Devoir n° 2 Du 2nd Semestre

Exercice 1 : 5 points (BAC 2022)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 1cm.

1. On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme $P(z) = z^3 - 5z^2 + 19z + 25$.
   a. Montrer que -1 est solution de l'équation $P(z) = 0$. **(0.25 pt)**
   b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$. **(1.25 pt)**
2. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = -1$; $z_B = 3+4i$; $z_C = 3-4i$; $z_D = -7z_A$.
   a. On note z_1 et z_2 les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont parallèles. (01 pt)
   b. Calculer $|z_1|$ et $|z_2|$ puis interpréter géométriquement le résultat. **(0.5 pt)**
   c. On note z_3 l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BD}$. Comparer $|z_1|$ et $|z_3|$ puis interpréter géométriquement le résultat. **(0.5 pt)**
   d. Calculer $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$, puis interpréter géométriquement le résultat. **(0.5 pt)**
   e. En déduire la nature précise du quadrilatère $ABDC$. **(1 pt)**

Exercice 2 : 5,5 points (BAC 2008)

On dispose de trois urnes U_1, U_2 et U_3

- U_1 contient 3 boules vertes et 2 boules rouges;
- U_2 contient 4 boules vertes et 5 boules jaunes;
- U_3 contient 5 boules jaunes, 4 boules rouges et 1 boule verte.

Description de l'épreuve
L'épreuve consiste à tirer une boule dans U_1.
Si elle est verte, on la met dans U_2 puis on tire une boule dans U_2.
Si elle est rouge, on la met dans U_3 puis on tire une boule dans U_3.
Question
A)

1. Calculer la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage sachant que la première tirée est verte. **(0.5 pt)**
2. Calculer la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage sachant que la première est rouge. **(0.5 pt)**
3. En déduire la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage. **(1 pt)**
4. Calculer la probabilité d'avoir une boule jaune au second tirage. **(0.5 pt)**

5. Calculer la probabilité d'avoir une boule rouge au deuxième tirage. **(0.5 pt)**

B) Au cours de cette épreuve si on obtient au deuxième tirage :

- Une boule verte, on gagne 1000 F
- Une boule jaune, on gagne 500 F
- Une boule rouge, on perd 500 F

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque boule obtenue au second tirage, associe un gain défini ci-dessus

1. Déterminer la loi de probabilité de X. **(0.5 pt)**
2. Calculer l'espérance mathématique de X. **(0.5 pt)**

C) Cette épreuve est faite par chacun des 15 élèves d'une classe dans les mêmes conditions et d'une manière indépendante.
Les résultats seront donnés au centième près par défaut.

1. Calculer la probabilité pour que 8 élèves obtiennent une boule verte au deuxième tirage. **(0.5 pt)**
2. Calculer la probabilité pour que seulement les 8 premiers obtiennent une boule verte au deuxième tirage. **(0.5 pt)**
3. Calculer la probabilité pour qu'au moins un élève obtienne une boule verte au second tirage. **(0.5 pt)**

Problème : 9,5 points (BAC 2007)

Partie A: 3 pts

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 1 + x + \ln x$.

1. Dresser le tableau de variation de g. **(1.5 pt)**
2. Montrer qu'il existe un unique réel α solution de l'équation $g(x) = 0$. Vérifier que α appartient à $]0.2;0.3[$. **(0.5 pt)**
3. En déduire le signe de g sur $]0;+\infty[$. **(0.5 pt)**
4. Établir la relation $\ln(\alpha) = -1 - \alpha$. **(0.5 pt)**

Partie B: 6,5 pts

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln x}{1+x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue en 0 puis sur $]0;+\infty[$. **(0.5 + 0.5 pt)**
2. Étudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat. **(0.5 + 0.5 pt)**
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$. **(0.5 pt)**
4. Montrer que, quel que soit x élément de $]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$. **(0.5 pt)**

5. Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$. **(0.5 pt)**

6. Dresser le tableau de variations de la fonction f. **(0.5 pt)**

7. Représenter la courbe de f dans le plan muni du repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. Unité graphique : 5 cm. Prendre $\alpha \approx 0.3$. **(1.5 pt)**