

Correction du devoir n° 1 Du 1^{er} Semestre

Exercice 1 : $0,5 \times 8 = 4$ points

- 1 Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
- 2 Énoncer le théorème d'existence et d'unicité d'une solution.
- 3 Énoncer le théorème de l'inégalité des accroissements finis (IAF).
- 4 Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$ ($a \neq 0$) alors ...
- 5 Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ alors ...
- 6 Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ alors ...
- 7 Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \beta \in \mathbb{R}^*$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \beta x] = +\infty$ alors ...
- 8 Si f est continue et strictement décroissante sur $] -\infty; b]$, alors $f(] -\infty; b]) = \dots$

Exercice 2 : 4 points

- 1 Calculons les limites suivantes : (3 × 1 pt)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{\sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x (\sqrt{1 + \sin x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{2 \sin 2x}{2x}} \times \frac{1}{(\sqrt{1 + \sin x} + 1)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{\sin 2x} = \frac{1}{4}} \quad 0,25 \text{ points}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^3 + x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2(x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \times \frac{1}{x + 1} \\ &= -\frac{1}{2} \times 1 \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^3 + x^2} = -\frac{1}{2} \quad \mathbf{0,25 \text{ points}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7} - \sqrt{10-x}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x})(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x})(\sqrt{2x+7} - \sqrt{10-x})}{(\sqrt{2x+7} - \sqrt{10-x})(\sqrt{2x+7} + \sqrt{10-x})(\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[x+3 - (5-x)](\sqrt{2x+7} + \sqrt{10-x})}{[2x+7 - (10-x)](\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(-1+x)(\sqrt{2x+7} + \sqrt{10-x})}{3(x-1)(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(\sqrt{2x+7} + \sqrt{10-x})}{3(x-1)(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(\sqrt{2x+7} + \sqrt{10-x})}{3(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x})} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{6}{4} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7} - \sqrt{10-x}} = 1 \quad \mathbf{0,25 \text{ points}}$$

- ② Donnons les primitives des fonctions f et g respectivement sur \mathbb{R} et $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$. ($2 \times 0,5 \text{ pt}$)

$$f(x) = (3x-1)(3x^2-2x+3)^3$$

$$F(x) = \frac{1}{8}(3x^2-2x+3)^4 + k$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \frac{1}{8}(3x^2-2x+3)^4 + k \quad \mathbf{0,25 \text{ points}}$$

$$g(x) = \frac{1-x^2}{(x^3-3x+2)^3}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} G(x) = \frac{1}{3(x^3-3x+2)} + k \quad \mathbf{0,25 \text{ points}}$$

Correction : 12 points

Partie A :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x}.$$

- ① Déterminons D_f . ($0,5 \text{ pt}$) $f \exists$ ssi $x^2 - 2x \geq 0$

$$\text{Posons } x^2 - 2x \geq 0 = 0$$

$$x^2 - 2x \geq 0 = 0 \implies x = 0 \text{ ou } x = 2$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$x^2 - 2x$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\text{Donc } D_f =]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$$

a Les limites en $-\infty$ et en $+\infty$

en $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x} = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty} \quad \mathbf{0,25 \text{ points}}$$

en $+\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-2)^2 - (x^2 - 2x)}{x-2 + \sqrt{x^2 - 2x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 4 - x^2 + 2x}{x-2 + \sqrt{x^2 - 2x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x + 4}{x-2 + \sqrt{x^2 - 2x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(-2 + \frac{4}{x})}{x(1 - \frac{2}{x} + \sqrt{1 - \frac{2}{x}})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-2 + \frac{4}{x})}{(1 - \frac{2}{x} + \sqrt{1 - \frac{2}{x}})} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1} \quad \mathbf{0,25 \text{ points}}$$

b La branche infinie de (\mathcal{C}_f) en $-\infty$

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ Cherchons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x} - \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1 - \frac{2}{x}}}{x} \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 - \frac{2}{x}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 2x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x} - 2x \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x - 2)^2 - (x^2 - 2x)}{(-x - 2) + \sqrt{x^2 - 2x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4x + 4 - (x^2 - 2x)}{(-x - 2) + \sqrt{x^2 - 2x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x + 4}{(-x - 2) + \sqrt{x^2 - 2x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(6 + \frac{4}{x})}{x \left[(-1 - \frac{2}{x}) - \sqrt{1 - \frac{2}{x}} \right]} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(6 + \frac{4}{x})}{\left[(-1 - \frac{2}{x}) - \sqrt{1 - \frac{2}{x}} \right]} \\
&= -3
\end{aligned}$$

Donc (\mathcal{C}_f) admet une asymptote verticale $y = 2x - 2$ au voisinage de $-\infty$

c On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ Donc $y = -1$ est A.H à (\mathcal{C}_f) au voisinage de $-\infty$

- 2 Étudions la dérivabilité de la fonction f à droite de 2 et à gauche de 0, puis interprétons géométriquement les résultats obtenus. (2 pt)

En 2^+ :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x}}{x - 2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{x - 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 2} \\
&= 1 - \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 2} \\
&= 1 - \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(x - 2)}{(x - 2)(\sqrt{x^2 - 2x})} \\
&= 1 - \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2x}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty} \quad \mathbf{0,25 \text{ points}}$$

Interprétation: f n'est pas dérivable en 0 mais admet au point $A(2; 0 = f(2))$ une demi-tangente verticale orientée vers le bas.

En 0^- :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(2)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x} + 2}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - \sqrt{x^2 - 2x}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} \\
 &= 1 - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} \\
 &= 1 - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x - 2)}{x(\sqrt{x^2 - 2x})} \\
 &= 1 - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x - 2)}{\sqrt{x^2 - 2x}}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \quad 0,25 \text{ points}$$

Interprétation: f n'est pas dérivable en 0 mais admet au point $A(0; -2 = f(0))$ une demi-tangente verticale orientée vers le bas.

a Justifions la dérivabilité de la fonction sur $] -\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

$x \mapsto x - 2$ est dérivable sur \mathbb{R} , comme fonction polynome, en particulier sur $] -\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

$x \mapsto -\sqrt{x^2 - 2x}$ est dérivable sur $] -\infty, 0[\cup]2, +\infty[$, comme fonction irrationnelle

Par somme, $x \mapsto x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x}$ est dérivable sur $] -\infty, 0[\cup]2, +\infty[$.

Montrons que pour tout $x \in] -\infty, 0[\cup]2, +\infty[$: $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x} - (x - 1)}{\sqrt{x^2 - 2x}}$. **(1,5 pt)**

En effet $f(x) = x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x}$

$$f'(x) = 1 - \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = 1 - \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{\sqrt{x^2 - 2x} - (x - 1)}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

b Montrons que : $\forall x \in] -\infty, 0[$, $f'(x) > 0$ et $\forall x \in]2, +\infty[$, $f'(x) < 0$. **(1 pt)**

Le signe de f' dépend du numérateur.

Supposons que $\sqrt{x^2 - 2x} - (x - 1) < 0$

$$\sqrt{x^2 - 2x} - (x - 1) < 0 \implies \sqrt{x^2 - 2x} < (x - 1) \implies \begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 2x < (x - 1)^2 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ 0 < 1 \end{cases}$$

$$\text{Posons } \begin{cases} x^2 - 2x = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$x^2 - 2x$	+	0	0	+
$x - 1$	-	0	0	+

x	$-\infty$	6	8	$+\infty$
$f(x)$	-			+
$g(x)$	-			+

Donc pour que $\sqrt{x^2 - 2x} - (x - 1) < 0$ il faut que $x \in]2, +\infty[$

Ainsi, si $x \in]-\infty, 0[$ alors $\sqrt{x^2 - 2x} - (x - 1) > 0$

Donc $\forall x \in]-\infty, 0], f'(x) > 0$ et $\forall x \in]2, +\infty[, f'(x) < 0$

c Dressons le tableau de variations de la fonction f . **(1,25 pt)**

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f'	+		-	
f	-1	$+\infty$	$-\infty$	4

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	
$f(x)$	$-\infty$	-2	0	-1

DevoirCurve.png



Figure 1: Courbe de (Cf)

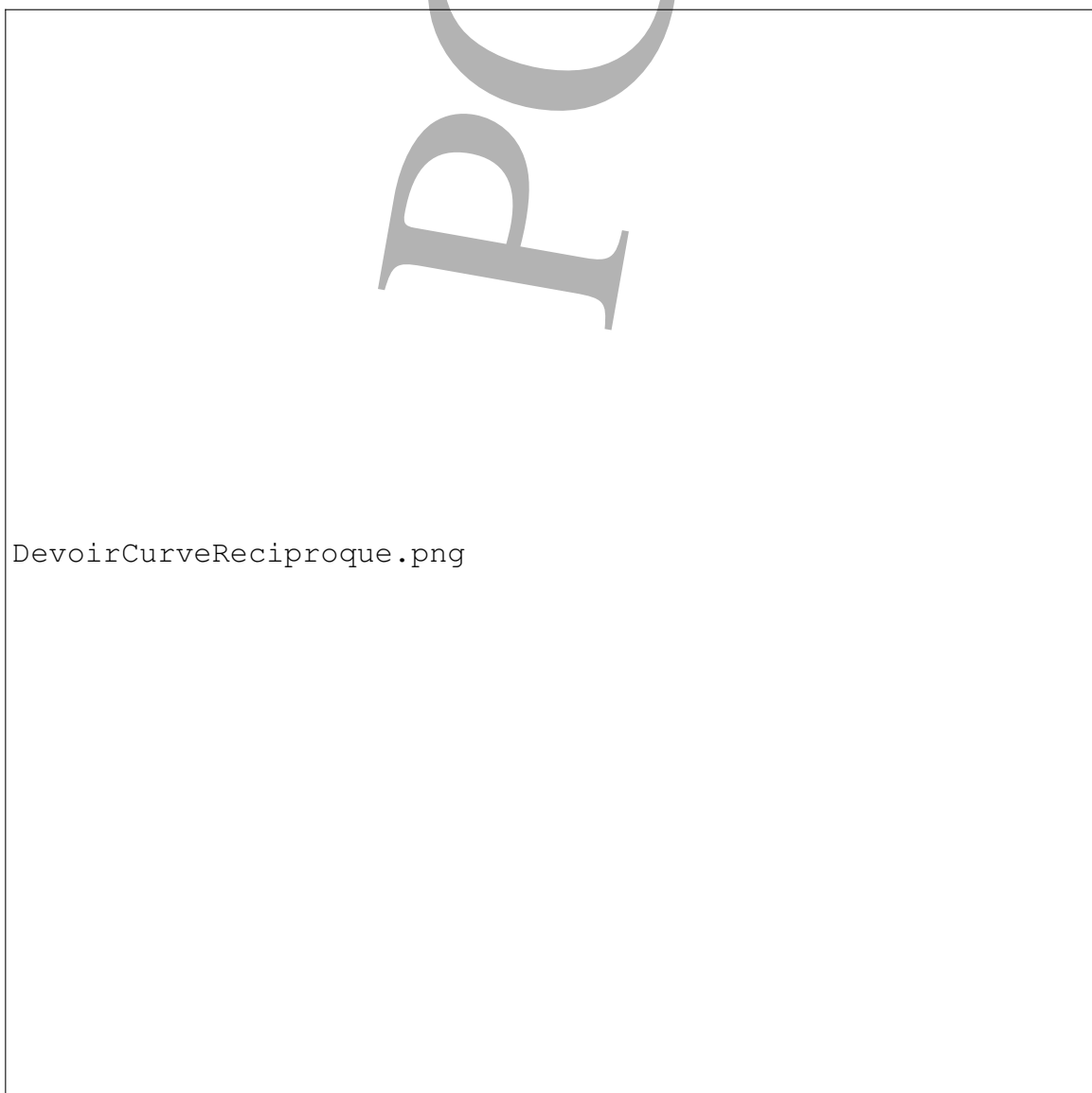
Partie B :

On considère la fonction g la restriction de la fonction f sur $[2, +\infty[$:

- a** Montrons que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera . **(0,5 pt)**
 g est continue et strictement décroissante sur $[2, +\infty[$ vers $[-1, 0]$ donc g est bijectif.
Donc admet aussi une bijection réciproque de $[-1, 0]$ vers $[2, +\infty[$
- b** Calculons $g^{-1}(2 - 2\sqrt{2})$. (On donne : $g(4) = (2 - 2\sqrt{2})$. **(0,75 pt)**
 $g(4) = (2 - 2\sqrt{2}) \implies g^{-1}(2 - 2\sqrt{2}) = 4$
- c** Déterminons $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$. **(0,5 pt)**
Pour déterminer $g^{-1}(x)$, résolvons $g(x) = y$

$$\begin{aligned}
g(x) = y &\implies x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x} = y \implies \sqrt{x^2 - 2x} = x - 2 - y \\
&\implies x^2 - 2x = (x - 2 - y)^2 \\
&\implies x^2 - 2x = (x - 2)^2 - 2(x - 2)y + y^2 \\
&\implies x^2 - 2x = x^2 - 4x + 4 - 2xy + 4y + y^2 \\
&\implies 2x + 2xy = 4 + 4y + y^2 \\
&\implies x(2 + 2y) = 4 + 4y + y^2 \\
&\implies x = \frac{4 + 4y + y^2}{2(1 + y)}
\end{aligned}$$

Donc $g^{-1}(x) = \frac{4 + 4x + x^2}{2(1 + x)}$



DevoirCurveReciproque.png

Figure 2: Courbe de (Cf)

[Clique ici pour voir la figure sur géogébra](#)