પ્રકરણ 1

ગાણિતિક તર્ક

1.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે આ પ્રકરણમાં ગણિતના અભ્યાસ માટે એક અગત્યના સાધન વિશે શીખીશું. તાર્કિક દલીલ કરવાની ક્ષમતા આપણને ગણિતના અભ્યાસ માટે યોગ્ય માર્ગદર્શન આપે છે.

ગણિતમાં મુખ્યત્વે બે પ્રકારની દલીલો અસ્તિત્વ ધરાવે છે : એક તો છે પ્રેરિત દલીલો. અહીં આપણે કેટલીક ભાતનું અવલોકન કરીએ છીએ અને તે પરથી અનુમાન કરીને કેટલાંક પરિણામો સાબિત કરીએ છીએ. આપણે આ પદ્ધતિનો અભ્યાસ આગળ જતાં **ગાણિતીય અનુમાન**ના પ્રકરણમાં કરીશું. દલીલોની બીજી પદ્ધતિ તર્કસંગત તારણ મેળવવાની છે. આ પ્રકરણમાં આપણે આ બીજી પદ્ધતિનો અભ્યાસ કરવો છે. એક ઉદાહરણ જોઈએ.

જો $\alpha\beta = \alpha\gamma$ અને $\alpha \neq 0$ તો સાબિત કરો કે $\beta = \gamma$; $\alpha, \beta, \gamma \in R$.

અહીં $\alpha \neq 0$ હોવાથી α^{-1} અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

$\therefore \quad \alpha^{-1}(\alpha\beta) = \alpha^{-1}(\alpha\gamma)$ **(α^{-1} વડે બંને બાજુ ગુણતાં)**

$\therefore \quad (\alpha^{-1}\alpha)\beta = (\alpha^{-1}\alpha)\gamma$ **(ગુણાકાર વિશેનો જૂથનો નિયમ)**

$\therefore \quad 1 \cdot \beta = 1 \cdot \gamma$

$\therefore \quad \beta = \gamma$

અહીં આપણે ગણિતના જાણીતા પરિણામને તર્કસંગત રીતે ક્રમિક આનુષંગિક દલીલોના આધારે $\beta = \gamma$ સાબિત કર્યું.

ચાલો હવે આપણે બીજું ઉદાહરણ લઈએ. દરેક શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યા x અનૃણ હોય અથવા ઋણ હોય. ધારો કે કોઈક વિચારણાને આધીન પ્રશ્નમાં જો x એ અનૃણ નથી તો તે ઋણ જ છે. આ પણ એક વિકલ્પ નિવારણ પદ્ધતિ દ્વારા તર્કસંગત દલીલ જ છે.

1.2 વિધાન

નીચેનાં વાક્યો જોઈએ :

(1) 2010 માં ભારતમાં મહિલા રાષ્ટ્રપતિ હતા.

(2) T-20 ક્રિકેટમાં ભારતે 2010માં વર્લ્ડકપ જીત્યો.

અહીં પ્રથમ વાક્ય સાચું અને બીજું વાક્ય ખોટું છે. આવાં વાક્યોને વિધાન કહે છે.

વિધાન : જો આપેલ વાક્ય સત્ય કે અસત્ય હોય પરંતુ બંને ન હોય અને એની સત્યાર્થતા કે અસત્યાર્થતા નિઃશંકપણે દર્શાવી શકાય તો તેને વિધાન (Statement) કહે છે. તેને ગાણિતિક રીતે સ્વીકાર્ય વિધાન (Mathematically Acceptable Statement) પણ કહે છે. નીચેનાં ઉદાહરણ વિધાન દર્શાવે છે. તે સત્ય છે કે અસત્ય તે બાજુમાં કૌંસમાં દર્શાવેલ છે.

(1) બે ધન સંખ્યાઓનો ગુણાકાર ધન મળે. (સત્ય)

(2) 1 એ અવિભાજ્ય સંખ્યા છે. (ખોટું)

(3) $2 + 2 = 5$ (ખોટું)

(4) દરેક વાસ્તવિક સંખ્યાનો વર્ગ અનૃણ છે. (સાચું)

(5) જેનો વર્ગ તે પોતે જ મળે એવી એક માત્ર વાસ્તવિક સંખ્યા 1 છે. (ખોટું)

હવે નીચેનું વાક્ય જોઈએ :

વાસ્તવિક સંખ્યાઓ x અને y માટે $xy > 0$.

આ વાક્ય x અને y પર આધારિત છે. જો $x = 3$, $y = 2$ લઈએ તો તે સત્ય છે.

જો $x = 2$, $y = -1$ લઈએ તો તે અસત્ય બને. આ વાક્ય સંદિગ્ધ છે, આથી તે વિધાન નથી.

હવે આપણે નીચેનાં વાક્યો જોઈએ :

(1) મુંબઈ હુમલામાં મૃત્યુ પામેલા લોકો માટે પ્રાર્થના કરવા સૌને વિનંતી.

(2) વાહ કેટલો સુંદર સૂર્યાસ્ત છે !

(3) બહાર જાવ !

(4) ગાંધીનગર ક્યાં આવેલું છે ?

અહીં (1) એ વિનંતી છે. (2) એ ઉદ્‌ગાર છે. (3) એ આજ્ઞાર્થ છે. (4) પ્રશ્નાર્થ છે. આ પૈકીના કોઈ પણ વાક્ય માટે તે સત્ય કે અસત્ય છે તેમ નિશ્ચિતપણે કહી ન શકાય. તેથી તેઓ વિધાનો નથી.

'આજે સોમવાર છે.' તે વાક્ય લઈએ. આ વાક્ય સોમવારના દિવસે સત્ય છે અને બાકીના દિવસો માટે અસત્ય છે. વાક્યમાં 'સમય' ચલ સ્વરૂપે હોય જેમકે 'આજે', 'આવતી કાલે', 'ગઈ કાલે' તો તે વિધાન નથી.

તે જ રીતે વાક્યમાં સ્થળો ચલ સ્વરૂપે હોય એટલે કે 'અહીં', 'ત્યાં' વગેરે તથા વાક્યમાં 'તે' જેવા ઉપનામ આપ્યા હોય તો તે પણ વિધાન નથી.

દાખલા તરીકે (1) 'ગાંધીનગર નજીક છે.' પણ ક્યાંથી ?

(2) 'તે ખૂબ હોશિયાર છે.' પણ કોણ ?

હવે નીચેનું વિધાન જોઈએ.

એક દિવસમાં $25 \times 60 \times 60$ સેકન્ડ આવેલ હોય છે. અહીં પણ સમય 'એક દિવસ' ચલ સ્વરૂપે છે. પરંતુ તે ચોક્કસપણે અસત્ય છે, કારણ કે દિવસમાં 24 કલાક જ હોય છે. તેથી આ વાક્ય એ વિધાન છે.

એટલે સંક્ષિપ્તમાં કહીએ તો જે વાક્યને નિઃશંકપણે સાચું કે ખોટું કહી શકીએ તેવા વાક્યને વિધાન કહે છે. સામાન્ય રીતે વિધાનોને $p, q, r, ...$ વગેરે નાના મૂળાક્ષરોથી દર્શાવવામાં આવે છે. દાખલા તરીકે,

p : ફેબ્રુઆરી માસમાં 35 દિવસો હોય છે.

p એ અસત્ય વિધાન છે.

ઉદાહરણ 1 : નીચેનાં પૈકી કયાં વિધાનો છે તે જણાવો અને તે માટે યોગ્ય કારણ દર્શાવો :

(1) આવતી કાલે રજા છે.

(2) વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે, $[x]$ એ પૂર્ણાંક છે.

(3) તે યુવાનીમાં મૃત્યુ પામ્યો.

(4) ગાલ્વા ગણિતશાસ્ત્રી હતા. તે યુવાનીમાં મૃત્યુ પામ્યા.

(5) વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $x \cdot 0 = 0$
(6) હિમાલય કેટલો દૂર છે ?
(7) હારમાં ઊભા રહો.
(8) શૂન્યેતર સંખ્યાઓ x અને y માટે $x^2 + y^2 \neq 0$.
(9) $3^2 = 9$
(10) પાયથાગોરસ ગણિતશાસ્ત્રી હતા.
(11) ચાલો, આપણે સંગઠિત થઈએ !
(12) ઊર્જા બચાવો !

ઉકેલ :

(1) આ વિધાન નથી. અહીં સમય ચલ સ્વરૂપે છે.
(2) અહીં x ચલ છે. પરંતુ તે દરેક x માટે સત્ય છે, તેથી વિધાન છે.
(3) અહીં સર્વનામનો ઉપયોગ કરવામાં આવ્યો છે. તેથી વિધાન નથી. અહીં 'તે' એટલે કોણ ?
(4) અહીં 'તે'નો ઉપયોગ ગાલ્વા માટે છે. આથી વિધાન છે.
(5) અહીં x ચલ હોવા છતાં વાક્ય દરેક વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે સત્ય છે. આથી તે વિધાન છે.
(6) પ્રશ્નાર્થ વાક્ય હોવાથી તે વિધાન નથી.
(7) તે આજ્ઞાર્થ વાક્ય છે. માટે તે વિધાન નથી.
(8) તે દરેક શૂન્યેતર x અને y માટે સત્ય છે માટે તે વિધાન છે.
(9), (10) વિધાન છે.
(11), (12) વિનંતી દર્શાવેલ છે. માટે તે બંને વિધાન નથી.

સ્વાધ્યાય 1.1

નીચેનાં વાક્યો વિધાન છે કે નહિ તે કારણ સહિત દર્શાવો :

1. $3^2 + 4^2 = 5$
2. જો x પ્રાકૃતિક સંખ્યા હોય, તો 2^x એ બેકી છે.
3. મહેરબાની કરી ઊભા થાઓ !
4. કેટલું ભયાનક ચલચિત્ર હતું !
5. સોક્રેટિસ ગણિતશાસ્ત્રી હતા.
6. તે વૈજ્ઞાનિક છે.
7. વેનિસ રોમમાં છે.
8. વન ડે ક્રિકેટનો વર્લ્ડકપ ઈ.સ. 2011માં ભારત, શ્રીલંકા અને બાંગ્લાદેશ દ્વારા સંયુક્તરૂપે યોજાયો.

*

1.3 સાદું વિધાન અને તેનું નિષેધ

જે વિધાન બે કે બેથી વધુ વિધાનોમાં વિભાજિત ન થઈ શકે તેવા વિધાનને સાદું વિધાન (Simple Statement) કહે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, '$2 + 2 = 5$' એ સાદું વિધાન છે.

નિષેધ (Negation) : આપેલા વિધાનની સત્યાર્થતાનો ઈનકાર તે વિધાનનું નિષેધ છે, એટલે કે એવું વિધાન જે આપેલ વિધાન સત્ય હોય કે મિથ્યા હોય તે અનુસાર અનુક્રમે મિથ્યા હોય કે સત્ય હોય તે આપેલા વિધાનનું નિષેધ છે.

p : અમદાવાદ એ ગુજરાતનું મુખ્ય ઔદ્યોગિક મથક છે.

તેનું નિષેધ 'અમદાવાદ એ ગુજરાતનું મુખ્ય ઔદ્યોગિક મથક નથી.' અથવા 'અમદાવાદ એ ગુજરાતનું મુખ્ય ઔદ્યોગિક મથક છે તે ખોટું છે.' અથવા 'એ સાચું નથી કે અમદાવાદ ગુજરાતનું મુખ્ય ઔદ્યોગિક મથક છે.' બને.

જો વિધાન p સત્ય હોય, તો તેનું નિષેધ અસત્ય હોય છે અને જો p અસત્ય હોય, તો તેનું નિષેધ સત્ય હોય છે. pના નિષેધને $\sim p$ વડે દર્શાવાય છે.

જો વિધાન p સત્ય હોય, તો તેનું સત્યાર્થતા મૂલ્ય T અને p અસત્ય હોય, તો તેનું સત્યાર્થતા મૂલ્ય F વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

આથી pનું સત્યાર્થતા મૂલ્ય T અથવા F હોય તે અનુસાર $\sim p$નું સત્યાર્થતા મૂલ્ય F અથવા T થાય.

ઉદાહરણ 2 : નીચેનાં વિધાનોનાં નિષેધ લખો :

(1) $3 \times 2 = 6$

(2) ક્રિસમસ (નાતાલ) 25મી ડિસેમ્બરના રોજ ઉજવવામાં આવે છે.

(3) દિવાળી એ હિન્દુઓના ચાલુ વર્ષનો અંત દર્શાવે છે.

(4) ઈજનેરી અભ્યાસક્રમમાં દાખલ થવા માટે 10 + 2 પદ્ધતિમાં ગણિત એ ફરજિયાત વિષય છે.

(5) ગણિત એ વિજ્ઞાનની રાણી છે.

ઉકેલ :

(1) $3 \times 2 \neq 6$ અથવા એ સત્ય નથી કે $3 \times 2 = 6$.

(2) ક્રિસમસ એ 25મી ડિસેમ્બરે ઉજવવામાં આવતું નથી.

(3) દિવાળી હિન્દુઓના ચાલુ વર્ષનો અંત દર્શાવે નહિ.

(4) ઈજનેરી અભ્યાસક્રમમાં દાખલ થવા માટે 10 + 2 પદ્ધતિમાં ગણિત એ ફરજિયાત વિષય નથી.

(5) ગણિત એ વિજ્ઞાનની રાણી નથી.

સ્વાધ્યાય 1.2

નીચેનાં વિધાનોનાં નિષેધ લખો :

1. $2 + 2 = 5$

2. ચોરસનું ક્ષેત્રફળ $A = \pi r^2$ સૂત્રથી મળે છે.

3. સમઘન એ સમતલીય આકૃતિ છે.

4. જ્યોર્જ કેન્ટરે ગણ સિદ્ધાંતનો વિકાસ કર્યો હતો.

5. અમિતાભ બચ્ચન ગુજરાત પ્રવાસનના બ્રાન્ડ એમ્બેસેડર છે.

6. $2 + 2 = 2^2$

7. પ્રાકૃતિક સંખ્યા $x \geq 3$ માટે $x + x = x^2$

8. બરફ ગરમ હોય છે.

*

1.4 કારકોની મદદથી સંયુક્ત વિધાનો

કેટલીક વખત સાદાં વિધાનોને જોડવાથી નવું વિધાન મળે છે. તેને **સંયુક્ત વિધાન (Compound statement)** કહે છે. **'અથવા' તથા 'અને' જેવા કારકોને તાર્કિક કારકો (Logical Connective) કહે છે.** તેમના ઉપયોગથી સંયુક્ત વિધાન બને છે.

સંયોજન (Conjunction) : બે કે તેથી વધુ સાદાં વિધાનોને તાર્કિક કારક 'અને' દ્વારા જોડવાથી મળતા સંયુક્ત વિધાનને આપેલાં વિધાનોનું સંયોજન કહે છે. આપેલાં સાદાં વિધાનોને ઘટક વિધાનો (Component Statements) કહે છે.

ધારો કે $p : 3 + 2 = 5$ તથા $q : 5 \cdot 2 = 10$,

તેમનું સંયોજન '$3 + 2 = 5$ અને $5 \cdot 2 = 10$' થાય.

વિધાનો p અને q ના સંયોજનને સંકેતમાં $p \wedge q$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. (વાંચો p અને q)

આમ, $p \wedge q : 3 + 2 = 5$ અને $5 \cdot 2 = 10$.

જ્યારે p અને q બંને વિધાનોનું સત્યાર્થતા મૂલ્ય T હોય ત્યારે $p \wedge q$ નું સત્યાર્થતા મૂલ્ય T બને છે. આ સિવાયના વિકલ્પોમાં $p \wedge q$ નું સત્યાર્થતા મૂલ્ય F છે.

કેટલાંક સાદાં વિધાનોને કારક 'અને' વડે જોડવાથી મળતું સંયોજિત વિધાન જ્યારે તેનાં બધાં ઘટક વિધાનો સત્ય હોય, તો અને માત્ર તો જ સત્ય છે. જો ઘટક વિધાનો પૈકી ઓછામાં ઓછું એક વિધાન અસત્ય હોય તો 'અને' દ્વારા મળતું સંયોજિત વિધાન અસત્ય છે.

ઉદાહરણ 3 : નીચેનું સંયોજિત વિધાન કયાં ઘટક વિધાનોનું સંયોજન છે તે શોધો. સંયોજિત વિધાનનું સત્યાર્થતા મૂલ્ય પણ દર્શાવો.

'અમદાવાદ ગુજરાતમાં આવેલ છે અને $3 + 2 = 6$.'

ઉકેલ : ધારો કે p : અમદાવાદ ગુજરાતમાં આવેલ છે.

$q : 3 + 2 = 6$

આપેલ સંયોજિત વિધાન $p \wedge q$ છે. અહીં સ્પષ્ટ છે કે $q : 3 + 2 = 6$ અસત્ય છે.

$\therefore$ સંયોજિત વિધાન $p \wedge q$ અસત્ય છે.

ઉદાહરણ 4 : નીચે આપેલ સંયુક્ત વિધાનો કયાં ઘટક વિધાનોનાં સંયોજન છે તે શોધો. સંયોજિત વિધાનની સત્યાર્થતા લખો :

(1) કાનપુર ભારતમાં આવેલ છે અને $7 \times 5 = 35$.

(2) દિલ્લી એ ગુજરાતનું પાટનગર છે અને $7 \times 5 = 75$.

(3) અમદાવાદ અને વડોદરા એ ગુજરાતનાં શહેરો છે.

(4) વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $x^2 \geq 0$ અને $1^2 = 1$.

(5) દરેક ખૂણો લઘુકોણ હોય છે અને તેનું માપ 90 કરતાં ઓછું છે.

ઉકેલ :

(1) p : કાનપુર ભારતમાં આવેલ છે.

$q : 7 \times 5 = 35$

આપેલ વિધાન $p \wedge q$ છે. અહીં p એ સત્ય અને q પણ સત્ય છે. તેથી વિધાન $p \wedge q$ એ સત્ય વિધાન છે.

(2) ધારો કે p : દિલ્લી એ ગુજરાતનું પાટનગર છે.

$q : 7 \times 5 = 75$

અહીં p અને q બંને અસત્ય વિધાનો છે. તેથી $p \wedge q$ પણ અસત્ય વિધાન થાય.

(3) ધારો કે p : અમદાવાદ શહેર ગુજરાતમાં આવેલું છે.

q : વડોદરા શહેર ગુજરાતમાં આવેલું છે.

અહીં p અને q બંને સત્ય વિધાનો છે. તેથી $p \wedge q$ પણ સત્ય વિધાન છે.

(4) ધારો કે p : વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $x^2 \geq 0$

$q : 1^2 = 1$

અહીં p અને q બંને સત્ય વિધાન છે. તેથી $p \wedge q$ સત્ય છે.

(5) ધારો કે p : દરેક ખૂણો લઘુકોણ છે.

q : દરેક ખૂણાનું માપ 90 કરતાં ઓછું હોય છે.

અહીં બંને વિધાનો અસત્ય છે. તેથી $p \wedge q$ અસત્ય વિધાન છે.

વિયોજન (Disjunction) : જો બે કે તેથી વધુ સાદાં વિધાનોને તાર્કિક કારક ‘અથવા’થી જોડવામાં આવે તો તેથી બનતા વિધાનને તેમનું વિયોજન કહે છે. જો p અને q આપેલાં વિધાનો હોય તો તેમનું વિયોજન સંકેતમાં $p \vee q$ વડે દર્શાવાય છે. (વાંચો p અથવા q). આપેલાં સાદા વિધાનોને ઘટક વિધાનો કહે છે.

કારક ‘અથવા’ વડે જોડવાથી બનતા સંયુક્ત વિધાનમાં એક અથવા એકથી વધુ ઘટક વિધાન સત્ય હોય, તો એટલે કે ઓછામાં ઓછા એક ઘટક વિધાનની સત્યાર્થતા T હોય તો વિધાન સત્ય બને છે.

ઉદાહરણ 5 : નીચેનાં સંયુક્ત વિધાનો કયાં વિધાનોનું વિયોજન દર્શાવે છે તે શોધો. સંયુક્ત વિધાનનું સત્યાર્થતા મૂલ્ય લખો :

(1) $3 + 4 = 7$ અથવા $2 + 2 = 4$

(2) દરેક અવિભાજ્ય સંખ્યા અયુગ્મ છે અથવા દરેક અયુગ્મ સંખ્યા અવિભાજ્ય છે.

(3) ગુજરાત એ ભારતનું રાજ્ય છે અથવા અમદાવાદ એ મહારાષ્ટ્રમાં આવેલું છે.

(4) અઠવાડિયામાં 5 દિવસો હોય છે અથવા એક દિવસમાં 24 કલાક હોય છે.

(5) સોક્રેટિસ એ ગણિતશાસ્ત્રી હતા અથવા તત્ત્વજ્ઞાની હતા.

ઉકેલ :

(1) ધારો કે $p : 3 + 4 = 7$

$q : 2 + 2 = 4$

અહીં સ્પષ્ટ છે કે p અને q સત્ય છે. જો p અથવા q પૈકીનું ઓછામાં ઓછું એક સત્ય હોય, તો $p \vee q$ સત્ય બને. આથી આપેલ $p \vee q$ સત્ય છે.

(2) ધારો કે p : દરેક અવિભાજ્ય સંખ્યા અયુગ્મ છે.

q : દરેક અયુગ્મ સંખ્યા અવિભાજ્ય છે.

અહીં p અસત્ય છે, કારણ કે 2 એ યુગ્મ અવિભાજ્ય (ખરેખર તો એકમાત્ર) સંખ્યા છે. q પણ અસત્ય છે, કારણ કે 9 અયુગ્મ છે પરંતુ અવિભાજ્ય નથી.

$\therefore \quad p \vee q$ એ અસત્ય છે.

(3) ધારો કે p : ગુજરાત એ ભારતનું રાજ્ય છે.

q : અમદાવાદ એ મહારાષ્ટ્રમાં આવેલું છે.

અહીં p સત્ય છે. આથી $p \vee q$ સત્ય વિધાન છે.

(4) ધારો કે p : અઠવાડિયામાં 5 દિવસ હોય છે.

q : એક દિવસમાં 24 કલાક હોય છે.

અહીં q સત્ય વિધાન છે. તેથી $p \vee q$ સત્ય વિધાન છે.

(5) ધારો કે p : સોક્રેટિસ ગણિતશાસ્ત્રી હતા.

q : સોક્રેટિસ તત્ત્વજ્ઞાની હતા.

q એ સત્ય છે. માટે $p \vee q$ સત્ય છે.

સંયુક્ત વિધાનોનું નિષેધ :

સાદાં વિધાનોનાં નિષેધ કેવી રીતે લખાય તે આપણે જાણીએ છીએ. વિધાનના નિષેધ વિશે ફરીથી યાદ કરીએ, તો સાદા વિધાનના નિષેધને સંકેતમાં $\sim p$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. સ્પષ્ટ છે કે $\mathbf{\sim(\sim p) = p}$.

pનું સત્યાર્થતા મૂલ્ય F અથવા T હોય તે પ્રમાણે અનુક્રમે $\sim p$ નું સત્યાર્થતા મૂલ્ય T અથવા F હોય.

$\therefore$ $\sim p$ નું સત્યાર્થતા મૂલ્ય T અથવા F હોય તે પ્રમાણે અનુક્રમે $\sim(\sim p)$નું સત્યાર્થતા મૂલ્ય F અથવા T થાય.

$\therefore$ $\sim(\sim p) = p$

હવે આપણે સાદાં વિધાનોનાં સંયોજન અથવા વિયોજનનાં નિષેધ મેળવીએ.

નિયમ : (1) : $\sim(p \wedge q) = (\sim p) \vee (\sim q)$ (2) : $\sim(p \vee q) = (\sim p) \wedge (\sim q)$

બે સાદાં વિધાનનાં સંયોજનનું નિષેધ એ તે બે સાદાં વિધાનોનાં નિષેધનું વિયોજન છે.

બે સાદાં વિધાનોનાં વિયોજનનું નિષેધ એ તે બે સાદાં વિધાનોનાં નિષેધનું સંયોજન છે.

ઉદાહરણ 6 : નીચેનાં વિધાનોનું નિષેધ શોધો :

(1) 5 એ પૂર્ણાંક છે અને $5^2 = 25$

(2) $3^2 = 9$ અને $(-3)^2 = 9$

(3) $1^2 = 1$ અથવા $1^3 = 1$

(4) $\frac{1}{2} \in N$ અથવા $\frac{1}{2} \in Q$

(5) $\sqrt{2} \in R$ અથવા $\sqrt{2} \notin R$

(6) ગાંધીજી પોરબંદરમાં જન્મ્યા હતા અને પોરબંદર ગુજરાતમાં આવેલું છે.

ઉકેલ : (1) ધારો કે p : 5 એ પૂર્ણાંક છે.

q : $5^2 = 25$

$\sim p$: 5 એ પૂર્ણાંક નથી.

$\sim q$: $5^2 \neq 25$

આપેલ વિધાન $p \wedge q$ છે. તેનું નિષેધ $(\sim p) \vee (\sim q)$ છે.

$\therefore$ આપેલા સંયુક્ત વિધાનનું નિષેધ '5 એ પૂર્ણાંક નથી અથવા $5^2 \neq 25$' છે.

(2) ધારો કે $p : 3^2 = 9$

$q : (-3)^2 = 9$

$\sim p : 3^2 \neq 9$

$\sim q : (-3)^2 \neq 9$

આપેલ વિધાન $p \wedge q$ છે. તેનું નિષેધ $(\sim p) \vee (\sim q)$ છે.

આપેલ સંયુક્ત વિધાનનું નિષેધ '$3^2 \neq 9$ અથવા $(-3)^2 \neq 9$' છે.

(3) ધારો કે $p : 1^2 = 1$

$q : 1^3 = 1$

$\sim p : 1^2 \neq 1$

$\sim q : 1^3 \neq 1$

$\sim(p \vee q) = (\sim p) \wedge (\sim q)$

$\therefore$ આપેલ સંયુક્ત વિધાનનું નિષેધ વિધાન '$1^2 \neq 1$ અને $1^3 \neq 1$' છે.

(4) ધારો કે $p : \frac{1}{2} \in N$

$q : \frac{1}{2} \in Q$

$\sim p : \frac{1}{2} \notin N$

$\sim q : \frac{1}{2} \notin Q$

$\sim(p \vee q) = (\sim p) \wedge (\sim q)$

$\therefore$ આપેલા સંયુક્ત વિધાનનું નિષેધ '$\frac{1}{2} \notin N$ અને $\frac{1}{2} \notin Q$' છે.

(5) ધારો કે $p : \sqrt{2} \in R$

$q : \sqrt{2} \notin R$

$\sim p : \sqrt{2} \notin R$

$\sim q : \sqrt{2} \in R$

$\sim(p \vee q) = (\sim p) \wedge (\sim q)$

$\therefore$ આપેલ સંયુક્ત વિધાનનું નિષેધ વિધાન '$\sqrt{2} \notin R$ અને $\sqrt{2} \in R$' છે.

(6) જો p : ગાંધીજી પોરબંદરમાં જન્મ્યા હતા.

q : પોરબંદર ગુજરાતમાં આવેલું છે.

$\sim p$: ગાંધીજી પોરબંદરમાં જન્મ્યા ન હતા.

$\sim q$: પોરબંદર ગુજરાતમાં આવેલ નથી.

$\sim(p \wedge q) = (\sim p) \vee (\sim q)$

$\therefore$ $(\sim p) \vee (\sim q)$: ગાંધીજી પોરબંદરમાં જન્મ્યા ન હતા અથવા પોરબંદર ગુજરાતમાં આવેલ નથી.

'અને' તથા 'અથવા'ના ઉપયોગ માટેની નોંધ :

કેટલીક વખત 'અને' શબ્દનો ઉપયોગ તાર્કિક કારક તરીકે થતો નથી, પરંતુ માત્ર બે શબ્દોને જોડવા માટે થાય છે.

(1) 'કોઈ સાધનના સમારકામ માટે પાણી અને તેલના મિશ્રણનો ઉપયોગ થઈ શકે નહિ.'
અહીં 'તેલ' અને 'પાણી' શબ્દો 'અને' વડે જોડાયેલ છે. અહીં વિધાનોનું સંયોજન નથી.

(2) 'ચાર્લી અને ચેપ્લિન એ બાળકો અને યુવાનો ને સમાન રીતે રોમાંચિત કરે છે.'
'ચાર્લી અને ચેપ્લિન' શબ્દો 'અને' વડે જોડેલા છે. તે જ રીતે 'બાળકો અને યુવાનો' શબ્દો 'અને' વડે જોડેલા છે. અહીં 'અને' બે શબ્દોને જોડે છે. 'અને'થી સંયુક્ત વિધાન નથી બનતું.

(1) ઉચ્ચતર માધ્યમિકમાં વિજ્ઞાનપ્રવાહના વિદ્યાર્થીઓ ગણિત અથવા જીવવિજ્ઞાન વિષય પસંદ કરી શકે છે.

અહીં 'અથવા' શબ્દનો ઉપયોગ **સમાવેશ વિકલ્પના (inclusive or)** સંદર્ભે થયેલ છે. વિદ્યાર્થીઓ બંને વિષયો પસંદ કરી શકે.

(2) ભરત ધોરણ 12 પાસ કર્યા પછી તરત જ તેના વિશેષ અભ્યાસ માટે વિદેશ જશે અથવા ભારતમાં વિકસિત ગણિતનો અભ્યાસ કરશે.

અહીં 'અથવા' શબ્દનો **નિવારક વિકલ્પ (exclusive or)**ના સંદર્ભમાં ઉપયોગ કરેલ છે. બંને ઘટનાઓનું એક સાથે અસ્તિત્વ ન હોઈ શકે.

ઉદાહરણ 7 : નીચેના પ્રશ્નમાં 'અથવા'નો ઉપયોગ સમાવેશ વિકલ્પ તરીકે કે નિવારક વિકલ્પ તરીકે થયો છે તે નક્કી કરો.

'બે ભિન્ન સમતલીય રેખા એક બિંદુમાં છેદે અથવા સમાંતર હોય.'

ઉકેલ : ધારો કે p : બે ભિન્ન સમતલીય રેખા એક બિંદુમાં છેદે છે.
q : બે ભિન્ન સમતલીય રેખા સમાંતર છે.

આપેલ વિયોજન $p \vee q$ છે અને અત્રે 'અથવા'નો ઉપયોગ નિવારક વિકલ્પ તરીકે છે.

ભિન્ન સમતલીય રેખાઓ એક બિંદુમાં છેદે તથા સમાંતર પણ હોય તે શક્ય નથી.

ઉદાહરણ 8 : નીચેનાં સંયુક્ત વિધાનોમાં ઘટક વિધાનો નક્કી કરો તથા તાર્કિક કારક 'અથવા'નો ઉપયોગ સમાવેશ વિકલ્પ તરીકે કે નિવારક વિકલ્પ તરીકે થયો છે તે જણાવો. વળી, સંયુક્ત વિધાનનું સત્યાર્થતા મૂલ્ય નક્કી કરો.

'વાસ્તવિક સંખ્યા π અસંમેય છે અથવા સંમેય છે.'

ઉકેલ : ધારો કે p : વાસ્તવિક સંખ્યા π અસંમેય છે.
q : વાસ્તવિક સંખ્યા π સંમેય છે.

કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા સંમેય તથા અસંમેય બંને ના હોઈ શકે. આથી 'અથવા'નો ઉપયોગ નિવારક વિકલ્પ તરીકે છે.

અહીં આપેલ વિધાન $p \vee q$ છે. p સત્ય અને q અસત્ય વિધાન છે. આથી $p \vee q$ એ સત્ય વિધાન છે.

ઉદાહરણ 9 : નીચેના સંયુક્ત વિધાનનાં ઘટક વિધાનો શોધો અને 'અથવા'નો ઉપયોગ સમાવેશ વિકલ્પ તરીકે છે કે નિવારક વિકલ્પ તરીકે છે તે નક્કી કરો. વિધાનનું સત્યતામૂલ્ય, નિષેધ તથા નિષેધનું સત્યતા મૂલ્ય શોધો.

'પાનકાર્ડ અથવા બૅન્કની પાસબુક ઓળખપત્ર છે.'

ધારો કે p : પાનકાર્ડ એ ઓળખપત્ર છે.
q : બૅન્ક પાસબુક એ ઓળખપત્ર છે.

અહીં આપેલ વિધાન $p \vee q$ છે. અહીં 'અથવા' શબ્દનો ઉપયોગ સમાવેશ વિકલ્પ તરીકે થયો છે. વ્યક્તિ પાસે બંને ઓળખપત્ર હોઈ શકે છે. p તથા q સત્ય હોવાથી $p \vee q$ સત્ય છે $(\sim p)$ અને $(\sim q)$ અસત્ય છે અને તેથી $(\sim p) \wedge (\sim q)$ અસત્ય છે. વિધાનનું નિષેધ $(\sim p) \wedge (\sim q)$: 'પાનકાર્ડ ઓળખપત્ર નથી અને બૅન્કની પાસબુક ઓળખપત્ર નથી.'

સ્વાધ્યાય 1.3

1. નીચેના સંયુક્ત વિધાનનાં ઘટક વિધાનો લખો અને સંયુક્ત વિધાનનું સત્યાર્થતા મૂલ્ય શોધો :

(1) $3 + 7 = 5$ અને $5^2 = 25$

(2) $3 + 7 = 10$ અને $10^2 = 100$

(3) ત્રિકોણને ત્રણ બાજુઓ છે અને ત્રણ ખૂણાઓ છે.

(4) ચતુષ્કોણને ચાર બાજુઓ છે અને ચાર ખૂણાઓ છે.

(5) ત્રિકોણના ત્રણેય ખૂણાઓનાં માપનો સરવાળો 180 છે અથવા 360 થાય છે.

(6) $2 + 2 = 5$ અને $5 + 2 = 25$

(7) 1 અને 2 એ $x^2 - 3x + 2 = 0$ નાં બીજ છે.

(8) $1^3 = 1$ અથવા $3^2 = 9$

(9) 1 અને 0 એ $x^2 = x$નું સમાધાન કરે છે.

(10) 0 એ સરવાળા માટે એકમ ઘટક છે અને 1 એ ગુણાકાર માટે એકમ ઘટક છે.

2. પ્રશ્ન 1નાં વિધાનોનાં નિષેધ લખો.

3. નીચેનાં વિધાનોમાં 'અથવા'નો ઉપયોગ સમાવેશ વિકલ્પ તરીકે થયો છે કે નિવારક વિકલ્પ તરીકે તે નક્કી કરો :

(1) રવિવારે અથવા તહેવારના દિવસે શાળામાં રજા હોય છે.

(2) પ્રવેશ પરીક્ષા પાસ કર્યા પછી, તમે મેડિકલ અથવા એન્જિનિયરીંગ કોર્ષમાં પ્રવેશ મેળવી શકો છો.

(3) ગુલાબ પીળા અથવા ગુલાબી રંગના હોય છે.

(4) ભારતે CWG રમતોમાં રાઈફલ શુટીંગમાં સુવર્ણચંદ્રક અને હૉકીમાં રજતચંદ્રક મેળવ્યો હતો.

(5) પીઝા એ ઠંડાં પીણાં અથવા કૉલ્ડ કૉફી સાથે પીરસવામાં આવે છે.

4. એવાં બે ઉદાહરણ આપો કે જેમાં 'અને'નો ઉપયોગ થયો હોય, પણ તાર્કિક કારક તરીકે ઉપયોગ ન થયો હોય.

5. '30 એ 2, 3 અને 5 વડે વિભાજ્ય છે.' આ વિધાન કયાં વિધાનોનું સંયુક્ત વિધાન છે ? સંકેતમાં દર્શાવો તથા તેમની સત્યાર્થતા લખો તેમજ નિષેધ લખો.

6. 1 એ અવિભાજ્ય છે અથવા વિભાજ્ય છે. આ વિધાન ક્યાં સાદાં વિધાનોનું વિયોજન છે ? વિધાનનું સત્યાર્થતા મૂલ્ય લખો તેમજ નિષેધ લખો.

*

1.5 કારક અને તેમનાં નિષેધ

નીચે આપેલ છે તેવાં વિધાનોનો પણ ગણિતમાં ઉપયોગ થાય છે :

(1) પ્રાકૃતિક સંખ્યાગણના દરેક અરિક્ત ઉપગણમાં કોઈક નાનામાં નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

(2) પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $x^2 \geq 0$.

'કોઈક અસ્તિત્વ ધરાવે છે' કે **'બધા માટે'** કે **'પ્રત્યેક માટે'** વગેરે જેવા શબ્દસમૂહોનો ગણિતમાં ઉપયોગ થાય છે. આ શબ્દસમૂહોને **કારકો (Quantifiers)** કહે છે.

'કોઈક અસ્તિત્વ ધરાવે છે' તે માટેનો સંકેત $\exists$ છે અને 'પ્રત્યેક માટે' માટેનો સંકેત $\forall$ છે.

'$\exists$' ને અસ્તિત્વ કારક અને '$\forall$' ને વૈશ્વિક કારક કહે છે.

ઉદાહરણ તરીકે 'પ્રત્યેક $x \in$ R માટે $x^2 \geq 0$' ને સંકેતમાં '$\forall x \in$ R, $x^2 \geq 0$' લખી શકાય.

જેથી $x^2 = -1$ થાય એવી કોઈક વાસ્તવિક સંખ્યા x અસ્તિત્વ ધરાવે છે. તેને સંકેતમાં '$\exists x$, $x \in$ R જેથી $x^2 = -1$' રીતે લખી શકાય.

આવાં વિધાનોનું નિષેધ કાળજીપૂર્વક કરવું જોઈએ. ઉદાહરણ તરીકે ઉપરનાં વિધાનો (1) તથા (2)નાં નિષેધ નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

(1) પ્રાકૃતિક સંખ્યાગણના કોઈક ઉપગણમાં નાનામાં નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા અસ્તિત્વ ધરાવતી નથી.

(2) જેના માટે $x^2 < 0$ થાય તેવી કોઈક વાસ્તવિક સંખ્યા x મળે છે.

વૈશ્વિક કારક (Universal Quantifier) અને અસ્તિત્વ કારક (Existential Quantifier)ના નિષેધ

કારક સાથેના વિધાન માટેના નિષેધ માટેનો નિયમ નીચે પ્રમાણે છે :

ધારો કે p કોઈક વિધાન છે.

~(કોઈક p) = બધા જ ~p. $\sim(\exists p) = \forall(\sim p)$

~(બધા જ p) = કોઈક ~p. $\sim(\forall p) = \exists(\sim p)$

ઉદાહરણ 10 : નીચેનાં વિધાનોનાં નિષેધ લખો :

(1) બધા જ ગણ A માટે, $\emptyset \subset$ A.

(2) બધા જ $x \in$ R માટે, $x + y = y + x$ જ્યાં $y \in$ R

(3) બધા જ $x \in$ R માટે, $x + 0 = 0 + x$

(4) બધા જ $x \in$ R માટે, $x \cdot 1 = 1 \cdot x$

ઉકેલ : બધાં જ વિધાનોમાં 'બધા જ p'નો ઉપયોગ થયેલ છે. માટે તેમનું નિષેધ 'કોઈક એવા ~p' પ્રકારનું હશે.

(1) કોઈક એવો ગણ A મળે કે જેથી $\emptyset \not\subset$ A.

(2) કોઈક એવો $x \in$ R મળે કે જેથી $x + y \neq y + x$ જ્યાં $y \in$ R.

(3) કોઈક એવો $x \in$ R મળે કે જેથી $x + 0 \neq 0 + x$.

(4) કોઈક એવો $x \in$ R મળે કે જેથી $x \cdot 1 \neq 1 \cdot x$.

ઉદાહરણ 11 : નીચેનાં વિધાનોનાં નિષેધ લખો :

(1) કોઈક $x \in$ N માટે $x^2 = x$.

(2) કોઈક $x \in$ R માટે $x^2 = -1$.

(3) કોઈક એવો માનવી છે જે અમર છે.

ઉકેલ : ~(કોઈક p માટે) = બધા જ ~p.

(1) બધા જ $x \in$ N માટે $x^2 \neq x$.

(2) બધા જ $x \in$ R માટે $x^2 \neq -1$.

(3) પ્રત્યેક માનવી માટે તે અમર નથી. (કોઈપણ માનવી અમર નથી.)

1.6 પ્રેરણ અને દ્વિપ્રેરણ

ગણિતમાં ઘણી વખત આ પ્રમાણેનાં વાક્યોનો ઉપયોગ કરીએ છીએ. 'જો ત્રિકોણની બધી જ બાજુઓ એકરૂપ હોય, તો તેના તમામ ખૂણાઓ એકરૂપ હોય છે.'

પ્રેરણ (Implication) : જો...અને તો... વડે બે વિધાનો p અને qને જોડવામાં આવે છે. આ પ્રકારનાં વાક્યોનું સ્વરૂપ 'જો p તો q' હોય છે. તેને **પ્રેરણ** તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. પ્રેરણને સંકેતમાં $p \Rightarrow q$ વડે દર્શાવાય છે. આ પ્રકારના વિધાનને **શરતી વિધાન (Conditional Statement)** કહે છે.

પ્રેરણને નીચેના પૈકી એક રીતે લખી શકાય છે :

(1) જો p તો q.

(2) q, જો p.

(3) q તો જ p.

(4) p એ q માટેની પર્યાપ્ત શરત છે.

(5) q એ p માટેની આવશ્યક શરત છે.

p ને સિદ્ધાંત અથવા પૂર્વવિધાન કહે છે. q ને તારણ અથવા ઉત્તરવિધાન કહે છે.

$p \Rightarrow q$ માં જો p અસત્ય હોય, તો q માટે કશું કહી ન શકાય. તદુપરાંત $p \Rightarrow q$નો અર્થ એવો નથી કે p અસ્તિત્વ ધરાવે છે. $p \Rightarrow q$ નો અર્થ એ છે કે p સત્ય હોય અને q અસત્ય હોય તો $p \Rightarrow q$ અસત્ય છે.

તે સિવાય તમામ વિકલ્પમાં હંમેશાં $p \Rightarrow q$ સત્ય જ બને.

ઉદાહરણ 12 : પ્રેરણ સ્વરૂપે લખો :

(1) યુગ્મ સંખ્યાનો વર્ગ યુગ્મ મળે.

(2) જો પૂર્ણાંક 9 વડે વિભાજ્ય હોય તો પૂર્ણાંકના અંકોનો સરવાળો 9 વડે વિભાજ્ય હોય.

(3) અવિભાજ્ય સંખ્યાનો વર્ગ અવિભાજ્ય ન હોય.

(4) પૂર્ણાંક સંખ્યા 10 વડે વિભાજ્ય હોય તેની આવશ્યક શરત એકમ અંકનો શૂન્ય હોવો જોઈએ.

(5) પૂર્ણાંક સંખ્યા 5 વડે વિભાજ્ય હોવા માટે એકમનો અંક 5 હોય તે પર્યાપ્ત શરત છે.

(6) વરસાદ પડે તો જ રસ્તા ભીના થાય.

(7) પરીક્ષા ન આપે તો જ નીરવ નાપાસ થાય.

ઉકેલ : (1) ધારો કે p : x એ યુગ્મ સંખ્યા છે.

q : x^2 એ યુગ્મ છે.

પ્રેરણ $p \Rightarrow q$ વડે દર્શાવાય. જો x યુગ્મ પૂર્ણાંક સંખ્યા હોય તો x^2 યુગ્મ છે.

(2) ધારો કે p : પૂર્ણાંક 9 વડે વિભાજ્ય છે.

q : તે પૂર્ણાંકના અંકોનો સરવાળો 9 વડે વિભાજ્ય છે.

પ્રેરણ $p \Rightarrow q$ વડે દર્શાવાય.

જો પૂર્ણાંક 9 વડે વિભાજ્ય હોય તો તેના અંકોનો સરવાળો 9 વડે વિભાજ્ય હોય.

(3) ધારો કે p : સંખ્યા x અવિભાજ્ય છે.

q : xનો વર્ગ અવિભાજ્ય નથી.

પ્રેરણ $p \Rightarrow q$: જો સંખ્યા અવિભાજ્ય હોય, તો તેનો વર્ગ અવિભાજ્ય નથી.

(4) ધારો કે p : પૂર્ણાંક સંખ્યા 10 વડે વિભાજ્ય છે.

q : પૂર્ણાંક સંખ્યાનો એકમનો અંક શૂન્ય છે.

પ્રેરણ $p \Rightarrow q$: જો પૂર્ણાંક સંખ્યા 10 વડે વિભાજ્ય હોય, તો તેનો એકમનો અંક શૂન્ય છે.

(5) ધારો કે p : પૂર્ણાંક સંખ્યાનો એકમનો અંક 5 છે.

q : પૂર્ણાંક સંખ્યા 5 વડે વિભાજ્ય છે.

પ્રેરણ $p \Rightarrow q$: જો પૂર્ણાંક સંખ્યાનો એકમનો અંક 5 હોય, તો તે 5 વડે વિભાજ્ય છે.

(6) ધારો કે p : રસ્તા ભીના થશે.

q : વરસાદ પડે.

$p \Rightarrow q$ 'જો રસ્તા ભીના હશે તો વરસાદ પડ્યો હશે.'

(7) ધારો કે p : નીરવ નાપાસ થયો.

q : નીરવે પરીક્ષા આપી નહિ હોય.

$p \Rightarrow q$: 'જો નીરવ નાપાસ થાય તો તેણે પરીક્ષા આપી નહિ હોય.'

દ્વિપ્રેરણ (Biconditional statement) : ભૂમિતિમાં આપણે આવા પ્રકારનાં વાક્યો જોતા હોઈએ છીએ. જેમકે 'ત્રિકોણ સમબાજુ ત્રિકોણ હોય તો અને તો જ તે સમકોણ ત્રિકોણ છે.' અહીં બે વિધાનોને 'તો અને તો જ' જેવા શબ્દસમૂહથી જોડવામાં આવ્યા છે.

ધારો કે p : ત્રિકોણ સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

q : ત્રિકોણ સમકોણ ત્રિકોણ છે.

અહીં આપેલ વિધાન જો **p તો અને તો જ q** છે.

આ પ્રકારનાં વિધાનોને દ્વિપ્રેરણ કહે છે અને સંકેતમાં તેને $p \Leftrightarrow q$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

તેનું સમાનાર્થી વિધાન 'જો p સત્ય છે તો q સત્ય છે' અને તે જ રીતે ઊલટું, 'જો q સત્ય છે તો p સત્ય છે'. **જો બંને વિધાન p અને q સત્ય હોય અથવા બંને અસત્ય હોય, તો $p \Leftrightarrow q$ સત્ય થાય.** તેને વિભાજિત કરીએ, તો **'જો p તો q અને જો q તો p' એમ બે વિધાનોનું સંયોજન દ્વિપ્રેરણ થાય.**

ઉદાહરણ 13 : દ્વિપ્રેરણથી નીચેનાં વિધાનો પરથી સંયુક્ત વિધાન રચો.

p : જો લંબચોરસ એ ચોરસ હોય તો તેની ચારેય બાજુઓ એકરૂપ હોય.

q : જો લંબચોરસની ચારેય બાજુઓ એકરૂપ હોય તો લંબચોરસ એ ચોરસ છે.

ઉકેલ : $p \Leftrightarrow q$: જો લંબચોરસ એ ચોરસ હોય તો અને તો જ તેની બધી જ બાજુઓ એકરૂપ હોય.

ઉદાહરણ 14 : નીચેનાં વિધાનો પૈકી સંયુક્ત વિધાનનાં ઘટક વિધાનો ઓળખો અને સંયુક્ત વિધાનનું સત્યાર્થતા મૂલ્ય લખો :

(1) જો ત્રિકોણ એ સમકોણ ત્રિકોણ હોય તો તેની બધી જ બાજુઓ એકરૂપ છે.

(2) જો $a \in N$, $b \in N$ તો $a + b \in N$ અને $ab \in N$.

(3) જો કોઈ સંખ્યા વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો તે પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.

(4) જો m અને n અયુગ્મ હોય, તો $m + n$ એ યુગ્મ થાય.

(5) જો m અને n અયુગ્મ હોય, તો mn એ અયુગ્મ થાય.

ઉકેલ : (1) ધારો કે p : ત્રિકોણ એ સમકોણ ત્રિકોણ છે.

q : ત્રિકોણની તમામ બાજુઓ એકરૂપ છે.

અહીં $p \Rightarrow q$ આપેલ છે. અહીં p સત્ય હોય અને q અસત્ય હોય તે શક્ય નથી. તેથી જો p સત્ય હોય તો q સત્ય જ બને.

$\therefore$ $p \Rightarrow q$ સત્ય વિધાન છે.

(2) ધારો કે $p : a \in N, b \in N$

$q : a + b \in N$ અને $ab \in N$.

જો p સત્ય હોય, તો q સત્ય થાય. આથી $p \Rightarrow q$ સત્ય વિધાન બને.

(3) ધારો કે p : કોઈ સંખ્યા વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

q : તે સંખ્યા પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.

અહીં $\sqrt{2} \in R$ અને $\sqrt{2} \notin N$.

તેથી p એ $x = \sqrt{2}$ માટે સત્ય છે અને q એ સત્ય નથી.

તેથી બધા જ $x \in R$ માટે p સત્ય હોય, તો q સત્ય થાય તે શક્ય નથી.

$\therefore \quad p \Rightarrow q$ અસત્ય છે.

(4) ધારો કે p : m અને n અયુગ્મ છે.

$q : m + n$ યુગ્મ છે.

જો p સત્ય છે તો q સત્ય છે. આથી $p \Rightarrow q$ સત્ય છે.

(5) ધારો કે p : m અને n અયુગ્મ છે.

q : mn અયુગ્મ છે.

જો p સત્ય હોય, તો q સત્ય બને. તેથી $p \Rightarrow q$ એ સત્ય છે.

સ્વાધ્યાય 1.4

1. નીચેના વિધાનોમાં કારક ઓળખો અને વિધાનનાં નિષેધ લખો :

(1) પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓની જોડ a અને b માટે $a + b$ એ યુગ્મ પૂર્ણાંક મળે.

(2) દરેક કરદાતા પાસે પાનકાર્ડ હોવું જોઈએ.

(3) $\sqrt{x} \in R$ થાય તેવો કોઈ ધન પૂર્ણાંક x અસ્તિત્વ ધરાવે.

(4) $x \in \emptyset$ થાય તેવા કોઈક ઘટક x અસ્તિત્વ ધરાવે.

(5) પ્રત્યેક $\theta \in R$ માટે $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$.

(6) ફક્ત સીધીપટ્ટી અને પરિકરની મદદથી દરેક ખૂણાની રચના થઈ શકે.

(7) 18 વર્ષ કરતાં વધુ ઉંમરના બધી જ વ્યક્તિઓ મતદાર હોય છે.

(8) N ના પ્રત્યેક ઉપગણમાં એક ન્યૂનતમ પૂર્ણાંક હોય છે.

(9) જેનો એકમનો અંક શૂન્ય હોય તેવી બધી જ સંખ્યાઓ 10 વડે વિભાજ્ય છે.

(10) જેનો એકમનો અંક 5 ન હોય તેવો 5નો કોઈક ગુણિત મળે.

2. નીચેનાં સંયુક્ત વિધાનોનાં ઘટક વિધાનો ઓળખો અને તે પરથી પ્રેરણની સત્યાર્થતા ચકાસો :

(1) જો n અયુગ્મ છે, તો n^2 એ અયુગ્મ છે.

(2) જો n એ 2 વડે વિભાજ્ય છે, તો n એ 4 વડે વિભાજ્ય હોય.

(3) જો n એ 9 વડે વિભાજ્ય છે, તો n એ 3 વડે વિભાજ્ય હોય.

(4) જો ચતુષ્કોણના બધા જ ખૂણાનું માપ 90 હોય તો તે લંબચોરસ છે.

(5) જો ત્રિકોણના બધા જ ખૂણાનાં માપ સમાન હોય તો તે ત્રિકોણ સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

(6) જો ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય તો તે સમબાજુ હોય છે.

(7) જો ત્રિકોણ એ કાટકોણ ત્રિકોણ હોય તો કાટખૂણાની સામેની બાજુ મોટામાં મોટી હોય છે.

(8) પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ u તથા v માટે જો ત્રિકોણની બાજુઓ $2uv$, $u^2 - v^2$, $u^2 + v^2$ $(u > v)$ હોય, તો તે કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

(9) જો ત્રિકોણની બાજુઓ $m, n \in \mathrm{N}$, $m > n$ માટે, $2mn$, $m^2 - n^2$, $m^2 + n^2$ હોય, તો તે કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

(10) જો આપેલ સંખ્યા 1001 વડે વિભાજ્ય હોય તો તે 7, 11 અને 13 વડે વિભાજ્ય છે.

3. નીચેનાં વિધાનો પરથી દ્વિપ્રેરણ લખો અને સત્યાર્થતા ચકાસો :

(1) p : ચતુષ્કોણ ABCD એ લંબચોરસ છે.
q : ચતુષ્કોણ ABCD એ ચોરસ છે.

(2) p : ΔABC એ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.
q : ΔABC એ સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

(3) p : ચતુષ્કોણ ABCDની બધી બાજુઓ અને બધા ખૂણા એકરૂપ છે.
q : ચતુષ્કોણ ABCD એ ચોરસ છે.

(4) p : n એ ધન પૂર્ણાંક છે.
q : n એ યુગ્મ પૂર્ણાંક છે.

(5) p : વાસ્તવિક સંખ્યા x ધન છે.
q : વાસ્તવિક સંખ્યા x એ બીજી વાસ્તવિક સંખ્યાનો વર્ગ છે.

*

સમાનાર્થી પ્રેરણ અને પ્રતીપ :

પૂર્વવિધાન તથા ઉત્તરવિધાનનું નિષેધ લેવાથી આપેલ પ્રેરણનું સમાનાર્થી પ્રેરણ નીચે પ્રમાણે મળે છે અને તે તાર્કિક સાબિતીમાં ઉપયોગી છે :

$p \Rightarrow q$ અને $\sim q \Rightarrow \sim p$ સમાનાર્થી છે.

$\sim q \Rightarrow \sim p$ ને $p \Rightarrow q$નું સમાનાર્થી પ્રેરણ (Contrapositive) કહે છે.

તેથી ધારો કે આપણે $A \subset B$ સાબિત કરવું હોય તો 'જો $x \in A$, તો $x \in B$' સાબિત કરવું પડે.

સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો $x \notin B$ તો $x \notin A$. i.e. $B' \subset A'$ સાબિત કરવું પૂરતું છે.

$p \Rightarrow q$નું પ્રતીપ (Converse) $q \Rightarrow p$ છે.

તેથી $p \Leftrightarrow q$ એ પ્રેરણ અને તેના પ્રતીપ વિધાનનું સંયોજિત વિધાન છે.

ઉદાહરણ 15 : નીચેનાં વિધાનોના સમાનાર્થી પ્રેરણ તથા પ્રતીપ આપો :

(1) જો વરસાદ પડે તો રસ્તા ભીના થાય.

(2) જો $ab = 0$, તો $a = 0$ અથવા $b = 0$.

(3) જો $ab = ac$ અને $a \neq 0$, તો $b = c$.

(4) જો x અવિભાજ્ય સંખ્યા છે, તો તે અયુગ્મ સંખ્યા છે.

(5) જો $\square$ABCD એ ચોરસ હોય, તો તેના વિકર્ણો એકરૂપ છે.

ઉકેલ : (1) ધારો કે p : વરસાદ પડે.
q : રસ્તા ભીના થાય.

સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો રસ્તા ભીના ન થાય તો વરસાદ પડ્યો ન હોય.

પ્રતીપ : જો રસ્તા ભીના હોય, તો વરસાદ પડ્યો હોય.

(2) $p : ab = 0$

$q : a = 0$ અથવા $b = 0$

$\sim q \Rightarrow \sim p$: જો $a \neq 0$ અને $b \neq 0$, તો $ab \neq 0$

(જુઓ કે **'અથવા'નું પરિવર્તન 'અને'માં થાય છે. શા માટે ?)**

પ્રતીપ : 'જો $a = 0$ અથવા $b = 0$, તો $ab = 0$'.

(3) $p : ab = ac$ અને $a \neq 0$

$q : b = c$.

સમાનાર્થી પ્રેરણ : જો $b \neq c$ તો $ab \neq ac$ અથવા $a = 0$

('અને' પરિવર્તન 'અથવા'માં થાય છે. શા માટે ?)

પ્રતીપ : જો $b = c$ તો $ab = ac$ અને $a \neq 0$.

(4) p : x એ અવિભાજ્ય સંખ્યા છે.

q : x એ અયુગ્મ સંખ્યા છે.

$\sim q \Rightarrow \sim p$: જો x અયુગ્મ સંખ્યા ન હોય, તો તે અવિભાજ્ય સંખ્યા નથી.

પ્રતીપ : જો x એ અયુગ્મ સંખ્યા છે, તો x અવિભાજ્ય સંખ્યા છે.

(5) p : □ABCD એ ચોરસ છે.

q : □ABCDના વિકર્ણો એકરૂપ છે.

$\sim q \Rightarrow \sim p$: 'જો □ABCDના વિકર્ણો એકરૂપ ન હોય, તો તે ચોરસ નથી.'

પ્રતીપ : 'જો □ABCDના વિકર્ણો એકરૂપ હોય, તો □ABCD ચોરસ છે.'

સ્વાધ્યાય 1.5

1. નીચેનાં વિધાનોનાં સમાનાર્થી પ્રેરણ તથા પ્રતીપ વિધાનો લખો :

(1) જો n એ 30 વડે વિભાજ્ય હોય તો n એ 2 વડે વિભાજ્ય છે.

(2) જો n એ 8 વડે વિભાજ્ય હોય તો n એ 16 વડે વિભાજ્ય છે.

(3) જો સંજય પરીક્ષા ન આપે તો તે નાપાસ થશે.

(4) જો n એ કોઈ પૂર્ણાંકનો વર્ગ હોય તો તેનું વર્ગમૂળ પૂર્ણાંક થાય.

(5) જો n એ પૂર્ણાંકનો ઘન હોય તો તેના ત્રણ વાસ્તવિક ઘનમૂળ મળે.

(6) જો સમતલમાં આવેલ બે રેખાઓ પરસ્પર છેદે તો તે સમાંતર હોઈ શકે નહિ.

(7) જો ત્રિકોણના બે ખૂણાઓ એકરૂપ ન હોય તો તેમની સામેની બાજુઓ પણ એકરૂપ ન હોય.

(8) સમતલમાં જો $l \parallel m$ અને $m \parallel n$ તો $l \parallel n$ અથવા $l = n$.

(9) જો $a^2 = b^2$ તો $a = \pm b$ $(a, b \in R)$.

(10) જો $a^3 = b^3$ તો $a = b$ $(a, b \in R)$.

*

1.7 વિધાનોની યથાર્થતા

આ વિભાગમાં આપણે **વિધાનોની યથાર્થતા (Validating Statements)**ની ચર્ચા કરીશું. આપણે જાણીએ છીએ કે, વિધાન સત્ય કે મિથ્યા હોય અને આ બેમાંથી એક જ વિકલ્પ સત્ય છે. આપણે વિધાન સત્ય છે કે અસત્ય તે નક્કી કરવા ઇચ્છીએ છીએ. આ સત્યાર્થતાનો આધાર ઉપયોગમાં લીધેલા તાર્કિક કારકો 'અને' તથા 'અથવા', 'જો...તો' પ્રકારના પ્રેરણ, 'જો...તો અને તો જ' પ્રકારના દ્વિપ્રેરણ તથા 'પ્રત્યેક માટે' અને 'અસ્તિત્વકારક'' કારકો પર છે.

આ માટે કેટલાક નિયમોની યાદી તૈયાર કરીએ :

(1) જો તાર્કિક કારક 'અને'નો ઉપયોગ થયો હોય તો ઘટક વિધાનો p તથા q બંને સત્ય હોય તો સંયુક્ત વિધાન સત્ય છે અને આ સિવાયના વિકલ્પોમાં સંયુક્ત વિધાન સત્ય નથી.

(2) જો તાર્કિક કારક 'અથવા'નો ઉપયોગ થયો હોય તો ઘટક વિધાનો p તથા q બંને વિધાનો મિથ્યા હોય, તો સંયુક્ત વિધાન મિથ્યા છે અને આ સિવાયના વિકલ્પોમાં સંયુક્ત વિધાન સત્ય છે.

(3) (i) જો 'p તો q' પ્રકારનું વિધાન સાબિત કરવા માટે p સત્ય છે તેમ સ્વીકારી q સાબિત કરો. આને સાબિતીની **પ્રત્યક્ષ પદ્ધતિ (Direct Method)** કહે છે. અહીં આપણે એ હકીકતનો ઉપયોગ કરીએ છીએ કે જ્યારે p સત્ય હોય અને q મિથ્યા હોય ત્યારે જ પ્રેરણ અસત્ય છે. (ii) q નું નિષેધ સત્ય છે તેમ સ્વીકારી p નું નિષેધ સત્ય છે તેમ સાબિત કરો. આ રીત સમાનાર્થી પ્રેરણની રીત છે. $\sim q \Rightarrow \sim p$ તથા $p \Rightarrow q$ સમાનાર્થી વિધાનો છે.

(4) જો p તો અને તો જ q એટલે કે દ્વિપ્રેરણ $p \Leftrightarrow q$ સાબિત કરવા માટે (i) p ને સત્ય સ્વીકારી q સાબિત કરવું જોઈએ તથા (ii) q ને સત્ય સ્વીકારી p સાબિત કરવું જોઈએ.

(5) **વિરોધાભાસની રીત (અનિષ્ટાપત્તિની રીત) (Method of Contradiction) :** આ રીતમાં આપણે સ્વીકારી લઈએ છીએ કે, q સત્ય નથી અને તે પરથી પક્ષ (સિદ્ધાંત)થી વિપરીત પરિણામ મેળવીએ છીએ. આ પરથી તારણ મળે કે, q નો નિષેધ સત્ય હોય તે શક્ય નથી. આથી q સત્ય છે તેમ સાબિત થાય.

(6) આપણે નોંધીએ કે $\sim(p \Rightarrow q) = p \wedge (\sim q)$

ઉદાહરણ 16 : નીચેની બે રીતે સાબિત કરો કે જો $x, y \in N$ તથા x અને y અયુગ્મ હોય, તો xy અયુગ્મ છે :

(1) પ્રત્યક્ષ રીતે $p \Rightarrow q$ તરીકે,

(2) સમાનાર્થી પ્રેરણ $\sim q \Rightarrow \sim p$નો ઉપયોગ કરીને.

ઉકેલ : (1) $x = 2m - 1$, $y = 2n - 1$, $m, n \in N$ લઈએ. (અયુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ)
(અયુગ્મ સંખ્યાઓ $2n \pm 1$ સ્વરૂપની હોય છે.)

$$\begin{aligned} \therefore \quad xy &= (2m - 1)(2n - 1) \\ &= 4mn - 2m - 2n + 1 \\ &= 2(2mn - m - n) + 1 \\ &= 2k + 1 \text{ જ્યાં } k = 2mn - m - n \end{aligned}$$

$\therefore$ xy અયુગ્મ છે.

(2) ધારો કે $\sim q$ એ સત્ય છે.

$\therefore$ xy એ અયુગ્મ નથી.

$\therefore$ xy એ યુગ્મ છે.

$xy = 2m$ લેતાં, xy એ 2 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ x એ 2 વડે વિભાજ્ય છે અથવા y એ 2 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ x એ યુગ્મ છે અથવા y એ યુગ્મ છે.

$\therefore$ $\sim p$ સત્ય છે. **(p : x અને y બંને અયુગ્મ છે.)**

$\therefore$ $\sim q \Rightarrow \sim p$ સત્ય છે.

$\therefore$ $p \Rightarrow q$ સત્ય છે.

$\therefore$ જો x અને y અયુગ્મ હોય, તો xy એ અયુગ્મ છે.

ઉદાહરણ 17 : સમાનાર્થી પ્રેરણની રીતે સાબિત કરો : 'જો xy અયુગ્મ હોય તો x અને y અયુગ્મ છે.'

ઉકેલ : ધારો કે p : xy અયુગ્મ છે. q : x અને y અયુગ્મ છે.

$\therefore$ $\sim q$: x યુગ્મ છે અથવા y યુગ્મ છે. **(બંને યુગ્મ હોઈ શકે.)**

ધારો કે $x = 2m$, $m \in$ N **(અથવા તે જ રીતે ધારી શકાય કે $y = 2m$)**

$\therefore$ $xy = 2my$

$\therefore$ xy એ યુગ્મ છે.

$\therefore$ $\sim p$ એ સત્ય છે.

$\therefore$ $\sim q \Rightarrow \sim p$ સત્ય છે.

$\therefore$ $p \Rightarrow q$ સત્ય છે.

$\therefore$ જો xy અયુગ્મ હોય તો x અને y અયુગ્મ છે.

ઉદાહરણ 18 : અનિષ્ટાપત્તિની રીતથી સાબિત કરો કે, અસંમેય સંખ્યા અને સંમેય સંખ્યાનો સરવાળો અસંમેય હોય.

ઉકેલ : ધારો કે x એ અસંમેય સંખ્યા અને y એ સંમેય સંખ્યા છે.

ધારો કે $x + y = z$ એ સંમેય સંખ્યા છે.

અહીં z અને y એ બંને સંમેય છે. તેથી $z - y$ પણ સંમેય થાય.

$\therefore$ $x = z - y$ પણ સંમેય થાય.

પરંતુ x એ અસંમેય સંખ્યા છે.

$\therefore$ આ પરિણામ આપણી ધારણા કરતાં વિપરીત છે.

$\therefore$ $z = x + y$ એ અસંમેય થાય.

ઉદાહરણ 19 : અનિષ્ટાપત્તિના આધારે સાબિત કરો કે જો $x > 3$ તો $x^2 > 9$ ($x \in$ R).

ઉકેલ : ધારો કે વિધાન '$x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$' અસત્ય છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે, $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge (\sim q)$

$\therefore$ $x > 3$ અને $x^2 \le 9$

$\therefore$ $x > 3$ અને $x^2 - 9 \le 0$

$\therefore$ $x > 3$ અને ($x - 3 \le 0$ અથવા $x + 3 \le 0$)

$\therefore$ $x > 3$ અને ($x \le 3$ અથવા $x \le -3 < 3$)

$\therefore$ $x > 3$ અને $x \le 3$

આ પરિણામ શક્ય નથી.

તેથી $\sim(p \Rightarrow q)$ એ અસત્ય છે. આથી $p \Rightarrow q$ એ સત્ય છે.

ઉદાહરણ 20 : સાબિતીની પ્રત્યક્ષ રીતનો ઉપયોગ કરી સાબિત કરો કે જો $x = y$ તો $x^2 = y^2$ થાય. (જ્યાં x અને y વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.)

ઉકેલ : ધારો કે $x = y$

$\therefore$ $xx = xy$

તે જ રીતે $x = y$ પરથી $xy = yy$

$\therefore$ $xx = xy = yy$

$\therefore$ $x^2 = y^2$

ઉદાહરણ 21 : સાબિત કરો કે જો n યુગ્મ સંખ્યા હોય તો n^2 યુગ્મ થાય.

ઉકેલ : ધારો કે p : n એ યુગ્મ સંખ્યા છે.

q : n^2 એ યુગ્મ સંખ્યા છે.

$\sim(p \Rightarrow q) = p \wedge (\sim q)$

$\therefore$ $p \wedge (\sim q)$: n યુગ્મ છે અને n^2 યુગ્મ નથી.

ધારો કે $n = 2m$

$\therefore$ $n^2 = 4m^2$ યુગ્મ છે.

$\therefore$ $p \wedge (\sim q)$ એટલે કે 'n યુગ્મ છે અને n^2 યુગ્મ નથી' તે ખોટું છે.

$\therefore$ $\sim(p \Rightarrow q)$ ખોટું છે.

$\therefore$ $p \Rightarrow q$ એટલે કે, n યુગ્મ છે $\Rightarrow n^2$ યુગ્મ છે તે સત્ય છે.

ઉદાહરણ 22 : પ્રતિઉદાહરણ આપી દર્શાવો કે નીચેનાં વિધાન અસત્ય છે :

(1) જો n અવિભાજ્ય હોય તો n અયુગ્મ છે.

(2) જો $m^2 = n^2$, તો $m = n$.

ઉકેલ : (1) $n = 2$ એ અવિભાજ્ય છે. પરંતુ તે અયુગ્મ નથી. આથી આપેલ વિધાન સત્ય નથી.

(2) $3^2 = (-3)^2 = 9$, પરંતુ $3 \neq -3$.

આથી પ્રતિઉદાહરણની રીતે આપેલ વિધાન સત્ય નથી.

ઉદાહરણ 23 : સાબિતીની પ્રત્યક્ષ રીતે સાબિત કરો કે, વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે જો $x^3 + x = 0$ તો $x = 0$.

ઉકેલ : ધારો કે $p : x^3 + x = 0$ અને $q : x = 0$

$\therefore$ $p : x(x^2 + 1) = 0$

$\therefore$ $x = 0$ અથવા $x^2 + 1 = 0$

પરંતુ વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $x^2 \geq 0$

$\therefore$ $x^2 + 1 > 0$

$\therefore$ $x^2 + 1 \neq 0$

$\therefore$ $x = 0$

$\therefore$ q સત્ય છે.

$\therefore$ $p \Rightarrow q$ સત્ય છે.

સ્વાધ્યાય 1

1. નીચેનાં વાક્યો વિધાન છે કે નહિ તે બતાવો :

(1) જો n પૂર્ણાંક સંખ્યા હોય તો n યુગ્મ અથવા અયુગ્મ સંખ્યા હોય.

(2) જો આપેલ ખૂણો કાટખૂણો હોય તો અને તો જ તે ખૂણાનું માપ 90 છે.

(3) ટ્રાફિકના નિયમોનું પાલન કરો.

(4) કેવું સુંદર પ્રદર્શન !

(5) ભારત વિકસિત દેશ છે.

(6) ગુજરાત વાઈબ્રન્ટ રાજ્ય છે.

(7) તાજમહેલ ક્યાં આવેલ છે ?

(8) ગુજરાત પ્રવાસન નિગમના બ્રાન્ડ એમ્બેસેડર કોણ છે ?

(9) જો n યુગ્મ હોય તો $n + 1$ અયુગ્મ છે.

(10) જો n યુગ્મ સંખ્યા હોય તો $n + 1$ શૂન્ય ન હોય.

2. નીચેનાં વિધાનોનાં નિષેધ લખો :

(1) વિજ્ઞાન અને ગણિત વિકાસ માટે ઉપયોગી છે.

(2) કોઈ પણ વ્યક્તિ ઇજનેરી અથવા તબીબી અભ્યાસ પસંદ કરી શકે.

(3) જો n પૂર્ણવર્ગ હોય તો nનો અંતિમ અંક 3 ના હોઈ શકે.

(4) બધી જ અવિભાજ્ય સંખ્યા અયુગ્મ છે.

(5) બધી જ અયુગ્મ સંખ્યા અવિભાજ્ય છે.

(6) દરેક પૂર્ણાંક સંમેય સંખ્યા છે.

(7) અવિભાજ્ય હોય તેવો કોઈક યુગ્મ પૂર્ણાંક છે.

(8) $x^2 = -1$ થાય તેવી કોઈક વાસ્તવિક સંખ્યા અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

(9) પ્રત્યેક $a \in R$ માટે, $a + 0 = a$

(10) $a \cdot 1 \neq a$ થાય તેવી કોઈક વાસ્તવિક સંખ્યા $a \in R$ મળે.

(11) પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $x^2 \neq x$.

(12) $x^3 < x$ થાય તેવી કોઈક વાસ્તવિક સંખ્યા x અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

3. નીચેના વિધાનને પાંચ જુદી જુદી રીતે 'જો...તો'નો ઉપયોગ કરીને લખો :
(સૂચન : 'જો p તો q; q, જો p; q તો જ p, આવશ્યક, પર્યાપ્ત)
'જો n અયુગ્મ હોય તો $n^2 + 1$ યુગ્મ હોય.'

4. નીચેનાં વિધાનોનાં પ્રતીપ અને સમાનાર્થી પ્રેરણ લખો :

(1) જો બહાર વરસાદ પડતો હોય તો તમારી પાસે છત્રી હોવી જોઈએ.

(2) જો કોઈ ધન પૂર્ણાંક વિભાજ્ય હોય તો તેને ઓછામાં ઓછા ત્રણ અવયવ હોય.

(3) જો n વિભાજ્ય ન હોય કે અવિભાજ્ય ન હોય તો $n = 1$.

(4) જો ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય તો તેની સામસામેની બાજુઓ એકરૂપ હોય.

(5) જો ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે તો તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(6) જો આજે શુક્રવાર હોય તો હું નવું ચલચિત્ર જોવા જઈશ.

(7) જો x ઋણ હોય તો x^2 ધન હોય.

(8) જો x અને y ઋણ હોય તો xy ધન હોય.

(9) જો ચતુષ્કોણ સમકોણ હોય તો તે ચોરસ હોય.

(10) જો $x - a$ બહુપદી $p(x)$નો અવયવ હોય તો $p(a) = 0$.

5. નીચેના વિધાનની સત્યાર્થતા (1) પ્રત્યક્ષ પદ્ધતિ (2) સમાનાર્થી પ્રેરણની રીતથી (3) અનિષ્ટાપત્તિની રીતથી સાબિત કરો :

જો $x^5 + 16x = 0$ તો $x = 0$.

6. અનિષ્ટાપત્તિની રીતથી સાબિત કરો કે $\sqrt{2}$ અસંમેય છે.

7. પ્રતિઉદાહરણની રીતે સાબિત કરો કે નીચેનું વિધાન અસત્ય છે :
p : જો ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ હોય તો તે સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ ન હોય.

8. પ્રતિઉદાહરણની રીતે સાબિત કરો કે નીચેનું વિધાન અસત્ય છે :
જ્યારે પણ x પ્રાકૃતિક સંખ્યા હોય ત્યારે $\sqrt{x}$ અસંમેય હોય.

9. સાબિતીની પ્રત્યક્ષ રીતે સાબિત કરો કે, પ્રત્યેક પૂર્ણાંક n માટે $n^3 - n$ યુગ્મ છે.

10. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d)માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને $\boxed{}$ માં લખો :

(1) નીચેના પૈકી કયું વિધાન છે ? $\boxed{}$
(a) x ધન છે.
(b) -1 ઋણ છે.
(c) ઊભા થાવ.
(d) તમે ક્યાં છો ?

(2) નીચેના પૈકી કયું વિધાન નથી ? $\boxed{}$
(a) $2 \times 3 = 6$
(b) $2 \times 4 \neq 8$
(c) સત્યનો વિજય થાવ !
(d) અયુગ્મ સંખ્યાનો વર્ગ અયુગ્મ છે.

(3) '3 અયુગ્મ છે અથવા 3 અવિભાજ્ય છે'નું નિષેધ ...... છે. $\boxed{}$
(a) 3 અયુગ્મ નથી અને 3 અવિભાજ્ય નથી.
(b) 3 અયુગ્મ નથી અથવા 3 અવિભાજ્ય નથી.
(c) 3 અયુગ્મ છે અને 3 અવિભાજ્ય નથી.
(d) 3 અયુગ્મ નથી અને 3 અવિભાજ્ય છે.

(4) 'જો $x^2 = y^2$ તો $x = y$'નું પ્રતીપ ...... છે. $\boxed{}$
(a) જો $x^2 = y^2$, તો $x \neq y$
(b) જો $x = y$, તો $x^2 = y^2$
(c) જો $x \neq y$, તો $x^2 = y^2$
(d) જો $x^2 \neq y^2$, તો $x = y$

(5) 'જો $x > y$, તો $3x > 3y$'નું સમાનાર્થી પ્રેરણ ...... છે. $\boxed{}$
(a) જો $x > y$, તો $3x \leq 3y$
(b) જો $3x > 3y$, તો $x > y$
(c) જો $3x \leq 3y$, તો $x \leq y$
(d) જો $x < y$, તો $3x < 3y$

(6) $p \Rightarrow q$ નું સમાનાર્થી પ્રેરણ ...... છે. $\boxed{}$
(a) $q \Rightarrow p$
(b) $\sim q \Rightarrow \sim p$
(c) $p \Rightarrow \sim q$
(d) $\sim p \Rightarrow q$

(7) $p \Rightarrow q$ નું નિષેધ ...... છે. $\boxed{}$
(a) p અને $\sim q$
(b) p અથવા q
(c) $\sim p$ અથવા q
(d) $q \Rightarrow p$

(8) $p \Rightarrow q$ નું પ્રતીપ ...... છે. $\boxed{}$
(a) $p \Rightarrow \sim q$
(b) $\sim q \Rightarrow p$
(c) $q \Rightarrow p$
(d) $\sim p \Rightarrow q$

(9) 'પ્રત્યેક x માટે p' નું નિષેધ ...... છે. $\boxed{}$
(a) કોઈ x છે, $\sim p$
(b) પ્રત્યેક x માટે $\sim p$
(c) $\sim p$
(d) p

(10) '12 એ 3નો ગુણક છે તથા 12 એ 4નો ગુણક છે'નું નિષેધ ...... છે. $\boxed{}$
(a) 12 એ 3 અથવા 4નો ગુણક છે.
(b) 12 એ 3નો ગુણક નથી અથવા 12 એ 4નો ગુણક નથી.
(c) 12 એ 3નો ગુણક નથી અને 12 એ 4નો ગુણક નથી.
(d) 12 એ 3નો ગુણક છે અને 12 એ 4નો ગુણક છે.

(11) દ્વિપ્રેરણ $p \Leftrightarrow q$ ...... છે.

(a) $p \Rightarrow q$ અને $q \Rightarrow p$ નું સંયોજન (b) $p \Rightarrow q$ અને $q \Rightarrow p$ નું વિયોજન

(c) $p \Rightarrow q$ નું પ્રતીપ (d) $q \Rightarrow p$ નું સમાનાર્થી પ્રેરણ

(12) જો ...... તો $p \wedge q$ સત્ય છે.

(a) p અને q સત્ય છે. (b) p અને q અસત્ય છે.

(c) p સત્ય છે અને q અસત્ય છે. (d) p અસત્ય છે અને q સત્ય છે.

(13) જ્યારે ...... ત્યારે $p \vee q$ અસત્ય છે.

(a) p અને q સત્ય છે. (b) p અને q અસત્ય છે.

(c) p સત્ય છે અને q અસત્ય છે. (d) p અસત્ય છે અને q સત્ય છે.

(14) જ્યારે ...... ત્યારે $p \Rightarrow q$ અસત્ય છે.

(a) p અને q સત્ય છે. (b) p અને q અસત્ય છે.

(c) p સત્ય છે અને q અસત્ય છે. (d) p અસત્ય છે અને q સત્ય છે.

(15) જ્યારે ...... ત્યારે $\sim p \Rightarrow \sim q$ અસત્ય છે.

(a) p અને q સત્ય છે. (b) p અને q અસત્ય છે.

(c) p સત્ય છે અને q અસત્ય છે. (d) p અસત્ય છે અને q સત્ય છે.

(16) $\sim$(p અથવા q) ...... છે.

(a) p અને q (b) $(\sim p)$ અને $\sim q$ (c) $(\sim p)$ અથવા $\sim q$ (d) p અથવા $\sim q$

(17) $\sim$(p અને q) ...... છે.

(a) p અથવા q (b) $(\sim p)$ અથવા $(\sim q)$ (c) $(\sim p)$ અને q (d) $(\sim p)$ અને $\sim q$

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. વિધાન, તેનું નિષેધ, સંયોજન, વિયોજન
2. સંયુક્ત વિધાનોના નિષેધ
3. અસ્તિત્વકારક અને વૈશ્વિકકારક તથા તેમનાં નિષેધ
4. પ્રેરણ, દ્વિપ્રેરણ, તેમનાં નિષેધ અને સમાનાર્થી પ્રેરણ તથા વિધાનનાં પ્રતીપ
5. સાબિતીની વિવિધ રીતો જેવી કે પ્રત્યક્ષ અને પરોક્ષ રીત
6. પરોક્ષ રીતમાં અનિષ્ટાપત્તિની રીત તથા પ્રતિઉદાહરણની રીત