Td Calcul vectoriel

Echauffement :

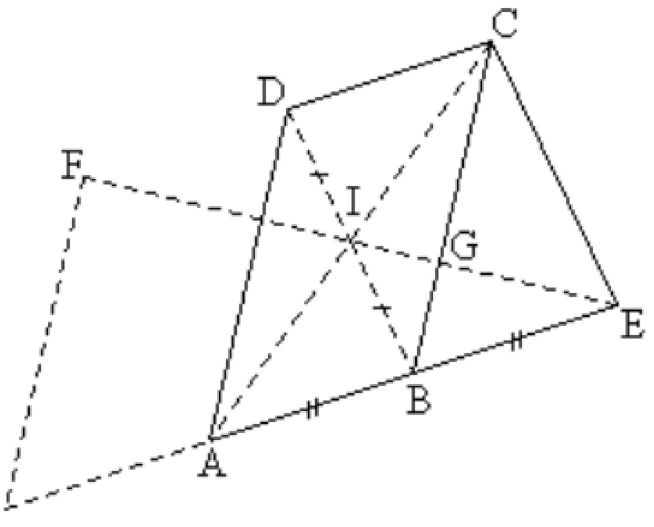
ABC est un triangle ; I milieu de $[AB]$, $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$.

1. Faire la figure.
2. Montrer que I, J et K sont alignés.

Exercice 1 Soit $ABCD$ un parallélogramme.

1. Construire les points H, K et E définis par $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AK} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{8}\overrightarrow{BD}$.
2. Démontrer que (KH) est parallèle à (AC) puis, montrer que $E \in (KH)$.

Exercice 2 Dans la figure ci-dessous $ABCD$ est un parallélogramme de centre I, B est le milieu du segment $[AE]$, G est le centre de gravité du triangle ACE et $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$.



1. Déterminer les relations reliant $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{CB}$ puis $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EG}$.
2. Calculer $\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF}$, puis montrer que E, G, I et F sont alignés.

ABC est un triangle quelconque.

1. Construire M et N tels que : $\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$
2. Démontrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
3. Soit S et T les milieux respectifs de $[BC]$ et $[MN]$. Démontrer que A, S et T sont alignés.

Exercice 3 Soit ABC un triangle tel que : $AB = 3,5\text{cm}$; $AC = 4\text{cm}$ et $BC = 4,5\text{cm}$.

1. Faire une figure.
2. Placer les points E, F et I définis par :
$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \quad \text{et } I \text{ milieu de } [AC]$$
3. Démontrer que : $\overrightarrow{IF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
4. a. Exprimer $\overrightarrow{IF}$ en fonction de $\overrightarrow{AE}$.
   b. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{AE}$.

Exercice 4 Soit $ABCD$ un parallélogramme.

1. Placer les points M, N, P et Q tels que : $2\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$; $2\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{BC}$; $2\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{CD}$ et $2\overrightarrow{DQ} = 3\overrightarrow{DA}$.
2. Exprimer $\overrightarrow{BM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DP}$ en fonction $\overrightarrow{DC}$.
3. a. Exprimer $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{QP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$
   b. En déduire la nature du quadrilatère $MNPQ$

Exercice 5

Soit $ABCD$ un parallélogramme quelconque.

1. Construire les points I ; J ; K et L définis par : I et J milieux respectifs de $[AB]$ et $[AD]$; $4\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ et $6\overrightarrow{CL} - \overrightarrow{CB} = \vec{0}$.

2. Démontrer que les droites (BD) et (IJ) sont parallèles.

3. L'objectif est de montrer que les points I ; K et L sont alignés.

   a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{KI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

   b. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{KL}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

   c. Conclure.

Exercice 6 Soit ABC un triangle quelconque, I milieu de $[BC]$.

1. Construire les points D et E définis par :

$$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

2. Soit J le milieu du segment $[DE]$.

   a. Démontrer que $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AI}$

   b. Démontrer que $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$

   c. Que peut-on en déduire pour les points A, I et J ?

Exercice 7
Soit ABC un triangle quelconque, A' milieu de $[BC]$ et B' milieu de $[AC]$; O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et G son centre de gravité.

1. Placer le point H tel que :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

2. Montrer que : $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{OB'}$. Que représente H pour le triangle ABC ?

3. Quelle est la nature du quadrilatère $AHA'O$?

4. Démontrer que $G \in (OH)$.

Exercice 8 Soit ABC un triangle quelconque, I milieu de $[BC]$.

1. Construire les points D et E définis par :

$$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

2. Soit J le milieu du segment $[DE]$.

   a. Démontrer que $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AI}$

   b. Démontrer que $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$

   c. Que peut-on en déduire pour les points A, I et J ?

Exercice 9 Soit ABC un triangle quelconque, A' milieu de $[BC]$ et B' milieu de $[AC]$; O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et G son centre de gravité.

1. Placer le point H tel que :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

2. Montrer que : $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{OB'}$. Que représente H pour le triangle ABC ?

3. Quelle est la nature du quadrilatère $AHA'O$?

4. Démontrer que $G \in (OH)$.

Exercice 10
Étant donné ABC est un triangle quelconque ; E et F les points tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{9}\overrightarrow{AC}$$

1. Faire la figure

2. Montrer que A, E et F sont alignés

3. Soit G et H les points tels que : $\overrightarrow{CG} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

   a. Exprimer $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BH}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

   b. En déduire que B, G et H sont alignés.

Exercice 11 ABC un triangle. Soit M et N deux points définis par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

1. Placer les points M et N sur une figure.

2. Montrer que les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Exercice 12 Soit ABC un triangle, M et N les points définis par : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + (1-k)\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = (1-k)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ avec $k \in \mathbb{R}$

1. Faire une figure pour $k = 2$

2. Montrer que pour tout réel k les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires

3. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles

   a. $M = N$

   b. $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

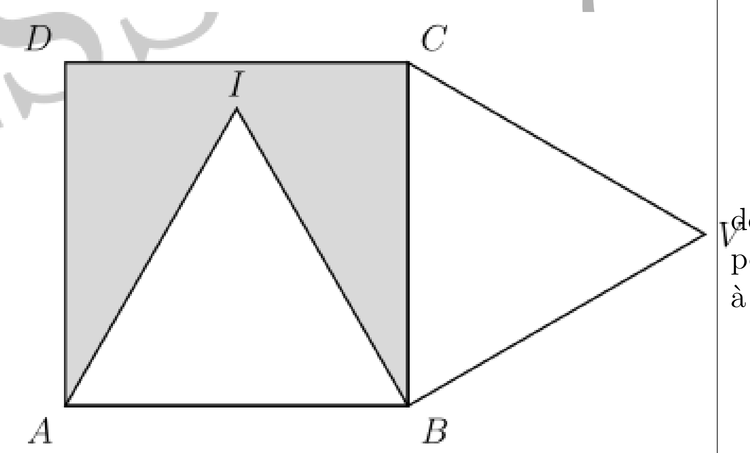
   c. $2\overrightarrow{MN} - 3\overrightarrow{BC} = \vec{0}$

   d. $BCNM$ est un parallélogramme

   e. $BCMN$ est un parallélogramme

   f. $BC = MN$

Exercice 13



À l'occasion d'un concours de logo organiser dans leur établissement, des élèves d'une classe de 2nde S de ISAK ont été déclarés lauréat grâce à la figure ci-dessus qu'elles ont produite. Sur cette figure, $ABCD$ est un carré, AIB et BCV sont des triangles équilatéraux. Selon le jury, ces jeunes filles ont remporté le premier prix grâce à l'harmonie des couleurs mais surtout grâce à l'exactitude de leur figure qui, en conformité avec les indications données, présente les points D, I et V alignés.

Un groupe concurrent pas convaincu de l'alignement de ces trois points, veut en avoir le coeur net. Il sollicite ton aide.

En tant qu'élève en seconde S, en t'appuyant sur tes connaissances en mathématiques, sur les vecteurs, prouve qu'au-de-la du tracé de la droite (DV), les points D, I et V sont bel et bien alignés.

Exercice 14 Soit $ABCD$ un trapèze tel que $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD}$, k est un nombre réel et M le point défini par : $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ se projette en K sur (AC) et en N sur (CD) parallèlement à (BC).

1. Montrer que $\overrightarrow{MK} = 2k\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{NK} = (1 - k)\overrightarrow{AD}$.

2. Déterminer le réel k pour que k soit le milieu de $[MN]$.

3. Déterminer le réel k pour que $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$.

Exercice 15 Soit $ABCD$ un trapèze tel que $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD}$, k est un nombre réel et M le point défini par : $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ se projette en K sur (AC) et en N sur (CD) parallèlement à (BC).

1. Montrer que $\overrightarrow{MK} = 2k\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{NK} = (1 - k)\overrightarrow{AD}$.

2. Déterminer le réel k pour que k soit le milieu de $[MN]$.

3. Déterminer le réel k pour que $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$.

Exercice 16

Soit IJK un triangle. On note A le symétrique de K par rapport à J, B le symétrique de I par rapport à K et enfin C le symétrique de J par rapport à I.

1. a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$ puis $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AC}$.

   b. Exprimer $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AK}$.

   c. En déduire des résultats précédents que : $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{7}(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

2. Soit P le point défini par : $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Placer P et exprimer $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

   En déduire des questions **1.** et **2.** que les points A, K, J et P sont alignés.

3. Soit Q le point défini par : $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

   a. Exprimer $\overrightarrow{BQ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ puis $\overrightarrow{BK}$ en fonction de $\overrightarrow{BI}$.

   b. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

   c. En déduire des résultats précédents que : $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{7}(2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC})$, en déduire de même que les points B, K, I et Q sont alignés.