Probabilité

Lycée de Dindéfelo
Mr BA

25 avril 2025

I.Vocabulaire Et Notation

1.Expérience aléatoire

Une expérience est dite aléatoire si l'issue est impossible à prevoir.
Exemple

1. On lance une pièce de monnaie. On ne peut pas prévoir que c'est une expérience aléatoire.
2. On lance un dé et on note le numéro de la face supérieure. On ne peut pas prévoir cette expérience. On dit que c'est une expérience aléatoire.

2.Univers des possibles

On appelle univers d'une expérience aléatoire noté Ω, l'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience aléatoire .
Exemple

— Lancer d' une pièce de monnaie .
L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{pile, face\}$
— Lancer un dé numéroté de 1 à 6 .
L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

3.Evènement

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire . On appelle évènement de Ω toute partie (ou sous ensemble) de Ω .
Exemple
Soit le Lancer d'un dé numéroté de 1 à 6 .
L'univers associé cette expérience est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
$A = \{2, 3, 4, 5, \}$ est un évènement de Ω .
$B = \{1, 6\}$ est un évènement de Ω .

4.Evènement Elémentaire

Soit Ω un univers associé à l'expérience aléatoire. On appelle évènement élémentaire tout singleton de Ω
Exemple
Soit le Lancer d'un dé numéroté de 1 à 6 .

L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$A = \{1\}$, $B = \{3\}$ et $C = \{3\}$ sont des évènements élémentaires Ω.

5.Evènement réalisé

Un événement est dit réalisé s'il contient le résultat de l'expérience .

Exemple

Soit un dé numéroté de 1 à 6.

L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$A = \{1, 2, 6\}$ est un évèvement de Ω. Si au cours d'un lancé le numéro 2 apparait on dit que A est réalisé.

6. Évènement certain

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. Un évènement est dit certain s'il correspond à l'ensemble de l'univers, c'est-à-dire s'il inclut toutes les issues possibles de l'expérience.

Exemple

Soit le Lancer d'un dé numéroté de 1 à 6 .

L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

L'événement « le numéro de la face apparue est inférieur à 7 » est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. C'est l'événement certain.

7. Évènement incertain ou évènement impossible

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire .

Lorsqu'un évènement est l'ensemble vide, on l'appelle évènement impossible .

Il ne se réalise jamais .

Exemple

Soit le Lancer un dé numéroté de 1 à 6 .

L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

L'événement « le numéro de la face apparue est supérieur à 7 » est $\emptyset$.

C'est l'événement impossible. Il ne se réalise jamais.

8. Évènement contraire

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire .

Soit A un évènement de Ω .

L'évènement contraire de A noté $\overline{A}$, est le complémentaire de A dans Ω .

Autrement dit $\overline{A} = C_{\Omega}^{A}$

Exemple

Soit le Lancer d'un dé numéroté de 1 à 6 .

L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Supposons que lors du lancer d'un dé à six faces, A représente l'évènement "obtenir un nombre pair".

Alors, l'évènement contraire, $\overline{A}$, serait "obtenir un nombre impair".

En notation mathématique :

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$\overline{A} = \{1, 3, 5\}$$

Ainsi, si A est l'évènement "obtenir un nombre pair", alors $\overline{A}$ est l'évènement "obtenir un nombre impair".

Remarque

Si A et $\overline{A}$ sont deux évènements contraires alors :

$A \cap \overline{A} = \emptyset$; $A \cup \overline{A} = \Omega$

8. Évènements incompatibles

Deux événements sont incompatibles lorsque leur intersection est vide ; ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.

Exemple

Soit le Lancer d'un dé numéroté de 1 à 6 .

$$A = \{\text{lancer un nombre pair}\} = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{\text{lancer un nombre impair}\} = \{1, 3, 5\}$$

Comme aucun nombre ne peut être à la fois pair et impair, les événements A et B sont incompatibles.

Remarque

Si A et B sont deux évènements incompatibles alors : $A \cap B = \emptyset$

II. Généralités sur la probabilité

1. Probabilité d'un évènement

Considérons un dé numéroté de 1 à 6.

Soit Ω l'univers de cette expérience, donné par $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Supposons l'évènement $A = \{5\}$.Il y a une chance sur 6 de réaliser cette possibilité.

La probabilité de l'évènement A est donc égale à $\frac{1}{6}$, que l'on note $P(A) = \frac{1}{6}$.

De même, considérons l'évènement $B = \{1, 6\}$. Il y a deux chances sur 6 de réaliser l'évènement B.

La probabilité de l'évènement B est donc égale à $\frac{2}{6}$. On note $P(B) = \frac{1}{3}$.

2. Probabilité uniforme

Lorsque les évènements élémentaires ont la même probabilité, on dit que on a une équiprobabilité.

Une probabilité est dite uniforme si tous les évènements élémentaire sont équiprobables.

3.Formule de probabilité uniforme

Soit Ω un univers et p une probabilité définit dans cet univers.

$\Omega = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ on suppose que on a une probabilité uniforme. Donc $p\{w_1\} = p\{w_2\} = ... = p\{w_n\}$

Comme Ω est formé des évènements $w_1, w_2, ..., w_n$ Donc

$p\{\Omega\} = p\{w_1\} + p\{w_2\} + ... + p\{w_n\}$

Puisqu'il y a équiprobabilité $p\{\Omega\} = n \times p\{w_1\}$

Or Ω est un évènement certain donc $p(\Omega) = 1$

Ainsi, $p\{w_1\} = \frac{1}{n}$ avec $n = card(\Omega)$, $p\{w_1\} = \frac{1}{card(\Omega)}$

De façon général,

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d'issues favorables à } A}{\text{Nombre total d'issues dans } \Omega}$$

Autrement dit,

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Exerice d'application

Supposons que vous lanciez un dé équilibré à six faces. Calculez la probabilité des événements suivants :

1. Événement A : Obtenir un nombre pair.
2. Événement B : Obtenir un nombre impair.
3. Événement C : Obtenir un nombre inférieur ou égal à 3.

Solution

Soit Ω l'univers associé a cette expérience aléatoire on a
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $card(\Omega) = 6$

1. Pour l'événement A (obtenir un nombre pair), les issues favorables sont 2, 4 et 6. On a $A = \{2, 4, 6\}$ et $card(A) = 3$

   Ainsi, la probabilité de l'événement A est :

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2. Pour l'événement B (obtenir un nombre impair), les issues favorables sont 1, 3 et 5.On a $B = \{1, 3, 5\}$ et $card(B) = 3$

   Ainsi, la probabilité de l'événement B est également :

$$P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3. Pour l'événement C (obtenir un nombre inférieur ou égal à 3), les issues favorables sont 1, 2 et 3.On a $C = \{1, 2, 3\}$ et $card(C) = 3$. La probabilité de l'événement C est donc :

$$P(C) = \frac{card(C)}{card(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, dans tous les cas, la probabilité est $\frac{1}{2}$, ce qui est conforme à la notion de probabilité uniforme pour un dé équilibré à six faces.

4. Définition de Probabilité

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoires.
On appelle probabilité sur un univers Ω toute application $p : \Omega \to [0;1]$ vérifiant :

1. $p(\Omega) = 1$
2. Si A et B deux évènements de Ω et
   $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Conséquence

1. $\forall A$ la probabilité de l'évènement est compris entre $[0, 1]$
   $0 \leq p(A) \leq 1$
2. $p(\emptyset) = 0$
3. $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
4. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
   Exercice 1
   On considère l'ensemble E des entiers de 20 à 40. On choisit l'un de ses nombres au hasard.

- A est l'événement : « le nombre est multiple de 3 »
- B est l'événement : « le nombre est multiple de 2 »
- C est l'événement : « le nombre est multiple de 6 ».

Calculer $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$, $p(A \cap B)$, $p(A \cup B)$, $p(A \cap C)$ et $p(A \cup C)$.

III. Probabilité conditionnelle et indépendance

A. Probabilité conditionnelle

1.Définition

Soit Ω un univers, associe à une expérience aléatoire et p la probabilité définie dans cet univers. A et B deux évèvenements de Ω tel que $p(B) \neq 0$

$p_{\frac{A}{B}} = p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$

1.Propriété

Dans une situation d'équiprobabilité, on a $p_{\frac{A}{B}} = p_B(A) = \frac{card(A \cap B)}{card(B)}$

Exemple

Soit une expérience aléatoire comportant les évènements A et B. On sait que P(A)=0,4, P(B)=0,7 et P($A \cap B$)=0,2. Calcule $p_B(A)$ et $p_A(B)$.

Pour calculer la 1^{re} probabilité conditionnelle, on utilise la formule.
$p_{A/B} = p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{card(A \cap B)}{card(B)}$

Solution

Soit une expérience aléatoire comportant les évènements A et B.

On donne P(A)=0,4, P(B)=0,7 et P($A \cap B$)=0,2. Calcule $p_B(A)$ et $p_A(B)$.

Pour calculer la 1^{re} probabilité conditionnelle ($p_B(A)$), on utilise la formule.

$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$
$p_B(A) = \frac{0{,}2}{0{,}7}$
$p_B(A) = \frac{2}{7}$

Pour calculer la 2^e probabilité conditionnelle, on utilise aussi la formule. Il est important de remarquer que l'intersection est **commutative**, donc Pour calculer la 2^e probabilité conditionnelle ($p_A(B)$), on utilise aussi la formule. Il est important de remarquer que l'intersection est **commutative**, donc $p(A \cap B) = p(B \cap A)$

$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$
$p_A(B) = \frac{0{,}2}{0{,}4}$
$p_A(B) = \frac{1}{2}$
$p_A(B) = 0,5$

B.Arbre pondéré

Un arbre pondéré permet de représenter une situation probabiliste qui comporte des probabilités conditionnelles.

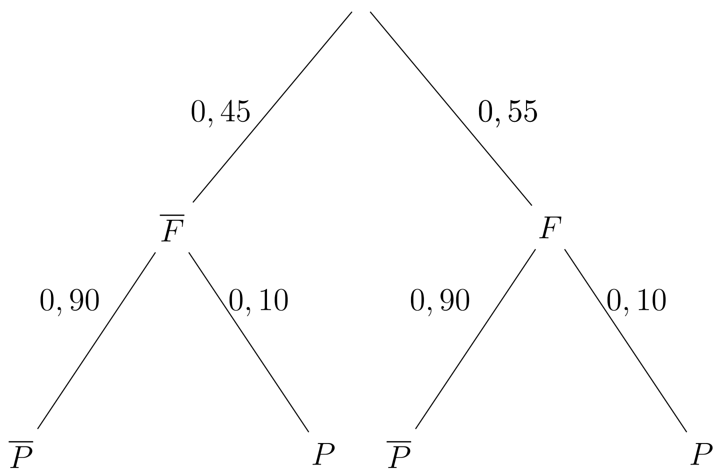
Exemple

Dans un lycée comportant 800 élèves, 55% sont des filles. Parmi les filles, 10% sont des pensionnaires. Ce pourcentage est le même chez les garçons.

On choisit un élève au hasard dans ce lycée et admet que ces choix sont équiprobables.

On note F(resp. P) l'événement "l'élève choisi est une fille (resp. une pensionnaire)".

On obtient l'arbre probabiliste suivante :



— La somme des probabilités des deux premières branches (c'est-à-dire issues de la racine) est 1.
— La somme des probabilités des branches issues du noeud F est 1.
— La somme des probabilité des branches issues du noeud $\overline{F}$ est 1.

Propriété 1

Quand plusieurs branches partent d'un même nœud dans un arbre de probabilités, les probabilités sur ces branches doivent toujours s'additionner pour donner 1, car elles représentent toutes les issues possibles à ce moment-là.

Propriété 2

Lorsqu'on suit un chemin dans un arbre pondéré, la probabilité de l'événement associé à ce chemin est égale au produit des probabilités indiquées sur les branches empruntées.

En considérant l'exemple précédent, la probabilité de l'évèvenement $F \cap \overline{P}$ est :

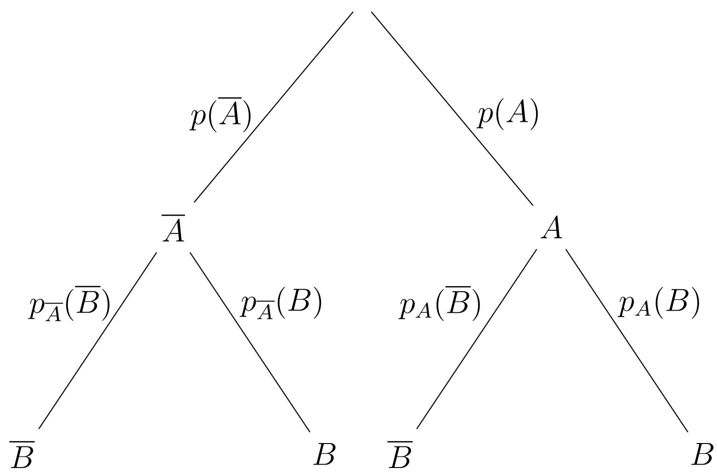
$p(F \cap \overline{P}) = p(F) \times p_F(\overline{P})$

On obtient :

$p(F \cap \overline{P}) = 0,55 \times 0,90$

$p(F \cap \overline{P}) = 0,495$

La lecture d'un arbre pondéré



La probabilité de $\overline{A}$ et $\overline{B}$ est : $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p_{\overline{A}}(\overline{B}) \times p(\overline{A})$
La probabilité de $\overline{A}$ et B est : $p(\overline{A} \cap B) = p_{\overline{A}}(B) \times p(\overline{A})$
La probabilité de A et $\overline{B}$ est : $p(A \cap \overline{B}) = p_A(\overline{B}) \times p(A)$
La probabilité de A et B est : $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$

Propriété 3 :Probabilités totales

Soit l'univers Ω d'une expérience aléatoire $A_1, A_2, ..., A_n$ des évènements tels que $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ forme une parition de l'univers Ω.
Alors, pour tout événement B, on a :
$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + ... + p(B \cap A_n)$.

Cette formule est appelé formule des probabilité totale

Et, si pour tout $p(A_i) \neq 0$, alors :
$p(B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + ... + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$

C.L'indépendance de deux évènements

1.Définition

Deux événements sont dits indépendants lorsque le fait que l'un se produise n'a aucune influence sur la probabilité que l'autre se produise.

Si A et B sont deux évènements sont indépendants probabilités non nulles alors : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

propriété

Soient A et B sont deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ et qui sont indépendants, on a :

— $p_B(A) = p(A)$

— $p_A(B) = p(B)$
— $p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A) \times p(B)$

Exemple

En considérant l'exemple précédent, montre que F et P sont deux événements indépendants.

Solution

Already solve but think first

On a :

- $p(F) = 0,55$
- $p(F \cap P) = p(F) \times p_F(p) = 0,55 \times 0,10$
- $p(\overline{F} \cap P) = p(\overline{F}) \times p_{\overline{F}}(p) = 0,45 \times 0,10$

L'ensemble $\left\{F, \overline{F}\right\}$ formant une partition de l'univers, on a, d'après la formule des probabilité totales :
$p(P) = p(F \cap P) + p(\overline{F} \cap P)$

Alors :

- $p(F \cap P) = 0,055$
- $p(F) \times p(P) = 0,55 \times 0,10$

Les événement F et P sont donc indépendants

Exercice

Soit A et B deux événements indépendantes de probabilité non nulle.

Montrer que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont aussi indépendantes.

IV. Variable aléatoires

a.Définition

Remarque

b.Loi de probabilité

Remarque

c.Espérance mathématique

Remarque

d.Variance et Ecart-type :

Soit X une variable aléatoire d'univers image $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. On appelle variance de X, le nombre réel positif

$$V(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P_i - (\mathbb{E}(X))^2$$

On appelle écart-type de X le nombre réel positif défini par

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exemple

Soit X une variable aléatoire de loi de probabilité :

X_i	0	1	2
P_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Calculez l'espérance, la variance et l'écart-type

Solution

- **L'espérance** :

$$E(X) = \left(0 \times \frac{1}{4}\right) + \left(1 \times \frac{1}{4}\right) + \left(2 \times \frac{2}{4}\right)$$

$$E(X) = \frac{5}{4}$$

- **La variance** :

$$V(X) = \left(0^2 \times \frac{1}{4}\right) + \left(1^2 \times \frac{1}{4}\right) + \left(2^2 \times \frac{2}{4}\right) - \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$V(X) = \frac{11}{16}$$

- **L'écart-type** :

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{11}{16}}$$

$$\sigma_X = \frac{\sqrt{11}}{4}$$

e.Fonction de répartition :

Soit X une variable aléatoire d'univers image $X(\Omega) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$. On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X la fonction

$$f : \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto P(X \leq x)$$

Si la loi de probabilité est donnée telle que $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, alors on peut organiser les valeurs comme suit :

X_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
P_i	P_1	P_2	$\ldots$	P_n

La fonction de répartition F est définie par :

$$\forall x \in]-\infty, x_1[, F(x) = 0$$
$$\forall x \in [x_1, x_2[, F(x) = P_1$$
$$\forall x \in [x_2, x_3[, F(x) = P_1 + P_2$$
$$\forall x \in [x_{n-1}, x_n[, F(x) = P_1 + P_2 + \cdots + P_{n-1}$$
$$\forall x \in [x_n, +\infty[, F(x) = 1$$

Remarque

La fonction de répartition est une fonction définie par morceaux, elle est croissante.

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

Exemple :

Soit X une variable aléatoire de loi de probabilité ci-dessous.

X_i	-3	-1	0	2	3
P_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{16}$

1. Définir la fonction de répartition.
2. Représenter $\mathcal{C}F$ dans un espace d'unité 10 cm.

Solution :

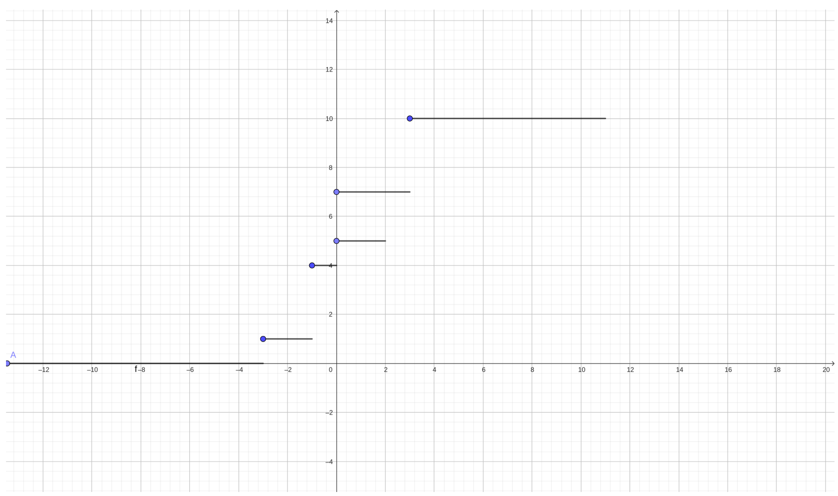
$$\forall x \in [-\infty, -3[,\ F(x) = 0$$
$$\forall x \in [-3, -1[,\ F(x) = \frac{1}{10}$$
$$\forall x \in [-1, 0[,\ F(x) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10}$$

$$\forall x \in [0, 2[,\ F(x) = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10}$$
$$\forall x \in [2, 3[,\ F(x) = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$$
$$\forall x \in [3, +\infty[,\ F(x) = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, -3] \\ \frac{1}{10} & \text{si } x \in [-3, -1[\\ \frac{4}{10} & \text{si } x \in [-1, 0[\\ \frac{5}{10} & \text{si } x \in [0, 2[\\ \frac{7}{10} & \text{si } x \in [2, 3[\\ 1 & \text{si } x \in [3, +\infty[\end{cases}$$

Remarque

Soit X une fonction aléatoire de fonction de répartition F :
$P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$
$P(X > a) = 1 - F(a)$



2. Loi de Binomiale

a. Loi de Bernouilli

Une variable aléatoire qui présente que 2 résultats possibles : succès (S) et échec $(\overline{S})$ suit une loi de Bernoulli.

Soit X la variable aléatoire qui prend 1 si (S) se réalise et 0 si $(\overline{S})$ se réalise. On note par $p = P(X = 1)$ et $q = P(X = 0)$, on dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p. On note $X \sim B(p)$. ++++++++++++++++++++

a. Loi de Bernoulli

Une variable aléatoire suit une loi de Bernoulli lorsqu'elle ne peut prendre que deux valeurs possibles : le succès (S) ou l'échec $(\overline{S})$.
Soit X la variable aléatoire qui vaut 1 si le succès S se réalise, et 0 si l'échec $\overline{S}$ se réalise.
On note $p = P(X = 1)$ et $q = P(X = 0)$.
On dit alors que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, et on écrit : $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Loi de probabilité de X :

X_i	0	1
P_i	p	q

$$p + q = 1 \Rightarrow q = 1 - p$$

$$E(X) = p$$

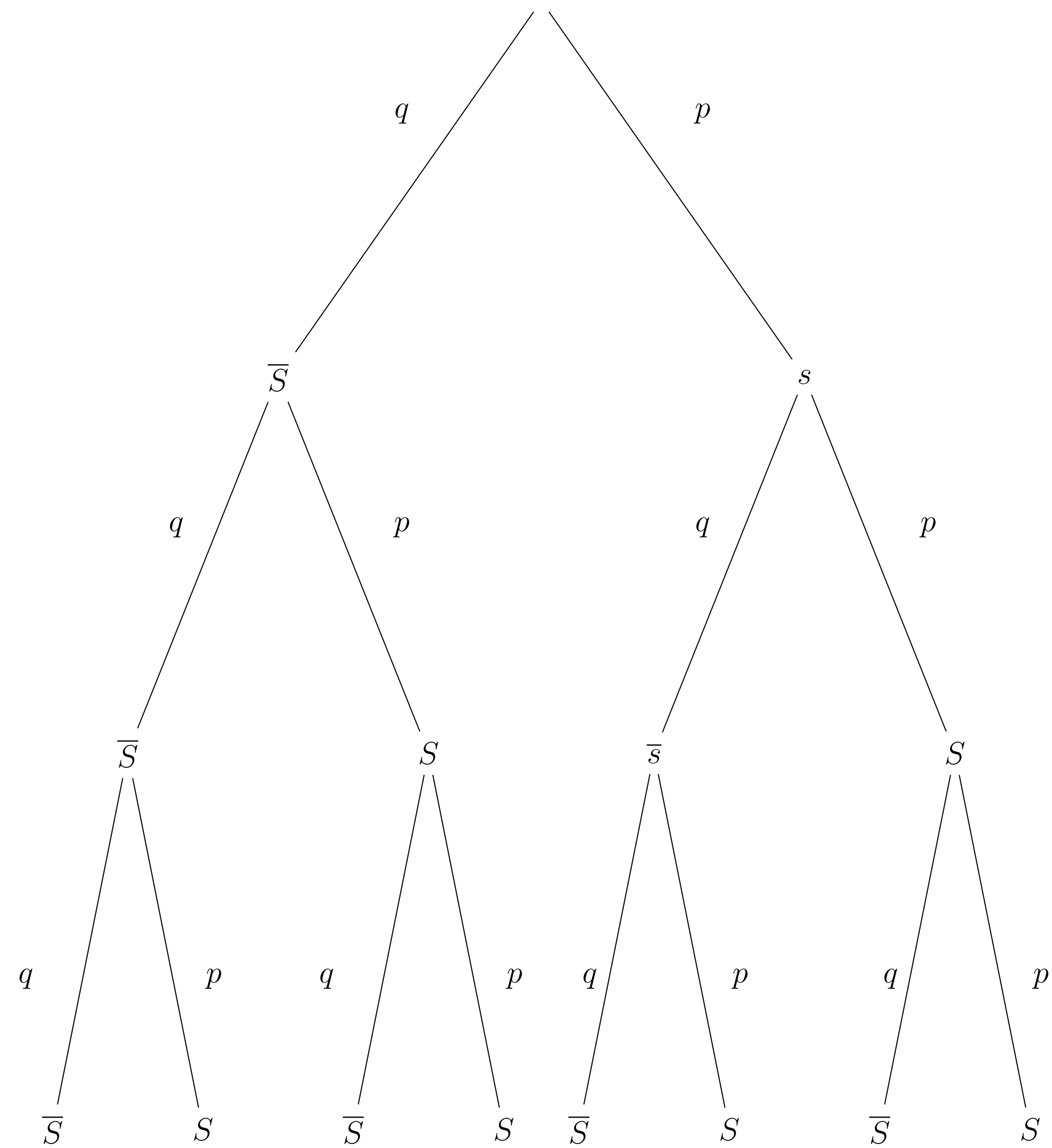
$$V(X) = p - p^2 = pq$$

Remarque

Dans toute épreuve aléatoire, il est possible de définir une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli. Il suffit de prendre un événement et son événement contraire.

b. Schéma de Bernoulli

Soit une épreuve aléatoire présentant deux issues possibles : succès S et échec $\overline{S}$.
La répétition n fois, de manière indépendante, de cette même épreuve aléatoire est appelée un **schéma de Bernoulli** d'ordre n, avec $n \in \mathbb{N}^*$.



La variable aléatoire X qui prend le nombre de fois où l'événement succès s'est réalisé durant ces n répétitions suit une loi binomiale de paramètres n et p, on note :$X \sim B(n,p)$

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, ..., n\} \forall k \in X(\Omega)$

$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

++++++++++++++++++++++++++++

La variable aléatoire X, qui représente le nombre de fois où l'événement

succès se réalise au cours des n répétitions, suit une loi binomiale de paramètres n et p.
On note : $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

L'ensemble des valeurs possibles de X est : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.
Pour tout entier $k \in X(\Omega)$, la probabilité que $X = k$ est donnée par :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{où } q = 1 - p.$$

+++++++++++++++++++++++++++++

X_i	0	1	2	...	n
$P(X_i)$	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	p^n

$$E(X) = np$$

$$E(X) = npq$$

Exemple BAC 2004