Correction du devoir n° 1 Du 2$^{\text{er}}$ Semestre

Exercice 1 : 6 points

A) Réponses aux questions de cours

1. Soit z un nombre complexe non nul donné.
   - L'écriture algébrique de z est de la forme : $z = a + ib$, avec a sa partie réelle et b sa partie imaginaire,
   - L'écriture exponentielle de z est de la forme : $z = re^{i\theta}$, avec r son module et θ un de ses arguments,
   - L'écriture trigonométrique de z est de la forme : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, avec r son module et θ un de ses arguments.

2. Soient $K(z_0)$, $M(z)$ et $M'(z')$ et soit r la rotation de centre $K(z_0)$ qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ on a :

$$\begin{cases} KM' = KM \\ (\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KM'}) = \theta \quad [2\pi] \end{cases} \tag{1}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} |z' - z_0| = |z - z_0| \\ \arg \dfrac{z' - z_0}{z - z_0} \equiv \theta \quad [2\pi] \end{cases} \tag{2}$$

D'où

$$z' = e^{i\theta}z + z_0(1 - e^{i\theta})$$

B) Soit $z_0 = 1 - i\sqrt{3}$.

1. Écriture trigonométrique de z_0.
On a $|z_0| = \sqrt{1+3} = 2$,

soit θ un argument de z_0 alors $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ce qui donne $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$ d'où

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

2. Calculons z_0^4

$$z_0^4 = [2(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})]^4 = 16(\cos\frac{4\pi}{3} - i\sin\frac{4\pi}{3}) = 16\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

D'où

$$z_0^4 = -8 + i8\sqrt{3}$$

3 Résolvons l'équation

$$z^4 = 1$$

$$z^4 = 1 \text{ implique } |z|^4 = 1 \text{ et } 4\arg z = 0[2\pi] \text{ ce qui donne}$$

$$|z| = 1 \text{ et } \arg z = k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

d'où l'ensemble des solutions S de l'équation $z^4 = 1$ est

$$S = \{-1; 1; i; -i\}$$

4 Déduisons-en les solutions de l'équation (E) : $z^4 = -8 + i8\sqrt{3}$.

$z^4 = -8 + i8\sqrt{3}$ est équivalent à

$$\frac{z^4}{-8 + i8\sqrt{3}} = 1$$

ce qui est équivalent, d'après B)2), à

$$\left(\frac{z}{1 - i\sqrt{3}}\right)^4 = 1$$

Ce qui donne d'après B)3) les solutions suivantes :

- Sous forme algébrique :

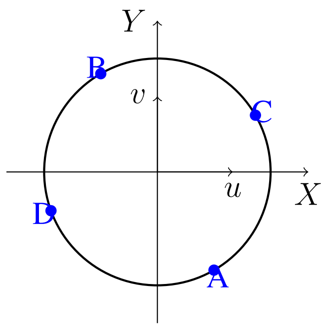
$$z_0 = 1 - i\sqrt{3}, \quad z_1 = -1 + i\sqrt{3}, \quad z_2 = \sqrt{3} + i, \quad z_3 = -\sqrt{3} - i$$

- Sous forme trigonométrique :

$$z_0 = 2(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}), \quad z_1 = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}), \quad z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$$

$$z_3 = 2(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$$

5 Plaçons les points



6 Soit la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$.

D'après A)2) si $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par r alors

$$z' = ze^{i\frac{\pi}{2}}$$

7 Soient les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = z_0$, $z_B = z_1$, $z_C = z_2$ et $z_D = z_3$.

Vérifions que $r(A) = C$.

$$z_A e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = z_C$$

d'où $r(A) = C$.

Vérifions que $r(C) = B$.

$$z_C e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}} e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\frac{4\pi}{6}} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = z_B$$

d'où $r(C) = B$.

Vérifions que $r(B) = D$.

$$z_B e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = z_D$$

d'où $r(B) = D$.

8. $$\begin{aligned} r(A) = C &\implies |z_A| = |z_C|, \\ r(C) = B &\implies |z_C| = |z_B|, \\ r(B) = D &\implies |z_B| = |z_D| \end{aligned}$$

D'où

$$|z_A| = |z_C| = |z_B| = |z_D| = 2$$

Ce qui est équivalent à

$$OA = OB = OC = OD = 2.$$

D'où A, B, C et D sont sur le même cercle (C) de centre O et de rayon 2.

Exercice 2 : 2,25 points

Déterminons les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln \left[\frac{x+1}{x^2+x+1} \right]$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln \left[\frac{x+1}{x^2+x+1} \right] : \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x^2+x+1} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty \end{cases}$ Par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln \left[\frac{x+1}{x^2+x+1} \right] = -\infty$

$$\boxed{\ln \left[\frac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{x^2+x+1}} \right] = -\infty}$$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+2)}{\ln(x+1)}$

PCB

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+2)}{\ln(x+1)} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left[x\left(1+\frac{2}{x}\right)\right]}{\ln\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)+\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)\left[1+\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\ln(x)}\right]}{\ln(x)\left[1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}\right]}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left[1+\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\ln(x)}\right]}{\left[1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}\right]}\\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to+\infty}\frac{\ln(\mathbf{x}+\mathbf{2})}{\ln(\mathbf{x}+\mathbf{1})}=\mathbf{1}$$

3. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x+2}{\ln x+1}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x+2}{\ln x+1} &= \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x\left(1+\frac{2}{\ln x}\right)}{\ln x\left(1+\frac{1}{\ln x}\right)}\\
&= \lim_{x\to0^+}\frac{\left(1+\frac{2}{\ln x}\right)}{\left(1+\frac{1}{\ln x}\right)}\\
&=1
\end{aligned}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to+\infty}\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}^+}\frac{\ln\mathbf{x}+\mathbf{2}}{\ln\mathbf{x}+\mathbf{1}}=\mathbf{1}$$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left[(\sqrt{x})^2\right]}{\sqrt{x}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln\left[\sqrt{x}\right]}{\sqrt{x}}\\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to+\infty}\frac{\ln\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}}}=\mathbf{0}$$

Problème : 11,75 points

Partie A: 2,75 pts

Soit $g(x)=2x\ln(-x)+x+1$.

1. Déterminons l'ensemble de définition D_g de g. **(0,5 pt)**

g existe ssi $-x>0$

$$\begin{aligned}
-x>0 &\implies x<0\\
&\implies x\in]-\infty;0[
\end{aligned}$$

PGB

Donc $Dg =]-\infty; 0[$

$$\mathbf{Dg =]-\infty; 0[} \qquad \textbf{(0,5 pt)}$$

2 Calculons les limites aux bornes de D_g. **(0,5 pt)**

En $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x\ln(-x) + x + 1$$
$$= -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to-\infty} \mathbf{g(x) = -\infty} \qquad \textbf{(0,25 pt)}$$

En 0^-

$$\lim_{x\to0^-} g(x) = \lim_{x\to0^-} 2x\ln(-x) + x + 1$$
$$= \lim_{x\to0^-} -2(-x\ln(-x)) + x + 1$$
$$= 1$$
$$\lim_{x\to0^-} g(x) = 1$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}^-} \mathbf{g(x) = 1} \qquad \textbf{(0,25 pt)}$$

3 Étudions les variations de g. **(1 pt)**

$$\begin{aligned} g(x) &= 2x\ln(-x) + x + 1 \\ &= 2(x\ln(-x))' + (x+1)' \\ &= 2\left[(x)'\ln(-x) + x(\ln(-x))'\right] + 1 \\ &= 2\left[\ln(-x) + x\left(\frac{1}{x}\right)\right] + 1 \\ &= 2\left[\ln(-x) + 1\right] + 1 \\ &= 2\ln(-x) + 3 \end{aligned}$$

$$\mathbf{g'(x) = 2\ln(-x) + 3} \qquad \textbf{(0,5 pt)}$$

Etudions le signe de g

Supposons que $2\ln(-x) + 3 > 0$

$$\begin{aligned} 2\ln(-x) + 3 > 0 &\implies \ln(-x) > \frac{-3}{2} \\ &\implies \ln(-x) > \ln\left(e^{\frac{-3}{2}}\right) \\ &\implies -x > e^{\frac{-3}{2}} \\ &\implies x < -e^{\frac{-3}{2}} \\ &\implies x \in \left]-\infty; -e^{\frac{-3}{2}}\right[\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \forall x \in \left]-\infty; -e^{\frac{-3}{2}}\right[, g'(x) > 0 \text{ donc } g \text{ y est croissant} \\ \forall x \in \left]-e^{\frac{-3}{2}}; 0\right[, g'(x) < 0 \text{ donc } g \text{ y est décroissant} \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		$-e^{\frac{-3}{2}}$		0
$f'(x)$				$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$2e^{\frac{-3}{2}}+1$	$\searrow$	1

$$\begin{aligned}
g(-e^{\frac{-3}{2}}) &= 2(-e^{\frac{-3}{2}})\ln(-(-e^{\frac{-3}{2}})) + (-e^{\frac{-3}{2}}) + 1\\
&= -2e^{\frac{-3}{2}}\ln e^{\frac{-3}{2}} - e^{\frac{-3}{2}} + 1\\
&= -2e^{\frac{-3}{2}} \times \frac{-3}{2} - e^{\frac{-3}{2}} + 1\\
&= 3e^{\frac{-3}{2}} - e^{\frac{-3}{2}} + 1\\
&= 2e^{\frac{-3}{2}} + 1.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{g(-e^{\frac{-3}{2}}) = 2e^{\frac{-3}{2}} + 1}}$$

4 Calculons $g(-1)$. **(0,75 pt)**

$$\begin{aligned}
g(-1) &= 2(-1)\ln(-(-1)) + (-1) + 1\\
&= -2\ln(1) - 1 + 1\\
g(-1) &= -2 \times 0 - 1 + 1\\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{g(-1) = 0}}$$

Le signe de $g(x)$

D'après le tableau de variation:

$$\begin{cases} \forall x \in \,]-\infty;-1[\,, g(x) < 0 \\ \forall x \in \,]-1;0[\,, g(x) > 0 \end{cases}$$

Partie B: 7 pts

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2\ln(-x) + x + 1 & \text{si } x < 0 \\ x\ln(x)^2 + x + 1 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1 Justifions que f est définie sur $\mathbb{R}$. **(0,5 pt)**

$$\text{Posons } f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x^2\ln(-x) + x + 1 & \text{si } x < 0 \\ f_2(x) = x\ln(x)^2 + x + 1 & \text{si } x > 0 \\ f_3(x) = 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

*f_1 existe ssi $-x > 0$

$$\begin{aligned}
-x > 0 &\implies x < 0\\
&\implies x \in]-\infty;0[
\end{aligned}$$

PGB

$\underline{Df_1 =]-\infty; 0[}$

$*f_2$ existe ssi $x > 0$

$x > 0 \implies x \in]-\infty; 0[$

$\underline{Df_2 = \in]-\infty; 0[}$

$\underline{Df_3 = \{0\}}$

Donc

$$\begin{aligned} Df &= Df_1 \cup Df_2 \cup Df_3 \\ &=]-\infty; 0[\cup]-\infty; 0[\cup \{0\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\mathbf{Df} = \mathbb{R}$$

2 Étudions la continuité et la dérivabilité de f en 0. **(1,5 pt)**

Continuité

En 0^-, on a : $f(x) = x^2 \ln(-x) + x + 1$.

$$\lim_{x \to 0^-} x^2 \ln(-x) + x + 1 : \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 \ln(-x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} x + 1 = 1 \end{cases} \quad \text{Par somme : } \lim_{x \to 0^-} x^2 \ln(-x) + x + 1 = 1$$

Ainsi,

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{0}^-} \mathbf{f(x)} = \mathbf{1}$$

En 0^+, on a : $f(x) = x \ln(x)^2 + x + 1$.

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln(x)^2 + x + 1 : \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} (x^{\frac{1}{2}} \ln(x))^2 = 0, \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x + 1 = 1. \end{cases} \quad \text{Par somme : } \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1.$$

Ainsi,

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{0}^+} \mathbf{f(x)} = \mathbf{1}$$

Conclusion

On sait que $f(0) = 1$. De plus :

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{0}^-} \mathbf{f(x)} = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{0}^+} \mathbf{f(x)} = \mathbf{f(0)} = \mathbf{1}.$$

Par conséquent, la fonction f est **continue en** $x = 0$.

Dérivabilité

En 0^-, on a : $f(x) = x^2 \ln(-x) + x + 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 \ln(-x) + x + 1 - 1}{x} \\ &= \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 \ln(-x) + x}{x} \\ &= \lim_{x \to 0^-} x \ln(-x) + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to 0^-} \frac{\mathbf{f(x)-f(0)}}{\mathbf{x-0}} = \mathbf{1}$$

En 0^+, on a : $f(x) = x\ln(x)^2 + x + 1$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln(x)^2 + x + 1 - 1}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln(x)^2 + x}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \ln(x)^2 + 1 \\ &= +\infty\end{aligned}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to 0^+} \frac{\mathbf{f(x)-f(0)}}{\mathbf{x-0}} = +\infty$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to 0^-} \frac{\mathbf{f(x)-f(0)}}{\mathbf{x-0}} \neq \lim_{\mathbf{x}\to 0^+} \frac{\mathbf{f(x)-f(0)}}{\mathbf{x-0}}$$

Par conséquent, la fonction f n'est pas **dérivable en** $x = 0$.

Interprétons graphiquement les résultats:

- f est dérivable à gauche de 0 et admet une tangeant d'équation $y = x + 1$
- f n'est pas dérivable à droite de 0 et admet une démi-tangeant orientée vers le haut.

3 Donnons le domaine de dérivabilité de f puis montrons que $f'(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x < 0 \\ (1+\ln x)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ **(0,5×3 pts)**

Domaine de dérivabilité

$f_1(x) = x^2\ln(-x) + x + 1$ est dérivable si $x < 0$ ainsi $Df_1' =]-\infty; 0[$

$f_2(x) = x\ln(x)^2 + x + 1$ est dérivable si $x > 0$ ainsi $Df_2' =]0; +\infty[$

D'après ce qui précède, f n'est pas dérivable en 0 donc f est bien dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

ainsi

$$\begin{aligned}Df' &= Df_1' \cup Df_2' \cup Df_3 \\ &=]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[\\ &= \mathbb{R}\setminus\{0\}\end{aligned}$$

$$\mathbf{Df'} = \mathbb{R}\setminus\{\mathbf{0}\}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \begin{cases} [x^2\ln(-x) + x + 1]' & \text{si } x < 0 \\ [x\ln(x)^2 + x + 1]' & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (x^2\ln(-x))' + (x+1)' & \text{si } x < 0 \\ (x\ln(x)^2)' + (x+1)' & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2x\ln(-x) + x^2 \times \dfrac{1}{x} + 1 & \text{si } x < 0 \\ \ln(x)^2 + 2x \times \dfrac{1}{x} \times \ln(x) + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2x\ln(-x) + x + 1 & \text{si } x < 0 \\ \ln(x)^2 + 2\ln(x) + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} g(x) & \text{si } x < 0 \\ (\ln(x)+1)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \textbf{cqfd}\end{aligned}$$

4 Calculons les limites de f aux bornes de son domaine de définition. **(0,5 pt)**

En $-\infty$, on a : $f(x) = x^2\ln(-x) + x + 1$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2\ln(-x) + x + 1$$
$$= \lim_{x\to-\infty} x^2\left[\ln(-x) + \frac{x+1}{x}\right]$$
$$= +\infty\,[+\infty + 1]$$
$$= +\infty$$

$$\boxed{\lim_{\mathbf{x}\to-\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = +\infty}$$

En $+\infty$, on a : $f(x) = x\ln(x)^2 + x + 1$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\ln(x)^2 + x + 1$$
$$= +\infty$$

$$\boxed{\lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = +\infty}$$

5 Étudions les branches infinies de (C_f). **(0,5 pt)**

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

En effet

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\ln(-x) + x + 1}{x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} x\ln(-x) + \frac{x+1}{x}$$
$$= -\infty + 1$$
$$= -\infty$$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

Donc Cf admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $-\infty$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

En effet

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln(x)^2 + x + 1}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \ln(x)^2 + \frac{x+1}{x}$$
$$= +\infty + 1$$
$$= +\infty$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

Donc (Cf) admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$

6 Dressons le tableau de variations de f. **(1 pt)**

Le signe de f. on a : $f'(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x < 0 \\ (1+\ln x)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

PGB

$$\begin{cases} \forall x \in \left]-\infty; -1\right[, g(x) < 0 \text{ donc } f \text{ est y décroissante} \\ \forall x \in \left]-1; 0\right[, g(x) > 0 \text{ donc } f \text{ y est croissante} \\ \forall x \in \left]0; -\infty\right[, f(x) > 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

7 Montrons que dans $]-\infty; -1[$, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α . **(0,75 pt)**

Posons $h(x) = f(x) - 1$

Montrer que $f(x) = 1$ admet une unique solution revient à montrer que $h(x) = 0$ admet une unique solution.

Existance

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} h(x) \times \lim_{x \to -1} h(x) &= \lim_{x \to -\infty} f(x) - 1 \times \lim_{x \to -1} f(x) - 1 \\ &= +\infty \times -1 \\ &< 0 \end{aligned}$$

Donc l'équation $h(x) = 0$ admet une solution α

Unicité

Comme h hérite des propriétés de f donc h est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$

D'où l'unicité de la solution

vérifions que $-1,8 < \alpha < -1,7$

$$\begin{aligned} h(-1,8) \times h(-1,7) &= (f(-1,8) - 1) \times (f(-1,7) - 1) \\ &= (1.104428794 - 1) \times (0.833515646 - 1) \\ &= (0.104428794) \times (-0.166484354) \\ &< 0 \end{aligned}$$

Donc $\alpha \in]-1,8; -1,7[$

8 Construisons (C_f) (unité 2 cm) (on précisera la tangente au point d'abscisse e^{-1} et on placera le point d'abscisse 1). **(0,75 pt)**

$f(x) = x\ln(x)^2 + x + 1$

$f(e^{-1}) = 2e^{-1} + 1$

Équation de la tangente

L'équation de la tangente en $x = e^{-1}$ est donnée par :

$$y = f(e^{-1}) + f'(e^{-1})(x - e^{-1})$$

Puisque $f'(e^{-1}) = 0$, on a :

$$y = \frac{2}{e} + 1$$

la tangente est une droite horizontale d'équation :

$$y = \frac{2}{e} + 1$$

PGB

$$f(1) = 2$$

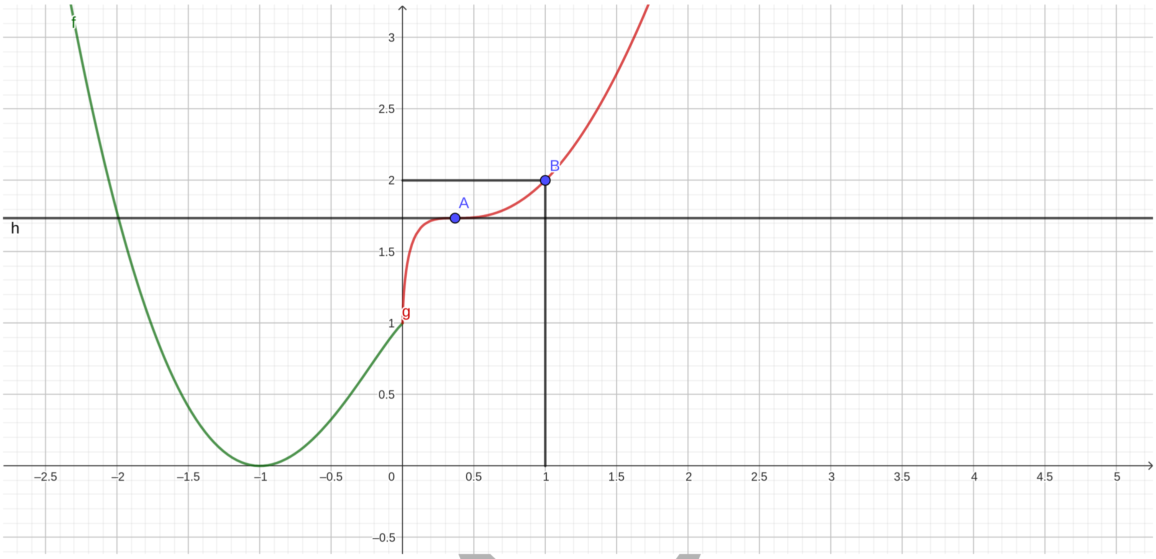


Figure 1: Courbe de (Cf)

Clique ici pour voir la courbe sur géogébra

Partie C: 2 pts

Soit h la restriction de f à $I =]0; +\infty[$.

1. Montrons que h admet une bijection réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que nous allons préciser. **(0,5 pt)**

   La fonction h est continue et strictement croissante sur $I =]0, +\infty[$ et réalise une bijection de

   I sur $J =]1, +\infty[$.

   Elle admet donc une bijection réciproque $h^{-1} : J \to I$.

2. Étudions la dérivabilité de h^{-1} sur J. **(0,25 pt)**

   D'après le théorème de dérivation des fonctions réciproques, si h est dérivable et si $h'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors h^{-1} est dérivable sur J et sa dérivée est donnée par :

$$\left(h^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{h'(h^{-1}(y))}, \quad \forall y \in J.$$

   Or, nous avons montré que :$h'(x) = (\ln(x) + 1)^2$.

   Puisque $(\ln(x) + 1)^2 > 0$ pour tout $x > 0$, on en déduit que $h'(x) \neq 0$ sur I.

   Ainsi, h^{-1} est dérivable sur $J =]1, +\infty[$

3. a. Calculons $h(1)$. **(0,25 point)**

$$h(x) = x\ln(x)^2 + x + 1.$$
$$h(1) = 1\ln(1)^2 + 1 + 1.$$
$$= 1 \cdot 0 + 1 + 1 = 2.$$
$$= 2.$$

b Calculons $(h^{-1})'(2)$. **(0,5 pt)**

Nous savons que la dérivée de la fonction réciproque h^{-1} est donnée par :

$$(h^{-1})'(y) = \frac{1}{h'(h^{-1}(y))}, \quad \forall y \in J.$$

Nous avons précédemment trouvé que :

$$h(1) = 2.$$

Cela signifie que :

$$h^{-1}(2) = 1.$$

Calculons maintenant $h'(1)$. La fonction h est définie par :

$$h(x) = x\ln(x)^2 + x + 1.$$

Sa dérivée est :

$$h'(x) = (\ln(x) + 1)^2.$$

En évaluant cette dérivée en $x = 1$, on a :

$$h'(1) = (\ln(1) + 1)^2 = (0 + 1)^2 = 1.$$

Ainsi : $(h^{-1})'(2) = \dfrac{1}{h'(1)} = \dfrac{1}{1} = 1.$

Conclusion

Nous obtenons : $(h^{-1})'(2) = 1.$

PGB

4 Construisons la courbe de h^{-1}. **(0,5 pt)**

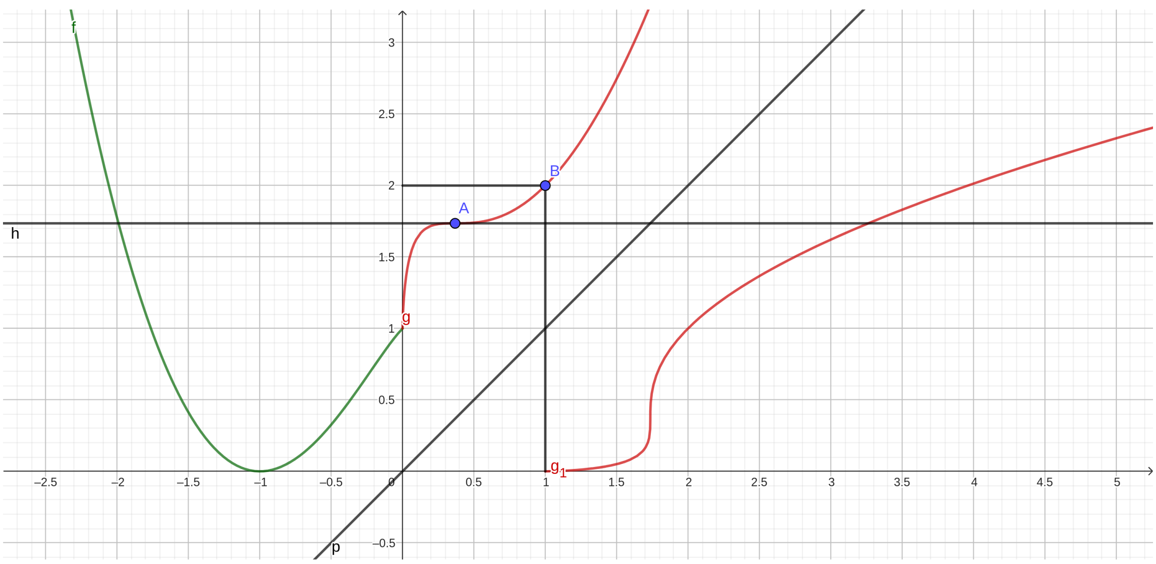


Figure 2: Courbe de (Cf)

Clique ici pour voir la courbe sur géogébra

5 Étudions la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interprétez graphiquement les résultats. **(1,5 pt)**