પ્રકરણ 1

ગણિતીય અનુમાનનો સિદ્ધાંત

Mathematics is the queen of science and number theory is the queen of mathematics.
– Gauss

Mathematics passes not only truth but also supreme beauty !
– Bertrand Russell

1.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે તર્ક પરથી તારણ પર આવવાની એક પદ્ધતિ શીખી ગયાં. ઉદાહરણ તરીકે,

નીચે આપેલાં વિધાનો જુઓ :

(1) $1 + 2 + 3 + ... + 100 = 5050$

(2) $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(3) (2) માં $n = 100$ લઈએ તો, $1 + 2 + 3 + ... + 100 = \frac{(100)(101)}{2} = (50)(101) = 5050$

અહીં આપણે સાબિત કરવા માગીએ છીએ કે 1 થી 100નો સરવાળો 5050 થાય. આપણી પાસે વ્યાપક પરિણામ $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ છે. તેમાં આપણે $n = 100$ મૂકીને જરૂરી પરિણામ મેળવી શકીએ. અહીં આપણે વ્યાપક પરિણામનો ઉપયોગ કોઈ વિશિષ્ટ પરિણામ મેળવવા માટે કર્યો.

(1) જો ab એ 3 વડે વિભાજ્ય હોય, તો a એ 3 વડે વિભાજ્ય છે અથવા b એ 3 વડે વિભાજ્ય છે. (2) જો p અવિભાજ્ય સંખ્યા હોય અને ab એ p વડે વિભાજ્ય હોય, તો a એ p વડે વિભાજ્ય હોય અથવા b એ p વડે વિભાજ્ય હોય. (3) ધારો કે $p = 3$. (2) પ્રમાણે 3 અવિભાજ્ય સંખ્યા હોવાથી જો ab એ 3 વડે વિભાજ્ય હોય તો a એ 3 વડે વિભાજ્ય છે અથવા b એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

અહીં પણ આપણે વ્યાપક પરિણામનો ઉપયોગ કોઈ વિશિષ્ટ પરિણામ મેળવવા માટે કર્યો.

(1) અમિતાભ બચ્ચન એક સારા કલાકાર છે.

(2) જો કલાકાર પસંદગી પામે તો તેમના વર્ગમાં તેમને રાષ્ટ્રીય પુરસ્કાર પદ્મભૂષણથી સન્માનિત કરવામાં આવે છે.

(3) અમિતાભ બચ્ચન પદ્મભૂષણ પુરસ્કાર વડે સન્માનિત થયા હતા.

અહીં પણ સમાન પ્રકારની પરિસ્થિતિ થાય છે.

પરંતુ તાર્કિક તારણથી વિરુદ્ધ નીચેનાં વિધાનો જુઓ :

$4 - 1 = 3$ એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

$4^2 - 1 = 15$ એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

$4^3 - 1 = 63$ એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

અહીં આપણે ઉપર મુજબના અવલોકનોની રીત પરથી અનુમાન કરી શકીએ કે પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે, $4^n - 1$ એ 3 વડે વિભાજ્ય થાય. આમ વિશિષ્ટ પરિણામ પરથી આપણે વ્યાપક પરિણામનું અનુમાન કરી શકીએ છીએ. આ રીતે મેળવેલ અનુમાન એ પરિણામની સાબિતી નથી. આ રીતે કરાયેલા અનુમાનની સાબિતી આપવી પડે. આવાં બધાં અનુમાનો સાચાં ન પણ હોઈ શકે. ઉદાહરણ તરીકે, $n^2 - n + 41$ એ $n = 1, 2, 3,...39$ સુધીની nની કિંમતો માટે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ દર્શાવે છે.

પરંતુ $n = 41$ માટે $41^2 - 41 + 41 = 41^2$ એ સ્વાભાવિક રીતે અવિભાજ્ય સંખ્યા નથી. આમ, આપણે $n^2 - n + 41$ ની $n = 1, 2, 3,...39$ સુધીની કિંમતોનું અવલોકન કરીને તે પ્રત્યેક $n \in N$ માટે અવિભાજ્ય સંખ્યા છે તેવું અનુમાન ન કરી શકીએ.

ચોક્કસ પ્રકારનાં અવલોકનો પરથી અનુમાન કરી પરિણામની તાર્કિક રીતે ચકાસણી કરી અનુમાનને સાબિત કરવું જોઈએ.

ઈતિહાસમાં **પ્લેટો**ના સમયમાં આ પ્રકારની માહિતી છે. 370 B.C. માં પ્લેટોનું લખાણ ***'parmenides'* (ચર્ચા અથવા સંવાદો)**માં એવા પ્રકારનાં ઉદાહરણો છે કે જેની સાબિતી અનુમાનના આધારે આપી હોય. યુક્લિડે ગણિતીય અનુમાનની મદદથી સાબિત કર્યું હતું કે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગણ અનંત ગણ છે. **ભાસ્કરાચાર્ય II** ના લખાણ ***'cyclic method'* (ચક્રીય પદ્ધતિ)**માં પણ આ પદ્ધતિના અંશ જોવા મળે છે.

સોરાઇટસે અધોદિશા અનુમાન પ્રથાનો ઉપયોગ કર્યો. તેના કહેવા મુજબ 10,00,000 રેતીના દાણાના ઢગલામાંથી જો એક દાણો ઓછો કરીએ તો ઢગલામાં કોઈ ફેર પડતો નથી, તે ઢગલો જ રહે છે. આ રીતે, આગળ વધતાં એક-એક દાણો ઘટાડીને એક જ દાણાથી અથવા એક પણ દાણા વગર રેતીનો ઢગલો બનાવી શકાય !

1000 A.D. ના અરસામાં **અલ-કરઝી (Al-Karaji)** નામના ગણિતજ્ઞે ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ સમાંતર શ્રેણી માટે **અલ-ફકરી (Al-Fakhri)**માં કર્યો અને દ્વિપદી પ્રમેય તથા **પાસ્કલ**ના ત્રિકોણના ગુણધર્મો સાબિત કર્યા.

સૌપ્રથમ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતને સ્પષ્ટપણે સૂત્રના રૂપમાં પાસ્કલ નામના ગણિતજ્ઞે ***'Traité-du-triangle arithmetique'*** (1665)માં રજૂ કર્યો. ફ્રેન્ચ ગણિતજ્ઞ **ફર્મા (Fermat)** અને સ્વીસ ગણિતજ્ઞ **જેકોબ બર્નુલી (Jacob Bernoulli)** એ આ સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કર્યો હતો. 19મી સદીમાં **જ્યોર્જ બૂલ (George Boole), સન્ડર્સ પીઅર્સ (Sanders Peirce), પીનો (Peano)** અને **ડેડકિન્ડ (Dedekind)** નામના ગણિતજ્ઞોએ અર્વાચીન રીતે આ સિદ્ધાંતનું પદ્ધતિસરનું નિરૂપણ કર્યું.

1.2 અનુમાનનો સિદ્ધાંત

આપણે નીચેના **'ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત'** તરીકે ઓળખાતા સિદ્ધાંતથી શરૂઆત કરીએ.

ગણિતીય અનુમાનનો સિદ્ધાંત : જો પ્રાકૃતિક ચલનું કોઈ વિધાન $P(n)$ એ $n = 1$ માટે સત્ય હોય તથા જો $k \in N$ માટે $P(k)$ની સત્યાર્થતા પરથી $P(k + 1)$ની સત્યાર્થતા ફલિત થતી હોય તો પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $P(n)$ સત્ય છે.

અહીં $P(n)$ એ પ્રાકૃતિક ચલનું વિધાન છે. આપણે તેને બે સોપાનોમાં સિદ્ધ કરીશું :

(1) આધાર : આપણે તેને $n = 1$ માટે સાબિત કરીશું. (0 અથવા ન્યૂનતમ કિંમત માટે)

(2) આનુસંગિક સોપાન : આપેલ વિધાન કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા $n = k$ માટે સાચું છે તે સ્વીકારી તે વિધાનને $n = k + 1$ માટે સાબિત કરીશું.

તો, $P(n)$ પ્રત્યેક $n \in N$ માટે સત્ય છે.

ડોમિનો અસર : આપણે અહીં સોગટાંવાળી એક રમતમાં વપરાતા ડોમિનોની લાંબી હાર બતાવી છે, કે જેથી

(1) પ્રથમ ડોમિનો પડી જશે.

(2) જો કોઈ ડોમિનો પડી જાય તો તેના પછીનો ડોમિનો પડી જશે.

આ પરથી એવું સાબિત કરી શકાય કે બધા જ ડોમિનો પડી જશે.

વિધાનોની અનંત શ્રેણીનું પ્રથમ વિધાન સાચું છે અને જો તેમાંનું કોઈ પણ સત્ય હોય તો તે પછીનું પણ સત્ય હોય તો વિધાનોની આ શ્રેણી દરેક $n \in N$ માટે સત્ય બને.

તાર્કિક સંકેતમાં, $(\forall P)\ [P(1) \wedge (\forall k \in N)\ (P(k) \Rightarrow P(k+1))] \Rightarrow (\forall n \in N)[P(n)]$

આને આપણે ક્રમના સુવ્યવસ્થાના સિદ્ધાંતની મદદથી પણ સાબિત કરી શકીએ. પ્રાકૃતિક સંખ્યા ગણના કોઈ પણ અરિક્ત ઉપગણને ન્યૂનતમ ઘટક હોય. એ **ક્રમનો સુવ્યવસ્થિતતાનો (Well-ordering principle)** સિદ્ધાંત છે.

સાબિતી : ધારો કે S જેના માટે $P(n)$ સત્ય નથી તેવી પ્રાકૃતિક સંખ્યાગણનો ઉપગણ છે. $P(1)$ સત્ય હોવાથી $1 \notin S$. જો S ખાલી ગણ ન હોય તો તેમાં ન્યૂનતમ ઘટક t મળે કે જેથી $t \neq 1$ હોય. ધારો કે $t = n + 1$. t એ S નો ન્યૂનતમ ઘટક હોવાથી $P(t)$ સત્ય નથી તથા $P(n)$ સત્ય છે. વળી, $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$. આમ, $P(n + 1) = P(t)$ સત્ય બને, જે વિસંગત છે. આમ, $S = \emptyset$.

$\therefore\ \forall n \in N$, $P(n)$ સત્ય બને.

ક્યારેક સિદ્ધાંતનો ખોટો ઉપયોગ કરીને વિરોધાભાસ પેદા કરી શકાય છે.

પોલ્યા (Polya)ની એક જાણીતી સાબિતી છે કે કોઈ પણ ઘોડો જુદા રંગનો નથી એટલે કે બધા ઘોડા એક રંગના છે.

આધાર : જો એક જ ઘોડો હોય, તો એક જ રંગ હોય. આમ, $P(1)$ સત્ય બને.

અનુમાનિક સોપાન : ધારો કે n ઘોડાઓના ગણમાં દરેક ઘોડાનો રંગ સમાન છે. હવે $n + 1$ ઘોડાઓના ગણમાં દરેક ઘોડાને $1, 2, 3, \ldots n + 1$ ક્રમ આપો. ઉપગણો $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ અને $\{2, 3, 4, \ldots n + 1\}$ એ બંને n ઘોડાઓના ગણ અરિક્ત છેદગણવાળા છે. માટે તે દરેકનો રંગ સમાન હોય. બંને ગણોના ઘોડાઓનો રંગ સમાન હોવાથી $n + 1$ ઘોડાઓનો રંગ સરખો થાય. આ દલીલ 1 ઘોડા માટે સત્ય છે જ. $n \geq 3$ ઘોડાઓ માટે સાચી છે. પરંતુ 2 ઘોડાઓનો ગણ $\{1\}$ અને $\{2\}$ એ અલગગણ હોવાથી ઉપરની દલીલ સાચી ન ઠરે.

1.3 ઉદાહરણો

હવે આપણે ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કેટલાંક ઉદાહરણોમાં કરીએ :

ઉદાહરણ 1 : સાબિત કરો : $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in N$

ઉકેલ : ધારો કે, $P(n) : 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in N$

$n = 1$ માટે ડા.બા. $= 1$ અને જ.બા. $= \frac{1 \times 2}{2} = 1$. આમ, $P(1)$ સત્ય છે.

ધારો કે $P(k)$ સત્ય છે. એટલે કે, $P(n)$ એ $n = k$, $k \in N$ માટે સત્ય છે.

$$\therefore \quad 1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2} \qquad \text{(i)}$$

$n = k + 1$ લેતાં,

$1 + 2 + 3 + \ldots + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ સાબિત કરવું પડે.

હવે, $1 + 2 + 3 + \ldots + (k + 1) = (1 + 2 + 3 + \ldots + k) + (k + 1)$

$= \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1)$ ((i) પરથી)

$= (k + 1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

આમ, P(k + 1) સત્ય છે.

∴ P(1) સત્ય છે અને P(k) સત્ય છે ⇒ P(k + 1) સત્ય છે.

∴ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પ્રત્યેક $n \in N$ માટે P(n) સત્ય છે.

નોંધ : ઉપરના ઉદાહરણનું ઐતિહાસિક મહત્ત્વ છે.

ઉપરના સૂત્ર મુજબ સ્પષ્ટ છે કે, $1 + 2 + 3 + ... + 100 = 5050$. જ્યારે આ સૂત્ર જાણીતું ન હતું ત્યારે નાની ઉંમરે **ગોસે (Gauss)** નીચે મુજબની ગણતરી કરીને તેના શિક્ષક **બટ્નર (Buttner)** અને સહશિક્ષક **બાર્ટેલ્સ (Bartels)**ને અચંબામાં મૂકી દીધા હતા.

ધારો કે $S = 1 + 2 + 3 + ... + 100$ **(i)**

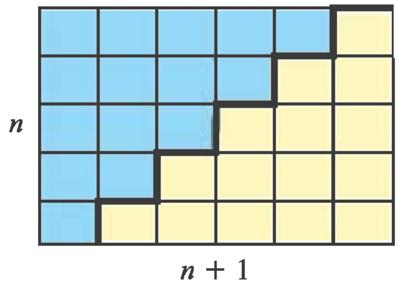
∴ $S = 100 + 99 + 98 + ... + 1$ **(ii)**

∴ $2S = (101) + (101) + ...$ 100 વખત **((i) + (ii) કરતાં)**

∴ $S = \frac{101 \times 100}{2} = 5050$. આ પરિણામ ખૂબ જ ઓછા સમયમાં તેણે મેળવ્યું હતું.

ચાલો આપણે ભૌમિતિક સાબિતી જોઈએ.

$n \times (n + 1)$ બાજુવાળો એક લંબચોરસ લો. આકૃતિમાં બતાવ્યા મુજબ તેને એકમ લંબાઈના $n(n + 1)$ નાના લંબચોરસોમાં વિભાજિત કરો. ઘાટી નીસરણીની નીચેના ભાગનું ક્ષેત્રફળ $1 + 2 + 3 + ... + n$ થાય.



સંમિતતાથી જોઈ શકાય છે કે લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ

$$2(1 + 2 + 3 + ... + n) = n(n + 1)$$

∴ $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

ઉદાહરણ 2 : સાબિત કરો : $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in N$

ઉકેલ : ધારો કે, P(n) : $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in N$

$n = 1$ લેતાં, ડા.બા. $= 1^2 = 1$ અને જ.બા. $= \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$.

∴ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k), $k \in N$ માટે સત્ય છે.

∴ $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

ધારો કે $n = k + 1$.

∴ ડા.બા. $= 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$

$$= (k + 1)\left[\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1)\right]$$

$$= (k + 1)\left(\frac{2k^2 + k + 6k + 6}{6}\right)$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6} = \text{જ.બા.}$$

$\therefore$ P$(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે. $\Rightarrow$ P$(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 3 : સાબિત કરો : $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $n \in$ N

ઉકેલ : ધારો કે, P(n) : $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $n \in$ N

$n = 1$ માટે ડા.બા. $= 1^3 = 1$ અને જ.બા. $= \frac{1^2 \times 2^2}{4} = 1$.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

$\therefore$ $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$

ધારો કે $n = k + 1$.

ડા.બા. $= 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 + (k + 1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k + 1)^3$

$$= \frac{(k+1)^2}{4}[k^2 + 4(k + 1)]$$

$$= \frac{(k+1)^2}{4}(k^2 + 4k + 4)$$

$$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2(k+1+1)^2}{4} = \text{જ.બા.}$$

$\therefore$ P$(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે. $\Rightarrow$ P$(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 4 : સાબિત કરો : $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$, $n \in$ N

ઉકેલ : ધારો કે, P(n) : $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$, $n \in$ N

$n = 1$ માટે ડા.બા. $= 1$ અને જ.બા. $= 1^2 = 1$.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

$\therefore$ $1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$

ધારો કે, $n = k + 1$.

ડા.બા. $= 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1)$

$= k^2 + 2k + 1$

$= (k + 1)^2 =$ જ.બા.

$\therefore$ P$(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે. $\Rightarrow$ P$(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 5 : સાબિત કરો : $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, $n \in N$

ઉકેલ : ધારો કે, $P(n)$: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, $n \in N$

$n = 1$ લેતાં, ડા.બા. $= \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$ અને જ.બા. $= \frac{1}{2}$

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે, $P(k)$ સત્ય છે.

$\therefore \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$

ધારો કે, $n = k + 1$.

ડા.બા. $= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$

$= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$

$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$

$= \frac{k+1}{k+2}$ = જ.બા.

$\therefore$ $P(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ $P(k)$ સત્ય છે. $\Rightarrow$ $P(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $P(n)$ સત્ય છે.

ઉદાહરણ 6 : સાબિત કરો : $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$, $n \in N$

ઉકેલ : ધારો કે, $P(n)$: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$, $n \in N$

$n = 1$ લેતાં, ડા.બા. $= 1 \cdot 1! = 1$, જ.બા. $= 2! - 1 = 1$

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે, $P(k)$ સત્ય છે.

$\therefore \quad 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + k \cdot k! = (k + 1)! - 1$

ધારો કે, $n = k + 1$.

ડા.બા. $= 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + k \cdot k! + (k + 1)(k + 1)!$

$= (k + 1)! - 1 + (k + 1)(k + 1)!$

$= (k + 1)! [1 + (k + 1)] - 1$

$= (k + 1)! (k + 2) - 1$

$= (k + 2)! - 1$ = જ.બા.

$\therefore$ P$(k+1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે. $\Rightarrow$ P$(k+1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

નોંધ : સીધી રીતે, $n \cdot n! = (n+1-1)\, n! = (n+1)\, n! - n!$

$= (n+1)! - n!$

હવે, $n = 1, 2, 3, ...$ વગેરે લઈ સરવાળો કરતાં,

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n! = (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + ... + ((n+1)! - n!)$$

$$= (n+1)! - 1$$

ઉદાહરણ 7 : સાબિત કરો : $\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)...\left(1+\frac{2n+1}{n^2}\right) = (n+1)^2,\ n \in \mathrm{N}$

ઉકેલ : ધારો કે, P(n) : $\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)...\left(1+\frac{2n+1}{n^2}\right) = (n+1)^2,\ n \in \mathrm{N}$

$n = 1$ લેતાં, ડા.બા. $= 1 + \frac{3}{1} = 4$ અને જ.બા. $= (1+1)^2 = 2^2 = 4$

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે, P(k) સત્ય છે.

$$\therefore \quad \left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)...\left(1+\frac{2k+1}{k^2}\right) = (k+1)^2$$

$n = k+1$ લેતાં,

$$\text{ડા.બા.} = \left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)...\left(1+\frac{2k+1}{k^2}\right)\left(1+\frac{2k+3}{(k+1)^2}\right)$$

$$= (k+1)^2 \times \left(\frac{k^2+2k+1+2k+3}{(k+1)^2}\right)$$

$$= k^2 + 4k + 4$$

$$= (k+2)^2 = \text{જ.બા.}$$

$\therefore$ P$(k+1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે. $\Rightarrow$ P$(k+1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

નોંધ : સીધો ગુણાકાર કરતાં, $\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)...\left(1+\frac{2n+1}{n^2}\right) = \frac{4}{1} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{16}{9} ... \frac{(n+1)^2}{n^2} = (n+1)^2$

ઉદાહરણ 8 : સાબિત કરો : $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + ... + n \cdot 2^n = (n-1)2^{n+1} + 2,\ n \in \mathrm{N}$

(આ પ્રકારની શ્રેણીને **સમાંતર સમગુણોત્તર** શ્રેણી કહે છે.)

ઉકેલ : ધારો કે, P(n) : $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + ... + n \cdot 2^n = (n-1)2^{n+1} + 2,\ n \in \mathrm{N}$

$n = 1$ લેતાં, ડા.બા. $= 2$ અને જ.બા. $= 0 + 2 = 2$

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે, P(k) સત્ય છે.

આમ, $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + ... + k \cdot 2^k = (k - 1)2^{k+1} + 2$

હવે, $n = k + 1$ લેતાં,

ડા.બા. $= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + ... + k \cdot 2^k + (k + 1)2^{k+1}$

$= (k - 1)2^{k+1} + 2 + (k + 1)2^{k+1}$

$= (k - 1 + k + 1)2^{k+1} + 2$

$= 2k \cdot 2^{k+1} + 2$

$= k \cdot 2^{k+2} + 2 =$ જ.બા.

$\therefore$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે. $\Rightarrow$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in N$ માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 9 : સાબિત કરો : $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ **$(r \neq 1), n \in N$**

ઉકેલ : ધારો કે, P(n) : $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ **$(r \neq 1), n \in N$**

$n = 1$ લેતાં, ડા.બા. $= a$ અને જ.બા. $= \frac{a(r-1)}{r-1} = a$

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

$\therefore$ $a + ar + ar^2 + ... + ar^{k-1} = \frac{a(r^k - 1)}{r - 1}$

ધારો કે $n = k + 1$.

$\therefore$ ડા.બા. $= a + ar + ar^2 + ... + ar^{k-1} + ar^k$

$$= \frac{a(r^k - 1)}{r - 1} + ar^k$$

$$= a\left(\frac{r^k - 1}{r - 1} + r^k\right)$$

$$= a\frac{r^k - 1 + r^k(r - 1)}{r - 1}$$

$$= \frac{a(r^k - 1 + r^{k+1} - r^k)}{r - 1}$$

$$= \frac{a(r^{k+1} - 1)}{r - 1} = \text{જ.બા.}$$

$\therefore$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે. $\Rightarrow$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in N$ માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 10 : સાબિત કરો કે $3^{2n+2} - 8n - 9$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે. $n \in N$

ઉકેલ : ધારો કે P(n) : $3^{2n+2} - 8n - 9$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે. $n \in N$

$n = 1$ લેતાં, $3^4 - 8 - 9 = 81 - 8 - 9 = 64$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે. આથી $3^{2k+2} - 8k - 9$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.

ધારો કે $n = k + 1$.

હવે, $3^{2k+4} - 8(k+1) - 9$ $\quad (2(k+1) + 2 = 2k + 4)$

$= 3^{2k+2} \cdot 3^2 - 8k - 8 - 9$

$= 3^{2k+2}(8+1) - 8k - 8 - 9$ $\quad (3^2 = 9 = 8 + 1)$

$= 8 \cdot 3^{2k+2} + 3^{2k+2} - 8k - 8 - 9$

$= 3^{2k+2} - 8k - 9 + 8(3^{2k+2} - 1)$

હવે, $3^{2k+2} - 8k - 9$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે. (P(k) પરથી)

વળી, $8(3^{2k+2} - 1)$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ $3^{2k+2} - 8k - 9 + 8(3^{2k+2} - 1)$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ $3^{2(k+1)+2} - 8(k+1) - 9$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ P($k+1$) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે. $\Rightarrow$ P($k+1$) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પ્રત્યેક $n \in N$ માટે P(n) સત્ય છે.

નોંધ : સ્પષ્ટ છે કે,

$3^{2n+2} - 8n - 9 = (3^2)^{n+1} - 1 - 8n - 8$

$= (3^2 - 1)((3^2)^n + (3^2)^{n-1} + ... + 1) - 8n - 8$ (ઉદાહરણ 9)

$= 8(3^{2n} + 3^{2n-2} + ... + 1) - 8n - 8$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.

બીજી રીત :

અહીં P(n) : $3^{2n+2} - 8n - 9$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે. $\quad n \in N$

$n = 1$ માટે, $3^{2+2} - 8(1) - 9 = 64$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે. $\quad n \in N$

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

એટલે કે, $3^{2k+2} - 8k - 9$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.

ધારો કે $3^{2k+2} - 8k - 9 = 8m$ જ્યાં $m \in N$ (i)

$n = k + 1$ લેતાં,

$3^{2(k+1)+2} - 8(k+1) - 9 = 3^{2k+2} \times 3^2 - 8k - 8 - 9$

$= (8k + 9 + 8m)9 - 8k - 8 - 9$ ((i) પરથી)

$= 72k + 81 + 72m - 8k - 8 - 9$

$= 64k + 72m + 64$

$= 8(8k + 9m + 8)$ જે 8 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ P($k+1$) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ P($k+1$) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પ્રત્યેક $n \in N$ માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 11 : સાબિત કરો : $2002^{2n+1} + 2003^{2n+1}$ એ દરેક $n \in N$ માટે 4005 થી વિભાજ્ય છે.

ઉકેલ : ધારો કે, $P(n)$: $2002^{2n+1} + 2003^{2n+1}$ એ દરેક $n \in N$ માટે 4005 થી વિભાજ્ય છે.

$n = 1$ લેતાં,

$$2002^3 + 2003^3 = (2002 + 2003)\,[(2002)^2 - (2002)(2003) + (2003)^2]$$
$$= (4005)\,[(2002)^2 - (2002)(2003) + (2003)^2]$$

$\therefore$ $(2002)^3 + (2003)^3$ એ 4005 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

$\therefore$ $2002^{2k+1} + 2003^{2k+1}$ એ 4005 વડે વિભાજ્ય છે.

ધારો કે $n = k + 1$.

હવે, $2002^{2(k+1)+1} + 2003^{2(k+1)+1}$

$$= 2002^{2k+3} - 2002^{2k+1}(2003)^2 + (2002)^{2k+1} \cdot (2003)^2 + (2003)^{2k+3}$$
$$= (2002)^{2k+1}\,[(2002)^2 - (2003)^2] + (2003)^2\,[(2002)^{2k+1} + (2003)^{2k+1}]$$
$$= -(4005)\,(2002)^{2k+1} + (2003)^2\,[(2002)^{2k+1} + (2003)^{2k+1}]$$

હવે, $(2002)^{2k+1} + (2003)^{2k+1}$ એ 4005 વડે વિભાજ્ય છે. **(P(k))**

$\therefore$ $(2002)^{2(k+1)+1} + (2003)^{2(k+1)+1}$ એ 4005 વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પ્રત્યેક $n \in N$ માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 12 : સાબિત કરો : $x^{2n} - y^{2n}$ એ $x + y$ વડે વિભાજ્ય છે. $n \in N$

ઉકેલ : ધારો કે, P(n) : $x^{2n} - y^{2n}$ એ $x + y$ વડે વિભાજ્ય છે. $n \in N$

ધારો કે, $n = 1$

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ અને તેથી $x^2 - y^2$ એ $x + y$ વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

$\therefore$ $x^{2k} - y^{2k}$ એ $x + y$ વડે વિભાજ્ય છે.

ધારો કે $n = k + 1$.

$$x^{2(k+1)} - y^{2(k+1)} = x^{2k+2} - x^{2k}y^2 + x^{2k}y^2 - y^{2k+2}$$
$$= x^{2k}(x^2 - y^2) + y^2(x^{2k} - y^{2k})$$
$$= x^{2k}(x - y)(x + y) + y^2(x^{2k} - y^{2k})$$

હવે, $x^{2k}(x - y)(x + y)$ એ $x + y$ વડે વિભાજ્ય છે.

$x^{2k} - y^{2k}$ એ $x + y$ વડે વિભાજ્ય છે. **(P(k))**

$\therefore$ $x^{2(k+1)} - y^{2(k+1)}$ એ $x + y$ વડે વિભાજ્ય છે.

$\therefore$ P($k + 1$) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ P($k + 1$) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 13 : સાબિત કરો : $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 > \frac{n^3}{3}$, $n \in$ N

ઉકેલ : ધારો કે, P(n) : $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 > \frac{n^3}{3}$, $n \in$ N

ધારો કે, $n = 1$. ડા.બા. $= 1^2 = 1$, જ.બા. $= \frac{1}{3}$ અને $1 > \frac{1}{3}$.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

$\therefore$ $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 > \frac{k^3}{3}$

ધારો કે $n = k + 1$.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k + 1)^2 > \frac{k^3}{3} + (k + 1)^2 \quad \text{(i)}$$

હવે, $\frac{k^3}{3} + (k + 1)^2 = \frac{1}{3}(k^3 + 3k^2 + 6k + 3)$

$= \frac{1}{3}(k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3k + 2)$

$> \frac{1}{3}(k^3 + 3k^2 + 3k + 1)$ કારણ કે $\frac{1}{3}(3k + 2) \geq \frac{5}{3} > 0$

$\therefore$ $\frac{k^3}{3} + (k + 1)^2 > \frac{1}{3}(k + 1)^3$ **(ii)**

$\therefore$ $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (k + 1)^2 > \frac{1}{3}(k + 1)^3$ **((i) અને (ii) પરથી)**

$\therefore$ P($k + 1$) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ P($k + 1$) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

નોંધ : $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} > \frac{2n^3}{6} = \frac{n^3}{3}$, $n \in$ N

ઉદાહરણ 14 : સાબિત કરો : $1 + 2 + 3 + ... + n < \frac{1}{8}(2n + 1)^2$, $n \in$ N

ઉકેલ : ધારો કે, P(n) : $1 + 2 + 3 + ... + n < \frac{1}{8}(2n + 1)^2$, $n \in$ N

$n = 1$ લેતાં, ડા.બા. $= 1$, જ.બા. $= \frac{1}{8}(3)^2 = \frac{9}{8}$ અને $1 < \frac{9}{8}$

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

$\therefore$ $1 + 2 + 3 + ... + k < \frac{1}{8}(2k + 1)^2$

બંને બાજુ ($k + 1$) ઉમેરતાં,

$$1 + 2 + 3 + ... + k + (k + 1) < \frac{1}{8}(2k + 1)^2 + (k + 1) \quad \text{(i)}$$

હવે, $\frac{1}{8}(2k + 1)^2 + (k + 1) = \frac{1}{8}(4k^2 + 4k + 1 + 8k + 8)$

$= \frac{1}{8}(4k^2 + 12k + 9)$

$\frac{1}{8}(2k + 1)^2 + (k + 1) = \frac{1}{8}(2k + 3)^2$ **(ii)**

$\therefore$ $1 + 2 + 3 + ... + (k + 1) < \frac{1}{8}(2k + 3)^2$ **((i) અને (ii) પરથી)**

$\therefore$ P$(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ P$(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

નોંધ : $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{4n^2 + 4n}{8} < \frac{4n^2 + 4n + 1}{8} = \frac{1}{8}(2n + 1)^2$

ઉદાહરણ 15 : સાબિત કરો : $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, $n \in$ N **$(x > -1)$**

ઉકેલ : ધારો કે, P(n) : $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, $n \in$ N

$n = 1$ લેતાં, $(1 + x)^1 = 1 + x \geq 1 + 1 \cdot x$

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

$\therefore$ $(1 + x)^k \geq 1 + kx$ **$k \in$ N**

$n = k + 1$ લેતાં,

હવે, $(1 + x)^{k + 1} = (1 + x)^k (1 + x)$

$\geq (1 + kx)(1 + x)$ **(P(k) અને $x > -1$ પરથી)**

$\therefore$ $(1 + x)^{k + 1} \geq 1 + kx + x + kx^2 \geq 1 + kx + x$ કારણ કે $k \in$ N, $x^2 \geq 0$

$\therefore$ $(1 + x)^{k + 1} \geq 1 + (k + 1)x$

$\therefore$ P$(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ P$(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 16 : સાબિત કરો : $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$, $n \in$ N

ઉકેલ : ધારો કે, P(n) : $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$, $n \in$ N

$n = 1$ લેતાં, ડા.બા. = 1, જ.બા. = 2 − 1 = 1

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

$\therefore$ $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{k}$

બંને બાજુ $\frac{1}{(k+1)^2}$ ઉમેરતાં,

$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}$ **(i)**

હવે, $2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} = 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1}$

$= 2 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{-k-1+k}{k(k+1)}$

$= 2 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k(k+1)}$

$= 2 - \frac{1}{k+1} + \frac{k-k-1}{k(k+1)^2}$

$= 2 - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k(k+1)^2}$

$\therefore \quad 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$ $\quad \left(\frac{1}{k(k+1)^2} > 0\right)$ **(ii)**

$\therefore \quad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{(k+1)}$ **(i) અને (ii) પરથી**

$\therefore$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

નોંધ : n ગમે તેટલો મોટો હોય તો પણ સરવાળો $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ સિમિત થાય અને 2 થી ઓછો થાય.

ઉદાહરણ 17 : સાબિત કરો : $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n; \quad n \in N$

ઉકેલ : ધારો કે, P(n) : $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n; \quad n \in N$

$n = 1$ લેતાં, ડા.બા. $= \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 2$, જ.બા. $= 2^1 = 2$

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

$\therefore \quad \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \dots + \binom{k}{k} = 2^k$

ધારો કે $n = k + 1$.

ડા.બા. $= \binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \dots + \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1}$

$= \binom{k}{0} + \left(\binom{k}{0} + \binom{k}{1}\right) + \left(\binom{k}{1} + \binom{k}{2}\right) + \dots + \left(\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k}\right) + \binom{k}{k}$

$\left(\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0} = 1, \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1} = 1, \binom{k}{r} = \binom{k-1}{r-1} + \binom{k-1}{r}\right)$

$= 2\left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \dots + \binom{k}{k}\right]$

$= 2 \cdot 2^k$

$= 2^{k+1}$

$\therefore$ P$(k+1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ P$(k+1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

1.4 કેટલાક વિશિષ્ટ ચલ પ્રકારોમાં ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ

(1) ચલ પ્રકાર 1 : જો P(n) પ્રાકૃતિક ચલ nનું વિધાન હોય અને જો કોઈક ધન પૂર્ણાંક k_0 માટે P(k_0) સત્ય હોય તથા $k \geq k_0$ માટે P(k) સત્ય હોય $\Rightarrow$ P$(k+1)$ પણ સત્ય બને, તો પ્રત્યેક $n \geq k_0$, $n \in$ N માટે P(n) સત્ય બને.

ઉદાહરણ 18 : સાબિત કરો : $2^n > n^2; \quad n \geq 5, n \in$ N

ઉકેલ : ધારો કે P(n) : $2^n > n^2; \quad n \geq 5, n \in$ N

$n = 5$ લેતાં, $(k_0 = 5)$, $2^5 = 32$, $5^2 = 25$ અને $32 > 25$.

$\therefore$ P(5) સત્ય છે.

ધારો કે $k \geq 5$ તથા $k \in$ N માટે P(k) સત્ય છે.

$\therefore$ $2^k > k^2 \quad k \geq 5, k \in$ N

ધારો કે $n = k + 1$.

$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^2$ **$(2^k > k^2)$ (i)**

હવે, $2k^2 - (k+1)^2 = 2k^2 - k^2 - 2k - 1$

$= k^2 - 2k + 1 - 2$

$= (k-1)^2 - 2 > 0$ **$(k \geq 5)$**

$\therefore$ $2k^2 > (k+1)^2$ **(ii)**

$\therefore$ $2^{k+1} > (k+1)^2$ **((i) અને (ii) પરથી)**

$\therefore$ P$(k+1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ P$(k+1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in$ N, $n \geq 5$ માટે P(n) સત્ય છે.

(2) ચલ પ્રકાર 2 : ધારો કે P(n) એ પ્રાકૃતિક ચલનું વિધાન છે.

જો P(1) અને P(2) સત્ય હોય તથા જો પ્રત્યેક ધન પૂર્ણાંક k માટે

P(k) અને P$(k+1)$ સત્ય હોય $\Rightarrow$ P$(k+2)$ સત્ય હોય તો પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 19 : ધારો કે a_n એ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓની શ્રેણી છે, જ્યાં $a_1 = 5$, $a_2 = 13$ અને $n \geq 1$ માટે $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$. સાબિત કરો : $a_n = 2^n + 3^n \quad \forall n \in$ N.

ઉકેલ : ધારો કે, P(n) : જો શ્રેણી $\{a_n\}$ માટે $a_1 = 5$, $a_2 = 13$ અને $n \geq 1$ માટે $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, તો $a_n = 2^n + 3^n \quad \forall n \in$ N.

ધારો કે $n = 1$. $a_1 = 5$ અને $2^1 + 3^1 = 2 + 3 = 5$. આથી, P(1) સત્ય છે.

ધારો કે $n = 2$. $a_2 = 13$ અને $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$. આથી, P(2) સત્ય છે.

ધારો કે $a_k = 2^k + 3^k$, $a_{k+1} = 2^{k+1} + 3^{k+1} \quad (k \geq 1)$

હવે, $a_{k+2} = 5a_{k+1} - 6a_k$

$= 5(2^{k+1} + 3^{k+1}) - 6(2^k + 3^k)$

$= 5 \cdot 2^k \cdot 2 + 5 \cdot 3^k \cdot 3 - 6 \cdot 2^k - 6 \cdot 3^k$

$= 2^k (10 - 6) + 3^k (15 - 6)$

$= 2^k \cdot 2^2 + 3^k \cdot 3^2$

$= 2^{k+2} + 3^{k+2}$

$\therefore$ P$(k + 2)$ સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે અને P$(k + 1)$ સત્ય છે $\Rightarrow$ P$(k + 2)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

નોંધ : $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ ને આવૃત્ત સંબંધ કહે છે. તેનો ઉકેલ $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ છે, જ્યાં, α, β એ સમીકરણ $x^2 - 5x + 6 = 0$ નાં બીજ છે. (5 એ a_{n+1} નો સહગુણક, -6 એ a_n નો સહગુણક છે.)

$\therefore$ $\alpha = 3$, $\beta = 2$

$\therefore$ $a_n = A3^n + B2^n$

$\therefore$ $a_1 = 3A + 2B = 5$; $a_2 = 9A + 4B = 13$

આમ, A = B = 1. આથી, $a_n = 3^n + 2^n$.

$a_{n+2} = la_{n+1} - ma_n$ તો α, β એ સમીકરણ $x^2 - lx + m = 0$ નાં બીજ થાય.

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 20 : સાબિત કરો કે જો $n \geq 4$ તો ₹ nની ચુકવણી ₹ 2 અને ₹ 5 ના સિક્કાઓના ઉપયોગથી જ કરી શકાય. ($n \in$ N તથા $n \geq 4$)

ઉકેલ : P(n) : $n \geq 4$ તો ₹ nની ચુકવણી ₹ 2 અને ₹ 5 ના સિક્કાઓ દ્વારા જ થઈ શકે. $n \in$ N

ધારો કે $n = 4$. ₹ 4 ની ચુકવણી કરવા માટે આપણને ₹ 2 ના બે સિક્કાની જરૂર પડે.

$\therefore$ P(4) સત્ય છે.

ધારો કે $k \geq 4$ માટે વિધાન P(k) સત્ય છે.

હવે $n = k + 1$ લઈએ.

અહીં બે વિકલ્પો મળી શકે.

(1) જો ₹ k ની ચુકવણીમાં ₹ 5 નો એક સિક્કો હોય, તો તે પાછો લઈ ₹ 2 ના 3 સિક્કા આપો. આથી, $k + 6 - 5 = k + 1$ રૂપિયાની ચુકવણી થઈ જાય.

(2) જો ₹ kની ચુકવણીમાં ₹ 5 ના એક પણ સિક્કાનો ઉપયોગ ના થયો હોય તો $k \geq 4$ હોવાથી ₹ 2 ના ઓછામાં ઓછા બે સિક્કાનો ઉપયોગ થયો હોવો જ જોઈએ. ₹ 2 ના 2 સિક્કા પાછા લઈ ₹ 5 નો એક સિક્કો આપો. આથી $k + 5 - 4 = k + 1$ રૂપિયાની ચુકવણી થઈ જાય.

$\therefore$ P$(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ P$(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી $n \in$ N, $n \geq 4$ માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 21 : સાબિત કરો કે કોઈ પણ પૂર્ણાંક $n > 23$ ને $7x + 5y = n$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય. જ્યાં, $x \in$ N $\cup$ {0}, $y \in$ N $\cup$ {0}.

ઉકેલ : ધારો કે P(n) : $7x + 5y = n$, $x, y \in$ N $\cup$ {0}, $n \in$ Nનો ઉકેલ $n > 23$ માટે શક્ય છે.

ધારો કે $n = 24$. $x = y = 2$ લેતાં, $7 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 24$ થાય.

$\therefore$ P(24) સત્ય છે.

ધારો કે $7x + 5y = k$, $k \geq 24$, $x \in N \cup \{0\}$, $y \in N \cup \{0\}$. (i)

હવે, $5 \cdot 3 - 7 \cdot 2 = 1$ (ii)

$\therefore$ $7(x - 2) + 5(y + 3) = k + 1$ ((i) અને (ii)નો સરવાળો કરતાં)

અહીં, $y + 3 \in N \cup \{0\}$ અને જો $x \neq 0$ અથવા 1 તો $x - 2 \in N \cup \{0\}$

ધારો કે $x = 0$. $5y = k \geq 24$. આમ, $y \geq 5$.

$7 \cdot 3 - 5 \cdot 4 = 1$ અને $5y = k$ ઉમેરતાં,

$\therefore$ $7 \cdot 3 + 5(y - 4) = k + 1$

અહીં, $x = 3 \geq 0$, $y - 4 \geq 0$ ($y \geq 5$)

$\therefore$ $x = 0$ માટે $P(k + 1)$ સત્ય છે.

ધારો કે $x = 1$

આથી ફરીથી, $7 + 5y = k$

$5y = k - 7 \geq 17$. હોવાથી $y \geq 4$

$\therefore$ $7 \cdot 3 - 5 \cdot 4 = 1$ અને $7 + 5y = k$ ઉમેરતાં,

$7 \cdot 4 + 5(y - 4) = k + 1$ જ્યાં $y - 4 \geq 0$ અને $x = 4 \in N$

$\therefore$ $P(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ $P(k)$ સત્ય છે $\Rightarrow$ $P(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી $n \in N$ તથા $n \geq 24$ માટે $P(n)$ સત્ય છે.

ઉદાહરણ 22 : (Tower of Hanoi, બ્રહ્માનો ટાવર) આપણી પાસે ત્રણ ખીલાવાળું એક પાટિયું છે તથા જુદી જુદી ત્રિજ્યાઓવાળી પાતળી ગોળાકાર n તકતીઓ છે. શરૂઆતમાં એક ખીલામાં બધી તકતીઓને તેમના માપ પ્રમાણે ભરાવેલી છે, સૌથી મોટા માપની ત્રિજ્યાવાળી તકતી છેક તળિયે અને સૌથી નાના માપની ત્રિજ્યાવાળી તકતી સૌથી ઉપર રાખેલ છે. આ તકતીઓને એવી રીતે એક ખીલાથી બીજા કે ત્રીજા ખીલા પર લઈ જવાની છે, કે જેથી કોઈ પણ તબક્કામાં મોટી તકતી નાની તકતી પર ન હોય. સાબિત કરો કે પ્રથમ ખીલાથી બીજા ખીલાનો ઉપયોગ કરીને ત્રીજા ખીલા પર બધી તકતીઓને ગોઠવવાના ન્યૂનતમ પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા $2^n - 1$ હોય.

ઉકેલ : ધારો કે $P(n)$: n તકતીઓને પ્રથમ ખીલાથી ત્રીજા (કે બીજા) ખીલામાં ગોઠવવાના પ્રકારોની સંખ્યા $2^n - 1$ છે. $n \in N$

જો $n = 1$ તો સ્પષ્ટ છે કે એક જ પ્રયત્નમાં તકતીને પહેલા ખીલાથી ત્રીજા ખીલામાં ગોઠવી શકાય. વળી, $2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$. આથી $P(1)$ સત્ય છે.

ધારો કે $P(k)$ સત્ય છે એટલે કે k તકતીઓને પહેલા ખીલાથી ત્રીજા ખીલા પર માંગ્યા પ્રમાણે ગોઠવવાના પ્રયત્નોની ન્યૂનતમ સંખ્યા $2^k - 1$ છે.

હવે આપણે $k + 1$ તકતીઓનો વિચાર કરીએ. પ્રથમ આપણે તળિયાની તકતી સિવાયની ઉપરની k તકતીઓને ત્રીજા ખીલાનો ઉપયોગ કરીને બીજા ખીલામાં આપેલ શરત અનુસાર ગોઠવીએ. $P(k)$ સત્ય હોવાથી તે ક્રિયા આપણે $2^k - 1$ પ્રયત્નમાં કરી શકીએ. હવે છેલ્લી તકતીને ત્રીજા ખીલામાં ગોઠવો. આ એક પ્રયત્ન થયો. હવે, બીજા ખીલાની k તકતીઓને ત્રીજા ખીલામાં માંગ્યા પ્રમાણે ગોઠવો. તે ક્રિયા $2^k - 1$ પ્રયત્નમાં થઈ શકાશે. (કારણ કે $P(k)$ સત્ય છે.)

$\therefore$ પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા $= 2^k - 1 + 1 + 2^k - 1 = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$

$\therefore$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 23 : સાબિત કરો : $\frac{n^{11}}{11} + \frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{62n}{165} \in$ N. $\quad$ **$n \in$ N (પ્રકરણ 3નો અભ્યાસ કર્યા પછી)**

ઉકેલ : ધારો કે, P(n) : $\frac{n^{11}}{11} + \frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{62n}{165} \in$ N, $\quad n \in$ N

$n = 1$ માટે, $\frac{n^{11}}{11} + \frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{62n}{165} = \frac{1}{11} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{62}{165} = \frac{15 + 33 + 55 + 62}{165} = \frac{165}{165} = 1$

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે. $\frac{k^{11}}{11} + \frac{k^5}{5} + \frac{k^3}{3} + \frac{62k}{165} \in$ N.

ધારો કે $n = k + 1$

હવે, $\left(\frac{(k+1)^{11}}{11} + \frac{(k+1)^5}{5} + \frac{(k+1)^3}{3} + \frac{62(k+1)}{165}\right) - \left(\frac{k^{11}}{11} + \frac{k^5}{5} + \frac{k^3}{3} + \frac{62k}{165}\right)$

$= \frac{1}{11}((k + 1)^{11} - k^{11}) + \frac{1}{5}((k + 1)^5 - k^5) + \frac{1}{3}((k + 1)^3 - k^3) + \frac{62}{165}$

$= \frac{1}{11}\left(1 + \binom{11}{1}k + \binom{11}{2}k^2 + ... + \binom{11}{10}k^{10}\right) + \frac{1}{5}\left(1 + \binom{5}{1}k + \binom{5}{2}k^2 + ... + \binom{5}{4}k^4\right)$

$+ \frac{1}{3}\left(1 + \binom{3}{1}k + \binom{3}{2}k^2\right) + \frac{62}{165}$

$= \frac{1}{11}\binom{11}{1}k + \frac{1}{11}\binom{11}{2}k^2 + ... + \frac{1}{11}\binom{11}{10}k^{10} + \frac{1}{5}\binom{5}{1}k + \frac{1}{5}\binom{5}{2}k^2 + ... + \frac{1}{5}\binom{5}{4}k^4$

$+ \frac{1}{3}\binom{3}{1}k + \frac{1}{3}\binom{3}{2}k^2 + \frac{1}{11} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{62}{165}$ **(i)**

હવે, 11 અવિભાજ્ય હોવાથી, $\binom{11}{r}$ એ $r = 1, 2, ..., 10$ માટે 11 વડે વિભાજ્ય છે.

5 અવિભાજ્ય હોવાથી, $\binom{5}{r}$ એ $r = 1, 2, 3, 4$ માટે 5 વડે વિભાજ્ય છે.

3 અવિભાજ્ય હોવાથી, $\binom{3}{r}$ એ $r = 1, 2$ માટે 3 વડે વિભાજ્ય છે.

અને $\frac{1}{11} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{62}{165} = 1$

$\therefore$ (1) ની જ.બા.ની સંખ્યા પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.

વળી, $\frac{k^{11}}{11} + \frac{k^5}{5} + \frac{k^3}{3} + \frac{62k}{165} \in$ N.

$\therefore$ $\frac{(k+1)^{11}}{11} + \frac{(k+1)^5}{5} + \frac{(k+1)^3}{3} + \frac{62(k+1)}{165}$

$= \frac{k^{11}}{11} + \frac{k^5}{5} + \frac{k^3}{3} + \frac{62k}{165}$ + પ્રાકૃતિક સંખ્યા $\in$ N

$\therefore$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

ઉદાહરણ 24 : એક સભાગૃહમાં $2n$ માણસો છે. અમુક માણસો બીજા માણસો સાથે હસ્તધૂનન કરે છે. કોઈ પણ એવી ત્રણ વ્યક્તિઓ નથી કે જેમણે એકબીજા સાથે હસ્તધૂનન કર્યું હોય. સાબિત કરો કે આમ મળતી હસ્તધૂનનની વધુમાં વધુ સંખ્યા n^2 હોય.

ઉકેલ : P(n) : અમુક માણસો બીજા માણસો સાથે હસ્તધૂનન કરે છે. કોઈ પણ એવી ત્રણ વ્યક્તિઓ નથી કે જેમણે એકબીજા સાથે હસ્તધૂનન કર્યું હોય. આમ મળતી હસ્તધૂનનની વધુમાં વધુ સંખ્યા n^2 હોય.

$n = 1$ લેતાં, બે વ્યક્તિઓ છે. આમ, હસ્તધૂનનની વધુમાં વધુ સંખ્યા $1 = 1^2$.

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે. હસ્તધૂનનની વધુમાં વધુ સંખ્યા n^2 છે.

ધારો કે $n = k + 1$

હવે $2k + 2$ વ્યક્તિઓ છે. હસ્તધૂનન કર્યું હોય તેવી બે વ્યક્તિઓ A અને B પસંદ કરો.

(જો એવી બે વ્યક્તિઓ ન મળે તો હસ્તધૂનનની કુલ સંખ્યા 0 થાય. જે વધુમાં વધુ $(k + 1)^2$ છે તેમ સાબિત થાય.)

હવે, બાકીની $2k$ વ્યક્તિઓ દ્વારા હસ્તધૂનનની કુલ સંખ્યા વધુમાં વધુ k^2 છે. **(P(k) સત્ય છે.)**

A અને B દ્વારા એક હસ્તધૂનન થાય છે.

$2k$ વ્યક્તિઓમાંની દરેક વ્યક્તિ A અથવા B સાથે જ હસ્તધૂનન કરી શકે પણ બંને સાથે નહિ.

હસ્તધૂનનની વધુમાં વધુ સંખ્યા $k^2 + 1 + 2k = (k + 1)^2$

$\therefore$ P($k + 1$) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે $\Rightarrow$ P($k + 1$) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in$ N માટે P(n) સત્ય છે.

એક વિરોધાભાસ (Paradox) :

P(n) : તરસ્યો માણસ પાણીનાં n ટીપાં પી શકે. $n \in$ N

$n = 1$ માટે સ્પષ્ટ છે કે તરસ્યા માણસને 1 ટીપું પાણી પીવું ગમે.

જો તે k ટીપાં પાણી પી શકે તો ચોક્કસ $k + 1$ ટીપાં પાણી પણ પી શકે.

આમ, તે ગમે તેટલાં ટીપાં પાણી પી શકે અને પૃથ્વી પરનું બધું જ પાણી પીને પૃથ્વીને પાણીવિહોણી બનાવી શકે !

નોંધ : પરિણામોનો ખોટી રીતે ઉપયોગ કરીને કોઈ ખોટા પરિણામ પર પહોંચીએ તેને વિરોધાભાસ કહે છે.

સ્વાધ્યાય 1

ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરીને નીચેનાં પરિણામો સાબિત કરો : **(1 થી 20)**

1. $1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + ... + n^2(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$

2. $a + (a + d) + (a + 2d) + ... + (a + (n - 1)d) = \frac{1}{2}n(2a + (n - 1)d)$

3. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + ... + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$

4. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + ... + n(n + 1)(n + 2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

5. $1 + 5 + 9 + ... + (4n - 3) = n(2n - 1)$

6. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

7. $\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + ... + \frac{1}{1+2+3+...+n} = \frac{2n}{n+1}$

8. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

9. $1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

10. જો $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 3$ તો $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = a_{n+2} - 1$

11. $41^n - 1$ એ 40 વડે વિભાજ્ય છે.

12. $4007^n - 1$ એ 2003 વડે વિભાજ્ય છે.

13. $7^n - 6n - 1$ એ 36 વડે વિભાજ્ય છે.

14. $2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$ એ 24 વડે વિભાજ્ય છે.

15. $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ એ 133 વડે વિભાજ્ય છે.

16. $n(n+1)(2n+1)$ એ 6 વડે વિભાજ્ય છે.

17. $1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + ... + n \cdot 3^n = \frac{(2n-1)\,3^{n+1} + 3}{4}$

18. $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ એ 9 વડે વિભાજ્ય છે.

19. $\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15} \in N$.

20. $\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$

21. લુકાસની શ્રેણી $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n \geq 3)$; $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ માટે સાબિત કરો કે $a_n \leq (1.75)^n$.

22. સાબિત કરો : $2^n > n^3$, જ્યાં $n \geq 10$, $n \in N$

23. સાબિત કરો કે n બાજુઓ વાળા બહુકોણને $\frac{n(n-3)}{2}$ વિકર્ણો હોય જ્યાં, $n > 3$, $n \in N$

24. જો $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $(n \geq 3, n \in N)$ તો સાબિત કરો કે

$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ (આ શ્રેણી $\{a_n\}$ને **ફિબોનાકી શ્રેણી** કહે છે.)

25. જો $f : N \to N$, $f(1) = 1$, $f(2) = 5$, $f(n+1) = f(n) + 2f(n-1)$, $n \geq 2$

તો સાબિત કરો કે $f(n) = 2^n + (-1)^n$

26. જો $f : N \to N$, $f(1) = 1$, $f(n+1) - f(n) = 2^n$

તો સાબિત કરો કે $f(n) = 2^n - 1$

27. જો $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$; $n \geq 3$

તો સાબિત કરો કે $a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{2n} = a_{2n+1} - 1$

28. જો $a_1 = 1$, $a_2 = 11$ અને $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$; $n \geq 3$

તો સાબિત કરો કે $a_n = 2(-1)^n + 3^n$, $n \in N$

29. કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક $n \geq 12$ ને $7x + 3y = n$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય તેમ સાબિત કરો.

જ્યાં, $x \in N \cup \{0\}$, $y \in N \cup \{0\}$

30. સાબિત કરો કે $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$ યુગ્મ છે. $n \in N$ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.

31. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને $\square$ માં લખો :

(1) $P(n) : 2^n < n!$ માટે ...... સત્ય છે. $\square$

(a) P(1) (b) P(2)

(c) કોઈ પણ $P(n)$, $n \in N$ (d) P(4)

(2) $P(n) : 2^n = 0$ માટે ...... સત્ય છે. $\square$

(a) P(1) (b) P(3)

(c) P(10) (d) $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$, $k \in N$

(3) $1 + 2 + 3 + ... + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, $n \in N$ $\square$

(a) P(1) માટે ડા.બા. = 7 = જ.બા.

(b) P(1) માટે ડા.બા. = 3 = જ.બા.

(c) $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$, $k \in N$ માટે સત્ય નથી.

(d) ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પરથી પ્રત્યેક $n \in N$ માટે $P(n)$ સત્ય છે તેમ નથી.

(4) જો ...... સત્ય હોય અને $P(k)$ સત્ય હોય $\Rightarrow P(k + 1)$ સત્ય હોય, $k \geq -1$, તો પ્રત્યેક $n \in N \cup \{0, -1\}$ માટે $P(n)$ સત્ય હોય. $\square$

(a) P(−1) (b) P(0) (c) P(1) (d) P(2)

(5) $P(n) : P = 2^{2^n} + 1$ અવિભાજ્ય સંખ્યા છે. એ n = ... માટે સત્ય નથી. $\square$

(a) 1 (b) 2 (c) 0 (d) 5

(6) $P(n) : 2^n - 1$ એ n = ... માટે અવિભાજ્ય સંખ્યા છે. $\square$

(a) 1 (b) 3 (c) 4 (d) 8

(7) $P(n) : n^2 - n + 41$ એ n = ... માટે અવિભાજ્ય સંખ્યા નથી. $\square$

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 41

(8) $P(n) : 2n + 1$ એ n = ... માટે અવિભાજ્ય સંખ્યા નથી. $\square$

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(9) $P(n) : 4n + 1$ એ n = ... માટે અવિભાજ્ય સંખ્યા નથી. $\square$

(a) 1 (b) 3 (c) 7 (d) 11

(10) $P(n) : 2^n > n^2$ એ n = ... માટે સત્ય છે. $\square$

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. ગણિતીય અનુમાનનો સિદ્ધાંત અને તેનાં ઉપરનાં ઉદાહરણો
2. વિશિષ્ટ ચલ પ્રકારના ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત તથા તેના ઉપયોગો

કોયડો

એક ઓરડામાં n વ્યક્તિ છે. $n - 1$ કાળી ટોપી તથા ઓછામાં ઓછી n સફેદ ટોપી છે. દરેક વ્યક્તિના માથે એક ટોપી છે. આ વ્યક્તિઓ એક હારમાં એવી રીતે ઊભી રહી છે કે દરેક વ્યક્તિ તેની આગળની વ્યક્તિની ટોપી જોઈ શકે. હવે છેલ્લેથી શરૂ કરી દરેક વ્યક્તિને પૂછવામાં આવે છે, 'તમારી ટોપીનો રંગ કહી શકશો'. જો પાછળની $n - 1$ વ્યક્તિ પોતાની ટોપીનો રંગ ના કહી શકે તો સૌથી આગળની વ્યક્તિ કહે છે, 'હા, મારી ટોપીનો રંગ સફેદ છે.'

હવે ગણિતીય અનુમાનથી આગળ વધીએ. $n = 1$ માટે 1 વ્યક્તિ, ઓછામાં ઓછી 1 સફેદ ટોપી તથા $1 - 1 = 0$ કાળી ટોપી છે. આથી તે વ્યક્તિ કહે છે કે મારા માથા ઉપર સફેદ ટોપી છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે. k વ્યક્તિ, ઓછામાં ઓછી k સફેદ ટોપી તથા $k - 1$ કાળી ટોપી હોય અને પાછળની $k - 1$ વ્યક્તિ પોતાની ટોપીનો રંગ કહેવામાં નિષ્ફળ જાય છે, તો પ્રથમ ઉભેલી વ્યક્તિ કહી શકે કે 'મારા માથા પર સફેદ ટોપી છે'. $n = k + 1$ લેતાં, $k + 1$ વ્યક્તિ, k કાળી ટોપી તથા ઓછામાં ઓછી $k + 1$ સફેદ ટોપી છે. હવે પ્રથમ વ્યક્તિ વિચારે છે કે જો મારા માથા ઉપર કાળી ટોપી હોય તો પાછળની k વ્યક્તિ વચ્ચે ઓછામાં ઓછી k સફેદ ટોપી તથા $k - 1$ કાળી ટોપી રહે. P(k) સત્ય હોવાથી મારી પાછળની વ્યક્તિ કહી શકે કે તેના માથા પર સફેદ ટોપી છે. પરંતુ મારી પાછળની વ્યક્તિ અનુત્તર છે. આથી મારા માથા પર સફેદ ટોપી છે.

સમજૂતી : $n = 2$ માટે બે વ્યક્તિ એક કાળી ટોપી તથા ઓછામાં ઓછી બે સફેદ ટોપી છે.

જો છેલ્લી વ્યક્તિ પ્રથમ વ્યક્તિના માથા ઉપર કાળી ટોપી જુએ તો એક જ કાળી ટોપી હોવાથી તે નિશ્ચિતપણે કહી શકે કે તેના માથા પર સફેદ ટોપી છે. તે જવાબ આપી શકતી ન હોવાથી પ્રથમ વ્યક્તિની તાર્કિક દલીલ એ છે કે તેના માથે સફેદ ટોપી જ હોવી જોઈએ અને તેની પાછળની વ્યક્તિના માથા પર સફેદ અથવા કાળી ગમે તે ટોપી હોય. કારણ કે એક કાળી ટોપી તથા ઓછામાં ઓછી બે સફેદ ટોપી છે. આથી પ્રથમ વ્યક્તિ કહી શકે કે તેના માથા પર સફેદ ટોપી છે.

Srinivasa Ramanujan (1887-1920) was one of India's greatest mathematical geniuses. He made substantial contributions to the analytical theory of numbers and worked on elliptical functions, continued fractions and infinite series.

In 1990 he began to work on his own on mathematics summing geometric and arithmetic series.

Ramanujan had shown how to solve cubic equations in 1902 and he went to find his own method to solve the quartic.

1904 Ramanujan had begun to undertake deep research. He investigated the series $\Sigma\left(\frac{1}{n}\right)$ and calculated Euler's constant to 15 decimal places.

Continuing his mathematical work Ramanujan studied continued fractions and divergent series in 1908.