અનિયત સંકલન 2

Science without religion is lame, religion without science is blind.
– Albert Einstein

A man is like a fraction whose numerator is what he is and whose denominator is what he thinks of himself. The larger the denominator, the smaller the fraction.
– Tolstoy

2.1 પ્રાસ્તાવિક

સિમેસ્ટર-IIIમાં આપણે અનિયત સંકલનની વ્યાખ્યા, પ્રમાણિત સંકલિતો, સંકલનના કાર્યનિયમો અને આદેશની રીતનો અભ્યાસ કર્યો. તે ઉપરાંત આપણે ત્રિકોણમિતીય આદેશ, એક વિશિષ્ટ આદેશ $tan\frac{x}{2} = t$; $\int sin^m x \,.\, cos^n x \, dx$, $m, n \in$ N સ્વરૂપના સંકલિતો અને $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\, dx$ અને $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx$. સ્વરૂપના સંકલિતોનો પણ અભ્યાસ કર્યો. તેમ છતાંય કેટલાંક સતત વિધેયો એવાં છે કે જેનું સંકલિત ઉપર દર્શાવેલ રીતોથી મેળવવું મુશ્કેલ છે; ઉદાહરણ તરીકે $\log x$, $sec^{-1}x$, $e^x sinx$, $\frac{x^2+1}{(x^2+2)(2x^2+1)}$ વગેરે. આપણે આવાં વિધેયોના સંકલિતો શોધવા માટે બીજી કેટલીક વધુ પદ્ધતિઓ વિકસાવવી પડશે.

આવાં વિધેયોના સંકલિતો શોધવાની રીતો આપણે આ પ્રકરણમાં શીખીશું. બે વિધેયોના ગુણાકારનું વિકલન કરવા માટેનો નિયમ આપણે જોઈ ગયા. હવે બે વિધેયોના ગુણાકારના સંકલન માટે એક ખૂબ જ ઉપયોગી રીત **ખંડશઃ સંકલન (Integration by Parts)** ની રીત શીખીશું.

2.2 ખંડશઃ સંકલનનો નિયમ

જો (1) વિધેય f અને g એ કોઈ અંતરાલ I = (a, b) પર વિકલનીય હોય,

(2) f' અને g' એ I પર સતત હોય, તો $\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$

સાબિતી : અહીં f અને g એ x નાં વિકલનીય વિધેયો છે એટલે $f \cdot g$ પણ વિકલનીય થશે અને વિકલનના ગુણાકારના નિયમ પ્રમાણે,

$$\frac{d}{dx}[f(x)\;g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \qquad \text{(i)}$$

હવે આપેલ શરતો મુજબ f, g, f', g' અંતરાલ I પર સતત છે અને તેથી સંકલનીય છે.

$\therefore$ fg' અને gf' પણ સતત થાય અને તેથી સંકલનીય થાય.

$\therefore$ પરિણામ (i) પરથી પ્રતિવિકલનની વ્યાખ્યા પ્રમાણે,

$$f(x)\;g(x) = \int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]\;dx$$
$$= \int f(x)\,g'(x)\;dx + \int f'(x)g(x)\;dx$$

$$\therefore \int f(x)\;g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)g(x)\;dx \qquad \text{(ii)}$$

આ નિયમ **ખંડશઃ સંકલનના નિયમ** તરીકે ઓળખાય છે.

ખંડશઃ સંકલનના નિયમનું એક પ્રચલિત સ્વરૂપ :

ખંડશઃસંકલનનો નિયમ $\int f(x)\;g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\;dx$ છે.

આ નિયમમાં $f(x) = u$ અને $g'(x) = v$, લઈએ તો $f'(x) = \frac{du}{dx}$ અને $g(x) = \int v\,dx$ થાય.

$\therefore$ હવે નવા સંકેતોમાં ખંડશઃ સંકલનનો નિયમ નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$\int uv\,dx = u\int v\,dx - \int\left(\frac{du}{dx}\int v\,dx\right)dx. \qquad \text{(iii)}$$

નોંધ : **(1)** ઉપરનાં સૂત્રમાં આપેલ બે વિધેયો u, v ના ગુણાકારનું સંકલિત મેળવવા માટે આપેલ ગુણાકારને બીજાં બે વિધેયોના ગુણાકારમાં રૂપાંતરિત કરીએ છીએ, એક વિધેયનો વિકલિત $\frac{du}{dx}$ અને બીજા વિધેયનો સંકલિત $\int v\,dx$. $\left(\text{i.e. } \frac{du}{dx}\int v\,dx\right)$. એટલે કે આપેલ ગુણાકાર $\int u \cdot v\,dx$ નો સંકલિત સીધે સીધો મળતો નથી, પરંતુ તે બીજા પ્રકારના શક્યતઃ વધુ સરળ સંકલનીય ગુણાકાર $\int\left(\frac{du}{dx}\int v\,dx\right)dx$ માં પરિવર્તિત થાય છે, આથી તેને ખંડશઃસંકલનનું સૂત્ર કહે છે.

(2) આ સૂત્રનો ઉપયોગ કરતી વખતે u અને v ની પસંદગી યોગ્ય રીતે થાય તે ખૂબ જ જરૂરી છે.

ખંડશઃ સંકલનનો નિયમ સમજવા આપણે એક ઉદાહરણ લઈએ.

$\int x \cdot sinx\ dx$ મેળવો

અહીં આપણે $u = x$ અને $v = sinx$ લઈએ તો,

$$\int x \cdot sinx\ dx = x\int sinx\ dx - \int\left(\frac{d}{dx}x \int sin\,x\,dx\right)dx$$

$$= -x\,cosx + \int(1 \cdot cos\,x)\,dx$$

$$= -x\,cosx + sin\,x + c$$

પણ જો $u = sinx$ અને $v = x$ પસંદ કરીએ તો,

$$\int x \cdot sinx\ dx = sin\,x\int x\ dx - \int\left(\frac{d}{dx}(sin\,x)\int x\,dx\right)dx$$

$$= sin\,x \cdot \frac{x^2}{2} - \int\left(cos\,x \cdot \frac{x^2}{2}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}sin\,x - \frac{1}{2}\int x^2\ cos\,x\ dx$$

આમ, u અને v ની આવી પસંદગી કરવાથી x નો ઘાતાંક વધે છે અને બે વિધેયોના ગુણાકારનો સંકલિત x ના વધુ ઘાતાંક વાળા બે વિધેયોના ગુણાકારના સંકલિતમાં ફેરવાય છે, જે મેળવવો મુશ્કેલ થશે. અહીં u અને v ની પસંદગી કરતી વખતે નીચેની બાબતો ધ્યાનમાં રાખીશું :

(i) v નો સંકલિત જ્ઞાત હોય.

(ii) $\frac{du}{dx}\int v\,dx$ નું સંકલન કરવાનું સરળ હોય.

આમ, ઉપરની બે બાબતો ધ્યાનમાં રાખી u અને vની પસંદગી માટે નીચેનો ક્રમ ધ્યાનમાં રાખીશું.

L : Logarithmic function-લઘુગણકીય વિધેય, **I :** Inverse trigonometric function-ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેય, **A :** Algebraic function-બૈજિક વિધેય, **T :** Trigonometric function-ત્રિકોણમિતીય વિધેય, **E :** Exponential function-ઘાતાંકીય વિધેય. આમ, દરેક વિધેયના પહેલા અંગ્રેજી મૂળાક્ષરથી બનતું સૂત્ર **LIATE**. યાદ રાખીશું અને **LIATE** ક્રમમાં પ્રથમ આવતા વિધેયને u કહીશું.આ ક્રમ ઉપર્યુક્ત બે બાબતોને ધ્યાનમાં રાખી નક્કી કર્યો છે. આ એક રૂઢિ છે તે ફરજિયાત નથી.

ઉદાહરણ તરીકે : (1) $x \cdot sin^{-1}x$ માં x બૈજિક વિધેય છે અને $sin^{-1}x$ એ ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેય છે. LIATE સૂત્રમાં ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેય એ બૈજિક વિધેય કરતાં પહેલાં આવે છે, તેથી $u = sin^{-1}x$ અને $v = x$ લઈશું.

(2) $x \cdot e^x$ માં x બૈજિક વિધેય છે અને e^x એ ઘાતાંકીય વિધેય છે. અહીં બૈજિક વિધેય x એ ઘાતાંકીય વિધેય e^x કરતાં ક્રમમાં પ્રથમ આવે છે. તેથી $u = x$ અને $v = e^x$ લઈશું

(3) ખંડશઃસંકલનના નિયમના ઉપયોગ વખતે જ્યારે વિધેય v નું સંકલન કરીએ ત્યારે દરેક વખતે સ્વૈર અચળ દાખલ કરવો જરૂરી નથી. જો આપણે $u = sinx$ નું સંકલન $-cos\,x + k$, કરીએ, જ્યાં k કોઈ અચળ છે,

તો, $\int x\, sinx\; dx = x \int sin\,x\; dx - \int \left(\frac{d}{dx} x \int sin\,x\,dx\right) dx$

$$= x\,(-cosx + k) - \int (-cosx + k)\; dx$$

$$= -x\; cosx + kx + \int cosx\; dx - \int k\; dx$$

$$= -x\; cosx + kx + sin\,x - kx + c$$

$$= -x\; cosx + sin\,x + c$$

આમ, આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે $u = sinx$ નો સંકલિત $-cos\,x + k$ લેતાં k નો લોપ થાય છે, માટે અંતમાં $\int\left(\frac{du}{dx} \int v\,dx\right) dx$ કરતી વખતે જ c લખીશું.

(4) $\log x$, $cosec^{-1}x$, $tan^{-1}x$ જેવા એક જ વિધેયનું સંકલન કરતી વખતે આપણે એવું વિધેય નથી જાણતા કે જેનો વિકલિત $\log x$, $cosec^{-1}x$, $tan^{-1}x$ થાય. તેથી તેમનું સંકલન કરવાં આપણે ખંડશઃસંકલનનો નિયમ વાપરીશું અને આ વિધેયને u સ્વીકારી $v = 1$ લઈશું. અહીં 1 નો સંકલિત x થશે.

ઉદાહરણ તરીકે, $I = \int \log x\; dx$,

$$I = \int \log x \cdot 1\; dx$$

અહીં $u = \log x$ અને $v = 1$ લેતાં,

$$I = \log x \int 1\; dx - \int \left[\frac{d}{dx} \log x \int 1\; dx\right] dx$$

$$= \log x \cdot x - \int \left(\frac{1}{x} \cdot x\right) dx$$

$$= x \log x - \int 1\; dx$$

$$= x \log x - x + c$$

(5) કેટલીક વાર આ સૂત્રનો ઉપયોગ એક થી વધુ વખત(પુનરાવર્તિત રીતે) કરવો પડે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, $I = \int x^2\, e^{5x}\; dx$ લઈએ.

અહીં, $u = x^2$ અને $v = e^{5x}$ લેતાં,

$$I = x^2 \int e^{5x}\; dx - \int \left(\frac{d}{dx} x^2 \int e^{5x}\; dx\right) dx$$

$$= x^2 \cdot \frac{e^{5x}}{5} - \int \left(2x\, \frac{e^{5x}}{5}\right) dx$$

$$= \frac{x^2}{5}\, e^{5x} - \frac{2}{5} \int x\, e^{5x}\; dx$$

$$= \frac{x^2}{5}\, e^{5x} - \frac{2}{5} \left[x \int e^{5x}\; dx - \int \left(\frac{d}{dx} x \int e^{5x}\; dx\right) dx\right]. \qquad (u = x,\ v = e^{5x})$$

$$= \frac{x^2}{5} e^{5x} - \frac{2}{5}\left[x \cdot \frac{e^{5x}}{5} - \int \left(1 \cdot \frac{e^{5x}}{5}\right) dx\right]$$

$$= \frac{x^2}{5} e^{5x} - \frac{2}{5}\left[\frac{x}{5} e^{5x} - \frac{1}{5} \cdot \frac{e^{5x}}{5}\right] + c$$

$$= \frac{x^2}{5} e^{5x} - \frac{2x}{25} e^{5x} + \frac{2}{125} e^{5x} + c$$

$$= e^{5x}\left[\frac{1}{5} x^2 - \frac{2x}{25} + \frac{2}{125}\right] + c$$

નોંધ : (i) વ્યાપક રીતે $\int x^n e^{ax} dx = e^{ax}\left[\frac{1}{a} x^n - \frac{n}{a^2} x^{n-1} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^3} + ... + \frac{(-1)^n \cdot n!}{a^{n+1}}\right] + c$

(ii) સામાન્ય રીતે આપણે માંગેલા અનિયત સંકલિતને I વડે દર્શાવીશું.

ઉદાહરણ 1 : $\int x\, cos(3x + 5)\, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $u = x$ અને $v = cos(3x + 5)$ લેતાં,

$$I = \int x\, cos(3x + 5)\, dx$$

$$= x \int cos(3x + 5)\, dx - \int \left(\frac{d}{dx} x \int cos(3x + 5)\, dx\right) dx$$

$$= x\, \frac{sin(3x+5)}{3} - \int \left(1 \cdot \frac{sin(3x+5)}{3}\right) dx$$

$$= \frac{x}{3} sin(3x + 5) - \frac{1}{3} \int sin(3x + 5)\, dx$$

$$= \frac{x}{3} sin(3x + 5) + \frac{1}{3} \frac{cos(3x+5)}{3} + c$$

$$= \frac{x}{3} sin(3x + 5) + \frac{1}{9} cos(3x + 5) + c$$

ઉદાહરણ 2 : $\int sec^{-1}x\, dx,\ x > 0$ મેળવો.

ઉકેલ : $u = sec^{-1}x$ અને $v = 1$ લેતાં,

$$I = \int sec^{-1}x \cdot 1\, dx$$

$$= sec^{-1}x \int 1\, dx - \int \left(\frac{d}{dx}(sec^{-1}x) \int 1\, dx\right) dx$$

$$= sec^{-1}x \cdot x - \int \left(\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \cdot x\right) dx \qquad (|x| = x \text{ કારણ કે } x > 0)$$

$$= x\, sec^{-1}x - \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$$

$$= x\, sec^{-1}x - \log|x + \sqrt{x^2-1}| + c$$

$$= x\, sec^{-1}x - \log(x + \sqrt{x^2-1}) + c \qquad (x > 0)$$

ઉદાહરણ 3 : $\int \frac{x\, sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} dx,\ \ 0 < x < 1$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{x\, sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} dx,\ \ 0 < x < 1$

ધારો કે $sin^{-1}x = \theta$. અહીં $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ કારણ કે $0 < x < 1$

$\therefore \quad x = sin\theta,\ dx = cos\theta\ d\theta$

$$\therefore \quad I = \int \frac{\theta\ sin\theta}{\sqrt{1 - sin^2\theta}} \cdot cos\theta\ d\theta$$

$$\therefore \quad I = \int \frac{\theta\ sin\theta}{cos\theta} \cdot cos\theta\ d\theta \qquad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \int \theta\ sin\theta\ d\theta$$

$$= \theta \int sin\theta\ d\theta - \int \left(\frac{d}{d\theta}\theta \int sin\,\theta\ d\theta\right) d\theta$$

$$= -\theta\ cos\theta + \int (1 \cdot cos\theta)\ d\theta$$

$$= -\theta\ cos\theta + sin\theta + c$$

$$= -\theta \sqrt{1 - sin^2\theta} + sin\theta + c \qquad (cos\theta = \sqrt{1 - sin^2\theta})$$

$$= -sin^{-1}x \cdot \sqrt{1 - x^2} + x + c$$

$$= -\sqrt{1 - x^2} \cdot sin^{-1}x + x + c$$

બીજી રીત :

$u = sin^{-1}x$ અને $v = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ લઈએ.

સૌપ્રથમ આપણે v નું સંકલન કરીશું. એટલે કે, $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\ dx$ મેળવીશું.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\ dx = \int (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot x\ dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x)\ dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ \frac{(1 - x^2)^{-\frac{1}{2} + 1}}{-\frac{1}{2} + 1}$$

$$= -(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\sqrt{1 - x^2}$$

$$\therefore \quad \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\ dx = -\sqrt{1 - x^2}$$

હવે, $I = \int \frac{x\ sin^{-1}x}{\sqrt{1 - x^2}}\ dx$

$$= sin^{-1}x \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\ dx - \int \left(\frac{d}{dx} sin^{-1}x \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\ dx\right) dx$$

$$= (sin^{-1}x)(-\sqrt{1 - x^2}) - \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot (-\sqrt{1 - x^2})\ dx$$

$$= -\sqrt{1 - x^2}\ sin^{-1}x + x + c$$

ઉદાહરણ 4 : મેળવો : $\int e^x \cos x \, dx$

ઉકેલ : $I = \int e^x \cos x \, dx$

ધારો કે $u = e^x$ અને $v = \cos x$

$$\therefore \quad I = e^x \int \cos x \, dx - \int \left(\frac{d}{dx} e^x \int \cos x \, dx\right) dx$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$= e^x \sin x - \left[e^x \int \sin x \, dx - \int \left(\frac{d}{dx} e^x \int \sin x \, dx\right) dx\right] \qquad (u = e^x, \ v = \sin x)$$

$$= e^x \sin x - [-e^x \cos x - \int (e^x (-\cos x)) \, dx]$$

$$= e^x \sin x - [-e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx]$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$\therefore \quad I = e^x \sin x + e^x \cos x - I + c'$$

$$\therefore \quad 2I = e^x (\sin x + \cos x) + c'$$

$$\therefore \quad I = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + \frac{c'}{2}$$

$$\therefore \quad I = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + c \qquad \left(\frac{c'}{2} = c\right)$$

નોંધ : $e^x \cos x$ માં ત્રિકોણમિતીય વિધેય એ ઘાતાંકીય વિધેય કરતાં LIATE ક્રમમાં પ્રથમ આવે છે. તેથી $u = \cos x$ અને $v = e^x$ લેવાય, પરંતુ આપણે $u = e^x$ અને $v = \cos x$ લીધું. આમ, LIATE નિયમ માત્ર અનુકૂળતા માટે છે. $u = \cos x$ તથા $v = e^x$ લઈને પણ સંકલન કરી શકાશે.

ઉદાહરણ 5 : $\int x^2 2^x \, dx$ મેળવો

ઉકેલ : $u = x^2, \ v = 2^x$ લેતાં,

$$I = \int x^2 2^x \, dx$$

$$= x^2 \int 2^x \, dx - \int \left(\frac{d}{dx} x^2 \int 2^x \, dx\right) dx$$

$$= x^2 \frac{2^x}{\log_e 2} - \int \left(2x \frac{2^x}{\log_e 2}\right) dx$$

$$= \frac{x^2 2^x}{\log_e 2} - \frac{2}{\log_e 2} \int x 2^x \, dx$$

$$= \frac{x^2 2^x}{\log_e 2} - \frac{2}{\log_e 2} \left[x \int 2^x \, dx - \int \left(\frac{d}{dx} x \int 2^x \, dx\right) dx\right] \qquad (u = x, \ v = 2^x)$$

$$= \frac{x^2 2^x}{\log_e 2} - \frac{2}{\log_e 2} \left[x \frac{2^x}{\log_e 2} - \int \left(\frac{1 \cdot 2^x}{\log_e 2}\right) dx\right]$$

$$= \frac{x^2 2^x}{\log_e 2} - \frac{2}{\log_e 2} \left[\frac{x \cdot 2^x}{\log_e 2} - \frac{1}{\log_e 2} \cdot \frac{2^x}{\log_e 2}\right] + c$$

$$= \frac{x^2 2^x}{\log_e 2} - \frac{x \cdot 2^{x+1}}{(\log_e 2)^2} + \frac{2^{x+1}}{(\log_e 2)^3} + c$$

$$\int x^2 2^x \, dx = \int x^2 e^{x \log 2} \, dx$$

$$= e^{x \log 2} \left[\frac{x^2}{\log 2} - \frac{2x}{(\log 2)^2} + \frac{2}{(\log 2)^3}\right] + c = 2^x \left[\frac{x^2}{\log 2} - \frac{2x}{(\log 2)^2} + \frac{2}{(\log 2)^3}\right] + c$$

નોંધ : ઉપરના ઉદાહરણમાં જોઈ શકાય છે કે કોઈ વાર ખંડશઃસંકલનના સૂત્રનો ઉપયોગ એક કરતાં વધુ વખત કરવો પડે છે.

ઉદાહરણ 6 : $\int x\, sec^2x\ \ tan\, x\ \ dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int x\, sec^2x\ \ tan\, x\ \ dx$

$u = x$ અને $v = sec^2x\, tan\, x$ લઈએ.

સૌપ્રથમ આપણે $\int v\ dx$ એટલે કે $\int tan\, x\, sec^2x\ dx$ મેળવીએ.

$$\int tan\, x\, sec^2x\ \ dx = \int (tan\, x)\left(\frac{d}{dx}(tan\, x)\right) dx$$

$$= \frac{(tan\, x)^2}{2}$$

$$= \frac{tan^2x}{2}$$

$$\therefore\ \int tan\, x\, sec^2x\ \ dx = \frac{tan^2x}{2}$$

હવે, $I = \int x\, sec^2x\ \ tan\, x\ \ dx$

$$= x\int tan\, x\, sec^2x\ \ dx - \int\left(\frac{d}{dx}x\ \int tan\, x \cdot sec^2x\ \ dx\right)dx$$

$$= x\,\frac{tan^2x}{2} - \int\left(1 \cdot \frac{tan^2x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{x}{2}\ tan^2x - \frac{1}{2}\int (sec^2x - 1)\ dx$$

$$= \frac{x}{2}\ tan^2x - \frac{1}{2}\,[tan\, x - x] + c$$

$$= \frac{x}{2}\ tan^2x - \frac{1}{2}\ tan\, x + \frac{x}{2} + c$$

ઉદાહરણ 7 : $\int cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) dx,\ x > 0$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) dx$

$\theta = tan^{-1}x$ લો, જેથી $x = tan\theta$ અને $dx = sec^2\theta\, d\theta$. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ કારણ કે $x > 0$

$$\therefore\ I = \int cos^{-1}\left(\frac{1-tan^2\theta}{1+tan^2\theta}\right) sec^2\theta\ \ d\theta$$

$$= \int cos^{-1}(cos2\theta) \cdot sec^2\theta\ \ d\theta$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ છે.

$\therefore\ 0 < 2\theta < \pi$

$\therefore\ cos^{-1}(cos2\theta) = 2\theta$ (i)

$$\therefore\ I = 2\int \theta\ \ sec^2\theta\ \ d\theta$$

$$= 2\left[\theta\int sec^2\theta\ \ d\theta - \int\left(\frac{d}{d\theta}\,\theta\int sec^2\theta\ \ d\theta\right)d\theta\right]$$

$$= 2\,[\theta \cdot tan\theta - \int 1 \cdot tan\theta\ \ d\theta]$$

$= 2\ [\theta \cdot tan\theta - \log |sec\theta|\,] + c$

હવે, $\theta = tan^{-1}x$ તથા $x = tan\theta$

$sec^2\theta = 1 + tan^2\theta = 1 + x^2$

$\therefore \quad sec\theta = \sqrt{1+x^2}$ $\qquad \left(sec\theta > 0 \text{ કારણ કે } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \quad I = 2\ [x \cdot tan^{-1}x - \log \sqrt{1+x^2}\,] + c$

$= 2x\, tan^{-1}x - 2 \log (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} + c$

$= 2x\, tan^{-1}x - \log (1 + x^2) + c$

બીજી રીત : $cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ ને પરિવર્તિત કરીએ.

ધારો કે $x = tan\theta,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ કારણ કે $x > 0$

$$\therefore \quad cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = cos^{-1}\left(\frac{1-tan^2\theta}{1+tan^2\theta}\right)$$

$$= cos^{-1}\ (cos2\theta)$$

$$= 2\theta \qquad (0 < 2\theta < \pi)$$

$$= 2\ tan^{-1}x$$

હવે, $\int cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) dx$

$$= \int 2\ tan^{-1}x\ dx$$

$$= 2\left[tan^{-1}x \int 1dx - \int\left(\frac{d}{dx} tan^{-1}x \int 1\ dx\right)dx\right]$$

$$= 2\left[tan^{-1}x \,.\, x - \int\left(\frac{1}{1+x^2} \,.\, x\right)dx\right]$$

$$= 2\left[x \,.\, tan^{-1}x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1}\ dx\right]$$

$$= 2\left[x\, tan^{-1}x - \frac{1}{2} \log\ (1 + x^2)\right] + c$$

$$= 2x\, tan^{-1}x - \log\ (1 + x^2) + c$$

નોંધ : જો $x < 0$, તો $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$.

$\therefore \quad -\pi < 2\theta < 0$

$\therefore \quad 0 < -2\theta < \pi$

(i)માં $cos^{-1}(cos\ 2\theta) = cos^{-1}(cos\ (-2\theta)) = -2\theta$

$\therefore \quad I = -2\ [\theta\ tan\theta - \log |sec\theta|\,] + c$

$= -2x\ tan^{-1}x + \log(1 + x^2) + c$

સ્વાધ્યાય 2.1

નીચેનાં વિધેયોનાં x વિશે સંકલિત મેળવો.

1. $x^2 \log x \quad x > 0$
2. $(3 + 5x) \cos 7x$
3. $\cos^{-1}x \quad x \in [-1, 1]$
4. $x^2 e^{3x}$
5. $x^2 \tan^{-1}x$
6. $\sin^{-1}\frac{1}{x}, \ x > 1$
7. $\sin(\log x) \quad x > 0$
8. $\sec^3 x$
9. $\frac{x}{1-\cos x} \quad x \neq 2n\pi, \ n \in Z$
10. $x^3 \sin x^2$
11. $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}, \ 0 < x < 1$
12. $x \cot x \operatorname{cosec}^2 x$
13. $x \cos^3 x$
14. $x^{2n-1} \cos x^n$
15. $(1 - x^2) \log x \quad x > 0$
16. $\frac{\log x}{(1+x)^2} \quad x > 0$
17. $\frac{\sin^{-1}x}{x^2} \quad x \in (0, 1)$
18. $\frac{\sin^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \quad 0 < x < 1$

*

2.3 સંકલનનાં કેટલાંક વધુ પ્રમાણિત રૂપો

હવે આપણે કેટલાંક વિધેયો $\sqrt{x^2 \pm a^2}$, $\sqrt{a^2 - x^2}$, $e^{ax}\sin(bx + k)$, $e^{ax}\cos(bx + k)$ નાં સંકલિતો ખંડશઃસંકલન અને ત્રિકોણમિતીય આદેશનો ઉપયોગ કરી મેળવીશું અને તેમને સંકલનનાં પ્રમાણિત રૂપો તરીકે સ્વીકારીશું.

(1) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + c \qquad (x^2 > a^2)$

સાબિતી : $I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$

$$\therefore \quad I = \int \sqrt{x^2 - a^2} \cdot 1\, dx$$

$$= \sqrt{x^2 - a^2} \int 1\, dx - \int \left(\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right) \int 1\, dx\right) dx$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 - a^2}} \cdot x\right) dx$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx - a^2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx$$

$$I = x\sqrt{x^2 - a^2} - I - a^2 \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + c'$$

$$\therefore \quad 2I = x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + c'$$

$$\therefore \quad I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + c \qquad \left(\frac{c'}{2} = c\right)$$

બીજી રીત :

આ જ પ્રમાણિત સ્વરૂપ આદેશ $x = a\,sec\theta$. $(x > a > 0)$ લઈને મેળવીએ.

$$I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$$

સાબિતી : $x = a\, sec\theta$ લેતાં, $dx = a sec\theta\ tan\theta\ d\theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ તથા $x > a > 0$.

$$\therefore \quad I = \int \sqrt{a^2 sec^2\theta - a^2} \cdot a sec\theta\ \ tan\theta\ \ d\theta$$

$$= \int \sqrt{a^2 tan^2\theta} \cdot a sec\theta\ \ tan\theta\ \ d\theta$$

$$I = a^2 \int sec\theta \cdot tan^2\theta\ \ d\theta \qquad (a > 0 \text{ તથા } tan\theta > 0)$$

$$= a^2 \int sec\theta\,(sec^2\theta - 1)\, d\theta$$

$$= a^2 \int (sec^3\theta - sec\theta)\, d\theta$$

$$= a^2 \int sec^3\theta\ \ d\theta - a^2 \int sec\theta\, d\theta$$

$$= a^2 \int sec\theta \cdot sec^2\theta\ \ d\theta - a^2 \int sec\theta\, d\theta$$

$$= a^2 \left[sec\theta \int sec^2\theta\ \ d\theta - \int \left(\frac{d}{d\theta} sec\theta \int sec^2\theta\ \ d\theta\right) d\theta\right] - a^2 \int sec\theta\, d\theta$$

$$= a^2\ [sec\theta\ \ tan\theta - \int (sec\theta\ \ tan\theta \cdot tan\theta)\ d\theta] - a^2 \int sec\theta\, d\theta$$

$$= a^2\ [sec\theta\ \ tan\theta - \int sec\theta \cdot tan^2\theta\, d\theta] - a^2 \int sec\theta\, d\theta$$

$$= a^2\ sec\theta\ \ tan\theta - a^2 \int sec\theta\, tan^2\theta\, d\theta - a^2 \log|sec\theta + tan\theta| + c'$$

$$\therefore \quad I = a^2\ sec\theta\ \ tan\theta - I - a^2 \log|sec\theta + tan\theta| + c' \qquad \left(I = a^2 \int sec\theta\ tan^2\theta\ d\theta\right)$$

$$\therefore \quad 2I = a^2\ sec\theta\ \ tan\theta - a^2 \log|sec\theta + tan\theta| + c'$$

$$\therefore \quad I = \frac{a^2}{2}\ sec\theta\ \sqrt{sec^2\theta - 1} - \frac{a^2}{2} \log\left|sec\theta + \sqrt{sec^2\theta - 1}\right| + \frac{c'}{2} \qquad (tan\theta > 0)$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{x}{a}\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} - \frac{a^2}{2} \log\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right| + \frac{c'}{2}$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log\left|\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right| + \frac{c'}{2} \qquad (|a| = a)$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + \frac{c'}{2} + \frac{a^2}{2} \log a$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c \qquad \left(\frac{c'}{2} + \frac{a^2}{2}\log a = c\right)$$

$$\therefore \quad \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c$$

ઉદાહરણ તરીકે,

$$\int \sqrt{x^2 - 25}\, dx = \int \sqrt{x^2 - 5^2}\, dx$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 5^2} - \frac{5^2}{2}\log\left|x + \sqrt{x^2 - 5^2}\right| + c$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 25} - \frac{25}{2}\log\left|x + \sqrt{x^2 - 25}\right| + c$$

(2) $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\log|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + c$

સાબિતી : $I = \int \sqrt{x^2 + a^2} \cdot 1\, dx$

$$= \sqrt{x^2 + a^2}\int 1\, dx - \int\left(\frac{d}{dx}(\sqrt{x^2 + a^2})\int 1\, dx\right)dx$$

$$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a^2}}\, x\, dx$$

$$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}\, dx$$

$$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}\, dx$$

$$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$I = x\sqrt{x^2 + a^2} - I + a^2\log|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + c'$$

$$\therefore\ 2I = x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2\log|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + c'$$

$$\therefore\ I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\log|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + c \qquad \left(\frac{c'}{2} = c\right)$$

$$\therefore\ \int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\log|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + c \qquad (a > 0)$$

આ જ પ્રમાણિત રૂપ આદેશ $x = a\tan\theta$ $(a > 0)$ લઈને મેળવી શકાય.

ઉદાહરણ તરીકે, $\int \sqrt{x^2 + 4}\, dx = \int \sqrt{x^2 + 2^2}\, dx$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + 2^2} + \frac{2^2}{2}\log\left|x + \sqrt{x^2 + 2^2}\right| + c$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + 4} + 2\log\left|x + \sqrt{x^2 + 4}\right| + c$$

(3) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + c$ $\qquad (a > 0)$

સાબિતી : $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot 1\, dx$

$$= \sqrt{a^2 - x^2}\int 1\, dx - \int\left(\frac{d}{dx}(\sqrt{a^2 - x^2})\int 1\, dx\right)dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \left(\frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}}(-2x) \cdot x\right) dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\ dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{a^2 - x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\ dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c' \qquad (a > 0)$$

$$\therefore \quad 2I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c'$$

$$\therefore \quad I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \qquad \left(\frac{c'}{2} = c\right)$$

$$\therefore \quad \int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$$

નોંધ : $a < 0$ હોય તો શું ફેર પડશે ?

ઉદાહરણ તરીકે,

$$\int \sqrt{9 - x^2}\ dx = \int \sqrt{3^2 - x^2}\ dx$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{3^2 - x^2} + \frac{3^2}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + c$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{9 - x^2} + \frac{9}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + c$$

આ સૂત્ર આદેશ $x = a \sin\theta$ લઈને પણ સાબિત કરી શકાય.

(4) $\int e^x [f(x) + f'(x)]\ dx = e^x f(x) + c$

સાબિતી : $I = \int e^x [f(x) + f'(x)]\ dx$

$$= \int e^x f(x)\ dx + \int e^x f'(x)\ dx$$

$$= f(x)\int e^x\ dx - \int \left(\frac{d}{dx} f(x) \int e^x\ dx\right) dx + \int e^x \cdot f'(x)\ dx$$

$$= f(x)\ e^x - \int f'(x)\ e^x\ dx + \int f'(x)\ e^x\ dx$$

$$= e^x f(x) + c$$

ઉદાહરણ તરીકે,

(1) $\int e^x \sec x\ (1 + \tan x)\ dx = \int e^x (\sec x + \sec x\ \tan x)\ dx$

$$= \int e^x \left[\sec x + \frac{d}{dx}(\sec x)\right] dx$$

$$= e^x \sec x + c$$

(2) $\int e^x \left(\frac{x - 1}{x^2}\right) dx = \int e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$

$$= \int e^x \left[\frac{1}{x} + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\right] dx$$

$$= e^x \cdot \frac{1}{x} + c$$

(3) $\int x\, e^x\, dx = \int [(x-1)+1]\, e^x\, dx$

$$= \int \left[(x-1) + \frac{d}{dx}(x-1)\right] e^x\, dx$$

$$= e^x (x-1) + c$$

(5) $\int e^{ax} \sin(bx+k)\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} [a \sin(bx+k) - b\cos(bx+k)] + c, \quad a, b \neq 0$

સાબિતી : $I = \int e^{ax} \cdot \sin(bx+k)\, dx$

$$= \sin(bx+k) \int e^{ax} dx - \int \left(\frac{d}{dx} \sin(bx+k) \int e^{ax} dx\right) dx$$

$$= \sin(bx+k) \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \int \left(b\cos(bx+k) \cdot \frac{e^{ax}}{a}\right) dx$$

$$= \frac{e^{ax}}{a} \sin(bx+k) - \frac{b}{a} \int \cos(bx+k)\, e^{ax}\, dx$$

$$= \frac{e^{ax}}{a} \sin(bx+k) - \frac{b}{a}\left[\cos(bx+k) \int e^{ax} dx - \int \left(\frac{d}{dx} \cos(bx+k) \int e^{ax} dx\right) dx\right]$$

$$= \frac{e^{ax}}{a} \sin(bx+k) - \frac{b}{a}\left[\cos(bx+k) \frac{e^{ax}}{a} - \int \left(-b\sin(bx+k) \frac{e^{ax}}{a}\right) dx\right]$$

$$= \frac{e^{ax}}{a} \sin(bx+k) - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cos(bx+k) - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cdot \sin(bx+k)\, dx$$

$$\therefore \quad I = \frac{e^{ax}}{a^2} [a\sin(bx+k) - b\cos(bx+k)] - \frac{b^2}{a^2} I + c'$$

$$\therefore \quad I + \frac{b^2}{a^2} I = \frac{e^{ax}}{a^2} [a\sin(bx+k) - b\cos(bx+k)] + c'$$

$$\therefore \quad (a^2+b^2) I = e^{ax} [a\sin(bx+k) - b\cos(bx+k)] + a^2 c'$$

$$\therefore \quad I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} [a\sin(bx+k) - b\cos(bx+k)] + c, \text{ જ્યાં } c = \frac{a^2 c'}{a^2+b^2}$$

હવે, આપણે આ સૂત્રને બીજા સ્વરૂપમાં પરિવર્તિત કરીએ.

$$I = \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin(bx+k) - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos(bx+k)\right] + c$$

અહીં $a \neq 0$, $b \neq 0$. તેથી,

$$0 < \left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| < 1, \; 0 < \left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| < 1$$

અને $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1.$

કોઈક $\alpha \in (0, 2\pi)$ મળે કે જેથી,

$$cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$$\therefore \quad I = \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\ [sin(bx + k)\, cos\alpha - cos(bx + k)\ sin\alpha] + c$$

$$= \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\ sin(bx + k - \alpha) + c, \text{ જ્યાં } cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$$\therefore \quad \int e^{ax}\cdot sin(bx + k)\ dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\ (a\, sin(bx + k) - b\, cos(bx + k)) + c, \quad a, b \ne 0$$

$$= \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\ sin(bx + k - \alpha) + c$$

જ્યાં, $cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\quad \alpha \in (0, 2\pi)$

ઉદાહરણ તરીકે, $\int e^{2x}\cdot sin\,3x\ dx = \frac{e^{2x}}{2^2+3^2}\,(2sin\,3x - 3cos\,3x) + c = \frac{e^{2x}}{13}\,(2sin\,3x - 3cos\,3x) + c$

બીજા સ્વરૂપમાં $\int e^{2x}\cdot sin\,3x\ dx$ જોઈએ.

$cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}},\ sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$. તેથી $tan\alpha = \frac{3}{2}$

$\therefore \quad \alpha = tan^{-1}\frac{3}{2}$, કારણ કે $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \quad \int e^{2x}\cdot sin\,3x\ dx = \frac{e^{2x}}{\sqrt{13}}\ sin\left(3x - tan^{-1}\frac{3}{2}\right) + c$$

(6) $$\int e^{ax}\, cos(bx + k)\ dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\ [a\, cos(bx + k) + b\, sin(bx + k)] + c, \quad a \ne 0,\ b \ne 0$$

$$= \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\ cos(bx + k - \alpha) + c$$

જ્યાં $cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\quad \alpha \in (0, 2\pi).$

સાબિતી : $I = \int e^{ax}\, cos(bx + k)\ dx$

$$= cos(bx + k)\int e^{ax}\ dx - \int\left(\frac{d}{dx}cos(bx + k)\int e^{ax}\ dx\right) dx$$

$$= cos(bx + k)\ .\ \frac{e^{ax}}{a} - \int\left(-b\ sin(bx + k)\ .\ \frac{e^{ax}}{a}\right) dx$$

$$= \frac{e^{ax}}{a}\ cos(bx + k) + \frac{b}{a}\int e^{ax}\ sin(bx + k)\ dx$$

$$= \frac{e^{ax}}{a}\ cos(bx + k) + \frac{b}{a}\left[sin(bx + k)\int e^{ax}\,dx - \int\left(\frac{d}{dx}sin(bx + k)\int e^{ax}\ dx\right) dx\right]$$

$$= \frac{e^{ax}}{a}\ cos(bx + k) + \frac{b}{a}\left[sin(bx + k)\ .\ \frac{e^{ax}}{a} - \int\left(b\ cos(bx + k)\ .\ \frac{e^{ax}}{a}\right) dx\right]$$

$$= \frac{e^{ax}}{a}\ cos(bx + k) + \frac{b}{a^2}\ e^{ax}\, sin(bx + k) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cdot cos(bx + k)\ dx$$

$$\therefore \quad I = \frac{e^{ax}}{a} cos(bx + k) + \frac{b}{a^2} e^{ax} \cdot sin(bx + k) - \frac{b^2}{a^2} I + c'$$

$$\therefore \quad I + \frac{b}{a^2} I = \frac{e^{ax}}{a^2} [a\,cos(bx + k) + b\,sin(bx + k)] + c'$$

$$\therefore \quad (a^2 + b^2) I = e^{ax} [a\,cos(bx + k) + b\,sin(bx + k)] + a^2c'$$

$$\therefore \quad I = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a\,cos(bx + k) + b\,sin(bx + k)] + c, \text{ જ્યાં } c = \frac{a^2c'}{a^2 + b^2}$$

બીજું સ્વરૂપ :

કોઈક $\alpha \in (0, 2\pi)$, માટે $cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

$$\therefore \quad I = \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2 + b^2}} [cos(bx + k) \cdot cos\alpha + sin(bx + k) \cdot sin\alpha] + c$$

$$= \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2 + b^2}} cos(bx + k - \alpha) + c$$

$$\therefore \quad \int e^{ax} cos(bx + k)\, dx = \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2 + b^2}} cos(bx + k - \alpha) + c$$

જ્યાં $cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\quad sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

ઉદાહરણ તરીકે : $\int e^{-x} cos\frac{x}{2}\, dx = \frac{e^{-x}}{(1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \left(-1\, cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2} sin\frac{x}{2}\right) + c$

$$= \frac{4e^{-x}}{5} \left(-cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2} sin\frac{x}{2}\right) + c$$

$\int e^{-x} cos\frac{x}{2}\, dx$ નું બીજું સ્વરૂપ જોઈએ.

અહીં, $cos\alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}}$, $sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. આથી $tan\alpha = -\frac{1}{2}$, $\quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

$$\therefore \quad \alpha = \pi - tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \int e^{-x} cos\frac{x}{2}\, dx = \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-x} \left[cos\left(\frac{x}{2} - \left(\pi - tan^{-1}\frac{1}{2}\right)\right)\right] + c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-x} cos\left(\frac{x}{2} + tan^{-1}\frac{1}{2} - \pi\right) + c$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{5}} e^{-x} cos\left(\frac{x}{2} + tan^{-1}\frac{1}{2}\right) + c$$

2.4 (1) $\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx$ અને (2) $\int (Ax + B) \sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx$ સ્વરૂપના સંકલિતો :

(1) $ax^2 + bx + c$ ને પૂર્ણવર્ગના સ્વરૂપમાં વ્યક્ત કરી ત્યારબાદ આગળનાં પ્રમાણિત સ્વરૂપ (1), (2) કે (3) નો ઉપયોગ કરી સંકલન કરી શકાય.

(2) આપણે એવા બે અચળ m અને n મેળવીશું કે જેથી,

$Ax + B = m(ax^2 + bx + c$ નું વિકલિત$) + n$

$$Ax + B = m\left(\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c)\right) + n$$

$$Ax + B = m(2ax + b) + n$$

બંને બાજુ x ના સહગુણકો તથા અચળ પદ સરખાવતાં,

$m = \frac{A}{2a}$ તથા $n = B - mb$

હવે, $\int (Ax + B)\sqrt{ax^2+bx+c}\ dx = \int [m(2ax + b) + n]\sqrt{ax^2+bx+c}\ dx$

$= m\int (2ax + b)\sqrt{ax^2+bx+c}\ dx + n\int\sqrt{ax^2+bx+c}\ dx$

$= mI_1 + nI_2$

જ્યાં, $I_1 = \int (ax^2 + bx + c)^{\frac{1}{2}}\ (2ax + b)\,dx$

$= \int (ax^2 + bx + c)^{\frac{1}{2}}\ \frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c)\,dx$

$= \frac{(ax^2+bx+c)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c_1$

$= \frac{2}{3}(ax^2 + bx + c)^{\frac{3}{2}} + c_1$

અને $I_2 = \int \sqrt{ax^2+bx+c}\ dx$

I_2 દર્શાવેલી રીત (1) મુજબ મેળવી શકાય.

ઉદાહરણ 8 : $\int x\sqrt{x^4-25}\ dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int x\sqrt{x^4-25}\ dx$

ધારો કે, $x^2 = t$. આથી, $2x\ dx = dt$ એટલે કે $x\,dx = \frac{1}{2}dt$

$\therefore\ I = \int \sqrt{(x^2)^2-(5)^2}\cdot x\,dx$

$= \int \sqrt{t^2-5^2}\ \frac{1}{2}\,dt$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{t}{2}\sqrt{t^2-5^2} - \frac{5^2}{2}\log\left|t + \sqrt{t^2-5^2}\right| + c\right.$

$= \frac{t}{4}\sqrt{t^2-25} - \frac{25}{4}\log\left|t + \sqrt{t^2-25}\right| + c$

$= \frac{x^2}{4}\sqrt{x^4-25} - \frac{25}{4}\log\left|x^2 + \sqrt{x^4-25}\right| + c$

$= \frac{x^2}{4}\sqrt{x^4-25} - \frac{25}{4}\log\left(x^2 + \sqrt{x^4-25}\right) + c$, કારણ કે $x^2 > 0$

ઉદાહરણ 9 : $\int\sqrt{(x-3)(7-x)}\ dx$ મેળવો. $(3 < x < 7)$

ઉકેલ : $I = \int\sqrt{(x-3)(7-x)}\ dx$

$= \int\sqrt{10x-x^2-21}\ dx$

હવે, $10x - x^2 - 21 = -[x^2 - 10x + 21]$

$$= -[x^2 - 10x + 25 - 4]$$

$$= -[(x - 5)^2 - 4]$$

$$= 4 - (x - 5)^2$$

$$\therefore \quad I = \int \sqrt{2^2 - (x-5)^2}\, dx$$

$$= \frac{x-5}{2}\sqrt{2^2 - (x-5)^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-5}{2}\right) + c$$

$$= \frac{x-5}{2}\sqrt{(x-3)(7-x)} + 2\sin^{-1}\left(\frac{x-5}{2}\right) + c$$

ઉદાહરણ 10 : $\int e^x \left(\frac{1 + sinx\, cosx}{cos^2x}\right) dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int e^x \left(\frac{1 + sinx\, cosx}{cos^2x}\right) dx$

$$= \int e^x \left(\frac{1}{cos^2x} + \frac{sinx\, cosx}{cos^2x}\right) dx$$

$$= \int e^x (sec^2x + tan\,x)\, dx$$

$$= \int e^x \left(tan\,x + \frac{d}{dx}(tan\,x)\right) dx$$

$$= e^x\, tan\,x + c$$

ઉદાહરણ 11 : $\int \frac{\sqrt{1 - sinx}}{1 + cosx} e^{-\frac{x}{2}} dx,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{\sqrt{1 - sinx}}{1 + cosx} e^{-\frac{x}{2}} dx$

$$= \int \frac{\sqrt{cos^2\frac{x}{2} + sin^2\frac{x}{2} - 2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}}{2cos^2\frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{\left(cos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2}\right)^2}}{2cos^2\frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$= \int \frac{cos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2}}{2cos^2\frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2}} dx \qquad \left(0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4} \text{ હોવાથી } cos\frac{x}{2} > sin\frac{x}{2}\right)$$

$-\frac{x}{2} = t$ લેતાં, $-dx = 2dt$ એટલે કે $dx = -2dt$

$$\therefore \quad I = -\int \frac{cos\,t + sin\,t}{2cos^2t} e^t \cdot (2dt)$$

$$= -\int \left(\frac{1}{cos\,t} + \frac{sint}{cos^2t}\right) e^t\, dt$$

$$= -\int (sec\,t + sec\,t\ tan\,t)\ e^t\,dt$$

$$= -\int \left(sec\,t + \frac{d}{dt}(sec\,t)\right) e^t\,dt$$

$$= -sec\,t \cdot e^t + c$$

$$= -e^{-\frac{x}{2}} \cdot sec\left(\frac{x}{2}\right) + c \qquad \left(sec\left(-\frac{x}{2}\right) = sec\,\frac{x}{2}\right)$$

ઉદાહરણ 12 : $\int e^x\,sin^2x\,dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int e^x\,sin^2x\,dx$

$$= \int e^x\,\frac{(1 - cos2x)}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int e^x\,dx - \frac{1}{2}\int e^x \cdot cos2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}\left[\frac{e^x}{1^2 + 2^2}\ (cos2x + 2sin2x)\right] + c$$

$$= \frac{e^x}{2} - \frac{e^x}{10}(cos2x + 2sin2x) + c$$

ઉદાહરણ 13 : $\int 2^x\,cos^2x\,dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int 2^x\,cos^2x\,dx$

$$= \int 2^x\left(\frac{1 + cos2x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int 2^x\,dx + \frac{1}{2}\int 2^x\,cos2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int 2^x\,dx + \frac{1}{2}\int e^{x \cdot \log_e 2}\,cos2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2^x}{\log_e 2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{x\log_e 2}}{4 + (\log_e 2)^2}\ [(\log_e 2)\,cos2x + 2sin2x)] + c$$

$$\therefore \quad I = \frac{2^{x-1}}{\log_e 2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2^x}{4 + (\log_e 2)^2}\cdot[(\log_e 2)\,cos2x + 2sin2x)] + c$$

ઉદાહરણ 14 : $\int (x - 5)\sqrt{x^2 + x}\,dx$ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં m અને n એવાં મેળવીશું કે જેથી,

$$x - 5 = m\left[\frac{d}{dx}(x^2 + x)\right] + n$$

$$= m(2x + 1) + n$$

$$\therefore \quad x - 5 = 2mx + m + n$$

હવે x ના સહગુણકો અને અચળ પદ સરખાવતાં,

$2m = 1$ અને $m + n = -5$

$\therefore \quad m = \frac{1}{2}$ અને $n = -5 - \frac{1}{2} = -\frac{11}{2}$

$$\therefore \quad x - 5 = \frac{1}{2}(2x + 1) - \frac{11}{2}$$

$$\therefore \quad I = \int (x-5)\sqrt{x^2+x}\,dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{2}(2x+1) - \frac{11}{2}\right]\sqrt{x^2+x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (2x+1)\sqrt{x^2+x}\,dx - \frac{11}{2}\int \sqrt{x^2+x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (x^2+x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx}(x^2+x)\,dx - \frac{11}{2}\int \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{11}{2}\left[\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2}\sqrt{x^2+x} - \frac{1}{8}\log\left|\left(x+\frac{1}{2}\right) + \sqrt{x^2+x}\right| + c\right.$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{11}{2}\left[\frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x} - \frac{1}{8}\log\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|\right] + c$$

સ્વાધ્યાય 2.2

યોગ્ય પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત નીચેનાં વિધેયોનાં x વિશે સંકલિતો મેળવો :

1. $\sqrt{9-x^2}$
2. $\sqrt{2x^2+10}$
3. $\sqrt{5x^2-3}$
4. $\sqrt{4-3x-2x^2}$
5. $\sqrt{4x^2+4x-15}$
6. $x^2\sqrt{8-x^6}$
7. $\cos x\sqrt{4-\sin^2 x}$
8. $e^x(\log \sin x + \cot x)$
9. $e^x\,\frac{1-\sin x}{1-\cos x}$
10. $\frac{1+\sin 2x}{1+\cos 2x}\,e^{2x}$
11. $\frac{x^2 e^x}{(x+2)^2}$
12. $\frac{x^2-x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\,e^x$
13. $e^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2$
14. $x\sqrt{1+x-x^2}$
15. $(3x-2)\sqrt{x^2+x+1}$
16. $(2x-5)\sqrt{2+3x-x^2}$
17. $e^{2x}\sin 4x$
18. $e^{-\frac{x}{2}}\cos^2 x$
19. $3^x\sin^2 x$
20. $e^{2x}\sin 3x\sin x$

*

2.5 આંશિક અપૂર્ણાંકની રીત (Method of Partial Fractions)

હવે આપણે સંમેય બહુપદીનો સંકલિત કેવી રીતે મેળવવો તે શીખીશું. જો $p(x)$ અને $q(x)$ બે બહુપદીઓ હોય તો $\frac{p(x)}{q(x)}$, $q(x) \neq 0$ ને સંમેય બહુપદી અથવા x નું સંમેય વિધેય કહે છે. સંમેય બહુપદીનું સાદું રૂપ કેમ આપવું તે આપણે શીખી ગયા છીએ.

ઉદાહરણ તરીકે, $\frac{5}{x-3} + \frac{1}{x-2} = \frac{5(x-2)+1(x-3)}{(x-3)(x-2)} = \frac{6x-13}{(x-3)(x-2)}$

હવે પ્રશ્ન એ છે કે $\frac{6x-13}{(x-3)(x-2)}$ ને $\frac{5}{x-3} + \frac{1}{x-2}$ સ્વરૂપમાં કેવી રીતે મૂકી શકાય.

આ પ્રમાણે એક સંમેય વિધેયને બે કે તેથી વધુ યોગ્ય પ્રકારનાં સંમેય વિધેયોના સરવાળાના સ્વરૂપમાં મૂકવાની રીત **આંશિક અપૂર્ણાંકની રીત** તરીકે પ્રચલિત છે.

હવે જો, $\frac{6x-13}{(x-3)(x-2)}$ ને $\frac{5}{x-3}+\frac{1}{x-2}$, સ્વરૂપમાં મૂકી શકાય તો તેનું સંકલન કરવું ખૂબ સરળ બને.

હવે આપણે આંશિક અપૂર્ણાંકની રીત અંગે સમજ કેળવીયે :

(1) સંમેય વિધેય $\frac{p(x)}{q(x)}$ માં જો $p(x)$ ની ઘાત $q(x)$ ની ઘાત કરતાં ઓછી હોય, તો $\frac{p(x)}{q(x)}$ ને **ઉચિત સંમેય વિધેય (Proper Rational Function)** કહીશું.

ઉદાહરણ તરીકે, $\frac{5-3x}{x^3+3x+2}$, $\frac{2x^2+3x+7}{x^3-7x+2}$, $\frac{3x+2}{x^3-6x^2+11x-6}$ ઉચિત સંમેય વિધેયો છે.

(2) જો $p(x)$ ની ઘાત $q(x)$ની ઘાત કરતા વધારે કે એટલી જ હોય, તો $\frac{p(x)}{q(x)}$ને **અનુચિત સંમેય વિધેય (Improper Rational Function)** કહીશું.

ઉદાહરણ તરીકે, $\frac{x^3+1}{x^2-2x+1}$, $\frac{x^2+x+1}{x^2+3x+2}$, $\frac{x^3-6x^2+10x-2}{x^2-5x+6}$ અનુચિત સંમેય વિધેયો છે.

$\frac{p(x)}{q(x)}$ અનુચિત સંમેય વિધેય હોય તો $p(x)$ને $q(x)$ વડે ભાગીશું. $p(x) = q(x)\ s(x) + r(x)$ લખી શકાય. જ્યાં $r(x) = 0$ અથવા $r(x)$ની ઘાત એ $q(x)$ ની ઘાત કરતાં ઓછી છે. આમ, આપેલ અનુચિત સંમેય વિધેય $\frac{p(x)}{q(x)}$ ને $s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ સ્વરૂપમાં મેળવી શકાય, જ્યાં $r(x)$ અને $s(x)$ બહુપદીઓ છે અને બહુપદી $r(x)$ ની ઘાત $q(x)$ ની ઘાત કરતાં ઓછી છે અથવા $r(x) = 0$. તેથી $\frac{r(x)}{q(x)}$ ઉચિત સંમેય વિધેય અથવા 0 થશે. આ સમજવા એક ઉદાહરણ લઈએ. $\frac{4x^3-x^2+1}{x^2-2}$ નો વિચાર કરીએ.

$p(x) = 4x^3 - x^2 + 1$ ને $q(x) = x^2 - 2$ વડે ભાગીશું.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x \quad -1 \\
\hline
x^2-2 & 4x^3 - x^2 + 1 \\
 & 4x^3 - 8x \\
 & - \quad + \\
\hline
 & \quad -x^2 + 8x + 1 \\
 & \quad -x^2 \qquad + 2 \\
 & \quad + \qquad\quad - \\
\hline
 & \qquad\quad 8x - 1
\end{array}
$$

$\therefore$ અહીં ભાગફળ $s(x) = 4x - 1$ અને શેષ $r(x) = 8x - 1$

આમ, $\frac{4x^3-x^2+1}{x^2-2} = (4x-1) + \frac{8x-1}{x^2-2}$.

આમ, આપેલ અનુચિત સંમેય વિધેયને વાસ્તવિક બહુપદી $4x - 1$ અને ઉચિત સંમેય વિધેય $\frac{8x-1}{x^2-2}$ ના સરવાળા તરીકે અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાય. હવે આપણે ઉચિત સંમેય વિધેયનું સંકલન કેવી રીતે મેળવવું તે માટેની આંશિક અપૂર્ણાંકની રીત શીખીએ.

ધારો કે $\frac{p(x)}{q(x)}$ ઉચિત સંમેય વિધેય છે. આગળ ચર્ચા કર્યા પ્રમાણે $\frac{p(x)}{q(x)}$ ના આંશિક અપૂર્ણાંક કેવી રીતે મેળવવા તે શીખીએ. આ ચર્ચા મુખ્યત્વે $q(x)$ ના અવયવોના પ્રકાર પર આધારિત છે.

વિકલ્પ 1 : વાસ્તવિક, સુરેખ અને અનાવૃત અવયવો :

ધારો કે $q(x)$ ને n વાસ્તવિક, સુરેખ અને અનાવૃત અવયવો $x - \alpha_1, x - \alpha_2, ..., x - \alpha_n$. છે. એટલે કે,

$q(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_n)$. ($i \neq j$ માટે $\alpha_i \neq \alpha_j$)

$\frac{p(x)}{q(x)}$ ને નીચેના સ્વરૂપમાં લખી શકાય.

$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + ... + \frac{A_n}{x-\alpha_n}$. આપણે હંમેશા A_i, $i = 1, 2, ..., n$ અનન્ય રીતે નક્કી કરી શકીએ અને જમણી બાજુના વિધેયનું સંકલન સરળતાથી કરી શકીએ. આ સમજવા આપણે એક ઉદાહરણ લઈશું

ઉદાહરણ 15 : $\int \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે આપેલ વિધેય એ ઉચિત સંમેય વિધેય છે અને છેદમાં વાસ્તવિક, સુરેખ અનાવૃત અવયવો છે.

ધારો કે $\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$, જ્યાં A, B, C અચળ છે. (i)

બંને બાજુ $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ વડે ગુણતાં,

$2x - 3 = A(x - 2)(x - 3) + B(x - 1)(x - 3) + C(x - 1)(x - 2)$ (ii)

હવે A, B અને C અજ્ઞાત શોધવાની ત્રણ જુદી-જુદી રીતો સમજીએ.

પહેલી રીત :

આપેલ સંમેય વિધેયના છેદમાં $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ છે, જેનાં શૂન્યો 1, 2, 3 છે.
હવે પરિણામ (ii)માં વારાફરતી $x = 1, 2, 3$ લેતાં, A, B, C ની કિંમતો મળશે.

$x = 1$ લેતાં $2(1) - 3 = A(-1)(-2)$. આથી $A = -\frac{1}{2}$.

$x = 2$ લેતાં $2(2) - 3 = B(1)(-1)$. આથી $B = -1$.

$x = 3$ લેતાં $2(3) - 3 = C(2)(1)$. આથી $C = \frac{3}{2}$.

બીજી રીત :

$$\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

હવે A શોધવા માટે Aના છેદનો અવયવ $x - 1$ ડાબી બાજુના વિધેયના છેદમાંથી દૂર કરતાં $\frac{2x-3}{(x-2)(x-3)}$ રહેશે. આમાં $x - 1 = 0$ લો તથા x નું મૂલ્ય મેળવો, એટલે કે $x = 1$. $x = 1$ લેતાં, $A = \frac{2(1)-3}{(1-2)(1-3)} = -\frac{1}{2}$. તે જ પ્રમાણે Bના છેદનો અવયવ $x - 2$ ડાબી બાજુના છેદમાંથી દૂર કરતાં $\frac{2x-3}{(x-1)(x-3)}$ રહેશે. $x = 2$ લેતાં, $B = \frac{2(2)-3}{(2-1)(2-3)} = -1$ મળશે. તે જ રીતે Cના છેદનો અવયવ $x - 3$ ડાબી બાજુના છેદમાંથી દૂર કરતાં $\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}$ રહેશે. આમાં, $x = 3$ લેતાં, $C = \frac{2(3)-3}{(3-1)(3-2)} = \frac{3}{2}$ મળશે.

આમ, $A = -\frac{1}{2}$, $B = -1$ અને $C = \frac{3}{2}$ મળશે.

ત્રીજી રીત :

સમીકરણ (ii) પ્રમાણે.

$$(2x - 3) = A(x - 2)(x - 3) + B(x - 1)(x - 3) + C(x - 1)(x - 2)$$

$\therefore \quad 2x - 3 = A(x^2 - 5x + 6) + B(x^2 - 4x + 3) + C(x^2 - 3x + 2)$

$\therefore \quad 2x - 3 = (A + B + C)\, x^2 + (-5A - 4B - 3C)x + (6A + 3B + 2C)$

હવે, બંને બાજુએ x^2 તથા x ના સહગુણક અને અચળ પદ સરખાવતાં,

$A + B + C = 0,\ -5A - 4B - 3C = 2,\ 6A + 3B + 2C = -3$

આ સમીકરણો ઉકેલતાં $A = -\frac{1}{2}$, $B = -1$ અને $C = \frac{3}{2}$ મળશે.

આમ, ઉપર દર્શાવેલ ત્રણ જુદી-જુદી રીતમાંથી જે રીત સરળ લાગે તે રીત વાપરી A, B અને C નાં મૂલ્યો મેળવી શકાય. હવે A, B, C નાં મૂલ્યો સમીકરણ (i) માં મૂકતાં,

$$\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{-\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-1}{x-2} + \frac{\frac{3}{2}}{x-3}.$$

$$\therefore \quad \int \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}\, dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\, dx - \int \frac{1}{x-2}\, dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-3}\, dx.$$

$$= -\frac{1}{2} \log |x - 1| - \log |x - 2| + \frac{3}{2} \log |x - 3| + c$$

વિકલ્પ 2 : વાસ્તવિક સુરેખ આવૃત અને અનાવૃત અવયવો :

જો $q(x) = (x - \alpha)^k (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_n)$, હોય તો,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + ... + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{B_1}{x-\alpha_1} + \frac{B_2}{x-\alpha_2} + ... + \frac{B_n}{(x-\alpha_n)} \text{ લો.}$$

વાસ્તવિક સુરેખ અને અનાવૃત અવયવો માટે આપણે વિકલ્પ (1) પ્રમાણે અજ્ઞાત અચળો લઈશું. $(x - \alpha)^k$, જેવા વાસ્તવિક સુરેખ આવૃત્ત અવયવો માટે આંશિક અપૂર્ણાંક

$\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{A_3}{(x-\alpha)^3} + ... + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}$ લઈશુ, જ્યાં $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ અજ્ઞાત અચળો છે. આ સમજવા એક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 16 : $\int \frac{x}{(x-1)^2(x+2)}\, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{x}{(x-1)^2(x+2)}\, dx$

$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$ લો. **(i)**

બંને બાજુ $(x - 1)^2 (x + 2)$ વડે ગુણતાં,

$$x = A(x - 1)(x + 2) + B(x + 2) + C(x - 1)^2$$

હવે, $x = 1$ લેતાં, $1 = B(3)$. આથી $B = \frac{1}{3}$

$x = -2$ પરથી $-2 = C(9)$. તેથી $C = -\frac{2}{9}$

બંને બાજુ x^2 ના સહગુણકો સરખાવતા. $A + C = 0$. તેથી $A = -C$.

$\therefore \quad A = \frac{2}{9}$

હવે A, B, C નાં મૂલ્યો સમીકરણ (i)માં મૂકતાં,

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{2}{9(x-1)} + \frac{1}{3(x-1)^2} - \frac{2}{9(x+2)}$$

$$\therefore \quad \int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{2}{9}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx - \frac{2}{9}\int \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= \frac{2}{9}\log|x-1| + \frac{1}{3}\frac{(x-1)^{-1}}{-1} - \frac{2}{9}\log|x+2| + c$$

$$= \frac{2}{9}\log\left|\frac{x-1}{x+2}\right| - \frac{1}{3(x-1)} + c$$

વિકલ્પ 3 : એક વાસ્તવિક દ્વિઘાત અનાવૃત્ત અવયવ અને બીજા વાસ્તવિક સુરેખ અનાવૃત્ત અવયવો :

જો $q(x) = (ax^2 + bx + c)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n)$, હોય તો

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} + \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \dots + \frac{A_n}{x-\alpha_n} \text{ લો}$$

જ્યાં $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ અજ્ઞાત અચળો છે અને તે હંમેશા મેળવી શકાય. આ સમજવા એક ઉદાહરણ લઈશું.

ઉદાહરણો 17 : $\int \frac{x\,dx}{(3x^2+2)(x-2)}$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{x\,dx}{(3x^2+2)(x-2)}$

ધારો કે $\frac{x}{(3x^2+2)(x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{3x^2+2}$

બંને બાજુ $(3x^2 + 2)(x - 2)$ વડે ગુણતાં,

$$x = A(3x^2 + 2) + (Bx + C)(x - 2)$$

$$\therefore \quad x = A(3x^2 + 2) + Bx(x - 2) + C(x - 2)$$

$x = 2$ લેતાં $2 = 14A$. આથી $A = \frac{1}{7}$.

x^2ના સહગુણકો સરખાવતાં,

$3A + B = 0$. આથી $B = -3A$

$\therefore \quad B = -\frac{3}{7}$

x ના સહગુણકો સરખાવતાં,

$C - 2B = 1$. તેથી $C = 1 + 2B = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$

$\therefore \quad C = \frac{1}{7}$

$$\therefore \quad \int \frac{x\,dx}{(3x^2+2)(x-2)} = \int \frac{\frac{1}{7}dx}{x-2} + \int \frac{\left(-\frac{3}{7}x + \frac{1}{7}\right)dx}{3x^2+2}$$

$$= \frac{1}{7}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{7}\int \frac{(3x-1)\,dx}{3x^2+2}$$

$$= \frac{1}{7}\int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{1}{7}\int \frac{3x\,dx}{3x^2+2} + \frac{1}{7}\int \frac{dx}{3x^2+2}$$

$$= \frac{1}{7}\int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{1}{14}\int \frac{6x\,dx}{3x^2+2} + \frac{1}{7}\int \frac{dx}{(\sqrt{3}x^2)+(\sqrt{2})^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{7}\log|x-2| - \frac{1}{14}\log|3x^2+2| + \frac{1}{7\sqrt{6}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\right) + c$$

$$= \frac{1}{7}\log|x-2| - \frac{1}{14}\log(3x^2+2) + \frac{1}{7\sqrt{6}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}} + c \text{ કારણ કે } x^2 \geq 0$$

ઉદાહરણ 18 : $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

જ્યારે સંકલ્યમાં બધાં જ ઘાત યુગ્મ હોય ત્યારે સંકલ્યમાં $x^2 = t$ લઈએ. (આ આદેશ નથી).

$$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{t}{(t+1)(t+4)}$$

હવે, $\frac{t}{(t+1)(t+4)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+4}$

$\therefore \quad t = A(t+4) + B(t+1)$

$t = -1$ લેતાં $-1 = 3A$. આથી $A = -\frac{1}{3}$.

$t = -4$ લેતાં $-4 = -3B$. આથી $B = \frac{4}{3}$.

A અને B નાં મૂલ્યો સમીકરણ (i)માં મૂકતાં,

$$\frac{t}{(t+1)(t+4)} = \frac{-\frac{1}{3}}{t+1} + \frac{\frac{4}{3}}{t+4}$$

હવે, $t = x^2$ લેતાં, $\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{-\frac{1}{3}}{x^2+1} + \frac{\frac{4}{3}}{x^2+4}$

$$\therefore \quad \int \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$= -\frac{1}{3}\tan^{-1}x + \frac{4}{3} \times \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

$$\therefore \quad I = -\frac{1}{3}\tan^{-1}x + \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

ઉદાહરણ 19 : $\int \frac{x^2}{(x^3+2)(x^3-5)}\,dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{x^2}{(x^3+2)(x^3-5)}\,dx$

આદેશ $x^3 = t$ લેતાં $3x^2\,dx = dt$. આથી $x^2\,dx = \frac{1}{3}\,dt$

$\therefore \quad I = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{(t+2)(t-5)}$.

$\frac{1}{(t+2)(t-5)} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-5}$ લો

$1 = A(t-5) + B(t+2)$

$t = -2$ લેતાં, $1 = -7A$. આથી $A = -\frac{1}{7}$

$t = 5$ લેતાં, $1 = 7B$. આથી $B = \frac{1}{7}$

$$\therefore \quad \frac{1}{(t+2)(t-5)} = \frac{-\frac{1}{7}}{t+2} + \frac{\frac{1}{7}}{t-5}.$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{(t+2)(t-5)}$$

$$= -\frac{1}{21}\int \frac{1}{t+2}\,dt + \frac{1}{21}\int \frac{1}{t-5}\,dt$$

$$= -\frac{1}{21}\log|t+2| + \frac{1}{21}\log|t-5| + c$$

$$= \frac{1}{21}\log\left|\frac{t-5}{t+2}\right| + c$$

$$= \frac{1}{21}\log\left|\frac{x^3-5}{x^3+2}\right| + c$$

ઉદાહરણ 20 : $\int \frac{x^2+x+1}{(x-1)^3}\,dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{x^2+x+1}{(x-1)^3}\,dx$

$x - 1 = t$ લેતાં, $dx = dt$

$$I = \int \frac{(t+1)^2+(t+1)+1}{t^3}\,dt$$

$$= \int \frac{t^2+3t+3}{t^3}\,dt$$

$$= \int \left(\frac{1}{t} + \frac{3}{t^2} + \frac{3}{t^3}\right) dt$$

$$= \int \frac{1}{t}\,dt + 3\int t^{-2}\,dt + 3\int t^{-3}\,dt$$

$$= \log|t| + 3\left(\frac{-1}{t}\right) + 3\left(\frac{1}{-2t^2}\right) + c$$

$$= \log|t| - \frac{3}{t} - \frac{3}{2t^2} + c$$

$$= \log|x-1| - \frac{3}{x-1} - \frac{3}{2(x-1)^2} + c$$

નોંધ : આ ઉદાહરણ આંશિક અપૂર્ણાંકની રીતે પણ કરી શકાય.

$\frac{x^2+x+1}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$ લઈને પ્રયત્ન કરો.

ઉદાહરણ 21 : $\int \frac{\tan\theta + \tan^3\theta}{1+\tan^3\theta}\,d\theta$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{\tan\theta + \tan^3\theta}{1+\tan^3\theta}\,d\theta$

$$= \int \frac{\tan\theta\,(1+\tan^2\theta)}{1+\tan^3\theta}\,d\theta$$

$$= \int \frac{\tan\theta \cdot \sec^2\theta}{1+\tan^3\theta}\,d\theta$$

ધારો કે $tan\theta = t$. આથી $sec^2\theta \; d\theta = dt$

$$I = \int \frac{t\,dt}{1+t^3}$$

$$= \int \frac{t\,dt}{(t+1)(t^2-t+1)}$$

ધારો કે $\frac{t}{(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1}$.

$\therefore \quad t = A(t^2 - t + 1) + (Bt + C)(t + 1)$

$\therefore \quad t = A(t^2 - t + 1) + Bt(t + 1) + C(t + 1)$

$t = -1$ લેતાં, $-1 = 3A$. આથી $A = -\frac{1}{3}$

t^2 ના સહગુણકો સરખાવતાં, $A + B = 0$ મળે. આથી $B = -A$.

$\therefore \quad B = \frac{1}{3}$

અચળ પદો સરખાવતાં, $A + C = 0$ મળે. આથી $C = -A$.

$\therefore \quad C = \frac{1}{3}$

$$\therefore \quad \frac{t}{(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{-\frac{1}{3}}{t+1} + \frac{\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}}{t^2-t+1}$$

$$\therefore \quad I = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{t+1}\,dt + \frac{1}{3}\int \frac{t+1}{t^2-t+1}\,dt$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{1}{t+1}\,dt + \frac{1}{6}\int \frac{2t+2}{t^2-t+1}\,dt$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{1}{t+1}\,dt + \frac{1}{6}\int \frac{(2t-1)+3}{t^2-t+1}\,dt$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{6}\int \frac{(2t-1)\,dt}{t^2-t+1} + \frac{3}{6}\int \frac{dt}{t^2-t+1}$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{6}\int \frac{(2t-1)\,dt}{t^2-t+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= -\frac{1}{3}\log|t+1| + \frac{1}{6}\log|t^2-t+1| + \frac{1}{2}\times\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} tan^{-1}\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + c$$

$$= -\frac{1}{3}\log|t+1| + \frac{1}{6}\log\left(t^2-t+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\, tan^{-1}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$\therefore \quad I = -\frac{1}{3}\log|tan\theta+1| + \frac{1}{6}\log\left(tan^2\theta - tan\theta + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\, tan^{-1}\left(\frac{2tan\theta-1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

સ્વાધ્યાય 2.3

યોગ્ય પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત નીચેનાં વિધેયોનાં x વિશે સંકલિતો મેળવો :

1. $\dfrac{x^2+4x-1}{x^3-x}$

2. $\dfrac{3x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

3. $\dfrac{x^3-6x^2+10x-2}{x^2-5x+6}$

4. $\dfrac{x^2}{(2x^2+1)(x^2-1)}$

5. $\dfrac{x^2+1}{(x^2+2)(2x^2+1)}$

6. $\dfrac{x^3}{(x^2+2)(x^2+5)}$

7. $\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x+2)}$

8. $\dfrac{5x}{(x+1)(x^2+9)}$

9. $\dfrac{1}{6e^{2x}+5e^x+1}$

10. $\dfrac{sec^2\theta}{tan^2\theta-4tan\,\theta+3}$

11. $\dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}$

12. $\dfrac{x^2}{(x-1)^3(x+1)}$

13. $\dfrac{1}{sin\,x-sin\,2x}$

14. $\dfrac{1}{sin\,x(3+2cosx)}$

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 22 : $\int (x+1)\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}\,dx,\ x>2$ મેળવો. (જો $x<-2$ તો ?)

ઉકેલ : $I = \int (x+1)\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}\,dx$

$$= \int (x+1)\sqrt{\frac{x+2}{x-2}\times\frac{x+2}{x+2}}\,dx$$

$$= \int \frac{(x+1)(x+2)}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$$

$$= \int \frac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$$

$$= \int \frac{(x^2-4)+3x+6}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$$

$$= \int \sqrt{x^2-4}\,dx + 3\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx + 6\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$= \int \sqrt{x^2-4}\,dx + \frac{3}{2}\int (x^2-4)^{-\frac{1}{2}}(2x)\,dx + 6\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - \frac{4}{2}\log|x+\sqrt{x^2-4}| + \frac{3}{2}\frac{(x^2-4)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 6\log|x+\sqrt{x^2-4}| + c$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} + 4\log|x + \sqrt{x^2-4}| + 3\sqrt{x^2-4} + c$$

$$= \left(\frac{x}{2} + 3\right)\sqrt{x^2-4} + 4\log|x + \sqrt{x^2-4}| + c$$

ઉદાહરણ 23 : $\int \frac{(1+sinx)\,dx}{sinx(1+cosx)}$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{(1+sinx)\,dx}{sinx(1+cosx)}$

$$I = \int \frac{dx}{sinx(1+cosx)} + \int \frac{dx}{1+cosx}$$

ધારો કે $I = I_1 + I_2$ જ્યાં $I_1 = \int \frac{dx}{sin\,x(1+cosx)}$, $I_2 = \int \frac{dx}{1+cosx}$

$$I_1 = \int \frac{dx}{sinx(1+cosx)}$$

$$= \int \frac{sin\,x\,dx}{sin^2x(1+cosx)}$$

$$= \int \frac{sin\,x\,dx}{(1-cosx)(1+cosx)^2}$$

હવે, $cosx = t$ લેતાં, $sinx\,dx = -dt$

$$I_1 = \int \frac{-dt}{(1-t)(1+t)^2}$$

ધારો કે $\frac{-1}{(1-t)(1+t)^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{C}{(1+t)^2}$

$-1 = A(1+t)^2 + B(1-t)(1+t) + C(1-t)$

$t = 1$ લેતાં, $-1 = A(4)$. આથી $A = -\frac{1}{4}$

$t = -1$ લેતાં, $-1 = C(2)$. આથી $C = -\frac{1}{2}$

$t = 0$ લેતાં, (અથવા t ની કોઈપણ અનુકૂળ કિંમત લઈ શકાય)

$-1 = A + B + C$

$\therefore\ B = -1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$

$\therefore\ B = -\frac{1}{4}$

$$\therefore\ \frac{-1}{(1-t)(1+t)^2} = \frac{-\frac{1}{4}}{1-t} + \frac{-\frac{1}{4}}{1+t} + \frac{-\frac{1}{2}}{(1+t)^2}$$

$$I_1 = -\frac{1}{4}\int \frac{1}{1-t}\,dt - \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+t}\,dt - \frac{1}{2}\int (1+t)^{-2}\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\log|1-t| - \frac{1}{4}\log|1+t| + \frac{1}{2(t+1)}$$

$$= \frac{1}{4}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \frac{1}{2(t+1)} + c_1$$

$$\therefore \quad I_1 = \frac{1}{4} \log \left| \frac{cosx - 1}{cosx + 1} \right| + \frac{1}{2(cosx+1)} + c_1$$

હવે, $I_2 = \int \frac{1}{1+cosx}\, dx = \int \frac{1}{2\,cos^2 \frac{x}{2}}\, dx = \frac{1}{2}\int sec^2 \frac{x}{2}\, dx$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{tan\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} + c_2$$

$$\therefore \quad I_2 = tan\,\frac{x}{2} + c_2$$

$$I = I_1 + I_2$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{4} \log \left| \frac{cosx - 1}{cosx + 1} \right| + \frac{1}{2(cosx+1)} + tan\,\frac{x}{2} + c \qquad (c_1 + c_2 = c)$$

$$= \frac{1}{4} \log \left| tan^2 \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{4\,cos^2 \frac{x}{2}} + tan\,\frac{x}{2} + c$$

$$= \frac{1}{2} \log \left| tan\,\frac{x}{2} \right| + \frac{1}{4}\, sec^2 \frac{x}{2} + tan\,\frac{x}{2} + c$$

બીજી રીત :

ધારો કે $tan\,\frac{x}{2} = t$ તેથી $sec^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} dx = dt$

આથી $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ તથા $sin\,x = \frac{2t}{1+t^2}$ અને $cos\,x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$I = \int \frac{(1 + sinx)\, dx}{sinx\,(1 + cosx)}$$

$$= \int \frac{1 + \frac{2t}{1+t^2}}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{1+t^2+2t}{2t\,(1+t^2+1-t^2)} \cdot 2dt$$

$$= \int \frac{t^2+2t+1}{2t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t} + 2 + t\right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[\log|t| + 2t + \frac{t^2}{2} \right] + c$$

$$= \frac{1}{2} \log|t| + t + \frac{1}{4} t^2 + c$$

$$= \frac{1}{2} \log \left| tan\,\frac{x}{2} \right| + tan\,\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\, tan^2 \frac{x}{2} + c'$$

જુઓ કે : $I = \frac{1}{2} \log \left| tan\,\frac{x}{2} \right| + tan\,\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \left(sec^2 \frac{x}{2} - 1\right) + c'$

$$= \frac{1}{2} \log \left| tan\,\frac{x}{2} \right| + tan\,\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\, sec^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + c'$$

$$= \frac{1}{2} \log \left| tan\,\frac{x}{2} \right| + tan\,\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\, sec^2 \frac{x}{2} + c \quad \left(c = c' - \frac{1}{4}\right)$$

આમ બંને રીતે મળતા જવાબ એક જ છે.

ઉદાહરણ 24 : $\int \left(\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2}\right) dx$ મેળવો. $(x > 1)$

ઉકેલ : $I = \int \left(\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2}\right) dx$

ધારો કે $\log x = t$. તેથી $x = e^t$

$\therefore \quad dx = e^t\, dt$

$\therefore \quad I = \int \left(\log t + \frac{1}{t^2}\right) e^t\, dt$

$= \int \left(\log t + \frac{1}{t} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right) e^t\, dt$

$= \int \left[\left(\log t + \frac{1}{t}\right) - \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right)\right] e^t\, dt$

$= \int \left(\log t + \frac{1}{t}\right) e^t\, dt - \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right) e^t\, dt$

$= e^t \log t - e^t \frac{1}{t} + c$

$= x \log(\log x) - \frac{x}{\log x} + c$

ઉદાહરણ 25 : $\int \frac{\sin^{-1}\sqrt{x} - \cos^{-1}\sqrt{x}}{\sin^{-1}\sqrt{x} + \cos^{-1}\sqrt{x}}\, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{\sin^{-1}\sqrt{x} - \cos^{-1}\sqrt{x}}{\sin^{-1}\sqrt{x} + \cos^{-1}\sqrt{x}}\, dx$

$= \int \frac{\sin^{-1}\sqrt{x} - (\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\sqrt{x})}{\frac{\pi}{2}}\, dx$ $\left(\sin^{-1}\sqrt{x} + \cos^{-1}\sqrt{x} = \frac{\pi}{2}\right)$

$= \int \frac{2\sin^{-1}\sqrt{x} - \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}\, dx$

$= \frac{4}{\pi} \int \sin^{-1}\sqrt{x}\, dx - \int dx$

ધારો કે $I_1 = \int \sin^{-1}\sqrt{x}\, dx$

ધારો કે $\sin^{-1}\sqrt{x} = \theta$. તેથી $x = \sin^2\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ $\left(\sqrt{x} > 0.\ \text{તેથી},\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \quad dx = 2\sin\theta \cdot \cos\theta\, d\theta$

$\therefore \quad I_1 = \int \theta\, 2\sin\theta\, \cos\theta\, d\theta$

$= \int \theta \sin 2\theta\, d\theta$

$= -\frac{\theta \cos 2\theta}{2} + \frac{1}{2}\int \cos 2\theta\, d\theta$

$= -\frac{\theta}{2} \cos 2\theta + \frac{\sin 2\theta}{4}$

$= -\frac{\theta}{2}(1 - 2\sin^2\theta) + \frac{1}{2}\sin\theta \cdot \cos\theta$

$$= -\frac{1}{2}\, sin^{-1}\sqrt{x}\ (1 - 2x) + \frac{1}{2}\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}$$

$$= -\frac{1}{2}\, sin^{-1}\sqrt{x} + x\, sin^{-1}\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}$$

$$\therefore\ \ I = \frac{4}{\pi}\int sin^{-1}\sqrt{x}\,dx - \int dx$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[-\frac{1}{2}\, sin^{-1}\sqrt{x} + x sin^{-1}\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}\right] - x + c$$

સ્વાધ્યાય 2

યોગ્ય પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત નીચેનાં વિધેયોનાં સંકલિતો મેળવો :

1. $x^2\ sin^{-1}x$

2. $tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

3. $\frac{x - sin\,x}{1 - cos\,x}$

4. $\frac{\sqrt{sin\,x}}{cos\,x}$

5. $\log\,(x + \sqrt{x^2+a^2})$

6. $sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{x+a}}$

7. $\frac{sin^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$

8. $\frac{\sqrt{1+sin2x}}{1+cos2x}\,e^x$

9. $\frac{\log x - 1}{(\log x)^2}$

10. $\log\,(\log x) + \frac{1}{\log x}$

11. $x\sqrt{2ax - x^2}$

12. $(x - 5)\sqrt{x^2+x}$

13. $\frac{1}{cos\,x\ cos\,2x}$

14. $\frac{1}{sin\,x + sin\,2x}$

15. $\frac{sin\,x}{sin\,4x}$

16. $cot^{-1}(1 - x + x^2)$ **$(0 < x < 1)$**

17. $\frac{1}{sin\,x\sqrt{cos^3 x}}$

18. $\frac{sec\,x}{1 + cosec\,x}$

19. $\frac{1 + sin\,x}{sin\,x\,(1 + cos\,x)}$

20. **આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અને (d)માંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરી આપેલ ☐ માં લખો :**

(1) $\int cos\,(\log x)\ dx = ...\ + c$ ☐

(a) $\frac{x}{2}\,[cos\,(\log x) + sin\,(\log x)]$

(b) $\frac{x}{4}\,[cos\,(\log x) + sin\,(\log x)]$

(c) $\frac{x}{2}\,[cos\,(\log x) - sin\,(\log x)]$

(d) $\frac{x}{2}\,[sin\,(\log x) - cos\,(\log x)]$

(2) $\int e^x\,sin\,x\ cos\,x\ dx = ...\ + c$ ☐

(a) $\frac{e^x}{2\sqrt{5}}\,cos\,(2x - tan^{-1}2)$

(b) $\frac{e^x}{2\sqrt{5}}\,sin\,(2x - tan^{-1}2)$

(c) $\frac{e^2}{2\sqrt{5}}\,sin\,(2x + tan^{-1}2)$

(d) $\frac{e^{2x}}{2\sqrt{5}}\,sin\,(2x + \pi - tan^{-1}2)$

(3) $\int e^x \sec x\ (1 + \tan x)\ dx = ... + c$

(a) $e^x \sec x\ \tan x$ (b) $e^x \tan x$ (c) $e^x \sec x$ (d) $-e^x \sec x$

(4) $\int \frac{(5+\log x)\,dx}{(6+\log x)^2} = ... + c$

(a) $\frac{x}{\log_e x+6}$ (b) $\frac{1}{5+\log_e x}$ (c) $\frac{x}{\log_e x+5}$ (d) $\frac{e^x}{\log_e x+6}$

(5) $\int \frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}\ (1 + x + x^2)\ dx = ... + c$

(a) $e^{\tan^{-1}x}$ (b) $\frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$ (c) $x \cdot e^{\tan^{-1}x}$ (d) $\frac{x}{1+x}\ e^{\tan^{-1}x}$

(6) $\int e^x \left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right) dx = ... + c$

(a) $e^x \cot x$ (b) $e^x \cot \frac{x}{2}$ (c) $e^x \tan \frac{x}{2}$ (d) $e^{\frac{x}{2}} \cdot \tan \frac{x}{2}$

(7) $\int e^x \left(\frac{1+x\log x}{x}\right) dx = ... + c$

(a) $e^x \log x$ (b) $x \cdot e^x$ (c) $\frac{1}{x} \log x$ (d) $e^{-x} \log x$

(8) $\int \left(\log x + \frac{1}{x^2}\right) e^x\ dx = ... + c$

(a) $e^x \left(\log x + \frac{1}{x^2}\right)$ (b) $e^x \left(\log x + \frac{1}{x}\right)$ (c) $e^x \left(\log x - \frac{1}{x^2}\right)$ (d) $e^x \left(\log x - \frac{1}{x}\right)$

(9) $\int \left(\frac{x-1}{x^2}\right) e^x\ dx = ... + c$

(a) $\frac{1}{x^2}\ e^x$ (b) $\frac{1}{x}\ e^x$ (c) $-\frac{1}{x^2}\ e^x$ (d) $-\frac{1}{x}\ e^x$

(10) $\int (x^6 + 7x^5 + 6x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 3x + 1)\, e^x\ dx = ... + c$

(a) $\sum_{i=1}^{7} x^i e^x$ (b) $\sum_{i=1}^{6} x^i e^x$ (c) $\sum_{i=0}^{6} i\, e^x$ (d) $\sum_{i=0}^{6} (xe)^i$

(11) $\int \tan^{-1}x\ dx = ... + c$

(a) $x \tan^{-1}x - \frac{1}{2} \log |1 + x^2|$ (b) $x \tan^{-1}x + \frac{1}{2} \log \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}$

(c) $x \tan^{-1}x + \frac{1}{2} \log |x^2 + 1|$ (d) $\frac{1}{1+x^2}$

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો

1. ખંડશઃ સંકલનનો નિયમ :

જો (1) વિધેય f અને g એ કોઈ અંતરાલ $I = (a, b)$ પર વિકલનીય હોય,

(2) f' અને g' એ I પર સતત હોય, તો $\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$

આ નિયમમાં $f(x) = u$ અને $g'(x) = v$, લઈએ તો, $f'(x) = \frac{du}{dx}$ અને $g(x) = \int v\, dx$

તેથી તે નવા સ્વરૂપે $\int uv\, dx = u\int v\, dx - \int\left(\frac{du}{dx}\int v\, dx\right) dx$ લખી શકાય છે.

2. સંકલનનાં પ્રમાણિત રૂપો :

(1) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\log|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c$

(2) $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\log|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + c$

(3) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + c \qquad (a > 0)$

(4) $\int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx = e^x f(x) + c$

(5) $\int e^{ax} \cdot \sin(bx + k)\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}[a\sin(bx + k) - b\cos(bx + k)] + c, \; a \neq 0, \; b \neq 0$

$$= \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin(bx + k - \alpha) + c$$

જ્યાં $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. $\alpha \in (0, 2\pi)$

(6) $\int e^{ax}\cos(bx + k)\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}[a\cos(bx + k) + b\sin(bx + k)] + c, \; a \neq 0, \; b \neq 0$

$$= \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos(bx + k - \alpha) + c$$

જ્યાં $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. $\alpha \in (0, 2\pi)$.

3. (1) $\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx$ (2) $\int (Ax + B)\sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx$ સ્વરૂપનાં સંકલિતો.

4. આંશિક અપૂર્ણાંકની રીત.

■