પ્રકરણ 6

રેખાઓ

6.1 પ્રાસ્તાવિક

ઈ.સ. 1637માં ફ્રેન્ચ ગણિતશાસ્ત્રી રેને દ'કાર્તેએ પોતાનું પુસ્તક La Géométrie' બહાર પાડ્યું હતું. ભૂમિતિના અભ્યાસમાં બીજગણિતનો ઉપયોગ કરનાર તેઓ પ્રથમ ગણિતશાસ્ત્રી હતા. તેમણે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની ક્રમયુક્ત જોડની મદદથી સમતલનાં બિંદુઓનું આલેખન (નિરૂપણ) કર્યું હતું. આ ક્રમયુક્ત જોડને કાર્તેઝિય યામ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. રેખા અને વિવિધ વક્રોને કાર્તેઝિય યામના આધારે તેમણે બૈજિક સમીકરણ રૂપે દર્શાવ્યા હતા. યામભૂમિતિમાં બીજગણિતના ઉપયોગ વડે ભૂમિતિના કોયડા ઉકેલવામાં આવે છે. તેથી યામ ભૂમિતિ એ મુખ્યત્વે બીજગણિત અને ભૂમિતિનો સમન્વય છે. ત્યાર બાદ અલબત્ત આના ઘણા સમય પહેલા આરબ ગણિતશાસ્ત્રી અલ-ખ્વારિઝમીએ ભૌમિતિક આકૃતિઓની મદદથી બીજગણિતનાં સમીકરણોના ઉકેલો મેળવ્યા હતા. આપણા ભારતીય ગણિતશાસ્ત્રી ભાસ્કરાચાર્યનું પણ વિશેષ યોગદાન રહ્યું છે.

6.2 પુનરાવર્તન

આપણે આગળના વર્ગોમાં અભ્યાસ કરેલ યામ-ભૂમિતિનું પુનરાવર્તન કરીએ. આપણે અગાઉ યામાક્ષો, યામ સમતલ, યામ સમતલમાં બિંદુઓનું નિરૂપણ, અંતરસૂત્ર, વિભાજન સૂત્ર, ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ વગેરેનો અભ્યાસ કર્યો.

સમતલનાં બિંદુઓ અને $R \times R$ ની તમામ ક્રમયુક્ત જોડ વચ્ચે એક-એક સંગતતા હોય છે. XY-સમતલમાં X-અક્ષ અને Y-અક્ષને અનુક્રમે $\{P(x, 0) \mid x \in R\}$ અને $\{P(0, y) \mid y \in R\}$ તરીકે દર્શાવવામાં આવે છે.

અક્ષો પર ન આવેલાં બિંદુઓથી સમતલના પરસ્પર અલગ હોય તેવા ચાર બિંદુ ગણ મળે છે. આ બિંદુ ગણ પ્રથમ, દ્વિતીય, તૃતીય અને ચતુર્થ ચરણ તરીકે ઓળખાય છે. તેમને નીચે પ્રમાણે દર્શાવવામાં આવે છે :

પ્રથમ ચરણ $= \{P(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$

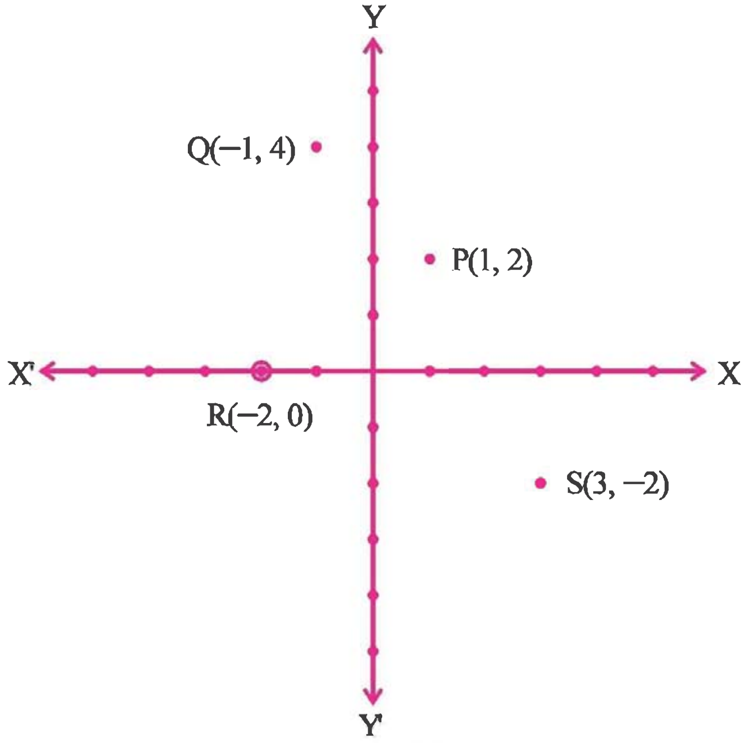
દ્વિતીય ચરણ $= \{P(x, y) \mid x < 0, y > 0\}$

તૃતીય ચરણ $= \{P(x, y) \mid x < 0, y < 0\}$

ચતુર્થ ચરણ $= \{P(x, y) \mid x > 0, y < 0\}$

આકૃતિ 6.1માં સમતલનાં બિંદુઓ P(1, 2), Q(−1, 4), R(−2, 0) અને S(3, −2)નું નિરૂપણ દર્શાવેલ છે. કોઈ પણ બિંદુના યામમાં તેના x-યામનું નિરપેક્ષ મૂલ્ય એ Y-અક્ષથી અને y-યામનું નિરપેક્ષ મૂલ્ય એ X-અક્ષથી અંતર દર્શાવે છે. બિંદુ P(1, 2) એ Y-અક્ષની ધન દિશાથી એકમ અંતરે તથા X-અક્ષની ધન દિશાથી 2 એકમ અંતરે આવેલું છે. પરંતુ Q(−1, 4) પણ Y-અક્ષથી એકમ અંતરે જ છે અને તેનો x-યામ ઋણ હોવાથી તેનું સ્થાન બીજા ચરણમાં છે.

આ ઉપરાંત આપણે કેટલાંક સૂત્રો પણ શીખી ગયા.



આકૃતિ 6.1

(1) અંતર સૂત્ર (Distance formula) : $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ એ સમતલમાં આવેલાં બિંદુઓ છે. A થી B સુધીનું અંતર $d(A, B)$ કે AB વડે દર્શાવાય છે અને તેને

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$ વડે મેળવવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ તરીકે A(9, 8) અને B(6, 4) વચ્ચેનું અંતર

$$AB = \sqrt{(9-6)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

(2) વિભાજન સૂત્ર (Division formula) : $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ એ સમતલના આપેલાં બિંદુઓ છે. $P(x, y)$ એ $\overleftrightarrow{AB}$ પર આવેલ $\overline{AB}$નું A તરફથી λ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતું બિંદુ છે. $\lambda \in R - \{0, -1\}$.

$$\lambda = \frac{AP}{PB}.$$

$$P(x, y) = \left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}\right)$$

જો ગુણોત્તર $\lambda = m : n$ હોય, તો

$$P(x, y) = \left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n}\right)$$

ઉદાહરણ તરીકે, A(2, 3) અને B(4, 8) એ xy સમતલમાં આપેલાં બિંદુઓ છે. $\overline{AB}$ નું A તરફથી 3 : 2 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતા બિંદુના યામ,

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n}\right) = \left(\frac{3 \cdot 4 + 2 \cdot 2}{3 + 2}, \frac{3 \cdot 8 + 2 \cdot 3}{3 + 2}\right) = \left(\frac{16}{5}, 6\right)$$

(3) રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ (Mid-point of a Line-segment) : રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ એ $\overline{AB}$નાં અંત્યબિંદુઓ $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$થી સમાન અંતરે આવેલ હોય છે અને $\overline{AB}$ પર હોય છે. તે $\overline{AB}$નું $m : n = 1 : 1$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

$$\overline{AB} \text{ ના મધ્યબિંદુના યામ } = \left(\frac{1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_1}{1+1}, \frac{1 \cdot y_2 + 1 \cdot y_1}{1+1}\right)$$

$$= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

(4) (x_1, y_1), (x_2, y_2) અને (x_3, y_3) શિરોબિંદુઓવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ,

$$\frac{1}{2} \mid x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \mid \qquad \text{(i)}$$

ઉદાહરણ તરીકે, A(3, 2), B(11, 8) અને C(8, 12) એ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.

$$\Delta ABC\text{નું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2} \mid 3(8 - 12) + 11(12 - 2) + 8(2 - 8) \mid$$

$$= \frac{1}{2} \mid 3(-4) + 11(10) + 8(-6) \mid$$

$$= \frac{1}{2} \mid -12 + 110 - 48 \mid$$

$$= \frac{1}{2} \mid 50 \mid$$

$$= 25$$

☛ **નોંધ** ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ હંમેશાં ધન હોય છે. જો ઉપરના (i)નું મૂલ્ય શૂન્ય થાય, તો ત્રિકોણ શક્ય નથી. તેથી બિંદુઓ સમરેખ થાય.

આ પ્રકરણમાં આપણે યામભૂમિતિનો વધુ અભ્યાસ કરીશું. યામભૂમિતિની સૌથી સરળ આકૃતિ રેખાનો અભ્યાસ કરવા માટે વિભાજન સૂત્ર ખૂબ અગત્યનું છે.

6.3 ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર (Shifting of Origin)

આપણે જાણીએ છીએ કે યામ-સમતલમાં દરેક બિંદુને નિશ્ચિત યામ હોય છે. સમતલના પ્રત્યેક બિંદુના યામ અક્ષો અને ઊગમબિંદુના સ્થાન પર આધારિત મળે છે.

સમતલમાં લંબરેખાઓની એક જોડ લો. આ રેખાઓના છેદબિંદુને ઊગમબિંદુ કહે છે અને તેને O દ્વારા દર્શાવાય છે. આ પૈકીની એક રેખાને X-અક્ષ તથા બીજી રેખાને Y-અક્ષ કહે છે.

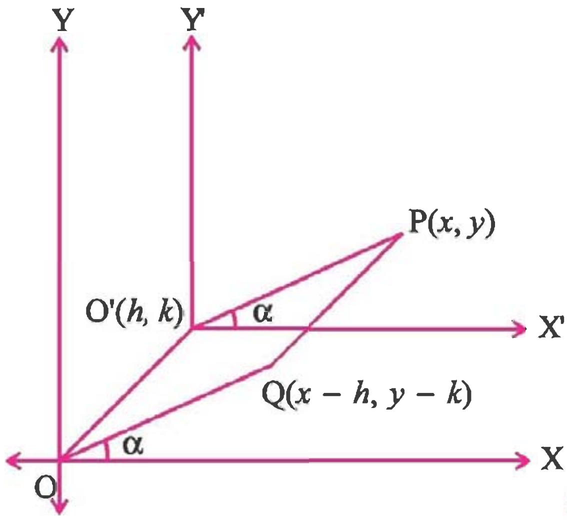
ધારો કે P એ યામ-સમતલ XOYનું કોઈ બિંદુ છે. Pના યામ (x, y) છે.

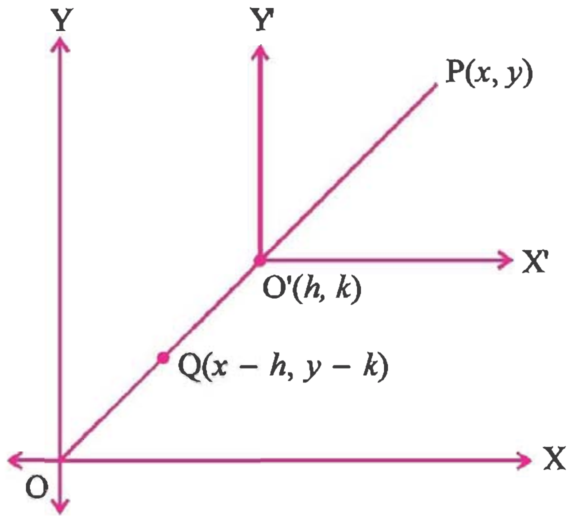
ધારો કે $O'(h, k)$ એ જ સમતલનું અન્ય કોઈ બિંદુ છે. $P \neq O'$.

બે રેખાઓ $\overleftrightarrow{O'X'}$ અને $\overleftrightarrow{O'Y'}$ પસંદ કરો જેથી $\overleftrightarrow{O'X'} \parallel \overleftrightarrow{OX}$ અને $\overleftrightarrow{O'Y'} \parallel \overleftrightarrow{OY}$.

વળી, $\overrightarrow{OX}$ ની દિશા $= \overrightarrow{O'X'}$ ની દિશા તથા $\overrightarrow{OY}$ની દિશા $= \overrightarrow{O'Y'}$ ની દિશા.

ધારો કે નવા અક્ષો $\overleftrightarrow{O'X'}$ તથા $\overleftrightarrow{O'Y'}$ ને સાપેક્ષ Pના યામ (x', y') છે.





આકૃતિ 6.2

ધારો કે જૂના અક્ષો $\overleftrightarrow{OX}$, $\overleftrightarrow{OY}$ ને સાપેક્ષ Q ના યામ $(x - h, y - k)$ છે.

હવે, $O'P = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$

$OQ = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$

$\therefore \quad O'P = OQ$

તે જ રીતે $OO' = PQ = \sqrt{h^2 + k^2}$

$P \neq O'$. તેથી O, O', P અને Q સમરેખ છે અથવા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં શિરોબિંદુ છે.

ધારો કે $m\angle PO'X' = \alpha$ **$(0 < \alpha < 2\pi)$**

તેથી $m\angle QOX = \alpha$

$\therefore \quad (x', y') = (O'P \cos\alpha, O'P \sin\alpha)$

અને $(x - h, y - k) = (OQ \cos\alpha, OQ \sin\alpha)$

$= (O'P \cos\alpha, O'P \sin\alpha)$

$\therefore \quad (x', y') = (x - h, y - k)$

$\therefore \quad x' = x - h, \qquad y' = y - k$

$x = x' + h, \qquad y = y' + k$

આથી ઊગમબિંદુનું (h, k) આગળ સ્થાનાંતર કરતાં $P(x, y)$ ના નવા યામ $(x - h, y - k)$ મળે છે.

આ પરથી ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર (3, 5) આગળ કરતાં P(6, 8) ના નવા યામ શોધીએ.

અહીં, $(h, k) = (3, 5)$, $(x, y) = (6, 8)$

ધારો કે P ના નવા યામ (x', y') છે.

તેથી $x' = x - h$ અને $y' = y - k$

$= 6 - 3 \qquad = 8 - 5$

$= 3 \qquad = 3$

$\therefore$ P ના નવા યામ (3, 3) છે.

6.4 રેખાખંડનું વિભાજન (Division of a Line-segment)

ધારો કે A અને B એ એક સમતલમાં આવેલાં બે ભિન્ન બિંદુઓ છે. માટે બે ભિન્ન બિંદુઓમાંથી પસાર થતી અનન્ય $\overleftrightarrow{AB}$ મળે.

ધારો કે P(x, y) એ $\overleftrightarrow{AB}$ પર આવેલ બિંદુ છે. તેથી બિંદુ P ના સ્થાન માટે ત્રણ શક્યતાઓ છે. જો $P \neq A$, $P \neq B$ તો આ શક્યતાઓ નીચે પ્રમાણે છે :

(1) A–P–B (2) A–B–P (3) P–A–B.

P નું ચોક્કસ સ્થાન નક્કી કરવામાં ગુણોત્તર $\frac{AP}{PB}$ એ ખૂબ જ અગત્યનું સ્થાન ધરાવે છે.

વ્યાખ્યા : (1) જો A–P–B તો બિંદુ P એ $\overline{AB}$ નું A તરફથી $\lambda = \frac{AP}{PB}$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે. અહીં $\lambda > 0$. આ વિભાજનને અંતઃવિભાજન કહે છે.

(2) જો P–A–B અથવા A–B–P તો P એ $\overline{AB}$ નું A તરફથી $\lambda = -\frac{AP}{PB}$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે. આ વિભાજનને બહિર્વિભાજન કહે છે. અહીં $\lambda < 0$.

આમ બધા જ વિકલ્પમાં $\lambda \in R - \{0, -1\}$.

બિંદુ P એ $\overline{AB}$ નું λ ($\lambda \neq 0$ અને $\lambda \neq -1$) ગુણોત્તરમાં A તરફથી વિભાજન કરે તો,

(1) જો A–P–B, તો $\lambda > 0$. (અંતઃવિભાજન)

(2) જો P–A–B, તો $-1 < \lambda < 0$. (બહિર્વિભાજન)

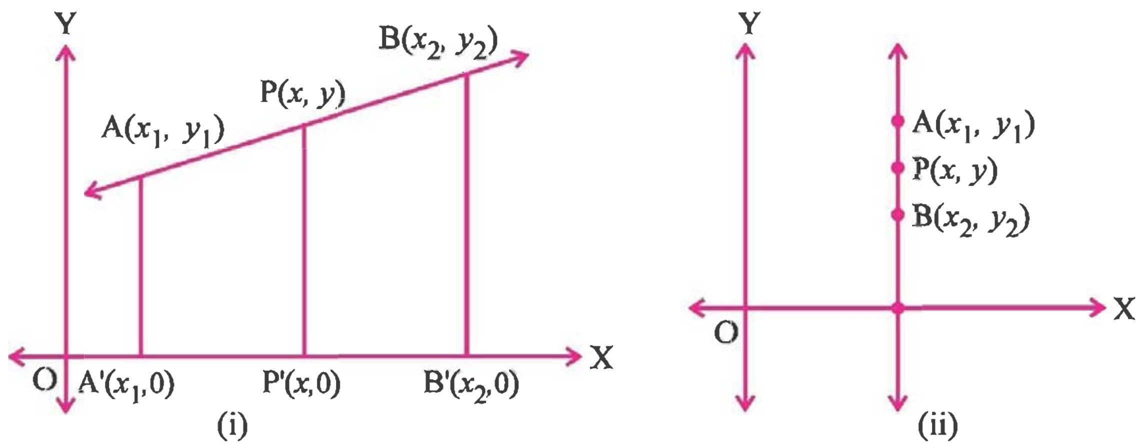
(3) જો A–B–P, તો $\lambda < -1$. (બહિર્વિભાજન)

((2)માં $-1 < \lambda < 0$ તથા (3) માં $\lambda < -1$ સાબિત કરો !)

વિભાજન બિંદુના યામ (Coordinates of the Point of Division) :

A(x_1, y_1) અને B(x_2, y_2) એ એક જ સમતલમાં આવેલાં બિંદુઓ છે. આપણે $\overline{AB}$ નું A તરફથી λ ($\lambda > 0$) ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરતા બિંદુના યામ મેળવીએ.

ધારો કે P(x, y) એ $\overline{AB}$ નું A તરફથી $\lambda = \frac{AP}{PB}$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.



આકૃતિ 6.3

જો $\overleftrightarrow{AB}$ શિરોલંબ ના હોય તો A, P, B માંથી X-અક્ષ પરના લંબપાદ અનુક્રમે A', P', B' લો. આકૃતિ 6.3(i)માં બતાવ્યા પ્રમાણે $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{PP'} \parallel \overleftrightarrow{BB'}$ તથા X-અક્ષ અને $\overleftrightarrow{AB}$ તેમની છેદિકા છે.

$$\therefore \quad \frac{AP}{PB} = \frac{A'P'}{P'B'} = \frac{|x - x_1|}{|x_2 - x|}$$

સ્પષ્ટ છે કે A'–P'–B'. આથી $x - x_1 > 0$ અને $x_2 - x > 0$ અથવા $x - x_1 < 0$ અને $x_2 - x < 0$

$$\therefore \quad \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

$$\therefore \quad \lambda x_2 - \lambda x = x - x_1$$

$$\therefore \quad \lambda x_2 + x_1 = \lambda x + x$$

$$\therefore \quad x = \frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}$$

જો $\overleftrightarrow{AB}$ એ X-અક્ષને લંબ હોય, તો $x = x_1 = x_2$. તેથી $\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1} = \frac{\lambda x + x}{\lambda + 1} = x$.

આમ, બંને વિકલ્પોમાં $x = \frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}$, જ્યાં $\lambda > 0$. જો $\overleftrightarrow{AB}$ સમક્ષિતિજ ન હોય તો આ જ રીતે A, P, B માંથી Y-અક્ષ પર લંબ દોરી $y = \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}$ મેળવી શકાય.

જો $\overleftrightarrow{AB}$ સમક્ષિતિજ હોય તોપણ $y = \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}$ મેળવી શકાય.

તેથી જો $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ આપેલાં બિંદુઓ હોય તથા P એ $\overline{AB}$ નું A તરફથી λ ગુણોત્તરમાં ($\lambda > 0$) અંતઃવિભાજન કરે તો $P\left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}\right)$.

આથી ઊલટું ધારો કે, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ અને $P\left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}\right)$, $\lambda > 0$ આપેલાં બિંદુઓ છે.

આપણે હવે A–P–B અને $\frac{AP}{PB} = \lambda$ સાબિત કરીશું.

હવે,
$$AP^2 = \left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1} - x_1\right)^2 + \left(\frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1} - y_1\right)^2$$

$$= \left(\frac{\lambda x_2 - \lambda x_1}{\lambda + 1}\right)^2 + \left(\frac{\lambda y_2 - \lambda y_1}{\lambda + 1}\right)^2$$

$$= \frac{\lambda^2 (x_2 - x_1)^2}{(\lambda + 1)^2} + \frac{\lambda^2 (y_2 - y_1)^2}{(\lambda + 1)^2}$$

$$= \frac{\lambda^2}{(\lambda + 1)^2} \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\right]$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda + 1}\right)^2 AB^2$$

$\therefore \quad AP = \left|\frac{\lambda}{\lambda+1}\right| \cdot AB$

$\therefore \quad AP = \frac{\lambda}{\lambda+1} \cdot AB \qquad (\lambda > 0$ અને $\lambda + 1 > 0)$

તે જ રીતે, $PB = \left|\frac{1}{\lambda+1}\right| \cdot AB = \frac{1}{\lambda+1} \cdot AB$

$\therefore \quad \frac{AP}{PB} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda+1}}{\frac{1}{\lambda+1}} \cdot \frac{AB}{AB}$ (અહીં A અને B ભિન્ન બિંદુઓ છે. આથી $AB \neq 0$)

$\frac{AP}{PB} = \lambda$

વળી, $AP + PB = \lambda PB + PB$

$= (\lambda + 1)\, PB$

$= (\lambda + 1) \frac{1}{\lambda+1} \cdot AB$

$= AB$

$AP + PB = AB$

$\therefore \quad A-P-B$

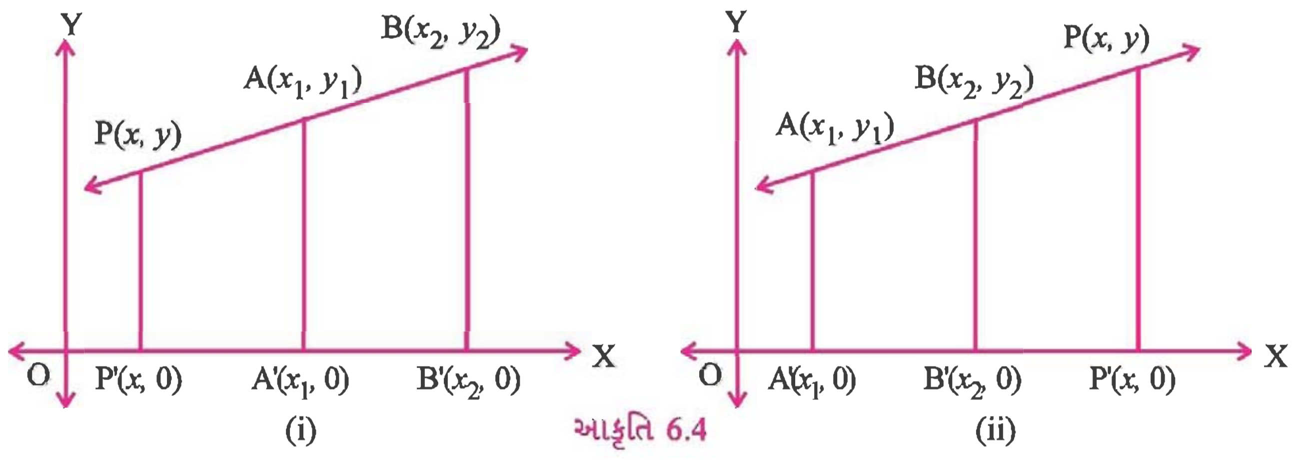
તેથી $A-P-B$ અને $\frac{AP}{PB} = \lambda$.

$P\left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda+1}\right)$ અને $\lambda > 0$, આપેલ હોય તો, આપણે કહી શકીએ કે, $A-P-B$ અને $\frac{AP}{PB} = \lambda$.

$\therefore$ જો P એ $\overline{AB}$ નું $\lambda > 0$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે તો $P\left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda+1}\right)$ અને આથી ઊલટું જો $P\left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda+1}\right)$, $\lambda > 0$ તો P એ $\overline{AB}$ નું λ ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરે છે. અત્રે $\lambda = \frac{AP}{PB}$.

6.5 રેખાખંડનું બહિર્વિભાજન કરતા બિંદુના યામ (Coordinates of the Point Dividing a Line-segment Externally)

$A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ એ સમતલનાં આપેલાં બિંદુઓ છે. આપણે $\overline{AB}$ નું A તરફથી λ $(\lambda < 0)$ ગુણોત્તરમાં બહિર્વિભાજન કરતા બિંદુના યામ મેળવીએ. ધારો કે P એ $\overline{AB}$ નું A તરફથી λ ગુણોત્તરમાં બહિર્વિભાજન કરે છે.



આકૃતિ 6.4

અંતઃવિભાજન માટે આપણે અગાઉ જે પ્રમાણે કર્યું તે પ્રમાણે કરતાં અહીં $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{PP'}$. $\overleftrightarrow{AB}$ અને X-અક્ષ એ તેમની છેદિકાઓ છે.

$\therefore \quad \frac{AP}{PB} = \frac{A'P'}{P'B'}$

અહીં, $-\frac{AP}{PB} = -\frac{A'P'}{P'B'} = -\frac{|x - x_1|}{|x_2 - x|} = -\frac{x - x_1}{x - x_2}$ **($x_1 - x$ અને $x_2 - x$ બંને સમચિહ્ન છે.)**

$\therefore \quad \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$ **$(-\frac{AP}{PB} = \lambda)$**

$\therefore \quad \lambda x_2 - \lambda x = x - x_1$

$\therefore \quad \lambda x + x = \lambda x_2 + x_1$

$\therefore \quad (\lambda + 1)x = \lambda x_2 + x_1$

$\therefore \quad x = \frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}$ **$(\lambda \neq -1)$**

$\overleftrightarrow{AB}$ એ X-અક્ષને લંબ હોય તો $x = x_1 = x_2$. તેથી, $\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1} = \frac{\lambda x + x}{\lambda + 1} = x$.

તે જ રીતે, $y = \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}$ સાબિત કરી શકાય.

તેથી $\overline{AB}$ નું A તરફથી λ $(\lambda < 0, \lambda \neq -1)$ ગુણોત્તરમાં બહિર્વિભાજન કરતા બિંદુના યામ.

$\left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}\right)$ જ્યાં $\lambda < 0, \lambda \neq -1$

આથી ઊલટું ધારો કે $\lambda < 0, \lambda \neq -1$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ અને $P\left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}\right)$ એ આપેલાં બિંદુઓ છે.

આપણે $\frac{AP}{PB} = -\lambda$ તથા P–A–B અથવા A–B–P સાબિત કરીશું.

અંતઃવિભાજન માટે કરી હતી તે જ ગણતરી કરતાં,

$\therefore \quad AP = \left|\frac{\lambda}{\lambda + 1}\right| \cdot AB$ અને $PB = \left|\frac{1}{\lambda + 1}\right| \cdot AB$

જો $-1 < \lambda < 0$, તો $\lambda + 1 > 0$ અને $|\lambda| = -\lambda$

$\therefore \quad AP = \frac{-\lambda}{\lambda + 1} \cdot AB$ અને $PB = \frac{1}{\lambda + 1} \cdot AB$ (i)

તેથી $\frac{AP}{PB} = \frac{\frac{-\lambda}{\lambda + 1} \cdot AB}{\frac{1}{\lambda + 1} \cdot AB} = -\lambda$

(i) પરથી, $-AP + PB = \frac{\lambda}{\lambda + 1} AB + \frac{1}{\lambda + 1} AB = AB$

$\therefore \quad AP + AB = PB$

$\therefore \quad$ P–A–B

જો $\lambda < -1$ તો $\lambda + 1 < 0$

$\therefore \quad |\lambda + 1| = -(\lambda + 1)$ અને $|\lambda| = -\lambda$

$$AP = \left|\frac{\lambda}{\lambda+1}\right| \cdot AB = \frac{-\lambda}{-(\lambda+1)} \cdot AB = \frac{\lambda}{\lambda+1} \cdot AB$$

$\therefore$ $AP = \frac{\lambda}{\lambda+1} \cdot AB$ અને $PB = \frac{1}{-(\lambda+1)} \cdot AB$ (ii)

$\therefore$ $\frac{AP}{PB} = -\lambda$

(ii) પરથી, $AP - PB = AB$

$\therefore$ $AP = AB + PB$

$\therefore$ A–B–P

તેથી $\lambda < 0$, $\lambda \neq -1$ માટે P એ $\overleftrightarrow{AB}$ પર આવેલ બિંદુ હોય, તો P–A–B અથવા A–B–P, જ્યાં $\lambda = -\frac{AP}{PB}$.

$\therefore$ જો $\frac{AP}{PB} = -\lambda$, $\lambda < 0$, $\lambda \neq -1$, તો P–A–B અથવા A–B–P અને

$P(x, y) = \left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda+1}\right)$ અને ઊલટું જો $P\left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda+1}\right)$, $\lambda < 0$, તો P એ $\overline{AB}$ નું λ ગુણોત્તરમાં બહિર્વિભાજન કરે છે.

માટે અંતઃવિભાજન અને બહિર્વિભાજનથી આપણે કહી શકીએ કે પ્રત્યેક $\lambda \in R - \{0, -1\}$ તથા રેખા પરનાં તમામ બિંદુઓ વચ્ચે એક-એક સંગતતા છે. (A અને B બિંદુઓ સિવાય)

☛ નોંધ 1 $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ આપેલાં ભિન્ન બિંદુઓ છે. જો P એ $\overline{AB}$ નું B તરફથી λ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે તો બિંદુ P ના યામ $\left(\frac{\lambda x_1 + x_2}{\lambda+1}, \frac{\lambda y_1 + y_2}{\lambda+1}\right)$.

☛ નોંધ 2 જો $\overleftrightarrow{AB}$ અને $\overleftrightarrow{CD}$, P બિંદુમાં છેદે તો $\overleftrightarrow{CD}$ એ $\overline{AB}$ નું $\frac{AP}{PB}$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે જ્યાં A–P–B અને જો P–A–B અથવા A–B–P તો $\overleftrightarrow{CD}$ એ $\overline{AB}$ નું $-\frac{AP}{PB}$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

ઉદાહરણ 1 : A(8, 4), B(–3, 1) આપેલાં બિંદુઓ છે. બિંદુ P એવું શોધો કે જેથી P એ $\overline{AB}$ નું B તરફથી –1 : 2 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે.

ઉકેલ : $A(x_1, y_1) = (8, 4)$ અને $B(x_2, y_2) = (-3, 1)$

ધારો કે $P(x, y)$ એ $\overline{AB}$ નું B તરફથી $\lambda = \frac{-1}{2}$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

તેથી $P(x, y) = \left(\frac{\lambda x_1 + x_2}{\lambda+1}, \frac{\lambda y_1 + y_2}{\lambda+1}\right)$ **(P એ B તરફથી વિભાજન કરે છે)**

$$= \left(\frac{-\frac{1}{2}(8) + (-3)}{-\frac{1}{2}+1}, \frac{-\frac{1}{2}(4) + 1}{-\frac{1}{2}+1}\right)$$

$$= \left(\frac{-4 + (-3)}{\frac{1}{2}}, \frac{-2 + 1}{\frac{1}{2}}\right) = (-14, -2)$$

$\therefore$ માંગેલ બિંદુ P(–14, –2) છે.

ઉદાહરણ 2 : P(3, 5) અને Q(12, 14)ને જોડતા રેખાખંડનાં ત્રિભાગ બિંદુઓના યામ શોધો.

ઉકેલ :

આકૃતિ 6.5

ધારો કે R અને S એ $\overline{PQ}$ નાં ત્રિભાગ બિંદુઓ છે. બિંદુ R એ $\overline{PQ}$નું P તરફથી 1:2 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

$$R\left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}\right) = R\left(\frac{\frac{1}{2}(12) + 3}{\frac{1}{2} + 1}, \frac{\frac{1}{2}(14) + 5}{\frac{1}{2} + 1}\right)$$

$$= R\left(\frac{12 + 6}{1 + 2}, \frac{14 + 10}{1 + 2}\right)$$

$$= R(6, 8)$$

બિંદુ S એ $\overline{RQ}$નું મધ્યબિંદુ છે.

$\therefore$ બિંદુ Sના યામ $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{6 + 12}{2}, \frac{8 + 14}{2}\right) = (9, 11)$

$\therefore$ આમ R(6, 8) અને S(9, 11) $\overline{PQ}$ નાં ત્રિભાગ બિંદુઓ છે.

નોંધ : અહીં બિંદુઓ P, R, S અને Q ના x-યામ અનુક્રમે 3, 6, 9, 12 છે, જે સમાંતર શ્રેણીમાં છે અને તે જ રીતે y-યામ પણ સમાંતર શ્રેણીમાં છે. તે પરથી $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ આપેલા ભિન્ન બિંદુઓ હોય તો $\overline{AB}$ ના n એકરૂપ ભાગમાં વિભાજન કરતાં બિંદુના યામ માટે $d = \frac{x_2 - x_1}{n}$ અને $d' = \frac{y_2 - y_1}{n}$ લેતાં વિભાજન બિંદુના યામ

$(x_1 + d, y_1 + d'), (x_1 + 2d, y_1 + 2d'), \ldots, (x_1 + (n-1)d, y_1 + \ + (n-1)d')$

ઉદાહરણ 3 : A(3, −2) અને B(0, 7) હોય, તો $P \in \overleftrightarrow{AB}$ શોધો કે જેથી AP = 4AB થાય.

ઉકેલ : (રીત 1) : અહીં, $P \in \overleftrightarrow{AB}$. ધારો કે Pના યામ (x, y) છે.

$\therefore$ AP = 4AB

$\therefore$ $\frac{AP}{4} = \frac{AB}{1} = k$ (ધારો કે)

$\therefore$ AP = $4k$ અને AB = k

વિકલ્પ 1 : A–B–P

આકૃતિ 6.6

બિંદુ P, $\overline{AB}$નું A તરફથી $\lambda = \frac{-AP}{PB} = \frac{-4k}{3k} = \frac{-4}{3}$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

$$\therefore \quad P(x, y) = \left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}\right)$$

$$= \left(\frac{\frac{-4}{3}(0) + 3}{\frac{-4}{3} + 1}, \frac{\frac{-4}{3}(7) + (-2)}{\frac{-4}{3} + 1}\right)$$

$$= \left(\frac{-4(0) + 3(3)}{-4 + 3}, \frac{-4(7) + 3(-2)}{-4 + 3}\right)$$

$$= \left(\frac{9}{-1}, \frac{-28 - 6}{-1}\right) = (-9, 34)$$

$\therefore$ બિંદુ Pના યામ $(-9, 34)$ થાય.

વિકલ્પ 2 : P–A–B

આકૃતિ 6.7

બિંદુ P, $\overline{AB}$નું A તરફથી $\lambda = \frac{-AP}{PB} = \frac{-4}{5}$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

$$\therefore \quad P(x, y) = \left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}\right)$$

$$= \left(\frac{\frac{-4}{5}(0) + 3}{\frac{-4}{5} + 1}, \frac{\frac{-4}{5}(7) + (-2)}{\frac{-4}{5} + 1}\right)$$

$$= \left(\frac{-4(0) + 3(5)}{-4 + 5}, \frac{-4(7) + (-2)5}{-4 + 5}\right)$$

$$= (15, -38)$$

$\therefore$ બિંદુ Pના યામ $(15, -38)$ થાય.

વિકલ્પ 3 : અહીં, AP > AB હોવાથી A–P–B શક્ય નથી.

આમ, Pના યામ $(-9, 34)$ અથવા $(15, -38)$ થાય.

રીત 2 : ધારો કે $P(x, y)$ માંગેલ બિંદુ છે.

અહીં $P \in \overleftrightarrow{AB}$ અને AP = 4AB એટલે કે, $\frac{AP}{AB} = 4$

$\therefore$ બિંદુ A એ $\overline{PB}$નું P તરફથી $\lambda = -4:1$ અથવા $\lambda = 4:1$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

(1) $\lambda = -4:1$ લેતાં,

$$\therefore \quad (3, -2) = \left(\frac{-4(0) + 1(x)}{-4 + 1}, \frac{-4(7) + 1(y)}{-4 + 1}\right)$$

$$\therefore \quad 3 = \frac{-4(0) + 1(x)}{-4 + 1}, \quad -2 = \frac{-4(7) + 1(y)}{-4 + 1}$$

$$\therefore \quad 3 = \frac{x}{-3}, \quad -2 = \frac{-28 + y}{-3}$$

$\therefore$ $x = -9, \qquad y = 34$

$\therefore$ માંગેલ બિંદુ P ના યામ $(-9, 34)$ થાય.

(2) $\lambda = 4:1$ લેતાં,

$$(3, -2) = \left(\frac{4(0) + 1(x)}{4 + 1}, \frac{4(7) + 1(y)}{4 + 1}\right)$$

$$\therefore \quad (3, -2) = \left(\frac{x}{5}, \frac{28 + y}{5}\right)$$

$\therefore$ $3 = \frac{x}{5}$ અને $-2 = \frac{28 + y}{5}$

$\therefore$ $x = 15$ અને $y = -38$

$\therefore$ માંગેલ બિંદુ Pના યામ $(15, -38)$ થાય.

આમ, Pના યામ $(-9, 34)$ અથવા $(15, -38)$ થાય.

સ્વાધ્યાય 6.1

1. $A(3, -5)$ અને $B(2, 3)$ એ આપેલાં બિંદુઓ છે. $\overline{AB}$ નું A તરફથી $2 : 3$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતા બિંદુના યામ શોધો.
2. $A(2, 0)$ અને $B(2, 6)$ આપેલાં છે. $\overline{AB}$ નું B તરફથી $-3 : 5$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતા બિંદુના યામ શોધો.
3. $A(-7, 8)$ અને $B(-3, -5)$ માટે X-અક્ષ એ $\overline{AB}$નું A તરફથી કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે ?
4. બિંદુઓ $A(1, 2)$ અને $B(7, 8)$ને જોડતા રેખાખંડનાં ત્રિભાગ બિંદુઓના યામ શોધો.
5. $A(1, 2)$ અને $B(6, 3)$ આપેલાં બિંદુઓ છે, $3AB = 2PB$ થાય તેવું બિંદુ $P \in \overleftrightarrow{AB}$ મેળવો.
6. $A(1, 2)$ અને $B(0, 3)$ એ આપેલાં બિંદુઓ છે. $P(10, -7) \in \overleftrightarrow{AB}$. P એ $\overline{AB}$ નું A તરફથી કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે ?

*

6.6 રેખાનાં પ્રચલ સમીકરણો

આપણે સૌ જાણીએ છીએ કે, જો $A(x_1, y_1)$ તથા $B(x_2, y_2)$ તો $\forall \lambda \in R - \{0, -1\}$ માટે $\overleftrightarrow{AB}$ પરના A અને B સિવાયનાં તમામ બિંદુઓ $\left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}\right)$ સૂત્ર દ્વારા મેળવી શકાય છે.

તેથી, $$\overleftrightarrow{AB} = \left\{(x, y) \,\middle|\, x = \frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, y = \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}, \lambda \in R - \{0, -1\}\right\} \cup \{A, B\}$$

ધારો કે $t = \frac{\lambda}{\lambda + 1}$. તેથી $1 - t = \frac{1}{\lambda + 1}$.

હવે, $x = \dfrac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}$ અને $y = \dfrac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}$

$\therefore \quad x = \dfrac{\lambda}{\lambda+1} x_2 + \dfrac{1}{\lambda+1} x_1$ અને $y = \dfrac{\lambda}{\lambda+1} y_2 + \dfrac{1}{\lambda+1} y_1$

$\therefore \quad x = tx_2 + (1 - t)x_1$ અને $y = ty_2 + (1 - t)y_1$

વળી $\lambda \neq 0 \Leftrightarrow t \neq 0$ અને $\lambda \neq -1 \Leftrightarrow t \neq 1$

વળી પ્રત્યેક $\lambda \in R - \{0, -1\}$ ને સંગત અનન્ય $t \in R - \{0, 1\}$ મળે તથા

પ્રત્યેક $t \in R - \{0, 1\}$ ને સંગત અનન્ય $\lambda \in R - \{0, -1\}$ મળે.

$\therefore$ પ્રત્યેક $P(x, y) \in \overleftrightarrow{AB} - \{A, B\}$ માટે

$(x, y) = (tx_2 + (1 - t)x_1, ty_2 + (1 - t)y_1), t \neq 0, 1$

$$\overleftrightarrow{AB} = \left\{(x, y) \;\middle|\; \begin{array}{l} x = tx_2 + (1-t)x_1 \\ y = ty_2 + (1-t)y_1 \end{array} ; t \in R - \{0, 1\}\right\} \cup \{A, B\}$$

હવે સમીકરણો $x = tx_2 + (1 - t)x_1, y = ty_2 + (1 - t)y_1$ માં

$t = 0$ મૂકતાં $x = x_1, y = y_1$. તેથી $t = 0$ માટે, $(x, y) = (x_1, y_1)$

$t = 1$ મૂકતાં $x = x_2, y = y_2$. તેથી $t = 1$ માટે, $(x, y) = (x_2, y_2)$

આથી આપણે $t = 0$ તથા 1 મૂલ્યો સ્વીકારીએ તો A તથા B મળે. આમ $t \in R$ લેતાં A અને B નો પણ સમાવેશ થઈ જાય.

$$\therefore \quad \overleftrightarrow{AB} = \left\{(x, y) \;\middle|\; \begin{array}{l} x = tx_2 + (1-t)x_1 \\ y = ty_2 + (1-t)y_1 \end{array} ; t \in R\right\}$$

(x_1, y_1) અને (x_2, y_2) માંથી પસાર થતી રેખા માટે સમીકરણો $x = tx_2 + (1 - t)x_1$ અને $y = ty_2 + (1 - t)y_1$, $t \in R$ ને રેખાનાં પ્રચલ સમીકરણો (Parametric Equations) કહે છે. t ને પ્રચલ કહે છે.

t ને R ના કોઈ ઉપગણ પૂરતો મર્યાદિત રાખીએ, તો રેખાના અનુરૂપ જાણીતા ઉપગણ મળે.

- $$\overline{AB} = \left\{(x, y) \;\middle|\; \begin{array}{l} x = tx_2 + (1-t)x_1 \\ y = ty_2 + (1-t)y_1 \end{array} ; t \in [0, 1]\right\}$$

આકૃતિ 6.8

- $$\overrightarrow{AB} = \left\{(x, y) \;\middle|\; \begin{array}{l} x = tx_2 + (1-t)x_1 \\ y = ty_2 + (1-t)y_1 \end{array} ; t \geq 0\right\}$$

આકૃતિ 6.9

- $\overleftrightarrow{AB} - \overline{AB} = \left\{ (x, y) \,\middle|\, \begin{array}{l} x = tx_2 + (1-t)x_1 \\ y = ty_2 + (1-t)y_1 \end{array} ; t \in R - [0, 1] \right\}$

આકૃતિ 6.10

- $\overrightarrow{BA} = \left\{ (x, y) \,\middle|\, \begin{array}{l} x = tx_2 + (1-t)x_1 \\ y = ty_2 + (1-t)y_1 \end{array} ; t \le 1 \right\}$

આકૃતિ 6.11

- $\overrightarrow{AB} - \overline{AB} = \left\{ (x, y) \,\middle|\, \begin{array}{l} x = tx_2 + (1-t)x_1 \\ y = ty_2 + (1-t)y_1 \end{array} ; t > 1 \right\}$

આકૃતિ 6.12

રેખાનાં પ્રચલ સમીકરણો અનન્ય નથી :

ધારો કે A(1, 2) અને B(3, 5) બે બિંદુઓ છે.

$\overleftrightarrow{AB}$નાં પ્રચલ સમીકરણો,

$x = 3t + 1(1 - t) = 2t + 1$ અને $y = 5t + 2(1 - t) = 3t + 2,\ t \in R$

એટલે કે, $x = 2t + 1,\ y = 3t + 2,\ t \in R$

અહીં, $t = 0$ લેતાં, A(1, 2) અને $t = 1$ લેતાં B(3, 5) મળે છે.

જો $t = 3$ અને $t = 4$ અનુક્રમે લઈએ, તો P(7, 11) અને Q(9, 14) એ $\overleftrightarrow{AB}$ પરનાં બિંદુઓ મળે.

હવે $\overleftrightarrow{PQ}$નાં પ્રચલ સમીકરણો,

$x = 9t' + (1 - t')7 = 2t' + 7,\ y = 14t' + (1 - t')11 = 3t' + 11$

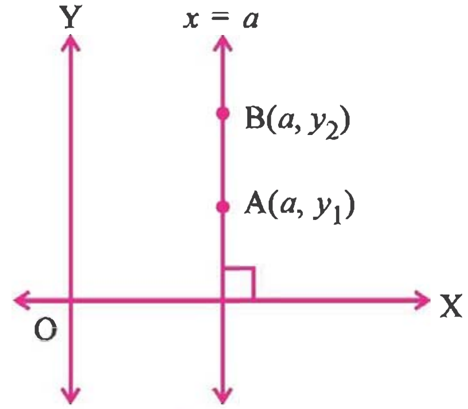
અહીં $t' = 0$ અને 1 અનુક્રમે લેતા P(7, 11) અને Q(9, 14) મળશે.

$\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{AB}$, પરંતુ તેમનાં પ્રચલ સમીકરણો જુદા છે.

પ્રચલ 0 અને 1 લેતાં આપણને જે બિંદુ પરથી પ્રચલ સમીકરણ મળ્યા છે તે બિંદુ મળે છે.

પ્રચલ $t' = t - 3$ લેતાં $\overleftrightarrow{PQ}$ નાં પ્રચલ સમીકરણ $x = 2(t - 3) + 7 = 2t + 1$, $y = 3(t - 3) + 11 = 3t + 2$ થશે જે $\overleftrightarrow{AB}$નાં પ્રચલ સમીકરણ છે. આમ, એક જ રેખાનાં જુદા જુદા પ્રચલ સમીકરણ હોઈ શકે પણ પ્રચલના સુરેખ સંબંધથી એક સમીકરણને બીજા સ્વરૂપમાં ફેરવી શકાય.

6.7 X-અક્ષને લંબરેખાનું સમીકરણ



આકૃતિ 6.13

ધારો કે $A(a, y_1)$ અને $B(a, y_2)$ આપેલ $\overleftrightarrow{AB}$ નાં ભિન્ન બિંદુઓ છે. આથી $\overleftrightarrow{AB}$ નાં પ્રચલ સમીકરણો,

$x = tx_2 + (1 - t)x_1$ અને $y = ty_2 + (1 - t)y_1$, $t \in R$

$= ta + (1 - t)a$

$= a$

$\therefore \quad x = a$

$\overleftrightarrow{AB}$ પરનાં તમામ બિંદુઓનો x-યામ a છે અને y-યામ કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા છે. X-અક્ષને લંબ કોઈ પણ રેખાનો આ લાક્ષણિક ગુણધર્મ છે.

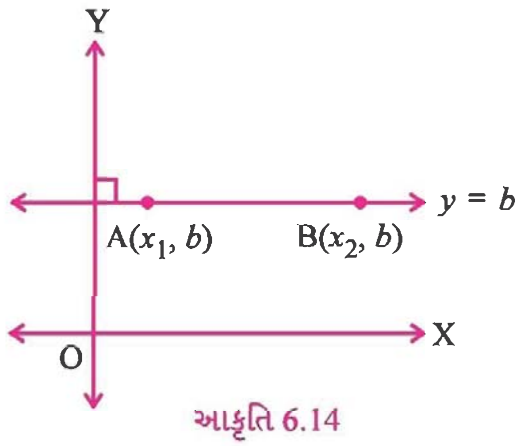
તેથી શિરોલંબ $\overleftrightarrow{AB}$ નું સમીકરણ $x = a$, $a \in R$ છે.

$\overleftrightarrow{AB}$ પરના પ્રત્યેક બિંદુ (x, y) માટે $x = a$ તથા $y \in R$ યથેચ્છ છે.

Y-અક્ષનું સમીકરણ $x = 0$ છે. Y-અક્ષને સમાંતર એટલે કે X-અક્ષને લંબ તમામ રેખાઓનું સમીકરણ $x = a$ છે. $(a \neq 0)$.

આમ, રેખા પરનાં બે બિંદુના x-યામ સમાન હોય તો તેની પરનાં તમામ બિંદુના x-યામ સમાન હોય અને રેખા શિરોલંબ (Vertical) એટલે કે X-અક્ષને લંબ હોય.

6.8 Y-અક્ષને લંબરેખાનું સમીકરણ



આકૃતિ 6.14

ધારો કે $\overleftrightarrow{AB}$ પર આવેલાં ભિન્ન બિંદુઓ $A(x_1, b)$ અને $B(x_2, b)$ છે. આપણે અગાઉ જોયું તે પ્રમાણે Y-અક્ષને લંબરેખા પર આવેલાં બિંદુઓના y-યામ સમાન હોય છે. એટલે કે $y = b$.

તેથી $\overleftrightarrow{AB}$નું સમીકરણ $y = b$, $b \in R$.

Y-અક્ષને લંબ કોઈ પણ રેખા પરના બિંદુ (x, y) નો y-યામ અચળ છે અને x-યામ સ્વૈર છે. આ લાક્ષણિક ગુણધર્મ પરથી આપણે તેનું સમીકરણ $y = b$ લઈએ છીએ. **X-અક્ષનું સમીકરણ $y = 0$ છે. X-અક્ષને સમાંતર તમામ રેખાનું સમીકરણ $y = b$ છે. $(b \neq 0)$.**

આથી રેખા પરનાં બે બિંદુના y-યામ સમાન હોય, તો રેખા પરનાં તમામ બિંદુના y-યામ સમાન હોય છે અને રેખા સમક્ષિતિજ (Horizontal) એટલે કે Y-અક્ષને લંબ છે.

6.9 રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ

રેખાનાં પ્રચલ સમીકરણોમાંથી t નો લોપ કરતાં મળતાં સમીકરણને રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ કહે છે.

$x = tx_2 + (1 - t)x_1$, $y = ty_2 + (1 - t)y_1$; $t \in R$ એ $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ માંથી પસાર થતી રેખાનાં પ્રચલ સમીકરણો છે.

ધારો કે $\overleftrightarrow{AB}$ એ એક પણ અક્ષને લંબ નથી.

$\therefore\quad x_1 \neq x_2$ અને $y_1 \neq y_2$.

કોઈ પણ $P(x, y) \in \overleftrightarrow{AB}$ માટે, $x \neq x_1$, $y \neq y_1$, $x \neq x_2$, $y \neq y_2$.

હવે, $x = tx_2 + (1 - t)\, x_1 = tx_2 + x_1 - tx_1$

$\therefore\quad x - x_1 = t(x_2 - x_1)$ અને તે જ રીતે $y - y_1 = t(y_2 - y_1)$.

$\therefore\quad t = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ અને $t = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

$\therefore\quad \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

સ્પષ્ટ છે કે પ્રતીપ પણ સત્ય છે.

જો $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = t$ (ધારો કે)

$x = tx_2 + (1 - t)\, x_1$, $y = ty_2 + (1 - t)\, y_1$

$\therefore\quad P(x, y) \in \overleftrightarrow{AB}$.

$\therefore$ **રેખાનું કાર્તેઝિય સ્વરૂપે સમીકરણ (Cartesian Equation) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ થાય.**

ઉદાહરણ 4 : નીચે આપેલાં બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખાઓનાં કાર્તેઝિય અને પ્રચલ સમીકરણ શોધો :

(1) (1, 2), (3, 5) (2) (5, 6), (5, −1) (3) (1, 3), (2, 0)

ઉકેલ : (1) રેખાનાં પ્રચલ સમીકરણ :

$$\left.\begin{aligned} x &= tx_2 + (1 - t)\, x_1 \\ y &= ty_2 + (1 - t)\, y_1 \end{aligned}\right\} ;\ t \in R$$

અહીં, $(x_1, y_1) = (1, 2)$ અને $(x_2, y_2) = (3, 5)$

$$\left.\begin{aligned} x &= t\cdot 3 + (1 - t)\cdot 1 \quad \text{અને} & y &= t\cdot 5 + (1 - t)\cdot 2 \\ &= 3t + 1 - t & &= 5t + 2 - 2t \\ &= 2t + 1 & &= 3t + 2 \end{aligned}\right\} t \in R$$

$\therefore$ રેખાનાં પ્રચલ સમીકરણો $x = 2t + 1$, $y = 3t + 2$, $t \in R$ છે.

$\dfrac{x - 1}{2} = t$ અને $\dfrac{y - 2}{3} = t$

$\therefore\quad \dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y - 2}{3}$

$\therefore\quad 3x - 2y + 1 = 0$ એ (1, 2) તથા (3, 5) માંથી પસાર થતી રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ છે.

(2) બિંદુઓ (5, 6) અને (5, −1)માંથી પસાર થતી રેખાનાં પ્રચલ સમીકરણ :

$$\left.\begin{aligned} x &= tx_2 + (1 - t)x_1 \quad \text{અને} & y &= ty_2 + (1 - t)y_1 \\ &= t\cdot 5 + (1 - t)5 & &= t(-1) + (1 - t)6 \\ x &= 5 & &= 6 - 7t \end{aligned}\right\} t \in R$$

રેખાનાં પ્રચલ સમીકરણ : $x = 5$, $y = 6 - 7t$, $t \in R$ છે.

રેખા Y-અક્ષને સમાંતર છે અને તેનું કાર્તેઝિય સમીકરણ $x = 5$ છે.

(3) (1, 3) અને (2, 0) માંથી પસાર થતી રેખાનાં પ્રચલ સમીકરણ :

$$\left.\begin{aligned} x &= tx_2 + (1-t)x_1 \quad \text{અને} \quad & y &= ty_2 + (1-t)y_1 \\ &= t \cdot 2 + (1-t)1 & &= t(0) + (1-t)3 \\ &= t + 1 & &= 3 - 3t \end{aligned}\right\} \quad t \in R$$

રેખાનાં પ્રચલ સમીકરણો : $x = t + 1$, $y = 3 - 3t$, $t \in R$ છે.

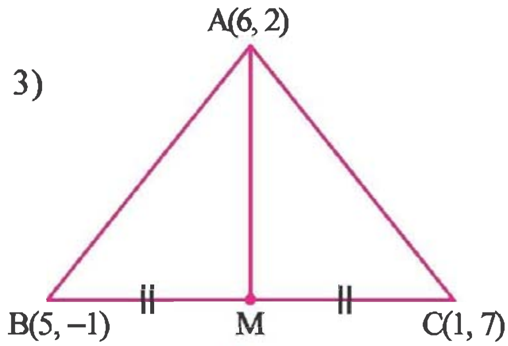
$t = x - 1$ અને $t = \frac{y-3}{-3}$

$\therefore \quad x - 1 = \frac{y-3}{-3}$.

$\therefore \quad -3x + 3 = y - 3$

$\therefore \quad 3x + y - 6 = 0$ એ રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 5 : ΔABC ના શિરોબિંદુ A માંથી પસાર થતી મધ્યગાનું સમીકરણ શોધો. જ્યાં A(6, 2), B(5, −1) અને C(1, 7).



આકૃતિ 6.15

ઉકેલ : $\overline{BC}$નું મધ્યબિંદુ $M = \left(\frac{5+1}{2}, \frac{-1+7}{2}\right) = (3, 3)$

$\overline{AM}$ એ મધ્યગા છે.

$\overline{AM}$ નાં પ્રચલ સમીકરણો

$$\left.\begin{aligned} x &= tx_2 + (1-t)x_1 \\ y &= ty_2 + (1-t)y_1 \end{aligned}\right. ; t \in [0, 1]$$

$$\left.\begin{aligned} x &= t \cdot 3 + (1-t) \cdot 6 = 6 - 3t \\ y &= t \cdot 3 + (1-t) \cdot 2 = 2 + t \end{aligned}\right. ; t \in [0, 1]$$

$\therefore$ મધ્યગા $\overline{AM} = \left\{(x, y) \;\middle|\; \begin{aligned} x &= 6 - 3t \\ y &= 2 + t \end{aligned} ; t \in [0, 1]\right\}$

ઉદાહરણ 6 : એક રેખાનાં પ્રચલ સમીકરણો $x = 2t - 1$ અને $y = 6 - 5t$, $t \in R$. છે. રેખા પર આવેલાં બિંદુ A નો x-યામ 7 છે. તે બિંદુનો y-યામ શોધો.

ઉકેલ : અહીં $x = 2t - 1$. આપેલ બિંદુનો x-યામ 7 છે.

$\therefore \quad 7 = 2t - 1$

$\therefore \quad 2t = 8$

$\therefore \quad t = 4$

સમીકરણ $y = 6 - 5t$ માં $t = 4$ મૂકતાં,

$y = 6 - 5(4) = 6 - 20 = -14$

બિંદુ Aનો y-યામ −14 છે.

ઉદાહરણ 7 : બિંદુ A અને Bના યામ અનુક્રમે (3, 2) અને (4, −3) છે. $P(x, y) \in \overline{AB}$. તો $3x - y$ ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $\overline{AB}$ નાં પ્રચલ સમીકરણો

$x = tx_2 + (1 - t)x_1$ અને $y = ty_2 + (1 - t)y_1$ $t \in [0, 1]$

$= t \cdot 4 + (1 - t) \cdot 3$ $= t(-3) + (1 - t) \cdot 2$ $t \in [0, 1]$

$x = t + 3$ $= -5t + 2$ $t \in [0, 1]$

હવે, $\overline{AB} = \{(x, y) \mid x = t + 3, y = -5t + 2; t \in [0, 1]\}$

હવે, $3x - y = 3(t + 3) - (-5t + 2) = 3t + 9 + 5t - 2 = 8t + 7$

અહીં, $P(x, y) \in \overline{AB}$. તેથી $0 \le t \le 1$

$\therefore$ $0 \le 8t \le 8$

$\therefore$ $0 + 7 \le 8t + 7 \le 8 + 7$

$\therefore$ $7 \le 3x - y \le 15$ **($3x - y = 8t + 7$)**

$\therefore$ $3x - y$ની મહત્તમ કિંમત 15 અને ન્યૂનતમ કિંમત 7 થાય.

ઉદાહરણ 8 : A(1, 2) અને B(−1, 0) આપેલાં બિંદુઓ છે. જો $P(x, y) \in \overline{AB}$ તો $10y - 2x$ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $\overleftrightarrow{AB}$ નાં પ્રચલ સમીકરણો

$x = tx_2 + (1 - t)x_1$

$y = ty_2 + (1 - t)y_1$ $t \in R$

અહીં, A(1, 2) અને B(−1, 0) આપેલાં બિંદુઓ છે.

$\therefore$ $x = t(-1) + (1 - t)1 = -t + 1 - t = 1 - 2t, t \in R$

$y = t(0) + (1 - t)2 = 2 - 2t, t \in R$

હવે, $10y - 2x = 10(2 - 2t) - 2(1 - 2t)$

$= 20 - 20t - 2 + 4t$

$= 18 - 16t$

અહીં $P(x, y) \in \overline{AB}$, હોવાથી $0 \le t \le 1$

$\therefore$ $0 \ge -16t \ge -16$

$\therefore$ $18 + 0 \ge 18 - 16t \ge 18 - 16$

$\therefore$ $18 \ge 10y - 2x \ge 2$ **($10y - 2x = 18 - 16t$)**

$\therefore$ $2 \le 10y - 2x \le 18$

$\therefore$ $10y - 2x$ની મહત્તમ કિંમત 18 છે અને ન્યૂનતમ કિંમત 2 છે.

ઉદાહરણ 9 : A(3, 5) અને B(−2, 1) આપેલાં બિંદુઓ છે. Y-અક્ષ એ $\overline{AB}$ નું A તરફથી કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે ? કયા બિંદુએ ?

ઉકેલ : ધારો કે P(0, y) એ Y-અક્ષ પરનું માંગેલ બિંદુ છે.

ધારો કે P એ $\overline{AB}$ નું A તરફથી λ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

$\therefore$ $(0, y) = \left(\frac{\lambda(-2) + 3}{\lambda + 1}, \frac{\lambda(1) + 5}{\lambda + 1}\right)$

$\therefore \quad \dfrac{-2\lambda + 3}{\lambda + 1} = 0$

$\therefore \quad -2\lambda + 3 = 0$

$\therefore \quad \lambda = \frac{3}{2}$

હવે, $y = \dfrac{\lambda + 5}{\lambda + 1}$

$\therefore \quad y = \dfrac{\frac{3}{2} + 5}{\frac{3}{2} + 1} = \dfrac{3 + 10}{3 + 2} = \dfrac{13}{5}$

$\therefore$ Y-અક્ષ એ $\overline{AB}$ નું A તરફથી $\lambda = \frac{3}{2}$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે અને વિભાજન બિંદુના યામ $\left(0, \frac{13}{5}\right)$ છે.

સ્વાધ્યાય 6.2

1. રેખાનાં પ્રચલ સમીકરણો $x = 2t + 5$ અને $y = 3 - 3t$, $t \in R$ છે. $a + b = 7$ થાય તેવું બિંદુ $P(a, b)$ એ રેખા પર આવેલ છે. P ના યામ શોધો.

2. A(1, –5) અને B(5, –1). જો $P(x, y) \in \overline{AB}$ તો $2x - 5y$ ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.

3. $\overleftrightarrow{AB}$નાં પ્રચલ સમીકરણો $x = 7t - 1$ અને $y = 4t + 7$, $t \in R$ છે. રેખા પર આવેલા બિંદુ Pનો y-યામ 11 હોય, તો તેનો x-યામ શોધો.

4. A(3, 2) અને B(–10, 0) સમતલમાં આવેલાં બિંદુઓ છે. તે પરથી $\overleftrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overline{AB}$, $\overleftrightarrow{AB} - \overline{AB}$ને ગણ સ્વરૂપે દર્શાવો.

5. A(2, 5) અને B(6, 5) માંથી પસાર થતી રેખા $\overleftrightarrow{AB}$ પર બિંદુ (3, –9) નથી તેમ સાબિત કરો.

6. (–1, 1) અને (2, –3) માંથી પસાર થતી રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ મેળવો.

*

6.10 રેખાનો ઢાળ

ધારો કે રેખા l એ Y-અક્ષને લંબ નથી. તો આ રેખા X-અક્ષને અનન્ય બિંદુ P માં છેદે છે. ધારો કે $A \in l$ અને A એ X-અક્ષની ઉપરના અર્ધતલમાં છે. ધારો કે B એ $\overrightarrow{PX}$ પરનું કોઈ પણ બિંદુ છે. (આકૃતિ 6.16)

$\angle APB$ ને રેખા l દ્વારા X-અક્ષની ધન દિશા સાથે બનતો ખૂણો કહે છે. જો રેખા Y-અક્ષને લંબ હોય, તો આપણે કહીએ છીએ કે તે X-અક્ષની ધન દિશા સાથે વ્યાપક રેડિયન માપ 0 વાળો ખૂણો બનાવે છે. ધારો કે $m\angle APB = \theta$ તો $0 < \theta < \pi$.

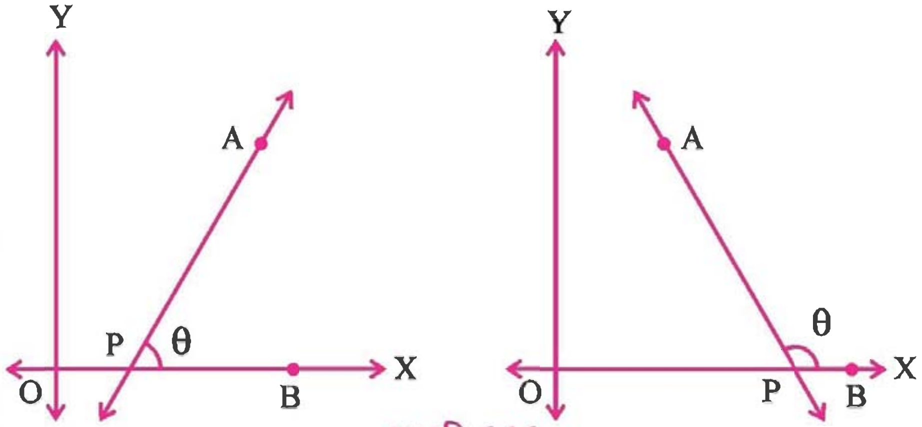
ઢાળ (Slope) : X-અક્ષને લંબ ન હોય તેવી રેખા X-અક્ષની ધન દિશા સાથે ઘડિયાળના કાંટાથી ઊલટી દિશામાં જે ખૂણો બનાવે તેનું માપ θ હોય તો $tan\theta$ ને રેખાનો ઢાળ કહે છે. તેને સંકેતમાં m વડે દર્શાવાય છે.

જો રેખા Y-અક્ષને લંબ હોય તો તેનો ઢાળ $tan 0 = 0$ તરીકે વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

જો રેખા X-અક્ષને લંબ હોય તો તેનો ઢાળ વ્યાખ્યાયિત નથી.

જો રેખાએ X-અક્ષની ધન દિશા સાથે બનાવેલા ખૂણાનું માપ θ હોય, તો $tan\theta$ ને રેખાનો ઢાળ કહે છે. જો રેખાએ X-અક્ષની ધન દિશા સાથે ઘડિયાળના કાંટાથી ઊલટી દિશામાં બનાવેલા ખૂણાનું માપ θ હોય, તો $0 < \theta < \pi$.

જો રેખા X-અક્ષની ધન દિશા સાથે $\frac{\pi}{2}$ માપનો ખૂણો બનાવે તો તેને ઢાળ નથી એટલે કે શિરોલંબ રેખાને ઢાળ નથી. આમ **$m = tan\theta$, $0 < \theta < \pi$, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$.**



આકૃતિ 6.16

સમક્ષિતિજ રેખા એટલે કે Y-અક્ષને લંબ રેખાનો ઢાળ 0 છે. આમ, સારાંશમાં X-અક્ષને લંબ ન હોય તેવી રેખાનો ઢાળ $m = tan\theta$ છે, જ્યાં $0 \leq \theta < \pi$, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$.

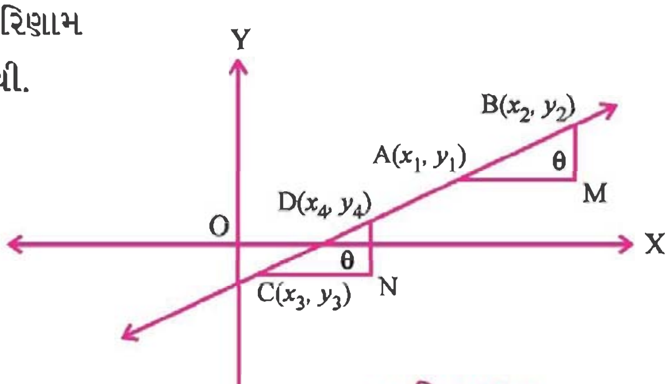
રેખા પર કોઈ પણ બે ભિન્ન બિંદુ આપ્યાં હોય, તો રેખાના ઢાળની અભિવ્યક્તિ

રેખાખંડનો ઢાળ : આપણે રેખાખંડનો ઢાળ વ્યાખ્યાયિત કરીશું અને સાબિત કરીશું કે રેખા પરનાં કોઈ પણ બે રેખાખંડના ઢાળ સમાન છે અને રેખાના રેખાખંડનો અચળ ઢાળ એ જ રેખાનો ઢાળ છે.

ધારો કે $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ એ R^2 નાં બે ભિન્ન બિંદુઓ છે. $x_1 \neq x_2$. તેથી તેમને જોડતી $\overleftrightarrow{AB}$ એ X-અક્ષને લંબ નથી. હવે આપણે $\overline{AB}$નો ઢાળ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

હવે આપણે રેખા પરનાં કોઈ પણ ભિન્ન બિંદુઓની બે જોડ માટે તે અચળ છે તેમ સાબિત કરીશું.

$\overleftrightarrow{AB}$ Y-અક્ષને લંબ હોય તો $m = 0$ હોવાથી પરિણામ સ્પષ્ટ છે. આથી ધારો કે $\overleftrightarrow{AB}$ Y-અક્ષને લંબ નથી.



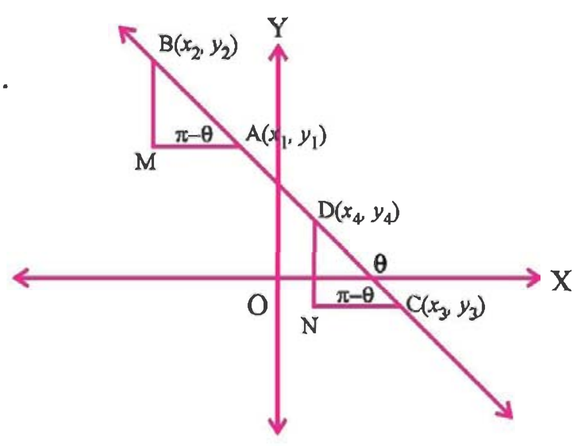
આકૃતિ 6.17 (i)

ધારો કે $\overleftrightarrow{AB}$ પર $C(x_3, y_3)$ અને $D(x_4, y_4)$ બે ભિન્ન બિંદુઓ છે તથા રેખા $\overleftrightarrow{AB}$ એ X-અક્ષને લંબ નથી. તેથી $x_3 \neq x_4$. બિંદુ A માંથી Y-અક્ષને અને Bમાંથી X-અક્ષને લંબ દોરેલ રેખાઓ પરસ્પર Mમાં છેદે છે. તે જ પ્રમાણે બિંદુ C માંથી Y-અક્ષને લંબ અને D માંથી X-અક્ષને લંબ રેખાઓ પરસ્પર Nમાં છેદે છે. આકૃતિ 6.17(i) જુઓ.

ધારો કે $m\angle BAM = \theta$. આથી $m\angle DCN = \theta$.

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

$\overleftrightarrow{AB}$ એ X-અક્ષની ધન દિશા સાથે θ માપનો ખૂણો બનાવે છે.



આકૃતિ 6.17 (ii)

હવે, $tan\theta = \frac{BM}{AM} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

વળી, $tan\theta = \frac{DN}{CN} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$

$\therefore \quad \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$

$\therefore \quad \overline{AB}$નો ઢાળ = $\overline{CD}$નો ઢાળ

આકૃતિ 6.17 (ii) માં $\overleftrightarrow{AB}$ એ X-અક્ષની ધન દિશા સાથે θ માપનો ખૂણો બનાવે છે અને $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

$$tan(\pi - \theta) = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

હવે, $tan(\pi - \theta) = tan(-\theta)$ (*tan* નું આવર્તમાન π છે.)

$= -tan\theta$ (*tan* અયુગ્મ વિધેય છે.)

$\therefore \quad -tan\theta = -\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\therefore \quad tan\theta = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

તે જ રીતે, $tan\theta = \dfrac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$

$\therefore \quad tan\theta = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$

$\therefore$ રેખા પરના કોઈ પણ બે રેખાખંડના ઢાળ સમાન છે અને આ અચળ રેખાનો ઢાળ છે.

$\therefore$ જો $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ શિરોલંબ ના હોય તેવી રેખા પરનાં ભિન્ન બિંદુઓ હોય, તો $\overleftrightarrow{AB}$ નો ઢાળ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

જો રેખા સમક્ષિતિજ હોય એટલે કે Y-અક્ષને લંબ હોય તો $y_1 = y_2$ તથા $y_3 = y_3$.

આથી સમક્ષિતિજ રેખાનો ઢાળ $m = 0$.

આમ પ્રત્યેક વિકલ્પમાં શિરોલંબ ના હોય તેવી $\overleftrightarrow{AB}$ માટે $m = tan\theta = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

6.11 બે ચલમાં સુરેખ સમીકરણ

x અને y ચલવાળું એકઘાતીય (સુરેખ) સમીકરણ (Linear Equation) રેખા દર્શાવે છે.

$S = \{(x, y) \mid ax + by + c = 0, a^2 + b^2 \neq 0, a, b, c \in R\}$ રેખા દર્શાવે છે.

સાબિતી : સમીકરણ $ax + by + c = 0$, $a, b, c \in R$, $a^2 + b^2 \neq 0$ એ R^2માં સુરેખ સમીકરણ છે.

જો $a \neq 0$, $b = 0$, તો $S = \left\{(x, y) \mid x = \frac{-c}{a}\right\}$ અને S શિરોલંબ રેખા દર્શાવે છે.

જો $a = 0$, $b \neq 0$, તો $S = \left\{(x, y) \mid y = \frac{-c}{b}\right\}$ અને S સમક્ષિતિજ રેખા દર્શાવે છે.

ધારો કે $a \neq 0$, $b \neq 0$.

$\left(\frac{-c}{a}, 0\right)$ અને $\left(-\frac{c+b}{a}, 1\right)$ એ S નાં બે ભિન્ન ઘટક છે.

ધારો કે બિંદુઓ $A(x_1, y_1) \in S$, $B(x_2, y_2) \in S$

$\therefore$ $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ એ $ax + by + c = 0$ નું સમાધાન કરે છે.

$\therefore$ $ax_1 + by_1 + c = 0$ અને $ax_2 + by_2 + c_2 = 0$

હવે $\overleftrightarrow{AB}$ નાં પ્રચલ સમીકરણો :

$$\left.\begin{aligned} x &= tx_2 + (1 - t)x_1 \\ y &= ty_2 + (1 - t)y_1 \end{aligned}\right\} ; t \in R$$

ધારો કે બિંદુ $C(x_3, y_3)$ એ $\overleftrightarrow{AB}$ પર આવેલ બિંદુ છે.

$\therefore$ કોઈક $t \in R$ માટે $x_3 = tx_2 + (1 - t)x_1$ તથા $y_3 = ty_2 + (1 - t)y_1$

હવે $ax_3 + by_3 + c = a[tx_2 + (1 - t)x_1] + b[ty_2 + (1 - t)y_1] + c(t + 1 - t)$

$$= t(ax_2 + by_2 + c) + (1 - t)(ax_1 + by_1 + c)$$

$$= t \cdot 0 + (1 - t)0 = 0$$

$\therefore$ $C(x_3, y_3)$ એ $ax + by + c = 0$ વડે દર્શાવાતા બિંદુગણ પર આવેલ બિંદુ છે.

$\overleftrightarrow{AB}$ પરનાં બધાં જ બિંદુઓ $ax + by + c = 0$ નું સમાધાન કરે છે.

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \subset S$

હવે, $A(x_1, y_1) \in S$, $B(x_2, y_2) \in S$. ધારો કે, $C(x_3, y_3) \in S$.

A, B, C એ $ax + by + c = 0$ નું સમાધાન કરે છે. $a^2 + b^2 \neq 0$, $a, b, c \in R$

$ax_1 + by_1 + c = 0$ (i)

$ax_2 + by_2 + c = 0$ (ii)

$ax_3 + by_3 + c = 0$ (iii)

હવે, $a \neq 0$, $b \neq 0$

$\therefore$ $y_1 \neq y_2$, $x_1 \neq x_2$, $y_2 \neq y_3$, $x_2 \neq x_3$, $y_3 \neq y_1$, $x_3 \neq x_1$,

સમીકરણ (i) અને (ii) પરથી, $ax_1 + by_1 = ax_2 + by_2$

$$\therefore \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-a}{b}$$

તે જ રીતે સમીકરણ (ii) અને (iii) પરથી,

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{-a}{b}$$

$$\therefore \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$$

$$\therefore \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = t \text{ (ધારો)}$$

$$\therefore \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = t \text{ અને } \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = t$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} y_3 &= ty_2 + (1 - t)y_1 \\ x_3 &= tx_2 + (1 - t)x_1 \end{aligned}\right\} ; t \in R$$

$\therefore \quad C(x_3, y_3) \in \overleftrightarrow{AB}$.

$\therefore \quad S \subset \overleftrightarrow{AB}$.

$\therefore \quad S = \overleftrightarrow{AB}$ તથા S એક રેખા દર્શાવે છે.

યાદ રાખો :

- જો $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, તો $\overleftrightarrow{AB}$નો ઢાળ ધન હોય છે.
- જો $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, તો $\overleftrightarrow{AB}$નો ઢાળ ઋણ હોય છે.
- જો $\overleftrightarrow{AB}$ એ Y-અક્ષને લંબ હોય, તો $\overleftrightarrow{AB}$નો ઢાળ શૂન્ય છે.
- જો $\overleftrightarrow{AB}$ એ X-અક્ષને લંબ હોય, તો $\overleftrightarrow{AB}$નો ઢાળ વ્યાખ્યાયિત નથી.

ઉદાહરણ 10 : A(1, 2) અને B(3, 6)માંથી પસાર થતી રેખાનો ઢાળ શોધો.

ઉકેલ : $\overleftrightarrow{AB}$નો ઢાળ $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-2}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$

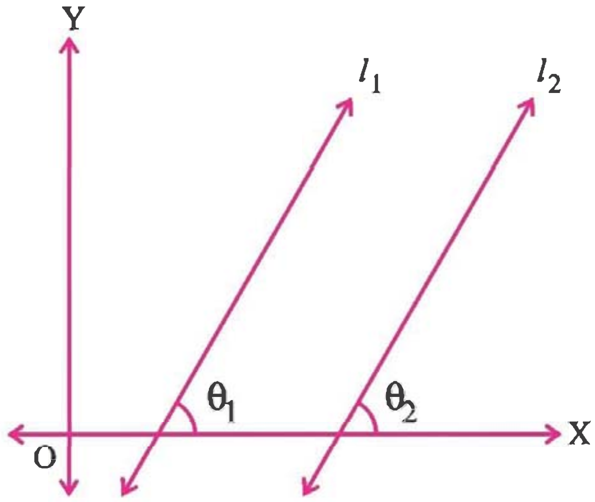
6.12 બે ભિન્ન રેખાઓ પરસ્પર સમાંતર હોવા માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત

ધારો કે l_1 અને l_2 આપેલ ભિન્ન રેખાઓ છે. l_1 અને l_2 રેખાઓ સમક્ષિતિજ કે સમાંતર રેખા નથી.

રેખાઓ l_1 અને l_2 ના ઢાળ અનુક્રમે m_1 અને m_2 છે. $m_1 \neq 0$, $m_2 \neq 0$.

ધારો કે રેખાઓ l_1 અને l_2 X-અક્ષની ધન દિશા સાથે અનુક્રમે θ_1 અને θ_2 માપના ખૂણાઓ રચે છે.

તેથી $0 < \theta_1, \theta_2 < \pi$ અને $\theta_1 \neq \frac{\pi}{2}, \theta_2 \neq \frac{\pi}{2}$



આકૃતિ 6.18

$\therefore \quad m_1 = tan\theta_1$ અને $m_2 = tan\theta_2$

હવે, $l_1 \parallel l_2 \iff \theta_1 = \theta_2$

$\iff tan\theta_1 = tan\theta_2$ $\quad \left(tan \text{ એક-એક વિધેય છે. } \theta \in (0, \pi) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}\right)$

$\iff m_1 = m_2$

જો રેખાઓ l_1 અને l_2 એ Y-અક્ષને લંબ હોય, તો $m_1 = 0$ અને $m_2 = 0$.

તેથી $m_1 = m_2$. ઊલટું જો $m_1 = m_2 = 0$ તો l_1 અને l_2 રેખાઓ Y-અક્ષને લંબ છે.

$\therefore \quad l_1$ અને l_2 પરસ્પર સમાંતર થાય.

તે જ રીતે રેખાઓ l_1 અને l_2 એ X-અક્ષને લંબ હોય, તો બંને રેખાઓના ઢાળ અવ્યાખ્યાયિત થાય. જો બે રેખાઓના ઢાળ અવ્યાખ્યાયિત હોય, તો બંને X-અક્ષો લંબ હોય. તેથી તેઓ પરસ્પર સમાંતર જ હોય.

આમ $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow$ બંનેના ઢાળ સમાન છે અથવા બંને પૈકી એકેયને ઢાળ નથી.

ઉદાહરણ 11 : A(2, k), B(−1, 3), C(1, 7) અને D(3, 2) આપેલ બિંદુઓ છે તથા $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ તો k શોધો.

ઉકેલ : $\overleftrightarrow{AB}$ નો ઢાળ $= \frac{3-k}{-1-2} = \frac{3-k}{-3}$

$\overleftrightarrow{CD}$નો ઢાળ $= \frac{2-7}{3-1} = \frac{-5}{2}$. અહીં $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB}$ નો ઢાળ $=$ $\overleftrightarrow{CD}$નો ઢાળ

$\therefore \quad \frac{3-k}{-3} = \frac{-5}{2}$

$\therefore \quad 6 - 2k = 15$

$\therefore \quad 2k = -9$

$\therefore \quad k = \frac{-9}{2}$

વળી, B, C, D સમરેખ નથી. (ચકાસો !)

આથી, $\overleftrightarrow{AB} \neq \overleftrightarrow{CD}$.

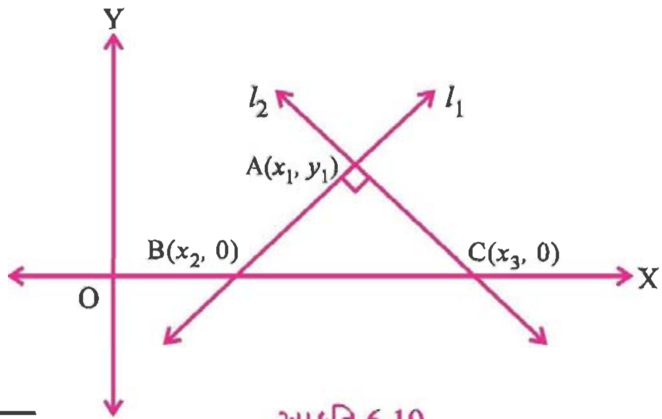
$\therefore \quad \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \Rightarrow k = \frac{-9}{2}$

6.13 બે ભિન્ન રેખાઓ પરસ્પર લંબ હોવા માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત

આપણે પરસ્પર લંબ હોય તેવી રેખાઓ લઈએ. તે પૈકીની એક રેખાને X-અક્ષ અને બીજીને Y-અક્ષ તરીકે લખીશું. જો એક રેખા X-અક્ષને અને બીજી Y-અક્ષને લંબ હોય તો તે પરસ્પર લંબ જ હોય.

બે રેખાઓ પરસ્પર લંબ હોવા માટેની શરત :

ધારો કે બે ભિન્ન રેખાઓ l_1 અને l_2 પૈકી કોઈ પણ રેખા એક પણ અક્ષને લંબ નથી. l_1 એ X-અક્ષને B(x_2, 0) અને l_2 એ X-અક્ષને C(x_3, 0)માં છેદે છે. ધારો કે $l_1 \nparallel l_2$. તેથી l_1 અને l_2 એ A(x_1, y_1)માં છેદે છે. સ્પષ્ટ છે કે l_1નો ઢાળ $m_1 = \frac{y_1}{x_1 - x_2}$ અને l_2નો ઢાળ $m_2 = \frac{y_1}{x_1 - x_3}$.



આકૃતિ 6.19

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow m\angle BAC = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + y_1^2 + (x_1 - x_3)^2 + y_1^2 = (x_2 - x_3)^2$$
$$\Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 + x_1^2 - 2x_1x_3 + x_3^2 + y_1^2 = x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2$$
$$\Leftrightarrow y_1^2 = x_1x_2 - x_2x_3 + x_1x_3 - x_1^2$$
$$\Leftrightarrow y_1^2 = x_2(x_1 - x_3) - x_1(x_1 - x_3)$$
$$\Leftrightarrow y_1^2 = -(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{y_1}{x_1 - x_3}\right)\left(\frac{y_1}{x_1 - x_2}\right) = -1$$
$$\Leftrightarrow m_1m_2 = -1$$

આમ, $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow m_1m_2 = -1$

નોંધ : રેખાઓ શિરોલંબ ન હોવાથી $x_1 \neq x_3$, $x_1 \neq x_2$.

જો રેખાઓ પૈકી એક X-અક્ષને લંબ હોય અને બીજી Y-અક્ષને લંબ હોય તો તે પરસ્પર લંબ છે. અહીં $m_1 = 0$ અને m_2 નું અસ્તિત્વ નથી.

આમ શૂન્યેતર ઢાળવાળી રેખાઓ પરસ્પર લંબ હોવાની આવશ્યક તથા પર્યાપ્ત શરત એ છે કે $m_1m_2 = -1$.

ઉદાહરણ 12 : સાબિત કરો કે A(2, 1), B(1, 2) અને C(3, 4) એ કાટકોણ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.

ઉકેલ : $\overleftrightarrow{AB}$નો ઢાળ $= \frac{2-1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1$

$\overleftrightarrow{AC}$નો ઢાળ $= \frac{4-1}{3-2} = 3$

$\overleftrightarrow{BC}$નો ઢાળ $= \frac{4-2}{3-1} = \frac{2}{2} = 1$

$\therefore$ અહીં બધી જ રેખાઓ ભિન્ન છે.

$\therefore$ તે ત્રિકોણ રચે છે.

$\overleftrightarrow{AB}$નો ઢાળ $\times$ $\overleftrightarrow{BC}$નો ઢાળ $= (-1)(1) = -1$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$ અને $\angle B$ કાટખૂણો છે.

$\therefore$ A, B, C કાટકોણ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.

6.14 બે છેદતી રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો

R^2ની બે ભિન્ન રેખાઓ પરસ્પર સમાંતર ન હોય તો તે છેદતી રેખાઓ છે.

જો રેખાઓ પરસ્પર લંબ હોય, તે તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું રેડિયન માપ $\frac{\pi}{2}$ થાય.

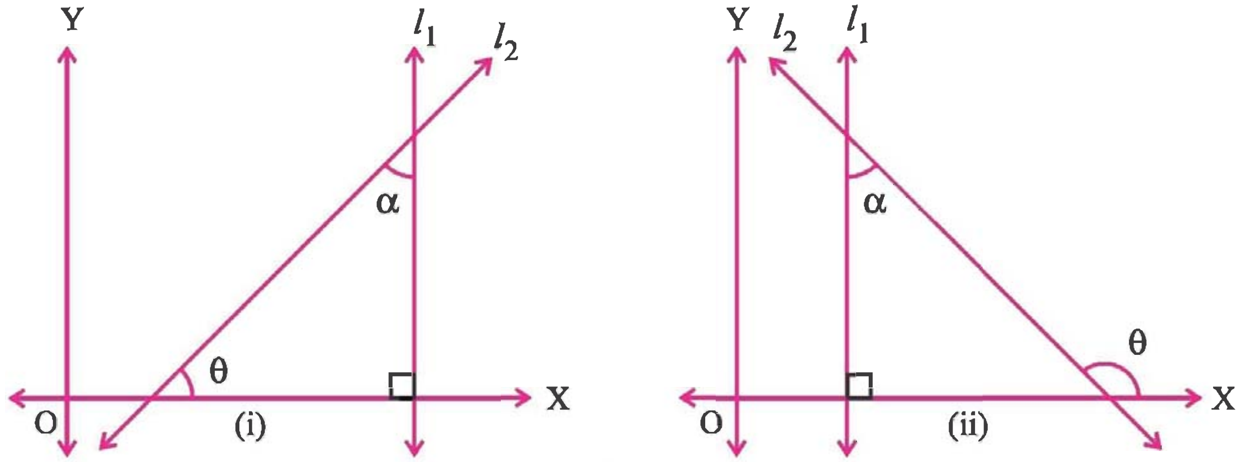
આપણે ત્રિકોણમિતિનું નીચેનું સૂત્ર સ્વીકારીશું. તેનો વિગતે અભ્યાસ બીજા સિમેસ્ટરમાં કરવાનો આવશે.

$$tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{tan\theta_1 - tan\theta_2}{1 + tan\theta_1\ tan\theta_2} \text{ જ્યાં, } tan\theta_1\ tan\theta_2 \neq -1 \qquad \text{(i)}$$

જો રેખાઓ પરસ્પર લંબ ન હોય તો તેમના છેદબિંદુ આગળ એકરૂપ અભિકોણોની બે જોડ રચાય છે. આમાંની એક એકરૂપ ગુરુકોણની જોડ તથા બીજી એકરૂપ લઘુકોણની જોડ છે. આ લઘુકોણના રેડિયન માપને બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ કહે છે.

આ ખૂણાના માપને α વડે દર્શાવીએ તો, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

(1) એક રેખા X-અક્ષને લંબ હોય અને બીજી રેખાનો ઢાળ m હોય, તો તે બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ.



આકૃતિ 6.20

ધારો કે l_1 એ X-અક્ષને લંબ રેખા છે. l_1 નો ઢાળ વ્યાખ્યાયિત નથી. રેખા l_2 એ X-અક્ષની ધન દિશા સાથે θ માપનો ખૂણો બનાવે તો તેનો ઢાળ $m = tan\theta$. $0 < \theta < \pi$, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$.

ધારો કે બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α છે.

આકૃતિ 6.20(i)માં બતાવ્યા પ્રમાણે, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ તેથી $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$.

વળી, $\frac{\pi}{2} - \theta > 0$ અને $\left|\frac{\pi}{2} - \theta\right| = \frac{\pi}{2} - \theta$

આકૃતિ 6.20(ii)માં બતાવ્યા પ્રમાણે, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ તેથી $\alpha = \theta - \frac{\pi}{2} = -\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

વળી, $\frac{\pi}{2} - \theta < 0$ અને $\left|\frac{\pi}{2} - \theta\right| = -\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$\therefore \quad \alpha = \left|\frac{\pi}{2} - \theta\right|$

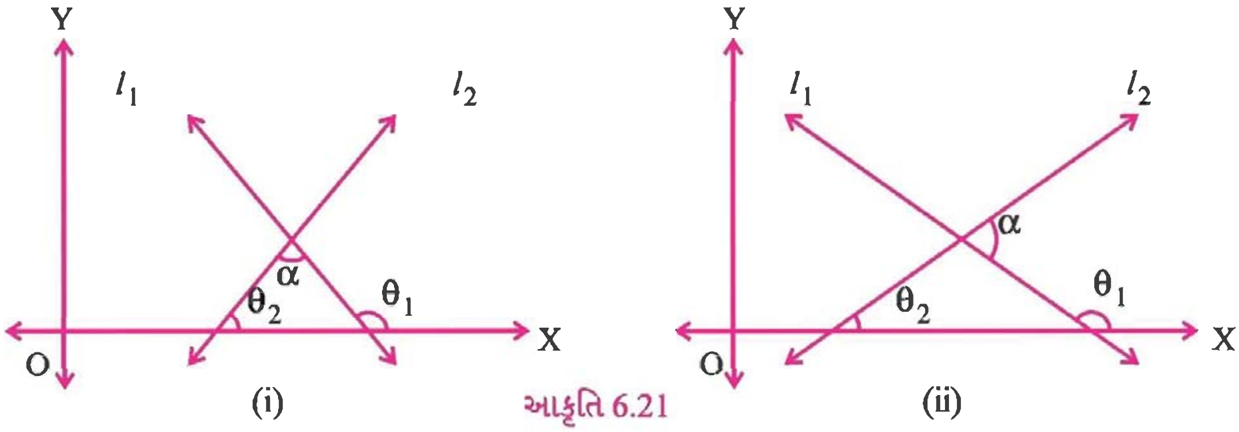
જો એક રેખા શિરોલંબ હોય તથા બીજી રેખા X-અક્ષની ધન દિશા સાથે θ રેડિયન માપનો ખૂણો બનાવે તો બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\alpha = \left|\frac{\pi}{2} - \theta\right|$ છે.

(2) એક પણ રેખા X-અક્ષને લંબ ન હોય તેવી બે પરસ્પર છેદતી રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ

ધારો કે l_1 અને l_2 પૈકી એકેય રેખા એક પણ અક્ષને લંબ નથી. રેખાઓ l_1 અને l_2 ના ઢાળ અનુક્રમે m_1 અને m_2 છે.

રેખાઓ X-અક્ષની ધન દિશા સાથે θ_1 અને θ_2 માપના ખૂણો બનાવે છે.

$m_1 = tan\theta_1$ અને $m_2 = tan\theta_2$, $0 < \theta_1, \theta_2 < \pi$, $\theta_1 \neq \frac{\pi}{2}, \theta_2 \neq \frac{\pi}{2}$



આકૃતિ 6.21

વિકલ્પ 1 : આકૃતિ 6.21(i)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે $\theta_1 = \alpha + \theta_2$

$\therefore \quad \alpha = \theta_1 - \theta_2$

$\therefore \quad tan\alpha = tan(\theta_1 - \theta_2)$

$\therefore \quad tan\alpha = \frac{tan\,\theta_1 - tan\,\theta_2}{1 + tan\,\theta_1\,tan\,\theta_2}$ (i) પરથી

$\therefore \quad tan\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

વિકલ્પ 2 : આકૃતિ 6.21(ii)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે $\theta_1 = (\pi - \alpha) + \theta_2$

$\therefore \quad \alpha = \pi - (\theta_1 - \theta_2)$

$\therefore \quad tan\alpha = tan(\pi - (\theta_1 - \theta_2))$

$= -tan(\theta_1 - \theta_2)$ **$(tan(\pi - \theta) = tan(-\theta) = -tan\theta)$**

$= -\frac{tan\,\theta_1 - tan\,\theta_2}{1 + tan\,\theta_1\,tan\,\theta_2}$

$= -\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

આમ બંને વિકલ્પોમાં આપણે જોયું કે m_1 અને m_2 ઢાળવાળી રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય, તો

$$tan\alpha = \pm\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$$

પરંતુ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. તેથી $tan\alpha > 0$.

$\therefore \quad tan\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$

રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $tan\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$ સૂત્ર વડે શોધાય છે, જ્યાં $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

ઉદાહરણ 13 : A(1, 2), B(3, 5) અને C(6, 1) આપેલાં બિંદુઓ છે. રેખાઓ $\overleftrightarrow{AB}$ અને $\overleftrightarrow{AC}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય તો $tan\alpha$ શોધો.

ઉકેલ : $\overleftrightarrow{AB}$નો ઢાળ $= \frac{5-2}{3-1} = \frac{3}{2}$.

$\overleftrightarrow{AC}$નો ઢાળ $= \frac{1-2}{6-1} = \frac{-1}{5}$.

જો રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય તો

$$\therefore \quad tan\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

$$\therefore \quad tan\alpha = \left|\frac{\frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{5}\right)}{1 + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{5}\right)}\right|$$

$$= \left|\frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{3}{10}}\right|$$

$$= \left|\frac{15+2}{7}\right|$$

$$= \frac{17}{7}$$

> **નોંધ** l_1 અને l_2 આપેલ રેખાઓ છે. m_1 અને m_2 અનુક્રમે રેખા l_1 અને રેખા l_2ના ઢાળ છે. જો રેખા એકબીજાને સમાંતર હોય, તો તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું વ્યાપક માપ 0 છે. આથી $\alpha = 0$.
>
> વળી, $tan\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = 0$, કારણ કે $m_1 = m_2$

6.15 રેખા $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$, $a, b, c \in R$નો ઢાળ

ધારો કે રેખા શિરોલંબ કે સમક્ષિતિજ નથી અને તેથી $a \neq 0, b \neq 0$. તે X-અક્ષને $A\left(\frac{-c}{a}, 0\right)$ અને Y-અક્ષને $B\left(0, \frac{-c}{b}\right)$ માં છેદે છે. $c \neq 0$ તો $A \neq B$.

$$\therefore \quad \text{રેખાનો ઢાળ} = \frac{0 - \left(\frac{-c}{b}\right)}{\frac{-c}{a} - 0} = \frac{-a}{b}$$

જો $a = 0$ તો રેખા સમક્ષિતિજ હોય અને તેથી રેખાનો ઢાળ $m = 0$.

જો $b = 0$ તો રેખા શિરોલંબ રેખા હોય અને તેથી રેખાનો ઢાળ અવ્યાખ્યાયિત થાય.

જો $c = 0$, એટલે કે રેખા ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય તો A = B.

આ સંજોગોમાં આપણે રેખા પરનાં બે ભિન્ન બિંદુ A(0, 0) અને $B\left(\frac{-b}{a}, 1\right)$ લઈએ.

ફરી $m = \dfrac{1-0}{\frac{-b}{a}-0} = \dfrac{-a}{b}$.

જો $b \neq 0$ તો રેખા $ax + by + c = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$ નો ઢાળ $m = \frac{-a}{b}$ છે. જો $b = 0$ તો રેખા શિરોલંબ હોવાથી તેને ઢાળ નથી.

ઉદાહરણ 14 : રેખાઓ $\sqrt{3}x + y = 5$ અને $x + \sqrt{3}y + 7 = 0$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

ઉકેલ : રેખા $\sqrt{3}x + y = 5$ નો ઢાળ $m_1 = -\sqrt{3}$

રેખા $x + \sqrt{3}y + 7 = 0$ નો ઢાળ $m_2 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$

જો રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય, તો

$$\therefore \quad tan\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

$$= \left|\frac{-\sqrt{3} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1 + (-\sqrt{3})\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}\right|$$

$$= \left|\frac{-\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1}\right|$$

$$= \left|\frac{-3+1}{2\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

અહીં $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ હોવાથી $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

આમ રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{6}$ છે.

ઉદાહરણ 15 : રેખાઓ $x - 6 = 0$ અને $\sqrt{3}x - y + 5 = 0$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

ઉકેલ : રેખા $x - 6 = 0$ એ શિરોલંબ રેખા છે.

$\therefore$ તેનો ઢાળ વ્યાખ્યાયિત થાય નહિ.

$\therefore$ રેખા $\sqrt{3}x - y + 5 = 0$ નો ઢાળ $m = tan\theta = \sqrt{3}$ છે.

$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{3}$ **$(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$**

$\therefore$ રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\alpha = \left|\frac{\pi}{2} - \theta\right|$

$$= \left|\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right|$$

$$= \frac{\pi}{6}$$

ઉદાહરણ 16 : રેખાઓ $3x + y + 5 = 0$ અને $x + 2y + 7 = 0$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

ઉકેલ : રેખા $3x + y + 5 = 0$ નો ઢાળ $m_1 = -3$

$\therefore$ રેખા $x + 2y + 7 = 0$ નો ઢાળ $m_2 = -\frac{1}{2}$

જો બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય, તો

$$tan\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

$$= \left|\frac{-3 - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + (-3)\left(-\frac{1}{2}\right)}\right|$$

$$= \left|\frac{-3 + \frac{1}{2}}{1 + \frac{3}{2}}\right|$$

$$= \left|\frac{-6 + 1}{3 + 2}\right|$$

$$= |-1|$$

$$= 1$$

$\therefore \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$ $\quad$ **$\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$**

$\therefore$ રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{4}$ થાય.

સ્વાધ્યાય 6.3

1. બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{4}$ હોય અને તે પૈકીની એક રેખાનો ઢાળ $\frac{1}{3}$ હોય, તો બીજી રેખાનો ઢાળ શોધો.
2. A(2, 1), B(3, −1) અને C(−3, 4) એ ΔPQRની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ હોય તો ત્રિકોણની દરેક બાજુઓના ઢાળ શોધો.
3. A(k, 3), B(2, −1), C(0, 5), D(6, 7) આપેલાં બિંદુઓ છે. નીચેના વિકલ્પો માટે kની કિંમત શોધો : (1) $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (2) $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.
4. P(−1, 2), Q(7, 6), R(−1, 5), S(0, 3) આપેલાં બિંદુઓ છે. સાબિત કરો કે, $\overleftrightarrow{PQ} \perp \overleftrightarrow{RS}$.
5. રેખાઓ $y - 5 = 0$ અને $x + y + 3 = 0$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.
6. ઢાળનો ઉપયોગ કરીને ΔABCની બાજુઓ $\overline{AB}$ અને $\overline{AC}$ નાં મધ્યબિંદુઓને જોડતો રેખાખંડ તેની ત્રીજી બાજુ $\overline{BC}$ને સમાંતર હોય છે તેમ સાબિત કરો.
7. ઢાળનો ઉપયોગ કરી સાબિત કરો કે ચતુષ્કોણનાં મધ્યબિંદુઓને ક્રમમાં જોડતાં મળતો ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય છે.
8. ઢાળના ઉપયોગથી સાબિત કરો કે બિંદુઓ (−1, 4), (2, 3) અને (8, 1) સમરેખ છે.
9. A(2, 6) અને B(0, −1) જેનાં અંત્યબિંદુઓ હોય તેવા રેખાખંડના લંબદ્વિભાજકનો ઢાળ શોધો.

10. $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ આપેલાં બિંદુઓ છે. $P(h, k) \in \overleftrightarrow{AB}$ તો સાબિત કરો કે, $(h - x_1)(y_2 - y_1) = (k - y_1)(x_2 - x_1)$

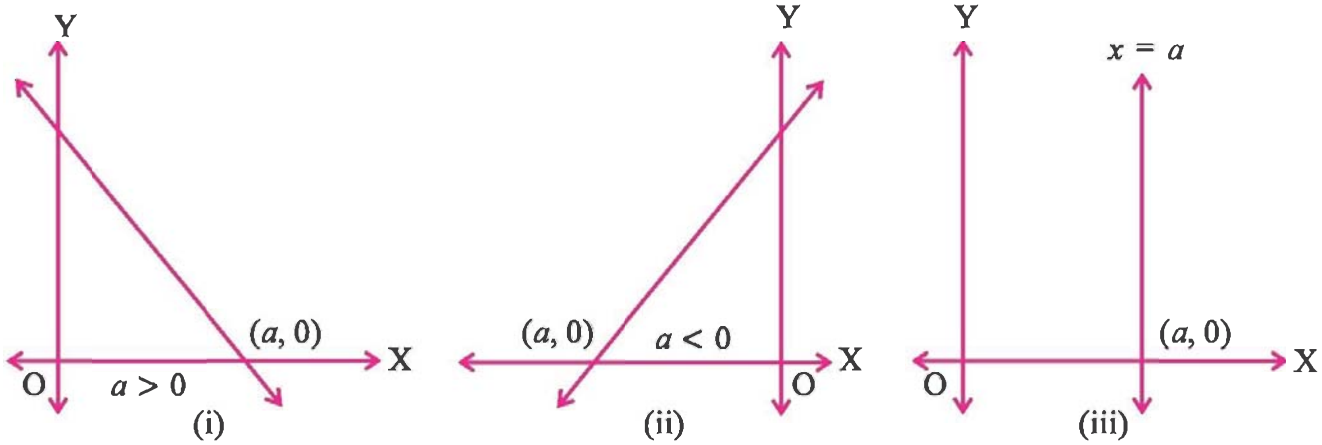
11. $A(3, 1)$ અને $B(1, 5)$ને જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુ અને ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાનો ઢાળ શોધો.

12. ત્રણ ભિન્ન સમરેખ બિંદુ $(2, 0)$, $(0, 3)$ અને (a, b) માટે સાબિત કરો કે $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} = 1$.

13. જો બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય અને $tan\alpha = \frac{1}{3}$ હોય અને તે બે રેખાઓ પૈકીની એક રેખાનો ઢાળ બીજી રેખાના ઢાળ કરતાં બમણો હોય તો તે બે રેખાઓના ઢાળ શોધો.

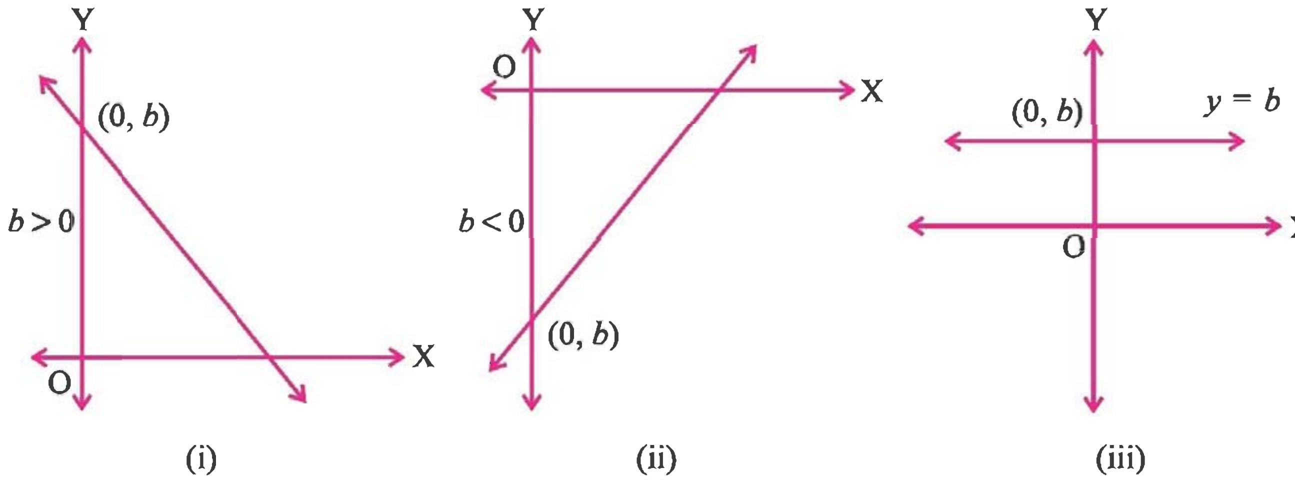
*

6.16 રેખાના અક્ષો પરના અંતઃખંડ



આકૃતિ 6.22

જો રેખા X-અક્ષને અનન્ય બિંદુ $(a, 0)$માં છેદે તો રેખાનો X-અંતઃખંડ (intercept) a છે તેમ કહેવાય. Y-અક્ષને લંબરેખાનો X-અંતઃખંડ ન મળે.



આકૃતિ 6.23

જો રેખા Y-અક્ષને અનન્ય બિંદુ $(0, b)$માં છેદે તો રેખાનો Y-અંતઃખંડ b છે તેમ કહેવાય. X-અક્ષને લંબરેખાનો Y-અંતઃખંડ ન મળે.

હવે આપણે $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$ વડે દર્શાવાતી રેખાના અંતઃખંડ શોધીશું.

જો $a \neq 0$ તો રેખા $ax + by + c = 0$ એ Y-અક્ષને લંબ નથી.

X-અંતઃખંડ શોધવા સમીકરણમાં $y = 0$ મૂકતાં $x = \frac{-c}{a}$ મળે.

આથી રેખા X-અક્ષને અનન્ય બિંદુ $\left(\frac{-c}{a}, 0\right)$માં છેદે છે.

$\therefore$ તેનો X-અંતઃખંડ $\frac{-c}{a}$ છે.

જો $b \neq 0$ તો રેખા $ax + by + c = 0$ એ X-અક્ષને લંબ નથી.

Y-અંતઃખંડ શોધવા સમીકરણમાં $x = 0$ મૂકતાં $y = \frac{-c}{b}$ મળે.

$\therefore$ રેખા Y-અક્ષને અનન્ય બિંદુ $\left(0, \frac{-c}{b}\right)$માં છેદે છે.

$\therefore$ તેથી Y-અંતઃખંડ $\frac{-c}{b}$ છે.

જો $a = 0$, $c \neq 0$ તો રેખાનું સમીકરણ $by + c = 0$ થાય. એટલે કે રેખા X-અક્ષને છેદતી નથી. તેથી X-અંતઃખંડ વ્યાખ્યાયિત નથી. જો $c = 0$ તો રેખા X-અક્ષ પોતે જ છે અને તેને X-અંતઃખંડ નથી. (કેમ ?)

જો $b = 0$, $c \neq 0$ તો રેખાનું સમીકરણ $ax + c = 0$ છે. એટલે કે રેખા Y-અક્ષને છેદતી નથી. તેથી Y-અંતઃખંડ વ્યાખ્યાયિત નથી. જો $c = 0$ તો રેખા Y-અક્ષ પોતે છે અને તેનો Y-અંતઃખંડ નથી.

જો $c = 0$ તથા $a \neq 0$ અને $b \neq 0$ તો રેખાનું સમીકરણ $ax + by = 0$ થાય. માટે તેના બંને અંતઃખંડ શૂન્ય થાય.

ઉદાહરણ 17 : નીચેની રેખાઓ માટે જો વ્યાખ્યાયિત હોય, તો અક્ષો પરના અંતઃખંડો શોધો :

(1) $2x + 3y - 6 = 0$ (2) $2x - 7y = 0$ (3) $2x - 8 = 0$ (4) $2y + 1 = 0$

ઉકેલ : (1) રેખા $2x + 3y - 6 = 0$ માટે, $a = 2$, $b = 3$, $c = -6$

X-અંતઃખંડ $= \frac{-c}{a} = -\frac{(-6)}{2} = 3$, Y-અંતઃખંડ $= \frac{-c}{b} = -\frac{(-6)}{3} = 2$

(2) રેખા $2x - 7y = 0$ માટે, $a = 2$, $b = -7$, $c = 0$

રેખા ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે અને તે એક પણ અક્ષ નથી.

$\therefore$ તેના અંતઃખંડો શૂન્ય છે.

(3) રેખા $2x - 8 = 0$ માટે, $a = 2$, $b = 0$, $c = -8$

અહીં, $b = 0$ હોવાથી રેખા શિરોલંબ છે.

$\therefore$ Y-અંતઃખંડ ન મળે.

X-અંતઃખંડ $= \frac{-c}{a} = -\frac{(-8)}{2} = 4$

(4) રેખા $2y + 1 = 0$ માટે, $a = 0$, $b = 2$, $c = 1$

અહીં $a = 0$ હોવાથી રેખા એ સમક્ષિતિજ રેખા છે.

$\therefore$ X-અંતઃખંડ વ્યાખ્યાયિત નથી.

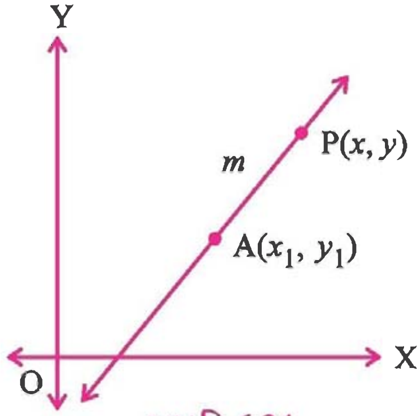
Y-અંતઃખંડ $= \frac{-c}{b} = -\frac{1}{2}$

6.17 રેખાનાં સમીકરણોનાં વિવિધ સ્વરૂપ

(1) બિંદુ-ઢાળ સ્વરૂપ (Point Slope Form) :

ધારો કે $A(x_1, y_1)$માંથી પસાર થતી રેખા X-અક્ષને લંબ નથી તથા તેનો ઢાળ m છે. અહીં રેખા શિરોલંબ નથી. માટે તેના કોઈ પણ બે બિંદુના x-યામ સમાન નથી.

ધારો કે $P(x, y)$ આ રેખા પર આવેલ કોઈ બિંદુ છે. $(x \neq x_1)$



આકૃતિ 6.24

માટે વ્યાખ્યા પ્રમાણે રેખા l નો ઢાળ,

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

એટલે કે, $y - y_1 = m(x - x_1)$

વળી, આ સમીકરણનું સમાધાન કરતું પ્રત્યેક બિંદુ રેખા પર છે.

તેથી (x_1, y_1) માંથી પસાર થતી અને m ઢાળવાળી X-અક્ષને લંબ ન હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

☛ નોંધ જુઓ કે $A(x_1, y_1)$ પણ આ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે.

ઉદાહરણ 18 : બિંદુ (1, 2)માંથી પસાર થતી અને જેનો ઢાળ $\frac{1}{2}$ હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : રેખાનું સમીકરણ $y - y_1 = m(x - x_1)$

$\therefore \quad y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$

$\therefore \quad 2y - 4 = x - 1$

$\therefore \quad x - 2y + 3 = 0$

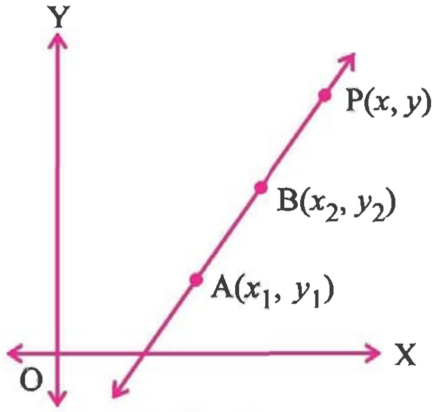
(2) બે બિંદુ સ્વરૂપ (Two Point Form) :

$A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ એ આપેલાં બે ભિન્ન બિંદુઓ છે. ધારો કે $\overleftrightarrow{AB}$ કોઈ પણ અક્ષને લંબ નથી.

$\therefore \quad x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$

ધારો કે $P(x, y)$ એ $\overleftrightarrow{AB}$ પરનું કોઈ પણ બિંદુ છે. $P \neq A, P \neq B$

$\therefore \quad$ A, P, B એ સમરેખ બિંદુઓ છે.



આકૃતિ 6.25

જો રેખા કોઈપણ અક્ષને લંબ ન હોવાથી,

$x \neq x_1, y \neq y_1, x \neq x_2, y \neq y_2$

$\overleftrightarrow{AP}$નો ઢાળ = $\overleftrightarrow{AB}$નો ઢાળ

$$\therefore \quad \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\therefore \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

વળી, આ સમીકરણનું સમાધાન કરતું પ્રત્યેક બિંદુ $\overleftrightarrow{AB}$ પર છે.

જો કોઈ પણ P(x, y) માટે $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = t$ (ધારો કે) તો એ જોવું સરળ છે કે,

$$\left.\begin{aligned} x &= tx_2 + (1 - t)x_1 \\ y &= ty_2 + (1 - t)y_1 \end{aligned}\right. ; t \in R$$

$\therefore \quad P(x, y) \in \overleftrightarrow{AB}$.

અક્ષોને લંબ ન હોય તેવી તથા A(x_1, y_1) અને B(x_2, y_2)માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

☛ નોંધ	જુઓ કે A અને B પણ આ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે.

(3) ઢાળ - અંતઃખંડ સ્વરૂપ સમીકરણ (Slope-intercept Form) :

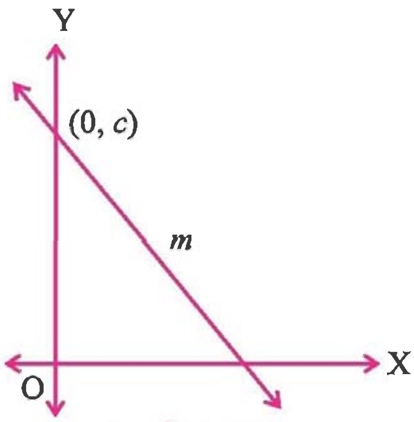
ધારો કે રેખા X-અક્ષને લંબ નથી. તેનો Y-અંતઃખંડ c છે. આ રેખાનો ઢાળ m છે.

$\therefore$ રેખા એ $(0, c)$માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore$ બિંદુ $(0, c)$માંથી પસાર થતી અને m ઢાળવાળી રેખાનું સમીકરણ

$$y - c = m(x - 0)$$

$$\therefore \quad y = mx + c$$



આકૃતિ 6.26

☛ નોંધ	જો m ઢાળવાળી રેખાનો X-અંતઃખંડ d હોય, તો તેનું સમીકરણ $y = m(x - d)$ થાય.

ઉદાહરણ 19 : X-અક્ષની ધન દિશા સાથે $\frac{\pi}{3}$ માપનો ખૂણો બનાવતી અને જેનો Y-અંતઃખંડ 3 હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : અહીં માંગેલ રેખા X-અક્ષની ધન દિશા સાથે $\frac{\pi}{3}$ માપનો ખૂણો બનાવે છે.

$\therefore \quad m = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. વળી, Y-અંતઃખંડ 3 છે.

$\therefore$ રેખાનું સમીકરણ $y = mx + c$

$$\therefore \quad y = \sqrt{3}x + 3$$

(4) રેખાનું અંતઃખંડ સ્વરૂપ (Intercept Form of the Equation of a Line) :

ધારો કે રેખા X-અક્ષ પર a અને Y-અક્ષ પર b અંતઃખંડ કાપે છે, જ્યાં $a \neq 0$, $b \neq 0$.

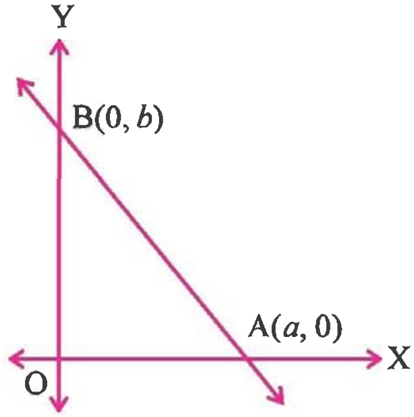
$\therefore$ રેખા l એ બિંદુ A(a, 0) અને B(0, b)માંથી પસાર થાય છે.

રેખાનું સમીકરણ $\frac{y-b}{0-b} = \frac{x-0}{a-0}$ (બે બિંદુ સ્વરૂપ)

$\therefore$ $ay - ab = -bx$

$\therefore$ $bx + ay = ab$

$\therefore$ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ $(a \neq 0, b \neq 0)$



આકૃતિ 6.27

અક્ષો પર a અને b અંતઃખંડ કાપતી રેખાનું સમીકરણ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ છે. જ્યાં, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

> **નોંધ** રેખાના સમીકરણનું આ સ્વરૂપ અક્ષોને લંબ ન હોય તેવી તથા ઊગમબિંદુમાંથી પસાર ન થતી રેખા માટે જ છે.

ઉદાહરણ 20 : જેના અક્ષો પરના અંતઃખંડોનો સરવાળો 6 હોય અને જે બિંદુ (1, 2)માંથી પસાર થતી તેવી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : X-અક્ષ અને Y-અક્ષ પરના અંતઃખંડો અનુક્રમે a અને b હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ,

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

માંગેલ રેખા બિંદુ (1, 2)માંથી પસાર થાય છે. તેથી $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$ (i)

અંતઃખંડોનો સરવાળો 6 છે.

$\therefore$ $a + b = 6$

$\therefore$ $b = 6 - a$

$\therefore$ સમીકરણ (i) પરથી, $\frac{1}{a} + \frac{2}{6-a} = 1$

$6 - a + 2a = 6a - a^2$

$a^2 - 5a + 6 = 0$

$a = 3$ અથવા $a = 2$

$a = 3 \Rightarrow b = 6 - a = 3$

$\therefore$ રેખાનું સમીકરણ $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1$ અથવા $x + y = 3$.

$a = 2 \Rightarrow b = 6 - a = 4$

$\therefore$ રેખાનું સમીકરણ $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$ અથવા $2x + y = 4$.

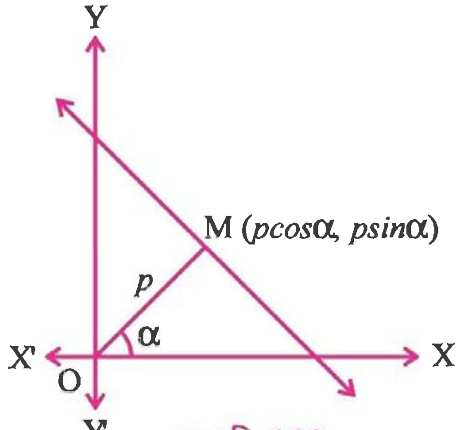
$\therefore$ આથી આપેલ શરત પ્રમાણે બે રેખાઓ $x + y = 3$ અને $2x + y = 4$ મળે.

રેખાનું $p - \alpha$ સ્વરૂપ :

(1) ધારો કે રેખા l ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી નથી.

ઊગમબિંદુમાંથી રેખા પર દોરેલા લંબનો લંબપાદ M છે.

OM = p. અહીં p એ ઊગમબિંદુનું રેખાથી લંબઅંતર છે.



આકૃતિ 6.28

ધારો કે $\overrightarrow{OM}$ X-અક્ષની ધન દિશા સાથે α માપનો ખૂણો બનાવે છે. $\alpha \in (-\pi, \pi]$.

ધારો કે $\alpha \neq 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pi$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{OM}$નો ઢાળ = $tan\alpha$

અહીં $\overleftrightarrow{OM} \perp$ રેખા l,

રેખા lનો ઢાળ $= -\frac{1}{tan\alpha} = -cot\alpha$ **(લંબરેખાઓ માટે $m_1m_2 = -1$)**

રેખા l એ ($pcos\alpha$, $psin\alpha$) માંથી પસાર થાય છે અને તેનો ઢાળ $-cot\alpha$ છે.

$\therefore$ રેખા l નું સમીકરણ, $y - psin\alpha = -cot\alpha\ (x - pcos\alpha)$

$$y - psin\alpha = \frac{-cos\alpha}{sin\alpha}(x - pcos\alpha)$$

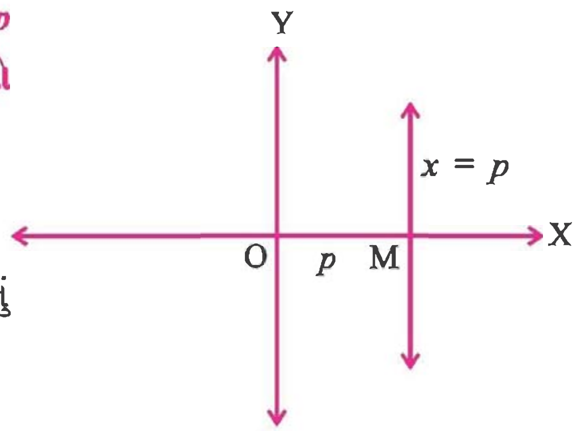
$$ysin\alpha - psin^2\alpha = -xcos\alpha + pcos^2\alpha$$

$\therefore$ $xcos\alpha + ysin\alpha = p(cos^2\alpha + sin^2\alpha)$

$\therefore$ $xcos\alpha + ysin\alpha = p$

ઊગમબિંદુમાંથી રેખા પર દોરેલા લંબની લંબાઈ p હોય અને લંબ એ X-અક્ષની ધન દિશા α માપનો ખૂણો બનાવે તો રેખાનું સમીકરણ

$xcos\alpha + ysin\alpha = p$ $\quad (\alpha \in (-\pi, \pi])$

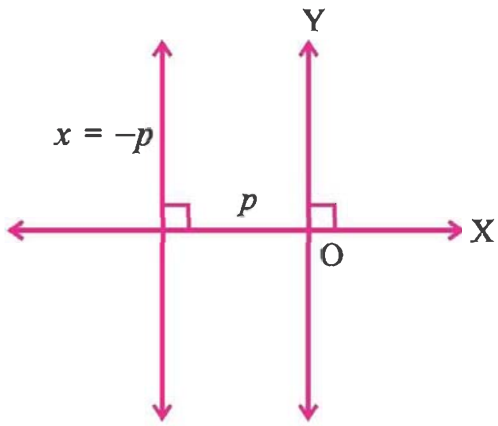


આકૃતિ 6.29

જો $\alpha = 0$ તો રેખા X-અક્ષને લંબ છે અને તેનું સમીકરણ $x = p$ છે.

વળી $cos0 = 1$, $sin0 = 0$.

$x = p$ અને $xcos0 + ysin0 = p$ એક જ છે.



આકૃતિ 6.30

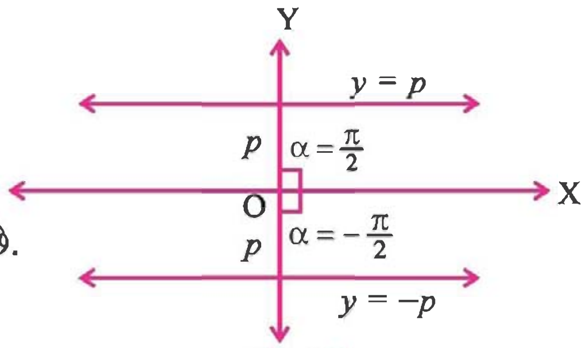
જો $\alpha = \pi$ તો રેખાનું સમીકરણ $x = -p$ છે.

વળી, $cos\pi = -1$, $sin\pi = 0$

$\therefore \quad x cos\pi + y sin\pi = p$

એ $-x = p$ અથવા $x = -p$ જ છે.

જો $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, તો રેખાનું સમીકરણ $\alpha = \frac{\pi}{2}$ અથવા $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ હોય તે અનુસાર અનુક્રમે $y = p$ અથવા $y = -p$ છે.



આકૃતિ 6.31

વળી, $x cos\frac{\pi}{2} + y sin\frac{\pi}{2} = p$ એ $y = p$ જ છે.

$x cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + y sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = p$ એ $y = -p$ જ છે.

આમ તમામ વિકલ્પમાં રેખાનું સમીકરણ

$x cos\alpha + y sin\alpha = p$ છે.

ઉદાહરણ 21 : ઊગમબિંદુમાંથી રેખા પર દોરેલા લંબનું માપ 7 હોય તથા લંબરેખાખંડ X-અક્ષની ધન દિશા સાથે $\frac{\pi}{6}$ માપનો ખૂણો બનાવે તો રેખાનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : અહીં $p = 7$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ રેખાનું સમીકરણ $x cos\alpha + y sin\alpha = p$ લેતાં,

$x cos\frac{\pi}{6} + y sin\frac{\pi}{6} = 7$

$\frac{\sqrt{3}x}{2} + \frac{y}{2} = 7$

$\sqrt{3}x + y = 14$ માંગેલ સમીકરણ છે.

ઊગમબિંદુમાંથી નીકળતું અને ઊગમબિંદુમાંથી રેખા $ax + by + c = 0$, $a, b, c \in R$, $a^2 + b^2 \neq 0$ પરના લંબરેખાખંડને સમાવતું કિરણ એકમ વર્તુળને $P(\alpha)$ માં છેદે, તો લંબરેખાખંડનું માપ p અને α શોધવા. ($p \neq 0$, $\alpha \in (-\pi, \pi]$)

રેખાના સમીકરણનું $p - \alpha$ સ્વરૂપ $x cos\alpha + y sin\alpha = p$ છે.

રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ અનન્ય હોય છે અને તે $ax + by + c = 0$ છે.

ધારો કે રેખા ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી નથી, તેથી $c \neq 0$ અને $p \neq 0$.

જો $a \neq 0$, $b \neq 0$, તો રેખા એક પણ અક્ષને લંબ નથી.

$\therefore \quad \alpha \neq 0, \pi, \frac{\pi}{2}$ અથવા $-\frac{\pi}{2}$.

બંને એક જ રેખાનાં સમીકરણો છે અને તે સમાન છે.

$\therefore \quad \dfrac{a}{\cos\alpha} = \dfrac{b}{\sin\alpha} = -\dfrac{c}{p}$

$\therefore \quad \cos\alpha = \dfrac{-ap}{c},\ \sin\alpha = \dfrac{-bp}{c}$

હવે, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

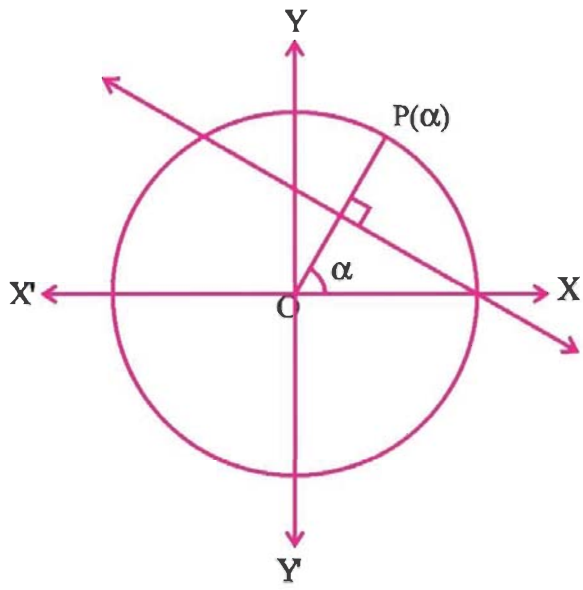
$\therefore \quad \left(\dfrac{-ap}{c}\right)^2 + \left(\dfrac{-bp}{c}\right)^2 = 1$

$\therefore \quad \dfrac{a^2p^2}{c^2} + \dfrac{b^2p^2}{c^2} = 1$

$\therefore \quad \dfrac{p^2}{c^2}(a^2 + b^2) = 1$

$\therefore \quad p^2 = \dfrac{c^2}{a^2+b^2}$

$\therefore \quad p = \pm \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$



આકૃતિ 6.32

$\therefore \quad \cos\alpha = \mp\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha = \mp\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ p = \pm\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

જો $c < 0$, તો $p = \dfrac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\cos\alpha = \dfrac{-ap}{c} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha = \dfrac{-bp}{c} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \alpha \in (-\pi, \pi]$

જો $c > 0$, તો $p = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

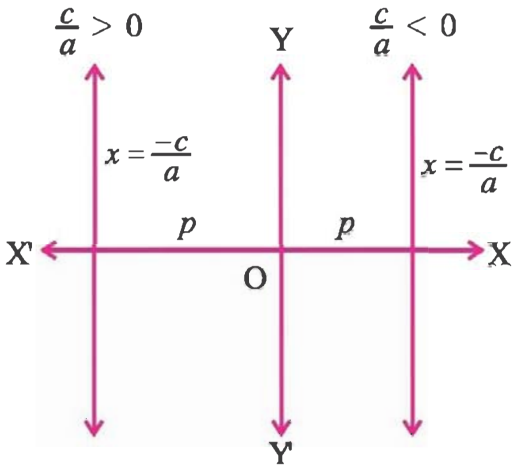
$\cos\alpha = \dfrac{-ap}{c} = \dfrac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha = \dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$ax + by + c = 0$ રેખા પર ઉગમબિંદુમાંથી દોરેલા લંબની લંબાઈ p તથા ઉગમબિંદુમાંથી રેખા પર દોરેલ લંબને સમાવતું કિરણ એકમ વર્તુળને $P(\alpha)$ માં છેદે તો

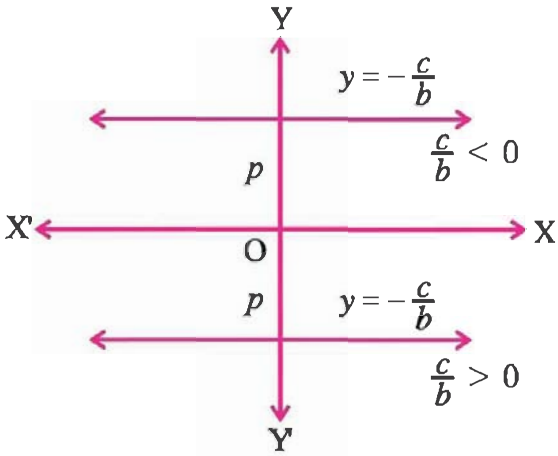
$p = \dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ અને જો $c > 0$ તો $\cos\alpha = \dfrac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha = \dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

તથા જો $c < 0$ તો $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

જો રેખા X-અક્ષને લંબ હોય, તો તેનું સમીકરણ $ax + c = 0$ હોય. સમીકરણ $x = -\frac{c}{a}$ રીતે લખાય. તેથી $p = \left|\frac{c}{a}\right|$ થાય. જો $\frac{c}{a} < 0$ તો $\alpha = 0$ અને જો $\frac{c}{a} > 0$, તો $\alpha = \pi$.



આકૃતિ 6.33



આકૃતિ 6.34

જો રેખા Y-અક્ષને લંબ હોય, તો તેનું સમીકરણ $by + c = 0$ હોય. સમીકરણ $y = -\frac{c}{b}$ રીતે લખાય. તેથી $p = \left|\frac{c}{b}\right|$ થાય. જો $\frac{c}{b} < 0$ તો $\alpha = \frac{\pi}{2}$ અને જો $\frac{c}{b} > 0$, તો $\alpha = -\frac{\pi}{2}$.

ઉદાહરણ 22 : રેખા $\sqrt{3}x + y - 10 = 0$ સમીકરણનું $p - \alpha$ સ્વરૂપમાં રૂપાંતર કરો. તે પરથી p અને αની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $\sqrt{3}x + y - 10 = 0$ એ આપેલ રેખાનું સમીકરણ છે.

$$a = \sqrt{3},\ b = 1,\ c = -10$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

અહીં, $c < 0$. $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$, $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{2} > 0$

$\therefore$ $\alpha = \frac{\pi}{6}$ અને $p = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{10}{2} = 5$

$\therefore$ રેખાના સમીકરણનું $p - \alpha$ સ્વરૂપ, $x\cos\frac{\pi}{6} + y\sin\frac{\pi}{6} = 5$

6.18 $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$ને સમાંતર અને લંબરેખાઓની સંહતિ

(i) ધારો કે $ax + by + c = 0$ એ X-અક્ષને લંબ ન હોય તેવી રેખા છે.

$\therefore$ $b \neq 0$ હોવાથી રેખાનો ઢાળ $\frac{-a}{b}$ થશે.

વળી, રેખા $ax + by + k = 0$, $(k \in R - \{c\})$નો ઢાળ પણ $\frac{-a}{b}$ થશે. આમ, રેખાઓ $ax + by + c = 0$ અને $ax + by + k = 0$ $(k \neq c)$ પરસ્પર સમાંતર છે.

વળી, કોઈ પણ રેખા $ax + by + c = 0$ને સમાંતર હોય, તો તેનો ઢાળ $\frac{-a}{b}$ જ થાય અને જો તે રેખા (x_1, y_1) બિંદુમાંથી પસાર થાય, તો તેનું સમીકરણ $(y - y_1) = \frac{-a}{b}(x - x_1)$.

$\therefore \quad ax + by - ax_1 - by_1 = 0$

$-ax_1 - by_1 = k$ લેતાં,

$ax + by + c = 0$ ને સમાંતર રેખા $ax + by + k = 0$ $(k \in R - \{c\})$.

જો $b = 0$ તો $ax + c = 0$ એ X-અક્ષને લંબ થશે અને $ax + k = 0$ $(k \in R - \{c\})$ પણ X-અક્ષને લંબ થશે. તેથી તેઓ પરસ્પર સમાંતર છે.

નોંધ : બિંદુ (x_1, y_1) રેખા $\{(x, y) \mid ax + by + c = 0, a^2 + b^2 \neq 0\}$ પર નથી કારણ કે રેખાઓ સમાંતર છે.

આમ, $ax_1 + by_1 + c \neq 0$

$\therefore \quad -k + c \neq 0$

$\therefore \quad k \neq c$

આમ, **પ્રત્યેક $a, b \in R$, $a^2 + b^2 \neq 0$ માટે $ax + by + c = 0$ ને સમાંતર રેખાઓની સંહતિ $ax + by + k = 0$ છે. $(k \in R - \{c\})$.**

(ii) ધારો કે $ax + by + c = 0$ એક રેખા છે. જ્યાં, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

તેથી રેખા X-અક્ષને કે Y-અક્ષને લંબ નથી.

તેનો ઢાળ $\frac{-a}{b}$ છે અને તેને લંબરેખાનો ઢાળ $\frac{b}{a}$ થશે. **$(m_1m_2 = -1)$**

જો લંબરેખા (x_1, y_1) બિંદુમાંથી પસાર થતી હોય તો તેનું સમીકરણ $y - y_1 = \frac{b}{a}(x - x_1)$.

$\therefore \quad bx - ay - bx_1 + ay_1 = 0$. ધારો કે $ay_1 - bx_1 = k$

$\therefore \quad bx - ay + k = 0$ એ $ax + by + c = 0$ને લંબરેખાનું સમીકરણ છે.

વળી, કોઈ પણ બે રેખાઓ $ax + by + c = 0$ અને $bx - ay + k = 0$ પરસ્પર લંબ થશે, કારણ કે $m_1 = \frac{-a}{b}$, $m_2 = \frac{b}{a}$ અને $m_1m_2 = -1$.

હવે, જો $a = 0$ અથવા $b = 0$, તો $ax + c = 0$ એ $-ay + k = 0$ને લંબ થશે અને $by + c = 0$ એ $bx + k = 0$ને લંબ થશે.

વળી, $ax + c = 0$ને લંબ કોઈ પણ રેખાનું સમીકરણ $-ay + k = 0$ સ્વરૂપનું લઈ શકાય તથા $bx + c = 0$ને લંબ કોઈ પણ રેખાનું સમીકરણ $by + k = 0$ સ્વરૂપનું લઈ શકાય. $k \in R$.

આમ, **પ્રત્યેક રેખા $ax + by + c = 0$ ને લંબરેખાઓની સંહતિ $bx - ay + k = 0$ છે, જ્યાં $k \in R$.**

સ્વાધ્યાય 6.4

1. (8, 7) અને (–2, 5)માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

2. A(1, 2), B(3, 6) અને C(–2, 1) એ ΔABCનાં શિરોબિંદુઓ છે. ΔABCની બાજુ $\overline{BC}$ના લંબદ્વિભાજકનું સમીકરણ શોધો.

3. (1, 2)માંથી પસાર થતી અને X-અક્ષ સાથે $\frac{\pi}{4}$ માપનો ખૂણો બનાવતી રેખાઓનાં સમીકરણ મેળવો.
4. સાબિત કરો કે રેખા $ax + by + c = 0$ ને સમાંતર અને બિંદુ (x_1, y_1) માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$.
5. રેખા $2x + 3y + 10 = 0$ ને લંબ અને જેનો Y-અંતઃખંડ તેના X-અંતઃખંડ કરતાં 2 વધારે હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ શોધો.
6. $(acos^3\theta, asin^3\theta)$માંથી પસાર થતી અને $xsec\theta + ycosec\theta = a$ રેખાને લંબરેખાનું સમીકરણ $xcos\theta - ysin\theta = a(cos^2\theta - sin^2\theta)$ છે. તેમ સાબિત કરો.
7. જેનો X-અંતઃખંડ 3 હોય તેવી રેખા $\sqrt{3}x - y + 5 = 0$ ને લંબરેખાનું સમીકરણ શોધો.
8. રેખા પર ઊગમબિંદુમાંથી દોરેલા લંબરેખાખંડનું માપ 2 હોય તથા લંબરેખાખંડને સમાવતું કિરણ એકમ વર્તુળને $P\left(\frac{\pi}{6}\right)$માં છેદે તો રેખાનું સમીકરણ મેળવો.
9. સમબાજુ ત્રિકોણની એક બાજુને સમાવતી રેખાનું સમીકરણ $2x + 2y - 5 = 0$ અને (1, 2) એ ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ છે. બાકીની બાજુઓને સમાવતી રેખાનાં સમીકરણો મેળવો.
10. (3, 1)માંથી પસાર થતી રેખા પ્રથમ ચરણમાં અક્ષો સાથે 8 એકમ ક્ષેત્રફળવાળો ત્રિકોણ બનાવે તો રેખાનું સમીકરણ મેળવો.
11. $(\sqrt{3}, -1)$માંથી પસાર થતી અને ઊગમબિંદુથી $\sqrt{2}$ લંબઅંતરે આવેલ રેખાનું સમીકરણ મેળવો.
12. એક લંબચોરસના સામસામેનાં બે શિરોબિંદુઓ (–3, 1) અને (1, 1) છે તથા એક બાજુને સમાવતી રેખાનું સમીકરણ $4x + 7y + 5 = 0$, તો બાકીની બાજુઓને સમાવતી રેખાઓનાં સમીકરણ મેળવો.
13. રેખાઓ $3x + 4y + 5 = 0$ અને $4x - 3y - 10 = 0$ પરસ્પર બિંદુ Aમાં છેદે છે. બિંદુ B એ રેખા $3x + 4y + 5 = 0$ પર અને બિંદુ C એ રેખા $4x - 3y - 10 = 0$ પર આવેલાં છે કે જેથી AB = AC. (1, 2)માંથી પસાર થતી રેખા $\overleftrightarrow{BC}$નું સમીકરણ મેળવો.

*

6.19 રેખાની બહારના બિંદુથી રેખાનું લંબઅંતર

ધારો કે રેખા ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી નથી તથા અક્ષોને લંબ નથી.

રેખા $ax + by + c = 0$ એ X-અક્ષ અને Y-અક્ષને અનુક્રમે A અને B માં છેદે છે.

$A\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ અને $B\left(0, -\frac{c}{b}\right)$ છે. (આકૃતિ 6.35)

$P(x_1, y_1)$ એ સમતલમાં આવેલ બિંદુ છે. $\overline{PM} \perp \overleftrightarrow{AB}$ છે. $M \in \overleftrightarrow{AB}$. $P \notin \overleftrightarrow{AB}$

હવે, ΔPABનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\left| x_1\left(0 + \frac{c}{b}\right) - \frac{c}{a}\left(-\frac{c}{b} - y_1\right) + 0(y_1 - 0)\right|$

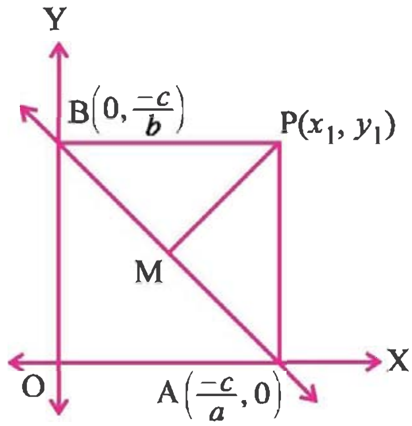
$$= \frac{1}{2}\left|\frac{cx_1}{b} + \frac{cy_1}{a} + \frac{c^2}{ab}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left| (ax_1 + by_1 + c)\frac{c}{ab} \right| \qquad \text{(i)}$$

આ ઉપરાંત ΔPABનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\text{AB} \cdot \text{PM}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}} \cdot \text{PM}$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{c}{ab}\right| \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \text{PM} \qquad \text{(ii)}$$



આકૃતિ 6.35

પરિણામ (i) અને (ii) પરથી,

$$\frac{1}{2}\left|(ax_1 + by_1 + c)\frac{c}{ab}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{c}{ab}\right| \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \text{PM}$$

$$\therefore \quad \text{PM} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$\therefore$ **બિંદુ P(x_1, y_1)થી રેખા $ax + by + c = 0$નું લંબઅંતર $p = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.**

બીજી રીત :

રેખાની બહારના બિંદુથી રેખાનું લંબઅંતર :

આપણે જાણીએ છીએ કે જો રેખાનું સમીકરણ $ax + by + c = 0$ હોય તો રેખાનું ઊગમબિંદુથી લંબઅંતર $p = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ છે.

હવે $ax + by + c = 0$ રેખાની બહારના તે જ સમતલના બિંદુ (x_1, y_1)થી લંબઅંતર શોધવા, ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર (x_1, y_1) આગળ કરતાં, $x = x' + x_1$, $y = y' + y_1$.

રેખાનું નવા અક્ષોને સાપેક્ષ સમીકરણ,

$$a(x' + x_1) + b(y' + y_1) + c = 0$$

$$\therefore \quad ax' + by' + ax_1 + by_1 + c = 0$$

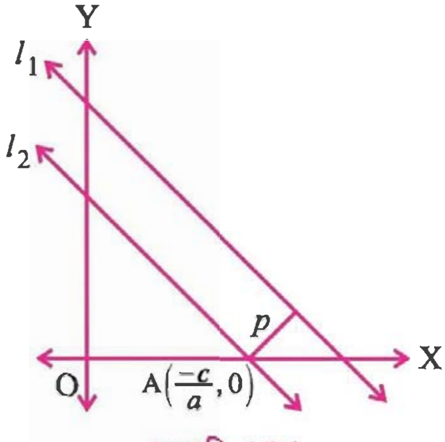
હવે, (x_1, y_1) એ નવું ઊગમબિંદુ થશે.

$\therefore$ એટલે (x_1, y_1)નું $ax + by + c = 0$ થી લંબઅંતર અને

ઊગમબિંદુથી $ax' + by' + ax_1 + by_1 + c = 0$નું લંબઅંતર એક જ છે.

$$\therefore \quad p = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \left(p = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

6.20 બે સમાંતર રેખાઓ વચ્ચેનું લંબઅંતર



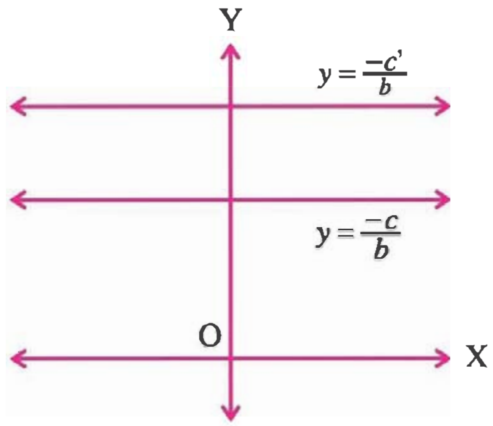
આકૃતિ 6.36

ધારો કે $ax + by + c = 0$ અને $ax + by + c' = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$, $c \neq c'$ સમાંતર રેખાઓનાં સમીકરણ છે.

જો $a \neq 0$ તો બિંદુ $A\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ એ રેખા $ax + by + c = 0$ પર આવેલું બિંદુ છે.

બે રેખાઓ વચ્ચેનું લંબઅંતર એ એક રેખાના કોઈ પણ બિંદુથી બીજી રેખાના લંબઅંતર જેટલું હોય છે.

તેથી રેખા $ax + by + c' = 0$ નું બિંદુ $A\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$થી લંબઅંતર એ બે રેખાઓ વચ્ચેનું લંબઅંતર છે.



આકૃતિ 6.37

ધારો કે p એ બે રેખાઓ વચ્ચેનું લંબઅંતર હોય, તો

$$p = \frac{\left|a\left(-\frac{c}{a}\right) + b(0) + c'\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$p = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

જો $a = 0$ તો $b \neq 0$. તેથી બે સમાંતર રેખાઓનાં સમીકરણો $by + c = 0$ અને $by + c' = 0$ થાય.

$\therefore$ રેખાઓનાં સમીકરણ $y = -\frac{c}{b}$ અને $y = -\frac{c'}{b}$ થાય.

$$\text{તેમની વચ્ચેનું લંબઅંતર} = \left|\frac{-c}{b} - \left(\frac{-c}{b'}\right)\right|$$

$$= \frac{|c - c'|}{|b|}$$

$$= \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (a = 0)$$

આમ, બધા જ વિકલ્પોમાં સમાંતર રેખાઓ $ax + by + c = 0$ અને $ax + by + c' = 0$ વચ્ચેનું લંબઅંતર $p = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

6.21 બે ભિન્ન રેખાઓ છેદે તેની શરત

હવે આપણે બે ભિન્ન રેખાઓ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ તથા $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ એક બિંદુમાં છેદે તેની શરત મેળવીશું.

આપેલ રેખાઓ ભિન્ન હોવાથી જો તે પરસ્પર સમાંતર ન હોય તો એક બિંદુમાં છેદશે. પહેલા ધારો કે બે માંથી એક પણ X-અક્ષને લંબ નથી.

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ તથા $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ એક બિંદુમાં છેદે છે.

$\Leftrightarrow$ તેમના ઢાળ સમાન છે.

$\Leftrightarrow$ $m_1 = m_2$ જ્યાં $m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$, $m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$

$\Leftrightarrow$ $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$

$\Leftrightarrow$ $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

$\therefore$ ભિન્ન રેખાઓ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ તથા $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ એકપણ બિંદુમાં છેદે છે.

$\Leftrightarrow$ $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

$\therefore$ જો $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ તથા $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ પૈકી એક X-અક્ષને લંબ ન હોય તો તે એક બિંદુમાં છેદે તેની આવશ્યક તથા પર્યાપ્ત શરત છે, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

જો બંને સમાંતર ન હોય, તો બંને પૈકી એક જ X-અક્ષને લંબ હોઈ શકે.

ધારો કે $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ શિરોલંબ છે અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ શિરોલંબ નથી.

$\therefore$ $b_1 = 0$ અને $b_2 \neq 0$

$\therefore$ $b_1 = 0$ હોવાથી $a_1 \neq 0$

$\therefore$ $a_1b_2 - a_2b_1 = a_1b_2 \neq 0$ **$(a_1 \neq 0, b_2 \neq 0)$**

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ તથા $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ સમાંતર ન હોવાથી એક બિંદુમાં છેદે તો તે માટે પણ $a_1b_2 - a_2b_1 = a_1b_2 \neq 0$.

$\therefore$ ભિન્ન અસમાંતર રેખાઓ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ તથા $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ અનન્ય બિંદુમાં છેદે તેની આવશ્યક તથા પર્યાપ્ત શરત છે, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

6.22 આપેલ રેખાઓના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાઓની સંહતિ

પ્રમેય 1 : જો $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ $(a_i^2 + b_i^2 \neq 0, i = 1, 2)$ એ અનન્ય બિંદુમાં છેદતી રેખાઓ હોય, તો $l(a_1x + b_1y + c_1) + m(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ તેમના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી કોઈક રેખા દર્શાવે છે, જ્યાં $l^2 + m^2 \neq 0$; $l, m \in R$

સાબિતી : સૌપ્રથમ આપણે $(la_1 + ma_2)x + (lb_1 + mb_2)y + (lc_1 + mc_2) = 0$ એ સુરેખ સમીકરણ છે તેમ સાબિત કરીશું. એટલે કે $(la_1 + ma_2)^2 + (lb_1 + mb_2)^2 \neq 0$.

હવે જો શક્ય હોય, તો ધારો કે $(la_1 + ma_2)^2 + (lb_1 + mb_2)^2 = 0$ (i)

હવે $(la_1 + ma_2)^2 \geq 0$ અને $(lb_1 + mb_2)^2 \geq 0$. આથી પરિણામ (i) પરથી,

$$la_1 + ma_2 = 0$$

$$lb_1 + mb_2 = 0$$

$\therefore \quad b_2(la_1 + ma_2) - a_2(lb_1 + mb_2) = 0$

$\therefore \quad l\,(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$. તે જ રીતે $m\,(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$

પરંતુ રેખા અનન્ય બિંદુમાં છેદે છે. તેથી $a_1b_2 - a_1b_1 \neq 0$

$\therefore \quad l = 0 = m$

$\therefore \quad l^2 + m^2 = 0$

પરંતુ $l^2 + m^2 \neq 0$ એ આપેલ છે.

$\therefore$ જેથી મળેલ પરિણામ આપણી ધારણાથી વિપરીત છે.

$\therefore \quad (la_1 + ma_2)^2 + (lb_1 + mb_2)^2 \neq 0$

$\therefore \quad (la_1 + ma_2)x + (lb_1 + mb_2)y + (lc_1 + mc_2) = 0$ એ રેખા દર્શાવે છે.

જો (h, k) એ આપેલ રેખાઓ $a_ix + b_iy + c_i = 0 \ (i = 1, 2)$ નું છેદબિંદુ હોય, તો

$$a_1h + b_1k + c_1 = 0$$

$$a_2h + b_2k + c_2 = 0$$

$\therefore \quad l\,(a_1h + b_1k + c_1) + m(a_2h + b_2k + c_2) = 0$

$\therefore \quad l\,(a_1x + b_1y + c_1) + m(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ એવી રેખા દર્શાવે છે કે જે (h, k) માંથી પસાર થાય છે. એટલે કે રેખાઓ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ના છેદબિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

આ પ્રમેયનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે.

પ્રમેય 2 : જો રેખાઓ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $a_i^2 + b_i^2 \neq 0$, $i = 1, 2$. અનન્ય બિંદુમાં છેદતી હોય, તો તેમના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી કોઈ પણ રેખાનું સમીકરણ કોઈક $l, m \in R$, $l^2 + m^2 \neq 0$ માટે $l\,(a_1x + b_1y + c_1) + m(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ સ્વરૂપનું છે.

આ પ્રમેય આપણે સાબિતી વગર સ્વીકારીશું.

નોંધ જો $l = 0$ તો $m \neq 0$ તેથી $l(a_1x + b_1y + c_1) + m(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ એ $m(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ થાય. એટલે કે $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ દર્શાવે.

તે જ રીતે જો $m = 0$ તો $l \neq 0$ ત્યારે સમીકરણ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ દર્શાવે છે.

માંગેલ રેખા $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, સિવાયની હોય, તો $l \neq 0$.

$\therefore$ $l(a_1x + b_1y + c_1) + m(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ પરથી તેને સમાન સમીકરણ

$(a_1x + b_1y + c_1) + \frac{m}{l}(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ મળે.

$\lambda = \frac{m}{l}$ લેતાં,

જો માંગેલ રેખા $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ સિવાયની હોય, તો આપેલ રેખાઓના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાનાં સમીકરણનું વ્યાપક સ્વરૂપ $a_1x + b_1y + c_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ છે.

પ્રકીર્ણ દાખલા :

ઉદાહરણ 23 : છેદબિંદુ શોધ્યા વગર રેખા $x + y + 4 = 0$ અને $3x - y - 8 = 0$ ના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી અને બિંદુ $(2, -3)$માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : અહીં સ્પષ્ટ છે કે $(2, -3)$ એ આપેલ રેખા $3x - y - 8 = 0$ નું સમાધાન કરતું નથી.

$\therefore$ $3x - y - 8 = 0$ એ રેખા માંગેલ રેખા નથી.

$\therefore$ માંગેલ રેખાનું સમીકરણ $(x + y + 4) + \lambda(3x - y - 8) = 0$

$\therefore$ $(1 + 3\lambda)x + (1 - \lambda)y + (4 - 8\lambda) = 0$ (i)

તે બિંદુ $(2, -3)$માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore$ $(1 + 3\lambda)2 + (1 - \lambda)(-3) + (4 - 8\lambda) = 0$

સાદું રૂપ આપતાં $\lambda = -3$ મળે.

સમીકરણ (i) માં $\lambda = -3$ મૂકતાં,

$\therefore$ $(x + y + 4) + (-3)(3x - y - 8) = 0$

$\therefore$ $-8x + 4y + 28 = 0$

$\therefore$ $2x - y - 7 = 0$ એ માંગેલ રેખાનું સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 24 : $(4, -2)$માંથી પસાર થતી અને જેના પર ઊગમબિંદુમાંથી પર દોરેલા લંબની લંબાઈ 2 હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : માંગેલ રેખાનું સમીકરણ $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$.

અહીં $p = 2$ છે તથા રેખા $(4, -2)$માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore \quad 4cos\alpha - 2sin\alpha = 2$

$\therefore \quad -2sin\alpha = 2 - 4cos\alpha$

$\therefore \quad sin^2\alpha = (1 - 2cos\alpha)^2$

$\therefore \quad sin^2\alpha = 1 - 4cos\alpha + 4cos^2\alpha$

$\therefore \quad 1 - cos^2\alpha = 1 - 4cos\alpha + 4cos^2\alpha$

$\therefore \quad 5cos^2\alpha - 4cos\alpha = 0$

$\therefore \quad cos\alpha\ (5cos\alpha - 4) = 0$

$\therefore$ $cos\alpha = 0$ અથવા $cos\alpha = \frac{4}{5}$

$\therefore$ $cos\alpha = 0 \Rightarrow sin\alpha = -1$ અને $cos\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow sin\alpha = \frac{3}{5}$ **($4cos\alpha - 2sin\alpha = 2$)**

(1) $cos\alpha = 0$, $sin\alpha = -1$ અને $p = 2$ લેતાં,

$\therefore$ રેખાનું સમીકરણ $xcos\alpha + ysin\alpha = p$

$x \cdot 0 + y(-1) = 2$

$\therefore \quad y = -2$

$\therefore$ $y + 2 = 0$ માંગેલ પૈકીની એક રેખાનું સમીકરણ છે.

(2) $cos\alpha = \frac{4}{5}$, $sin\alpha = \frac{3}{5}$ અને $p = 2$ લેતાં,

$\therefore$ રેખાનું સમીકરણ $x\left(\frac{4}{5}\right) + y\left(\frac{3}{5}\right) = 2$

$\therefore$ $4x + 3y = 10$ માંગેલ બીજી રેખાનું સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 25 : અક્ષો સાથે $\frac{50}{\sqrt{3}}$ ક્ષેત્રફળવાળો ત્રિકોણ બનાવતી અને જેના પર ઊગમબિંદુમાંથી દોરેલો લંબ X-અક્ષની ધન દિશા સાથે $\frac{\pi}{6}$ માપનો ખૂણો બનાવે તેવી રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

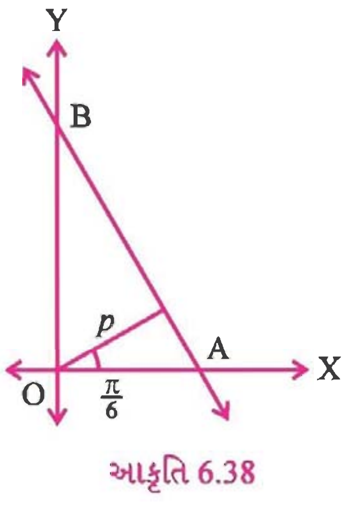
ઉકેલ : ધારો કે $xcos\alpha + ysin\alpha = p$ એ માંગેલ રેખાનું સમીકરણ છે.

અહીં $\alpha = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ રેખાનું સમીકરણ $x\ cos\frac{\pi}{6} + y\ sin\frac{\pi}{6} = p$

$\frac{\sqrt{3}x}{2} + \frac{y}{2} = p$

$\sqrt{3}x + y = 2p$



આકૃતિ 6.38

ધારો કે રેખા X-અક્ષને A અને Y-અક્ષને Bમાં છેદે છે.

$\therefore$ $A\left(\frac{2p}{\sqrt{3}}, 0\right)$ અને $B(0, 2p)$.

હવે, ΔOABનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{50}{\sqrt{3}}$

$\therefore \quad \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{50}{\sqrt{3}}$

$\therefore \quad \frac{1}{2} \frac{2p}{\sqrt{3}} \cdot 2p = \frac{50}{\sqrt{3}}$

$\therefore \quad 2p^2 = 50$

$\therefore \quad p^2 = 25$

$\therefore \quad p = 5$

$\therefore$ રેખાનું સમીકરણ $\sqrt{3}x + y = 10$.

સ્વાધ્યાય 6

1. સાબિત કરો કે, $A(2t^2, 4t)$, $S(2, 0)$ અને $B\left(\frac{2}{t^2}, \frac{-4}{t}\right)$ સમરેખ બિંદુઓ છે.
2. સાબિત કરો કે, $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$થી રેખા $\frac{x}{a} cos\theta + \frac{y}{b} sin\theta = 1$ના લંબઅંતરોનો ગુણાકાર b^2 છે.
3. રેખા X-અક્ષને A અને Y-અક્ષને Bમાં છેદે છે કે જેથી AB = 15 થાય અને $\overleftrightarrow{AB}$એ અક્ષો સાથે જે ત્રિકોણ રચે છે તેનું ક્ષેત્રફળ 54 થાય તેવી રેખાનાં સમીકરણ શોધો.
4. જો રેખાઓ $3x + y + 4 = 0$, $3x + 4y = 20$ અને $24x - 7y + 5 = 0$ થી રચાતો ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે, તેમ સાબિત કરો.
5. સાબિત કરો કે, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$, $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 2$ થી બનતો ચતુષ્કોણ સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.
6. Y-અક્ષ પરનું કયું બિંદુ રેખા $3x + 4y + 5 = 0$ થી 5 એકમ અંતરે આવેલ છે ?
7. (2, 3)માંથી પસાર થતી અને સમાંતર રેખાઓ $2x + y = 3$ અને $2x + y = 5$ વચ્ચે $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ લંબાઈનો રેખાખંડ કાપતી રેખાનું સમીકરણ શોધો.
8. ΔABCમાં A ના યામ $(-4, -5)$ છે તથા બે વેધને સમાવતી રેખાઓનાં સમીકરણ $5x + 3y - 4 = 0$ અને $3x + 8y + 13 = 0$ હોય, તો B અને Cના યામ શોધો.
9. બિંદુ (2, 3)માંથી પસાર થતી અને અક્ષો પર સમાન અંતઃખંડ બનાવતી રેખાનું સમીકરણ શોધો.
10. રેખા X-અક્ષ અને Y-અક્ષને અનુક્રમે બિંદુ A અને B માં છેદે છે. જો (2, 2) એ $\overline{AB}$નું A તરફથી 2:1 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે તો રેખાનું સમીકરણ શોધો.
11. ઊગમબિંદુમાંથી રેખા $bx + ay + ab = 0$ પર દોરેલા લંબની લંબાઈ p હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{p^2}$.
12. અક્ષો પર રચાતા અંતઃખંડોનો સરવાળો અને ગુણાકાર અનુક્રમે 7 અને 12 હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ શોધો.
13. X-અક્ષ પરનું કયું બિંદુ $4x - 3y - 12 = 0$ રેખાથી 4 એકમ અંતરે આવેલ છે ?

14. રેખા $x + y + 1 = 0$ અને $x - y + 1 = 0$ના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી અને ઊગમબિંદુથી 1 એકમે આવેલ રેખાનું સમીકરણ શોધો. (રેખાઓનું છેદબિંદુ શોધ્યા વગર)

15. ઊગમબિંદુમાંથી દોરેલા લંબનો લંબપાદ (1, 2) હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ શોધો.

16. $5x + y + 4 = 0$ અને $2x + 3y - 1 = 0$ના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી અને $4x - 2y - 1 = 0$ ને સમાંતર હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ શોધો. (છેદબિંદુ શોધ્યા વગર)

17. $3x - 4y + 1 = 0$ અને $5x + y - 1 = 0$ના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી અને અક્ષો સાથે રચાતા અંતઃખંડોનું માન સમાન હોય તેવી રેખાનું સમીકરણ શોધો. (રેખાઓનું છેદબિંદુ શોધ્યા વગર)

18. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d)માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને $\square$ માં લખો :

(1) ઊગમબિંદુ Oમાંથી પસાર થતી રેખા એ સમાંતર રેખાઓ $2x + y = 5$ અને $2x + y = 3$ને અનુક્રમે P અને Q માં છેદે છે. ઊગમબિંદુ એ $\overline{PQ}$નું કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે ? $\square$

(a) $\frac{5}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (d) $\frac{-5}{3}$

(2) A(1, 2), B(6, −1) અને C(7, 3) એ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે. $\overline{AD}$એ ત્રિકોણની મધ્યગા છે. (1, 1)માંથી પસાર થતી અને મધ્યગા $\overline{AD}$ને સમાંતર રેખાનું સમીકરણ ...... છે. $\square$

(a) $2x + 11y = 13$ (b) $2x + 11y = 5$ (c) $2x + 11y = 18$ (d) $11x - 2y = 13$

(3) $A\left(2, \frac{-3}{2}\right)$માંથી પસાર થતી અને X-અક્ષને સમાંતર રેખાનું સમીકરણ ...... છે. $\square$

(a) $x = 2$ (b) $2x - 3 = 0$ (c) $2y - 3$ (d) $2y + 3 = 0$

(4) A(−2, 3) અને B(1, 5) નું A તરફથી $1 : \lambda$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતી રેખા $x + y = 4$ હોય તો λ = ... $\square$

(a) 3 : 2 (b) 2 : 3 (c) 1 : 3 (d) −2 : 3

(5) $\overline{AB}$ નાં અંત્યબિંદુઓ $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$, $P(tx_2 + (1 - t)x_1, ty_2 + (1 - t)y_1)$, $t < 0$, તો P એ $\overline{AB}$નું A તરફથી ...... ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે. $\square$

(a) $1 - t$ (b) $\frac{t-1}{t}$ (c) $\frac{1}{1-t}$ (d) $\frac{t}{1-t}$

(6) રેખા $\{(x, y) \mid x = 3t + 1, y = 2t + 6, t \in R\}$ નો ઢાળ = ... $\square$

(a) $-\frac{2}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{3}{2}$ (d) $-\frac{3}{2}$

(7) ઊગમબિંદુથી રેખા $3x + 4y + 10 = 0$ નું લંબઅંતર ...... છે. $\square$

(a) −2 (b) $\frac{2}{5}$ (c) $\frac{1}{5}$ (d) 2

(8) રેખાઓ $x\cos\alpha + y\sin\alpha = \sec\alpha$ અને $x\sin\alpha - y\cos\alpha = \tan\alpha$ નાં ઊગમબિંદુથી લંબઅંતર અનુક્રમે p અને p' હોય, તો $p^2 - p'^2 = ...$ ☐

(a) 1 (b) 2 (c) $\cos^2\alpha$ (d) $\sec^2\alpha \cdot \tan^2\alpha$

(9) સમાંતર રેખાઓ $3x + 4y - 5 = 0$ અને $6x + 8y - 15 = 0$ વચ્ચેનું લંબઅંતર ...... છે. ☐

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{25}{10}$ (d) 2

(10) રેખાઓ $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ અને $x - \sqrt{3}y + 1 = 0$ પરસ્પર લંબ હોય, તો $\alpha = ...$ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ ☐

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

(11) રેખા $x + \sqrt{3}y - 4 = 0$ નું $p-\alpha$ સ્વરૂપ ...... છે. ☐

(a) $x\cos\frac{\pi}{6} + y\sin\frac{\pi}{6} = 2$ (b) $x\cos\frac{\pi}{3} + y\sin\frac{\pi}{3} = 2$

(c) $x\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + y\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2$ (d) $x\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + y\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2$

સારાંશ

1. રેખાખંડનું વિભાજન
2. રેખાનાં પ્રચલ સમીકરણ
3. અક્ષોને લંબરેખા
4. રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ
5. રેખાનો ઢાળ
6. બે રેખાઓ પરસ્પર લંબ હોવાની તથા સમાંતર હોવાની શરત
7. બે રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો
8. રેખાના અક્ષો પરના અંતઃખંડ
9. રેખાના સમીકરણનાં વિવિધ સ્વરૂપો
10. રેખા પર ઊગમબિંદુમાંથી દોરેલ લંબની લંબાઈ, બે સમાંતર રેખાઓ વચ્ચેનું અંતર
11. $ax + by + c = 0$ ને સમાંતર તથા લંબરેખાઓની સંહતિ
12. ભિન્ન અસમાંતર રેખાઓ છેદે તેની શરત
13. બે રેખાના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાઓની સંહતિ