પ્રકરણ 6

ત્રિકોણમિતીય સમીકરણો અને ત્રિકોણના ગુણધર્મો

If equations are trains threading the landscape of numbers, then no train stops at pi.
– Richard Preston

Pure mathematics is in its way, the poetry of logical ideas.
– Albert Einstein

6.1 પ્રાસ્તાવિક

સિમેસ્ટર-1માં અને પ્રકરણ 4, 5 માં આપણે ત્રિકોણમિતીય વિધેયો, તેમના આલેખો અને તેમના ગુણધર્મો જેવા કે શૂન્યોનો ગણ, વિસ્તાર, આવર્તમાન, નિત્યસમોનો અભ્યાસ કર્યો. ત્રિકોણમિતિનો ઉપયોગ જમીન મોજણી કરવામાં થાય છે. આપણે જાણીએ છીએ કે ત્રિકોણમિતિની મદદથી ટેકરીની ઊંચાઈ માપ્યા વગર શોધી શકાય છે. બંગાળના એક જમીન મોજણીદાર અને **ભારતીય ગણિતજ્ઞ 'રાધાનાથ સિક્દરે'** ત્રિકોણમિતીય ગણતરીની મદદથી ઈ.સ. 1852માં સાબિત કર્યું કે માઉન્ટ એવરેસ્ટ એ દુનિયાનું સૌથી ઊંચામાં ઊંચું શિખર છે. ત્રિકોણમિતિનો ઉપયોગ નૌપરિવહન, ઉપગ્રહ તંત્ર રચના, ખગોળશાસ્ત્ર, વિમાન-સંચાલન જેવા ક્ષેત્રોમાં થાય છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે ત્રિકોણમિતીય સમીકરણોના ઉકેલની રીતો તથા ત્રિકોણમિતિના ઉપયોગથી ત્રિકોણના ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કરીશું.

6.2 ત્રિકોણમિતીય સમીકરણો

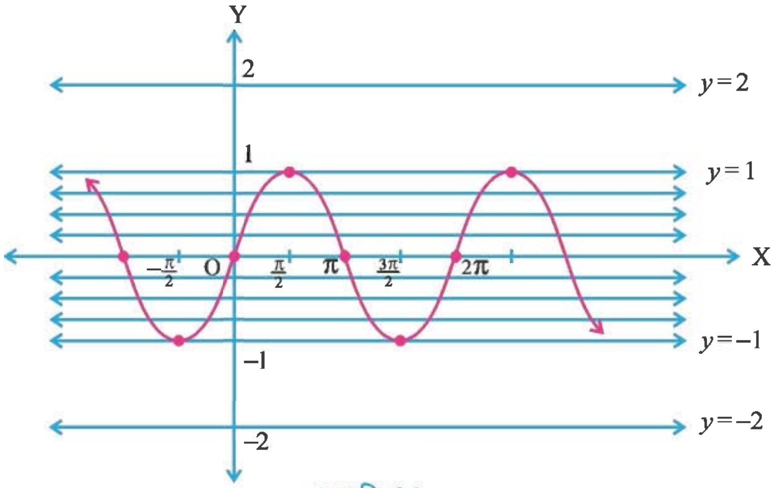
જે સમીકરણમાં ત્રિકોણમિતીય વિધેયો આવેલાં હોય તેવા સમીકરણને ત્રિકોણમિતીય સમીકરણ કહે છે. જેમકે, $sin^2x - 4cosx = 1$ એ એક ત્રિકોણમિતીય સમીકરણ છે.

જે ત્રિકોણમિતીય સમીકરણ તેના પ્રદેશની દરેક કિંમત માટે સત્ય બને તેને ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમ કહે છે. જેમકે, $cos2\theta = 2cos^2\theta - 1$ એ એક નિત્યસમ છે.

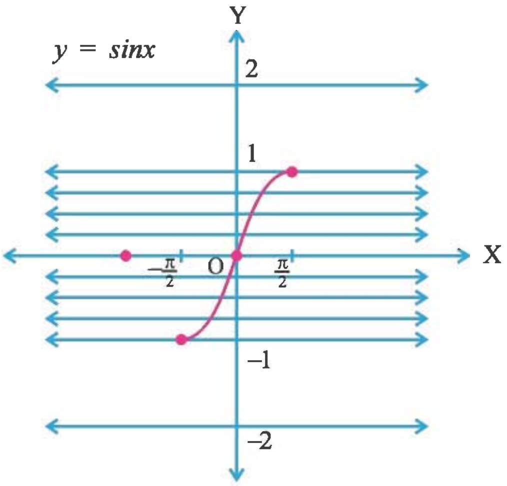
કેટલાંક ત્રિકોણમિતીય સમીકરણોનું તેના પ્રદેશના ઉપગણની કોઈક કિંમતો માટે સમાધાન થાય છે. આપણે આવા ત્રિકોણમિતીય સમીકરણોના ઉકેલની રીતો મેળવીશું તથા સમીકરણના એક ઉકેલના ઉપયોગથી તેનો વ્યાપક ઉકેલ કેવી રીતે મેળવી શકાય તે જોઈશું. સમીકરણ $sinx = \frac{1}{2}$ નો ઉકેલ ફક્ત $x = \frac{\pi}{6}$ નથી પરંતુ $x = \frac{5\pi}{6}$, $x = 2\pi + \frac{\pi}{6}$, $x = 3\pi - \frac{\pi}{6}$ વગેરે પણ તેના ઉકેલો છે. આમ, આપણે કહી શકીએ કે $sinx = \frac{1}{2}$ નો એક ઉકેલ $x = \frac{\pi}{6}$ છે, પરંતુ તે તેનો વ્યાપક ઉકેલ નથી. **કોઈ પણ ત્રિકોણમિતીય સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ એટલે તેના શક્ય તમામ ઉકેલોનો ગણ.**

અહીં નોંધીએ કે કેટલાંક ત્રિકોણમિતીય સમીકરણોનો ઉકેલ ખાલી ગણ હોય, જેમકે $sinx = \pi$. ત્રિકોણમિતીય વિધેયો આવર્તી હોવાથી, જો ત્રિકોણમિતીય સમીકરણને એક ઉકેલ હોય તો તેને અસંખ્ય ઉકેલો મળી શકે. આવા તમામ ઉકેલોના ગણને તેનો **વ્યાપક ઉકેલ** કહે છે.

$y = sinx$ નો આલેખ જુઓ. કોઈ પણ સમક્ષિતિજ રેખા $y = k, k \in [-1, 1]$ લો. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે રેખા $y = k, k \in [-1, 1]$ એ $y = sinx$ ના આલેખને અસંખ્ય બિંદુઓમાં છેદે છે. (આકૃતિ 6.1) આનો મતલબ એ થયો કે કોઈ પણ $a \in [-1, 1]$ માટે સમીકરણ $sinx = a$ નો ઉકેલગણ અનંતગણ મળે. ત્રિકોણમિતીય સમીકરણના ઉકેલ માટે આપણને અનન્ય $\alpha \in R$ ની જરૂર પડે કે જેથી $sin\alpha = a$ થાય. તેના માટે આપણે પ્રદેશને યોગ્ય રીતે મર્યાદિત કરવો પડે. જો આપણે પ્રદેશને $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ અથવા $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ અથવા $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$, વગેરે જેવો મર્યાદિત કરીએ તો એવો અનન્ય α મળે કે જેથી $sin\alpha = a$ થાય. આપણે $y = sinx$ માટેનો મર્યાદિત પ્રદેશ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ સ્વીકારીએ છીએ. આ પ્રદેશમાં કોઈ પણ સમક્ષિતિજ રેખા $y = k, k \in [-1, 1]$ એ $y = sinx$ ના આલેખને એક જ બિંદુમાં છેદે છે. (આકૃતિ 6.2).



આકૃતિ 6.1

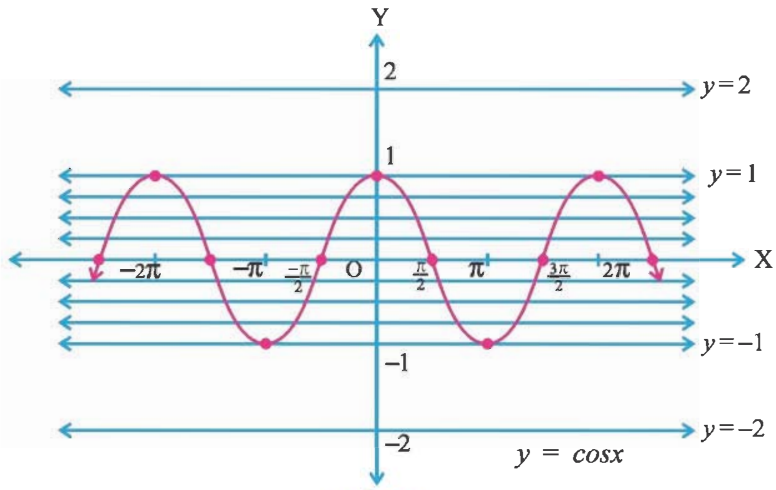


આકૃતિ 6.2

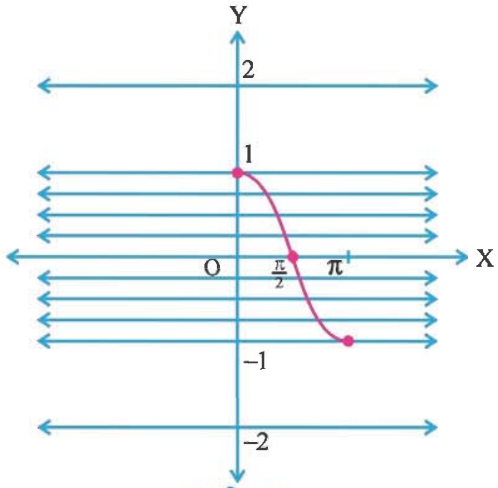
આવા જ પ્રકારની પરિસ્થિતિ $y = cosx$ માટે થાય છે. (આકૃતિ 6.3)

આપણે $y = cosx$ માટેનો મર્યાદિત પ્રદેશ $[0, \pi]$ સ્વીકારીએ છીએ. (આકૃતિ 6.4)

આપણે નોંધીએ કે કોઈ પણ સમક્ષિતિજ રેખા $y = a$ જ્યાં $|a| > 1$ એ $y = sinx$ અથવા $y = cosx$ ના આલેખને છેદતી નથી. આમ, $sinx = a$ અથવા $cosx = a$, $|a| > 1$ ને કોઈ ઉકેલ નથી.

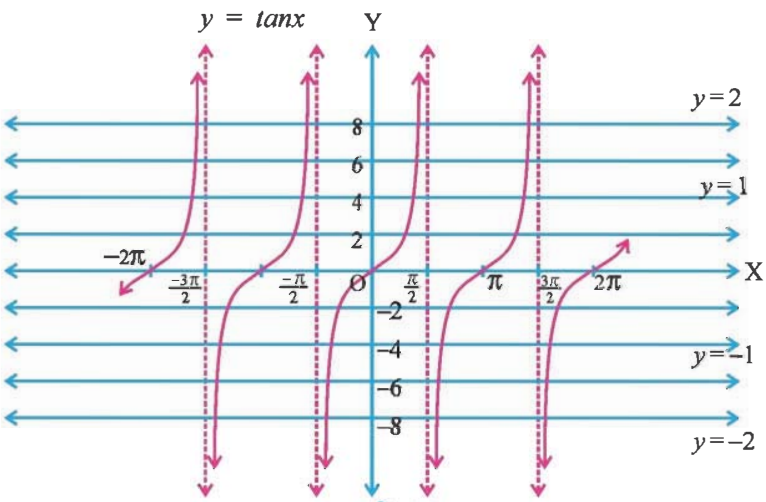


આકૃતિ 6.3

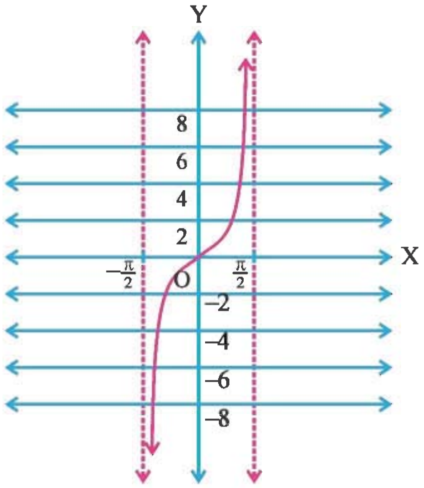


આકૃતિ 6.4

જો સમતલમાં આપણે કોઈ પણ સમક્ષિતિજ રેખા દોરીએ તો તે $y = tanx$ ના આલેખને અસંખ્ય બિંદુઓમાં છેદશે. (આકૃતિ 6.5). આનો અર્થ એ થયો કે સમીકરણ $tanx = a$, $a \in$ R નો ઉકેલગણ અનંતગણ થાય. આપણને અનન્ય α ની જરૂર છે, જ્યાં $tan\alpha = a$ થાય. તેથી આપણે પ્રદેશને યોગ્ય રીતે મર્યાદિત કરવો પડે. આપણે $y = tanx$ માટેનો મર્યાદિત પ્રદેશ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ સ્વીકારીએ છીએ. (આકૃતિ 6.6). આ સંકલ્પનાની વિસ્તૃત ચર્ચા આપણે ધોરણ 12ના પ્રથમ સિમેસ્ટરમાં ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોના પ્રકરણમાં કરીશું.



આકૃતિ 6.5



આકૃતિ 6.6

આમ, કોઈ પણ $a \in [-1, 1]$ માટે અનન્ય $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, એવો મળે કે જેથી $a = sin\alpha$.

કોઈ પણ $a \in [-1, 1]$ માટે અનન્ય $\alpha \in [0, \pi]$, એવો મળે કે જેથી $a = cos\alpha$.

કોઈ પણ $a \in R$ માટે અનન્ય $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, એવો મળે કે જેથી $a = tan\alpha$.

આપણે *sine, cosine* અને *tangent* વિધેયોનાં શૂન્યોનો ગણ જાણીએ છીએ. આનો ખરેખર અર્થ એવો થાય છે કે આપણે ત્રિકોણમિતીય સમીકરણો $sin\theta = 0$, $cos\theta = 0$, $tan\theta = 0$ના વ્યાપક ઉકેલથી જ્ઞાત છીએ.

$sin\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = k\pi, \quad k \in Z$

$cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in Z$

$tan\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = k\pi, \quad k \in Z$

હવે, આપણે વ્યાપક સ્વરૂપમાં $sin\theta = a$, $-1 \le a \le 1$, $cos\theta = a$, $-1 \le a \le 1$ અને $tan\theta = a$, $a \in R$ ના ઉકેલ મેળવીએ.

6.3 (i) $sin\theta = a$ નો વ્યાપક ઉકેલ જ્યાં $-1 \le a \le 1$

અહીં, $-1 \le a \le 1$, માટે અનન્ય $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, એવો મળે કે જેથી $a = sin\alpha$.

હવે, $sin\theta = a = sin\alpha$

$\therefore \quad sin\theta - sin\alpha = 0 \Leftrightarrow 2cos\frac{\theta + \alpha}{2}\ sin\frac{\theta - \alpha}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \quad cos\frac{\theta + \alpha}{2} = 0$ અથવા $sin\frac{\theta - \alpha}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\theta + \alpha}{2} = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ અથવા $\frac{\theta - \alpha}{2} = n\pi$, $n \in Z$ (કેમ ?)

$\Leftrightarrow \quad \theta = (2n + 1)\pi - \alpha$ અથવા $\theta = 2n\pi + \alpha$, $n \in Z$

$\Leftrightarrow \quad \theta = (2n + 1)\pi + (-1)^{2n+1}\alpha$ અથવા $\theta = 2n\pi + (-1)^{2n}\alpha$, $n \in Z$

$\therefore$ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ $\theta = k\pi + (-1)^k\alpha$, $k \in Z$ છે.

($2n + 1$ અથવા $2n$ની જગ્યાએ k લખી શકાય કારણ કે કોઈ પણ પૂર્ણાંક $2n + 1$ અથવા $2n$ સ્વરૂપમાં હોય છે, $n \in Z$)

આમ, $sin\theta = sin\alpha \Leftrightarrow \theta = k\pi + (-1)^k\alpha$, $k \in Z$

તેથી, **$sin\theta = a, -1 \le a \le 1$ નો વ્યાપક ઉકેલગણ $\{k\pi + (-1)^k\alpha \mid k \in Z\}$ છે, જ્યાં $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ અને $sin\theta = a = sin\alpha$.**

(આપણે એવો કોઈ પણ $\alpha \in R$ લઈ શકીએ જ્યાં $a = sin\alpha$ થાય. ઉકેલગણ બદલાતો નથી. પરંતુ ઉકેલગણની એકરૂપતા માટે આપણે $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ લઈએ છીએ.)

(ii) $cos\theta = a$ નો વ્યાપક ઉકેલ જ્યાં $-1 \le a \le 1$:

અહીં, $-1 \le a \le 1$ માટે અનન્ય $\alpha \in [0, \pi]$ એવો મળે કે જેથી $a = cos\alpha$.

હવે, $cos\theta = a = cos\alpha$

$$\therefore \quad cos\theta - cos\alpha = 0 \Leftrightarrow -2sin\frac{\theta+\alpha}{2}\ sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow sin\frac{\theta+\alpha}{2} = 0 \text{ અથવા } sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\theta+\alpha}{2} = k\pi \text{ અથવા } \frac{\theta-\alpha}{2} = k\pi,\ k \in Z$$

$$\Leftrightarrow \theta = 2k\pi - \alpha \text{ અથવા } \theta = 2k\pi + \alpha,\ k \in Z$$

$\therefore$ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ $\theta = 2k\pi \pm \alpha,\ k \in Z$ છે.

આમ, **$cos\theta = cos\alpha \Leftrightarrow \theta = 2k\pi \pm \alpha,\ k \in Z$**

આથી, $cos\theta = a, -1 \le a \le 1$ નો વ્યાપક ઉકેલગણ $\{2k\pi \pm \alpha \mid k \in Z\}$ છે, જ્યાં $\alpha \in [0, \pi]$ અને $cos\theta = a = cos\alpha$.

(iii) $tan\theta = a$ નો વ્યાપક ઉકેલ જ્યાં $a \in R$:

અહીં, $a \in R$ માટે અનન્ય $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ એવો મળે કે જેથી $a = tan\alpha$ થાય.

હવે, $tan\theta = a = tan\alpha$

$$\therefore \quad tan\theta - tan\alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{sin\theta}{cos\theta} - \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{sin\theta\, cos\alpha - cos\theta\, sin\alpha}{cos\theta\, cos\alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{sin(\theta-\alpha)}{cos\theta\, cos\alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow sin(\theta - \alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta - \alpha = k\pi,\ k \in Z$$

$$\Leftrightarrow \theta = k\pi + \alpha,\ k \in Z$$

આમ, **$tan\theta = tan\alpha \Leftrightarrow \theta = k\pi + \alpha,\ k \in Z$**

આથી, $tan\theta = a, a \in R$ નો ઉકેલગણ $\{k\pi + \alpha \mid k \in Z\}$ છે, જ્યાં $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ અને $tan\theta = a = tan\alpha$.

શબ્દ 'ઉકેલ'નો અર્થ આપણે એવો કરીશું કે આપેલ સમીકરણનો ઉકેલગણ.

ઉદાહરણ 1 : ઉકેલો : (1) $2sin2\theta - 1 = 0$ (2) $sin^2\theta - sin\theta - 2 = 0$

ઉકેલ : (1) $2sin2\theta - 1 = 0$

$\therefore \quad sin2\theta = \frac{1}{2} = sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$sin\theta = sin\alpha$ નો વ્યાપક ઉકેલ $k\pi + (-1)^k\alpha,\ k \in Z$ છે.

$\therefore \quad 2\theta = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6},\ k \in Z$

$\therefore \quad \theta = \frac{k\pi}{2} + (-1)^k \frac{\pi}{12},\ k \in Z$

$\therefore$ આપેલ સમીકરણનો ઉકેલગણ $\left\{\frac{k\pi}{2} + (-1)^k \frac{\pi}{12} \,\middle|\, k \in Z\right\}$ છે.

(2) $sin^2\theta - sin\theta - 2 = 0$

$\therefore \quad (sin\theta + 1)(sin\theta - 2) = 0$

$\therefore \quad sin\theta = -1$ અથવા $sin\theta = 2$

પરંતુ $sin\theta = 2$ શક્ય નથી. **(કેમ ?)**

આમ, $sin\theta = -1 = sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \quad \theta = k\pi + (-1)^k \left(-\frac{\pi}{2}\right),\ k \in Z$

$\therefore$ આપેલ સમીકરણનો ઉકેલગણ $\left\{k\pi + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in Z\right\}$ છે.

ઉદાહરણ 2 : ઉકેલો : (1) $2cos5\theta + \sqrt{3} = 0$ (2) $2cos^2\theta + \sqrt{3}cos\theta = 0$

ઉકેલ : (1) $2cos5\theta + \sqrt{3} = 0$

$\therefore \quad cos5\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} = cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ $\quad \left(\frac{5\pi}{6} \in [0, \pi]\right)$

$cos\theta = cos\alpha$ નો વ્યાપક ઉકેલ $\theta = 2k\pi \pm \alpha,\ k \in Z$ છે.

$\therefore \quad 5\theta = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6},\ k \in Z$

$\therefore \quad \theta = \frac{2k\pi}{5} \pm \frac{\pi}{6},\ k \in Z$

$\therefore$ આપેલ સમીકરણનો ઉકેલગણ $\left\{\frac{2k\pi}{5} \pm \frac{\pi}{6} \,\middle|\, k \in Z\right\}$ છે.

(2) $2cos^2\theta - \sqrt{3}cos\theta = 0$

$\therefore \quad cos\theta(2cos\theta - \sqrt{3}) = 0$

$\therefore \quad cos\theta = 0$ અથવા $cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore \quad \theta = (2k + 1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z$ અથવા $\theta = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6},\ k \in Z$

$\therefore$ આપેલ સમીકરણનો ઉકેલગણ $\left\{(2k + 1)\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in Z\right\} \cup \left\{2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \,\middle|\, k \in Z\right\}$ છે.

ઉદાહરણ 3 : ઉકેલો : (1) $sin5x - sin3x - sinx = 0$ (2) $cosx + cos2x + cos3x = 0$

ઉકેલ : (1) $sin5x - sin3x - sinx = 0$

$\therefore \quad 2cos4x\ sinx - sinx = 0$

$\therefore \quad sinx(2cos4x - 1) = 0$

$\therefore$ $sinx = 0$ અથવા $cos4x = \frac{1}{2} = cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore$ $x = k\pi,\ k \in Z$ અથવા $4x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3},\ k \in Z$

$\therefore$ $x = k\pi,\ k \in Z$ અથવા $x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12},\ k \in Z$

$\therefore$ આપેલ સમીકરણનો ઉકેલગણ $\{k\pi \mid k \in Z\} \cup \left\{\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12} \,\middle|\, k \in Z\right\}$ છે.

(2) $cosx + cos2x + cos3x = 0$

$\therefore$ $cos3x + cosx + cos2x = 0$

$\therefore$ $2cos2x\ cosx + cos2x = 0$

$\therefore$ $cos2x\ (2cosx + 1) = 0$

$\therefore$ $cos2x = 0$ અથવા $cosx = -\frac{1}{2} = cos\frac{2\pi}{3}$ $\left(\frac{2\pi}{3} \in [0, \pi]\right)$

$\therefore$ $2x = (2k + 1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z$ અથવા $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3},\ k \in Z$

$\therefore$ $x = (2k + 1)\frac{\pi}{4},\ k \in Z$ અથવા $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3},\ k \in Z$

આપેલ સમીકરણનો ઉકેલગણ $\left\{(2k + 1)\frac{\pi}{4} \,\middle|\, k \in Z\right\} \cup \left\{2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \,\middle|\, k \in Z\right\}$ છે.

ઉદાહરણ 4 : ઉકેલો : (1) $tan^2\theta + (1 - \sqrt{3})tan\theta - \sqrt{3} = 0$

(2) $tan\theta + tan4\theta + tan7\theta = tan\theta\ tan4\theta\ tan7\theta$

ઉકેલ : (1) $tan^2\theta + (1 - \sqrt{3})tan\theta - \sqrt{3} = 0$

$\therefore$ $tan^2\theta + tan\theta - \sqrt{3}tan\theta - \sqrt{3} = 0$

$\therefore$ $tan\theta(tan\theta + 1) - \sqrt{3}(tan\theta + 1) = 0$

$\therefore$ $(tan\theta + 1)(tan\theta - \sqrt{3}) = 0$

$\therefore$ $tan\theta = -1$ અથવા $tan\theta = \sqrt{3}$

$\therefore$ $tan\theta = tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ અથવા $tan\theta = tan\frac{\pi}{3}$

$\therefore$ $\theta = k\pi - \frac{\pi}{4},\ k \in Z$ અથવા $\theta = k\pi + \frac{\pi}{3},\ k \in Z$

$\therefore$ આપેલ સમીકરણનો ઉકેલગણ $\left\{k\pi - \frac{\pi}{4} \,\middle|\, k \in Z\right\} \cup \left\{k\pi + \frac{\pi}{3} \,\middle|\, k \in Z\right\}$ છે.

(2) $tan\theta + tan4\theta + tan7\theta = tan\theta\ tan4\theta\ tan7\theta$

$\therefore$ $tan\theta + tan4\theta = -tan7\theta + tan\theta\ tan4\theta\ tan7\theta$

$\therefore$ $tan\theta + tan4\theta = -tan7\theta\ (1 - tan\theta\ tan4\theta)$ (i)

પ્રથમ આપણે $1 - tan\theta\ tan4\theta \neq 0$ સાબિત કરીએ.

જો $1 - tan\theta\ tan4\theta = 0$ તો (i) પરથી $tan\theta + tan4\theta = 0$ હોવાથી,

$tan\theta\ tan4\theta = 1$ અને $tan4\theta = -tan\theta$

$\therefore$ $tan^2\theta = -1$, જે R માં શક્ય નથી.

હવે, (i) પરથી $\frac{tan\theta + tan4\theta}{1 - tan\theta\, tan4\theta} = -tan7\theta$

$\therefore$ $tan(\theta + 4\theta) = -tan7\theta$

$\therefore$ $tan5\theta = tan(-7\theta)$

$\therefore$ $5\theta = k\pi - 7\theta,\ k \in Z$

$\therefore$ $\theta = \frac{k\pi}{12},\ k \in Z$

વળી, $tan\theta$, $tan4\theta$, $tan7\theta$ વ્યાખ્યાયિત થવા જોઈએ.

$\therefore$ $\theta \neq (2m + 1)\frac{\pi}{2},\ 4\theta \neq (2m + 1)\frac{\pi}{2},\ 7\theta \neq (2m + 1)\frac{\pi}{2},\ m \in Z$

$\therefore$ $\theta = \frac{k\pi}{12},\ k \in Z$ તો $k \neq 6, 18, 30, ...$

$4\theta = \frac{k\pi}{3} \neq (2m + 1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z - \{6, 18, ...\}$

$7\theta = \frac{7k\pi}{12} \neq (2m + 1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z - \{6, 18, ...\}$

$\therefore$ $k \neq 6, 18, ...$

$\therefore$ $k \neq 12n + 6,\ n \in Z$

$\therefore$ આપેલ સમીકરણનો ઉકેલગણ $\left\{\frac{k\pi}{12} \,\middle|\, k \in Z \text{ જ્યાં } k \neq 12n + 6\right\},\quad n \in Z$

ઉદાહરણ 5 : ઉકેલો : (1) $4sin\theta = cosec\theta$ (2) $sec\theta + tan\theta = 2 - \sqrt{3}$

ઉકેલ : (1) $4sin\theta = cosec\theta$

$\therefore$ $4sin\theta = \frac{1}{sin\,\theta}$

$\therefore$ $4sin^2\theta = 1$

$\therefore$ $sin\theta = \pm\frac{1}{2}$

$\therefore$ $sin\theta = sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ અથવા $sin\theta = sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore$ $\theta = k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{6},\ k \in Z$ અથવા $\theta = k\pi + (-1)^k\left(-\frac{\pi}{6}\right),\ k \in Z$

$\therefore$ $\theta = k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{6},\ k \in Z$ અથવા $\theta = k\pi + (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6},\ k \in Z$

$\therefore$ $\theta = k\pi \pm \frac{\pi}{6},\ k \in Z$

$\therefore$ આપેલ સમીકરણનો ઉકેલગણ $\left\{k\pi \pm \frac{\pi}{6} \,\middle|\, k \in Z\right\}$ છે.

(2) $sec\theta + tan\theta = 2 - \sqrt{3}$ **(i)**

હવે, $sec^2\theta - tan^2\theta = 1$,

$\therefore$ $sec\theta - tan\theta = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = 2 + \sqrt{3}$

$\therefore$ $sec\theta - tan\theta = 2 + \sqrt{3}$ **(ii)**

(i) અને (ii) ને ઉકેલતાં, $sec\theta = 2$ અને $tan\theta = -\sqrt{3}$

અહીં નોંધીએ કે ઉપરનાં સમીકરણો ત્રિકોણમિતીય સમીકરણોની સંહતિ છે.

હવે, $cos\theta = \frac{1}{2} > 0$ અને $tan\theta = -\sqrt{3} < 0$. આથી, $P(\theta)$ ચોથા ચરણમાં છે.

$\therefore \quad cos\theta = cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ અને $tan\theta = tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore \quad \theta = 2k\pi - \frac{\pi}{3}, k \in Z$ **(P(θ) ચોથા ચરણમાં છે.)**

$\therefore$ આપેલ સમીકરણનો ઉકેલગણ $\left\{2k\pi - \frac{\pi}{3} \,\middle|\, k \in Z\right\}$ છે.

6.4 $acosx + bsinx = c$, $a, b, c \in R$ અને $a^2 + b^2 \neq 0$ નો વ્યાપક ઉકેલગણ

કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ $a, b \in R$ માટે આપણને $r > 0$ અને $\alpha \in [0, 2\pi)$ એવાં મળે કે જેથી $a = rcos\alpha$ અને $b = rsin\alpha$ થાય.

$\therefore \quad a^2 + b^2 = r^2 cos^2\alpha + r^2 sin^2\alpha = r^2$

$\therefore \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}$ **($r > 0$)**

હવે, $acosx + bsinx = c$

$\therefore \quad rcos\alpha\, cosx + rsin\alpha\, sinx = c$

$\therefore \quad rcos(x - \alpha) = c$

$\therefore \quad cos(x - \alpha) = \frac{c}{r}$ **(i)**

અહીં આપેલ સમીકરણ એટલે કે સમીકરણ (i)નો ઉકેલ હોવાની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત

$$\left|\frac{c}{r}\right| \leq 1 \Leftrightarrow c^2 \leq r^2$$

$$\Leftrightarrow c^2 \leq a^2 + b^2 \text{ છે.}$$

જો $cos(x - \alpha) = cos\beta$, જ્યાં $cos\beta = \frac{c}{r}$, $\beta \in [0, \pi]$, હોય તો સમીકરણ (i)નો વ્યાપક ઉકેલ $x - \alpha = 2k\pi \pm \beta$, $k \in Z$; જ્યાં $\alpha \in [0, 2\pi)$ તથા $a = rcos\alpha$, $b = rsin\alpha$.

આમ, જો $c^2 \leq a^2 + b^2$ તો $acosx + bsinx = c$ નો વ્યાપક ઉકેલ

$x = 2k\pi + \alpha \pm \beta$, $k \in Z$, જ્યાં $\alpha \in [0, 2\pi)$ તથા $a = rcos\alpha$, $b = rsin\alpha$ અને $cos\beta = \frac{c}{r}$, $\beta \in [0, \pi]$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

જો $c^2 > a^2 + b^2$ હોય, તો આપેલ સમીકરણને ઉકેલ ન મળે એટલે કે ઉકેલગણ $\emptyset$ થાય.

ઉદાહરણ 6 : ઉકેલો : $\sqrt{3}cosx + sinx = \sqrt{2}$

ઉકેલ : રીત 1 : અહીં, $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, $c = \sqrt{2}$.

$\therefore \quad r^2 = a^2 + b^2 = 3 + 1 = 4.$

આથી, $r = 2$. અહીં, $c^2 < a^2 + b^2$ હોવાથી આપેલ સમીકરણને ઉકેલ મળે.

$a = rcos\alpha$ અને $b = rsin\alpha$ પરથી $cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ અને $sin\alpha = \frac{1}{2}$. આથી, $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

હવે, $cos\beta = \frac{c}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \quad \beta = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ માંગેલ ઉકેલગણ $\{2k\pi + \alpha \pm \beta \mid k \in Z\}$

$$= \left\{2k\pi + \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{4} \,\middle|\, k \in Z\right\}$$

રીત 2 : $\sqrt{3}cosx + sinx = \sqrt{2}$

$\therefore \quad \frac{\sqrt{3}}{2}cosx + \frac{1}{2}sinx = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (r = 2 વડે ભાગતાં)

$\therefore \quad cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore \quad x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k \in Z$

$\therefore$ માંગેલ ઉકેલગણ $\left\{2k\pi + \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{4} \,\middle|\, k \in Z\right\}$

$$= \left\{2k\pi + \frac{5\pi}{12} \,\middle|\, k \in Z\right\} \cup \left\{2k\pi - \frac{\pi}{12} \,\middle|\, k \in Z\right\}$$

ઉદાહરણ 7 : ઉકેલો : $3cos\theta + 4sin\theta = 6$.

ઉકેલ : અહીં, $a = 3$, $b = 4$, $c = 6$.

$\therefore \quad r^2 = a^2 + b^2 = 25$. $c^2 = 36$. તેથી, $c^2 > a^2 + b^2$.

$\therefore$ આપેલ સમીકરણનો ઉકેલગણ $\emptyset$ છે.

સ્વાધ્યાય 6.1

નીચેનાં સમીકરણો ઉકેલો :

1. $2cos2\theta + \sqrt{2} = 0$
2. $2cos^2\theta + \sqrt{3}cos\theta = 0$
3. $2cos\theta + sec\theta = 3$
4. $4sin^2\theta - 8cos\theta + 1 = 0$
5. $\sqrt{2}\,cosec3\theta - 2 = 0$
6. $2sin^2\theta - sin\theta = 0$
7. $2sin\theta + cosec\theta = 3$
8. $sin2\theta + cos\theta = 0$
9. $sin7\theta = sin\theta + sin3\theta$
10. $cos^2\theta - cos\theta = 0$
11. $tan2\theta - \sqrt{3} = 0$
12. $\sqrt{3}cot\theta - cot^2\theta = 0$
13. $tan^2\theta - (\sqrt{3} + 1)tan\theta + \sqrt{3} = 0$
14. $cos\theta + sin\theta = 1$
15. $\sqrt{3}sin\theta - cos\theta = \sqrt{2}$
16. $2cos\theta + sin\theta = 3$
17. $3 - cot^25\theta = 0$
18. $cosec^22\theta - 2 = 0$
19. $\sqrt{2} + sec4\theta = 0$
20. $tan3\theta + cot\theta = 0$

*

6.5 ત્રિકોણના ગુણધર્મો

ત્રિકોણમિતિ શબ્દનો મૂળભૂત અર્થ ત્રિકોણના ઘટકોનું માપકરણ સૂચવે છે. દરેક ત્રિકોણને ત્રણ બાજુઓ અને ત્રણ ખૂણાઓ હોય છે. ત્રિકોણની બાજુઓ અને ખૂણાઓના માપ વચ્ચે નિશ્ચિત સંબંધ હોય છે. આ વિભાગમાં આપણે આ ઘટકો વચ્ચેના ચોક્કસ સંબંધો મેળવીશું.

ΔABC માટે સામાન્ય રીતે નીચેના સંકેતો પ્રચલિત છે :

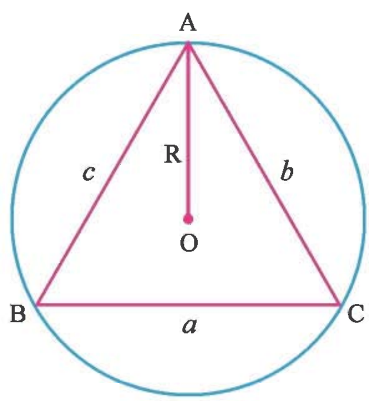
$m\angle BAC = A$, $m\angle ABC = B$, $m\angle BCA = C$

$A + B + C = \pi$

(ખૂણાઓનાં માપ A, B, C રેડિયન માપમાં લઈશું.)

$AB = c$, $BC = a$, $CA = b$

ત્રિકોણના પરિવૃત્તની ત્રિજ્યાનું માપ એટલે કે પરિત્રિજ્યા = R



આકૃતિ 6.7

sine સૂત્ર :

ΔABC માં,

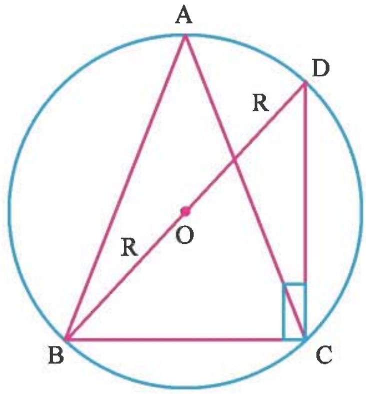
$$\frac{a}{sin\,A} = \frac{b}{sin\,B} = \frac{c}{sin\,C} = 2R$$

અહીં $\frac{a}{sin\,A}$ = 2R સાબિત કરીશું. બાકીના બે તે જ પ્રમાણે મેળવી શકાય.

A સંબંધી ત્રણ વિકલ્પ છે :

(1) $0 < A < \frac{\pi}{2}$ (2) $A = \frac{\pi}{2}$ (3) $\frac{\pi}{2} < A < \pi$

વિકલ્પ 1 : $0 < A < \frac{\pi}{2}$



આકૃતિ 6.8

ધારો કે ΔABC નું પરિકેન્દ્ર O છે. $\overrightarrow{BO}$ પરિવૃત્તને D માં છેદે છે.
અહીં BD = 2OB = 2R અને D = $m\angle$BDC = $m\angle$CAB = A

(એક જ વૃત્તખંડના ખૂણા) **(i)**

ΔBCD માં, $m\angle BCD = \frac{\pi}{2}$

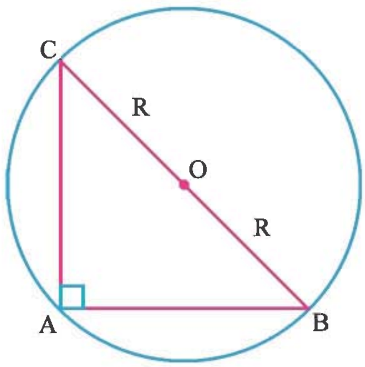
(અર્ધવર્તુળમાં અંતર્ગત ખૂણો કાટખૂણો હોય છે.)

$\therefore \quad sin D = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R}$

$\therefore \quad sin A = \frac{a}{2R}$ **((i) દ્વારા)**

$\therefore \quad \frac{a}{sin\,A} = 2R$

વિકલ્પ 2 : ΔABC કાટકોણ ત્રિકોણ છે અને $A = \frac{\pi}{2}$



આકૃતિ 6.9

$\therefore \quad \overline{BC}$ પરિવૃત્તનો વ્યાસ છે.

$\therefore \quad$ BC = 2R.

હવે, $a = BC = 2R = 2R sin\frac{\pi}{2} = 2R sin A$

$\therefore \quad \frac{a}{sin\,A} = 2R$

વિકલ્પ 3 : $\frac{\pi}{2} < A < \pi$

$\angle$BAC એ ગુરુકોણ હોવાથી શિરોબિંદુ લઘુચાપ BC પર છે. હવે, ગુરુચાપ BC પર બિંદુ A' લો.

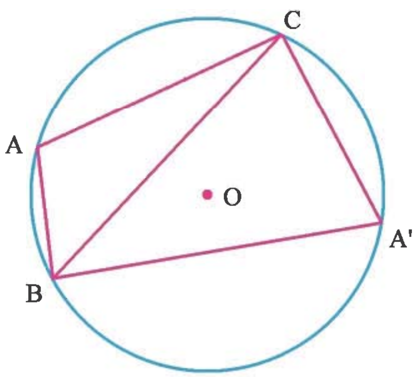
$m\angle BA'C = (\pi - A) < \frac{\pi}{2}$ $\left(\frac{\pi}{2} < A < \pi\right)$

$\therefore \quad \Delta BA'C$ માટે વિકલ્પ (1) પ્રમાણે,

$BC = a = 2R sin A' = 2R sin(\pi - A) = 2R sin A$

$\therefore \quad \frac{a}{sin\,A} = 2R$

આમ, દરેક વિકલ્પમાં $\frac{a}{sin\,A}$ = 2R મળે છે.



આકૃતિ 6.10

આ જ રીતે, $\frac{b}{\sin B} = 2R$ અને $\frac{c}{\sin C} = 2R$ મેળવી શકાય.

$$\therefore \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

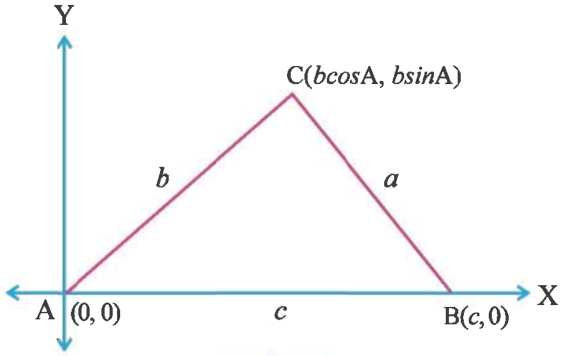
cosine સૂત્ર :

ΔABC માં,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \ \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \text{ અને } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

આપણે, $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ સાબિત કરીશું.

આકૃતિ 6.11 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ΔABC માં A ને ઊગમબિંદુ તથા $\overrightarrow{AB}$ ને X-અક્ષની ધન દિશામાં લઈએ. અહીં, $AB = c$ હોવાથી B ના યામ $(c, 0)$ થાય. હવે, $AC = b$ અને $m\angle CAB = A$ હોવાથી, C ના યામ $(b\cos A, b\sin A)$ થશે.



આકૃતિ 6.11

હવે, $a = BC$

$$\therefore \quad a^2 = BC^2$$
$$= (b\cos A - c)^2 + (b\sin A - 0)^2$$
$$= b^2\cos^2 A - 2bc\cos A + c^2 + b^2\sin^2 A$$
$$= b^2(\cos^2 A + \sin^2 A) - 2bc\cos A + c^2$$
$$\therefore \quad a^2 = b^2 - 2bc\cos A + c^2$$
$$\therefore \quad 2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$$
$$\therefore \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

તે જ રીતે, $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$ અને $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

નોંધ : (1) ΔABC માં $\angle A$ કાટકોણ હોય અથવા ગુરુકોણ હોય તો પણ ઉપરનું પરિણામ સત્ય જ છે.

(2) ત્રિકોણની ત્રણ બાજુનાં માપ આપ્યાં હોય તો *cosine* સૂત્રથી ત્રણ ખૂણાનાં માપ અનન્ય રીતે નક્કી થઈ શકે. ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ જ્ઞાત હોય તો તેના ખૂણાનાં માપ અન્ય રીતે નક્કી થઈ શકે. તે જ રીતે, બે બાજુઓ અને અંતર્ગત ખૂણો આપ્યો હોય તો પણ આ સૂત્ર પ્રમાણે ત્રીજી બાજુ અનન્ય મળે.

એક અગત્યનું સૂત્ર :

sine અને *cosine* સૂત્રોની મદદથી આપણે અહીં એક અગત્યનું પરિણામ મેળવીશું :

પ્રક્ષેપ સૂત્ર :

$$a = b\cos C + c\cos B, \ b = c\cos A + a\cos C, \ c = a\cos B + b\cos A$$

આપણે, $a = b\cos C + c\cos B$ સાબિત કરીશું.

આપણે *cosine* સૂત્રની મદદથી સાબિતી આપીશું. (*sine* સૂત્રની મદદથી સાબિતી આપવાનો પ્રયત્ન કરો.)

$$b\cos C + c\cos B = b\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + c\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$= \frac{a^2+b^2-c^2}{2a} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2a}$$

$$= \frac{a^2+b^2-c^2+c^2+a^2-b^2}{2a} = \frac{2a^2}{2a} = a$$

આમ, $a = b\cos C + c\cos B$

તે જ રીતે અન્ય બે પ્રક્ષેપ સૂત્રો મેળવી શકાય.

ઉદાહરણ 8 : ΔABC માટે સાબિત કરો કે,

(1) $a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B) = 0$

(2) $a\sin\frac{A}{2}\sin\left(\frac{B-C}{2}\right) + b\sin\frac{B}{2}\sin\left(\frac{C-A}{2}\right) + c\sin\frac{C}{2}\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) = 0$

ઉકેલ : (1) ડા.બા. $= a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B)$

$$= a\left(\frac{b}{2R}-\frac{c}{2R}\right) + b\left(\frac{c}{2R}-\frac{a}{2R}\right) + c\left(\frac{a}{2R}-\frac{b}{2R}\right)$$

$$= \frac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{2R} = 0 = \text{જ.બા.}$$

(2) $a\sin\frac{A}{2}\sin\left(\frac{B-C}{2}\right) = a\sin\left(\frac{\pi-(B+C)}{2}\right)\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)$ **$(A + B + C = \pi)$**

$$= a\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

$$= \frac{a}{2}(\sin B - \sin C)$$

$$= \frac{a}{2}\left(\frac{b}{2R} - \frac{c}{2R}\right) = \frac{1}{4R}(ab - ac) \quad \textbf{(i)}$$

તે જ રીતે, $b\sin\frac{B}{2}\sin\left(\frac{C-A}{2}\right) = \frac{1}{4R}(bc - ab)$ **(ii)**

$$c\sin\frac{C}{2}\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{1}{4R}(ac - bc) \quad \textbf{(iii)}$$

(i), (ii) અને (iii) નો સરવાળો કરતાં,

ડા.બા. $= a\sin\frac{A}{2}\sin\left(\frac{B-C}{2}\right) + b\sin\frac{B}{2}\sin\left(\frac{C-A}{2}\right) + c\sin\frac{C}{2}\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$

$= \frac{1}{4R}(ab - ac + bc - ab + ac - bc) = 0 =$ જ.બા.

ઉદાહરણ 9 : ΔABC માટે સાબિત કરો :

(1) $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

(2) $\frac{\tan C}{\tan A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+b^2-c^2}$

ઉકેલ :

(1) ડા.બા. $= \dfrac{cos A}{a} + \dfrac{cos B}{b} + \dfrac{cos C}{c}$

$$= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \times \frac{1}{a} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \times \frac{1}{b} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \times \frac{1}{c} \quad \textbf{(cosine સૂત્ર)}$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - a^2 + c^2 + a^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2}{2abc} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc} = \text{જ.બા.}$$

આમ, $\dfrac{cos A}{a} + \dfrac{cos B}{b} + \dfrac{cos C}{c} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$

(2) ડા.બા. $= \dfrac{tan C}{tan A} = \dfrac{sin C \, cos A}{cos C \, sin A}$

$$= \frac{\frac{c}{2R}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)}{\frac{a}{2R}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + b^2 - c^2} = \text{જ.બા.}$$

ઉદાહરણ 10 : ΔABC માટે સાબિત કરો :

$(a + b)cosC + (b + c)cosA + (c + a)cosB = a + b + c$

ઉકેલ : ડા.બા. $= (a + b)cosC + (b + c)cosA + (c + a)cosB$

$= a\,cosC + b\,cosC + b\,cosA + c\,cosA + c\,cosB + a\,cosB$

$= b\,cosC + c\,cosB + c\,cosA + a\,cosC + a\,cosB + b\,cosA$

$= a + b + c =$ જ.બા.

સ્વાધ્યાય 6.2

ΔABC માટે સાબિત કરો **: (1 થી 9)**

1. $a sin(B - C) + b sin(C - A) + c sin(A - B) = 0$
2. $a^2(cos^2B - cos^2C) + b^2(cos^2C - cos^2A) + c^2(cos^2A - cos^2B) = 0$
3. $\dfrac{a^2 sin(B - C)}{sin A} + \dfrac{b^2 sin(C - A)}{sin B} + \dfrac{c^2 sin(A - B)}{sin C} = 0$
4. $a^3 sin(B - C) + b^3 sin(C - A) + c^3 sin(A - B) = 0$
5. $a sin\left(\dfrac{A}{2} + C\right) = (b + c) sin \dfrac{A}{2}$
6. $a cos\left(\dfrac{B - C}{2}\right) = (b + c) sin \dfrac{A}{2}$
7. $sin\left(\dfrac{A - B}{2}\right) = \dfrac{a - b}{c} cos \dfrac{C}{2}$
8. $tan\left(\dfrac{A}{2} + B\right) = \dfrac{c + b}{c - b} tan \dfrac{A}{2}$
9. $\dfrac{1 + cos A \; cos(B - C)}{1 + cos C \; cos(A - B)} = \dfrac{b^2 + c^2}{b^2 + a^2}$
10. સાબિત કરો : $sin^2A + sin^2B = sin^2C \Rightarrow \Delta ABC$ કાટકોણ છે જ્યાં C કાટખૂણો છે.

11. સાબિત કરો : $(a^2 + b^2)sin\,(A - B) = (a^2 - b^2)sin\,(A + B) \Rightarrow \Delta ABC$ સમદ્વિભૂજ અથવા કાટકોણ છે.

12. સાબિત કરો : $(b^2 - c^2)cotA + (c^2 - a^2)cotB + (a^2 - b^2)cotC = 0$

13. સાબિત કરો : $\left(\frac{b^2 - c^2}{a^2}\right)sin2A + \left(\frac{c^2 - a^2}{b^2}\right)sin2B + \left(\frac{a^2 - b^2}{c^2}\right)sin2C = 0$

14. સાબિત કરો : $2\left(asin^2\frac{C}{2} + csin^2\frac{A}{2}\right) = c + a - b$

15. સાબિત કરો : $4\left(bc\,cos^2\frac{A}{2} + ca\,cos^2\frac{B}{2} + ab\,cos^2\frac{C}{2}\right) = (a + b + c)^2$

16. બતાવો કે 3, 5, 7 માપની બાજુઓવાળો ત્રિકોણ ગુરુકોણ ત્રિકોણ છે અને ગુરુકોણનું માપ શોધો.

17. જો કોઈ ત્રિકોણના ખૂણાઓનાં માપ 1 : 2 : 3 ગુણોત્તરમાં હોય તો તેમની સામેની બાજુઓના માપનો ગુણોત્તર શોધો.

18. જો ΔABC ના ખૂણાઓનાં માપ A, B, C સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તથા $b : c = \sqrt{3} : \sqrt{2}$ તો A શોધો.

19. જો ΔABC માં $\frac{sin\,A}{sin\,C} = \frac{sin\,(A - B)}{sin\,(B - C)}$, હોય તો સાબિત કરો કે a^2, b^2, c^2 સમાંતર શ્રેણીમાં હોય.

20. ΔABC માં $a = 2b$ અને $|A - B| = \frac{\pi}{3}$ તો C શોધો.

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 11 : ઉકેલો : $sin3\alpha = 4sin\alpha\; sin(x + \alpha)\; sin(x - \alpha)$, જ્યાં, $\alpha \neq k\pi, k \in Z$

ઉકેલ : $sin3\alpha = 4sin\alpha\; sin(x + \alpha)\; sin(x - \alpha)$, જ્યાં, $\alpha \neq k\pi, k \in Z$

$\therefore\quad sin3\alpha = 4sin\alpha\,(sin^2x - sin^2\alpha)$

$\therefore\quad 3sin\alpha - 4sin^3\alpha = 4sin\alpha\,sin^2x - 4sin^3\alpha$

$\therefore\quad 3sin\alpha = 4sin\alpha\,sin^2x$

$\therefore\quad sin^2x = \frac{3}{4}$ **($\alpha \neq k\pi$, $sin\alpha \neq 0$)**

$\therefore\quad sinx = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} = sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore\quad x = k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{3}, k \in Z$ અથવા $x = k\pi + (-1)^k\left(-\frac{\pi}{3}\right), k \in Z$

$\therefore\quad x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in Z$

આમ, માંગેલ ઉકેલગણ $\left\{k\pi \pm \frac{\pi}{3} \;\middle|\; k \in Z\right\}$ છે.

ઉદાહરણ 12 : ઉકેલો : $tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 4$

ઉકેલ : $tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 4$

$\therefore\quad \frac{1 + tan\,\theta}{1 - tan\,\theta} + \frac{1 - tan\,\theta}{1 + tan\,\theta} = 4$

$\therefore\quad \frac{(1 + tan\theta)^2 + (1 - tan\theta)^2}{(1 - tan\theta)(1 + tan\theta)} = 4$

$\therefore \quad \frac{2+2tan^2\theta}{1-tan^2\theta} = 4$

$\therefore \quad 1 + tan^2\theta = 2 - 2tan^2\theta$

$\therefore \quad 3tan^2\theta = 1$

$\therefore \quad tan^2\theta = \frac{1}{3}$

$\therefore \quad tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = tan\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore \quad \theta = k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in Z$

આમ, માંગેલ ઉકેલગણ $\left\{k\pi \pm \frac{\pi}{6} \;\middle|\; k \in Z\right\}$ છે.

ઉદાહરણ 13 : જો $\frac{sin A}{4} = \frac{sin B}{5} = \frac{sin C}{6}$, તો સાબિત કરો કે $\frac{cos A}{12} = \frac{cos B}{9} = \frac{cos C}{2}$ અને તે પરથી $cos A + cos B + cos C$ ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $\frac{sin A}{4} = \frac{sin B}{5} = \frac{sin C}{6}$

$\therefore \quad \frac{\frac{a}{2R}}{4} = \frac{\frac{b}{2R}}{5} = \frac{\frac{c}{2R}}{6}$

$\therefore \quad \frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6} = k$ (ધારો કે), જ્યાં $k > 0$

$\therefore \quad a = 4k, \ b = 5k, \ c = 6k$

હવે, $cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$= \frac{25k^2 + 36k^2 - 16k^2}{2 \cdot 5k \cdot 6k} = \frac{45k^2}{60k^2} = \frac{3}{4}$

$\therefore \quad \frac{cos A}{12} = \frac{1}{16}$

તે જ રીતે $\frac{cos B}{9} = \frac{1}{16}$ અને $\frac{cos C}{2} = \frac{1}{16}$

આમ, $\frac{cos A}{12} = \frac{cos B}{9} = \frac{cos C}{2}$.

વળી, $cos A + cos B + cos C = \frac{12}{16} + \frac{9}{16} + \frac{2}{16} = \frac{23}{16}$.

સ્વાધ્યાય 6

ઉકેલો : **(1 થી 10)**

1. $2(sec^2\theta + sin^2\theta) = 5$

2. $2 - cos x = 2tan\frac{x}{2}$

3. $4sin\theta \, sin2\theta \, sin4\theta = sin3\theta$

4. $sin^2\theta - cos\theta = \frac{1}{4}$

5. $\sqrt{3}tan3\theta + \sqrt{3}tan2\theta + tan3\theta \, tan2\theta = 1$

6. $cosec x = 1 + cot x$

7. $sin^8 x + cos^8 x = \frac{17}{32}$

8. $\tan\theta + \tan\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = 3$

9. $\sin x - 3\sin 2x + \sin 3x = \cos x - 3\cos 2x + \cos 3x$

10. $2\sin^2\theta + \sqrt{3}\cos\theta + 1 = 0$

ΔABC માં સાબિત કરો : **(11 થી 14)**

11. $a\cos A + b\cos B + c\cos C = 4R\sin A \sin B \sin C = \frac{abc}{2R^2}$

12. $a(\cos C - \cos B) = 2(b - c)\cos^2 \frac{A}{2}$

13. $a^3\cos(B - C) + b^3\cos(C - A) + c^3\cos(A - B) = 3abc$

14. જો $\frac{b+c}{11} = \frac{c+a}{12} = \frac{a+b}{13}$, તો સાબિત કરો કે $\frac{\cos A}{7} = \frac{\cos B}{19} = \frac{\cos C}{25}$

15. *sine* સૂત્રની મદદથી *cosine* સૂત્ર મેળવો.

16. સાબિત કરો : $(a - b)^2 \cos^2 \frac{C}{2} + (a + b)^2 \sin^2 \frac{C}{2} = c^2$

17. સાબિત કરો : $abc(\cot A + \cot B + \cot C) = R(a^2 + b^2 + c^2)$

18. જો કોઈ ત્રિકોણની બાજુઓનાં માપ 4, 5 અને 6 હોય, તો સાબિત કરો કે ત્રિકોણના સૌથી મોટા માપવાળા ખૂણાનું માપ સૌથી નાના માપવાળા ખૂણાના માપ કરતાં બમણું છે.

19. જો ત્રિકોણની બાજુઓનાં માપ m, n, $\sqrt{m^2 + mn + n^2}$ હોય, તો ત્રિકોણના સૌથી મોટા માપવાળા ખૂણાનું માપ $\frac{2\pi}{3}$ છે.

20. જો ત્રિકોણની બે બાજુઓનાં માપ સમીકરણ $x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$ નાં બીજ હોય અને તે બે બાજુઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{3}$ હોય, તો ત્રિકોણની પરિમિતિ $2\sqrt{3} + \sqrt{6}$ છે તેમ બતાવો.

21. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને $\square$ માં લખો :

(1) $\frac{\tan 3x - \tan 2x}{1 + \tan 3x \tan 2x} = 1$ નો ઉકેલગણ ...... છે. $\square$

(a) $\emptyset$ (b) $\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

(c) $\left\{k\pi + \frac{\pi}{4} \mid k \in Z\right\}$ (d) $\left\{2k\pi + \frac{\pi}{4} \mid k \in Z\right\}$

(2) સમીકરણ $\sec^2 (a + 2)x + a^2 - 1 = 0$ નું $-\pi < x < \pi$ માં સમાધાન કરતી ક્રમયુક્ત જોડ (a, x) ની સંખ્યા ...... છે. $\square$

(a) 2 (b) 1 (c) 3 (d) અનંત

(3) સમીકરણ $\sin^{50}x - \cos^{50}x = 1$ નો વ્યાપક ઉકેલ ...... છે. $\square$

(a) $2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z$ (b) $2k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in Z$

(c) $k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in Z$ (d) $k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z$

(4) સમીકરણ $3\sin^2x - 7\sin x + 2 = 0$ ના અંતરાલ $[0, 5\pi]$ માં ઉકેલોની સંખ્યા ...... છે. $\square$

(a) 0 (b) 5 (c) 6 (d) 10

(5) સમીકરણ $cos^7x + sin^4x = 1$ના અંતરાલ $(-\pi, \pi)$ માં વાસ્તવિક ઉકેલો ...... છે.

(a) $0, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$ (b) $0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$ (c) $0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$

(6) $2y = 1$ અને $y = sinx, -2\pi < x \leq 2\pi$ ના આલેખોના છેદબિંદુઓની સંખ્યા...

(a) 2 (b) 4 (c) 3 (d) 1

(7) $sin\theta + cos\theta = 2$ નો ઉકેલગણ ...... છે.

(a) $k\pi, k \in Z$ (b) $2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z$

(c) $\emptyset$ (d) $(2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$

(8) $cos2\theta = cos^2\theta - sin^2\theta$ નો ઉકેલગણ ...... છે.

(a) R (b) $k\pi, k \in Z$

(c) $\emptyset$ (d) $(2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$

(9) ΔABC માં જો $\frac{cos A}{a} = \frac{cos B}{b} = \frac{cos C}{c}$ અને $a = 2$ તો ΔABC નું ક્ષેત્રફળ ...... છે.

(a) 1 (b) 2 (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\sqrt{3}$

(10) ΔABC માં $a = 5, b = 7$ અને $sinA = \frac{3}{4}$ તો આવા ...... ત્રિકોણો શક્ય બને.

(a) 1 (b) 0 (c) 2 (d) અનંત

(11) ΔABC ની પરિમિતિ તેના ખૂણાઓની *sine* કિંમતના મધ્યકથી 6 ગણી છે. જો બાજુ $a = 1$ હોય તો A = ... છે.

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) π

(12) ΔABC માં જો $a = 2b$ અને $A = 3B$ તો A = ... છે.

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

(13) જો ΔABC માટે A, B, C સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તથા તેમની સામેની બાજુઓનાં માપ a, b, c સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય તો a^2, b^2, c^2...

(a) સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય. (b) સમાંતર શ્રેણીમાં હોય.

(c) $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય. (d) કોઈ સંબંધ ન હોય.

(14) ΔABC માં $A = \frac{\pi}{4}, C = \frac{\pi}{3}$, તો $a + c\sqrt{2} =$ ......

(a) b (b) $\sqrt{3}b$ (c) $\sqrt{2}b$ (d) $2b$

(15) ΔABC માં $2ac sin\frac{1}{2}(A - B + C) =$ ......

(a) $a^2 + b^2 - c^2$ (b) $c^2 + a^2 - b^2$ (c) $b^2 - c^2 + a^2$ (d) $c^2 - a^2 - b^2$

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. $sin\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = k\pi, k \in Z$
2. $cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = (2k + 1)\frac{\pi}{2}\ k \in Z$
3. $tan\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = k\pi, k \in Z$
4. $sin\theta = a, -1 \le a \le 1$ નો ઉકેલગણ $\{k\pi + (-1)^k\alpha \mid k \in Z\}$,
   જ્યાં $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ અને $sin\theta = a = sin\alpha$.
5. $cos\theta = a, -1 \le a \le 1$ નો ઉકેલગણ $\{2k\pi \pm \alpha \mid k \in Z\}$,
   જ્યાં $\alpha \in [0, \pi]$ અને $cos\theta = a = cos\alpha$.
6. $tan\theta = a, a \in R$ નો ઉકેલગણ $\{k\pi + \alpha \mid k \in Z\}$,
   જ્યાં $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ અને $tan\theta = a = tan\alpha$.
7. જો $c^2 \le a^2 + b^2$, તો $acosx + bsinx = c$ નો ઉકેલ
   $x = 2k\pi + \alpha \pm \beta, k \in Z$, જ્યાં $\alpha \in [0, 2\pi)$ તથા $a = rcos\alpha$ અને $b = rsin\alpha$,
   $cos\beta = \frac{c}{r}, \beta \in [0, \pi], r = \sqrt{a^2 + b^2}$
   જો $c^2 > a^2 + b^2$, તો સમીકરણનો ઉકેલગણ $\emptyset$ છે.
8. ***sine* સૂત્ર :** $\frac{a}{sin\,A} = \frac{b}{sin\,B} = \frac{c}{sin\,C} = 2R$
9. ***cosine* સૂત્ર :**
   $cosA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $cosB = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$ અને $cosC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$
10. **પ્રક્ષેપ સૂત્ર :**
    $a = bcosC + ccosB,\ b = ccosA + acosC,\ c = acosB + bcosA$

Aryabhata gave an accurate approximation for π. He wrote in the *Aryabhatiya* the following :

Add four to one hundred, multiply by eight and then add sixty-two thousand. The result is approximately the circumference of a circle of diameter twenty thousand. By this rule the relation of the circumference to diameter is given.

This gives $\pi = \frac{62832}{20000} = 3.1416$ which is a surprisingly accurate value. In fact $\pi = 3.14159265$ correct to 8 places.

He gave a table of *sines* calculating the approximate values at intervals of $90^\circ/24 = 3^\circ\ 45'$. In order to do this he used a formula for $sin(n + 1)x - sin\ nx$ in terms of $sin\ nx$ and $sin(n - 1)x$. He also introduced the versine (versin = 1 − *cosine*) into trigonometry.

Aryabhata gives the radius of the planetary orbits in terms of the radius of the Earth/Sun orbit as essentially their periods of rotation around the Sun. He believes that the Moon and planets shine by reflected sunlight. Incredibly he believes that the orbits of the planets are ellipses. He correctly explains the causes of eclipses of the Sun and the Moon. The Indian belief up to that time was that eclipses were caused by a demon called Rahu. His value for the length of the year at 365 days 6 hours 12 minutes 30 seconds is an overestimate since the true value is less than 365 days 6 hours.