

Correction du devoir n° 2 Du 1^{er} Semestre

Exercice 1 : 0,5 × 10 = 5 points

1 Déterminons une primitive F de la fonction f sur I .

a $f(x) = (6x - 3)(4x^2 - 4x + 2)^3 ; I = \mathbb{R}$ (0,5pt)

$$\begin{aligned} f(x) &= (6x - 3)(4x^2 - 4x + 2)^3 \\ &= 3(2x - 1)(4x^2 - 4x + 2)^3 \\ &= 3 \times \frac{1}{4}(8x - 4)(4x^2 - 4x + 2)^3 \\ &= 3 \times \frac{1}{4}(4x^2 - 4x + 2)'(4x^2 - 4x + 2)^3 \\ &= 3 \times \frac{1}{4}u'u^3 \\ F(x) &= 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}u^4 + k \\ &= 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}(4x^2 - 4x + 2)^4 + k \\ &= \frac{3}{16}(4x^2 - 4x + 2)^4 + k \end{aligned}$$

$$F(x) = \frac{3}{16}(4x^2 - 4x + 2)^4 + k$$

b $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{3 + \cos x}} ; I = \mathbb{R}$ (0,5pt)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin x}{\sqrt{3 + \cos x}} \\ &= \frac{-(3 + \cos x)'}{\sqrt{3 + \cos x}} \\ &= \frac{-(u)'}{\sqrt{u}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= -2\sqrt{u} + k \\ &= -2\sqrt{3 + \cos x} + k \end{aligned}$$

$$F(x) = -2\sqrt{3 + \cos x} + k$$

c $f(x) = 2 \cos 3x - 3 \sin 2x ; I = \mathbb{R}$ (0,5pt)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \cos 3x - 3 \sin 2x \\ &= 2 \times \cos(ax + b) - 3 \times \sin(ax + b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(x) &= 2 \times \frac{1}{a} \sin(ax + b) + 3 \times \frac{1}{a} \cos(ax + b) \\
&= 2 \times \frac{1}{3} \sin(3x) + 3 \times \frac{1}{2} \cos(2x) \\
&= \frac{2}{3} \sin(3x) + \frac{3}{2} \cos(2x)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{2}{3} \sin(3\mathbf{x}) + \frac{3}{2} \cos(2\mathbf{x}) + \mathbf{k}$$

d) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}} + \sin x \sin 2x ; I =]-\infty; -1[$ (0, 5pt)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}} + \sin x \sin 2x \\
&= \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}} + \sin x \times \cos x \times \sin x \\
&= \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}} + \cos x \times \sin^2 x \\
&= \frac{3(x^2 - 1)'}{2\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{1}{3}(\sin^3 x)' \\
&= \frac{3(u)'}{2\sqrt{u}} + \frac{1}{n+1}(\sin^{n+1} x)' \\
F(x) &= \frac{3}{2} \times 2\sqrt{u} + \frac{1}{3} \sin^3 x + k \\
&= 3\sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{3} \sin^3 x + k
\end{aligned}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 3\sqrt{\mathbf{x}^2 - 1} + \frac{1}{3} \sin^3 \mathbf{x} + \mathbf{k}$$

2) Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par : $k(x) = \frac{3x - 2}{(x + 2)^3}$.

a) Déterminons les a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $k(x) = \frac{a}{(x + 2)^2} + \frac{b}{(x + 2)^3}$. (0, 5pt)

$$\begin{aligned}
k(x) &= \frac{a}{(x + 2)^2} + \frac{b}{(x + 2)^3} \\
&= \frac{a(x + 2)}{(x + 2)^3} + \frac{b}{(x + 2)^3} \\
&= \frac{a(x + 2) + b}{(x + 2)^3} \\
&= \frac{ax + 2a + b}{(x + 2)^3}
\end{aligned}$$

Par identification $3x - 2 = ax + 2a + b$

$$3x - 2 = ax + 2a + b \implies \begin{cases} a = 3 \\ 2a + b = -2 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} a = 3 \\ 6 + b = -2 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} a = 3 \\ b = -8 \end{cases}$$

$$\text{Donc } k(x) = \frac{3}{(x + 2)^2} + \frac{-8}{(x + 2)^3}$$

$$k(x) = \frac{3}{(x+2)^2} + \frac{-8}{(x+2)^3} + c$$

b) Déduisons-en la primitive K de k qui prend la valeur 2 en -3.

(0,5pt)

$$\begin{aligned} k(x) &= \frac{3}{(x+2)^2} + \frac{-8}{(x+2)^3} \\ &= 3\frac{1}{(x+2)^2} - 8\frac{1}{(x+2)^3} \\ &= 3\frac{1}{u^2} - 8\frac{1}{v^3} \\ &= 3\frac{1}{u^n} - 8\frac{1}{v^n} \\ K(x) &= 3\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}} - 8\frac{-1}{(n-1)v^{n-1}} + k \\ &= -3\frac{1}{(x+2)} + 8\frac{1}{2(x+2)^2} + k \\ &= -\frac{1}{(x+2)} + 4\frac{1}{(x+2)^2} + k \end{aligned}$$

$$K(x) = -\frac{1}{(x+2)} + \frac{4}{(x+2)^2} + c$$

Problème : (12 points ≈ 144 mns)

On note (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm avec

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1} & ; \text{ si } x \leq 0 \\ x + \sqrt{x^2 + x} & ; \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire :

Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = -x^3 + 3x - 4$.

1) Étudions les variations de g puis dressons son tableau de variations. (0,75pt)

$$g'(x) = -3x^2 + 3$$

$$g'(x) = 0 \implies -3x^2 + 3 = 0$$

$$\implies -x^2 + 1 = 0$$

$$\implies x = -1 \text{ ou } x = 1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$-x^2 + 1$	-	0	+	-

Sur $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ $g'(x) \leq 0$ donc g est décroissant

Sur $[-1; 1]$ $g'(x) \geq 0$ donc g est croissant

LIMITES

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 + 3x - 4 \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 + 3x - 4$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3$$

$$= -\infty$$

$$g(-1) = -(-1)^3 + 3(-1) - 4$$

$$g(-1) = 1 - 3 - 4$$

$$= -6$$

$$g(1) = -(1)^3 + 3(1) - 4$$

$$g(1) = -1 + 3 - 4$$

$$= -2$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
f	$+\infty$		-6		-2		$-\infty$

2

- a Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$.

(0, 5pt)

Existence

D'après le tableau de variation $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \times g(-1) < 0$ d'où l'existence d'une solution

Unicité

g est continue et strictement décroissante de $]-\infty, -1[$ vers $] +\infty, -6[$ d'où l'unicité de la solution

- b Donnons un encadrement de α à 10^{-1} .

(0, 5pt)

On sait que la solution unique α vérifie $\alpha < -1$.

Calculons $g(x) = -x^3 + 3x - 4$ pour deux valeurs décimales consécutives.

$$g(-2) = -(-8) + 3(-2) - 4 = 8 - 6 - 4 = -2 < 0$$

$$g(-1,5) = -(-3,375) + 3(-1,5) - 4 = 3,375 - 4,5 - 4 = -5,125 < 0$$

On cherche donc plus à gauche.

$$g(-2,1) = -(-9,261) + 3(-2,1) - 4 = 9,261 - 6,3 - 4 = -1,039 < 0$$

$$g(-2,2) = -(-10,648) + 3(-2,2) - 4 = 10,648 - 6,6 - 4 = 0,048 > 0$$

La fonction g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$, donc elle change de signe une seule fois sur cet intervalle.

Encadrement à 10^{-1} :

$$-2,2 < \alpha < -2,1$$

- 3 En déduire le signe de $g(x)$ sur $]-\infty; 0]$.

(0, 25pt)

$$g(x) > 0 \quad \text{si } x \in]-\infty, \alpha[$$

$$g(x) = 0 \quad \text{si } x = \alpha$$

$$g(x) < 0 \quad \text{si } x \in [\alpha, 0]$$

Partie B : Étude de la fonction f

- 1 Déterminons l'ensemble de définition D_f de f .

(0, 5pt)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1} & ; \text{ si } x \leq 0 \\ x + \sqrt{x^2 + x} & ; \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Posons $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & ; \text{ si } x \leq 0 \\ f_2(x) & ; \text{ si } x > 0 \end{cases}$

- f_1

$f_1 \exists \text{ ssi } x^2 - 1 \neq 0 \text{ et } x \leq 0$

$x \neq -1 \text{ et } x \neq 1 \text{ et } x \in]-\infty, 0]$

$-1 \in]-\infty, 0] \text{ et } 1 \notin]-\infty, 0]$

$$Df_1 =]-\infty; -1[\cap]-1; 0[$$

- f_2

$f_2 \exists \text{ ssi } x^2 + x \geq 0 \text{ et } x > 0$

Posons $x^2 + x = 0$

$$x^2 + x = 0 \implies x = 0 \text{ ou } x = -1$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x^2 + x$		Hatched	Hatched	+

$$Df_2 =]0; +\infty[$$

$$Df = Df_1 \cup Df_2$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } &=]-\infty; -1[\cap]-1; 0[\cup]0; +\infty[\\ &= \mathbb{R} \setminus \{-1\} \end{aligned}$$

$$Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

- 2 a Calculons les limites de f aux bornes de D_f . (01pt)

- En $-\infty$: $f(x) = f_1(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

- En $+\infty$: $f(x) = f_2(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x^2 + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x^2} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- En -1^- : $f(x) = f_1(x)$
- $$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{-3}{0} \quad \begin{array}{c|cccccc} x & -\infty & -1 & 0 & 1 & +\infty \\ \hline x^2 - 1 & & + & 0 & - & \end{array}$$

$$= \frac{-3}{0^+}$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$$

- En -1^+ : $f(x) = f_1(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{-3}{0^-}$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

- Déduisons-en l'existence d'une asymptote dont on précisera.

Comme $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty$ donc $x = -1$ est une asymptote verticale

Donc $x = -1$ est une asymptote verticale à (C_f)

b

- Pour $x \leq 0$, déterminons les réels a, b, c et d tels que : $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 - 1}$

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 - 1} \implies f(x) = \frac{(ax + b)(x^2 - 1) + cx + d}{x^2 - 1}$$

$$\implies f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 - ax - b + cx + d}{x^2 - 1}$$

$$\implies f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + (c - a)x + (d - b)}{x^2 - 1}$$

$$\text{On a } \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1} = \frac{ax^3 + bx^2 + (c - a)x + (d - b)}{x^2 - 1}$$

par identification $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c - a = 0 \\ d - b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c - 1 = 0 \\ d + 2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \\ d = -2 \end{cases}$

$$\text{Ainsi, } f(x) = x - 2 + \frac{x - 2}{x^2 - 1}$$

- Déduisons-en la nature de la branche infinie en $-\infty$.

(0, 75pt)

En posant (Δ_1) : $y = x - 2$, si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y = 0$ alors $y = x - 2$ est asymptote oblique

En effet

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2}{x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2}$$

$$= 0$$

Donc (Δ_1) : $y = x - 2$ est une asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$

- c) Donner la nature de la branche infinie en $+\infty$.

(0, 5pt)

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

- Cherchons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)$$

$$= 2$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

- Cherchons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x^2 + x} - 2x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Donc (Δ_2) : $y = 2x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$

- 3 a) Montrons que f est continue sur D_f .

(0, 75pt)

- Continuité sur chaque intervalle

- Sur $]-\infty, 0] \setminus \{-1\}$

La fonction $x \mapsto \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1}$ est une fonction rationnelle.

Elle est donc continue sur son domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

En particulier, elle est continue sur $]-\infty, 0] \setminus \{-1\}$.

- Sur $]0, +\infty[$

Pour tout $x > 0$, on a $x^2 + x > 0$, donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + x}$ est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.

Ainsi, la fonction $x \mapsto x + \sqrt{x^2 + x}$ étant somme de fonctions continues, est continue sur $]0, +\infty[$.

• Continuité en 0

- En 0^- : $f(x) = f_1(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1}$$

$$= 0$$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$

- En 0^+ : $f(x) = f_2(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \sqrt{x^2 + x})$$

$$= 0$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

On a $f(0) = \frac{0^3 - 2 \cdot 0^2}{0^2 - 1} = 0$

Finalement $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0

• Conclusion

La fonction f est continue sur $]-\infty, 0] \setminus \{-1\}$, sur $]0, +\infty[$ et en 0.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$ donc f est continue sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

b) Étudions la dérivabilité de f en 0 puis interprétons le résultat obtenu. (01pt)

• Étudions la dérivabilité de f en 0

- En 0^- : $f(x) = f_1(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1} - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$$

$$= 0$$

- En 0^+ : $f(x) = f_2(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sqrt{x^2 + x} - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x^2 - x}{x(x - \sqrt{x^2 + x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{x(x - \sqrt{x^2 + x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{(x - \sqrt{x^2 + x})}$$

$$= \frac{-1}{0}$$

Supposons que $x - \sqrt{x^2 + x} > 0$

$$x - \sqrt{x^2 + x} > 0 \implies \sqrt{x^2 + x} < x$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + x} < x &\implies \begin{cases} x^2 + x > 0 \\ x > 0 \\ x^2 + x < x^2 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} x^2 + x > 0 \\ x > 0 \\ x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + x = 0 \\ x = 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = -1 \\ x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x^2 + x$		0	0	+
x			0	+
x			0	+

$$S = \emptyset$$

Ainsi, il n'existe pas de $x > 0$ pour lequel $x - \sqrt{x^2 + x} > 0$

Donc $x - \sqrt{x^2 + x} < 0, \forall x \in]0; +\infty[$

Ainsi $\forall x \in]0; +\infty[f'(x) > 0$ donc f est croissant $0; +\infty[$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{(x - \sqrt{x^2 + x})} \\ &= \frac{-1}{0^-} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Autre Méthode

+++++

On calcule la dérivée à droite en 0 :

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sqrt{x^2 + x}}{x}.$$

On écrit :

$$\frac{x + \sqrt{x^2 + x}}{x} = 1 + \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x}.$$

Or,

$$\frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \sqrt{\frac{x^2 + x}{x^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, on a $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, donc

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x}} \rightarrow +\infty.$$

Ainsi,

$$f'_+(0) = +\infty.$$

+++++

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$$

- Interprétons le résultat obtenu.

- f est dérivable à gauche de 0 et $y = 2x$ est une démi-tangent en 0^- ;
- f n'est pas dérivable à droite de 0 donc admet une démi-tangent orientée vers le haut en 0^+

Le point d'abscisse 0 est donc un point anguleux, ce qui explique la non-dérivabilité de f en 0.

4 Démontrons que : $f(x) = -2 + \frac{3(\alpha - 2)}{\alpha^2 - 1}$. (0, 5pt)

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1} \implies f(x) = \frac{\alpha^3 - 2\alpha^2}{\alpha^2 - 1}$$

Comme $g(\alpha) = 0$ alors $-\alpha^3 + 3\alpha - 4 = 0$ donc $\alpha^3 = 3\alpha - 4$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\alpha^3 - 2\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \implies f(\alpha) = \frac{\alpha^3 - 2\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \\ &\implies f(\alpha) = \frac{3\alpha - 4 - 2\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \\ &\implies f(\alpha) = -\frac{2\alpha^2 - 3\alpha + 4}{\alpha^2 - 1} \\ &\implies f(\alpha) = -\frac{2(\alpha^2 - 1) - 3(\alpha - 2)}{\alpha^2 - 1} \\ &\implies f(\alpha) = \frac{-2(\alpha^2 - 1) + 3(\alpha - 2)}{\alpha^2 - 1} \\ &\implies f(\alpha) = \frac{-2(\alpha^2 - 1)}{\alpha^2 - 1} + \frac{3(\alpha - 2)}{\alpha^2 - 1} \\ &\implies f(\alpha) = -2 + \frac{3(\alpha - 2)}{\alpha^2 - 1} \end{aligned}$$

5 a Montrons que $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[$, on a : $f'(x) = \frac{-xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$ puis étudier son signe (0, 5pt)

- Montrons que $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[$, on a : $f'(x) = \frac{-xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$ (0, 5pt) On a :

$$f'(x) = \frac{-xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$$

La fonction f est dérivable sur $] -\infty, -1[\cup] -1, 0[$ comme quotient de fonctions dérivables, avec $x^2 - 1 \neq 0$ sur ces intervalles.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^3 - 2x^2)'(x^2 - 1) - (x^3 - 2x^2)(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{(3x^2 - 4x)(x^2 - 1) - (x^3 - 2x^2)(2x)}{(x^2 - 1)^2}. \\ &= \frac{3x^4 - 3x^2 - 4x^3 + 4x - (2x^4 - 4x^3)}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{x^4 - 3x^2 + 4x}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{-x(-x^3 + 3x - 4)}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{-xg(x)}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x \in] -\infty, -1[\cup] -1, 0[$, $f'(x) = \frac{-xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$.

- le signe de $f'(x)$ dépend du numérateur

x	$-\infty$	α	-1	0	$+\infty$
$-x$	+		+	+	0
$g(x)$	+	0	-	-	
$-xg(x)$	+	0	-	-	0

Ansi,

si $x \in]-\infty, \alpha]$, $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $]-\infty; \alpha]$

si $x \in [\alpha, -1 \cup] -1, 0]$, $f'(x) \leq 0$ donc f est croissante sur $[\alpha, -1 \cup] -1, 0]$

b Calculons $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$ et étudions son signe. (0, 75pt)

- Calculons $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x^2+x} + 2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x^2+x} + 2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} \end{aligned}$$

- étudions son signe

Ansi, si $x < 0$, $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur $]-\infty; 0[$

Si $x > 0$, $f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2+x} + 2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$ le signe dépend du numérateur

Or $2\sqrt{x^2+x} + 2x+1 > 0 \forall x \in]0; +\infty[$

Ainsi $\forall x \in]0; +\infty[f'(x) > 0$ donc f est croissant $0; +\infty[$

c Dressons le tableau de variation de f sur D_f . (0, 75pt)

x	$-\infty$	α	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	$-\infty 2 +$
f	\nearrow	$f(\alpha)$	\searrow	\nearrow	\nearrow

6 Construisons soigneusement la courbe (C_f) . (01pt)

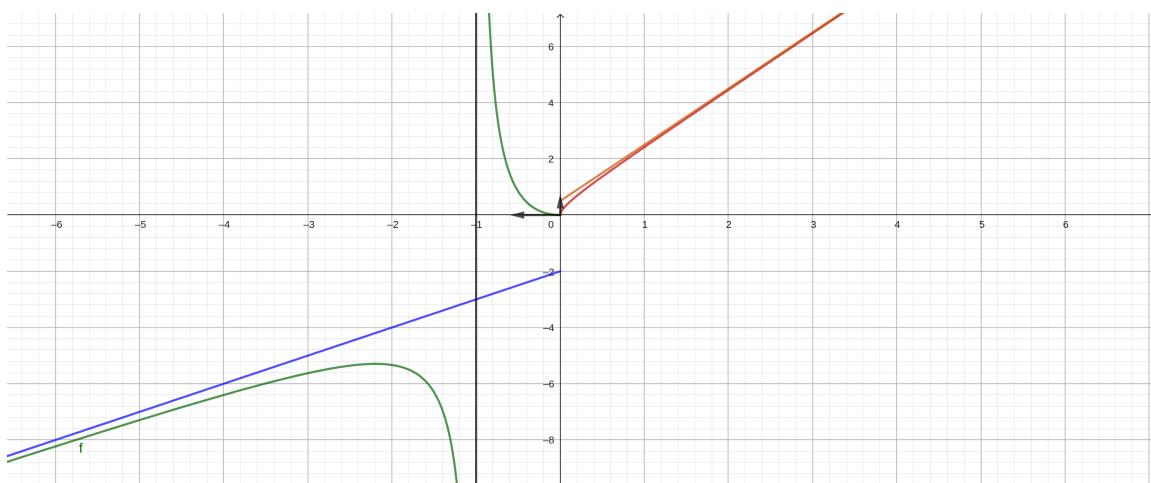


Figure 1: Courbe de (C_f)

Clique ici pour voir la courbe sur géogébra

Partie C : Bijection

Soit h la restriction de f sur $I =]0; +\infty[$.

- 1 Montrons que h réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser. (0, 5pt)

Sur I h est continue et strictement croissante donc réalise une bijection de I vers $J = [0, +\infty[$

Comme $\forall x \in I, h'(x) \neq 0$ donc h^{-1} est dérivable sur J

- 2 Calculons $h^{-1}(1)$ et $(h^{-1})'(\sqrt{2} + 1)$. (0, 5pt)

$$h(x) = x + \sqrt{x^2 + x}.$$

- **Calcul de $h(1)$**

$$h(1) = \sqrt{2} + 1$$

$$\boxed{h(1) = \sqrt{2} + 1}$$

- **Calcul de $(h^{-1})'(\sqrt{2} + 1)$**

$$(h^{-1})'(\sqrt{2} + 1) = \frac{1}{h'(h^{-1}(\sqrt{2} + 1))} \text{ Or } h(1) = \sqrt{2} + 1 \text{ donc } h^{-1}(\sqrt{2} + 1) = 1$$

$$\begin{aligned} (h^{-1})'(\sqrt{2} + 1) &= \frac{1}{h'(1)} \text{ comme } h'(x) = 1 + \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{2+1}{2\sqrt{1^2+1}}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{3}{2\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+3} \end{aligned}$$

$$\boxed{(h^{-1})'(\sqrt{2} + 1) = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+3}}$$

- 3 Explicitons $h^{-1}(x)$. (0, 5pt)

$$\text{Soit } y = h(x) = x + \sqrt{x^2 + x}.$$

On isole la racine :

$$y - x = \sqrt{x^2 + x}.$$

En éllevant au carré, on obtient :

$$(y - x)^2 = x^2 + x.$$

$$y^2 - 2xy + x^2 = x^2 + x.$$

En simplifiant :

$$y^2 - 2xy = x.$$

On factorise par x :

$$y^2 = x(1 + 2y).$$

D'où :

$$h^{-1}(x) = \frac{x^2}{1 + 2x}$$

- 4 Construisons $(C_{h^{-1}})$ dans le repère précédent. (0, 5pt)

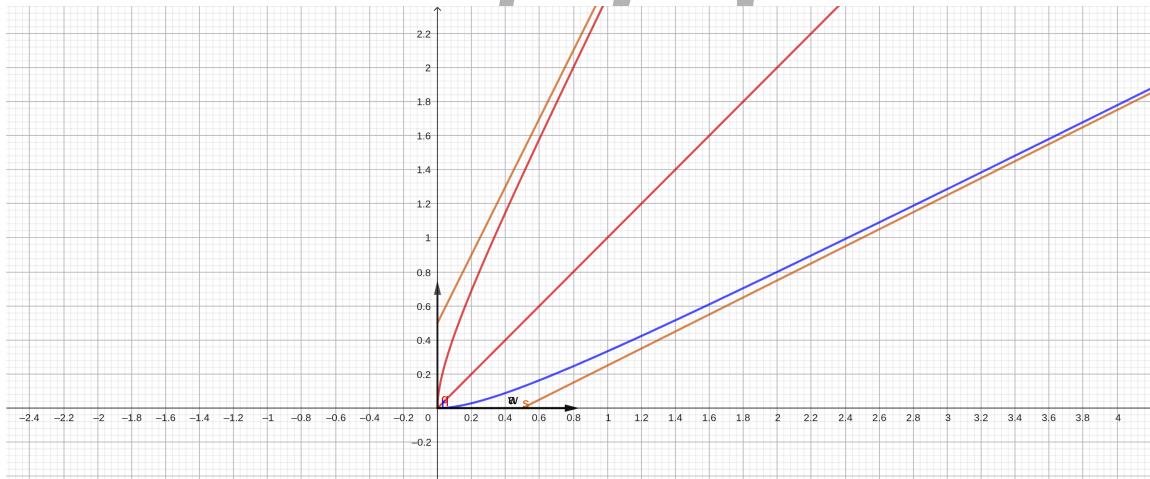


Figure 2: Courbe de (C_f)

Clique ici pour voir la courbe sur géogébra