

Td Limites In**Problème 1**

Partie A Soit g la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x(1 + \ln x)^2 - 1$.

- 1 On admettra que g est dérivable sur $]0; +\infty[$.
 - a Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.
 - b Vérifier que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $g'(x) = (1 + \ln x)(3 + \ln x)$.
 - c Étudier le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire le sens de variation de g .
- 2 Dresser le tableau de variation de g . (On ne calculera pas les limites en 0 et $+\infty$).
- 3
 - a Calculer $g(1)$.
 - b En déduire que pour tout $x \in]0; 1[$, $g(x) < 0$ et pour tout $x \in]1; +\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + \frac{1}{1 + \ln x} - 1 & \text{si } x \in]0; \frac{1}{e} \cup \frac{1}{e}; +\infty[\\ f(0) = -1 & \end{cases}$$

(C) est la représentation graphique dans le repère orthonormé (O, I, J) (unités : 2cm).

- 1
 - a Montrer que f est continue en 0.
 - b Étudier la dérивabilité de f en 0.
 - c En déduire la tangente à (C) au point $A(0; -1)$.
- 2
 - a Calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - b Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à (C).
 - c Étudier les positions relatives de (C) et (Δ).
 - d Préciser l'autre asymptote à la courbe (C) de f .
- 3
 - a Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[\setminus \{\frac{1}{e}\}$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1 + \ln x)^2}$.
 - b En déduire le sens de variation de f .
 - c Dresser son tableau de variation.

Partie C

- 1 Calculer la dérivée de la fonction h définie sur $\left] \frac{1}{e}; +\infty \right[$ par $h(x) = \ln(1 + \ln x)$.
- 2
 - a En déduire les primitives sur $\left] \frac{1}{e}; +\infty \right[$ de la fonction $k : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$.
 - b Déterminer la primitive de k qui prend la valeur -1 en 1.

Problème 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2cm.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.

- 1 Calculer $g'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.
En déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- 2 Calculer $g(1)$ et en déduire l'étude du signe de $g(x)$ pour x appartenant à $]0; +\infty[$.

Partie B : Détermination de l'expression de la fonction f

On admet qu'il existe deux constantes réelles a et b telles que, pour tout nombre réel x appartenant à $]0; +\infty[$, $f(x) = ax + b - \frac{\ln x}{x}$.

- 1 On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f .
Calculer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.
- 2 Sachant que la courbe (C) passe par le point de coordonnées $(1; 0)$ et qu'elle admet en ce point une tangente horizontale, déterminer les nombres a et b .

Partie C : Étude de la fonction f

On admet désormais que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$.

- 1
 - a Déterminer la limite de la fonction f en 0 et donner une interprétation graphique de cette limite.
 - b Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
- 2
 - a Vérifier que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
 - b Établir le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - c En déduire le signe de $f(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.
- 3 On considère la droite (D) d'équation $y = x - 1$.
 - a Justifier que la droite (D) est asymptote à la courbe (C) .
 - b Étudier les positions relatives de la courbe (C) et de la droite (D) .
 - c Tracer la droite (D) et la courbe (C) dans le plan P muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie D : Calcul d'aire

On note A la mesure, exprimée en cm^2 , de l'aire de la partie du plan P comprise entre la courbe C , l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

- 1 On considère la fonction H définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $H(x) = (\ln x)^2$.
On désigne par H' la fonction dérivée de la fonction H .
 - a Calculer $H'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - b En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- 2 Calculer A et donner sa valeur arrondie au mm^2 près.

Problème 3

Partie A On considère g la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$g(x) = 1 + x(2 \ln |x| + 1)$$

- 1 a Justifier que g est définie sur $]-\infty; 0] \cup [0; +\infty[$.
b Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
- 2 a Étudier le sens de variation de g .
b Dresser le tableau de variation de g .
- 3 a Calculer l'image de -1 par g .
b Déterminer l'image J par g de l'intervalle I tel que : $I =]-\infty; -e^{-\frac{3}{2}}]$.
c Démontrer que la restriction h de g sur l'intervalle I est une bijection de I sur J .
d En déduire l'ensemble des solutions de l'équation : $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$.
- 4 Déduire de tout ce qui précède que :
 $\forall x \in]-\infty; -1[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]-1; 0] \cup [0; +\infty[, g(x) > 0$.

Partie B On considère f la fonction numérique de la fonction de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x(x \ln|x| + 1) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (Unité : 5cm)

- 1 Démontrer que f est continue en 0.
- 2 a Donner l'ensemble de définition de f' et déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
b Étudier la dérивabilité de f en 0.
c Déterminer la fonction dérivée f' et déterminer le tableau de variation de f .
- 3 a Écrire une équation de la tangente (D) à la courbe (C) au point O .
b Démontrer que (D) coupe (C) en deux points E et F et calculer leurs coordonnées.
c Étudier la position de (C) par rapport à (D) .
- 4 Démontrer que (C) coupe l'axe (OI) en un point K d'abscisse β tel que $-1,8 < \beta < -1,7$.
- 5 Construire (C) .

Partie C

- 1 Soit α un réel appartenant à $]0; 1[$.
À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_{\alpha}^1 x^2 \ln(x) dx$.
- 2 a Calculer l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan limitée par (C) , la droite (D) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \alpha$.
b Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow 0} A(\alpha)$.

On prendra : $\ln(2) \approx 0,7$; $\ln(3) \approx 1,1$; $\ln(5) \approx 1,6$; $\ln(17) \approx 2,9$; $e \approx 2,7$; $\sqrt{e} \approx 1,6$.

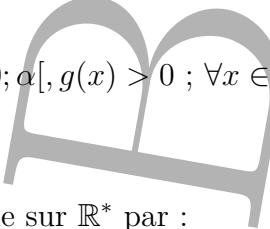
Problème 4

Partie A

On considère la fonction g dérivable et définie sur \mathbb{R}^* par :

$$g(x) = -x^3 + x + 1 - \ln|x|$$

- 1 Montrer que -1 est un zéro de la fonction polynôme P définie par : $P(x) = -3x^3 + x - 2$.
- 2
 - a Déterminer le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x .
 - b Calculer les limites de g aux bornes des intervalles de son ensemble de définition.
 - c Étudier les variations de g .
 - d Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique. On note α cette solution.
Montrer que : $1,2 < \alpha < 1,3$.
 - e En déduire que : $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]\alpha, +\infty[, g(x) > 0 ; \forall x \in]0; \alpha[, g(x) < 0$.



Partie B

On considère la fonction f dérivable et définie sur \mathbb{R}^* par :

$$f(x) = -x + 1 - \frac{x - \ln|x|}{x^2}$$

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) . (Unité graphique : 2cm)

- 1 Calculer les limites de f aux bornes des intervalles de son ensemble de définition.
- 2
 - a Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.
 - b Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
- 3 Déterminer une équation de la tangente (T) au point d'abscisse -1 .
- 4 Déterminer que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à la courbe (C) .
- 5
 - a Étudier les variations de la fonction h définie sur \mathbb{R}^* par : $h(x) = x - \ln|x|$.
 - b En déduire que (D) coupe (C) en un point unique d'abscisse β vérifiant : $\ln(-\beta) = \beta$.
 - c Montrer que : $-0,57 < \beta < 0,56$.
 - d Déterminer la position de (C) par rapport à (D) .
- 6 Construire (T) , (D) et (C) .
- 7 Démontrer que la fonction numérique F définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{x} - \ln x - \frac{(\ln x)^2}{x}$$
 est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

Problème 5

Partie A

Soit g , la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par $g(x) = (x+2)^2 + \ln|x+2|$.

- 1
 - a Calculer les limites de g au borne de son ensemble de définition.
 - b Etudier les variations de g sur $]-2; +\infty[$.
- 2
 - a Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β dans $]-2; +\infty[$.
 - b Montrer que β vérifie $-1,35 < \beta < -1,34$.
 - c Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-2; +\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie par $f(x) = -x - 1 + \frac{1 + \ln(x+2)}{x+2}$ et (ε) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) . Unité 2 centimètres.

- 1 a Déterminer l'ensemble de définition de f et la limite de f en $+\infty$.
 - b Déterminer la limite de f à droite en -2 . Interpréter graphiquement le résultat.
 - c Montrer que, $\forall x \in]-2; +\infty[$; $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x+2)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .
 - d Montrer que $f(\beta) = -2\beta - 3 + \frac{1}{\beta+2}$.
- 2 a Montre que la droite (D) : $y = -x - 1$ est asymptote à (ε) .
 - b Déterminer les coordonnées de A intersection de (ε) et de (D) .
 - c Etudier la position de (ε) par rapport à (D) .
- 3 Construire (ε) et (D) sur le même graphique.
- 4 Déterminer G , la primitive de $g(x)$ tel que $g(x) = (x+2)^2 + \ln(x+2)$ sur $] -2; +\infty[$ et s'annule en -1 . Sachant que la primitive sur $] -2; +\infty[$ de $\ln(x+2)$ est $(x+2)\ln(x+2) - (x+2)$.
- 5 a Si h est la restriction de f à l'intervalle $[\beta; +\infty[$, montrer que h est une bijection de $[\beta; +\infty[$ sur une partie K que l'on déterminera.
 - b Calculer $h(-1)$.
 - c Montrer h^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(h^{-1})'(1)$.
 - d Construire (ε') , la représentation graphique de h^{-1} , bijection réciproque de h sur le graphique précédent.

Problème 6

Partie A : Etude d'une fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x} - 4(x-1)e^x - 2$$

- 1 a Calculer la limite de f en $-\infty$.
 - b Montrer que $f(x) = xe^{2x} \left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{4}{e^x} + \frac{4}{xe^x} - \frac{2}{xe^{2x}}\right)$ et en déduire la limite de f en $+\infty$.
- 2 Etudier les variations de f .
 - 3 Soit (C_f) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé, unité graphique 2cm.
 - a Etudier les branches infinies de (C_f) .
 - b Montrer que (C) coupe l'axe des abscisses en un point, dont l'abscisse α appartient à l'intervalle $[-2; -1]$.
 - c Tracer (C_f) . On prendra $\ln 2 \approx 0,7$.
 - 4 Montrer que $F(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)e^{2x} + 4(2-x)e^x$ est une primitive de $f(x) + 2$.

Partie B : Etude d'une nouvelle fonction numérique de variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} g(x) = (x^2 - 4x) \ln x - \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 4) & \forall x > 0 \\ g(0) = -2 \end{cases}$$

- 1 Montrer que : $g(x) = f(\ln x), \forall x > 0$.
- 2 Etudier la continuité et la dérivabilité de g à droite en 0.
- 3 Calculer les limites aux bornes de son domaine.
- 4 Etudier les variations de g .
- 5 Soit (C_g) la courbe représentative de g dans un repère orthonormé, unité 2cm.
 - a Etudier la branche infinie de (C_g) .

Problème 7

Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par : $f(x) = \frac{1}{1 - xe^{-x}}$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct (O, I, J) . Unité graphique : 2cm

Partie A

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = 1 - xe^{-x}$

- 1 Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (x - 1)e^{-x}$
- 2 Déterminer le sens de variation de g puis, dresser le tableau de variation de g (sans les limites aux bornes).
- 3 Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$.

Partie B

- 1 Démontrer que l'ensemble de définition de f est \mathbb{R} .
- 2 Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En donner une interprétation graphique.
- 3
 - a Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{(1 - x)e^{-x}}{(1 - xe^{-x})^2}$.
 - b Déterminer le sens de variation de f puis dresser le tableau de variation de f .
- 4
 - a Démontrer qu'une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0 est $y = x + 1$.
 - b Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x - 1 = \frac{(x + 1 - e^x)xe^{-x}}{1 - xe^{-x}}$.
 - c Déterminer le signe de la fonction h telle que : $h(x) = x + 1 - e^{-x}$.
 - d Déduire de la question précédente les positions relatives de (C) et de (T) .
- 5 Construire (T) et (C) .

Problème 8

Partie A : (Etude d'une fonction auxiliaire g)

Soit g la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x - 2 - 2x \ln x$

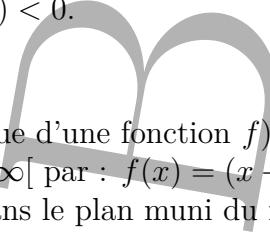
1 Justifier que l'ensemble des solutions de l'inéquation : $-2 \ln x - 1 \geq 0$ est $S = [0; e^{-\frac{1}{2}}]$

2 a Calculer $g'(x)$.

b Etudier les variations de g .

3 a Etablir le tableau de variation de g . (On ne cherchera pas à calculer les limites de g).

b En déduire que : $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) < 0$.



Partie B : (Etude et représentation graphique d'une fonction f)

Soit f la fonction numérique définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = (x-1)^2 - x^2 \ln x$ si $x \in]0; +\infty[$ et $f(0) = 1$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) .

L'unité graphique est 2cm.

1 a Calculer la limite de f en $+\infty$.

b Justifier que la courbe (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.

2 a Justifier que f est continue en 0.

b Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -2$.

3 Soit (T) la droite d'équation $y = -2x + 1$ et d la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $d(x) = f(x) - y$.

a Justifier que (T) est la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

b Vérifier que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $d(x) = x^2 - x^2 \ln x$.

c Etudier la position relative de (C) par rapport à (T) .

4 a Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$.

b Etablir le tableau de variation de la fonction f .

5 a Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$.

b Vérifier que $\alpha = 1$ et démontrer que $f(x) \geq 0$ si $0 \leq x \leq 1$ et $f(x) \leq 0$ si $x \geq 1$.

6 Construire (T) et (C) .

Partie C : (Etude d'une primitive F d'une restriction de la fonction f)

Soit F la primitive de f sur $[1; +\infty[$ qui s'annule en e . (On ne cherchera pas à déterminer F).

1 Déterminer $F(e)$ et $F'(x)$. (On justifiera chaque réponse).

2 Démontrer que F est une bijection de $]1; +\infty[$ vers $F([1; +\infty[)$.

3 Soit F^{-1} la réciproque de F . Calculer $(F^{-1})'(0)$.

Problème 9

On désigne par (C) la courbe de la fonction f ci-dessous dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ dans le plan d'un repère orthonormé $(O; I, J)$. L'unité de longueur : 2 cm.

Partie A : On considère la fonction f définie par : $f(x) = x - 1 - \frac{2}{x} - \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right|$

1 Montrer que f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

2 Montrer que :

- Pour tout $x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$; $f(x) = x - 1 - \frac{2}{x} - \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$
- Pour tout $x \in]0; 1[$; $f(x) = x - 1 - \frac{2}{x} - \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$

3 Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

4 Calculer la limite de f en 1. Interpréter graphiquement ce résultat.

- 5 a Calculer les limites de f à gauche en 0 et à droite en 0.
b Interpréter graphiquement ces résultats.

Partie B : Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x^3 - x^2 + x - 2$.

- 1 Calculer $g'(x)$, g' étant la fonction dérivée de g .
- 2 Déterminer le sens de variation de g .
- 3 a Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans \mathbb{R} et que $1 < \alpha < 1,5$.
b En déduire un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.
- 4 Montrer que pour tout $x \in]-\infty; \alpha[$; $g(x) < 0$ et pour tout $x \in]\alpha; +\infty[$; $g(x) > 0$.
- 5 Montrer que pour tout nombre réel x élément de $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(x-1)}$.
- 6 a Déterminer le signe de $f'(x)$.
b Dresser le tableau de variation de f .

Partie C

1 Soit (D) la droite d'équation $y = x - 1$.

Montrer que la droite (D) est une asymptote à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.

2 Calculer $f(-2)$; $f(-\frac{1}{2})$ et $f(\frac{1}{2})$.

3 Construire dans le repère $(O; I, J)$ la courbe (C) et ses asymptotes. On prendra $\alpha \approx 1,3$.

Partie D

On considère les fonctions h et k définies sur $]2; +\infty[$ par $h(x) = (x-1)\ln(x-1) - x\ln x$ et on admettra que pour tout x élément de $]2; +\infty[$, $f(x) - x + 1 < 0$.

- 1 Calculer $h'(x)$, h' étant la dérivée de h .
- 2 Calculer l'aire de la partie limitée par la courbe (C) , la droite (D) et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

Problème 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Unité : $OI = 2\text{cm}$ et $OJ = 1\text{cm}$.

Partie A

Soit g la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $g(0) = -1$ et $g(x) = \frac{x}{(\ln(x))^2} - 1$ et (C_g) sa courbe.

- 1 a Déterminer l'ensemble de définition de g .
- b Calculer les limites de g en 1 et en $+\infty$.
- c Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement ce résultat.
- 2 a Démontrer que g est continue en 0.
- b Étudier la dérивabilité de g en 0 et interpréter graphiquement ce résultat.
- 3 On admet que g est dérivable sur $[0; 1[\cup]1; +\infty[$.
- a Démontrer que $\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, g'(x) = \frac{\ln(x)(\ln(x) - 2)}{(\ln(x))^4}$.
- b Déterminer le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.
- 4 a Démontrer que l'équation $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; 1[$.
- b Vérifier que $0,4 < \alpha < 0,5$.
- c En déduire que : $\forall x \in [0; \alpha[, g(x) < 0$
 $\forall x \in [\alpha; 1[\cup]1; +\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction numérique f définie sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x)}$ et (C) , sa courbe.

- 1 a Calculer les limites de f en 0, en 1 et en $+\infty$.
- b Interpréter graphiquement les résultats précédents.
- 2 On admet que f est dérivable sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.
- a Démontrer que $\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
- b Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation de f .
- 3 Démontrer que $f(\alpha) = \frac{1 - \sqrt{\alpha}}{\alpha}$. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.
- 4 Construire la courbe (C) . On prendra $\alpha \simeq 0,5$.

Partie C

Soit h la restriction de f à $]1; +\infty[$.

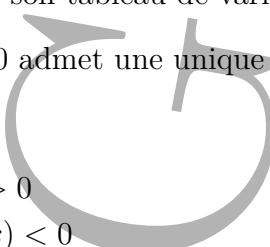
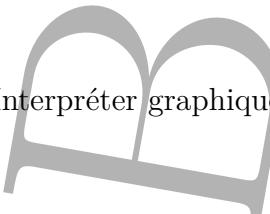
- 1 Démontrer que h est la bijection de $]1; +\infty[$ sur un intervalle K que l'on déterminera.
- 2 On note h^{-1} la bijection réciproque de h et (Γ) sa représentation graphique.
- a Dresser le tableau de variation de h^{-1} .
- b Calculer $h(e)$; $h^{-1}\left(\frac{1-e}{e}\right)$ et $(h^{-1})'\left(\frac{1-e}{e}\right)$.
- c Déterminer une équation de la tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse $\frac{1-e}{e}$.
- 3 Construire (Γ) dans le même repère que (C) .

Problème 11

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $\begin{cases} \forall x > 0, g(x) = 1 - x \ln x \\ g(0) = 1 \end{cases}$

- 1 a Etudier la continuité de g en 0.
b Etudier la dérivabilité de g en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
- 2 Calculer la limite de g en $+\infty$.
- 3 Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations.
- 4 a Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]e^{-1}; +\infty[$.
b Justifier que : $1,7 < \alpha < 1,8$.
- 5 Démontrer que : $\begin{cases} \forall x \in [0; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in [\alpha; +\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$



Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = e^{3-x} \ln x$

(C_f) désigne sa représentation graphique dans le plan est muni d'un repère orthonormé ($O; I; J$) Unité graphique : 2cm

- 1 Calculer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
- 2 a Vérifier que : $\forall x \in]0; +\infty[: f(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right) \left(\frac{x}{e^x}\right) e^3$
b En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
- 3 a Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{e^{3-x}}{x} g(x)$.
b En déduire le sens de variations de f .
- 4 a Montrer que : $f(\alpha) = \frac{e^3}{\alpha e^\alpha}$.
b En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
c Dresser le tableau de variations de f .
- 5 Construire (C_f).
- 6 Soit h la restriction de f à l'intervalle $]0; \alpha[$.
 - a Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de départ, l'arrivée d'arrivée.
 - b Dresser le tableau de variation de h^{-1} .
 - c Calculer $(h^{-1})'(0)$.

Problème 12

Partie A

On considère l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = xe^x$

- 1 Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$
- 2 Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur \mathbb{R} par $u(x) = (ax + b)e^x$.
 - a Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).
 - b Montrer que v est une solution de l'équation (1) si et seulement si $u + v$ est une solution de l'équation (2).
 - c En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (1).
- 3 Déterminer la solution f de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = 2e^x - x - 2$

- 1 Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
- 2 Étudier le sens de variation de g , puis dresser son tableau de variation.
- 3
 - a Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions réelles : 0 et α telle que $-1,6 < \alpha < -1,5$.
 - b Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie C : Etude de la fonction principale f

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; I; J)$. (Unité : 4cm)

- 1 Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
- 2
 - a Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x g(x)$.
 - b En déduire les variations de f et dresser le tableau de variation de f .
- 3 Montrer que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.
- 4 Tracer (C) .

Partie D : Calcul d'aire

Soit m un réel négatif.

- 1 Interpréter graphiquement l'intégrale $I = \int_m^0 f(x) dx$
 - a Calculer $\int_m^0 xe^x dx$ à l'aide d'une intégration par parties.
 - b En déduire la valeur de I .
- 2 Calculer la limite de I lorsque m tend vers $-\infty$.

Problème 13

L'objet de ce problème est la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x(x - (\ln x)^2) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$. Unité graphique 5cm.

Partie A

On considère la fonction h dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par $h(x) = 2 - \frac{2}{x} - 2\frac{\ln x}{x}$.

- 1 a Calculer $h'(x)$ et étudier les variations de h .
- 1 b En déduire que $\forall x \in]0; +\infty[, h(x) \geq 0$.
- 2 On considère la fonction g dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par $g(x) = 2x - 2\ln(x) - (\ln x)^2$.
 - a Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.
 - b Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x) = h(x)$.
 - c Étudier les variations de g .
 - d Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et vérifier que $0,1 < \alpha < 0,2$.
 - e Démontrer que $\begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

- 1 Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2 Montrer que f est continue en 0.
- 3 a Étudier la dérивabilité de f en 0.
b Interpréter graphiquement ce résultat.
- 4 a Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
b Interpréter graphiquement les résultats.
c Démontrer que $f(\alpha) = \alpha(-\alpha + 2\ln(\alpha))$.
- 5 a On suppose que f est dérivable sur $]0; +\infty[$.
b On suppose que f est dérivable sur $]0; +\infty[$. Calculer $f'(x)$ et montrer que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$.
c Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

Partie C

- 1 Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
- 2 Soit la fonction $k(x) = f(x) - (2x - 1)$.
 - a Vérifier que $k'(x) = g(x) - 2$ et que $k''(x) = h(x)$.
 - b En déduire le sens de variation de k' . Calculer $k'(1)$ puis donner le signe de k' .
 - c Dresser le tableau de variation de k puis donner le signe de k . (On ne calculera pas de limites).
 - d En déduire la position relative de (C) et de la droite (T) .

3) Tracer (C) et (T) . On prendra $\alpha = 0, 1$.

4) Soit la fonction q , restriction de f à l'intervalle $[\alpha; +\infty[$.

- a) Montrer que q admet une bijection réciproque notée q^{-1} dont on précisera les ensembles de départ et d'arrivée.
- b) Dresser le tableau de variation de q^{-1} .
- c) Calculer $q(1)$, $q^{-1}(1)$ et $(q^{-1})'(1)$.
- d) Construire la courbe de q^{-1} dans le même repère que (C) .

Problème 14

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^x(1-x) + 1$.

1) Étudier le sens de variation de g .

2) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1, 27; 1, 28]$. On note α cette solution.

3) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-\infty; 0]$.

Montrer que $g(x) > 0$ sur $[0; \alpha[$ et $g(x) < 0$ sur $\alpha; +\infty[$.

Partie B :

Étude de la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x}{e^x + 1} + 2$.

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$; unités graphiques : 1cm sur l'axe des abscisses et 2cm sur l'axe des ordonnées.

1) a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) Démontrer que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique (d) dont on déterminera l'équation.

2) Étudier la position de (C_f) par rapport à (d) .

3) a) Montrer que la fonction dérivée de f a même signe que la fonction g étudiée dans la Partie A.

b) Montrer qu'il existe deux entiers p et q tels que $f(\alpha) = p\alpha + q$.

c) Dresser le tableau des variations de la fonction f .

4) Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec ses asymptotes et sa tangente au point d'abscisse α .

Partie C : Encadrement d'aire

Pour tout entier naturel n , tel que $n \geq 2$, on donne D_n , l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan, dont les coordonnées vérifient $2 \leq x \leq n$ et $2 \leq y \leq f(x)$, et on appelle A_n son aire, exprimée en unité d'aire.

1) Faire apparaître D_n sur la figure.

Problème 15

On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{1-x} + \ln|x|$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O; I; J)$ d'unité 2cm.

Partie A (Etude d'une fonction auxiliaire)

Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = xe^{1-x}$

- 1 Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- 2 Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (1-x)e^{1-x}$.
- 3 Déterminer les variations de g puis dresser son tableau de variation.
- 4 Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq 1$.

Partie B (Etude de la fonction f)

Soit $f(x) = e^{1-x} + \ln|x|$

- 1 Déterminer D_f l'ensemble de définition de f .
- 2
 - a Calculer la limite de f en 0.
 - b En déduire une interprétation graphique du résultat.
- 3
 - a Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
 - b Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
 - c Interpréter graphiquement les résultats.
- 4
 - a Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{1-g(x)}{x}$.
 - b En déduire le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .
- 5 Déterminer les variations de f puis dresser son tableau de variation.
- 6
 - a Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β tels que $0,08 < \alpha < 0,09$ et $-0,06 < \beta < -0,05$.
 - b Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
 - c Construire (C) avec précision.

Partie C

- 1 Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $U_n = \int_n^{n+1} e^{-x} dx$ et $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$
 - a Démontrer que $(U_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - b Exprimer U_n puis S_n en fonction de n .
- 2
 - a Démontrer que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est croissante.
 - b Démontrer que $(S_n)_{n \geq 1}$ est majorée par $\frac{1}{e}$.
 - c Les suites $(U_n)_{n \geq 1}$ et $(S_n)_{n \geq 1}$ sont-elles convergentes ? Justifier votre réponse.
- 3 Soit $(V_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $V_n = \int_1^{n+1} \ln|x| dx$
 - a En utilisant une intégration par parties, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = (n+1)\ln(n+1) - n$
 - b La suite $(V_n)_{n \geq 1}$ est-elle convergente ? Justifier votre réponse.

Problème 16

Partie A

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = x + 1 - (x + 2) \ln |x + 2|, x \neq -2 \text{ et } g(-2) = -1.$$

- 1 a Démontrer que g est continue en -2 .
- b Étudier le dérivabilité de g en -2 . Interpréter graphiquement le résultat.
- 2 Calculer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
- 3 Calculer $g'(x)$ pour $x \neq -2$, étudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
- 4 a Démontrer que pour $x \neq -1$, g s'annule en une valeur α comprise entre $-5,6$ et $-5,5$.
- b En déduire que : $\forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq -2$ par : $f(x) = \frac{\ln|x+2|}{x+1}$ si $x \neq -1$ et $f(-1) = 1$.

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans le plan du repère orthonormé $(O; I; J)$. Unité graphique 2cm.

- 1 Démontrer que f est continue en -1 .
- 2 On suppose que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$
Démontrer que f est dérivable en -1 .
- 3 a Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
b Interpréter graphiquement les résultats.
c Calculer la limite de f à droite et à gauche en -2 .
d Interpréter graphiquement les résultats.
- 4 a Démontrer que pour tout réel x , $f'(x)$ et $\frac{g(x)}{x+2}$ ont le même signe.
b Dresser le tableau de variation de f .
c Démontrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+2}$.

Partie C

- 1 Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse -1 .
- 2 On pose $h(x) = x^2 - 1 + 2 \ln(x+2)$ pour $x > -2$.
 - a Etudier le sens de variation de h .
 - b Calculer $h(-1)$. En déduire le signe de h .
 - c Démontrer que (C_f) est au-dessus de la tangente (T) pour $x > -2$.
- 3 Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (C_f) et de l'axe des abscisses.
- 4 Tracer (T) et (C_f) .

Problème 17

Partie A

On considère la fonction g de la variable réelle x définie pour tout $x > 0$ par $g(x) = 1 - x - 2 \ln x$.

- 1 Calculer $g(1)$.
- 2 Calculer la limite de g en 0 et en $+\infty$.
- 3 Étudier les variations de g et en déduire son tableau de variation.
- 4 Démontrer que : $\forall x \in]0; 1[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]1; +\infty[, g(x) < 0$.

Partie B

Soit la fonction h de la variable réelle x définie pour tout $x > 0$ par $h(x) = 2 + x - x^2 \ln x$.

- 1 Calculer les limites de h en 0 et en déduire que h est prolongeable par continuité en 0.
- Soit la fonction f de représentation graphique (C) dans le plan muni du repère orthogonal $(O; I; J)$ d'unités 1 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées, définie par :

$$\begin{cases} f(x) = h(x) \text{ pour } x > 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

- 2 Calculer la limite de f en $+\infty$.
- 3 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et en déduire l'interprétation graphique correspondante.
- 4 a Démontrer que f est dérivable en 0.
b En déduire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
- 5 Démontrer que $\forall x \in [0; +\infty[, f'(x) = g(x)$ et étudier les variations de f .
- 6 Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $2,2 < \alpha < 2,3$.
- 7 Tracer (T) puis la courbe (C).

Partie C

Soit k la fonction définie pour tout $x \geq 1$ par $k(x) = \frac{x^3}{3} \left(-\frac{1}{3} + \ln x \right)$.

- 1 Déterminer $k'(x)$ où k' est la dérivée de la fonction k .
- 2 En déduire une primitive de f sur $[1; +\infty[$.
- 3 Démontrer que $g(\alpha) = -\frac{4}{3} - \alpha - 1$

Problème 18

Dans tout le problème on admettra que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$ pour tout entier naturel n .

Partie A

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$.

- 1 a Calculer la limite de g en $-\infty$.

b Vérifier que $g(x) = 1 - (1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2})x^2e^{-x}$ pour tout nombre réel $x \neq 0$. En déduire la limite de g en $+\infty$.

2 On admet que g est dérivable sur \mathbb{R} .

a Calculer la dérivée g' de g et vérifier que $g'(x) = (x - 2)^2e^{-x}$.

b En déduire le signe de $g'(x)$.

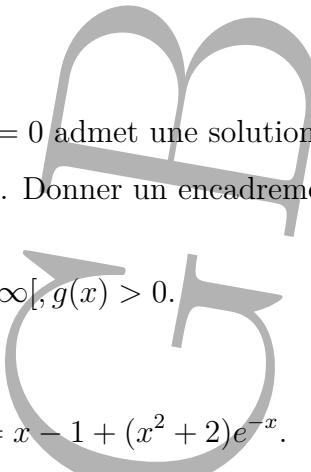
3 Etablir le tableau de variation de g .

4 a Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique sur \mathbb{R} .

b On désigne par α cette solution. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α .

5 Déduire de ce qui précède que :

$$\forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0 \text{ et } \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0.$$



Partie B

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$.

1 a Vérifier que $f(x) = x \left[1 - \frac{1}{x} + (x + \frac{2}{x})e^{-x} \right]$ pour tout réel $x \neq 0$. En déduire la limite de f en $-\infty$.

b Calculer la limite de f en $+\infty$.

2 On admet que f est dérivable sur \mathbb{R} .

Calculer la dérivée f' de f et vérifier que $f'(x) = g(x)$ pour tout x réel.

3 En déduire, à l'aide de la partie A, les variations de f et donner son tableau de variation.

4 Démontrer que $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$.

5 a Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

b Préciser la position de (C) par rapport à (Δ) .

6 Donner une équation de la tangente (T) à (C) en son point d'abscisse 0.

7 Tracer (Δ) , (T) puis (C) .

Problème 19

Le but du problème est l'étude de la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{2\ln(x) - 1}{x} \text{ et } (C) \text{ sa courbe représentative dans le repère } (O; I; J).$$

Unité : 2 cm

Partie A :

On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = -x^2 + 6 - 4\ln(x)$.

1 Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

2 Étudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

3 a Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution α dans $]0; +\infty[$.

b Vérifier que $1,86 < \alpha < 1,87$.

c Montrer que : $\forall x \in]0; \alpha[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$.

Partie B

- 1 a Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 1 b Déterminer la dérivée f' de f et montrer que pour tout élément x de $]0; +\infty[$, $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. En déduire le sens de variation de f .
- 2 a Montrer que $f(\alpha) = -\alpha + 3 + \frac{2}{\alpha}$.
- 2 b Déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude $2 \cdot 10^{-1}$.
- 3 a Montrer que la droite (D) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 3$ est asymptote à la courbe (C) .
- 3 b Déterminer le point A , intersection de (D) et (C) .
- 3 c Étudier la position de (C) par rapport à (D) .
- 4 a Calculer $\ln(e\sqrt{e})$.
- 4 b Déterminer le point B de (C) où la tangente (T) est parallèle à la droite (D) .
- 5 Construire (D) , (T) et (C) .

Partie C :

- 1 Soit $h : x \mapsto 2\frac{\ln x}{x}$ et $u : x \mapsto \ln x$.
Exprimer h en fonction de u et u' . En déduire une primitive de h sur $]0; +\infty[$.
- 2 Donner une primitive F de f sur $]0; +\infty[$.
- 3 Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C) , la droite (D) et les droites d'équations $x = e$ et $x = \sqrt{e}$.

Problème 20

On considère le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Unité graphique 2cm.

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = x + \frac{\ln|x|}{|x|}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère donné.

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$ et h la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ par $h(x) = x^2 - 1 + \ln(-x)$.

- 1 a Calculer la dérivée de la fonction g et déterminer le signe de cette dérivée. Dresser le tableau de variations de la fonction g . (On ne demande pas de calculer les limites de g).
- 1 b Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$.
- 2 a Calculer la dérivée de la fonction h et déterminer le signe de cette dérivée. Dresser le tableau de variation de la fonction h . (On ne demande pas de calculer les limites de h).
- 2 b Calculer $h(-1)$ et montrer que $\forall x \in]-\infty; -1[, h(x) > 0$; $\forall x \in]-1; 0[, h(x) < 0$.

Partie B

- 1 a Calculer les limites suivantes $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x)$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ puis interpréter les graphiquement.

- b Calculer les limites suivantes $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2 a Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C) .
- b Étudier les positions relatives de (C) et (D) . (On précisera les coordonnées des points d'intersection de (C) et (D)).
- 3 a Vérifier $\forall x \in]-\infty; 0[$, $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ et $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
- b Étudier le sens de variations de la fonction f puis dresser son tableau de variations.
- 4 a Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et vérifier que $0,6 < \alpha < 0,7$.
- b En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .
- 5 Construire la courbe (C) .
- 6 a Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- b En déduire la primitive de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1.

Problème 21

Partie A

Soit g la fonction dérivable et définie de \mathbb{R}^* vers \mathbb{R} par : $g(x) = \ln|x| - \frac{2}{x}$.

- 1 a Démontrer que pour tout nombre réel x non nul, $g'(x) = \frac{x+2}{x^2}$.
- b En déduire les variations de la fonction g puis dresser son tableau de variation. (On ne calculera pas les limites).
- 2 a Démontrer que l'équation $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $]1; +\infty[$.
- b Démontrer que : $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]\alpha; +\infty[$, $g(x) > 0$ et $\forall x \in]0; \alpha[$, $g(x) < 0$.

Partie B

Soit f la fonction dérivable et définie sur \mathbb{R} par : $\begin{cases} f(x) = \frac{e^x}{e^x + (\ln|x|)^2} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 & \end{cases}$

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) . (L'unité graphique est 4 cm).

- 1 a Étudier la continuité de f en 0.
- b Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ puis donner une interprétation graphique de chacun des résultats.
- 2 a Étudier la dérivabilité de f en 0. En déduire que (C) admet une tangente à l'origine que l'on précisera.
- b Pour tout nombre réel x différent de zéro, démontrer que : $f'(x) = \frac{\varphi(x)g(x)}{(e^x + (\ln|x|)^2)^2}$ avec $\varphi(x) = e^x \ln|x|$.
- c Démontrer que $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 4e^{-\alpha}}$ et en déduire que : $0 < f(\alpha) < 1$.
- d Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire le tableau de variation de f .

- 3 Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq f(x) \leq 1$.
- 4 Tracer la droite d'équation $y = x$ et la courbe (C) .

Problème 22

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = 4x - (1+x)e^x$.

- 1 Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2 Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
- 3
 - a Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $0,79 < \alpha < 0,80$.
 - b En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B : Etude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 4x + 1 - xe^x$.

On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O, I, J) . Unité graphique : 4cm.

- 1 Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2
 - a Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
 - b Donner une interprétation graphique du résultat.
- 3
 - a Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$.
 - b En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.
- 4 Montrer que $f(\alpha) = e^\alpha + 4\alpha - 3$.
- 5
 - a Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 4x + 1$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$.
 - b Étudier la position relative de (C) par rapport à (Δ) .
- 6
 - a Montrer que la droite $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions λ et β telles que $-1 < \lambda < 0$ et $1 < \beta < 2$.
 - b Tracer (C) et (Δ) .

Partie C : Calcul d'aire

t est un nombre réel tel que ($t \leq 0$).

On désigne par $A(t)$ l'aire de partie du plan délimitée par (C) , (Δ) et les droites d'équations $x = t$ et $x = 0$.

- 1 A l'aide d'une intégration par parties, calculer $A(t)$.
- 2
 - a Déterminer la limite de $A(t)$ lorsque t tend vers $-\infty$.
 - b Interpréter le résultat obtenu.