

Correction : Nombres Complexes et Propriétés

Professeur : M. BA

Correction de l'épreuve

Question 1. Définir le conjugué d'un nombre complexe.

Pour un nombre complexe $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$), son conjugué est :

$$\bar{z} = a - ib.$$

Propriétés :

$$z + \bar{z} = 2a, \quad z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Question 2. Définir le module et son interprétation géométrique.

Pour $z = a + ib$, le module est :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Interprétation géométrique : C'est la distance du point associé à z au point $O(0, 0)$ dans le plan complexe.

Question 3. Définir l'argument d'un complexe non nul.

Pour $z = a + ib \neq 0$, un argument de z est un réel θ tel que :

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Ensemble des arguments :

$$\arg(z) = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Question 4. Citer trois propriétés du module et du conjugué.

$$|z| = |\bar{z}|$$

$$|zw| = |z||w|$$

$$|z+w| \leq |z| + |w| \quad (\text{inégalité triangulaire})$$

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$$

Question 5. Citer trois propriétés de l'argument.

$$\arg(zw) \equiv \arg(z) + \arg(w) [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) \equiv \arg(z) - \arg(w) [2\pi]$$

$$\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$$

Autre propriété utile :

$$\arg(\cos \theta + i \sin \theta) = \theta.$$