પ્રકરણ 8

સુરેખ અસમતાઓ

8.1 પ્રાસ્તાવિક

આગળનાં ધોરણોમાં આપણે એક ચલનાં સુરેખ સમીકરણો તથા બે ચલની સુરેખ સમીકરણ સંહતિનો ઉકેલ મેળવ્યો છે. કેટલાંક વિધાનો દ્વારા વર્ણવેલા કૂટપ્રશ્નોને પણ આપણે આવાં સમીકરણોમાં પરિવર્તિત કર્યાં હતાં અને તેમના ઉકેલ મેળવ્યા હતા. વ્યવહારમાં પ્રત્યેક કૂટપ્રશ્નનું પરિવર્તન હંમેશાં સમીકરણમાં જ થાય તે જરૂરી નથી કે શક્ય પણ નથી. આ પરિવર્તનોમાં $<$, $>$, $\leq$ અથવા $\geq$ જેવા અસમતાના સંકેતો પણ ઉદ્ભવી શકે. ઉદાહરણ તરીકે, આ વર્ષમાં મે માસ દરમિયાન અમદાવાદનું ઉષ્ણતામાન 28° C થી 44° C વચ્ચે હોઈ શકે એટલે કે કોઈ એક નિશ્ચિત દિવસે નોંધેલ ઉષ્ણતામાન x હોય, તો $28 < x < 44$ થાય. આમ $28 < x$ તથા $x < 44$.

સરકારી કર્મીઓનો પગાર વધારો ₹ 800થી ₹ 30,000 વચ્ચે છે. આનો અર્થ એ કે પગારમાં વધારો x હોય, તો $800 < x < 30000$. ઋચા એક કલાકમાં ઓછામાં ઓછા 20 દાખલા (કૂટપ્રશ્નો) ગણી શકે છે. એટલે કે ઋચાએ એક કલાકમાં ગણેલા દાખલાઓની સંખ્યા x હોય, તો $x \geq 20$. દેવ પોતાના ખિસ્સા-ખર્ચમાંથી વધુમાં વધુ 10 પેન્સિલ ખરીદી શકે. એટલે કે દેવ ખરીદી શકે તે પેન્સિલોની સંખ્યા x હોય તો $x \leq 10$. આમ, $x \leq 10$ અથવા $x \geq 20$ કે $28 < x < 44$ જેવી ગાણિતિક અભિવ્યક્તિને **એક ચલની સુરેખ અસમતા (Linear Inequalities)** કહે છે. $20x + 31y \leq 500$ એ **બે ચલમાં સુરેખ અસમતા**નું ઉદાહરણ છે.

ગણિત, વિજ્ઞાન, આંકડાશાસ્ત્રમાં મહત્તમ ન્યૂનતમના પ્રશ્નો (Optimization) વગેરેમાં અસમતાઓ ઉપયોગી છે.

8.2 અસમતાઓ

રોજબરોજના વ્યવહારમાં અસમતા કેવી રીતે ઉદ્ભવે ? આપણે જ્યારે બે રાશિઓની સરખામણી કરીએ ત્યારે તે સમાન હોવા કરતાં અસમાન હોવાની સંભાવના વધારે હોય છે. જો તમે x મિનિટમાં વાર્ષિક પ્રશ્નપત્ર પૂરું લખી લો તો $0 \leq x \leq 180$. અમદાવાદ તથા મુંબઈ વચ્ચેનું અંતર 500 કિમી (આશરે) છે. જો અમદાવાદ તથા વડોદરા વચ્ચેનું અંતર x કિમી હોય, તો $x < 500$ અને જો અમદાવાદ તથા પૂણે વચ્ચેનું અંતર y કિમી હોય, તો $y > 500$.

હવે આપણે કેટલાક કૂટપ્રશ્નો વિચારીએ.

(1) દેવી પોતાના પર્સમાં ₹ 500 લઈ કેટલાક ફૂલસ્કેપ ચોપડા ખરીદવા જાય છે. જો આવા એક ડઝન ચોપડાની કિંમત ₹ 60 હોય અને દેવી x ડઝન ચોપડા ખરીદે, તો $60x \leq 500$. જો તે y નંગ ચોપડા ખરીદે તો $5y \leq 500$. (એક નંગના $\frac{60}{12}$ = ₹ 5)

(2) દેવ કેટલાક શર્ટ અને પેન્ટ ખરીદવા શોપિંગ મોલમાં જાય છે. પ્રત્યેક શર્ટ (ખમીશ)ની કિંમત ₹ 200 અને પ્રત્યેક પેન્ટ (પાટલૂન)ની કિંમત ₹ 500 છે. તે ₹ 5000 માંથી x શર્ટ અને y પેન્ટ ખરીદે છે. તેનો ખર્ચ $200x + 500y$ થાય અને તેથી $200x + 500y \leq 5000$.

ઉપરના પ્રશ્નોમાં x અને y અનૃણ પૂર્ણાંકો જ હોઈ શકે. હવે આપણે નીચેની પરિસ્થિતિને સમજીએ.

(3) આપણે $a, b \in$ R માટે [3, 5]માં આવેલા સુરેખ સમીકરણ $ax + b = 0$ ના ઉકેલોની માહિતી મેળવવી છે. આ માહિતીમાં આપણે જેથી $3 \leq x \leq 5$ તથા $ax + b = 0$ થાય એવી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ x નો ગણ મેળવવો પડે.

આપણે જાણીએ છીએ કે, ત્રિવિધ વિકલ્પના નિયમ પ્રમાણે પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા a તથા b ને સંગત $a < b$ અથવા $a = b$ અથવા $a > b$ સંબંધ શક્ય છે. જો $a = b$ હોય, તો આપણે કહીએ છીએ કે a તથા b સમાન છે. **જો $a \neq b$ તો $a < b$ અથવા $a > b$. અહીં $a < b$ અને $a > b$ને ચુસ્ત અસમતા (Strict Inequalities) કહે છે.** કેટલીક વાર આપણે $a \leq b$ અથવા $a \geq b$ જેવી (ઉપર ઉદાહરણ (3)માં છે તેવી) અસમતાઓનો વિચાર કરવો પડે છે.

$a \leq b$ એટલે $a < b$ અથવા $a = b$. (વાંચો : a લેસ ધેન ઓર ઈક્વલ ટુ b)

$a \geq b$ એટલે $a > b$ અથવા $a = b$. (વાંચો : a ગ્રેટર ધેન ઓર ઈક્વલ ટુ b)

$a \leq b$ તથા $a \geq b$ જેવી અસમતાઓને મિશ્ર અસમતા (Slack Ineqalities) કહે છે.

આપણે અસમતાઓ માટે નીચેની પૂર્વધારણાઓ યાદ કરીએ : $a, b, c \in$ R.

(1) જો $a > 0$ અને $b > 0$ તો $a + b > 0$ અને $ab > 0$.

(2) $a < 0 \Leftrightarrow -a > 0$

અસમતાના નીચેના ગુણધર્મોનો આપણે ઉપયોગ કરીશું :

(1) $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$

(2) $a > b$ અને $b > c \Rightarrow a > c$ (સાબિત કરી શકશો ?) **(પરંપરિતતા)**

(3) $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

(4) $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$ અને

$a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$

(5) $a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$ (સાબિત કરો જોઈએ !)

આપણે નીચેના જેવી એકચલની સુરેખ અસમતાઓનો અભ્યાસ કરવાનો રહેશે :

(1) $ax + b < c$ (2) $ax + b > c$ (3) $ax + b \leq c$ (4) $ax + b \geq c$

અથવા તો બીજા સ્વરૂપે લખતાં,

(1) $ax + b < 0$ (2) $ax + b > 0$ (3) $ax + b \leq 0$ (4) $ax + b \geq 0$

($b - c$ ના સ્થાને b લખતાં)

8.3 એક ચલમાં સુરેખ અસમતાનો ઉકેલ

વિભાગ 8.2ના પ્રશ્ન (1) માં આપણી પાસે અસમતા $60x \leq 500$ હતી.

જો $x = 2$ તો $120 \leq 500$ સત્યવિધાન છે.

$x = 5$ માટે $300 \leq 500$ પણ સત્યવિધાન છે.

પરંતુ $x = 10$ લેતાં, $600 \leq 500$ મિથ્યા વિધાન મળે છે.

ચલની જે કિંમતો માટે અસમતા સત્યવિધાન દર્શાવે તેવી કિંમતોને અસમતાનો ઉકેલ કહે છે. આવા તમામ ઉકેલોથી અસમતાનો ઉકેલગણ બને છે.

વ્યાખ્યા : અસમતામાં આપેલ ચલની જે કિંમતો દ્વારા અસમતામાંથી સત્યવિધાન નિપજે તેવી ચલની કિંમતોથી બનતા ગણને અસમતાનો ઉકેલ ગણ (Solution Set) કહે છે.

ઉદાહરણ 1 : ઉકેલો : $20x + 9 < 300$ જ્યાં (1) $x \in$ N (2) $x \in$ Z (3) $x \in$ R.

ઉકેલ : $20x + 9 < 300 \Leftrightarrow 20x < 291$

$$\Leftrightarrow x < \frac{291}{20} = 14.55$$

(1) x પ્રાકૃતિક સંખ્યા હોય તો $x = 1, 2, 3, 4, ..., 14$.

$\therefore$ N માં અસમતાનો ઉકેલ ગણ $\{1, 2, 3, 4, ..., 14\} = \{x \mid x \in N, x \leq 14\}$

(2) જો $x \in$ Z તો $x = 0, -1, -2, ...$ વગેરે પણ લઈ શકાય.

$\therefore$ Z માં અસમતાનો ઉકેલ ગણ $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, ..., 14\} = \{x \mid x \in Z, x \leq 14\}$

(3) R માં ઉકેલ ગણ $\{x \mid x < 14.55, x \in R\}$

ઉદાહરણ 2 : ઉકેલો : $2x - 3 > 5$ જ્યાં (1) $x \in$ N (2) $x \in$ R.

ઉકેલ : $2x - 3 > 5 \Leftrightarrow 2x > 8$

$$\Leftrightarrow x > 4$$

(1) અસમતાનો N માં ઉકેલ ગણ $\{5, 6, 7, 8, ...\} = \{x \mid x \geq 5, x \in N\}$

(2) અસમતાનો R માં ઉકેલ ગણ $(4, \infty) = \{x \mid x \in R, x > 4\}$

ઉદાહરણ 3 : ઉકેલો : $5x < 7$, જ્યાં (1) $x \in$ N (2) $x \in$ R.

ઉકેલ : (1) $5x < 7 \Leftrightarrow x < \frac{7}{5} = 1.4$

$\therefore$ અસમતાનો N માં ઉકેલ ગણ $\{1\}$ છે.

(2) અસમતાનો R માં ઉકેલ ગણ $\left\{x \mid x \in R, x < \frac{7}{5}\right\} = \left(-\infty, \frac{7}{5}\right)$

ઉદાહરણ 4 : ઉકેલો : $-2x \geq 10$, (1) $x \in$ N (2) $x \in$ Z (3) $x \in$ R.

ઉકેલ : $-2x \geq 10 \Leftrightarrow x \leq -5$ (જુઓ કે **-2 વડે ભાગતાં અસમતાની નિશાની ઊલટાઈ જાય છે**.)

(1) ધારો કે $x \in$ N. આથી N માં અસમતાનો ઉકેલ ગણ $\emptyset$ છે.

(2) ધારો કે $x \in$ Z. આથી Z માં અસમતાનો ઉકેલ ગણ $\{..., -8, -7, -6, -5\}$ છે.

(3) ધારો કે $x \in$ R. આથી R માં અસમતાનો ઉકેલ ગણ $(-\infty, -5]$ છે.

ઉદાહરણ 5 : ઉકેલો : $2(x - 1) + 1 > 3 - (-1 - 2x)$, $x \in$ R

ઉકેલ : $2(x - 1) + 1 > 3 - (-1 - 2x) \Leftrightarrow 2x - 2 + 1 > 3 + 1 + 2x$

$$\Leftrightarrow 2x - 2x > 5$$

$$\Leftrightarrow 0 > 5$$

આ મિથ્યા છે.

$\therefore$ કોઈ પણ $x \in$ R માટે આ અસમતા શક્ય નથી.

$\therefore$ ઉકેલ ગણ $\emptyset$ છે.

નોંધ જો અસમતામાં $>$ ના બદલે $<$ નિશાની હોત તો ઉપરના પ્રશ્નમાં $0 < 5$ મળે. જે કોઈ પણ $x \in R$ માટે સત્ય છે. આથી ઉકેલ ગણ R બન્યો હોત.

ઉદાહરણ 6 : ઉકેલો : $3(2x - 1) + 5 \leq \frac{1}{2}(x + 15)$, $x \in R$.

ઉકેલ :
$$3(2x - 1) + 5 \leq \frac{1}{2}(x + 15) \Leftrightarrow 6(2x - 1) + 10 \leq x + 15$$
$$\Leftrightarrow 12x - 6 + 10 \leq x + 15$$
$$\Leftrightarrow 11x \leq 15 + 6 - 10 = 11$$
$$\Leftrightarrow x \leq 1$$

$\therefore$ ઉકેલ ગણ $(-\infty, 1]$ છે.

ઉદાહરણ 7 : ઉકેલો : $\frac{3-2x}{5} < \frac{x}{3} + 2$, $x \in R$.

ઉકેલ :
$$\frac{3-2x}{5} < \frac{x}{3} + 2 \Leftrightarrow \frac{3-2x}{5} - \frac{x}{3} < 2$$
$$\Leftrightarrow \frac{3(3-2x)-5x}{15} < 2$$
$$\Leftrightarrow 9 - 6x - 5x < 30 \qquad (15 > 0)$$
$$\Leftrightarrow 9 - 11x < 30$$
$$\Leftrightarrow -11x < 21$$
$$\Leftrightarrow x > \frac{-21}{11} \qquad (-11 < 0)$$

$\therefore$ ઉકેલ ગણ $\left(\frac{-21}{11}, \infty\right)$ છે.

ઉદાહરણ 8 : ઉકેલો : $\frac{2x+3}{x-2} < \frac{1}{2}$, $x \in R$.

ઉકેલ :
$$\frac{2x+3}{x-2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x-2} - \frac{1}{2} < 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2(2x+3)-(x-2)}{2(x-2)} < 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{3x+8}{2(x-2)} < 0$$

આથી $(3x + 8 > 0$ અને $2x - 4 < 0)$ અથવા $(3x + 8 < 0$ અને $2x - 4 > 0)$

$\therefore$ $(x > -\frac{8}{3}$ અને $x < 2)$ અથવા $(x < -\frac{8}{3}$ અને $x > 2)$

$\therefore$ $x < -\frac{8}{3}$ હોય તથા $x > 2$ હોય તે શક્ય નથી.

$\therefore$ $x \in \left(\frac{-8}{3}, 2\right)$

$\therefore$ ઉકેલ ગણ $\left(\frac{-8}{3}, 2\right)$ છે.

ઉદાહરણ 9 : ઉકેલો : $\frac{x}{x-3} > 1, x \in R$.

ઉકેલ : $\frac{x}{x-3} > 1 \Leftrightarrow \frac{x}{x-3} - 1 > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-(x-3)}{x-3} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x-3} > 0$$

$$\Leftrightarrow x - 3 > 0 \text{ કારણ કે } 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 3$$

$\therefore$ ઉકેલ ગણ $(3, \infty)$ છે.

સ્વાધ્યાય 8.1

માગ્યા પ્રમાણે નીચેની અસમતાઓના ઉકેલ શોધો :

1. $x + 2 < -8$, જ્યાં (1) $x \in N$ (2) $x \in Z$ (3) $x \in R$

2. $4x \geq 16$, જ્યાં (1) $x \in N$ (2) $x \in Z$ (3) $x \in R$

3. $-5x \leq -20$, જ્યાં (1) $x \in N$ (2) $x \in Z$ (3) $x \in R$

4. $-6x \leq 18$, જ્યાં (1) $x \in N$ (2) $x \in Z$ (3) $x \in R$

5. $5x - 17 > 8, x \in R$

6. $2x - 8 < 10, x \in R$

7. $3x - 22 \geq 5, x \in R$

8. $4x - 17 \leq -1, x \in R$

9. $\frac{x+1}{2} > 6(x + 2), x \in R$

10. $\frac{x+7}{3} - 5 < \frac{2x+1}{9} - 3, x \in R$

11. (1) $\frac{4}{x-3} < 1, x \in R$ (2) $\frac{3x-2}{2x-7} > 0, x \in R$

12. (1) $\frac{x-2}{x} > \frac{1}{3}, x \in R$ (2) $\frac{1}{x-2} \leq 5, x \in R$ (3) $\frac{x-2}{x+5} > 3, x \in R$

13. $\frac{x-1}{x} + 2 > 5, x \in R$

14. $2(x - 1) + 3(x - 2) \leq 5(x + 1), x \in R$

15. $3(x - 1) + 2(x - 2) \leq 5(x + 2), x \in R$

*

8.4 એક ચલમાં સુરેખ અસમતાના ઉકેલનું સંખ્યારેખા પર નિરૂપણ

$5x < 20$ અસમતાનો N માં ઉકેલ $\{1, 2, 3\}$ છે તે સ્પષ્ટ છે. આ ઉકેલનું આપણે સંખ્યારેખા પર આકૃતિ 8.1 પ્રમાણે નિરૂપણ કરીએ.

આકૃતિ 8.1

જો આપણે Rમાં ઉકેલ વિચારીએ તો તે ઉકેલ $(-\infty, 4)$નું નિરૂપણ આકૃતિ 8.2 મુજબ થાય :

આકૃતિ 8.2

$2x \geq 4$નો R માં ઉકેલ $[2, \infty)$ આકૃતિ 8.3 પ્રમાણે દર્શાવાશે :

આકૃતિ 8.3

જો અંતરાલના અંત્યબિંદુનો ઉકેલમાં સમાવેશ થતો હોય તો તેની આસપાસ ઘેરું કુંડાળું ● કરાય છે અને અંતરાલને ગાઢી રેખા વડે દર્શાવાય છે. જો અંતરાલના અંત્યબિંદુનો સમાવેશ ઉકેલમાં થતો ન હોય તો તેની આસપાસ પોલું વર્તુળ o કરાય છે. $-\infty$ અને ∞ માત્ર સંકેત છે. ઉકેલના ભાગ નથી. સાન્ત ઉકેલ હોય, તો તેના પ્રત્યેક સભ્યની આસપાસ ઘેરું વર્તુળ કરાય છે.

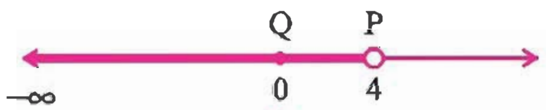
ઉદાહરણ 10 : અસમતા $\frac{1}{x-4} < 0$, $x \in$ Rનો ઉકેલ શોધી તેને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

ઉકેલ : $\frac{a}{b} < 0$ અને $a > 0 \Leftrightarrow b < 0$

$$\frac{1}{x-4} < 0 \quad \Leftrightarrow x - 4 < 0$$
$$\Leftrightarrow x < 4$$

$\therefore$ ઉકેલ ગણ $(-\infty, 4)$ છે.

સંખ્યારેખા પર આકૃતિ 8.4 પ્રમાણે ઉકેલ દર્શાવાય :



આકૃતિ 8.4

તેને $\overrightarrow{PQ} - \{P\}$ વડે દર્શાવાય.

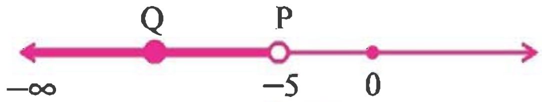
ઉદાહરણ 11 : અસમતા $\frac{x+3}{x+5} > 1$, $x \in$ Rનો ઉકેલ શોધી તેને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

ઉકેલ : $\frac{x+3}{x+5} > 1 \Leftrightarrow \frac{x+3}{x+5} - 1 > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3-x-5}{x+5} > 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-2}{x+5} > 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{x+5} < 0$$
$$\Leftrightarrow x + 5 < 0$$
$$\Leftrightarrow x < -5$$

$\therefore$ ઉકેલ ગણ $(-\infty, -5)$ છે.

ઉકેલ સંખ્યારેખા પર આકૃતિ 8.5માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 8.5

તેને $\overrightarrow{PQ} - \{P\}$ વડે પણ દર્શાવાય.

ઉદાહરણ 12 : $3x \le 18$ના ઉકેલ ગણને (1) $x \in N$ (2) $x \in R$ માટે સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

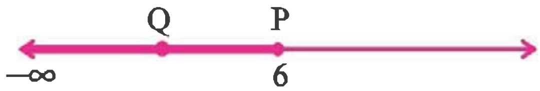
ઉકેલ : (1) $3x \le 18 \Leftrightarrow x \le 6$

$\Leftrightarrow x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

આકૃતિ 8.6

આપેલ અસમતાનો ઉકેલ આકૃતિ 8.6માં દર્શાવેલ છે.

(2) $x \le 6 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 6]$



આકૃતિ 8.7

આપેલ અસમતાનો ઉકેલ આકૃતિ 8.7માં દર્શાવેલ છે.

તેને $\overrightarrow{PQ}$ દ્વારા દર્શાવી શકાય.

ઉદાહરણ 13 : $5x \ge -10$નો ઉકેલ (1) $x \in N$ (2) $x \in Z$ (3) $x \in R$ માટે સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

ઉકેલ : (1) $5x \ge -10 \Leftrightarrow x \ge -2$. આથી N માં ઉકેલ N પોતે જ છે.

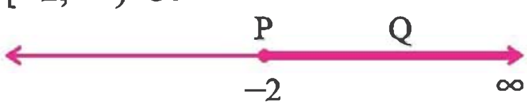
આકૃતિ 8.8

(2) $5x \ge -10 \Leftrightarrow x \ge -2$

Z માં ઉકેલ $\{-2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ છે.

આકૃતિ 8.9

(3) R માં ઉકેલ ગણ $[-2, \infty)$ છે.



આકૃતિ 8.10

આકૃતિ 8.10 માં $\overrightarrow{PQ}$ ઉકેલ દર્શાવે છે.

હવેથી જો અન્યથા નિર્દિષ્ટ ન હોય તો ઉકેલ ગણ R માં લઈશું.

ઉદાહરણ 14 : $5x - 3 > 3x - 5$, $x \in R$નો ઉકેલ મેળવો અને તેને સંખ્યા રેખા પર દર્શાવો.

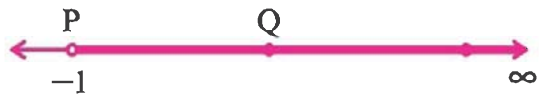
ઉકેલ : $5x - 3 > 3x - 5 \iff 5x - 3x > 3 - 5$

$$\iff 2x > -2$$

$$\iff x > -1$$

આથી ઉકેલ ગણ $(-1, \infty)$ છે.

સંખ્યારેખા પર તેને આકૃતિ 8.11માં દર્શાવેલો છે.



આકૃતિ 8.11

$\overrightarrow{PQ} - \{P\}$ ઉકેલ ગણ દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ 15 : ઉકેલો : $\frac{2x}{3} \geq \frac{5x-2}{5} - \frac{7x-5}{2}$. સંખ્યારેખા પર ઉકેલ દર્શાવો.

ઉકેલ : અહીં છેદનો લ.સા.અ. 30 છે. આથી 30 વડે બંને બાજુએ ગુણતાં

$$\frac{2x}{3} \geq \frac{5x-2}{5} - \frac{7x-5}{2} \iff 20x \geq 6(5x - 2) - 15(7x - 5)$$

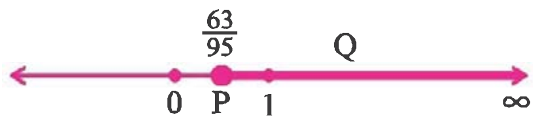
$$\iff 20x \geq 30x - 12 - 105x + 75$$

$$\iff 105x + 20x - 30x \geq 75 - 12$$

$$\iff 95x \geq 63$$

$$\iff x \geq \frac{63}{95}$$

$\therefore$ આથી ઉકેલ ગણ $\left[\frac{63}{95}, \infty\right)$ છે. તેનું આલેખન આકૃતિ 8.12માં કરેલ છે.



આકૃતિ 8.12

$\overrightarrow{PQ}$ અસમતાનો ઉકેલ દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ 16 : નીચેની અસમતાનો ઉકેલ ગણ સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

$$\frac{2x-1}{3} + 5 < \frac{3x-1}{2} - 2.$$

ઉકેલ : $2(2x - 1) + 30 < 3(3x - 1) - 12$

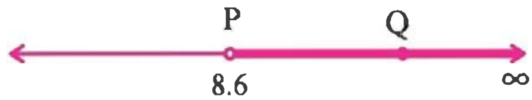
$$\iff 4x + 28 < 9x - 15$$

$$\iff 5x > 43$$

$$\iff x > \frac{43}{5} = 8.6$$

$\therefore$ ઉકેલ ગણ $(8.6, \infty)$ છે.

તેનું આલેખન આકૃતિ 8.13માં કરેલ છે.



આકૃતિ 8.13

$\overrightarrow{PQ} - \{P\}$ ઉકેલ ગણ દર્શાવે છે.

સ્વાધ્યાય 8.2

નીચેની અસમતાઓના ઉકેલ ગણ મેળવો અને તેમને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો : $(x \in R)$.

1. $5x - 7 > 7x - 5$

2. $3x + 5 < 5x + 3$

3. $\frac{x}{3} + 5 \geq \frac{x}{2} + 7$

4. $\frac{3x}{2} + 15 \leq \frac{2x}{3} + 6$

5. $\frac{x-1}{2} + 5 \geq \frac{2x-1}{3} + 15$

6. $\frac{2x+3}{5} + \frac{7x+1}{3} \geq \frac{3x-1}{2}$

7. $\frac{4x+1}{9} > \frac{9x+1}{4} - 2$

8. $\frac{x}{3} \geq \frac{2x-1}{3} + \frac{5x-3}{7}$

9. $\frac{x}{x-2} < 0$

10. $\frac{1}{x-1} \geq 0$

11. $\frac{x-2}{x} > 1$

12. $\frac{x+3}{x} \leq 1$

*

એક ચલમાં સુરેખ અસમતાઓની સંહતિ

100 ગુણની પરીક્ષામાં ઉત્તીર્ણ થવા સુરેન્દ્રને 36 કે તેથી વધુ ગુણ મેળવવા આવશ્યક છે. આથી જો તે પરીક્ષામાં ઉત્તીર્ણ થાય અને તેણે મેળવેલ ગુણ x હોય, તો $x \geq 36$ અને $x \leq 100$.

આકૃતિ 8.14 અને આકૃતિ 8.15 અનુક્રમે $x \geq 36$ તથા $x \leq 100$ ના ઉકેલ ગણ દર્શાવે છે.

$\overrightarrow{AB}$ અસમતા $x \geq 36$ નો ઉકેલ ગણ છે.

આકૃતિ 8.14

$\overrightarrow{BA}$ અસમતા $x \leq 100$ નો ઉકેલ ગણ છે.

આકૃતિ 8.15

આમ $36 \leq x \leq 100$ અસમતા યુગ્મનો ઉકેલ મેળવવા જતાં આપણને $\overline{AB}$ અસમતા યુગ્મનો ઉકેલ ગણ મળે છે.

આકૃતિ 8.16

ઉદાહરણ 17 : અસમતાઓ $4x \geq 8$ અને $5x < 20$, $x \in R$ ઉકેલો અને ઉકેલોને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

ઉકેલ : $4x \geq 8 \Leftrightarrow x \geq 2$

આથી ઉકેલ ગણ $[2, \infty)$ છે.

આકૃતિ 8.17

આકૃતિ 8.17 માં $\overrightarrow{AB}$ ઉકેલ ગણ દર્શાવે છે.

$5x < 20 \Leftrightarrow x < 4$

આથી ઉકેલ ગણ $(-\infty, 4)$ છે.

આકૃતિ 8.18

આકૃતિ 8.18 માં $\overrightarrow{BA} - \{B\}$ ઉકેલ ગણ દર્શાવે છે.

આથી અસમતા સંહતિનો ઉકેલગણ $[2, 4)$ છે.

આકૃતિ 8.19

આકૃતિ 8.19 માં $\overline{AB} - \{B\}$ ઉકેલ ગણ દર્શાવે છે.

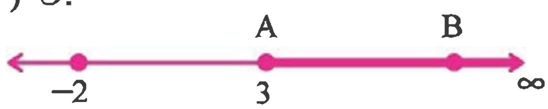
ઉદાહરણ 18 : આપેલ અસમતા સંહતિનો ઉકેલ સંખ્યારેખા પર દર્શાવો : $x \geq 3$ અને $-3x \leq 6$

ઉકેલ : $-3x \leq 6 \Leftrightarrow x \geq -2$

આમ, $x \geq -2$ અને $x \geq 3$.

$\therefore$ $x \geq 3$ બંને અસમતાઓનું સમાધાન કરે છે.

$\therefore$ ઉકેલ ગણ $[3, \infty)$ છે.



આકૃતિ 8.20

આકૃતિ 8.20માં $\overrightarrow{AB}$ ઉકેલ ગણ દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ 19 : અસમતા સંહતિ $2x > 4$ અને $2x < 4$, $x \in R$ ઉકેલો અને આલેખમાં દર્શાવો.

ઉકેલ : $2x > 4 \Leftrightarrow x > 2$

$\therefore$ ઉકેલ ગણ $(2, \infty)$ છે. (i)

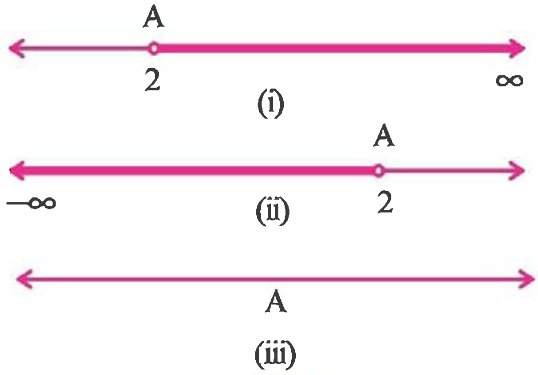
$2x < 4 \Leftrightarrow x < 2$

$\therefore$ ઉકેલ ગણ $(-\infty, 2)$ છે. (ii)

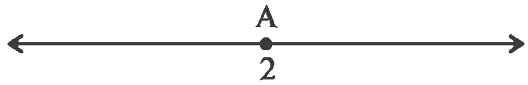
ઉકેલ ગણ (i) અને (ii) અનુક્રમે આકૃતિ 8.21 (i) અને (ii)માં દર્શાવેલ છે.

સ્પષ્ટ છે કે ઉકેલ ગણ $\emptyset$ છે.

(કોઈ ઘટ્ટ રેખા કે બિંદુ આલેખમાં નથી.)



આકૃતિ 8.21

> **☛ નોંધ** (1) જો $2x \geq 4$ તથા $2x < 4$ કે $2x > 4$ અને $2x \leq 4$ કોઈ એક જ અસમતા સંહતિ હોય, તોપણ ઉકેલ ગણ $\emptyset$ જ થયો હોત.
>
> (2) જો $2x \geq 4$ અને $2x \leq 4$ બંને અસમતા આપી હોત તો ઉકેલ ગણ $\{2\}$ મળ્યો હોત.
>
> 
>
>
> આકૃતિ 8.22

ઉદાહરણ 20 : અસમતા સંહતિ $x \geq 17$ અને $x \leq 15$, $x \in$ R ઉકેલો.

ઉકેલ : $[17, \infty)$ અને $(-\infty, 15]$ દ્વારા આપેલ અસમતાઓના ઉકેલ ગણ આકૃતિ 8.23માં દર્શાવ્યા છે.

આકૃતિ 8.23

$\overrightarrow{BQ}$ અને $\overrightarrow{AP}$ ઉકેલ દર્શાવે છે. તેમની વચ્ચે કોઈ સામાન્ય બિંદુ નથી.

$\therefore$ અસમતા સંહતિનો ઉકેલ ગણ $\emptyset$ છે.

(દેખીતું છે કે કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા 15 કે તેથી નાની હોય તથા 17 કે તેથી મોટી હોય તે શક્ય નથી.)

સ્વાધ્યાય 8.3

નીચેની અસમતાઓ ઉકેલો અને તેમના ઉકેલ ગણ સંખ્યા રેખા પર દર્શાવો :

1. $x \geq 3$ $\quad x \leq 5$ $\quad x \in$ R

2. $x > 3$ $\quad x < 8$ $\quad x \in$ R

3. $x \geq 4$ $\quad x < 6$ $\quad x \in$ R

4. $x > 4$ $\quad x \leq 6$ $\quad x \in$ R

5. $x \geq 3$ $\quad x \leq 2$ $\quad x \in$ R

6. $-2x \geq 4$ $\quad 3x \leq -6$ $\quad x \in$ R

7. $-2x \geq -10$ $\quad 2x \geq 4$ $\quad x \in$ R

8. $3x - 1 \geq 5$ $\quad x + 2 \leq -1$ $\quad x \in R$

9. $2x - 7 \leq 11$ $\quad 3x + 4 < -5$ $\quad x \in R$

10. $x - 3 < 5$ $\quad 3x + 5 > 2$ $\quad x \in R$

*

8.5 બે ચલમાં સુરેખ અસમતા

બે ચલમાં સુરેખ પદાવલિનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ $ax + by + c$ છે. જો $a, b, c \in R$ અને $a^2 + b^2 \neq 0$ તો સમીકરણ $ax + by + c = 0$ ને x તથા y માં સુરેખ સમીકરણ કહે છે. ($a^2 + b^2 \neq 0$ નો અર્થ એ કે a તથા b પૈકી ઓછામાં ઓછો એક તો શૂન્યેતર છે જ.)

સમતલ R^2 માં તેનો આલેખ રેખા છે. રેખા પરનું પ્રત્યેક બિંદુ સમીકરણ $ax + by + c = 0$નું સમાધાન કરે છે અને આથી ઊલટું $ax + by + c = 0$ નું સમાધાન કરતું કોઈ પણ બિંદુ (x, y) એ રેખા $ax + by + c = 0$ ના આલેખ પર છે. $ax + by + c = 0$ નો કોઈ પણ ઉકેલ ક્રમયુક્ત જોડ (x, y) છે, જ્યાં $y = \frac{-ax - c}{b}$, $b \neq 0$.

જો $b = 0$, તો $a \neq 0$ હોય જ, તો ઉકેલ ગણ $\left\{\left(\frac{-c}{a}, y\right)\right\}$ છે. અહીં $y \in R$ યથેચ્છ છે.

અભિવ્યક્તિ $ax + by + c$ ને સંબંધિત ચાર સુરેખ અસમતાઓ $ax + by + c < 0$, $ax + by + c \leq 0$, $ax + by + c > 0$, $ax + by + c \geq 0$ મળે. આપણે તેના આલેખાત્મક ઉકેલનો વિચાર કરીશું. ઉદાહરણ તરીકે સુરેખ અસમતા $x + y - 2 > 0$નો વિચાર કરીએ.

$x = 1$ અને $y = 2$ લેતાં, $1 + 2 - 2 > 0$ મળે જે સત્ય છે.

આમ, $(1, 2)$ અને તે જ રીતે $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(5, 7)$ વગેરે $x + y - 2 > 0$ ના ઉકેલ છે. પરંતુ $(1, 1)$ એ $x + y - 2 > 0$નો ઉકેલ નથી. કારણ કે તેમ કરતાં $1 + 1 - 2 > 0$ એટલે કે $0 > 0$ મળે જે અસત્ય છે. તે જ રીતે $(-1, -2)$, $(1, -5)$, $(-4, 1)$ વગેરે પણ $x + y - 2 > 0$ ના ઉકેલ નથી.

જે ક્રમયુક્ત જોડ (x, y) એ $ax + by + c > 0$ (અથવા $ax + by + c < 0$ અથવા $ax + by + c \leq 0$ અથવા $ax + by + c \geq 0$)નું સમાધાન કરે તેને $ax + by + c > 0$નો ઉકેલ કહે છે અને આવી $ax + by + c > 0$નું સમાધાન કરતી બધી જ જોડ (x, y) એ અસમતા $ax + by + c > 0$નો ઉકેલ ગણ રચે છે અને તેવાં બિંદુઓ દ્વારા $ax + by + c > 0$નો ઉકેલપ્રદેશ મળે છે. (તે જ રીતે $ax + by + c < 0$, $ax + by + c \leq 0$, $ax + by + c \geq 0$ માટે કહી શકાય.)

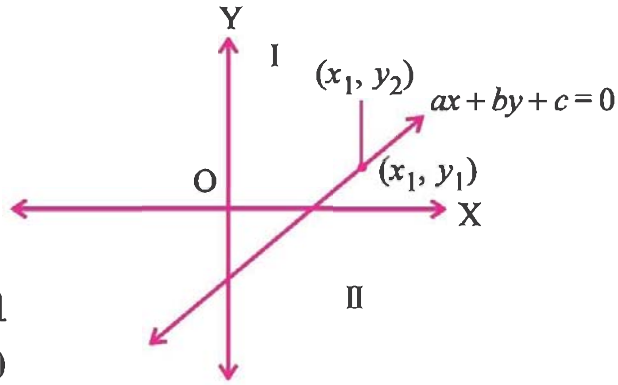
આલેખ પરથી ઉકેલ :

રેખા દ્વારા યામ-સમતલનું ત્રણ પરસ્પર અલગ ગણોમાં વિભાજન થાય.

(1) રેખા પરનાં બિંદુઓ

(2) રેખાની બંને બાજુના અર્ધતલમાં આવેલાં બિંદુઓ.

હવે આપણે સમજીશું કે રેખા $ax + by + c = 0$ થી બનતા કોઈ પણ અર્ધતલમાં આવેલાં બિંદુઓ (x', y') માટે $ax' + by' + c'$ની નિશાની અચળ રહે છે. (એટલે કે તમામ (x', y') માટે ધન રહે છે કે ઋણ રહે છે.)



આકૃતિ 8.24

ધારો કે $b > 0$: ધારો કે રેખા $ax + by + c = 0$ પર (x_1, y_1) કોઈ પણ બિંદુ છે.

$\therefore \quad ax_1 + by_1 + c = 0$

અર્ધતલ I માં (x_1, y_2) બિંદુ લો. (આકૃતિ 8.24) દેખીતું જ છે કે $y_2 > y_1$.

$\therefore \quad by_2 > by_1$

$\therefore \quad ax_1 + by_2 + c > ax_1 + by_1 + c = 0$

$\therefore \quad ax_1 + by_2 + c > 0$

અર્ધતલ I માંના (x_1, y_2) જેવા કોઈ પણ બિંદુ માટે આ ચકાસી શકાય.

આથી ઊલટું ધારો કે $ax_1 + by_2 + c > 0$.

(x_1, y_1) બિંદુ રેખા ઉપર લો.

$\therefore \quad ax_1 + by_1 + c = 0$

$\therefore \quad ax_1 + by_2 + c > ax_1 + by_1 + c \qquad (ax_1 + by_1 + c = 0)$

$\therefore \quad by_2 > by_1$

$\therefore \quad y_2 > y_1 \qquad (b > 0)$

આમ અર્ધતલ I માં પ્રત્યેક બિંદુ (x', y') માટે $ax' + by' + c > 0$ અને આથી ઊલટું પણ સત્ય છે.

ચકાસી શકાય કે અર્ધતલ IIમાંના પ્રત્યેક બિંદુ (x, y) માટે $ax + by + c < 0$ અને આથી ઊલટું પણ સત્ય છે.

આથી રેખા $ax + by + c = 0$ દ્વારા સમતલ R^2નું ત્રણ ભાગમાં વિભાજન થાય છે :

(1) રેખા $ax + by + c = 0$ પરનાં બિંદુઓ (x, y).

(2) જેના માટે $ax + by + c > 0$ તેવા એક અર્ધતલનાં બિંદુઓ (x, y).

(3) જેના માટે $ax + by + c < 0$ તેવા બીજા અર્ધતલનાં બિંદુઓ (x, y).

એક ચોક્કસ અર્ધતલનાં બિંદુઓ (x, y) માટે $ax + by + c = 0$ ની નિશાની અચળ રહેતી હોવાથી આપણે રેખા પર $(0, 0)$ ન હોય તો $(0, 0)$નો વિચાર કરવાનું સરળ રહે છે. જો રેખા $(0, 0)$ માંથી પસાર થતી હોય, તો આપણે $(1, 0)$, $(0, 1)$ જેવાં બીજાં બિંદુઓનો વિચાર કરવાનો રહે. $b < 0$ માટે પણ ઉપર જેવી જ ચર્ચા થઈ શકે.

જો $b = 0$ તો $a \neq 0$. આ પરિસ્થિતિમાં પદાવલિ $ax + c$ છે.

$a > 0$ હોય, તો $ax + c > 0 \Leftrightarrow x > \frac{-c}{a}$

$ax + c < 0 \Leftrightarrow x < \frac{-c}{a}$

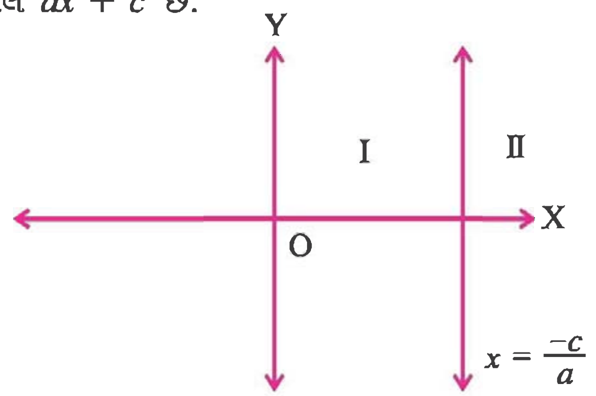
$a < 0$ હોય, તો $ax + c > 0 \Leftrightarrow x < \frac{-c}{a}$

$ax + c < 0 \Leftrightarrow x > \frac{-c}{a}$

આથી શિરોલંબ રેખા $x = \frac{-c}{a}$ દોરીએ.

$x = \frac{-c}{a}$ની ડાબી બાજુએ અર્ધતલ I માટે $x < \frac{-c}{a}$,

$x = \frac{-c}{a}$ની જમણી બાજુએ અર્ધતલ II માટે $x > \frac{-c}{a}$.



આકૃતિ 8.25

હવે એક પ્રથા (રૂઢિ) નક્કી કરીએ છીએ :

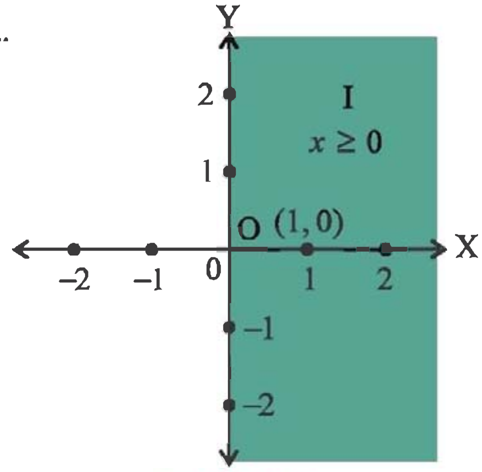
(1) $ax + by + c \geq 0$ (અથવા $\leq$)ના ઉકેલમાં રેખા $ax + by + c = 0$ નાં બિંદુઓનો પણ સમાવેશ થાય છે અને તે દર્શાવવા માટે આપણે ઘાટી રેખા $ax + by + c = 0$ દોરીએ છીએ.

(2) $ax + by + c > 0$ (અથવા < 0)ના ઉકેલમાં રેખા $ax + by + c = 0$ નાં બિંદુઓનો સમાવેશ થતો નથી અને આ દર્શાવવા માટે આપણે તૂટક રેખા $ax + by + c = 0$ દોરીએ છીએ.

ઉદાહરણ 21 : $x \geq 0$ના ઉકેલને યામ-સમતલમાં દર્શાવો.

ઉકેલ : રેખા $x = 0$ એટલે Y-અક્ષ મળે. તે (0, 0)માંથી પસાર થાય છે. આથી આપણે (1, 0)નો વિચાર કરીએ. $x = 1$ લેતાં, $1 \geq 0$ સત્ય છે.

આથી આકૃતિ 8.26 ના (1, 0)ને સમાવતા રંગીન અર્ધતલ I નાં બિંદુઓ માટે $x \geq 0$. આથી અર્ધતલ I અસમતાનો ઉકેલપ્રદેશ છે. ઉકેલપ્રદેશમાં Y-અક્ષનો સમાવેશ થાય છે.



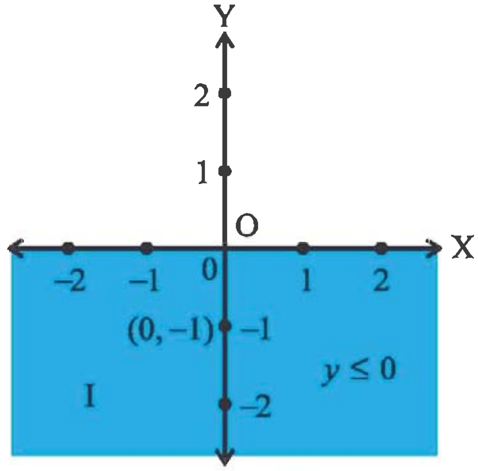
આકૃતિ 8.26

આપણે જાણીએ છીએ કે, Y-અક્ષ પરનાં તથા Y-અક્ષની જમણી બાજુનાં બિંદુઓ (x, y) માટે $x \geq 0$.

ઉદાહરણ 22 : યામ-સમતલમાં $y \leq 0$નો ઉકેલ દર્શાવો.

ઉકેલ : સમીકરણ $y = 0$ એ X-અક્ષ દર્શાવે છે અને તે (0, 0)માંથી પસાર થાય છે. (0, –1) માટે $y \leq 0$ માં $y = -1$ લેતાં $-1 < 0$ સત્ય છે.

આથી ઉકેલપ્રદેશ (0, –1)ને સમાવતો X-અક્ષની નીચેનો અર્ધતલ છે અને તેમાં X-અક્ષનો પણ સમાવેશ થાય છે. (આકૃતિ 8.27 નો રંગીન ભાગ)



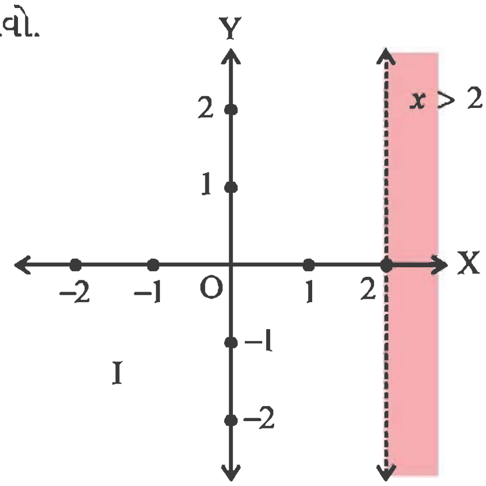
આકૃતિ 8.27

ઉદાહરણ 23 : $x > 2$ નો યામ-સમતલમાં ઉકેલપ્રદેશ મેળવો.

ઉકેલ : $x = 2$ શિરોલંબ રેખા છે.

$x > 2$ નો ઉકેલ મેળવવા તૂટક રેખા $x = 2$ દોરો.

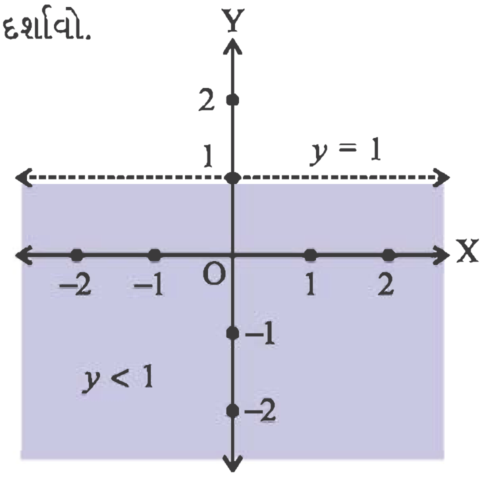
(0, 0) અસમતાના ઉકેલમાં નથી કારણ કે $0 > 2$ નથી. આથી $x > 2$ અસમતાનો યામ-સમતલમાં ઉકેલપ્રદેશ શિરોલંબ તૂટક રેખા $x = 2$ ની જમણી બાજુનો (0, 0)ને ન સમાવતો પ્રદેશ છે અને તેમાં રેખા $x = 2$ નાં બિંદુઓનો સમાવેશ થતો નથી. (આકૃતિ 8.28 નો રંગીન ભાગ)



આકૃતિ 8.28

ઉદાહરણ 24 : અસમતા $y < 1$નો ઉકેલ યામ-સમતલમાં દર્શાવો.

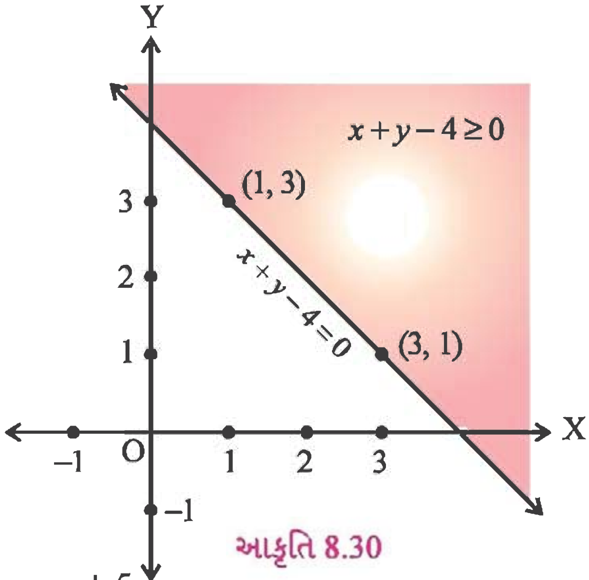
ઉકેલ : $y = 1$ સમક્ષિતિજ રેખા છે. અસમતા $y < 1$ હોવાથી $y = 1$નો આલેખ તૂટક રેખા દ્વારા દર્શાવ્યો છે. (0, 0) અસમતાનો ઉકેલ ગણ દર્શાવતા પ્રદેશમાં છે કારણ કે $0 < 1$ સત્ય છે. આથી ઉકેલ ગણ દર્શાવતો પ્રદેશ તૂટક રેખા $y = 1$ની નીચેનો (0, 0)ને સમાવતો રંગીન પ્રદેશ છે. (આકૃતિ 8.29)



આકૃતિ 8.29

ઉદાહરણ 25 : $x + y - 4 \geq 0$નો ઉકેલ ગણ આલેખ દ્વારા દર્શાવો.

$x + y - 4 = 0$ એક રેખા દર્શાવે છે અને તે (1, 3) અને (3, 1)માંથી પસાર થાય છે (રેખા પર કોઈપણ બે બિંદુ પસંદ કરવા તમે સ્વતંત્ર છો!) (0, 0) એ $x + y - 4 \geq 0$ના ઉકેલમાં નથી કારણ કે $0 + 0 - 4 \geq 0$ સત્ય નથી. આથી ઉકેલપ્રદેશ $x + y - 4 = 0$ રેખાના (0, 0)ને ન સમાવતા અર્ધતલ તથા રેખા પરનાં બિંદુઓથી બનતો ગણ છે. (આકૃતિ 8.30 નો રંગીન ભાગ)



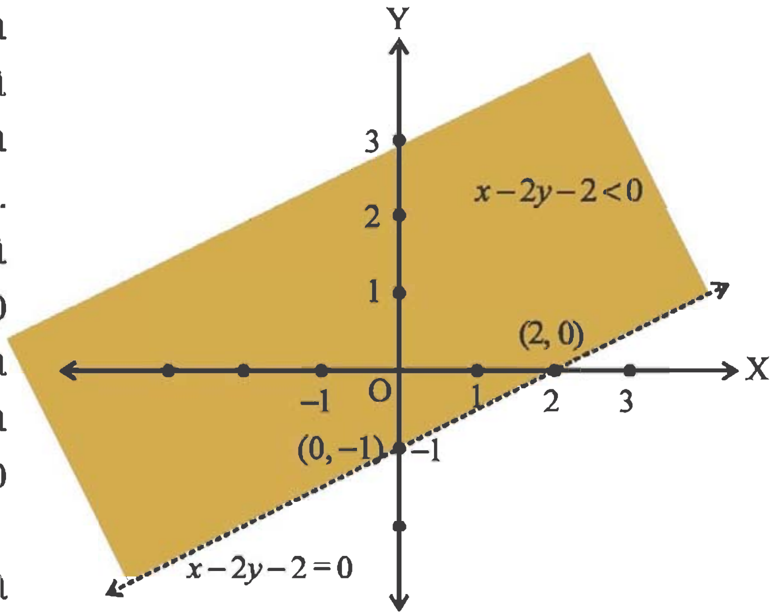
આકૃતિ 8.30

ઉદાહરણ 26 : આલેખ પર ઉકેલપ્રદેશ દર્શાવો :

(1) $x - 2y - 2 < 0$ (2) $x - y \geq 0$ (3) $3x - 2y \geq x - y + 5$.

ઉકેલ : (1) $x - 2y - 2 = 0$ દ્વારા દર્શાવાતી તૂટક રેખા દોરીએ. $x = 0$ અને $y = 0$ અનુક્રમે લેતાં જોઈ શકાશે કે રેખા (0, –1) અને (2, 0)માંથી પસાર થાય છે. સમીકરણ $x - 2y - 2 = 0$માં $x = 0$ અને $y = 0$ કિંમતો લેતાં –2 મળે છે અને $-2 < 0$ છે. આથી, (0, 0) એ $x - 2y - 2 < 0$ ના ઉકેલપ્રદેશમાં છે. આથી ઉકેલપ્રદેશ દર્શાવ્યા પ્રમાણે છે અને તેમાં રેખા $x - 2y - 2 = 0$ પરનાં બિંદુઓનો સમાવેશ થતો નથી.

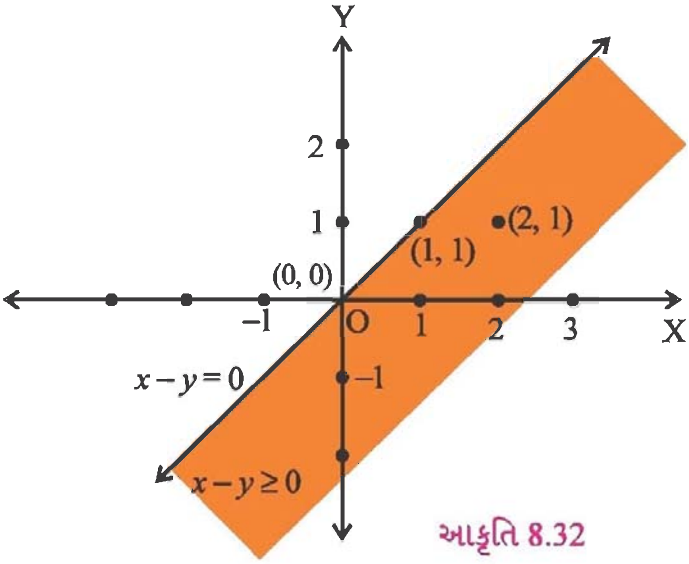
આકૃતિ 8.31 માં (0, 0)ને ન સમાવતો રંગીન પ્રદેશ ઉકેલ દર્શાવે છે.



આકૃતિ 8.31

(2) હવે $x - y \geq 0$નો વિચાર કરીએ.

રેખા $x - y = 0$ ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે. (1, 1)માંથી પણ પસાર થાય છે. ઘાટી રેખા દોરીએ, કારણ કે અસમતા $x - y \geq 0$ છે. આપણે બિંદુ (2, 1)નો વિચાર કરીએ (જેથી $x \neq y$). (2, 1) એ $x - y = 2 - 1 \geq 0$નું સમાધાન કરે છે. (ખરેખર તો $2 - 1 > 0$). આથી ઉકેલનો પ્રદેશ (2, 1)ને સમાવતો અર્ધતલ છે અને તેમાં રેખા $x - y = 0$ બિંદુઓનો સમાવેશ પણ થઈ જાય છે. (આકૃતિ 8.32 નો રંગીન ભાગ)



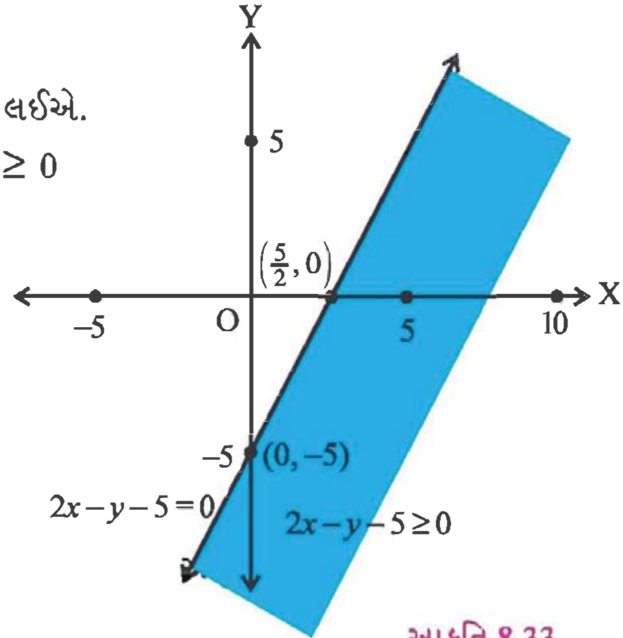
આકૃતિ 8.32

(3) હવે અસમતા $3x - 2y \geq x - y + 5$ લઈએ.

$3x - 2y \geq x - y + 5 \Leftrightarrow 2x - y - 5 \geq 0$

હવે રેખા $2x - y - 5 = 0$ દોરીએ. દેખીતું જ રેખા $(0, -5)$ અને $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$માંથી પસાર થાય છે.

આ રેખા ઘાટી રેખા દોરવાની છે. (0, 0) માટે $0 - 0 - 5 \geq 0$ સત્ય નથી. આથી ઉકેલનો પ્રદેશ (0, 0)ને ન સમાવતો રેખા પરનાં બિંદુઓને સમાવતો આકૃતિ 8.33 ના રંગીન ભાગ દ્વારા દર્શાવાતો અર્ધતલ છે.



આકૃતિ 8.33

સ્વાધ્યાય 8.4

નીચેની અસમતાઓનો ઉકેલ ગણ આલેખ દ્વારા યામ-સમતલમાં મેળવો :

1. $x < -1$ $\quad x \in R$ (R^2 માં) $\qquad$ 2. $x \geq 3$ $\quad x \in R$ (R^2 માં)
3. $y \leq -2$ $\quad y \in R$ (R^2 માં) $\qquad$ 4. $y > -5$ $\quad y \in R$ (R^2 માં)
5. $x + y - 5 > 0$ $\quad x, y \in R$ $\qquad$ 6. $x + y \geq 0$ $\quad x, y \in R$
7. $2x + y - 3 < 0$ $\quad x, y \in R$ $\qquad$ 8. $x + y > 1$ $\quad x, y \in R$
9. $2x - y + 7 > 3x + 2y - 9$ $\quad x, y \in R$
10. $2x + y - 3 > x + 2y + 5$ $\quad x, y \in R$
11. $3x - y \geq 0$ $\quad x, y \in R$ $\qquad$ 12. $x - 2y \leq 0$ $\quad x, y \in R$

*

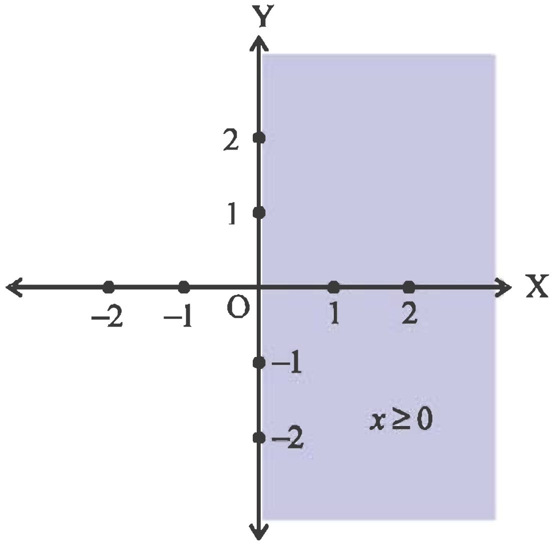
8.6 બે ચલમાં સુરેખ અસમતાઓની સંહતિ

કેટલીક વખત આપણે બે અથવા બેથી વધુ અસમતા ઉકેલવાની જરૂર પડે છે જેમકે $x + y - 5 \geq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. આવી પરિસ્થિતિમાં આપણે પ્રત્યેક અસમતાનો ઉકેલ ગણ શોધીએ છીએ અને તેમનો ઉકેલપ્રદેશનો છેદગણ માંગેલ અસમતા સંહતિનો ઉકેલ ગણ (ઉકેલપ્રદેશ) છે.

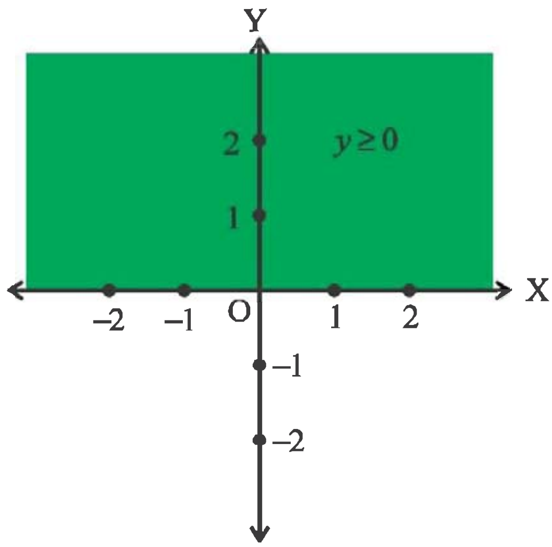
આ સંકલ્પના આપણે ઉદાહરણો દ્વારા સમજીએ.

ઉદાહરણ 27 : સુરેખ અસમતાઓની સંહતિ $x \geq 0$, $y \geq 0$ ઉકેલો.

ઉકેલ : અસમતા $x \geq 0$નો ઉકેલ આપણે જાણીએ છીએ તે Y-અક્ષની જમણી બાજુના તથા Y-અક્ષનાં બિંદુઓથી બનતો ગણ છે. તે જ રીતે $y \geq 0$નો ઉકેલપ્રદેશ X-અક્ષની ઉપરનો અર્ધતલ છે અને તે X-અક્ષ ઉપરનાં બિંદુઓને પણ સમાવે છે.

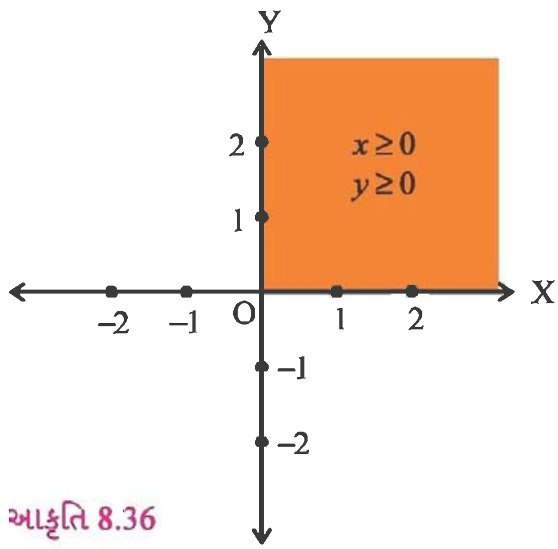


આકૃતિ 8.34



આકૃતિ 8.35

આ બંને પ્રદેશોનો છેદગણ પ્રથમ ચરણનાં બિંદુઓ, $\overrightarrow{OX}$ અને $\overrightarrow{OY}$ પરનાં બિંદુઓના યોગગણથી બનતો ગણ છે. (આકૃતિ 8.36 નો રંગીન ભાગ)

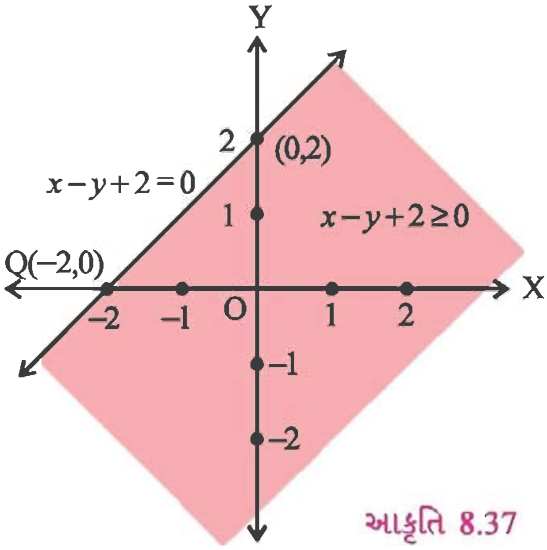


આકૃતિ 8.36

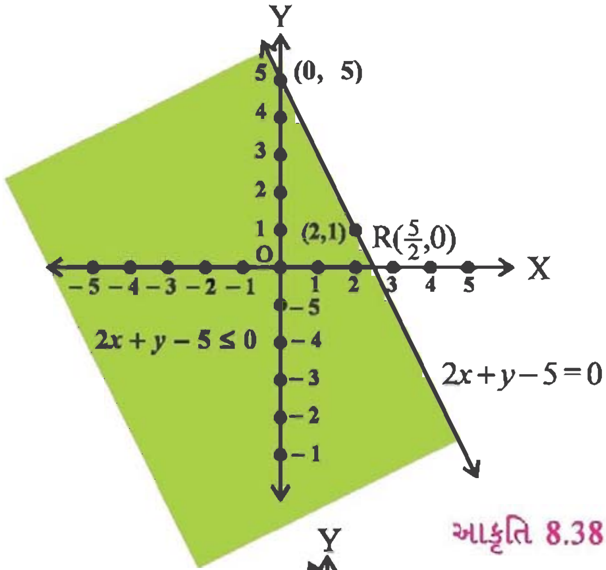
☛ નોંધ વ્યવહારના ઘણા પ્રશ્નોમાં મર્યાદા $x \geq 0$ અથવા $x > 0$ અને $y \geq 0$ અથવા $y > 0$ હોય છે.

ઉદાહરણ 28 : સુરેખ અસમતા સંહતિ $x - y + 2 \geq 0$ અને $2x + y - 5 \leq 0$ ને આલેખની મદદથી ઉકેલો.

ઉકેલ : દેખીતું જ સ્પષ્ટ છે કે રેખા $x - y + 2 = 0$ એ (0, 2) અને (–2, 0)માંથી પસાર થાય છે.



આકૃતિ 8.37



આકૃતિ 8.38

$x = 0$, $y = 0$ લેતાં, $0 - 0 + 2 \geq 0$ સત્ય છે.

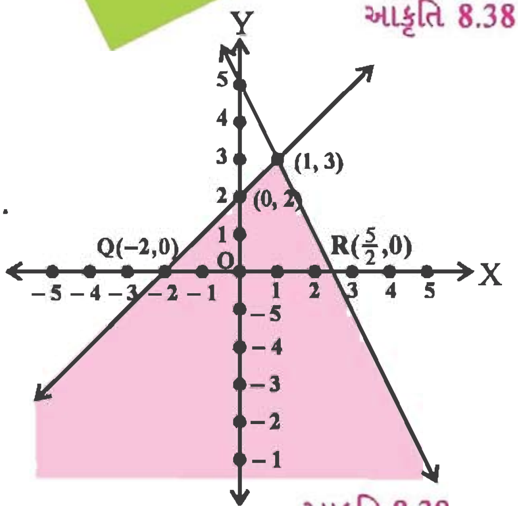
આથી, (0, 0) એ $x - y + 2 \geq 0$ના ઉકેલપ્રદેશમાં છે.

વળી, ($\frac{5}{2}$, 0) તથા (0, 5) રેખા $2x + y - 5 = 0$ પર છે.

$x = 0$ તથા $y = 0$ લેતાં, $2x + y - 5 = -5 \leq 0$ છે જ.

$\therefore$ (0, 0) એ અસમતા $2x + y - 5 \leq 0$ ના ઉકેલ ગણમાં છે.

હવે બંને રેખાઓને એક જ અક્ષોની જોડ લઈ દર્શાવીએ. સંહતિના ઉકેલપ્રદેશમાં $\overrightarrow{PQ}$ અને $\overrightarrow{PR}$ તથા દર્શાવેલ પ્રદેશ મળે.

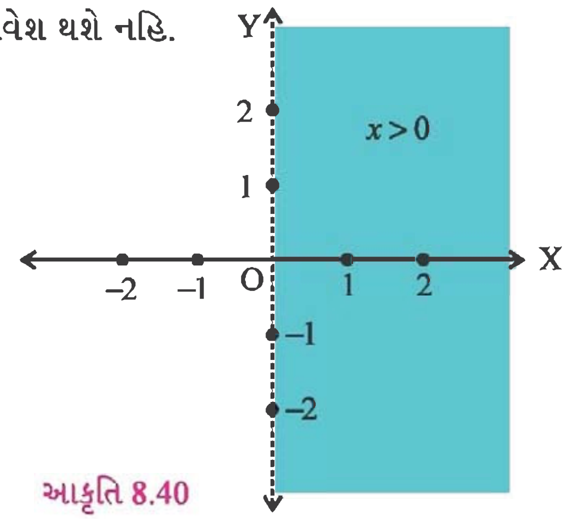


આકૃતિ 8.39

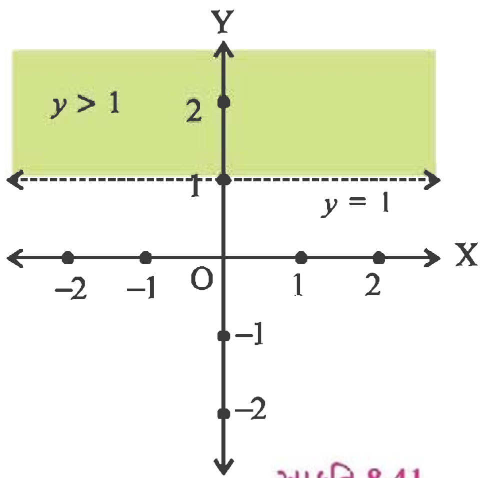
આકૃતિ 8.39 નો રંગીન ભાગ એ આપેલ સુરેખ અસમતા સંહતિનો ઉકેલપ્રદેશ છે.

ઉદાહરણ 29 : અસમતા સંહતિ $x > 0$, $y > 1$ તથા $x + y < 2$નો ઉકેલ આલેખ પરથી મેળવો.

ઉકેલ : Y-અક્ષની જમણી બાજુના બિંદુઓથી $x > 0$ નો આલેખ મળે. પ્રદેશમાં Y-અક્ષ પરના બિંદુઓનો સમાવેશ થશે નહિ.



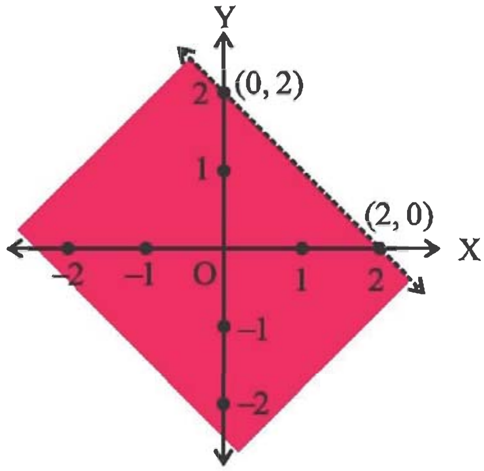
આકૃતિ 8.40



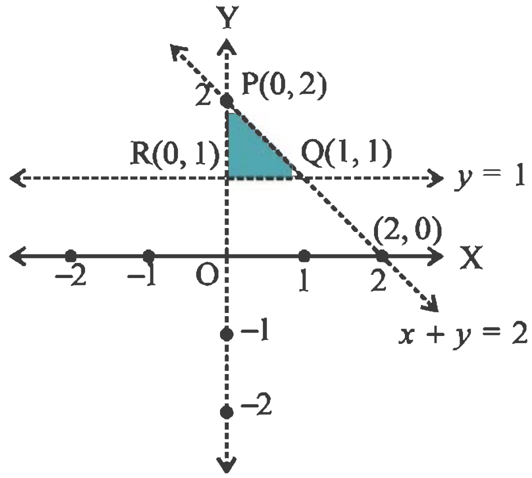
આકૃતિ 8.41

$y = 1$ ઉપરના અર્ધતલમાંનાં બિંદુઓનો ગણ એ $y > 1$ નો ઉકેલપ્રદેશ દર્શાવે છે.

રેખા $x + y = 2$ એ (2, 0) અને (0, 2)માંથી પસાર થતી રેખા છે. વળી, $x + y < 2$ માં $x = 0$, $y = 0$ લેતાં, $0 + 0 < 2$ હોવાથી (0, 0) એ $x + y = 2$ ના ઉકેલગણના પ્રદેશમાં છે.



આકૃતિ 8.42

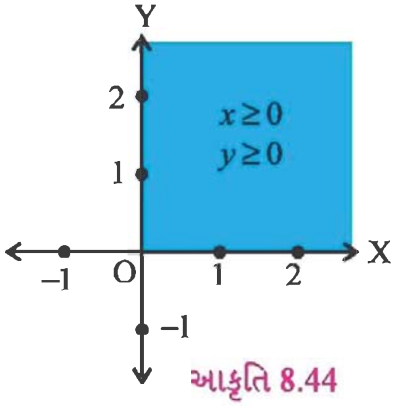


આકૃતિ 8.43

તમામ પ્રદેશોનો છેદગણ લેતાં, ΔPQRનો અંતઃપ્રદેશ અસમતા સંહતિનો ઉકેલ દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ 30 : અસમતા સંહતિ $x \geq 0$, $y \geq 0$, $5x + 3y - 15 \leq 0$, $4x + 5y - 20 \leq 0$નો ઉકેલ આલેખ પરથી મેળવો.

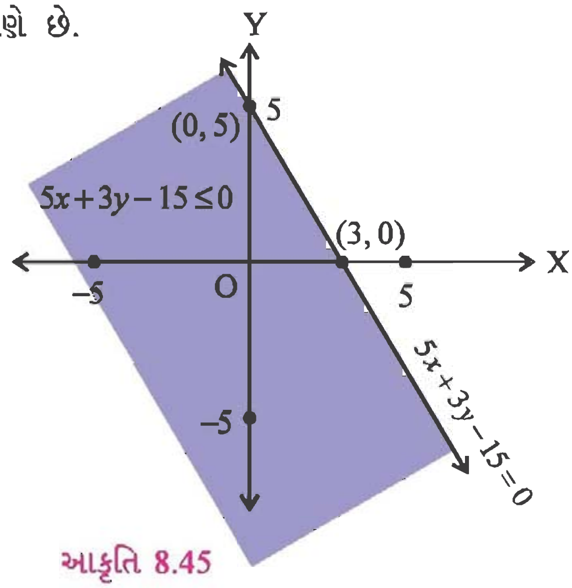
ઉકેલ : અસમતાઓ $x \geq 0$, $y \geq 0$નો ઉકેલ તો આપણે જાણીએ છીએ તે પ્રમાણે આકૃતિ 8.44 માં રંગીન ભાગ વડે દર્શાવેલ છે.



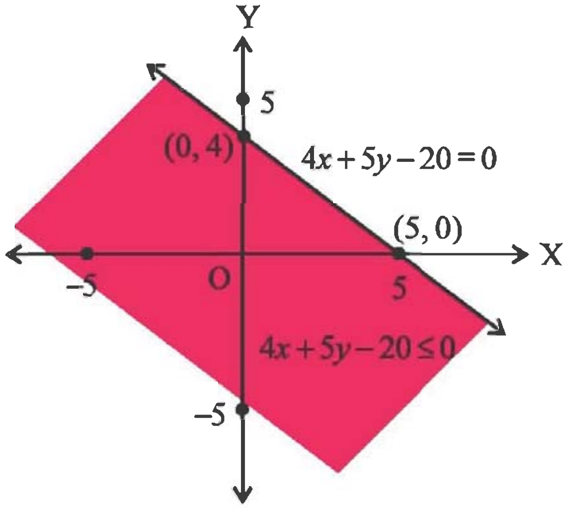
આકૃતિ 8.44

રેખા $5x + 3y - 15 = 0$ એ (3, 0) અને (0, 5)માંથી પસાર થાય છે અને (0, 0) એ $5x + 3y - 15 \leq 0$ના ઉકેલપ્રદેશમાં છે. આથી ઉકેલપ્રદેશ આકૃતિ 8.45 ના રંગીન ભાગમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનો છે.

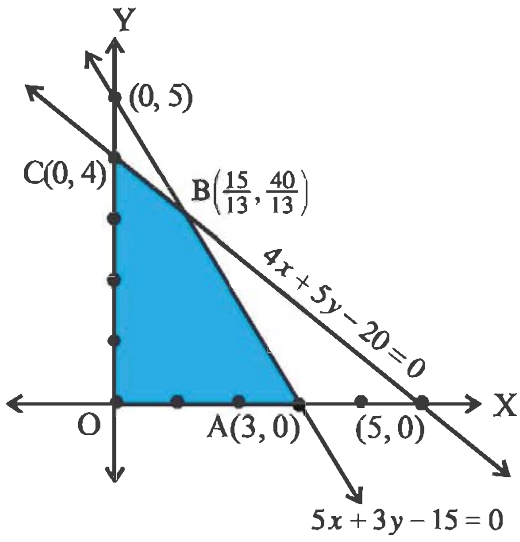
રેખા $4x + 5y - 20 = 0$ એ બિંદુઓ (5, 0) અને (0, 4)માંથી પસાર થાય છે તથા (0, 0) એ $4x + 5y - 20 \leq 0$ ના ઉકેલપ્રદેશમાં છે. આથી તેનો ઉકેલ આકૃતિ 8.46 ના રંગીન ભાગમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે છે.



આકૃતિ 8.45



આકૃતિ 8.46



આ તમામ પ્રદેશોનો છેદગણ ચતુષ્કોણ OABCના અંતઃપ્રદેશ તથા બાજુઓનાં બિંદુઓથી બનેલો પ્રદેશ છે અને તે ઉકેલપ્રદેશ છે.

અસમતા સંહતિનો ઉકેલ ગણ આકૃતિ 8.47 ના રંગીન ભાગમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે છે.

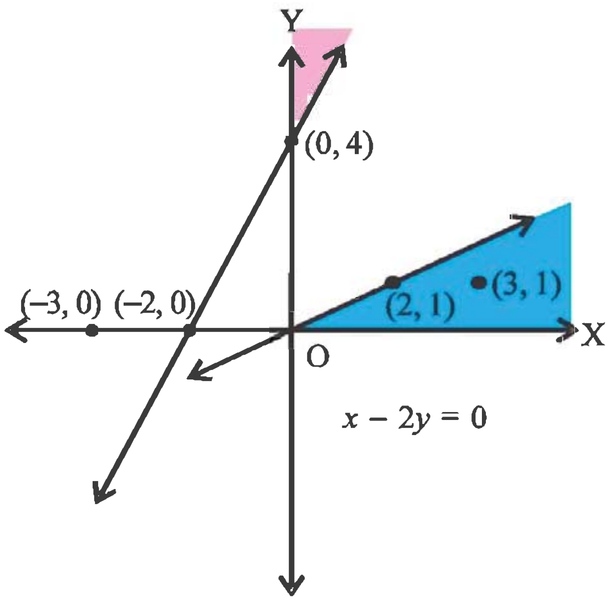
આકૃતિ 8.47

ઉદાહરણ 31 : નીચેની અસમતા સંહતિનો ઉકેલ મેળવો.

$x - 2y \geq 0, 2x - y \leq -4, x \geq 0, y \geq 0$

ઉકેલ : (1) $x \geq 0$ તથા $y \geq 0$ હોવાથી ઉકેલ ગણમાં પ્રથમ ચરણના અને અક્ષો પરનાં $x \geq 0$ તથા $y \geq 0$ માટેનાં બિંદુઓ મળશે.

$x - 2y = 0$ એ ઉગમબિંદુમાંથી તથા (2, 1)માંથી પસાર થતી રેખા છે. (ચકાસો !) (3, 1) બિંદુનો વિચાર કરીએ. $x - 2y = 3 - 2 \geq 0$. આથી (3, 1) એ $x - 2y \geq 0$ના ઊકેલપ્રદેશમાં છે.



આથી $x \geq 0, y \geq 0$ અસમતાઓને આધીન રેખા $x - 2y \geq 0$ નીચેના પ્રથમ ચરણ તથા $\overrightarrow{OX}$ પરનાં બિંદુઓ ઉકેલપ્રદેશમાં મળે. (જુઓ આકૃતિ 8.48.)

આકૃતિ 8.48

રેખા $2x - y = -4$ બિંદુઓ (–2, 0) અને (0, 4)માંથી પસાર થાય છે. (–3, 0) એ $2x - y \leq -4$ના ઉકેલગણમાં છે કારણ કે $-6 - 0 \leq -4$.

આમ, $2x - y \leq -4$, $x - 2y \geq 0$ તથા $x \geq 0, y \geq 0$ અસમતાઓનું સમાધાન કરે તેવું કોઈ બિંદુ સમતલમાં નથી.

(**નોંધ :** દેખીતું જ $x \geq 2y \Rightarrow 2x \geq 4y$

$$\Rightarrow 3y \leq 2x - y \leq -4 \Rightarrow y < 0$$

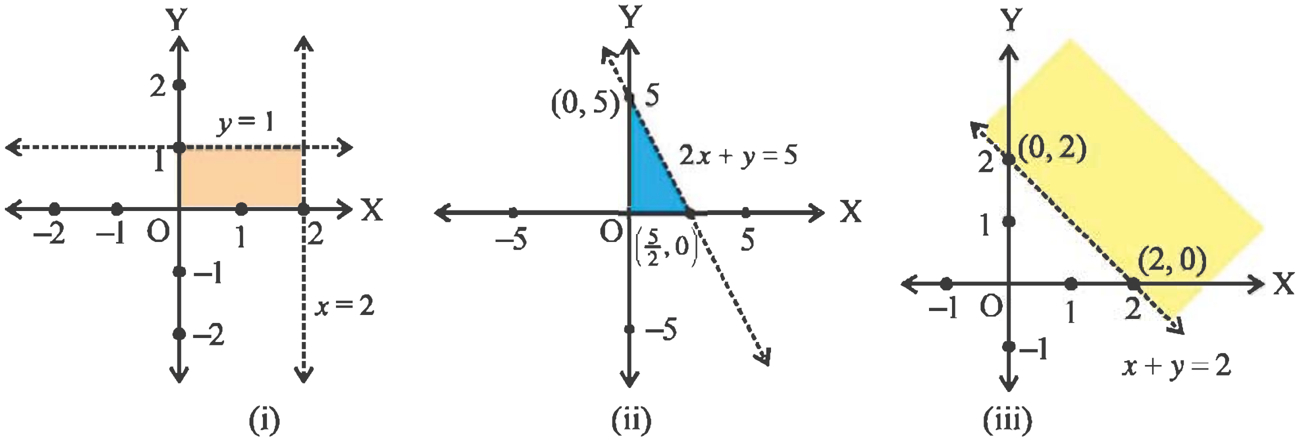
આથી $y \geq 0$ અને $y < 0$ અસમતાઓ સાથે સંભવે નહિ.)

આથી ઉકેલ ગણ ખાલીગણ છે.

સ્વાધ્યાય 8.5

નીચેની અસમતા સંહતિનો ઉકેલપ્રદેશ આલેખ પરથી મેળવો : $(x \in R, y \in R)$

1. $y \geq 0, y \leq 4, x < 5$
2. $x \geq 0, y \geq 0, x \leq 3, y \leq 2$
3. $x > 0, y > 0, x \leq 3, y \leq 2$
4. $x > 0, y > 0, x + 2y < 12, x + y \geq 2$
5. $2x + y \leq 12, x + 2y \leq 7, x \geq 0, y \geq 0$
6. $x \geq 0, y \geq 0, x - y \geq 0$
7. $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6, 3x + 4y \leq 12$
8. $y > 0, x > 2y, x + y > 4, x + y < 6$
9. $x < 1, y < 0, x \geq -3, x + y \geq 0$
10. $3x + y > 0, 3x + y < 3$
11. જેનો ઉકેલ આકૃતિ 8.49 ના રંગીન ભાગમાં દર્શાવ્યો છે તેવી અસમતા સંહતિ લખો :



આકૃતિ 8.49

*

કેટલાંક પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો અને કૂટપ્રશ્નો

હવે આપણે જે કંઈ શીખ્યા તેના પર આધારિત કેટલાક કૂટપ્રશ્નો જોઈએ. સૌપ્રથમ આપણે નીચેની અસમતાઓ યાદ કરીએ :

(1) $| x | < a \Leftrightarrow -a < x < a \qquad x \in R, a \in R^+$

(2) $| x | \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \qquad x \in R, a \in R^+$

(3) $| x | \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ અથવા $x \geq a \qquad x \in R, a \in R^+$

(4) $| x | > a \Leftrightarrow x < -a$ અથવા $x > a \qquad x \in R, a \in R^+$

આની સાબિતી સરળતાથી આપી શકાય.

દાખલા તરીકે આપણે (1) સાબિત કરીએ,

(1) ધારો કે $| x | < a$.

જો $x \geq 0$ તો $x < a$ તથા $x < 0$ તો $-x < a$. આમ, $x > -a$

$\therefore \quad -a < x < a$

આથી ઊલટું, ધારો કે $-a < x < a$

$\therefore \quad x > 0$ તો $| x | = x < a$

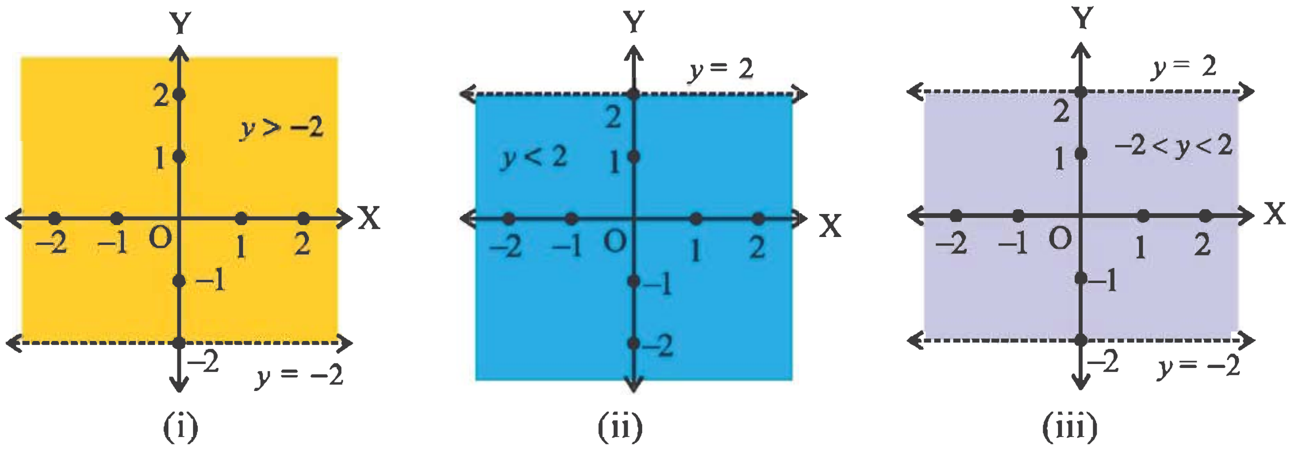
તથા $x < 0$ તો $| x | = -x$. હવે $-a < x$ પરથી $a > -x$ એટલે કે $a > | x |$ એટલે કે $| x | < a$

$\therefore \quad -a < x < a \Leftrightarrow | x | < a$

(3) તો (1) નું નિષેધ છે. આથી $-a < x$ તથા $x < a$ પરથી નિષેધ લેતાં, $x \leq -a$ અથવા $x \geq a$ મળે. આ જ રીતે (2) તથા (4) પણ સાબિત થઈ શકે.

બે ચલમાં સુરેખ અસમતાઓની સંહતિઓનો ઉકેલપ્રદેશ દર્શાવવા માટે આપણે પ્રત્યેક અસમતાનો ઉકેલપ્રદેશ દર્શાવવા માટે ભિન્ન રંગનો ઉપયોગ કરી શકીએ અથવા પ્રદેશોને ભિન્ન-ભિન્ન રીતે છાયાંકિત કરી શકીએ.

ઉદાહરણ તરીકે, $-2 < y < 2$ ના ઉકેલ માટે આપણે નીચેની પદ્ધતિ અનુસરી શકીએ :

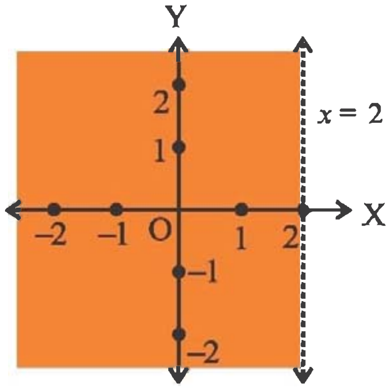


આકૃતિ 8.50

વળી, અસમતા $x < 2$નો સંખ્યારેખા ઉપર આલેખ નીચે પ્રમાણે મળે :

આકૃતિ 8.51

સમતલમાં $x < 2$ નો આલેખ આકૃતિ 8.52 માં રંગીન ભાગ દ્વારા દર્શાવેલ છે.



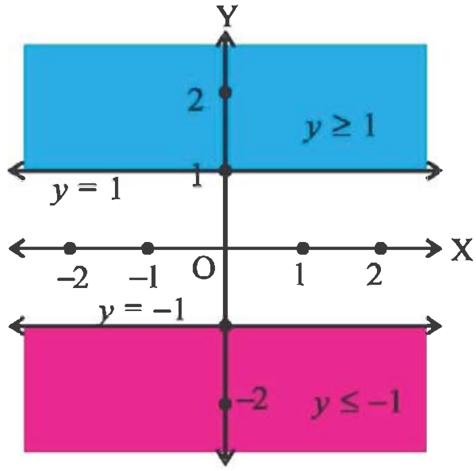
આકૃતિ 8.52

ઉદાહરણ 32 : નીચેની અસમતાઓના ઉકેલપ્રદેશ સમતલમાં મેળવો :

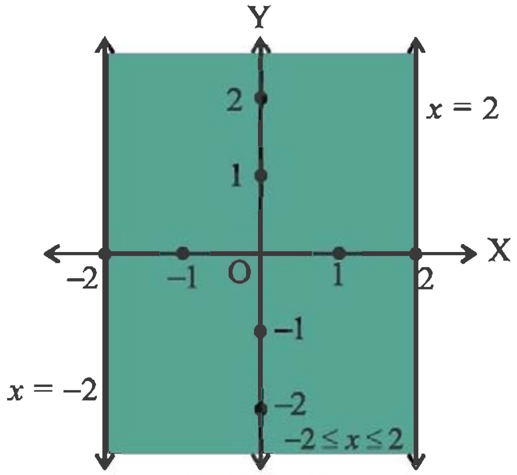
(1) $|y| \geq 1$ (2) $|x| \leq 2$ (3) $|x - y| \leq 2$ (4) $|x - y| \leq 0$.

ઉકેલ : (1) જો $y \geq 0$, તો $y \geq 1$ અને જો $y < 0$, તો $-y \geq 1$ અથવા $y \leq -1$.

આથી ઉકેલપ્રદેશ આકૃતિ 8.53 માં દર્શાવેલ બે પ્રદેશોનો યોગગણ છે. (અથવા આપેલા (1) થી (4) સંબંધો પરથી આપણને $y \geq 1$ અથવા $y \leq -1$ મળશે.)



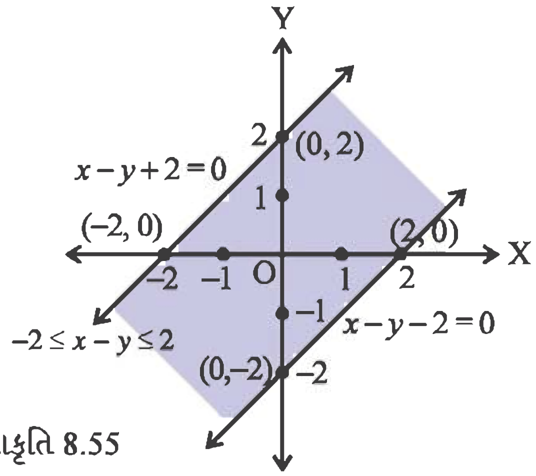
આકૃતિ 8.53



આકૃતિ 8.54

(2) $|x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

ઉકેલપ્રદેશ આકૃતિ 8.54 ના રંગીન ભાગમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે મળે.



આકૃતિ 8.55

(3) $|x - y| \leq 2$

$\therefore \quad -2 \leq x - y \leq 2$

$(|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a)$

અસમતાઓ $x - y + 2 \geq 0$ તથા $x - y - 2 \leq 0$ મળે.

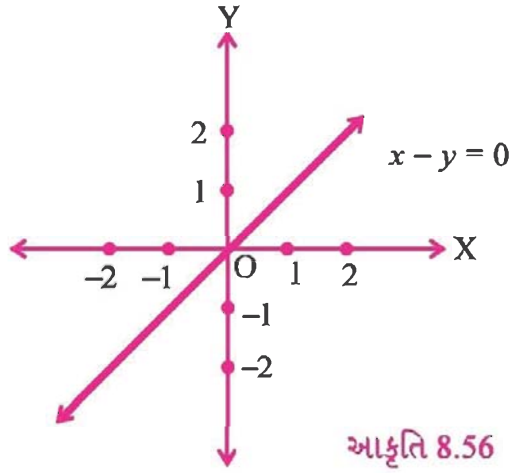
આથી રેખાઓ $x - y - 2 = 0$ તથા $x - y + 2 = 0$નો વિચાર કરીએ.

$x - y + 2 \geq 0$નો વિચાર કરતાં (0, 0) પરથી $2 \geq 0$ મળે. આથી (0, 0) એ $x - y + 2 \geq 0$ ના ઉકેલપ્રદેશમાં છે જ. આ જ રીતે $x - y - 2 \leq 0$ ના ઉકેલપ્રદેશમાં પણ (0, 0) છે જ.

આથી ઉકેલ ગણ આકૃતિ 8.55 માં બતાવ્યા પ્રમાણે રંગીન પ્રદેશ દ્વારા દર્શાવાય.

(4) $|x - y| \leq 0$

$|x - y| < 0$ શક્ય નથી.



આકૃતિ 8.56

આથી $| x - y | = 0$

$\therefore \quad x - y = 0$

ઉકેલપ્રદેશ રેખા $x = y$ છે.

ઉદાહરણ 33 : નીચેની અસમતાઓ ઉકેલો :

(1) $-5 < 3x - 8 < 28$ (2) $-20 < -5(x - 3) < 40$. $x \in R$

ઉકેલ : (1) આ અસમતાનો અર્થ છે $-5 < 3x - 8$ અને $3x - 8 < 28$.

$\therefore \quad -5 < 3x - 8 \Leftrightarrow 8 - 5 < 3x \Leftrightarrow 3 < 3x \Leftrightarrow x > 1$

વળી, $3x - 8 < 28 \Leftrightarrow 3x < 36 \Leftrightarrow x < 12$

આમ, $-5 < 3x - 8 < 28 \Leftrightarrow 1 < x < 12$

$\therefore$ ઉકેલ ગણ $(1, 12)$ છે.

(2) $-20 < -5(x - 3)$ અને $-5(x - 3) < 40$

$\Leftrightarrow \quad -4 < -x + 3$ અને $-x + 3 < 8$

$\Leftrightarrow \quad x < 4 + 3$ અને $x > 3 - 8$

$\Leftrightarrow \quad -5 < x < 7$

$\therefore$ ઉકેલ ગણ $(-5, 7)$ છે.

ઉદાહરણ 34 : નીચેની અસમતાઓનો ઉકેલ શોધો તથા સંખ્યારેખા પર ઉકેલ ગણ દર્શાવો : $(x \in R)$

(1) $2(x - 1) < x + 5$ (2) $5(2x - 7) - 3(2x + 3) < 0$, $2x + 19 < 6x + 47$.

ઉકેલ : (1) $2(x - 1) < x + 5 \quad \Leftrightarrow 2x - 2 < x + 5$

$\Leftrightarrow 2x - x < 5 + 2$

$\Leftrightarrow x < 7$

આથી ઉકેલ ગણ $(-\infty, 7)$ છે.

આકૃતિ 8.57

(2) $5(2x - 7) - 3(2x + 3) < 0 \quad \Leftrightarrow 10x - 35 - 6x - 9 < 0$

$\Leftrightarrow 4x - 44 < 0$

$\Leftrightarrow x < 11$

આથી ઉકેલ ગણ $(-\infty, 11)$ છે.

આકૃતિ 8.58

$2x + 19 < 6x + 47 \quad \Leftrightarrow -4x < 28$

$\Leftrightarrow x > -7$

આથી ઉકેલ ગણ $(-7, \infty)$ છે.

આકૃતિ 8.59

આ બંને ઉકેલપ્રદેશોનો છેદગણ આકૃતિ 8.60 માં દર્શાવેલ છે તથા ઉકેલ ગણ $(-7, 11)$ છે.

આકૃતિ 8.60

ઉદાહરણ 35 : નીચેની અસમતાઓ ઉકેલો અને તેમના ઉકેલપ્રદેશને સંખ્યારેખા પર આલેખમાં દર્શાવો :

(1) $|4 - x| + 2 < 5$ (2) $\left|x + \frac{7}{3}\right| > \frac{2}{3}$

ઉકેલ : (1) $|4 - x| + 2 < 5 \Leftrightarrow |4 - x| < 3$

$\Leftrightarrow -3 < x - 4 < 3$

$\therefore$ $1 < x < 7$

$\therefore$ આથી ઉકેલ ગણ $(1, 7)$ છે અને તે આકૃતિ 8.61 માં દર્શાવેલ છે.

આકૃતિ 8.61

(2) $\left|x + \frac{7}{3}\right| > \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow$ $x + \frac{7}{3} > \frac{2}{3}$ અથવા $x + \frac{7}{3} < -\frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow$ $x > \frac{-5}{3}$ અથવા $x < -\frac{9}{3} = -3$

આકૃતિ 8.62

આથી ઉકેલગણ $\left(\frac{-5}{3}, \infty\right) \cup (-\infty, -3)$ છે અને તે આકૃતિ 8.62 માં દર્શાવેલ છે.

ઉદાહરણ 36 : નીચેની અસમતાઓનો ઉકેલ અને ઉકેલપ્રદેશની આલેખાત્મક રજૂઆત કરો.

(1) $\frac{|x-1|}{x-1} \le 0$ (2) $\frac{|x+3|-x}{x} < 3$ (3) $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| < 6$

ઉકેલ : (1) $\frac{|x-1|}{x-1} \le 0$

સ્પષ્ટ છે કે $x \ne 1$ હોવાથી $\frac{|x-1|}{x-1} \ne 0$

જો $x > 1$, $\frac{|x-1|}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1 \le 0$ સત્ય નથી.

જો $x < 1$, $\frac{|x-1|}{x-1} = \frac{-(x-1)}{x-1} = -1 \le 0$ સત્ય છે.

આથી ઉકેલ ગણ $(-\infty, 1)$ છે. (આકૃતિ 8.63)

આકૃતિ 8.63

(2) $\frac{|x+3|-x}{x} < 3 \Leftrightarrow \frac{|x+3|}{x} - 1 < 3$

$\Leftrightarrow \frac{|x+3|}{x} < 4$

જો $x < 0$ હોય, તો $\frac{|x+3|}{x} < 0 < 4$ સત્ય છે.

તેથી ઉકેલ ગણમાં બધી જ ઋણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ આવેલી છે.

વળી, $x \neq 0$. આથી હવે $x > 0$ નો વિચાર કરીએ.

હવે $x > 0$ હોય તો $x + 3 > 0$

$\therefore$ $|x + 3| = x + 3$

$\therefore$ $\frac{|x+3|}{x} < 4 \Leftrightarrow \frac{x+3}{x} < 4$

$\Leftrightarrow x + 3 < 4x$ $\quad (x > 0)$

$\Leftrightarrow 3x > 3$

$\Leftrightarrow x > 1$

$\therefore$ ઉકેલ ગણ $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ છે. (આકૃતિ 8.64)

આકૃતિ 8.64

$(\overrightarrow{AB} - \{A\}) \cup (\overrightarrow{PQ} - \{P\})$ ઉકેલપ્રદેશ દર્શાવે છે.

(3) $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| < 6$

અહીં આપણે કેટલાક વિકલ્પો લઈશું.

(a) ધારો કે $x \leq 1$

$\therefore$ $x - 1 \leq 0, x - 2 < 0, x - 3 < 0$

$\therefore$ અસમતાનું સમાનાર્થી વિધાન $1 - x + 2 - x + 3 - x < 6$ મળે.

$\therefore$ $3x > 0$ એટલે કે $x > 0$

આમ ઉકેલ ગણમાં $(0, 1]$નો સમાવેશ થાય.

(b) ધારો કે $1 < x \leq 2$.

આથી, $x - 1 > 0, x - 2 \leq 0, x - 3 < 0$

$\therefore$ $x - 1 + 2 - x + 3 - x < 6 \Leftrightarrow -x < 2$ એટલે કે $x > -2$ જે સત્ય છે.

કારણ કે $x > 1$.

$\therefore$ અસમતા $x \in (1, 2]$ માટે પણ સત્ય છે.

(c) $2 < x \leq 3$ લઈએ.

$\therefore$ $x - 1 > 0, x - 2 > 0, x - 3 \leq 0$.

$\therefore$ અસમતા પરથી $x - 1 + x - 2 + 3 - x < 6$ મળે.

$\therefore$ શરત $x < 6$ મળે. $2 < x \leq 3$ હોવાથી $x < 6$ છે જ.

$\therefore$ ઉકેલપ્રદેશમાં $(2, 3]$નો સમાવેશ પણ થાય છે.

(d) જો $x > 3$ તો $x - 1 + x - 2 + x - 3 < 6 \Leftrightarrow x < 4$

આથી $x > 3$ હોય, તો $x < 4$ જરૂરી છે.

$\therefore$ ઉકેલ ગણમાં $(3, 4)$નો સમાવેશ થાય છે.

(e) જો $x < 0$, તો ધારો કે $x = -y$, $y > 0$.

$\therefore$ $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| = |-y - 1| + |-y - 2| + |-y - 3|$

$= |y + 1| + |y + 2| + |y + 3|$

$= y + 1 + y + 2 + y + 3 < 6$

$\Rightarrow y < 0$, જે અસત્ય છે.

$\therefore$ આમ, બધા ઉકેલનો યોગગણ લેતાં ઉકેલ ગણ $(0, 4)$ છે.

આકૃતિ 8.65 માં $\overline{AB} - \{A, B\}$ ઉકેલપ્રદેશ દર્શાવે છે.

આકૃતિ 8.65

ઉદાહરણ 37 : એક કન્ટેઇનરમાં 1120 લિટર 40 % ઍસિડનું દ્રાવણ ભરેલું છે. પરિણામી મિશ્રણમાં 40 ટકાથી વધારે પણ 50 ટકાથી ઓછું પાણી થાય તે માટે કેટલું પાણી ઉમેરવું જોઈએ ?

ઉકેલ : અહીં દ્રાવણમાં ઍસિડનું પ્રમાણ 40 % હોવાથી પાણીનું પ્રમાણ 60 % છે. ધારો કે x લિટર પાણી ઉમેરવામાં આવે છે. આથી $(1120 + x)$ લિટર દ્રાવણમાં $(1120 + x)\frac{40}{100}$ થી વધારે અને $(1120 + x)\frac{50}{100}$ થી ઓછું પાણી હોય. આથી નીચેની અસમતા મળે :

$$(1120 + x)\frac{40}{100} < 1120 \times \frac{60}{100} < (1120 + x)\frac{50}{100}$$

$$(1120 + x)\frac{40}{100} < 1120 \times \frac{60}{100}$$

$\therefore$ $(1120 + x)2 < 1120 \times 3$

$\therefore$ $2x < 1120$

$\therefore$ $x < 560$

વળી, $1120 \times \frac{60}{100} < (1120 + x)\frac{50}{100}$

$\therefore$ $1120 \times 6 < 1120 \times 5 + 5x$

$\therefore$ $1120 < 5x$

$\therefore$ $224 < x$

આમ, $224 < x < 560$.

બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો ઉમેરેલા પાણીનો જથ્થો 224 લિટરથી વધુ હોય અને 560 લિટરથી ઓછો હોવો જોઈએ.

ઉદાહરણ 38 : એક દ્રાવણનું ઉષ્ણતામાન 77° F તથા 95° F વચ્ચે રાખવાનું છે. સેલ્સિયસ તથા ફેહ્રનહિટ વચ્ચે રૂપાંતર સૂત્ર $F = \frac{9}{5}C + 32$ છે. સેલ્સિયસમાં ઉષ્ણતામાનનો વિસ્તાર શું છે ?

ઉકેલ : જો દ્રાવણનું ફેહ્રનહિટમાં તાપમાન x હોય, તો $77 < x < 95$

$77 < \frac{9}{5}y + 32 < 95$, જ્યાં y દ્રાવણનું સેલ્સિયસમાં તાપમાન દર્શાવે છે.

$\therefore$ $(77 - 32)\frac{5}{9} < y < (95 - 32)\frac{5}{9}$

$\therefore$ $25 < y < 35$

$\therefore$ દ્રાવણનું સેલ્સિયસમાં તાપમાન 25° C અને 35° Cની વચ્ચે રાખવું જોઈએ.

ઉદાહરણ 39 : વ્યક્તિનો IQ દર્શાવતું સૂત્ર નીચે પ્રમાણે છે :

$$IQ = \frac{MA}{CA} \times 100$$

અહીં MA વ્યક્તિની માનસિક ઉંમર તથા CA તેની દૈહિક ઉંમર છે.

જો $75 < IQ < 125$ હોય, તો 16 વર્ષની ઉંમરની વ્યક્તિની માનસિક ઉંમર શોધો.

(અહીં CA = 16 છે.)

ઉકેલ : $75 < \frac{MA}{CA} \times 100 < 125$

$\Leftrightarrow \frac{75}{100} \times CA < MA < \frac{125}{100} \times CA$

$\Leftrightarrow \frac{3}{4} \times CA < MA < \frac{5}{4} \times CA$

$\Leftrightarrow \frac{3}{4} \times 16 < MA < \frac{5}{4} \times 16$ **(CA = 16)**

$\Leftrightarrow 12 < MA < 20$

આથી માનસિક ઉંમરનો વિસ્તાર (12, 20) છે.

ઉદાહરણ 40 : ત્રિકોણની સૌથી મોટી બાજુની લંબાઈ તેની સૌથી નાની બાજુની લંબાઈ કરતાં બમણી છે. આ સિવાયની ત્રીજી બાજુ સૌથી નાની બાજુ કરતાં 3 સેમી મોટી છે. ત્રિકોણની પરિમિતિ ઓછામાં ઓછી 51 સેમી છે. સૌથી નાની તથા સૌથી મોટી ના હોય તેવી બાજુની ન્યૂનતમ લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે સૌથી નાની બાજુની લંબાઈ x છે. તો બાજુઓનાં માપ $2x$, $x + 3$ તથા x થાય.

∴ પરિમિતિ ઓછામાં ઓછી 51 સેમી હોવાથી,

$2x + x + 3 + x \geq 51 \Leftrightarrow 4x \geq 48$

$\Leftrightarrow x \geq 12$

$\Leftrightarrow x + 3 \geq 15$

આથી, માંગેલ બાજુની ન્યૂનતમ લંબાઈ 15 સેમી છે.

સ્વાધ્યાય 8

નીચેની અસમતાઓનો $x \in R$ માટે ઉકેલ ગણ શોધો : (1 થી 5)

1. $|x + 1| + |x - 1| > 2$ **2.** $\frac{|x-2|-2}{|x-1|-1} \leq 0$ **3.** $\frac{1}{|x|-5} \leq \frac{1}{3}$

4. $|x - 1| < 5$ અને $|x| \leq 2$ **5.** $\frac{2}{x+3} \leq 5 \leq \frac{4}{x+3}$ $(x > 0)$

6. હોજના પાણીમાં ઍસિડનું પ્રમાણ સામાન્ય ગણવા માટેનો નિયમ છે કે તેના ત્રણ દૈનિક ઍસિડિક માપની સરેરાશ 8.2 તથા 8.5 વચ્ચે હોય. જો કોઈ એક દિવસે આ પૈકીનાં બે માપ 8.25 તથા 8.4 હોય, તો ત્રીજા માપ વિશે શું કહી શકાય ?

7. એક લઘુઉદ્યોગ એકમમાં ખર્ચનું વિધેય તથા આવકનું વિધેય અનુક્રમે $C = 500 + \frac{5}{2}x$ અને $R = 3x$ દ્વારા દર્શાવાય છે, જ્યાં x ઉત્પાદિત વસ્તુઓની સંખ્યા દર્શાવે છે. કેટલા એકમનું ઉત્પાદન કરવાથી (1) નહિ નફો નહિ નુકસાનની પરિસ્થિતિ ઉદ્ભવે (સમતોલ પરિસ્થિતિ) (2) નફો થાય ?

8. પ્રત્યેક 30 થી મોટો હોય અને જેમનો સરવાળો 75થી ઓછો હોય તેવા ક્રમિક અયુગ્મ પૂર્ણાંકોની જોડ મેળવો.

9. નીચેના પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ આપો : $x \in R$

(1) $\frac{x^2}{x-5} < 0$નો ઉકેલ ગણ શું મળે ?

(2) $\left| x + \frac{1}{x} \right| \geq 2$ ઉકેલો.

(3) $(x^4 - 2x^2 + 1)(x - 2) > 0$ ઉકેલો.

(4) $| x - 3 | = x - 3$ ઉકેલો.

(5) $\left| \frac{1}{x} - 3 \right| > 5$ ઉકેલો.

(6) $\frac{x+2}{x^2+1} < \frac{1}{2}$નો પૂર્ણાંકમાં ઉકેલ મેળવો.

(7) $| x - 2 | \geq | x - 4 |$ ઉકેલો.

(8) $x + \frac{1}{x} < -2$ ઉકેલો.

10. વિધાન સત્ય બને તે રીતે ખાલી જગ્યા પૂરો :

(1) જો $| x - 2 | > 1$, તો $x \in$ ....

(2) જો $|x| \leq 0$, તો $x =$ ....

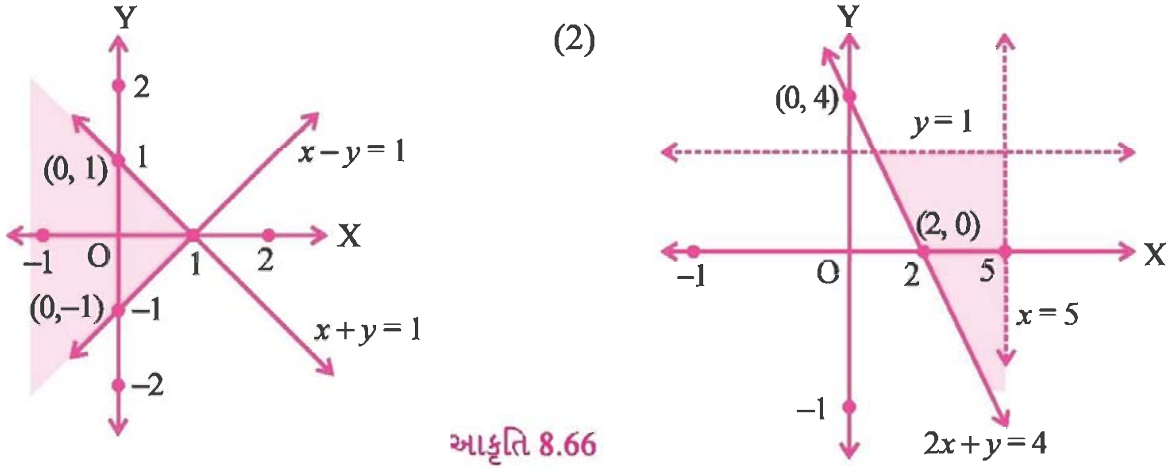
(3) જો $\frac{1}{x-4} < 0$, તો x ...... 4.

(4) જો $| x - 2 | < 3$, તો 5 ...... x ...... −1.

(5) $\frac{x^2}{x^2+1} < 0$નો ઉકેલ ગણ ...... છે. $(x \in R)$

11. નીચેના આલેખમાં રંગીન પ્રદેશ જેનો ઉકેલ ગણ હોય તેવી સુરેખ અસમતાઓ લખો :

(1) (2)



આકૃતિ 8.66

12. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d)માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) જો $| x - 2 | \geq 8$, તો... ☐

(a) $x \in (-6, 10)$

(b) $x \in (-\infty, -6) \cup (10, \infty)$

(c) $x \in (-\infty, -6] \cup (10, \infty)$

(d) $x \in (-\infty, -6] \cup [10, \infty)$

(2) જો $| x + 2 | \leq 9$, તો... ☐

(a) $x \in (-11, 7)$

(b) $x \in [-11, 7]$

(c) $x \in (-\infty, -11] \cup [7, \infty)$

(d) $x \in (-\infty, -11] \cup (7, \infty)$

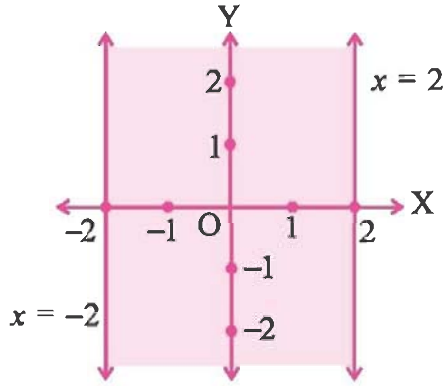
(3) જેનો ઉકેલપ્રદેશ આકૃતિ 8.67 માં દર્શાવેલ આલેખ હોય, તેવી અસમતા ...... છે.

(a) $|x| < 2$

(b) $|x| \leq 2$

(c) $|x| \geq 2$

(d) $-2 < x \leq 2$



આકૃતિ 8.67

(4) સંખ્યારેખા પર જેનો આલેખ આકૃતિ 8.68 માં દર્શાવેલ છે તે અસમતા ...... છે.

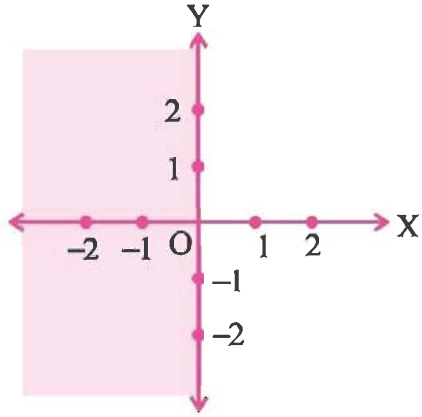
આકૃતિ 8.68

(a) $x \geq 2$ (b) $x \in (-\infty, 2)$ (c) $x > 2$ (d) $x < 2$

(5) સમતલમાં જેનો આલેખ આકૃતિ 8.69 માં દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશ છે તે અસમતા ...... છે.

(a) $x \geq 0$ (b) $y \geq 0$

(c) $x > 0$ (d) $x \leq 0$



આકૃતિ 8.69

(6) અસમતા સંહતિ $x < 5$ અને $x \geq 2$ નો ઉકેલ ગણ ...... છે.

(a) $(2, 5)$ (b) $[2, 5)$ (c) $(2, 5]$ (d) $[2, 5]$

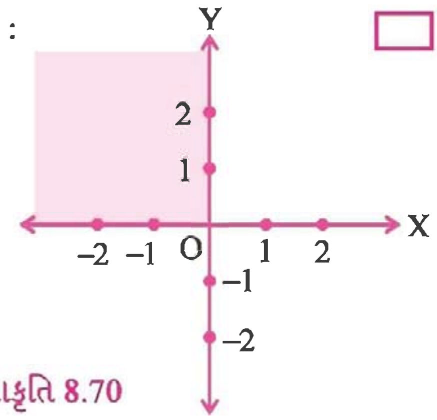
(7) નીચેનો આલેખ ...... અસમતા સંહતિનો ઉકેલપ્રદેશ છે :

(a) $x \geq 0, y \geq 0$

(b) $x \leq 0, y \geq 0$

(c) $x > 0, y > 0$

(d) $x \geq 0, y \leq 0$



આકૃતિ 8.70

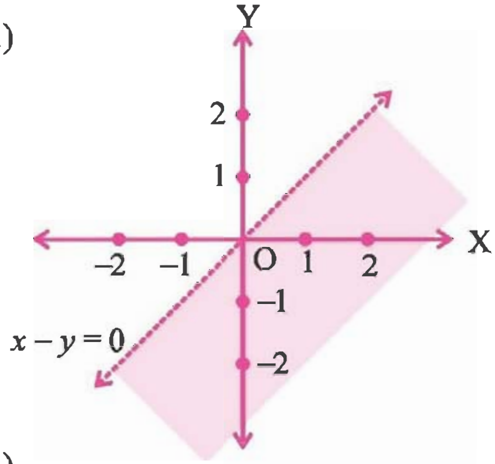
(8) જો $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \geq 0$, તો $x \in$ ......

(a) $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ (b) $x \in [-1, 1]$

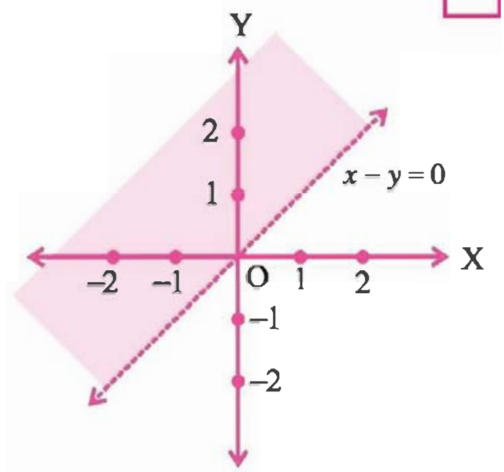
(c) $x \in \{-1, 1\}$ (d) $x \in (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$

(9) $x - y \geq 0$ નો ઉકેલપ્રદેશનો આલેખ ...... છે.

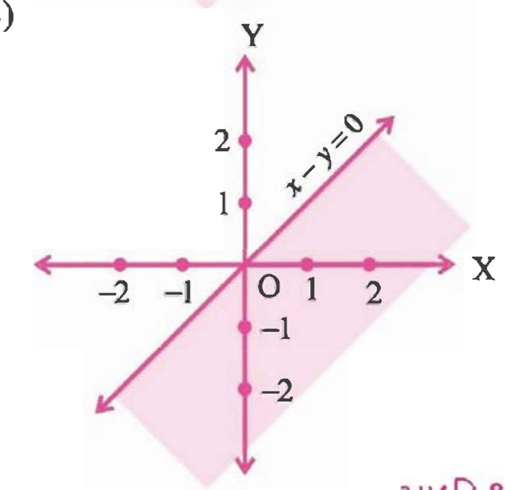
(a)



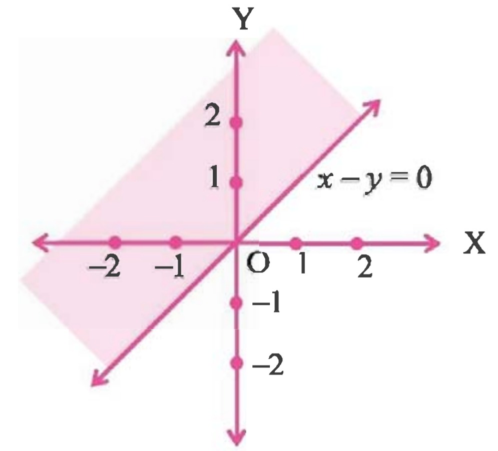
(b)



(c)



(d)



આકૃતિ 8.71

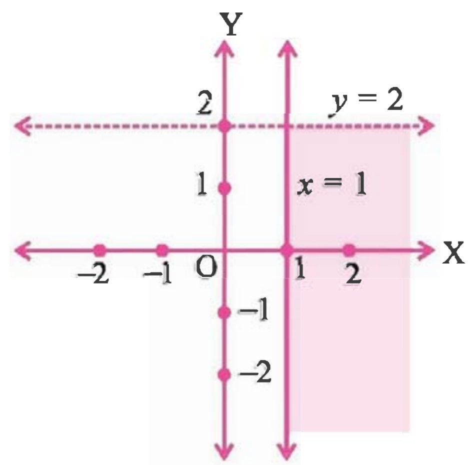
(10) આકૃતિ 8.72 માં દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશ જેનો આલેખ છે, તે ઉકેલપ્રદેશ માટેની અસમતા ...... છે.

(a) $x \geq 1$

(b) $y < 2$

(c) $x \geq 1$ અને $y < 2$

(d) $x \leq 1$ અને $y \geq 2$



આકૃતિ 8.72

(11) $| x - 1 | \leq -1$નો ઉકેલ ગણ ...... છે.

(a) $(0, 2)$ (b) $[0, 2]$ (c) $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ (d) $\emptyset$

(12) અસમતા $| x - 1 | + | x - 2 | < 3$નો ઉકેલ ગણ ...... છે.

(a) $(0, 3)$ (b) $(1, 2)$ (c) $(0, 2)$ (d) $(2, 3)$

(13) અસમતા $| x | + | x - 2 | < 2$નો ઉકેલ ગણ સંખ્યા પર દર્શાવતો આલેખ ...... છે.

આકૃતિ 8.73

(14) અસમતા $| x - 1 | + | x + 1 | < 2$નો ઉકેલ ગણ ...... છે.

(a) $(-1, 1)$ (b) $[-1, 1]$ (c) $\emptyset$ (d) $\{-1, 1\}$

(15) અસમતા $x^2 \leq 4$નો ઉકેલ ગણ ...... છે.

(a) $[-2, 2]$ (b) $(-2, 2)$

(c) $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ (d) $\emptyset$

સારાંશ

1. અસમતા
2. એક ચલમાં સુરેખ અસમતા અને સંખ્યારેખા પર તેના ઉકેલની રજૂઆત
3. એક ચલમાં સુરેખ અસમતા સંહતિ
4. બે ચલમાં સુરેખ અસમતા અને તેમના આલેખ
5. બે ચલમાં સુરેખ અસમતા સંહતિ
6. માનાંક સંબંધી અસમતાઓ, કૂટપ્રશ્નો અને પ્રકીર્ણ પ્રશ્નો