

Td Primitives

Exercice 1

- 1 Fonctions polynomiales et puissances simples (x^n)

Formule : $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

- a $f(x) = x^3 - 2x + 1$
- b $f(x) = (x-1)(x-2)$
- c $f(x) = 4x^4 - 2x^2 + 5x$
- d $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$
- e $f(x) = (x+1)^3$
- f $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$
- g $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}$
- h $f(x) = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2}$

- 2 Forme $u'u^n$ Formule : $\int u'u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$

- a $f(x) = (2x-1)(x^2-x)^2$
- b $f(x) = 2x(x^2-1)^5$
- c $f(x) = (6x-3)(4x^2-4x+2)^3$
- d $f(x) = \sin^2 x \cos x$
- e $f(x) = \sin x \cos^3 x$
- f $f(x) = (3x^2+2)(x^3+2x-5)^4$
- g $f(x) = \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3$
- h $f(x) = e^x(e^x+1)^2$
- i $f(x) = \frac{(\ln x)^4}{x}$
- j $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} (\tan x + 1)^2$
- k $f(x) = (x+1)(x^2+2x-3)^5$
- l $f(x) = x^2(x^3+1)^2$
- m $f(x) = \sin x \cos^4 x$
- n $f(x) = 2(e^{2x}+1)(e^{2x}+2x)^3$

o $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}(\sqrt{x}+3)^5$

- 3 Forme $\frac{u'}{u^n}$ ($n \geq 2$)

a $f(x) = \frac{1}{(x+1)^3}$

b $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

c $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$

d $f(x) = \frac{4x+3}{(2x^2+3x+1)^3}$

e $f(x) = \frac{1-x}{(x^2-2x+3)^2}$

f $f(x) = \frac{2 \cos x}{\sin^2 x}$

g $f(x) = \frac{x^2}{(x^3+2)^4}$

h $f(x) = \frac{7e^x}{(e^x+2)^2}$

i $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^3}$

j $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^4 x}$

k $f(x) = \frac{1}{(2x+5)^2}$

l $f(x) = \frac{x}{(x^2+4)^3}$

m $f(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x-5)^5}$

n $f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

o $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x \tan^3 x}$

- 4 Forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$

a $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

b $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\text{c } f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\text{d } f(x) = \frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 3x + 2}}$$

$$\text{e } f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}}$$

$$\text{f } f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$$

$$\text{g } f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$$

$$\text{h } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{\sqrt{e^x + e^{-x}}}$$

$$\text{i } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x + 3}}$$

$$\text{j } f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$$

$$\text{k } f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 1}}$$

$$\text{l } f(x) = \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{\tan x}}$$

5 Fonctions Trigonométriques
Formes : $\sin(ax + b)$, $u' \cos(u)$, linéarisation ou dérivées de $\tan(x)$

$$\text{a } f(x) = 3 \sin \frac{\pi x}{2}$$

$$\text{b } f(x) = \sin 3x + \cos(2x + 3)$$

$$\text{c } f(x) = \sin 2x - 2 \cos 2x$$

$$\text{d } f(x) = x \cos x^2$$

$$\text{e } f(x) = \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$\text{f } f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$$

Exercice 2

1 Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de f sur I après avoir effectuée la transformation d'écriture indiquée.

$$\text{a } f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} \quad I =]1; +\infty[\quad \text{Indication : Mettre } f(x) \text{ sous la forme } a + \frac{b}{(x - 1)^2}$$

$$\text{b } f(x) = \frac{3x^2 + 12x - 1}{(x + 2)^2}, \quad I =]-2; +\infty[\quad \text{Indication : Mettre } f(x) \text{ sous la forme } a + \frac{b}{(x + 2)^2}$$

$$\text{c } f(x) = \frac{2x^3 + 13x^2 + 24x + 2}{(x + 3)^2}, \quad I =]-3; +\infty[$$

Indication : Mettre $f(x)$ sous la forme $ax + b + \frac{c}{(x + 3)^2}$

$$\text{d } f(x) = \frac{x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}, \quad I =]-1; 1[\quad \text{Indication : Mettre } f(x) \text{ sous la forme } \frac{a}{(x - 1)^3} + \frac{b}{(x + 1)^3}$$

$$\text{g } f(x) = \frac{\tan x}{\cos^2 x}$$

$$\text{h } f(x) = \tan^2 x$$

$$\text{i } f(x) = \tan x + \tan^3 x$$

$$\text{j } f(x) = 1 + \frac{1}{\tan^2 x}$$

$$\text{k } f(x) = \sin^2 x$$

$$\text{l } f(x) = \cos^3 x$$

6 Forme $\frac{u'}{u}$ Formule : $\int \frac{u'}{u} = \ln |u|$

$$\text{a } f(x) = \frac{1}{x + 3} \text{ sur }]-3; +\infty[$$

$$\text{b } f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\text{c } f(x) = \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x + 1} \text{ sur }]0; +\infty[$$

$$\text{d } f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\text{e } f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ sur }]0; \pi[$$

$$\text{f } f(x) = \frac{1}{2x + 5} \text{ sur }]-2, 5; +\infty[$$

$$\text{g } f(x) = \frac{x}{x^2 + 4} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\text{h } f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 1} \text{ sur }]1; +\infty[$$

$$\text{i } f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ sur }]-\pi/2; \pi/2[$$

$$\text{j } f(x) = \frac{1}{x \ln x} \text{ sur }]1; +\infty[$$

$$\text{k } f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\text{l } f(x) = \frac{1}{\cos^2 x \tan x} \text{ sur }]0; \pi/2[$$

Exercice 3 Transformations et Logarithmes

- 1 Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de f sur I après avoir effectué la transformation d'écriture indiquée.

a $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$ $I =]-1; +\infty[$ Indication : Mettre $f(x)$ sous la forme $a + \frac{b}{x+1}$

b $f(x) = \frac{2x-5}{x-3}$, $I =]3; +\infty[$ Indication : Mettre $f(x)$ sous la forme $a + \frac{b}{x-3}$

c $f(x) = \frac{x^2+x-4}{x+2}$, $I =]-2; +\infty[$
Indication : Mettre $f(x)$ sous la forme $ax + b + \frac{c}{x+2}$

d $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$, $I =]1; +\infty[$ Indication : Mettre $f(x)$ sous la forme $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$

Exercice 4 Primitives et Conditions Initiales

- 1 Dans chacun des cas suivants, déterminer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition initiale donnée sur l'intervalle I .

a $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ sur $I =]3; +\infty[$ avec $F(4) = 0$.

Indication : Mettre d'abord $f(x)$ sous la forme $a + \frac{b}{x-3}$.

b $f(x) = \frac{2x+5}{x+1}$ sur $I =]-1; +\infty[$ avec $F(0) = 2$.

Indication : Mettre d'abord $f(x)$ sous la forme $a + \frac{b}{x+1}$.

c $f(x) = \frac{x^2+3x+5}{x+2}$ sur $I =]-2; +\infty[$ avec $F(-1) = 1$.

Indication : Mettre d'abord $f(x)$ sous la forme $ax + b + \frac{c}{x+2}$.

d $f(x) = \frac{e^x}{e^x+2}$ sur \mathbb{R} avec $F(0) = \ln(3)$.