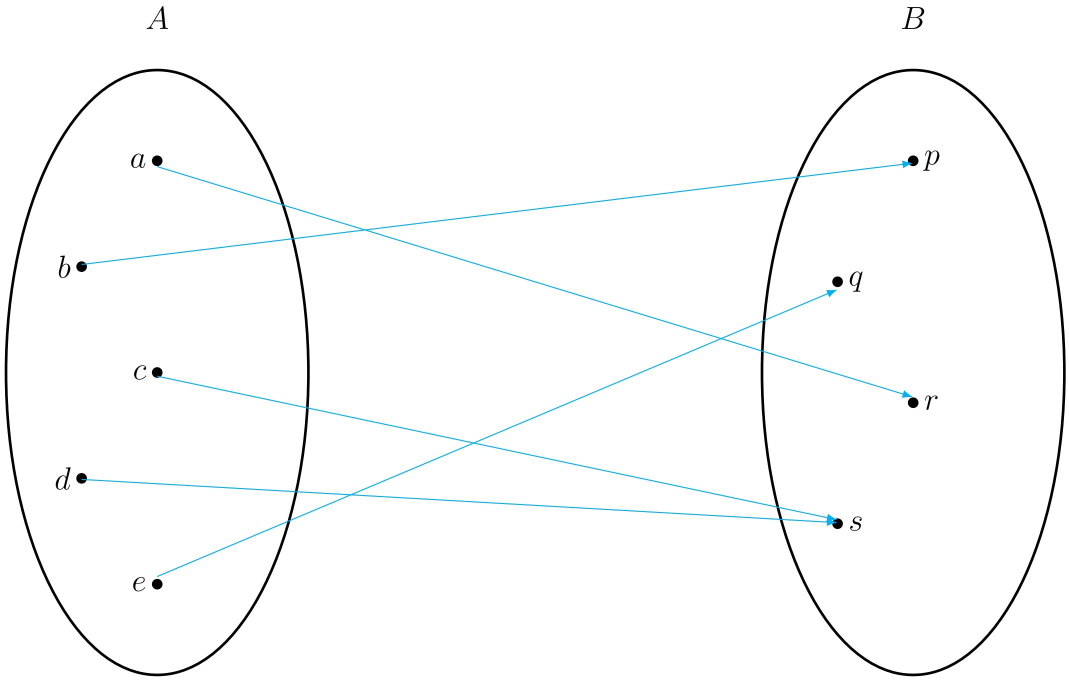
Chapitre 02 : Fonction Numériques

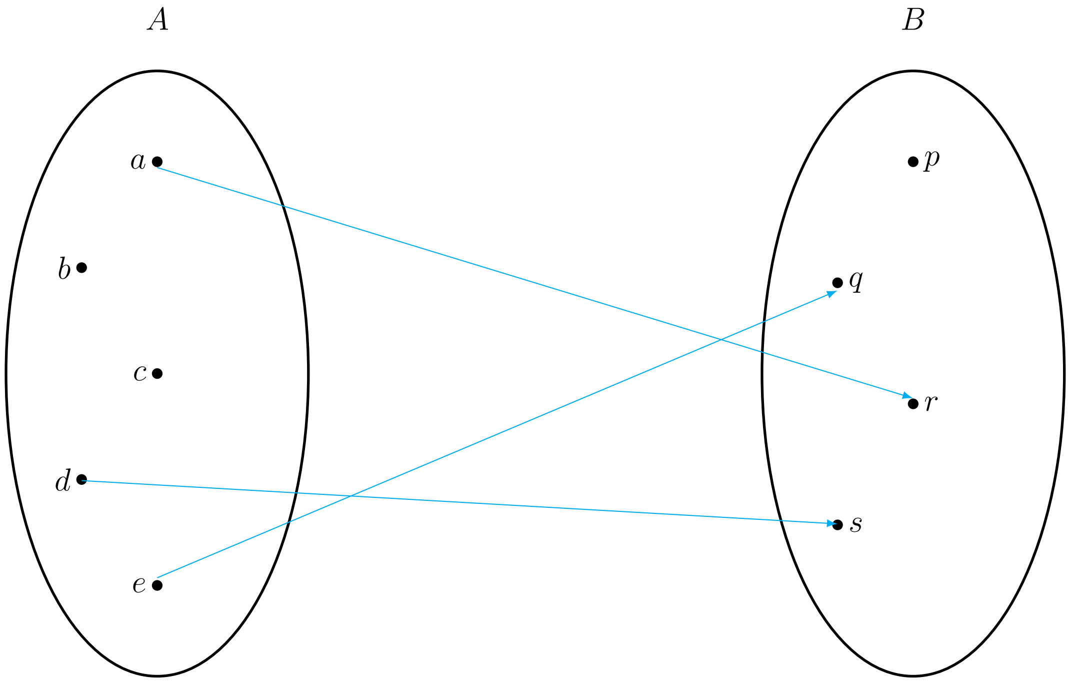
I.Définition de fonction et application

1.Définition et présentation d'une fonction

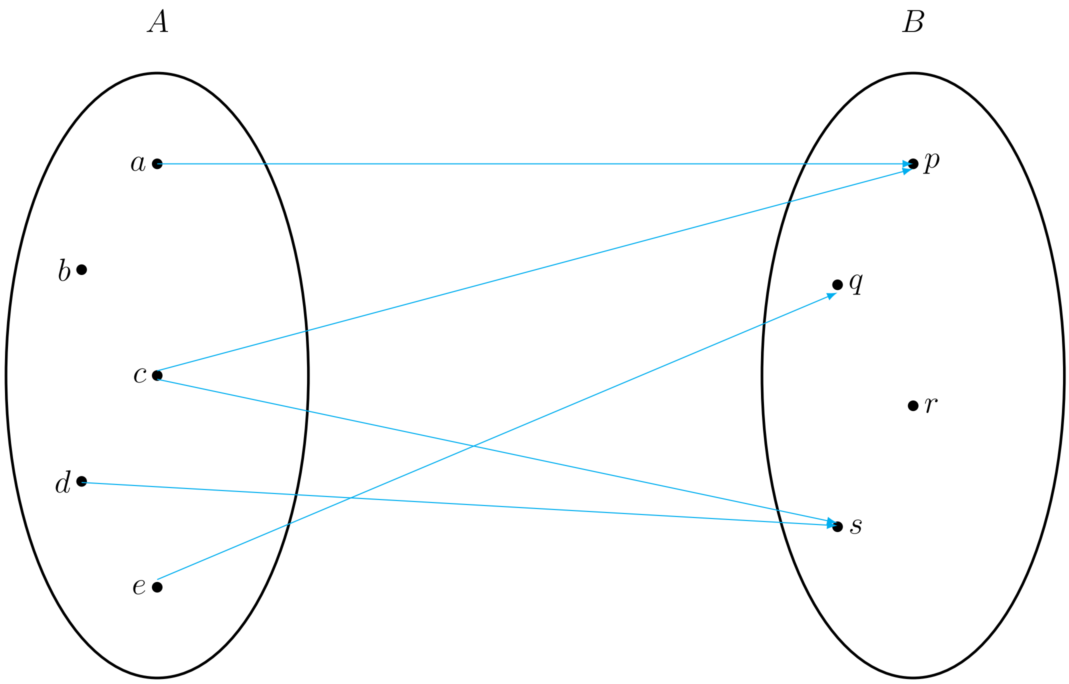
Soient E et F deux ensembles, on appelle **fonction** toute relation qui associe à tout élément de E au plus un élément de F.



h **est une fonction** car élément de A est associé à au maximum 1 élément de B.



h **est une fonction** car est associé à deux valeurs distinctes.



h **n'est pas une fonction** car d est associé à deux valeurs distinctes.

NB :

— E est appelé **l'ensemble de départ** et F est appelé **l'ensemble d'arrivée**.

— Si f est une fonction, on dit que f est une fonction de E dans F ou E dans F on note $E \to F$.
— On appelle **fonction réelle** toute relation qui à chaque élément de $\mathbb{R}$ associe un élément de $\mathbb{R}$.

Notation et Vocabulaire

La fonction réelle f est notée :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x)$$

— x est appelé **antécédent**.
— Le réel $y = f(x)$ est appelé **image** de x par f.
— On dit que f est une fonction dont la variable x est réelle.

Exemples de fonctions réelles

a) Soit la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + 1 \end{aligned}$$

b Soit la fonction g définie par :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 + 8x + 1 \end{aligned}$$

c) Soit la fonction h définie par :

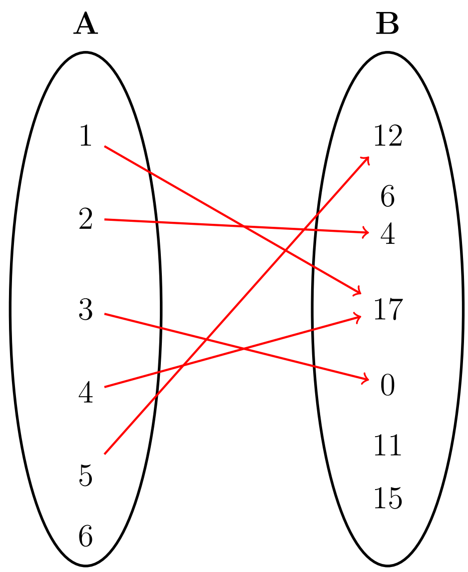
$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{8x + 1} \end{aligned}$$

d) Soit la fonction k définie par :

$$\begin{aligned} k : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{2x}{x + 1} \end{aligned}$$

Remarque :
— f et g sont appelées **fonctions polynomiales**.
— h est une fonction **irrationnelle**.
— k est une fonction **rationnelle**.

Exemple : Exercice d'application



Questions :

1. Donner l'image de 1, de 4 et de 6.
2. Donner l'antécédent de 12, de 11, de 4 et de 6.

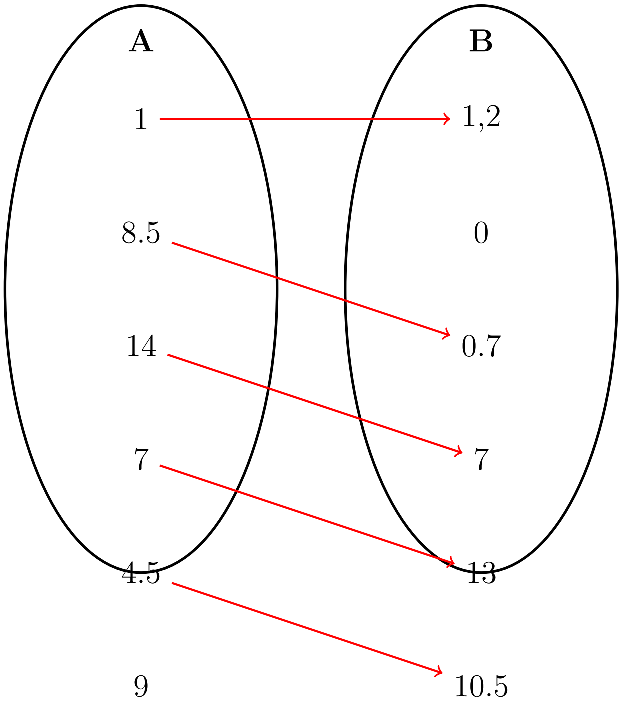
Correction

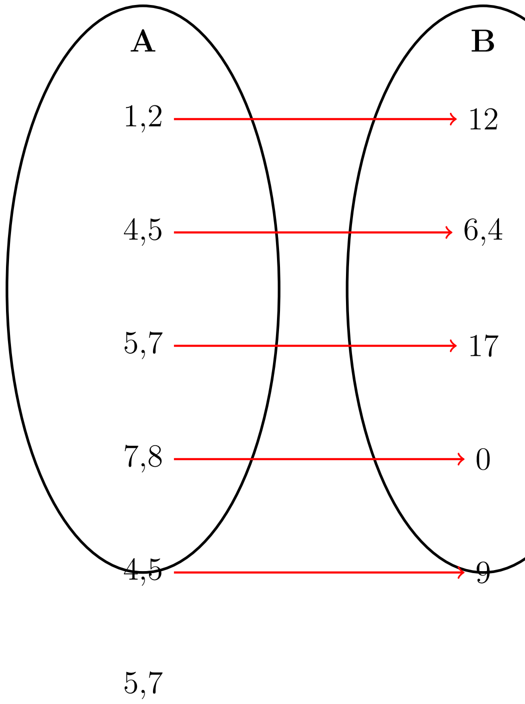
2)Définition et présentation d'une application

a.Activité

En considérant les trois diagrammes suivants :

1. Pour chaque fonction supprimmer les antécédents qui n'ont pas d'image.
2. Dans chaque cas, attribue une nouvelle lettre à l'ensemble de départ.





b.Domaine de définition ou ensemble de définition

Soit f une fonction numérique de variable réelle.

IV. Image directe - Image réciproque par une application

1. Image directe

a. Définition

Soit f une fonction définie de $E \to F$ et A une partie de E. On appelle image directe (image de A par f), notée $f(A)$, l'ensemble des images par f de tous les éléments de $A \cap Df$.

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A \cap Df, y = f(x)\}$$

b. Exemple

Soit

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x+1}$$

Trouver les images par f de chacun des sous-intervalles de $\mathbb{R}$ suivants :

$$A =]-1, 4] \quad ; \quad B = [-5, 3]$$

f existe ssi $x \neq -1$
Donc $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\star \forall x \in A$, $x \in Df$, calculons $f(A)$

$$\begin{aligned} x \in A &\Longrightarrow -1 < x \leq 4 \\ &\Longrightarrow 0 < x+1 \leq 5 \\ &\Longrightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{x+1} \\ &\Longrightarrow \frac{1}{5} \leq f(x) \\ &\Longrightarrow f(x) \in \left]\frac{1}{5}; +\infty\right[\end{aligned}$$

$f(A) = \left[\frac{1}{5}, +\infty\right]$

$$\forall x \in B \cap \mathcal{D}_f \Rightarrow x \in [-5; -1[\cup]-1; 3]$$

$$x \in [-5; -1[\quad \text{ou} \quad x \in]-1; 3]$$

$$-5 \leq x < -1 \quad \text{ou} \quad -1 < x \leq 3$$

$$-4 \leq x+1 < 0 \quad \text{ou} \quad 0 < x+1 \leq 4$$

$$-\frac{1}{4} > \frac{1}{x+1} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x+1}$$

$$f(x) \leq -\frac{1}{4} \quad \text{ou} \quad f(x) \geq \frac{1}{4}$$

$$f(B) =]-\infty; -\frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{4}; +\infty[$$

2) Image réciproque

a) Définition :

Soit f une fonction définie de E vers F, d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$, et B une partie de F. On appelle image réciproque de B par f, la partie de $\mathcal{D}_f$ notée : $f^{-1}(B)$, constituée des antécédents par f de tous les éléments de B.

b) Remarque : Comment trouver l'image réciproque ?

Pour trouver l'image réciproque d'un intervalle B dans $\mathbb{R}$ par une fonction f, d'ensemble de **définition $\mathcal{D}_f$, on résout l'un des systèmes d'inconnues suivants :**

— **Si $B = [a; b]$, alors on résout :**

$$\begin{cases} x \in \mathcal{D}_f \\ a \leq f(x) \leq b \end{cases}$$

— **Si $B =]a; b]$, alors on résout :**

$$\begin{cases} x \in \mathcal{D}_f \\ a < f(x) \leq b \end{cases}$$

— **Si $B = [a; b[$, alors on résout :**

$$\begin{cases} x \in \mathcal{D}_f \\ a \leq f(x) < b \end{cases}$$

— **Si $B =]-\infty; b]$, alors on résout :**

$$\begin{cases} x \in \mathcal{D}_f \\ f(x) \leq b \end{cases}$$

— **Si $B = [a; +\infty[$, alors on résout :**

$$\begin{cases} x \in \mathcal{D}_f \\ f(x) \geq a \end{cases}$$

— **Si $B = \{b\}$, alors on résout :**

$$\begin{cases} x \in \mathcal{D}_f \\ f(x) = b \end{cases}$$

c) Exemple :

Soit

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 2x - 1$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2 - x - 2$$

1. Trouver l'image réciproque par f de $B = [1, 3]$.
2. Trouver l'image réciproque par g de $B = \{0\}$.

Résolution

1) Pour $B = [1, 3]$, déterminons l'image réciproque par f.
   - $f(x)$:

$$\begin{cases} x \in \mathcal{D}_f \\ 1 \leq f(x) \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ 1 \leq 2x - 1 \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ 1 + 1 \leq 2x - 1 + 1 \leq 3 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ 2 \leq 2x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ \frac{2}{2} \leq \frac{2x}{2} \leq \frac{4}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\boxed{f^{-1}(B) = [1, 2]}$$

2) Pour $g(x)$:

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ (x-1)(x+2)=0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ x=-1 \quad \text{ou} \quad x=2 \end{array}\right.$$

$$\boxed{g^{-1}(B)=\{-1,2\}}$$

REMARQUE ! ! !

Toute application à la fois injective et surjective est forcément bijective.