Td Calcul vectoriel

Echauffement :

ABC est un triangle ; I milieu de $[AB]$, $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$.

1. Faire la figure.
2. Montrer que I, J et K sont alignés.

Exercice 1 Soit $ABCD$ un parallélogramme.

1. Construire les points H, K et E définis par
$\overrightarrow{AH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AK} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{8}\overrightarrow{BD}$.
2. Démontrer que (KH) est parallèle à (AC) puis, montrer que $E \in (KH)$.

Exercice 2 Dans la figure ci-dessous $ABCD$ est un parallélogramme de centre I, B est le milieu du segment $[AE]$, G est le centre de gravité du triangle ACE et $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$.

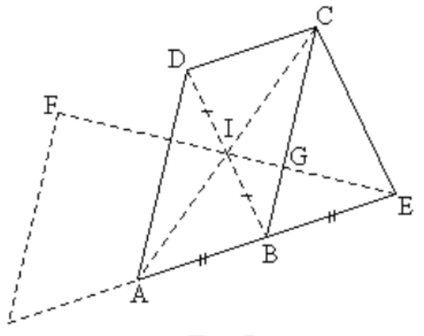

Figure 1: Courbe de (Cf)

1. Déterminer les relations reliant $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{CB}$ puis $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EG}$.
2. Calculer $\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF}$, puis montrer que E, G, I et F sont alignés.

Exercice 3 ABC est un triangle quelconque.

1. Construire M et N tels que :
$\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$
2. Démontrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
3. Soit S et T les milieux respectifs de $[BC]$ et $[MN]$. Démontrer que A, S et T sont alignés.

Exercice 4 Soit ABC un triangle tel que : $AB = 3,5$cm ; $AC = 4$cm et $BC = 4,5$cm.

1. Faire une figure.
2. Placer les points E, F et I définis par :
$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et I milieu de $[AC]$
3. Démontrer que : $\overrightarrow{IF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

et $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

4. a. Exprimer $\overrightarrow{IF}$ en fonction de $\overrightarrow{AE}$.
   b. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{AE}$.

Exercice 5 Soit $ABCD$ un parallélogramme.

1. Placer les points M, N, P et Q tels que : $2\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$; $2\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{BC}$; $2\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{CD}$ et $2\overrightarrow{DQ} = 3\overrightarrow{DA}$.
2. Exprimer $\overrightarrow{BM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DP}$ en fonction $\overrightarrow{DC}$.
3. a. Exprimer $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{QP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$
   b. En déduire la nature du quadrilatère $MNPQ$

Exercice 6
Soit $ABCD$ un parallélogramme quelconque.

1. Construire les points I ; J ; K et L définis par : I et J milieux respectifs de $[AB]$ et $[AD]$; $4\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ et $6\overrightarrow{CL} - \overrightarrow{CB} = \vec{0}$.
2. Démontrer que les droites (BD) et (IJ) sont parallèles.
3. L'objectif est de montrer que les points I ; K et L sont alignés.
   a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{KI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
   b. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{KL}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
   c. Conclure.

Exercice 7 Soit ABC un triangle quelconque, I milieu de $[BC]$.

1. Construire les points D et E définis par :
$$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$
2. Soit J le milieu du segment $[DE]$.
   a. Démontrer que $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AI}$
   b. Démontrer que $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$
   c. Que peut-on en déduire pour les points A, I et J ?

Exercice 8
Soit ABC un triangle quelconque, A' milieu de $[BC]$ et B' milieu de $[AC]$; O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et G son centre de gravité.

1. Placer le point H tel que :
$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$
2. Montrer que : $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{OB'}$. Que représente H pour le triangle ABC ?
3. Quelle est la nature du quadrilatère $AHA'O$?
4. Démontrer que $G \in (OH)$.

Exercice 9 Soit ABC un triangle quelconque, I milieu de $[BC]$.

1. Construire les points D et E définis par :
$$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$
2. Soit J le milieu du segment $[DE]$.
   a. Démontrer que $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AI}$
   b. Démontrer que $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$
   c. Que peut-on en déduire pour les points A, I et J ?

Exercice 10 Soit ABC un triangle quelconque, A' milieu de $[BC]$ et B' milieu de $[AC]$; O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et G son centre de gravité.

1. Placer le point H tel que :
$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$
2. Montrer que : $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{OB'}$. Que représente H pour le triangle ABC ?
3. Quelle est la nature du quadrilatère $AHA'O$?
4. Démontrer que $G \in (OH)$.

Exercice 11
Étant donné ABC est un triangle quelconque ; E et F les points tels que :
$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{9}\overrightarrow{AC}$$

1. Faire la figure
2. Montrer que A, E et F sont alignés
3. Soit G et H les points tels que : $\overrightarrow{CG} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.
   - a. Exprimer $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BH}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   - b. En déduire que B, G et H sont alignés.

Exercice 12 ABC un triangle. Soit M et N deux points définis par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

1. Placer les points M et N sur une figure.
2. Montrer que les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Exercice 13 Soit ABC un triangle, M et N les points définis par : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + (1-k)\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = (1-k)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ avec $k \in \mathbb{R}$

1. Faire une figure pour $k = 2$
2. Montrer que pour tout réel k les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires
3. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles
   - a. $M = N$
   - b. $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
   - c. $2\overrightarrow{MN} - 3\overrightarrow{BC} = \vec{0}$
   - d. $BCNM$ est un parallélogramme
   - e. $BCMN$ est un parallélogramme
   - f. $BC = MN$