નિયત સંકલન 3

Calculus required continuity and continuity was supposed to require the infinitely little; but nobody could discover what the infinitely little might be.

– Bertrand Russell

All great theorems were discovered after midnight.

– Adrian Mathesis

3.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે વિકલનની વ્યસ્ત ક્રિયા તરીકે પ્રતિવિકલન(સંકલન)નો અભ્યાસ કર્યો. ઐતિહાસિક ક્રમ જોતાં, વિકલન કરતાં સંકલનનો ખ્યાલ પહેલાં ઉદ્દભવ્યો છે. વાસ્તવમાં સંકલનનો ખ્યાલ વક્રો વડે સીમિત સમતલીય પ્રદેશોનાં ક્ષેત્રફળ અને પરિક્રમજ ઘન પદાર્થોનાં ઘનફળ શોધવાના પ્રશ્નોમાંથી સ્વતંત્ર રીતે ઉદ્દભવ્યો છે. સૌપ્રથમ અમુક પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ દર્શાવવા સરવાળાના લક્ષ તરીકે નિયત સંકલનની શરૂઆત થઈ. આમ, **સંકલન (Integration)** શબ્દ મૂળ **સરવાળા** અને અંગ્રેજી ક્રિયાપદ **to integrate**માંથી આવ્યો. **'to integrate'** એટલે **'ભેગું કરવું'** કે **'સંકલન કરવું'** એવો અર્થ થાય. પાછળથી **ન્યૂટન** તથા **લિબનીટ્ઝે** 17મી સદીમાં પરસ્પર ભિન્ન દેખાતી સંકલન અને વિકલનની આ બે ક્રિયાઓ વચ્ચે ગાઢ સંબંધ પ્રસ્થાપિત કર્યો. આ સંબંધ સંકલનના મૂળભૂત પ્રમેય તરીકે જાણીતો છે. આપણે આ પ્રકરણમાં તેનો અભ્યાસ કરીશું.

ક્ષેત્રફળ, ઘનફળ વગેરેની ગણતરી નિયત સંકલનથી થાય છે. તેથી નિયત સંકલનનો અભ્યાસ ખૂબ જ જરૂરી બને છે. 19મી સદીમાં **કોશી** અને **રિમાને** નિયત સંકલનની સંકલ્પના આપી.

હવે આપણે આ પ્રકરણમાં નિયત સંકલનની વ્યાખ્યા સરવાળાના લક્ષ તરીકે કેમ આપી શકાય અને તેના ઉપયોગથી ક્ષેત્રફળ મેળવવા ઉપરાંત તેને પ્રતિવિકલન સાથે પણ કેવી રીતે સાંકળી શકાય તેની સમજ મેળવીએ.

3.2 સરવાળાના લક્ષ તરીકે નિયત સંકલન :

તમે ભૌતિક વિજ્ઞાનમાં ધોરણ 11માં શીખી ગયા છો કે સ્પ્રિંગ-દળ પ્રણાલી માટે પ્રણાલી પર લાગતું બળ $F = -kx$ થી મળે છે. જ્યાં k સ્પ્રિંગનો બળ અચળાંક છે. આપણે માત્ર માનાંક (magnitude) ને ધ્યાનમાં લઈએ તો $F = kx$ થાય અને $k = 10$ લઈએ તો $F = 10x$. અહીં x એ બળને લીધે થતું સ્થાનાંતર થાય તો કુલ કાર્ય કેટલું થતું હશે તે શોધીએ. કાર્યની વ્યાખ્યા મુજબ, કોઈ ક્ષણે પ્રણાલી દ્વારા થતું કાર્ય

w = તે ક્ષણે લાગતું બળ $\times$ તે બળ દ્વારા થતું સ્થાનાંતર

હવે $F = 10x$ દર્શાવે છે કે બળ સ્થાનાંતર સાથે બદલાય છે.

તેથી 10 એકમ સ્થાનાંતર કરતી પ્રણાલી દ્વારા સ્થાનાંતર દરમિયાન થતું કુલ કાર્ય શોધવું હોય તો શું કરીશું ?

એક સામાન્ય અંદાજ પ્રમાણે સ્થાનાંતર દરમિયાન થતા કુલ કાર્ય w માટે,

શરૂઆતનું બળ $\times$ સ્થાનાંતર $\le w \le$ અંતિમ બળ $\times$ સ્થાનાંતર

સૌ પ્રથમ સ્થાનાંતર $[0, 10]$ અંતરાલમાં થાય છે. આ સંજોગોમાં $x = 10$ માટે મહત્તમ બળ 100 એકમ અને $x = 0$ માટે ન્યૂનતમ બળ શૂન્ય છે. આથી પ્રથમ અંતરાલમાં થતું કાર્ય

$0 \times 0 \le w \le 100 \times 10$ ($w \times d = 0 \times 0$ તથા $w \times d = 100 \times 10$)

$\therefore$ $[0, 10]$ અંતરાલમાં થતા કાર્ય w માટે $0 \le w \le 1000$ (i)

હવે કાર્ય (w) નો વધુ સારો અંદાજ મેળવવા માટે આપણે [0, 10] અંતરાલને બે એકરૂપ ઉપાંતરાલમાં વિભાજિત કરીએ, [0, 5] અને [5, 10]. જો [0, 5] અંતરાલમાં થતું કાર્ય w_1 હોય તો આ સંજોગોમાં મહત્તમ બળ 50 એકમ અને ન્યૂનતમ બળ 0 એકમ છે. માટે [0, 5] અંતરાલમાં થતા કાર્ય w_1 માટે,

$$0 \le w_1 \le 50 \times 5$$

$$\therefore \quad 0 \le w_1 \le 250$$

તે જ રીતે જો [5, 10] અંતરાલમાં થતું કાર્ય w_2 હોય તો $250 \le w_2 \le 500$

$\therefore$ કુલ કાર્ય $w = w_1 + w_2$ હોય તો,

$$250 \le w_1 + w_2 \le 750$$

$$\therefore \quad 250 \le w \le 750 \qquad \text{(ii)}$$

આમ, જોઈ શકાય છે કે (i) કરતાં (ii) વધુ સારો અંદાજ આપે છે. આ જ પ્રમાણે [0, 10]ને ત્રણ એકરૂપ અંતરાલમાં વિભાજિત કરીએ તો, ઉપાંતરાલો $\left[0, \frac{10}{3}\right], \left[\frac{10}{3}, \frac{20}{3}\right], \left[\frac{20}{3}, 10\right]$ મળે. દરેક ઉપાંતરાલમાં થતું કાર્ય નીચે પ્રમાણે મળશે :

પ્રથમ ઉપાંતરાલમાં F = $10x$ માં $x = \frac{10}{3}$ લેતાં, મહત્તમ કાર્ય $= \frac{100}{3} \times \frac{10}{3} = \frac{1000}{9}$

$$0 \le w_1 \le \frac{1000}{9}$$

તે જ રીતે $\frac{1000}{9} \le w_2 \le \frac{2000}{9}$

અને $\frac{2000}{9} \le w_3 \le \frac{3000}{9}$

આમ, $w = w_1 + w_2 + w_3$ હોવાથી, $\frac{3000}{9} \le w \le \frac{6000}{9}$

$$\therefore \quad 333\tfrac{1}{3} \le w \le 666\tfrac{2}{3} \qquad \text{(iii)}$$

આમ, (ii) કરતાં (iii) વધુ સારો અંદાજ આપે છે. આમ આપણે વધુને વધુ ભાગ કરતાં જઈએ તો વધુ સારા અંદાજિત પરિણામ તરફ આગળ વધી શકાય. આપણે [0, 10] ને n એકરૂપ અંતરાલોમાં વિભાજિત કરીએ તો તે વિભાજન કરતા અંતરાલો $\left[0, \frac{10}{n}\right], \left[\frac{10}{n}, \frac{20}{n}\right], \left[\frac{20}{n}, \frac{30}{n}\right], ..., \left[\frac{10(n-1)}{n}, 10\right]$ થાય.

i મો ઉપાંતરાલ $\left[\frac{10(i-1)}{n}, \frac{10i}{n}\right]$ છે.

આ અંતરાલમાં બળ F = $10x$ ના સૂત્રમાં $x = \frac{10i}{n}$ લેતાં,

$$\text{મહત્તમ કાર્ય} = 10 \times \frac{10i}{n} \times \frac{10}{n} = \frac{1000i}{n^2}$$

આ ઉપાંતરાલમાં થતું કાર્ય w_i હોય તો, $\frac{1000(i-1)}{n^2} \le w_i \le \frac{1000i}{n^2}$ થશે.

$\therefore$ કુલ કાર્ય, $\frac{1000}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (i-1) \le w \le \frac{1000}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i$ થાય.

અહીં w માટે મહત્તમ અને ન્યૂનતમ મૂલ્ય વચ્ચેનો તફાવત,

$$\frac{1000}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i - \frac{1000}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (i-1) = \frac{1000}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (1) = \frac{1000}{n^2} \times n = \frac{1000}{n} \text{ થાય.}$$

હવે જેમ આપણે n ની કિંમત વધારતા જઈએ તેમ આ તફાવત ઘટતો જશે અને n અસીમિત વધે (તેને $n \to \infty$ કહેવાય) તેમ તફાવત શૂન્યાભિલક્ષી થાય છે. બીજી રીતે જોતાં,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1000}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \lim_{n \to \infty} \frac{1000}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (i-1) \text{ થાય.}$$

હવે કાર્ય w તેમની વચ્ચેની કિંમત હોવાથી સેન્ડવીચ પ્રમેયથી આ લક્ષ જ w ની સાચી કિંમત હશે.

$$\therefore \quad w = \lim_{n \to \infty} \frac{1000}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \lim_{n \to \infty} \frac{1000}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right).$$

$$= \lim_{n \to \infty} 500 \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 500$$

આમ, $w = 500$ થયેલ કાર્યની સાચી કિંમત છે. અત્રે આપણે બળ F નું [0, 10] અંતરાલ પર x ને સાપેક્ષ સંકલન કર્યું કહેવાય. તેને $\int_0^{10} F(x)\,dx = \int_0^{10} 10x\,dx$ વડે દર્શાવાય છે.

અહીં, આપણે શ્રેણીના લક્ષનો ઉપયોગ કરીએ છીએ. જો (S_n) એ આપેલ શ્રેણી હોય અને જો n અપરિમિત રીતે વધે તો કોઈ ચોક્કસ વાસ્તવિક સંખ્યા l માટે $|S_n - l|$ નું મૂલ્ય 'ખૂબ જ' નાનું થાય, તો જેમ n અનંતને અનુલક્ષે છે તેમ શ્રેણી (S_n) એ l ને અનુલક્ષે છે અથવા શ્રેણીની S_nનું લક્ષ l છે, તેમ કહેવાય. તેને સંકેતમાં $\lim_{n \to \infty} S_n = l$ એમ લખાય. આ અંગે સામાન્ય સમજ આપણે સિમેસ્ટર-III માં e ના પરિચયમાં મેળવી હતી. આ અંગેનો ઊંડો અભ્યાસ આપણે અત્યારે કરવાનો નથી.

વ્યાપક રીતે $\int_a^b f(x)\,dx$ શોધવા માટે $[a, b]$ નું n સમાન ઉપ-અંતરાલોમાં વિભાજન કરીશું. પ્રત્યેક ઉપઅંતરાલની લંબાઈ $h = \left(\frac{b-a}{n}\right)$ થશે. $[a, b]$ નું વિભાજન $[a, a+h], [a+h, a+2h], \ldots, [a+(n-1)h, a+nh]$ માં કરીએ. હવે ઉપરનાં દૃષ્ટાંતમાં કર્યું છે તેમ,

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f[a+(i-1)h] \le \int_a^b f(x)\,dx \le \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a+ih) \text{ મળે.}$$

અને $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a+ih)$ એવું સૂત્ર લઈ શકાય. હવે આ બધા ખ્યાલો અને સમજ પરથી આપણે એક તારણ ઉપર આવ્યાં આ તારણને આપણે એક વ્યાખ્યા તરીકે લઈએ અને તેને આપણે સરવાળાના લક્ષ તરીકે નિયત સંકલનની વ્યાખ્યા કહીએ.

વ્યાખ્યા : ધારો કે $f : [a, b] \to R$ સતત વિધેય છે. કોઈ ધનપૂર્ણાંક n માટે $h = \frac{b-a}{n}$ લઈએ, તો $[a, b]$ નું n એકરૂપ ઉપાંતરાલોમાં વિભાજન કરતાં બિંદુઓ $a, a+h, a+2h, \ldots, a+nh = b$ થશે.

આકૃતિ 3.1

ધારો કે $S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a+ih)$

આમ, f અને $[a, b]$ ના વિભાજન પર આધારિત એક શ્રેણી (S_n) મળે છે. સતત વિધેયનો એ ગુણધર્મ છે કે આ શ્રેણી (S_n)ના લક્ષનું અસ્તિત્વ છે. (S_n)ના લક્ષને f નો $[a, b]$ પર નિયત સંકલિત (Definite integral) કહે છે. તેને સંકેતમાં $\int_a^b f(x)\,dx$ દ્વારા દર્શાવીએ છીએ. આમ,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} f(a+ih) \qquad \text{(i)}$$

a ને નિયત સંકલનની અધઃસીમા (Lower limit) અને b ને નિયત સંકલનની ઊર્ધ્વસીમા (Upper limit) કહે છે.

વળી, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(a + ih)$ પણ $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ થાય તે સિદ્ધ થઈ શકે.

ઉપરની વ્યાખ્યાને **નિયત સંકલિતની સરવાળાના લક્ષ તરીકેની વ્યાખ્યા (Definite Integral as a limit of a sum)** કહે છે. વિધેય f સાથે તેનો નિયત સંકલિત સાંકળવાની ઉપરની ક્રિયાને **નિયત સંકલન (Definite Integration)** કહેવામાં આવે છે.

નોંધ : સતત ન હોય તેવાં કેટલાંક પ્રકારનાં વિધેયો માટે પણ $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ વ્યાખ્યાયિત થઈ શકે. પરંતુ તેની ચર્ચા આપણે અત્રે કરીશું નહી.

સંકેત :

સંકલ્ય

સંકલનની ઉર્ધ્વ સીમા $\rightarrow b$

$\int f(x)\, dx \leftarrow$ સૂચવે છે કે સંકલન xને સાપેક્ષ કર્યું છે.

સંકલનની અધઃ સીમા $\rightarrow a$

a થી b માં f નો સંકલિત

3.3 કેટલાંક અગત્યનાં પરિણામો

(1) $1 + 2 + 3 + ... + n = \sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \sum\limits_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(4) $a + ar + ar^2 + ... + a\,r^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \qquad (r \neq 1)$

(5) $S_n = sin(a + h) + sin(a + 2h) + ... + sin(a + nh)$, જ્યાં $h \neq 2n\pi.\ n \in Z$

આ સરવાળો શોધવા આપણે $2sin\frac{h}{2}$ વડે બંને બાજુએ ગુણીએ,

$$2sin\frac{h}{2} \cdot S_n = \left[2sin(a + h)\, sin\frac{h}{2} + 2sin\,(a + 2h)\, sin\frac{h}{2} + 2sin\,(a + 3h)\, sin\frac{h}{2} + ... + 2sin(a + nh)\, sin\frac{h}{2}\right]$$

$$= \left[cos\left(a + \frac{h}{2}\right) - cos\left(a + \frac{3h}{2}\right)\right] + \left[cos\left(a + \frac{3h}{2}\right) - cos\left(a + \frac{5h}{2}\right)\right] + \left[cos\left(a + \frac{5h}{2}\right) - cos\left(a + \frac{7h}{2}\right)\right] + ... + \left[cos\left(a + nh - \frac{h}{2}\right) - cos\left(a + nh + \frac{h}{2}\right)\right]$$

$$2sin\frac{h}{2} \cdot S_n = \left[cos\left(a + \frac{h}{2}\right) - cos\left(a + nh + \frac{h}{2}\right)\right]$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{cos\left(a + \frac{h}{2}\right) - cos\left(a + nh + \frac{h}{2}\right)}{2sin\frac{h}{2}} \qquad \left(sin\frac{h}{2} \neq 0\right)$$

જો $h = 2n\pi$ તો $S_n = n\, sin\, a$

(6) $S_n = cos(a + h) + cos(a + 2h) + cos(a + 3h) + ... + cos(a + nh)$, જ્યાં $h \neq 2n\pi.\ n \in Z$

આ સરવાળો શોધવા આપણે $2sin\frac{h}{2}$ વડે બંને બાજુએ ગુણીએ.

$$2sin\frac{h}{2} \cdot S_n = \left[2cos(a + h)\, sin\frac{h}{2} + 2cos\,(a + 2h)\, sin\frac{h}{2} + 2cos\,(a + 3h)\, sin\frac{h}{2} + ... + 2cos(a + nh)\, sin\frac{h}{2}\right]$$

$$= \left[sin\left(a + \frac{3h}{2}\right) - sin\left(a + \frac{h}{2}\right)\right] + \left[sin\left(a + \frac{5h}{2}\right) - sin\left(a + \frac{3h}{2}\right)\right] +$$

$$\left[sin\left(a + \frac{7h}{2}\right) - sin\left(a + \frac{5h}{2}\right)\right] + ... + \left[sin\left(a + nh + \frac{h}{2}\right) - sin\left(a + nh - \frac{h}{2}\right)\right]$$

$$2sin\,\frac{h}{2} \cdot S_n = \left[sin\left(a + nh + \frac{h}{2}\right) - sin\left(a + \frac{h}{2}\right)\right]$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{sin\left(a + nh + \frac{h}{2}\right) - sin\left(a + \frac{h}{2}\right)}{2sin\,\frac{h}{2}} \qquad \left(sin\,\frac{h}{2} \neq 0\right)$$

જો $h = 2n\pi$ તો $S_n = n\,cos\,a$

ઉદાહરણ 1 : સરવાળાના લક્ષ તરીકે $\int\limits_1^3 x\,dx$ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, વિધેય $f(x) = x$ એ $[1, 3]$ માં સતત છે. $[1, 3]$નું સમાન લંબાઈના n ઉપાંતરાલોમાં વિભાજન કરતાં, પ્રત્યેક ઉપાંતરાલની લંબાઈ $h = \frac{b - a}{n} = \frac{3 - 1}{n} = \frac{2}{n}$.

અહીં, $a = 1$, $b = 3$ અને $f(a + ih) = f(1 + ih) = 1 + ih$

હવે વ્યાખ્યા પ્રમાણે,

$$\int\limits_1^3 x\,dx = \lim_{n \to \infty} h \sum_{i=1}^{n} f(a + ih)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} f(1 + ih)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} (1 + ih)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n} \left[\sum_{i=1}^{n} 1 + h \sum_{i=1}^{n} i\right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n} \left[n + \frac{2}{n} \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[2 + 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= 2 + 2(1 + 0)$$

$$= 4$$

ઉદાહરણ 2 : સરવાળાના લક્ષ તરીકે $\int\limits_0^2 (3x^2 - 2x + 4)dx$ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, વિધેય $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$ એ $[0, 2]$ માં સતત છે. $[0, 2]$ નું સમાન લંબાઈના n ઉપઅંતરાલમાં વિભાજન કરતાં, પ્રત્યેક ઉપઅંતરાલની લંબાઈ $h = \frac{b - a}{n}$.

$$\therefore \quad h = \frac{2 - 0}{n} = \frac{2}{n}$$

$$\therefore \quad h = \frac{2}{n}$$

અહીં, $a = 0$, $b = 2$, $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$

$f(a + ih) = f(0 + ih)$

$= f(ih)$

$= 3i^2h^2 - 2ih + 4$

વ્યાખ્યા પ્રમાણે,

$$\int_0^2 (3x^2 - 2x + 4)dx = \lim_{n \to \infty} h \sum_{i=1}^{n} f(a + ih)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} (3i^2h^2 - 2ih + 4)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n} \left[3h^2 \sum_{i=1}^{n} i^2 - 2h \sum_{i=1}^{n} i + 4 \sum_{i=1}^{n} 1\right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n} \left[3 \cdot \frac{4}{n^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \cdot \frac{2}{n} \frac{n(n+1)}{2} + 4n\right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[4\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) - 4\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 8\right]$$

$$= 4(1 + 0)(2 + 0) - 4(1 + 0) + 8$$

$$= 8 - 4 + 8$$

$$= 12$$

ઉદાહરણ 3 : સરવાળાના લક્ષ તરીકે $\int_{-1}^{1} a^x dx$ મેળવો. $(a > 0)$

ઉકેલ : અહીં, વિધેય $f(x) = a^x$ એ $[-1, 1]$ માં સતત છે. $[-1, 1]$નું સમાન લંબાઈના n ઉપઅંતરાલોમાં વિભાજન કરતાં, પ્રત્યેક ઉપઅંતરાલની લંબાઈ $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1+1}{n} = \frac{2}{n}$. આથી $nh = 2$.

અહીં, $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = a^x$

$f(a + ih) = f(-1 + ih)$

$= a^{-1 + ih}$

$= a^{-1} \cdot a^{ih}$

$\therefore \quad f(a + ih) = \frac{a^{ih}}{a}$

જેમ $n \to \infty$ તેમ $h \to 0$.

હવે, $$\int_{-1}^{1} a^x dx = \lim_{h \to 0} h \sum_{i=1}^{n} f(a + ih)$$

$$= \lim_{h \to 0} h \sum_{i=1}^{n} \frac{a^{ih}}{a}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{a} [a^h + a^{2h} + a^{3h} + \ldots + a^{nh}]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{a} \left[\frac{a^h(a^{nh} - 1)}{a^h - 1}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{a} \frac{a^h(a^2 - 1)}{\left(\frac{a^h - 1}{h}\right)} \qquad (nh = 2)$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{a^0(a^2-1)}{\log_e a}$$

$$= \left(\frac{a^2-1}{a}\right) \log_a e$$

$$= \left(a - \frac{1}{a}\right) \log_a e$$

ઉદાહરણ 4 : સરવાળાના લક્ષ તરીકે $\int_a^b sin\, x\, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં $f(x) = sin\, x$ વિધેય એ $[a, b]$ માં સતત છે. $[a, b]$ ને સરખી લંબાઈના n ઉપઅંતરાલોમાં વિભાજીત કરીશું. પ્રત્યેક ઉપઅંતરાલની લંબાઈ $h = \frac{b-a}{n}$ થશે.

$\therefore \quad nh = b - a, \; a + nh = b$

$f(a + ih) = sin\,(a + ih)$

જેમ $n \to \infty$ તેમ $h \to 0$.

$$\int_a^b sin\, x\, dx = \lim_{h \to 0} h \sum_{i=1}^{n} f(a + ih)$$

$$= \lim_{h \to 0} h \sum_{i=1}^{n} sin\,(a + ih)$$

$$= \lim_{h \to 0} h\, [sin(a + h) + sin(a + 2h) + sin(a + 3h) + ... + sin(a + nh)]$$

$$= \lim_{h \to 0} h \left[\frac{cos\left(a + \frac{h}{2}\right) - cos\left(a + nh + \frac{h}{2}\right)}{2 sin\, \frac{h}{2}}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{cos\left(a + \frac{h}{2}\right) - cos\left(b + \frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)} \qquad (a + nh = b)$$

$$= \frac{cos\, a - cos\, b}{1} \qquad (cosine \text{ સતત છે.})$$

$$= cosa - cosb$$

નોંધ : $h \to 0$ હોવાથી આપણે $|h| < 2\pi \le 2|k|\pi$ લઈ શકીએ. $k \in Z - \{0\}$

સ્વાધ્યાય 3.1

નીચે આપેલાં નિયત સંકલિતોને સરવાળાના લક્ષ સ્વરૂપે મેળવો :

1. $\int_0^2 (x + 3)dx$ **2.** $\int_2^4 (2x - 1)dx$ **3.** $\int_1^3 (2x^2 + 7)dx$

4. $\int_1^3 (x^2 + x)dx$ **5.** $\int_{-1}^1 e^x\, dx$ **6.** $\int_0^1 e^{2-3x}\, dx$

7. $\int_1^2 3^x\, dx$ **8.** $\int_{\log_e 2}^{\log_e 5} e^x\, dx$ **9.** $\int_0^2 (e^x - x)\, dx$

10. $\int_{\log_a 2}^{\log_a 4} a^x \, dx$ **11.** $\int_0^2 (6x^2 - 2x + 7)\, dx$ **12.** $\int_a^b \cos x \, dx$

13. $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$ **14.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$ **15.** $\int_1^3 x^3 \, dx$

*

3.4 નિયત સંકલનનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત :

આપણે નિયત સંકલન સરવાળાના લક્ષ તરીકે કેવી રીતે મેળવાય તે જોયું. તેના આધારે આપણે એટલું કહી શકીએ કે નિયત સંકલન સરવાળાના લક્ષ તરીકે મેળવવું એટલું સરળ નથી, બલ્કે કંટાળાજનક છે. નિયત સંકલનના મૂળભૂત સિદ્ધાંતના ઉપયોગથી આપણે જોઈ શકીશું કે આ કપરુ કામ ખૂબ સરળ બને છે.

નીચેના સિદ્ધાંતને **નિયત સંકલનનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત (Fundamental Principle of Definite Integration) કહે છે.**

સિદ્ધાંત : ધારો કે વિધેય f એ $[a, b]$ પર સતત છે તથા F એ (a, b) પર વ્યાખ્યાયિત એવું વિકલનીય વિધેય છે, કે જેથી $\forall x \in (a, b)$, $\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$ થાય, તો $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$

આ સિદ્ધાંતને નિયત સંકલનનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત કહે છે. અહીં, $F(x)$ એ $f(x)$ નો પ્રતિવિકલિત છે. $F(b) - F(a)$ ને સંકેત $[F(x)]_a^b$ દ્વારા દર્શાવીશું.

આમ, આ મૂળભૂત સિદ્ધાંતથી આપણે સંકલન અને વિકલન વચ્ચેનો સંબંધ પ્રસ્થાપિત કરી શકીએ છીએ. ન્યૂટન અને લિબનીટ્ઝે સ્વતંત્ર રીતે સાબિત કરેલા આ પરિણામની મદદથી આપેલ વિધેયનો આપેલ અંતરાલ પરનો નિયત સંકલિત, અંતરાલનાં અંત્યબિંદુઓએ તે વિધેયના પ્રતિવિકલિતનાં મૂલ્યોનો તફાવત લેવાથી મળે છે. આપણે આ ખૂબ જ ઉપયોગી પરિણામ સાબિતી વિના સ્વીકારીશું.

નોંધ : (1) અહીં $\forall x \in (a, b)$, $\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$ હોવાથી,

ધારો કે $\int f(x)\, dx = F(x) + c$, જ્યાં c સ્વૈર અચળ છે.

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x) + c]_a^b$$
$$= [F(b) + c] - [F(a) + c]$$
$$= F(b) + c - F(a) - c$$
$$= F(b) - F(a)$$

આમ, નિયત સંકલનમાં સ્વૈર અચળ c નો લોપ થાય છે અને આપણને સંકલિતનું નિશ્ચિત મૂલ્ય મળે છે.

$\therefore$ નિયત સંકલન એક નિશ્ચિત સંખ્યા છે, તેમાં સંકલનનો અચળ નથી. તેથી જ આવું સંકલન મેળવવાની ક્રિયાને નિયત સંકલન કહે છે.

(2) જો $a > b$ તો $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$ તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

વળી, આપણે સ્વીકારી લઈશું કે જો $a = b$ તો,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

(3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$, જ્યાં f એ $[a, b]$ પર સતત છે.

ધારો કે $F(x)$ એ $f(x)$ નું પ્રતિવિકલિત છે. તેથી નિયત સંકલનના મૂળભૂત સિદ્ધાંત મુજબ,

$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ અને

$\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

આમ, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$.

તેથી કહી શકાય કે નિયત સંકલનનું મૂલ્ય સ્વતંત્ર ચલ x પર અવલંબિત નથી.

આ પ્રકરણમાં આગળ આપણે નિયત સંકલન સરવાળા લક્ષથી કેવી રીતે મેળવાય તે જોયુ. હવે આપણે આગળનાં ઉદાહરણો 1 થી 4 માં સરવાળાના લક્ષ તરીકે મેળવેલાં નિયત સંકલિતનાં મૂલ્યો નિયત સંકલનના મૂળભૂત સિદ્ધાંતથી કેટલી સરળતાથી મળે છે તે જોઈશું.

(1) $\int_1^3 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \left[\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right] = \left[\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right] = \frac{8}{2} = 4$

(2) $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 4)\,dx = \left[\frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 4x\right]_0^2 = [8 - 4 + 8] = 12$

(3) $\int_{-1}^1 a^x\,dx = \left[\frac{a^x}{\log_e a}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{\log_e a}(a^1 - a^{-1}) = \left(a - \frac{1}{a}\right)\log_a e$.

(4) $\int_a^b \sin x\,dx = [-\cos x]_a^b = -[\cos b - \cos a] = \cos a - \cos b$

3.5 નિયત સંકલનના કાર્યનિયમો

(1) જો વિધેય f અને g એ $[a, b]$ પર સતત હોય, તો

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

સાબિતી : ધારો કે $F(x)$ અને $G(x)$ એ અનુક્રમે $f(x)$ અને $g(x)$ ના $[a, b]$ પરના પ્રતિવિકલિતો છે.

$\therefore$ $F(x) + G(x)$ એ $f(x) + g(x)$ નો પ્રતિવિકલિત થશે.

$\therefore$ નિયત સંકલનના મૂળભૂત સિદ્ધાંત મુજબ,

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx &= [F(x) + G(x)]_a^b \\ &= [F(b) + G(b)] - [F(a) + G(a)] \\ &= [F(b) - F(a)] + [G(b) - G(a)] \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

(2) જો વિધેય f એ $[a, b]$ પર સતત હોય અને $k \in R$ અચળ હોય, તો $\int_a^b k f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$.

સાબિતી : ધારો કે $F(x)$ એ $f(x)$ નો $[a, b]$ પરનો પ્રતિવિકલિત છે અને $k \in R$ કોઈ અચળ છે.

$\therefore$ $kF(x)$ એ વિધેય $kf(x)$ નો પ્રતિવિકલિત છે.

$\therefore$ નિયત સંકલનના મૂળભૂત સિદ્ધાંત મુજબ,

$$\begin{aligned}\int_a^b k f(x)\, dx &= [kF(x)]_a^b \\ &= kF(b) - kF(a) \\ &= k[F(b) - F(a)] \\ &= k \int_a^b f(x)\, dx\end{aligned}$$

(3) જો વિધેય f એ $[a, b]$ પર સતત હોય અને $a < c < b$ હોય, તો

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

સાબિતી : ધારો કે $F(x)$ એ $f(x)$ નો $[a, b]$ પરનો પ્રતિવિકલિત છે.

$\therefore$ નિયત સંકલનના મૂળભૂત સિદ્ધાંત મુજબ,

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^c f(x)\, dx = [F(x)]_a^c = F(c) - F(a)$$

$$\int_c^b f(x)\, dx = [F(x)]_c^b = F(b) - F(c)$$

હવે, $$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx &= F(c) - F(a) + F(b) - F(c) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x)\, dx\end{aligned}$$

આમ, જો $a < c < b$ હોય, તો $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$.

આ પરિણામ, અંતરાલ $[a, b]$ ના બે કરતાં વધુ નિશ્ચિત સંખ્યાના વિભાજન માટે સાચું છે. જો $a < c < d < b$ હોય, તો

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^d f(x)\, dx + \int_d^b f(x)\, dx.$$

હવે જો c એ a અને b ની વચ્ચે ન હોય, તો પણ આ પરિણામ સાચું છે, જ્યાં $a < c$. જો $a < b < c$ હોય અને f એ $[a, c]$માં સતત હોય તો,

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$$

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

ઉદાહરણ 5 : કિંમત શોધો : **(1)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3 x\ dx$ **(2)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - sin 2x}\ dx$

ઉકેલ : (1) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3 x\ dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos 3x + 3 cos x}{4}\ dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos\ 3x + 3 cos\ x)\ dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{sin 3x}{3} + 3 sin\ x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{3} sin\ \frac{3\pi}{2} + 3 sin\ \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} sin\ 0 + 3 sin\ 0\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[\left(-\frac{1}{3} + 3\right) - (0 + 0)\right]$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{8}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

(2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - sin 2x}\ dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{sin^2 x + cos^2 x - 2 sin x cos x}\ dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(cos x - sin x)^2}\ dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\, cos\ x - sin\ x \,|\ dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (cos\ x - sin\ x)\ dx$$

$\left(0 < x < \frac{\pi}{4}\right.$ હોવાથી $\left. cos\ x > sin\ x.\right)$

$$= [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4}\right) - (\sin 0 + \cos 0)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (0 + 1) = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

ઉદાહરણ 6 : કિંમત શોધો : (1) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\, dx$ (2) $\int_0^2 \frac{5x+2}{x^2+4}\, dx$

ઉકેલ : (1) $$I = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\, dx$$

$$= \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}}\, dx$$

$$= \left[\log \left| x + 1 + \sqrt{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2} \right|\right]_0^3$$

$$= \left[\log \left(x + 1 + \sqrt{x^2+2x+3}\right)\right]_0^3 \qquad (x \in (0, 3))$$

$$= \log (4 + \sqrt{9+6+3}) - \log (1 + \sqrt{3})$$

$$= \log (4 + 3\sqrt{2}) - \log (\sqrt{3} + 1)$$

$$= \log \left(\frac{4+3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)$$

(2) $$I = \int_0^2 \frac{5x+2}{x^2+4}\, dx$$

$$= \int_0^2 \frac{5x}{x^2+4}\, dx + \int_0^2 \frac{2}{x^2+4}\, dx$$

$$= \frac{5}{2}\int_0^2 \frac{2x}{x^2+4}\, dx + 2\int_0^2 \frac{1}{x^2+2^2}\, dx$$

$$= \frac{5}{2}\left[\log (x^2 + 4)\right]_0^2 + \frac{2}{2}\left[\tan^{-1} \frac{x}{2}\right]_0^2$$

$$= \frac{5}{2}[\log 8 - \log 4] + \left[\tan^{-1}1 - \tan^{-1}0\right]$$

$$= \frac{5}{2}\log\left(\frac{8}{4}\right) + \left[\frac{\pi}{4} - 0\right]$$

$$= \left(\frac{5}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4}\right)$$

ઉદાહરણ 7 : $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ નું મૂલ્ય મેળવો, જ્યાં $f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \le x \le \pi \\ 1 + \cos x & \pi < x \le 2\pi \end{cases}$

ઉકેલ : (1) $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} f(x)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x)\,dx$

$$= \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} (1 + \cos x)\,dx$$

$$= [-\cos x]_0^{\pi} + [x + \sin x]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= -[\cos\pi - \cos 0] + [(2\pi + \sin 2\pi) - (\pi + \sin \pi)]$$

$$= -[-1 - 1] + [(2\pi + 0) - (\pi + 0)]$$

$$= 2 + \pi = \pi + 2$$

3.6 નિયત સંકલન માટે આદેશ (ચલપરિવર્તન)ની રીત :

આપણે અનિયત સંકલન માટે આદેશની રીત શીખ્યા. આપણે જોયું કે સંકલ્ય $f(x)$ પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં ન હોય અથવા પ્રમાણિત રૂપમાં મૂકી શકાય તેવું પ્રત્યક્ષ રીતે જણાતું ન હોય, તો સંકલન શોધવા માટે આદેશની રીતે ખૂબ જ ઉપયોગી પૂરવાર થાય છે. હવે આપણે નિયત સંકલનના મૂળભૂત સિદ્ધાંતને ધ્યાનમાં રાખી આદેશની રીતનો નિયત સંકલનમાં પણ ઉપયોગ કરી શકીએ.

નિયત સંકલન માટે આદેશનો નિયમ :

$f : [a, b] \to R$ સતત વિધેય છે અને $g : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ એ વધતું અથવા ઘટતું (એકસૂત્રી Monotonic) વિધેય છે. $x = g(t)$ એ $[\alpha, \beta]$માં સતત અને (α, β) પર વિકલનીય વિધેય છે. $g'(t)$ એ (α, β) માં સતત છે. $g'(t) \ne 0$, $\forall\, t \in (\alpha, \beta)$ તથા $a = g(\alpha)$ અને $b = g(\beta)$.

તો $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))\,g'(t)\,dt$

હવે નિયત સંકલન માટે આદેશના નિયમનો ઉપયોગ કેવી રીતે વાપરી શકાય તે અંગે સમજ કેળવવા કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 8 : કિંમત મેળવો : **(1)** $\int_1^9 \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$ **(2)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x + 4\sin x}$ **(3)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2t}{\sin^4 t + \cos^4 t}\,dt$

ઉકેલ : (1) $I = \int_1^9 \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$

$t \ge 1$ માટે $x = t^2$ લેતાં, $dx = 2t\,dt$

અહીં, $x = 1$ ત્યારે $t = 1$ અને $x = 9$ ત્યારે $t = 3$ $(x = t^2,\ t \ge 1)$

અહીં $x = g(t) = t^2$ એ $t \ge 1$ માટે વધતું વિધેય છે. વળી તે $[1, 3]$ માં સતત અને $(1, 3)$ માં વિકલનીય છે.

$(1, 3)$ માં $g'(t) = 2t \ne 0$.

$\therefore\ \alpha = 1, \beta = 3$

$$\therefore \quad I = \int_1^9 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$$

$$= \int_1^3 \frac{2t\,dt}{t^2+t} \qquad (\sqrt{x} = t \geq 1 \text{ કારણ કે } t \geq 1)$$

$$= 2\int_1^3 \frac{1}{t+1}\,dt \qquad (t \neq 0)$$

$$= 2[\log (t+1)]_1^3$$

$$= 2[\log 4 - \log 2]$$

$$= 2 \log 2$$

(2) $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x + 4\sin x}$$

$\tan \frac{x}{2} = t$ લેતાં, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

જ્યારે, $x = 0$ ત્યારે $t = \tan 0 = 0$ અને $x = \frac{\pi}{2}$ તો $t = \tan\frac{\pi}{4} = 1$ $\qquad (\alpha = 0, \beta = 1)$

$$\therefore \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x + 4\sin x}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)+4\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{1-t^2+4t}$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{5-(t^2-4t+4)}$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{(\sqrt{5})^2-(t-2)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\log\left|\frac{\sqrt{5}+(t-2)}{\sqrt{5}-(t-2)}\right|\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\log\left|\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right| - \log\left|\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}\right|\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}}\log\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \times \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\right) \qquad (\sqrt{5} - 2 > 0)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}} \log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}} \log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} \times \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}} \log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\mathrm{I} = \frac{1}{\sqrt{5}} \log\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \log\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \log\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$$ લખી શકાય.

(3) $\mathrm{I} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2t}{\sin^4 t + \cos^4 t}\, dt$

$\sin^2 t = x$ લેતાં, $2\sin t \cos t\, dt = dx$ એટલે કે $\sin 2t\, dt = dx$

જ્યારે $t = 0$ ત્યારે $x = 0$ અને જ્યારે $t = \frac{\pi}{2}$ ત્યારે $x = 1$ **($\alpha = 0, \beta = 1$)**

$$\therefore \quad \mathrm{I} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2t}{\sin^4 t + \cos^4 t}\, dt$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2 + (1-x)^2}$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[2 \tan^{-1}\left(\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)\right]_0^1$$

$$= [\tan^{-1}(2x - 1)]_0^1$$

$$= \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(-1)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

3.7 નિયત સંકલન માટે ખંડશઃ સંકલનની રીત :

અનિયત સંકલનમાં આપણે બે વિધેયોના ગુણાકારનું સંકલિત શોધવા માટે ખંડશઃ સંકલનની રીતનો અભ્યાસ કર્યો. હવે આપણે નિયત સંકલનના મૂળભૂત સિદ્ધાંતને લક્ષમાં લઈને ખંડશઃ સંકલનની રીતનો પણ નિયત સંકલનમાં ઉપયોગ કરી શકીએ.

ખંડશઃ સંકલનનો ઉપયોગ નિયત સંકલનમાં નીચેના સૂત્ર દ્વારા કરી શકાય.

$f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$, $g'(x)$ બધાં જ $[a, b]$ પર સતત હોય તો

$$\int_a^b f(x)\ g'(x)\,dx = [f(x)\ g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\ g(x)\,dx$$

$$\therefore \int_a^b f(x)\ g'(x)\,dx = [f(b)\ g(b) - f(a)\ g(a)] - \int_a^b f'(x)\ g(x)\,dx$$

હવે આ નિયમનો કેવી રીતે ઉપયોગ કરી શકાય તે સમજવા કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈશું.

ઉદાહરણ 9 : કિંમત શોધો : **(1)** $\int_0^1 x\,tan^{-1}x\ dx$ **(2)** $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{sin^{-1}x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$ **(3)** $\int_0^1 \frac{x\,dx}{(1+x^2)(2+x^2)}$

ઉકેલ : (1) $I = \int_0^1 x\,tan^{-1}x\ dx$

$$= \left[tan^{-1}x \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$= \left(tan^{-1}(1) \cdot \frac{1}{2} - 0\right) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\ dx$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2} - 0\right) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)-(1)}{x^2+1}\ dx$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\,[x - tan^{-1}x]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\,[(1 - tan^{-1}1) - (0 - tan^{-1}0)]$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

(2) $I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{sin^{-1}x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

$sin^{-1}x = t$ લેતાં $x = sin\, t$, $dx = cos\, t\, dt$, $x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

જ્યારે $x = 0$ ત્યારે $t = sin^{-1}0 = 0$ અને જ્યારે $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ત્યારે $t = sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$ $\left(\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{sin^{-1}x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{(1 - sin^2t)^{\frac{3}{2}}} \cdot cost\ dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\, sec^2t\, dt$ $\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right]\text{માં}\ cos\, t > 0\right)$

$= [t \cdot tan\, t]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan\, t\, dt$

$= [t \cdot tan\, t]_0^{\frac{\pi}{4}} + [\log |cos\, t|]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \left(\frac{\pi}{4}\, tan\, \frac{\pi}{4} - 0\right) + \left[\log\left(cos\, \frac{\pi}{4}\right) - \log\, (cos\, 0)\right]$

$= \frac{\pi}{4} + \log \frac{1}{\sqrt{2}} - \log 1$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2$

(3) $I = \int_0^1 \frac{x\, dx}{(1+x^2)(2+x^2)}$

$x \geq 0$ માટે $x^2 = t$ લેતાં $2x\, dx = dt$. તેથી $x\, dx = \frac{1}{2}\, dt$

જ્યારે $x = 0$ ત્યારે $t = 0$ અને જ્યારે $x = 1$ ત્યારે $t = 1$

$\therefore I = \int_0^1 \frac{x\, dx}{(1+x^2)(2+x^2)} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{(t+1)(t+2)}$

હવે, ધારો કે $\frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2}$

$\therefore \quad 1 = A(t+2) + B(t+1)$

જો $t = -2$ તો $1 = -B$. તેથી $B = -1$

જો $t = -1$ તો $1 = A$. તેથી $A = 1$

$\therefore \quad \frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{1}{t+1} + \frac{-1}{t+2}$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{(t+1)(t+2)} = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{t+1} + \frac{-1}{t+2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log|t+1| - \log|t+2|\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{t+1}{t+2}\right|\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log\frac{2}{3} - \log\frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{4}{3}$$

ઉદાહરણ 10 : $\int_0^{2\pi} \sin ax \cdot \sin bx \, dx,\ a, b \in N$ નું મૂલ્ય મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int_0^{2\pi} \sin ax \cdot \sin bx \, dx$

વિકલ્પ 1 : $a \neq b$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 2\sin ax \cdot \sin bx \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(a-b)x}{a-b} - \frac{\sin(a+b)x}{a+b}\right]_0^{2\pi}$$ ($a \neq b$ અને $a + b \neq 0$ કારણ કે $a, b \in N$)

$$= \frac{1}{2}(0 - 0)$$ (કેમ ?)

$\therefore \quad I = 0$

વિકલ્પ 2 : $a = b$

$$I = \int_0^{2\pi} \sin^2 ax \, dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos 2ax}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2ax}{2a}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(2\pi - \frac{\sin 4\pi a}{2a}\right) - (0 - 0)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi) \qquad \text{(કેમ } \sin 4\pi a = 0 \text{ ?)}$$

$\therefore \quad I = \pi$

$$\therefore \int_0^{2\pi} \sin ax \cdot \sin bx \; dx = \begin{cases} 0 & \text{જ્યાં } a \neq b \\ \pi & \text{જ્યાં } a = b \end{cases}$$

ઉદાહરણ 11 : જો અચળ $\alpha > 0$ માટે $f(x + \alpha) = f(x)$, $\forall x \in R$ એટલે કે વિધેય f નું આવર્તમાન α હોય તો સાબિત કરો કે

$\int_0^{n\alpha} f(x)\,dx = n\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$, જ્યાં $n \in N$ અને તે પરથી $\int_0^{10\pi} |\sin x|\; dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int_0^{n\alpha} f(x)\,dx$, $n \in N$

$$= \int_0^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{2\alpha} f(x)\,dx + \int_{2\alpha}^{3\alpha} f(x)\,dx + ... + \int_{k\alpha}^{(k+1)\alpha} f(x)\,dx + ... + \int_{(n-1)\alpha}^{n\alpha} f(x)\,dx$$

અહીં આપણે સાબિત કરીશું કે ઉપરનાં n સંકલિતો પૈકી પ્રત્યેક સંકલિતનું મૂલ્ય $\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$ છે.

$I_k = \int_{k\alpha}^{(k+1)\alpha} f(x)\,dx$ લઈએ. $\qquad [k = 1, 2, ..., (n - 1)]$

ધારો કે $x = k\alpha + t$. આથી $dx = dt$

વળી જ્યારે $x = k\alpha$ ત્યારે $t = 0$ અને જ્યારે $x = (k + 1)\alpha$ ત્યારે $t = \alpha$.

$$\therefore \quad I_k = \int_0^{\alpha} f(k\alpha + t)\,dt$$

હવે જો વિધેય f નું આવર્તમાન α હોય તો α ના પૂર્ણાંક ગુણકો એટલે કે $k\alpha$ પણ f નાં આવર્તમાન થાય. $(k \in N)$

$\therefore \quad f(k\alpha + t) = f(t)$

$$\therefore \quad I_k = \int_0^{\alpha} f(t)\,dt = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx$$

એટલે કે $\int_{k\alpha}^{(k+1)\alpha} f(x)\,dx = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx \qquad [k = 1, 2, 3, ..., n - 1]$

$$\therefore \quad I = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx + \int_0^{\alpha} f(x)\,dx + ... + \int_0^{\alpha} f(x)\,dx \text{ (n વખત)}$$

$$= n\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$$

હવે, $I = \int_{0}^{10\pi} |\sin x| \, dx.$

$= 10 \int_{0}^{\pi} |\sin x| \, dx$ ($|\sin x|$ નું આવર્તમાન π છે)

$= 10 \int_{0}^{\pi} \sin x \, dx$ ($0 \le x \le \pi$ માટે $\sin x \ge 0$)

$= 10 [-\cos x]_{0}^{\pi}$

$= -10 [\cos\pi - \cos 0]$

$= -10 (-1 - 1)$

$= -10 (-2)$

$= 20$

ઉદાહરણ 12 : કિંમત મેળવો : $\int_{-1}^{3} |2x - 1| \, dx$

ઉકેલ : $2x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{2}$

$\therefore \quad |2x - 1| = \begin{cases} 2x-1 & x \ge \frac{1}{2} \\ 1-2x & x < \frac{1}{2} \end{cases}$

હવે, $-1 < \frac{1}{2} < 3$

$\therefore \quad I = \int_{-1}^{3} |2x - 1| \, dx$

$= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} |2x - 1| \, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{3} |2x - 1| \, dx$

$= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (1 - 2x) \, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{3} (2x - 1) \, dx$

$= [x - x^2]_{-1}^{\frac{1}{2}} + [x^2 - x]_{\frac{1}{2}}^{3}$

$= \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - (-1 - 1)\right] + \left[(9 - 3) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right]$

$= \left(\frac{1}{4} + 2\right) + \left(6 + \frac{1}{4}\right)$

$= \frac{17}{2}$

સ્વાધ્યાય 3.2

નીચેનાની કિંમત મેળવો (1 to 35) :

1. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}\,dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^2x\ dx$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2x\ dx$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tan\,x\ dx$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-cos\,2x}\ dx$

6. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-sin\,2x}\ dx$

7. $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\ dx$

8. $\int_2^5 \frac{2x}{5x^2+1}\ dx$

9. $\int_0^1 \frac{2x+3}{5x^2+1}\ dx$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^2x}{(1+cos\,x)^2}\ dx$

11. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}\ dx$

12. $\int_0^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

13. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{cosx\ dx}{\sqrt{2-sin^2x}}\ dx$

14. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

15. $\int_0^1 tan^{-1}x\ dx$

16. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{12+4x-x^2}}$

17. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2cos\ 2x\ dx$

18. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{xsin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

19. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2sinx+cosx}$

20. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2+3cos^2x}$

21. $\int_0^1 sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\ dx$

22. $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\ dx$

23. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos\ x}{(1+sinx)(2+sinx)(3+sinx)}\ dx$

24. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{sin\ x+cos\ x}{1+cos2x}\ dx$

25. $\int_1^2 \frac{1}{x(1+x^2)}\ dx$

26. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} cos\ 2x\cdot\log\ sin\ x\ dx$

27. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+2cosx}\ dx$

28. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4sin^2x+5cos^2x}\ dx$

29. $\int_0^{2\pi} |\,cosx\,|\ dx$

30. $\int_1^4 f(x)\,dx$, જ્યાં $f(x) = \begin{cases} 2x+8 & 1 \le x \le 2 \\ 6x & 2 < x \le 4 \end{cases}$

31. $\int_{0}^{9} f(x)\,dx$, જ્યાં $f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2} < x \le 5 \\ e^{x-5} & 5 < x \le 9 \end{cases}$

32. $\int_{0}^{1} |5x - 3|\,dx$

33. $\int_{0}^{2} |x^2 + 2x - 3|\,dx$

34. $\int_{0}^{2\pi} \sin ax \cos bx\,dx \quad \forall a, b \in Z - \{0\}$

35. $\int_{0}^{2\pi} \sin mx \cos nx\,dx \quad \forall m, n \in N$

36. જો $\int_{\sqrt{2}}^{k} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\pi}{12}$, તો k શોધો.

37. જો $\int_{0}^{k} \frac{dx}{2 + 8x^2} = \frac{\pi}{16}$, તો k શોધો.

38. જો $\int_{0}^{a} \sqrt{x}\,dx = 2a \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$, તો $\int_{a}^{a+1} x\,dx$ નું મૂલ્ય શોધો.

*

3.8 નિયત સંકલન માટે કેટલાંક ઉપયોગી પરિણામો

પ્રમેય 3.1 : જો f એ $[0, a]$ માં સતત હોય તો $\int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(a - x)\,dx$

સાબિતી : ધારો કે $I = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$

$x = g(t) = a - t$ લેતાં, $dx = -dt$

વળી, $x = g(t)$ એ $[0, a]$ માં એકસૂત્રી ઘટતું તથા સતત વિધેય છે.

$\frac{dx}{dt} = -1$ એ $(0, a)$ માં સતત છે.

અહીં જો $x = 0$ તો $t = a$. જો $x = a$ તો $t = 0$. આમ $\alpha = a$, $\beta = 0$

$$\therefore \quad I = \int_{a}^{0} f(a - t)(-dt)$$

$$= -\int_{a}^{0} f(a - t)\,dt$$

$$= \int_{0}^{a} f(a - t)\,dt$$

$$= \int_{0}^{a} f(a - x)\,dx$$

$$\therefore \quad \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(a - x)\,dx$$

હવે આ પ્રમેયનો ઉપયોગ સમજવા એક ઉદાહરણ લઈએ.

$\int\limits_0^{2\pi} cos^3x\, sin^5x\ dx$ મેળવો.

$$I = \int\limits_0^{2\pi} cos^3x\, sin^5x\ dx$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} cos^3(2\pi - x)\, sin^5(2\pi - x)\ dx$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (cos^3x)\ (-sin^5x)\ dx$$

$$= -\int\limits_0^{2\pi} cos^3x\ sin^5x\ dx = -I$$

$\therefore\ I = -I$

$\therefore\ 2I = 0$

$\therefore\ I = 0$

પ્રમેય 3.2 : જો વિધેય f એ $[a, b]$ માં સતત હોય તો, $\int\limits_a^b f(x)\ dx = \int\limits_a^b f(a + b - x)\ dx$

સાબિતી : ધારો કે $I = \int\limits_a^b f(x)\ dx$

$x = a + b - t$ લો. તેથી $dx = -dt$

$\therefore\ x = g(t) = a + b - t$ એ $[a, b]$ માં ઘટતું તથા સતત વિધેય છે.

$\frac{dx}{dt} = -1$ એ (a, b) પર સતત છે.

અહીં, જો $x = a$ તો $t = b$ અને જો $x = b$ તો $t = a$. આમ $\alpha = b$ અને $\beta = a$

$$\therefore\ I = \int\limits_b^a f(a + b - t)(-dt)$$

$$= -\int\limits_b^a f(a + b - t)\ dt$$

$$= \int\limits_a^b f(a + b - t)\ dt$$

$$= \int\limits_a^b f(a + b - x)\ dx$$

$$\therefore\ \int\limits_a^b f(x)\ dx = \int\limits_a^b f(a + b - x)\ dx$$

(જુઓ કે પ્રમેય 3.2માં $a = 0$ હોય તથા b ના બદલે a સંકેતનો ઉપયોગ કરીએ તો પ્રમેય 3.1 મળે.)

આ પ્રમેયનો ઉપયોગ કેવી રીતે કરવો તે સમજવા એક ઉદાહરણ લઈશું.

$\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3-x}+\sqrt{x}}\,dx$ મેળવો.

$$I = \int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3-x}+\sqrt{x}}\,dx \qquad \text{(i)}$$

$$= \int_1^2 \frac{\sqrt{(1+2)-x}}{\sqrt{3-(1+2-x)}+\sqrt{1+2-x}}\,dx \qquad (a+b=1+2=3)$$

$$= \int_1^2 \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{3-x}}\,dx \qquad \text{(ii)}$$

પરિણામ (i) અને (ii), નો સરવાળો કરતાં,

$$2I = \int_1^2 \frac{\sqrt{x}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{3-x}}\,dx$$

$$= \int_1^2 1\,dx = [x]_1^2 = 2 - 1 = 1$$

$\therefore \quad 2I = 1$

$\therefore \quad I = \frac{1}{2}$

પ્રમેય 3.3 : જો વિધેય f એ $[0, 2a]$ પર સતત હોય તો,

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$$

સાબિતી : અહીં $0 < a < 2a$

$$\therefore \quad \int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx \qquad \text{(i)}$$

$I = \int_a^{2a} f(x)\,dx$ લો.

ધારો કે $x = g(t) = 2a - t$. તેથી $dx = -dt$

$x = g(t)$ એ $[a, 2a]$ માં ઘટતું વિધેય છે. $\frac{dx}{dt} = -1$ એ $(a, 2a)$ માં સતત છે.

વળી, જ્યારે $x = a$ ત્યારે $t = a$ અને જ્યારે $x = 2a$ ત્યારે $t = 0$. $\qquad (\alpha = a, \beta = 0)$

$$I = \int_a^0 f(2a-t)(-dt)$$

$$= -\int_a^0 f(2a-t)\,dt$$

$$= \int_0^a f(2a-t)\,dt$$

$$I = \int_0^a f(2a-x)\,dx$$

હવે, I ની કિંમત (i) માં મૂકતાં,

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$$

ઉપપ્રમેય : જો $\forall x \in [0, 2a]$, $f(2a - x) = f(x)$, તો $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

જો $\forall x \in [0, 2a]$, $f(2a - x) = -f(x)$, તો $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 0$

સાબિતી : $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$ (i)

હવે, $f(2a - x) = f(x)$ લેતાં (i), પરથી

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

અને જો $f(2a - x) = -f(x)$ હોય તો (i) પરથી

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx = 0$$

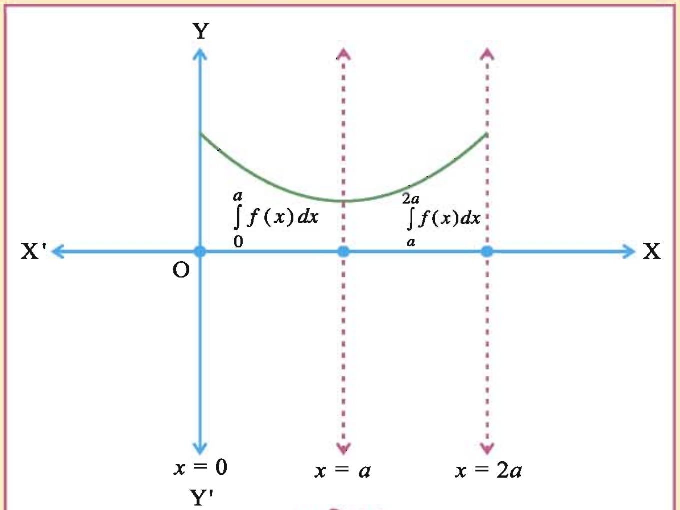
$$\therefore \int_0^{2a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx & \text{જ્યાં } f(2a-x)=f(x) \quad \forall x \in [0, 2a] \\ 0 & \text{જ્યાં } f(2a-x)=-f(x) \quad \forall x \in [0, 2a] \end{cases}$$

નોંધ : (1) આપણે પ્રકરણ 4માં જોઈશું કે $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$ એ વક્ર $y = f(x)$, રેખા $x = a$, રેખા $x = b$ અને X-અક્ષ દ્વારા આવૃત્ત ક્ષેત્રફળ દર્શાવે છે. તે સંદર્ભમાં આપણે ઉપરના ઉપપ્રમેયનું અર્થઘટન કરીએ.

(2) જો $f(2a - x) = f(x)$, તો આલેખ આકૃતિ 3.2માં દર્શાવ્યા મુજબ $x = a$ પ્રત્યે સંમિત હશે.

$$\therefore \int_a^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx$$

$$\therefore \int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$



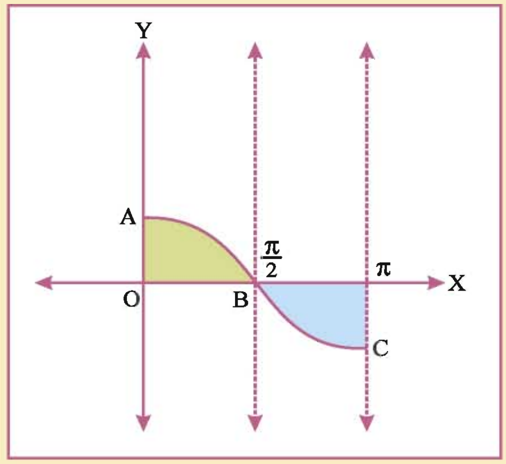
આકૃતિ 3.2

જો $f(2a - x) = -f(x)$, તો $f(x)$ નો આલેખ આકૃતિ 3.3માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે હશે.

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\ dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\, dx$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\, dx = 0$

$\therefore \int_0^{\pi} f(x)\, dx = 0$



આકૃતિ 3.3

હવે, આ પ્રમેયનો ઉપયોગ કેવી રીતે કરી શકાય તે સમજવા એક ઉદાહરણ લઈશું.

$\int_0^{2\pi} cos^3x\, dx$ મેળવીએ.

$$I = \int_0^{2\pi} cos^3x\, dx.$$

જો $f(x) = cos^3x$ તો

$$f(2\pi - x) = cos^3(2\pi - x) = cos^3x = f(x)$$

$\therefore \int_0^{2\pi} cos^3x\, dx = 2\int_0^{\pi} cos^3x\ dx$ $\qquad (a = \pi, f(2a - x) = f(x))$

હવે, $f(\pi - x) = cos^3(\pi - x) = -cos^3x = -f(x)$ $\qquad \left(a = \frac{\pi}{2}, f(2a - x) = -f(x)\right)$

$\therefore \int_0^{\pi} cos^3x\ dx = 0$

આમ, $\int_0^{2\pi} cos^3x\, dx = 2\int_0^{\pi} cos^3x\ dx = 2 \times 0 = 0$

યુગ્મ અને અયુગ્મ વિધેયો વિશે આપણે સમજ મેળવી જ છે તે યાદ કરીએ તો, $f : A \to R$ એ વાસ્તવિક ચલનું વાસ્તવિક વિધેય હોય, તથા $\forall x \in A, -x \in A$,

(i) જો $f(-x) = f(x), \forall x \in A$ થાય તો f ને યુગ્મ વિધેય કહે છે.

(ii) જો $f(-x) = -f(x), \forall x \in A$ થાય તો f ને અયુગ્મ વિધેય કહે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, $cosx$, $secx$, x^2 એ યુગ્મ વિધેયો છે અને $sinx$, $tanx$, x^3 એ અયુગ્મ વિધેયો છે.

પ્રમેય 3.4 : જો f એ $[-a, a]$ પર સતત અને યુગ્મ વિધેય હોય તો $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx$

સાબિતી : અહીં $-a < 0 < a$.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx \qquad \text{(i)}$$

$$I = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx$$

ધારો કે $x = -t$, $dx = -dt$

વળી, જ્યારે $x = -a$ ત્યારે $t = a$ અને જ્યારે $x = 0$ ત્યારે $t = 0$.

અહીં, $\frac{dx}{dt} = -1$ શૂન્યેતર છે અને $\frac{dx}{dt}$ એ $(-a, 0)$ પર સતત છે.

$$\therefore \quad I = \int_{a}^{0} f(-t)(-dt)$$

$$= -\int_{a}^{0} f(-t)\, dt$$

$$= \int_{0}^{a} f(-t)\, dt$$

$$= \int_{0}^{a} f(t)\, dt, \qquad \text{(f એ યુગ્મ વિધેય છે.)}$$

$$\therefore \quad I = \int_{0}^{a} f(x)\, dx$$

I ની કિંમત (i) માં મૂકતાં,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{0}^{a} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx$$

$$= 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx$$

હવે આપણે આ અંગેની સમજ કેળવવા એક ઉદાહરણ લઈએ.

$y = cos\, x$ એ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ પર સતત અને યુગ્મ વિધેય છે.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cosx\, dx = [sin\, x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = sin\frac{\pi}{2} - sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 1 = 2$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 2[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right] = 2(1) = 2$$

આમ, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$

પ્રમેય 3.5 : જો વિધેય f એ $[-a, a]$ પર સતત અને અયુગ્મ વિધેય હોય તો $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$.

સાબિતી : અહીં $-a < 0 < a$.

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx \qquad \text{(i)}$$

$I = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx$

$x = -t$ લેતાં, $dx = -dt$

વળી જ્યારે $x = -a$ ત્યારે $t = a$ અને જ્યારે $x = 0$ ત્યારે $t = 0$.

અહીં, $\frac{dx}{dt} = -1$ શૂન્યેતર છે અને $\frac{dx}{dt}$ એ $(-a, 0)$ પર સતત છે.

$$\therefore I = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx$$

$$= \int_{a}^{0} f(-t)\,(-dt)$$

$$= -\int_{a}^{0} f(-t)\, dt$$

$$= \int_{0}^{a} f(-t)\, dt$$

$$= -\int_{0}^{a} f(t)\, dt, \qquad (f \text{ એ અયુગ્મ વિધેય છે.})$$

$$= -\int_{0}^{a} f(x)\, dx$$

I ની કિંમત (i) માં મૂકતાં,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = -\int_{0}^{a} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx$$

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$$

હવે, આ અંગેની સમજ કેળવવા આપણે એક ઉદાહરણ લઈએ.

$y = \sin x$ એ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ પર સતત અને અયુગ્મ વિધેય છે.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = [-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\left[\cos\frac{\pi}{2} - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = -\left[\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2}\right] = -(0 - 0) = 0$$

આમ, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 0$

ઉદાહરણ 13 : કિંમત શોધો : **(i)** $\int_{-1}^{1} \sin^3 x \cos^4 x \, dx$ **(ii)** $\int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \, dx \quad (a > 0)$

ઉકેલ : (i) $I = \int_{-1}^{1} \sin^3 x \cos^4 x \, dx$

અહીં, $f(x) = \sin^3 x \cos^4 x$

$\therefore \quad f(-x) = \sin^3(-x) \cos^4(-x)$

$= -\sin^3 x \cdot \cos^4 x$

$= -f(x)$

$\therefore \quad f(x) = \sin^3 x \cos^4 x$ એ $[-1, 1]$ પર વ્યાખ્યાયિત અયુગ્મ વિધેય છે.

$\therefore \quad \int_{-1}^{1} \sin^3 x \cos^4 x \, dx = 0$

(ii) $I = \int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \, dx$

$= \int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{a-x}{a+x} \times \frac{a-x}{a-x}} \, dx$

$= \int_{-a}^{a} \frac{a-x}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx$ (અહીં, $x < a$ હોવાથી $\sqrt{(a-x)^2} = |x - a| = a - x$)

$= \int_{-a}^{a} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx - \int_{-a}^{a} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx$

$I = aI_1 - I_2$, જ્યાં $I_1 = \int_{-a}^{a} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx$ અને $I_2 = \int_{-a}^{a} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx$

ધારો કે $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ અને $g(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$\therefore \quad f(-x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-(-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = f(x)$ અને

$\therefore \quad g(-x) = \frac{-x}{\sqrt{a^2-(-x)^2}} = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} = -g(x)$

$\therefore \quad f(x)$ એ યુગ્મ અને $g(x)$ એ અયુગ્મ વિધેય છે.

$\therefore \quad I_1 = 2\int_{0}^{a} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx$ અને $I_2 = 0$

$\therefore \quad I = 2a \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$

$= 2a \left[sin^{-1} \frac{x}{a} \right]_0^a$

$= 2a\ [sin^{-1}1 - sin^{-1}0]$

$= 2a \left[\frac{\pi}{2} \right]$

$= a\pi$

ઉદાહરણ 14 : કિંમત શોધો : **(i)** $\int_0^{\pi} \frac{x\, tan x}{sec x + tan x}\, dx$ **(ii)** $\int_0^1 x^2(1 - x)^{\frac{1}{2}}\, dx$ **(iii)** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} sin\, 2x\ \log\ tan\, x\ dx$

ઉકેલ : (i) $\quad I = \int_0^{\pi} \frac{x\, tan x}{sec x + tan x}\, dx$

$= \int_0^{\pi} \frac{x\, sin\, x}{1 + sin x}\, dx \qquad$ (i)

(i) ના સંકલિતમાં x ના બદલે $\pi - x$ લેતાં,

$\therefore \quad I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\, sin\, (\pi - x)}{1 + sin(\pi - x)}\, dx$

$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\, sin\, x}{1 + sin\, x}\, dx$

$= \int_0^{\pi} \frac{\pi\, sin\, x}{1 + sin\, x}\, dx - \int_0^{\pi} \frac{x\, sin x}{1 + sin\, x}\, dx$

$\therefore \quad I = \pi \int_0^{\pi} \frac{sin\, x}{1 + sin\, x}\, dx - I \qquad$ ((i) પરથી)

$\therefore \quad 2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{sin\, x}{1 + sin\, x}\, dx$

$= \pi \int_0^{\pi} \frac{1 + sin x - 1}{1 + sin x}\, dx$

$= \pi \int_0^{\pi} dx - \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + sin x}$

$$= \pi [x]_0^{\pi} - \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + sin x}$$

$$= \pi^2 - \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + sin x}$$

$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + sin x}$ લો.

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + sin x} \qquad (f(2a - x) = f(\pi - x) = f(x))$$

$[0, \frac{\pi}{2}]$ માં $tan\frac{x}{2} = t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

જ્યારે $x = \frac{\pi}{2}$ ત્યારે $t = tan\frac{\pi}{4} = 1$ અને જ્યારે $x = 0$ ત્યારે $t = 0$.

$$\therefore \quad I_1 = 2\int_0^{1} \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}$$

$$= 4\int_0^{1} \frac{dt}{(1+t)^2}$$

$$= 4\left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^1$$

$$= 4\left[-\frac{1}{2} + 1\right]$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$\therefore \quad 2I = \pi^2 - 2\pi = \pi(\pi - 2)$$

$$\therefore \quad I = \frac{\pi}{2}(\pi - 2)$$

નોંધ : $1 - sin\, x$ વડે અંશ અને છેદને ગુણતાં ગણતરી સરળ બનશે એમ લાગશે પરંતુ $x = \frac{\pi}{2}$ આગળ $1 - sin\, x = 0$

(ii) $I = \int_0^1 x^2(1 - x)^{\frac{1}{2}}\, dx$

$$\therefore \quad I = \int_0^1 (1 - x)^2 [1 - (1 - x)]^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \int_0^1 (1 - 2x + x^2) \cdot x^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}})\, dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{2}{7}\right) = \frac{16}{105}$$

(iii) $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \log \tan x \, dx$ (i)

(i) માં x ને બદલે $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} - x = \frac{\pi}{2} - x$ લેતાં,

$$\therefore \quad I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \log \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \log \cot x \, dx \qquad \text{(ii)}$$

પરિણામ (i) અને (ii) નો સરવાળો કરતાં,

$$2I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \, [\log \tan x + \log \cot x] \, dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \log (\tan x \cdot \cot x) \, dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \cdot \log 1 \, dx$$

$\therefore \quad 2I = 0$

$\therefore \quad I = 0$

સ્વાધ્યાય 3.3

1. કિંમત શોધો :

(1) $\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad (a > 1)$ (2) $\int_{-a}^{a} \frac{x}{2 + x^8} dx$ (3) $\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{5 + x^4} \sin^3 x \, dx$

(4) $\int_{-1}^{1} \log\left(\frac{3 - x}{3 + x}\right) dx$ (5) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$ (6) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$

2. કિંમત શોધો :

(1) $\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^3 x \; dx$ (2) $\int_0^{2\pi} \sin^3 x \; \cos^2 x \; dx$

સાબિત કરો કે (3 to 15)

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx = \frac{\pi}{4}$ 4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \frac{\pi}{4}$ $(n \in N)$ 5. $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5-x} + \sqrt{x}} dx = \frac{3}{2}$

6. $\int_0^1 x(1-x)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4}{35}$ 7. $\int_0^{\pi} \frac{e^{\cos x}}{e^{\cos x} + e^{-\cos x}} dx = \frac{\pi}{2}$ 8. $\int_0^3 x^2(3-x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{144\sqrt{3}}{35}$

9. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\sqrt{\cot x}} dx = \frac{\pi}{12}$ 10. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \log\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right) dx = 0$ 11. $\int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{1+\sin x} = \pi$

12. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)\, dx = \frac{\pi}{8} \log 2$ 13. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4}$

14. $\int_0^{\pi} x \sin^3 x \, dx = \frac{2\pi}{3}$ 15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \log(\sqrt{2}+1)$

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 15 : સાબિત કરો કે $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \log(\sqrt{2}+1)$

ઉકેલ : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\cos x + \sin x} dx$ (i)

$$\therefore \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos x + \sin x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2}}{\cos x + \sin x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$\therefore \quad I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x + \sin x}\, dx - I$$

$$\therefore \quad 2I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x + \sin x}\, dx$$

$$\therefore \quad I = \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)}\, dx$$

$$\therefore \quad I = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4}\right)}\, dx$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}\, dx$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\, dx$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\left[\log\left|\sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\left[\log\left|\sec\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right| - \log\left|\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\left[\log\left|\sec\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{4}\right| - \log\left|\sec\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{4}\right|\right]$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\left(\log|\sqrt{2} + 1| - \log|\sqrt{2} - 1|\right)$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}\right) \qquad (\sqrt{2} > 1)$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\log(\sqrt{2} + 1)^2$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\log(\sqrt{2} + 1)$$

ઉદાહરણ 16 : સાબિત કરો કે $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x\, dx = \frac{1}{n-1}$, $n \in N - \{1\}$.

ઉકેલ : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x\, dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^n x + \tan^{n-2} x)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^{n-2}x\ (tan^2x + 1)\ dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^{n-2}x\ (sec^2x)\ dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tan\,x)^{n-2}\ \frac{d}{dx}(tan\,x)\ dx$$

$$= \left[\frac{(tan\,x)^{n-1}}{n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\left(tan\,\frac{\pi}{4}\right)^{n-1} - (tan\,0)^{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}$$

ઉદાહરણ 17 : $\int_0^1 cot^{-1}(1 - x + x^2)\ dx$ કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $I = \int_0^1 cot^{-1}(1 - x + x^2)\ dx$

$\therefore\ 0 < x < 1$

$\therefore\ 0 < 1 - x < 1$

$\therefore\ 0 < x(1 - x) < 1$

$\therefore\ 0 < x - x^2 < 1$

$\therefore\ 0 < 1 - x + x^2$

$$\therefore\ I = \int_0^1 tan^{-1}\left(\frac{1}{1 - x + x^2}\right) dx \qquad \left(x > 0 \text{ માટે } cot^{-1}x = tan^{-1}\frac{1}{x}\right)$$

$$= \int_0^1 tan^{-1}\left(\frac{1}{1 - x(1 - x)}\right) dx$$

$$= \int_0^1 tan^{-1}\left(\frac{x + (1 - x)}{1 - x(1 - x)}\right) dx$$

$$= \int_0^1 (tan^{-1}x + tan^{-1}(1 - x))\ dx \qquad (0 < x < 1,\ 0 < 1 - x < 1,\ 0 < x(1 - x) < 1)$$

$$= \int_0^1 tan^{-1}x\ dx + \int_0^1 tan^{-1}(1 - x)\ dx$$

$$= \int_0^1 tan^{-1}x\ dx + \int_0^1 tan^{-1}(1 - (1 - x))\ dx$$

$$= \int_0^1 tan^{-1}x \ dx + \int_0^1 tan^{-1}x \ dx$$

$$= 2\int_0^1 tan^{-1}x \cdot 1 \ dx$$

$$= 2 \ [x \ tan^{-1}x]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \ dx$$

$$= 2 \ [x \ tan^{-1}x]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} \ dx$$

$$= 2 \ [x \ tan^{-1}x]_0^1 - [\log |x^2 + 1|]_0^1$$

$$= 2 \ [tan^{-1} 1 - 0] - [\log (1 + 1) - \log (0 + 1)]$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{4}\right) - (\log 2 - \log 1)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \log 2$$

ઉદાહરણ 18 : $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x(1+sin \ x)}{1+cos^2x} dx$ નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x(1+sin \ x)}{1+cos^2x} dx$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x}{1+cos^2x} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x \ sin \ x}{1+cos^2x} dx$$

$\therefore$ $I = I_1 + I_2$ જ્યાં, $I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x}{1+cos^2x} dx$ અને $I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x \ sin \ x}{1+cos^2x} dx$

$f(x) = \frac{2x}{1+cos^2x}$ અને $g(x) = \frac{2x \ sin \ x}{1+cos^2x}$ લેતાં,

$f(-x) = \frac{2(-x)}{1+cos^2(-x)} = \frac{-2x}{1+cos^2x} = -f(x)$ અને

$g(-x) = \frac{2(-x) \ sin \ (-x)}{1+cos^2(-x)} = \frac{2x \ sin \ x}{1+cos^2x} = g(x)$

$\therefore$ $f(x)$ એ અયુગ્મ વિધેય છે અને $g(x)$ એ યુગ્મ વિધેય છે.

$\therefore$ $I_1 = 0$ અને $I_2 = 2\int_0^{\pi} \frac{2x \ sin \ x}{1+cos^2x} dx$

$$\therefore \quad I_2 = 4\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx \qquad \text{(i)}$$

$$= 4\int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \sin (\pi - x)}{1+\cos^2 (\pi - x)}\, dx$$

$$= 4\int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$$

$$I_2 = 4\int_0^{\pi} \frac{\pi \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx - 4\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$$

$$\therefore \quad I_2 = 4\pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx - I_2 \qquad \text{((i))}$$

$$\therefore \quad 2I_2 = 4\pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$$

$\cos x = t$ લેતાં $-\sin x\, dx = dt$, $\sin x\, dx = -dt$. વળી જ્યારે $x = 0$ ત્યારે $t = 1$ અને જ્યારે $x = \pi$ ત્યારે $t = -1$

$$\therefore \quad 2I_2 = 4\pi\int_1^{-1} \frac{-dt}{1+t^2}$$

$$= 4\pi\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= 4\pi\, [\tan^{-1} t]_{-1}^{1}$$

$$= 4\pi\, [\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(-1)]$$

$$= 4\pi\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore \quad 2I_2 = 2\pi^2$$

$$\therefore \quad I_2 = \pi^2$$

$$I = I_1 + I_2$$

$$\therefore \quad I = 0 + \pi^2$$

$$\therefore \quad I = \pi^2$$

ઉદાહરણ 19 : સાબિત કરો કે $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2$.

ઉકેલ : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx \qquad \text{(i)}$

$$\therefore \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$$

$\therefore \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x \, dx$ (ii)

(i) અને (ii) નો સરવાળો કરતાં

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin x + \log \cos x) \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log (\sin x \cdot \cos x) \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \left(\frac{2 \sin x \cos x}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2 \, dx$$

ધારો કે $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2x \, dx$

$\therefore \quad 2I = I_1 - \log 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$ (iii)

હવે, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2x \, dx$

ધારો કે, $2x = t$. તેથી $dx = \frac{1}{2} dt$

જ્યારે $x = 0$ ત્યારે $t = 0$ અને જ્યારે $x = \frac{\pi}{2}$ ત્યારે $t = \pi$.

$\therefore \quad I_1 = \int_0^{\pi} \log \sin t \cdot \frac{1}{2} dt$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \log \sin t \, dt$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t \, dt$$

$\left(\log \sin (\pi - t) = \log \sin t. \text{ તેથી } \int_0^{\pi} \log \sin t \, dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t \, dt\right)$

$\therefore \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t \, dt$

$\therefore \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = I$ (નિયત સંકલિત ચલ પર આધારિત નથી)

હવે, (iii) પરથી

$2I = I - \frac{\pi}{2} \log 2$

$\therefore \quad I = -\frac{\pi}{2} \log 2$

પરીક્ષા માટે નહીં :

હકીકતમાં $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx$ એ નિયત સંકલિત નથી. વિધેય $\log \sin x$ એ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ માં 0 આગળ અસીમિત છે. આ પ્રકારનું સંકલન અનુચિત સંકલિત કહેવાય.

ખરેખર $\lim\limits_{t \to 0+} \int_t^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx.$

આ પ્રથમ પ્રકારનું અનુચિત સંકલન છે. જ્યારે $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ એ બીજા પ્રકારનું અનુચિત સંકલિત છે.

આ બંને પ્રકારના વિધેયો $[a, b]$ માં અસીમિત છે. $a \in R$, $b \in R$ અથવા અસીમિત અંતરાલો $(-\infty, a)$, (a, ∞), $(-\infty, \infty)$ માં વ્યાખ્યાયિત છે. જ્યારે આ પ્રકરણમાં આપણે નિયત સંકલનનો અભ્યાસ કરીએ છીએ.

કોઈક વાર અનુચિત સંકલિતનું નિયત સંકલિત તરીકે સંકલન કરતાં આપણને ખોટું પરિણામ મળે છે, જેમ કે

$$\int_{-2}^{3} \frac{dx}{x} = [\log |x|]_{-2}^{3} = \log 3 - \log 2 = \log \frac{3}{2}$$

પરંતુ હકીકતમાં $\frac{1}{x}$ એ 0 આગળ અસીમિત છે.

$$\therefore \quad \int_{-2}^{3} \frac{dx}{x} = \int_{-2}^{0} \frac{dx}{x} + \int_{0}^{3} \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{t_1 \to 0-} \int_{-2}^{t_1} \frac{dx}{x} + \lim_{t_2 \to 0+} \int_{t_2}^{3} \frac{dx}{x}$$

જેનું અસ્તિત્વ નથી.

$\int_0^{\pi} \sec^2 x \, dx = [\tan x]_0^{\pi} = 0 - 0 = 0$ ખોટું પરિણામ છે.

$\sec$ વિધેય $x = \frac{\pi}{2}$ આગળ અસીમિત છે.

સ્વાધ્યાય 3

1. જો $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^n x\, dx$, તો સાબિત કરો કે $n\,(I_{n-1} + I_{n+1}) = 1$

2. જો $f(x) = f(a + b - x)$, તો સાબિત કરો કે $\int_a^b x\, f(x)\, dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)\, dx$.

3. $\int_0^{\pi} x\, f(sin\, x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(sin\, x)\, dx$ સાબિત કરો અને તે પરથી

(i) $\int_0^{\pi} x\, sin^2 x\, dx$ (ii) $\int_0^{\pi} \frac{x}{1 + sin x}\, dx$ મેળવો.

4. સાબિત કરો : $\int_0^n f(x)\, dx = \sum_{r=1}^{n} \int_0^1 f(t + r - 1)\, dt$

5. જો $\int_n^{n+1} f(x)\, dx = n^3$, તો $\int_{-4}^{4} f(x)\, dx$ મેળવો. $n \in Z$

6. સાબિત કરો કે $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log cos x\, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2$

7. સાબિત કરો કે $\int_0^a x^2 (a - x)^n\, dx = \frac{2a^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

કિંમત શોધો (8 to 17) :

8. $\int_0^{\log 2} x e^{-x}\, dx$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2 cos^2 x - b^2 sin^2 x}$ $(a > b > 0)$

10. $\int_1^2 \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}\, dx$

11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi x}{2} - x^2\right) cos 2x\, dx$

12. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{sin^2 x}{1 + sin x\, cos x}\, dx$

13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos\, x}{1 + cos x + sin x}\, dx$

14. $\int_0^1 \frac{\log(1 + t)}{1 + t^2}\, dt$

15. $\int_1^3 \frac{dx}{x^2 (x + 1)}$

16. $\int_0^{\pi} \frac{x^2 sin x}{(2x - \pi)(1 + cos^2 x)}\, dx$

17. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\, sin x - cos x\,|\, dx$

18. સરવાળાના લક્ષ તરીકે $\int_1^3 (x^2 + x)\, dx$ મેળવો.

19. સરવાળાના લક્ષ તરીકે $\int_0^4 (x + e^{2x})\, dx$ મેળવો.

20. સાબિત કરો કે $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \tan x \, dx = 0$

21. સાબિત કરો કે $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \log \sin x - \log \sin 2x)\, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2$

22. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c), (d)માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ▭ માં લખો :

(1) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}} = \ldots\ldots$. ▭

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{6}$ (c) $\frac{\pi}{12}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

(2) $\int_1^e \log x \, dx = \ldots\ldots$. ▭

(a) 1 (b) $e + 1$ (c) $e - 1$ (d) 0

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cot x}\, dx = \ldots\ldots$. ▭

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) π

(4) જો $\int_0^a \frac{1}{1+4x^2}\, dx = \frac{\pi}{8}$, તો $a = \ldots\ldots$. ▭

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

(5) $\int_0^3 \frac{3x+1}{x^2+9}\, dx = \ldots\ldots$. ▭

(a) $\frac{\pi}{12} + \log(2\sqrt{2})$ (b) $\frac{\pi}{3} + \log(2\sqrt{2})$ (c) $\frac{\pi}{12} + \log \sqrt{2}$ (d) $\frac{\pi}{6} + \log(2\sqrt{2})$

(6) $\int_{-1}^1 |1 - x|\, dx = \ldots\ldots$. ▭

(a) -2 (b) 2 (c) 0 (d) 4

(7) જો $\int_0^1 (3x^2 + 2x + k)\, dx = 0$, તો $k = \ldots\ldots$. ▭

(a) 1 (b) 2 (c) -2 (d) 4

(8) જો $\int_1^a (3x^2 + 2x + 1)\, dx = 11$, તો $a = \ldots\ldots$. ▭

(a) 2 (b) 3 (c) -3 (d) $\frac{2}{3}$

(9) $\int_{-1}^0 |x|\, dx = \ldots\ldots$. ▭

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 1 (d) 2

(10) $\int_{-1}^{1} \log\left(\frac{7-x}{7+x}\right) dx =$ ....

(a) 1 (b) 0 (c) 2 (d) -2

(11) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} cotx \; dx =$ ....

(a) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{2}\right)$ (b) $\log\left(\frac{3}{2}\right)$ (c) $\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $2\log\frac{3}{2}$

(12) $\int_{1}^{k} f(x)\, dx = 47$, $f(x) = \begin{cases} 2x+8 & 1 \le x \le 2 \\ 6x & 2 < x \le k \end{cases}$, તો k ....

(a) 4 (b) -4 (c) 2 (d) -2

(13) $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} =$ ....

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{12}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$

(14) $\int_{1}^{4} \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^{-1} =$ ....

(a) $\log\left(\frac{17}{2}\right)$ (b) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{17}{2}\right)$ (c) $2\log(17)$ (d) $\log(17)$

(15) $\int_{0}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\, dx =$ ....

(a) $-\frac{\pi}{2}$ (b) π (c) 0 (d) $\frac{\pi}{2}$

(16) $\int_{0}^{2a} \frac{f(x)dx}{f(x)+f(2a-x)} =$ ....

(a) $-a$ (b) a (c) $\frac{a}{2}$ (d) $-\frac{a}{2}$

(17) $\int_{0}^{\pi} sin^3x \; cos^3x \;\; dx =$ ....

(a) π (b) $-\pi$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) 0

(18) જો $\int_{2}^{k} (2x+1)\, dx = 6$, તો $k =$ ....

(a) 3 (b) 4 (c) -4 (d) -2

(19) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x+\sqrt{x}} =$ ....

(a) log 2 (b) log 4 (c) log 3 (d) $-$ log 2

(20) જો $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{3+4\sin x}\, dx = k \log\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)$, તો $k =$ ....

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{8}$

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓની ચર્ચા કરી :

1. $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ સતત વિધેય છે. કોઈ ધન પૂર્ણાંક n માટે $h = \frac{b-a}{n}$ લઈએ, તો $[a, b]$ નું n એકરૂપ ઉપાંતરાલોમાં વિભાજન કરતાં $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a + ih)$.

2. **નિયત સંકલનનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત :** ધારો કે વિધેય f એ $[a, b]$ પર સતત છે તથા F એ (a, b) પર વ્યાખ્યાયિત એવું વિકલનીય વિધેય હોય, કે જેથી

   $\forall x \in (a, b)$, $\frac{d}{dx}[\mathrm{F}(x)] = f(x)$, થાય તો $\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$

3. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$. નિયત સંકલન ચલ પર અવલંબિત નથી.

4. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \ (a > b)$

5. f એ $[a, b]$ પર સતત હોય અને $a < c < b$, તો $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

6. f એ $[a, b]$ પર સતત હોય, તો $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a - x)\,dx$

7. f એ $[a, b]$ પર સતત હોય, તો $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a + b - x)\,dx$

8. f એ $[0, 2a]$ પર સતત હોય તો, $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a - x)\,dx$

   જો $f(2a - x) = f(x)$, $\forall x \in [0, 2a]$, તો $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

   જો $f(2a - x) = -f(x)$, $\forall x \in [0, 2a]$, તો $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 0$

9. જો f એ $[-a, a]$ માં સતત યુગ્મ વિધેય હોય તો $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

10. જો f એ $[-a, a]$ માં સતત અયુગ્મ વિધેય હોય તો $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.