ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિ 7

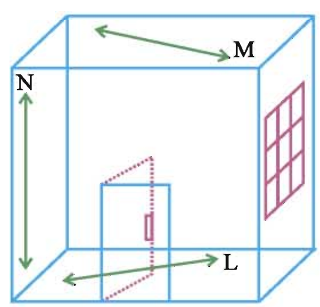
To divide a cube into two other cubes, a fourth power or in general any power whatever into two powers of the same denomination above the second is impossible, and I have assuredly found an admirable proof of this, but the margin is too narrow to contain it.

– Pierre de Fermat

7.1 પ્રાસ્તાવિક

ધોરણ IX અને X માં આપણે સમતલ ભૂમિતિનો અભ્યાસ કર્યો અને તેના સંદર્ભમાં જ ધો XI માં યામ ભૂમિતિની કેટલીક સંકલ્પનાઓનો સવિસ્તાર અભ્યાસ કર્યો. સિમેસ્ટર II માં આપણે સદિશ અવકાશનો અભ્યાસ કર્યો. તેમાં આપણે R^3 માં ત્રિપરિમાણીય યામ-ભૂમિતિની સંકલ્પના સમજ્યા તથા આપણે R^3 માં સદિશનો અભ્યાસ કર્યો. હવે, પ્રશ્ન એ ઉદ્ભવે કે શું આપણે રેખા, સમતલ, ચોરસ, ત્રિકોણ, ગોલક વગેરેનો અભ્યાસ R^3 માં કરી શકીએ? આ પ્રશ્નનો જવાબ છે, હા. ચોક્કસ આવી સંકલ્પનાઓ સદિશની મદદથી ઘણી સહેલાઈથી સમજી શકાય. આ પ્રકરણમાં આપણે ''અવકાશમાં રેખા'' અને ''સમતલ'' વિશેનો અભ્યાસ કરીશું.

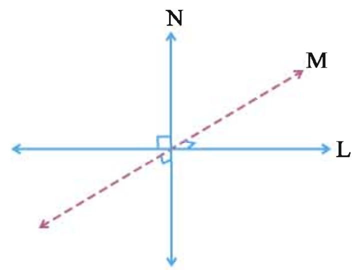
''અવકાશમાં રેખા'' નો અભ્યાસ કરતાં પહેલાં સમતલ ભૂમિતિ અને ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિ વચ્ચેનો તફાવત આપણે સ્પષ્ટ કરી લઈએ. સમતલમાં આવેલ બે રેખાઓ માટે ત્રણ શક્યતાઓ હોય છે, જેવી કે (1) બે રેખાઓ સમાંતર હોય (2) બે રેખાઓ સંપાતી હોય અને (3) બે રેખાઓ અનન્ય બિંદુમાં છેદે. આ વસ્તુ આપણે સાદા કાગળ (સમતલ) પર રેખાઓ દોરીને સહેલાઈથી ચકાસી શકીએ. પરંતુ R^3 માં આ જરૂરી નથી. સામાન્ય રીતે બે શક્યતાઓ છે, આ રેખાઓને સમાવતું એક સમતલ મળે અથવા આ બે રેખાઓને સમાવતું કોઈ સમતલ ન હોય. જો તે એક જ સમતલમાં હોય, તો તે સમતલીય છે અને તેમના માટે ઉપર પ્રમાણે ત્રણ શક્યતાઓ છે. જો બે રેખાઓને સમાવતું કોઈ સમતલ ન હોય તો તે વિષમતલીય રેખાઓ કહેવાય છે.



આકૃતિ 7.1

આકૃતિ 7.1માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે બે રેખાઓ L અને M પૈકી રેખા L ઓરડાના ભોંયતળિયાના સમતલમાં અને રેખા M છતના સમતલમાં છે. આ રેખાઓ L અને M એકબીજાને સમાંતર એવા ભિન્ન સમતલોમાં આવેલી છે. તે બંનેને સમાવતું કોઈ એક સમતલ શક્ય નથી. આવી રેખાઓને વિષમતલીય રેખાઓ કહે છે. આવી શક્યતા સમતલ ભૂમિતિમાં જોવા મળતી નથી.

ખૂબ સૂક્ષ્મ અવલોકન કરતાં માલૂમ પડે છે કે, $L \perp N$ અને $M \perp N$ છે. પરંતુ L અને N તથા M અને N એક બીજાને છેદતી નથી. આવું સમતલીય ભૂમિતિમાં જોવા મળતું નથી.



આકૃતિ 7.2

આકૃતિ 7.2 એ ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિમાં (અવકાશમાં) ત્રણ રેખાઓ પરસ્પર લંબ છે તે દર્શાવે છે. આ સંભાવના સમતલ ભૂમિતિમાં શક્ય નથી.

7.2 રેખાની દિશા

આપણે સદિશની રેખા વિશે જાણીએ છીએ. જો R^3ની રેખા L પર બે ભિન્ન બિંદુઓ A અને B હોય તો $\overrightarrow{AB}$ અને $\overrightarrow{BA}$ વિરૂદ્ધ દિશાના સદિશો છે. જો $\overrightarrow{AB}$ની દિશા $\overline{l}$ હોય, તો $\overrightarrow{BA}$ની દિશા $-\overline{l}$ થશે. $\overleftrightarrow{AB}$ (એટલે કે L) ની દિશા $\pm\overline{l}$ લેવામાં આવે છે.

આમ, આપણે રેખા L ની દિશા $\overline{l}$ છે તેમ કહીએ ત્યારે તેનો અર્થ રેખા L પરના કોઈપણ સદિશની દિશા $\overline{l}$ અથવા $-\overline{l}$ છે એમ થશે.

નોંધ : (1) આપણે અવકાશમાં રેખાને L, M, N, ... વડે દર્શાવીશું.
(2) જો (i) રેખા એક બિંદુમાંથી પસાર થતી હોય અને તેના પરના કોઈપણ સદિશની દિશા એ $\overline{l}$ ની અથવા $-\overline{l}$ ની દિશા હોય તો રેખાની દિશા $\overline{l}$ છે તેમ કહીશું અને
(ii) અવકાશના બે ભિન્ન બિંદુ અનન્ય રેખા નિશ્ચિત કરે છે.

7.3 બિંદુ $A(\overline{a})$ માંથી પસાર થતી તથા શૂન્યેતર સદિશ $\overline{l}$ ની દિશાવાળી રેખાનું સમીકરણ

ધારો કે $A(\overline{a})$ માંથી પસાર થતી અને $\overline{l}$ ની દિશાવાળી રેખા L છે.

ધારો કે $P(\overline{r})$ એ રેખા L પરનું કોઈપણ બિંદુ છે તથા $P \neq A$.

$\therefore$ $\overrightarrow{AP}$ ની દિશા એ $\overline{l}$ અથવા $-\overline{l}$ ની દિશા છે.

$\therefore$ $\overrightarrow{AP} = k\overline{l}$, $k \in R - \{0\}$. ($P \neq A$ હોવાથી $k \neq 0$)

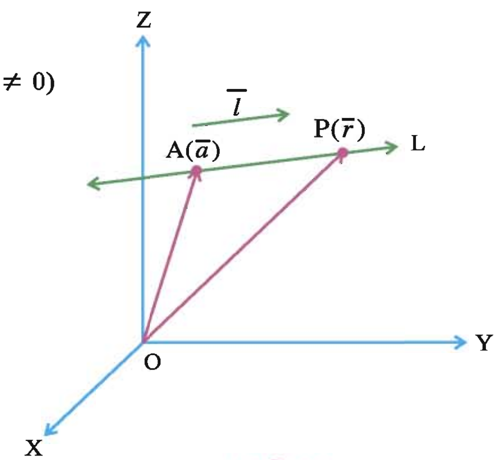
$\therefore$ $\overline{r} - \overline{a} = k\overline{l}$

$\therefore$ $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$

જો $k = 0$, તો $\overline{r} = \overline{a}$ એટલે કે $P = A$
અને A એ રેખા L પરનું બિંદુ છે.

$\therefore$ રેખા L પરના પ્રત્યેક બિંદુ $P(\overline{r})$ માટે

$\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in R$.



આકૃતિ 7.3

આથી ઉલટું, જો અવકાશમાં કોઈ બિંદુ $P(\overline{r})$ એવું હોય કે જેથી કોઈક $k \in R$ માટે $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$

તો (i) જો $k = 0$ તો $\overline{r} = \overline{a}$ અથવા $P = A$.

(ii) $k \neq 0$, તો $\overline{r} \neq \overline{a}$ અને $\overline{r} - \overline{a} = k\overline{l}$, $(k \neq 0)$

$\therefore$ $\overrightarrow{AP} = k\overline{l}$

$\therefore$ $\overrightarrow{AP}$ ની દિશા એ $\overline{l}$ ની દિશા અથવા $\overline{l}$ ની દિશાની વિરૂદ્ધ દિશા થશે.

પરંતુ $A \in L$. તેથી $P \in L$.

આમ, $P(\overline{r}) \in L \Leftrightarrow \overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in R$

$\therefore$ રેખા L નું **સદિશ સમીકરણ (Vector Equation)** $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in R$ છે તેમ કહેવાય.

રેખાનું સદિશ સમીકરણ એ રેખા પરના કોઈપણ બિંદુનો સ્થાન સદિશ દર્શાવે છે.
રેખાનું સમીકરણ $\overline{a}$ ની પસંદગી પર આધારિત નથી.
જો $\overline{b} \in L$, તો $\overline{b} = \overline{a} + k_1\overline{l}$ લેતાં,

$$\begin{aligned}\overline{b} + k\overline{l} &= \overline{a} + k_1\overline{l} + k\overline{l}\\ &= \overline{a} + (k_1 + k)\overline{l}\\ &= \overline{a} + t\overline{l}, \quad t \in R\end{aligned}$$

$\therefore$ $\{\overline{b} + k\overline{l} \mid k \in R\} = \{\overline{a} + k\overline{l} \mid k \in R\}$, જ્યાં $\overline{a}$ અને $\overline{b}$ બંને L પરના બિંદુના સ્થાન સદિશ છે.

રેખાનું પ્રચલ સમીકરણ :

ધારો કે રેખા L ની દિશા $\overline{l} = (l_1, l_2, l_3)$ ની દિશા છે અને તે $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$ માંથી પસાર થાય છે. $P(\overline{r}) \in L$ છે.
ધારો કે $\overline{r} = (x, y, z)$, $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$ અને $\overline{l} = (l_1, l_2, l_3)$.

$\therefore \quad \overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}, \quad k \in R$

$\therefore \quad (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + k(l_1, l_2, l_3), \quad k \in R$

$\therefore \quad (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = (kl_1, kl_2, kl_3)$

$\therefore \quad x - x_1 = kl_1, \ \ y - y_1 = kl_2, z - z_1 = kl_3$ (i)

$$\therefore \left.\begin{aligned} x &= x_1 + kl_1 \\ y &= y_1 + kl_2 \\ z &= z_1 + kl_3 \end{aligned}\right\} \quad k \in R$$

આ સમીકરણોને (x_1, y_1, z_1)માંથી પસાર થતી અને (l_1, l_2, l_3) ની દિશાવાળી રેખા Lનાં પ્રચલ સમીકરણ કહે છે અને k પ્રચલ છે.

કાર્તેઝીય સમીકરણ (સંમિત સ્વરૂપ) (Symmetric Form) :

જો આપણે ઉપરના સમીકરણોમાંથી પ્રચલ k નો લોપ કરીએ અને $l_1 \neq 0, l_2 \neq 0, l_3 \neq 0$ હોય, તો

$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{l_2} = \frac{z - z_1}{l_3}$ $(= k)$ **મળે.** ((i)પરથી) (ii)

આ સમીકરણને રેખાના સમીકરણનું સંમિત સ્વરૂપ અથવા કાર્તેઝીય સ્વરૂપ કહે છે.

જો $l_1 = 0$ અને $l_2 \neq 0, l_3 \neq 0$ તો (i) પરથી,

$$x = x_1, \frac{y - y_1}{l_2} = \frac{z - z_1}{l_3}$$

[ખરેખર તો $x - x_1 = kl_1$ અને $l_1 = 0$ હોવાથી $x - x_1 = 0$, એટલે કે $x = x_1$.]

આ સમીકરણને $\frac{x - x_1}{0} = \frac{y - y_1}{l_2} = \frac{z - z_1}{l_3}$ $(= k)$ તરીકે લખી શકાય. (અહીં છેદમાં 0 છે તેનો અર્થ સદિશ $\overline{l}$ નો પ્રથમ ઘટક $l_1 = 0$ છે. છેદનો શૂન્ય માત્ર ઔપચારિક છે.) આ ફક્ત સાંકેતિક સ્વરૂપ છે.

અહીં $x = x_1 + 0k, y = y_1 + kl_2, z = z_1 + kl_3$

$\therefore \quad x = x_1, y = y_1 + kl_2, z = z_1 + kl_3$.

આ જ પ્રમાણે l_1, l_2, l_3માંથી કોઈ પણ શૂન્ય હોય (અલબત્, $l_1 = l_2 = l_3 = 0$ નહીં), તો પણ આપણે સંમિત સ્વરૂપે સમીકરણ લખી શકીએ. જો $l_1 = l_2 = 0$ તો, $x = x_1, y = y_1$ અને z એ સ્વૈર છે.

સંકેતમાં આપણે તેને $\frac{x - x_1}{0} = \frac{y - y_1}{0} = \frac{z - z_1}{l_3} = k$ ($l_3 \neq 0$ કારણ કે $\overline{l} \neq \overline{0}$)

પુનઃ અહીં છેદ શૂન્ય હોવાથી શૂન્ય વડે ભાગાકાર છે તેમ સમજીશું નહીં. સામાન્ય રીતે $x - x_1 = 0$ અથવા $x = x_1$ અને $y - y_1 = 0$ અથવા $y = y_1$ તેવો અર્થ છે.

નોંધ : જો $A(x_1, y_1, z_1)$ માંથી પસાર થતી રેખા Lની દિક્કોસાઈન l_1, l_2, l_3 હોય, તો L નું સમીકરણ $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{l_2} = \frac{z - z_1}{l_3}$ થશે, જ્યાં $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$.

ઉદાહરણ 1 : A(2, 1, −4)માંથી પસાર થતી અને સદિશ (1, −1, 2) ની દિશાવાળી રેખાનું સદિશ તેમજ સંમિત સ્વરૂપે સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $\overline{a} = (2, 1, -4)$ અને $\overline{l} = (1, -1, 2)$.

$\therefore$ Lનું સદિશ સમીકરણ $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}, \ k \in R$ પ્રમાણે,

$\overline{r} = (2, 1, -4) + k(1, -1, 2), \quad k \in R$ થશે.

આ રેખાનું સદિશ સમીકરણ છે.

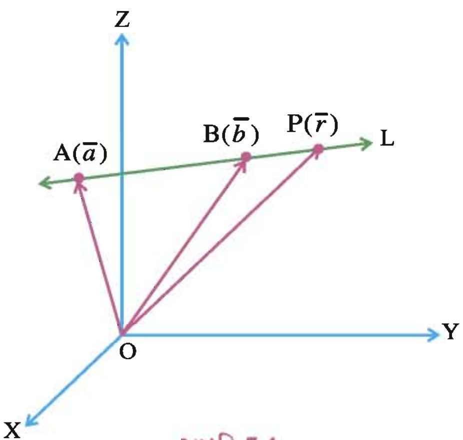
રેખાના સમીકરણનું સંમિત સ્વરૂપ : રેખાના સમીકરણનું સંમિત સ્વરૂપ $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{l_2} = \frac{z - z_1}{l_3}$

$\therefore \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+4}{2}$ એ રેખાના સમીકરણનું સંમિત સ્વરૂપ છે.

7.4 બે ભિન્ન બિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ

ધારો કે $A(\overline{a})$ તથા $B(\overline{b})$ માંથી પસાર થતી $\overleftrightarrow{AB}$નું સમીકરણ મેળવવું છે. $(A \neq B)$

ધારો કે $P(\overline{r})$ એ $\overleftrightarrow{AB}$ પરનું કોઈપણ બિંદુ છે અને $P \neq A$.



આકૃતિ 7.4

$P(\overline{r}) \in \overleftrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}$ અને $\overrightarrow{AB}$ની દિશા સમાન અથવા પરસ્પર વિરુદ્ધ છે.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = k\,\overrightarrow{AB}, \ k \in R - \{0\}$

$(k \neq 0$ કારણ કે $P \neq A)$

$\Leftrightarrow \overline{r} - \overline{a} = k(\overline{b} - \overline{a})$

$\Leftrightarrow \overline{r} = \overline{a} + k(\overline{b} - \overline{a})$

$\Leftrightarrow \overline{r} = (1 - k)\overline{a} + k\overline{b}, \ k \in R - \{0\}$

વળી, $k = 0 \Leftrightarrow \overline{r} = \overline{a}$ અને $A(\overline{a}) \in \overleftrightarrow{AB}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB}$નું સદિશ સમીકરણ $\overline{r} = (1 - k)\overline{a} + k\overline{b}, \ k \in R$

અથવા $\overline{r} = \overline{a} + k(\overline{b} - \overline{a}), \ k \in R$ છે.

અથવા $k = 1 - t$ લેતાં $\overline{r} = (1 - (1 - t))\overline{a} + (1 - t)\overline{b}, \ t \in R$

$= t\overline{a} + (1 - t)\overline{b} = \overline{b} + t(\overline{a} - \overline{b}). \ t \in R$

[સરખાવો : R^2 માં $x = tx_2 + (1 - t)\,x_1, \ y = ty_2 + (1 - t)\,y_1$]

આમ $\overline{a}$ અને $\overline{b}$ની અદલાબદલી કરી શકાય અથવા L પરનાં કોઈપણ બે ભિન્ન બિંદુઓ લઈ સમીકરણ પ્રાપ્ત કરી શકાય.

પ્રચલ સ્વરૂપ :

ધારો કે $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1), \ \overline{b} = (x_2, y_2, z_2), \ \overline{r} = (x, y, z)$.

$\therefore \quad \overline{r} = \overline{a} + k(\overline{b} - \overline{a}), \ k \in R$ પરથી,

$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + k(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \quad k \in R$

$\therefore \quad x - x_1 = k(x_2 - x_1), \ \ y - y_1 = k(y_2 - y_1), \ z - z_1 = k(z_2 - z_1)$ (i)

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} x &= x_1 + k(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + k(y_2 - y_1) \\ z &= z_1 + k(z_2 - z_1) \end{aligned}\right\} \ k \in R$$

$\overleftrightarrow{AB}$ નાં પ્રચલ સમીકરણ છે. k પ્રચલ છે.

સંમિત સ્વરૂપ :

ઉપરનાં સમીકરણોમાંથી પ્રચલ k નો લોપ કરતાં,

$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ મળે.

[સરખાવો : R^2 માં $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$]

આ સ્વરૂપ એ $\overleftrightarrow{AB}$ ના સમીકરણનું કાર્તેઝીય અથવા સંમિત સ્વરૂપ છે.

અહીં પણ જો $x_1 = x_2$ તો સમીકરણ

$$\frac{x - x_1}{0} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \text{ થશે.}$$

(જ્યારે છેદ શૂન્ય હોય ત્યારે અંશ શૂન્ય છે તેમ અર્થઘટન કરવું.)

[અહીં $x - x_1$નો છેદ શૂન્ય છે, તેનો અર્થ આપણે $x = x_1$ સમજીશું. આ માત્ર સાંકેતિક સ્વરૂપ છે.]

એટલે કે $x = x_1, \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ સમીકરણ મળે.

ઉદાહરણ 2 : રેખા $\frac{3 - x}{3} = \frac{2y - 3}{5} = \frac{z}{2}$ નું સદિશ સ્વરૂપે સમીકરણ લખો.

ઉકેલ : રેખાનું સમીકરણ $\frac{x - 3}{-3} = \frac{y - \frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{z - 0}{2}$ થશે

આથી $\overline{a} = \left(3, \frac{3}{2}, 0\right)$ અને $\overline{l} = \left(-3, \frac{5}{2}, 2\right)$ એટલે કે $\overline{l} = \left(-6, 5, 4\right)$ લઈ શકાય.

$\therefore$ રેખાના સમીકરણના સદિશ સ્વરૂપ $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in R$ પરથી,

$\overline{r} = \left(3, \frac{3}{2}, 0\right) + k(-6, 5, 4)$, $k \in R$ એ રેખાનું સદિશ સ્વરૂપે સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 3 : સમીકરણ $\overline{r} = (5, -2, 4) + k(0, -4, 3)$, $k \in R$ નું કાર્તેઝીય સ્વરૂપમાં પરિવર્તન કરો.

ઉકેલ : અહીં, $\overline{a} = (5, -2, 4) = (x_1, y_1, z_1)$ અને $\overline{l} = (0, -4, 3) = (l_1, l_2, l_3)$

રેખાના સમીકરણનું કાર્તેઝીય સ્વરૂપ $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{l_2} = \frac{z - z_1}{l_3}$ છે.

$\therefore$ $x - 5 = 0, \frac{y + 2}{-4} = \frac{z - 4}{3}$ એ રેખાના સમીકરણનું કાર્તેઝીય સ્વરૂપ છે. **$(l_1 = 0)$**

ઉદાહરણ 4 : (2, 2, −3) અને (1, 3, 5) માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : $\overline{a}$ અને $\overline{b}$ માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ $\overline{r} = \overline{a} + k(\overline{b} - \overline{a})$, $k \in R$ છે.

અહીં, $\overline{a} = (2, 2, -3)$ અને $\overline{b} = (1, 3, 5)$, $\overline{b} - \overline{a} = (-1, 1, 8)$.

$\therefore$ $\overline{r} = (2, 2, -3) + k(-1, 1, 8)$, $k \in R$ રેખાનું સદિશ સ્વરૂપે સમીકરણ છે.

$\therefore$ રેખાના સમીકરણનું કાર્તેઝીય સ્વરૂપ $\frac{x - 2}{-1} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z + 3}{8}$ છે.

7.5 સમરેખ બિંદુઓ

ધારોકે $A(\overline{a})$, $B(\overline{b})$, $C(\overline{c})$ એ R^3 નાં ભિન્ન બિંદુઓ છે.

A, B, C સમરેખ છે. $\Leftrightarrow C \in \overleftrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow$ કોઈક $k \in R$ માટે $\overline{c} = \overline{a} + k(\overline{b} - \overline{a})$

($\overleftrightarrow{AB}$ નું સમીકરણ $\overline{r} = \overline{a} + k(\overline{b} - \overline{a}), k \in R$)

$\Leftrightarrow \overline{c} - \overline{a} = k(\overline{b} - \overline{a})$

$\therefore$ A, B, C સમરેખ છે. $\Leftrightarrow (\overline{c} - \overline{a}) \times (\overline{b} - \overline{a}) = \overline{0}$

આમ, $A(\overline{a})$, $B(\overline{b})$, $C(\overline{c})$ સમરેખ હોવા માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત $(\overline{c} - \overline{a}) \times (\overline{b} - \overline{a}) = \overline{0}$ છે.

બિંદુઓ સમરેખ હોવાની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત દર્શાવતું એક પ્રમેય નીચે પ્રમાણે છે. આપણે આ પ્રમેય સાબિતી આપ્યા વગર સ્વીકારીશું.

પ્રમેય 7.1 : જો $A(\overline{a})$, $B(\overline{b})$, $C(\overline{c})$ અવકાશનાં ભિન્ન બિંદુઓ હોય અને શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યાઓ l, m, n એવી મળે કે જેથી $l + m + n = 0$ અને $l\overline{a} + m\overline{b} + n\overline{c} = \overline{0}$ તો અને તો જ $A(\overline{a})$, $B(\overline{b})$, $C(\overline{c})$ સમરેખ છે.

ત્રણ ભિન્ન બિંદુઓ સમરેખ હોવાની એક આવશ્યક શરત આપણે મેળવીશું.

A, B, C સમરેખ છે $\Rightarrow (\overline{c} - \overline{a}) \times (\overline{b} - \overline{a}) = \overline{0}$

$\Rightarrow (\overline{c} \times \overline{b}) - (\overline{a} \times \overline{b}) - (\overline{c} \times \overline{a}) + (\overline{a} \times \overline{a}) = \overline{0}$

વળી $\overline{a} \times \overline{a} = \overline{0}$ અને $\overline{c} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{c}$

$\Rightarrow (\overline{a} \times \overline{b}) + (\overline{b} \times \overline{c}) + (\overline{c} \times \overline{a}) = \overline{0}$

$\Rightarrow (\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} + (\overline{b} \times \overline{c}) \cdot \overline{c} + (\overline{c} \times \overline{a}) \cdot \overline{c} = 0$

$\Rightarrow [\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}] = 0$

$[\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}] = 0$ એ $A(\overline{a})$, $B(\overline{b})$, $C(\overline{c})$ સમરેખ હોવા માટેની માત્ર આવશ્યક શરત જ છે, પર્યાપ્ત નથી.

આપણે એ નોંધીએ કે $[\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}] \neq 0 \Rightarrow$ A, B, C અસમરેખ છે, પરંતુ $[\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}] = 0$ થી આપણે કોઈ નિર્ણય લઈ શકીએ નહીં, તે નીચેના ઉદાહરણ પરથી સ્પષ્ટ થશે.

નીચેના ઉદાહરણો આ શરત પર્યાપ્ત નથી તે દર્શાવે છે. :

ઉદાહરણ તરીકે A(1, 2, 0), B(–4, 1, 9) અને C(2, 4, 0) સમરેખ છે કે નહીં તે ચકાસીએ.

ધારો કે $\overline{a} = (1, 2, 0)$, $\overline{b} = (-4, 1, 9)$ અને $\overline{c} = (2, 4, 0)$

માટે $[\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1(-36) - 2(-18) + 0 = 0$

હવે, $\overline{c} - \overline{a} = (1, 2, 0)$

$\overline{b} - \overline{a} = (-5, -1, 9)$

$(\overline{c} - \overline{a}) \times (\overline{b} - \overline{a}) = (18, -9, 9) \neq \overline{0}$

$\therefore$ A, B, C અસમરેખ છે.

આમ $[\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}] = 0$ છે, પરંતુ A, B, C અસમરેખ છે.

એક બીજું સરળ ઉદાહરણ લઈએ, $\overline{a} = (0, 0, 0)$, $\overline{b} = (1, 2, 3)$, $\overline{c} = (2, 3, 4)$ લેતાં, $[\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}] = 0$

પરંતુ $(\overline{c} - \overline{a}) \times (\overline{b} - \overline{a}) = \overline{c} \times \overline{b} \neq \overline{0}$

$\therefore$ $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ અસમરેખ છે.

ઉદાહરણ 5 : સાબિત કરો કે (–1, 2, 5), (–2, 4, 2) અને (1, –2, 11) સમરેખ છે.

ઉકેલ : રીત 1 : $\overline{a} = (-1, 2, 5)$, $\overline{b} = (-2, 4, 2)$, $\overline{c} = (1, -2, 11)$

$\therefore$ $\overline{c} - \overline{a} = (2, -4, 6)$ અને

$\overline{b} - \overline{a} = (-1, 2, -3)$

$\therefore$ $(\overline{c} - \overline{a}) \times (\overline{b} - \overline{a}) = (0, 0, 0) = \overline{0}$

$\therefore$ આપેલાં બિંદુઓ સમરેખ છે.

રીત 2 : પ્રથમ આપણે બે બિંદુઓ $A(\overline{a}) = (-1, 2, 5)$ અને $B(\overline{b}) = (-2, 4, 2)$ માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ મેળવીશું.

$\overleftrightarrow{AB}$ નું સમીકરણ $\overline{r} = \overline{a} + k(\overline{b} - \overline{a})$, $k \in R$ છે.

$\therefore \quad \overline{r} = (-1, 2, 5) + k(-1, 2, -3)$, $k \in R$

હવે આપણે બતાવીશું કે ત્રીજું બિંદુ $C(\overline{c}) = (1, -2, 11)$ આ રેખા પર આવેલું છે.

જો $\overline{c} = (1, -2, 11)$ એ $\overleftrightarrow{AB}$ પર આવેલું હોય તો કોઈક $k \in R$ માટે

$(1, -2, 11) = (-1 - k, 2 + 2k, 5 - 3k)$ થવું જોઈએ.

$\therefore$ કોઈક $k \in R$ માટે $1 = -1 - k$, $-2 = 2 + 2k$, $11 = 5 - 3k$ થવું જોઈએ.

$k = -2$ બધાં જ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે.

$\therefore \quad C(\overline{c})$ એ $\overleftrightarrow{AB}$ પર છે.

$\therefore$ A, B, C સમરેખ છે.

7.6 બે રેખા વચ્ચેના ખૂણાનું માપ

ધારો કે અવકાશમાં $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in R$ અને $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{m}$, $k \in R$ બે ભિન્ન રેખાઓનાં સમીકરણ છે.

(i) જો $\overline{l} = \overline{m}$ અથવા $\overline{l} = -\overline{m}$, તો $\overline{l} \times \overline{m} = \overline{0}$. તેથી બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શૂન્ય છે. બંને રેખાની દિશા સમાન છે. તેથી તે સંપાતી અથવા સમાંતર રેખાઓ છે.

(ii) જો $\overline{l} \perp \overline{m}$ એટલે કે $\overline{l} \cdot \overline{m} = 0$ તો રેખાઓ એકબીજીને લંબ થશે અને તેથી તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{2}$ લઈશું.

(iii) જો $\overline{l} \neq \pm \overline{m}$ અથવા $\overline{l} \cdot \overline{m} \neq 0$ તો આપેલ રેખાઓ એકબીજાને સમાંતર, સંપાતી અથવા પરસ્પર લંબ નથી. આપણે સદિશો $\overline{l}$ અને $\overline{m}$ વચ્ચેના લઘુકોણ ખૂણાના માપને બે રેખા વચ્ચેના ખૂણાના માપ તરીકે લઈશું.

જો બે રેખા વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય, તો

$$\cos\alpha = \frac{|\overline{l} \cdot \overline{m}|}{|\overline{l}||\overline{m}|}, \ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$\alpha = 0$ તથા $\frac{\pi}{2}$ માટે પણ આ પરિણામ સત્ય છે.

નોંધ : $\alpha = 0$ માટે $|\overline{l} \cdot \overline{m}| = |\overline{l}||\overline{m}|$.

$\therefore \quad \overline{l} \times \overline{m} = \overline{0}$

આમ, $\cos\alpha = \frac{|\overline{l} \cdot \overline{m}|}{|\overline{l}||\overline{m}|}, \ 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

7.7 બે ભિન્ન રેખાઓ છેદે તે માટેની શરત

પ્રમેય 7.2 : જો બે રેખાઓ $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in R$ અને $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{m}$, $k \in R$ પરસ્પર છેદે, તો $(\overline{a} - \overline{b}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = 0$.

સાબિતી : ધારો કે બે ભિન્ન રેખાઓ $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in R$ અને $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{m}$, $k \in R$ એકબીજાને $C(\overline{c})$માં છેદે છે.

તેથી કોઈક $k_1, k_2 \in R$ મળે જેથી $\overline{c} = \overline{a} + k_1\overline{l} = \overline{b} + k_2\overline{m}$.

$\therefore \quad \overline{a} - \overline{b} = k_2\overline{m} - k_1\overline{l}$

$\therefore \quad (\overline{a} - \overline{b})\cdot(\overline{l} \times \overline{m}) = (k_2\overline{m} - k_1\overline{l})\cdot(\overline{l} \times \overline{m}) = k_2\overline{m}\cdot(\overline{l} \times \overline{m}) - k_1\overline{l}\cdot(\overline{l} \times \overline{m})$

$= 0 - 0 = 0$

$\therefore \quad (\overline{a} - \overline{b})\cdot(\overline{l} \times \overline{m}) = 0$

$\therefore$ આપેલ રેખાઓ એકબીજીને છેદે તો $(\overline{a} - \overline{b})\cdot(\overline{l} \times \overline{m}) = 0$

નોંધ : આ શરત આવશ્યક છે પરંતુ પર્યાપ્ત નથી.

જો $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\overline{l} = (l_1, l_2, l_3)$ અને $\overline{m} = (m_1, m_2, m_3)$ લઈએ તો $(\overline{a} - \overline{b})\cdot(\overline{l} \times \overline{m}) = 0$ શરતને

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_2 \end{vmatrix} = 0$$

સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય. આ બે રેખાઓ છેદે તે માટેની કાર્તેઝીય સ્વરૂપમાં શરત છે.

ઉદાહરણ 6 : રેખાઓ $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{1}$ અને $\frac{x+2}{4} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-3}{8}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

ઉકેલ : રેખા L નાં સમીકરણ $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{1}$ અને M નાં સમીકરણ $\frac{x+2}{4} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-3}{8}$ છે.

$\therefore \quad \overline{l} = (2, 2, 1)$ અને $\overline{m} = (4, 1, 8)$

જો બે રેખા વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય તો, $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$.

$$cos\alpha = \frac{|\overline{l}\cdot\overline{m}|}{|\overline{l}||\overline{m}|} = \frac{8+2+8}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{81}} = \frac{18}{3\cdot 9} = \frac{2}{3}$$

$\therefore \quad \alpha = cos^{-1}\frac{2}{3}$

ઉદાહરણ 7 : રેખાઓ $\frac{x-5}{7} = \frac{y-5}{k} = \frac{z-2}{1}$ અને $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}$ પરસ્પર લંબ હોય તો k શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $\overline{l} = (7, k, 1)$ અને $\overline{m} = (1, 2, 3)$

રેખાઓ પરસ્પર લંબ હોવાથી $\overline{l}\cdot\overline{m} = 0$

$\therefore \quad 7 + 2k + 3 = 0$

$\therefore \quad 2k = -10$

$\therefore \quad k = -5$

ઉદાહરણ 8 : રેખા $\overline{r} = (-3, 4, 8) + k(3, 5, 6)$, $k \in R$ ને સમાંતર અને $(2, -4, 5)$ માંથી પસાર થતી રેખાનું કાર્તેઝીય સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : રેખાઓ સમાંતર હોવાથી બંને રેખાની દિશા સમાન થશે.

$\therefore$ રેખાની દિશા $\overline{l} = (3, 5, 6) = (l_1, l_2, l_3)$ છે અને તે બિંદુ $(2, -4, 5) = (x_1, y_1, z_1)$માંથી પસાર થાય છે.

$(2, -4, 5)$ એ રેખા $\overline{r} = (-3, 4, 8) + k(3, 5, 6)$, $k \in R$ પર નથી તેમ બતાવીશું.

ધારો કે કોઈક $k \in R$ માટે $(2, -4, 5) = (-3, 4, 8) + k(3, 5, 6)$

$\therefore$ $(5, -8, -3) = k(3, 5, 6)$

પરંતુ કોઈ પણ $k \in R$ માટે $5 = 3k$, $-8 = 5k$, $-3 = 6k$ શક્ય નથી.

$\therefore$ આપેલી રેખાને (x_1, y_1, z_1) માંથી પસાર થતી સમાંતર રેખાનું સમીકરણ

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{l_2} = \frac{z - z_1}{l_3}$$

$\therefore$ $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-5}{6}$ એ $(2, -4, 5)$ માંથી પસાર થતી અને આપેલ રેખાને સમાંતર રેખાનું સમીકરણ છે.

સમતલીય અને વિષમતલીય રેખાઓ માટેની શરત :

પ્રમેય 7.3 : રેખાઓ $\bar{r} = \bar{a} + k\bar{l}$, $k \in R$ અને $\bar{r} = \bar{b} + k\bar{m}$, $k \in R$. સમતલીય હોવાની આવશ્યક શરત $(\bar{a} - \bar{b}) \cdot (\bar{l} \times \bar{m}) = 0$ છે.

સાબિતી : જો બે ભિન્ન રેખાઓ L : $\bar{r} = \bar{a} + k\bar{l}$, $k \in R$ અને M : $\bar{r} = \bar{b} + k\bar{m}$, $k \in R$ સમતલીય હોય તો તે અનન્ય બિંદુમાં છેદે અથવા પરસ્પર સમાંતર હોય.

જો તે અનન્ય બિંદુમાં છેદે તો પ્રમેય 7.2 પ્રમાણે $(\bar{a} - \bar{b}) \cdot (\bar{l} \times \bar{m}) = 0$.

અને જો તે સમાંતર હોય તો $\bar{l} \times \bar{m} = \bar{0}$.

$\therefore$ બંને વિકલ્પમાં $(\bar{a} - \bar{b}) \cdot (\bar{l} \times \bar{m}) = 0$ બે રેખાઓ સમતલીય હોવાની આવશ્યક શરત છે.

ઉપરની શરત પર્યાપ્ત છે ?

વિષમતલીય રેખાઓ : જો બે રેખાઓને સમાવતું કોઈ સમતલ ના મળી શકે તો તેમને વિષમતલીય રેખાઓ (Skew lines) કહે છે.

પ્રમેય 7.3 ના વિધાન પરથી એ તો નક્કી થાય છે જ કે

$(\bar{a} - \bar{b}) \cdot (\bar{l} \times \bar{m}) \neq 0 \Rightarrow$ રેખાઓ $\bar{r} = \bar{a} + k\bar{l}$ અને $\bar{r} = \bar{b} + k\bar{m}$ વિષમતલીય છે.

ઉદાહરણ 9 : રેખાઓ L : $\frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{-1}$ અને M : $\frac{x}{2} = \frac{z+3}{3}$, $y = -1$ સમતલીય છે કે નહીં તે ચકાસો.

ઉકેલ : રેખા M ને $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z+3}{3}$ પ્રમાણે લઈ શકાય.

અહીં, $\bar{a} = (3, -2, -1)$, $\bar{l} = (4, -1, -1)$ અને $\bar{b} = (0, -1, -3)$, $\bar{m} = (2, 0, 3)$

$\therefore$ $\bar{a} - \bar{b} = (3, -1, 2)$

$$(\bar{a} - \bar{b}) \cdot (\bar{l} \times \bar{m}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-3) + 1(14) + 2(2)$$

$$= -9 + 14 + 4 = 9 \neq 0$$

$\therefore$ L અને M વિષમતલીય રેખાઓ છે.

7.8 બિંદુનું રેખાથી લંબઅંતર :

ધારો કે $A(\bar{a})$ માંથી પસાર થતી અને દિશા $\bar{l}$ વાળી રેખા Lનું સમીકરણ $\bar{r} = \bar{a} + k\bar{l}$, $k \in R$ છે અને $P(\bar{p})$ એ R^3 માં કોઈપણ બિંદુ છે.

જો $P \in L$ તો P અને L વચ્ચેનું લંબઅંતર શૂન્ય થશે.

જો $P \notin L$ તો, P અને L એક અનન્ય સમતલ π નક્કી કરે છે.

ધારો કે P માંથી સમતલ π માં રેખા L પરનો લંબપાદ M છે અને $(\bar{l}, \widehat{\overrightarrow{AP}}) = \alpha$ ધારો કે, $M \neq A$

જ્યાં, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

$\therefore$ P નું રેખા L થી લંબઅંતર

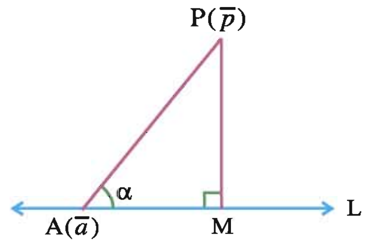
$= PM$

$= AP \ sin\alpha$

$= \frac{|\overrightarrow{AP}||\overline{l}| sin\alpha}{|\overline{l}|}$ $\quad (\overline{l} \neq \overline{0})$

$= \frac{|\overrightarrow{AP} \times \overline{l}|}{|\overline{l}|}$ $\quad (\alpha = (\overrightarrow{AP}, \widehat{\ \overline{l}}))$

$= \frac{|(\overline{p} - \overline{a}) \times \overline{l}|}{|\overline{l}|}$



આકૃતિ 7.5

આમ, $PM = \frac{|(\overline{p} - \overline{a}) \times \overline{l}|}{|\overline{l}|}$ અથવા $|(\overline{p} - \overline{a}) \times \hat{l}|$ $\quad \left(\hat{l} = \frac{\overline{l}}{|\overline{l}|}\right)$

બીજી રીત :

$$AM = |\text{Proj}_{\overline{l}} \overrightarrow{AP}| = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \overline{l}|}{|\overline{l}|}$$

હવે, $PM^2 = AP^2 - AM^2$

$$= AP^2 - \frac{|\overrightarrow{AP} \times \overline{l}|^2}{|\overline{l}|^2}$$

$$= \frac{|\overrightarrow{AP}|^2 |\overline{l}|^2 - |\overrightarrow{AP} \cdot \overline{l}|^2}{|\overline{l}|^2} \quad \text{(લાગ્રાન્જનું નિત્યસમ)}$$

$$PM^2 = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \overline{l}|^2}{|\overline{l}|^2}$$

$$\therefore \quad PM = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \overline{l}|}{|\overline{l}|} = \frac{|(\overline{p} - \overline{a}) \times \overline{l}|}{|\overline{l}|} = |(\overline{p} - \overline{a}) \times \hat{l}|$$

નોંધ : જો A માંથી લંબરેખા પર P હોય તો પણ દેખીતું જ પરિણામ સત્ય છે. $PA = |\overline{p} - \overline{a}|$

ઉદાહરણ 10 : બિંદુ (1, 2, –4) નું રેખા $\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+5}{6}$ થી લંબઅંતર શોધો.

ઉકેલ : અહીં બિંદુ P(1, 2, –4) અને $A(\overline{a}) = (3, 3, -5)$, $\overline{l} = (2, 3, 6)$ છે.

$\overrightarrow{AP} = (1 - 3, 2 - 3, -4 + 5) = (-2, -1, 1)$ અને

$\overline{l} = (2, 3, 6)$

$\overrightarrow{AP} \times \overline{l} = (-9, 14, -4)$

$|\overline{l}| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$

$\therefore$ P નું આપેલી રેખાથી લંબઅંતર $= \frac{|\overrightarrow{AP} \times \overline{l}|}{|\overline{l}|} = \frac{|(-9, 14, -4)|}{7}$

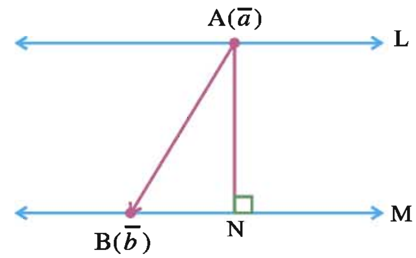
$$= \frac{\sqrt{81 + 196 + 16}}{7} = \frac{\sqrt{293}}{7}$$

બે સમાંતર રેખાઓ વચ્ચેનું લંબઅંતર :

ધારો કે L : $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in R$ અને M : $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{l}$, $k \in R$ એ R^3 માં બે સમાંતર રેખાઓ છે.

L ∥ M હોવાથી તે એક અનન્ય સમતલ નક્કી કરે છે.

L અને M વચ્ચેનું લંબઅંતર એટલે કે $A(\overline{a})$ નું M થી (અથવા $B(\overline{b})$ નું L થી) લંબઅંતર



આકૃતિ 7.6

∴ **L અને M વચ્ચેનું અંતર**

$$= \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overline{l}|}{|\overline{l}|} = \frac{|(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l}|}{|\overline{l}|}$$

ઉદાહરણ 11 : રેખાઓ L : $\frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{6}$ અને

M : $\overline{r} = (2, 3, -1) + k(-3, 2, -6)$, $k \in R$ વચ્ચેનું અંતર શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $\overline{a} = (4, -1, 2)$; $\overline{l} = (3, -2, 6)$, $\overline{b} = (2, 3, -1)$; $\overline{m} = (-3, 2, -6)$

શક્ય હોય તો, ધારો કે $A(\overline{a}) \in M$.

તો કોઈક $k \in R$ માટે $(4, -1, 2) = (2, 3, -1) + k(-3, 2, -6)$

∴ $(2, -4, 3) = k(-3, 2, -6)$, $k \in R$

∴ $2 = -3k$, $-4 = 2k$, $3 = -6k$

કોઈપણ $k \in R$ માટે આ શક્ય નથી, કારણ કે પ્રથમ સમીકરણ પરથી $k = -\frac{2}{3}$ મળે જે બાકીનાં બે સમીકરણનું સમાધાન કરશે નહીં.

∴ $A(\overline{a}) \notin M$

વળી, $\overline{l} = -\overline{m}$

∴ $\overline{l} \times \overline{m} = -\overline{m} \times \overline{m} = \overline{0}$

$\overline{l} \times \overline{m} = \overline{0}$ અને $A(\overline{a}) \notin M$

∴ આપેલ રેખાઓ સમાંતર રેખાઓ છે.

$\overline{a} - \overline{b} = (2, -4, 3)$ અને

$\overline{l} = (3, -2, 6)$

∴ $(\overline{a} - \overline{b}) \times \overline{l} = (-18, -3, 8)$, $|\overline{l}| = \sqrt{9+4+36} = 7$

∴ L તથા M વચ્ચેનું અંતર $= \frac{|(\overline{a} - \overline{b}) \times \overline{l}|}{|\overline{l}|}$

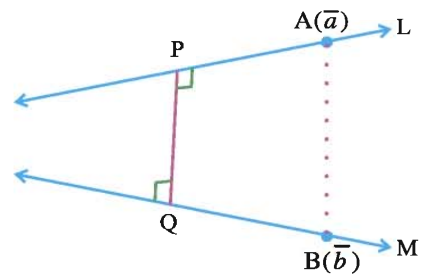
$$= \frac{\sqrt{324+9+64}}{7} = \frac{\sqrt{397}}{7}$$

બે વિષમતલીય રેખાઓ વચ્ચેનું લંબઅંતર :

ધારો કે L : $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in$ R અને M : $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{m}$, $k \in$ R એ R^3 ની વિષમતલીય રેખાઓ છે.

L અને M વિષમતલીય હોવાથી $(\overline{a} - \overline{b}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) \neq 0$ (પ્રમેય 7.3)

આપણે સ્વીકારી લઈએ છીએ કે, L તથા M વિષમતલીય હોય, તો એક બિંદુ $P \in L$ અને બીજું બિંદુ $Q \in M$ મળે જેથી $\overleftrightarrow{PQ} \perp L$ તથા $\overleftrightarrow{PQ} \perp M$.



આકૃતિ 7.7

$\therefore \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \overline{l} = 0$ અને $\overrightarrow{PQ} \cdot \overline{m} = 0$

$\therefore \quad \overrightarrow{PQ}$ ની દિશા $\overline{l} \times \overline{m}$ ની દિશા થશે.

હવે, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$ નો $\overrightarrow{PQ}$ પરનો પ્રક્ષેપ.

$$\therefore \quad \overrightarrow{PQ} = \left[\frac{|(\overline{b} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m})|}{|\overline{l} \times \overline{m}|}\right]\left[\frac{\overline{l} \times \overline{m}}{|\overline{l} \times \overline{m}|}\right]$$

$$\therefore \quad PQ = \frac{|(\overline{b} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m})|}{|\overline{l} \times \overline{m}|}$$

$$PQ = \frac{|\overline{b} - \overline{a}||\overline{l} \times \overline{m}|\,cos\,\alpha}{|\overline{l} \times \overline{m}|}$$ જ્યાં, $\alpha = ((\overline{b} - \overline{a}),\widehat{\ }(\overline{l} \times \overline{m}))$

$= |\overline{b} - \overline{a}|\,|cos\alpha|$

$\therefore \quad PQ \leq |\overline{b} - \overline{a}|$ $(|cos\alpha| \leq 1)$

$\therefore$ અંતર PQ એ L તથા M પરના કોઈપણ બે બિંદુની જોડ વચ્ચેના અંતર કરતાં ઓછું અથવા તેને સમાન છે.

$\therefore$ PQ ને L તથા M વચ્ચેનું ન્યૂનતમ અંતર કહે છે.

આમ, L અને M વચ્ચેનું લંબઅંતર અથવા ન્યૂનતમ અંતર $PQ = \dfrac{|(\overline{b} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m})|}{|\overline{l} \times \overline{m}|}$.

$\overleftrightarrow{PQ}$ તથા L છેદતી રેખા છે. આથી તેમને સમાવતું સમતલ π છે. આ સમતલમાં $\square$ PANQ લંબચોરસ છે.

AN = PQ

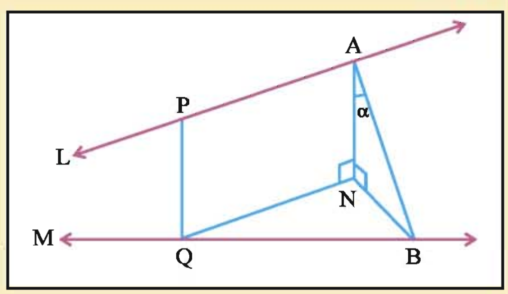
$\overleftrightarrow{AN}$ તથા $\overleftrightarrow{PQ}$ સમાંતર છે.

$\overleftrightarrow{PQ}$ તથા $\overleftrightarrow{AB}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય તો $\overleftrightarrow{AB}$ તથા $\overleftrightarrow{AN}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય.

હવે $\overleftrightarrow{AN}$ તથા $\overleftrightarrow{AB}$ ને સમાવતા સમતલમાં

AN = AB $cos\ \alpha$ કારણ કે Δ ANB માં

$m\angle ANB = \frac{\pi}{2}$



(∵ $\overline{AN} \perp \overline{QN}$ તથા $\overline{AN} \perp \overline{QB}$ હોવાથી $\overline{AN}$ એ $\overline{QN}$ તથા $\overline{QB}$ ને સમાવતા સમતલને લંબ છે.)

∴ $PQ = AN = |AB \cos \alpha|$

$$= \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot (\overline{l} \times \overline{m})|}{|\overline{l} \times \overline{m}|} = \frac{|(\overline{b} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m})|}{|\overline{l} \times \overline{m}|}$$

ઉદાહરણ 12 : રેખાઓ $\overline{r} = (1, 1, 0) + k(2, -1, 1), k \in R$ અને $\overline{r} = (2, 1, -1) + k(3, -5, 2), k \in R$ વચ્ચેનું ટૂંકામાં ટૂંકું અંતર શોધો.

ઉકેલ : અહીં $\overline{a} = (1, 1, 0)$; $\overline{l} = (2, -1, 1)$ અને $\overline{b} = (2, 1, -1)$; $\overline{m} = (3, -5, 2)$

$$\overline{b} - \overline{a} = (1, 0, -1)$$

$$(\overline{b} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(3) - 1(-7) = 10 \neq 0$$

∴ આપેલ રેખાઓ વિષમતલીય છે.

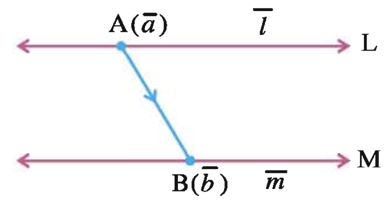
હવે, $\overline{l} = (2, -1, 1)$ અને $\overline{m} = (3, -5, 2)$

∴ $\overline{l} \times \overline{m} = (3, -1, -7)$

∴ $|\overline{l} \times \overline{m}| = \sqrt{9+1+49} = \sqrt{59}$, $(\overline{b} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = 3 + 0 + 7 = 10$

∴ તેમની વચ્ચેનું ટૂંકામાં ટૂંકું અંતર $= \frac{|(\overline{b} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m})|}{|\overline{l} \times \overline{m}|} = \frac{10}{\sqrt{59}}$

7.9 R^3 ની રેખાઓ વચ્ચેના પરસ્પર સંબંધ



આકૃતિ 7.8

ધારો કે, $L : \overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in R$ અને

$M : \overline{r} = \overline{b} + k\overline{m}$, $k \in R$ બે રેખાઓ છે.

જો $\overline{l} \times \overline{m} = \overline{0}$, તો $L \parallel M$ અથવા L અને M સંપાતી છે.

ધારો કે $\overrightarrow{AB}$ અને $\overline{l}$ અસમરેખ સદિશો છે.

∴ $\overrightarrow{AB} \times \overline{l} = (\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l} \neq \overline{0}$

આથી ઉલટું, જો $\overrightarrow{AB} \times \overline{l} = (\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l} \neq \overline{0}$, તો $\overrightarrow{AB}$ અને $\overline{l}$ અસમરેખ છે.

∴ $L \parallel M$ કારણ કે L અને M ની દિશા સમાન છે.

આમ જો $(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l} \neq 0$ તથા $\overline{l} \times \overline{m} = \overline{0}$ તો $L \parallel M$

પરંતુ જો $(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l} = \overline{0}$, તો L અને M સમાંતર નથી. તેથી L અને M સંપાતી છે.

તેથી જો $\overline{l} \times \overline{m} = \overline{0}$, $(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l} = \overline{0}$, તો L અને M સંપાતી રેખાઓ છે.

જો $\overline{l} \times \overline{m} = \overline{0}$, $(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l} \neq \overline{0}$, તો L અને M સમાંતર રેખાઓ છે.

R^3 ની આપેલી બે રેખાઓ વચ્ચે કયા પ્રકારના સંબંધ છે ? તેઓ સમાંતર છે અથવા છેદક રેખાઓ છે અથવા સંપાતી છે અથવા વિષમતલીય છે. આપણે આ પ્રકરણમાં અત્યાર સુધી ચર્ચેલ મુદ્દાઓ પર આધારિત પૃષ્ઠ 240 પર દર્શાવેલ કોષ્ટક પરથી આ બાબત નક્કી કરી શકીશું.

$L : \overline{r} = \overline{a} + k\overline{l},\ k \in R$

$M : \overline{r} = \overline{b} + k\overline{m},\ k \in R$

$\overline{l} \times \overline{m}$ શોધો.

$\overline{l} \times \overline{m} = \overline{0}$

- $(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l} \neq \overline{0}$ L અને M સમાંતર રેખાઓ છે.
- $(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l} = \overline{0}$ L અને M સંપાતી રેખાઓ છે.

$\overline{l} \times \overline{m} \neq \overline{0}$

- $(\overline{b} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) \neq 0$ L અને M વિષમતલીય રેખાઓ છે.
- $(\overline{b} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = 0$ L અને M છેદક રેખાઓ છે.

ઉદાહરણ 13 : નીચે આપેલી રેખાઓ વચ્ચેના સંબંધ (એટલે કે વિષમતલીય, સમાંતર, સંપાતી અને છેદક) નક્કી કરો.

(1) $\overline{r} = (2, -5, 1) + k(3, 2, 6),\ k \in R$ અને $\frac{x-7}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+6}{2}$

(2) $\frac{2x-4}{1} = \frac{3-y}{3} = \frac{z}{1}$ અને $\overline{r} = (1, 1, -1) + k(1, -6, 2),\ k \in R$

(3) $\overline{r} = (1, -2, -3) + k(-1, 1, -2),\ k \in R$ અને $\overline{r} = (4, -2, -1) + k(1, 2, -2),\ k \in R$

(4) $\overline{r} = (3 + t)\hat{i} + (1 - t)\hat{j} + (-2 - 2t)\hat{k},\ t \in R$ અને $x = 4 + k,\ y = -k,\ z = -4 - 2k,\ k \in R$

ઉકેલ : (1) $\overline{a} = (2, -5, 1),\ \overline{l} = (3, 2, 6)$ અને

$\overline{b} = (7, 0, -6);\ \overline{m} = (1, 2, 2)$

$\overline{b} - \overline{a} = (5, 5, -7)$

$\overline{l} \times \overline{m} = (-8, 0, 4) \neq \overline{0}$ અને $(\overline{b} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = (5, 5, -7) \cdot (-8, 0, 4)$

$= -40 - 28 = -68 \neq 0$

$\therefore$ આપેલ રેખાઓ વિષમતલીય રેખાઓ છે.

(2) પ્રથમ રેખાનું સમીકરણ $\frac{x-2}{\frac{1}{2}} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{1}$ છે.

$\therefore$ $\overline{a} = (2, 3, 0);\ \overline{l} = (\frac{1}{2}, -3, 1)$ એટલે કે l ની દિશા $(1, -6, 2)$ ની દિશા છે.

$\overline{b} = (1, 1, -1);\quad \overline{m} = (1, -6, 2)$

$(\overline{b} - \overline{a}) = (-1, -2, -1)$

હવે, $\overline{l} \times \overline{m} = (0, 0, 0) = \overline{0}$ અને $(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{m} = (-1, -2, -1) \times (1, -6, 2) = (-10, 1, 8) \neq \overline{0}$

$\therefore$ આપેલ રેખાઓ સમાંતર છે.

(3) $\overline{a} = (1, -2, -3);\ \overline{l} = (-1, 1, -2)$

$\overline{b} = (4, -2, -1);\ \overline{m} = (1, 2, -2)$

$(\overline{b} - \overline{a}) = (3, 0, 2)$

હવે, $\overline{l} \times \overline{m} = (2, -4, -3) \neq \overline{0}$ અને $(\overline{b} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = (3, 0, 2) \cdot (2, -4, -3)$

$= 6 + 0 - 6 = 0$

$\therefore$ આપેલ રેખાઓ એ છેદક રેખાઓ છે.

(4) $\overline{a} = (3, 1, -2);\ \overline{l} = (1, -1, -2)$ અને

$\overline{b} = (4, 0, -4);\ \overline{m} = (1, -1, -2)$

$(\overline{b} - \overline{a}) = (1, -1, -2)$

હવે, $\overline{l} \times \overline{m} = (0, 0, 0) = \overline{0}$ અને $(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l} = (1, -1, -2) \times (1, -1, -2) = \overline{0}$

$\therefore$ આપેલ રેખાઓ સંપાતી રેખાઓ છે.

સ્વાધ્યાય 7.1

1. (2, -1, 3) માંથી પસાર થતી અને $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ દિશાવાળી રેખાનું સદિશ તેમજ કાર્તેઝીય સમીકરણ મેળવો.
2. (2, 3, -9) અને (4, 3, -5) માંથી પસાર થતી રેખાનું સંમિત સ્વરૂપે અને સદિશ સ્વરૂપે સમીકરણ મેળવો.
3. (0, 1, 1), (0, 4, 4) અને (2, 0, 1) સમરેખ છે ? શા માટે ?
4. રેખા $x = 4z + 3$, $y = 2 - 3z$ની દિક્‌કોસાઇન શોધો.
5. (1, -2, 1) માંથી પસાર થતી અને રેખાઓ $x + 3 = 2y = -12z$ તથા $\frac{x}{2} = \frac{y+6}{2} = \frac{3z-9}{1}$ બંનેને લંબરેખાનું સદિશ તેમજ કાર્તેઝીય સમીકરણ મેળવો.
6. સાબિત કરો કે રેખાઓ L : $\frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-1}$, $z + 1 = 0$ અને M : $\{(4 + 2k, 0, -1 + 3k) \mid k \in R\}$ એકબીજીને છેદે છે. તેમનું છેદબિંદુ પણ શોધો.
7. રેખાઓ $\overline{r} = (1, 2, 1) + k(2, 3, -1)$, $k \in R$ અને $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{3}$, $z = 3$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.
8. સાબિત કરો કે (2, 1, -1) અને (-2, 3, 4)થી પસાર થતી રેખા એ (9, 7, 8) અને (11, 6, 10) માંથી પસાર થતી રેખાને લંબ છે.
9. નીચેની રેખાઓ સમાંતર, છેદક, વિષમતલીય કે સંપાતી છે તે નક્કી કરો :

   (1) $\overline{r} = (1, 2, -3) + k(3, -2, 1)$, $k \in R$ અને $\frac{x-1}{2} = \frac{3-y}{2} = \frac{z-5}{-1}$.

   (2) $\frac{x-5}{-2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{4}$ અને $\frac{x-2}{1} = \frac{3-y}{-1} = \frac{z+2}{-2}$.

   (3) $x = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{3}$ અને $\{(2, 1 + 3k, 2 + k) \mid k \in R\}$.

   (4) $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-1}{2}$ અને $x = 1 + 2t$, $y = t$, $z = 4 + 5t$, $t \in R$.

   (5) $\frac{x-4}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{3}$ અને $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-2}{-6}$.
10. સાબિત કરો કે રેખાઓ $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{5}$ અને $\frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-2}$ વિષમતલીય છે. તેમના વચ્ચેનું લઘુત્તમ અંતર શોધો.
11. બિંદુ (-5, 3, 4) નું રેખા $\frac{x+2}{-4} = \frac{y-6}{5} = \frac{z-5}{3}$ થી લંબઅંતર શોધો.
12. રેખાઓ $x = 3 - 2k$, $y = k$, $z = 3 - k$, $k \in R$ અને $x = 2k - 3$, $y = 2 - k$, $z = 7 + k$, $k \in R$ વચ્ચેનું લંબઅંતર શોધો.

*

7.10 સમતલ

આપણે આગળના ધોરણોમાં સમતલ વિશેની જે પૂર્વધારણાઓનો અભ્યાસ કરેલો તેમને યાદ કરી લઈએ.

(1) ત્રણ ભિન્ન અસમરેખ બિંદુઓ અનન્ય સમતલ નિશ્ચિત કરે છે.

(2) બે સમાંતર રેખાઓ એક અનન્ય સમતલ નિશ્ચિત કરે છે.

(3) અનન્ય બિંદુમાં છેદતી બે રેખાઓ એક અનન્ય સમતલ નિશ્ચિત કરે છે.

ત્રણ ભિન્ન અસમરેખ બિંદુમાંથી પસાર થતું સમતલ :

ધારોકે $A(\overline{a})$, $B(\overline{b})$, $C(\overline{c})$ એ R^3 નાં ત્રણ ભિન્ન અસમરેખ બિંદુઓ છે.

$\therefore$ A, B, C બિંદુઓ એક અનન્ય સમતલ π નિશ્ચિત કરે છે.

ધારો કે $P(\overline{r})$ સમતલ π પરનું A સિવાયનું કોઈપણ બિંદુ છે.

$\therefore \quad \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ સમતલીય છે.

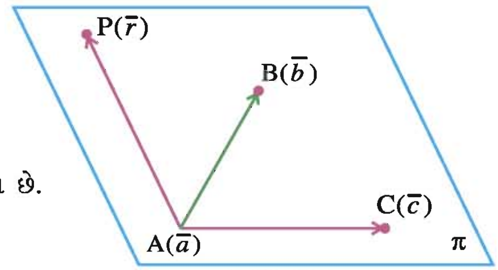
$\therefore \quad \overrightarrow{AP}$ એ $\overrightarrow{AB}$ અને $\overrightarrow{AC}$ નું સુરેખ સંયોજન છે.

$\therefore \quad \overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$, જ્યાં $m, n \in R$ તથા $m^2 + n^2 \neq 0$.

$\therefore \quad \overline{r} - \overline{a} = m(\overline{b} - \overline{a}) + n(\overline{c} - \overline{a})$

જો $\overline{r} = \overline{a}$, તો $A(\overline{a}) \in \pi$ તથા $m = n = 0$

$\therefore \quad \overline{r} = \overline{a} + m(\overline{b} - \overline{a}) + n(\overline{c} - \overline{a}), m, n \in R$ **(i)**



આકૃતિ 7.9

આથી ઊલટું, જો $P(\overline{r})$ એ

$\overline{r} - \overline{a} = m(\overline{b} - \overline{a}) + n(\overline{c} - \overline{a})$,

$m, n \in R, m^2 + n^2 \neq 0$ નું

સમાધાન કરે, તો $\overrightarrow{AP} = m(\overrightarrow{AB}) + n(\overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{AB}$ અને $\overrightarrow{AC}$ જે સમતલમાં છે, તે સમતલમાં $\overrightarrow{AP}$ આવેલો છે.

A એ સમતલ π માં છે. તેથી $P \in \pi$.

જો $m = n = 0$, તો $\overline{r} = \overline{a}$ એટલે કે $P = A \in \pi$.

આમ જો $P(\overline{r}) \in \pi$ તો અને તો જ $\overline{r}$ એ સમીકરણ (i)નું સમાધાન કરે.

$A(\overline{a})$, $B(\overline{b})$ અને $C(\overline{c})$ થી નિશ્ચિત થતા સમતલ π નું સમીકરણ

$\overline{r} = \overline{a} + m(\overline{b} - \overline{a}) + n(\overline{c} - \overline{a}) \quad m, n \in R$ છે.

વળી, જો $P(\overline{r}) \in \pi$ તો $\overline{r} = (1 - m - n)\overline{a} + m\overline{b} + n\overline{c}$.

$1 - m - n = l$ એટલે કે $l + m + n = 1$ લેતાં,

$\therefore \quad \overline{r} = l\overline{a} + m\overline{b} + n\overline{c}$, જ્યાં $l, m, n \in R$ અને $l + m + n = 1$.

એ ભિન્ન અસમરેખ બિંદુઓ $A(\overline{a})$, $B(\overline{b})$ અને $C(\overline{c})$ માંથી પસાર થતા સમતલનું સદિશ સમીકરણ છે.

સમતલનાં પ્રચલ સમીકરણો :

ધારો કે $P(x, y, z)$ ભિન્ન અસમરેખ બિંદુઓ $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ અને $C(x_3, y_3, z_3)$ માંથી પસાર થતા સમતલનું કોઈપણ બિંદુ છે.

$\therefore \quad \overline{r} = l\overline{a} + m\overline{b} + n\overline{c} \qquad$ **$l, m, n \in R$ અને $l + m + n = 1$.**

$\therefore \quad (x, y, z) = l(x_1, y_1, z_1) + m(x_2, y_2, z_2) + n(x_3, y_3, z_3)$

$\therefore \quad x = lx_1 + mx_2 + nx_3$

$y = ly_1 + my_2 + ny_3$

$z = lz_1 + mz_2 + nz_3$ જ્યાં $l, m, n \in R$ તથા $l + m + n = 1$

આ બિંદુઓ A, B, C માંથી પસાર થતા સમતલનાં પ્રચલ સમીકરણો છે. અહીં l, m, n પ્રચલ છે.

સમતલના સમીકરણનાં અન્ય સ્વરૂપ :

ભિન્ન અસમરેખ બિંદુઓ $A(\overline{a})$, $B(\overline{b})$ અને $C(\overline{c})$ એક સમતલ π નક્કી કરે છે.

$P(\overline{r}) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ સમતલીય છે. **($P \neq A$)**

$\Leftrightarrow (\overline{r} - \overline{a}), (\overline{b} - \overline{a}), (\overline{c} - \overline{a})$ સમતલીય છે. **($P \neq A$)**

$\Leftrightarrow (\overline{r} - \overline{a}) \cdot [(\overline{b} - \overline{a}) \times (\overline{c} - \overline{a})] = 0$ **(ii)**

વળી, જો $\overline{r} = \overline{a}$, તો $\overline{r} - \overline{a} = \overline{0}$.

$\therefore \quad P(\overline{r}) \in \pi \Leftrightarrow (\overline{r} - \overline{a}) \cdot [(\overline{b} - \overline{a}) \times (\overline{c} - \overline{a})] = 0$

આમ, અસમરેખ બિંદુઓ A, B, C માંથી પસાર થતા સમતલનું સદિશ સમીકરણ

$(\overline{r} - \overline{a}) \cdot [(\overline{b} - \overline{a}) \times (\overline{c} - \overline{a})] = 0$ છે.

કાર્તેઝીય સ્વરૂપ (અદિશ સ્વરૂપ) :

$\overline{r} = (x, y, z)$, $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$ અને $\overline{c} = (x_3, y_3, z_3)$ લેતાં,

$\therefore$ **સમીકરણ $(\overline{r} - \overline{a}) \cdot [(\overline{b} - \overline{a}) \times (\overline{c} - \overline{a})] = 0$ નું સ્વરૂપ**

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

આ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) અને (x_3, y_3, z_3) માંથી પસાર થતા સમતલનું **કાર્તેઝીય અથવા અદિશ સ્વરૂપમાં (Scalar Form)** સમીકરણ છે.

R^3 ના ચાર બિંદુઓ સમતલીય હોવાની શરત :

ધારો કે $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ અને $D(x_4, y_4, z_4)$ એ R^3 નાં બિંદુઓ છે.

A, B, C, D સમતલીય છે $\Leftrightarrow$ D એ A, B, C માંથી પસાર થતા સમતલ પર છે.

$\Leftrightarrow$ $D(x_4, y_4, z_4)$ એ સમીકરણ $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$ નું સમાધાન કરે છે.

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

આમ, $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$ સમતલીય હોય તો અને તો જ

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

ઉદાહરણ 14 : શક્ય હોય, તો $A(-6, 0, 7)$, $B(1, 2, 2)$ અને $C(3, -5, -4)$માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : સૌપ્રથમ A, B, C સમરેખ છે કે કેમ, તે ચકાસીએ.

$$\begin{vmatrix} -6 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -5 & -4 \end{vmatrix} = -6(2) + 7(-11) = -89 \neq 0$$

$\therefore$ A, B, C અસમરેખ છે.

$\therefore$ જેના સભ્ય A, B, C હોય તેવું અનન્ય સમતલ મળે.

હવે A, B, C માંથી પસાર થતા સમતલનું કાર્તેઝીય સમીકરણ

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} x+6 & y-0 & z-7 \\ 1+6 & 2-0 & 2-7 \\ 3+6 & -5-0 & -4-7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} x+6 & y & z-7 \\ 7 & 2 & -5 \\ 9 & -5 & -11 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore \quad (x + 6)(-47) - y(-32) + (z - 7)(-53) = 0$

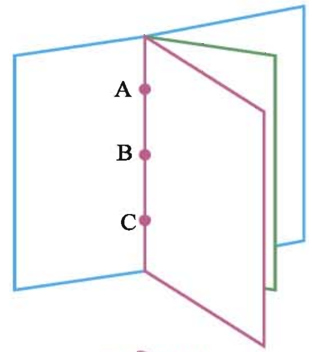
$\therefore \quad -47x - 282 + 32y - 53z + 371 = 0$

$\therefore \quad -47x + 32y - 53z + 89 = 0$

$\therefore \quad 47x - 32y + 53z - 89 = 0$ એ A, B, C માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 15 : A(4, –2, –1), B(5, 0, –3) અને C(3, –4, 1) અનન્ય સમતલ પસાર થાય છે ? જો થાય, તો તેનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : ચાલો, આપણે પ્રથમ બિંદુઓની સમરેખતા ચકાસીએ.



આકૃતિ 7.10

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 5 & 0 & -3 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 4(-12) + 2(14) - 1(-20)$$

$$= -48 + 28 + 20 = 0$$

પરંતુ આ શરત સમરેખતા માટે પર્યાપ્ત નથી. તેથી આપણે

$(\bar{c} - \bar{a}) \times (\bar{b} - \bar{a}) = \bar{0}$ શરત ચકાસીએ.

$\therefore \quad \bar{c} - \bar{a} = (-1, -2, 2)$

$\bar{b} - \bar{a} = (1, 2, -2) = -(\bar{c} - \bar{a})$

$\therefore \quad (\bar{c} - \bar{a}) \times (\bar{b} - \bar{a}) = \bar{0}$

$\therefore$ A, B, C સમરેખ છે.

$\therefore$ A, B, C માંથી પસાર થતું અનન્ય સમતલ ન મળે.

ઉદાહરણ 16 : સાબિત કરો કે બિંદુઓ A(1, 0, 2), B(–1, 2, 0), C(2, 3, 11) અને D(1, –3, –4) સમતલીય છે.

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} = -2(9) - 2(-6) - 2(-3)$

$$= -18 + 12 + 6 = 0$$

$\therefore$ A, B, C, D સમતલીય બિંદુઓ છે.

7.11 સમતલના અંતઃખંડ

જો સમતલ π યામાક્ષોને બિંદુઓ $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ અને $C(0, 0, c)$ માં છેદે, તો a, b, c ને અનુક્રમે સમતલ π ના X-અંતઃખંડ, Y-અંતઃખંડ અને Z-અંતઃખંડ કહે છે.

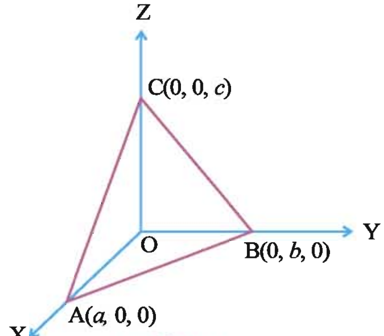
જો સમતલ π એ X-અક્ષને છેદે નહીં તો સમતલ π નો X-અંતઃખંડ વ્યાખ્યાયિત નથી. તે જ પ્રમાણે Y-અક્ષ અને Z-અક્ષ સાથે સમતલના છેદ માટે પણ કહી શકાય.

અક્ષો પર અંતઃખંડ a, b, c બનાવતા સમતલનું સમીકરણ :

ધારો કે સમતલ π, X-અક્ષ સાથે a, Y-અક્ષ સાથે b અને Z-અક્ષ સાથે c અંતઃખંડ બનાવે છે. (જ્યાં $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$).

$\therefore$ $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ અને $C(0, 0, c)$ એ સમતલ π નાં બિંદુઓ છે.

સહજ રીતે કહી શકાય કે, A, B, C અસમરેખ છે. **(શા માટે ?)**



આકૃતિ 7.11

$\therefore$ A, B, C માંથી પસાર થતા સમતલ π નાં પ્રચલ સમીકરણો

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} x &= lx_1 + mx_2 + nx_3 = la \\ y &= ly_1 + my_2 + ny_3 = mb \\ z &= lz_1 + mz_2 + nz_3 = nc \end{aligned}\right\} \quad \text{જ્યાં } l, m, n \in R, l + m + n = 1$$

$\therefore \quad l = \frac{x}{a}, m = \frac{y}{b}, n = \frac{z}{c}$

હવે, $l + m + n = 1$.

$\therefore \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ એ a, b અને c અંતઃખંડોવાળા સમતલનું સમીકરણ છે. **$(abc \neq 0)$**

બીજી રીત :

$A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ માંથી પસાર થતા સમતલના કાર્તેઝીય સમીકરણનો ઉપયોગ કરતાં,

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix} = 0$$ એ A, B, C માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ છે.

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore \quad (x - a)bc - y(-ac) + z(ab) = 0$

$\therefore \quad bcx - abc + acy + abz = 0$

$\therefore \quad bcx + acy + abz = abc$

$\therefore \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ એ a, b, c અંતઃખંડોવાળા સમતલનું સમીકરણ છે. **$(abc \neq 0)$**

ઉદાહરણ 17 : X-અંતઃખંડ 4, Y-અંતઃખંડ -6 અને Z-અંતઃખંડ 3 બનાવતા સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 4$, $b = -6$, $c = 3$ આપેલાં છે.

સમતલનું સમીકરણ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ છે.

$\therefore \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{-6} + \frac{z}{3} = 1$

$\therefore \quad 3x - 2y + 4z = 12$ એ જેનો X-અંતઃખંડ 4, Y-અંતઃખંડ -6 અને Z-અંતઃખંડ 3 હોય તેવા સમતલનું સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 18 : સમતલ $2x - 3y + 5z = 15$ ના યામાક્ષો પરના અંતઃખંડ શોધો.

ઉકેલ : સમતલનું સમીકરણ $2x - 3y + 5z = 15$

$\therefore \quad \frac{x}{\frac{15}{2}} + \frac{y}{-5} + \frac{z}{3} = 1$ **(બંને બાજુએ 15 વડે ભાગતાં)**

$\therefore \quad$ આ સમીકરણને $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, સાથે સરખાવતાં X-અંતઃખંડ $= \frac{15}{2}$, Y-અંતઃખંડ $= -5$, Z-અંતઃખંડ $= 3$.

ઉદાહરણ 19 : સમતલ $3y + 2z = 12$ ના અક્ષો પરના અંતઃખંડ શોધો.

ઉકેલ : સમતલના સમીકરણ $3y + 2z = 12$ ની બંને બાજુને 12 વડે ભાગતાં,

$\frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 1$ મળે.

હવે $\frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 1$ ને $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ સાથે સરખાવતાં,

X-અંતઃખંડ અવ્યાખ્યાયિત છે, Y-અંતઃખંડ $= 4$ અને Z-અંતઃખંડ $= 6$ છે.

બીજી રીત :

સમતલનું સમીકરણ $3y + 2z = 12$ છે.

તે X-અક્ષને જે બિંદુએ છેદે તે શોધવા માટે $y = 0 = z$.

$\therefore$ પરંતુ $0 + 0 = 12$ સત્ય નથી.

$\therefore$ $3y + 2z = 12$ એ X-અક્ષને છેદશે નહીં.

$\therefore$ X-અંતઃખંડ મળશે નહીં.

Y-અંતઃખંડ શોધવા માટે $x = 0 = z$ લેતાં,

$\therefore$ $3y = 12$

$\therefore$ $y = 4$

$\therefore$ Y-અંતઃખંડ 4 છે.

Z-અંતઃખંડ શોધવા માટે $x = y = 0$ લેતાં,

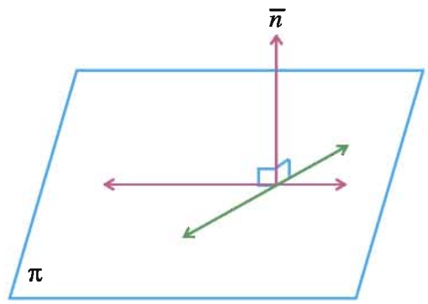
$\therefore$ $2z = 12$

$\therefore$ $z = 6$

$\therefore$ Z-અંતઃખંડ 6 છે.

7.12 સમતલનો અભિલંબ

સમતલ π માં આવેલી પ્રત્યેક રેખાને લંબ હોય તેવી રેખાની દિશામાં આવેલા સદિશને સમતલનો અભિલંબ કહે છે. મહદંશે આપણે સમતલના અભિલંબને $\overline{n}$ વડે અથવા $\overline{n}_1, \overline{n}_2, \overline{n}_3, \ldots$ વડે દર્શાવીશું.



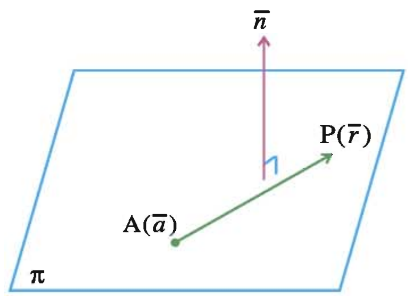
આકૃતિ 7.12

$A(\overline{a})$ માંથી પસાર થતા અને $\overline{n}$ અભિલંબવાળા સમતલનું સદિશ સમીકરણ :

ધારો કે સમતલ π એ $A(\overline{a})$માંથી પસાર થાય છે અને તેનો અભિલંબ $\overline{n}$ છે.

ધારો કે $P(\overline{r})$ એ સમતલનું કોઈપણ બિંદુ છે.

$$\therefore \quad P(\overline{r}) \in \pi, P \neq A \Rightarrow \overrightarrow{AP} \in \pi$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AP} \perp \overline{n}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AP} \cdot \overline{n} = 0$$
$$\Rightarrow (\overline{r} - \overline{a}) \cdot \overline{n} = 0$$



આકૃતિ 7.13

જો $P = A$, તો $\overline{r} = \overline{a}$ અને તેથી $(\overline{r} - \overline{a}) \cdot \overline{n} = 0$

$\therefore$ $\forall P(\overline{r}) \in \pi, (\overline{r} - \overline{a}) \cdot \overline{n} = 0$

આથી ઉલટું, જો $P(\overline{r})$ એ અવકાશનું એવું બિંદુ હોય કે જેથી $(\overline{r} - \overline{a}) \cdot \overline{n} = 0$, તો $\overrightarrow{AP} \perp \overline{n}$.

$A \in \pi$ હોવાથી $P \in \pi$.

આમ, $P(\overline{r}) \in \pi \Leftrightarrow (\overline{r} - \overline{a}) \cdot \overline{n} = 0$

$$\Leftrightarrow \overline{r} \cdot \overline{n} = \overline{a} \cdot \overline{n}$$

$\therefore$ **$A(\overline{a})$માંથી પસાર થતા અને $\overline{n}$ અભિલંબવાળા સમતલનું સદિશ સમીકરણ $\overline{r} \cdot \overline{n} = \overline{a} \cdot \overline{n}$ છે.**

$\overline{a} \cdot \overline{n} = d$ લેતાં,

$\therefore$ **સમીકરણ $\overline{r} \cdot \overline{n} = \overline{a} \cdot \overline{n}$ એ $\overline{r} \cdot \overline{n} = d$ માં પરિવર્તિત થશે.**

કાર્તેઝીય સ્વરૂપ :

$\overline{r} = (x, y, z)$, $\overline{n} = (a, b, c)$ અને $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$ લેતાં,

$\therefore$ $\overline{r} \cdot \overline{n} = d$ એ $(x, y, z) \cdot (a, b, c) = d$ બનશે જ્યાં $d = \overline{a} \cdot \overline{n} = ax_1 + by_1 + cz_1$.

$\therefore$ જેનો અભિલંબ $\overline{n} = (a, b, c)$ હોય તેવા સમતલનું કાર્તેઝીય સમીકરણ $ax + by + cz = d$ છે.

$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, કારણ કે $\overline{n} \neq \overline{0}$.

નોંધ : સમતલના સમીકરણમાં x, y, z ના સહગુણકોથી બનતો ક્રમિક ત્રય એ સમતલનો અભિલંબ $\overline{n}$ દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ 20 : $(4, 5, -1)$માંથી પસાર થતા અને $3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ અભિલંબવાળા સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં $\overline{a} = (4, 5, -1)$, $\overline{n} = (3, -1, 1)$

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $\overline{r} \cdot \overline{n} = \overline{a} \cdot \overline{n}$ પ્રમાણે $(x, y, z) \cdot (3, -1, 1) = (4, 5, -1) \cdot (3, -1, 1)$

$\therefore$ $3x - y + z = 12 - 5 - 1 = 6$

$\therefore$ $3x - y + z = 6$ એ $(4, 5, -1)$માંથી પસાર થતા અને $3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ અભિલંબવાળા સમતલનું સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 21 : સમતલ $2x - z + 1 = 0$ નો અભિલંબ તથા સમતલનું સદિશ સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : સમતલનું કાર્તેઝીય સમીકરણ $2x - z + 1 = 0$ છે.

$\therefore$ અભિલંબ $\overline{n} = (2, 0, -1)$ (નોંધ જુઓ)

$\therefore$ સમતલનું સદિશ સમીકરણ $\overline{r} \cdot \overline{n} = d$ એટલે $2x - z + 1 = (2, 0, -1) \cdot (x, y, z) + 1 = 0$

$\therefore$ સમતલનું સદિશ સમીકરણ $\overline{r} \cdot (2, 0, -1) + 1 = 0$

7.13 ઊગમબિંદુમાંથી સમતલ પરના લંબના ઉપયોગથી સમતલનું સમીકરણ

ધારો કે ઊગમબિંદુમાંથી સમતલ π પરનો લંબપાદ $N(\overline{n})$ છે.

ધારો કે $ON = p$

$\therefore$ $|\overline{n}| = p$.

ધારો કે $\overline{n}$ ના દિક્ખૂણાઓ α, β, γ છે.

$\therefore$ $\overline{n}$ ની દિક્કોસાઈન $cos\alpha$, $cos\beta$, $cos\gamma$ છે.

$\therefore$ $\overline{n}$ ની દિશાનો એકમ સદિશ

$$\hat{n} = \frac{\overline{n}}{|\overline{n}|} = \frac{\overline{n}}{p} = (cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$$

$\therefore$ $\overline{n} = (pcos\alpha, pcos\beta, pcos\gamma)$

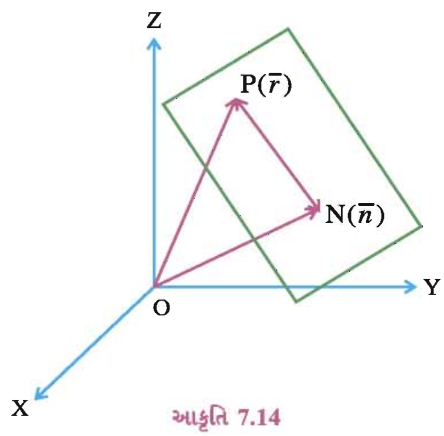
ધારો કે $P(\overline{r})$ એ સમતલ π નું કોઈપણ બિંદુ છે.

વળી સમતલ $N(\overline{n})$માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore$ $\overline{a} = \overline{n} = (pcos\alpha, pcos\beta, pcos\gamma)$

સમતલનું સમીકરણ $\overline{r} \cdot \overline{n} = \overline{a} \cdot \overline{n}$ એ

$(x, y, z) \cdot (pcos\alpha, pcos\beta, pcos\gamma) = p^2$ (અહીં $\overline{a} \cdot \overline{n} = \overline{n} \cdot \overline{n} = |\overline{n}|^2 = p^2$)



આકૃતિ 7.14

$\therefore$ જેના અભિલંબના દિક્ખૂણા α, β, γ હોય તથા અભિલંબની લંબાઈ p હોય તેવા સમતલનું સમીકરણ $xcos\alpha + ycos\beta + zcos\gamma = p$ છે.

નોંધ : જો સમતલનું સમીકરણ $ax + by + cz = d$ સ્વરૂપમાં હોય અને આ સમીકરણને $xcos\alpha + ycos\beta + zcos\gamma = p$, સ્વરૂપમાં ફેરવવું હોય, તો આપણે સમીકરણને $|\overline{n}|$ વડે ભાગીશું, જેથી સમીકરણ $\frac{a}{|\overline{n}|}x + \frac{b}{|\overline{n}|}y + \frac{c}{|\overline{n}|}z = \frac{d}{|\overline{n}|}$ થશે.

જો $d > 0$ તો $\overline{n} = (a, b, c)$ લઈએ કે જેથી $\frac{d}{|\overline{n}|} = p$ ધન થાય.

$\therefore \quad \frac{\overline{n}}{|\overline{n}|} = \left(\frac{a}{|\overline{n}|}, \frac{b}{|\overline{n}|}, \frac{c}{|\overline{n}|}\right) = \hat{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ અને $\frac{d}{|\overline{n}|} = p$

જો $d < 0$, તો $\overline{n} = (-a, -b, -c)$ લઈએ કે જેથી $\frac{-d}{|\overline{n}|} = p$ ધન થાય.

$-ax - by - cz = -d$

$\therefore \quad \frac{\overline{n}}{|\overline{n}|} = \left(\frac{-a}{|\overline{n}|}, \frac{-b}{|\overline{n}|}, \frac{-c}{|\overline{n}|}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ અને $\frac{-d}{|\overline{n}|} = p$.

ઉદાહરણ 22 : ઊગમબિંદુમાંથી સમતલ $2x - 3y + 6z + 14 = 0$ પર દોરેલ લંબની લંબાઈ તથા લંબસદિશની દિક્કોસાઇન શોધો.

ઉકેલ : સમતલ π નું સમીકરણ $2x - 3y + 6z = -14$ છે. **(i)**

આપણે સમીકરણને $\frac{a}{|\overline{n}|}x + \frac{b}{|\overline{n}|}y + \frac{c}{|\overline{n}|}z = \frac{d}{|\overline{n}|}$ સ્વરૂપમાં ફેરવીશું.

અહીં $d = -14 < 0$.

સમીકરણને $-2x + 3y - 6z = 14$ ના સ્વરૂપમાં લખી શકાય કે જેથી $-d > 0$ થાય.

$\overline{n} = (-2, 3, -6)$ લેતાં, $|\overline{n}| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$

$\therefore \quad p = \frac{-d}{|\overline{n}|} = \frac{14}{7} = 2, \ (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{-2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{-6}{7}\right)$

ઊગમબિંદુમાંથી દોરેલ લંબની લંબાઈ 2 અને લંબની દિક્કોસાઇન $\frac{-2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{-6}{7}$ થશે.

માં

રેખા તથા સમતલનો છેદગણ :

ધારો કે સમીકરણ $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in R$ રેખા દર્શાવે છે અને સમીકરણ $\overline{r} \cdot \overline{n} = d$ એ એક સમતલ દર્શાવે છે. $(\overline{n} \neq \overline{0})$

રેખા $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$ અને સમતલ $\overline{r} \cdot \overline{n} = d$ $(\overline{l} \neq \overline{0}, \overline{n} \neq \overline{0})$ ના છેદગણનો વિચાર કરીએ.

ધારો કે $\overline{l} = (l_1, l_2, l_3)$, $\overline{n} = (a, b, c)$, $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$

કોઈક $k_1 \in R$ માટે રેખા પરનું બિંદુ $\overline{r_1} = \overline{a} + k_1\overline{l}$ એ સમતલ પર પણ આવેલું હોય તો,

$(\overline{a} + k_1\overline{l}) \cdot \overline{n} = d$.

$\therefore \quad k_1(\overline{l} \cdot \overline{n}) = d - \overline{a} \cdot \overline{n}$ **(i)**

હવે,

(1) જો $\overline{l} \cdot \overline{n} = 0$ તથા $d - \overline{a} \cdot \overline{n} \neq 0$, તો (i) શક્ય નથી.

$\therefore \quad \overline{l} \cdot \overline{n} = 0$ તથા $ax_1 + by_1 + cz_1 \neq d$ તો રેખા તથા સમતલ એકબીજાને છેદશે નહિ તથા રેખા સમતલને સમાંતર છે તેમ કહીશું.

(2) જો $\overline{l} \cdot \overline{n} = 0$ તથા $d - \overline{a} \cdot \overline{n} = 0$ તો પ્રત્યેક $k_1 \in R$ માટે (i)નું સમાધાન થશે.

આ વિકલ્પમાં રેખા પરના બધાં બિંદુઓ સમતલમાં આવેલા છે.

આમ, $ax_1 + by_1 + cz_1 = d$ તથા $\overline{l} \cdot \overline{n} = 0$ તો રેખા સમતલમાં આવેલી છે.

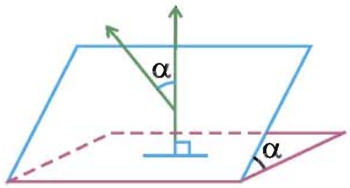
(3) જો $\overline{l} \cdot \overline{n} \neq 0$ તો આપણને k_1 ની અનન્ય કિંમત મળે. $k_1 = \frac{d - \overline{a} \cdot \overline{n}}{\overline{l} \cdot \overline{n}}$ થાય.

આ વિકલ્પમાં રેખા પરનું બરાબર એક જ બિંદુ સમતલમાં હોય. એટલે કે રેખા સમતલને બરાબર એક જ બિંદુમાં છેદે છે.

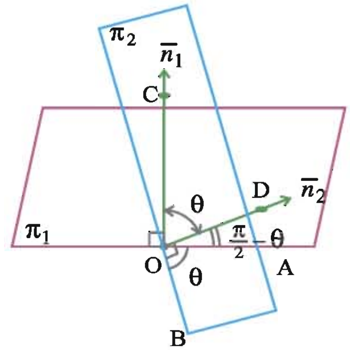
7.14 બે સમતલો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ

બે સમતલોના અભિલંબ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ એ જ બે સમતલો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ છે.

બે સદિશો વચ્ચેનો ખૂણો લઘુકોણ લઈએ છીએ તેથી બે સમતલ વચ્ચેનો ખૂણો પણ લઘુકોણ જ લઈશું.



આકૃતિ 7.15



આકૃતિ 7.16

આકૃતિ 7.16 એ બે અભિલંબ $\overline{n}_1$ અને $\overline{n}_2$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ θ દર્શાવે છે. એટલે કે $(\overline{n}_1, \widehat{\ } \overline{n}_2) = \theta = m\angle COD$

પરંતુ $m\angle COA = \frac{\pi}{2}$. તેથી $m\angle DOA = \frac{\pi}{2} - \theta$ થશે.

હવે $\overline{n}_2$ એ π_2 નો અભિલંબ છે તેથી $m\angle BOD = \frac{\pi}{2}$

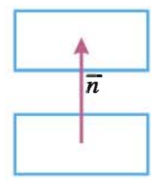
$\therefore$ $m\angle AOB = \theta$, એ બે સમતલો વચ્ચે ખૂણાનું માપ છે.

ધારો કે $\pi_1 : \overline{r} \cdot \overline{n}_1 = d_1$ અને $\pi_2 : \overline{r} \cdot \overline{n}_2 = d_2$ આપેલા સમતલોનાં સમીકરણો છે.

(1) $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \overline{n}_1 \perp \overline{n}_2 \Leftrightarrow \overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = 0$

$\therefore$ **π_1 અને π_2 વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{2}$ છે. $\Leftrightarrow \overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = 0$.**

(2) જો બે સમતલો એકબીજાને છેદે નહીં તો તેઓ સમાંતર સમતલો કહેવાય. અહીં $\overline{n}_1$ તથા $\overline{n}_2$ ની દિશા સમાન છે.



આકૃતિ 7.17

$\therefore$ $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \overline{n}_1 \times \overline{n}_2 = \overline{0}$

$\therefore$ **π_1 તથા π_2 વચ્ચેના ખૂણાનું માપ 0 છે $\Leftrightarrow \overline{n}_1 \times \overline{n}_2 = \overline{0}$.**

(3) ધારો કે સમતલો π_1 અને π_2 વચ્ચેના ખૂણાનું માપ θ છે તથા $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

$\therefore$ $\cos\theta = \frac{|\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2|}{|\overline{n}_1||\overline{n}_2|}$

$\therefore$ $\theta = \cos^{-1} \frac{|\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2|}{|\overline{n}_1||\overline{n}_2|}$

આ પરિણામ $\theta = 0$ અને $\frac{\pi}{2}$ માટે પણ સત્ય છે. (ચકાસો !)

જો સમતલનાં સમીકરણો $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ અને $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ સ્વરૂપમાં હોય તો $\overline{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ અને $\overline{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$. તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ

$$\theta = \cos^{-1} \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

ઉદાહરણ 23 : સમતલો $2x - y + z + 6 = 0$ અને $x + y + 2z - 3 = 0$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

ઉકેલ : $\pi_1 : 2x - y + z + 6 = 0$. તેથી $\overline{n}_1 = (2, -1, 1)$

$\pi_2 : x + y + 2z - 3 = 0$. તેથી $\overline{n}_2 = (1, 1, 2)$

હવે, $\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = 2(1) + (-1)1 + 1(2) = 3$

$$|\overline{n}_1| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}, \quad |\overline{n}_2| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$\therefore \quad \theta = cos^{-1}\frac{|\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2|}{|\overline{n}_1||\overline{n}_2|} = cos^{-1}\frac{|3|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = cos^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$\therefore$ આપેલા સમતલો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{3}$ છે.

7.15 બે સમાંતર રેખાઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ

ધારો કે $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in R$ અને $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{l}$, $k \in R$

બે સમાંતર રેખાઓનાં સદિશ સમીકરણ છે.

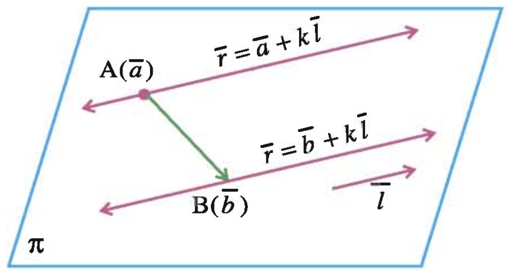
$\therefore$ તેઓ એક અનન્ય સમતલ નિશ્ચિત કરે છે.

વળી, $\overline{b} \notin \{\overline{r} \mid \overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}, k \in R\}$

$\therefore$ કોઈપણ $k \in R$ માટે $\overline{b} \neq \overline{a} + k\overline{l}$

$\therefore$ કોઈપણ $k \in R$ માટે $\overline{b} - \overline{a} \neq k\overline{l}$

$\therefore$ $(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l} \neq \overline{0}$



આકૃતિ 7.18

તેથી $\overline{n} = (\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l}$ લેતાં $\overline{n} \neq \overline{0}$.

અને માંગેલ સમતલ π નું સમીકરણ $(\overline{r} - \overline{a}) \cdot \overline{n} = 0$

એટલે કે $(\overline{r} - \overline{a}) \cdot [(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l}] = 0$ છે તેમ સાબિત કરીએ.

આપણે બતાવીશું કે, આપેલ રેખાઓ આ સમતલમાં આવેલી છે.

$\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$ માટે,

$$(\overline{r} - \overline{a}) \cdot [(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l}] = (k\overline{l}) \cdot [(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l}] = 0$$

$\therefore$ $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$ પરનાં બધાં જ બિંદુઓ π માં છે.

$\therefore$ રેખા $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in R$ સમતલ π માં આવેલી છે.

તે જ પ્રમાણે, $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{l}$ માટે,

$$\begin{aligned}(\overline{r} - \overline{a}) \cdot [(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l}] &= (\overline{b} + k\overline{l} - \overline{a}) \cdot [(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l}] \\ &= (\overline{b} - \overline{a}) \cdot [(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l}] + k\overline{l} \cdot [(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l}] \\ &= 0\end{aligned}$$

$\therefore$ રેખા $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{l}$ એ સમતલ$(\overline{r} - \overline{a}) \cdot [(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l}] = 0$ નો ઉપગણ છે.

તેથી, **$(\overline{r} - \overline{a}) \cdot [(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l}] = 0$ એ આપેલ બે સમાંતર રેખાઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ છે.**

કાર્તેઝીય સ્વરૂપ :

ધારો કે $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$ અને $\overline{l} = (l_1, l_2, l_3)$.

બે સમાંતર રેખાઓમાંથી પસાર થતા સમતલના સમીકરણનું કાર્તેઝીય સ્વરૂપ

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ છે.}$$

ઉદાહરણ 24 : સાબિત કરો કે રેખાઓ L : $\frac{x-3}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-5}{2}$ અને M : $\frac{x}{6} = \frac{y-5}{-8} = \frac{z-2}{4}$ સમાંતર છે તથા તેમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $\overline{l} = (3, -4, 2)$, $\overline{m} = (6, -8, 4)$. તેથી $\overline{l} \times \overline{m} = \overline{0}$.

$\therefore$ L = M અથવા L || M

તથા (3, 3, 5) માટે, $\frac{3}{6} = \frac{3-5}{-8} = \frac{5-2}{4}$ સત્ય નથી. તેથી $(3, 3, 5) \notin$ M.

$\therefore$ $(3, 3, 5) \in$ L અને $(3, 3, 5) \notin$ M

$\therefore$ L $\neq$ M

$\therefore$ L || M

હવે, $\overline{a} = (3, 3, 5)$, $\overline{b} = (0, 5, 2)$ અને $\overline{l} = (3, -4, 2)$.

$\therefore$ L અને M માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z-5 \\ 0-3 & 5-3 & 2-5 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore$ $\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z-5 \\ -3 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore$ $(x-3)(-8) - (y-3)(3) + (z-5)(6) = 0$

$\therefore$ $-8x + 24 - 3y + 9 + 6z - 30 = 0$

$\therefore$ $8x + 3y - 6z = 3$ એ આપેલ સમાંતર રેખાઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ છે.

7.16 બે છેદતી રેખાઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ

ધારો કે બે છેદતી રેખાઓનાં સમીકરણ

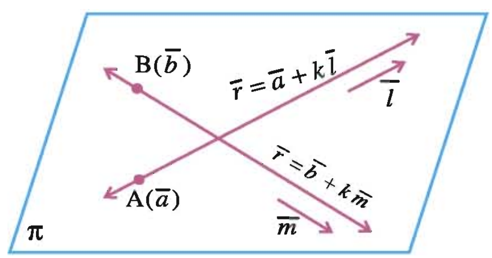
$\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in$ R અને

$\overline{r} = \overline{b} + k\overline{m}$, $k \in$ R છે.

$\therefore$ તેમનામાંથી એક અનન્ય સમતલ પસાર થશે.

વળી, $\overline{l} \times \overline{m} \neq \overline{0}$ અને $(\overline{a} - \overline{b}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = 0$.

(શા માટે ?)



આકૃતિ 7.19

$\overline{n} = \overline{l} \times \overline{m}$ લેતાં $\overline{n} \neq \overline{0}$ થશે.

સમતલ π નું સમીકરણ $(\overline{r} - \overline{a}) \cdot \overline{n} = 0$ લઈએ.

એટલે કે $(\overline{r} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = 0$ એ માંગેલ સમતલ π નું સમીકરણ છે તેમ સાબિત કરીશું. $(\overline{n} \neq \overline{0})$

હવે, આપણે આ બંને રેખાઓ સમતલ π માં છે તેમ સાબિત કરીશું.

$\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$ લેતાં,

$(\overline{r} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = (k\overline{l}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = 0$

$\therefore$ રેખા $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$ નાં બધાં જ બિંદુઓ સમતલ $(\overline{r} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = 0$ માં છે.

એ જ પ્રમાણે, $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{m}$ લેતાં,

$$(\overline{r} - \overline{a})\cdot(\overline{l} \times \overline{m}) = (\overline{b} + k\overline{m} - \overline{a})\cdot(\overline{l} \times \overline{m})$$

$$= (\overline{b} - \overline{a})\cdot(\overline{l} \times \overline{m}) + (k\overline{m})\cdot(\overline{l} \times \overline{m})$$

$$= 0 \qquad ((\overline{b} - \overline{a})\cdot(\overline{l} \times \overline{m}) = 0)$$

∴ રેખા $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{m}$ ના બધાં જ બિંદુઓ સમતલ $(\overline{r} - \overline{a})\cdot(\overline{l} \times \overline{m}) = 0$ માં છે.

∴ આપેલ બે છેદતી રેખાઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $(\overline{r} - \overline{a})\cdot(\overline{l} \times \overline{m}) = 0$ છે.

કાર્તેઝીય સ્વરૂપ :

$\overline{r} = (x, y, z)$, $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{l} = (l_1, l_2, l_3)$ અને $\overline{m} = (m_1, m_2, m_3)$ લેતાં,

બે છેદતી રેખાઓમાંથી પસાર થતા સમતલના સમીકરણનું કાર્તેઝીય સ્વરૂપ

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ છે.}$$

નોંધ : (1) બે છેદતી રેખાઓમાંથી પસાર થતા સમતલના સમીકરણ $(\overline{r} - \overline{a})\cdot(\overline{l} \times \overline{m}) = 0$ માં $\overline{a}$ને બદલે $\overline{b}$ નો પણ ઉપયોગ કરી શકાય, એટલે કે $(\overline{r} - \overline{b})\cdot(\overline{l} \times \overline{m}) = 0$ પણ બે છેદતી રેખાઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ છે.

(2) સમતલનું સમીકરણ મેળવવા માટે આપણને ત્રણ ભિન્ન અસમરેખ બિંદુઓની જરૂર પડે છે. અહીં A($\overline{a}$) અને B($\overline{b}$) બે બિંદુઓ તો આપેલાં છે જ, ત્રીજું બિંદુ C એ આપેલ રેખાઓ પરનું કોઈપણ બિંદુ મેળવી શકાય. (આ બિંદુ કોઈ પણ રેખાના સમીકરણમાં $k \in R - \{0\}$ લેવાથી મળી શકે છે.)

ઉદાહરણ 25 : સાબિત કરો કે રેખાઓ L : $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ અને M : $\frac{x-4}{5} = \frac{y-1}{2} = z$ સમતલીય છે તથા તેમનામાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $\overline{a} = (1, 2, 3)$, $\overline{l} = (2, 3, 4)$ અને

$\overline{b} = (4, 1, 0)$, $\overline{m} = (5, 2, 1)$.

$\overline{l} \times \overline{m} = (-5, 18, -11) \neq \overline{0}$ અને $\overline{b} - \overline{a} = (3, -1, -3)$

$(\overline{b} - \overline{a})\cdot(\overline{l} \times \overline{m}) = (3, -1, -3)\cdot(-5, 18, -11) = -15 - 18 + 33 = 0$

∴ રેખાઓ L અને M એકબીજીને અનન્ય બિંદુમાં છેદતી રેખાઓ છે અને તેથી તેઓ સમતલીય છે.

∴ L અને M માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ,

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

∴ $(x - 1)(-5) - (y - 2)(-18) + (z - 3)(-11) = 0$

∴ $-5x + 5 + 18y - 36 - 11z + 33 = 0$

∴ $5x - 18y + 11z - 2 = 0$ એ માંગેલ સમતલનું સમીકરણ છે.

બીજી રીત : A(1, 2, 3), B(4, 1, 0) આપેલી રેખાઓ પરનાં બિંદુઓ છે.

રેખાના સમીકરણ $\overline{r} = (1, 2, 3) + k(2, 3, 4), k \in R$ માં $k = 1$ લેતાં રેખા L પરનું અન્ય બિંદુ C(3, 5, 7) મળે.

સ્પષ્ટ છે કે A, B, C અસમરેખ છે. કારણ કે $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 56 + 51 \neq 0.$

$\therefore$ A, B, C માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 4-1 & 1-2 & 0-3 \\ 3-1 & 5-2 & 7-3 \end{vmatrix} = 0$ છે.

$\therefore \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore (x - 1)(5) - (y - 2)(18) + (z - 3)(11) = 0$

$\therefore 5x - 5 - 18y + 36 + 11z - 33 = 0$

$\therefore 5x - 18y + 11z - 2 = 0$ એ માંગેલ સમતલનું સમીકરણ છે.

નોંધ : બે સમાંતર રેખાઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ મેળવવા માટે ઉપર દર્શાવેલ બીજી રીતનો ઉપયોગ કરી શકાય.

7.17 સમતલમાં ન હોય તેવા બિંદુનું સમતલથી લંબઅંતર

ધારો કે $\pi : \overline{r} \cdot \overline{n} = d$ આપેલ સમતલનું સમીકરણ છે અને $P(\overline{p})$ છે, જ્યાં $P \notin \pi$.

જો $M(\overline{m})$ એ બિંદુ $P(\overline{p})$ માંથી સમતલ π પરનો લંબપાદ હોય, તો આપણે અંતર PM શોધીશું.

$\therefore \overrightarrow{MP}$ ની દિશા એ $\overline{n}$ ની દિશા થશે.

$\therefore \overleftrightarrow{MP}$ નું સમીકરણ $\overline{r} = \overline{p} + k\overline{n}, k \in R$ છે.

વળી, $M(\overline{m}) \in \overleftrightarrow{MP}$ તેથી કોઈક $k_1 \in R$ માટે $\overline{m} = \overline{p} + k_1\overline{n}$.

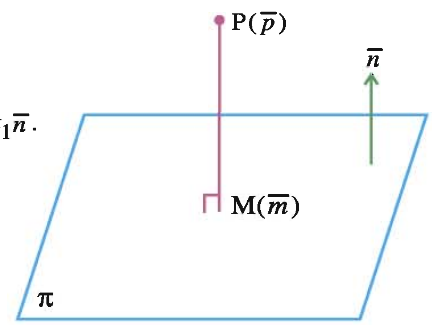
$M(\overline{m}) \in \pi$.

તેથી $\overline{m} \cdot \overline{n} = d$

$\therefore (\overline{p} + k_1\overline{n}) \cdot \overline{n} = d$

$\therefore k_1 |\overline{n}|^2 = d - \overline{p} \cdot \overline{n}$

$\therefore k_1 = \dfrac{d - \overline{p} \cdot \overline{n}}{|\overline{n}|^2}$ $\quad (\overline{n} \neq \overline{0})$ (i)



આકૃતિ 7.20

હવે, $PM = |\overrightarrow{PM}| = |\overline{m} - \overline{p}|$

$= |k_1\overline{n}|$ $\quad (\overline{m} = \overline{p} + k_1\overline{n})$

$= |k_1| \, |\overline{n}|$

$$\therefore PM = \frac{|d - \overline{p} \cdot \overline{n}|}{|\overline{n}|^2} \times |\overline{n}| = \frac{|\overline{p} \cdot \overline{n} - d|}{|\overline{n}|}$$

કાર્તેઝીય સ્વરૂપ :

ધારો કે $P(x_1, y_1, z_1)$ આપેલ બિંદુ છે અને સમતલનું સમીકરણ $ax + by + cz = d$ છે.

$\therefore \overline{p} = (x_1, y_1, z_1), \ \overline{n} = (a, b, c)$

$\therefore$ **P થી સમતલ π નું લંબઅંતર** $= \dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

અને જો સમતલનું સમીકરણ $ax + by + cz + d = 0$ સ્વરૂપમાં હોય તો લંબઅંતર

$$= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

($\overline{r} \cdot \overline{n} = d$ માં d ના સ્થાને $-d$ લેતાં)

નોંધ : (1) બિંદુ $P(\overline{p})$ થી સમતલ $\overline{r} \cdot \overline{n} = d$ પરનો લંબપાદ $M(\overline{m})$ હોય તો $\overline{m} = \overline{p} + k_1\overline{n}$ જ્યાં $k_1 = \frac{d - \overline{p} \cdot \overline{n}}{|\overline{n}|^2}$.

(2) બિંદુ (x_1, y_1)થી રેખા $ax + by + c = 0$ ના લંબઅંતર $\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ સાથે સરખાવો.

ઉદાહરણ 26 : બિંદુ $(-1, 2, -2)$ નું સમતલ $3x - 4y + 2z + 44 = 0$ થી લંબઅંતર મેળવો.

ઉકેલ : $\overline{p} = (-1, 2, -2)$ અને $\pi : 3x - 4y + 2z = -44$ છે. તેથી $d = -44$.

$\therefore$ લંબઅંતર $= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

$$= \frac{|3(-1) - 4(2) + 2(-2) + 44|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \frac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29}$$

બે સમાંતર સમતલો વચ્ચેનું લંબઅંતર :

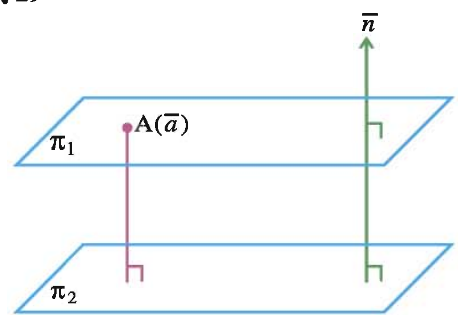
ધારો કે $\pi_1 : \overline{r} \cdot \overline{n} = d_1$ અને $\pi_2 : \overline{r} \cdot \overline{n} = d_2$ બે સમાંતર સમતલોનાં સમીકરણ છે.

સમતલ π_1 પરના કોઈ પણ બિંદુ $A(\overline{a})$ નું સમતલ π_2થી લંબઅંતર એ બે સમાંતર સમતલો વચ્ચેનું લંબઅંતર છે.

$A(\overline{a}) \in \pi_1$ તેથી $\overline{a} \cdot \overline{n} = d_1$

$\therefore$ **$A(\overline{a})$ થી સમતલ $\overline{r} \cdot \overline{n} = d_2$ નું લંબઅંતર**

$\frac{|\overline{a} \cdot \overline{n} - d_2|}{|\overline{n}|} = \frac{|d_1 - d_2|}{|\overline{n}|}$ **થાય.**



આકૃતિ 7.21

ઉદાહરણ 27 : સમતલો $2x - 2y - z + 4 = 0$ અને $4y + 2z - 4x + 1 = 0$ વચ્ચેનું અંતર શોધો.

ઉકેલ :

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 : 2x - 2y - z + 4 = 0 \\ \pi_2 : 4y + 2z - 4x + 1 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\pi_1 : 4x - 4y - 2z = -8 \\ \pi_2 : 4x - 4y - 2z = 1\end{array}$$

$\therefore$ $\overline{n} = (4, -4, -2)$, $d_1 = -8$, $d_2 = 1$

$\therefore$ લંબઅંતર $= \frac{|d_1 - d_2|}{|\overline{n}|}$

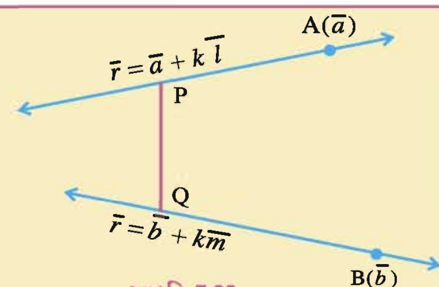
$$= \frac{|-8 - 1|}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-2)^2}}$$

$$= \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

આ સૂત્રના ઉપયોગથી પણ બે વિષમતલીય રેખાઓ વચ્ચેના અંતરનું સૂત્ર મળી શકે.

ધારો કે $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in R$ તથા $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{m}$, $k \in R$ બે વિષમતલીય રેખાઓ છે. આથી $(\overline{a} - \overline{b}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) \neq 0$

સૌપ્રથમ ધારો કે કોઈક $k_2 \in R$ માટે $P(\overline{a} + k_2\overline{l})$ એ L પર તથા કોઈક $k_1 \in R$ માટે $Q(\overline{b} + k_1\overline{m})$ એ M પર કોઈક બિંદુ છે.



આકૃતિ 7.22

$\therefore \quad \overrightarrow{PQ} = \bar{b} - \bar{a} + k_1\overline{m} - k_2\bar{l}$

હવે જો $\overleftrightarrow{PQ}$ એ L તથા M બંનેને લંબ હોય તો,

$$(\bar{b} - \bar{a} + k_1\overline{m} - k_2\bar{l}) \cdot \bar{l} = 0$$

તથા $(\bar{b} - \bar{a} + k_1\overline{m} - k_2\bar{l}) \cdot \overline{m} = 0$

$\therefore \quad (\bar{l}\cdot\overline{m})\, k_1 - |\bar{l}|^2\, k_2 = (\bar{a} - \bar{b})\cdot\bar{l}$

$|\overline{m}|^2\, k_1 - (\bar{l}\cdot\overline{m})\, k_2 = (\bar{a} - \bar{b})\cdot\overline{m}$

વળી $(\bar{l}\cdot\overline{m})\,(l\cdot m) - |\bar{l}|^2|\overline{m}|^2 = (\bar{l}\cdot\overline{m})^2 - |\bar{l}|^2|\overline{m}|^2 = -|\bar{l}\times\overline{m}|^2 \neq 0$

કારણ કે રેખાઓ વિષમતલીય છે.

$\therefore$ અનન્ય $k_1 \in R$ તથા $k_2 \in R$ મળે જેથી $\overleftrightarrow{PQ} \perp L$ તથા $\overleftrightarrow{PQ} \perp M$

પરંતુ L તથા M ની દિશાઓ અનુક્રમે $\bar{l}$ તથા $\overline{m}$ છે

$\therefore \quad \overleftrightarrow{PQ}$ ની દિશા $\bar{l}\times\overline{m}$ છે.

સમતલ $(\bar{r} - \bar{a})\cdot(\bar{l}\times\overline{m}) = 0$ રેખા L માંથી પસાર થાય છે.

કારણ કે $(\bar{a} + k\bar{l} - \bar{a})\cdot(\bar{l}\times\overline{m}) = 0$

તે જ રીતે $(\bar{r} - \bar{b})\cdot(\bar{l}\times\overline{m}) = 0$ રેખા M માંથી પસાર થાય છે.

વળી $\overleftrightarrow{PQ}$ ની દિશા $\bar{l}\times\overline{m}$ હોવાથી તે આ બંને સમાંતર સમતલોને લંબ છે.

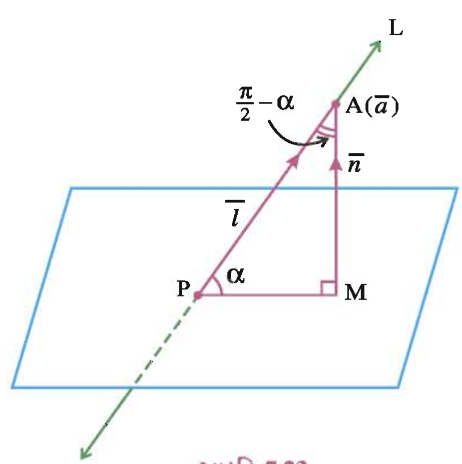
$$\therefore \quad PQ = \frac{|d_1 - d_2|}{|\bar{l}\times\overline{m}|}$$

$$= \frac{|\bar{a}\cdot(\bar{l}\times\overline{m}) - \bar{b}\cdot(\bar{l}\times\overline{m})|}{|\bar{l}\times\overline{m}|}$$

$$= \frac{|(\bar{a} - \bar{b})\cdot(\bar{l}\times\overline{m})|}{|\bar{l}\times\overline{m}|}$$

7.18 રેખા અને સમતલ વચ્ચેનો ખૂણો

ધારો કે $\bar{r} = \bar{a} + k\bar{l}$ એક રેખાનું સમીકરણ છે તથા $\bar{r}\cdot\bar{n} = d$ એક સમતલનું સમીકરણ છે. ધારો કે રેખા સમતલને બિંદુ P માં છેદે છે તથા M એ $A(\bar{a})$માંથી સમતલ પરનો લંબપાદ છે. આપેલી રેખા અને સમતલ વચ્ચેનો ખૂણો $\angle APM$ છે.



આકૃતિ 7.23

ધારો કે $m\angle APM = \alpha,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad \frac{\pi}{2} - \alpha = (\bar{l} \,\hat{,}\, \bar{n})$

$\therefore \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{|\bar{l}\cdot\bar{n}|}{|\bar{l}||\bar{n}|}$

$\therefore \quad \sin\alpha = \frac{|\bar{l}\cdot\bar{n}|}{|\bar{l}||\bar{n}|}$

$\therefore \quad \alpha = \sin^{-1}\frac{|\bar{l}\cdot\bar{n}|}{|\bar{l}||\bar{n}|}$ એ રેખા અને સમતલ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ છે.

ઉદાહરણ 28 : રેખા $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{1}$ અને સમતલ $\overline{r} \cdot (-2, 2, -1) = 1$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $\overline{l} = (2, 2, 1)$, $\overline{n} = (-2, 2, -1)$

$\overline{l} \cdot \overline{n} = 2(-2) + 2(2) + 1(-1) = -1$

$|\overline{l}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3,$

$|\overline{n}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$

$\therefore$ આપેલ રેખા અને સમતલ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $= sin^{-1} \frac{|\overline{l} \cdot \overline{n}|}{|\overline{l}||\overline{n}|}$

$= sin^{-1} \frac{|-1|}{3(3)} = sin^{-1} \frac{1}{9}$

7.19 બે સમતલોનો છેદ

ધારો કે એકબીજાને છેદતાં બે સમતલોનાં સમીકરણ $\pi_1 : \overline{r} \cdot \overline{n}_1 = d_1$ અને $\pi_2 : \overline{r} \cdot \overline{n}_2 = d_2$ છે.

$\therefore \quad \overline{n}_1 \times \overline{n}_2 \neq \overline{0}$

ધારો કે $\overline{n} = \overline{n}_1 \times \overline{n}_2$.

ધારો કે $A(\overline{a})$ એ સમતલ π_1 અને π_2 એક છેદબિંદુ છે.

$\therefore \quad A(\overline{a}) \in \pi_1$ અને $A(\overline{a}) \in \pi_2$

$\therefore \quad \overline{a} \cdot \overline{n}_1 = d_1$ અને $\overline{a} \cdot \overline{n}_2 = d_2$

$\therefore \quad \pi_1$ અને π_2 નાં સમીકરણ

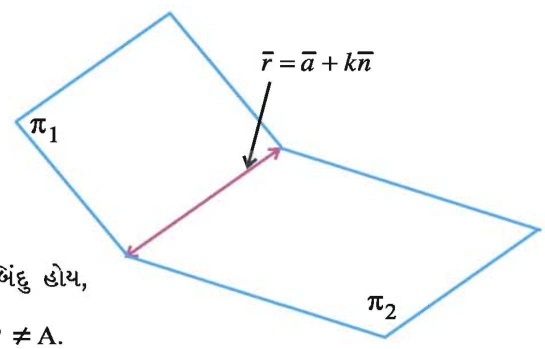
$\overline{r} \cdot \overline{n}_1 = d_1 = \overline{a} \cdot \overline{n}_1$ એટલેકે

$\therefore \quad (\overline{r} - \overline{a}) \cdot \overline{n}_1 = 0$ તથા

તે જ પ્રમાણે $(\overline{r} - \overline{a}) \cdot \overline{n}_2 = 0$ છે.

$\therefore$ જો $P(\overline{r})$ એ બંને સમતલો π_1 અને π_2 નું છેદબિંદુ હોય,

તો $(\overline{r} - \overline{a}) \perp \overline{n}_1$ અને $(\overline{r} - \overline{a}) \perp \overline{n}_2$, $P \neq A$.



આકૃતિ 7.24

$\therefore \quad \overline{r} - \overline{a} = k(\overline{n}_1 \times \overline{n}_2), k \in R - \{0\}$

$\therefore \quad \overline{r} - \overline{a} = k\overline{n}, k \in R - \{0\}$ $\qquad (\overline{n} = \overline{n}_1 \times \overline{n}_2)$

જો $k = 0$ તો $P = A$ અને તેથી $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{n}, k \in R$.

આમ, $P(\overline{r}) \in \pi_1 \cap \pi_2$ તો $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{n}, k \in R$ જે એક રેખાનું સમીકરણ છે.

$\therefore \quad \pi_1 \cap \pi_2$ પરનું દરેક બિંદુ રેખા $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{n}, k \in R$ પર આવેલું છે.

આથી ઊલટું, જો $P(\overline{r})$ એ રેખા $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{n}, k \in R$ નું બિંદુ હોય, તો

$(\overline{r} - \overline{a}) \cdot \overline{n}_1 = k\overline{n} \cdot \overline{n}_1 = k(\overline{n}_1 \times \overline{n}_2) \cdot \overline{n}_1 = 0$ અને

$(\overline{r} - \overline{a}) \cdot \overline{n}_2 = k\overline{n} \cdot \overline{n}_2 = k(\overline{n}_1 \times \overline{n}_2) \cdot \overline{n}_2 = 0$

આમ, $P(\overline{r}) \in \pi_1 \cap \pi_2$.

માટે $\pi_1 \cap \pi_2$ એ રેખા $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{n}$, $k \in R$ છે, જ્યાં $\overline{n} = \overline{n}_1 \times \overline{n}_2$.

જો $\overline{n}_1 \times \overline{n}_2 \neq \overline{0}$ હોય, તો બે સમતલો $\overline{r} \cdot \overline{n}_1 = d_1$ અને $\overline{r} \cdot \overline{n}_2 = d_2$ એક રેખા $\overline{r} = \overline{a} + k(\overline{n}_1 \times \overline{n}_2)$, $k \in R$ માં છેદે છે.

બે સમતલના છેદમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ :

ધારો કે $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ બે છેદતાં સમતલોનાં સમીકરણ છે. તેમની છેદરેખામાંથી પસાર થતા કોઈપણ સમતલનું સમીકરણ

$$l(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + m(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0,\ l^2 + m^2 \neq 0 \text{ છે.}$$

આથી ઉલટું, કોઈપણ સમતલનું સમીકરણ

$$l(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + m(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0,\ l^2 + m^2 \neq 0$$

સ્વરૂપનું હોય, તો તે આપેલાં બે સમતલોની છેદરેખાને સમાવતું સમતલ છે.

આપણે આ બંને વિધાનો સાબિતી વગર સ્વીકારીશું.

અહીં $l^2 + m^2 \neq 0$ નો અર્થ l અને m પૈકી ઓછામાં ઓછી એક સંખ્યા શૂન્ય નથી.

જો $l = 0$ તો $m \neq 0$ અને તેથી માંગેલા સમતલનું સમીકરણ $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ થશે.

જો $l \neq 0$ તો માંગેલા સમતલનું સમીકરણ $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ નથી.

$\therefore$ $l(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + m(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$ એ

$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \frac{m}{l}(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$ થશે.

ધારો કે $\frac{m}{l} = \lambda$

જો $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ એ માંગેલ સમતલનું સમીકરણ ન હોય, તો સમતલનું સમીકરણ

$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$, $\lambda \in R$ લઈ શકાય.

ઉદાહરણ 29 : સમતલો $2x + 3y + z - 1 = 0$ અને $x + y - z - 7 = 0$ ની છેદરેખા અને $(1, 2, 3)$ માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ શોધો તથા તેમની છેદરેખાનું સમીકરણ પણ મેળવો.

ઉકેલ : $(1, 2, 3)$ બિંદુના યામ સમતલના સમીકરણ $x + y - z - 7 = 0$ માં મૂકતાં $1 + 2 - 3 - 7 = -7 \neq 0$

$\therefore$ બિંદુ $(1, 2, 3)$ એ સમતલ $x + y - z - 7 = 0$ નથી.

$\therefore$ $x + y - z - 7 = 0$ એ માંગેલા સમતલનું સમીકરણ નથી.

ધારો કે તે સમતલનું સમીકરણ $2x + 3y + z - 1 + \lambda(x + y - z - 7) = 0$ છે. **(i)**

તે $(1, 2, 3)$માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore$ $2 + 6 + 3 - 1 + \lambda(1 + 2 - 3 - 7) = 0$

$\therefore$ $-7\lambda = -10$

$\therefore$ $\lambda = \frac{10}{7}$

$\therefore$ (i)માં $\lambda = \frac{10}{7}$ મૂકતાં,

$2x + 3y + z - 1 + \frac{10}{7}(x + y - z - 7) = 0$

$\therefore$ $14x + 21y + 7z - 7 + 10x + 10y - 10z - 70 = 0$

$\therefore$ $24x + 31y - 3z - 77 = 0$

હવે, છેદરેખાની દિશા $\overline{n} = \overline{n}_1 \times \overline{n}_2 = (2, 3, 1) \times (1, 1, -1) = (-4, 3, -1)$.

ચાલો આપણે બંને સમતલનાં સમીકરણમાં $z = 0$ મૂકીએ.

$\therefore$ આપણને સમીકરણો $2x + 3y = 1$ અને $x + y = 7$ મળશે.

આ સમીકરણોને ઉકેલતાં $x = 20$, $y = -13$ મળશે.

$\therefore$ એક સામાન્ય બિંદુ A(20, −13, 0) થશે.

$\therefore$ છેદરેખાનું સમીકરણ $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{n}$, $k \in$ R પ્રમાણે,

$\overline{r} = (20, -13, 0) + k(-4, 3, -1)$, $k \in$ R થશે.

નોંધ : બે સમતલોનું સામાન્ય છેદબિંદુ મેળવવા માટે આપણે x, y, z પૈકી કોઈ એક માટે જાણીતી સંખ્યા લેવાથી, બાકીના બે ચલની અનન્ય કિંમત મેળવી શકાય.

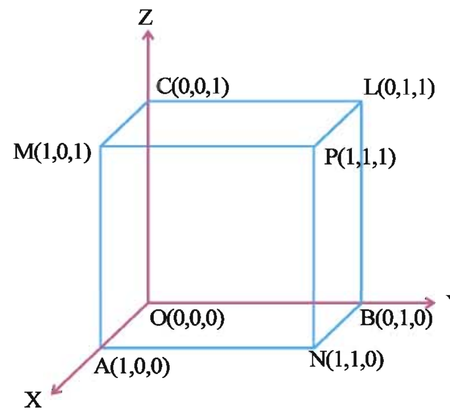
સ્વાધ્યાય 7.2

1. સમતલ $4x - 2y + z - 7 = 0$ નો એકમ અભિલંબ શોધો.
2. (1, 1, −1), (2, −1, −3) અને (3, 0, 1)માંથી પસાર થતા સમતલનું સદિશ તેમજ કાર્તેઝીય સમીકરણ શક્ય હોય, તો મેળવો.
3. $2x - 3y - 5z + 1 = 0$ ને સમાંતર અને (1, 2, −3) માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ મેળવો.
4. (−2, 1, 1) અને (0, 5, 1) માંથી પસાર થતી રેખાને લંબ અને (5, −1, 2) માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ મેળવો. આ સમતલના અક્ષો પરના અંતઃખંડ પણ શોધો.
5. રેખા $\overline{r} = (1, 4, -1) + k(2, -3, 3)$, $k \in$ Rમાંથી પસાર થતા તથા (2, 0, 1) માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ શોધો.
6. બતાવો કે બિંદુઓ (2, 7, 3), (−10, −10, 2), (−3, 3, 2) અને (0, −2, 4) સમતલીય છે. આ બિંદુઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ પણ મેળવો.
7. (3, 4, −5) અને (1, 2, 3) માંથી પસાર થતા Z-અક્ષને સમાંતર સમતલનું સમીકરણ મેળવો.
8. સમતલો $2x + y - z - 1 = 0$ અને $x - y - 2z + 7 = 0$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.
9. રેખા $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{2}$ અને સમતલ $2x + y - 3z + 4 = 0$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.
10. બિંદુ (5, 3, 4)થી સમતલ $3x + 2y - 5z - 13 = 0$ નું લંબઅંતર શોધો.
11. સમતલો $12x - 6y + 4z - 21 = 0$ અને $6x - 3y + 2z - 1 = 0$ વચ્ચેનું લંબઅંતર શોધો.
12. A(1, 3, 5) માંથી પસાર થતા તથા $\overline{AP}$ ને લંબ સમતલનું સમીકરણ મેળવો, જ્યાં P (3, −2, 1) છે.
13. રેખા $\overline{r} = (2, -4, -6) + k(1, 8, -3)$, $k \in$ R. સમાવતા અને (1, 1, −1) માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ મેળવો.
14. બે છેદક રેખાઓ $\frac{x+1}{1} = \frac{3-y}{1} = \frac{z+5}{2}$ અને $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{2}$ માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ શોધો.

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 30 : જો કોઈ રેખા સમઘનના ચાર વિકર્ણો સાથે $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ માપના ખૂણા બનાવે તો સાબિત કરો કે $cos2\alpha + cos2\beta + cos2\gamma + cos2\delta = -\frac{4}{3}$.



આકૃતિ 7.25

ઉકેલ : ધારો કે સમઘનની બાજુની લંબાઈ એક એકમ છે. શિરોબિંદુઓ આકૃતિ 7.25 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે લઈ શકાય.

સમઘનના ચાર વિકર્ણો $\overrightarrow{OP} = (1, 1, 1)$,

$\overrightarrow{AL} = (-1, 1, 1)$, $\overrightarrow{BM} = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{CN} = (1, 1, -1)$ છે.

ધારો કે રેખાની દિક્કોસાઈન l, m, n છે. $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

રેખાએ વિકર્ણો $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{AL}$, $\overrightarrow{BM}$ અને $\overrightarrow{CN}$ સાથે બનાવેલા ખૂણાનાં માપ અનુક્રમે α, β, γ અને δ છે.

$$cos\alpha = \frac{|l+m+n|}{\sqrt{3}},\ cos\beta = \frac{|-l+m+n|}{\sqrt{3}},\ cos\gamma = \frac{|l-m+n|}{\sqrt{3}} \text{ અને } cos\delta = \frac{|l+m-n|}{\sqrt{3}}.$$

હવે, $cos2\alpha + cos2\beta + cos2\gamma + cos2\delta$ $= 2cos^2\alpha - 1 + 2cos^2\beta - 1 + 2cos^2\gamma - 1 + 2cos^2\delta - 1$

$= 2(cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma + cos^2\delta) - 4$

$= \frac{2}{3}[(l + m + n)^2 + (-l + m + n)^2 + (l - m + n)^2 + (l + m - n)^2] - 4$

$= \frac{2}{3}[4(l^2 + m^2 + n^2)] - 4$

$= \frac{8}{3} - 4$ $\quad (l^2 + m^2 + n^2 = 1)$

$= -\frac{4}{3}$

આપેલા બિંદુનું રેખા (સમતલ)માં પ્રતિબિંબ : જો બિંદુ A માંથી રેખા (સમતલ) પરનો લંબપાદ M હોય અને બિંદુ B એવું મળે કે જેથી M એ $\overline{AB}$નું મધ્યબિંદુ થાય, તો B ને A નું રેખા (સમતલ)માં પ્રતિબિંબ કહે છે.

ઉદાહરણ 31 : રેખા L : $\frac{x-6}{3} = \frac{y-7}{2} = \frac{7-z}{2}$ને સાપેક્ષ A(1, 2, 3)નું પ્રતિબિંબ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $\frac{x-6}{3} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-7}{-2}$ રેખાનું સમીકરણ છે.

ધારો કે A(1, 2, 3) માંથી રેખા પરનો લંબપાદ M છે.

$M \in L$ તેથી કોઈક $k \in R$ માટે

M $(6 + 3k, 7 + 2k, 7 - 2k)$ થશે.

$\overrightarrow{AM} = (6 + 3k, 7 + 2k, 7 - 2k) - (1, 2, 3)$

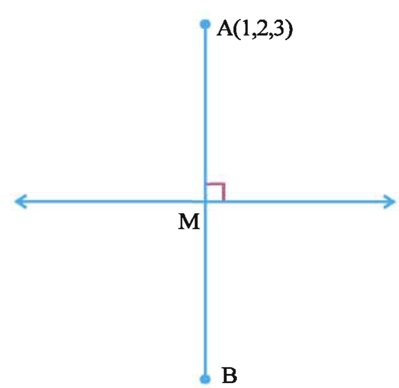
$= (5 + 3k, 5 + 2k, 4 - 2k)$

$\overrightarrow{AM} \perp L$

$\therefore \overrightarrow{AM} \cdot \overline{l} = 0$

$\therefore (5 + 3k, 5 + 2k, 4 - 2k) \cdot (3, 2, -2) = 0$

$\therefore 15 + 9k + 10 + 4k - 8 + 4k = 0$



આકૃતિ 7.26

$\therefore \quad 17k + 17 = 0$

$\therefore \quad k = -1$

$\therefore$ લંબપાદ $M(6 + 3k, 7 + 2k, 7 - 2k) = M(3, 5, 9)$.

જો $B(x, y, z)$ એ રેખાને સાપેક્ષ A નું પ્રતિબિંબ હોય, તો M એ $\overline{AB}$નું મધ્યબિંદુ થશે.

$\therefore \quad (3, 5, 9) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z+3}{2}\right)$

$\therefore \quad x = 5, y = 8, z = 15$

$\therefore$ A ના પ્રતિબિંબ B ના યામ (5, 8, 15) થશે.

ઉદાહરણ 32 : જો l, m, n એ બે રેખાઓની દિક્‌સંખ્યાઓ હોય અને $l + m + n = 0$ તથા $l^2 - m^2 + n^2 = 0$ હોય તો તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $l + m + n = 0$

$\therefore \quad m = -l - n$

$l^2 - m^2 + n^2 = 0$

$\therefore \quad l^2 - (-l - n)^2 + n^2 = 0$

$\therefore \quad l^2 - l^2 - 2ln - n^2 + n^2 = 0$

$\therefore \quad ln = 0$

$\therefore \quad l = 0$ અથવા $n = 0$

જો $l = 0$ તો $m = -n$ $\qquad (l + m + n = 0)$

l, m, n એ દિક્‌સંખ્યાઓ હોવાથી $(l, m, n) \neq (0, 0, 0)$

$l = 0$	$n = 0$
$n = -m$	$l = -m$
દિક્‌સંખ્યા $(0, m, -m)$	દિક્‌સંખ્યા $(-m, m, 0)$ બને.

બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય તો, $\cos\alpha = \dfrac{|(0, m, -m) \cdot (-m, m, 0)|}{\sqrt{2m^2} \cdot \sqrt{2m^2}}$

$$= \frac{|m^2|}{2|m|^2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$

ઉદાહરણ 33 : રેખા $\frac{x-4}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-3}{1}$ અને સમતલ $x + y + z - 2 = 0$ નું છેદબિંદુ શોધો. આ છેદબિંદુ અને Q (8, 9, 5) વચ્ચેનું અંતર પણ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $\overline{a} = (4, 5, 3)$ અને $\overline{l} = (2, 2, 1)$.

ધારો કે તેમનું છેદબિંદુ P છે. તેથી P એ આપેલી રેખા પર છે.

$\therefore$ કોઈક $k \in R$ માટે P ના યામ $(4 + 2k, 5 + 2k, 3 + k)$ થશે.

P એ સમતલ $x + y + z - 2 = 0$ પર છે.

$\therefore \quad 4 + 2k + 5 + 2k + 3 + k - 2 = 0$

$\therefore \quad 5k = -10$

$\therefore \quad k = -2$

$\therefore$ માંગેલ છેદબિંદુ P $(4 + 2(-2), 5 + 2(-2), 3 + (-2)) = (0, 1, 1)$ છે.

બિંદુઓ P(0, 1, 1) અને Q(8, 9, 5) વચ્ચેનું અંતર

$$PQ = \sqrt{(8-0)^2 + (9-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{64+64+16} = \sqrt{144} = 12$$

ઉદાહરણ 34 : (2, 2, −2) અને (−2, −2, 2) માંથી પસાર થતા તથા સમતલ $2x - 3y + z - 7 = 0$ ને લંબ સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે માંગેલ સમતલનું સમીકરણ $ax + by + cz + d = 0$ છે.

જો $\overline{n}$ આ સમતલનો અભિલંબ હોય, તો $\overline{n} = (a, b, c)$.

આ સમતલ એ સમતલ $2x - 3y + z - 7 = 0$ ને લંબ છે.

$\therefore \quad \overline{n} \cdot (2, -3, 1) = 0$ **(i)**

વળી, A(2, 2, −2) અને B(−2, −2, 2) એ સમતલનાં બિંદુઓ છે.

$\therefore \quad \overrightarrow{AB}$ સમતલમાં છે.

$\overrightarrow{AB} = (-4, -4, 4)$

$\therefore \quad \overline{n} \cdot (-4, -4, 4) = 0$

$\therefore \quad \overline{n} \cdot (-1, -1, 1) = 0$ **(ii)**

(i) અને (ii) પરથી $\overline{n} = (2, -3, 1) \times (-1, -1, 1)$

$\therefore \quad \overline{n} = (-2, -3, -5)$ અથવા $\overline{n} = (2, 3, 5)$

સમતલ (2, 2, −2) માંથી પસાર થાય છે. તેથી સમતલનું સમીકરણ $\overline{r} \cdot \overline{n} = \overline{a} \cdot \overline{n}$.

$\therefore \quad \overline{r} \cdot (2, 3\ 5) = (2, 2, -2) \cdot (2, 3\ 5)$

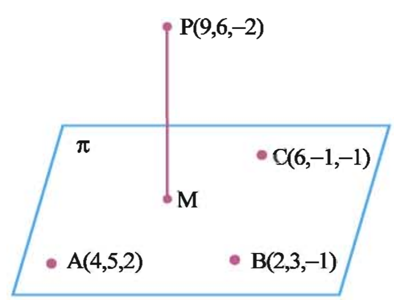
$\therefore \quad 2x + 3y + 5z = 4 + 6 - 10 = 0$

$\therefore$ માંગેલ સમતલનું સમીકરણ $2x + 3y + 5z = 0$ છે.

ઉદાહરણ 35 : A(4, 5, 2), B(2, 3, −1) અને C(6, −1, −1) માંથી પસાર થતા સમતલ પરનો બિંદુ P(9, 6, −2) માંથી લંબપાદ શોધો. P થી આ સમતલનું લંબઅંતર પણ શોધો.

ઉકેલ : સમતલનું સમીકરણ

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-5 & z-2 \\ 2-4 & 3-5 & -1-2 \\ 6-4 & -1-5 & -1-2 \end{vmatrix} = 0$$



આકૃતિ 7.27

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} x-4 & y-5 & z-2 \\ -2 & -2 & -3 \\ 2 & -6 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore \quad (x - 4)(-12) - (y - 5)(12) + (z - 2)(16) = 0$

$\therefore \quad 3(x - 4) + 3(y - 5) - 4(z - 2) = 0$

$\therefore$ $3x + 3y - 4z - 19 = 0$ એ A, B, C માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ છે.

ધારો કે P($\overline{p}$)માંથી સમતલ π : $3x + 3y - 4z - 19 = 0$ પરનો લંબપાદ M છે.

અહીં, $\overline{n} = (3, 3, -4)$

$\overleftrightarrow{PM}$ નું સમીકરણ $\overline{r} = \overline{p} + k\overline{n}$, $k \in R$ છે.

$\therefore$ $\overline{r} = (9, 6, -2) + k(3, 3, -4)$, $k \in R$

$\therefore$ કોઈક $k \in R$ માટે M $(9 + 3k, 6 + 3k, -2 - 4k)$

હવે, M $\in \pi$

$\therefore$ $3(9 + 3k) + 3(6 + 3k), -4(-2 - 4k) - 19 = 0$

$\therefore$ $27 + 9k + 18 + 9k + 8 + 16k - 19 = 0$

$\therefore$ $34k = -34$

$\therefore$ $k = -1$

$\therefore$ લંબપાદ M$(9 + 3(-1), 6 + 3(-1), -2 - 4(-1))$

$\therefore$ લંબપાદ M $(6, 3, 2)$ છે

$\therefore$ લંબઅંતર PM $= \sqrt{(9-6)^2 + (6-3)^2 + (-2-2)^2}$

$= \sqrt{9+9+16}$

$= \sqrt{34}$

ઉદાહરણ 36 : સાબિત કરો કે (i) રેખા $\overline{r} = (1, 2, -3) + k(4, -3, 2)$, $k \in R$ અને સમતલ $3x + 2y - 3z = 5$ એકબીજાને સમાંતર છે. (ii) રેખા $\overline{r} = (1, -2, -2) + k(1, 2, 1)$, $k \in R$ એ સમતલ $2x - 3y + 4z = 0$ માં આવેલી છે.

ઉકેલ : (i) રેખા L નું સમીકરણ $\overline{r} = (1, 2, -3) + k(4, -3, 2)$, $k \in R$ અને સમતલ π નું સમીકરણ $3x + 2y - 3z = 5$ છે.

$\therefore$ A($\overline{a}$) = $(1, 2, -3)$, $\overline{l} = (4, -3, 2)$ અને $\overline{n} = (3, 2, -3)$

હવે, $\overline{l} \cdot \overline{n} = 4(3) - 3(2) + 2(-3) = 12 - 6 - 6 = 0$

$\therefore$ $\overline{l} \perp \overline{n}$. તેથી L $\parallel \pi$ અથવા L એ π માં આવેલી છે.

વળી, $\overline{a} \cdot \overline{n} = (1, 2, -3) \cdot (3, 2, -3) = 3 + 4 + 9 = 16 \neq 0$

$\therefore$ રેખા L એ સમતલ π ને સમાંતર છે.

(ii) રેખા L નું સમીકરણ $\overline{r} = (1, -2, -2) + k(1, 2, 1)$, $k \in R$ અને સમતલ π નું સમીકરણ $2x - 3y + 4z = 0$ છે.

$\therefore$ A($\overline{a}$) = $(1, -2, -2)$, $\overline{l} = (1, 2, 1)$ અને $\overline{n} = (2, -3, 4)$

હવે, $\overline{l} \cdot \overline{n} = 1(2) + 2(-3) + 1(4) = 2 - 6 + 4 = 0$

$\therefore$ $\overline{l} \perp \overline{n}$. તેથી L $\parallel \pi$ અથવા L એ π માં આવેલી છે.

$\overline{a} \cdot \overline{n} = (1, -2, -2) \cdot (2, -3, 4) = 2 + 6 - 8 = 0$

$\therefore$ રેખા L સમતલ π માં આવેલી છે.

સ્વાધ્યાય 7

1. P(1, 0, 3) થી A(4, 7, 1) અને B(5, 9, −1) માંથી પસાર થતી રેખા $\overleftrightarrow{AB}$ પરનો લંબપાદ, લંબરેખાનું સમીકરણ અને લંબની લંબાઈ શોધો.

2. $l + m + n = 0$ અને $m^2 + n^2 = l^2$ તથા l, m, n બે રેખાઓની દિક્‌સંખ્યાઓ હોય, તો તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

3. સાબિત કરો કે રેખાઓ $x = 2, \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{1}$ અને $x = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{3}$ વિષમતલીય છે. તેમની વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર શોધો.

4. રેખાઓ $\frac{x+3}{2} = \frac{5-y}{1} = \frac{1-z}{1}$ અને $\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-1}{1}$ નું છેદબિંદુ શોધો તથા તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

5. (1, 2, 3) માંથી પસાર થતી તથા રેખાઓ $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$ અને $\frac{x-5}{-3} = \frac{y+8}{1} = \frac{z-5}{5}$ બંનેને લંબ હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

6. (3, −2, −4) માંથી પસાર થતી અને યામાક્ષો સાથે સમાન માપના ખૂણા બનાવતી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

7. રેખા $\frac{x-1}{2} = \frac{2-y}{3} = \frac{z+3}{4}$ અને સમતલ $2x + 4y - z = 1$ નું છેદબિંદુ શોધો. તે બે વચ્ચેના ખૂણાનું માપ પણ શોધો.

8. X-અક્ષને સમાંતર, Y-અક્ષ અને Z-અક્ષ પર અનુક્રમે 2 અને 3 અંતઃખંડ કાપતા સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

9. બિંદુ (1, 5, 1) નું સમતલ $x - 2y + z + 5 = 0$ ને સાપેક્ષ પ્રતિબિંબ શોધો.

10. (0, 2, −2) થી સમતલ $2x - 3y + 4z - 44 = 0$ પરનો લંબપાદ શોધો તથા આ બિંદુમાંથી પસાર થતી સમતલને લંબરેખાનું સમીકરણ અને લંબની લંબાઈ શોધો.

11. સમતલો $2x + 3y - z - 4 = 0$ અને $x + y + z - 2 = 0$ ની છેદરેખામાંથી તથા (1, 2, 2)માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ મેળવો તથા આ સમતલોની છેદરેખાનું સમીકરણ પણ મેળવો.

12. જો કોઈ સમતલના અક્ષોને છેદવાથી બનતા ત્રિકોણનું મધ્યકેન્દ્ર (2, 1, −1) હોય, તો તે સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

13. સાબિત કરો કે રેખાઓ $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+4}{4}$ અને $\frac{x-7}{5} = \frac{y+6}{1} = \frac{z+8}{2}$ એક બીજાને છેદે છે. આ રેખાઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

14. સમતલ $3x + 4y - 6z = 12$ ના અક્ષો પરના અંતઃખંડોથી અડધી લંબાઈના અંતઃખંડોવાળા સમતલનું સમીકરણ શોધો.

15. (1, 2, −3) અને (−3, 6, 4) ને જોડતા રેખાખંડના લંબદ્વિભાજક સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

16. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c), (d)માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી અને $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ માપના દિક્ખૂણાઓવાળી રેખાનું સમીકરણ ...... થાય. ☐

(a) $x = \frac{y}{-\sqrt{2}} = z$ (b) $\frac{x}{-1} = \frac{y}{-\sqrt{2}} = z$ (c) $x = \frac{y}{-\sqrt{2}} = -z$ (d) $x = \frac{y}{\sqrt{2}} = z$

(2) (3, 4, 5) અને (4, 5, 6)માંથી પસાર થતી રેખાની દિક્કોસાઇન ...... છે. ☐

(a) 1, 1, 1 (b) $\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) 7, 9, 11

(3) $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{3}$ અને $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{3-z}{-3}$ એ ...... રેખાઓ છે. ☐

(a) સમાંતર (b) પરસ્પર લંબ

(c) સંપાતી (d) લઘુકોણમાં છેદતી

(4) ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી અને Y-અક્ષને સમાંતર રેખાનું સમીકરણ ...... છે. ☐

(a) $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$ (b) $\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$ (c) $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$ (d) $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$

(5) $x = k + 1, y = 2k - 1, z = 2k + 3$ અને $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-2}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ ...... છે. ☐

(a) $sin^{-1}\frac{4}{3}$ (b) $cos^{-1}\frac{4}{9}$ (c) $sin^{-1}\frac{\sqrt{5}}{3}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

(6) સમતલ $x = 2$ નો અભિલંબ ...... છે. ☐

(a) (0, 1, 1) (b) (2, 0, 2) (c) (1, 0, 0) (d) (0, 1, 0)

(7) સમતલ $3x - 4y + 7z = 2$ ને લંબ ...... અને (–1, 2, 4) માંથી પસાર થતી રેખાની દિશા ...... છે. ☐

(a) (3, 4, 7) (b) (4, –6, 3) (c) (–3, 4, –7) (d) (–1, 2, 4)

(8) સમતલ $\overline{r} \cdot (12, -4, 3) = 65$ નું ઊગમબિંદુથી લંબઅંતર ...... થાય. ☐

(a) 65 (b) 5 (c) –5 (d) $\frac{5}{13}$

(9) સમતલ $2x + 3y + 6z - 15 = 0$ એ X-અક્ષ સાથે ...... માપનો ખૂણો બનાવે છે. ☐

(a) $cos^{-1}\frac{3\sqrt{5}}{7}$ (b) $sin^{-1}\frac{3}{7}$ (c) $sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{7}}$ (d) $tan^{-1}\frac{2}{7}$

(10) સમતલો $2x - y + 2z = 1$ અને $4x - 2y + 4z = 1$ વચ્ચેનું લંબઅંતર ...... છે. ☐

(a) $\frac{1}{3}$ (b) 3 (c) $\frac{1}{6}$ (d) 6

(11) (1, 1, 1), (1, –1, 1) અને (–1, 3, –5) માંથી પસાર થતું સમતલ જો (2, k , 4) માંથી પસાર થાય તો, k = ... ☐

(a) ન મળે (b) બે કિંમત મળે

(c) બધી જ વાસ્તવિક સંખ્યા (d) અનન્ય કિંમત મળે

(12) ઊગમબિંદુમાંથી સમતલ પરનો લંબપાદ (a, b, c) હોય, તો સમતલનું સમીકરણ ...... થાય.

(a) $ax + by + cz = a + b + c$ (b) $ax + by + cz = abc$

(c) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (d) $ax + by + cz = a^2 + b^2 + c^2$

(13) A(−2, 2, 3)માંથી પસાર થતી રેખા L એ $\overleftrightarrow{AB}$ ને લંબ હોય તો Lનું સમીકરણ ...... થાય. જ્યાં B (13, −3, 13).

(a) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{13} = \frac{z+3}{2}$ (b) $\frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-3}{2}$

(c) $\frac{x+2}{15} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z-3}{10}$ (d) $\frac{x-2}{15} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z+3}{10}$

(14) જો રેખા $\frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-k}{2}$ એ સમતલ $2x - 4y + z = 7$ માં આવેલી હોય તો $k =$ ......

(a) 7 (b) 6 (c) −7 (d) કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા

(15) બિંદુ (2, −3, 6) નું સમતલ $3x - 6y + 2z + 10 = 0$ થી લંબઅંતર = ...

(a) $\frac{13}{7}$ (b) $\frac{46}{7}$ (c) 7 (d) $\frac{10}{7}$

(16) (2, −3, 1) અને (3, −4, −5)માંથી પસાર થતી રેખા ZX-સમતલને ......માં છેદે છે.

(a) (−1, 0, 13) (b) (−1, 0, 19) (c) $\left(\frac{13}{6}, 0, \frac{-19}{6}\right)$ (d) (0, −1, 13)

(17) જો રેખાઓ $\overline{r} = (2, -3, 7) + k(2, a, 5), k \in R$ અને $\overline{r} = (1, 2, 3) + k(3, -a, a), k \in R$ પરસ્પર લંબ હોય, તો $a =$ ......

(a) 2 (b) −6 (c) 1 (d) −1

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓ શીખ્યા :

1. **A($\overline{a}$) માંથી પસાર થતી અને શૂન્યેતર સદિશ $\overline{l}$ ની દિશાવાળી રેખાનું સદિશ સમીકરણ $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in R$**

પ્રચલ સમીકરણો :

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + kl_1 \\ y &= y_1 + kl_2 \\ z &= z_1 + kl_3 \end{aligned}\right\} \quad k \in R$$

સંમિત સ્વરૂપ (કાર્તેઝીય સમીકરણો) : $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{l_2} = \frac{z-z_1}{l_3}$

જો $l_1 = 0$ અને $l_2 \neq 0, l_3 \neq 0$ તો સમીકરણો $x = x_1, \frac{y-y_1}{l_2} = \frac{z-z_1}{l_3}$

અથવા $\frac{x-x_1}{0} = \frac{y-y_1}{l_2} = \frac{z-z_1}{l_3}$ થશે.

2. A($\overline{a}$) અને B($\overline{b}$) માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ :

સદિશ સમીકરણ : $\overline{r} = \overline{a} + k(\overline{b} - \overline{a}),\ k \in R$

પ્રચલ સમીકરણો :

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + k(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + k(y_2 - y_1) \\ z &= z_1 + k(z_2 - z_1) \end{aligned}\right\} k \in R$$

સંમિત સ્વરૂપ :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

3. સમરેખ બિંદુઓ : A($\overline{a}$), B($\overline{b}$) અને C($\overline{c}$) સમરેખ હોય તો અને તો જ $(\overline{c} - \overline{a}) \times (\overline{b} - \overline{a}) = \overline{0}$.

4. જો A($\overline{a}$), B($\overline{b}$), C($\overline{c}$) સમરેખ હોય, તો $[\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}] = 0$, પરંતુ $[\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}] = 0$ હોય તો ચોક્કસપણે A, B, C સમરેખ છે તેમ નક્કી કરી શકાય નહીં.

5. બે રેખા વચ્ચેના ખૂણાનું માપ : $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l},\ k \in R$ અને $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{m},\ k \in R$ બે ભિન્ન રેખાઓ છે, જો α એ આ બે રેખા વચ્ચેના ખૂણાનું માપ હોય, તો

$$\cos\alpha = \frac{|\overline{l} \cdot \overline{m}|}{|\overline{l}||\overline{m}|};\ 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

બે રેખાઓ લંબ હોય તો અને તો જ $\overline{l} \cdot \overline{m} = 0$.

6. જો બે ભિન્ન રેખાઓ $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l},\ k \in R$ અને $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{m},\ k \in R$ એકબીજીને અનન્ય બિંદુમાં છેદે, તો $(\overline{a} - \overline{b}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = 0,\ \overline{l} \times \overline{m} \ne \overline{0}$.

$\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\overline{l} = (l_1, l_2, l_3)$ અને $\overline{m} = (m_1, m_2, m_3)$ લેતાં,

આ શરતને $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0$ પ્રમાણે પણ દર્શાવી શકાય.

7. વિષમતલીય રેખાઓ : બે ભિન્ન રેખાઓ $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l},\ k \in R$ અને $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{m},\ k \in R$ માટે જો $(\overline{a} - \overline{b}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) \ne 0$ તો તેઓ વિષમતલીય રેખાઓ છે.

8. બિંદુ P($\overline{p}$) નું રેખા $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l},\ k \in R$ થી લંબઅંતર $\frac{|(\overline{p} - \overline{a}) \times \overline{l}|}{|\overline{l}|}$ છે.

9. બે સમાંતર રેખાઓ $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l},\ k \in R$ અને $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{l},\ k \in R$ વચ્ચેનું લંબઅંતર $\frac{|(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l}|}{|\overline{l}|}$ છે.

10. બે વિષમતલીય રેખાઓ $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l},\ k \in R$ અને $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{m},\ k \in R$ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર $\frac{|(\overline{b} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m})|}{|\overline{l} \times \overline{m}|}$ છે.

11. અસમરેખ બિંદુઓ A($\overline{a}$), B($\overline{b}$) અને C($\overline{c}$) માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ

$\overline{r} = l\overline{a} + m\overline{b} + n\overline{c}$, જ્યાં $l, m, n \in R$ અને $l + m + n = 1$.

પ્રચલ સમીકરણો :

$x = lx_1 + mx_2 + nx_3$

$y = ly_1 + my_2 + ny_3$

$z = lz_1 + mz_2 + nz_3$ જ્યાં $l, m, n \in R$ અને $l + m + n = 1$ અને

બિંદુઓ $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ અને $C(x_3, y_3, z_3)$.

કાર્તેઝીય સ્વરૂપ : $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$

12. ચાર ભિન્ન બિંદુઓ $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ અને $C(x_4, y_4, z_4)$ સમતલીય હોય, તો અને

તો જ $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$

13. X-અક્ષ પર a, Y-અક્ષ પર b, Z-અક્ષ પર c અંતઃખંડ બનાવતા સમતલનું સમીકરણ

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ $(abc \neq 0)$.

14. $A(\overline{a})$ માંથી પસાર થતા અને $\overline{n}$ અભિલંબવાળા સમતલનું સમીકરણ

સદિશ સમીકરણ $\overline{r} \cdot \overline{n} = \overline{a} \cdot \overline{n}$

કાર્તેઝીય સ્વરૂપ : જો $\overline{r} = (x, y, z)$, $\overline{n} = (a, b, c)$, તો $ax + by + cz = d$, $(d = \overline{a} \cdot \overline{n})$

15. **ઊગમબિંદુમાંથી સમતલ પરના અભિલંબવાળા સમતલનું સમીકરણ :** $N(\overline{n})$ એ ઊગમબિંદુથી સમતલ પરનો લંબપાદ છે અને $|\overline{n}| = p$ હોય તેવા સમતલનું સમીકરણ $x cos\alpha + y cos\beta + z cos\gamma = p$ જ્યાં, $cos\alpha$, $cos\beta$, $cos\gamma$ એ $\overline{n}$ ની દિક્કોસાઈન છે.

16. **સમતલો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ :** જો θ એ સમતલો $\overline{r} \cdot \overline{n}_1 = d_1$ અને $\overline{r} \cdot \overline{n}_2 = d_2$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ હોય,

તો $cos\theta = \frac{|\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2|}{|\overline{n}_1||\overline{n}_2|}$; $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

સમતલો પરસ્પર લંબ હોય, તો અને તો જ $\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = 0$.

17. **બે સમાંતર રેખાઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ :** $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in R$ અને $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{l}$, $k \in R$ માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $(\overline{r} - \overline{a}) \cdot [(\overline{b} - \overline{a}) \times \overline{l}] = 0$.

કાર્તેઝીય સ્વરૂપ :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix} = 0$$

જ્યાં, $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$ અને $\overline{l} = (l_1, l_2, l_3)$.

18. બે છેદતી રેખાઓ $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in R$ અને $\overline{r} = \overline{b} + k\overline{m}$, $k \in R$ માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $(\overline{r} - \overline{a}) \cdot (\overline{l} \times \overline{m}) = 0$.

કાર્તેઝીય સ્વરૂપ :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0$$, જ્યાં $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{l} = (l_1, l_2, l_3)$ અને $\overline{m} = (m_1, m_2, m_3)$.

19. બિંદુ $P(\overline{p})$ નું સમતલ $\overline{r} \cdot \overline{n} = d$ થી લંબઅંતર $\frac{|\overline{p} \cdot \overline{n} - d|}{|\overline{n}|}$.

કાર્તેઝીય સ્વરૂપ :

$$\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

જ્યાં સમતલનું સમીકરણ $ax + by + cz = d$ અને બિંદુ P એ (x_1, y_1, z_1) છે.

20. બે સમાંતર સમતલો $\pi_1 : \overline{r} \cdot \overline{n} = d_1$ અને $\pi_2 : \overline{r} \cdot \overline{n} = d_2$ વચ્ચેનું લંબઅંતર $= \frac{|d_1 - d_2|}{|\overline{n}|}$.

21. જો રેખા $\overline{r} = \overline{a} + k\overline{l}$, $k \in R$ અને સમતલ $\overline{r} \cdot \overline{n} = d$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય, તો

$$\alpha = sin^{-1} \frac{|\overline{l} \cdot \overline{n}|}{|\overline{l}||\overline{n}|} ; 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

22. બે સમતલો $\pi_1 : \overline{r} \cdot \overline{n}_1 = d_1$ અને $\pi_2 : \overline{r} \cdot \overline{n}_2 = d_2$ નો છેદ એક રેખા દર્શાવે છે. તેનું સમીકરણ

$\overline{r} = \overline{a} + k\overline{n}$, $k \in R$ છે, જ્યાં $\overline{n} = \overline{n}_1 \times \overline{n}_2$.

23. બે સમતલો $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ ના છેદમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \lambda (a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$ છે.

■

Mahavira

Mahavira was a 9th-century Indian mathematician from Gulbarga who asserted that the square root of a negative number did not exist. He gave the sum of a series whose terms are squares of an arithmetical progression and empirical rules for area and perimeter of an ellipse. He was patronised by the great Rashtrakuta king Amoghavarsha. Mahavira was the author of Ganit Saar Sangraha. He separated Astrology from Mathematics. He expounded on the same subjects on which Aryabhata and Brahmagupta contended, but he expressed them more clearly. He is highly respected among Indian Mathematicians, because of his establishment of terminology for concepts such as equilateral, and isosceles triangle; rhombus; circle and semicircle. Mahavira's eminence spread in all South India and his books proved inspirational to other Mathematicians in Southern India.