Problèmes proposés au BAC S2 Sénégal de 1999 à 2022

Problème 1 Extrait BAC 1999 1^{er} groupe On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| & \text{si } x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\\ x^2e^{-x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, d'unité 2 cm.

Partie A

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f. Calculer $f(-2)$ et $f(3)$.
2. Calculer les limites aux bornes de D_f.
3. Étudier la continuité de f en 0.
4. a. Établir que la dérivée de f est donnée par :
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} \text{si } x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\\ xe^{-x}(2-x) \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$
   b. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Justifier votre réponse.
   c. Dresser le tableau de variations de f.
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α comprise entre $-1{,}6$ et $-1{,}5$.
6. a. Justifier que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C_f) en $-\infty$.
   b. Étudier la position relative de (C_f) par rapport à la droite (D) pour $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 0[$.
   c. Tracer (C_f).

Partie B :

Soit g la restriction de f à $I = [0; 2]$.

1. Montrer que g définit une bijection de I vers un intervalle J à préciser.
2. On note g^{-1} la bijection réciproque de g.
   a. Résoudre l'équation $g^{-1}(x) = 1$.
   b. Montrer que $\left(g^{-1}\right)'\left(\dfrac{1}{e}\right) = e$.
   c. Construire $(C_{g^{-1}})$, la courbe de g^{-1}.

Partie C :

β étant un réel strictement positif, on pose :

$$I(\beta) = \int_0^{\beta} f(x)\,dx$$

1. a. Interpréter graphiquement $I(\beta)$.
   b. En procédant par une intégration par parties, calculer $I(\beta)$.
2. Calculer $\lim\limits_{\beta \to -\infty} I(\beta)$.
3. On pose $\beta = 2$.
   a. Calculer $I(2)$.
   b. En déduire la valeur en cm^2 de l'aire du domaine du plan délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \dfrac{4}{e^2}$.

Problème 2 BAC 1999 Remplacement

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \in]-\infty; 0[\\ \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| & \text{si } x \in [0; 1[\cup]1; +\infty[\end{cases}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 2 cm.

Partie A :

1. Étudier la continuité de f en 0.
2. a. Montrer que $\forall x \in]0; 1[$, $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\ln(1-x)}{x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x}$
   b. Étudier la dérivabilité de f en 0.
   c. En déduire que (C_f) admet au point d'abscisse 0 deux demi-tangentes dont on donnera les équations.
3. Étudier les variations de f.
4. Tracer (C_f).

Partie B :

Soit g la restriction de f à $]1;+\infty[$.

1. Montrer que g est une bijection de $]1;+\infty[$ vers un intervalle J à préciser.
   On notera g^{-1} la bijection réciproque de g.

2. Montrer que l'équation $g(x) = -e$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]1;+\infty[$.
   (On ne demande pas de calculer α).

3. Montrer que $\forall x \in J,\ g^{-1}(x) = 1 - \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.

4. Construire $(C_{g^{-1}})$.
   (On indiquera la nature et l'équation de chacune des asymptotes à (C_g) et $(C_{g^{-1}})$).

5. Calculer en cm^2 l'aire A de l'ensemble des points $M(x;y)$ défini par :

$$\begin{cases} -\ln 7 \leq x \leq -1 \\ 0 \leq y \leq g^{-1}(x) \end{cases}$$

Problème 3

1.