Linéarisation

A.DIAO

Année scolaire 2025-2026

On linéarise $(\cos x)^5$ en utilisant les nombres complexes.

Rappel (formule d'Euler) :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Écriture complexe :

$$(\cos x)^5 = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}(e^{ix} + e^{-ix})^5$$

Développement :

$$(e^{ix} + e^{-ix})^5 = e^{5ix} + 5e^{3ix} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} + e^{-5ix}$$

Regroupement en cosinus :

$$e^{ikx} + e^{-ikx} = 2\cos kx$$

Ainsi,

$$(e^{ix} + e^{-ix})^5 = 2\cos 5x + 10\cos 3x + 20\cos x$$

Expression finale :

$$(\cos x)^5 = \frac{1}{32}\big(2\cos 5x + 10\cos 3x + 20\cos x\big) = \frac{1}{16}\cos 5x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{5}{8}\cos x$$

$$\boxed{(\cos x)^5 = \frac{1}{16}\cos 5x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{5}{8}\cos x}$$

++

On linéarise $(\sin x)^3$ en utilisant les nombres complexes.

Rappel (formule d'Euler) :

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Écriture complexe :

$$(\sin x)^3 = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{1}{8i^3}(e^{ix} - e^{-ix})^3$$

Développement :

$$(e^{ix} - e^{-ix})^3 = e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix} = (e^{3ix} - e^{-3ix}) + 3(e^{ix} - e^{-ix})$$

Regroupement en sinus :

$$e^{ikx} - e^{-ikx} = 2i \sin kx$$

Ainsi,

$$(e^{ix} - e^{-ix})^3 = 2i \sin 3x + 6i \sin x$$

Expression finale :

$$(\sin x)^3 = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$$

$$\boxed{(\sin x)^3 = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x}$$

++++++++++++++++++++++++++++++++++

On linéarise $(\sin x)^4$ en utilisant les nombres complexes.

Rappel (formule d'Euler) :

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Écriture complexe :

$$(\sin x)^4 = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16}(e^{ix} - e^{-ix})^4$$

Développement :

$$(e^{ix}-e^{-ix})^4 = e^{4ix}-4e^{2ix}+6-4e^{-2ix}+e^{-4ix} = (e^{4ix}+e^{-4ix})-4(e^{2ix}+e^{-2ix})+6$$

Regroupement en cosinus :

$$e^{ikx} + e^{-ikx} = 2\cos kx$$

Ainsi,

$$(e^{ix} - e^{-ix})^4 = 2\cos 4x - 8\cos 2x + 6$$

Expression finale :

$$(\sin x)^4 = \frac{1}{16}(2\cos 4x - 8\cos 2x + 6) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$\boxed{(\sin x)^4 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x}$$