પ્રકરણ **4**

સરવાળાનાં સૂત્રો અને અવયવ સૂત્રો

Music is the pleasure the human mind experiences from counting without being aware that it is counting.

– Gottfried Leibnitz

4.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે ત્રિકોણમિતીય વિધેયોની મૂળભૂત સંકલ્પના અને ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કર્યો. હવે, આપણે કોઈ પણ બે વાસ્તવિક સંખ્યાઓ α અને β ના સરવાળાથી મળતી સંખ્યા $\alpha + \beta$ અને બાદબાકીથી મળતી સંખ્યા $\alpha - \beta$ માટે ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં મૂલ્યોને α અને β માટેના ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં મૂલ્યોના ઉપયોગથી કેવી રીતે વ્યક્ત કરી શકાય તે જોઈશું. આ સૂત્રોને સરવાળાનાં સૂત્રો કહે છે. ત્યારબાદ આ સૂત્રોના ઉપયોગથી અવયવ સૂત્રો તરીકે ઓળખાતાં અન્ય સૂત્રો મેળવીશું અને તેમના ઉપયોગો જોઈશું.

જો $f(x) = ax$, $x \in R$ સુરેખ વિધેય હોય તો તેને માટે,

$$f(x - y) = a(x - y) = ax - ay = f(x) - f(y)$$

એટલે કે, $f(x - y) = f(x) - f(y)$

હવે, ત્રિકોણમિતીય વિધેય $f(x) = cosx$ માટે $\alpha = \frac{\pi}{3}$ અને $\beta = \frac{\pi}{6}$ લેતાં,

$\alpha - \beta = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ અને $cos(\alpha - \beta) = cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

પરંતુ $cos\alpha - cos\beta = cos\frac{\pi}{3} - cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$

એટલે કે, $cos(\alpha - \beta) \neq cos\alpha - cos\beta$

આમ, સુરેખ વિધેય માટે સત્ય જણાતું પરિણામ ત્રિકોણમિતીય વિધેય માટે સત્ય નથી. આવાં બીજાં પણ પરિણામો છે. તો હવે આપણે $cos(\alpha - \beta)$ નું સૂત્ર $cos\alpha$, $cos\beta$, $sin\alpha$, $sin\beta$ પરથી મેળવીએ.

4.2 સરવાળાનાં સૂત્રો

આપણે પહેલા $cos(\alpha - \beta)$ અને $cos(\alpha + \beta)$ નાં સૂત્રો મેળવીશું.

સૌ પ્રથમ $cos(\alpha - \beta)$ની અભિવ્યક્તિ મેળવીએ.

પ્રમેય 1 : $\alpha, \beta \in R$ માટે,

(1) $cos(\alpha - \beta) = cos\alpha\ cos\beta + sin\alpha\ sin\beta$

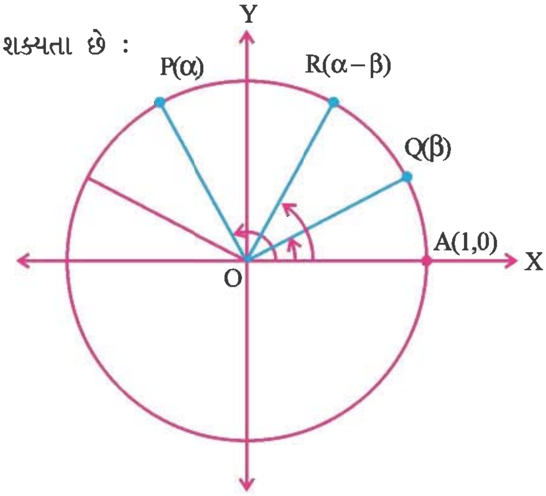
(2) $cos(\alpha + \beta) = cos\alpha\ cos\beta - sin\alpha\ sin\beta$

સાબિતી : વિકલ્પ (1) : ધારો કે $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$.

અહીં α અને β માટે ત્રિવિધ વિકલ્પના નિયમ પ્રમાણે ત્રણ શક્યતા છે :

(i) $\alpha > \beta$ **(ii)** $\alpha = \beta$ **(iii)** $\alpha < \beta$

(i) $\alpha > \beta$



આકૃતિ 4.1

ધારો કે વાસ્તવિક સંખ્યાઓ α, β અને $\alpha - \beta$ ને સંગત એકમ વર્તુળ પરનાં ત્રિકોણમિતીય બિંદુઓ અનુક્રમે P, Q અને R છે.

$\therefore$ વ્યાખ્યા પ્રમાણે, $P(\alpha) = (cos\alpha, sin\alpha)$,

$Q(\beta) = (cos\beta, sin\beta)$ અને

$R(\alpha - \beta) = (cos(\alpha - \beta), sin(\alpha - \beta))$.

અહીં, A(1, 0) છે.

આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે $l(\overset{\frown}{AP}) = \alpha$, $l(\overset{\frown}{AQ}) = \beta$ અને $l(\overset{\frown}{AR}) = \alpha - \beta$.

હવે $\beta < \alpha$ અને તેથી $Q \in \overset{\frown}{AP}$,

$l(\overset{\frown}{PQ}) = l(\overset{\frown}{AP}) - l(\overset{\frown}{AQ})$

$\therefore$ $l(\overset{\frown}{PQ}) = \alpha - \beta = l(\overset{\frown}{AR})$

$\therefore$ $\overset{\frown}{PQ} \cong \overset{\frown}{AR}$

એક જ વર્તુળમાં એકરૂપ ચાપને સંગત જીવાઓ એકરૂપ હોય છે.

$\therefore$ $PQ = AR$

$\therefore$ $PQ^2 = AR^2$

અંતર સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$PQ^2 = (cos\alpha - cos\beta)^2 + (sin\alpha - sin\beta)^2$

$= cos^2\alpha - 2cos\alpha\ cos\beta + cos^2\beta + sin^2\alpha - 2sin\alpha\ sin\beta + sin^2\beta$

$= cos^2\alpha + sin^2\alpha + cos^2\beta + sin^2\beta - 2cos\alpha\ cos\beta - 2sin\alpha\ sin\beta$

$= 2 - 2(cos\alpha\ cos\beta + sin\alpha\ sin\beta)$

$AR^2 = (1 - cos(\alpha - \beta))^2 + (0 - sin(\alpha - \beta))^2$

$= 1 - 2cos(\alpha - \beta) + cos^2(\alpha - \beta) + sin^2(\alpha - \beta)$

$= 2 - 2cos(\alpha - \beta)$

પરંતુ $AR^2 = PQ^2$

$\therefore$ $2 - 2cos(\alpha - \beta) = 2 - 2(cos\alpha\ cos\beta + sin\alpha\ sin\beta)$

$\therefore$ $-2cos(\alpha - \beta) = -2(cos\alpha\ cos\beta + sin\alpha\ sin\beta)$

$\therefore$ $cos(\alpha - \beta) = cos\alpha\ cos\beta + sin\alpha\ sin\beta$

(ii) ધારો કે $\alpha = \beta$

ડા.બા. $= cos(\alpha - \beta) = cos(\alpha - \alpha) = cos0 = 1$

જ.બા. $= cos\alpha\ cos\beta + sin\alpha\ sin\beta$

$= cos\alpha\ cos\alpha + sin\alpha\ sin\alpha$

$= cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$

$\therefore$ ડા.બા. = જ.બા.

(iii) ધારો કે $\alpha < \beta$

તો, $\alpha - \beta = -(\beta - \alpha)$

$\therefore\ cos(\alpha - \beta) = cos(-(\beta - \alpha))$

$= cos(\beta - \alpha)$ (*cosine* યુગ્મ વિધેય છે)

$= cos\beta\ cos\alpha + sin\beta\ sin\alpha$ $(\beta > \alpha)$

$\therefore\ cos(\alpha - \beta) = cos\alpha\ cos\beta + sin\alpha\ sin\beta$

વિકલ્પ (2) : $\alpha, \beta \in R$

$\alpha, \beta \in R$ હોવાથી α_1 અને β_1 એવા મળે કે જેથી $\alpha_1, \beta_1 \in [0, 2\pi)$

તથા $\alpha = 2m\pi + \alpha_1$ અને $\beta = 2n\pi + \beta_1$, $m, n \in Z$

$\therefore\ \alpha - \beta = 2m\pi + \alpha_1 - (2n\pi + \beta_1)$

$= 2(m - n)\pi + \alpha_1 - \beta_1$

$= 2k\pi + \alpha_1 - \beta_1$, જ્યાં $k = m - n \in Z$

વળી, *sin* અને *cos* વિધેયોનું મુખ્ય આવર્તમાન 2π હોવાથી,

$cos\alpha = cos\alpha_1$, $cos\beta = cos\beta_1$ અને $cos(\alpha - \beta) = cos(\alpha_1 - \beta_1)$

તથા $cos(\alpha - \beta) = cos(\alpha_1 - \beta_1)$

$= cos\alpha_1\ cos\beta_1 + sin\alpha_1\ sin\beta_1$ (વિકલ્પ (1))

$= cos\alpha\ cos\beta + sin\alpha\ sin\beta$

$\therefore\ cos(\alpha - \beta) = cos\alpha\ cos\beta + sin\alpha\ sin\beta$

આમ, વિકલ્પ (1) તથા (2) પરથી સાબિત થાય છે કે, પ્રત્યેક $\alpha, \beta \in R$ માટે

$$cos(\alpha - \beta) = cos\alpha\ cos\beta + sin\alpha\ sin\beta$$

(2) હવે, $cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha - (-\beta))$

$= cos\alpha\ cos(-\beta) + sin\alpha\ sin(-\beta)$

$= cos\alpha\ cos\beta - sin\alpha\ sin\beta$ $(cos(-\beta) = cos\beta,\ sin(-\beta) = -sin\beta)$

$$\therefore\ cos(\alpha + \beta) = cos\alpha\ cos\beta - sin\alpha\ sin\beta$$

ઉપપ્રમેય 1 : (1) $cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = sin\theta$ **(2)** $sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = cos\theta$

સાબિતી : (1) આપણે જાણીએ છીએ કે, પ્રત્યેક $\alpha, \beta \in R$ માટે

$cos(\alpha - \beta) = cos\alpha\ cos\beta + sin\alpha\ sin\beta$

ઉપરનાં સૂત્રમાં $\alpha = \frac{\pi}{2}$ અને $\beta = \theta$ લેતાં,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\theta + \sin\frac{\pi}{2}\sin\theta$$
$$= 0 \cdot \cos\theta + 1 \cdot \sin\theta$$
$$= \sin\theta$$

$\therefore \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

(2) આ સૂત્રમાં θ ને બદલે $\frac{\pi}{2} - \theta$ લેતાં,

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$\therefore \quad \cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$\therefore \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

પ્રમેય 2 : **(1)** $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

(2) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

સાબિતી : **(1)** $\sin(\alpha - \beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right]$ $\quad \left(\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)$

$$= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right]$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta$$
$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$\therefore \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

(2) $\sin(\alpha + \beta) = \sin[\alpha - (-\beta)]$

$$= \sin\alpha \cdot \cos(-\beta) - \cos\alpha \cdot \sin(-\beta)$$
$$= \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta \qquad (\cos(-\theta) = \cos\theta \text{ અને } \sin(-\theta) = -\sin\theta)$$

$\therefore \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

4.3 સંબંધિત સંખ્યાઓ માટેનાં સૂત્રો

પ્રત્યેક $\alpha, \beta \in R$ માટે, આપણે પ્રમેય 1 અને 2 પરથી નીચેનાં સૂત્રો મેળવ્યા છે :

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \qquad \text{(i)}$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad \text{(ii)}$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \qquad \text{(iii)}$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad \text{(iv)}$$

આપણે જોયું કે પ્રત્યેક $\theta \in R$ માટે,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta, \; \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

$$\therefore \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}\right) = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$

હવે (iv) અને (ii) માં $\alpha = \frac{\pi}{2}$ અને $\beta = \theta$ મૂકતાં,

$$sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = sin\frac{\pi}{2}\, cos\theta + cos\frac{\pi}{2}\, sin\theta = 1 \cdot cos\theta + 0 \cdot sin\theta = cos\theta$$

$$\therefore \quad sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = cos\theta$$

$$cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = cos\frac{\pi}{2}\, cos\theta - sin\frac{\pi}{2}\, sin\theta = 0 \cdot cos\theta - 1 \cdot sin\theta = -sin\theta$$

$$\therefore \quad cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -sin\theta$$

અને તે પરથી $tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -cot\theta$.

તે જ રીતે સૂત્ર (iii) તથા (i) માં $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ અને $\beta = \theta$ મૂકતાં નીચેનાં પરિણામ મળે,

$$sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right) = -cos\theta, \; cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right) = -sin\theta$$

$$\therefore \quad tan\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right) = cot\theta$$

તે જ રીતે $sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) = -cos\theta, \; cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) = sin\theta$

$$\therefore \quad tan\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) = -cot\theta$$

હવે (i) થી (iv) માં $\alpha = \pi$, $\beta = \theta$ અને $\alpha = 2\pi$, $\beta = \theta$ માં મૂકતાં નીચેનાં પરિણામ મળે છે :

$sin(\pi - \theta) = sin\theta$, $cos(\pi - \theta) = -cos\theta$, $tan(\pi - \theta) = -tan\theta$

$sin(\pi + \theta) = -sin\theta$, $cos(\pi + \theta) = -cos\theta$, $tan(\pi + \theta) = tan\theta$

$sin(2\pi - \theta) = -sin\theta$, $cos(2\pi - \theta) = cos\theta$, $tan(2\pi - \theta) = -tan\theta$

$sin(2\pi + \theta) = sin\theta$, $cos(2\pi + \theta) = cos\theta$, $tan(2\pi + \theta) = tan\theta$

આ સૂત્રોનો આપણે દાખલાઓની ગણતરીમાં સતત ઉપયોગ કરીશું. તેને યાદ રાખવા માટે આપણે નીચે પ્રમાણે વિચારીએ.

સૌ પ્રથમ આપણે ત્રિકોણમિતીય વિધેયો $sin\alpha$, $cos\alpha$ ની કિંમતો વિશે વિચારીશું, જ્યાં $0 \le \alpha < 2\pi$, કારણ કે પ્રત્યેક $\theta \in R$ માટે $\theta = 2n\pi + \alpha$, $0 \le \alpha < 2\pi$ છે. ધારો કે $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ છે. તો $\frac{\pi}{2} - \beta$, $\frac{\pi}{2} + \beta$, $\frac{3\pi}{2} - \beta$ અને $\frac{3\pi}{2} + \beta$ અનુક્રમે પ્રથમ, બીજા, ત્રીજા તથા ચોથા ચરણના ત્રિકોણમિતીય બિંદુને સંગત વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

$\frac{\pi}{2} + \beta$	$\frac{\pi}{2} - \beta$
$\frac{3\pi}{2} - \beta$	$\frac{3\pi}{2} + \beta$

આકૃતિ 4.2

આકૃતિ 4.2 માં કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા માટે, ત્રિકોણમિતીય વિધેયનું નીચે પ્રમાણે પરિવર્તન થાય છે : $sin \to cos$, $cos \to sin$, $tan \to cot$, $cot \to tan$, $sec \to cosec$, $cosec \to sec$.

$P\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)$ બીજા ચરણમાં છે.

બીજા ચરણમાં $sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) > 0$ થાય. આથી $sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) = cos\beta$.

નોંધ : ડાબીબાજુના વિધેયનું મૂલ્ય ધન છે કે ઋણ તે આધારે નિશાની + કે − લેવી.

$P\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)$ ત્રીજા ચરણમાં છે અને ત્રીજા ચરણમાં $cos\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right) < 0$ છે.

$\therefore \quad cos\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) = -sin\beta.$

હવે આકૃતિ 4.3 જુઓ.

$\pi - \beta$	β
$\pi + \beta$	$2\pi - \beta$

આકૃતિ 4.3

આ પ્રકારના પરિવર્તનમાં કોઈ પણ સંખ્યા માટે ત્રિકોણમિતીય વિધેય તેનું તે જ રહે છે. એટલે કે $sin \to sin$, $cos \to cos$ વગેરે.

હવે વિધેયનું મૂલ્ય ધન છે કે ઋણ છે તે આધારે + કે − ની પસંદગી થાય. હવે ત્રિકોણમિતીય બિંદુ $P(\pi + \beta)$ ત્રીજા ચરણમાં છે અને $sin(\pi + \beta)$ ત્રીજા ચરણમાં ઋણ છે.

તેથી, $sin(\pi + \beta) = -sin\beta$,

$tan(\pi + \beta) = tan\beta$ **($tan(\pi + \beta)$ નું મૂલ્ય ત્રીજા ચરણમાં ધન છે)**

હવે, $P(2\pi - \beta)$ ચોથા ચરણમાં છે.

તેથી, $sec(2\pi - \beta) = sec\beta$, $cosec(2\pi - \beta) = -cosec\beta$.

($P(2\pi - \beta)$ ચોથા ચરણમાં હોવાથી $sec(2\pi - \beta) > 0$ અને $cosec(2\pi - \beta) < 0$)

હવે, $sin\left(\frac{38\pi}{3}\right)$ અને $cos\left(\frac{61\pi}{4}\right)$ નાં મૂલ્યો આપણે આ નિયમોના આધારે શોધીએ.

$$sin\left(\frac{38\pi}{3}\right) = sin\left(\frac{36\pi + 2\pi}{3}\right)$$

$$= sin\left(12\pi + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= sin\frac{2\pi}{3}$$ **(12π એ *sine* નું આવર્તમાન છે.)**

$$= sin\left(\frac{3\pi - \pi}{3}\right)$$

$$= sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ **(*sine* નું મૂલ્ય બીજા ચરણમાં ધન છે.)**

$$cos\left(\frac{61\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{60\pi + \pi}{4}\right)$$

$$= cos\left(15\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= cos\left(14\pi + \pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$ **(14π એ *cosine* નું આવર્તમાન છે.)**

$$= -cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$ **(*cosine* નું મૂલ્ય ત્રીજા ચરણમાં ઋણ છે.)**

tan વિધેયનું મુખ્ય આવર્તમાન

આપણે જાણીએ છીએ કે $sin(\pi + \theta) = -sin\theta$, $cos(\pi + \theta) = -cos\theta$. તેથી $tan(\pi + \theta) = tan\theta$.

આમ, π એ *tan* નું એક આવર્તમાન છે. હવે આપણે સાબિત કરીશું કે π એ *tan* નું મુખ્ય આવર્તમાન છે.

ધારો કે *tan* નું મુખ્ય આવર્તમાન p છે.

હવે, $tan(\theta + p) = tan\theta, \forall \theta \in R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$,

$$\theta + p \in R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$$

વિશિષ્ટ કિંમત $\theta = 0$ લેતાં,

$tanp = 0$

$\therefore \quad p = k\pi$

$\therefore \quad p$ નું ન્યૂનતમ ધન મૂલ્ય π છે.

$\therefore \quad tan$ વિધેયનું મુખ્ય આવર્તમાન π છે.

ઉદાહરણ 1 : મૂલ્ય શોધો : (1) $cos120^\circ$ (2) $sin\left(\frac{-17\pi}{4}\right)$ (3) $tan\left(\frac{13\pi}{4}\right)$ (4) $3sec\left(\frac{-7\pi}{4}\right)$

ઉકેલ : (1) $cos120^\circ = cos(90^\circ + 30^\circ) = -sin30^\circ = \frac{-1}{2}$ $\qquad \left(cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -sin\theta\right)$

$\therefore \quad cos120^\circ = \frac{-1}{2}$

(2) $sin\left(\frac{-17\pi}{4}\right) = -sin\left(\frac{17\pi}{4}\right)$ $\qquad (sin(-\theta) = -sin\theta)$

$= -sin\left(\frac{16\pi+\pi}{4}\right)$

$= -sin\left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

$= -sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad$ (4π એ *sine* નું આવર્તમાન છે.)

$\therefore \quad sin\left(\frac{-17\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $tan\left(\frac{13\pi}{4}\right) = tan\left(\frac{12\pi+\pi}{4}\right) = tan\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = tan\frac{\pi}{4} = 1$ $\qquad$ (3π એ *tan* નું આવર્તમાન છે.)

$\therefore \quad tan\left(\frac{13\pi}{4}\right) = 1$

(4) $3sec\left(\frac{-7\pi}{4}\right) = 3sec\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ $\qquad (sec(-\theta) = sec\theta)$

$= 3sec\left(\frac{8\pi-\pi}{4}\right)$

$= 3sec\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$= 3sec\left(\frac{-\pi}{4}\right)$ $\qquad$ (2π એ *sec* નું આવર્તમાન છે.)

$= 3sec\frac{\pi}{4} = 3\sqrt{2}$

$\therefore \quad 3sec\left(\frac{-7\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}$

ઉદાહરણ 2 : મૂલ્ય શોધો : (1) $\frac{sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}{cos(\theta-\pi)} + \frac{tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{cot(3\pi+\theta)} + \frac{cosec(2\pi+\theta)}{sec\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)}$

(2) $sin\frac{10\pi}{3} \cdot cos\frac{11\pi}{6} + cos\frac{2\pi}{3} \cdot sin\frac{5\pi}{6}$

(3) $cos^2\frac{\pi}{8} + cos^2\frac{3\pi}{8} + cos^2\frac{5\pi}{8} + cos^2\frac{7\pi}{8}$

ઉકેલ : (1) $\dfrac{sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}{cos(\theta - \pi)} + \dfrac{tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{cot\,(3\pi + \theta)} + \dfrac{cosec\,(2\pi + \theta)}{sec\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)}$

$$= \frac{-sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{cos(\pi - \theta)} + \frac{-cot\ \theta}{cot\ \theta} + \frac{cosec\ \theta}{-cosec\ \theta}$$

$$= \frac{-cos\ \theta}{-cos\ \theta} + (-1) + (-1) = 1 - 1 - 1 = -1$$

(2) $sin\frac{10\pi}{3} \cdot cos\frac{11\pi}{6} + cos\frac{2\pi}{3} \cdot sin\frac{5\pi}{6}$

$$= sin\left(\frac{9\pi + \pi}{3}\right) \cdot cos\left(\frac{12\pi - \pi}{6}\right) + cos\left(\frac{3\pi - \pi}{3}\right) \cdot sin\left(\frac{6\pi - \pi}{6}\right)$$

$$= sin\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) \cdot cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \cdot sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -sin\frac{\pi}{3} \cdot cos\frac{\pi}{6} + \left(-cos\frac{\pi}{3}\right) \cdot sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{-3}{4} - \frac{1}{4} = -1$$

(3) $cos^2\frac{\pi}{8} + cos^2\frac{3\pi}{8} + cos^2\frac{5\pi}{8} + cos^2\frac{7\pi}{8}$

$$= cos^2\frac{\pi}{8} + cos^2\frac{3\pi}{8} + sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{8}\right) + sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{8}\right)$$

$$= cos^2\frac{\pi}{8} + cos^2\frac{3\pi}{8} + sin^2\left(\frac{-\pi}{8}\right) + sin^2\left(\frac{-3\pi}{8}\right)$$

$$= \left(cos^2\frac{\pi}{8} + sin^2\frac{\pi}{8}\right) + \left(cos^2\frac{3\pi}{8} + sin^2\frac{3\pi}{8}\right) = 1 + 1 = 2$$

ઉદાહરણ 3 : નીચેની વાસ્તવિક સંખ્યા ધન છે કે ઋણ તે નક્કી કરો :

(1) $sin110^\circ + cos110^\circ$ (2) $cosec\frac{17\pi}{12} - sec\frac{17\pi}{12}$

ઉકેલ : (1) $sin110^\circ + cos110^\circ = sin(180^\circ - 70^\circ) + cos(90^\circ + 20^\circ)$

$$= sin70^\circ - sin20^\circ$$

હવે, *sine* પ્રથમ ચરણમાં વધતું વિધેય છે.

$\therefore$ $70 > 20$ હોવાથી $sin70^\circ > sin20^\circ$

$\therefore$ $sin70^\circ - sin20^\circ > 0$

$\therefore$ $sin110^\circ + cos110^\circ$ ધન વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

(2) $cosec\frac{17\pi}{12} - sec\frac{17\pi}{12}$

$$= cosec\left(\frac{12\pi + 5\pi}{12}\right) - sec\left(\frac{18\pi - \pi}{12}\right)$$

$$= cosec\left(\pi + \frac{5\pi}{12}\right) - sec\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)$$

$$= -cosec\frac{5\pi}{12} + cosec\frac{\pi}{12}$$

હવે, *sine* પ્રથમ ચરણમાં વધતું વિધેય છે. તેથી *cosec* ઘટતું વિધેય થશે.

$\frac{\pi}{12} < \frac{5\pi}{12}$

$\therefore \quad cosec\frac{\pi}{12} > cosec\frac{5\pi}{12}$

$\therefore \quad \left(cosec\frac{\pi}{12} - cosec\frac{5\pi}{12}\right) > 0$

$\therefore \quad cosec\frac{17\pi}{12} - sec\frac{17\pi}{12}$ ધન વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

સ્વાધ્યાય 4.1

1. મૂલ્ય મેળવો :

(1) $cos 135^{\circ}$ (2) $tan\left(\frac{-23\pi}{6}\right)$ (3) $cos\left(\frac{-50\pi}{3}\right)$

(4) $sec 690^{\circ}$ (5) $cosec\ \frac{15\pi}{4}$ (6) $cot\left(\frac{-7\pi}{3}\right)$

સાબિત કરો : **(2 થી 11)**

2. $cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) \cdot sec(-\theta) \cdot tan(\pi - \theta) + sec(2\pi + \theta) \cdot sin(\pi + \theta) \cdot cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = 0$

3. $\frac{sin(\pi - \theta)}{sin(\pi + \theta)} \cdot \frac{cosec(\pi + \theta)}{cosec(-\pi + \theta)} \cdot \frac{cosec(2\pi + \theta)}{sin(3\pi - \theta)} = -cosec^2\theta$

4. $\frac{sin(-\theta) \cdot tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \cdot sin(\pi - \theta) \cdot sec\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)}{sin(\pi + \theta) \cdot cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right) \cdot cosec(\pi - \theta) \cdot cot(2\pi - \theta)} = 1$

5. $sin(n + 1)A \cdot cos(n + 2)A - cos(n + 1)A \cdot sin(n + 2)A = -sinA$

6. $sin^2(40^{\circ} + \theta) + sin^2(50^{\circ} - \theta) = 1$

7. $\frac{cot\ 333^{\circ} - cos\ 567^{\circ}}{tan\ 297^{\circ} + sin\ 477^{\circ}} = 1$

8. $\frac{sec^2 129^{\circ} - cosec^2 31^{\circ}}{cosec 39^{\circ} - sec 121^{\circ}} = cosec 39^{\circ} - sec 59^{\circ}$.

9. $cos(A + B + C) = cosA\ cosB\ cosC - sinA \cdot sinB \cdot cosC - sinA\ cosB\ sinC - cosA\ sinB\ sinC$

10. $sin\alpha \cdot sin(\beta - \gamma) + sin\beta \cdot sin(\gamma - \alpha) + sin\gamma \cdot sin(\alpha - \beta) = 0$

11. $(sin\alpha - cos\alpha) \cdot (sin\beta + cos\beta) = sin(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta)$

12. ΔABC માટે, સાબિત કરો :

(1) $sin(B + C) = sinA$ (2) $cos(A + B) = -cosC$

(3) $sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = cos\frac{A}{2}$ (4) $tan(A - B - C) = tan2A$

(5) $\frac{sin(B+C) \cdot cos(B+C) \cdot sin\frac{A}{2} \cdot cos\frac{A}{2}}{sin\left(\frac{B+C}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{B+C}{2}\right) \cdot sin(\pi + A) \cdot cos(2\pi - A)} = 1$

(6) જો $cosA = cosB\ cosC$, તો સાબિત કરો કે $2cotB\ cotC = 1$.

13. બહિર્મુખ ચતુષ્કોણ ABCD માટે સાબિત કરો :

(1) $sin(A + B) + sin(C + D) = sin(B + C) + sin(A + D)$

(2) $cot(A + B + C) + cotD = 0$

14. ચક્રીય ચતુષ્કોણ ABCD માટે સાબિત કરો :

(1) $cosA + cosB + cosC + cosD = 0$

(2) $sinA + sinB = sinC + sinD$

15. જો $\alpha - \beta = \frac{\pi}{6}$, તો $2sin\alpha - cos\beta = \sqrt{3}sin\beta$ સાબિત કરો.

16. જો $\theta = \frac{19\pi}{4}$, તો $cos^2\theta - sin^2\theta - 2tan\theta + sec^2\theta - 4cot^2\theta = 0$ સાબિત કરો.

17. કિંમત શોધો : (1) $sin^2\frac{\pi}{12} + sin^2\frac{3\pi}{12} + sin^2\frac{5\pi}{12} + sin^2\frac{7\pi}{12} + sin^2\frac{9\pi}{12} + sin^2\frac{11\pi}{12}$

(2) $sinx + sin(\pi + x) + sin(2\pi + x) + ... + 2n$ પદ

(3) $cosx + cos(\pi - x) + cos(2\pi - x) + cos(3\pi - x) + ... + (2n + 1)$ પદ, જ્યાં $x = \frac{\pi}{3}$.

(4) $cot\frac{\pi}{20} \cdot cot\frac{3\pi}{20} \cdot cot\frac{5\pi}{20} \cdot cot\frac{7\pi}{20} \cdot cot\frac{9\pi}{20}$

18. નીચેની સંખ્યાઓ ધન છે કે ઋણ તે નક્કી કરો :

(1) $sin155° + cos155°$ (2) $tan\frac{6\pi}{7} + cot\left(\frac{-6\pi}{7}\right)$.

(3) $tan111° - cot111°$ (4) $cosec\frac{7\pi}{12} + sec\frac{7\pi}{12}$.

19. જો $tan\theta = \frac{-3}{4}$ અને $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, તો $\dfrac{sin(\pi - \theta) + tan(\pi + \theta) + tan(4\pi - \theta)}{sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) + cos\left(\frac{5\pi}{2} - \theta\right)}$ નું મૂલ્ય શોધો.

20. પ્રત્યેક $n \in N$ માટે, સાબિત કરો કે $sin(n\pi + (-1)^n\theta) = sin\theta$.

*

4.4 કેટલાંક અગત્યનાં પરિણામો

(1) આપણે આગળ $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ માટે ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં મૂલ્યો મેળવ્યા. હવે આપણે $sin(\alpha - \beta)$ અને $cos(\alpha - \beta)$ના ઉપયોગથી $sin\frac{\pi}{12}$ અને $cos\frac{\pi}{12}$ તથા અન્ય મૂલ્યો મેળવીશું.

$\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}$ અથવા $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{6}$ લેતાં, $\alpha - \beta = \frac{\pi}{12}$

$$\therefore \quad sin\frac{\pi}{12} = sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= sin\frac{\pi}{4}\, cos\frac{\pi}{6} - cos\frac{\pi}{4}\, sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \quad sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

આ જ રીતે, $cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ મેળવી શકાય.

વળી, $sin\frac{5\pi}{12} = sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,

$cos\frac{5\pi}{12} = cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(2) (i) $sin(\alpha + \beta) \cdot sin(\alpha - \beta) = sin^2\alpha - sin^2\beta = cos^2\beta - cos^2\alpha$

(ii) $cos(\alpha + \beta) \cdot cos(\alpha - \beta) = cos^2\alpha - sin^2\beta = cos^2\beta - sin^2\alpha$

(i) $sin(\alpha + \beta) \cdot sin(\alpha - \beta) = (sin\alpha\ cos\beta + cos\alpha\ sin\beta)(sin\alpha\ cos\beta - cos\alpha\ sin\beta)$

$= sin^2\alpha \cdot cos^2\beta - cos^2\alpha \cdot sin^2\beta$

$= sin^2\alpha\ (1 - sin^2\beta) - (1 - sin^2\alpha) \cdot sin^2\beta$

$= sin^2\alpha - sin^2\alpha\ sin^2\beta - sin^2\beta + sin^2\alpha\ sin^2\beta$

$= sin^2\alpha - sin^2\beta$

$\therefore\ sin(\alpha + \beta) \cdot sin(\alpha - \beta) = sin^2\alpha - sin^2\beta$

હવે, $sin(\alpha + \beta) \cdot sin(\alpha - \beta) = sin^2\alpha - sin^2\beta$

$= (1 - cos^2\alpha) - (1 - cos^2\beta)$

$= cos^2\beta - cos^2\alpha$

$\therefore\ sin(\alpha + \beta) \cdot sin(\alpha - \beta) = cos^2\beta - cos^2\alpha$

આ જ રીતે સાબિત કરી શકીએ કે,

$cos(\alpha + \beta) \cdot cos(\alpha - \beta) = cos^2\alpha - sin^2\beta = cos^2\beta - sin^2\alpha$

4.5 $f(\alpha) = acos\alpha + bsin\alpha$, $\alpha \in R$ નો વિસ્તાર ગણ, $a, b \in R$ તથા $a^2 + b^2 \neq 0$

અહીં $a^2 + b^2 \neq 0$ હોવાથી આપણે ત્રણ વિકલ્પો લઈશું :

(1) $a = 0, b \neq 0$ (2) $a \neq 0, b = 0$ (3) $a \neq 0$ તથા $b \neq 0$

વિકલ્પ (1) : $a = 0, b \neq 0$

અહીં, $f(\alpha) = bsin\alpha$. વળી $sin\alpha$ વિધેયનો વિસ્તાર $[-1, 1]$ છે.

$-1 \leq sin\alpha \leq 1 \Leftrightarrow -b \leq bsin\alpha \leq b$ $(b > 0)$

$\therefore$ $b > 0$ માટે $bsin\alpha$ નો વિસ્તાર $[-b, b] = [-|b|, |b|]$ છે. $(|b| = b)$

હવે, $b < 0$ હોય, તો

$-1 \leq sin\alpha \leq 1 \Leftrightarrow -b \geq bsin\alpha \geq b \Leftrightarrow b \leq bsin\alpha \leq -b$

$\therefore$ $b < 0$ માટે તેનો વિસ્તાર $[b, -b] = [-|b|, |b|]$ છે. $(|b| = -b)$

$\therefore$ $f(\alpha) = bsin\alpha$ નો વિસ્તાર $[-|b|, |b|]$ થાય.

વિકલ્પ (2) : $a \neq 0, b = 0$

અહીં, $f(\alpha) = acos\alpha$ થાય અને તેનો વિસ્તાર આગળની જેમ $[-|a|, |a|]$ થાય.

વિકલ્પ (3) : $a \neq 0, b \neq 0$

આ વિકલ્પમાં આપણે $acos\alpha + bsin\alpha$ ને $r\ cos(\theta - \alpha)$ સ્વરૂપમાં પરિવર્તિત કરીશું.

$r\ cos(\theta - \alpha) = r\ cos\theta\ cos\alpha + r\ sin\theta\ sin\alpha$, હોવાથી આપણે r અને θ એવા શોધીશું કે જેથી, $a = r\ cos\theta$, $b = r\ sin\theta$. $(r > 0)$

$\therefore \quad a^2 + b^2 = r^2$ તથા $tan\theta = \frac{b}{a}$ થવા જોઈએ.

$\therefore \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}$ તથા *tan* વિધેયનો વિસ્તાર R હોવાથી વાસ્તવિક સંખ્યા $\frac{b}{a}$ ને અનુરૂપ

$\theta \in R - \left\{(2n - 1)\frac{\pi}{2} \mid n \in Z\right\}$ મળશે જ કે જેથી $tan\theta = \frac{b}{a}$ થાય.

તેથી આપેલી a અને b ની શૂન્યેતર વાસ્તવિક કિંમતો માટે આપણે $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ અને θ એવા લઈએ કે જેથી $tan\theta = \frac{b}{a}$ થાય. આપણે θ પસંદ કરી શકીએ કે જેથી $rcos\theta = a$, $rsin\theta = b$.

હવે, $f(\alpha) = acos\alpha + bsin\alpha$

$= rcos\theta\ cos\alpha + r\ sin\theta\ sin\alpha$

$= r\ (cos\theta\ cos\alpha + sin\theta\ sin\alpha)$

$= r\ cos(\theta - \alpha)$

$f(\alpha) = r\ cos(\theta - \alpha)$

$-1 \le cos(\theta - \alpha) \le 1 \Leftrightarrow -r \le r\ cos(\theta - \alpha) \le r$ **$(r > 0)$**

$\therefore \quad f(\alpha)$ નો વિસ્તાર $[-r, r]$ છે.

તેથી $f(\alpha)$ નો વિસ્તાર $\left[-\sqrt{a^2 + b^2}, \sqrt{a^2 + b^2}\right]$ છે.

આમ, $f(\alpha)$ નું મહત્તમ મૂલ્ય $\sqrt{a^2 + b^2}$ અને ન્યૂનતમ મૂલ્ય $-\sqrt{a^2 + b^2}$ થશે.

4.6 *tan* અને *cot* વિધેયનાં સરવાળા - સૂત્રો

(1) જો α, β અને $\alpha + \beta \in R - \left\{(2k - 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$, તો

$$tan\ (\alpha + \beta) = \frac{tan\alpha + tan\beta}{1 - tan\alpha \cdot tan\beta}$$

અને જો α, β અને $\alpha - \beta \in R - \left\{(2k - 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$, તો

$$tan\ (\alpha - \beta) = \frac{tan\alpha - tan\beta}{1 + tan\alpha \cdot tan\beta}$$

સાબિતી : $tan\ (\alpha + \beta) = \frac{sin(\alpha + \beta)}{cos(\alpha + \beta)} = \frac{sin\alpha\ cos\beta + cos\alpha\ sin\beta}{cos\alpha\ cos\beta - sin\alpha\ sin\beta}$ $\left(\alpha + \beta \in R - \left\{(2k - 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}\right)$

હવે, $\alpha, \beta \in R - \left\{(2k - 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$, $cos\alpha \ne 0$, $cos\beta \ne 0$

તેથી અંશ અને છેદને $cos\alpha \cdot cos\beta$, વડે ભાગતાં,

$$tan\ (\alpha + \beta) = \frac{tan\alpha + tan\beta}{1 - tan\alpha \cdot tan\beta}.$$

આ જ રીતે, $tan(\alpha - \beta) = \frac{tan\alpha - tan\beta}{1 + tan\alpha \cdot tan\beta}$ મેળવી શકાય.

(2) જો α, β અને $\alpha + \beta \in R - \{k\pi \mid k \in Z\}$, તો

$$cot\,(\alpha + \beta) = \frac{cot\,\alpha \cdot cot\,\beta - 1}{cot\,\beta + cot\,\alpha}$$

અને જો α, β અને $\alpha - \beta \in R - \{k\pi \mid k \in Z\}$, તો

$$cot\,(\alpha - \beta) = \frac{cot\,\alpha \cdot cot\,\beta + 1}{cot\,\beta - cot\,\alpha}$$

સાબિતી : $cot\,(\alpha + \beta) = \dfrac{cos(\alpha + \beta)}{sin(\alpha + \beta)} = \dfrac{cos\,\alpha \cdot cos\,\beta - sin\,\alpha \cdot sin\,\beta}{sin\,\alpha \cdot cos\,\beta + cos\,\alpha \cdot sin\,\beta}$ $\quad (\alpha + \beta \in R - \{k\pi \mid k \in Z\})$

હવે, α, $\beta \in R - \{k\pi \mid k \in Z\}$, $sin\alpha \neq 0$, $sin\beta \neq 0$

તેથી અંશ અને છેદને $sin\alpha \cdot sin\beta$ વડે ભાગતાં,

$$cot\,(\alpha + \beta) = \frac{cot\,\alpha \cdot cot\,\beta - 1}{cot\,\beta + cot\,\alpha}.$$

આ જ રીતે, $cot(\alpha - \beta) = \dfrac{cot\,\alpha \cdot cot\,\beta + 1}{cot\,\beta - cot\,\alpha}$ મેળવી શકાય.

4.7 $tan\,\frac{\pi}{12}$ અને $cot\,\frac{\pi}{12}$ નાં મૂલ્યો

અહીં, $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ અથવા $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$

(1) $tan\frac{\pi}{12} = tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{tan\frac{\pi}{3} - tan\frac{\pi}{4}}{1 + tan\frac{\pi}{3}\,tan\frac{\pi}{4}}$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1}$$

$$= \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

$\therefore$ $tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$

(2) $cot\frac{\pi}{12} = cot\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{cot\frac{\pi}{3}\,cot\frac{\pi}{4} + 1}{cot\frac{\pi}{4} - cot\frac{\pi}{3}}$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1 + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$= \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

$cot\frac{\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$

હવે, $tan\frac{5\pi}{12} = tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = cot\frac{\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$ અને

$cot\frac{5\pi}{12} = cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

ઉદાહરણ 4 : જો $sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ અને $tan\beta = \frac{-12}{5}$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$, તો $P(\alpha + \beta)$ અને $P(\alpha - \beta)$નું ચરણ નક્કી કરો.

ઉકેલ : અહીં, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ અને $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$ પરથી સરવાળો કરતાં $0 < \alpha + \beta < \pi$ મળે.

$\therefore$ $P(\alpha + \beta)$ પ્રથમ ચરણમાં અથવા બીજા ચરણમાં છે. *cosine* વિધેયનું મૂલ્ય પ્રથમ ચરણમાં ધન અને બીજા ચરણમાં ઋણ છે અને *sine* વિધેયનું મૂલ્ય પ્રથમ અને બીજા ચરણમાં ધન છે. તેથી $P(\alpha + \beta)$ નું ચરણ નક્કી કરવા $cos(\alpha + \beta)$ નું મૂલ્ય શોધવું જોઈએ.

$\therefore$ $cos\alpha = -\sqrt{1 - sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{-3}{5}$ $\quad\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$

$tan\beta = \frac{-12}{5}$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$

$\therefore$ $sec\beta = \sqrt{1 + tan^2\beta} = \sqrt{1 + \frac{144}{25}} = \frac{13}{5}$ $\quad\left(-\frac{\pi}{2} < \beta < 0\right)$

$\therefore$ $cos\beta = \frac{5}{13}$, $sin\beta = tan\beta \cdot cos\beta = \frac{-12}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{-12}{13}$

$$\begin{aligned} cos(\alpha + \beta) &= cos\alpha \cdot cos\beta - sin\alpha \cdot sin\beta \\ &= \left(\frac{-3}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) - \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{-12}{13}\right) \\ &= \frac{-15}{65} + \frac{48}{65} = \frac{33}{65} \end{aligned}$$

$\therefore$ $cos(\alpha + \beta) > 0$

$\therefore$ $P(\alpha + \beta)$ પ્રથમ ચરણમાં છે.

ચરણ નક્કી કરવાની બીજી રીત :

$P(\alpha + \beta)$નું ચરણ નક્કી કરવાની બીજી રીત જોઈએ :

$$\begin{aligned} sin(\alpha + \beta) &= sin\alpha\ cos\beta + cos\alpha\ sin\beta \\ &= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) + \left(\frac{-3}{5}\right)\left(\frac{-12}{13}\right) \\ &= \frac{20 + 36}{65} = \frac{56}{65} > 0 \end{aligned}$$

$cos(\alpha + \beta) = cos\alpha\ cos\beta - sin\alpha\ sin\beta = \frac{33}{65} > 0$ $\quad$ (પ્રથમ રીત)

હવે, $sin(\alpha + \beta) > 0$ અને $cos(\alpha + \beta) > 0$ હોવાથી $P(\alpha + \beta)$ પ્રથમ ચરણમાં છે.

હવે, $P(\alpha - \beta)$ માટે, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ અને $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$

$\therefore$ $\frac{\pi}{2} > -\beta > 0$

$\therefore$ $0 < -\beta < \frac{\pi}{2}$ તથા $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ $\quad$ (i)

$\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{3\pi}{2}$ $\quad$ ((i) પરથી સરવાળો કરતાં)

$\therefore$ P($\alpha - \beta$) બીજા અથવા ત્રીજા ચરણમાં છે. *sine* વિધેયનું મૂલ્ય બીજા ચરણમાં ધન અને ત્રીજા ચરણમાં ઋણ છે અને *cosine* વિધેયનું મૂલ્ય બીજા અને ત્રીજા બંને ચરણમાં ઋણ છે. તેથી P($\alpha - \beta$) નું ચરણ નક્કી કરવા આપણે $sin(\alpha - \beta)$ શોધવું પડશે.

$$sin(\alpha - \beta) = sin\alpha\ cos\beta - cos\alpha\ sin\beta$$
$$= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) - \left(\frac{-3}{5}\right)\left(\frac{-12}{13}\right)$$
$$= \frac{20-36}{65} = \frac{-16}{65}$$

$\therefore$ $sin(\alpha - \beta) < 0$

$\therefore$ P($\alpha - \beta$) ત્રીજા ચરણમાં છે.

ઉદાહરણ 5 : $sin\theta + cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ નો વિસ્તાર મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે $f(\theta) = sin\theta + cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$.

$$= sin\theta + cos\theta\ cos\frac{\pi}{3} - sin\theta\ sin\frac{\pi}{3}$$
$$= sin\theta + \frac{1}{2}cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}sin\theta$$
$$f(\theta) = \frac{1}{2}cos\theta + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) sin\theta = acos\theta + bsin\theta$$

$f(\theta)$ ને $acos\theta + bsin\theta$ સાથે સરખાવતાં,

$$a = \frac{1}{2},\ b = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

હવે, $r^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{4} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + 1 - \sqrt{3} + \frac{3}{4}$

$$r^2 = 2 - \sqrt{3}$$

$\therefore$ $r = \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{3}+1}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}}$

$\therefore$ $r = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ $f(\theta)$ નો વિસ્તાર $[-r, r] = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ છે.

ઉદાહરણ 6 : $sin110^\circ + cos110^\circ$ ધન છે કે ઋણ તે નક્કી કરો.

ઉકેલ : ધારો કે $f(\theta) = sin110^\circ + cos110^\circ$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}sin110^\circ + \frac{1}{\sqrt{2}}cos110^\circ\right)$$
$$= \sqrt{2}(cos45^\circ\ sin110^\circ + sin45^\circ\ cos110^\circ)$$
$$= \sqrt{2}\ sin(110^\circ + 45^\circ)$$
$$= \sqrt{2}\ sin155^\circ > 0 \qquad (90 < 155 < 180)$$

$\therefore$ $sin110^\circ + cos110^\circ$ ધન સંખ્યા છે.

નોંધ : આપણે આ પ્રકરણમાં ગણેલ ઉદાહરણ 3 આ રીતે પણ કરી શકાય.

ઉદાહરણ 7 : $\sqrt{3}sin\alpha - cos\alpha$ ને $rsin(\alpha - \theta)$ સ્વરૂપે દર્શાવી r અને θ શોધો.

જ્યાં $r > 0$, $0 \le \theta < 2\pi$.

ઉકેલ : ધારો કે $f(\alpha) = \sqrt{3}sin\alpha - cos\alpha$

$\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$ વડે ગુણતાં અને ભાગતાં,

$f(\alpha) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sin\alpha - \frac{1}{2}cos\alpha\right)$

$= 2\left(sin\alpha\, cos\frac{\pi}{6} - cos\alpha\, sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= 2sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$

હવે, $rsin(\alpha - \theta)$ સાથે સરખાવતાં,

$r = 2$, $\theta = \frac{\pi}{6}$ મળે. અહીં $\theta = \frac{\pi}{6}$ એ $0 \le \theta < 2\pi$ નું સમાધાન કરે છે.

ઉદાહરણ 8 : જો $\sqrt{3}cos\alpha - sin\alpha = rcos(\alpha - \theta)$, તો r અને θ શોધો. જેથી $(r > 0)$

(i) $\frac{-\pi}{2} < \theta < 0$ (ii) $0 < \theta < 2\pi$

ઉકેલ : ધારો કે $f(\alpha) = \sqrt{3}cos\alpha - sin\alpha$

$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ વડે ગુણતાં અને ભાગતાં,

$f(\alpha) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}cos\alpha - \frac{1}{2}sin\alpha\right)$

$= 2\left(cos\frac{\pi}{6}\, cos\alpha - sin\frac{\pi}{6} sin\alpha\right)$

$= 2cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$

$= 2cos\left(\alpha - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

હવે, $rcos(\alpha - \theta)$ સાથે સરખાવતાં,

$\therefore$ $r = 2$ અને $\theta = \frac{-\pi}{6}$ મળે, જે $\frac{-\pi}{2} < \theta < 0$ નું સમાધાન કરે છે.

$2cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = 2cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6} - 2\pi\right) = 2cos\left(\alpha - \frac{11\pi}{6}\right)$

$\therefore$ $\theta = \frac{11\pi}{6}$ લેતાં, θ એ $0 < \theta < 2\pi$ નું સમાધાન કરે છે.

ઉદાહરણ 9 : સાબિત કરો કે, $sin^2A = cos^2(A - B) + cos^2B - 2cos(A - B)cosA\ cosB$.

ઉકેલ : જ.બા. $= cos^2(A - B) + cos^2B - 2cos(A - B)cosA\ cosB$.

$= cos^2B + cos^2(A - B) - 2cos(A - B)\ cosA\ cosB$

$= cos^2B + cos(A - B)\ [cos(A - B) - 2cosA\ cosB]$

$= cos^2B + cos(A - B)\ [cosA\ cosB + sinA\ sinB - 2cosA\ cosB]$

$= cos^2B + cos(A - B)\ (sinA\ sinB - cosA\ cosB)$

$= cos^2B - cos(A - B)\ cos(A + B)$

$= cos^2B - (cos^2A - sin^2B)$

$= cos^2B + sin^2B - cos^2A = 1 - cos^2A = sin^2A =$ ડા.બા.

સ્વાધ્યાય 4.2

1. કિંમત શોધો :

(1) $sin^2 37\frac{1}{2}^{\circ} - sin^2 7\frac{1}{2}^{\circ}$ (2) $sin^2 52\frac{1}{2}^{\circ} - cos^2 7\frac{1}{2}^{\circ}$ (3) $cos^2 37\frac{1}{2}^{\circ} - sin^2 37\frac{1}{2}^{\circ}$

2. સાબિત કરો : $sin^2 A + sin^2 B + cos^2(A + B) + 2sinA\, sinB\, cos(A + B) = 1.$

3. (1) જો $cosA = \frac{1}{7}$, $cosB = \frac{13}{14}$ અને $0 < A, B < \frac{\pi}{2}$, તો સાબિત કરો કે, $A - B = \frac{\pi}{3}$

(2) જો $sinA = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $cosB = \frac{3}{\sqrt{10}}$ અને $0 < A, B < \frac{\pi}{2}$, તો સાબિત કરો કે, $A + B = \frac{\pi}{4}$

4. (1) જો $cos\alpha = \frac{4}{5}$, $cos\beta = \frac{12}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha, \beta < 2\pi$, તો $P(\alpha - \beta)$ નું ચરણ નક્કી કરો.

(2) જો $cos\alpha = \frac{-5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ અને $tan\beta = \frac{4}{3}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$, તો $P(\alpha + \beta)$નું ચરણ નક્કી કરો.

5. જો $cot\alpha = \frac{1}{2}$, $sec\beta = \frac{-5}{3}$, જ્યાં $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ અને $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ તો $tan(\alpha + \beta)$ નું મૂલ્ય શોધો અને $P(\alpha + \beta)$ નું ચરણ નક્કી કરો.

6. નીચેનાનો વિસ્તાર મેળવો :

(1) $7sin\theta + 24cos\theta$ (2) $cos\theta + sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) + 1.$

7. સાબિત કરો કે $5cos\theta + 3cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + 7$ નું મૂલ્ય $[0, 14]$ માં છે.

8. $\sqrt{3}sin\theta + cos\theta$ ને $rcos(\theta - \alpha)$ સ્વરૂપે દર્શાવો. જ્યાં $r > 0$ અને $0 < \alpha < 2\pi$.

9. જો $\frac{-\pi}{2} < \theta < 0$ અને $cos\alpha - \sqrt{3}sin\alpha = rcos(\alpha - \theta)$, તો r અને θ શોધો.

10. સાબિત કરો :

(1) $tan\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{3}cos\,\alpha - sin\,\alpha}{cos\,\alpha + \sqrt{3}\,sin\,\alpha}$ (2) $tan39^{\circ} = \frac{\sqrt{3}cos\,21^{\circ} - sin\,21^{\circ}}{cos\,21^{\circ} + \sqrt{3}\,sin\,21^{\circ}}$

(3) $tan3A \cdot tan2A \cdot tanA = tan3A - tan2A - tanA$

(4) $cotA \cdot cot2A - cot2A \cdot cot3A - cot3A \cdot cotA = 1$

(5) $tan25^{\circ} \cdot tan15^{\circ} + tan15^{\circ} \cdot tan50^{\circ} + tan25^{\circ} \cdot tan50^{\circ} = 1$

11. જો $A + B = \frac{\pi}{4}$, તો, સાબિત કરો કે

(1) $(1 + tanA)(1 + tanB) = 2$

(2) $(cotA - 1)(cotB - 1) = 2$

12. (1) સાબિત કરો કે $A + B = \frac{\pi}{2} \Rightarrow tanA = tanB + 2tan(A - B)$

(2) સાબિત કરો કે $tan65^{\circ} = tan25^{\circ} + 2tan40^{\circ}$

13. જો $A + B + C = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$, તો સાબિત કરો કે,

(1) $tanA\ tanB + tanB\ tanC + tanC\ tanA = 1$

(2) $cotA + cotB + cotC = cotA\ cotB\ cotC$

14. જો A + B + C = $k\pi$, $k \in Z$, તો સાબિત કરો કે,

(1) $tanA + tanB + tanC = tanA\ tanB\ tanC$

(2) $cotB \cdot cotC + cotC \cdot cotA + cotA \cdot cotB = 1$

15. જો $tanA = 3$, $tanB = \frac{1}{2}$, $0 < A, B < \frac{\pi}{2}$, તો સાબિત કરો કે, $A - B = \frac{\pi}{4}$.

16. જો ΔABC માં, $tanB = 2$ અને $tanC = 3$, તો સાબિત કરો કે, $tanA = 1$.

17. જો $0 < A, B < \frac{\pi}{2}$, $tanA = \frac{a}{a+1}$ અને $tanB = \frac{1}{2a+1}$, તો સાબિત કરો કે, $A + B = \frac{\pi}{4}$.

18. જો $\alpha + \beta = \theta$, $\alpha - \beta = \phi$ અને $\frac{tan\,\alpha}{tan\,\beta} = \frac{x}{y}$, તો સાબિત કરો કે, $\frac{sin\,\theta}{sin\,\phi} = \frac{x+y}{x-y}$.

19. જો $\frac{tan\,(A-B)}{tan\,A} + \frac{sin^2C}{sin^2A} = 1$, તો સાબિત કરો કે, $tanA \cdot tanB = tan^2C$.

20. જો $tan(A + B) = 3$ અને $tan(A - B) = 2$, તો $tan2A$ અને $tan2B$ નાં મૂલ્ય શોધો.

21. જો $tan\beta = \frac{n sin\alpha\, cos\alpha}{1 - n sin^2\alpha}$, તો સાબિત કરો કે $tan(\alpha - \beta) = (1 - n)\ tan\alpha$.

*

4.8 ગુણાકારનું સરવાળા અથવા તફાવતના સ્વરૂપમાં નિરૂપણ

આપણે $\alpha, \beta \in R$ માટે નીચેનાં સૂત્રો તારવ્યાં છે :

$sin(\alpha + \beta) = sin\alpha\ cos\beta + cos\alpha\ sin\beta$ **(i)**

$sin(\alpha - \beta) = sin\alpha\ cos\beta - cos\alpha\ sin\beta$ **(ii)**

$cos(\alpha + \beta) = cos\alpha\ cos\beta - sin\alpha\ sin\beta$ **(iii)**

$cos(\alpha - \beta) = cos\alpha\ cos\beta + sin\alpha\ sin\beta$ **(iv)**

સૂત્રો (i) અને (ii)નો સરવાળો અને બાદબાકી કરતાં,

$sin(\alpha + \beta) + sin(\alpha - \beta) = 2sin\alpha\ cos\beta$

$sin(\alpha + \beta) - sin(\alpha - \beta) = 2cos\alpha\ sin\beta$

એટલે કે,

$2sin\alpha\ cos\beta = sin(\alpha + \beta) + sin(\alpha - \beta)$ **(v)**

$2cos\alpha\ sin\beta = sin(\alpha + \beta) - sin(\alpha - \beta)$ **(vi)**

તે જ પ્રમાણે, સૂત્રો (iii) અને (iv) નો સરવાળો અને બાદબાકી કરતાં,

$cos(\alpha + \beta) + cos(\alpha - \beta) = 2cos\alpha\ cos\beta$

$cos(\alpha + \beta) - cos(\alpha - \beta) = -2sin\alpha\ sin\beta$

એટલે કે,

$2cos\alpha\ cos\beta = cos(\alpha + \beta) + cos(\alpha - \beta)$ **(vii)**

$2sin\alpha\ sin\beta = cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta)$ **(viii)**

આ સૂત્રો (v), (vi), (vii) અને (viii) માં ડાબી બાજુનાં પરિણામો ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં મૂલ્યોના ગુણાકાર સ્વરૂપમાં છે, જ્યારે જમણી બાજુનાં પદ બે સંખ્યાઓના સરવાળા અને તફાવત સ્વરૂપે ચલ $\alpha + \beta$ અથવા $\alpha - \beta$ હોય તેવાં ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં મૂલ્ય છે. આથી બે ત્રિકોણમિતીય વિધેયોના ગુણાકારનું સરવાળા-બાદબાકીના સ્વરૂપમાં નિરૂપણ કરવું સરળ બનશે.

ઉદાહરણ તરીકે $2sin3\theta\ cos5\theta = sin(3\theta + 5\theta) + sin(3\theta - 5\theta)$

$= sin8\theta + sin(-2\theta)$

$= sin8\theta - sin2\theta$ $\quad (sin(-\theta) = -sin\theta)$

હવે, આમાં જ જો મોટા માપનો ખૂણો પહેલા લેવામાં આવે તો ગણતરી સરળ બનશે :

$$2cos3\theta \cdot sin5\theta = 2sin5\theta \cdot cos3\theta = sin(5\theta + 3\theta) + sin(5\theta - 3\theta)$$
$$= sin8\theta + sin2\theta$$

ઉદાહરણ 11 : નીચેનાને સરવાળા કે તફાવત સ્વરૂપમાં દર્શાવો :

(1) $2sin5\theta\ cos\theta$ (2) $2cos\frac{5\theta}{2}\ sin\frac{3\theta}{2}$ (3) $2sin3\theta\ sin5\theta$ (4) $sin^2\theta$ (5) $2cos5\theta\ cos\frac{\theta}{2}$

ઉકેલ : (1) $2sin5\theta\ cos\theta = sin(5\theta + \theta) + sin(5\theta - \theta) = sin6\theta + sin4\theta$

(2) $2cos\frac{5\theta}{2}\ sin\frac{3\theta}{2} = sin\left(\frac{5\theta}{2} + \frac{3\theta}{2}\right) - sin\left(\frac{5\theta}{2} - \frac{3\theta}{2}\right) = sin4\theta - sin\theta$

(3) $2sin3\theta\ sin5\theta = 2sin5\theta\ sin3\theta = cos(5\theta - 3\theta) - cos(5\theta + 3\theta)$

$= cos2\theta - cos8\theta$

(4) $sin^2\theta = sin\theta\ sin\theta = \frac{1}{2}[2sin\theta\ sin\theta] = \frac{1}{2}\left[cos(\theta - \theta) - cos(\theta + \theta)\right]$

$= \frac{1}{2}[cos0 - cos2\theta] = \frac{1}{2}[1 - cos2\theta]$

(5) $2cos5\theta\ cos\frac{\theta}{2} = cos\left(5\theta + \frac{\theta}{2}\right) + cos\left(5\theta - \frac{\theta}{2}\right) = cos\frac{11\theta}{2} + cos\frac{9\theta}{2}$

ઉદાહરણ 12 : સાબિત કરો કે, $sin20^\circ \cdot sin40^\circ \cdot sin60^\circ \cdot sin80^\circ = \frac{3}{16}$

ઉકેલ : ડા.બા. $= sin20^\circ \cdot sin40^\circ \cdot sin60^\circ \cdot sin80^\circ$

$= sin60^\circ \cdot (sin20^\circ \cdot sin40^\circ) \cdot sin80^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}(2sin40^\circ \cdot sin20^\circ) \cdot sin80^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}[cos(40^\circ - 20^\circ) - cos(40^\circ + 20^\circ)]\ sin80^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}[cos(20^\circ) - cos60^\circ]\ sin80^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(cos20^\circ - \frac{1}{2}\right) sin80^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{8}(2sin80^\circ\ cos20^\circ - sin80^\circ)$

$= \frac{\sqrt{3}}{8}[sin(80^\circ + 20^\circ) + sin(80^\circ - 20^\circ) - sin80^\circ]$

$= \frac{\sqrt{3}}{8}[sin100^\circ + sin60^\circ - sin80^\circ]$

$= \frac{\sqrt{3}}{8}\left[sin(180^\circ - 80^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2} - sin80^\circ\right]$

$= \frac{\sqrt{3}}{8}\left(sin80^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} - sin80^\circ\right)$

$= \frac{3}{16}$ = જ.બા.

ઉદાહરણ 13 : જો $A + B = 90^\circ$, તો $sinA \cdot sinB$ નાં મહત્તમ અને ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $y = sinA \cdot sinB = sinA\ sin(90^\circ - A) = sinA\ cosA$

હવે, $y = \frac{1}{2}(2sinA \cdot cosA) = \frac{1}{2}[sin(A + A) - sin(A - A)]$

$= \frac{1}{2}sin2A$ $\quad$ $(sin0 = 0)$

હવે, $-1 \le sin2A \le 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{2} \le \frac{1}{2}sin2A \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-1}{2} \le y \le \frac{1}{2}$

આમ, $sinA\ sinB$ ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમતો અનુક્રમે $\frac{1}{2}$ અને $\frac{-1}{2}$ છે.

સ્વાધ્યાય 4.3

1. નીચેનાને સરવાળા કે તફાવત સ્વરૂપમાં દર્શાવો :

(1) $2sin7\theta \cdot cos3\theta$ (2) $2sin\frac{\theta}{2} \cdot cos\frac{5\theta}{2}$ (3) $2cos5\theta \cdot sin3\theta$

(4) $2cos\frac{5\theta}{2} \cdot sin\frac{7\theta}{2}$ (5) $2cos11\theta \cdot cos3\theta$ (6) $2cos\frac{5\theta}{2} \cdot cos\frac{3\theta}{2}$

(7) $sin9\theta \cdot sin11\theta$ (8) $2sin\frac{7\theta}{2} \cdot sin\frac{9\theta}{2}$ (9) $2sin\theta \cdot cos\theta$

2. કિંમત શોધો :

(1) $2sin\frac{5\pi}{12} \cdot sin\frac{\pi}{12}$ (2) $2sin\frac{5\pi}{12} \cdot cos\frac{7\pi}{12}$ (3) $2cos\frac{\pi}{12} \cdot sin\frac{5\pi}{12}$

(4) $2cos\frac{5\pi}{12} \cdot cos\frac{7\pi}{12}$ (5) $8cos15^\circ \cdot cos45^\circ \cdot cos75^\circ$ (6) $8sin10^\circ \cdot sin50^\circ \cdot sin70^\circ$

3. સાબિત કરો :

(1) $sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) = \frac{1}{2}cos2\theta$

(2) $sin\theta \cdot sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right) \cdot sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right) = \frac{1}{4}sin3\theta$

(3) $2cos\frac{\pi}{13} \cdot cos\frac{9\pi}{13} + cos\frac{3\pi}{13} + cos\frac{5\pi}{13} = 0$

(4) $cos20^\circ \cdot cos40^\circ \cdot cos60^\circ \cdot cos80^\circ = \frac{1}{16}$

(5) $4cos12^\circ \cdot cos48^\circ \cdot cos72^\circ = cos36^\circ$

4. $4cos\theta \cdot cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right) cos\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right) = cos3\theta$ સાબિત કરો તથા તે પરથી

$cos6^\circ\ cos42^\circ\ cos66^\circ\ cos78^\circ = \frac{1}{16}$ તારવો.

5. $\frac{1}{2sin\,10^\circ} - 2sin70^\circ$ ની કિંમત શોધો.

6. સાબિત કરો કે, $cos\frac{2\pi}{7} + cos\frac{4\pi}{7} + cos\frac{6\pi}{7} = \frac{-1}{2}$.

*

4.9 સરવાળા અથવા તફાવતનું ગુણાકાર તરીકે નિરૂપણ

આપણે આગળ સૂત્રો (v) થી (viii) જોયાં, જે નીચે પ્રમાણે છે :

$2sin\alpha \cdot cos\beta = sin(\alpha + \beta) + sin(\alpha - \beta)$ **(v)**

$2cos\alpha \cdot sin\beta = sin(\alpha + \beta) - sin(\alpha - \beta)$ **(vi)**

$2cos\alpha \cdot cos\beta = cos(\alpha + \beta) + cos(\alpha - \beta)$ **(vii)**

$2sin\alpha \cdot sin\beta = cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta)$ **(viii)**

અહીં, $\alpha + \beta = C$ અને $\alpha - \beta = D$ લેતાં,

$\alpha = \frac{C+D}{2}$ અને $\beta = \frac{C-D}{2}$ મળે.

$$sinC + sinD = 2sin\left(\frac{C+D}{2}\right) cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$sinC - sinD = 2cos\left(\frac{C+D}{2}\right) sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$cosC + cosD = 2cos\left(\frac{C+D}{2}\right) cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$cosD - cosC = 2sin\left(\frac{C+D}{2}\right) sin\left(\frac{C-D}{2}\right) \quad \text{અથવા}$$

$$cosC - cosD = -2sin\left(\frac{C+D}{2}\right) sin\left(\frac{C-D}{2}\right).$$

આ સૂત્રો ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં મૂલ્યોના સરવાળા કે તફાવતનું ગુણાકાર તરીકે નિરૂપણ કરવામાં ઉપયોગી છે.

ઉદાહરણ 14 : નીચેનાને ગુણાકાર સ્વરૂપમાં ફેરવો :

(1) $sin6\theta + sin4\theta$ (2) $sin6\theta - sin2\theta$ (3) $cos5\theta + cos2\theta$

(4) $cos6\theta - cos10\theta$ (5) $sin\theta - 1$ (6) $cos\theta + 1$

ઉકેલ : (1) $sin6\theta + sin4\theta = 2sin\left(\frac{6\theta + 4\theta}{2}\right) cos\left(\frac{6\theta - 4\theta}{2}\right) = 2sin5\theta\ cos\theta$

(2) $sin6\theta - sin2\theta = 2cos\left(\frac{6\theta + 2\theta}{2}\right) sin\left(\frac{6\theta - 2\theta}{2}\right) = 2cos4\theta\ sin2\theta$

(3) $cos5\theta + cos2\theta = 2cos\left(\frac{5\theta + 2\theta}{2}\right) cos\left(\frac{5\theta - 2\theta}{2}\right) = 2cos\frac{7\theta}{2}\ cos\frac{3\theta}{2}$

(4) $cos6\theta - cos10\theta = -2sin\left(\frac{6\theta + 10\theta}{2}\right) sin\left(\frac{6\theta - 10\theta}{2}\right)$

$$= -2sin8\theta\ sin(-2\theta) = 2sin8\theta\ sin2\theta$$

(5) $sin\theta - 1 = sin\theta - sin\frac{\pi}{2} = 2cos\left(\frac{\theta + \frac{\pi}{2}}{2}\right) sin\left(\frac{\theta - \frac{\pi}{2}}{2}\right)$

$$= 2cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

(6) $\cos\theta + 1 = \cos\theta + \cos 0 = 2\cos\left(\frac{\theta+0}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-0}{2}\right)$

$$= 2\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

ઉદાહરણ 15 : સાબિત કરો :

(1) $\cos 20^\circ + \cos 60^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ = \frac{1}{2}$

(2) $1 + \cos 2A + \cos 4A + \cos 6A = 4\cos A \cdot \cos 2A \cdot \cos 3A$

(3) $\sqrt{3}\sin 10^\circ + \sqrt{2}\sin 55^\circ = \cos 80^\circ + 2\cos 50^\circ$

ઉકેલ : (1) ડા.બા. $= \cos 20^\circ + \cos 60^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ$

$$= \cos 20^\circ + \frac{1}{2} + 2\cos\left(\frac{100^\circ + 140^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{100^\circ - 140^\circ}{2}\right)$$

$$= \cos 20^\circ + \frac{1}{2} + 2\cos 120^\circ \cos(20^\circ)$$ **$(\cos(-20^\circ) = \cos 20^\circ)$**

$$= \cos 20^\circ + \frac{1}{2} + 2\cos(180^\circ - 60^\circ)\cos 20^\circ$$

$$= \frac{1}{2} + \cos 20^\circ - 2\cos 60^\circ \cos 20^\circ$$

$$= \frac{1}{2} + \cos 20^\circ - 2 \cdot \frac{1}{2}\cos 20^\circ$$

$$= \frac{1}{2} + \cos 20^\circ - \cos 20^\circ = \frac{1}{2} = \text{જ.બા.}$$

(2) ડા.બા. $= 1 + \cos 2A + \cos 4A + \cos 6A$

$$= (\cos 0 + \cos 2A) + (\cos 4A + \cos 6A)$$

$$= 2\cos A \cdot \cos A + 2\cos 5A \cdot \cos A$$

$$= 2\cos A(\cos A + \cos 5A)$$

$$= 2\cos A(2\cos 3A \cdot \cos 2A)$$

$$= 4\cos A \cdot \cos 2A \cdot \cos 3A = \text{જ.બા.}$$

(3) ડા.બા. $= \sqrt{3}\sin 10^\circ + \sqrt{2}\sin 55^\circ$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 55^\circ$$

$$= 2\sin 60^\circ \sin 10^\circ + 2\sin 45^\circ \sin 55^\circ$$

$$= \cos 50^\circ - \cos 70^\circ + \cos 10^\circ - \cos 100^\circ$$

$$= \cos 50^\circ - \cos(180^\circ - 80^\circ) - (\cos 70^\circ - \cos 10^\circ)$$ **(પદોનું પુનર્ગઠન)**

$$= \cos 50^\circ + \cos 80^\circ + 2\sin 40^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \cos 50^\circ + \cos 80^\circ + 2\sin(90^\circ - 50^\circ) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \cos 50^\circ + \cos 80^\circ + \cos 50^\circ = \cos 80^\circ + 2\cos 50^\circ = \text{જ.બા.}$$

સ્વાધ્યાય 4.4

1. ગુણાકાર સ્વરૂપમાં દર્શાવો :

(1) $sin7\theta + sin3\theta$ (2) $sin\frac{\theta}{2} + sin\frac{3\theta}{2}$ (3) $sin3\theta - sin5\theta$

(4) $sin\frac{7\theta}{2} - sin\frac{3\theta}{2}$ (5) $cos11\theta + cos9\theta$ (6) $cos\frac{5\theta}{2} + cos\frac{11\theta}{2}$

(7) $cos5\theta - cos11\theta$ (8) $cos\frac{\theta}{2} - cos\frac{3\theta}{2}$ (9) $cos\theta - 1$

(10) $sin\theta + 1$ (11) $cos\theta + sin\theta$ (12) $sin\theta - cos\theta$

સાબિત કરો : **(2 થી 7)**

2. (1) $cos55^\circ + cos65^\circ + cos175^\circ = 0$ (2) $cos\frac{5\pi}{12} - cos\frac{\pi}{12} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

(3) $sin65^\circ + cos65^\circ = \sqrt{2}\,cos20^\circ$ (4) $\dfrac{sin\frac{5\pi}{12} - cos\frac{5\pi}{12}}{cos\frac{5\pi}{12} + sin\frac{5\pi}{12}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(5) $\dfrac{cos\,7A + cos\,5A}{sin\,7A - sin\,5A} = cotA$

(6) $cos2\theta\, cos\frac{\theta}{2} - cos3\theta\, cos\frac{9\theta}{2} = sin5\theta\, sin\frac{5\theta}{2}$

(7) $sin\theta + sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + sin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$

3. (1) $(cos\alpha + cos\beta)^2 + (sin\alpha + sin\beta)^2 = 4cos^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$.

(2) $(cos\alpha - cos\beta)^2 + (sin\alpha - sin\beta)^2 = 4sin^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$.

4. (1) $sinA + sinB + sinC - sin(A + B + C) = 4sin\frac{A+B}{2}\, sin\frac{B+C}{2}\, sin\frac{C+A}{2}$.

(2) $cosA + cosB + cosC + cos(A + B + C) = 4cos\frac{A+B}{2}\, cos\frac{B+C}{2}\, cos\frac{C+A}{2}$.

5. (1) $\dfrac{sin(A+B) - 2sinA + sin(A-B)}{cos(A+B) - 2cosA + cos(A-B)} = tanA$

(2) $\dfrac{cos\,3A + 2cos\,5A + cos\,7A}{cos\,A + 2cos\,3A + cos\,5A} = cos2A - sin2A\,tan3A$

6. (1) $\dfrac{1}{sin\,10^\circ} - \dfrac{\sqrt{3}}{cos10^\circ} = 4$ (2) $\sqrt{2}\,sin10^\circ + \sqrt{3}\,cos35^\circ = sin55^\circ + 2cos65^\circ$

7. (1) $sin\theta = nsin(\theta + 2\alpha) \Leftrightarrow tan(\theta + \alpha) = \frac{1+n}{1-n}tan\alpha$

(2) $sin(2A + 3B) = 5sinB \Rightarrow 2tan(A + 2B) = 3tan(A + B)$.

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 16 : સાબિત કરો : $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow sin(\alpha + \beta) < sin\alpha + sin\beta$ અને તે પરથી તારવો કે $sin49^\circ + sin41^\circ > 1$.

ઉકેલ : $\sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha - \sin\beta$

$= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta - \sin\alpha - \sin\beta$

$= \sin\alpha (\cos\beta - 1) + \sin\beta (\cos\alpha - 1)$ **(i)**

હવે, $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$. તેથી $0 < \sin\alpha < 1$, $0 < \sin\beta < 1$ અને

$0 < \cos\alpha < 1$, $0 < \cos\beta < 1$

$\therefore$ $\cos\alpha - 1 < 0$, $\cos\beta - 1 < 0$

$\therefore$ $\sin\alpha(\cos\beta - 1) < 0$ અને $\sin\beta(\cos\alpha - 1) < 0$

$\therefore$ $\sin\alpha(\cos\beta - 1) + \sin\beta(\cos\alpha - 1) < 0$

$\therefore$ $\sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha - \sin\beta < 0$

$\therefore$ $\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$

હવે, $\alpha = 49^o$, $\beta = 41^o$ લેતાં,

આપણે જાણીએ છીએ કે, $0 < 49 < 90$ અને $0 < 41 < 90$

$\sin(49^o + 41^o) < \sin 49^o + \sin 41^o$

$\therefore$ $\sin 90^o < \sin 49^o + \sin 41^o$

$\therefore$ $\sin 49^o + \sin 41^o > 1$

ઉદાહરણ 17 : જો $\cos(\alpha + \beta) = \frac{4}{5}$, $\sin(\alpha - \beta) = \frac{5}{13}$ અને $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{4}$, તો સાબિત કરો કે, $\tan 2\alpha = \frac{56}{33}$.

ઉકેલ : અહીં, $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$ આપેલ છે.

$\therefore$ $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ અને $\frac{-\pi}{4} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{4}$.

$\therefore$ $\cos(\alpha - \beta)$ અને $\sin(\alpha + \beta)$ ધન થાય.

હવે, $\sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$ $\left(0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}\right)$

$\cos(\alpha - \beta) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha - \beta)} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$ $\left(-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore$ $\sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{5}$ અને $\cos(\alpha - \beta) = \frac{12}{13}$

હવે, $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$

અને $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$

$\tan 2\alpha = \tan[(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)]$

$$= \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan(\alpha - \beta)}{1 - \tan(\alpha + \beta)\tan(\alpha - \beta)} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{3}{4} \times \frac{5}{12}} = \frac{56}{33}$$

$\therefore$ $\tan 2\alpha = \frac{56}{33}$

ઉદાહરણ 18 : જો α અને β એ સમીકરણ $acos\theta + bsin\theta = c$ નાં બીજ હોય, તો સાબિત કરો કે,

(1) $cos(\alpha + \beta) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ (2) $cos(\alpha - \beta) = \frac{2c^2 - (a^2 + b^2)}{a^2 + b^2}$

ઉકેલ : અહીં, $acos\theta + bsin\theta = c$ આપેલ છે. **(i)**

$\therefore$ $acos\theta = c - bsin\theta$

$\therefore$ $a^2cos^2\theta = (c - bsin\theta)^2$

$\therefore$ $a^2(1 - sin^2\theta) = c^2 - 2bcsin\theta + b^2 sin^2\theta$

$\therefore$ $(a^2 + b^2) sin^2\theta - 2bcsin\theta + (c^2 - a^2) = 0$ **(ii)**

અહીં, α અને β સમીકરણ (i)નાં બીજ છે તેથી $sin\alpha$ અને $sin\beta$ સમીકરણ (ii)નાં બીજ થશે.

$\therefore$ $sin\alpha \ sin\beta = \frac{c^2 - a^2}{a^2 + b^2}$. **(iii)**

ફરી, $acos\theta + bsin\theta = c$

$\therefore$ $bsin\theta = c - acos\theta$

$\therefore$ $b^2(1 - cos^2\theta) = c^2 - 2accos\theta + a^2 cos^2\theta$

$\therefore$ $b^2 - b^2cos^2\theta = a^2 cos^2\theta - 2accos\theta + c^2$

$\therefore$ $(a^2 + b^2) cos^2\theta - 2ac \ cos\theta + (c^2 - b^2) = 0$ **(iv)**

અહીં α અને β સમીકરણ (i)નાં બીજ છે તેથી $cos\alpha$, $cos\beta$ સમીકરણ (iv)નાં બીજ થશે.

$\therefore$ $cos\alpha \ cos\beta = \frac{c^2 - b^2}{a^2 + b^2}$. **(v)**

હવે, $cos(\alpha + \beta) = cos\alpha \ cos\beta - sin\alpha \ sin\beta$

$$= \frac{c^2 - b^2}{a^2 + b^2} - \frac{c^2 - a^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$\therefore$ $cos(\alpha + \beta) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$

અને $cos(\alpha - \beta) = cos\alpha \ cos\beta + sin\alpha \ sin\beta$

$$= \frac{c^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2 - a^2}{a^2 + b^2} = \frac{2c^2 - (a^2 + b^2)}{a^2 + b^2}$$ **((iii) અને (v) પરથી)**

$\therefore$ $cos(\alpha - \beta) = \frac{2c^2 - (a^2 + b^2)}{a^2 + b^2}$

ઉદાહરણ 19 : જો $asin\theta = bsin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = csin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)$, તો સાબિત કરો કે,

$ab + bc + ca = 0$. $(abc \neq 0)$

ઉકેલ : ધારો કે $asin\theta = bsin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = csin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) = k$

સ્પષ્ટ છે કે $k \neq 0$. (કેમ ?)

$\therefore \quad \frac{k}{a} + \frac{k}{b} + \frac{k}{c} = sin\theta + sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + sin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)$

$= sin\theta + sin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) + sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$

$= 2sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) cos\frac{2\pi}{3} + sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$

$= 2sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) + sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$

$= -sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$

$\therefore \quad \frac{k}{a} + \frac{k}{b} + \frac{k}{c} = 0$

$\therefore \quad k\left(\frac{bc + ca + ab}{abc}\right) = 0$

$\therefore \quad ab + bc + ca = 0$ **($k \neq 0$)**

સ્વાધ્યાય 4

1. સાબિત કરો :

(1) $\frac{cos^2 33^\circ - cos^2 57^\circ}{sin^2 \frac{21^\circ}{2} - sin^2 \frac{69^\circ}{2}} = -\sqrt{2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{sin\,20^\circ} - \frac{1}{cos\,20^\circ} = 4$

2. સાબિત કરો $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{4} \Rightarrow tan(\alpha + \beta) > tan\alpha + tan\beta$ અને

તારવો કે, $tan35^\circ + tan25^\circ < \sqrt{3}$.

3. સાબિત કરો : $2tan\beta + cot\beta = tan\alpha \Rightarrow 2tan(\alpha - \beta) = cot\beta$.

4. જો $\theta + \beta = \alpha$ અને $sin\theta = ksin\beta$, તો સાબિત કરો કે, $tan\theta = \frac{k\,sin\alpha}{1 + kcos\alpha}$ અને $tan\beta = \frac{sin\,\alpha}{k + cos\alpha}$.

5. ΔABC માં જો $sinA + cosB = 0$, તો સાબિત કરો કે ΔABC ગુરુકોણ ત્રિકોણ છે તથા $0 < sinA < \frac{1}{\sqrt{2}}$ છે.

6. જો $cos(\beta - \gamma) + cos(\gamma - \alpha) + cos(\alpha - \beta) = \frac{-3}{2}$, તો સાબિત કરો કે,

$sin\alpha + sin\beta + sin\gamma = 0$ અને $cos\alpha + cos\beta + cos\gamma = 0$.

7. જો $tan(\alpha + \theta) = ntan(\alpha - \theta)$, તો સાબિત કરો કે, $(n + 1)\, sin2\theta = (n - 1)\, sin2\alpha$.

8. જો α અને β એ સમીકરણ $atan\theta + bsec\theta = c$ નાં બીજ હોય તો સાબિત કરો કે, $tan(\alpha + \beta) = \frac{2ac}{a^2 - c^2}$.

9. $3cos\theta + 5sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$ નાં મહત્તમ અને ન્યૂનતમ મૂલ્યો મેળવો.

10. સાબિત કરો : $sin10^\circ \cdot sin30^\circ \cdot sin50^\circ \cdot sin70^\circ = \frac{1}{16}$.

11. સાબિત કરો : $cos\frac{\pi}{11} + cos\frac{3\pi}{11} + cos\frac{5\pi}{11} + cos\frac{7\pi}{11} + cos\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$.

12. સાબિત કરો કે, $\dfrac{\cos 8\theta \cos 5\theta - \cos 12\theta \cos 9\theta}{\sin 8\theta \cos 5\theta + \cos 12\theta \sin 9\theta} = \tan 4\theta$.

13. સાબિત કરો કે, $m\tan\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = n\tan\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \cos 2\theta = \dfrac{m+n}{2(m-n)}$.

14. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) $\dfrac{\cos 10^\circ + \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ - \sin 10^\circ}$ નું મૂલ્ય ...... છે. ☐

(a) $\tan 25^\circ$ (b) $\tan 35^\circ$ (c) $\tan 55^\circ$ (d) $\tan 80^\circ$

(2) $\cos 245^\circ + \sin 155^\circ$ નું મૂલ્ય ...... છે. ☐

(a) 0 (b) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$ (c) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (d) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

(3) $\cos(270^\circ + \alpha)\cos(90^\circ - \alpha) - \sin(270^\circ - \alpha)\cos\alpha$ નું મૂલ્ય ...... છે. ☐

(a) -1 (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

(4) $2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ નું મૂલ્ય ...... છે. ☐

(a) $\frac{-1}{4}$ (b) 1 (c) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$

(5) જો $A = 125$ અને $x = \sin A^\circ + \cos A^\circ$, તો .... ☐

(a) $x < 0$ (b) $x = 0$ (c) $x > 0$ (d) $x \geq 0$

(6) જો $\tan\alpha = \dfrac{n}{n+1}$ અને $\tan\beta = \dfrac{1}{2n+1}$, $(0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{4})$, તો $\alpha + \beta =$ ...... ☐

(a) 0 (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

(7) $\dfrac{\tan 50^\circ - \tan 40^\circ}{\tan 10^\circ}$ નું મૂલ્ય ...... છે. ☐

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

(8) $\sin 190^\circ + \cos 190^\circ$ ...... છે. ☐

(a) ઋણ (b) શૂન્ય (c) ધન (d) અવાસ્તવિક

(9) જો $\cot 15^\circ = m$, તો $\dfrac{\tan 225^\circ + \tan 345^\circ}{\tan 195^\circ - \tan 105^\circ} =$ ...... ☐

(a) $\dfrac{m-1}{m^2+1}$ (b) $\dfrac{2m}{m^2+1}$ (c) $\dfrac{m^2-1}{m^2+1}$ (d) $\dfrac{m+1}{m^2+1}$

(10) $\log \tan 1^\circ + \log \tan 2^\circ + \ldots + \log \tan 89^\circ$ નું મૂલ્ય ...... છે. ☐

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

(11) $\dfrac{1-\tan^2 15^\circ}{1+\tan^2 15^\circ}$ નું મૂલ્ય ...... છે. ☐

(a) 1 (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) 2 (d) $\sqrt{3}$

(12) $cos480^{\circ}\ sin150^{\circ} + sin600^{\circ}\ cos390^{\circ}$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $\frac{-1}{2}$ (b) 0 (c) -1 (d) $\frac{1}{2}$

(13) $tan25^{\circ} + tan20^{\circ} + tan25^{\circ}\ tan20^{\circ} =$ ......

(a) 0 (b) 1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 2

(14) ΔABC માં જો $tanA = \frac{1}{2}$, $tanB = \frac{1}{3}$, તો $\angle C$ નું રેડિયન માપ ...... છે.

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$

(15) $\sqrt{3}cosec20^{\circ} - sec20^{\circ}$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) -4 (b) 1 (c) 2 (d) 4

(16) $(\sqrt{3}sin75^{\circ} - cos75^{\circ})$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) 1 (c) $\sqrt{2}$ (d) $2\sqrt{2}$

(17) $cos^2\frac{\pi}{12} + cos^2\frac{3\pi}{12} + cos^2\frac{5\pi}{12} =$ ......

(a) $\frac{-1}{2}$ (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{3}{2}$

(18) $cos15^{\circ} - sin15^{\circ}$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(19) $cos^2 7\frac{1}{2}^{\circ} - cos^2 37\frac{1}{2}^{\circ} =$ ......

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. $cos(\alpha - \beta) = cos\alpha\ cos\beta + sin\alpha\ sin\beta$
2. $cos(\alpha + \beta) = cos\alpha\ cos\beta - sin\alpha\ sin\beta$
3. $cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = sin\theta$, $sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = cos\theta$
4. $sin(\alpha + \beta) = sin\alpha\ cos\beta + cos\alpha\ sin\beta$
5. $sin(\alpha - \beta) = sin\alpha\ cos\beta - cos\alpha\ sin\beta$
6. $sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, $cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
7. $sin(\alpha + \beta) \cdot sin(\alpha - \beta) = sin^2\alpha - sin^2\beta$

   $sin(\alpha + \beta) \cdot sin(\alpha - \beta) = cos^2\beta - cos^2\alpha$

8. $cos(\alpha + \beta) \cdot cos(\alpha - \beta) = cos^2\alpha - sin^2\beta$

$cos(\alpha + \beta) \cdot cos(\alpha - \beta) = cos^2\beta - sin^2\alpha$

9. $f(\alpha) = acos\alpha + bsin\alpha$, $\alpha \in$ R, a, b, $\in$ R નો વિસ્તાર $\left[-\sqrt{a^2+b^2}, \sqrt{a^2+b^2}\right]$ છે.

(જ્યાં $a^2 + b^2 \neq 0$)

યોગ્ય પ્રદેશમાં,

10. $tan\,(\alpha + \beta) = \dfrac{tan\alpha + tan\beta}{1 - tan\alpha \cdot tan\beta}$

11. $tan\,(\alpha - \beta) = \dfrac{tan\alpha - tan\beta}{1 + tan\alpha \cdot tan\beta}$

12. $cot\,(\alpha + \beta) = \dfrac{cot\,\alpha \cdot cot\,\beta - 1}{cot\,\beta + cot\,\alpha}$

13. $cot\,(\alpha - \beta) = \dfrac{cot\,\alpha \cdot cot\,\beta + 1}{cot\,\beta - cot\,\alpha}$

14. $tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$, $cot\frac{\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$

15. $2sin\alpha\ cos\beta = sin(\alpha + \beta) + sin(\alpha - \beta)$

16. $2cos\alpha\ sin\beta = sin(\alpha + \beta) - sin(\alpha - \beta)$

17. $2cos\alpha\ cos\beta = cos(\alpha + \beta) + cos(\alpha - \beta)$

18. $2sin\alpha\ sin\beta = cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta)$

19. $sin\mathrm{C} + sin\mathrm{D} = 2sin\left(\dfrac{\mathrm{C+D}}{2}\right)\ cos\left(\dfrac{\mathrm{C-D}}{2}\right)$

20. $sin\mathrm{C} - sin\mathrm{D} = 2cos\left(\dfrac{\mathrm{C+D}}{2}\right)\ sin\left(\dfrac{\mathrm{C-D}}{2}\right)$

21. $cos\mathrm{C} + cos\mathrm{D} = 2cos\left(\dfrac{\mathrm{C+D}}{2}\right)\ cos\left(\dfrac{\mathrm{C-D}}{2}\right)$

22. $cos\mathrm{C} - cos\mathrm{D} = -2sin\left(\dfrac{\mathrm{C+D}}{2}\right)\ sin\left(\dfrac{\mathrm{C-D}}{2}\right)$.

Aryabhata is also known as **Aryabhata I** to distinguish him from the later mathematician of the same name who lived about 400 years later.

The surviving text is Aryabhata's masterpiece the *Aryabhatiya* which is a small astronomical treatise written in 118 verses giving a summary of Hindu mathematics up to that time. Its mathematical section contains 33 verses giving 66 mathematical rules without proof.

The mathematical part of the *Aryabhatiya* covers arithmetic, algebra, plane trigonometry and spherical trigonometry. It also contains continued fractions, quadratic equations, sums of power series and a table of *sines*.