Correction TD : Statistiques

Exercice 1(points)(BAC 2005)

1. Calcul du coefficient de corrélation linéaire

$$r = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sqrt{V(x)}\sqrt{V(y)}}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i = \frac{60+80+100+120+140+160+180+200}{8} = \frac{1040}{8} = 130$$

$$\bar{y} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} y_i = \frac{952+805+630+522+510+324+205+84}{8} = \frac{4032}{8} = 504$$

$$V(x) = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{152000}{8} - (130)^2 = 2100$$

$$V(y) = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} y_i^2 - \bar{y}^2 = \frac{2637870}{8} - (504)^2 = 75717{,}75$$

$$\operatorname{cov}(x,y) = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i y_i - \bar{x}\bar{y} = \frac{424100}{8} - 130 \times 504 = -12507{,}5$$

$$r = \frac{-12507{,}5}{\sqrt{2100} \times \sqrt{75717{,}75}} = \frac{-12507{,}5}{45{,}83 \times 275{,}17} \approx -0{,}99$$

$r \approx -1$, donc la valeur trouvée justifie la recherche d'un ajustement linéaire.

2. Équation de la droite de régression de y en x :

$$y = ax + b, \text{ avec :}$$

$$a = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{V(x)} = \frac{-12507{,}5}{2100} = -5{,}95$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 504 - (-5{,}95)(130) = 1277{,}5$$

$$\Rightarrow y = -5{,}95x + 1277{,}5$$

3. Les frais de conception sont de 28 000 000 F. Le prix de fabrication de chaque produit est de 25 000 F.

a x est le prix de vente, donc y est le nombre d'exemplaires du produit.

le prix de vente est

$$yx = (-5{,}95x + 1277{,}5)x \quad \text{en milliers de francs}$$

le prix de revient est

$$25000y + 28000000 = 25y + 28000 \quad \text{en milliers de francs.}$$

Donc

$$z = (-5{,}95x + 1277{,}5)x - 25y - 28000$$

$$z = (-5{,}95x + 1277{,}5)x - 25(-5{,}95x + 1277{,}5) - 28000$$

$$z = -5{,}95x^2 + 1426{,}25x - 59937{,}5$$

b Déterminons le prix de vente x permettant de réaliser un bénéfice maximum.

On a :

$$z(x) = -5{,}95x^2 + 1426{,}25x - 59937{,}5$$

z est une fonction continue et dérivable en x sur $\mathbb{R}$ et :

$$z'(x) = -11{,}9x + 1426{,}25 \qquad \Rightarrow \qquad z'(x) = 0 \quad \text{si} \quad x = 119{,}85$$

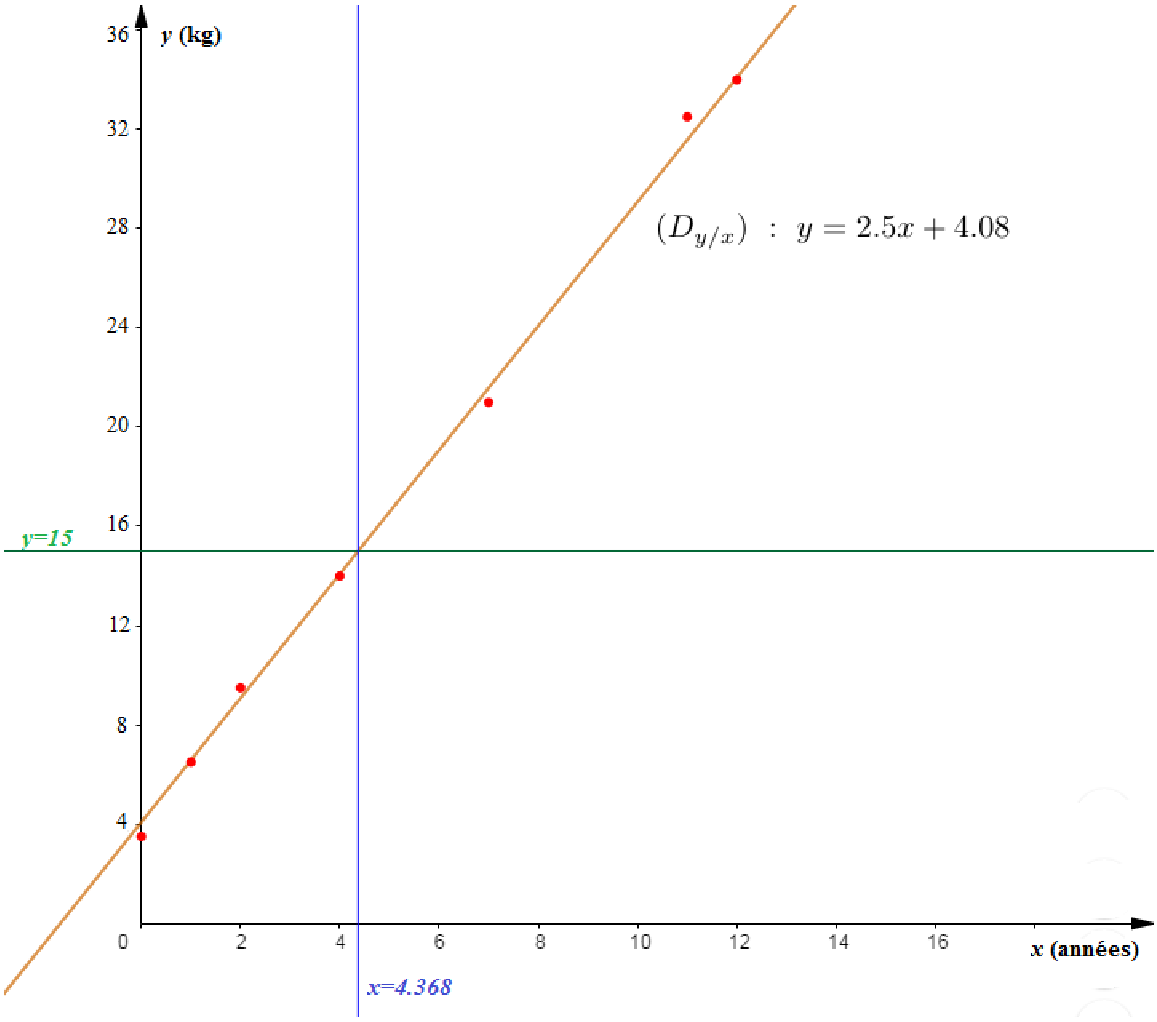
On voit ainsi que z atteint son maximum pour $x = 119{,}85$ en milliers de francs.
Donc le prix de vente permettant de réaliser un bénéfice maximum est $x = 119{,}850$ F.

$$z(119{,}85) = -5{,}95 \times (119{,}85)^2 + 1426{,}25 \times 119{,}85 - 59937{,}5 = 25532{,}628 \quad \text{en milliers de francs}$$

D'où le bénéfice maximum est **25.532.628 F**

Exercice 2(04,5 points)(BAC 2008)

1 Le nuage de point



2 G a pour coordonnées $(\bar{x},\ \bar{y})$ avec :

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum x_i \simeq 5{,}28 \quad \text{et} \quad \bar{y} = \frac{1}{N}\sum y_i \simeq 17{,}28$$

3 a

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N}\sum x_i y_i - \bar{x} \times \bar{y} \simeq 50{,}63$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N}\sum x_i^2 - \bar{x}^2} \simeq 4{,}66 \quad \text{et} \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N}\sum y_i^2 - \bar{y}^2} \simeq 11{,}39$$

Le coefficient de corrélation linéaire est donné par la formule :

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \times \sigma_y} \simeq 0{,}99$$

b r est très proche de 1, donc on a une très bonne corrélation.

4 $D_{y/x}$ a pour équation :

$$y - \bar{y} = a(x - \bar{x}) \quad \text{avec} \quad a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

Après calculs, on trouve qu'une équation de $D_{y/x}$ est :

$$y = 2{,}5x + 4{,}08$$

5 a D'après le graphique, on constate que les valeurs de y supérieures à 15 correspondent aux valeurs de x supérieures à 4,368. On ainsi dire qu'à partir de 5 ans le poids de l'enfant sera supérieur à 15 kg.

b Pour retrouver ce résultat par le calcul, on considère l'équation $D_{y/x}$ de la droite de régression de y en x.

Soit $(D_{y/x}) : y = 2{,}5x + 4{,}08$, alors on a :

$$\begin{aligned} y > 15 \Leftrightarrow & \quad 2{,}5x + 4{,}08 > 15 \\ \Leftrightarrow & \quad 2{,}5x > 15 - 4{,}08 \\ \Leftrightarrow & \quad x > \frac{10{,}92}{2{,}5} \\ \Leftrightarrow & \quad x > 4{,}368 \end{aligned}$$

D'où, $y > 15 \ \Leftrightarrow \ x > 4{,}368$

Exercice 3(03 points)(BAC 2009)

1 (D_1) droite de régression de Y en X ayant pour équation :

$$y = ax + b, \text{ on a :}$$

$$a = \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)} \qquad \text{et} \qquad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

(D_2) droite de régression de X en Y ayant pour équation :

$$x = a'y + b', \text{ on a :}$$

$$a' = \frac{\text{cov}(Y,X)}{V(Y)} \qquad \text{et} \qquad b' = \bar{x} - a'\bar{y}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} aa' &= \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)} \cdot \frac{\text{cov}(Y,X)}{V(Y)} \\ &= \frac{(\text{cov}(X,Y))^2}{V(X) \cdot V(Y)} \\ &= \left(\frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}\right)^2 \\ &= r^2 \end{aligned}$$

D'où, $\boxed{aa' = r^2}$

(D_1) droite de régression de Y en X ayant pour équation réduite :

$$y = 2{,}4x, \quad \text{on a :} \quad a = 2{,}4 \quad \text{et} \quad b = 0$$

(D_2) droite de régression de X en Y ayant pour équation réduite :

$$x = \frac{3{,}5}{9}y + \frac{24}{9}, \quad \text{on a :} \quad a' = \frac{3{,}5}{9} \quad \text{et} \quad b' = \frac{24}{9}$$

D'après la question précédente, le coefficient de corrélation vérifie :

$$\begin{aligned} r^2 &= aa' \\ &= 2{,}4 \times \frac{3{,}5}{9} \\ &= \frac{14}{15} \end{aligned}$$

Puisque $r = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$, que $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ sont positifs par définition et que $\text{cov}(X,Y)$ est positif par hypothèse, alors r est positif.

Donc,

$$r = \sqrt{\frac{14}{15}}$$

2 On a :

$$\begin{cases} -a\bar{x} + \bar{y} = b & (1) \\ \bar{x} - a'\bar{y} = b' & (2) \end{cases}$$

Je garde l'équation 1. Je multiplie l'équation 2 par a pour éliminer $\bar{x}$:

$$\begin{cases} -a\bar{x} + \bar{y} = b \\ a\bar{x} - aa'\bar{y} = ab' \end{cases}$$

J'additionne membre à membre : $(1 - aa')\bar{y} = b + ab'$, c'est-à-dire :

$$\bar{y} = \frac{b + ab'}{1 - r^2}$$

Pour trouver $\bar{x}$, j'utilise l'équation la plus simple ; ici c'est la 2 : $\bar{x} = b' + a'\bar{y}$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= b' + a' \cdot \frac{b + ab'}{1 - r^2} \\ &= \frac{b'(1 - r^2) + a'(b + ab')}{1 - r^2} \\ &= \frac{b' + a'b}{1 - r^2} \end{aligned}$$

Donc,

$$\bar{x} = \frac{b' + a'b}{1 - r^2}$$

Application numérique : Comme $\dfrac{1}{1 - r^2} = 15$, on a :

$$\bar{y} = 15 \times 2{,}4 \times \frac{24}{9} \qquad \text{et} \qquad \bar{x} = 15 \times \frac{24}{9}$$

$$\boxed{\bar{y} = 96 \quad \text{et} \quad \bar{x} = 40}$$

Exercice 4(03 points)(BAC 2010)

Exercice 5(05 points)(BAC 2013)

Exercice 6(02,5 points)(BAC 2015)