◇◇◇ Lycée de Dindéfélo ◇◇◇			A.S. : 2024/2025
Matière: Mathématiques	Niveau : TS2	Date: 21/01/2025	Durée : 4 heures

Devoir n° 2 Du 1er Semestre

Exercice 1 : 4 points [*Déjà corrigé en classe*]

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3}, \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*),\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1+(n+2)u_n}. \end{cases}$$

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $v_n = \dfrac{1}{u_n} - n$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique. **1,5 pt**
2. a. Déterminer v_n et u_n en fonction de n. **1 pt**

   b. Calculer en fonction de n la somme : $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$. **1,5 pt**

Exercice 2 (BAC 2022) : 4 points [*Déjà corrigé en classe par moi-même*]

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit le nombre complexe a défini par

$$a = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

1. Montrer que $a^2 = -2\sqrt{3} - 2i$, puis en déduire le module de a. **0,5 + 0,5 pt**
2. Écrire a^2 sous forme trigonométrique puis
   vérifier qu'une des mesures de l'argument de a est $\dfrac{19\pi}{12}$. **0,5 + 0,5 pt**
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$, puis de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$. **1 pt**
4. Représenter sur le même graphique les points images de a, $-a$ et a^2. **1 pt**

Exercice 3 : 4 points [*Exercice 1 du devoir N1 déjà corrigé par moi-même*]

1. Calculer les limites suivantes : **(0,5pt × 3+0,25pt)**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sin 2x} \ ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^3 + x^2} \ ; \quad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x}}.$$

2. Donner les primitives des fonctions f et g respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. **(2 × 0,5 pt)**

$$f(x) = (3x-1)(3x^2-2x+3)^3 \ ; \quad g(x) = \frac{1-x^2}{(x^3-3x+2)^3}.$$

Problème : 9,75 points [*Exercice d'application déjà corrigé par moi-même*]

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sqrt{1-x^2} & \text{si } x > 0 \\ -x + \sqrt{x^2 - 2x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. Déterminer D_f, les limites aux bornes et préciser la branche infinie. **(0,5pt $\times$ 3)**
2. Étudier la dérivabilité de f en 0 et 1
   interpréter géométriquement les résultats obtenus. **(0,5pt $\times$ 3+0,5pt $\times$ 3)**
3. Calculer $f'(x)$ là où f est définie, puis dresser le tableau de variation de f.**(0,5pt $\times$ 2+0,5pt $\times$ 2 + 0,5pt)**
4. Tracer la courbe de f. **(0,75pt)**
5. Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; 0]$.
   - a. Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité et le tableau de variation. **(0,5pt)**
   - b. Sans utiliser l'expression de $h^{-1}(x)$, calculer $(h^{-1})'(2)$. **(0,5pt)**
   - c. Déterminer explicitement h^{-1}. **(0,5pt)**
   - d. Tracer la courbe de h^{-1} dans le même repère que celle de f. **(0,5pt)**