

## Correction du devoir n° 1 Du 1<sup>er</sup> Semestre

### Exercice 1 : 1,5 points

1 Déterminons les racines cubiques de l'unité.

Résolvons pour cela  $z^3 = 1, z \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned} z^3 = 1 &\implies z^3 = e^{i(0+2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}. \\ z &= e^{i\frac{(0+2k\pi)}{3}}, \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

- Pour  $k = 0$ ,  $z = e^{i0} = 1$ , donc  $z_0 = 1$ .

- Pour  $k = 1$ ,  $z = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$ , donc  $z_1 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

- Pour  $k = 2$ ,  $z = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$ , donc  $z_2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{ 1, -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

2 Interprétation

- $\arg(z_B - z_A) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}) [2\pi]$

Géométriquement,  $\arg(z_B - z_A)$  est l'angle  $(\widehat{\overrightarrow{OI}}, \widehat{\overrightarrow{AB}})$  formé par le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  avec l'axe réel du plan complexe  $(O, \overrightarrow{OI})$ .

- $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) [2\pi]$

Géométriquement,  $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}\right)$  est l'angle  $(\widehat{\overrightarrow{AB}}, \widehat{\overrightarrow{CD}})$  que forment les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$ .

3  $f(x) = \sqrt{x}$ , appliquons l'IAF

Appliquons l'IAF (Inégalité des Accroissements Finis) sur  $[t, t + 1]$ .

### Théorème des Inégalités des Accroissements Finis (TI-AF 1)

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $[a, b]$ .

Hypothèses :

- 1),  $f$  est continue sur  $[a, b]$ .
- 2),  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$ .
- 3), Il existe deux réels  $m$  et  $M$  tels que, pour tout  $x \in ]a, b[, m \leq f'(x) \leq M$ .

Conclusion :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

### Théorème des Inégalités des Accroissements Finis (TI-AF 2)

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $[a, b]$ .

Hypothèses :

- 1),  $f$  est continue sur  $[a, b]$ .
- 2),  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$ .
- 3), Il existe un réel  $m \geq 0$  tel que, pour tout  $x \in ]a, b[, |f'(x)| \leq m$ .

Conclusion :

$$|f(b) - f(a)| \leq m|b - a|.$$

### Applications $t > 0$

- $f$  est continue sur  $[t, t + 1]$ .
- $f$  est dérivable sur  $]t, t + 1[$  et pour tout,

$$\forall x \in ]t, t + 1[, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Comme  $x \in ]t, t + 1[$ , alors  $t < x < t + 1$ . Ainsi,

$$\frac{1}{2\sqrt{t+1}} < \frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

D'où :

$$\frac{1}{2\sqrt{t+1}} < f'(x) < \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis (IAF), nous avons :

$$\frac{1}{2\sqrt{t+1}}(t + 1 - t) < f(t + 1) - f(t) < \frac{1}{2\sqrt{t}}(t + 1 - t).$$

Cela donne :

$$\frac{1}{2\sqrt{t+1}} < f(t + 1) - f(t) < \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

## Exercice 2 : 8,5 points

### Partie A

- 1 Montrons que  $P$  admet une unique racine réelle.

Soit  $z_0 = a \in \mathbb{R}$  tel que  $P(z_0) = 0$ .

$$P(z) = z^3 + (-5 + 2i)z^2 + (7 - 7i)z - 2 + 6i$$

$$P(z_0) = 0 \implies a^3 + (-5 + 2i)a^2 + (7 - 7i)a - 2 + 6i = 0$$

$$\implies a^3 - 5a^2 + 7a - 2 + i(2a^2 - 7a + 6) = 0$$

En séparant les parties réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} a^3 - 5a^2 + 7a - 2 = 0 & (1) \\ 2a^2 - 7a + 6 = 0 & (2) \end{cases}$$

L'équation (2) est plus facile à résoudre.

Résolution de (2)

$$2a^2 - 7a + 6 = 0$$

$$\Delta = 7^2 - 4 \times 2 \times 6 = 49 - 48 = 1.$$

Calculons le discriminant :

$$a_1 = \frac{-(-7) - \sqrt{\Delta}}{2 \times 2} = \frac{7 - 1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2},$$

$$a_2 = \frac{-(-7) + \sqrt{\Delta}}{2 \times 2} = \frac{7 + 1}{4} = \frac{8}{4} = 2.$$

La racine de (2) qui vérifie (1) est la racine de  $P(z)$ .

Vérification pour  $a = \frac{3}{2}$

Substituons  $a = \frac{3}{2}$  dans (1) :

$$\begin{aligned} a^3 - 5a^2 + 7a - 2 &= \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 5\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{3}{2}\right) - 2 \\ &= \frac{27}{8} - 5 \times \frac{9}{4} + \frac{21}{2} - 2 \\ &= \frac{27}{8} - \frac{45}{8} + \frac{84}{8} - \frac{16}{8} \\ &= \frac{27 - 45 + 84 - 16}{8} \\ &= \frac{111 - 106}{8} = \frac{5}{8} \neq 0 \end{aligned}$$

Donc,  $a = \frac{3}{2}$  n'est pas solution.

Vérification pour  $a = 2$

Substituons  $a = 2$  dans (1) :

$$\begin{aligned} a^3 - 5a^2 + 7a - 2 &= 2^3 - 5(2^2) + 7(2) - 2 \\ &= 8 - 20 + 14 - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc,  $a = 2$  est une solution.

$$z_0 = 2.$$

## 2 Factorisons $P(z)$

Utilisons la méthode de la division synthétique pour factoriser  $P(z)$ . Le tableau est donné ci-dessous :

	1	$-5 + 2i$	$7 - 7i$	$2 + 6i$
2	↓	2	$-6 + i$	$2 - 6i$
	1	$-3 + 2i$	$1 - 3i$	0

Ainsi, nous avons :

$$P(z) = (z - 2)(z^2 + (-3 + 2i)z + 1 - 3i).$$

## 3 Résolvons $P(z) = 0$

$$P(z) = 0 \implies z = 2 \text{ ou } z^2 + (-3 + 2i)z + 1 - 3i = 0.$$

$$\begin{aligned}\Delta &= (-3 + 2i)^2 - 4(1)(1 - 3i) \\ &= 9 - 12i - 4 + 12i\end{aligned}$$

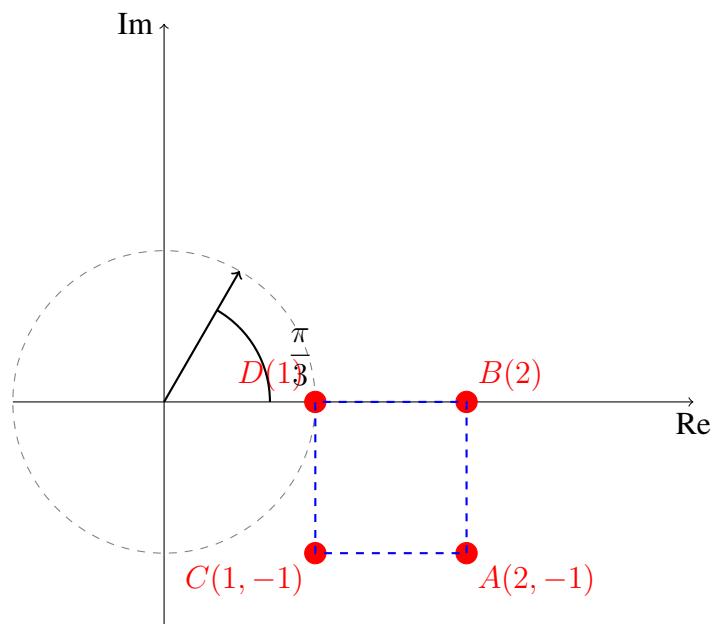
$$= 5$$

$$z_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} - i, z_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} - i$$

$$S = \left\{ 2, \frac{3 - \sqrt{5}}{2} - i, \frac{3 + \sqrt{5}}{2} - i \right\}.$$

## Partie B

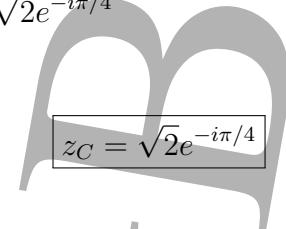
### 1 Représentation



2 Écriture exponentielle de  $z_C$  et  $z_E$

Pour  $z_C$  :

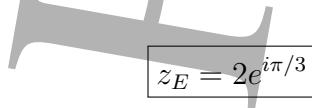
$$\begin{aligned} z_C &= 1 - i \\ &= \sqrt{2} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &= \sqrt{2}e^{-i\pi/4} \end{aligned}$$



Pour  $z_E$  :

$$\begin{aligned} z_E &= 1 + i\sqrt{3} \\ &= 2 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \\ &= 2e^{i\pi/3} \end{aligned}$$

Donc :



3. Plaçons exactement le point  $E$

$$z_E = 2e^{i\pi/3}.$$

4 Écriture algébrique de  $z_E^8$

$$\begin{aligned} z_E = 2e^{i\pi/3} &\implies z_E^8 = 2^8 e^{8i\pi/3} \\ &\implies z_E^8 = 2^8 \left[ \cos\left(\frac{2 \times 3\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2 \times 3\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \\ &\implies z_E^8 = \left[ \cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \\ &\implies z_E^8 = 2^8 \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned}$$

$$z_E^8 = 2^8 \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

5. Calculons les affixes de  $I$  et  $J$

On a :  $I = \text{bar}\{(A, 1); (C, -2)\}$

$$\begin{aligned}
 I = \text{bar}\{(A, 1); (C, -2)\} &\implies \overrightarrow{AI} = \frac{-2}{1-2} \overrightarrow{AC} \\
 &\implies \overrightarrow{AI} = 2 \overrightarrow{AC} \\
 &\implies Z_I - Z_A = 2(Z_C - Z_A) \\
 &\implies Z_I - Z_A = 2Z_C - 2Z_A \\
 &\implies Z_I = 2Z_C - Z_A \\
 &\implies Z_I = 2(1-i) - (2-i) \\
 &\implies Z_I = 2 - 2i - 2 + i \\
 &\implies Z_I = -i.
 \end{aligned}$$

On a:  $J = \text{bar}\{(A, 1); (C, 2)\}$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } J = \text{bar}\{(A, 1); (C, 2)\} &\implies \overrightarrow{AJ} = \frac{2}{1+2} \overrightarrow{AC} \\
 &\implies Z_J - Z_A = \frac{2}{3}Z_C - \frac{2}{3}Z_A \\
 &\implies Z_J = \frac{2}{3}Z_C + \frac{1}{3}Z_A \\
 &\implies Z_J = \frac{2}{3}(1-i) + \frac{1}{3}(2-i) \\
 &\implies Z_J = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(-i) + \frac{2}{3} - \frac{i}{3} \\
 &\implies Z_J = \frac{4}{3} - i
 \end{aligned}$$

$$Z_J = \frac{4}{3} - i$$

6) Donner un module et un argument de  $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$

$$\begin{aligned}
 \frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} &= \frac{2 - (2-i)}{1-i - (2-i)} \\
 &= \frac{i}{-1} \\
 &= i
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \boxed{\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = i}$$

## Module

$$\left| \frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} \right| = |i| = 1$$

## Un Argument

$$\arg \left( \frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} \right) = \frac{\pi}{2}$$

7 Nature de  $ABC$

$$\begin{cases} \left| \frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} \right| = 1 \\ \arg \left( \frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} \right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Donc  $ABC$  est un triangle rectangle et isocèle en  $A$ .

8 Montrons que  $A, B, C, D$  sont cocycliques

On a :

$$BD = |Z_D - Z_B| = |1 - 2| = 1$$

$$DC = |Z_C - Z_D| = |i - i - 1| = 1$$

## Conclusion

$$\text{donc } AB = AC = BD = DC \quad \text{et} \quad (\widehat{AC}, \widehat{AB}) = \frac{\pi}{2}.$$

donc  $ABDC$  est un carré, donc il est inscrit dans un cercle  $\mathcal{C} \left( \frac{z_A + z_D}{2}, \frac{|z_A - z_D|}{2} \right)$ .

Tel que les sommets de  $ABCD$  appartiennent à  $\mathcal{C}$ .

$$\begin{aligned} \frac{z_A + z_D}{2} &= \frac{2 - i + 1}{2} \\ &= \frac{3 - i}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{|z_A - z_D|}{2} &= \frac{|2 - i - 1|}{2} \\ &= \frac{|1 - i|}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\mathcal{C} \left( \left( \frac{3 - i}{2} \right), \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\mathcal{C} \left( \left( \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)$$

## 9 Forme exponentielle de $Z$ et Écriture algébrique $Z$

### a Forme exponentielle de $Z$

$$Z = \frac{Z_E}{Z_C}$$

$$\begin{cases} Z_E = 2e^{i\pi/3} \\ Z_C = \sqrt{2}e^{-i\pi/4} \end{cases} \iff Z = \frac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} \iff Z = \sqrt{2}e^{i(\pi/3 + \pi/4)} \iff Z = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

$Z = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

### b Les valeurs de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$

Écriture algébrique de  $Z$

$$\begin{aligned} Z = \frac{Z_E}{Z_C} &\iff Z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \\ &= \frac{(1+i\sqrt{3})(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{(1+i\sqrt{3})(1+i)}{2} \\ &= \frac{1+\sqrt{3}i+i-\sqrt{3}}{2} \\ Z &= \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$Z = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

$$Z = \sqrt{2} \left[ \cos \left( \frac{7\pi}{12} \right) + i \sin \left( \frac{7\pi}{12} \right) \right].$$

$$\text{Par identification : } \cos \left( \frac{7\pi}{12} \right) = \frac{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}}, \quad \sin \left( \frac{7\pi}{12} \right) = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{D'où : } \boxed{\cos \left( \frac{7\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}, \quad \sin \left( \frac{7\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}.$$

## Partie C

Soit  $f$  définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P} \setminus \{c(1-i)\} &\rightarrow \mathbb{P} \\ Z &\mapsto \frac{Z-2i}{Z-1+i} \end{aligned}$$

1 Expression de  $OM'$  en fonction de  $MA$  et  $MC$  On a :

$$Z' = \frac{Z-2i}{Z-1+i}.$$

$$Z' = \frac{Z - (2 + i)}{Z - (1 + i)}.$$

$$Z' = \frac{Z_M - Z_A}{Z_M - Z_C}.$$

$$|Z'_M| = \left| \frac{Z_M - Z_A}{Z_M - Z_C} \right|.$$

$$OM' = \frac{MA}{MC}.$$

$$\boxed{OM' = \frac{MA}{MC}}$$

2 Une interprétation géométrique de  $\arg(Z')$

$$\arg(Z') = \arg\left(\frac{Z_M - Z_A}{Z_M - Z_C}\right) = (\overrightarrow{CM}; \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{MC}; \overrightarrow{MA})$$

Géométriquement,  $\arg(Z')$  représente l'angle orienté entre les vecteurs  $\overrightarrow{CM}$  et  $\overrightarrow{AM}$ .

3 L'ensemble des points M pour  $Z'$  soit un réel non nul.

$$Z' = \frac{Z_M - Z_A}{Z_M - Z_C}.$$

Pour que  $Z'$  soit un réel non nul, deux conditions doivent être satisfaites :

- a  $Z_M \neq Z_A$ , car le numérateur ne doit pas être nul.
- b  $Z_M \neq Z_C$ , car le dénominateur ne doit pas être nul.

Ensuite, pour que  $Z'$  soit un réel, l'argument de  $\frac{Z_M - Z_A}{Z_M - Z_C}$  doit être nul ou un multiple de  $\pi$ ,

$$\arg(Z') = \arg\left(\frac{Z_M - Z_A}{Z_M - Z_C}\right) = 0[\pi], \text{ ce qui implique que les vecteurs } \overrightarrow{CM} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ sont colinéaires.}$$

En termes géométriques, cela signifie que  $M$  appartient à la droite passant par  $A$  et  $C$ , à l'exclusion des points  $A$  et  $C$ .

L'ensemble des points  $M$  est donc donné par :

$$\mathcal{D} = \{M \in \mathbb{C} \mid M \in \text{droite}(A, C) \setminus \{A, C\}\}.$$

4 Donner et construire l'ensemble des points  $M$  tel que  $|Z'| = 2$

$$|Z'_M| = \left| \frac{Z_M - Z_A}{Z_M - Z_C} \right| = OM = \frac{MA}{MC}.$$

$$\begin{aligned} MA = 2MC &\implies (MA)^2 = (2MC)^2 \\ &\implies (MA)^2 - (2MC)^2 = 0 \\ &\implies (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC}) = 0 \end{aligned}$$

Or  $I = \text{bar}\{(A, 1); (C, -2)\}$  et  $J = \text{bar}\{(A, 1); (C, 2)\}$

$$\begin{aligned} &\implies (1 - 2)\overrightarrow{MI}.(2 + 1)\overrightarrow{MJ} = 0 \\ &\implies -3\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0 \\ &\implies \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0 \end{aligned}$$

$M$  décrit donc un cercle de centre  $\frac{z_I + z_J}{2}$  et de rayon  $\frac{|z_I - z_J|}{2}$

$$\frac{z_I + z_J}{2} = \frac{-i + (\frac{4}{3} - i)}{2} \text{ et } \frac{|z_I - z_J|}{2} = \frac{|-i - (\frac{4}{3} - i)|}{2}$$

$$\frac{z_I + z_J}{2} = \frac{(\frac{4}{3} - 2i)}{2} \text{ et } \frac{|z_I - z_J|}{2} = \frac{|-\frac{4}{3}|}{2}$$

$$\frac{z_I + z_J}{2} = \frac{(\frac{4-6i}{3})}{2} \text{ et } \frac{|z_I - z_J|}{2} = \frac{4}{6}$$

$$\frac{z_I + z_J}{2} = \frac{4-6i}{6} \text{ et } \frac{|z_I - z_J|}{2} = \frac{4}{6}$$

$$\frac{z_I + z_J}{2} = \frac{2-3i}{3} \text{ et } \frac{|z_I - z_J|}{2} = \frac{4}{6}$$

$$\frac{z_I + z_J}{2} = \frac{2}{3} - i \text{ et } \frac{|z_I - z_J|}{2} = \frac{4}{6}$$

Finalement :  $\boxed{\mathcal{C}\left(\left(\frac{2}{3} - i\right); \frac{4}{6}\right)}$

$\boxed{\mathcal{C}\left(\left(\frac{3}{2}, -1\right), \frac{4}{6}\right)}$

## Problème : 10 points

### Partie A

Soit  $\mu(x) = x^3 + 3x - 1$

a) Tableau de variation :

- Domaine de définition :  $D_f = \mathbb{R}$
- Limites aux bornes :
  - \* En  $x \rightarrow -\infty$  :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mu(x) = -\infty$
  - \* En  $x \rightarrow +\infty$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mu(x) = +\infty$

- Variation de  $\mu$  :
  - \*  $\mu$  est continue sur  $\mathbb{R}$  car c'est un polynôme.
  - \*  $\mu$  est aussi dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

- Dérivée de  $\mu$
- On a :  $\mu'(x) = 3x^2 + 3$
- Le signe de  $\mu'(x)$

Résolvons  $\mu'(x) = 0$  :

$$3x^2 + 3 = 0$$

$$x^2 = -1$$

Comme  $x^2 = -1$  n'a pas de solution réelle, on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mu'(x) > 0$$

Donc,  $\mu(x)$  est **strictement croissante** sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$\mu'(x)$		+	
$\mu(x)$	$-\infty$	$0$	$+\infty$

b) Montrons que  $\mu(x) = 0$  admet une unique solution dans  $]0, 1[$

### Existence

$$\mu(0) = -1 \text{ et } \mu(1) = 3$$

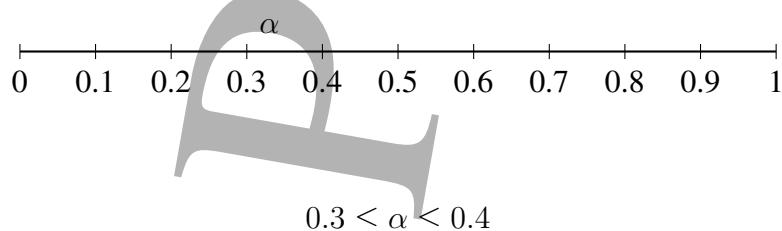
Comme  $\mu(0) \times \mu(1) < 0$ , donc  $\mu(x) = 0$  admet une solution dans  $]0, 1[$ .

### Unicité

$\mu$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , donc sur  $]0, 1[$ ,  $\mu(x) = 0$  admet une unique solution dans  $]0, 1[$ .

c) Un encadrement de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près

### Par la méthode de balayage



d) Le signe de  $\mu(x) - 1$  pour  $\mathbb{R}$

$\mu(x) - 1$  et  $\mu(x)$  ont les mêmes variations et mêmes limites en  $-\infty$  et  $+\infty$ .

Il existe un  $\beta$  tel que  $\mu(\beta) - 1 = 0$

$x$	$-\infty$	$\beta$	$+\infty$
$\mu'(x)$		+	
$\mu(x) - 1$	$-\infty$	$0$	$+\infty$

- $\forall x \in ]-\infty; \beta[, \mu(x) - 1 < 0$
- $\forall x \in ]-\infty; \beta[, \mu(x) - 1 > 0$

## Partie B

La fonction  $f$  est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x^3 + 1)}{x^2 + 1}, & \text{si } x < 1 \\ 1 + \sqrt{2x - 1}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1 Montrer que  $Df = \mathbb{R}$

$$\text{Posons } f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x < 1 \\ f_2(x), & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

\*  $f_1$  existe si  $x^2 + 1 \neq 0$  et  $x < 1$ .

$x \in \mathbb{R}$  et  $x < 1$

$$D_1 = ]-\infty, 1[$$

\*  $f_2$  existe si  $2x - 1 \geq 0$  et  $x \geq 1$ .

$$2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

$$x \geq \frac{1}{2} \text{ et } x \geq 1$$

$$x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[ \text{ et } x \in [1, +\infty[$$

$$x \in \left(\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[ \cap [1, +\infty[\right)$$

$$x \in [1, +\infty[$$

$$D_2 = [1, +\infty[$$

$$D_f = D_1 \cup D_2$$

$$D_f = ]-\infty, 1[ \cup [1, +\infty[$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

2 La continuité et la dérivabilité de  $f$  en 1



## Continuité

En  $1^-$  :

$$f(x) = f_1(x) = \frac{2(x^3 + 1)}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x^3 + 1)}{x^2 + 1} \\ = 2$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$

En  $1^+$  :

$$f(x) = f_2(x) = 1 + \sqrt{2x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 + \sqrt{2x - 1} \\ = 2$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

Comme

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

donc  $f$  est continue en 1.

## Dérivabilité

En  $1^-$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{2(x^3+1)}{x^2+1} - 2}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^3 + 2 - 2x^2 - 2}{(x^2 + 1)(x - 1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^3 - 2x^2}{(x^2 + 1)(x - 1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2(x - 1)}{(x^2 + 1)(x - 1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2}{(x^2 + 1)} \\
&= 1
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2}{x^2 + 1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1$

En  $1^+$  :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 + \sqrt{2x - 1} - 2}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{2x - 1} - 1}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 1 - 1}{(x - 1)(\sqrt{2x - 1} + 1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{2x - 1} + 1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{\sqrt{2x - 1} + 1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1$

Finalement  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

Donc  $f$  est dérivable en 1.

③ Équation de la tangente (T) à  $\mathcal{C}_f$  au point A(1,2).

$$(T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$y = (x - 1) + 2$$

$$\text{Donc } (T) : y = x + 1$$

4 Position de  $(\mathcal{C}_f)$  par rapport à  $(T)$ .

Pour ce faire, étudions le signe de  $f(x) - y$ .

Pour  $x < 1$

$$\begin{aligned} f(x) - y &= \frac{2(x^3 + 1)}{x^2 + 1} - (x + 1) \\ &= \frac{2(x^3 + 1) - (x + 1)(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \\ &= \frac{2x^3 + 2 - (x^3 + x + x^2 + 1)}{x^2 + 1} \\ &= \frac{2x^3 + 2 - x^3 - x^2 - x - 1}{x^2 + 1} \\ &= \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 + 1} \\ f(x) - y &= \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Le signe dépend du numérateur, que nous étudions avec la méthode de Horner :

	1	-1	-1	1
1	1	0	-1	0
	1	0	-1	0

On obtient la factorisation :

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x - 1 &= (x - 1)(x^2 - 1) \\ &= (x - 1)(x - 1)(x + 1) \\ &= (x + 1)(x - 1)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f(x) - y = \frac{(x + 1)(x - 1)^2}{x^2 + 1}$$

Si  $x < -1$ ,  $f(x) - y < 0$  donc  $(\mathcal{T})$  est au-dessus de  $(\mathcal{C}_f)$

Si  $x \in ]-1, 1[$ ,  $f(x) - y > 0$  donc  $(\mathcal{C}_f)$  est au-dessus de  $(\mathcal{T})$

Pour  $x > 1$

$$\begin{aligned} f(x) - y &= 1 + \sqrt{2x - 1} - (x + 1) \\ &= \sqrt{2x - 1} - x \end{aligned}$$

Supposons que  $\sqrt{2x - 1} - x < 0$

$$\begin{aligned} \sqrt{2x - 1} < x &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2x - 1 > 0 \\ 2x - 1 < x^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2x - 1 > 0 \\ x^2 - 2x + 1 > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Posons } \begin{cases} x > 0 \\ 2x - 1 > 0 \\ x^2 - 2x + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2x - 1 = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

$x$	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$x$		0			+
$2x - 1$		0			+
$x^2 - 2x + 1$		0		0	+

Donc pour que  $\sqrt{2x - 1} - x < 0$ , il faut que  $x \geq 1$

Donc si  $x \geq 1$  alors  $f(x) - y < 0$

D'où si  $x \geq 1$  alors  $(\mathcal{T})$  est au-dessus de  $(\mathcal{C}_f)$

5 a Montrons que  $\forall x \in ]-\infty, 1[, f'(x) = \frac{2x[u(x) - 1]}{(x^2 + 1)^2}$

$$\forall x \in ]-\infty, 1[, f(x) = \frac{2(x^3 + 1)}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{2x(3x^2(x^2 + 1) - 2x(x^3 + 1))}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{2x[3x(x^2 + 1) - 2x(x^3 + 1)]}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{2x[3x^3 + 3x - 2x^4 - 2x]}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{2x[x^3 + 3x - 1 - 1]}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\forall x \in ]-\infty, 1[, f'(x) = \frac{2x[u(x) - 1]}{(x^2 + 1)^2} \text{ cqd.}$$

b Calculons  $f'(x)$  pour  $x \in [1, +\infty[$

$$f(x) = 1 + \sqrt{2x - 1}$$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x - 1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x - 1}}$$

$$\text{Donc } \forall x \in [1, +\infty[, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - 1}}$$

c Le signe de  $f'(x)$  sur  $\mathbb{R}$

Sur  $]-\infty; 1[, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - 1}}$

Le signe de  $f(x)$  dépend du numérateur.

D'après la réponse à la question d) de la partie A, on a :  $\begin{cases} \forall x \in ]-\infty, \beta[, \mu(x) - 1 < 0 \\ \forall x \in [\beta, +\infty[, \mu(x) - 1 > 0 \end{cases}$

$x$	$-\infty$	$0$	$\beta$	$1$	$+\infty$
$2x$	-	0	+	+	
$\mu(x) - 1$	-	-	0	+	
$2x[\mu(x) - 1]$	+	0	-	0	+

Finalement

- Si  $x \in ]-\infty, 0[ \cup ]\beta, 1[, f'(x) > 0$   
donc  $f$  est croissante.
- Si  $x \in ]0, \beta[, f'(x) < 0$   
donc  $f$  est décroissante.

Sur  $[1, +\infty[, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$

$\forall x \in [1, +\infty[, f'(x) > 0$

Donc  $f$  est croissante sur  $[1, +\infty[$ .

#### d Tableau de variation

$x$	$-\infty$	$0$	$\beta$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	2	$f(\beta)$	2	$+\infty$

Limites aux bornes de  $D_f = \mathbb{R}$

En  $-\infty$  :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2(x^3 + 1)}{x^2 + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 2}{x^2 + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x \\ &= -\infty \end{aligned}$$

En  $+\infty$  :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \sqrt{2x - 1}) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

#### 6 a Les Bandes Asymptotiques

En  $-\infty$  :

Puisque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ , cherchons  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ .

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2(x^3+1)}{x^2+1}}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 2}{x^3 + x} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^3} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ . Donc, cherchons  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x]$ .

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2(x^3+1)}{x^2+1} - 2x \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 2 - 2x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 2 - 2x^3 - 2x}{x^2 + 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + 2}{x^2 + 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{x} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi,  $(C)$  admet une branche parabolique de direction  $y = 2x$ .

En  $+\infty$ :

Puisque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

cherchons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{2x-1}}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - (2x-1)}{x[1 - \sqrt{2x-1}]} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(1-x)}{x\sqrt{1 - \frac{2}{2x-1}}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-1}{x} \times \frac{2}{1 - \sqrt{2x-1}} \right) \\
&= \frac{1}{1} \times \frac{1}{\infty} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi,  $(C)$  admet une branche parabolique de direction  $Ox$ .

### b La courbe $(C)$

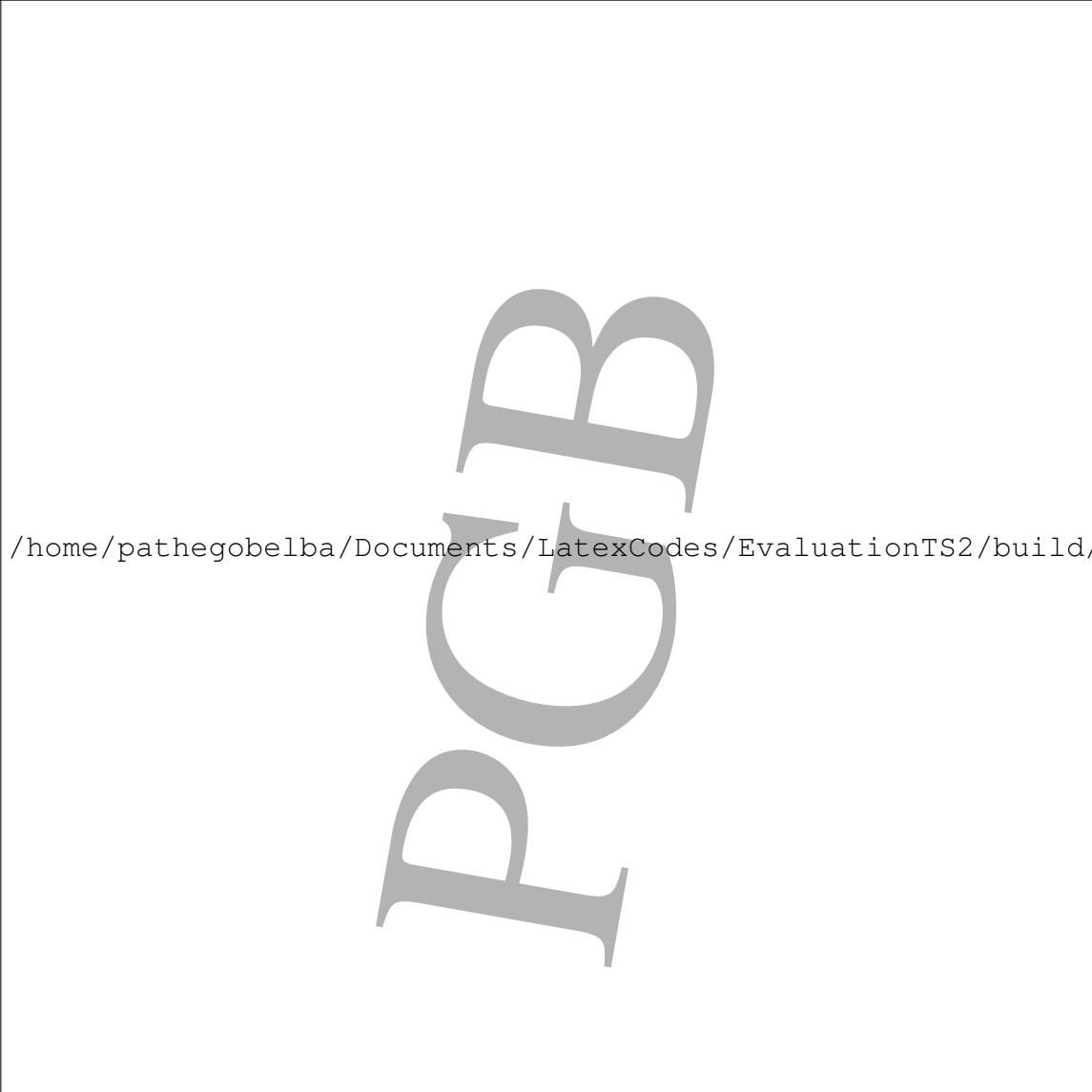


Figure 1: Courbe de (Cf)

[Clique ici pour voir la figure sur géogébra](#)

- 7
- a  $g$  est continue et croissante sur  $[1; \infty[$  donc réalise une bijection de  $[1; \infty[$  vers  $J = [2; \infty[$
  - b Comme  $\forall x \in [1; \infty[, g'(x) \neq 0$  donc  $g^{-1}$  est dérivable sur  $J$  et a même sens de variation que  $g$  donc croissante aussi.
  - c Courbe  $g^{-1}$

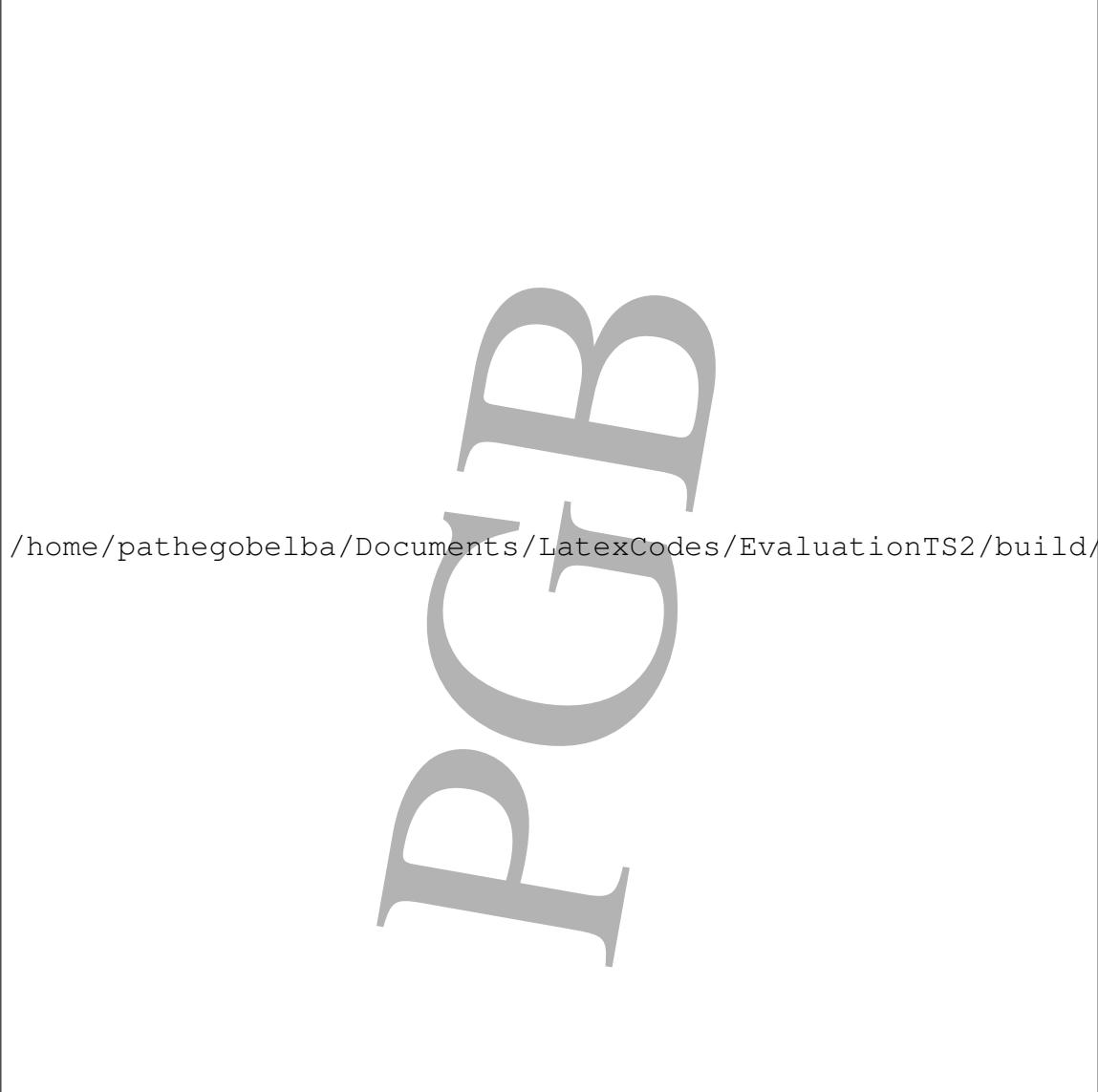


Figure 2: Courbe de (Cf)

[Clique ici pour voir la figure sur géogébra](#)