Asymptotes et Branches Infinies

Professeur : M. BA

Classe : Terminale S2

Durée : 10 minutes

Note : /5

Question 1(1 point) : On dit que la droite d'équation $y = d$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de h si :

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \underline{d\quad}, \quad \lim_{x\to-\infty} h(x) = \underline{d\quad}$$

Question 2(1 point) : Complétez la phrase suivante : La droite d'équation $x = c$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de h si $\underline{\lim_{x\to+\infty} h(x) = \infty \qquad}$

Question 3(1 point) :
Soit $h(x) = \frac{3x+1}{-x+2}$.
Déterminez les limites de $h(x)$ en $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ et $x \to 2$:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \underline{-3\qquad}, \quad \lim_{x\to-\infty} h(x) = \underline{-3\qquad}, \quad \lim_{x\to2^-} h(x) = \underline{+\infty\qquad},$$

$$\lim_{x\to2^+} h(x) = \underline{-\infty\qquad}.$$

Question 4(1 point) :
Montrez que la droite $y = 3x-1$ est une asymptote oblique de la fonction $h(x) = \frac{3x^2+2x}{x+1}$ en $+\infty$.

Pour prouver que la droite $\mathcal{D}$ est une asymptote oblique à la courbe de h en $+\infty$, nous devons montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} [h(x) - (3x - 1)] = 0$$

Calcul de la différence $h(x) - (3x - 1)$:

$$\begin{aligned}
h(x) - (3x - 1) &= \frac{3x^2 + 2x}{x + 1} - (3x - 1) \\
&= \frac{3x^2 + 2x}{x + 1} - \frac{(3x - 1)(x + 1)}{x + 1} \\
&= \frac{3x^2 + 2x - (3x^2 + 3x - x - 1)}{x + 1} \\
&= \frac{3x^2 + 2x - (3x^2 + 2x - 1)}{x + 1} \\
&= \frac{3x^2 + 2x - 3x^2 - 2x + 1}{x + 1} \\
&= \frac{1}{x + 1}
\end{aligned}$$

Calcul de la limite : Nous calculons la limite de cette différence lorsque $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}[h(x) - (3x - 1)] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x + 1}$$

Lorsque $x \to +\infty$, le dénominateur $(x+1)$ tend vers $+\infty$. Par conséquent :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

Conclusion : Puisque $\lim_{x\to+\infty}[h(x) - (3x-1)] = 0$, la droite d'équation $y = 3x - 1$ est bien une **asymptote oblique** de la fonction $h(x)$ en $+\infty$.

Question 5(1 point) :

$$\text{Si } \lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} \frac{h(x)}{x} = +\infty \text{ alors } (C_h) :$$

admet une **branche parabolique** de **direction l'axe des ordonnées** (l'axe Oy) en $-\infty$

$$\text{Si } \lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \gamma \in \mathbb{R}^* \text{ et } \lim_{x\to+\infty} [h(x) - \gamma x] = +\infty \text{ alors } (C_h)$$

admet une **branche parabolique** de **direction** la droite $y = \gamma x$ en $+\infty$