શ્રેણિક 4

It is easier to square the circle than to get round a mathematician.
– Augustus De Morgan

Our notion of symmetry is derived from the human face.
Hence we demand symmetry horizontally and in breadth only not vertically nor in depth.
– Blaise Pascal

4.1 પ્રાસ્તાવિક

જો તમારું વજન કિલોગ્રામમાં પૂછવામાં આવે, તો તમારો જવાબ 55 જેવી કોઈક વાસ્તવિક સંખ્યા હશે. આ જ પ્રમાણે જો તમારી ઊંચાઈ સેન્ટિમીટરમાં પૂછવામાં આવે, તો તમારો જવાબ 135 જેવી કોઈક બીજી વાસ્તવિક સંખ્યા હશે. આ પ્રમાણેની માહિતી સંગ્રહિત કરવાનો એક રસ્તો એ છે કે તેમને વજન અને ઊંચાઈની ક્રમયુક્ત જોડ (55, 135) દ્વારા દર્શાવી શકાય. આમ આ ક્રમયુક્ત જોડના ઘટકો આપણને અનુક્રમે વજન અને ઊંચાઈની માહિતી પૂરી પાડે છે. જો આ માહિતીમાં તમે તમારી અત્યારની ઉંમર 16 વર્ષ પણ ઉમેરવા માંગતા હો તો તેને દર્શાવવા માટે આપણે તેને ક્રમયુક્ત ત્રય (55, 135, 16) વડે દર્શાવી શકીએ. આ ક્રમયુક્ત ત્રયના ઘટકો આપણને અનુક્રમે વજન, ઊંચાઈ અને ઉંમરની માહિતી પૂરી પાડે છે. આ ત્રણ ઘટકોની શ્રેણીને આપણે એક હાર $[55 \quad 135 \quad 16]$ અથવા એક સ્તંભ $\begin{bmatrix} 55 \\ 135 \\ 16 \end{bmatrix}$ દ્વારા પણ દર્શાવી શકીએ.

ઉપરના પ્રશ્નો રીટા, રમણ, રહીમ અને જૉન એમ ચાર વ્યક્તિઓને પૂછવામાં આવે અને આ અંગેની માહિતી એકત્રિત કરી તેને ક્રમયુક્ત ત્રયમાં અનુક્રમે (55, 135, 16), (58.5, 140, 18), (59, 138, 17) અને (60.5, 155, 20) વડે દર્શાવાય. જો આ બધી જ વ્યક્તિઓની બધી જ માહિતી કોઈ ગાણિતીય અભિવ્યક્તિમાં દર્શાવી શકીએ તો કેવું સરસ લાગે ! જો દરેક વ્યક્તિની માહિતી સ્તંભમાં દર્શાવીએ અને વ્યક્તિઓને હારમાં ગોઠવીએ તો તેને નીચે મુજબની એક અભિવ્યક્તિ તરીકે મૂકી શકાય :

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cccc} \text{રીટા} & \text{રમણ} & \text{રહીમ} & \text{જૉન} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{વજન} \\ \text{ઊંચાઈ} \\ \text{ઉંમર} \end{array} & \begin{bmatrix} 55 & 58.5 & 59 & 60.5 \\ 135 & 140 & 138 & 155 \\ 16 & 18 & 17 & 20 \end{bmatrix} \end{array}$$

આ જ રીતે જો લશ્કરની કોઈક એક પાંખમાં સૈનિકોની ભરતી કરવા માટે ઉપર મુજબની માહિતી ઘણી વ્યક્તિઓ માટે એકત્રિત કરવાની હોય, તો તે માહિતીને ઉપરોક્ત અભિવ્યક્તિમાં રજૂ કરવાથી તેનું અર્થઘટન કરવામાં ઘણી જ સરળતા રહે તથા સૈનિકની પસંદગી કરવામાં સુગમ પડે.

વાસ્તવિક સંખ્યાઓની ઉપરોક્ત લંબચોરસીય ગોઠવણીને **શ્રેણિક** કહે છે. શ્રેણિકમાં દર્શાવેલ પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યાને શ્રેણિકનો **ઘટક (Element / Entry)** કહે છે.

અંગ્રેજી ભાષામાં શ્રેણિકને **Matrix** કહે છે, જે લેટિન ભાષાનો શબ્દ છે. સુરેખ સમીકરણોની સંહતિના અભ્યાસમાંથી શ્રેણિકની સંકલ્પના ઉદ્ભવી છે. ઈ.સ. પૂ. 300 અને ઈ.સ. 200 વચ્ચેના સમયગાળામાં ચીનમાં લખાયેલ Mathematical Art **(Chiu Chang Suan Shu)** નામના પુસ્તકના નવ પ્રકરણોમાં સુરેખ સમીકરણોની સંહતિના ઉકેલ માટે શ્રેણિકનો ઉપયોગ થયેલો માલૂમ પડ્યો છે. **Carl-Friedrich Gauss** (1777-1855) નામના ગણિતશાસ્ત્રીએ પણ સુરેખ સમીકરણ સંહતિના ઉકેલમાં શ્રેણિકનો ઉપયોગ કર્યો હતો.

શ્રેણિક પરની પ્રક્રિયાનો ઉપયોગ અણુભૌતિક વિજ્ઞાન (Electronics Physics)માં પણ થાય છે. કમ્પ્યૂટરમાં, બજેટમાં, કિંમતોના અંદાજ, પૃથક્કરણ અને પ્રયોગોમાં શ્રેણિકનો ઉપયોગ વિપુલ પ્રમાણમાં થાય છે. સંકેત લિપિ, આધુનિક મનોવિજ્ઞાન, પ્રજોત્પત્તિશાસ્ત્ર, ઔદ્યોગિક વ્યવસ્થાપનમાં પણ તેનો ઉપયોગ થાય છે.

શ્રેણિક : સંખ્યાઓની કોઈ પણ લંબચોરસ ગોઠવણીને શ્રેણિક કહે છે. આ સંખ્યાઓને [ ] અથવા ( ) પ્રકારના કૌંસમાં મૂકવામાં આવે છે. આપણે ફક્ત વાસ્તવિક સંખ્યાઓવાળા શ્રેણિકોનો જ વિચાર કરીશું. એટલે કે શ્રેણિકોના ઘટકો ફક્ત વાસ્તવિક સંખ્યાઓ જ લઈશું.

શ્રેણિક $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ ને બે હાર અને ત્રણ સ્તંભ છે. તેથી આપણે આ શ્રેણિકને 2×3 શ્રેણિક કહીશું. 2×3 ને શ્રેણિકની **કક્ષા (Order)** પણ કહે છે.

વ્યાપક સ્વરૂપે, $m \times n$ શ્રેણિકને m હાર અને n સ્તંભ છે. તેને આપણે નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકીએ,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

અહીં 'a_{ij}' એ 'i મી' હાર અને 'j મા' સ્તંભનો ઘટક છે. ટૂંકમાં આપણે આ શ્રેણિકને $[a_{ij}]_{m \times n}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, m$; $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ વડે દર્શાવીશું. સંદિગ્ધતાને અવકાશ ન હોય ત્યારે આપણે તેને $[a_{ij}]$ પણ લખીશું. આપણે શ્રેણિકોને A, B, C વગેરે દ્વારા દર્શાવીશું. શ્રેણિકની કક્ષા $m \times n$ માં m એ શ્રેણિકની હારની સંખ્યા અને n એ શ્રેણિકના સ્તંભની સંખ્યા દર્શાવે છે. $m \times n$ એ લંબચોરસ શ્રેણિક છે.

ઉદાહરણ 1 : 4×3 શ્રેણિક $A = [a_{ij}]$ મેળવો, જેના સભ્યો $a_{ij} = i - j$ દ્વારા મળે.

ઉકેલ : માંગેલ શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$

અહીં, $a_{ij} = i - j$, તેથી $a_{11} = 1 - 1 = 0$, $a_{12} = 1 - 2 = -1$, $a_{13} = 1 - 3 = -2$,

$a_{21} = 2 - 1 = 1$. આ પ્રમાણે ઘટકો મેળવતાં શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ મળે.

નિશ્ચાયક અને શ્રેણિક :

(1) નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય એક વાસ્તવિક સંખ્યા છે જ્યારે શ્રેણિકને એક વાસ્તવિક મૂલ્યમાં આંકી શકાય નહીં, કારણ કે શ્રેણિક એ તો વાસ્તવિક સંખ્યાઓની ફક્ત ગોઠવણી જ છે.

(2) નિશ્ચાયકની હારની સંખ્યા અને સ્તંભની સંખ્યા હંમેશાં સમાન હોય છે જ્યારે શ્રેણિકની હારની સંખ્યા અને સ્તંભની સંખ્યા સમાન અથવા અસમાન હોઈ શકે છે.

4.2 શ્રેણિકોની સમાનતા

બે શ્રેણિકો $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ અને $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ માટે જો તેમની હારની સંખ્યા સમાન હોય, તેમના સ્તંભની સંખ્યા સમાન હોય અને પ્રત્યેક i, j માટે $a_{ij} = b_{ij}$ થાય, તો A અને B સમાન શ્રેણિકો કહેવાય અને સમાન શ્રેણિકો A તથા B ને A = B વડે દર્શાવાય છે.

આમ, $A = B \Leftrightarrow [a_{ij}]_{m \times n} = [b_{ij}]_{m \times n} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}\ \ \forall\ i = 1, 2, 3, \ldots, m;\ \ j = 1, 2, 3, \ldots, n$

ઉદાહરણ 2 : જો $\begin{bmatrix} x-1 & 2y \\ x+y & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x-7 & y^2-3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$, તો x અને y શોધો.

ઉકેલ : બે શ્રેણિકોના અનુરૂપ ઘટકો સમાન છે.

$\therefore\ \ x - 1 = 3x - 7, \quad 2y = y^2 - 3$ અને $x + y = 6$ અને $4 = 4$.

$\therefore\quad 2x = 6, \qquad\qquad y^2 - 2y - 3 = 0$

$\therefore\quad x = 3, \qquad\qquad (y - 3)(y + 1) = 0$

$y = 3$ અથવા $y = -1$

અહીં, $x = 3$ અને $y = 3$ એ સમીકરણ $x + y = 6$નું સમાધાન કરે છે અને $x = 3$, $y = -1$ દ્વારા સમીકરણ $x + y = 6$ નું સમાધાન થતું નથી. તેથી $x = 3$ અને $y = 3$.

શ્રેણિકોના પ્રકારો :

હાર શ્રેણિક (Row Matrix) : $1 \times n$ શ્રેણિક $[a_{11} \;\; a_{12} \;\; a_{13} \dots a_{1n}]$ ને હાર શ્રેણિક કહે છે.

હાર શ્રેણિકને ફક્ત એક જ હાર હોય છે. (સ્તંભની સંખ્યા કોઈ પણ હોઈ શકે છે.)

ઉદાહરણ તરીકે, $A = [3 \;\; 5 \;\; -1 \;\; 4 \;\; 0]$ એ 1×5 પ્રકારનો હાર શ્રેણિક છે.

સ્તંભ શ્રેણિક (Column Matrix) : $m \times 1$ શ્રેણિક $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ ને સ્તંભ શ્રેણિક કહે છે.

સ્તંભ શ્રેણિકને ફક્ત એક જ સ્તંભ હોય છે. (હારની સંખ્યા કોઈ પણ હોઈ શકે છે.)

ઉદાહરણ તરીકે, $A = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 10 \\ -8 \end{bmatrix}$ એ 4×1 પ્રકારનો સ્તંભ શ્રેણિક છે.

ચોરસ શ્રેણિક (Square Matrix) : $n \times n$ પ્રકારના શ્રેણિકને ચોરસ શ્રેણિક કહે છે.

ચોરસ શ્રેણિકની હારની અને સ્તંભની સંખ્યા સમાન હોય છે.

ઉદાહરણ તરીકે $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 11 & 2 & 9 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ એ 3×3 પ્રકારનો ચોરસ શ્રેણિક છે.

(નોંધ : $[a_{ij}]_{1 \times 1}$ એ હાર શ્રેણિક, સ્તંભ શ્રેણિક તથા ચોરસ શ્રેણિક પણ છે.)

વિકર્ણ શ્રેણિક (Diagonal Matrix) : જો ચોરસ શ્રેણિક $A = [a_{ij}]_{n \times n}$માં $i \neq j$ માટે $a_{ij} = 0$ હોય, તો Aને વિકર્ણ શ્રેણિક કહેવાય. આ પ્રકારના ચોરસ શ્રેણિકમાં ઉપર ડાબે ખૂણેથી જમણી બાજુ નીચે તરફ જતા વિકર્ણ (અગ્રવિકર્ણ)ના ઘટકો સિવાયના બધા જ ઘટકો શૂન્ય હોય છે.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ **વિકર્ણ શ્રેણિક છે.**

વિકર્ણ શ્રેણિકને $diag\,[a_{11} \;\; a_{22} \;\; a_{33} \dots a_{nn}]$ વડે પણ દર્શાવાય છે.

ઉદાહરણ તરીકે, $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ વિકર્ણ શ્રેણિક છે, એટલે કે $diag\,[5 \;\; 0 \;\; 3]$.

અહીં, 5, 0, 3 એ શ્રેણિક Aના અગ્રવિકર્ણના ઘટકો છે.

શૂન્ય શ્રેણિક (Zero Matrix) : જે શ્રેણિકના બધા જ ઘટકો શૂન્ય હોય તે શ્રેણિકને શૂન્ય શ્રેણિક કહે છે. આપણે શૂન્ય શ્રેણિકને $[0]_{m \times n}$ અથવા $O_{m \times n}$ વડે દર્શાવીશું. $O_{m \times n}$ ને O વડે પણ દર્શાવી શકાય.

આમ, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **એ શૂન્ય શ્રેણિક છે, એટલે કે એ $O_{2 \times 3}$ શૂન્ય શ્રેણિક છે.**

4.3 શ્રેણિકો પરની પ્રક્રિયાઓ

બે શ્રેણિકોનો સરવાળો : જો $A = [a_{ij}]$ અને $B = [b_{ij}]$ બંને $m \times n$ શ્રેણિક હોય તો તેમનો સરવાળો શ્રેણિક $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત થાય છે. એટલે કે આપેલા બે શ્રેણિક A અને B ના અનુરૂપ ઘટકોના સરવાળાથી બનતો શ્રેણિક એ તેમનો સરવાળો A + B છે.

બે શ્રેણિકોના સરવાળા માટે બંને શ્રેણિકની હારની સંખ્યા સમાન હોવી જોઈએ તેમજ તેમના સ્તંભની સંખ્યા સમાન હોવી જોઈએ, નહીં તો બે શ્રેણિકોનો સરવાળો શક્ય થશે નહીં. A અને B બંને $m \times n$ શ્રેણિકો હોય, તો તેઓ સરવાળા માટે સુસંગત છે તેમ કહેવાય છે. સંકેતમાં, $[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$.

ઉદાહરણ તરીકે, જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$, તો $A + B = \begin{bmatrix} 1-3 & 5+2 \\ 2+1 & -3+2 \\ 4-5 & -7-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 3 & -1 \\ -1 & -11 \end{bmatrix}$.

શ્રેણિકના સરવાળાના ગુણધર્મો :

(1) સરવાળા માટે ક્રમનો નિયમ :

જો $A = [a_{ij}]$ અને $B = [b_{ij}]$ બંને $m \times n$ શ્રેણિક હોય, તો $A + B = B + A$,

હવે, $A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}]$

$= [a_{ij} + b_{ij}]$

$= [b_{ij} + a_{ij}]$ **(Rમાં સરવાળા વિષે ક્રમનો ગુણધર્મ)**

$= [b_{ij}] + [a_{ij}]$

$= B + A$

$\therefore \quad A + B = B + A$

(2) સરવાળા માટે જૂથનો નિયમ :

$m \times n$ શ્રેણિકો $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ અને $C = [c_{ij}]$ માટે,

$(A + B) + C = A + (B + C)$.

હવે, $(A + B) + C = ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}]$

$= [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}]$

$= [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]$

$= [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]$ **(Rમાં સરવાળાનો જૂથનો નિયમ)**

$= [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}]$

$= [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}])$

$= A + (B + C)$

$\therefore \quad (A + B) + C = A + (B + C)$

(3) સરવાળા માટે તટસ્થ શ્રેણિક :

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ અને શૂન્ય શ્રેણિક $O = [0]_{m \times n}$ માટે $A + O = O + A = A$

હવે, $A + O = [a_{ij}] + [0]$

$= [a_{ij} + 0]$

$= [a_{ij}] = A$ **(0 એ Rમાં સરવાળા માટેનો તટસ્થ ઘટક છે.)**

$\therefore \quad A + O = A$

ક્રમના નિયમ અનુસાર $A + O = O + A$

$\therefore \quad O + A = A$

આમ, **O એ સરવાળા માટેનો તટસ્થ શ્રેણિક છે.**

(4) વિરોધી શ્રેણિકનું અસ્તિત્વ :

શ્રેણિક $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ને અનુરૂપ એક શ્રેણિક $[-a_{ij}]_{m \times n}$ એવો મળે કે જેથી $A + [-a_{ij}] = O_{m \times n}$.

$$\begin{aligned} A + [-a_{ij}] &= [a_{ij}] + [-a_{ij}] \\ &= [a_{ij} - a_{ij}] \\ &= [\,0\,] \\ &= O_{m \times n} \end{aligned}$$

આપણે $[-a_{ij}]$ ને $-A$ વડે દર્શાવીશું.

ક્રમના નિયમ પરથી $A + (-A) = O = (-A) + A$.

આમ, **$-A = [-a_{ij}]$ ને $A = [a_{ij}]$નો વિરોધી શ્રેણિક કહે છે.**

શ્રેણિકોનો તફાવત : જો $A = [a_{ij}]$ અને $B = [b_{ij}]$ બંને $m \times n$ શ્રેણિકો હોય, તો A અને Bનો તફાવત $A - B = A + (-B) = [a_{ij}] + [-b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}]$ એ રીતે વ્યાખ્યાયિત થાય.

ઉદાહરણ 3 : જો $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, તો $A + B$ અને $A - B$ શોધો.

ઉકેલ : $A + B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2+5 & -3+4 & 4-2 \\ 5+3 & 2+1 & 8+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 8 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -4 & 2 \\ -3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-5 & -3-4 & 4+2 \\ 5-3 & 2-1 & 8-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -7 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

ઉદાહરણ 4 : આપણે $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ નો સરવાળો કરી શકીશું ? કારણ આપો.

ઉકેલ : અહીં A એ 3×2 અને B એ 2×2 શ્રેણિકો છે. તેમના સ્તંભની સંખ્યા સમાન છે, પરંતુ હારની સંખ્યા સમાન નથી. A તથા B સરવાળા માટે સુસંગત નથી. તેથી A અને Bનો સરવાળો થઈ શકે નહીં.

શ્રેણિકનો અદિશ વડે ગુણાકાર તથા ગુણધર્મો :

જો $A = [a_{ij}]$ એ $m \times n$ શ્રેણિક હોય અને k કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો શ્રેણિક $[ka_{ij}]$ ને શ્રેણિક Aનો અદિશ k વડે ગુણાકાર કહે છે. તેને kA વડે દર્શાવાય છે. આમ, $A = [a_{ij}]$ માટે $kA = [ka_{ij}]$ થાય.

શ્રેણિક kAમાં Aના દરેક ઘટકને k વડે ગુણવામાં આવે છે. (નિશ્ચાયકના અનુરૂપ ગુણધર્મ સાથે સરખાવો !)

શ્રેણિકોના સરવાળા તથા અદિશ વડે ગુણાકાર માટેના ગુણધર્મો :

ધારો કે $A = [a_{ij}]$ અને $B = [b_{ij}]$ એ $m \times n$ શ્રેણિકો છે અને $k, l \in R$,

(1) $k(A + B) = kA + kB$ **(2)** $(k + l)A = kA + lA$ **(3)** $(kl)A = k(lA)$

(4) $1A = A$ **(5)** $(-1)A = -A$

સાબિતી : (1) $k(A + B) = k[a_{ij} + b_{ij}]$
$= [k(a_{ij} + b_{ij})]$
$= [ka_{ij} + kb_{ij}]$
$= [ka_{ij}] + [kb_{ij}]$
$= k[a_{ij}] + k[b_{ij}]$
$= kA + kB$

(2) $(k + l)A = (k + l)[a_{ij}]$
$= [(k + l)\, a_{ij}]$
$= [ka_{ij} + la_{ij}]$
$= [ka_{ij}] + [la_{ij}]$
$= k[a_{ij}] + l[a_{ij}]$
$= kA + lA$

(3) $(kl)A = (kl)[a_{ij}]$
$= [(kl)\, a_{ij}]$
$= [k(la_{ij})]$
$= k[la_{ij}]$
$= k(lA)$

(4) $1A = 1\,[a_{ij}]$
$= [1 \cdot a_{ij}]$
$= [a_{ij}]$
$= A$

(5) $(-1)A = (-1)[a_{ij}] = [(-1)a_{ij}] = [-a_{ij}] = -A$

આમ, $(-1)\,A = -A$

ઉદાહરણ 5 : જો $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -5 & 7 \\ 2 & -9 & -8 & 5 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & -6 \\ -2 & 3 & 6 & -7 \end{bmatrix}$, તો 3A − 2B મેળવો.

ઉકેલ : $3A - 2B = 3A + (-2)B$

$$= 3\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -5 & 7 \\ 2 & -9 & -8 & 5 \end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & -6 \\ -2 & 3 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 6 & 3 & 0 \\ -9 & 3 & -15 & 21 \\ 6 & -27 & -24 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -4 & 6 & -10 \\ -8 & 0 & -2 & 12 \\ 4 & -6 & -12 & 14 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12-2 & 6-4 & 3+6 & 0-10 \\ -9-8 & 3+0 & -15-2 & 21+12 \\ 6+4 & -27-6 & -24-12 & 15+14 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 2 & 9 & -10 \\ -17 & 3 & -17 & 33 \\ 10 & -33 & -36 & 29 \end{bmatrix}$$

ઉદાહરણ 6 : જો $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$, તો શ્રેણિક X મેળવો કે જેથી 3A + 2X = 4B.

ઉકેલ : આપણે શ્રેણિક X એવો મેળવવા માગીએ છીએ કે જેથી, $3A + 2X = 4B$

$\therefore \quad (-3A) + (3A + 2X) = (-3A) + 4B$ (3Aનો વિરોધી ઉમેરતા)

$\therefore \quad (-3A + 3A) + 2X = (-3A) + 4B$

$\therefore \quad O + 2X = 4B - 3A$

$\therefore \quad 2X = 4B - 3A$ (O એ સરવાળા માટેનો તટસ્થ શ્રેણિક છે.)

$\therefore \quad X = \frac{1}{2}(4B - 3A)$

$$\therefore \quad X = \frac{1}{2}\left(4\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\\ 6 & -5\end{bmatrix} + (-3)\begin{bmatrix}5 & 4\\ 0 & -2\\ 3 & 6\end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}4 & 8\\ 12 & -16\\ 24 & -20\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-15 & -12\\ 0 & 6\\ -9 & -18\end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}4-15 & 8-12\\ 12+0 & -16+6\\ 24-9 & -20-18\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-11 & -4\\ 12 & -10\\ 15 & -38\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{11}{2} & -2\\ 6 & -5\\ \frac{15}{2} & -19\end{bmatrix}$$

પરિવર્ત શ્રેણિક અને તેના ગુણધર્મો :

પરિવર્ત શ્રેણિક (Transpose of a Matrix) : જો $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ શ્રેણિકની બધી જ હારને અનુરૂપ સ્તંભોમાં ફેરવવામાં આવે અને તેથી જે શ્રેણિક મળે તેને શ્રેણિક Aનો પરિવર્ત શ્રેણિક કહેવાય.

જો $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ શ્રેણિક હોય તો તેનો પરિવર્ત શ્રેણિક $[a_{ji}]_{n \times m}$ થશે. તેને A^T અથવા A' વડે દર્શાવાય છે.

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ તો $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$

ઉદાહરણ તરીકે, જો $A = \begin{bmatrix}3 & \sqrt{5} & 2\\ \sqrt{2} & -1 & 0\end{bmatrix}$, તો $A^T = \begin{bmatrix}3 & \sqrt{2}\\ \sqrt{5} & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$

સંમિત શ્રેણિક (Symmetric Matrix) : જો ચોરસ શ્રેણિક A માટે $A^T = A$ થાય, તો Aને સંમિત શ્રેણિક કહેવાય. જો $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, તો $A^T = [a_{ji}]_{n \times n}$. હવે, $A^T = A$ હોવાથી પ્રત્યેક i અને j માટે $a_{ij} = a_{ji}$ થાય.

આમ, જો $A = \begin{bmatrix}1 & 3 & -5\\ 3 & 0 & 2\\ -5 & 2 & -7\end{bmatrix}$, તો $A^T = \begin{bmatrix}1 & 3 & -5\\ 3 & 0 & 2\\ -5 & 2 & -7\end{bmatrix}$.

તેથી, $A^T = A$ થશે. તેથી A સંમિત શ્રેણિક છે.

વિસંમિત શ્રેણિક (Skew-Symmetric Matrix) : જો ચોરસ શ્રેણિક A માટે $A^T = -A$ થાય, તો A ને વિસંમિત શ્રેણિક કહેવાય. આવા શ્રેણિક $A^T = [a_{ji}]_{n \times n}$ માટે પ્રત્યેક i અને j માટે $a_{ji} = -a_{ij}$ થાય.

હવે, $i = j$, તો $a_{ii} = -a_{ii}, \forall i$.

$\therefore \quad 2a_{ii} = 0$

$\therefore \quad a_{ii} = 0, \forall i.$

$a_{11} = a_{22} = ... = a_{nn} = 0$ થાય. આમ, વિસંમિત શ્રેણિકમાં અગ્ર વિકર્ણના બધા જ ઘટકો શૂન્ય થાય છે.

ઉદાહરણ તરીકે, શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix}0 & -2 & 1\\ 2 & 0 & -5\\ -1 & 5 & 0\end{bmatrix}$, તો

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -5 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix} = (-1)A = -A$$

$\therefore$ A વિસંમિત શ્રેણિક છે.

પરિવર્ત શ્રેણિક સંબંધી સરવાળા તથા અદિશ વડે ગુણાકારના ગુણધર્મો :

(1) $(A + B)^T = A^T + B^T$, (2) $(A^T)^T = A$, (3) $(kA)^T = kA^T$, $k \in R$

સાબિતી : (1) $m \times n$ શ્રેણિકો $A = [a_{ij}]$ અને $B = [b_{ij}]$ હોય, તો

$A^T = [a_{ji}]$ અને $B^T = [b_{ji}]$ એ $n \times m$ શ્રેણિકો છે.

હવે, $A + B = [a_{ij} + b_{ij}] = [c_{ij}]$, જ્યાં $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$\therefore$ $(A + B)^T = [c_{ji}]$

$= [a_{ji} + b_{ji}]$

$= [a_{ji}] + [b_{ji}]$

$\therefore$ $(A + B)^T = A^T + B^T$

(2) $A = [a_{ij}]$ લેતાં,

$A^T = [a_{ji}]$ અને તેથી $(A^T)^T = [a_{ij}] = A$

$\therefore$ $(A^T)^T = A$

(3) ધારો કે $A = [a_{ij}]$

$\therefore$ $kA = [ka_{ij}] = [c_{ij}]$, જ્યાં $c_{ij} = ka_{ij}$.

$\therefore$ $(kA)^T = [c_{ji}]$

$= [ka_{ji}]$

$= k[a_{ji}]$

$= kA^T$

ઉદાહરણ 7 : જો $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ -6 & 3 & 8 \end{bmatrix}$, તો $A + A^T$ અને $A - A^T$ મેળવો.

શ્રેણિકો $A + A^T$ અને $A - A^T$ વિષે તમે શું કહી શકશો ?

ઉકેલ : $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ -6 & 3 & 8 \end{bmatrix}$. તેથી $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 8 \end{bmatrix}$

હવે, $A + A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ -6 & 3 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 8 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 16 \end{bmatrix}$

જો $B = A + A^T$

તો પછી $B^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 16 \end{bmatrix} = B$

આમ, $(A + A^T)^T = A + A^T$. તેથી $A + A^T$ એ સંમિત શ્રેણિક છે.

$$A - A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ -6 & 3 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -4 & 11 \\ 4 & 0 & -7 \\ -11 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$C = A - A^T$ લેતાં,

$$\therefore \quad C^T = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -11 \\ -4 & 0 & 7 \\ 11 & -7 & 0 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 0 & -4 & 11 \\ 4 & 0 & -7 \\ -11 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad C^T = -C$

$\therefore \quad (A - A^T)^T = -(A - A^T)$. તેથી $A - A^T$ એ વિસંમિત શ્રેણિક છે.

ઉદાહરણ 8 : $cosec\theta \begin{bmatrix} cosec\theta & -cot\theta \\ cot\theta & -cosec\theta \end{bmatrix} + cot\theta \begin{bmatrix} -cot\theta & cosec\theta \\ -cosec\theta & cot\theta \end{bmatrix}$નું સાદું રૂપ આપો.

ઉકેલ : $cosec\theta \begin{bmatrix} cosec\theta & -cot\theta \\ cot\theta & -cosec\theta \end{bmatrix} + cot\theta \begin{bmatrix} -cot\theta & cosec\theta \\ -cosec\theta & cot\theta \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} cosec^2\theta & -cosec\theta\, cot\theta \\ cosec\theta\, cot\theta & -cosec^2\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -cot^2\theta & cot\theta\, cosec\theta \\ -cot\theta\, cosec\theta & cot^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cosec^2\theta - cot^2\theta & -cosec\theta\, cot\theta + cot\theta\, cosec\theta \\ cot\theta\, cosec\theta - cot\theta\, cosec\theta & -cosec^2\theta + cot^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ઉદાહરણ 9 : સાબિત કરો કે જો A ચોરસ શ્રેણિક હોય, તો $A + A^T$ એ સંમિત શ્રેણિક છે અને $A - A^T$ એ વિસંમિત શ્રેણિક છે તથા દરેક શ્રેણિક A ને $A = B + C$ સ્વરૂપે અનન્ય રીતે રજૂ કરી શકાય, જ્યાં B સંમિત અને C વિસંમિત શ્રેણિક છે.

ઉકેલ : જો $B = A + A^T$, તો $B^T = (A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T = B$

$\therefore \quad B = A + A^T$ એ સંમિત શ્રેણિક છે.

ધારો કે $C = A - A^T$

તો $C^T = (A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T) = -C$

$\therefore \quad C = A - A^T$ એ વિસંમિત શ્રેણિક છે.

વળી, $A = \frac{1}{2}(A + A^T + A - A^T) = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$.

$\therefore$ A એ સંમિત શ્રેણિક $\frac{1}{2}B$ અને વિસંમિત શ્રેણિક $\frac{1}{2}C$ નો સરવાળો છે.

આથી ઉલટું, ધારો કે $A = B + C$, જ્યાં B સંમિત અને C વિસંમિત શ્રેણિક છે.

$\therefore$ $B^T = B$ અને $C^T = -C$

હવે, $A^T = B^T + C^T = B - C$

$\therefore$ $A + A^T = 2B$, $A - A^T = 2C$

$\therefore$ $B = \frac{A + A^T}{2}$, $C = \frac{A - A^T}{2}$

$\therefore$ શ્રેણિક Aને સંમિત અને વિસંમિત શ્રેણિકોના સરવાળા તરીકે અનન્ય રૂપે રજૂ કરી શકાય.

સ્વાધ્યાય 4.1

1. જો $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, તો $A + B$, $A - B$, $2A + B$, $A - 2B$ શોધો.

2. જો $A = \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$, તો $A + A^T$ અને $A - A^T$ શોધો.

3. જો $A = diag\,[1 \quad -1 \quad 2]$ અને $B = diag\,[3 \quad 2 \quad 1]$, $B - A$, $2A + 3B$ શોધો.

4. શ્રેણિક સમીકરણ $\begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 12 \end{bmatrix}$નો ઉકેલ મેળવો.

5. જો $a_{ij} = \frac{(i - 2j)^2}{3}$, તો $[a_{ij}]_{2 \times 2}$ મેળવો.

6. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, તો $A - 2A^T$ શોધો.

7. જો $\begin{bmatrix} x + y & xy \\ -8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}$, તો x અને y શોધો.

8. જો $\begin{bmatrix} a - 2b & c + d \\ 2a - b & 3a - c \end{bmatrix} = .\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$ તો a, b, c, d શોધો.

9. જો $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$ અને $A - B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ તો શ્રેણિકો A અને B શોધો.

10. જો $5A - 3X = 2B$, જ્યાં $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ તો શ્રેણિક X શોધો.

11. ધારો કે $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -12 & -3 & 0 \\ -9 & -1 & -12 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ તથા $3A + 4B - X = O$, તો શ્રેણિક X શોધો.

12. જો $2\begin{bmatrix} 5 & a \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$ તો a અને b શોધો.

*

શ્રેણિકોના ગુણાકાર :

A અને B શ્રેણિકો છે. જો શ્રેણિક Aના સ્તંભની સંખ્યા અને શ્રેણિક Bની હારની સંખ્યા સમાન હોય તો અને તો જ A અને B શ્રેણિકોનો ગુણાકાર AB વ્યાખ્યાયિત થાય.

ધારો કે, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ અને $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ બે શ્રેણિકો છે. તેમનો ગુણાકાર $AB = [c_{ij}]_{m \times p}$ નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થાય,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}.$$

શ્રેણિક ABની i મી હાર અને j મા સ્તંભનો ઘટક આપણે શ્રેણિક Aની i મી હારના ઘટકોનો શ્રેણિક Bના j મા સ્તંભના અનુરૂપ ઘટકો સાથે ગુણાકાર કરી આ તમામ ગુણાકારોનો સરવાળો કરવાથી મળે છે.

આમ, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ અને $B = [b_{ij}]_{n \times p}$, હોય તો

તેમનો ગુણાકાર શ્રેણિક $AB = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}\right]_{m \times p}$ થાય.

જો $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ અને $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ હોય, તો A અને B એ ગુણાકાર માટે સુસંગત છે તેમ કહેવાય છે.

ઉદાહરણ 10 : જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, તો AB અને BA શોધો તથા બતાવો કે $AB \neq BA$.

ઉકેલ : $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2(1)+3(3) & 2(-2)+3(4) \\ -4(1)+5(3) & -4(-2)+5(4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 11 & 28 \end{bmatrix} \qquad \text{(i)}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(2)+(-2)(-4) & 1(3)+(-2)5 \\ 3(2)+4(-4) & 3(3)+4(5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & -7 \\ -10 & 29 \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)}$$

પરિણામ (i) અને (ii), નું અવલોકન કરતાં, $AB \neq BA$ મળે.

ઉદાહરણ 11 : જો $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ તો AB શોધો. BA વ્યાખ્યાયિત છે ? શા માટે ?

ઉકેલ : $AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2(1)+(-1)4+1(2) & 2(1)+(-1)(-2)+1(-3) \\ -3(1)+2(4)+4(2) & -3(1)+2(-2)+4(-3) \\ 0(1)+3(4)+(-5)2 & 0(1)+3(-2)+(-5)(-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 13 & -19 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

BA વ્યાખ્યાયિત નથી કારણ કે Bના સ્તંભની સંખ્યા 2 છે જ્યારે Aની હારની સંખ્યા 3 છે, જે સમાન નથી.

ઉદાહરણ 12 : જો $A = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \cos^2\beta & \cos\beta\sin\beta \\ \cos\beta\sin\beta & \sin^2\beta \end{bmatrix}$ અને

$\alpha - \beta = (2n-1)\frac{\pi}{2}$, $n \in Z$, તો સાબિત કરો કે AB એ શૂન્ય શ્રેણિક છે.

ઉકેલ : $AB = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos^2\beta & \cos\beta\sin\beta \\ \cos\beta\sin\beta & \sin^2\beta \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha\cos^2\beta + \cos\alpha\sin\alpha\cos\beta\sin\beta & \cos^2\alpha\cos\beta\sin\beta + \cos\alpha\sin\alpha\sin^2\beta \\ \cos\alpha\sin\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\cos\beta\sin\beta & \cos\alpha\sin\alpha\cos\beta\sin\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) & \cos\alpha\sin\beta(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \\ \cos\beta\sin\alpha(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) & \sin\alpha\sin\beta(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha-\beta) & \cos\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta) \\ \cos\beta\sin\alpha\cos(\alpha-\beta) & \sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \left(\cos(\alpha-\beta) = \cos(2n-1)\frac{\pi}{2} = 0\right)$$

ઉદાહરણ 13 : જો $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, તો સાબિત કરો કે $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

ઉકેલ : $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$\therefore\ A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-6 & -3-12 \\ 2+8 & -6+16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -15 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ B^2 = BB = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+20 & -4-8 \\ -5-10 & 20+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & -12 \\ -15 & 24 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-15 & 4+6 \\ -2+20 & 8-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 10 \\ 18 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad 2AB = \begin{bmatrix} -32 & 20 \\ 36 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} -5 & -15 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -32 & 20 \\ 36 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 21 & -12 \\ -15 & 24 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} -16 & -7 \\ 31 & 34 \end{bmatrix} \qquad \text{(i)}$$

$$\therefore \quad A + B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad (A + B)^2 = (A + B)(A + B)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+7 & 0+2 \\ 0+14 & 7+4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad (A + B)^2 = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 14 & 11 \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)}$$

પરિણામ (i) અને (ii) પરથી કહી શકાય કે, $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

(**નોંધ :** ચોરસ શ્રેણિક A માટે Aના પ્રત્યેક ઘટકના સ્થાને તે ઘટકના વર્ગ મૂકવાથી A^2 મળે તેમ નથી. પરંતુ શ્રેણિક Aનો A સાથે ગુણાકાર $A^2 = A \cdot A$ થાય છે.)

શ્રેણિકોના ગુણાકાર માટેના ગુણધર્મો :

શ્રેણિકોના ગુણાકાર નીચેના ગુણધર્મોને અનુસરે છે. આ નિયમો આપણે સાબિતી વગર સ્વીકારીશું.

(1) વિભાજનના નિયમ :

(i) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ અને $C = [c_{ij}]_{n \times p}$ માટે

$A(B + C) = AB + AC$

(ii) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ અને $C = [c_{ij}]_{n \times p}$ માટે

$(A + B)C = AC + BC$

(2) જૂથનો નિયમ :

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ અને $C = [c_{ij}]_{p \times q}$ માટે

$A(BC) = (AB)C$

એકમ શ્રેણિક (Identity Matrix / Unit Matrix) : જે ચોરસ શ્રેણિકમાં પ્રત્યેક અગ્ર વિકર્ણ ઘટક 1 હોય તથા બાકીના ઘટકો શૂન્ય હોય તેવા શ્રેણિકને એકમ શ્રેણિક કહે છે તેને I વડે દર્શાવાય છે.

આમ, $I = [a_{ij}]_{n \times n}$ જ્યાં $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{જો } i = j \\ 0, & \text{જો } i \neq j \end{cases}$

I ને I_n અથવા $I_{n \times n}$ વડે પણ દર્શાવાય છે.

એટલે કે $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ એ 3×3 એકમ શ્રેણિક છે.

આ એકમ શ્રેણિક 3×3 હોવાથી તેને $I_{3 \times 3}$ અથવા I_3 વડે પણ દર્શાવાય છે.

જો $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ અને I_n એકમ શ્રેણિક હોય, તો $AI = IA = A$ થાય.

નોંધ : δ_{ij} સંકેતને ક્રોનેકર ડેલ્ટા કહે છે, તેનો ઉપયોગ I વ્યાખ્યાયિત કરવા કરાય છે.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

આમ, $I = [\delta_{ij}]$

અદિશ શ્રેણિક (Scalar Matrix) : જો $k \in R$ હોય તો kI_n ને અદિશ શ્રેણિક કહે છે.

આમ, $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ અદિશ શ્રેણિક છે.

અહીં $k = 4$ અને $A = 4I_3$.

ઉદાહરણ 14 : જો $A = [x \quad y \quad z]$, $B = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$ અને $C = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, તો (AB)C શોધો.

ઉકેલ : હવે, $AB = [x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$

$= [ax + hy + gz \quad hx + by + fz \quad gx + fy + cz]$

$\therefore \quad (AB)C = [ax + hy + gz \quad hx + by + fz \quad gx + fy + cz]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$= [(ax + hy + gz)x + (hx + by + fz)y + (gx + fy + cz)z]$

$= [ax^2 + hxy + gzx + hxy + by^2 + fzy + gxz + fyz + cz^2]$

$= [ax^2 + by^2 + cz^2 + 2hxy + 2gzx + 2fyz]$

ઉદાહરણ 15 : જો $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$, તો 2×2 શ્રેણિક X શોધો કે જેથી $BX - AC = O$ થાય.

ઉકેલ : ધારો કે $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

હવે, $BX - AC = O$

$\therefore \quad \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad \begin{bmatrix} -2a+5c & -2b+5d \\ 6a+c & 6b+d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -9 & -6 \\ 43 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad \begin{bmatrix} -2a+5c+9 & -2b+5d+6 \\ 6a+c-43 & 6b+d-22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad -2a + 5c + 9 = 0,$ $\qquad -2b + 5d + 6 = 0$

$\quad 6a + c - 43 = 0$ $\qquad 6b + d - 22 = 0$

$\therefore \quad -6a + 15c = -27, \quad$ (i) $\qquad -6b + 15d = -18 \quad$ (iii)

$\quad 6a + c = 43 \quad$ (ii) $\qquad 6b + d = 22 \quad$ (iv)

$\therefore$ (i) અને (ii)નો સરવાળો કરતાં,

$16c = 16$. આથી $c = 1$ અને $a = 7$

$\therefore$ (iii) અને (iv)નો સરવાળો કરતાં,

$16d = 4$. આથી $d = \frac{1}{4}$ અને $b = \frac{29}{8}$

તેથી, $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & \frac{29}{8} \\ 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

ઉદાહરણ 16 : જો $A(x) = \begin{bmatrix} cosx & -sinx \\ sinx & cosx \end{bmatrix}$, તો સાબિત કરો કે $A(\alpha)\,A(\beta) = A(\alpha + \beta)$ અને જો $\alpha + \beta = 2n\pi$, $n \in Z$ તો $A(\alpha)\,A(\beta)$ એકમ શ્રેણિક I_2 છે.

ઉકેલ : $A(\alpha)\,A(\beta) = \begin{bmatrix} cos\,\alpha & -sin\,\alpha \\ sin\,\alpha & cos\,\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} cos\,\beta & -sin\,\beta \\ sin\,\beta & cos\,\beta \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} cos\,\alpha\,cos\,\beta - sin\,\alpha\,sin\,\beta & -cos\,\alpha\,sin\,\beta - sin\,\alpha\,cos\,\beta \\ sin\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,sin\,\beta & -sin\,\alpha\,sin\,\beta + cos\,\alpha\,cos\,\beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cos\,(\alpha+\beta) & -sin\,(\alpha+\beta) \\ sin\,(\alpha+\beta) & cos\,(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = A(\alpha + \beta)$$

જો $\alpha + \beta = 2n\pi$ તો $cos(\alpha + \beta) = 1$, $sin(\alpha + \beta) = 0$.

$$A(\alpha)\,A(\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

સ્વાધ્યાય 4.2

1. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ અને $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, તો સાબિત કરો કે $A(B + C) = AB + AC$.

2. જો $\begin{bmatrix} a+b & 4 \\ 3 & c+d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & a \\ 2d & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3b & 3a \\ 3d & 3c \end{bmatrix}$, તો a, b, c, d શોધો.

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ અને $C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, તો સાબિત કરો કે $A(B - C) = AB - AC$.

4. જો $A = [1 \quad -1 \quad 2]$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, તો શક્ય હોય તો AB અને BA શોધો.

5. જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, તો $A^2 - 5A$ શોધો.

6. જો $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, તો $A^2 - 5A$ શોધો.

7. જો $A = \begin{bmatrix} 0 & -tan\frac{\theta}{2} \\ tan\frac{\theta}{2} & 0 \end{bmatrix}$, તો સાબિત કરો કે $(I_2 - A)\begin{bmatrix} cos\,\theta & -sin\,\theta \\ sin\,\theta & cos\,\theta \end{bmatrix} = I_2 + A$.

8. જો $A = \begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{bmatrix}$, તો A^2 મેળવો.

9. જો સંમિત શ્રેણિક X તથા વિસંમિત શ્રેણિક Y માટે $X + Y = A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$, તો X અને Y શોધો.

10. $\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -16 & -6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ થાય તેવો 2×2 શ્રેણિક X મેળવો.

11. વાસ્તવિક સંખ્યા x અને y શોધો કે જેથી $(xI + yA)^2 = A$, જ્યાં $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

12. જો $[1 \quad x \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 15 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = O$, તો x શોધો.

13. જો $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, હોય તો ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતની મદદથી સાબિત કરો કે

$$A^n = \begin{bmatrix} 2n+1 & -4n \\ n & 1-2n \end{bmatrix}, n \in N.$$

*

4.4 ચોરસ શ્રેણિકનો નિશ્ચાયક

જો કોઈ ચોરસ શ્રેણિકના બધા જ ઘટકોને તે જ સ્થિતિમાં રાખી તેનો નિશ્ચાયક મેળવવામાં આવે, તો તે નિશ્ચાયકને આપેલ ચોરસ શ્રેણિકનો નિશ્ચાયક કહે છે. જો A કોઈ ચોરસ શ્રેણિક હોય, તો Aના નિશ્ચાયકને $|A|$ અથવા $det A$ વડે દર્શાવાય છે.

ઉદાહરણ તરીકે, જો $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, તો તેનો નિશ્ચાયક $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ થાય.

જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, તો $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 15 = -13$.

પ્રમેય 4.1 : ચોરસ શ્રેણિકો A અને B માટે $|AB| = |A||B|$.

આપણે આ પ્રમેય સાબિત કર્યા સિવાય સ્વીકારીશું.

ઉદાહરણ 17 : જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & sin\,\theta & -cos\,\theta \\ 0 & cos\,\theta & sin\,\theta \end{bmatrix}$ તો $|A|$ શોધો.

ઉકેલ : $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & sin\,\theta & -cos\,\theta \\ 0 & cos\,\theta & sin\,\theta \end{vmatrix} = sin^2\theta + cos^2\theta = 1.$

સહઅવયવજ શ્રેણિક (Adjoint of a Matrix) : ચોરસ શ્રેણિક Aના દરેક ઘટકના સ્થાને Aના નિશ્ચાયકના સંગત ઘટકનો સહઅવયવ લખીને બનતા શ્રેણિકનો પરિવર્ત શ્રેણિક લેતાં મળતા શ્રેણિકને Aનો સહઅવયવજ શ્રેણિક કહે છે. તેને adjA વડે દર્શાવાય છે.

જો $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, હોય, તો $adjA = [A_{ji}]_{n \times n}$ થશે, જ્યાં A_{ji} એ $|A|$માં ઘટક a_{ji}નો સહઅવયવ છે.

જો $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, તો $adjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$.

ઉદાહરણ 18 : $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, તો adjA શોધો.

ઉકેલ : આપણે $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ લઈશું.

તેથી, $A_{11} = a_{22} = 5$, $A_{12} = -a_{21} = -1$, $A_{21} = -a_{12} = -2$ અને $A_{22} = a_{11} = 4$

$\therefore \quad adjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

[**નોંધ :** 2×2 શ્રેણિકનો સહઅવયવજ શ્રેણિક મેળવવા માટે, મુખ્ય વિકર્ણના ઘટકોની અદલબદલ કરવાની તથા પ્રતિવિકર્ણના ઘટકોની નિશાની બદલવાની હોય છે. જેમકે; જો $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ તો $adjA = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ થાય.]

ઉદાહરણ 19 : $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ માટે adjA મેળવો.

ઉકેલ : $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ લો.

$A_{11} = -1 \qquad A_{12} = -8 \qquad A_{13} = -10$

$A_{21} = -5 \qquad A_{22} = -6 \qquad A_{23} = 1$

$A_{31} = -1 \qquad A_{32} = 9 \qquad A_{33} = 7$

$\therefore \quad adjA = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$.

4.5 વ્યસ્ત શ્રેણિક

જો ચોરસ શ્રેણિક Aને સંગત બીજો ચોરસ શ્રેણિક B એવો મળે કે જેથી AB = I = BA થાય. (I એ એકમ શ્રેણિક છે), તો B ને Aનો વ્યસ્ત શ્રેણિક કહે છે. A ના વ્યસ્ત શ્રેણિકને A^{-1} વડે દર્શાવાય છે.

સ્પષ્ટ છે કે, Aનો વ્યસ્ત શ્રેણિક B હોય, તો Bનો વ્યસ્ત શ્રેણિક A થાય.

પ્રમેય 4.2 : જો Aનો વ્યસ્ત શ્રેણિક હોય તો તે અનન્ય છે.

સાબિતી : શક્ય હોય તો, ધારો કે A ના બે વ્યસ્ત શ્રેણિકો B અને C છે.

$\therefore \quad AB = I = BA$ અને $AC = I = CA$.

હવે, $AB = I$

$\therefore \quad C(AB) = CI$

$\therefore \quad (CA)B = C$

$\therefore \quad IB = C$

$\therefore \quad B = C$

આમ સિદ્ધ થાય છે કે Aને વ્યસ્ત શ્રેણિક હોય, તો તે અનન્ય છે.

> **નોંધ :** યાદ કરો કે પ્રકરણ 1 માં આપણે જોયું કે, એકમ સહિતની જૂથના નિયમનું પાલન કરતી દ્વિક્રિયામાં કોઈ પણ ઘટકને વ્યસ્ત હોય, તો તે અનન્ય છે. $n \times n$ શ્રેણિકોનો ગુણાકાર જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે અને તેને એકમ શ્રેણિક I_n છે.

પ્રમેય 4.3 : ચોરસ શ્રેણિક A માટે $A(adjA) = (adjA)A = |A|I$.

સાબિતી : આપણે આ પરિણામ ફક્ત 3×3 ચોરસ શ્રેણિક A માટે સાબિત કરીશું.

ધારો કે $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, તેથી $adjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$.

હવે, $$A(adjA) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23} & a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13} & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23} & a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13} & a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23} & a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$$ (નિશ્ચાયકના પ્રમેયો પરથી)

$$= |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= |A| I_3$$

તે જ પ્રમાણે આપણે $(adjA)A = |A| I_3$ સાબિત કરી શકીએ.

સામાન્ય શ્રેણિક (Non-singular Matrix) : ચોરસ શ્રેણિકના વ્યસ્ત શ્રેણિકનું અસ્તિત્વ હોય, તો તે ચોરસ શ્રેણિકને સામાન્ય શ્રેણિક કહે છે.

> **નોંધ :** જો ચોરસ શ્રેણિક A સામાન્ય શ્રેણિક હોય, તો A^{-1} પણ સામાન્ય શ્રેણિક છે તથા $(A^{-1})^{-1} = A$.

અસામાન્ય શ્રેણિક (Singular Matrix) : જો ચોરસ શ્રેણિક સામાન્ય ન હોય, તો તેને અસામાન્ય શ્રેણિક કહે છે.

પ્રમેય 4.4 : ચોરસ શ્રેણિક A સામાન્ય હોય, તો અને તો જ $|A| \neq 0$.

સાબિતી : ધારો કે A સામાન્ય શ્રેણિક છે અને B તેનો વ્યસ્ત શ્રેણિક છે.

$\therefore \quad AB = I$

$\therefore \quad |AB| = |I|$

$\therefore \quad |A||B| = 1 \neq 0$

$\therefore \quad |A| \neq 0$

હવે ધારો કે, $|A| \neq 0$. તેથી $\frac{1}{|A|}$ નું અસ્તિત્વ છે.

ધારો કે $B = \frac{1}{|A|} adjA$

તેથી $AB = A\left(\frac{1}{|A|} adj\, A\right) = \frac{1}{|A|}(A\, adjA) = \frac{1}{|A|}\, |A|\, I.$

$\therefore \quad AB = I$

તે જ પ્રમાણે આપણે $BA = I$ સાબિત કરી શકીએ.

$\therefore$ B એ Aનો વ્યસ્ત છે.

$\therefore$ A સામાન્ય શ્રેણિક છે.

નોંધ : શ્રેણિક Aનો વ્યસ્ત શ્રેણિક $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$, (જો અસ્તિત્વ ધરાવે તો.)

ઉદાહરણ 20 : $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$નો વ્યસ્ત શ્રેણિક અસ્તિત્વ ધરાવે તો શોધો.

ઉકેલ : અહીં $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 15 = 23 \neq 0.$

$\therefore$ A^{-1} અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

હવે, $adjA = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

તેથી, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$

$= \frac{1}{23}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{23} & \frac{3}{23} \\ \frac{-5}{23} & \frac{2}{23} \end{bmatrix}$

ઉદાહરણ 21 : જો $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, તો A^{-1} શોધો.

ઉકેલ : $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 5(-2-3) - 8(0-4) + 1(0-8)$

$= -25 + 32 - 8$

$= -1 \neq 0$

$\therefore$ A^{-1} અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

હવે, $adjA = \begin{bmatrix} -5 & 11 & 6 \\ 4 & -9 & -5 \\ -8 & 17 & 10 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$

$= \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -5 & 11 & 6 \\ 4 & -9 & -5 \\ -8 & 17 & 10 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5 & -11 & -6 \\ -4 & 9 & 5 \\ 8 & -17 & -10 \end{bmatrix}$

કેટલાંક અગત્યનાં પરિણામો :

(1) સામાન્ય શ્રેણિક Aના વ્યસ્તના નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય અને Aના નિશ્ચાયકની વ્યસ્ત સંખ્યા સમાન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

એટલે કે $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

સાબિતી : A સામાન્ય શ્રેણિક હોવાથી A^{-1} નું અસ્તિત્વ છે. વળી, $|A| \neq 0$.

તેથી, $AA^{-1} = I$

$\therefore \quad |AA^{-1}| = |I|$

$\therefore \quad |A||A^{-1}| = 1$

$\therefore \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

$\therefore \quad |A^{-1}| = |A|^{-1}$

(2) જો A અને B સામાન્ય શ્રેણિકો હોય, તો AB સામાન્ય શ્રેણિક છે તથા $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

સાબિતી : A અને B સામાન્ય છે, તેથી A^{-1} અને B^{-1} નું અસ્તિત્વ છે તથા $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$

$\therefore \quad |A||B| \neq 0$

$\therefore \quad |AB| \neq 0$

$\therefore$ AB એ સામાન્ય શ્રેણિક છે.

વળી, $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A[B(B^{-1}A^{-1})]$

$= A[(BB^{-1})A^{-1}]$

$= A[IA^{-1}]$

$= AA^{-1}$

$= I$

તે જ પ્રમાણે આપણે $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$ સાબિત કરી શકીએ.

તેથી, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(3) $m \times n$ શ્રેણિકો A અને B માટે $(AB)^T = B^TA^T$.

આપણે આ પરિણામ સાબિતી આપ્યા વગર સ્વીકારીશું.

(4) A સામાન્ય શ્રેણિક હોય, તો અને તો જ A^T સામાન્ય શ્રેણિક છે, તથા $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

સાબિતી : A સામાન્ય શ્રેણિક છે $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

$\Leftrightarrow |A^T| \neq 0$ $\qquad (|A| = |A^T|)$

$\Leftrightarrow$ A^T સામાન્ય શ્રેણિક છે.

વળી, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

તેથી, $(AA^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T$

$\therefore \quad (A^{-1})^T A^T = A^T (A^{-1})^T = I$

$\therefore \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(5) $adj\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = (adj\mathrm{A})^{\mathrm{T}}$

સાબિતી : ધારો કે $\mathrm{A} = [a_{ij}]$

$\therefore \quad \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = [a_{ji}]$

$\therefore \quad adj\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = [\mathrm{A}_{ij}]$ (i)

પરંતુ $adj\mathrm{A} = [\mathrm{A}_{ji}]$

$\therefore \quad (adj\mathrm{A})^{\mathrm{T}} = [\mathrm{A}_{ij}]$ (ii)

(i) અને (ii) પરથી, $adj\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = (adj\mathrm{A})^{\mathrm{T}}$

4.6 હાર સંક્ષેપન એશિલોન પદ્ધતિ

આપણે R_{ij}, $\mathrm{R}_i(k)$ અને $\mathrm{R}_{ij}(k)$ જેવી પ્રક્રિયાઓ નિશ્ચાયક પર કરી છે અને આવી જ પ્રક્રિયાઓ સ્તંભ પર પણ કરી છે.

બંને પરની પ્રક્રિયાઓ સમાન છે. આપણે અહીં હાર પર પ્રક્રિયાઓ કરીશું.

(1) R_{ij} પ્રકારની ક્રિયા એકમ શ્રેણિક I_n પર કરવામાં આવે, તો પરિણામે મળતા શ્રેણિકને પ્રાથમિક શ્રેણિક E_{ij} કહીશું.

(2) જો $\mathrm{R}_i(k)$ પ્રકારની ક્રિયા એકમ શ્રેણિક I_n પર કરીએ, તો પરિણામે મળતા શ્રેણિકને પ્રાથમિક શ્રેણિક $\mathrm{E}_i(k)$ કહીશું.

(3) જો $\mathrm{R}_{ij}(k)$ પ્રકારની ક્રિયા એકમ શ્રેણિક I_n પર કરીએ, તો પરિણામે મળતા શ્રેણિકને પ્રાથમિક શ્રેણિક $\mathrm{E}_{ij}(k)$ કહીશું.

એક શ્રેણિક A પર R_{12} પ્રકારની ક્રિયા કરીએ અને $\mathrm{E}_{12}\,\mathrm{A}$ પ્રકારનો શ્રેણિક મેળવીએ. બંને પરિણામ સમાન છે.

ધારો કે $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

R_{12} કરવાથી આપણને $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ મળે. (i)

વળી, $\mathrm{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ થાય.

$$\mathrm{E}_{12}\,\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)}$$

(i) અને (ii) એ આપણું પરિણામ સાબિત કરે છે.

તે જ પ્રમાણે કોઈ પણ શ્રેણિક A પર પ્રાથમિક પ્રક્રિયાઓ R_{ij}, $\mathrm{R}_i(k)$ અથવા $\mathrm{R}_{ij}(k)$ કરીએ તે અનુક્રમે E_{ij}, $\mathrm{E}_i(k)$ અથવા $\mathrm{E}_{ij}(k)$ વડે Aને પૂર્વગુણિત કરવા સમાન છે.

સ્તંભ પર પ્રક્રિયાઓ કરવા માટે ઉત્તરગુણિત કરવું પડશે.

હવે આપણે હાર સંક્ષિપ્ત એશિલોન શ્રેણિક વ્યાખ્યાયિત કરીએ. શ્રેણિકને હાર સંક્ષિપ્ત એશિલોનના સ્વરૂપમાં દર્શાવીએ.

(1) દરેક હારના પ્રથમ શૂન્યેતર ઘટકને અગ્રઘટક કહીશું.

(2) દરેક અગ્રઘટક એવા સ્તંભમાં છે, જે પહેલાની હારના અગ્રઘટકની જમણી બાજુએ આવેલો છે.

(3) જે હારમાં તમામ ઘટકો શૂન્ય હોય, તેને શૂન્યહાર કહે છે. જેનો ઓછામાં ઓછો એક ઘટક શૂન્યેતર હોય તેવી હારને શૂન્યેતર હાર કહે છે. જે હારમાં ઓછામાં ઓછો એક ઘટક શૂન્યેતર હોય તેવી હારની નીચે તમામ શૂન્યહાર આવે છે.

(4) કોઈ પણ સ્તંભમાં એકમાત્ર શૂન્યેતર ઘટક તે જે હારમાં છે તે હારનો અગ્રઘટક છે.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ એ હાર સંક્ષિપ્ત એશિલોન સ્વરૂપ છે.

એક પરિણામ : સામાન્ય શ્રેણિકનું હાર સંક્ષિપ્ત સ્વરૂપ I_n છે. આપણે સામાન્ય શ્રેણિકનો વ્યસ્ત શ્રેણિક નીચે પ્રમાણે મેળવીએ :

$A = IA$ લખો.

પ્રાથમિક હાર પ્રક્રિયાઓ બંને તરફ કરતાં ડાબી બાજુનો શ્રેણિક A હાર સંક્ષિપ્ત એશિલોન સ્વરૂપમાં પરિવર્તિત થશે. એટલે કે I_n બને (સામાન્ય શ્રેણિક હોવાથી). પછી આ ક્રિયાને અંતે આપણને સમીકરણ $I = PA$ મળે.

જ્યાં I ડાબી બાજુના શ્રેણિક A ઉપર પ્રાથમિક હાર ક્રિયાઓમાંથી મળતો શ્રેણિક અને P જમણી બાજુના શ્રેણિક A પર તે જ હાર પ્રક્રિયાઓ કરતાં મળતો શ્રેણિક છે. તો $P = A^{-1}$ થશે.

શ્રેણિક Aને હાર સંક્ષિપ્ત સ્વરૂપમાં કેવી રીતે મેળવીશું ?

(1) (a) પ્રથમ સ્તંભનો પ્રથમ શૂન્યેતર ઘટક મેળવો, જે પ્રથમ હારનો અગ્રઘટક છે.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. 1 અગ્રઘટક છે.

(b) જરૂર પડે તો હારની એ રીતે અદલબદલ કરો કે પ્રથમ સ્તંભમાં શૂન્યેતર અગ્રઘટકવાળી પ્રથમ હાર મળે. તેને અગ્રહાર કરીશું.

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$. અહીં R_{12} અથવા R_{13} કરવાથી શૂન્યેતર અગ્રઘટકવાળી પ્રથમ હાર મળે.

ઉદાહરણ તરીકે R_{13} કરતાં $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. 1 3 3 અગ્રહાર મળે અને 1 અગ્રઘટક મળે.

(c) અગ્રહારના દરેક ઘટકને અગ્રઘટકના વ્યસ્ત વડે ગુણો જેથી અગ્રઘટક 1 બને.

$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ માં અગ્રઘટક 3 હોવાથી પ્રથમ હારના દરેક ઘટકને $\frac{1}{3}$ વડે ગુણતાં પ્રથમ હાર 1 $\frac{5}{3}$ $\frac{1}{3}$ મળે.

તેથી શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ સ્વરૂપમાં મળે.

(d) અગ્રહારના એવા ગુણિતો તેની નીચેની હારમાં ઉમેરો કે જેથી અગ્રસ્તંભનો દરેક ઘટક શૂન્ય બને.

(c) ના અંતિમ મળેલા શ્રેણિક પર $R_{12}(-2)$, $R_{13}(-4)$ કરતાં પ્રથમ સ્તંભ $\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$ બને.

$\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & \frac{-17}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ મળશે.

(2) (a) આગળની અગ્રહારને અવગણી ઉપરની વિધિનું બીજી હાર માટે પદ (1)થી શરૂ કરી પુનરાવર્તન કરો.

(b) કોઈ પણ અગ્રઘટક બાકી ન રહે ત્યાં સુધી આ વિધિ ચાલુ રાખો.

(c) પછી મળતો શ્રેણિક નીચેના જેવો ત્રિકોણીય શ્રેણિક બનશે :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ((1)(d) ના શ્રેણિક પર ક્રિયાઓ કરતાં મળતો શ્રેણિક)

(3) (a) જે છેલ્લી હારમાં અગ્રઘટક 1 હોય તે હાર શોધો અને હવે તેને અગ્રહાર કહો.

(b) આ અગ્રહારના ગુણિતો ઉપરની હારમાં ઉમેરો જેથી અગ્રઘટક ઉપરના તમામ ઘટક શૂન્ય થાય.

(c) આપેલ શ્રેણિકમાં આ ક્રિયા ઉપરની હારો સુધી પુનરાવર્તિત કરો.

આ પછી $R_{32}(1)$, $R_{31}\left(-\frac{1}{3}\right)$ કરતાં,

$\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ મળશે.

આ પછી $R_{21}\left(-\frac{5}{3}\right)$ કરતાં, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ એટલે કે I_3 મળે.

આ રીતે, $A = IA$ લઈ ક્રિયાઓ કરતાં $I = PA$ મળે તો $P = A^{-1}$.

ચાલો આપણે એક ઉદાહરણ લઈ સમજીએ :

ઉદાહરણ 22 : $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$નો વ્યસ્ત શોધો.

ઉકેલ : $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A$ (R_{31}) (પ્રથમ હારમાં શૂન્યેતર અગ્રઘટક મેળવો)

$\therefore \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 2 \\ 3 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A$ $R_1\left(\frac{1}{2}\right)$ (અગ્રઘટકને 1 બનાવો.)

$\therefore \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A$ $R_{12}(-3)$

$\therefore \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A$ $R_2\left(\frac{2}{3}\right)$ (બીજી હારમાં અગ્રઘટક 1 બનાવો)

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} & -1 \\ 1 & \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix} A \qquad R_{23}(1)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix} A$$

$R_3(-3)$ (ત્રીજી હારમાં અગ્રઘટક 1 બનાવો)

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -\frac{11}{2} \\ -4 & -2 & 3 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix} A \qquad R_{32}\left(\frac{4}{3}\right),\ R_{31}(-2)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 3 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix} A \qquad R_{21}\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 3 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

ઉદાહરણ 23 : પ્રાથમિક પ્રક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરી Aનો વ્યસ્ત શ્રેણિક મેળવો, જ્યાં $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

ઉકેલ : આપણે $A = IA$ લઈએ.

આપણે આ શ્રેણિક સમીકરણમાં શ્રેણિકની હાર પર પ્રાથમિક પ્રક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરીએ.

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} A \qquad R_{12}(-3)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{-1}{10} \end{bmatrix} A \qquad R_2\left(-\frac{1}{10}\right)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{10} & \frac{4}{10} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix} A \qquad R_{21}(-4)$$

આમ, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$

ઉદાહરણ 24 : હાર સંક્ષેપન એશિલોનની રીતે શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક મેળવો.

ઉકેલ : આપણે $A = IA$ લઈએ,

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \qquad (R_{31}(-1))$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -17 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix} A \qquad (R_{13}(-4))$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -17 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix} A \qquad \left(R_{21}\left(-\frac{5}{2}\right)\right)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -17 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix} A \qquad \left(R_{2}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -4 & \frac{17}{2} & 5 \end{bmatrix} A \qquad (R_{23}(17))$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -11 & -6 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -4 & \frac{17}{2} & 5 \end{bmatrix} A \qquad (R_{31}(-1))$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -11 & -6 \\ -4 & 9 & 5 \\ -4 & \frac{17}{2} & 5 \end{bmatrix} A \qquad (R_{32}(1))$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -11 & -6 \\ -4 & 9 & 5 \\ 8 & -17 & -10 \end{bmatrix} A \qquad (R_{3}(-2))$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -11 & -6 \\ -4 & 9 & 5 \\ 8 & -17 & -10 \end{bmatrix}.$$

ઉદાહરણ 25 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક હાર સંક્ષેપન એશિલોન પદ્ધતિથી મેળવો.

ઉકેલ : આપણે $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$ રીતે લખીશું.

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \qquad R_{12}(-1)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \qquad R_2\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{33}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} A \qquad R_{21}(-5),\ R_{23}(3)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{33}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix} A \qquad R_3(4)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 & 26 & -33 \\ 4 & -4 & 5 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix} A \qquad R_{32}\left(\frac{5}{4}\right),\ R_{31}\left(\frac{-33}{4}\right)$$

$\therefore\ I_3 = PA$

$$\therefore\ A^{-1} = \begin{bmatrix} -25 & 26 & -33 \\ 4 & -4 & 5 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

વ્યસ્ત શ્રેણિકનો ઉપયોગ કરી સુરેખ સમીકરણ સંહતિનો અનન્ય ઉકેલ :

ધારો કે, $a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$

$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$

$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$

એ x, y, z માં ત્રણ સુરેખ સમીકરણની સંહતિ છે.

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ લેતાં,

સમીકરણ સંહતિને $AX = B$ પ્રમાણે લખી શકાય.

જો A સામાન્ય શ્રેણિક હોય, તો A^{-1}નું અસ્તિત્વ છે.

હવે, $AX = B$

$\therefore\ A^{-1}(AX) = A^{-1}B$

$\therefore\ (A^{-1}A)X = A^{-1}B$

$\therefore\ IX = A^{-1}B$

$\therefore\ X = A^{-1}B$

ધારો કે, $A^{-1}B = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$, તેથી $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$.

આમ, $x = p_1$, $y = p_2$, $z = p_3$ આપેલ સંહતિનો અનન્ય ઉકેલ છે.

(**નોંધ :** આ પદ્ધતિ બે ચલના બે સુરેખ સમીકરણના ઉકેલ માટે પણ સત્ય છે.)

ઉદાહરણ 26 : શ્રેણિકની રીતે ઉકેલો : $x - 2y = 4$ અને $-3x + 5y = -7$.

ઉકેલ : આપેલ સંહતિને $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$ અથવા

$AX = B$ પ્રમાણે દર્શાવી શકાય, જ્યાં $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$

હવે, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1 \neq 0$

$\therefore$ A^{-1} નું અસ્તિત્વ છે.

તેથી, સંહતિનો અનન્ય ઉકેલ મળે.

હવે, $adjA = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

તેથી, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$

$$= \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

હવે, $X = A^{-1}B$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20+14 \\ -12+7 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $x = -6$, $y = -5$ એ માંગેલ ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 27 : જો સમીકરણ સંહતિ $x + y + z = 3$, $2x - y - z = 3$, $x - y + z = 9$ નો અનન્ય ઉકેલ હોય, તો મેળવો.

ઉકેલ : સંહતિને $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$ સ્વરૂપે લખી શકાય.

ધારો કે $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$, તેથી $AX = B$.

હવે, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1-1) - 1(2+1) + 1(-2+1)$

$= -2 - 3 - 1 = -6 \neq 0$

$\therefore$ A^{-1}નું અસ્તિત્વ છે. આથી સંહતિનો અનન્ય ઉકેલ મળે.

હવે, $adjA = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$

$= \frac{1}{-6}\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

હવે, $X = A^{-1}B$

$\therefore$ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{-6}\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{-6}\begin{bmatrix} -6+(-6)+0 \\ -9+0+27 \\ -3+6-27 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{-6}\begin{bmatrix} -12 \\ 18 \\ -24 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

તેથી, $x = 2$, $y = -3$ અને $z = 4$.

સ્વાધ્યાય 4.3

1. **નીચે આપેલા શ્રેણિકોના સહઅવયવજ શ્રેણિક મેળવો :**

(1) $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

2. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ માટે A^{-1}નું અસ્તિત્વ હોય, તો મેળવો.

3. જો $A = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$, તો સાબિત કરો કે $A^{-1} = A^T$.

4. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, તો $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ચકાસો.

5. શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ માટે બતાવો કે $adj(adj A) = A$.

6. જો $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, તો $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ચકાસો.

7. જો $A = \begin{bmatrix} 5x & 10 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$ અને $|A| = 25$ તો $x \in R$ મેળવો.

8. હાર સંક્ષેપન એશિલોન પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરી, નીચે આપેલા શ્રેણિકોના વ્યસ્ત શ્રેણિક મેળવો :

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

9. શ્રેણિકની મદદથી સમીકરણ સંહતિના ઉકેલ મેળવો :

(1) $3x + 4y + 5 = 0$
$11x - 2y = 15$

(2) $5x - 7y = 2$
$7x - 5y = 3$

10. શ્રેણિકની મદદથી સમીકરણ સંહતિના ઉકેલ મેળવો :

(1) $4x - 3y + 2z = 4$
$3x - 2y + 3z = 8$
$4x + 2y - 2z = 2$

(2) $x + 2y + z = 4$
$x - y - z = 0$
$-x + 3y - z = -2$

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 28 : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ માટે સાબિત કરો કે $A^2 - 4A + 7I_2 = O$ અને તે પરથી A^{-1} મેળવો.

ઉકેલ : હવે, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A^2 - 4A + 7I_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -12 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-8+7 & 12-12+0 \\ -4+4+0 & 1-8+7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= O$$

વળી, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7 \neq 0$

$\therefore$ A સામાન્ય શ્રેણિક છે. તેથી A^{-1} નું અસ્તિત્વ છે.

હવે, $A^2 - 4A + 7I_2 = O$ ને A^{-1} વડે બંને તરફ ગુણતાં,

$$A^{-1}(A^2 - 4A + 7I_2) = A^{-1}O$$

$\therefore \quad A^{-1}(A^2) - 4(A^{-1}A) + 7(A^{-1}I_2) = O$

$\therefore \quad (A^{-1}A)A - 4I + 7A^{-1} = O$

$\therefore \quad IA - 4I + 7A^{-1} = O$

$\therefore \quad 7A^{-1} = 4I - A$

$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{7}(4I - A)$

$$= \frac{1}{7}\left\{4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{7}\left\{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

ઉદાહરણ 29 : જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, તો સાબિત કરો કે $A^2 - 4A - 5I_3 = O$ અને તે પરથી A^{-1} મેળવો.

ઉકેલ : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad A^2 - 4A - 5I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -8 & -8 \\ -8 & -4 & -8 \\ -8 & -8 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= O$$

હવે, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(-3) - 2(-2) + 2(2)$

$$= -3 + 4 + 4$$
$$= 5 \neq 0$$

$\therefore$ A^{-1} નું અસ્તિત્વ છે.

હવે, $A^2 - 4A - 5I_3 = O$ ની બંને તરફ A^{-1} વડે ગુણતાં,

$\therefore$ $A^{-1}(A^2) - 4(A^{-1}A) - 5(A^{-1}I_3) = A^{-1}O$ થશે.

$\therefore$ $(A^{-1}A)A - 4I_3 - 5A^{-1} = O$

$\therefore$ $I_3A - 4I_3 = 5A^{-1}$

$\therefore$ $A - 4I_3 = 5A^{-1}$

$\therefore$ $A^{-1} = \frac{1}{5}(A - 4I_3)$

$$= \frac{1}{5}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{5}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1-4 & 2+0 & 2+0 \\ 2+0 & 1-4 & 2+0 \\ 2+0 & 2+0 & 1-4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

ઉદાહરણ 30 : શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$\therefore$ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix} = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1 \neq 0$

$\therefore$ A^{-1} નું અસ્તિત્વ છે.

શ્રેણિક A ના ઘટકોના સહઅવયવો,

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix} = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha \\ 0 & -\cos\alpha \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha \\ 0 & \sin\alpha \end{vmatrix} = 0$$

તે જ પ્રમાણે, $A_{21} = 0$, $A_{22} = -\cos\alpha$, $A_{23} = -\sin\alpha$

$A_{31} = 0$, $A_{32} = -\sin\alpha$, $A_{33} = \cos\alpha$

$$\therefore \quad adj A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj A$$

$$= \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

(**નોંધ :** $A^{-1} = A$. આવા શ્રેણિકને સ્વયંઘાતી શ્રેણિક (Idempotent matrix) કહે છે.)

ઉદાહરણ 31 : (2, −1) અને (4, 0)માંથી તથા (−1, −2) અને (4, 1)માંથી પસાર થતી રેખાનાં સમીકરણ નિશ્ચાયકની મદદથી મેળવો તથા શ્રેણિકની મદદથી તેમનું છેદબિંદુ (અસ્તિત્વ ધરાવે તો) મેળવો.

ઉકેલ : (2, −1) અને (4, 0)માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ છે.

$\therefore \quad x(-1) - y(-2) + 4 = 0$

$\therefore \quad -x + 2y + 4 = 0$

$\therefore \quad x - 2y = 4$

(−1, −2) અને (4, 1)માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ છે.

$\therefore \quad x(-3) - y(-5) + 7 = 0$

$\therefore \quad -3x + 5y = -7$

$\therefore \quad 3x - 5y = 7$

$\therefore$ રેખાઓનાં સમીકરણ : $x - 2y = 4$

$3x - 5y = 7$ છે.

આપેલ સમીકરણ સંહતિને શ્રેણિક સ્વરૂપે લખતાં,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

અથવા AX = B, જ્યાં $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$.

હવે, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -5 + 6 = 1 \neq 0$

$\therefore$ A^{-1} નું અસ્તિત્વ છે.

$adjA = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. તેથી $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, adjA = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

હવે, $X = A^{-1}B$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -20+14 \\ -12+7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $x = -6$ અને $y = -5$.

$\therefore$ આપેલ બે રેખાનું છેદબિંદુ $(-6, -5)$ છે.

ઉદાહરણ 32 : સુરેખ સમીકરણ સંહતિ $x + 3y + 4z = 8$, $2x + y + 2z = 5$, $5x + y + z = 7$ ને અનન્ય ઉકેલ છે ? જો હા, તો તે ઉકેલ શ્રેણિકની મદદથી મેળવો.

ઉકેલ : $x + 3y + 4z = 8$

$2x + y + 2z = 5$

$5x + y + z = 7$ ને શ્રેણિક સ્વરૂપે દર્શાવતાં,

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ મળશે.

ધારો કે $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

સંહતિ AX = B સ્વરૂપે મળશે.

હવે, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1) - 3(-8) + 4(-3)$

$= -1 + 24 - 12$

$= 11 \neq 0$

$\therefore$ A^{-1} નું અસ્તિત્વ છે.

$\therefore$ સંહતિને અનન્ય ઉકેલ છે.

હવે, શ્રેણિક $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$, લેતાં Aના ઘટકોના સહઅવયવો નીચે પ્રમાણે મળશે :

$A_{11} = -1, A_{12} = 8, A_{13} = -3$

$A_{21} = 1, A_{22} = -19, A_{23} = 14$

$A_{31} = 2, A_{32} = 6, A_{33} = -5$

$$\therefore \quad adjA = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 8 & -19 & 6 \\ -3 & 14 & -5 \end{bmatrix}$$

હવે, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 8 & -19 & 6 \\ -3 & 14 & -5 \end{bmatrix}$$

$X = A^{-1}B$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 8 & -19 & 6 \\ -3 & 14 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -8+5+14 \\ 64-95+42 \\ -24+70-35 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 11 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad x = 1, y = 1, z = 1.$

સ્વાધ્યાય 4

1. જો $A = \begin{bmatrix} sin\,\theta & cos\,\theta \\ -cos\,\theta & sin\,\theta \end{bmatrix}$, તો AA^T શોધો અને સાબિત કરો કે $A^{-1} = A^T$.

2. જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, તો સાબિત કરો કે $A^{-1} = \frac{1}{19}A$

3. જો $A = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ અને $B^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$, તો $(AB)^{-1}$ શોધો.

4. જો $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, તો $(AB)^{-1}$ શોધો.

5. જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, તો $B^{-1}AB$ શોધો.

6. સાબિત કરો : $A^2 - 6A + 17I_2 = O$ જ્યાં $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ અને તે પરથી A^{-1} મેળવો.

7. જો $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, તો સાબિત કરો કે $A^{-1} = A^2$.

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, માટે સાબિત કરો : $A^3 - 6A^2 + 5A + 11I_3 = O$. આ શ્રેણિક સમીકરણનો ઉપયોગ કરી A^{-1} શોધો.

9. જો $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$, તો શ્રેણિકોના ગુણાકાર કર્યા સિવાય $A^2 + AB + 6B$ મેળવો.

10. જો નીચે આપેલી સમીકરણ સંહતિનો અનન્ય ઉકેલ અસ્તિત્વ ધરાવે તો શ્રેણિકની મદદથી મેળવો :

(1) $3x - 5y = 1, x + 2y = 4$ (2) $3x + 4y - 5 = 0, y - x - 3 = 0$

11. જો નીચે આપેલી સમીકરણ સંહતિના અનન્ય ઉકેલ અસ્તિત્વ ધરાવે તો તેના ઉકેલગણ મેળવો :

(1) $2x + y + z = 2$

$x + 3y - z = 5$

$3x + y - 2z = 6$

(2) $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} + \frac{3}{z} = 10$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 10$

$\frac{3}{x} - \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = 13 \ (xyz \neq 0)$

12. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & \frac{1+bc}{a} \end{bmatrix}$, માટે $(a^2 + bc + 1)I_2 - aA^{-1}$ શોધો.

13. m_1 અને m_2 ઢાળવાળી અને c_1 અને c_2 એ અનુક્રમે y-અંતઃખંડવાળી બે છેદતી રેખાઓનું છેદબિંદુ શ્રેણિકની મદદથી શોધો. $(m_1 \neq m_2)$

14. જો $A = \begin{bmatrix} 2x & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ અને $|A| = 3$ તો $x \in R$ શોધો.

15. જો $[x \ \ -5 \ \ -1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = O$ તો $x \in R$ શોધો.

16. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ ને એક સંમિત અને એક વિસંમિત શ્રેણિકના સરવાળા સ્વરૂપે દર્શાવો.

17. જો $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ તો $AA^T = I$ સાબિત કરો તથા તે પરથી $A^{-1} = A^T$ મેળવો.

18. જો ચોરસ શ્રેણિક A અને B માટે $AB = A$ અને $BA = B$ તો સાબિત કરો કે $A^2 = A$ અને $B^2 = B$.

19. જો B એ ચોરસ શ્રેણિક હોય અને $B^2 = B$, તો $A = I - B$ એ $A^2 = A$ અને $AB = BA = O$ નું પાલન કરે છે તેમ બતાવો.

20. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ તો સાબિત કરો કે $A^3 = O$. ($A \neq O$ હોવા છતાં $A^3 = O$ છે તે જુઓ.)

21. A એ 3×3 ચોરસ શ્રેણિક માટે સાબિત કરો કે $|adj A| = |A|^2$.

22. શ્રેણિક A અને B એવાં મેળવો કે $A \neq O$, $B \neq O$ પરંતુ $AB = O$.

23. જો $A(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, તો સાબિત કરો કે $A(\alpha)\,A(-\alpha) = I$.

24. **નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને $\square$ માં લખો :**

વિભાગ A (1 ગુણ)

(1) 3×3 શ્રેણિક A માટે $|3A| = ...\ |A|$ $\square$

(a) 3 (b) 6 (c) 9 (d) 27

(2) $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ માટે $a_{ij} = 0$, $i \neq j$ તો A ...... શ્રેણિક છે. ($a_{ii} \neq a_{jj}$) ($n > 1$) $\square$

(a) સ્તંભ શ્રેણિક (b) હાર શ્રેણિક (c) વિકર્ણ શ્રેણિક (d) અદિશ શ્રેણિક

(3) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ માટે ...... સત્ય વિધાન છે. $\square$

(a) A^{-1} નું અસ્તિત્વ નથી. (b) $A = (-1)\, I_3$

(c) $A^2 = I$ (d) A વિકર્ણ શ્રેણિક છે.

(4) 3×4 શ્રેણિક A માટે જો A^TB અને BA^T વ્યાખ્યાયિત હોય, તો B ...... શ્રેણિક છે. $\square$

(a) 4×3 (b) 3×3 (c) 4×4 (d) 3×4

(5) જો A એ 3×3 વિસંમિત શ્રેણિક હોય, તો $|A| = ...$. $\square$

(a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) 3

વિભાગ B (2 ગુણ)

(6) સમીકરણ સંહતિ $ax + y + z = a - 1$, $x + ay + z = a - 1$ અને $x + y + az = a - 1$ ને $a = ...$ હોય ત્યારે અનન્ય ઉકેલ મળે નહીં.

(a) 1 અથવા -2 (b) 3 (c) 2 (d) -1

(7) જો $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ અને $A^2 = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}$, તો $x = ...$, $y = ...$

(a) $x = a^2 + b^2, y = a^2 - b^2$ (b) $x = 2ab, y = a^2 + b^2$

(c) $x = a^2 + b^2, y = ab$ (d) $x = a^2 + b^2, y = 2ab$

(8) જો α અને β એ $\frac{\pi}{2}$ ના ગુણિત ન હોય, તો

$$\begin{bmatrix} cos^2\alpha & cos\alpha\, sin\alpha \\ cos\alpha\, sin\alpha & sin^2\alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} cos^2\beta & sin\beta\, cos\beta \\ sin\beta\, cos\beta & sin^2\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ તો $\alpha - \beta$ એ ...... છે.

(a) π નો ગુણિત (b) $\frac{\pi}{2}$ નો અયુગ્મ ગુણિત

(c) 0 (d) π નો અયુગ્મ ગુણિત

(9) જો $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 1 & y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, તો $x = ...$, $y = ...$

(a) $x = 3, y = 2$ (b) $x = 3, y = -2$ (c) $x = -3, y = -2$ (d) $x = -3, y = 2$

(10) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & \alpha \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ હોય તો $\alpha = ...$

(a) 5 (b) -5 (c) 2 (d) -2

વિભાગ C (3 ગુણ)

(11) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ તો $B = ...$ જેથી $AB = BA$.

(a) $\begin{bmatrix} x & x \\ y & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & y \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} x & x \\ 1 & x \end{bmatrix}$

(12) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ અને $A^2 - kA - 5I = O$ તો $k = ...$.

(a) 3 (b) 7 (c) 5 (d) 9

(13) જો $[1 \quad x \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{bmatrix} = O$, તો $x = ...$

(a) $\frac{-9 \pm \sqrt{35}}{2}$ (b) $\frac{-7 \pm \sqrt{53}}{2}$ (c) $\frac{-9 \pm \sqrt{53}}{2}$ (d) $\frac{-7 \pm \sqrt{35}}{2}$

(14) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$ માટે જો $AA^T = I$, તો $(x, y, z) = (...., ..., ...)$. $(x, y, z > 0)$ ☐

(a) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ (b) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (c) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ (d) $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

વિભાગ D (4 ગુણ)

(15) જો $A\begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{bmatrix}$, તો A = ... ☐

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

(16) $A = \begin{bmatrix} cos\frac{2\pi}{3} & -sin\frac{2\pi}{3} \\ sin\frac{2\pi}{3} & cos\frac{2\pi}{3} \end{bmatrix}$, તો A^3 = ... ☐

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(17) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક $\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -1 & 8 & \alpha \\ 1 & -19 & 14 \\ 2 & 6 & -5 \end{bmatrix}$ છે કે નહિ તે ચકાસો અને વ્યસ્ત શ્રેણિક હોય, તો α = ... ☐

(a) −3 (b) 2 (c) −5 (d) ન મળે.

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચે આપેલા મુદ્દાઓ શીખ્યા :

1. **શ્રેણિક :** સંખ્યાઓની કોઈ પણ લંબચોરસ ગોઠવણીને શ્રેણિક (સારણી) કહે છે. આ સંખ્યાઓને [ ] અથવા ( ) પ્રકારના કૌંસમાં મૂકવામાં આવે છે તથા આ સંખ્યાઓને શ્રેણિકના ઘટકો કહે છે.
2. **શ્રેણિકોની સમાનતા :** સમાન કક્ષાવાળા બે શ્રેણિકોના અનુરૂપ ઘટકો સમાન હોય, તો તે બે શ્રેણિક સમાન કહેવાય. $A = B \Rightarrow [a_{ij}] = [b_{ij}] \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}\ \forall i, j$
3. **શ્રેણિકોના પ્રકાર :** હાર શ્રેણિક, સ્તંભ શ્રેણિક, ચોરસ શ્રેણિક, વિકર્ણ શ્રેણિક, શૂન્ય શ્રેણિક, અદિશ શ્રેણિક
4. **બે શ્રેણિકોના સરવાળા :** જો બે શ્રેણિકની હારની સંખ્યા સમાન હોય અને સ્તંભની સંખ્યા સમાન હોય, તો તેમના અનુરૂપ ઘટકોના સરવાળાથી મળતા શ્રેણિકને બે શ્રેણિકોનો સરવાળો કહે છે.
   $[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$

5. શ્રેણિકો માટે :

(1) સરવાળા માટે ક્રમના નિયમનું અસ્તિત્વ છે.

(2) સરવાળા માટે જૂથના નિયમનું અસ્તિત્વ છે.

(3) સરવાળા માટે તટસ્થ શ્રેણિક $[O]_{m \times n}$ નું અસ્તિત્વ છે.

(4) સરવાળા માટે વિરોધી શ્રેણિક છે.

6. શ્રેણિકનો અદિશ વડે ગુણાકાર અને તેના ગુણધર્મો :

જો $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ અને $k \in R$, અદિશ હોય, તો $kA = [k_{ij}]_{m \times n}$ થાય.

(1) $k(A + B) = kA + kB$ જ્યાં A, B શ્રેણિકો છે અને $k, l \in R$ છે.

(2) $(kl)A = k(lA)$

(3) $(k + l)A = kA + lA$

(4) $(-1)A = -A$

7. પરિવર્ત શ્રેણિક : જો $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, હોય, તો પરિવર્ત શ્રેણિક $A^T = A' = [a_{ji}]_{n \times m}$ થાય.

8. સંમિત શ્રેણિક : જો ચોરસ શ્રેણિક A માટે $A^T = A$, તો A સંમિત શ્રેણિક છે.

9. વિસંમિત શ્રેણિક : જો ચોરસ શ્રેણિક A માટે $A^T = -A$, તો A વિસંમિત શ્રેણિક છે.

10. (1) $(A + B)^T = A^T + B^T$, (2) $(A^T)^T = A$, (3) $(kA)^T = kA^T$

11. બે શ્રેણિકોના ગુણાકાર : શ્રેણિક Aના સ્તંભની સંખ્યા = શ્રેણિક Bની હારની સંખ્યા તો શ્રેણિક ગુણાકાર AB શક્ય બને.

12. એકમ શ્રેણિક : ચોરસ શ્રેણિકના અગ્રવિકર્ણ પરના ઘટકો 1 હોય અને બાકીના ઘટકો શૂન્ય થાય તો તે શ્રેણિક એકમ શ્રેણિક કહેવાય. તેને I વડે દર્શાવાય છે.

13. ચોરસ શ્રેણિક Aના નિશ્ચાયકને $|A|$ વડે દર્શાવાય છે.

14. ચોરસ શ્રેણિકો A અને B માટે $|AB| = |A||B|$.

15. સહઅવયવજ શ્રેણિક : ચોરસ શ્રેણિક A ના દરેક ઘટકના સ્થાને તેમના જ સહઅવયવ મૂકીને પરિવર્ત શ્રેણિક લેતાં સહઅવયવજ શ્રેણિક $adjA$ મળે.

16. વ્યસ્ત શ્રેણિક : જો ચોરસ શ્રેણિકો A અને B માટે $AB = BA = I$ થાય તો તેઓ એકબીજાના વ્યસ્ત શ્રેણિક કહેવાય.

17. સામાન્ય શ્રેણિક : જો ચોરસ શ્રેણિકના વ્યસ્ત શ્રેણિકનું અસ્તિત્વ હોય, તો તે શ્રેણિકને સામાન્ય શ્રેણિક કહેવાય. સામાન્ય શ્રેણિક માટે તેના નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

18. Aનો વ્યસ્ત શ્રેણિક $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adjA)$ થાય. $|A| \neq 0$

19. શ્રેણિક પર પ્રાથમિક ક્રિયાઓ કરીને A^{-1} મેળવી શકાય. (નિશ્ચાયકના સંકેત જેવા જ સંકેત).

20. એશિલોન પદ્ધતિથી વ્યસ્ત શ્રેણિક : જો શ્રેણિક સમીકરણ $A = IA$ ની ડાબી બાજુના શ્રેણિક A અને જમણી બાજુના Iની હાર પર શ્રેણીબદ્ધ પ્રાથમિક ક્રિયાઓ કરી Aનું Iમાં પરિવર્તન થાય ત્યારે જમણી બાજુના શ્રેણિક I નું A^{-1} માં પરિવર્તન થાય જેથી $I = PA$ સમીકરણ મળે તો $P = A^{-1}$. વ્યસ્ત શ્રેણિક મેળવવાની આ પદ્ધતિને હાર સંક્ષેપન એશિલોન પદ્ધતિ કહે છે.

21. વ્યસ્ત શ્રેણિકના ઉપયોગથી સુરેખ સમીકરણ સંહતિનો ઉકેલ મેળવી શકાય છે.