

## Td Similitude

**Exercice 1** Dans chacun des cas suivants, déterminer l'écriture complexe de la similitude directe de centre  $\Omega$ , de rapport  $k$  et d'angle  $\theta$ .

1  $\Omega = O, k = 2$  et  $\theta = \frac{\pi}{6}$ .

2  $\Omega \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, k = \sqrt{2}$  et  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

3  $\Omega \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, k = 1$  et  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ .

4  $\Omega(-2 + i\frac{1}{2}), k = \frac{1}{2}, \theta = \frac{-\pi}{3}$ .

### Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application  $f$  du plan dans lui-même, qui au point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  :

a.  $z' = (\sqrt{3} + i)z$  ; b.  $z' = -2z + i$  ; c.  $z' = -z + 2i$  ; d.  $z' = \frac{3 + i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$  ; e.  $z' = iz + 1$  ; f.  $z' = z + 3 - i$ .

### Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'écriture complexe de la similitude directe  $s$  définie par :  $S(A) = A'$  et  $S(B) = B'$ .

a)  $A(3 + 2i), A'(3), B(1)$  et  $B'(i)$ ;

b)  $A(2 + i), A'(3 + 2i), B(2)$  et  $B'(3i)$ .

### Exercice 4

Soit  $s$  la similitude directe d'écriture complexe :  $z' = 3iz - 9 - 3i$ .

1 Déterminer les éléments caractéristiques de  $s$ .

2 Déterminer l'expression analytique de  $s$ .

3 Déterminer l'image par  $s$  :

(a) du cercle de centre  $K(1 - 3i)$  et de rayon 1;

(b) de la droite  $(\mathcal{D})$  d'équation :  $x = 1$ ;

(c) de la droite passant par le point  $A(5; 3)$  et dont un vecteur directeur est  $\vec{u}(-1; 3)$ .

### Exercice 5

Soit  $A, B$  et  $C$  les points d'affixes respectives :  $i, 1 + i$  et  $2 + 2i$ .

- 1 Déterminer l'abscisse du barycentre  $G$  des points  $A, B$  et  $C$  affectés respectivement des coefficients 2,  $-2$  et 1.
- 2 Démontrer que la similitude directe  $s$ , qui transforme  $A$  en  $B$  et  $B$  en  $C$ , a pour centre le point  $G$ .
- 3 Déterminer l'angle et le rapport de  $s$ .

### Exercice 6

On considère les applications  $T_1$  et  $T_2$  dont les écritures complexes sont :  $T_1 : z_1 = (\sqrt{3} + i)z$  et  $T_2 : z_2 = (1 - i\sqrt{3})z + 3$ .

- 1 Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $T_1$  et  $T_2$ .
- 2 Déterminer l'écriture complexe, la nature et les éléments caractéristiques de  $T_2 \circ T_1$ .
- 3 Démontrer qu'il existe un seul point  $K$  tel que  $T_1(K) = T_2(K)$ . Soit  $L = T_1(K)$ . Calculer les abscisses des points  $K$  et  $L$ .
- 4 Démontrer que le point  $L$  est invariable pour chacune des applications  $T_2 \circ T_1^{-1}$  et  $T_1 \circ T_2^{-1}$ .
- 5 Déterminer l'écriture complexe de chacune des applications  $T_2 \circ T_1^{-1}$  et  $T_1 \circ T_2^{-1}$ . Préciser leurs natures et éléments caractéristiques.

### Exercice 7

Soit  $S_1$  l'application qui à tout point  $M(x, y)$  associe  $M'(x', y')$  définie par :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

- 1 Déterminer l'écriture complexe de  $S_1$ .
- 2 En déduire la nature et les éléments caractéristiques de  $S_1$ .
- 3 Soient les points  $A(1)$  et  $B(-1)$ . Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe  $S_2$  telle que  $S_2(A) = O$  et  $S_2(B) = B$  puis caractériser  $S_2$ .
- 4 On pose  $S = S_1 \circ S_2$ . Déterminer l'écriture complexe de  $S$ .
- 5 Déterminer l'image par  $S$  :
  - (a) de la droite ( $\mathcal{D}$ ) d'équation  $2x + y - 1 = 0$ ;
  - (b) du cercle ( $\mathcal{C}$ ) d'équation  $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$ .

### Exercice 8 Bac 2024 (05 points)

1. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on considère les points  $A, B$  et  $C$  d'abscisses respectives :  $z_A = -3i$ ,  $z_B = -2$  et  $z_C = 1 + 2i$ .

- a. Déterminer le module et un argument du quotient

$$\frac{2z_C - z_B}{z_A - z_B}.$$

(0,75 point)

- b. En déduire la nature du triangle  $ABC$ . (0,75 point)
- c. Déterminer l'affixe  $z_D$  du point  $D$  tel que le quadrilatère  $BADC$  soit un carré. (0,5 point)
- d. Montrer que les points  $A, B, C$  et  $D$  appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. (0,75 point)

2. On considère les points  $M$  et  $M'$  d'affixes respectives  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$  où  $x, y, x', y'$  sont des réels.

Soit  $S$  l'application du plan dans le plan d'expression analytique :  $\begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$

- a. Montrer que l'écriture complexe de  $S$  est :

$$z' = (1 + i)z + 2 - i.$$

(0,5 point)

- b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $S$ . (0,5 point)
- c. Déterminer l'image par  $S$  de la droite  $(D)$  d'équation  $x + y + 1 = 0$ . (0,5 point)
- d. Déterminer l'ensemble des points  $M$  dont l'affixe  $z$  vérifie  $|(1 + i)z + 2 - i| = 2$ . (0,5 point)