BAC 2025

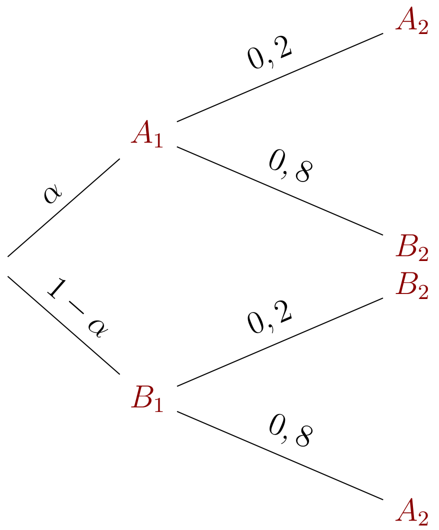
Matière: Mathématiques | **Niveau : TS1**

Correction

Exercice 1 :(04.75 pts)

Partie I : (02,5 points)

Construisons un arbre pondère correspondant à cette épreuve.



1. Déterminons la valeur de α

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(A_2) \\ &= \alpha \times 0,2 + (1-\alpha) \times 0,8 \\ &= 0,2\alpha + 0,8 - 0,8\alpha \\ &= -0,6\alpha + 0,8 \end{aligned}$$

Si $P(A_1) = P(A_2) \implies \alpha = -0,6\alpha + 0,8$

$$\implies 1,6\alpha = 0,8$$

$$\alpha = \frac{0,8}{1,6}$$

$$\alpha = 0,5$$

(01 point)

2. Calculons la probabilité qu'un athlète se rende au même stade pendant les deux jours.

A_1 : « l'athlète choisit le stade A le 1^{er}jour »

B_1 : « l'athlète choisit le stade B le 1^{er}jour »

A_2 : « l'athlète choisit le stade A le 2^{er}jour »

B_2 : « l'athlète choisit le stade B le 2^{er}jour »

Un athlète se rende au même stade pendant les deux jours se traduit par: $A_1 \cap A_2$ ou $B_1 \cap B_2$

$$
\begin{aligned}
P((A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2)) &= P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap B_2)\\
&= P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(B_2)\\
&= 0,5 \times 0,2 + 0,5 \times 0,2\\
&= 0,1 + 0,1\\
&= 0,2
\end{aligned}
$$

$\boxed{P((A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2)) = 0,2}$ **(0,75 point)**

3. Au deuxième jour, on aperçoit un athlète sortant du stade B. La probabilité qu'il se soit entraîné au même stade la veille

Se traduit par : entrer dans B deux jours successifs, c'est-à-dire : B_1 *sachant* B_2

$$
\begin{aligned}
P_{B_2}(B_1) &= \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)}\\
&= \frac{P(B_1) \times P_{B_1}(B_2)}{P(A_1) \times P_{A_1}(B_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(B_2)}\\
&= \frac{0,5 \times 0,2}{0,5 \times 0,8 + 0,5 \times 0,2}\\
&= \frac{0,1}{0,4 + 0,1}\\
&= \frac{0,1}{0,5}\\
&= 0,2
\end{aligned}
$$

$\boxed{P_{B_2}(B_1) = 0,2}$ **(0,75 point)**

Partie II : (02,25 points)

1. La probabilité qu'il y ait deux athlètes heureux

Il ne peut pas y avoir deux athlètes heureux car il ya au moins 3 athlètes donc l'un des stades sera occupé par au moins deux athlètes

$\boxed{\text{La probabilité qu'il y ait deux athlètes heureux est nulle}}$ **(0,5 point)**

2. Un athlète est heureux s'il est seul dans un stade. On note la probabilité que cela arrive parmi n athlètes :

Pour un athlète donné, l'épreuve qui consiste à choisir un stade est une **épreuve de Bernoulli** dont la probabilité du succès (le stade A) est $0,5$.

a. Cette épreuve étant effectuée n fois de suite (par les n athlètes) et de manière indépendante, on a un **schéma de Bernoulli**.

On a deux cas :

- Un athlète se présente dans le stade A et $n-1$ athlètes dans le stade B : 1 succès ;
- Un athlète se présente dans le stade B et $n-1$ athlètes dans le stade A : $n-1$ succès.

La probabilité qu'il y ait un athlète heureux parmi ces n athlètes est :

$$
p_n = C_n^1 (0{,}5)^1 (1-0{,}5)^{n-1} + C_n^1 (0{,}5)^{n-1}(1-0{,}5)^1 = 2n \cdot (0{,}5)^n = \frac{n}{2^{n-1}}
$$

$$\boxed{p_n = \frac{n}{2^{n-1}}} \quad \textbf{(0,75 pt)}$$

Autre Approche

Remarque : si on voulait le voir comme une variable aléatoire

On peut modéliser le choix de chaque athlète comme une variable aléatoire de Bernoulli :

- On note X le nombre d'athlètes qui choisissent le stade A,
- Chaque athlète a une probabilité $\frac{1}{2}$ de choisir A ou B,
- Donc $X \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$, c'est-à-dire une loi binomiale.

Un athlète est **heureux** s'il est **seul** dans un stade, ce qui correspond à :

$$\text{un seul athlète dans } A \quad \text{ou} \quad \text{un seul athlète dans } B$$

Autrement dit :

$$p_n = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = n-1)$$

Avec la loi binomiale :

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Donc :

$$p_n = \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{n-1}\right]\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2n}{2^n}$$

Et comme :

$$2^n = 2\cdot 2^{n-1} \Rightarrow \frac{2n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

$$\boxed{p_n = \frac{n}{2^{n-1}}}\textbf{(0,75 point)}$$

b Étudions la variation de la suite $(p_n)_{n\geq 3}$. **(0,5 point)**

$p_n = \dfrac{n}{2^{n-1}}$

On a

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= \frac{(n+1)}{2^n} - \frac{n}{2^{n-1}} \\ &= \frac{n+1}{2^n} - \frac{n}{2^{n-1}} \\ &= \frac{n+1}{2^n} - \frac{2n}{2^n} \\ &= \frac{-n+1}{2^n} \end{aligned}$$

Donc $p_{n+1} - p_n = \dfrac{-n+1}{2^n}$

Comme $n \geq 3$ alors $-n+1 < 0$ donc $\dfrac{-n+1}{2^n} < 0$ d'où $\forall n \geq 3$, $p_n < 0$

Ainsi la suite (p_n) est décroissante

La convergence de la suite

$$p_n = \frac{n}{2^{n-1}} \implies p_n = \frac{2n}{2^n}$$
$$\implies p_n = \frac{2n}{e^{\ln(2^n)}}$$
$$\implies p_n = \frac{2n}{e^{n\ln(2)}}$$
$$\implies p_n = \frac{2}{\ln(2)} \times \frac{n\ln(2)}{e^{n\ln(2)}}$$

Donc $p_n = \dfrac{2}{\ln(2)} \times \dfrac{n\ln(2)}{e^{n\ln(2)}}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} p_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\ln(2)} \times \frac{n\ln(2)}{e^{n\ln(2)}}\\ &= \frac{2}{\ln(2)} \times \lim_{n\to+\infty} \frac{n\ln(2)}{e^{n\ln(2)}}\\ &= \frac{2}{\ln(2)} \times 0\\ &= 0\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$ donc la suite $(p_n)_{n\geq 3}$ converge vers 0

c Calculons p_{10}

$$\begin{aligned}p_n &= \frac{n}{2^{n-1}}\\ p_{10} &= \frac{10}{2^{10-1}}\\ &= \frac{10}{2^9}\\ &= \frac{5}{2^8}\end{aligned}$$

$$\boxed{p_{10} = \frac{5}{2^8} \approx 0,019}$$

(0,25 point)

Déterminons la plus grande valeur de n pour laquelle la probabilité d'avoir un athlète heureux est supérieur à $0,005$. **(0,25 point)**

La suite (p_n) étant strictement décroissante, on va chercher la plus grande valeur de n supérieur à 10 telles que p_n reste supérieur à $0,005$

$$p_n = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Calculs :

$$p_{11} = \frac{11}{2^{10}} \approx 0,01 > 0,005$$
$$p_{12} = \frac{12}{2^{11}} \approx 0,0059 > 0,005$$
$$p_{13} = \frac{13}{2^{12}} \approx 0,0031 < 0,005$$

Conclusion : La plus grande valeur de n pour laquelle la probabilité d'avoir un athlète heureux soit supérieur à $0,005$ est 12.

$$\boxed{n = 12}$$

Exercice 2 :(04,25 pts)

Soient (Δ_1) et (Δ_2) deux droites distinctes de l'espace.
On note R_1 et R_2 les demi-tours d'axes respectifs (Δ_1) et (Δ_2).

Le but de cet exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur (Δ_1) et (Δ_2) pour que : $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

1. **On suppose que (Δ_1) et (Δ_2) sont perpendiculaires en un point noté O.**

   On adoptera les notations suivantes :

   - Le plan contenant (Δ_1) et (Δ_2) est noté (P).
   - La droite perpendiculaire en O au plan (P) est notée (Δ).
   - Le plan contenant (Δ) et (Δ_1) est noté (P_1).
   - Le plan contenant (Δ) et (Δ_2) est noté (P_2).
   - Les réflexions par rapport aux plans $(P), (P_1), (P_2)$ sont respectivement notées S_P, S_{P_1}, S_{P_2}.

   a. Faisons une figure en faisant apparaître clairement le point O, les plans $(P), (P_1), (P_2)$ ainsi que les droites $(\Delta), (\Delta_1), (\Delta_2)$. **(0,75 point)**

   La figure, voir ce qui suit

   b. Déterminons $S_p \circ S_{p_1}$ et $S_{p_2} \circ S_p$

   La transformation $S_p \circ S_{p_1}$ est la rotation d'axe $(P) \cap (P_1) = \Delta_1$ et d'angle $2 \times$ [l'angle formé par (P) et (P_1)] $= 2 \times \dfrac{\pi}{2} = \pi$

   C'est donc le demi-tour d'axe Δ_1 c'est à dire R_1 **(0,5 point)**

   La transformation $S_{p_2} \circ S_p$ est la rotation d'axe $(P) \cap (P_2) = \Delta_2$ et d'angle $2 \times$ [l'angle formé par (P) et (P_2)] $= 2 \times \dfrac{\pi}{2} = \pi$

   C'est donc le demi-tour d'axe Δ_2 c'est à dire R_2 **(0,5 point)**

   c. En déduire que $R_2 \circ R_1$ est un demi-tour dont on précisera l'axe.