

Calcul Intégral Ts2

Destiné aux élèves de Terminale S

Lycée de Dindéfelo

Présenté par M. BA

7 juin 2025

I. Primitive

1. Définition

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction continue sur I . On dit que F est une primitive de f sur I notée $\int f$ si,
 F est dérivable sur I et $\forall x \in I, F'(x)=f(x)$

Exemple

Soit f et F deux fonctions définies par :

Théorème 1

Toute fonction continue sur I y admet une primitive.

Théorème 2

Si F est une primitive de f sur I , alors toute fonction G définie par $G(x) = F(x) + c$; c une constante est aussi une primitive de f sur I .

Donc deux primitives quelconques d'une fonction diffèrent d'une constante et il existe une unique primitive qui prend une valeur y en x_0 .

Théorème 3

Soit f une fonction dérivable sur I de dérivée f' continue sur I et g une fonction continue sur I de primitive G définie sur un intervalle J contenant $f(I)$, alors $(g \circ f)f'$ a pour primitive sur I , $G \circ f$.

2. Opération sur les primitives

Si F est une primitive de f et G une primitive de g , alors
 $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Tableau de quelques primitives

u et v sont deux fonctions continues et c une constante.

f	F
$\alpha \in \mathbb{R}$	$ax + c$
$\frac{1}{x}; x > 0$	$\ln(x) + c$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$-\sin x + c$
$\frac{1}{\sqrt{x}}; x > 0$	$2\sqrt{x}$
$\frac{1}{x^2}; x > 0$	$-\frac{1}{x}$

f	F
$u' \cos u$	$\sin u$
$u' \sin u$	$-\cos u$
$\frac{u'}{\cos^2 u} = 1 + \tan^2 u$	$\tan u$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u'v + v'u$	uv
$\lambda f; \lambda \in \mathbb{R}$	λF
$\frac{u'v + v'u}{v^2}$	$\frac{u}{v}$

f	F
$\alpha \in \mathbb{R}$	$ax + c$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$
$u'e^u$	e^u
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$

Théorème

Si u et v sont dérivables sur I de dérivées u' et v' continues sur I , alors
 $\int u'v = uv - \int uv'$ En effet, $(uv)' = u'v + v'u \implies u'v = (uv)' - uv'$
 $\implies \int u'v = \int (uv)' - \int uv'$
 $\implies \int u'v = uv - \int uv'$

Exemple

Déterminer les primitives de :

$$f(x) = x \cos x; g(x) = xe^x; h(x) = \ln x$$

Résolution

II. Définition et propriétés

1. Définition

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , $a, b \in I$ et f une fonction continue sur I . On appelle intégrale de a à b de f le réel noté

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur $[a, b]$ ou $[b, a]$

Remarques

- Le choix de la primitive F n'influe pas le résultat de l'intégrale. En effet, si F et G sont deux primitives d'une même fonction f sur I , alors elles diffèrent d'une constante. Les quantités $F(b) - F(a)$ et $G(b) - G(a)$ sont donc égales.

Soit $G(x) = F(x) + c$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a) = F(b) + c - (F(a) + c) = F(b) - F(a)$$

- Soit I un intervalle et $x_0 \in I$ pour tout réel x de I , nous avons :

$$\int_{x_0}^x f(t)dt = [F(t)]_{x_0}^x = F(x) - F(x_0)$$

La fonction F définie sur I par

$$F = \int_{x_0}^x f(t)dt$$

est donc la primitive de f sur I qui s'annule en x_0 .

- La lettre t (ou x) choisie pour la variable est une variable "muette" ; elle peut être notée par toute autre lettre. Ce qui signifie que :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = F(b) - F(a)$$

Exemple

Calculer

$$I = \int_4^5 \frac{1}{x^2 - 9} dx, J = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx, K = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

Résolution

2. Propriétés

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , $a, b, c, \in I$, f et g deux fonctions continues sur I , $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

•

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

•

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

• Relation de Chasles

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

• Linéarité de l'intégration

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

• Si f est paire, alors

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

• Si f est impaire, alors

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

• Si f est périodique de période T , alors

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

• Positivité de l'intégration : si $a \leq b$ et $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

- Conservation de l'ordre de l'intégration : $a \leq b$ et $f \geq g$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

•

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b g(x)dx$$

- Inégalité de la moyenne : La fonction f étant continue sur $[a, b]$, alors il existe deux réels m et M tels que, pour tout réel $x \in [a, b]$ on ait $m \leq f(x) \leq M$ et donc :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

En effet

$$m \leq f(x) \leq M \implies \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx \implies m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Théorème de la moyenne

Pour toute fonction f définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Le réel $f(c)$ est appelé valeur moyenne de f sur $[a, b]$.

Interprétations géométriques

Le plan est muni d'un repère orthogonal O, \vec{i}, \vec{j} . Soit f une fonction continue et positive de courbe représentative C_f , alors

- L'encadrement

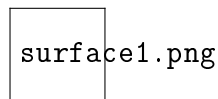
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

signifie que l'aire du domaine coloré est minorée par l'aire du rectangle $ABCD$, et majorée par celle du rectangle $ABEF$

- L'égalité

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

signifie que l'aire du domaine coloré est égale à celle du rectangle $ABGH$



Exercice d'application

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$
Montrer que u_n est décroissante

Résolution

III. Méthodes d'intégration

1. A l'aide du tableau de primitives

Exemple

Calculer

$$I = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx, J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \cos 3x dx$$

2. A l'aide de la linéarisation

Exemple

Calculer

$$I = \int_0^{\pi} \sin^5 x dx$$

3. Par changement de variables

Théorème

Si g est continue sur $[a, b]$ et de dérivée g' continue sur $[a, b]$.

Si f est continue sur $[\alpha, \beta]$ avec $\alpha = g(a)$ et $\beta = g(b)$, alors

$$\int_a^b f \circ g(x) g'(x) dx = \int_\alpha^\beta f(u) du$$

Exemple

Calculer

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx, B = \int_0^\pi \sin x \cos^4 x dx$$

Résolution

Remarque

$$\int_a^b \alpha f(\alpha t + \beta) dt = \int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} f(u) du$$

$$u = \alpha t + \beta \Rightarrow du = \alpha dt$$

4. Intégration par parties

Si u et v sont dérivables sur I de dérivées u' et v' continues sur I et $a, b \in I$ alors

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

Exemple

Calculer les intégrales suivantes

$$A = \int_0^\pi x \cos x dx, B = \int_1^e x \ln x dx$$

Résolution

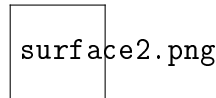
IV. Calcul d'aire et de volume

1. Calcul d'aires

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthogonale, $||\vec{i}|| = m$ cm, $||\vec{j}|| = n$ cm.

L'unité d'aire est l'aire du quadrilatère construit sur les vecteurs de bases du repères.

1 unité d'aire ($u.a$) = $m \times n \text{ cm}^2$



- Soit $f \geq 0$ sur $[a, b]$.

L'aire \mathcal{A} de la partie du plan comprise entre C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx \quad u.a$$

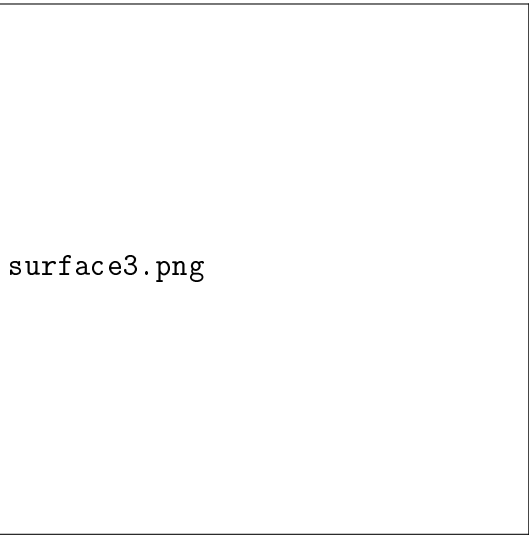
Exemple

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthogonale, $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 1 \text{ cm}$. On considère la parabole C_f représentant la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.

Calculer l'aire \mathcal{A} en cm^2 du domaine délimité par C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$

Résolution


$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)| dx \\ &= \int_{-1}^1 |e^x - 1| dx \\ &= \int_{-1}^0 -(e^x - 1) dx + \int_0^1 e^x - 1 dx \\ &= -[e^x - x]_{-1}^0 + [e^x - x]_0^1 \\ &= -\left[1 - \frac{1}{e} - 1\right] + [e - 1 - 1] \\ &= \frac{1}{e} + e - 2 \end{aligned}$$



surface3.png

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et D une droite d'équation $\alpha x + \beta$.
L'aire de la partie du plan comprise entre C_f , D et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à :

$$\int_a^b |f(x) - (\alpha x + \beta)| dx \text{ u.a}$$



surface3.png

- Soit $f \geq 0$ sur $[a, b]$.

L'aire \mathcal{A} de la partie du plan comprise entre C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx \text{ u.a}$$

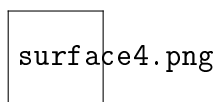
Exemple

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^2$.

Calculer l'aire \mathcal{A} du domaine délimité par C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$

Résolution

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{-1}^2 -f(x)dx \\ &= \int_{-1}^2 x^2 dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{8}{3} - \frac{(-1)^3}{3} \\ &= \frac{8}{3} + \frac{1}{3} \\ &= 3 \text{ cm}^2\end{aligned}$$



- Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$
L'aire de la partie du plan comprise entre C_f , C_g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à :

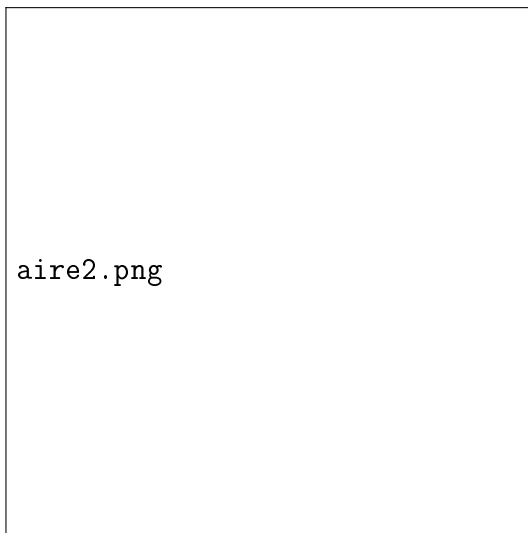
$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \quad u.a$$

Exemple : cas particulier d'une fonction changeant de signe

Soit f et g les fonctions définies sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x - 1$ et $g(x) = 0$
Calculer l'aire \mathcal{A} du domaine délimité par C_f , C_g et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$

Résolution

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)| dx \\ &= \int_{-1}^1 |e^x - 1| dx \\ &= \int_{-1}^0 -(e^x - 1) dx + \int_0^1 e^x - 1 dx \\ &= -[e^x - x]_{-1}^0 + [e^x - x]_0^1 \\ &= -\left[1 - \frac{1}{e} - 1\right] + [e - 1 - 1] \\ &= \frac{1}{e} + e - 2\end{aligned}$$



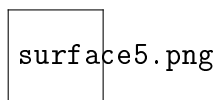
• Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et D une droite d'équation $\alpha x + \beta$.
L'aire de la partie du plan comprise entre C_f , D et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à :

$$\int_a^b |f(x) - (\alpha x + \beta)| dx \text{ u.a}$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = \sqrt{x}$ et D et les droites d'équation $x = \frac{1}{2}$ et $x = 2$

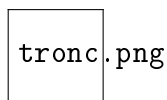
$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{\frac{1}{2}}^2 |f(x) - (\alpha x + \beta)| dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^2 (x + \frac{1}{2} - \sqrt{x}) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{1}{2}}^2 \\ &= 3 - \frac{3}{8} - \frac{7\sqrt{2}}{6}\end{aligned}$$



IV.2 Calcul de volume

Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthogonal.

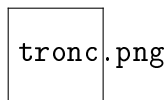
L'unité de volume est le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs de bases du repères.



Soit S un solide de hauteur h . Un plan \mathcal{P} parallèle au plan $(x'Ox)$ coupe S suivant une figure plane de surface $S(z)$. Le volume \mathcal{V} de S est égal à

$$\mathcal{V} = \int_0^h S(z) dz \text{ u.v.}$$

1 u.v. = une unité de volume

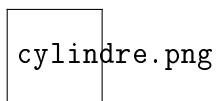


Exemples

a) Cylindre (R, h)

$$S(z) = \pi R^2$$

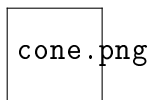
$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \int_0^h S(z) \, dz \\ &= \int_0^h \pi R^2 \, dz \\ &= [\pi R^2 z]_0^h \\ &= \pi R^2 h\end{aligned}$$



b) Cône (R, h)

$S(z) = \pi r^2$, d'après Thalès $\frac{r}{R} = \frac{z}{h}$, donc $S(z) = \pi \frac{R^2}{h^2} z^2$.
Donc

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \int_0^h S(z) \, dz \\ &= \int_0^h \pi \frac{R^2}{h^2} z^2 \, dz \\ &= \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h z^2 \, dz \\ &= \pi \frac{R^2}{h^2} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^h \\ &= \pi \frac{R^2 h}{3}\end{aligned}$$

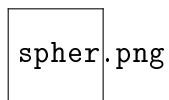


c) Sphère de rayon R

$S(z) = \pi r^2$ or $r^2 + z^2 = R^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - z^2$, donc $S(z) = \pi(R^2 - z^2)$.

Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \int_{-R}^R S(z) \, dz \\ &= \int_{-R}^R \pi(R^2 - z^2) \, dz \\ &= 2\pi \int_0^R (R^2 - z^2) \, dz \\ &= 2\pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_0^R \\ &= 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3\end{aligned}$$



Remarque

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors le volume engendré par la rotation de C_f , $x = a$ et $x = b$ autour de l'axe des abscisses est égal à

$$\mathcal{V} = \int_a^b \pi(f(x))^2 \, dx$$