f : N \to R, f(x) = \frac{1}{x}, f(1) = 1, f(2) = \frac{1}{2}$, $f(3) = \frac{1}{3}, f(4) = \frac{1}{4}$, વગેરે. અહીં જોઈ શકાય છે કે જેમ-જેમ x વધે છે તેમ-તેમ $f(x)$નું મૂલ્ય ઘટે છે, એટલે કે $4 > 2 \Rightarrow f(4) < f(2)$. આવા વિધેયને ઘટતું વિધેય કહેવાય છે.

વ્યાપક રીતે, **જો $A \subset R, B \subset R$ હોય અને $f : A \to B$ વિધેય હોય તથા $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, થતું હોય તો fને ચુસ્ત વધતું વિધેય (Strictly Increasing Function) કહેવાય છે અને તેને $f\uparrow$ વડે દર્શાવાય છે.**

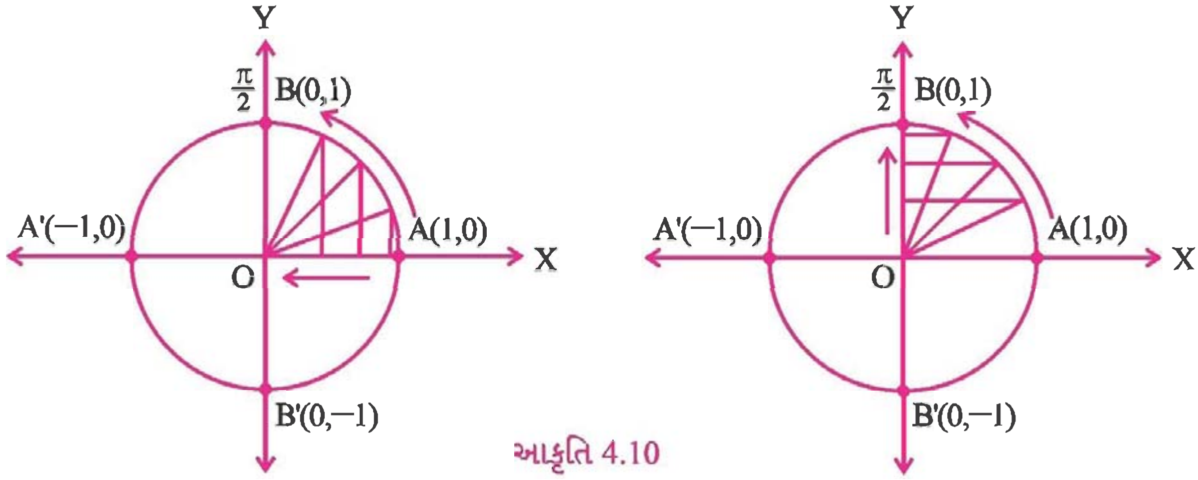
જો $A \subset R, B \subset R$ અને $f : A \to B$ વિધેય હોય અને

જો $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, થતું હોય, તો fને ચુસ્ત ઘટતું વિધેય (Strictly Decreasing Function) કહેવાય છે અને તે $f\downarrow$થી દર્શાવાય છે.

હવે આપણે ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનો વિચાર કરીશું.

તમામ ત્રિકોણમિતીય વિધેયો ચરણમાં ચુસ્ત વધતા કે ઘટતા વિધેયો છે. પણ આપણે તેને વધતાં કે ઘટતાં વિધેયો કહીશું.

જો $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ હોય અને θ વધે છે તો તેને સંગતબિંદુ $P(\theta)$ ચાપ A થી B ઉપરની તરફ જાય છે. આથી તેનો x-યામ 1થી 0 તરફ ઘટે છે જ્યારે y-યામ 0 થી વધીને 1 થાય છે. આમ, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ માટે $cos\theta$ ઘટતું વિધેય છે અને $sin\theta$ વધતું વિધેય છે.



આકૃતિ 4.10

દ્વિતીય ચરણમાં $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. જેમ-જેમ θ વધે તેમ-તેમ સંગતબિંદુ $P(\theta)$ ચાપ $\widehat{BA'}$ પર નીચે સરકે છે. તે અનુસાર $sin\theta$ એ 1થી ઘટીને 0 થાય છે તથા $cos\theta$ એ 0 થી ઘટીને -1 થાય છે. આમ, આ ચરણમાં *sin* તથા *cos* બંને ઘટતાં વિધેયો છે.

ત્રીજા ચરણમાં $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$. હવે θ જેમ-જેમ વધે તેમ તેને સંગતબિંદુ $P(\theta)$ ચાપ $\widehat{A'B'}$માં નીચેની તરફ જાય છે. આથી $sin\theta$ એ 0 થી ઘટીને -1 થાય છે જ્યારે $cos\theta$ એ -1થી વધીને 0 થાય છે. છેલ્લે, ચોથા ચરણમાં $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$. આથી જેમ-જેમ θ વધે તેમ-તેમ સંગતબિંદુ $P(\theta)$ ચાપ $\widehat{B'A}$માં ઉપરની તરફ જાય છે અને આથી $sin\theta$ એ -1થી વધીને 0 થાય છે તથા *cos* એ 0 થી વધીને 1 થાય છે.

આમ,

વિધેય \ ચરણ	પ્રથમ	દ્વિતીય	તૃતીય	ચતુર્થ
	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	$\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
sin	↑	↓	↓	↑
cos	↓	↓	↑	↑

હવે, *cosec* અને *sec* એ અનુક્રમે *sin* અને *cos*નાં વ્યસ્ત વિધેયો હોવાથી જ્યારે $sin\theta$ વધતું વિધેય હોય ત્યારે $cosec\theta$ ઘટતું વિધેય હોય અને જ્યારે $sin\theta$ ઘટતું હોય ત્યારે $cosec\theta$ વધતું હોય. આમ નીચેનું કોષ્ટક મળે. તે જ રીતે *cos* તથા *sec* માટે કહી શકાય.

વિધેય \ ચરણ	પ્રથમ	દ્વિતીય	તૃતીય	ચતુર્થ
	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	$\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
sec	↑	↑	↓	↓
cosec	↓	↑	↑	↓

આપણે સ્વીકારી લઈશું કે દરેક ચરણમાં *tan* વધતું વિધેય છે અને *cot* ઘટતું વિધેય છે.

ઉપર્યુક્ત ચર્ચામાં જોયું કે ત્રિકોણમિતિય વિધેય ઘટતું કે વધતું હોવું તે ચરણ પર આધારિત છે. આપણે સ્વીકાર્યું છે કે *tan* દરેક ચરણમાં વધતું વિધેય છે, તેનો અર્થ એ નથી કે તે સમગ્ર યામ-સમતલમાં વધતું વિધેય છે. ઉદાહરણ તરીકે $30^\circ < 150^\circ$ પરંતુ $tan30^\circ < tan150^\circ$ નથી કારણ કે $tan30^\circ$ ધન છે જ્યારે $tan150^\circ$ ઋણ છે. આમ $30^\circ < 150^\circ \Rightarrow tan30^\circ < tan150^\circ$ થતું નથી.

ઉદાહરણ 9 : નીચેના વિધાનની સત્યાર્થતા ચકાસો :

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Rightarrow cos\frac{\pi}{2} < cos\theta < cos\pi$$

ઉકેલ : બીજા ચરણમાં *cos* વિધેય $\downarrow$ છે.

$\therefore \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Rightarrow cos\frac{\pi}{2} > cos\theta > cos\pi$

$\therefore$ આમ, વિધાન અસત્ય છે.

☛ નોંધ	$cos\frac{\pi}{2} < cos\theta < cos\pi$ અર્થાત્ $0 < cos\theta < -1$ દેખીતું જ અસત્ય છે.

ઉદાહરણ 10 : સત્યાર્થતા ચકાસો : $sin\theta_1 > sin\theta_2 \Leftrightarrow cos\theta_1 > cos\theta_2$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

ઉકેલ : પ્રથમ ચરણમાં *sin* વધતું વિધેય છે અને *cos* એ ઘટતું વિધેય છે.

$$\therefore \quad sin\theta_1 > sin\theta_2 \Leftrightarrow \theta_1 > \theta_2$$
$$\Leftrightarrow cos\theta_1 < cos\theta_2$$

$\therefore$ આપેલું વિધાન અસત્ય છે.

ઉદાહરણ 11 : સાબિત કરો કે $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$માં $cot\theta$ એ ઘટતું વિધેય છે.

ઉકેલ : $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ માટે $sin\theta > 0$ અને $cos\theta > 0$.

હવે $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$માં *sin* વધતું વિધેય છે.

ધારો કે $\theta_1, \theta_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ અને $\theta_1 < \theta_2$

$$\therefore \quad \theta_1 < \theta_2 \Rightarrow sin\theta_1 < sin\theta_2 \Rightarrow \frac{1}{sin\theta_1} > \frac{1}{sin\theta_2} \qquad \text{(i)}$$

હવે $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$માં *cos* ઘટતું વિધેય છે.

$$\therefore \quad \theta_1 < \theta_2 \Rightarrow cos\theta_1 > cos\theta_2 \qquad \text{(ii)}$$

(i) અને (ii) ઉપરથી, $\frac{1}{sin\theta_1} \times cos\theta_1 > \frac{1}{sin\theta_2} \times cos\theta_2$

$\therefore \quad cot\theta_1 > cot\theta_2$

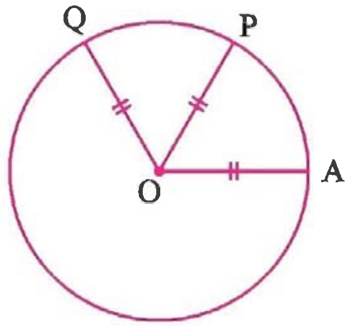
આમ, $\theta_1 < \theta_2 \Rightarrow cot\theta_1 > cot\theta_2$

આથી, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$માં $cot\theta$ એ ઘટતું વિધેય છે.

4.12 ખૂણાનું માપ

હવે આપણે ખૂણો માપવાની બે રીતો વિશે જાણીશું :

અંશ માપ : ખૂણો માપવાની આ પદ્ધતિમાં કાટખૂણાના માપને એક સમાન 90 ભાગમાં વહેંચવામાં આવે છે અને આવા પ્રત્યેક હિસ્સાને એક અંશ કહેવાય છે. તેને 1^{0} વડે દર્શાવાય છે. આમ, એક અંશ એટલે કાટકોણના માપનો 90મો ભાગ. 1 અંશને 60 સમાન હિસ્સામાં વહેંચવામાં આવે છે અને પ્રત્યેક હિસ્સાના માપને 1 કળા કહે છે અને એક કળાને 1' થી દર્શાવાય છે. વધુમાં 1'ને 60 સમાન ભાગમાં વહેંચવામાં આવે છે અને પ્રત્યેક ભાગના માપને 1 વિકળા કહે છે અને તેની નિશાની 1" છે.



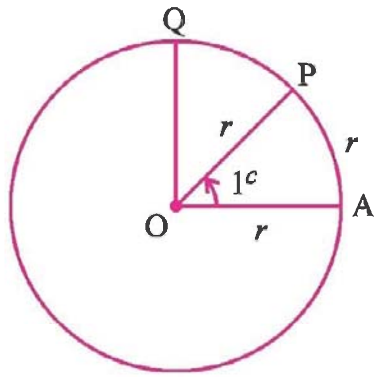
આકૃતિ 4.11

આમ, $1^{0} = 60' = 60$ કળા

$1' = 60'' = 60$ વિકળા

ખૂણાનું રેડિયન માપ : રેડિયન એ ખૂણાના માપનો અન્ય એકમ છે. કોઈ વર્તુળના કેન્દ્ર પાસે વર્તુળની ત્રિજ્યા જેટલી લંબાઈના ચાપ દ્વારા આંતરવામાં આવતા ખૂણાના માપને 1 રેડિયન માપનો ખૂણો કહે છે અને તે 1^{c} અથવા 1^{R} થી દર્શાવાય છે.

O કેન્દ્ર અને r ત્રિજ્યાના વર્તુળ ઉપર કોઈ બિંદુ A લો. જેની લંબાઈ વર્તુળની ત્રિજ્યા r જેટલી હોય તેવો $\widehat{AP}$ લો. એટલે કે $l(\widehat{AP}) = r$. તો $\angle AOP$નું માપ 1 રેડિયન $(= 1^{c})$ થાય. જો $l(\widehat{AQ}) = 2r$ તો $\angle AOQ$નું માપ 2 રેડિયન $(= 2^{c})$ થાય. રેડિયન એ ખૂણાના માપનું એકમ હોઈ તે અચળાંક છે.



આકૃતિ 4.12

કેન્દ્ર O અને r ત્રિજ્યાવાળું એક વર્તુળ લો. વર્તુળ પર કોઈ પણ બિંદુ A લો અને ચાપ $\widehat{AP}$ એવી રીતે લો કે તેની લંબાઈ r થાય. $\overline{OA}$ અને $\overline{OP}$ જોડો તથા $\overline{OQ} \perp \overline{OA}$ રચો. હવે વ્યાખ્યા મુજબ $m\angle AOP = 1^{c}$ અને $\angle AOQ$ = કાટકોણ.

ચાપ દ્વારા વર્તુળમાં કેન્દ્ર આગળ આંતરવામાં આવતા ખૂણાઓ એ સંગત ચાપના માપના પ્રમાણમાં હોય છે.

$$\therefore \quad \frac{m\angle AOP}{m\angle AOQ} = \frac{l(\widehat{AP})}{l(\widehat{AQ})}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m\angle AOP}{m\angle AOQ} = \frac{r}{\frac{1}{2}(\pi r)} \qquad \left(l(\widehat{AQ}) = \frac{1}{4}(2\pi r) = \frac{1}{2}\pi r\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1^{c}}{m\angle AOQ} = \frac{2}{\pi}$$

$$\therefore \quad m\angle AOQ = \frac{\pi}{2} \text{ રેડિયન}$$

$\therefore$ કાટકોણનું રેડિયન માપ $\frac{\pi}{2}$ છે. આથી રેડિયન એ અચળ ખૂણો છે

$\therefore$ કાટકોણનું રેડિયન માપ $\frac{\pi}{2}$ અને અંશમાપ 90 છે.

$\therefore$ $\frac{\pi^c}{2} = 90^0$

$\therefore$ $\pi^c = 180^0$

1 રેડિયન $= \frac{180}{\pi}$ અંશ $= 57^0\ 16'\ 22''$ અથવા 1 અંશ $= \frac{\pi}{180}$ રેડિયન $= 0.01746$ રેડિયન

આમ, જે ખૂણાનું રેડિયન માપ α હોય તેનું અંશમાપ $\frac{180\alpha}{\pi}$ અને α અંશમાપવાળા ખૂણાનું રેડિયન માપ $\frac{\pi\alpha}{180}$ થાય.

રેડિયન માપ $= \frac{\pi}{180} \times$ અંશમાપ

અંશમાપ $= \frac{180}{\pi} \times$ રેડિયન માપ

દાખલા તરીકે, $\frac{\pi}{6}$ રેડિયન માપવાળા ખૂણાનું અંશમાપ $\frac{180}{\pi} \times \frac{\pi}{6} = 30$ થાય.

120 અંશમાપવાળા ખૂણાનું રેડિયન માપ $120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi^c}{3}$ થાય.

ધારો કે, r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળમાં l માપની ચાપ $\widehat{AP}$ વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ θ રેડિયન માપનો ખૂણો આંતરે છે. અને,

$l(\widehat{AQ}) = r$

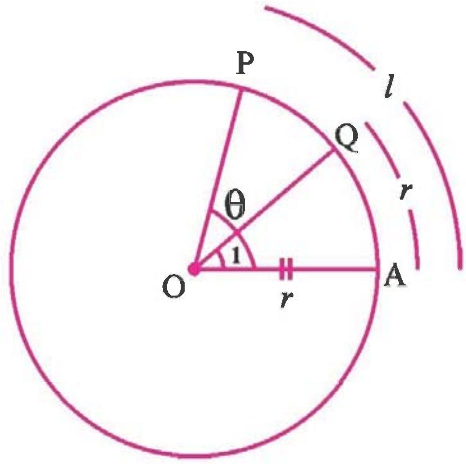
$m\angle AOP = \theta$, $m\angle AOQ = 1$

$\therefore$ $\frac{\text{રેડિયન } m\angle AOP}{\text{રેડિયન } m\angle AOQ} = \frac{l(\widehat{AP})}{l(\widehat{AQ})}$

$\therefore$ $\frac{\theta}{1} = \frac{l}{r}$

$\therefore$ $\theta = \frac{l}{r}$

આમ, ખૂણાનું રેડિયન માપ $= \frac{\text{ચાપની લંબાઈ}}{\text{વર્તુળની ત્રિજ્યા}}$



આકૃતિ 4.13

☛ **નોંધ** ધોરણ 10 સુધી આપણે ફક્ત ખૂણાના અંશમાપ વિશે જ શીખ્યા હતા. આમ, 60^0 અંશમાપવાળા ખૂણા A માટે $m\angle A = 60$ લખતા હતા. હવે આપણે ખૂણાના માપના અન્ય એકમ રેડિયન વિશે પણ જાણીએ છીએ. આથી હવે, 60^0 માપવાળા ખૂણા A માટે $m\angle A = 60^0$ લખીશું. જો A કાટકોણ હોય, તો $m\angle A = 90^0$ અથવા $m\angle A = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^c}{2}$ લખીશું. જો ખૂણો A સમબાજુ ત્રિકોણનો ખૂણો હોય, તો $m\angle A = 60$ લખવાના બદલે $m\angle A = 60^0$ અથવા $m\angle A = \frac{\pi}{3}$ કારણ કે $\frac{\pi}{3}$ રેડિયન્સ $= 60^0$.

અહીં, $m\angle A = x^0$નો અર્થ $\angle A$નું અંશ માપ x છે અને $m\angle A = x$ એટલે $\angle A$નું રેડિયન માપ x છે.

ખૂણાનું અંશમાપ (0, 180) માં હોય છે અને $0^o = 0^c$ તથા $180^o = \pi^c$. આથી ખૂણાનું રેડિયન માપ $(0, \pi)$ માં હોય છે.

ઉદાહરણ 12 : જે ખૂણાનું અંશમાપ $47^o\ 30'$ હોય તેને રેડિયન માપમાં પરિવર્તિત કરો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે $1^o = 60'$

$$\therefore \quad 30' = \left(\frac{30}{60}\right)^o = \left(\frac{1}{2}\right)^o$$

$$47^o\ 30' = \left(47\frac{1}{2}\right)^o = \left(\frac{95}{2}\right)^o$$

$$\therefore \quad \left(\frac{95}{2}\right)^o = \left(\frac{\pi}{180} \times \frac{95}{2}\right)^c = \left(\frac{19\pi}{72}\right)^c = \frac{19\pi}{72}$$

આથી, $47^o\ 30'$ અંશમાપવાળા ખૂણાનું રેડિયન માપ $\left(\frac{19\pi}{72}\right)^c$ અથવા $\frac{19\pi}{72}$ થાય.

ઉદાહરણ 13 : જેનું અંશમાપ $39^o\ 22'\ 30''$ તે ખૂણાનું રેડિયન માપ શોધો.

ઉકેલ : $30'' = \left(\frac{30}{60}\right)' = \left(\frac{1}{2}\right)'$

$$\therefore \quad 22'\ 30'' = \left(22\frac{1}{2}\right)' = \left(\frac{45}{2}\right)'$$

$$\left(\frac{45}{2}\right)' = \left(\frac{45}{2} \times \frac{1}{60}\right)^o = \left(\frac{3}{8}\right)^o$$

$$\therefore \quad 39^o\ 22'\ 30'' = \left(39\frac{3}{8}\right)^o = \left(\frac{315}{8}\right)^o$$

$$\left(\frac{315}{8}\right)^o = \left(\frac{315}{8} \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{7\pi}{32}\right)^c$$

આથી, $39^o\ 22'\ 30''$ માપવાળા ખૂણાનું રેડિયન માપ $\left(\frac{7\pi}{32}\right)^c = \frac{7\pi}{32}$.

ઉદાહરણ 14 : 2 રેડિયન માપવાળા ખૂણાનું અંશમાપ મેળવો.

ઉકેલ : $2^c = \left(\frac{180}{\pi} \times 2\right)^o = \left(\frac{180 \times 7 \times 2}{22}\right)^o$

$$= \left(114\frac{6}{11}\right)^o = 114^o + \left(\frac{6}{11} \times 60\right)' \qquad (1^o = 60')$$

$$= 114^o + \left(32\frac{8}{11}\right)' = 114^o + 32' + \left(\frac{8}{11} \times 60\right)'' \qquad (1' = 60'')$$

$$= 114^o + 32' + 44''$$

આથી, 2 રેડિયન = $114^o\ 32'\ 44''$

ઉદાહરણ 15 : 25 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળમાં 55 સેમી લંબાઈની ચાપે કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણાનું અંશમાપ મેળવો.

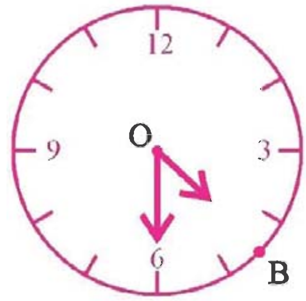
ઉકેલ : અહીં $r = 25$ સેમી, $l = 55$ સેમી

હવે, $\theta = \left(\frac{l}{r}\right)^c$

$$\therefore \quad \theta = \left(\frac{55}{25}\right)^c = \left(\frac{11}{5} \times \frac{180}{\pi}\right)^o = \left(\frac{11 \times 36 \times 7}{22}\right) = 126^o$$

$\therefore$ ખૂણાનું અંશમાપ 126 છે.

ઉદાહરણ 16 : ઘડિયાળમાં 4:30 વાગે ત્યારે મિનિટ કાંટા અને કલાકના કાંટા વચ્ચેના ખૂણાનું અંશમાપ અને રેડિયન માપ મેળવો.



આકૃતિ 4.14

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, કલાકનો કાંટો 12 કલાકમાં એક પરિભ્રમણ પૂરું કરે છે અને મિનિટ કાંટો 60 મિનિટમાં એક પરિભ્રમણ પૂરું કરે છે.

આમ, કલાકના કાંટાએ 12 કલાકમાં આંતરેલા ખૂણાનું માપ = 360°.

$\therefore$ કલાકના કાંટાએ 4 કલાક 30 મિનિટ = $\frac{9}{2}$ કલાકમાં આંતરેલ ખૂણાનું માપ

$$= \left(\frac{360}{12} \times \frac{9}{2}\right)^\circ = 135^\circ$$

હવે, મિનિટ કાંટા દ્વારા 60 મિનિટમાં આંતરેલા ખૂણાનું માપ = 360°

$\therefore$ મિનિટ કાંટા દ્વારા 30 મિનિટમાં આંતરેલા ખૂણાનું માપ = $\left(\frac{360}{60} \times 30\right)^\circ = 180^\circ$

આથી, માંગેલ $m\angle BOC = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$

$$= \left(45 \times \frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ રેડિયન}$$

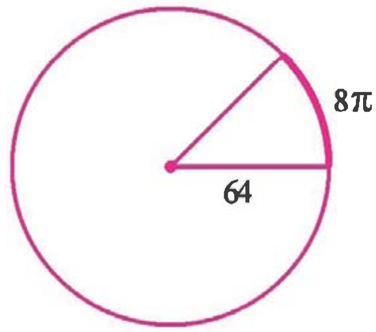
ઉદાહરણ 17 : 4 સેમી ત્રિજ્યાવાળા એક વર્તુળાકાર તારને કાપી 64 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના પરિઘ પર ગોઠવવામાં આવે છે, તો તેણે વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણાનું માપ શોધો.

ઉકેલ : વર્તુળાકાર તારની ત્રિજ્યા = 4 સેમી

$\therefore$ તારની લંબાઈ = પરિઘનું માપ

$= 2\pi r$

$= 2\pi \times 4 = 8\pi$



આકૃતિ 4.15

હવે તેને 64 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના પરિઘ પર મૂકતાં,

અહીં $l = 8\pi$, $r = 64$ સેમી

આથી, $\theta = \frac{l}{r} = \frac{8\pi}{64} = \frac{\pi}{8} = \left(\frac{\pi}{8} \times \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 22^\circ\ 30'$

ઉદાહરણ 18 : 40 સેમી લંબાઈનું લોલક જો 8 સેમીની ચાપ બનાવે તો તેણે રચેલા ખૂણાનું અંશમાપ શોધો.

ઉકેલ : અહીં $r = 40$ સેમી, $l = 8$ સેમી

આથી, $\theta = \frac{l}{r} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$ રેડિયન = $\left(\frac{1}{5} \times \frac{180}{\pi}\right)$ અંશ

$= \left(\frac{36 \times 7}{22}\right)^\circ = \left(11\frac{5}{11}\right)^\circ$

$= 11^\circ + \left(\frac{5}{11} \times 60\right)'$

$= 11° + \left(27\frac{3}{11}\right)'$

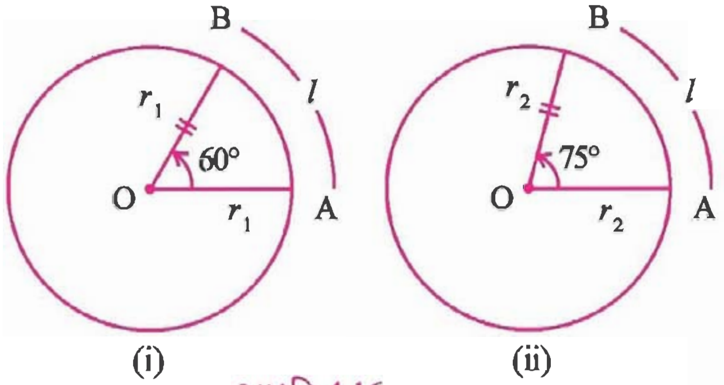
$= 11° + 27' + 16''$

$= 11°\ 27'\ 16''$

ઉદાહરણ 19 : બે વર્તુળોમાં સમાન લંબાઈની ચાપ કેન્દ્ર આગળ 60° અને 75° માપના ખૂણા આંતરે, તો વર્તુળોની ત્રિજ્યાનો ગુણોત્તર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે r_1 અને r_2 વર્તુળોની ત્રિજ્યાઓ છે અને ચાપની લંબાઈ l છે.

પ્રથમ વર્તુળ માટે,



આકૃતિ 4.16

$\theta = 60° = \left(60 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{\pi}{3}\right)^c$

હવે, $\theta = \frac{l}{r}$

$\therefore \quad r = \frac{l}{\theta}$

$\therefore \quad r_1 = \frac{l}{\frac{\pi}{3}}$

$\therefore \quad r_1 = \frac{3l}{\pi}$ (i)

બીજા વર્તુળ માટે,

$\theta = 75° = \left(75 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{5\pi}{12}\right)^c$

$\therefore \quad r_2 = \frac{12l}{5\pi}$ $\left(r = \frac{l}{\theta}\right)$ (ii)

(i) અને (ii)નો ગુણોત્તર લેતાં,

$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\frac{3l}{\pi}}{\frac{12l}{5\pi}}$

$\therefore \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$

આથી, $r_1 : r_2 = 5 : 4$

ઉદાહરણ 20 : જો $\frac{\sin A}{\sin B} = \sqrt{2}$, $\frac{\tan A}{\tan B} = \sqrt{3}$ હોય, તો $\tan$A અને $\tan$B શોધો. A, B $\in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

ઉકેલ : અહીં $\frac{1}{\sin B} = \frac{\sqrt{2}}{\sin A}$, $\frac{1}{\tan B} = \frac{\sqrt{3}}{\tan A}$

$\therefore \quad cosec\, B = \sqrt{2}\, cosec\, A,\ cot\, B = \sqrt{3}\, cot\, A$

હવે, $cosec^2B - cot^2B = 1$

$\therefore \quad 2cosec^2A - 3cot^2A = 1$

$\therefore \quad 2(1 + cot^2A) - 3cot^2A = 1$

$\therefore \quad 2 + 2cot^2A - 3cot^2A = 1$

$\therefore \quad cot^2A = 1$

$\therefore \quad cotA = \pm 1$

$\therefore \quad tanA = \pm 1$

પરંતુ $0 < A < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad tanA = 1$

હવે, $cotB = \sqrt{3}cot\ A = \sqrt{3}cot\frac{\pi}{4} = \sqrt{3}$

$\therefore \quad tanB = \frac{1}{\sqrt{3}}$

સ્વાધ્યાય 4.2

1. નીચેના અંશમાપને સંગત રેડિયન માપ શોધો :

(1) 240° (2) 75° (3) 40° 20' (4) 110° 30'

2. નીચેના રેડિયન માપને સંગત અંશમાપ શોધો : $(\pi = \frac{22}{7})$

(1) $\frac{\pi}{15}$ (2) 8 (3) $\frac{\pi}{32}$ (4) $\frac{1}{4}$

3. 3 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળમાં 1 સેમી લંબાઈની ચાપે કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણાનું અંશમાપ શોધો.

4. 60 સેમી વ્યાસવાળા વર્તુળમાં જીવાનું માપ 30 સેમી હોય, તો જીવાને સંગત લઘુચાપનું માપ શોધો.

5. 75 સેમી લંબાઈવાળા લોલકનો છેડો જો 21 સેમીની ચાપ બનાવે, તો તેણે બનાવેલા ખૂણાનું અંશમાપ શોધો.

6. જો વર્તુળોમાં સમાન લંબાઈના ચાપ તેમનાં કેન્દ્ર આગળ 65° અને 110° માપના ખૂણા આંતરે, તો તેમની ત્રિજ્યાઓનો ગુણોત્તર શોધો.

7. ઘડિયાળમાં 2:30 સમયે કલાક કાંટા અને મિનિટ કાંટા વચ્ચેના ખૂણાના રેડિયન અને અંશમાપ શોધો.

8. જો કોઈ ત્રિકોણના ખૂણા સમાંતર શ્રેણીમાં હોય અને સૌથી મોટા ખૂણાનું માપ $\frac{5\pi}{12}$ હોય, તો સૌથી નાના ખૂણાનું માપ શોધો.

9. જો $\frac{sin\ A}{sin\ B} = \sqrt{3}$, $\frac{tan\ A}{tan\ B} = 3$, તો sin^2A શોધો.

*

4.13 યુગ્મ તથા અયુગ્મ વિધેયો

જો $A \subset R$, $B \subset R$ માટે વિધેય $f : A \to B$ હોય અને

$\forall x, -x \in A, f(-x) = f(x)$ હોય તો f ને યુગ્મ વિધેય (Even Function) કહેવાય છે અને જો $\forall x, -x \in A, f(-x) = -f(x)$ હોય, તો f ને અયુગ્મ વિધેય (Odd Function) કહેવાય છે.

ઉદાહરણ તરીકે $f : R \to R$, $f(x) = x^2$ નો ગુણધર્મ $(-x)^2 = x^2$

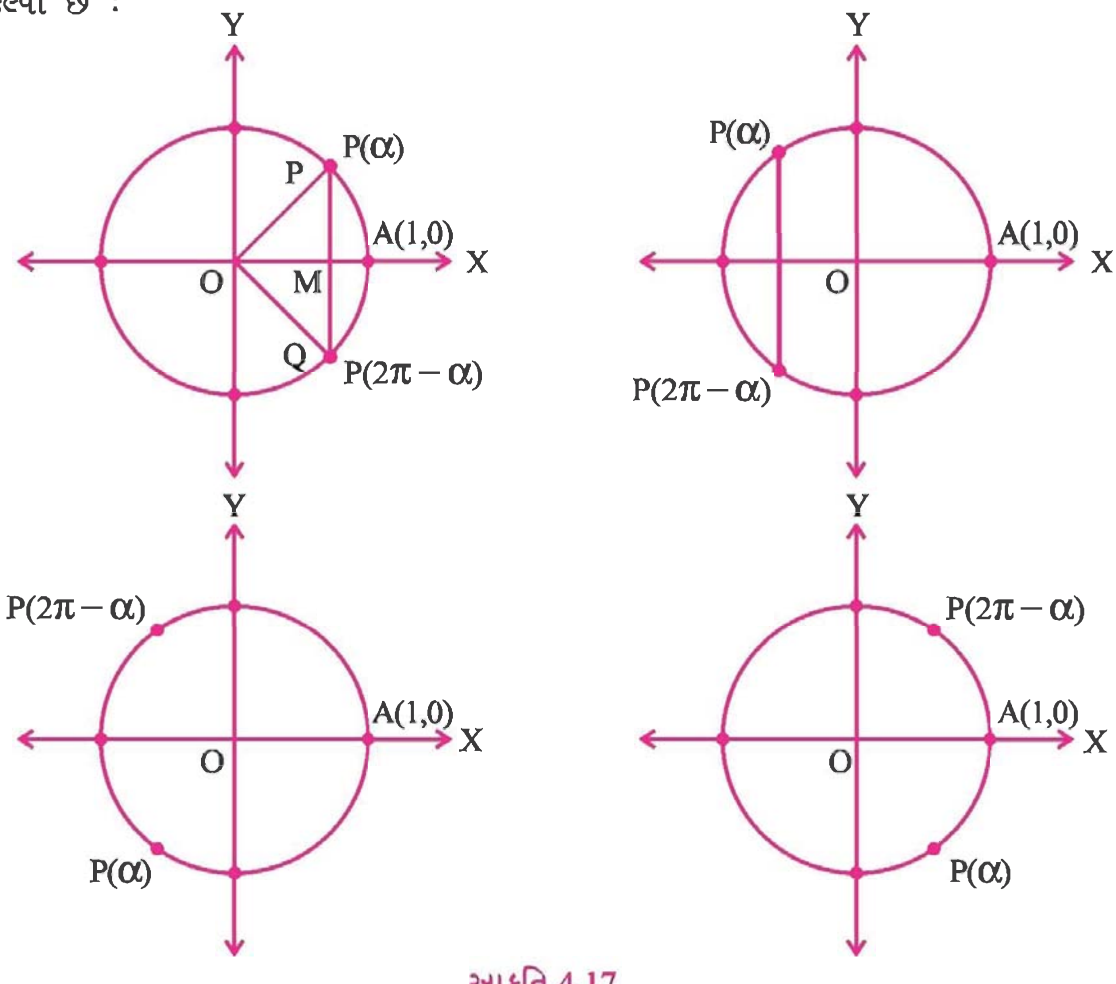
$\therefore$ પ્રત્યેક $x \in R$ માટે $f(-x) = f(x)$ હોવાથી f એ યુગ્મ વિધેય છે.

તે જ રીતે $f : R \to R$, $f(x) = x^3$ માટે $(-x)^3 = -x^3$.

એટલે કે પ્રત્યેક $x \in R$ માટે $f(-x) = -f(x)$ થતું હોવાથી f એ અયુગ્મ વિધેય છે.

sin એ અયુગ્મ વિધેય છે અને *cos* એ યુગ્મ વિધેય છે તેમ સાબિત કરીશું.

ધારો કે $0 < \alpha < 2\pi$. બિંદુઓ $P(\alpha)$ અને $P(2\pi - \alpha)$ માટે નીચેની આકૃતિઓમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ચાર વિકલ્પો છે :



આકૃતિ 4.17

જો $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ હોય, તો $P(\alpha)$ પ્રથમ ચરણમાં હોય અને માટે $P(2\pi - \alpha)$ ચોથા ચરણમાં આવે.

ચાપ $\overset{\frown}{AP}$ ની લંબાઈ તથા ચાપ $\overset{\frown}{AQ}$ ની લંબાઈ સમાન થાય અને તેમના માપ α થાય.

આમ, $m\angle AOP = m\angle AOQ$

હવે P અને Qને જોડતો રેખાખંડ $\overline{PQ}$ રચો. ધારો કે $\overline{PQ}$, X-અક્ષને Mમાં છેદે છે.

$P(\alpha)$ અને $P(2\pi - \alpha)$ ને એકમ વર્તુળ ઉપર P તથા Q દ્વારા દર્શાવ્યા છે.

$\Delta POM \cong \Delta QOM$

$\therefore$ $\overline{PQ}$ એ X-અક્ષને લંબ છે.

$\therefore$ Pના યામ (x, y) અને Qના યામ $(x, -y)$ થાય.

પરંતુ $P(\alpha)$ અને $P(2\pi - \alpha)$ એકમ વર્તુળ પર હોવાથી તેમના યામ અનુક્રમે $(cos\alpha, sin\alpha)$ અને $(cos(2\pi - \alpha), sin(2\pi - \alpha))$ લખી શકાય.

$\therefore$ $(x, y) = (cos\alpha, sin\alpha)$ અને $(x, -y) = (cos(2\pi - \alpha), sin(2\pi - \alpha))$

$\therefore$ $x = cos\alpha, y = sin\alpha$ અને $x = cos(2\pi - \alpha), -y = sin(2\pi - \alpha)$

$cos\alpha = cos(2\pi - \alpha) = x, sin\alpha = y, sin(2\pi - \alpha) = -y$

વળી, sin અને cos વિધેયોના આવર્તમાન 2π છે.

$cos\alpha = x, cos(-\alpha) = x, sin\alpha = y, sin(-\alpha) = -y$

$\therefore$ $cos\alpha = cos(-\alpha) = x, sin(-\alpha) = -y = -sin\alpha$

આ જ રીતે $P(\alpha)$ કોઈ પણ ચરણમાં હોય, તો ઉપર્યુક્ત પરિણામો સાબિત કરી શકાય.

હવે, ધારો કે $\theta \in R$ અને ધારો કે $\theta = 2n\pi + \alpha, 0 < \alpha < 2\pi$

$\therefore -\theta = -2n\pi - \alpha$

$\therefore -\theta = -2n\pi - \alpha + 2\pi - 2\pi$

$\therefore -\theta = 2\pi(-1 - n) + (2\pi - \alpha)$ અને $0 < (2\pi - \alpha) < 2\pi$

cos વિધેયનું આવર્તમાન 2π છે.

$cos\theta = cos\alpha$ અને $cos(-\theta) = cos(2\pi - \alpha) = cos(-\alpha)$ **(cosનું આવર્તમાન 2π)**

પરંતુ, $cos\alpha = cos(-\alpha)$

આમ, $cos\theta = cos(-\theta)$

$\therefore$ આ જ રીતે સાબિત કરી શકાય કે, $sin(-\theta) = -sin\theta$.

આમ, sin એ અયુગ્મ વિધેય છે અને cos એ યુગ્મ વિધેય છે.

આમ, $\forall \theta \in R, cos(-\theta) = cos\theta, sin(-\theta) = -sin\theta$

આપણે વાસ્તવિક સંખ્યાનાં ત્રિવિધેયોનો અભ્યાસ કર્યો.

જો ખૂણાનું રેડિયન માપ θ હોય તો આપણે $cos\theta$, $sin\theta$ વગેરે વાસ્તવિક સંખ્યા θ માટે મેળવીએ છીએ. ખૂણાનું રેડિયન માપ $(0, \pi)$ માં હોવાથી મર્યાદિત પ્રદેશ $(0, \pi)$ માં ત્રિકોણમિતિય લેવાથી ખૂણા-સંબંધી ત્રિકોણમિતિય વિધેય મળે.

4.14 કાટકોણ ત્રિકોણ પરથી મળતાં ત્રિકોણમિતિય વિધેયો

યામ-સમતલમાં ΔMOPમાં $\angle M$ એ કાટકોણ છે.

ધારો કે O કેન્દ્રવાળું એકમ વર્તુળ $\overrightarrow{OP}$ ને બિંદુ P' માં છેદે છે. ધારો કે $\overline{P'M'}$ અને $\overline{PM}$ X-અક્ષને લંબ છે. આથી $\overleftrightarrow{PM} \parallel \overleftrightarrow{P'M'}$.

$\therefore \quad \Delta POM \sim \Delta P'OM'$

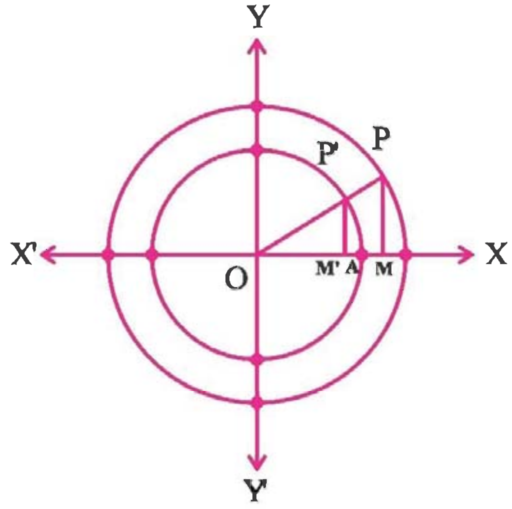
$\therefore \quad \frac{OP}{OP'} = \frac{OM}{OM'} = \frac{PM}{P'M'}$

જો $l(\overset{\frown}{AP'}) = \theta$ હોય તો P' એકમ વર્તુળ પર હોવાથી $P'(x, y) = (cos\theta, sin\theta)$ અને OM' અને M'P' અનુક્રમે બિંદુ P'ના x અને y-યામ થાય.

$OM' = cos\theta$, $M'P' = sin\theta$ અને $OP' = 1$.

$\therefore \quad \frac{OP}{1} = \frac{OM}{cos\theta} = \frac{PM}{sin\theta}$

$\therefore \quad cos\theta = \frac{OM}{OP}, \ sin\theta = \frac{PM}{OP}$



આકૃતિ 4.18

હવે, $\angle P'OM'$નું રેડિયન માપ θ હોવાથી $\angle POM$નું રેડિયન માપ પણ θ થાય.

$\therefore \quad \Delta POM$માં $cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{\text{ખૂણાની પાસેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}}$

અને $sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{\text{ખૂણાની સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}}$

$\therefore \quad cos\left(\frac{180\theta}{\pi}\right)^{o} = \frac{\text{પાસેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}}, \quad sin\left(\frac{180\theta}{\pi}\right)^{o} = \frac{\text{સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}}$

$\left(\frac{180\theta}{\pi}\right)^{o} = \alpha$ લેતાં,

$cos\alpha = \frac{\text{પાસેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}}, \ sin\alpha = \frac{\text{સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}}$

આમ, એકમ વર્તુળ પર વ્યાખ્યાયિત ત્રિકોણમિતિય વિધેયો અને કાટકોણ ત્રિકોણને આધારે વ્યાખ્યાયિત ત્રિકોણમિતિય વિધેયો ભિન્ન નથી. અહીં જોઈએ કે કાટકોણ ત્રિકોણને આધારિત ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરોનો મર્યાદિત અર્થ છે, કારણ કે અહીં ખૂણાના અંશમાપ (0, 90)માં આવેલાં છે. એકમ વર્તુળને આધારે આપવામાં આવેલી વ્યાખ્યામાં ખૂણાનું માપ ગમે તે હોઈ શકે, ભલે ખૂણો રેડિયનમાં માપવામાં આવે કે અંશમાં માપવામાં આવે.

4.15 પ્રત્યેક ચરણમાં ત્રિકોણમિતિય વિધેયનાં મૂલ્યો

આપણે જાણીએ છીએ કે, પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા θને સંગત એકમ વર્તુળ પર અનન્ય બિંદુ $P(\theta)$ મળે. આ બિંદુના યામ (x, y) હોય, તો *cos* અને *sin* વિધેયોની વ્યાખ્યા પરથી $x = cos\theta$, $y = sin\theta$.

જો $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ હોય તો $P(\theta) = P(x, y)$ પ્રથમ ચરણમાં આવે અને પ્રથમ ચરણમાં $x > 0$ અને $y > 0$.

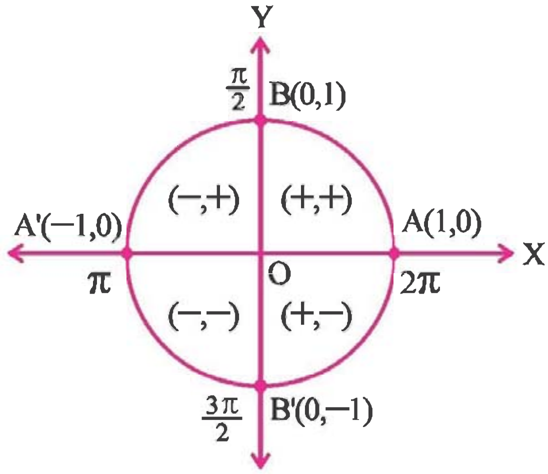
$\therefore \quad x = cos\theta > 0,\ y = sin\theta > 0.$

જો $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ હોય તો $P(\theta) = P(x, y)$ દ્વિતીય ચરણમાં આવે અને આ ચરણમાં $x < 0$ અને $y > 0$.

$\therefore \quad x = cos\theta < 0,\ y = sin\theta > 0.$

જો $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ હોય તો $P(\theta) = P(x, y)$ તૃતીય ચરણમાં આવે અને આ ચરણમાં $x < 0$, $y < 0$ હોવાથી $x = cos\theta < 0$, $y = sin\theta < 0$.

જો $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ હોય તો $P(\theta) = P(x, y)$ ચતુર્થ ચરણમાં આવે અને આ ચરણમાં $x > 0$, $y < 0$ થાય. આમ, $x = \cos\theta > 0$ અને $y = sin\theta < 0$.



આકૃતિ 4.19

હવે $tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta}$, $cot\theta = \frac{cos\theta}{sin\theta}$, $cosec\theta = \frac{1}{sin\theta}$ અને $sec\theta = \frac{1}{cos\theta}$ હોવાથી વિવિધ ચરણમાં આ વિધેયોની કિંમત મેળવી શકાય. તે નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવી છે :

વિધેય \ ચરણ	પ્રથમ	દ્વિતીય	તૃતીય	ચતુર્થ
sin	+	+	–	–
cos	+	–	–	+
tan	+	–	+	–
cot	+	–	+	–
cosec	+	+	–	–
sec	+	–	–	+

ઉદાહરણ 21 : જો $P(\theta)$ બીજા ચરણમાં હોય અને $cot\theta = \frac{-5}{12}$ હોય, તો બાકીનાં ત્રિકોણમિતિય વિધેયનાં મૂલ્યો શોધો.

ઉકેલ : $cot\theta = \frac{-5}{12}$. આથી $tan\theta = \frac{-12}{5}$

હવે, $sec^2\theta = 1 + tan^2\theta = 1 + \frac{144}{25} = \frac{169}{25}$

$\therefore \quad sec\theta = \pm\frac{13}{5}$

દ્વિતીય ચરણમાં $sec\theta < 0$. માટે $sec\theta = -\frac{13}{5}$. આથી $cos\theta = \frac{-5}{13}$

વળી, આપણે જાણીએ છીએ કે $sin\theta = cos\theta \cdot tan\theta = \left(\frac{-5}{13}\right)\left(\frac{-12}{5}\right) = \frac{12}{13}$

$\therefore \quad sin\theta = \frac{12}{13}$ અને $cosec\theta = \frac{13}{12}$

ઉદાહરણ 22 : $cos\theta = \frac{(a+b)^2}{4ab}$, $ab > 0$ હોય તો $a = b$ સાબિત કરો.

ઉકેલ : $|cos\theta| \le 1$

$\therefore \quad \frac{(a+b)^2}{4|ab|} \le 1$

$\therefore \quad (a+b)^2 \le 4ab$ $\quad$ **($ab > 0$)**

$\therefore \quad (a-b)^2 \le 0$

પરંતુ $(a-b)^2 \not< 0$

$\therefore \quad a - b = 0$

$\therefore \quad a = b$

ઉદાહરણ 23 : $tan\theta = 2 - \sqrt{3}$ હોય તો $cos\theta$ શોધો. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : $sec^2\theta = 1 + tan^2\theta$

$= 1 + (2 - \sqrt{3})^2$

$= 1 + (4 - 4\sqrt{3} + 3)$

$= 8 - 4\sqrt{3}$

$= 8 - 2\sqrt{12}$

$= (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$

$\therefore \quad sec\theta = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ $\quad$ **$\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$**

$\therefore \quad cos\theta = \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$

$\therefore \quad cos\theta = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

ઉદાહરણ 24 : જો $tan\theta = x - \frac{1}{4x}$ હોય, તો $sec\theta + tan\theta$ શોધો.

ઉકેલ : અહીં $tan\theta = x - \frac{1}{4x}$

$\therefore \quad tan^2\theta = x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}$

$$sec^2\theta = 1 + tan^2\theta$$

$$= 1 + \left(x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}\right)$$

$$= x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2} = \left(x + \frac{1}{4x}\right)^2$$

$\therefore \quad sec\theta = x + \frac{1}{4x}$ અથવા $-x - \frac{1}{4x}$

$\therefore \quad sec\theta + tan\theta = x + \frac{1}{4x} + x - \frac{1}{4x} = 2x$

અથવા $sec\theta + tan\theta = -x - \frac{1}{4x} + x - \frac{1}{4x} = -\frac{1}{2x}$

સ્વાધ્યાય 4.3

1. જો $P(\theta)$ બીજા ચરણમાં હોય અને $cosec\theta = \frac{5}{3}$ હોય, તો અન્ય ત્રિકોણમિતિય વિધેયોનાં મૂલ્યો મેળવો.
2. જો $\theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ હોય તથા $sin\theta = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$ હોય, તો અન્ય ત્રિકોણમિતિય વિધેયોનાં મૂલ્યો મેળવો.
3. જો $cos\theta = \frac{-1}{2}$, $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ હોય, તો $5\,tan^2\theta - 6\,cosec^2\theta$નું મૂલ્ય મેળવો.
4. જો $sin\theta = \frac{3}{5}$, $tan\alpha = \frac{1}{2}$ તથા $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ અને $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ હોય, તો $4\,tan\theta - \sqrt{5}\,sec\alpha$નું મૂલ્ય શોધો.
5. જો $sec\theta + tan\theta = p$ હોય, તો $sec\theta$, $tan\theta$ અને $sin\theta$નાં મૂલ્ય pની અભિવ્યક્તિમાં મેળવો.
6. જો $sin\theta = \frac{4}{5}$ હોય, તો $\frac{5cos\theta + 4cosec\theta + 3tan\theta}{4cot\theta + 3sec\theta + 5sin\theta}$ નું મૂલ્ય શોધો. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.
7. સાબિત કરો કે, $\sqrt{\frac{1 - sin\theta}{1 + sin\theta}} = \begin{cases} sec\theta - tan\theta, & 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ -sec\theta + tan\theta, & \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{cases}$

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 25 : જો $cos\alpha + sin\alpha = \sqrt{2}\,cos\alpha$ હોય, તો $cos\alpha - sin\alpha$ શોધો. $(0 < \alpha < \frac{\pi}{4})$

ઉકેલ : $cos\alpha + sin\alpha = \sqrt{2}\,cos\alpha$

$\therefore \quad (cos\alpha + sin\alpha)^2 = 2cos^2\alpha$

$\therefore \quad \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha$

$\therefore \quad 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = 2(1 - \sin^2\alpha)$

$\therefore \quad 2\sin^2\alpha = 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha$

$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha$

$= (\cos\alpha - \sin\alpha)^2$

અહીં $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ હોવાથી $\sin\alpha > 0$ અને $\cos\alpha > \sin\alpha$

$\therefore \quad \sqrt{2}\sin\alpha = \cos\alpha - \sin\alpha$

$\therefore \quad \cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\alpha$

બીજી રીત : $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\alpha$

$\therefore \quad \sin\alpha = (\sqrt{2} - 1)\cos\alpha$

$\therefore \quad \cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$

$\therefore \quad \cos\alpha = (\sqrt{2} + 1)\sin\alpha$ $\quad$ $((\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = (\sqrt{2})^2 - 1 = 1)$

$\therefore \quad \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\alpha + \sin\alpha$

$\therefore \quad \cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\alpha$

ઉદાહરણ 26 : જો $\frac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta} + \frac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta} = 1$ હોય, તો સાબિત કરો કે,

(a) $\sin^4\alpha + \sin^4\beta = 2\sin^2\alpha\sin^2\beta$ $\quad$ (b) $\frac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha} = 1$

ઉકેલ : અહીં, $\frac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta} + \frac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta} = 1$

$\therefore \quad \frac{(1-\sin^2\alpha)^2}{1-\sin^2\beta} + \frac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta} = 1$

ધારો કે $\sin^2\alpha = m$ અને $\sin^2\beta = n$

$\therefore \quad \frac{(1-m)^2}{1-n} + \frac{m^2}{n} = 1$

$\therefore \quad n(1 - m)^2 + m^2(1 - n) = n(1 - n)$

$\therefore \quad n(1 - 2m + m^2) + m^2(1 - n) = n - n^2$

$\therefore \quad n - 2mn + m^2n + m^2 - m^2n = n - n^2$

$\therefore \quad n^2 - 2mn + m^2 = 0$

$\therefore \quad (n - m)^2 = 0$

$\therefore \quad n = m$

$\therefore \quad sin^2\alpha = sin^2\beta$ (i)

$\therefore \quad 1 - cos^2\alpha = 1 - cos^2\beta$

$\therefore \quad cos^2\alpha = cos^2\beta$ (ii)

(a) $sin^4\alpha + sin^4\beta = (sin^2\alpha - sin^2\beta)^2 + 2sin^2\alpha\ sin^2\beta$ $\quad (a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab)$

$= (sin^2\alpha - sin^2\alpha)^2 + 2sin^2\alpha\ sin^2\beta$

$= 2sin^2\alpha\ sin^2\beta$

(b) $\frac{cos^4\beta}{cos^2\alpha} + \frac{sin^4\beta}{sin^2\alpha} = \frac{cos^4\beta}{cos^2\beta} + \frac{sin^4\beta}{sin^2\beta}$ (i) અને (ii)

$= cos^2\beta + sin^2\beta = 1$

ઉદાહરણ 27 : જો $tan^2\theta = 1 - a^2$ હોય, તો $sec\theta + tan^3\theta\ cosec\theta = (2 - a^2)^{\frac{3}{2}}$ સાબિત કરો. $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$

ઉકેલ : ડા.બા. $= sec\theta + tan^3\theta\ cosec\theta$

$= \frac{1}{cos\theta} + \frac{sin^3\theta}{cos^3\theta} \times \frac{1}{sin\theta}$

$= \frac{1}{cos\theta} + \frac{sin^2\theta}{cos^3\theta}$

$= \frac{cos^2\theta + sin^2\theta}{cos^3\theta}$

$= \frac{1}{cos^3\theta}$

$= sec^3\theta$

$= (sec^2\theta)^{\frac{3}{2}}$ $\quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$

$= (1 + tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}$

$= (1 + 1 - a^2)^{\frac{3}{2}}$

$= (2 - a^2)^{\frac{3}{2}}$ = જ.બા.

ઉદાહરણ 28 : જો x એ કોઈ પણ શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો સાબિત કરો કે $cos\theta$ અને $sin\theta$ એ $x + \frac{1}{x}$ થઈ શકે નહિ.

ઉકેલ : ધારો કે $x \in R - \{0\}$ છે.

વિકલ્પ 1 : $x > 0$

$$x + \frac{1}{x} = (\sqrt{x})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - 2\sqrt{x} \times \frac{1}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} \times \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2$$

$\therefore \quad x + \frac{1}{x} \geq 2$

વિકલ્પ 2 : $x < 0$

ધારો કે $x = -y$ અને $y > 0$

$\therefore \quad x + \frac{1}{x} = -y - \frac{1}{y} = -\left(y + \frac{1}{y}\right)$

હવે, $y > 0$ હોવાથી ઉપર દર્શાવ્યા મુજબ $y + \frac{1}{y} \geq 2$.

$$-\left(y + \frac{1}{y}\right) \leq -2$$

$\therefore \quad \left(x + \frac{1}{x}\right) \leq -2$

આમ, $x > 0$ માટે $\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 2$ તથા $x < 0$ માટે $\left(x + \frac{1}{x}\right) \leq -2$.

પ્રત્યેક $\theta \in R$ માટે $-1 \leq sin\theta \leq 1$ અને $-1 \leq cos\theta \leq 1$.

આમ, $sin\theta$ અને $cos\theta$ એ $x + \frac{1}{x}$ બરાબર થઈ શકે નહિ.

સ્વાધ્યાય 4

1. જો $a, b, c \in R^+$ અને $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$ હોય, તો કોઈ પણ $\theta \in R$ માટે $sec\theta = \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2}$ થાય નહિ તેમ સાબિત કરો.
2. $\frac{sin\alpha}{cos\alpha + sin\beta} + \frac{sin\beta}{cos\beta - sin\alpha} = \frac{sin\alpha}{cos\alpha - sin\beta} + \frac{sin\beta}{cos\beta + sin\alpha}$ સાબિત કરો.
3. જો $f(n) = cos^n\theta + sin^n\theta$ હોય, તો $2f(6) - 3f(4) + 1 = 0$ સાબિત કરો.
4. જો $m\,cos\alpha - n\,sin\alpha = p$ હોય, તો $m\,sin\alpha + n\,cos\alpha = \pm\sqrt{m^2 + n^2 - p^2}$ સાબિત કરો.
5. જો $a\,cos^3x + 3a\,cos\,x\,sin^2 x = m$ અને $a\,sin^3x + 3a\,cos^2x\,sin\,x = n$ હોય, તો $(m + n)^{\frac{2}{3}} + (m - n)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$ સાબિત કરો.
6. જો $sin\theta + cos\theta = m$ હોય, તો $sin^6\theta + cos^6\theta = \frac{4 - 3(m^2 - 1)^2}{4}$ સાબિત કરો.

7. $\dfrac{1+sec^2A\,cot^2B}{1+sec^2C\,cot^2B} = \dfrac{1+tan^2A\,cos^2B}{1+tan^2C\,cos^2B}$ સાબિત કરો.

8. $\dfrac{2-3sin\theta+sin^3\theta}{sin\theta+2} = 2sin\theta\,(sin\theta - 1) + cos^2\theta$ સાબિત કરો.

9. $cot^2x - cos^2x = cos^2x\ cot^2x$ સાબિત કરો અને તે પરથી $cot^2x \geq cos^2x$ તારવો.

10. જો $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ હોય, તો $sin\theta + cos\theta + tan\theta + cot\theta > sec\theta + cosec\theta$ સાબિત કરો.

11. સાબિત કરો કે $2sec^2\theta - sec^4\theta - 2cosec^2\theta + cosec^4\theta = \dfrac{1-tan^8\theta}{tan^4\theta}$.

12. સાબિત કરો કે $\dfrac{tan^2\theta\,(cosec\,\theta - 1)}{1+cos\theta} = \dfrac{(1-cos\theta)cosec^2\theta}{cosec\,\theta+1}$.

13. જો $a^2\,sec^2\alpha - b^2\,tan^2\alpha = c^2$ હોય, તો $sin^2\alpha = \dfrac{c^2-a^2}{c^2-b^2}$ સાબિત કરો.

14. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d)માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને $\square$ માં લખો :

(1) જો $sin\theta + cosec\theta = 2$ હોય, તો $sin^6\theta + cosec^6\theta = ...$ $\square$

(a) 1 (b) 64 (c) 2 (d) 16

(2) જો $f(x) = cos^2x + sec^2x$, હોય, તો ...... $\square$

(a) $f(x) < 1$ (b) $f(x) = 1$ (c) $0 < f(x) < 1$ (d) $f(x) \geq 2$

(3) જો $\theta \in R$ તો નીચેના પૈકી કયું વિધાન સાચું નથી ? $\square$

(a) $sin\theta = -\frac{1}{5}$ (b) $cos\theta = 1$ (c) $sec\theta = \frac{1}{2}$ (d) $tan\theta = 40$

(4) જો $tan\theta = 3$ હોય અને $P(\theta)$ ત્રીજા ચરણમાં હોય તો $sin\theta = ...$ $\square$

(a) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ (b) $\frac{-1}{\sqrt{10}}$ (c) $\frac{-3}{\sqrt{10}}$ (d) $\frac{3}{\sqrt{10}}$

(5) નીચેના પૈકી કયું વિધાન સત્ય છે ? $\square$

(a) $sin\ 1^\circ > sin\ 1$ (b) $sin\ 1^\circ < sin\ 1$

(c) $sin\ 1^\circ = sin\ 1$ (d) $sin\ 1^\circ = \frac{\pi}{180}\ sin\ 1$

(6) કેન્દ્ર આગળ 45°નો ખૂણો બનાવતી 28 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના ચાપની લંબાઈ ...... છે. $\square$

(a) 12 સેમી (b) 16 સેમી (c) 22 સેમી (d) 24 સેમી

(7) ઘડિયાળમાં 8:30 વાગે કલાક કાંટા અને મિનિટ કાંટા વચ્ચેના ખૂણાનું માપ ...... છે. $\square$

(a) 80° (b) 75° (c) 60° (d) 105°

(8) 7 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળાકાર તારને કાપી 12 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના પરિઘ પર ગોઠવ્યો હોય, તો તેણે કેન્દ્ર પાસે બનાવેલા ખૂણાનું માપ = ...

(a) 50° (b) 210° (c) 100° (d) 60°

(9) 15π સેમીના લંબાઈવાળું ચાપ કેન્દ્ર પાસે $\frac{3\pi}{4}$ માપનો ખૂણો બનાવતું હોય, તો વર્તુળની ત્રિજ્યા ......

(a) 10 સેમી (b) 20 સેમી (c) $11\frac{1}{4}$ સેમી (d) $22\frac{1}{2}$ સેમી

(10) જો $\tan\theta = x - \frac{1}{4x}$ હોય, તો $\sec\theta - \tan\theta =$ ......

(a) $-2x$ અથવા $\frac{1}{2x}$ (b) $\frac{-1}{2x}$ અથવા $2x$ (c) $2x$ (d) $\frac{-1}{2x}$

(11) જો $\frac{\cos A}{3} = \frac{\cos B}{4} = \frac{1}{5}$, $\frac{-\pi}{2} < A < 0$, $\frac{-\pi}{2} < B < 0$ હોય, તો $2\sin A + 4\sin B$નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) -4 (b) 0 (c) 2 (d) 4

(12) જો $\pi < \theta < 2\pi$ હોય તો $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} =$ ......

(a) $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$ (b) $\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta$

(c) $-\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$ (d) $-\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta$

(13) જો $\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta = 2$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ હોય તો $\cos\theta =$ ......

(a) $\frac{-3}{5}$ (b) $\frac{-5}{3}$ (c) $\frac{5}{3}$ (d) $\frac{3}{5}$

(14) જો $\sec\theta = m$, $\tan\theta = n$ હોય, તો $\frac{1}{m}\left\{(m+n) + \frac{1}{m+n}\right\} =$ ......

(a) 2 (b) mn (c) $2m$ (d) $2n$

(15) $\sin^6\theta + \cos^6\theta + 3\sin^2\theta\cos^2\theta$નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3થી વધુ

(16) $\tan^2\alpha + \cot^2\alpha$ ......

(a) ≥ -2 (b) ≥ 2 (c) ≤ 2 (d) ≤ -2

(17) જો $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \frac{5}{2}$ હોય, તો $\tan\theta$નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $\frac{14}{24}$ (b) $\frac{20}{21}$ (c) $\frac{21}{20}$ (d) $\frac{15}{16}$

(18) $1 - \frac{\sin^2\theta}{1+\cos\theta} + \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = ...$

(a) 0 (b) 1 (c) $\sin\theta$ (d) $\cos\theta$

(19) જો $\sec\theta = \sqrt{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ હોય તો $\frac{1+\tan\theta+\operatorname{cosec}\theta}{1+\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta} = ...$

(a) $-\sqrt{2}$ (b) -1 (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) 0

(20) જો $p = a\cos^2\theta\sin\theta$ અને $q = a\sin^2\theta\cos\theta$ હોય, તો $\frac{(p^2+q^2)^3}{p^2q^2} = ...$

(a) $\frac{1}{a}$ (b) a^2 (c) a (d) a^3

(21) જો $\sec A - \tan A = \frac{a+1}{a-1}$ હોય, તો $\cos A = ...$

(a) $\frac{2a}{a^2-1}$ (b) $\frac{2a}{a^2+1}$ (c) $\frac{a^2+1}{a^2-1}$ (d) $\frac{a^2-1}{a^2+1}$

સારાંશ

1. ત્રિકોણમિતિય બિંદુ, ત્રિકોણમિતિય બિંદુ વિધેય, આવર્તમાન
2. *sine* વિધેય, *cosine* વિધેય, તેમનાં શૂન્ય અને વિસ્તાર, મૂળભૂત નિત્યસમ
3. અન્ય ત્રિવિધેયો, તેમના વિસ્તાર અને નિત્યસમ
4. વધતાં અને ઘટતાં વિધેયો
5. અંશમાપ અને રેડિયન માપ
6. યુગ્મ અને અયુગ્મ વિધેયો
7. કાટકોણ ત્રિકોણ અને ત્રિવિધેયો
8. પ્રત્યેક ચરણમાં ત્રિવિધેયનાં મૂલ્ય