અનિયત સંકલન 6

What we know is not much, what we do not know is immense.
(Allegedly his last words)

– Laplace

A mathematics teacher is midwife to ideas.

– George Polya

6.1 પ્રાસ્તાવિક

વિકલનના પ્રકરણમાં આપણે આપેલું વિધેય f એ કોઈ અંતરાલ I પર વિકલનીય ક્યારે બને તથા તે વિકલનીય હોય ત્યારે તેનો અનન્ય વિકલિત f' અંતરાલ I ના દરેક બિંદુએ કેવી રીતે મેળવી શકાય તેનો અભ્યાસ કર્યો. હવે આપણે વિકલનની ક્રિયાથી ઊલટી હોય તેવી એક ક્રિયા જોઈશું. ઉદાહરણ તરીકે x^3 નું x ને સાપેક્ષ વિકિલત $3x^2$ છે તે આપણે જાણીએ છીએ. પરંતુ હવે આપણે પ્રશ્ન ઉલટાવીએ કે ક્યાં વિધેયનો વિકલિત $3x^2$ થાય તો જવાબ શોધવામાં મુશ્કેલી પડે. એ વ્યસ્ત ક્રિયાનો પ્રશ્ન છે.

વ્યાપક રીતે એવો પ્રશ્ન ઉઠાવીએ કે "આપેલ વિધેય $f(x)$ કયા વિધેયનું વિકલિત છે ?" આ પ્રશ્નનો ઉત્તર શોધવાની ક્રિયાને **પ્રતિવિકલન (Antiderivation)**ની ક્રિયા કહે છે. આ પ્રશ્નનો ઉત્તર ના મળે તે પણ શક્ય છે. આ પ્રશ્નના ઉત્તરો એક કરતાં વધુ પણ હોય. ઉદાહરણ તરીકે, (i) $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$, $\frac{d}{dx}(x^3 - 15) = 3x^2$ છે. વ્યાપક રીતે $\frac{d}{dx}(x^3 + c) = 3x^2$, જ્યાં c કોઈ પણ અચળ છે. (ii) $\frac{d}{dx}(sinx) = cosx$, $\frac{d}{dx}(sinx - 3) = cosx$ વ્યાપક રીતે $\frac{d}{dx}(sinx + c) = cosx$.

આમ, ઉપરનાં વિધેયનાં પ્રતિવિકલિત અચળ નથી. હકીકતમાં તો વિધેયના પ્રતિવિકલિતોની સંખ્યા અનંત હોય છે. જે અચળ c ની પસંદગીથી મેળવી શકાય છે. તેથી આવા અચળને સ્વૈર અચળ કહે છે.

6.2 વ્યાખ્યા

કોઈ અંતરાલ $I \subset R$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય g માટે, $\frac{d}{dx}(g(x)) = f(x)$, $\forall x \in I$, હોય તો $g(x)$ ને $f(x)$નો x વિશે **પૂર્વગ (Primitive)** અથવા **પ્રતિવિકલિત (Antiderivative)** અથવા **અનિયત સંકલિત (Indefinite Integral)** કહે છે. અને તેને સંકેતમાં $\int f(x)dx$ દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે. અહીં, $f(x)$ પરથી તેનો પૂર્વગ $g(x)$ શોધવાની ક્રિયાને **પ્રતિવિકલન (કે અનિયત સંકલન)** કહે છે.

વિધેય fનો પૂર્વગ ક્યારે મળી શકે તેનો જવાબ સરળતાથી મળી શકતો નથી, પણ કેટલીક પર્યાપ્ત શરતો એવી છે કે સતત વિધેય અને એકસૂત્રી (વધતું અથવા ઘટતું) વિધેયનો પૂર્વગ મળી શકે. $\frac{sinx}{x}$ સતત વિધેય હોવાથી $\int \frac{sinx}{x}dx$ વ્યાખ્યાયિત તો છે જ પણ તેને જાણીતા પ્રાથમિક વિધેય તરીકે દર્શાવી શકાતું નથી. તેવી રીતે $\int \sqrt{secx}\,dx$ અને $\int \sqrt{x^3 + 1}\,dx$ વ્યાખ્યાયિત છે પણ તેને પણ જાણીતા પ્રાથમિક વિધેય તરીકે દર્શાવી શકાતાં નથી. જો વિધેય fનો પ્રતિવિકલિત મળે તો તેને **પ્રતિવિકલનીય (Integrable) વિધેય** કહે છે.

$\int f(x)dx$ માં $\int ....dx$ સંકેત **x** ને સાપેક્ષ સંકલનની પ્રક્રિયા દર્શાવે છે. **$\int f(x)dx$** એટલે **$f(x)$** નો **x** વિશે (સાપેક્ષ) **પ્રતિવિકલિત** કે **સંકલિત (Integral)**. **$\int f(x)dx$** માં **$f(x)$**ને **સંકલ્ય (Integrand)** કહે છે.

6.3 પ્રતિવિકલિતનાં કેટલાંક પ્રમેયો

પ્રમેય 6.1 : જો f અને g બંને (a, b) પર વિકલનીય વિધેયો હોય તથા $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in (a, b)$, તો $f(x) = g(x) + c$, જ્યાં c અચળ છે.

સાબિતી : ધારો કે $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in (a, b)$.

f અને g એ (a, b) પર વિકલનીય હોવાથી બંને વિધેયો (a, b) પર સતત છે.

$\therefore$ જો $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$, તો $[x_1, x_2]$ પર h સતત છે.

તથા (x_1, x_2) પર h વિકલનીય છે. કારણ કે $[x_1, x_2] \subset (a, b)$.

$\therefore$ મધ્યકમાન પ્રમેય પરથી,

$$\frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} = h'(c) \text{ જ્યાં, } c \in (x_1, x_2).$$

$\therefore$ $h(x_2) - h(x_1) = h'(c)(x_2 - x_1)$.

હવે, $c \in (x_1, x_2) \Rightarrow c \in (a, b)$ **(i)**

પરંતુ પક્ષ પરથી $\forall x \in (a, b)$, $f'(x) = g'(x)$.

$\therefore$ $f'(c) = g'(c)$

$\therefore$ $f'(c) - g'(c) = 0$

$\therefore$ $h'(c) = 0$ **$(h(x) = f(x) - g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) - g'(x))$**

$\therefore$ $h(x_2) - h(x_1) = 0 \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b)$ **((i) પરથી)**

$\therefore$ $h(x_1) = h(x_2)$

$\therefore$ $f(x_1) - g(x_1) = f(x_2) - g(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b)$

$\therefore$ $f - g$ એ (a, b) પર અચળ વિધેય છે.

$\therefore$ $f(x) - g(x) = c$, જ્યાં $c \in \mathbb{R}$ અચળ છે.

$\therefore$ $f(x) = g(x) + c, \quad \forall x \in (a, b)$

વ્યાપક પ્રતિવિકલિત : $\frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{d}{dx}(g(x)) = h(x)$, તો $\int h(x)dx = f(x)$ અને $\int h(x)dx = g(x)$ થાય.

પરંતુ, પ્રમેય 6.1 પરથી $f(x) = g(x) + c$ હોવાથી, $\int h(x)dx = f(x) = g(x) + c$ જ્યાં, $g(x)$ એ (a, b) પર વિકલનીય કોઈ પણ વિધેય છે, જેથી $\frac{d}{dx}(g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) = h(x)$. વળી, જો $\frac{d}{dx}(g(x)) = h(x)$, તો $\frac{d}{dx}[g(x) + c] = \frac{d}{dx}g(x) = h(x)$ જ થાય.

આમ, $h(x)$નો એક સંકલિત $g(x)$ હોય, તો તેનાં તમામ સંકલિતો $g(x) + c$ તરીકે મળે, જ્યાં c કોઈ પણ વાસ્તવિક અચળ છે. c ને સ્વૈર અચળ (Arbitrary constant) કહે છે.

કોઈ વિધેય પર વિકલન અને સંકલનની ક્રિયાઓ વારાફરતી કરતાં,

$$\frac{d}{dx}g(x) = f(x),\ \forall x \in I \Leftrightarrow \int f(x)dx = g(x) + c.$$

હવે, $\frac{d}{dx}[\int f(x)dx] = \frac{d}{dx}[g(x) + c] = f(x)$.

$\therefore$ જો વિધેય $f(x)$નો પ્રથમ સંકલિત મેળવવામાં આવે અને પછી તે સંકલિતનું વિકલન કરવામાં આવે, તો પરિણામે તે જ વિધેય $f(x)$ મળે.

પરંતુ $\int \left[\frac{d}{dx}g(x)\right] dx = \int f(x)dx = g(x) + c$.

જો કોઈ વિધેય $g(x)$નો પ્રથમ વિકલિત મેળવી પછી તે વિકલિતનો સંકલિત મેળવીએ તો $g(x) + c$ મળે.

પ્રમેય 6.2 : જો f અને g અંતરાલ (a, b) પર પ્રતિવિકલનીય હોય તો $f + g$ પણ પ્રતિવિકલનીય છે તથા

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

સાબિતી : $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx + \int g(x)dx\right] = \frac{d}{dx}\int f(x)dx + \frac{d}{dx}\int g(x)dx$

$$= f(x) + g(x)$$

$\therefore$ પ્રતિવિકલનની વ્યાખ્યા પ્રમાણે,

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

વ્યાપક રીતે, $f_1, f_2, f_3, ..., f_n$ કોઈ અંતરાલ પર સંકલનીય હોય, તો

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)]\, dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + ... + \int f_n(x)dx.$$

પ્રમેય 6.3 : જો f એ કોઈ અંતરાલ (a, b) પર પ્રતિવિકલનીય વિધેય હોય તથા $k \in R$ તો kf પણ પ્રતિવિકલનીય છે તથા $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$

સાબિતી : $\frac{d}{dx}[k\int f(x)dx] = k\frac{d}{dx}\int f(x)dx$

$$= kf(x)$$

$\therefore$ પ્રતિવિકલનની વ્યાખ્યા પ્રમાણે,

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

ઉપપ્રમેય : જો f અને g એ કોઈ અંતરાલ (a, b) પર પ્રતિવિકલનીય વિધેય હોય તો

$$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

સાબિતી : $\int [f(x) - g(x)]dx = \int [f(x)dx + (-1)g(x)]dx$

$$= \int f(x)dx + \int (-1)g(x)dx$$

$$= \int f(x)dx + (-1)\int g(x)dx$$

$$= \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

આમ, $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

વ્યાપક રીતે, $\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + ... + k_n f_n(x)]dx$

$$= k_1\int f_1(x)\,dx + k_2\int f_2(x)\,dx + ... + \int k_n f_n(x)dx$$

પ્રમેય 6.2, 6.3 અને આ ઉપપ્રમેયને સંકલનના કાર્યનિયમો પણ કહે છે.

6.4 પ્રમાણિત સંકલિતો

(1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \in R - \{-1\},\ x \in R^+.$

$\frac{x^{n+1}}{n+1}$ એ $\forall x \in R^+$ વિકલનીય વિધેય છે અને $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}[(n + 1)x^n] = x^n$

$\therefore$ પ્રતિવિકલિતની વ્યાખ્યા પ્રમાણે, $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\quad \forall x \in R^+.$

(અહીં આપણે યાદ કરીશું કે જો $g(x)$ એક પ્રતિવિકલિત હોય, તો તમામ પ્રતિવિકલિતો $g(x) + c$ તરીકે મળે.)

$n = 0$ લેતાં, $\int x^0\, dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + c = x + c$

$\therefore \int dx = x + c$

(2) $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c, \ x \in R - \{0\}$.

$\log|x|$ એ $\forall x \in R - \{0\}$ વિકલનીય વિધેય છે.

$x > 0$ તો $\frac{d}{dx}(\log|x|) = \frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}$.

જો $x < 0$ તો $\frac{d}{dx}\log|x| = \frac{d}{dx}\log(-x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$

$\therefore$ $\frac{d}{dx}\log|x| = \frac{1}{x}, \quad \forall x \in R - \{0\}$

$\therefore$ પ્રતિવિકલિતની વ્યાખ્યા પ્રમાણે,

$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c, \quad \forall x \in R - \{0\}$.

આપણે $\int \frac{dx}{x} = \log|x| + c, \ x \neq 0$ લખી શકીએ.

(3) $\int cosx\, dx = sinx + c, \ \forall x \in R$

$sinx$ એ $\forall x \in R$ વિકલનીય છે અને $\frac{d}{dx}(sinx) = cosx, \quad \forall x \in R$

$\therefore$ પ્રતિવિકલિતની વ્યાખ્યા પ્રમાણે,

$\int cosx\, dx = sinx + c, \quad \forall x \in R$

તે જ પ્રમાણે સાબિત કરી શકાય કે,

(4) $\int sinx\, dx = -cosx + c, \ \forall x \in R$

(5) $\int sec^2x\, dx = tanx + c, \ x \neq (2k - 1)\frac{\pi}{2}, \ k \in Z$

$(2k - 1)\frac{\pi}{2}, \ k \in Z$ ને ન સમાવતા કોઈ પણ અંતરાલ પર $tanx$ વિકલનીય છે અને $\frac{d}{dx}(tanx) = sec^2x$.

$\therefore$ પ્રતિવિકલિતની વ્યાખ્યા પ્રમાણે, $\int sec^2x\, dx = tanx + c, \ x \neq (2k - 1)\frac{\pi}{2}, \ k \in Z$

તે જ પ્રમાણે સાબિત કરી શકાય કે,

(6) $\int cosec^2x\, dx = -cotx + c, \ x \neq k\pi, \ k \in Z$

(7) $\int secx \ tanx\, dx = secx + c, \ x \neq (2k - 1)\frac{\pi}{2}, \ k \in Z$

(8) $\int cosecx \ cotx\, dx = -cosecx + c, \ x \neq k\pi, \ k \in Z$

(9) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a} + c, \ a \in R^+ - \{1\}, \ x \in R$

$\frac{a^x}{\log_e a}$ એ $\forall x \in R$ વિકલનીય છે અને $\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log_e a}\right) = \frac{1}{\log_e a}(a^x \log_e a) = a^x, \quad \forall x \in R$

$\therefore$ પ્રતિવિકલિતની વ્યાખ્યા પ્રમાણે, $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a} + c, \ a \in R^+ - \{1\}$.

$a = e$ લેતાં,

$\int e^x dx = \frac{e^x}{\log_e e} + c$

$\therefore$ $\int e^x dx = e^x + c, \quad \forall x \in R$.

(10) $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c, \quad a \in R - \{0\}, \ x \in R$

$$= -\frac{1}{a} cot^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c_1, \quad a \in R - \{0\}, \ x \in R$$

a કોઈ શૂન્યેતર અચળ છે અને $tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$, $\forall x \in R$ વિકલનીય છે.

$\therefore \quad \frac{1}{a}\ tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), \forall a \in \mathrm{R} - \{0\}$ વિકલનીય છે અને

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}\ tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right] = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{x^2+a^2}$$

$\therefore$ પ્રતિવિકલિતની વ્યાખ્યા પ્રમાણે $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\ tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c, \forall x \in \mathrm{R}$

આમ, $\frac{1}{a} tan^{-1}\frac{x}{a}$ અને $-\frac{1}{a} cot^{-1}\frac{x}{a}$ બંને $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$ તરીકે લઈ શકાય.

આનું કારણ સમજીએ.

જો $f(x) = \frac{1}{a} tan^{-1}\frac{x}{a}$ અને $g(x) = -\frac{1}{a} cot^{-1}\frac{x}{a}$ લઈએ તો,

$tan^{-1}\frac{x}{a} + cot^{-1}\frac{x}{a} = \frac{\pi}{2}$ હોવાથી,

$$\frac{1}{a} tan^{-1}\frac{x}{a} + \frac{1}{a} cot^{-1}\frac{x}{a} = \frac{\pi}{2a}$$

$\therefore \quad f(x) - g(x) = \frac{\pi}{2a}$

$\therefore \quad f(x) = g(x) + \frac{\pi}{2a}.$

$\therefore \quad \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} g(x).$

પ્રતિવિકલિત અનન્ય ન હોવાથી $\int h(x)dx = g(x)$ અને $\int h(x)dx = f(x)$ હોય તો $f(x) = g(x)$ થાય તે જરૂરી નથી પણ અચળ c મળે કે જેથી $f(x) = g(x) + c$ થાય.

(11) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c, a \in \mathrm{R} - \{0\}$ **($-a$ તથા a ને ન સમાવતા કોઈ પણ અંતરાલ પર)**

$\frac{1}{2a} \log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$ એ $-a$ અને a ને ન સમાવતા કોઈપણ અંતરાલ પર વિકલનીય છે અને

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2a} \log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right) &= \frac{1}{2a}\frac{d}{dx}\left[\log|x-a| - \log|x+a|\right] \\
&= \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right] \\
&= \frac{1}{2a}\left[\frac{x+a-x+a}{(x-a)(x+a)}\right] \\
&= \frac{1}{2a}\left(\frac{2a}{x^2-a^2}\right) \\
&= \frac{1}{x^2-a^2}
\end{aligned}$$

$\therefore$ આમ, પ્રતિવિકલિતની વ્યાખ્યા પ્રમાણે, $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c, a \in \mathrm{R} - \{0\}$

(12) $\int \frac{1}{a^2-x^2}\, dx = \frac{1}{2a} \log\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + c, a \in \mathrm{R} - \{0\}$ **($-a$ અને a ને ન સમાવતા કોઈ પણ અંતરાલ પર)**

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{a^2-x^2}\, dx &= -1 \int \frac{1}{x^2-a^2}\, dx \\
&= -\frac{1}{2a} \log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c \\
&= \frac{1}{2a} \log\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + c
\end{aligned}$$

(13) $$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = sin^{-1}\frac{x}{a} + c, \quad x \in (-a,\ a),\ a > 0.$$

$$= -cos^{-1}\frac{x}{a} + c_1, \quad x \in (-a,\ a),\ a > 0.$$

$sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ એ $x \in (-a,\ a)$, $a > 0$ માટે વિકલનીય છે અને

$$\frac{d}{dx}\left(sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \cdot \frac{1}{a}$$

$$= \frac{|a|}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot \frac{1}{a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad (a > 0,\ |a| = a)$$

આમ, પ્રતિવિકલિતની વ્યાખ્યા પ્રમાણે, $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = sin^{-1}\frac{x}{a} + c,\ \ x \in (-a,\ a),\ a > 0.$

વળી, $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -cos^{-1}\frac{x}{a} + c_1$ પણ લખી શકાય, $x \in (-a,\ a)$.

પરિણામ (10)ની જેમ,

જો $a < 0$, હોય, તો $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -sin^{-1}\frac{x}{a} + c = cos^{-1}\frac{x}{a} + c_1$ થાય. $\qquad (|a| = -a)$

એક ઉદાહરણ લઈએ, $\int \frac{1}{\sqrt{\left(\log\frac{1}{2}\right)^2 - x^2}}\,dx = -sin^{-1}\frac{1}{\log\frac{1}{2}} + c \qquad \left(\log\frac{1}{2} < 0\right)$

પરંતુ આપણે સામાન્ય રીતે $a > 0$ સ્વરૂપે સૂત્રનો ઉપયોગ કરીશું.

(14) $$\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\,sec^{-1}\frac{x}{a} + c, \quad |x| > |a| > 0.$$

$$= -\frac{1}{a}\,cosec^{-1}\frac{x}{a} + c_1, \quad |x| > |a| > 0.$$

જો $a \in R - \{0\}$ તો $\frac{1}{a}\,sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ એ $|x| > |a|$ માટે વિકલનીય છે, અને

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}\,sec^{-1}\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\left|\frac{x}{a}\right|\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}} \cdot \frac{1}{a}$$

$$= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{|a|^2}{|x|\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{a^2}{|x|\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-a^2}}$$

$\therefore$ પ્રતિવિકલિતની વ્યાખ્યા પ્રમાણે, $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\,sec^{-1}\frac{x}{a} + c,\ \ (|x| > |a| > 0)$

પરિણામ (10) ની જેમ, $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = -\frac{1}{a}\ cosec^{-1}\frac{x}{a} + c_1$ પણ લખી શકાય.

(15) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\, dx = \log | x + \sqrt{x^2 \pm a^2} | + c, \quad \forall x \in R.$

$$\frac{d}{dx}\left(\log | x + \sqrt{x^2 \pm a^2} |\right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \left(\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2} + x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

$\therefore$ પ્રતિવિકલિતની વ્યાખ્યા પ્રમાણે, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \log | x + \sqrt{x^2 \pm a^2} | + c, \forall x \in R$

(**નોંધ :** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ ના અસ્તિત્વ માટે $|x| > |a|$ જરૂરી છે.)

સામાન્ય રીતે $\int f(x)dx = g(x) + c$ ના બદલે આપણે $g(x)$ લખીશું અને c નહીં લખીએ. સ્વૈર અચળનો સમાવેશ g માં થઈ ગયો છે, તેમ આપણે સમજીશું. $\int f(x)dx = \int g(x)dx + \int h(x)dx$ જેવા સમીકરણમાં c લખવાની જરૂર નથી. c એ $\int .....dx$ સંકેતમાં અભિપ્રેત છે.

$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$. અહીં c લખવો જરૂરી છે. $\frac{x^3}{3}$ એ વ્યાપક સંકલિત નથી. તે એક સંકલિત છે.

જ્યારે પ્રતિવિકલિત શોધીએ ત્યારે $\int .....dx$ જેવા તમામ સંકેતો દૂર થાય ત્યારે c દાખલ કરવો વ્યવહારુ છે.

$\int x^2 dx + \int x^3 dx = \frac{x^3}{3} + c_1 + \frac{x^4}{4} + c_2$ લખવું જરૂરી નથી. કારણ કે $c_1 + c_2$ પણ સ્વૈર અચળ જ છે.

આમ, $\int x^2 dx + \int x^3 dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + c$ લખી શકાય.

હવે નીચે આપેલાં ઉદાહરણોમાં સંકલ્ય R ના યોગ્ય અંતરાલ પર વ્યાખ્યાયિત છે અને પ્રતિવિકલનીય છે તેમ માની લઈશું. પ્રત્યેક ઉદાહરણમાં માંગેલ સંકલિત માટે I લખીશું.

ઉદાહરણ 1 : નીચે આપેલાં વિધેયોનાં x વિશે સંકલિતો મેળવો :

(1) $x^{\frac{5}{2}} + 4 \cdot 3^x - \frac{1}{x}$ **(2)** $\frac{(2x+1)^3}{\sqrt{x}}, (x > 0)$ **(3)** $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} + x^a + a^x$ **(4)** $\frac{1}{1 + \cos 2x}$

(5) $\frac{1}{9 - x^2}, x^2 \neq 9$ **(6)** $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}, |x| > 2$

ઉકેલ : (1) $I = \int \left(x^{\frac{5}{2}} + 4 \cdot 3^x - \frac{1}{x}\right) dx$

$$= \int x^{\frac{5}{2}} dx + 4 \int 3^x dx - \int \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + 4 \cdot \frac{3^x}{\log_e 3} - \log |x| + c$$

$$= \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + \frac{4 \cdot 3^x}{\log_e 3} - \log |x| + c$$

(2) $I = \int \frac{(2x+1)^3}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{8x^3+1+12x^2+6x}{\sqrt{x}}\,dx$

$$= \int \left(\frac{8x^3}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{12x^2}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{6x}{x^{\frac{1}{2}}} \right) dx$$

$$= 8\int x^{\frac{5}{2}}dx + \int x^{-\frac{1}{2}}dx + 12\int x^{\frac{3}{2}}dx + 6\int x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= 8 \cdot \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 12 \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 6 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{16}{7}x^{\frac{7}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{24}{5}x^{\frac{5}{2}} + 4x^{\frac{3}{2}} + c$$

(3) $I = \int \left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x} + x^a + a^x \right) dx = \frac{1}{a}\int x\,dx + a\int \frac{1}{x}\,dx + \int x^a dx + \int a^x dx$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{x^2}{2} + a\log|x| + \frac{x^{a+1}}{a+1} + \frac{a^x}{\log_e a} + c$$

$$= \frac{x^2}{2a} + a\log|x| + \frac{x^{a+1}}{a+1} + \frac{a^x}{\log_e a} + c$$

(4) $I = \int \frac{1}{1+\cos 2x}\,dx = \int \frac{1}{2\cos^2 x}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \sec^2 x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\tan x + c$$

(5) $I = \int \frac{1}{9-x^2}\,dx = \int \frac{1}{(3)^2-(x)^2}\,dx$

$$= \frac{1}{2(3)}\log\left|\frac{x+3}{x-3}\right| + c$$

$$= \frac{1}{6}\log\left|\frac{x+3}{x-3}\right| + c$$

(6) $I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-2^2}}\,dx$

$$= \log\left|x + \sqrt{(x)^2-(2)^2}\right| + c$$

$$= \log\left|x + \sqrt{x^2-4}\right| + c$$

ઉદાહરણ 2 : નીચે આપેલાં મૂલ્યો મેળવો :

(1) $\int \frac{dx}{4x^2+9}$ (2) $\int \frac{dx}{9x^2-25}$, $x^2 \neq \frac{25}{9}$ (3) $\int \frac{(x^4+x^2+3)dx}{2(x^2+1)}$ (4) $\int \frac{(x^2+5)dx}{x^2-5}$, $x^2 \neq 5$

(5) $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\sin x}$ (6) $\int \sec^2 x \cdot \mathrm{cosec}^2 x\,dx$

ઉકેલ : (1) $I = \int \frac{1}{4x^2+9}\,dx$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2+\frac{9}{4}}\,dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{(x)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)} \; tan^{-1}\left(\frac{x}{\frac{3}{2}}\right) + c$$

$$= \frac{1}{6} \, tan^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right) + c$$

(2) $$I = \int \frac{1}{9x^2 - 25} \, dx$$

$$= \frac{1}{9} \int \frac{1}{x^2 - \frac{25}{9}} \, dx$$

$$= \frac{1}{9} \int \frac{1}{(x)^2 - \left(\frac{5}{3}\right)^2} \, dx$$

$$= \frac{1}{9} \frac{1}{2\left(\frac{5}{3}\right)} \log \left| \frac{x - \frac{5}{3}}{x + \frac{5}{3}} \right| + c$$

$$= \frac{1}{30} \log \left| \frac{3x - 5}{3x + 5} \right| + c$$

(3) $$I = \int \frac{x^4 + x^2 + 3}{2(x^2 + 1)} \, dx$$

$$= \int \frac{x^2 (x^2 + 1) + 3}{2(x^2 + 1)} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \left(x^2 + \frac{3}{x^2 + 1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int x^2 dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2 + 1^2} \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right] + \frac{3}{2} \, tan^{-1}x + c$$

$$= \frac{x^3}{6} + \frac{3}{2} \, tan^{-1}x + c$$

(4) $$I = \int \frac{x^2 + 5}{x^2 - 5} \, dx, \; x^2 \neq 5$$

$$= \int \frac{(x^2 - 5) + 10}{x^2 - 5} \, dx$$

$$= \int \left(1 + \frac{10}{x^2 - 5} \right) dx$$

$$= \int dx + 10 \int \frac{1}{(x)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2} \, dx$$

$$= x + \frac{10}{2\sqrt{5}} \log \left| \frac{x - \sqrt{5}}{x + \sqrt{5}} \right| + c$$

$$= x + \sqrt{5} \log \left| \frac{x - \sqrt{5}}{x + \sqrt{5}} \right| + c$$

(5) $$I = \int \frac{sinx}{1 + sinx} \, dx$$

$$= \int \frac{sinx}{1 + sinx} \times \frac{1 - sinx}{1 - sinx} \, dx$$

$$= \int \frac{sinx - sin^2x}{1 - sin^2x} \, dx$$

$$= \int \frac{sinx - sin^2x}{cos^2x} \, dx$$

$$= \int \left(\frac{sinx}{cos^2x} - \frac{sin^2x}{cos^2x} \right) dx$$

$$= \int (secx \; tanx - tan^2x) \, dx$$

$$= \int secx \; tanx \; dx - \int (sec^2x - 1) \, dx$$

$$= \int secx \; tanx \; dx - \int sec^2x \; dx + \int 1 \, dx$$

$$= secx - tanx + x + c$$

(6) $$I = \int sec^2x \cdot cosec^2x \; dx$$

$$= \int \frac{1}{cos^2x \; sin^2x} \, dx$$

$$= \int \frac{sin^2x + cos^2x}{sin^2x \cdot cos^2x} \, dx$$

$$= \int \left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\right) dx$$

$$= \int (\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x)\ dx$$

$$= \int \sec^2 x\ dx + \int \operatorname{cosec}^2 x\ dx$$

$$= \tan x - \cot x + c$$

ઉદાહરણ 3 : $\int \frac{\cos 2x - \cos 2\alpha}{\cos x - \cos \alpha}\ dx$ નું મૂલ્ય મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{\cos 2x - \cos 2\alpha}{\cos x - \cos \alpha}\ dx$

$$= \int \frac{(2\cos^2 x - 1) - (2\cos^2 \alpha - 1)}{(\cos x - \cos \alpha)}\ dx$$

$$= 2\int \frac{\cos^2 x - \cos^2 \alpha}{\cos x - \cos \alpha}\ dx$$

$$= 2\int (\cos x + \cos\alpha)\ dx$$

$$= 2\int \cos x\ dx + 2\cos\alpha \int 1\ dx$$

$$= 2\sin x + 2\cos\alpha \cdot x + c$$

$$= 2(\sin x + x\cos\alpha) + c$$

ઉદાહરણ 4 : $\int \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\ dx$ મેળવો. $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : $I = \int \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\ dx$

$$= \int \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}\ dx$$

$$= \int \tan^{-1} \left|\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right| dx$$

હવે $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. તેથી $-\frac{\pi}{4} < -\frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}$.

$\therefore\ 0 < \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$.

$\therefore\ I = \int \tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right) dx$ $\quad \left(0 < \left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) < \frac{\pi}{2}\right)$

$$= \int \left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{4}x - \frac{x^2}{4} + c$$

ઉદાહરણ 5 : જો $f'(x) = 3x^2 - \frac{2}{x^3}$ અને $f(1) = 4$, તો $f(x)$ શોધો.

ઉકેલ : $f'(x) = 3x^2 - \frac{2}{x^3}$

$\therefore \quad f(x) = \int (3x^2 - 2x^{-3})\, dx$

$\therefore \quad f(x) = 3\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^{-2}}{-2} + c$

$\therefore \quad f(x) = x^3 + \frac{1}{x^2} + c$ (i)

હવે, $f(1) = 1^3 + \frac{1}{1^2} + c$

$\therefore \quad 4 = 1 + 1 + c$

$\therefore \quad c = 2$ $(f(1) = 4)$

$\therefore \quad f(x) = x^3 + \frac{1}{x^2} + 2$ ((i)માં $c = 2$ મૂકતાં)

સ્વાધ્યાય 6.1

નીચે આપેલાં યોગ્ય પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત અને પ્રતિવિકલનીય વિધેયોનાં x વિશે સંકલિતો મેળવો :

1. $3x^2 + 5x - 4 + \frac{7}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$
2. $\frac{5x^3 + x^2 + 2}{\sqrt{x}}$
3. $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$
4. $(ax^2 + bx + c)\sqrt{x}$
5. $x^e + e^x + e^e$
6. $e^{a \log x} + e^{x \log a}$
7. $\frac{x^3 - 8}{x^2 - 2x}$
8. $2^x + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$
9. $\frac{2x^3 + 18x - 1}{x^2 + 9}$
10. $\frac{2x^4 + 7x^3 + 6x^2}{x^2 + 2x}$
11. $\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$
12. $\frac{x^6 + 2}{x^2 + 1}$
13. $\frac{x^4 + 1}{x^2 + 1}$
14. $3\sin x + 5\cos x + \frac{7}{\cos^2 x} - \frac{4}{\sin^2 x} + \tan^2 x$
15. $\frac{2 + 3\cos x}{\sin^2 x}$
16. $(2\tan x - 3\cot x)^2$
17. $\frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}$
18. $\frac{\cos x}{\cos x - 1}$
19. $\frac{1}{1 + \cos x}$
20. $\frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$
21. $\frac{\cot x}{\operatorname{cosec} x - \cot x}$
22. $\frac{\tan x}{\sec x + \tan x}$
23. $(a\tan x + b\cot x)^2$
24. $\frac{x^2}{x^2 - 3}$
25. જો $f'(x) = 8x^3 - 2x$, $f(2) = 8$, તો $f(x)$ શોધો.

*

6.5 સંકલન માટે આદેશની રીત

આપેલું વિધેય કોઈ પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં હોય, તો તેનું સંકલન સરળતાથી મળે તે આપણે જોયું. પણ જો સંકલ્ય $f(x)$ પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં ન હોય અથવા પ્રમાણિત રૂપમાં મૂકી શકાય તેમ પ્રત્યક્ષ રીતે જણાતું ન હોય, તો પ્રતિવિકલિત શોધવા માટે આદેશની રીત (Method of Substitution) એ એક અતિઉપયોગી રીત છે.

યોગ્ય આદેશ $x = \phi(t)$ દ્વારા $\int f(x)dx$ નું રૂપાંતર $\int g(t)dt$ સ્વરૂપે કરવામાં આવે છે, જ્યાં $g(t)$ માટે આગળ આવી ગયેલ રીત કે પ્રમાણિત સ્વરૂપથી પ્રતિવિકલન શક્ય હોય. નીચે આપેલા પ્રમેયને **આદેશની રીતનો પ્રમેય** કહે છે.

પ્રમેય 6.4 (આદેશની રીત) : $g : [\alpha, \beta] \to R$ સતત તથા (α, β) પર વિકલનીય વિધેય છે. $g'(t)$ એ (α, β) પર સતત છે તથા $g'(t) \neq 0, \forall t \in (\alpha, \beta)$. વળી, gનો વિસ્તાર $[a, b]$ નો ઉપગણ હોય એટલે કે $R_g \subset [a, b]$ અને $f : [a, b] \to R$ સતત હોય, તો $x = g(t)$ લેતાં,

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))\ g'(t)dt.$$

સાબિતી : f એ $[a, b]$ પર સતત હોવાથી $\int f(x)dx$ નું અસ્તિત્વ છે. વળી $x = g(t)$ એ $[\alpha, \beta]$ પર સતત છે અને $f(x)$ સતત છે.

આથી, $f(g(t))$ પણ સતત છે. $g'(t)$ પણ સતત છે. $f(g(t)) \cdot g'(t)$ પણ સતત થશે. આમ,

$\int f(g(t)) \cdot g'(t)dt$ નું પણ અસ્તિત્વ છે.

ધારો કે, $h(x) = \int f(x)dx$

$\therefore \quad h'(x) = f(x)$

વળી, $x = g(t)$ હોવાથી,

$\therefore \quad h'(g(t)) = f(g(t))$

વળી, h એ x નું વિકલનીય વિધેય છે અને x એ t નું વિકલનીય વિધેય છે. આથી h એ t નું વિકલનીય વિધેય છે.

$$\therefore \quad \frac{d}{dt} h(g(t)) = \frac{d}{dt} (hog)(t)$$

$$= h'(g(t))\ g'(t)$$

$$= f(g(t))\ g'(t)$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt} h(g(t)) = f(g(t))\ g'(t)$$

$$\therefore \quad h(g(t)) = \int f(g(t))\ g'(t)dt$$

$$\therefore \quad h(x) = \int f(g(t))\ g'(t)dt$$

$$\therefore \quad \int f(x)dx = \int f(g(t))\ g'(t)dt$$

ડાબી બાજુએ x નું વિધેય છે તથા જમણી બાજુએ t નું વિધેય છે. પરંતુ $g'(t)$ સતત અને શૂન્યેતર હોવાથી $x = g(t)$ એક-એક વિધેય છે, આથી $t = g^{-1}(x)$ દ્વારા જમણી બાજુનું રૂપાંતર x ના વિધેયમાં થઈ શકે.

આ રીતમાં ચલ x ને બદલે નવો ચલ t દાખલ થતો હોવાથી, તેને **ચલ-પરિવર્તનની રીત** પણ કહે છે.

નોંધ : (1) આદેશની રીતના સૂત્રમાં જમણી બાજુ $g(t) = x$ મૂકતાં તેનું સ્વરૂપ $\int f(x)dx = \int f(x) \frac{dx}{dt} dt$ થશે.

(2) વ્યાખ્યા અનુસાર, $y = f(x)$, $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

અહીં, $\frac{dy}{dx}$ એ dy અને dx નું ગુણોત્તર નથી.

પરંતુ $f'(x) = \frac{(dy)}{(dx)}$ જ્યાં (dx) અને (dy) અનુક્રમે x અને y નાં વિકલ છે. આમ આપણે $dy = f'(x)dx$ લખી શકીએ. આથી જો $t = sinx$, તો $dt = cosx\ dx$. (આવતા સિમેસ્ટરમાં આપણે આનો વિગતે અભ્યાસ કરીશું.)

(3) સામાન્ય રીતે વ્યવહારમાં વપરાતાં વિધેયો e^x, $sinx$, $cosx$, $secx$ વગેરે કોઈક અંતરાલમાં ઉપરની શરતોનું પાલન કરતાં જ હોય છે, આથી દાખલા ગણતી વખતે તે શરતોની ચકાસણીમાં ઉતરીશું નહીં.

પ્રમેય 6.5 : જો $\int f(x)dx = \mathrm{F}(x)$ હોય, તો $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}\mathrm{F}(ax + b)$, જ્યાં $f : \mathrm{I} \to \mathrm{R}$ એ અંતરાલ I માં સતત વિધેય છે. ($a \neq 0$).

સાબિતી : ધારો કે, $t = ax + b$. એટલે કે $x = \frac{t-b}{a}$.

અહીં, $x = g(t)$ સતત છે અને $\frac{dx}{dt} = g'(t) = \frac{1}{a} \neq 0$. વળી, $g'(t)$ પણ સતત છે.

$$\therefore \quad \int f(ax + b)dx = \int f(t) \cdot \frac{dx}{dt}\, dt$$

$$= \int f(t)\frac{1}{a} \cdot dt$$

$$= \frac{1}{a}\int f(t)dt$$

$$= \frac{1}{a}\mathrm{F}(t)$$

$$= \frac{1}{a}\mathrm{F}(ax + b)$$

આમ, (1) $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ હોવાથી $\int (ax + b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$

(2) $\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + c$ હોવાથી $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\log|ax + b| + c$

(3) $\int cosx\, dx = sinx + c$ હોવાથી $\int cos(ax + b)dx = \frac{1}{a}sin(ax + b) + c$

(4) $\int \frac{1}{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$ હોવાથી $\int \frac{1}{(px+q)^2-(a)^2}\, dx = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{2a}\log\left|\frac{(px+q)-(a)}{(px+q)+(a)}\right| + c$

આગળ આવી ગયેલા બધાં જ પ્રમાણિત રૂપો માટે આપણે આનો ઉપયોગ કરી શકીએ છીએ.

પ્રમેય 6.6 : $\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$, ($n \neq -1$, $f(x) > 0$) જ્યાં f, f' સતત વિધેયો છે અને $f'(x) \neq 0$.

સાબિતી : ધારો કે $t = f(x)$. તેથી $1 = f'(x)\frac{dx}{dt}$

વળી, $f'(x) \neq 0$ તથા તે સતત હોવાથી $t = f(x)$ એક-એક વિધેય છે.

$$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx = \int [f(x)]^n \cdot \left(f'(x)\frac{dx}{dt}\right)dt$$

$$= \int t^n \cdot 1\, dt$$

$$= \frac{t^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\therefore \quad \int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \qquad (t = f(x))$$

આમ, (1) $\int sin^2x \cdot cosx\, dx = \int (sinx)^2 \cdot \left(\frac{d}{dx}\, sinx\right) dx = \frac{(sinx)^{2+1}}{2+1} + c = \frac{sin^3x}{3} + c$

(2) $\int \frac{\sqrt{tanx}}{cos^2x}\, dx = \int (tanx)^{\frac{1}{2}} \cdot sec^2x\, dx = \int (tanx)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{dx}\, tanx\right) dx = \frac{(tanx)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$

$$= \frac{2}{3}(tanx)^{\frac{3}{2}} + c$$

(3) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+5}}\, dx$

$$= \frac{1}{2} \int (x^2+5)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}(x^2+5)dx = \frac{1}{2} \frac{(x^2+5)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \sqrt{x^2+5} + c$$

પ્રમેય 6.7 : જો f એ $[a, b]$ માં સતત તથા (a, b) માં વિકલનીય હોય તથા f' પણ સતત અને શૂન્યેતર હોય $\forall x \in [a, b]$ અને $f(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$, તો $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + c$.

સાબિતી : f' સતત અને શૂન્યેતર છે અને f સતત તથા એકસૂત્રી (વધતું અથવા ઘટતું) વિધેય છે.

આથી, આદેશ $t = f(x)$ પરથી $x = f^{-1}(t)$ મળે.

$$\therefore \quad f'(x)\frac{dx}{dt} = 1$$

હવે, $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt$

$$= \int \frac{1}{t}\, dt$$

$$= \log |t| + c$$

$$\therefore \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + c$$

આમ,

(1) $\int \frac{x}{x^2-15}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2-15}\, dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\frac{d}{dx}(x^2-15)}{x^2-15}\, dx = \frac{1}{2} \log |x^2 - 15| + c$$

(2) $\int \frac{2cosx - 3sinx}{6cosx + 4sinx}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{-6sinx + 4cosx}{6cosx + 4sinx}\, dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\frac{d}{dx}(6cosx + 4sinx)}{(6cosx + 4sinx)}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \log |6cosx + 4sinx| + c$$

6.6 કેટલાંક વધુ પ્રમાણિત રૂપો

(16) કોઈ પણ અંતરાલ $I = \left(k\pi, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ અથવા $\left((2k-1)\frac{\pi}{2}, k\pi\right)$, $k \in Z$ માં

$\int tanx\, dx = \log |secx| + c$.

અહીં, $\int tanx \;\; dx = \int \frac{secx\ tanx}{secx}\, dx$ $\quad$ **$(secx \neq 0)$**

હવે આપેલ અંતરાલ પર $t = secx$ સતત અને વિકલનીય છે. $\frac{dt}{dx} = secx\ tanx$ પણ સતત છે અને આપેલ અંતરાલ પર શૂન્યેતર છે.

હવે $t = secx$ લેતાં, $dt = secx\ tanx\ dx$

$$\therefore \quad \int tanx\ dx = \int \frac{secx\ tanx}{secx}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{t}\, dt$$

$= \log |t| + c$

$= \log |secx| + c$

(17) કોઈ પણ અંતરાલ $I = \left(k\pi, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ અથવા $\left((2k-1)\frac{\pi}{2}, k\pi\right)$, $k \in Z$ પર

$\int cotx\ dx = \log |sinx| + c$.

અહીં, $\int cotx\ dx = \int \frac{cosx}{sinx}\ dx$

હવે આપેલ અંતરાલ પર $t = sinx$ સતત અને વિકલનીય છે તથા આપેલ અંતરાલ પર શૂન્યેતર છે. $\frac{dt}{dx} = cosx$ પણ સતત છે તથા આપેલ અંતરાલ પર શૂન્યેતર છે.

હવે, $t = sinx$ લેતાં, $dt = cosx\ dx$

$\therefore \int cotx\ dx = \int \frac{cosx}{sinx}\ dx$

$= \int \frac{1}{t}\ dt$

$= \log |t| + c$

$= \log |sinx| + c$

(18) કોઈ પણ અંતરાલ $I = \left(k\pi, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ અથવા $\left((2k-1)\frac{\pi}{2}, k\pi\right)$, $k \in Z$ પર

$\int cosecx\ dx = \log |cosecx - cotx| + c$, $x \neq k\pi$, $k \in Z$

$= \log \left|tan\frac{x}{2}\right| + c$

આપેલ અંતરાલ પર $1 - cosx \neq 0$ અને $sinx \neq 0$

$\therefore \quad cosecx - cotx = \frac{1 - cosx}{sinx} \neq 0.$

હવે, $I = \int cosecx\ dx = \int \frac{cosecx\ (cosecx - cotx)}{(cosecx - cotx)}\ dx$

$= \int \frac{cosec^2x - cotx\ cosecx}{cosecx - cotx}\ dx$

હવે, $t = cosecx - cotx$ એ આપેલ અંતરાલ પર સતત, વિકલનીય અને શૂન્યેતર છે.

$\frac{dt}{dx} = cosec^2x - cosecx\ cotx$ એ આપેલ અંતરાલ પર સતત અને શૂન્યેતર છે.

$\therefore \quad I = \int \frac{1}{t}\ dt$

$= \log |t| + c$

$= \log |cosecx - cotx| + c$

વળી, $\log |cosecx - cotx| = \log \left|\frac{1 - cosx}{sinx}\right|$

$= \log \left|\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}\right|$

$= \log \left|tan\frac{x}{2}\right|$

આમ, $\int cosecx\ dx = \log |cosecx - cotx| + c$

$= \log \left|tan\frac{x}{2}\right| + c$

(19) કોઈ પણ અંતરાલ $I = \left(k\pi, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ અથવા $\left((2k-1)\frac{\pi}{2}, k\pi\right)$, $k \in Z$ પર

$$\int secx\ dx = \log|secx + tanx| + c$$

$$= \log\left|tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + c$$

$secx + tanx = \frac{1+sinx}{cosx}$, $x \neq (4k-1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$.

આપેલ અંતરાલ પર $1 + sinx \neq 0$ અને $cosx \neq 0$

હવે, $I = \int secx\ dx = \int \frac{secx\ (secx + tanx)}{secx + tanx}\ dx$

હવે, $t = secx + tanx$ એ આપેલ અંતરાલ પર સતત, વિકલનીય અને શૂન્યેતર છે.

$\frac{dt}{dx} = secx\ tanx + sec^2x$ પણ આપેલ અંતરાલ પર સતત અને શૂન્યેતર છે.

$$\therefore \quad I = \int \frac{sec^2x + secx\,tanx}{secx + tanx}\ dt$$

$$= \int \frac{1}{t}\ dt$$

$$= \log|t| + c$$

$$= \log|secx + tanx| + c$$

વળી, $\log|secx + tanx| = \log\left|\frac{1+sinx}{cosx}\right|$

$$= \log\left|\frac{sin^2\frac{x}{2} + cos^2\frac{x}{2} + 2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2}}\right|$$

$$= \log\left|\frac{(cos\frac{x}{2} + sin\frac{x}{2})^2}{(cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2})}\right|$$

$$= \log\left|\frac{cos\frac{x}{2} + sin\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2}}\right|$$

$$= \log\left|\frac{1 + tan\frac{x}{2}}{1 - tan\frac{x}{2}}\right|$$

$$= \log\left|tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|$$

આમ, $\int secx\ dx = \log|secx + tanx| + c$

$$= \log\left|tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + c$$

ઉદાહરણ 6 : $\int \frac{2x^3 + 5x^2 + 3x + 1}{2x - 1}\ dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{2x^3 + 5x^2 + 3x + 1}{2x - 1}\ dx$

$$= \int \frac{(2x-1)(x^2 + 3x + 3) + 4}{2x - 1}\ dx$$

$$= \int \left(x^2 + 3x + 3 + \frac{4}{2x-1}\right) dx$$

$$= \int x^2 dx + 3\int x\, dx + 3\int dx + 4\int \frac{1}{2x-1}\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + 3\,\frac{x^2}{2} + 3x + 4 \cdot \frac{1}{2}\log|2x-1| + c$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 3x + 2\log|2x-1| + c$$

ઉદાહરણ 7 : $\int \left(\frac{1}{\sqrt{16-9x^2}} + \frac{1}{25-9x^2}\right) dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \left(\frac{1}{\sqrt{16-9x^2}} + \frac{1}{25-9x^2}\right) dx$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{(4)^2-(3x)^2}}\, dx + \int \frac{1}{(5)^2-(3x)^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3x}{4}\right) + \frac{1}{2(5)} \times \frac{1}{3}\log\left|\frac{5+3x}{5-3x}\right| + c$$

$$= \frac{1}{3}\sin^{-1}\frac{3x}{4} + \frac{1}{30}\log\left|\frac{5+3x}{5-3x}\right| + c$$

ઉદાહરણ 8 : $\int (7x+5)\sqrt{3x+2}\, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : આપણે એવા અચળો m અને n મેળવીશું, કે જેથી

$7x + 5 = m(3x + 2) + n$

$7x + 5 = 3mx + 2m + n$

બંને બાજુએ x ના સહગુણક અને અચળ પદ સરખાવતાં,

$3m = 7$ અને $2m + n = 5$

$\therefore \quad m = \frac{7}{3}$ અને $\frac{14}{3} + n = 5$. આમ, $n = 5 - \frac{14}{3} = \frac{1}{3}$

$\therefore \quad I = \int [m(3x+2) + n]\sqrt{3x+2}\, dx$

$$= \int \left[\frac{7}{3}(3x+2) + \frac{1}{3}\right]\sqrt{3x+2}\, dx$$

$$= \int \left[\frac{7}{3}(3x+2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}(3x+2)^{\frac{1}{2}}\right] dx$$

$$= \frac{7}{3}\int (3x+2)^{\frac{3}{2}} dx + \frac{1}{3}\int (3x+2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{7}{3}\,\frac{(3x+2)^{\frac{5}{2}}}{3 \times \frac{5}{2}} + \frac{1}{3}\,\frac{(3x+2)^{\frac{3}{2}}}{3 \times \frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{14}{45}(3x+2)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{27}(3x+2)^{\frac{3}{2}} + c$$

ઉદાહરણ 9 : $\int \frac{3x+4}{\sqrt{4x+5}}\, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{3x+4}{\sqrt{4x+5}}\, dx$

$$= \int \frac{\frac{3}{4}(4x+5)+\frac{1}{4}}{\sqrt{4x+5}}\, dx$$

$$= \frac{3}{4}\int \frac{4x+5}{\sqrt{4x+5}}\, dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{4x+5}}\, dx$$

$$= \frac{3}{4}\int (4x+5)^{\frac{1}{2}}\, dx + \frac{1}{4}\int (4x+5)^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \frac{3}{4}\,\frac{(4x+5)^{\frac{3}{2}}}{4\times\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}\,\frac{(4x+5)^{\frac{1}{2}}}{4\times\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{8}(4x+5)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}(4x+5)^{\frac{1}{2}} + c$$

ઉદાહરણ 10 : $\int sin^4x\, cos^4x\, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int sin^4x\, cos^4x\, dx.$

$$= \frac{1}{16}\int (2sinx\, cosx)^4\, dx$$

$$= \frac{1}{16}\int (sin2x)^4\, dx$$

$$= \frac{1}{16}\int \left(\frac{1-cos\,4x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{64}\int (1 - 2cos\,4x + cos^2 4x)\, dx$$

$$= \frac{1}{64}\int \left(1 - 2cos\,4x + \left(\frac{1+cos\,8x}{2}\right)\right) dx$$

$$= \frac{1}{128}\int (3 - 4cos\,4x + cos\,8x)\, dx$$

$$= \frac{1}{128}\left[3x - \frac{4sin\,4x}{4} + \frac{sin\,8x}{8}\right] + c$$

$$= \frac{1}{128}\left[3x - sin\,4x + \frac{1}{8}sin\,8x\right] + c$$

ઉદાહરણ 11 : $\int sinax\, cosbx\, dx,\ a \neq \pm b$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int (sinax\, cosbx)\, dx$

$$= \frac{1}{2}\int (2sinax\, cosbx)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int [sin\,(ax+bx) + sin(ax-bx)]\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int sin\,(a+b)x\, dx + \frac{1}{2}\int sin(a-b)x\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{cos\,(a+b)x}{a+b} - \frac{1}{2}\,\frac{cos\,(a-b)x}{a-b} + c$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{cos\,(a+b)x}{a+b} + \frac{cos\,(a-b)x}{a-b}\right] + c$$

ઉદાહરણ 12 : $\int sinx\ sin2x\ sin3x\ dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int sinx\ sin2x\ sin3x\ dx$

$$= \frac{1}{2}\int (2sin\ 2x \cdot sinx) \cdot sin3x\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (cosx - cos3x)\ sin3x\ dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (2sin\ 3x\ cosx - 2sin\ 3x\ cos3x)\ dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (sin\ 4x + sin\ 2x - sin\ 6x)\ dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{cos4x}{4} - \frac{cos2x}{2} + \frac{cos6x}{6}\right] + c$$

$$= \frac{1}{24}\ cos6x - \frac{1}{16}\ cos4x - \frac{1}{8}\ cos2x + c$$

ઉદાહરણ 13 : $\int \frac{1}{sin(x-a)\ cos(x-b)}\ dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{1}{sin(x-a)\ cos(x-b)}\ dx$

$$= \frac{1}{cos(a-b)}\int \frac{cos(a-b)}{sin(x-a)\ cos(x-b)}\ dx$$

$$= \frac{1}{cos(a-b)}\int \frac{cos[(x-a)-(x-b)]}{sin(x-a)\ cos(x-b)}\ dx \qquad (cos(b-a) = cos(a-b))$$

$$= \frac{1}{cos(a-b)}\int \frac{cos(x-a)\ cos(x-b) + sin(x-a)\ sin(x-b)}{sin(x-a) \cdot cos(x-b)}\ dx$$

$$= \frac{1}{cos(a-b)}\int [cot(x-a) + tan(x-b)]\ dx$$

$$= \frac{1}{cos(a-b)}\ [\log|sin(x-a)| - \log|cos(x-b)|] + c$$

$$= \frac{1}{cos(a-b)}\ \log\left|\frac{sin(x-a)}{cos(x-b)}\right| + c$$

ઉદાહરણ 14 : $\int \frac{sinx\ cosx}{3sin^2x - 4cos^2x}\ dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{sinx\ cosx}{3sin^2x - 4cos^2x}\ dx$

ધારો કે $3sin^2x - 4cos^2x = t$

$\therefore$ $[3(2sinx\ cosx) + 4(2cosx\ sinx)]dx = dt$

$\therefore$ $14sinx\ cosx\ dx = dt$

$\therefore$ $sinx\ cosx\ dx = \frac{1}{14}\ dt$

$\therefore$ $I = \frac{1}{14}\int \frac{1}{t}\ dt$

$$= \frac{1}{14}\log|t| + c$$

$$= \frac{1}{14}\log|3sin^2x - 4sin^2x| + c$$

ઉદાહરણ 15 : $\int \frac{1}{2-3\cos 2x}\, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{1}{2-3\cos 2x}\, dx$

$$= \int \frac{1}{2-3\left(\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\right)}\, dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x\, dx}{2(1+\tan^2 x) - 3 + 3\tan^2 x}$$

$$= \int \frac{\sec^2 x\, dx}{5\tan^2 x - 1}$$

$\tan x = t$ લેતાં, $\sec^2 x\, dx = dt$

$$\therefore \quad I = \int \frac{dt}{5t^2 - 1}$$

$$= \int \frac{dt}{(\sqrt{5}t)^2 - (1)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}} \log \left| \frac{\sqrt{5}t - 1}{\sqrt{5}t + 1} \right| + c$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}} \log \left| \frac{\sqrt{5}\tan x - 1}{\sqrt{5}\tan x + 1} \right| + c$$

ઉદાહરણ 16 : $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{1-9\sin x}}\, dx$ મેળવો. $\left(\sin x < \frac{1}{9}\right)$

ઉકેલ : $I = \int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{1-9\sin x}}\, dx$

$1 - 9\sin x = t^3$ લેતાં,

$-9\cos x\, dx = 3t^2\, dt$

$$\therefore \quad I = \int \frac{-\frac{1}{9} 3t^2\, dt}{t}$$

$$= -\frac{1}{3} \int t\, dt$$

$$= \frac{-t^2}{6} + c$$

$$= -\frac{1}{6}(1 - 9\sin x)^{\frac{2}{3}} + c$$

ઉદાહરણ 17 : $\int \frac{\cos^9 x}{\sin x}\, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{\cos^9 x}{\sin x}\, dx$

$\sin x = t$ લેતાં, $\cos x\, dx = dt$

$$\therefore \quad I = \int \frac{(\cos^2 x)^4}{\sin x} \cos x\, dx$$

$$= \int \frac{(1-\sin^2 x)^4}{\sin x} \cos x\, dx$$

$$= \int \frac{(1-t^2)^4}{t}\, dt$$

$$= \int \frac{1 - 4t^2 + 6t^4 - 4t^6 + t^8}{t}\, dt$$

$$= \int \left(\frac{1}{t} - 4t + 6t^3 - 4t^5 + t^7\right) dx$$

$$= \log|t| - \frac{4t^2}{2} + \frac{6t^4}{4} - \frac{4t^6}{6} + \frac{t^8}{8} + c$$

$$= \log|\sin x| - 2\sin^2 x + \frac{3}{2}\sin^4 x - \frac{2}{3}\sin^6 x + \frac{1}{8}\sin^8 x + c$$

ઉદાહરણ 18 : $\int \frac{x^2 \sin^{-1}(x^3)}{\sqrt{1-x^6}}\, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{x^2 \sin^{-1}(x^3)}{\sqrt{1-x^6}}\, dx$

$\sin^{-1} x^3 = t$ લેતાં, $\frac{3x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}} = dt$

$$\frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^6}} = \frac{1}{3} dt$$

$$\therefore \quad I = \int \sin^{-1}(x^3) \cdot \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^6}}$$

$$= \int \frac{1}{3} t \cdot dt$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{t^2}{2}\right] + c$$

$$= \frac{1}{6}[\sin^{-1}(x^3)]^2 + c$$

સ્વાધ્યાય 6.2

યોગ્ય પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત નીચે આપેલાં વિધેયોનાં x વિશે સંકલિતો મેળવો :

1. $\frac{1}{5x-3}$
2. $e^{7x+4} + (5x-3)^8$
3. $\frac{7^{2x+3}\sin^2 2x + \cos^2 2x}{\sin^2 2x}$
4. $5^{4x+3} - 3\sin(2x+3)$
5. $\frac{1}{\sqrt{5x^2-4}}$
6. $\frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}$
7. $\frac{1}{\sqrt{5x^2+3}} + \frac{1}{9-4x^2}$
8. $\frac{1}{\sqrt{2x^2+3}} + \frac{1}{7x^2+3}$
9. $\frac{(2x+1)^2}{x-2}$
10. $\frac{x^5+2}{x+1}$
11. $\frac{1}{\sqrt{5-3x}}$
12. $3^{5x-2} + \frac{1}{(2x+1)^3}$
13. $\cot^2(3+5x)$
14. $\sin^2(3x+5)$
15. $\frac{1-\cos 3x}{\sin^2 3x}$
16. $\sqrt{1+\cos x}$, $0 < x < \pi$
17. $\frac{1}{\sqrt{3x+4}-\sqrt{3x+1}}$
18. $\frac{1}{\sqrt{5-2x}+\sqrt{3-2x}}$
19. $\frac{x+2}{(x+1)^2}$
20. $\frac{x^2+1}{(x+1)^2}$
21. $\frac{x^3+3x^2+2x+1}{x-1}$
22. $x\sqrt{x+3}$
23. $\frac{x}{\sqrt{x+1}}$
24. $\frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}$
25. $\frac{8x+13}{\sqrt{4x+7}}$
26. $\cos^4 x$
27. $\sin^3 x \cos^3 x$
28. $\sin^3(2x-1)$
29. $\cos 2x \cdot \cos 4x$
30. $\frac{\sin 4x}{\sin x}$
31. $\cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 6x$
32. $\frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}$
33. $\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ $0 < x < \pi$
34. $\sin mx \cdot \sin nx$, $m \neq n$, $m, n \in \mathbb{N}$
35. $\frac{\sin x}{\sin(x-a)}$
36. $\frac{1}{\sin(x-a)\sin(x-b)}$
37. $\frac{3x+2}{3-2x}$
38. $(3x^2-4x+5)^{\frac{3}{2}}(3x-2)$
39. $\frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+4}}$
40. $x^3\sqrt{5x^4+3}$
41. $\frac{\sin^2(\log x)}{x}$
42. $\frac{\sqrt{1+\log x}}{x}$
43. $\frac{\sin 2x}{(m+n\cos 2x)^2}$
44. $\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$
45. $\frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}$
46. $e^{-x}\operatorname{cosec}^2(2e^{-x}+3)$
47. $\frac{x^{e-1}+e^{x-1}}{x^e+e^x}$
48. $\frac{(3\tan^2 x+2)\sec^2 x}{(\tan^3 x+2\tan x+9)^2}$
49. $\frac{\sin 2x}{(b\cos^2 x+a\sin^2 x)^2}$
50. $\frac{\tan x}{a^2+b^2\tan^2 x}$, $(a < b)$
51. $\frac{x\sin^{-1}x^2}{\sqrt{1-x^4}}$
52. $\frac{(\tan^{-1}x)^{-\frac{3}{2}}}{1+x^2}$

53. $\frac{e^x \log(\sin e^x)}{\tan e^x}$

54. $\frac{\log(x+1) - \log x}{x(x+1)}$

55. $\tan^3 x$

56. $\sec^4 x \ \tan x$

57. $\tan^6 x$

58. $\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}$

59. $\frac{x^2}{(x+2)^{\frac{1}{3}}}$

60. $\frac{1}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$

61. $\frac{1}{3 - 2\sin^2 x}$

62. $\frac{\sin x}{\sin 3x}$

63. $\frac{1}{8\cos^2 x + 3\sin^2 x + 1}$

64. $\frac{1}{3\sin^2 x + \cos 2x}$

*

6.7 ત્રિકોણમિતીય આદેશો

કેટલીકવાર યોગ્ય ત્રિકોણમિતીય આદેશની મદદથી આપેલા સંકલ્યને એવા સરળ સ્વરૂપમાં ફેરવી શકાય કે જેથી તેનું સંકલિત સહેલાઈથી પ્રાપ્ત થઈ શકે. ખાસ કરીને સંકલ્ય $\sqrt{x^2 - a^2}$, $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{x^2 + a^2}$ જેવાં સ્વરૂપમાં હોય ત્યારે ત્રિકોણમિતીય આદેશ બહુ ઉપયોગી છે. આ સમજવા આપણે એક ઉદાહરણ લઈએ.

ધારો કે $\int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx$ મેળવવું છે. $(0 < x < 2)$

$x = 2\sin\theta$ લેતાં, $dx = 2\cos\theta \, d\theta$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\therefore \quad I = \int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx$$

$$= \int \frac{4\sin^2\theta}{\sqrt{4 - 4\sin^2\theta}} \cdot 2\cos\theta \, d\theta$$

$$= \int \frac{4\sin^2\theta \cdot 2\cos\theta \, d\theta}{2\cos\theta} \qquad \left(\cos\theta > 0 \text{ કારણ કે } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= 4\int \sin^2\theta \, d\theta$$

$$= 4\int \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= 2\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right] + c$$

$$= 2\theta - 2\sin\theta \cos\theta + c$$

પરંતુ, $x = 2\sin\theta$. આથી $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$2\sin\theta \cos\theta = 2 \cdot \frac{x}{2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}x\sqrt{4 - x^2}$$

$$\therefore \quad I = 2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}x\sqrt{4 - x^2} + c$$

કેટલાંક વારંવાર ઉપયોગમાં આવતાં વિધેયો અને તેમનાં સંકલિતો શોધવા માટે ઉપયોગમાં લેવાતા ત્રિકોણમિતીય આદેશોની યાદી નીચે આપી છે. તે મહદ્અંશે સંકલ્યમાંથી વર્ગમૂળ દૂર કરે છે. અહીં આપણે $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ લઈશું.

સંકલ્ય	આદેશ
$\sqrt{x^2+a^2}$	$x = a tan\theta$ અથવા $x = a cot\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a sec\theta$ અથવા $x = a cosec\theta$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a sin\theta$ અથવા $x = a cos\theta$
$\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x = a cos2\theta$
$\sqrt{2ax-x^2}$	$x = 2a\, sin^2\theta$
$\sqrt{2ax-x^2} = \sqrt{a^2-(x-a)^2}$	$x - a = a\, sin\theta$ અથવા $a\, cos\theta$

ઉદાહરણ 19 : $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-b^4}}\, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $I = \int \frac{1}{x\sqrt{x^4-b^4}}\, dx$

ધારો કે $x^2 = b^2 sec\theta$ $\qquad (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$

$\therefore \quad 2x\, dx = b^2 sec\theta\ tan\theta\ d\theta$

$\therefore \quad I = \int \frac{2x\, dx}{2x^2\sqrt{x^4-b^4}}$

$= \int \frac{b^2\, sec\,\theta\, tan\,\theta\, d\,\theta}{2b^2\, sec\,\theta\sqrt{b^4\, sec^2\theta - b^4}}$

$= \frac{1}{2b^2}\int d\theta$ $\qquad (tan\theta > 0)$

$= \frac{1}{2b^2}(\theta) + c$

પરંતુ, $x^2 = b^2 sec\theta$.

આથી $sec\theta = \frac{x^2}{b^2}$

$\therefore \quad \theta = sec^{-1}\frac{x^2}{b^2}$

$\therefore \quad I = \frac{1}{2b^2}\, sec^{-1}\left(\frac{x^2}{b^2}\right) + c$

ઉદાહરણ 20 : $\int \frac{\sqrt{3-x}}{x}\, dx$ મેળવો. $(0 < x < 3)$

ઉકેલ : અહીં, $I = \int \frac{\sqrt{3-x}}{x}\, dx$

$x = 3sin^2\theta$ લેતાં, $\qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$dx = 3(2sin\theta\ cos\theta)\ d\theta$

$\therefore \quad I = \int \frac{\sqrt{3-3sin^2\theta}}{3sin^2\theta}\, 6sin\theta\, cos\theta\, d\theta$

$= \int \frac{2\sqrt{3}\, cos^2\theta}{sin\theta}\, d\theta$

$= 2\sqrt{3} \int \frac{1-sin^2\theta}{sin\theta}\, d\theta$

$= 2\sqrt{3} \int (cosec\theta - sin\theta)\, d\theta$

$= 2\sqrt{3}\, [\log |cosec\theta - cot\theta| + cos\theta] + c$

પરંતુ $sin^2\theta = \frac{x}{3}$, $cos^2\theta = 1 - \frac{x}{3}$

$\therefore \quad cos\theta = \sqrt{\frac{3-x}{3}}$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow cos\theta > 0\right)$

$cosec^2\theta = \frac{3}{x}$. આથી $cosec\theta = \sqrt{\frac{3}{x}}$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

વળી, $1 + cot^2\theta = \frac{3}{x}$. આથી $cot\theta = \sqrt{\frac{3}{x} - 1} = \sqrt{\frac{3-x}{x}}$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \quad I = 2\sqrt{3}\left[\log \left| \sqrt{\frac{3}{x}} - \sqrt{\frac{3-x}{x}} \right| + \sqrt{\frac{3-x}{3}}\right] + c$

ઉદાહરણ 21 : $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\, dx$ મેળવો. $(x < 0)$

ઉકેલ : $I = \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\, dx$

ધારો કે $\theta = tan^{-1}x$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$. આથી $x = tan\,\theta$.

આથી $dx = sec^2\theta\, d\theta$, $\quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$\therefore \quad I = \int \frac{\sqrt{tan^2\theta+1}}{tan^4\theta} \cdot sec^2\theta\, d\theta$

$= \int \frac{sec\theta \cdot sec^2\theta}{tan^4\theta}\, d\theta$ $(sec\theta > 0)$

$= \int \frac{cos\theta}{sin^4\theta}\, d\theta$

$= \int (sin\theta)^{-4} \frac{d}{d\theta}(sin\theta)\, d\theta$

$= \frac{(sin\,\theta)^{-3}}{-3} + c$

$= -\frac{1}{3} \frac{1}{sin^3\theta} + c$

$= -\frac{1}{3} cosec^3\theta + c$

હવે, $tan\theta = x$. આથી $cot\,\theta = \frac{1}{x}$

અને $cosec\theta = -\sqrt{1+cot^2\theta} = -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{-\sqrt{x^2+1}}{|x|} = \frac{-\sqrt{x^2+1}}{-x} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < 0\right)$

$\therefore \quad I = -\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)^3 + c$

$= -\frac{1}{3}\,\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3} + c$

ઉદાહરણ 22 : $\int \frac{1}{(x-1)^{\frac{3}{2}}\,(x-2)^{\frac{1}{2}}}\,dx$ મેળવો. $(x > 2)$

ઉકેલ : $I = \int \frac{dx}{(x-1)^{\frac{3}{2}}\,(x-2)^{\frac{1}{2}}}$

$x - 1 = sec^2\theta$ લઈશું. આથી $dx = 2sec\theta\ sec\theta\ tan\theta\ d\theta$ $\quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \quad dx = 2\ sec^2\theta\ tan\theta\ d\theta$

$\therefore \quad I = \int \frac{2sec^2\theta\,tan\theta\,d\theta}{(sec^2\theta)^{\frac{3}{2}}\,(sec^2\theta-1)^{\frac{1}{2}}}$

$= \int \frac{2sec^2\theta\,tan\theta\,d\theta}{sec^3\theta \cdot tan\theta}$

$= 2\int cos\theta\ d\theta$

$= 2sin\theta + c$

હવે, $sec^2\theta = x - 1$. તેથી $cos^2\theta = \frac{1}{x-1}$

અને $sin^2\theta = 1 - cos^2\theta = 1 - \frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1}$

$\therefore \quad sin\theta = \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$ $\quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \quad I = 2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + c$

6.8 એક વિશિષ્ટ આદેશ

સંકલ્ય $\frac{1}{a+bsinx}$, $\frac{1}{a+bcosx}$ અથવા $\frac{1}{a+bsinx+c\,cosx}$ સ્વરૂપનું હોય, તો આ વિકલ્પમાં $tan\frac{x}{2} = t$ આદેશ લઈ શકાય. આ આદેશ ઉપરના સ્વરૂપના સંકલ્યને t ના સરળ બૈજિક સંકલ્યમાં રૂપાંતરિત કરે છે.

$tan\frac{x}{2} = t$ લેતાં, $sec^2\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2}\,dx = dt$. વળી, $sec^2\frac{x}{2} = 1 + tan^2\frac{x}{2} = 1 + t^2$

$\therefore \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$sinx = \frac{2tan\frac{x}{2}}{1+tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$ અને $cosx = \frac{1-tan^2\frac{x}{2}}{1+tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

આમ, આપેલ સંકલ્ય t ના સંકલ્યમાં રૂપાંતરિત થશે.

ઉદાહરણ 23 : $\int \frac{1}{1-2\sin x}\, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $\tan\frac{x}{2} = t$ લેતાં, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ અને $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$$\therefore \quad I = \int \frac{1}{1-2\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= 2\int \frac{1}{t^2-4t+1}\, dt$$

$$= 2\int \frac{1}{t^2-4t+4-3}\, dt$$

$$= 2\int \frac{1}{(t-2)^2-(\sqrt{3})^2}\, dt$$

$$= 2 \times \frac{1}{2\sqrt{3}} \log\left|\frac{t-2-\sqrt{3}}{t-2+\sqrt{3}}\right| + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \log\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-2-\sqrt{3}}{\tan\frac{x}{2}-2+\sqrt{3}}\right| + c$$

ઉદાહરણ 24 : $\int \frac{dx}{\cos\alpha + \cos x}$ મેળવો. $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

ઉકેલ : $I = \int \frac{dx}{\cos\alpha + \cos x}$

$\tan\frac{x}{2} = t$ લેતાં, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\therefore \quad I = \int \frac{1}{\cos\alpha + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{2\, dt}{\cos\alpha + t^2\cdot\cos\alpha + 1 - t^2}$$

$$= 2\int \frac{dt}{(1+\cos\alpha)-(1-\cos\alpha)t^2}$$

$$= 2\int \frac{dt}{2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot t^2}$$

$$= \int \frac{dt}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(t\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} \log\left|\frac{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\,t}{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\,t}\right| + c$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha} \log\left|\frac{1+\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{x}{2}}\right| + c$$

6.9 $\int sin^m x\ cos^n x\ dx$ સ્વરૂપના સંકલિતો, જ્યાં $m, n \in N$

અહીં $m, n \in N$ ધન પૂર્ણાંકો છે, તેથી નીચે આપેલાં વિકલ્પો શક્ય છે :

(1) m, n બંને યુગ્મ પૂર્ણાંક

(2) m અયુગ્મ અને n યુગ્મ

(3) m યુગ્મ અને n અયુગ્મ

(4) m અને n બંને યુગ્મ.

ધારો કે $I = \int sin^m x\ cos^n x\ dx$

વિકલ્પ 1 : m, n બંને અયુગ્મ પૂર્ણાંક છે.

આ સંજોગોમાં I શોધવા માટે $sinx = t$ અથવા $cosx = t$ લઈશું. સામાન્ય રીતે $m > n$ હોય, તો $sinx = t$ અને જો $n > m$ હોય, તો $cosx = t$ અનુકૂળ રહેશે.

વિકલ્પ 2 : m અયુગ્મ અને n યુગ્મ છે.

આ સંજોગોમાં I શોધવા માટે $cosx = t$ લઈશું.

વિકલ્પ 3 : m યુગ્મ અને n અયુગ્મ છે.

આ સંજોગોમાં I શોધવા માટે $sinx = t$ લઈશું.

વિકલ્પ 4 : m અને n બંને યુગ્મ.

આ સંજોગોમાં $sin^m x\, cos^n x$નું રૂપાંતર કરવા માટે $sin^2 x = \frac{1 - cos2x}{2}$ અને $cos^2 x = \frac{1 + cos2x}{2}$ સૂત્રો વાપરીશું.

અત્રે એ નોંધીશું કે m અને nની નાની કિંમતો માટે આ રીત સરળ રહેશે. m અને n બંનેની મોટી કિંમતો માટે બીજી રીતો ઉપલબ્ધ છે, જે આપણે આ કક્ષાએ શીખવાની નથી.

ઉદાહરણ 25 : $\int cos^2 x\ sin^5 x\ dx$ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $m = 5$ અયુગ્મ છે.

$\therefore$ $cos\,x = t$ લેતાં, $-sinx\ dx = dt$

$\therefore$ $sinx\ dx = -dt$

$$I = \int cos^2 x\ sin^5 x\ dx$$

$$= \int sin^4 x \cdot cos^2 x \cdot sinx\ dx$$

$$= \int (1 - cos^2 x)^2 \cdot cos^2 x\ sinx\ dx$$

$$= \int (1 - t^2)^2\ t^2\ (-dt)$$

$$= \int (1 - 2t^2 + t^4)(-t^2)\ dt$$

$$= \int (2t^4 - t^6 - t^2)\ dt$$

$$= \frac{2t^5}{5} - \frac{t^7}{7} - \frac{t^3}{3} + c$$

$$= \frac{2}{5}cos^5 x - \frac{1}{7}cos^7 x - \frac{1}{3}cos^3 x + c$$

ઉદાહરણ 26 : $\int sin^{23} x \cdot cos^3 x\ dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int sin^{23} x \cdot cos^3 x\ dx$

અહીં, $m = 23$, $n = 3$. m અને n બંને અયુગ્મ છે.

પરંતુ $m > n$. $sinx = t$ લેતાં, $cosx\ dx = dt$

$$I = \int sin^{23} x \cdot cos^2 x \cdot cosx\ dx$$

$$= \int sin^{23} x \cdot (1 - sin^2 x)\ cosx\ dx$$

$$= \int t^{23} (1 - t^2)\ dt$$

$$= \int (t^{23} - t^{25})\ dt$$

$$= \frac{t^{24}}{24} - \frac{t^{26}}{26} + c$$

$$= \frac{sin^{24} x}{24} - \frac{sin^{26} x}{26} + c$$

ઉદાહરણ 27 : $\int sin^2 x \cdot cos^4 x\ dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int sin^2 x \cdot cos^4 x\ dx$

અહીં m અને n બંને યુગ્મ છે.

$$\therefore \quad sin^2x \cdot cos^4x = \frac{1}{4}(4sin^2x \cdot cos^2x)\ cos^2x$$
$$= \frac{1}{4}sin^2 2x \cdot cos^2x$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1 - cos\,4x}{2}\right)\left(\frac{1 + cos\,2x}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{16}(1 - cos4x + cos2x - cos4x\ cos2x)$$
$$= \frac{1}{16}\left[1 - cos4x + cos2x - \frac{(2cos4x\,cos2x)}{2}\right]$$
$$= \frac{1}{32}[2 - 2cos4x + 2cos2x - cos6x - cos2x]$$
$$= \frac{1}{32}(2 - 2cos4x + cos2x - cos6x)$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{32}\int [2 + cos2x - 2cos4x - cos6x]\,dx$$
$$= \frac{1}{32}\left[2x + \frac{sin\,2x}{2} - \frac{2sin\,4x}{4} - \frac{sin\,6x}{6}\right] + c$$
$$= \frac{1}{192}[12x + 3sin2x - 3sin4x - sin6x] + c$$

સ્વાધ્યાય 6.3

યોગ્ય પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત નીચે આપેલાં વિધેયો માટે ત્રિકોણમિતીય આદેશો લઈ સંકલિતો મેળવો :

1. $\frac{1}{x^2\sqrt{1 - x^2}}$ $(|x| < 1)$
2. $\frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}$, $(0 < x < 3)$
3. $\frac{1}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$
4. $x^2\sqrt{a^6 - x^6}$, $(0 < x < a)$
5. $\frac{1}{\sqrt{2ax - x^2}}$ $(0 < x < 2a)$
6. $\sqrt{\frac{2 - x}{x}}$ $(0 < x < 2)$
7. $\sqrt{\frac{a - x}{a + x}}$ $(0 < x < a)$
8. $\frac{x^2}{\sqrt{a^6 - x^6}}$ $(0 < x < a)$
9. $\frac{1}{x^2(1 + x^2)^2}$
10. $\frac{x}{(16 - 9x^2)^{\frac{3}{2}}}$ $\left(0 < x < \frac{4}{3}\right)$
11. $\frac{x^2}{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}$ $(|x| > |a|)$
12. $x\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$ $(0 < x < a)$
13. $\frac{1}{(x - 1)^{\frac{1}{2}}(x - 2)^{\frac{1}{2}}}$ $(x > 2)$
14. $\frac{\sqrt{25 - x^2}}{x^2}$ $(0 < x < 5)$
15. $\frac{1}{1 + sinx + cosx}$
16. $\frac{1}{3 + 2\,sinx + cosx}$
17. $\frac{1}{5 + 4\,cosx}$
18. $\frac{1}{1 + cos\alpha\,cosx}$
19. $\frac{1}{2 - cosx}$
20. $\frac{1}{cosx - sinx}$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{4}\right)$

21. $sin^4x \ \ cos^3x$

22. $sin^3x \ \ cos^{10}x$

23. $cos^3x \ \ sin^7x$

24. $sin^5x \ \ cos^4x$

25. sin^5x

26. $sin^4x \ \ cos^2x$

*

6.10 (1) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ અને $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, (2) $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx$ અને $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ સ્વરૂપનાં સંકલિતો

(1) આ પ્રકારના સંકલિતો મેળવવાં આપણે $ax^2 + bx + c$ ને નીચેની રીતે પૂર્ણવર્ગના સરવાળા કે તફાવત તરીકે વ્યક્ત કરીશું.

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$$= \begin{cases} a\ [(x + \alpha)^2 - \beta^2], \text{ જ્યાં } b^2 - 4ac > 0 \text{ તથા } \beta^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ a\ [(x + \alpha)^2 + \beta^2], \text{ જ્યાં } b^2 - 4ac < 0 \text{ તથા } \beta^2 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \end{cases}$$

આમ, $ax^2 + bx + c = a\,[(x + \alpha)^2 \pm \beta^2]$. આથી, $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ અને $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ સંકલિતો, આગળ આપેલા સંકલનના પ્રમાણિત સ્વરૂપનો ઉપયોગ કરી મેળવી શકાય. આપેલાં ઉદાહરણોથી આ સંકલ્પના સ્પષ્ટ થશે.

(**નોંધ :** જો $b^2 = 4ac$, તો $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$)

ઉદાહરણ 28 : $\int \frac{dx}{3x^2 + 13x - 10}$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{dx}{3x^2 + 13x - 10}$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2 + \frac{13}{3}x - \frac{10}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2 + \frac{13}{3}x + \left(\frac{13}{6}\right)^2 - \left(\frac{13}{6}\right)^2 - \frac{10}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{13}{6}\right)^2 - \left(\frac{17}{6}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2\left(\frac{17}{6}\right)} \log \left| \frac{x + \frac{13}{6} - \frac{17}{6}}{x + \frac{13}{6} + \frac{17}{6}} \right| + c$$

$$= \frac{1}{17} \log \left| \frac{x - \frac{2}{3}}{x + 5} \right| + c$$

$$= \frac{1}{17} \log \left| \frac{3x - 2}{3(x + 5)} \right| + c$$

(**નોંધ :** $I = \frac{1}{17} \log \left| \frac{3x - 2}{3(x + 5)} \right| + c$

$$= \frac{1}{17} \left[\log |3x - 2| - \log 3 - \log |x + 5|\right] + c$$

$= \frac{1}{17} \log \left| \frac{3x - 2}{x + 5} \right| + c'$ જ્યાં $c' = c - \frac{1}{17} \log 3$)

ઉદાહરણ 29 : $\int \frac{1}{\sqrt{x(1 - 2x)}}\, dx$ મેળવો. $\left(0 < x < \frac{1}{2}\right)$

ઉકેલ : $I = \int \frac{1}{\sqrt{x(1 - 2x)}}\, dx$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{x - 2x^2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{2} - x^2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{16} - \left(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16}\right)}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{4}\right)^2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^{-1} \left(\frac{x - \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} \right) + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^{-1} (4x - 1) + c$$

(2) આ પ્રકારના સંકલિતો મેળવવા પ્રથમ આપણે એવા બે અચળ m અને n શોધીશું કે જેથી,

$Ax + B = m(ax^2 + bx + c$ નો વિકલિત$) + n$

$Ax + B = m(2ax + b) + n$

$Ax + B = (2ma)x + (mb + n)$

બંને બાજુએ x ના સહગુણકો અને અચળ પદ સરખાવતાં,

$A = 2ma$ અને $mb + n = B$

$\therefore$ $m = \frac{A}{2a}$ અને $n = B - mb$

હવે, $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{m(2ax+b)+n}{ax^2+bx+c}\,dx$

$$= m\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx + n\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$$

$$= m\log|ax^2+bx+c| + n\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$$

અહીં પ્રથમ સંકલિત $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)|$ થી સરળતાથી મળશે. જ્યારે બાકી રહેલું સંકલિત આગળ દર્શાવેલી રીત (i) મુજબ છેદમાં પૂર્ણવર્ગ બનાવી મેળવી શકાય.

હવે, $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \int \frac{m(2ax+b)+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

$$= \int \frac{m(2ax+b)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx + n\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

$$= m\int (ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}}(2ax+b)dx + n\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

$$= m\frac{(ax^2+bx+c)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + n\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

$$= 2m(ax^2+bx+c)^{\frac{1}{2}} + n\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

અહીં પ્રથમ સંકલિત $\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$ થી સરળતાથી મળશે જ્યારે બાકી રહેલું સંકલિત આગળ દર્શાવેલી રીત (i) મુજબ છેદમાં પૂર્ણવર્ગ બનાવી મેળવી શકાય.

ઉદાહરણ 30 : $\int \frac{2x+3}{3x^2+4x+5}\,dx$ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં આપણે અચળો m અને n એવા મેળવીશું કે જેથી, $2x+3 = m\frac{d}{dx}(3x^2+4x+5)+n$

$2x+3 = m(6x+4)+n$

$2x+3 = (6m)x+4m+n$

બંને બાજુએ x ના સહગુણક અને અચળ પદો સરખાવતાં, $6m = 2$ અને $4m+n = 3$.

$\therefore\ m = \frac{1}{3}$ અને $\frac{4}{3}+n = 3$. આગળ $n = \frac{5}{3}$

$\therefore\ I = \int \frac{2x+3}{3x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{\frac{1}{3}(6x+4)+\frac{5}{3}}{3x^2+4x+5}\,dx$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\,dx + \frac{5}{3}\int \frac{1}{3x^2+4x+5}\,dx$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\, dx + 5 \int \frac{1}{9x^2+12x+4+11}\, dx$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\, dx + 5 \int \frac{1}{(3x+2)^2+(\sqrt{11})^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{3} \log |3x^2 + 4x + 5| + \frac{5}{3\sqrt{11}}\, tan^{-1} \frac{3x+2}{\sqrt{11}} + c$$

ઉદાહરણ 31 : $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+4x+1}}\, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં છેદ $x^2 + 4x + 1$ નું વિકલન $2x + 4$ છે. અંશમાં $2x + 3$ ના સ્થાને $2x + 3 = (2x + 4) - 1$ લેતાં,

$$\therefore \quad I = \int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+4x+1}}\, dx$$

$$= \int \frac{(2x+4)-1}{\sqrt{x^2+4x+1}}\, dx$$

$$= \int \frac{(2x+4)}{\sqrt{x^2+4x+1}}\, dx - \int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+1}}\, dx$$

$$= \int (x^2 + 4x + 1)^{-\frac{1}{2}} (2x + 4)\, dx - \int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2-(\sqrt{3})^2}}\, dx$$

$$= \frac{(x^2+4x+1)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \log | (x + 2) + \sqrt{(x+2)^2-(\sqrt{3})^2} | + c$$

$$= 2\sqrt{x^2+4x+1} - \log | x + 2 + \sqrt{x^2+4x+1} | + c$$

ઉદાહરણ 32 : $\int \frac{x^2}{x^4+1}\, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{x^2}{x^4+1}\, dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x^2}{x^4+1}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1)+(x^2-1)}{x^4+1}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx + \frac{1}{2} \int \frac{x^2-1}{x^4+1}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\, dx + \frac{1}{2} \int \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} + \frac{1}{2} \int \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$$

પ્રથમ સંકલિત માટે $x - \frac{1}{x} = u$ અને દ્વિતીય સંકલિત માટે $x + \frac{1}{x} = v$ લેતાં,

$$\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx = du \text{ અને } \left(1-\frac{1}{x^2}\right) dx = dv$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+(\sqrt{2})^2} + \int \frac{dv}{v^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} \log\left|\frac{v-\sqrt{2}}{v+\sqrt{2}}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan^{-1}\frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \log\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \log\left|\frac{x^2+1-\sqrt{2}x}{x^2+1+\sqrt{2}x}\right| + c$$

સ્વાધ્યાય 6.4

નીચે આપેલાં વિધેયોનું x વિશે સંકલન કરો :

1. $\frac{1}{x^2+3x+3}$
2. $\frac{1}{4x^2-4x+3}$
3. $\frac{1}{1-6x-9x^2}$
4. $\frac{1}{3+2x-x^2}$
5. $\frac{1}{\sqrt{x^2-x+5}}$
6. $\frac{1}{\sqrt{2x^2+3x-2}}$
7. $\frac{1}{\sqrt{7-3x-2x^2}}$
8. $\frac{1}{\sqrt{3x^2+5x+7}}$
9. $\frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}$
10. $\frac{1}{\sqrt{9+8x-x^2}}$
11. $\frac{4x+1}{x^2+3x+2}$
12. $\frac{3x+2}{2x^2+x+1}$
13. $\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+4x+5}}$
14. $\frac{3x+1}{\sqrt{5-2x-x^2}}$
15. $\frac{2\sin 2x-\cos x}{6-\cos^2 x-4\sin x}$
16. $\frac{e^x}{\sqrt{5-4e^x-e^{2x}}}$
17. $\frac{x^2}{\sqrt{x^6+2x^3+3}}$
18. $\frac{2x}{\sqrt{1-x^2-x^4}}$
19. $\frac{x^2+1}{x^4+1}$
20. $\frac{x^2+4}{x^4+16}$
21. $\frac{x^2+1}{x^4+7x^2+1}$
22. $\frac{1}{x^4+1}$
23. $\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}$
24. $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 33 : $\int \frac{\sin 2x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)} dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \frac{\sin 2x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}\, dx$

$$= \int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x - \sin^2 \frac{\pi}{3}}\, dx$$

$$= \int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x - \frac{3}{4}}\, dx$$

$$= \int \frac{\frac{d}{dx}\left(\sin^2 x - \frac{3}{4}\right)}{\sin^2 x - \frac{3}{4}}\, dx$$

$$= \log\left|\sin^2 x - \frac{3}{4}\right| + c$$

ઉદાહરણ 34 : $\int \frac{1}{x(x^n + 1)}\, dx$ મેળવો. $(x > 0)$

ઉકેલ : $I = \int \frac{1}{x(x^n + 1)}\, dx$

$x^n + 1 = t$ લેતાં, $n \cdot x^{n-1}\, dx = dt$

$$\therefore\ I = \int \frac{nx^{n-1}\, dx}{nx^n\, (x^n + 1)}$$

$$= \frac{1}{n}\int \frac{dt}{(t-1)t}$$

$$= \frac{1}{n}\int \frac{1}{t^2 - t + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}}\, dt$$

$$= \frac{1}{n}\int \frac{1}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}\, dt$$

$$= \frac{1}{n}\log\left|\frac{\left(t - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)}{\left(t - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)}\right| + c$$

$$= \frac{1}{n}\log\left|\frac{t-1}{t}\right| + c$$

$$= \frac{1}{n}\log\frac{x^n}{x^n + 1} + c$$

બીજી રીત :

$$I = \frac{1}{n}\int \frac{dt}{(t-1)t}$$

$$= \frac{1}{n}\int \frac{[t - (t-1)]\, dt}{(t-1)t}$$

$$= \frac{1}{n}\left[\int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t}\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\log|t - 1| - \log|t|\right] + c$$

$$= \frac{1}{n}\log\left|\frac{t-1}{t}\right| + c$$

$$= \frac{1}{n}\log\left(\frac{x^n}{x^n + 1}\right) + c$$

ઉદાહરણ 35 : $\int \sqrt{\frac{\sin(x - \theta)}{\sin(x + \theta)}}\, dx$ મેળવો. $\theta < x < \frac{\pi}{2} + \theta,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : $I = \int \sqrt{\frac{\sin(x - \theta)}{\sin(x + \theta)}}\, dx$

$$= \int \sqrt{\frac{\sin(x - \theta)}{\sin(x + \theta)} \times \frac{\sin(x - \theta)}{\sin(x - \theta)}}\, dx \qquad (\sin(x - \theta) > 0)$$

$$= \int \frac{\sin(x - \theta)}{\sqrt{\sin^2 x - \sin^2 \theta}}\, dx$$

$$= \int \frac{\sin x \cos\theta - \cos x \sin\theta}{\sqrt{\sin^2 x - \sin^2\theta}}\, dx$$

$$= \cos\theta \int \frac{\sin x}{\sqrt{\sin^2 x - \sin^2\theta}}\, dx - \sin\theta \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x - \sin^2\theta}}\, dx$$

$$= \cos\theta \int \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos^2 x - 1 + \cos^2\theta}}\, dx - \sin\theta \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x - \sin^2\theta}}\, dx$$

$$= \cos\theta \int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{\cos^2\theta - \cos^2 x}} - \sin\theta \int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{\sin^2 x - \sin^2\theta}}$$

પ્રથમ સંકલિત માટે $\cos x = u$ અને દ્વિતીય સંકલિત માટે $\sin x = v$ લેતાં,

$\therefore\ -\sin x\, dx = du$ અને $\cos x\, dx = dv$

$$\therefore\ \text{I} = \cos\theta \int \frac{-du}{\sqrt{\cos^2\theta - u^2}} - \sin\theta \int \frac{dv}{\sqrt{v^2 - \sin^2\theta}}$$

$$= -\cos\theta \sin^{-1}\left(\frac{u}{\cos\theta}\right) - \sin\theta \log\left| v + \sqrt{v^2 - \sin^2\theta} \right| + c$$

$$= -\cos\theta \sin^{-1}\left(\frac{\cos x}{\cos\theta}\right) - \sin\theta \log\left| \sin x + \sqrt{\sin^2 x - \sin^2\theta} \right| + c$$

ઉદાહરણ 36 : $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin x}}\, dx$ મેળવો. $\quad 0 < x < \pi$

ઉકેલ : $\text{I} = \int \frac{(\sin x + 1) - 1}{\sqrt{1 + \sin x}}\, dx$

$$= \int \sqrt{1 + \sin x}\, dx - \int \frac{1}{\sqrt{1 + \sin x}}\, dx$$

$$= \int \sqrt{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\, dx - \int \frac{1}{\sqrt{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}}\, dx$$

$$= \int \left|\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right| dx - \int \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right|}\, dx$$

$$= \int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) dx - \int \frac{1}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{2}\right)}\, dx \qquad \left(0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) dx - \int \frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}\, dx$$

$$= \int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) dx - \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sec\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) dx$$

$$= \frac{-\cos\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} \log\left|\sec\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right| + c$$

$$= 2\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) - \sqrt{2} \log\left|\sec\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right| + c$$

સ્વાધ્યાય 6

નીચે આપેલાં વિધેયોનાં x વિશે સંકલિતો મેળવો :

1. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ $(x > 0)$

2. $\dfrac{\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}$

3. $\dfrac{1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$

4. $\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$, $x \in (0, 1)$

5. $\sqrt{\dfrac{x+3}{x+2}}$ $(x > -2)$

6. $\dfrac{x^2+5x+3}{x^2+3x+2}$ $(x \neq -2, -1)$

7. $\dfrac{x^2}{x^2+7x+10}$ $(x \neq -5, -2)$

8. $\dfrac{1}{cos(x-a)\,cos(x-b)}$

9. $\dfrac{sin\,(x+a)}{sin\,(x+b)}$

10. $x(1-x)^n$

11. $\sqrt{tanx}$

12. $\dfrac{1}{sin^4x+cos^4x}$

13. $\dfrac{1}{1-2a\,cosx+a^2}$, $0 < a < 1$

14. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

વિભાગ A (1 ગુણ)

(1) $\int f(x)dx = \dfrac{(\log x)^5}{5} + c$, લેતાં, $f(x) =$ ...... ☐

(a) $\dfrac{\log x}{4}$ (b) $\dfrac{(\log x)^5}{5}$ (c) $\dfrac{(\log x)^4}{x}$ (d) $\dfrac{(\log x)^6}{6}$

(2) $\int e^{x\log a}\,e^x\,dx =$ ...... $+ c$ ☐

(a) $a^x \cdot e^x$ (b) $\dfrac{(ae)^x}{(1+\log a)}$ (c) $\dfrac{e^x}{\log(ae)}$ (d) $\dfrac{a^x}{1+\log_e a}$

(3) $\int \dfrac{(\log x)^3}{x}\,dx =$ ...... $+ c$ ☐

(a) $(\log x)^2$ (b) $\dfrac{(\log x)^2}{2}$ (c) $\frac{1}{4}(\log x)^4$ (d) $\frac{2}{3}(\log x)^3$

(4) $\int sec^2\left(5-\frac{x}{2}\right)\,dx =$ ...... $+ c$ ☐

(a) $tan\left(5-\frac{x}{2}\right)$ (b) $2tan\left(5-\frac{x}{2}\right)$ (c) $-2tan\left(5-\frac{x}{2}\right)$ (d) $-\frac{1}{2}tan\left(5-\frac{x}{2}\right)$

(5) $\int \dfrac{1}{4x^2+9}\,dx =$ ...... $+ c$ ☐

(a) $\frac{1}{3}\,tan^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)$ (b) $\frac{1}{4}\,tan^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)$ (c) $\frac{1}{6}\,tan^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)$ (d) $\frac{3}{2}\,tan^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)$

(6) $\int \sqrt{1 - cosx}\ dx = ... + c,\ 2\pi < x < 3\pi$

(a) $-2\sqrt{2}\ cos\ \frac{x}{2}$ (b) $-\sqrt{2}\ cos\ \frac{x}{2}$ (c) $2\sqrt{2}\ cos\ \frac{x}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}\ cos\left(\frac{x}{2}\right)$

(7) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3 + \log x}} = ... + c$

(a) $2\sqrt{3 + \log x}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{3 + \log x}}$ (c) $\sqrt{3 + \log x}$ (d) $-2\sqrt{3 + \log x}$

(8) $\int \frac{1}{\sqrt{4 - 3x}}\ dx = ... + c$

(a) $-\frac{2}{3}(4 - 3x)^{-\frac{1}{2}} + c$ (b) $-\frac{2}{3}(4 + 3x)^{\frac{1}{2}}$

(c) $-\frac{2}{3}(4 - 3x)^{\frac{1}{2}}$ (d) $\frac{2}{3}(4 + 3x)^{\frac{1}{2}}$

(9) $\int \frac{x - 2}{x^2 - 4x + 5}\ dx = ... + c$

(a) $\log | x^2 - 4x + 5 | + c$ (b) $\log \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

(c) $\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 5)^2$ (d) $\log \left(\frac{x - 3}{x - 1}\right)$

(10) $\int \frac{1}{3t^2 + 4}\ dt = ... + c$

(a) $\frac{1}{12}\ tan^{-1}\left(\frac{3t}{4}\right)$ (b) $\frac{1}{3}\ \log \left|\frac{t + 2}{t - 2}\right|$

(c) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)$ (d) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ tan^{-1}\left(\frac{3t}{4}\right)$

(11) $\int \frac{1}{1 - cost}\ dt = ... + c$

(a) $cosect + cot\ t$ (b) $-cot\ \frac{t}{2}$ (c) $-4cot\ \frac{t}{2}$ (d) $cosect + cot\ t$

(12) $\int \frac{e^{5 \log x} - e^{4 \log x}}{e^{3 \log x} - e^{2 \log x}}\ dx = ... + c$

(a) $e \cdot 3^{-3x}$ (b) $e^3 \log x$ (c) $\frac{x^3}{3}$ (d) $\frac{x^2}{3}$

(13) $\int sec^2x \cdot cosec^2x\ dx = ... + c$

(a) $tanx + cotx$ (b) $tanx - cotx$ (c) $sec^2x + cosec^2x$ (d) $cotx - tanx$

(14) $\int e^{3 \log x} \cdot (x^4 + 1)^{-1}\ dx = ... + c$

(a) $\log (x^4 + 1)$ (b) $-\log (x^4 + 1)$ (c) $\frac{1}{4} \log (x^4 + 1)$ (d) $\frac{-3}{(x^4 + 1)^2}$

(15) $\int \frac{(\log x)^4}{x}\ dx = ... + c$

(a) $\frac{(\log x)^5}{5}$ (b) $\frac{(\log x)^2}{2}$ (c) $\frac{\log x^5}{5x}$ (d) $\log x \cdot (\log x)^4 + \frac{(\log x)^5}{5x}$

(16) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = ...$

(a) $sin^{-1}\sqrt{x} + c$ (b) $-2\sqrt{1-x} + c$ (c) $-sin^{-1}\sqrt{x} + c$ (d) $2\sqrt{1-x} + c$

(17) $\int \frac{(sinx)^{99}}{(cosx)^{101}} dx = ... + c$

(a) $\frac{(tanx)^{100}}{100}$ (b) $\frac{(tanx)^{2}}{2}$ (c) $\frac{(tanx)^{98}}{98}$ (d) $\frac{(tanx)^{97}}{97}$

(18) $\int \frac{\log x^2}{x} dx = ...$

(a) $\log |x^2| + c$ (b) $\log x + c$ (c) $(\log x)^2 + c$ (d) $\frac{1}{2}(\log x)^2 + c$

(19) $\int \frac{xsinx}{(xcosx - sinx + 5)} dx = ... + c$

(a) $\log | xcosx - sinx + 5 |$ (b) $-\log | xcosx - sinx + 5 |$

(c) $\log | xsinx - cosx + 5 |$ (d) $-\log | xsinx - cosx + 5 |$

(20) $\int (1 - cosx)\, cosec^2x \; dx = ... + c$

(a) $tan \frac{x}{2}$ (b) $cot \frac{x}{2}$ (c) $\frac{1}{2} tan \frac{x}{2}$ (d) $2\, tan \frac{x}{2}$

વિભાગ B (2 ગુણ)

(21) જો $f'(x) = x^2 + 5$, તો $\int f(x)dx = ...$. (c, k સ્વૈર અચળ)

(a) $\frac{x^4}{12} + \frac{5x^2}{8} + cx + k$ (b) $-\frac{x^4}{12} - \frac{5x^2}{2} - cx + k$

(c) $\frac{x^4}{12} - \frac{5x^2}{12} + cx + k$ (d) $\frac{x^4}{12} + \frac{5x^2}{2} + cx + k$

(22) $\int \frac{10x^9 + 10^x \log 10}{10^x + x^{10}} dx = ... + c$

(a) $10^x - x^{10}$ (b) $10^x + x^{10}$ (c) $(10^x - x^{10})^{-1}$ (d) $\log | 10^x + x^{10} |$

(23) $\int cos^3x \cdot e^{\log sinx} dx = ... + c$

(a) $-\frac{sin^4x}{4}$ (b) $\frac{e^{sinx}}{4}$ (c) $\frac{e^{cosx}}{4}$ (d) $\frac{-cos^4x}{4}$

(24) $\int \frac{sinx}{1+4cosx} dx = ... + c$

(a) $\log | 1 + 4cosx |$ (b) $-4 \log | 1 + 4cosx |$

(c) $-\frac{1}{4} \log | 1 + 4cosx |$ (d) $-\log | 1 + 4cosx |$

(25) $\int \frac{1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}}\, dx = ... + c$

(a) $\frac{3}{2}(x+2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
(b) $\frac{2}{9}(x+2)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{9}x^{\frac{1}{2}}$
(c) $\frac{2}{9}(x+3)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}$
(d) $\frac{2}{9}(x+2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{9}x$

(26) જો $\int sin2x \cdot cos\ 3x\ dx = A\ cosx + Bcos\ 5x + c$, તો $A + B = ...$

(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{3}{10}$ (c) $\frac{3}{5}$ (d) $\frac{2}{5}$

(27) જો $\int \frac{cos\ 4x+1}{cotx - tanx}\, dx = A\ cos4x + c$, તો $A = ...$

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{4}$ (c) $-\frac{1}{8}$ (d) $\frac{1}{8}$

(28) $\int \frac{1+cosx}{sinx\ cosx}\, dx = ... + c$

(a) $\log|sinx| + \log|cosx|$
(b) $\log\left|tanx \cdot tan\frac{x}{2}\right|$
(c) $\log\left|1 + tan\frac{x}{2}\right|$
(d) $\log\left|sec\frac{x}{2} + tan\frac{x}{2}\right|$

(29) $\int \frac{sinx - cosx}{sinx + cosx}\, dx = ... + c$

(a) $\frac{1}{sinx+cosx}$
(b) $\frac{1}{sinx-cosx}$
(c) $\log|sinx + cosx|$
(d) $\log\left|\frac{1}{sinx+cosx}\right|$

(30) $\int \frac{1-cosx}{cosx\,(1+cosx)}\, dx = ... + c$

(a) $2\log|cosx| + tan\frac{x}{2}$
(b) $\log|secx + tanx| - 2tan\frac{x}{2}$
(c) $\log|tanx| + 2tan\frac{x}{2}$
(d) $\frac{1}{2}\log|secx| - tan\frac{x}{2}$

(31) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = ... + c$

(a) $\log|e^x - e^{-x}|$ (b) $\log|e^x + e^{-x}|$ (c) $tan^{-1}(e^x)$ (d) $tan^{-1}(e^{2x})$

(32) $\int \frac{dx}{x + x\log x} = ... + c$

(a) $\log|x + x\log x|$
(b) $x\log|1 + \log x|$
(c) $\log|1 + \log x|$
(d) $\frac{1+\log x}{x^2}$

(33) $\int \frac{\sqrt{tanx}}{sinx\,cosx}\, dx = ... + c$

(a) $\frac{\sqrt{tanx}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{cotx}}{2}$ (c) $2\sqrt{cotx}$ (d) $2\sqrt{tanx}$

વિભાગ C (3 ગુણ)

(34) $\int \frac{dx}{cosx - sinx}$ = ... + c

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}} \log \left|tan\left(\frac{x}{2}+\frac{3\pi}{8}\right)\right|$

(b) $\frac{1}{\sqrt{2}} \log \left|tan\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)\right|$

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}} \log \left|tan\left(\frac{x}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)\right|$

(d) $\log \left|cos\frac{x}{2}\right|$

(35) $\int \frac{dx}{(1+sinx)^{\frac{1}{2}}}$ = ... + c

(a) $\sqrt{2} \log \left|tan\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{x}{4}\right)\right|$

(b) $\sqrt{2} \log \left|cosec\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)-cot\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)\right|$

(c) $\sqrt{2} \log \left|tan\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{4}\right)\right|$

(d) $\sqrt{2} \log \left|sec\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{4}\right)+tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{4}\right)\right|$

(36) $\int \frac{dx}{5-4\,cosx}$ = ... + c

(a) $\frac{1}{3}\, tan^{-1}\left(3\,tan\frac{x}{2}\right)$

(b) $\frac{1}{3}\, tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\,tan\frac{x}{2}\right)$

(c) $\frac{2}{3}\, tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\,tan\frac{x}{2}\right)$

(d) $\frac{2}{3}\, tan^{-1}\left(3\,tan\frac{x}{2}\right)$

(37) $\int \frac{sinx}{sin(x-a)}\, dx$ = ... + c

(a) $x\,cosa + sin\,a \log|\,sin(x-a)\,|$

(b) $(x-a)\,cosa - sin\,a \log|\,sin(x-a)\,|$

(c) $sin\,a \log|\,sin(x-a)\,| + cosa\,x$

(d) $sina \cdot x + cosa \log|\,sin(x-a)\,|$

(38) $\int \frac{sin\,2x}{pcos^2x + q\,sin^2x}\, dx$ = ... + c

(a) $\frac{q}{p} \log|\,p\,sin2x + qcos\,2x\,|$

(b) $(q-p) \log|\,p\,cos^2x + q\,sin^2x\,|$

(c) $\frac{1}{q-p} \log|\,pcos^2x + qsin^2x\,|$

(d) $\frac{1}{p^2+q^2} \log|\,pcos^2x + qsin^2x\,|$

(39) $\int \frac{tanx}{4+9tan^2x}\, dx$ = ... + c

(a) $\frac{2}{3}\, tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\,tanx\right)$

(b) $\frac{3}{2}\, tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\,tanx\right)$

(c) $\frac{1}{10} \log|\,4+9tan^2x\,|$

(d) $\frac{1}{10} \log|\,4cos^2x + 9sin^2x\,|$

(40) $\int \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\, dx$ = ... + c

(a) $\frac{a}{2}\, sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2-x^2}$

(b) $\frac{1}{a}\, sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2-x^2}$

(c) $sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \sqrt{a^2-x^2}$

(d) $a\, sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \sqrt{a^2-x^2}$

(41) જો $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}\,dx = px + q\sin 2x + r\cot x + c$, તો

(a) $p = -\frac{3}{2},\ q = -\frac{1}{4},\ r = -1$

(b) $p = -\frac{1}{4},\ q = -\frac{3}{2},\ r = -1$

(c) $p = 1,\ q = -\frac{1}{4},\ r = 1$

(d) $p = \frac{3}{2},\ q = -\frac{1}{4},\ r = 1$

(42) $\int \frac{e^x}{e^{2x} + e^x + 1}\,dx = \ldots\ldots + c$

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}\sec^{-1}\left(\frac{2e^x + 1}{\sqrt{3}}\right)$

(b) $\tan^{-1}(1 + e^x)$

(c) $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2e^x + 1}{\sqrt{3}}\right)$

(d) $\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{e^x + 1}{\sqrt{3}}\right)$

(43) $\int \frac{1}{\sqrt{2 - 3x - x^2}}\,dx = \ldots\ldots + c$

(a) $\sin^{-1}\left(\frac{2 - 3x}{\sqrt{3}}\right)$ (b) $\sin^{-1}\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{15}}\right)$ (c) $\sin^{-1}\left(\frac{2x + 3}{\sqrt{17}}\right)$ (d) $\sin^{-1}\left(\frac{3 + 2x}{3\sqrt{2}}\right)$

વિભાગ D (4 ગુણ)

(44) $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1}\,dx = \ldots\ldots + c$

(a) $x\tan^{-1}\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)$

(b) $\tan^{-1}\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)$

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x^2 + 1}{\sqrt{2}x}\right)$

(d) $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x^2 - 1}{\sqrt{2}x}\right)$

(45) $\int (\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x})\,dx = \ldots\ldots + c$

(a) $\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\cot x + 1}{\sqrt{2\tan x}}\right)$

(b) $\sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x - 1}{\sqrt{2\tan x}}\right)$

(c) $\sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x + 1}{\sqrt{2\tan x}}\right)$

(d) $\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\cot x - 1}{\sqrt{2\tan x}}\right)$

(46) $\int \sqrt{\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}}\,\frac{dx}{x} = \ldots\ldots + c$

(a) $2\log\left(\frac{\sqrt{1 + x} - 1}{\sqrt{1 + x} + 1}\right) - 2\sin^{-1}\sqrt{x}$

(b) $\log\left(\frac{\sqrt{1 - x} - 1}{\sqrt{1 + x} + 1}\right) + 2\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x}}\right)$

(c) $2\log\left(\frac{1 - \sqrt{1 - x}}{1 + \sqrt{1 - x}}\right) + \frac{1}{2}\cot^{-1}\sqrt{x + 1}$

(d) $\log\left(\frac{\sqrt{1 - x} - 1}{\sqrt{1 - x} + 1}\right) - 2\sin^{-1}\sqrt{x}$

(47) $\int \frac{dx}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \text{......} + c$

(a) $\frac{x}{3\sqrt{9-x^2}}$ (b) $\frac{x}{9\sqrt{9+x^2}}$ (c) $\frac{x}{9\sqrt{9-x^2}}$ (d) $\frac{x}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

(48) જો $\int x^3 \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\, dx = p\cos^{-1}x^2 + q\sqrt{1-x^4} + rx^2\sqrt{1-x^4} + c$, તો $p + q + r = \text{......}$

(a) 0 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) -1

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચે આપેલા મુદ્દા શીખ્યા :

1. પૂર્વગ અથવા પ્રતિવિકલિત અથવા અનિયત સંકલિતની વ્યાખ્યા
2. સંકલનના કાર્યનિયમો
3. પ્રમાણિત સંકલિત :

(1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \in R - \{-1\},\ x \in R^+.$

(2) $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c,\ x \in R - \{0\}$

(3) $\int \cos x\, dx = \sin x + c,\ \forall x \in R$

(4) $\int \sin x\, dx = -\cos x + c,\ \forall x \in R$

(5) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c,\ x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z$

(6) $\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + c,\ x \neq k\pi,\ k \in Z$

(7) $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c,\ x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z$

(8) $\int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx = -\operatorname{cosec} x + c,\ x \neq k\pi,\ k \in Z$

(9) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a} + c,\ a \in R^+ - \{1\},\ x \in R$

(10) $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c,\quad a \in R - \{0\},\ x \in R$

(11) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c,\ a \in R - \{0\},\ x \neq \pm a$

(12) $\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + c,\ a \in R - \{0\},\ x \neq \pm a$

(13) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c,\ x \in (-a, a),\ a > 0.$

(14) $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\,sec^{-1}\frac{x}{a} + c, \quad |x| > |a| > 0.$

(15) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \log|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c, \quad \forall x \in R.$

4. સંકલન માટે આદેશની રીત

5. જો $\int f(x)dx = F(x)$, તો $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b)$ જ્યાં $f : I \to R$ કોઈક અંતરાલ I પર સતત છે. $(a \neq 0)$.

6. $\int f(x)]^n \cdot f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$, $(n \neq -1, f(x) > 0)$ જ્યાં f, f' સતત છે અને $f'(x) \neq 0$.

7. જો f એ $[a, b]$ માં સતત હોય અને (a, b)માં વિકલનીય હોય અને f' સતત હોય અને શૂન્યેતર હોય $\forall x \in [a, b]$ અને $f(x) \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$, તો $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + c$.

(16) કોઈ પણ અંતરાલ $I = \left(k\pi, (2k + 1)\frac{\pi}{2}\right)$ અથવા $\left((2k - 1)\frac{\pi}{2}, k\pi\right)$, $k \in Z$ પર

$\int tanx\ dx = \log|secx| + c.$

(17) કોઈ પણ અંતરાલ $I = \left(k\pi, (2k + 1)\frac{\pi}{2}\right)$ અથવા $\left((2k - 1)\frac{\pi}{2}, k\pi\right)$, $k \in Z$ પર

$\int cotx\ dx = \log|sinx| + c.$

(18) કોઈ પણ અંતરાલ $I = \left(k\pi, (2k + 1)\frac{\pi}{2}\right)$ અથવા $\left((2k - 1)\frac{\pi}{2}, k\pi\right)$, $k \in Z$ પર

$\int cosecx\ dx = \log|cosecx - cotx| + c, x \neq k\pi, k \in Z.$

(19) કોઈ પણ અંતરાલ $I = \left(k\pi, (2k + 1)\frac{\pi}{2}\right)$ અથવા $\left((2k - 1)\frac{\pi}{2}, k\pi\right)$, $k \in Z$ પર

$\int secx\ dx = \log\left|tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + c.$

Classical Period (400 – 1200)

This period is often known as the golden age of Indian Mathematics. This period saw mathematicians such as Aryabhata, Varahamihira, Brahmagupta, Bhaskara I, Mahavira, and Bhaskara II gave broader and clearer shape to many branches of mathematics. Their contributions would spread to Asia, the Middle East, and eventually to Europe. Unlike Vedic mathematics, their works included both astronomical and mathematical contributions. In fact, mathematics of that period was included in the 'astral science' (jyotisha-shatra) and consisted of three sub-disciplines: mathematical sciences (ganita or tantra), horoscope astrology (hora or jataka) and divination (samhita). This tripartite division is seen in Varahamihira's 6th century compilation—Pancasiddhantika (literally panca, "five," siddhanta, "conclusion of deliberation", dated 575 CE)—of five earlier works, Surya Siddhanta, Romaka Siddhanta, Paulisa Siddhanta, Vasishtha Siddhanta and Paitamaha Siddhanta, which were adaptations of still earlier works of Mesopotamian, Greek, Egyptian, Roman and Indian astronomy. As explained earlier, the main texts were composed in Sanskrit verse, and were followed by prose commentaries.