Prof : M. BA

Fonction Exponentielle

Classe : TS2

Année scolaire : 2024 – 2025

1.Définition :

La fonction $f(x) = \ln(x)$ est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, donc c'est une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f admet une bijection réciproque f^{-1}, qui est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $]0; +\infty[$.

Cette fonction réciproque est appelée **fonction exponentielle** et est notée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = e^x$$

Elle est caractérisée par la relation :

$$e^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(y).$$

2.Conséquences de la définition

(a) **Image et ensemble de définition :**

- e^x est définie sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans $]0; +\infty[$.
- e^x est toujours strictement positive : $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) **Lien avec le logarithme :**

- $e^{\ln(x)} = x$ pour tout $x > 0$.
- $\ln(e^x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(c) **Comportement aux valeurs remarquables :**

- $e^0 = 1$.
- $e^1 = e \approx 2.718$.

(d) **Monotonie de e^x :**

- La fonction exponentielle est strictement **croissante** sur $\mathbb{R}$, car sa dérivée est toujours positive.

3.Propriétés fondamentales de la fonction exponentielle

Propriété fondamentale

Pour tout réel a et b, on a: $e^{a+b} = e^a \times e^b$.

Autres propriétés :

- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $e^{ra} = (e^a)^r$
- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

4. Limites

(a) **Les limites aux bornes de l'ensemble de définition de e^x:**

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

(b) **Limites Usuelles :**

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

Preuve de quelques limites

Exercice d'application

Déterminer les limites suivantes:

Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3e^x-2}{5e^x+3}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{e^x}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-e^x)$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin 2x}{1-e^x}$

6.Limites des composées avec exp

Propriété

Soit U une fonction dérivablesur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

La fonction $\exp\circ u$ est dérivable sur I et on a: $(\exp\circ u)' = u' \times \exp\circ u$

NB

La fonction $\exp\circ u$ est généralement notée e^u ; sa dérivée est alors $u'e^u$.

Exemple

Calcule la limite suivante

Solution

7.Dérivée

Soit u et v deux fonctions strictement positives

Exemple

Déterminer les limites suivantes:

- La fonction $x \longmapsto e^{-x^2+x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction
- La fonction $x \longmapsto e^{\cos x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction
- La fonction $x \longmapsto e^{\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est la fonction

8.Croissance Comparée de $\ln x$ e^x x^α

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Remarque

Exemple

Détermine: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{\ln(x^2+1)}$

9.Equation système et Inequation avec exp

a°)Equation

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

a)$e^x = -1$;

b)$e^{x+1} = 3$;

c)$e^{x^2} = e^{x+2}$;

d)$(e^x - 2)(e^{-x} + 1)$

b°)Système d'inéquations avec exp:

$$\begin{cases} 4e^x - 3e^y = 9 \\ 2e^x + e^y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^x e^y = 10 \\ e^{x-y} = \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{2x} - 7e^{y+1} = -10 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

c°)Inéquations avec exp:

a)$e^{-x} \geq 2$

b)$e^{x^2-3} \leq e^{2x}$

c)$2e^{2x} - 5e^x + 2 > 0$

10.Etude le fonction exp

Soit $f(x) = exp(x)$ le domaine

Le Domaine D_f

$D_f = \mathbb{R}$

$\bigotimes$ Limites aux bornes de D_f

En $-\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

En $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

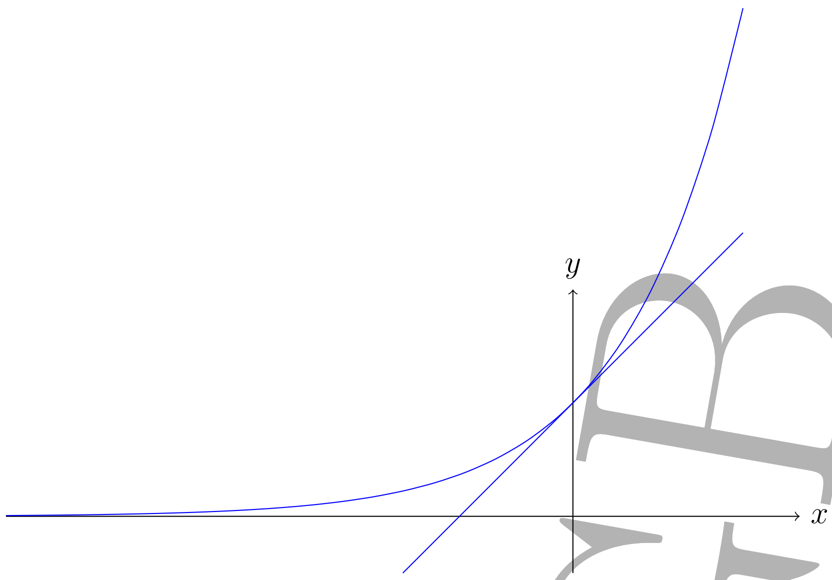
$\bigotimes$ La dérivée de f

$f'(x) = e^x$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$, donc f est croissante sur $]0; +\infty[$

$\bigotimes$ Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$			
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



C_f est au-dessous de sa tangente en J; donc $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > x+1$

11.Branche infinie de ln

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
Nous avons ainsi une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$.
Car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln(x)}{x} = 0$

12.Application