પ્રકરણ 1

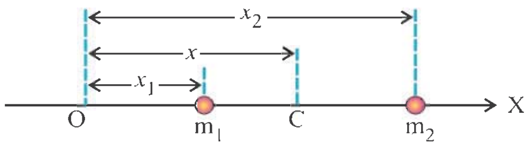
કણોના તંત્રનું ડાઈનેમિક્સ

1.1 પ્રસ્તાવના (Introduction)

સિમેસ્ટર-I માં આપણે કણની રેખીય ગતિનો અભ્યાસ કર્યો હતો. હવે આ પ્રકરણમાં આપણે બે કણોના તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર, n-કણોના તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર, તથા દૃઢ પદાર્થનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર કેવી રીતે શોધી શકાય તે વિશે અભ્યાસ કરીશું. આ ઉપરાંત આપણે કણોના તંત્રની ગતિ સાથે સંકળાયેલ ન્યૂટનનો ગતિનો બીજો નિયમ તારવીશું. કણોના તંત્ર માટે ભૌતિકવિજ્ઞાનના સાર્વત્રિક નિયમો પૈકીનો એક એવો વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ પણ તારવીશું.

1.2 એક-પરિમાણમાં કણોના તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર (Centre of Mass of a System of Particles in One Dimension)

આકૃતિ 1.1માં દર્શાવ્યા મુજબ, ધારો કે m_1 અને m_2 દ્રવ્યમાન ધરાવતા બે કણો X-અક્ષ પર ઊગમબિંદુ (O) થી અનુક્રમે x_1 અને x_2 અંતરે રહેલા છે.



બે કણોના તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર

આકૃતિ 1.1

આ તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર એક એવું બિંદુ છે કે જેનું ઊગમબિંદુ O થી અંતર,

$$\therefore \ x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \qquad (1.2.1)$$

સૂત્ર વડે આપી શકાય છે.

અહીં, x એ x_1 અને x_2નું દળભારિત સરેરાશ સ્થાન ધરાવે છે. જો બન્ને કણો સમાન દ્રવ્યમાનના હોય, તો $m_1 = m_2 = m$.

$$\therefore \; x = \frac{mx_1 + mx_2}{m + m}$$

$$\therefore \; x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad (1.2.2)$$

આમ, **સમાન દ્રવ્યમાન ધરાવતા બે કણોનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર (બન્ને કણોને જોડતા રેખાખંડ પર) બન્ને કણોની મધ્યમાં આવેલું હોય છે.**

આ જ રીતે, જો m_1, m_2,...., m_n દ્રવ્યમાન ધરાવતા n કણો X-અક્ષ પર ઊગમબિંદુ 'O' થી અનુક્રમે x_1, x_2, ..., x_n અંતરે રહેલા હોય, તો n કણોના તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર,

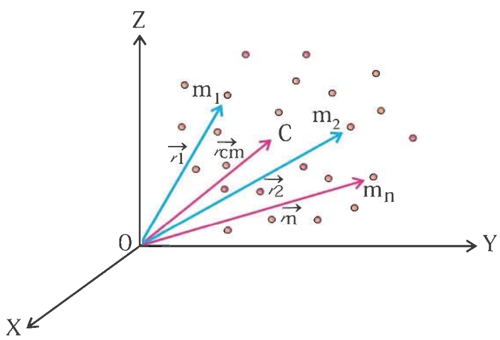
$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

$$\therefore \; x = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i} \qquad (1.2.3)$$

$$\therefore \; x = \frac{\Sigma m_i x_i}{M} \qquad (1.2.4)$$

જ્યાં M = Σm_i = n કણોના તંત્રનું કુલદ્રવ્યમાન.

1.3 ત્રિ-પરિમાણમાં n-કણોના તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર (Centre of Mass of a System of n-Particles in Three Dimensions)



ત્રિપરિમાણમાં n-કણોનું તંત્ર

આકૃતિ 1.2

આકૃતિ 1.2 માં n-કણોનું તંત્ર ત્રિપરિમાણમાં દર્શાવ્યું છે. યામપદ્ધતિના ઊગમબિંદુ 'O'ને અનુલક્ષીને m_1, m_2, ... , m_n દ્રવ્યમાન ધરાવતા કણોના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, ..., $\vec{r}_n$ છે. આ તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો સ્થાનસદિશ નીચે આપેલા સૂત્ર વડે દર્શાવી શકાય.

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \qquad (1.3.1)$$

$$\therefore \; \vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{M}$$

અથવા

$$M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots .. m_n\vec{r}_n \qquad (1.3.2)$$

જ્યાં,

$$M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n \qquad (1.3.3)$$

= n-કણોના તંત્રનું કુલ દ્રવ્યમાન.

1.3.1 દ્રવ્યમાનકેન્દ્રની ગતિ અને ન્યૂટનનો ગતિનો બીજો નિયમ (Motion of Centre of Mass and Newton's Second Law of Motion) :

n-કણોના તંત્રમાં રહેલા દરેક કણનું દ્રવ્યમાન સમય સાથે બદલાતું ન હોય તો, સમીકરણ (1.3.2) નું સમયની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$M\frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} + \ldots + m_n\frac{d\vec{r}_n}{dt}$$

$$\therefore \; M\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n$$

અહીં, $\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt}$ એ દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો વેગ છે, તથા $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$......, એ અનુરૂપ કણોના વેગ છે.

$$\therefore \; M\vec{v}_{cm} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \ldots + \vec{P}_n \qquad (1.3.4)$$

$$\therefore \; M\vec{v}_{cm} = \vec{P} \qquad (1.3.5)$$

જ્યાં $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, ... વગેરે અનુરૂપ કણોના વેગમાન છે, તથા

$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \ldots + \vec{P}_n$ એ n-કણોના તંત્રનું કુલ રેખીય વેગમાન છે.

સમીકરણ (1.3.5) દર્શાવે છે કે **કણોના તંત્રનું કુલ વેગમાન, તંત્રના કુલ દળ અને તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રના વેગના ગુણાકાર જેટલું હોય છે.**

સમીકરણ (1.3.4)નું સમય સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{d\vec{P}_1}{dt} + \frac{d\vec{P}_2}{dt} + ... + \frac{d\vec{P}_n}{dt}$$

$$\therefore M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \vec{F} \quad (1.3.6)$$

$$= m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + ... + m_n\vec{a}_n \quad (1.3.7)$$

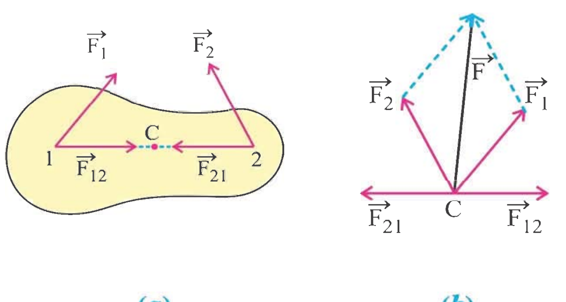
સમીકરણ (1.3.6)માં $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ... , $\vec{F}_n$ એ તંત્રના અનુરૂપ કણો પર પ્રવર્તતાં બળો છે તથા $\vec{F}$ એ પરિણામી બળ છે. સમીકરણ (1.3.7)માં $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ એ આ બળો વડે ઉદ્ભવતા અનુરૂપ કણોના પ્રવેગ છે.

સમીકરણ (1.3.5) પરથી,

$$M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_{cm} \quad (1.3.8)$$

તંત્રમાં કણો પર પ્રવર્તતાં બળો બે પ્રકારનાં હોય છે :

(1) તંત્રમાં કણો વચ્ચે પ્રવર્તતાં આંતરિક બળો અને (2) બાહ્ય બળો.



બે કણોથી બનેલા તંત્ર પર લાગતાં વિવિધ બળો

આકૃતિ 1.3

આકૃતિ (1.3 *a*)માં દર્શાવ્યા મુજબ, ધારો કે બે કણોથી બનેલા તંત્રમાં, કણ 1 અને 2 પર લાગતાં બાહ્ય બળો અનુક્રમે $\vec{F}_1$ અને $\vec{F}_2$ છે તથા તેમની વચ્ચે પ્રવર્તતાં આંતરિક બળો $\vec{F}_{12}$ અને $\vec{F}_{21}$ છે.

સમગ્ર તંત્રની ગતિનો અભ્યાસ કરીએ ત્યારે આ બધાં જ બળો દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર 'C' પર લાગે છે તેમ ગણી શકાય (જુઓ આકૃતિ 1.3-*b*). ન્યૂટનના ગતિના ત્રીજા નિયમ મુજબ $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ હોવાથી, આંતરિક બળોનું પરિણામી બળ શૂન્ય થાય છે. આમ, સમીકરણ (1.3.6)માં કણોના તંત્ર પર લાગતું પરિણામી બળ $\vec{F}$ એ ફક્ત બાહ્ય બળોનું જ પરિણામી બળ છે. સમીકરણ (1.3.6) અને (1.3.8) પરથી,

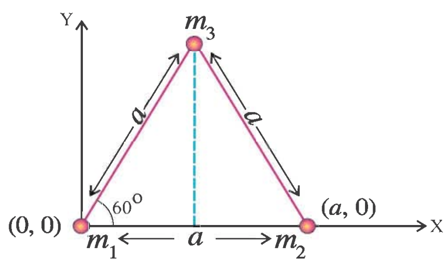
$$M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = M\vec{a}_{cm} = \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (1.3.9)$$

સમીકરણ (1.3.9) દર્શાવે છે કે **તંત્ર પર લાગતું પરિણામી બાહ્ય બળ તંત્રના કુલ રેખીય વેગમાનના ફેરફારના દર બરાબર હોય છે, જે કણોના તંત્ર માટે ન્યૂટનનો ગતિનો બીજો નિયમ છે.** આ ઉપરાંત સમીકરણ (1.3.9) દર્શાવે છે કે **તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર જાણે કે તંત્રનું સમગ્ર દળ તેના પર કેન્દ્રિત થયું હોય તેમ, પરિણામી બાહ્ય બળ $\vec{F}$ ની અસર હેઠળ ગતિ કરે છે.**

ન્યૂટનનો ગતિનો બીજો નિયમ કોઈ એક કણ માટે ત્રીજા નિયમની મદદ વગર સ્વતંત્ર રીતે લખી શકાય છે. પણ કણોના તંત્ર માટે બીજો નિયમ મેળવવા માટે આપણે ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમની મદદ લેવી પડે છે. આ હકીકતને ન્યૂટનના ગતિના નિયમોનું પરસ્પર અવલંબન કહે છે.

ઉદાહરણ 1 : '*a*' બાજુવાળા એક સમબાજુ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ પર m_1, m_2 અને m_3 દ્રવ્યમાન ધરાવતા કણો મૂક્યા છે. m_1 દ્રવ્યમાનવાળા કણની સાપેક્ષે આ તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર શોધો.

ઉકેલ :



આકૃતિ 1.4

સમબાજુ ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાઓનાં માપ એકસરખાં (60°) હોય છે. આથી આકૃતિ (1.4) માં દર્શાવ્યા મુજબ m_1 દ્રવ્યમાનવાળા કણને ઊગમબિંદુ (0, 0) પર, તથા m_2 દ્રવ્યમાનવાળા કણને X-અક્ષ પર ઊગમબિંદુથી 'a' અંતરે (a, 0) સ્થાન પર દર્શાવીએ, તો m_3 દ્રવ્યમાન ધરાવતા કણના યામ

$$(a\cos 60°,\ a\sin 60°) = \left(\frac{a}{2},\ \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$$

આમ, m_1, m_2 અને m_3 દ્રવ્યમાનવાળા કણોના સ્થાન-સદિશ અનુક્રમે

$$\vec{r}_1 = (0, 0),\ \vec{r}_2 = (a, 0), \text{ અને}$$

$$\vec{r}_3 = \left(\frac{a}{2},\ \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$$

આથી વ્યાખ્યા મુજબ ત્રણ કણોના આ તંત્રના દ્રવ્યમાન-કેન્દ્રનો સ્થાનસદિશ

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{m_1(0,0) + m_2(a,0) + m_3\left(\frac{a}{2},\ \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{\left(m_2 a + \frac{m_3 a}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}m_3 a\right)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$\therefore\ \vec{r}_{cm} = \left[\frac{\left(m_2 + \frac{m_3}{2}\right)a}{m_1 + m_2 + m_3},\ \frac{\sqrt{3}\ m_3 \frac{a}{2}}{m_1 + m_2 + m_3}\right]$$

ઉદાહરણ 2 : ત્રણ કણોના તંત્રમાં કણોનાં રેખીય વેગમાન અનુક્રમે (1, 2, 3), (4, 5, 6) અને (5, 6, 7) છે. આ ઘટકો kg m s^{-1} માં છે. જો તંત્રના દ્રવ્યમાન-કેન્દ્રનો વેગ (30, 39, 48) m s^{-1} હોય, તો તંત્રનું કુલ દળ શોધો.

ઉકેલ : અહીંયાં $\vec{P}_1 = (1, 2, 3)$ kg m s^{-1}

$$\vec{P}_2 = (4, 5, 6) \text{ kg m s}^{-1}$$

$$\vec{P}_3 = (5, 6, 7) \text{ kg m s}^{-1}$$

તથા $\vec{v}_{cm} = (30, 39, 48)$ m s^{-1}

હવે, $M\vec{v}_{cm} = \vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3$

$\therefore$ M(30, 39 48) = (1, 2, 3) + (4, 5, 6) + (5, 6, 7)

$\therefore$ (30 M, 39 M, 48 M) = (10, 13, 16)

સમીકરણની બન્ને બાજુના અનુરૂપ ઘટકો સરખાવતાં

$$30\text{ M} = 10 \Rightarrow \text{M} = \frac{1}{3} \text{ kg}$$

$$39\text{ M} = 13 \Rightarrow \text{M} = \frac{1}{3} \text{ kg}$$

$$48\text{ M} = 16 \Rightarrow \text{M} = \frac{1}{3} \text{ kg}$$

આમ, તંત્રનું કુલ દળ $\frac{1}{3}$ kg છે.

ઉદાહરણ 3 : t = 0 સમયે, 0.1 kg ના એક પથ્થરને ઊંચા બિલ્ડિંગ પરથી મુક્ત રીતે પડતો મૂકવામાં આવે છે. બીજા 0.2 kg ના પથ્થરને તે જ સ્થાન પરથી 0.1s બાદ મુક્ત રીતે પડતો મૂકવામાં આવે છે.

(1) t = 0.3s સમયે આ બન્ને પથ્થરનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર મૂળ સ્થાનથી કેટલા અંતરે હશે ? (બેમાંથી એક પણ પથ્થર આ સમયે જમીન પર પડતો નથી.)

(2) આ સમયે બન્ને પથ્થરનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર કેટલી ઝડપથી ગતિ કરતું હશે ?

(3) આ સમયે બન્ને પથ્થર વડે બનતા તંત્રનું કુલ વેગમાન કેટલું હશે ?

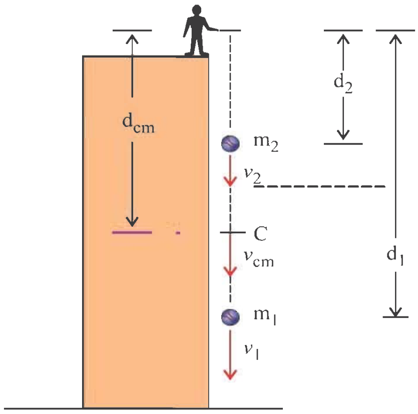
ઉકેલ : પથ્થર 1નું દ્રવ્યમાન m_1 = 0.1 kg

પથ્થર 2નું દ્રવ્યમાન m_2 = 0.2 kg

પથ્થર 1ની પ્રારંભિક ઝડપ v_{01} = 0 m s^{-1}

પથ્થર 2ની પ્રારંભિક ઝડપ v_{02} = 0 m s^{-1}

(1) અહીં બન્ને પથ્થરો એક જ દિશામાં ગતિ કરતા હોવાથી તેમના વેગ અને વેગમાન સદિશો અદિશ સ્વરૂપે લઈ શકાશે. t = 0.3 s સમયે પથ્થર 1 વડે કપાયેલ અંતર



આકૃતિ 1.5

$$d_1 = v_{01}\, t + \frac{1}{2}\, g\, t^2$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\, (9.8)\, (0.3)^2$$

$$d_1 = 0.441 \text{ m} \qquad (1)$$

પથ્થર 2ને 0.1 s પછી છોડવામાં આવે છે. આથી $t = 0.3$ s, સમયે, પથ્થર 2એ પડવા માટે લીધેલ સમય $t' = 0.3 \text{ s} - 0.1 \text{ s} = 0.2$ s.

આમ $t' = 0.2$ s સમયમાં (એટલે કે $t = 0.3$ s સમયે), પથ્થર 2 વડે કપાયેલ અંતર

$$d_2 = v_{02} t' + \frac{1}{2}\, g\, t'^2$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\, (9.8)\, (0.2)^2$$

$$d_2 = 0.196 \text{ m} \qquad (2)$$

આથી, $t = 0.3$ s, સમયે મૂળ સ્થાનથી બન્ને પથ્થર વડે બનતા તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનું અંતર

$$d_{cm} = \frac{m_1 d_1 + m_2 d_2}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{(0.1)(0.441) + (0.2)(0.196)}{0.1 + 0.2}$$

$$\therefore\ d_{cm} = 0.277 \text{ m} \qquad (3)$$

(2) $t = 0.3$ s, સમયે પથ્થર 1ની ઝડપ

$$v_1 = v_{01} + gt = 0 + (9.8)(0.3)$$

$$\therefore\ v_1 = 2.94 \text{ m s}^{-1} \qquad (4)$$

$t = 0.3$ s, સમયે પથ્થર 2નો પડવાનો સમય અંતરાલ $t' = 0.2$ s છે. આથી $t' = 0.2$ s સમય પછી પથ્થર 2 ની ઝડપ

$$v_2 = v_{02} + gt' = 0 + (9.8)(0.2)$$

$$\therefore\ v_2 = 1.96 \text{ m s}^{-1} \qquad (5)$$

આથી, $t = 0.3$ s, સમયે બન્ને પથ્થર વડે બનતા તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રની ઝડપ

$$v_{cm} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$\therefore\ v_{cm} = \frac{(0.1)(2.94) + (0.2)(1.96)}{0.1 + 0.2}$$

$$\therefore\ v_{cm} = 2.29 \text{ ms}^{-1} \qquad (6)$$

(3) $t = 0.3$ s, સમયે બન્ને પથ્થરો વડે બનતા તંત્રનું કુલ વેગમાન

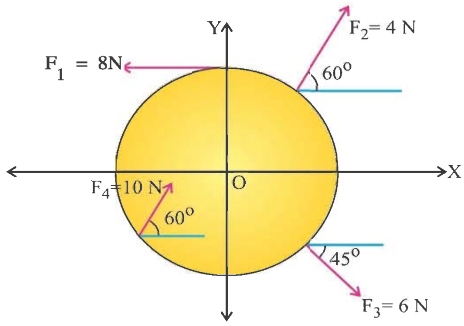
$$P = P_1 + P_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$\therefore\ P = (0.1)\,(2.94) + (0.2)\,(1.96)$$

$$\therefore\ P = 0.686 \text{ kg m s}^{-1}$$

$$= 0.69 \text{ kg m s}^{-1} \qquad (7)$$

ઉદાહરણ 4 : આકૃતિ (1.6)માં દર્શાવ્યા મુજબ 2 kg દ્રવ્યમાનવાળા એક દ્વિપારિમાણિક પદાર્થ પર વિવિધ બળો લાગે છે. આ પદાર્થના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો રેખીય પ્રવેગ શોધો.



આકૃતિ 1.6

ઉકેલ : બધાં બળોને તેમના ઘટકોના રૂપમાં લખતાં,

$$\vec{F_1} = (-8, 0) \text{ N}$$

$$\vec{F_2} = (4 \cos 60^o, 4 \sin 60^o) = (2, 2\sqrt{3}) \text{N}$$

$$\vec{F_3} = [6 \cos(-45^o), 6 \sin(-45^o)]$$

$$= (6 \cos 45^o, -6 \sin 45^o)$$

$$\therefore\ \vec{F_3} = \left(\frac{6}{\sqrt{2}}, \frac{-6}{\sqrt{2}}\right) \text{N}$$

$$\vec{F_4} = (10 \cos 60^o, 10 \sin 60^o) = (5, 5\sqrt{3}) \text{N}$$

હવે,

$$M\vec{a}_{cm} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

જ્યાં M = 2 kg

$$\therefore \vec{a}_{cm} = \frac{1}{2}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4)$$

$$= \frac{1}{2}[(-8+2+\frac{6}{\sqrt{2}}+5),(2\sqrt{3}-\frac{6}{\sqrt{2}}+5\sqrt{3})]$$

$$\therefore \vec{a}_{cm} = \frac{1}{2}[(-1+\frac{6}{\sqrt{2}}), (7\sqrt{3} - \frac{6}{\sqrt{2}})] \text{m s}^{-2}$$

1.4 રેખીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ (Law of Conservation of Linear Momentum)

જો તંત્ર પર લાગતું પરિણામી બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય, તો સમીકરણ (1.3.9) પરથી

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \qquad (1.4.1)$$

$$\therefore \vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + ... + \vec{P}_n = \text{અચળ} \qquad (1.4.2)$$

જે દર્શાવે છે કે, **"જો તંત્ર પરનું પરિણામી બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય, તો તંત્રનું કુલ રેખીય વેગમાન અચળ રહે છે."** આ વિધાનને **રેખીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ** કહે છે. પરિણામી બાહ્યબળ શૂન્ય હોય ત્યારે તંત્રના જુદા-જુદા કણોના વેગમાન $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, ...માં વ્યક્તિગત ફેરફારો થઈ શકે છે, પરંતુ આ ફેરફારો એવી રીતે જ થાય છે કે જેથી વેગમાનના ફેરફારોનો સદિશ સરવાળો શૂન્ય જ થાય. આમ, કણોના વેગમાનમાં થતો કુલ ફેરફાર શૂન્ય થવાથી, તંત્રનું કુલ વેગમાન અચળ રહે છે.

દા. ત., બંધ પાત્રમાં રહેલા હવાના અણુઓ પાત્રમાં અસ્તવ્યસ્ત ગતિ કરતા હોય છે, તેમની વચ્ચે અણુ-અણુ અથડામણ અથવા અણુની પાત્રની દીવાલ સાથેની અથડામણ દરમિયાન તેમનું વ્યક્તિગત વેગમાન બદલાય છે, પરંતુ તેમના વેગમાનના ફેરફારોનો સદિશ સરવાળો શૂન્ય હોય છે. એટલે કે તેમનું કુલ વેગમાન અચળ રહે છે.

(જો વાયુના અણુઓના વેગમાનના ફેરફારોનો સદિશ સરવાળો કોઈ ચોક્કસ દિશામાં હોય તો શું થાય ? વિચારો)

રેખીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ મૂળભૂત અને સાર્વત્રિક છે. આ નિયમ ગ્રહોના બનેલા તંત્રો, તેમજ ઇલેક્ટ્રૉન, પ્રોટોન વગેરે જેવા સૂક્ષ્મ કણોનાં બનેલાં તંત્રો માટે પણ સમાન રીતે સાચો છે.

સમીકરણ (1.3.9) પરથી,

$$\vec{F} = M\vec{a}_{cm} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = 0$$

$$\therefore \vec{a}_{cm} = 0 \text{ અને } \vec{v}_{cm} = \text{અચળ}$$

જે દર્શાવે છે કે જો **પરિણામી બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય, તો દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો પ્રવેગ શૂન્ય હોય છે. એટલે કે દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો વેગ અચળ રહે છે.** આમ બાહ્યબળની ગેરહાજરીમાં તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર સ્થિર હોય તો સ્થિર રહે છે અથવા ગતિમાં હોય તો અચળ વેગથી ગતિ ચાલુ રાખે છે.

હવે નીચેનું ઉદાહરણ જોઈએ :

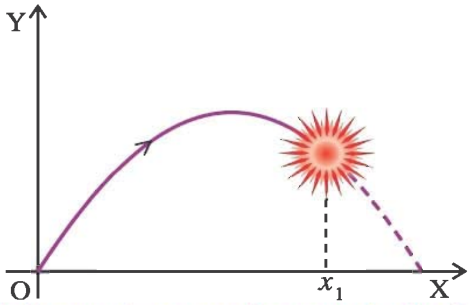
ધારો કે એક રાસાયણિક બૉમ્બ સ્થિર પડેલો છે. બૉમ્બના પ્રારંભિક વેગમાન અને ગતિઊર્જા શૂન્ય છે. બૉમ્બનો વિસ્ફોટ થતાં બૉમ્બના ટુકડાઓ હવામાં ફંગોળાય છે. આ ટુકડાઓ જુદા-જુદા વેગમાન સાથે જુદી-જુદી દિશાઓમાં ફંગોળાશે, પરંતુ તેમનાં વેગમાનોના સદિશો એવા જ હશે કે જેથી,

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + ... + \vec{P}_n = 0$$

અહીં $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, ... વગેરે, ટુકડાઓનાં વેગમાન દર્શાવે છે

અહીં ટુકડાઓના તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર, મૂળ બૉમ્બનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર જે બિંદુ પર સ્થિર હતું તે જ બિંદુ પર રહેશે. પરંતુ ટુકડાઓની ગતિ ઊર્જાનો સરવાળો શૂન્ય નથી. વિસ્ફોટ અગાઉ બૉમ્બની ગતિ-ઊર્જા શૂન્ય હતી, પરંતુ વિસ્ફોટ બાદ તે શૂન્ય નથી. આમ, તંત્રની ગતિ-ઊર્જામાં ફેરફાર થયો. કાર્ય, ઊર્જા અને પાવરના પ્રકરણમાં તમે જાણ્યું હશે કે તંત્રની ગતિ-ઊર્જામાં થતો ફેરફાર, તેના પરના પરિણામી બાહ્ય બળ વડે થતા કાર્ય જેટલો હોય છે. અહીં, પરિણામી બાહ્ય બળ શૂન્ય છે. તો પછી તેની ગતિ ઊર્જામાં ફેરફાર કેવી રીતે થયો ? હકીકત એમ છે કે, રાસાયણિક બૉમ્બ પોતાના જટિલ અણુઓ વચ્ચે રાસાયણિક બંધોને લીધે (અને બીજાં કેટલાંક કારણોને લીધે) આંતરિક ઊર્જા ધરાવે છે. જ્યારે બૉમ્બનો વિસ્ફોટ થાય ત્યારે રાસાયણિક બંધો તૂટે છે અને તેમની સાથે સંકળાયેલી આંતરિક ઊર્જાના અમુક ભાગનું ઉષ્માઊર્જામાં રૂપાંતરણ થાય છે તથા બાકીની ઊર્જા ટુકડાઓને ગતિ-ઊર્જા સ્વરૂપે પ્રાપ્ત થાય છે. આમ, અહીં આંતરિક ઊર્જાના ભોગે યાંત્રિક કાર્ય થાય છે, **જે કાર્ય-ઊર્જા પ્રમેયના વ્યાપક સ્વરૂપ તરફ દોરી જાય છે.**

અહીં તો બૉમ્બ પ્રારંભમાં સ્થિર હતો, પરંતુ, જો બૉમ્બ ગતિ કરતો હોત અને ગતિ દરમિયાન તે ફૂટ્યો હોત તો રેખીય વેગમાનના સંરક્ષણના નિયમ મુજબ ફૂટ્યા પછી તેના ટુકડાઓ એવી દિશામાં ગતિ કરતા હોત કે જેથી તેમનાં વેગમાનોનો સદિશ સરવાળો મૂળ બોમ્બના વેગમાન જેટલો હોય અને તેનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર, તેનો મૂળ વેગ ($\vec{v}_{cm}$) અચળ જળવાઈ રહે તેવી દિશામાં ગતિ કરે (જુઓ આકૃતિ 1.7).



વિસ્ફોટ બાદ બોમ્બના ટુકડાઓના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રની ગતિ

આકૃતિ 1.7

ઉદાહરણ 5 : 50 kgનો એક બૉમ્બ 10 m/sના અચળ વેગથી ગતિ કરે છે. એકાએક તે 40 kg અને 10 kgના બે ટુકડાઓમાં વિભાજિત થાય છે. જો મોટા ટુકડાનો વેગ શૂન્ય હોય, તો નાના ટુકડાનો વેગ શોધો.

ઉકેલ : બૉમ્બ અચળ વેગથી ગતિ કરે છે. આથી તેના પરનું બાહ્ય બળ શૂન્ય છે. આથી રેખીય વેગમાનના સંરક્ષણના નિયમ મુજબ,

પ્રારંભિક રેખીય વેગમાન = અંતિમ રેખીય વેગમાન

$\therefore\ M\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$

જ્યાં, M = બૉમ્બનું કુલ દળ = 50 kg

m_1 = મોટા ટુકડાનું દળ = 40 kg

m_2 = નાના ટુકડાનું દળ = 10 kg

$\vec{v}$ = બૉમ્બનો વેગ = 10 m/s

$\vec{v}_1$ = મોટા ટુકડાનો વેગ = 0

$\vec{v}_2$ = નાના ટુકડાનો વેગ = ?

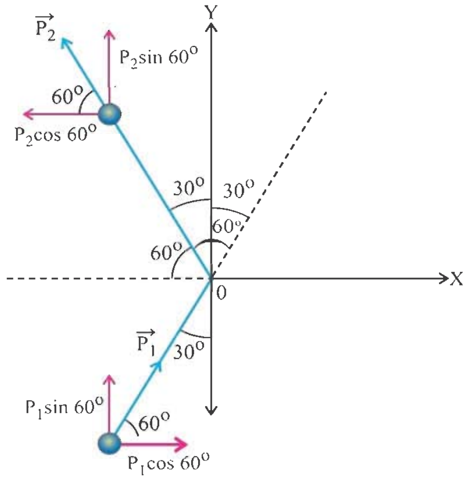
આથી,

$M\vec{v} = m_2\vec{v}_2$

$$\therefore\ \vec{v}_2 = \frac{M}{m_2}\vec{v} = \frac{50}{10} \times 10 = 50 \text{ m/s}$$

ઉદાહરણ 6 : 4 kg દળનો એક ગોળો દીવાલ સાથે 30° ખૂણે અથડાઈને પોતાની ગતિની મૂળ દિશા સાથે 60° કોણ બનાવતી દિશામાં પરાવર્તિત થાય છે. જો ગોળાનો દીવાલ સાથે સંપર્કસમય 0.1 s હોય, તો દીવાલ પર લાગતું બળ શોધો. ગોળાનો પ્રારંભિક અને અંતિમ વેગ 1 m s^{-1} છે.

ઉકેલ : ઉદાહરણમાં આપેલ પરિસ્થિતિ આકૃતિ 1.8માં દર્શાવી છે.



આકૃતિ 1.8

અહીંયા $\vec{P}_1$ = ગોળાનું પ્રારંભિક વેગમાન

$= mv \cos 60\hat{i} + mv \sin 60\hat{j}$

$\vec{P}_2$ = ગોળાનું અંતિમ વેગમાન

$= -mv \cos 60\hat{i} + mv \sin 60\hat{j}$

આથી, ગોળાના વેગમાનમાં થતો ફેરફાર

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$$

$$= -mv \cos 60\hat{i} + mv \sin 60\hat{j} - mv \cos 60\hat{i} - mv \sin 60\hat{j}$$

$$= -2mv \cos 60\hat{i}$$

$$\therefore\ \Delta\vec{P} = -2 \times 4 \times 1 \times \frac{1}{2}\hat{i}$$

$$= -4\hat{i} \text{ kg m s}^{-1}$$

આથી દીવાલને મળતું વેગમાન

$= 4\hat{i}$ kg m s^{-1}

$\therefore$ દીવાલ પર લાગતું બળ

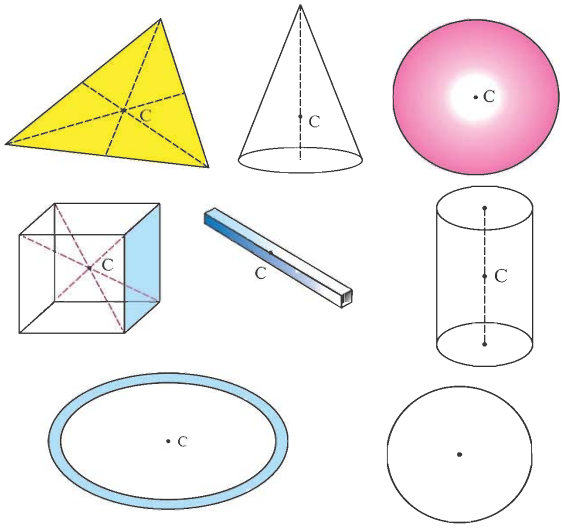
$$= \frac{\text{દીવાલને મળતું વેગમાન}}{\text{સંપર્કસમય}}$$

$$= \frac{4\hat{i}}{0.1} = 40\hat{i}\ \text{N}$$

આમ, દીવાલ પર ધન X-દિશામાં 40 N બળ લાગે છે.

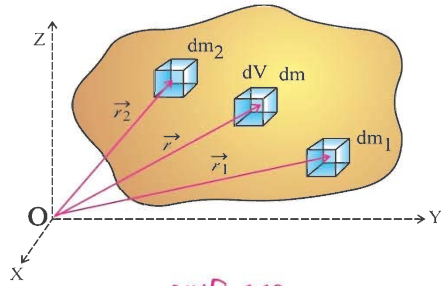
1.5 દૃઢ પદાર્થનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર (Centre of Mass of a Rigid Body)

કણોના જે તંત્રમાં કણો વચ્ચેના સાપેક્ષ સ્થાન (relative positions) અફર જળવાઈ રહેતાં હોય તેને દૃઢ પદાર્થ કહે છે. દૃઢ પદાર્થના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનું સ્થાન તેના દ્રવ્યનું વિતરણ અને તેના આકાર પર આધાર રાખે છે. દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર દૃઢ પદાર્થના દ્રવ્યની અંદર કે બહાર એમ ગમે ત્યાં હોઈ શકે છે. ઉદાહરણ તરીકે નિયમિત ઘનતાવાળી વર્તુળાકાર તકતીનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર તકતીના ભૌમિતિક કેન્દ્ર પર, તકતીના દ્રવ્યની અંદર હોય છે, જ્યારે નિયમિત ઘનતાવાળી રિંગનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર રિંગના કેન્દ્ર પર પણ રિંગના દ્રવ્યની બહાર હોય છે. નિયમિત ઘનતા અને સમાન આડછેદવાળા સળિયાનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર તેના ભૌમિતિક કેન્દ્ર પર હોય છે. સંમિતિ ધરાવતા અને નિયમિત દળ-વિતરણવાળા દૃઢ પદાર્થોનાં દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનાં સ્થાન સહેલાઈથી સૈદ્ધાંતિક રીતે શોધી શકાય છે. કેટલાક સંમિત પદાર્થો માટેનાં દ્રવ્યમાનકેન્દ્રો 'C' આકૃતિ 1.9માં દર્શાવ્યા છે.



નિયમિત આકારના કેટલાક દૃઢ પદાર્થોનાં દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર
આકૃતિ 1.9

1.5.1 ઘન પદાર્થનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર નક્કી કરવાની સૈદ્ધાંતિક રીત (Theoretical Method for Estimation of the Centre of Mass of a Solid Body) :



આકૃતિ 1.10

હવે આપણે જાણીએ છીએ કે ઘન પદાર્થ સૂક્ષ્મ કણો (અણુઓ, પરમાણુઓ કે આયનો)નો બનેલો છે. આ કણો પદાર્થમાં સતત રીતે વિતરિત થયેલા હોય છે. આકૃતિ 1.10 માં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે ઘન પદાર્થમાં dV જેટલું સૂક્ષ્મ કદ ધરાવતા કદ ખંડમાં સમાયેલ દળ dm છે. અહીં dm ને **દળ-ખંડ** કહે છે. જેનો સ્થાનસદિશ,

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

આ રીતે સમગ્ર ઘન પદાર્થને આવા દળ-ખંડોનો બનેલો ગણી શકાય. ધારો કે ઘન પદાર્થ dm_1, dm_2 ..... dm_n દળ ખંડોમાં વહેંચાયેલો છે જેમના સ્થાન સદિશો અનુક્રમે $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots\ldots, \vec{r}_n$ છે. આથી વ્યાખ્યા અનુસાર ઘન પદાર્થના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો સ્થાન સદિશ

$$\vec{r}_{cm} = \frac{dm_1\vec{r}_1 + dm_2\vec{r}_2 + \ldots\ldots + dm_n\vec{r}_n}{dm_1 + dm_2 + \ldots\ldots + dm_n} \quad (1.5.1)$$

અહીં દ્રવ્યમાન વિતરણ સતત હોવાથી સરવાળાને સંકલનના રૂપમાં દર્શાવી શકાય.

$$\therefore\ \vec{r}_{cm} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm}$$

$$\therefore\ \vec{r}_{cm} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\text{M}} \quad (1.5.2)$$

જ્યાં, $\text{M} = \int dm$

= ઘન પદાર્થનું કુલ દળ.

સમીકરણ (1.5.2) ને સદિશ ઘટકોના રૂપમાં દર્શાવતાં

$$(x_{cm}\hat{i} + y_{cm}\hat{j} + z_{cm}\hat{k}) \quad (1.5.3)$$

$$= \frac{1}{\text{M}} \int (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})dm$$

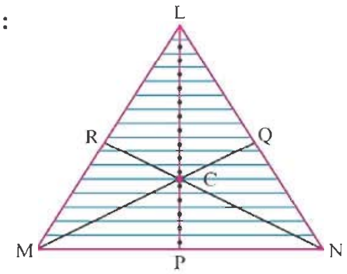
$$\left.\begin{aligned} \therefore x_{cm} &= \frac{1}{M}\int xdm \\ y_{cm} &= \frac{1}{M}\int ydm \\ z_{cm} &= \frac{1}{M}\int zdm \end{aligned}\right\} \qquad (1.5.4)$$

1.5.2 નિયમિત ઘનતાવાળા ચોક્કસ ભૌમિતિક આકારના ઘન પદાર્થનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર નક્કી કરવાની સૈદ્ધાંતિક રીત (Theoretical method for the estimation of centre of mass of a solid body of uniform density and specific geometrical shape) :

નિયમિત ઘનતાવાળા ચોક્કસ ભૌમિતિક આકારના પદાર્થનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર શોધવા માટે પદાર્થના આકારની સંમિતિ (symmetry)નો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. સંમિતિના નિયમોનો ઉપયોગ કરીને આપણે સહેલાઈથી સાબિત કરી શકીએ કે આવા પદાર્થોનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર તેમના ભૌમિતિક કેન્દ્ર પર આવેલું હોય છે.

હવે આપેલું ઉદાહરણ જોઈએ :

આકૃતિમાં દર્શાવેલ ત્રિકોણાકાર તકતીનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર શોધવું છે :

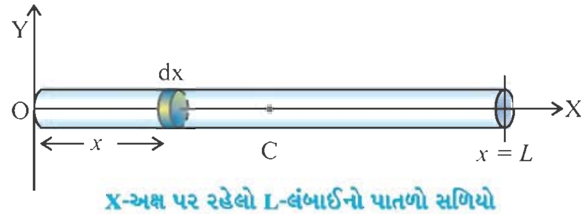


આકૃતિ 1.11

આકૃતિ 1.11 દર્શાવ્યા મુજબ ત્રિકોણાકાર તકતીને સાંકડી સમાંતર પટ્ટીઓમાં વિભાજિત થઈ ગયેલી ધારો. સંમિતિના નિયમ મુજબ દરેક પટ્ટીઓનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર તેમના ભૌમિતિક કેન્દ્ર પર આવેલું હશે. આ દરેક ભૌમિતિક કેન્દ્રને જોડતો રેખાખંડ LP દોરો. આમ, આ ત્રિકોણાકાર તકતીનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર મધ્યગા LP પર આવેલું હશે. તે જ રીતે ત્રિકોણાકાર તકતીને ML અને LN બાજુઓને સમાંતર સાંકડી પટ્ટીઓમાં વિભાજિત થયેલી માનીને મધ્યગાઓ અનુક્રમે NR અને MQ દોરી શકીએ. આમ, ત્રિકોણાકાર તકતીનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર ત્રણેય મધ્યગાઓના સામાન્ય બિંદુ 'C' પર આવેલું હશે.

1.6 નિયમિત ઘનતાવાળા પાતળા સળિયાનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર (Centre of Mass of a Thin Rod of Uniform Density)

આકૃતિ 1.12 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે 'M' દળ તથા 'L' લંબાઈ ધરાવતો એક નિયમિત આડછેદવાળો અને નિયમિત દળ વિતરણ 'λ'વાળો પાતળો સળિયો ધ્યાનમાં લો. સળિયાનો એક છેડો ઉદ્ગમબિંદુ પર મૂકી સળિયાના ભૌમિતિક અક્ષ એ X-અક્ષ પર સંપાત થાય તે રીતે મૂકો.



X-અક્ષ પર રહેલો L-લંબાઈનો પાતળો સળિયો

આકૃતિ 1.12

હવે ઊગમબિંદુથી x અંતરે 'dx' લંબાઈ ધરાવતો સૂક્ષ્મ ખંડ સળિયા પર વિચારો.

સળિયાની એકમલંબાઈ દીઠ દળ, $\lambda = \frac{M}{L}$

$\therefore$ dx લંબાઈના ખંડનું દળ $dm = \lambda dx = \frac{M}{L}dx$

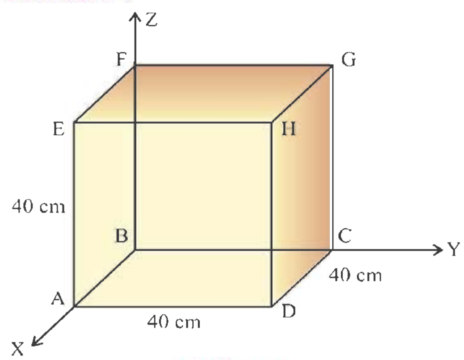
વ્યાખ્યા મુજબ આપેલા સળિયાના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનું સ્થાન,

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{1}{M}\int xdm \\ &= \frac{1}{M}\int_0^L x \cdot \frac{M}{L}dx \\ &= \frac{1}{L}\int_0^L xdx \\ &= \frac{1}{L}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L \\ &= \frac{1}{L}\left[\frac{L^2}{2} - 0\right] \end{aligned}$$

$$\therefore x_{cm} = \frac{L}{2}$$

આમ, નિયમિત ઘનતાવાળા પાતળા સળિયાનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર એ સળિયાની લંબાઈના મધ્યમાં એટલે કે તેના ભૌમિતિક કેન્દ્ર પર છે.

ઉદાહરણ 7 :



આકૃતિ 1.13

આકૃતિ 1.13 માં એક સમઘન ખોખું દર્શાવ્યું છે કે જે સમાન ઘનતા ધરાવતા તથા અવગણી શકાય તેવી જાડાઈના ધાતુના પતરાનું બનેલું છે. સમઘન ખોખાની દરેક ધારની લંબાઈ 40 cm હોય તો,

(*a*) ખોખાના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રના યામ (x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}) શોધો.

(*b*) જો ખોખું ઉપરથી ખુલ્લું હોય (EFGH પતરું ન હોય) તો ખોખાના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રના યામ (x'_{cm}, y'_{cm}, z'_{cm}) શોધો.

ઉકેલ : બૉક્ષની દરેક પ્લેટ એકસરખી ઘનતા ધરાવે છે તથા ખૂબ જ પાતળી છે. આથી દરેક પ્લેટનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર સંમિતિના નિયમ મુજબ તે પ્લેટના મધ્યબિંદુ પર હશે. આમ, દરેક પ્લેટનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર શોધતાં :

પ્લેટનું નામ	દ્રવ્યમાનકેન્દ્રના યામ
ABCD	(20, 20, 0) cm
EFGH	(20, 20, 40) cm
ABFE	(20, 0, 20) cm
DCGH	(20, 40, 20) cm
BCGF	(0, 20, 20) cm
ADHE	(40, 20, 20) cm

(*a*) આ દરેક પ્લેટના દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર પર પ્લેટનું દ્રવ્યમાન, ધારો કે M, કેન્દ્રિત થયેલું માનીએ, તો (દરેક પ્લેટનું ક્ષેત્રફળ અને પૃષ્ઠ ઘનતા એકસરખી હોવાથી દરેક પ્લેટનું દ્રવ્યમાન પણ એક સરખું $M = \rho \times A$ હશે) બનતા તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર

$$r_{cm} = (x_{cm}, y_{cm}, z_{cm})$$

$$= \frac{\left\{\begin{array}{c} M(20, 20, 0) + M(20, 20, 40) \\ + M(20, 0, 20) + M(20, 40, 20) \\ + M(0, 20, 20) + M(40, 20, 20) \end{array}\right\}}{6M}$$

$$= \frac{M(120, 120, 120)}{6M}$$

$$\therefore\ r_{cm} = (20, 20, 20) \text{ cm}$$

(*b*) જો ખોખું ઉપરથી ખુલ્લું હોય, તો EFGH પ્લેટ ન હોય, આથી બનતા તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર

$$r'_{cm} = (x'_{cm}, y'_{cm}, z'_{cm})$$

$$= \frac{\left\{\begin{array}{c} M(20, 20, 0) + M(20, 0, 20) \\ + M(20, 40, 20) + M(0, 20, 20) \\ + M(40, 20, 20) \end{array}\right\}}{5M}$$

$$= \frac{M(100, 100, 80)}{5M}$$

$$= (20, 20, 16) \text{ cm}$$

સારાંશ

1. **બે કણોના તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર :** m_1 અને m_2 દ્રવ્યમાન ધરાવતા બે કણો X-અક્ષ પર ઊગમબિંદુથી અનુક્રમે x_1 અને x_2 અંતરે રહેલા હોય, તો તેમનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર એવું બિંદુ છે કે ઊગમબિંદુથી તેનું અંતર $x_{cm} = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$ વડે અપાય છે.

2. ***n*–કણોના તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર :** જો કોઈ તંત્રમાં *n*–કણો આવેલા હોય, અને C તંત્રનાં દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનું સ્થાન દર્શાવતું હોય, તો 'C' એવું બિંદુ છે કે જ્યાં *n*-કણોના તંત્રનું કુલ દ્રવ્યમાન જાણે કે કેન્દ્રિત થયેલું છે તેમ ગણી શકાય. ત્રિ-પરિમાણમાં રહેલા *n*–કણોના તંત્રમાં રહેલા m_1, m_2, ..., m_n દ્રવ્યમાન ધરાવતા કણોના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$, ..., $\vec{r_n}$ હોય, તો તેમના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો સ્થાનસદિશ

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} + \ldots + m_n\vec{r_n}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

3. n–કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો વેગ : $\vec{v}_{cm} = \dfrac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n}{M}$,

જ્યાં, $M = m_1 + m_2 + \dots\dots + m_n$.

4. કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો પ્રવેગ

$$\vec{a}_{cm} = \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + \dots + m_n \vec{a}_n}{M}.$$

5. કણોના તંત્ર માટે ન્યૂટનનો ગતિનો બીજો નિયમ

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = M\vec{a}_{cm}.$$

6. **રેખીય વેગમાનનું સંરક્ષણ :** જો તંત્ર પરનું પરિણામી બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય, તો તંત્રનું કુલ રેખીય વેગમાન અચળ રહે છે. બાહ્ય બળની ગેરહાજરીમાં તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર સ્થિર હોય તો સ્થિર રહે છે અને ગતિમાં હોય તો અચળ વેગથી ગતિ ચાલુ રાખે છે.

7. **દૃઢ વસ્તુ :** કણોના જે તંત્રમાં કણો વચ્ચેનાં સાપેક્ષ અંતરો અફર જળવાઈ રહેતાં હોય તેને દૃઢ વસ્તુ કહે છે.

8. **દૃઢ પદાર્થનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર :** દૃઢ પદાર્થના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનું સ્થાન તેમાં દ્રવ્યના વિતરણ અને તેના આકાર પર આધાર રાખે છે. સંમિત પદાર્થો માટે તેમનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર તેમના ભૌમિતિક કેન્દ્ર પર હોય છે.

9. વ્યાપક સ્વરૂપે દૃઢ પદાર્થના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રના યામ :

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\,dm,\ y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\,dm,\ z_{cm} = \frac{1}{M}\int z\,dm$$

સ્વાધ્યાય

નીચેનાં વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. ધારો કે તમારું દ્રવ્યમાન 50 kg છે. તમારે કેટલી ઝડપથી દોડવું પડે કે જેથી તમારું રેખીય વેગમાન 20 km/h ની ઝડપથી સીધા રસ્તા પર ગતિ કરતા 100 kg સાઇકલ સવાર જેટલું થાય ?

   (A) 40 m/s (B) 11.11 m/s (C) 20 km/h (D) 10 km/h

2. 2400 kgની એક બસ સીધા રસ્તા પર 60 km/h ની ઝડપથી જાય છે. બસની પાછળ 1600 kg ની એક કાર 80 km/h ની ઝડપથી આવી રહી છે. બન્ને વાહનોનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર કેટલી ઝડપથી ગતિ કરતું હશે ?

   (A) 70 km/h (B) 75 km/h (C) 72 km/h (D) 68 km/h

3. જો 't' સમયે કોઈ પથ્થરનું વેગમાન $[(0.5\ \mathrm{kg\ m/s^3})t^2 + (3.0\ \mathrm{kg\ m/s})]\hat{i} + [1.5\ \mathrm{kg\ m/s^2}]t\hat{j}$ હોય, તો તેના પર લાગતું બળ કેટલું હોય ?

   (A) $(t\hat{i} + 1.5\hat{j})$ N (B) $(0.5t\hat{i} + 1.5\hat{j})$ N

   (C) $[(0.5t + 3)\hat{i} + 1.5\hat{j}]$ N (D) $(0.5\hat{i} + 1.5\hat{j})$ N

4. 2 kgનું એક પક્ષી $(2\hat{i} - 4\hat{j})$ m/sના અચળ વેગથી તથા 3 kgનું બીજું પક્ષી $(2\hat{i} + 6\hat{j})$ m/sથી ઊડતાં હોય, તો બન્ને પક્ષી વડે બનતા તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનો વેગ .... m/s હોય.

(A) $2\hat{i} + 5.2\hat{j}$ (B) $2\hat{i} + 2\hat{j}$ (C) $2\hat{i} - 2\hat{j}$ (D) $10\hat{i} + 10\hat{j}$

5. 0.100 g નું એક પીછું $(-0.05\hat{j})$ m/s વેગથી નીચે પડે છે. નીચેથી તેના પર ફૂંક મારતાં તેનો વેગ $(0.20\hat{i} + 0.15\hat{j})$ m/s થાય છે, તો તેના વેગમાનમાં થતો ફેરફાર .... kg m/s હશે.

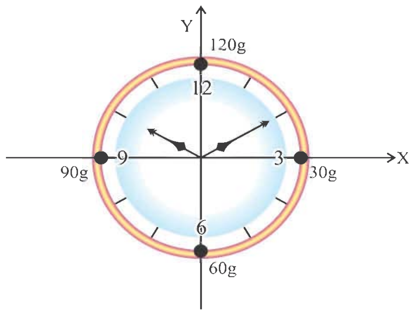
(A) $2 \times 10^{-2}\hat{i} + 2 \times 10^{-2}\hat{j}$ (B) $2 \times 10^{-5}\hat{i} + 2 \times 10^{-5}\hat{j}$

(C) $2 \times 10^{-2}\hat{i} + 1 \times 10^{-2}\hat{j}$ (D) $2 \times 10^{-2}\hat{i} - 2 \times 10^{-2}\hat{j}$

6. એક ઝાડની ડાળી પર બેઠેલ વાંદરો બરાબર તેની નીચે બેઠેલા મગર પર જાંબુનો 10 gનો ઠળિયો પડતો મૂકે છે. ઠળિયો 2 s સમયમાં મગરના મોઢામાં પડીને સ્થિર થઈ જતો હોય, તો મગરને (ઠળિયા ઉપરાંત) મળતું વેગમાન .... kg m/s હોય. ($g = 9.8$ m s^{-2})

(A) 0.196 (B) −0.196 (C) 19.6 (D) −19.6

7. આકૃતિ 1.14માં દર્શાવેલ નહીંવત્ વજન ધરાવતા ઘડિયાળના 10 cm ત્રિજ્યાના ડાયલ પર 3, 6, 9 અને 12 કલાકની નિશાનીઓ પર અનુક્રમે 30, 60, 90 અને 120 gના પથ્થર મૂકવામાં આવે, તો બનતા આ તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રના યામ શોધો.



આકૃતિ 1.14

(A) (2, −2) cm (B) (0, 0) cm (C) (−2, 2) cm (D) (−4, 4) cm

8. ક્રિકેટમેચમાં બૉલર 0.5 kgના દડાને 20 m/sની ઝડપથી ફેંકે છે. બૅટ્સમેન બૅટ ઉગામે ત્યારે દડો બૅટની સપાટીને લંબરૂપે અથડાઈને વિરુદ્ધ દિશામાં 30 m/sની ઝડપથી પાછો ફરે છે. જો દડાનો બેટ સાથેનો સંપર્ક સમય 0.1 s હોય, તો બૅટ પર લાગતું બળ .... N હોય.

(A) 250 (B) 25 (C) 50 (D) 125

9. 10 માળના મકાનની અગાશીમાં ઊભેલો એક છોકરો જુદા-જુદા વજનના ચાર પથ્થર જમીન તરફ પડતા મૂકે છે. જો કોઈ સમયે 500 gનો પથ્થર 8મા માળે, 400 gનો પથ્થર 6ઠા માળે, 1 kgનો પથ્થર 3જા માળે અને 600 gનો પથ્થર 1લા માળે પહોંચ્યા હોય, તો તે સમયે ચાર પથ્થરો વડે બનતા તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર .... માળે હશે.

(A) 7મા (B) 5મા (C) 3જા (D) 4થા

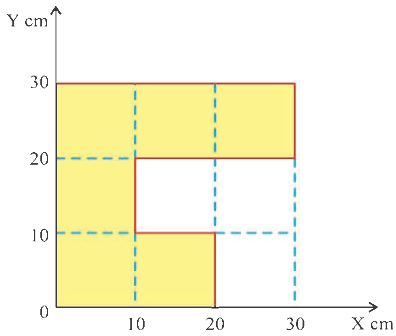
10. આકૃતિ 1.15માં દર્શાવેલ નિયમિત ઘનતાવાળા પાતળા પતરાનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર .... cm છે.

(A) (10.00, 14.28)

(B) (11.67, 16.67)

(C) (8.75, 12.50)

(D) (7.78, 11.11)



આકૃતિ 1.15

જવાબો

1. (B) 2. (D) 3. (A) 4. (B) 5. (B) 6. (A)
7. (C) 8. (A) 9. (D) 10. (B)

નીચે આપેલ પ્રશ્નોના જવાબ ટૂંકમાં આપો :

1. ન્યૂટનના ગતિના નિયમોનું પરસ્પર અવલંબન એટલે શું ?
2. દૃઢ વસ્તુની વ્યાખ્યા આપો.
3. જે દૃઢ પદાર્થોના દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર, દૃઢ પદાર્થના દ્રવ્યની બહાર હોય તેવાં બે ઉદાહરણો આપો.
4. નિયમિત ઘનતાવાળા પાતળા સળિયાનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર ક્યાં આવેલું હોય છે ?
5. ઘન પદાર્થનો દળ-ખંડ dm એટલે શું ?
6. સ્થિર પડેલા રાસાયણિક બૉમ્બનો વિસ્ફોટ થાય ત્યારે તેના ટુકડાઓને ગતિ-ઊર્જા ક્યાંથી પ્રાપ્ત થાય છે ?

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. ત્રિપરિમાણમાં n-કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનું સૂત્ર લખો અને તેના વેગનું સૂત્ર મેળવો.
2. રેખીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ લખો અને સમજાવો.
3. રાસાયણિક બૉમ્બનું ઉદાહરણ કાર્ય-ઊર્જા પ્રમેયના વ્યાપક સ્વરૂપ તરફ કેવી રીતે દોરી જાય છે, તે સમજાવો.
4. n-કણોના તંત્ર માટે દ્રવ્યમાનકેન્દ્રના વેગનું સૂત્ર લખો અને ન્યૂટનનો ગતિનો બીજો નિયમ મેળવો.
5. ઘન પદાર્થનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર નક્કી કરવાની સૈદ્ધાંતિક રીત ઉદાહરણ આપીને સમજાવો.
6. નિયમિત ઘનતાવાળા પાતળા સળિયાના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનું સ્થાન તેના કોઈ એક છેડાની સાપેક્ષે મેળવો.

નીચેના દાખલા ગણો :

1. કાર્બન મોનૉક્સાઇડ (CO) વાયુના અણુ માટે જો કાર્બન પરમાણુ તથા ઑક્સિજન પરમાણુનાં કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર 1.130×10^{-10} m હોય, તો કાર્બન પરમાણુની સાપેક્ષે CO અણુના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રનું સ્થાન શોધો.
(કાર્બનનો પરમાણુભાર = 12 g mol^{-1}, તથા ઑક્સિજનનો પરમાણુભાર = 16 g mol^{-1})

[જવાબ : 0.64 Å]

2. 1 kg, 2 kg અને 3 kg દળવાળા ત્રણ ''કણો''ના વેગ-સદિશો અનુક્રમે (1, 2, 3), (3, 4, 5) અને (6, 7, 8) છે. વેગ, સદિશના ઘટકો m s^{-1} માં છે. આ તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રના વેગ-સદિશ શોધો. [જવાબ : $\frac{1}{6}$(25, 31, 37) m s^{-1}]

3. 1000 kgની એક કાર ટ્રાફિક સિગ્નલ પાસે ઊભી છે. લીલી લાઇટ થતાં કાર 4.0 m s^{-2}ના પ્રવેગથી ગતિ શરૂ કરે છે. તે જ વખતે 2000 kgની એક ટ્રક, 8.0 m s^{-1}ની અચળ ઝડપથી કારને ઓવરટેઇક કરીને આગળ નીકળે છે.

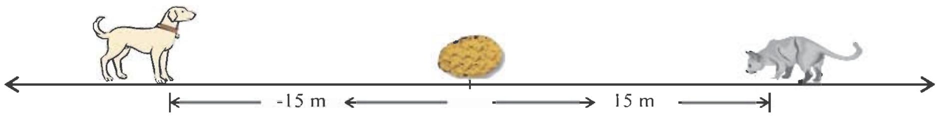
(*a*) 3 sec પછી કાર-ટ્રક વડે બનતા તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર ટ્રાફિક સિગ્નલથી કેટલે દૂર હશે ?

(*b*) તે વખતે કાર-ટ્રક વડે બનતા તંત્રના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રની ઝડપ કેટલી હશે ?

[જવાબ : (*a*) 22.0 m, (*b*) 9.33 m s^{-1}]

4. 40 kg દળ ધરાવતો એક કૂતરો અને 20 kg દળવાળી એક બિલાડી, રોટલીની બન્ને બાજુ 15–15 m મીટરના અંતરે ઊભાં છે (જુઓ આકૃતિ 1.16). બન્ને રોટલી ખાવા માટે એક સાથે એવી રીતે દોડે છે કે જેથી કોઈ પણ સમયે કૂતરા અને બિલાડી વડે બનતા તંત્રનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર સ્થિર જ રહે. કોષ્ટકમાં જુદા-જુદા સમયે રોટલી પરના ઊગમબિંદુની સાપેક્ષે કૂતરાનું સ્થાન દર્શાવ્યું છે. દરેક સમયે બિલાડીનું સ્થાન તથા બંનેના વેગ, વેગમાન અને તેમના વેગમાનનો સરવાળો શોધો.

કોણ રોટલી પાસે પહેલું પહોંચશે ? કૂતરો કે બિલાડી ? આ કિસ્સામાં વેગમાનનું સંરક્ષણ થાય છે ? કેમ ?



આકૃતિ 1.16

સમય t sec	રોટલીથી અંતર કૂતરો $x_1(m)$	બિલાડી $x_2(m)$	કૂતરા અને બિલાડીનું દ્રવ્યમાનકેન્દ્રથી અંતર $x_{cm}(m)$	વેગ ms^{-1} કૂતરો v_1	બિલાડી v_2	વેગ માન $kgms^{-1}$ કૂતરો P_1	બિલાડી P_2	કુલ વેગમાન $P = P_1+P_2$ kg ms^{-1}
0	–15.0	15	.....(અચળ)					
2	–12.5	.....	,,					
4	–10.0	.....	,,					
6	–7.5	.....	,,					

જવાબ :

t sec	કૂતરો $x_1(m)$	બિલાડી $x_2(m)$	દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર $x_{cm}(m)$	વેગ ms^{-1} કૂતરો v_1 ms^{-1}	બિલાડી v_2 ms^{-1}	વેગમાન કૂતરો P_1 kg ms^{-1}	બિલાડી P_2 kg ms^{-1}	કુલ વેગમાન Total $P = P_1+P_2$ kg ms^{-1}
0	–15.0	15.0	–5.0 *m* (અચળ)	0	0	0	0	0
2	–12.5	10.0	–5.0 *m*	1.25	–2.5	50	–50	0
4	–10.0	5.0	–5.0 *m*	1.25	–2.5	50	–50	0
6	–7.5	0	–5.0 *m*	1.25	–2.5	50	–50	0

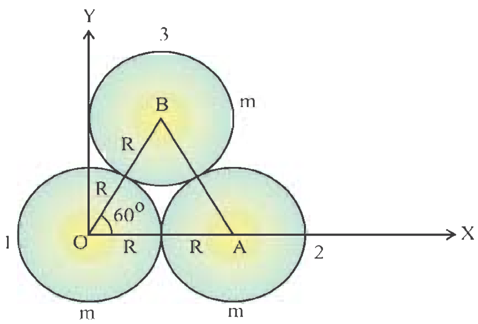
t = 6 sec સમયે, x_1 = -7.5 m, x_2 = 0 m અને રોટલી ઊગમબિંદુ x = 0 પર છે, આથી બિલાડી પહેલા પહોંચશે.
કુલ વેગમાન અચળ રહે છે, આથી વેગમાનનું સંરક્ષણ થાય છે. આનું કારણ એ છે કે દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર અહીં સ્થિર રહે છે.

5. m_1 અને m_2 દળ ધરાવતા બે કણો વચ્ચેનું અંતર r છે. જો આ કણોના દ્રવ્યમાનકેન્દ્રથી અંતર અનુક્રમે r_1 અને r_2 હોય, તો દર્શાવો કે

$$r_1 = r\left[\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right] \text{ અને } r_2 = r\left[\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right].$$

6. આકૃતિ 1.17માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે R મીટર ત્રિજ્યાના 3 ગોળા પરસ્પર એકબીજાને અડકે તેમ સમક્ષિતિજ સપાટી પર ગોઠવ્યા છે. જો દરેક ગોળાનું દળ m હોય, તો ગોળા 1ના કેન્દ્રને ઊગમબિંદુ તરીકે લઈને દ્રવ્યમાન-કેન્દ્રનું સ્થાન નક્કી કરો. Z-અક્ષ પુસ્તકના પાનાને લંબરૂપે છે.

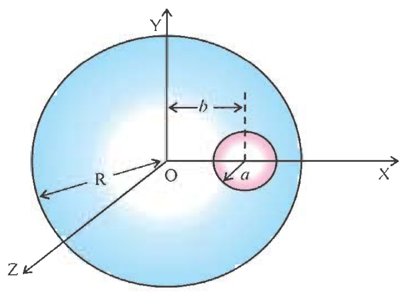
[**જવાબ :** $(R, \frac{R}{\sqrt{3}}, 0)\ m$]



આકૃતિ 1.17

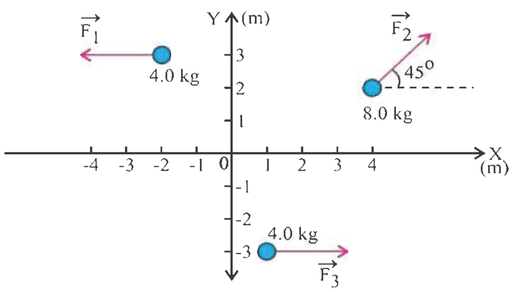
7. આકૃતિ 1.18માં દર્શાવેલ નિયમિત ઘનતા ρ ધરાવતા R ત્રિજ્યાના એક સમાંગ ગોળામાંથી a ત્રિજ્યાની ગોળી કાપી લેવામાં આવે છે, તો બાકીના ભાગનું, મૂળ ગોળાના કેન્દ્રની સાપેક્ષમાં દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર શોધો.

[**જવાબ :** $\left(\frac{-a^3 b}{(R^3 - a^3)}, 0, 0\right)$]



આકૃતિ 1.18

8. આકૃતિ 1.19માં ત્રણ સ્થિર 'કણો'નાં સ્થાન દર્શાવ્યાં છે. કણોના આ તંત્ર માટે દ્રવ્યમાનકેન્દ્રના યામ શોધો. આ કણો પર આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ બાહ્ય બળો F_1 = 6.0 N, F_2 = 12.0 N અને F_3 = 14.0 N લાગે છે, તો દ્રવ્યમાનકેન્દ્રના પ્રવેગ તથા પ્રવેગની દિશા શોધો.



આકૃતિ 1.19

[**જવાબ :** $\vec{r}_{cm}$ = (1.75, 1.00) m, $\vec{a}_{cm}$ = (1.03, 0.53) m s^{-2}, $|\vec{a}| = a$ = 1.16 m s^{-2}
X–અક્ષ સાથે θ = 27° ખૂણો બનાવતી દિશા]