⋄⋄⋄ Lycée de Dindéfélo ⋄⋄⋄			A.S. : 2024/2025
Matière : Mathématiques	Niveau : T S2	Date : 27/05/2025	

Correction Td : Équations différentielles

Exercice 7 BAC 2009

1. Soit la fonction k définie par :
$k(x) = (x+2)e^{-x}$

a. Étudier les variations de k.

b. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_k) de k au point d'abscisse 0.

c. Démontrer que le point $I(0;2)$ est un point d'inflexion de la courbe (C_k).

d. Tracer (C_k) et (T) dans le même repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 7 BAC 2009

1. Résolvons l'équation différentielle
$(E): \quad y'' + 2y' + y = 0$
$(EC): \quad r^2 + 2r + r = 0$
$\Delta = 0$ donc $r_0 = -1$
Donc la solution de l'équation diff est de la forme $y_H(x) = (Ax+B)e^{-x}$

2. Soit (E') l'équation différentielle
$y'' + 2y' + y = x + 3$.
Déterminons les réels a et b tels que la fonction $h(x) = ax + b$ soit solution de (E').
h est solution de (E') ssi $h'' + 2h' + h = x + 3$

$$\begin{aligned} h'' + 2h' + h = x + 3 &\Longrightarrow (ax+b)'' + 2(ax+b)' + (ax+b) = x + 3 \\ &\Longrightarrow 2a + ax + b = x + 3 \\ &\Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $y_p(x) = h(x) = x + 1$

a. Montrons que g solution de (E') ssi $g - h$ est solution de (E)
∗ Supposons que g est solution de (E'), montrons que $g - h$ est solution de (E)
g solution de $(E') \Rightarrow g'' + 2g' + g = x + 3 \quad (1)$
Or h est solution de $(E') \Rightarrow h'' + 2h' + h = x + 3 \quad (2)$

$$\begin{aligned} (1) - (2) &\Rightarrow g'' - h'' + 2g' - 2h' + h - g = x + 3 - x - 3 \\ &\Rightarrow (g-h)'' + 2(g-h)' + h - g = 0 \end{aligned}$$

donc $g - h$ est solution de (E)
D'où g solution de $(E') \Rightarrow g - h$ solution de (E)
∗ Supposons que $g - h$ est solution de $(E) \Rightarrow g$ solution de (E')

Montrons que g est solution de (E')

$g-h$ solution de $(E) \Rightarrow (g-h)''+2(g-h)'+g-h=0 \quad (1)$

Or h solution de $(E') \Rightarrow h''+2h'+h=x+3 \quad (2)$

$$\begin{aligned}(1)-(2) &\Rightarrow (g-h)''+h''+2(g-h)'+2h'+g-h+h=x+3\\ &\Rightarrow g''-h''+h''+2g'-2h'+2h'+g-h+h=x+3\\ &\Rightarrow g''+2g'+g=x+3\end{aligned}$$

b Résolvons (E')

$(E') : y''+2y'+y=x+3$

D'après 1) $y_H(x)=(Ax+B)e^{-x}$ et 2) $y_p(x)=h(x)=x+1$

Donc la solution de $(E') : y_H(x)+y_p(x)=(Ax+B)e^{-x}+x+1$