Exercice 1 : 6 points (Application Affine et Factorisation)

1. Soit la fonction affine $f(x) = 2x + 1$
   - a. Calculer $f(1)$ puis conclure
   - b. Résoudre $f(x) = 5$ puis conclure
2. Déterminer le taux d'accroissement de la fonction affine telle que : $f(3) = 3$ et $f(2) = 4$
3. Factoriser au mieux :
   $\mathbf{A}(x) = x^3 - 8 + 2(x-2)^2$
4. Factoriser, si possible, les trinômes suivants :

$$\mathbf{B}(x) = -2x^2 + 4x + 6 \qquad \mathbf{C}(x) = x^2 - 8x + 17 \qquad \mathbf{D}(x) = -9x^2 + 6x - 1$$

Exercice 2 : 4 points (Résolution de systèmes par la méthode de Cramer)

Résolvons chacun des systèmes suivants en utilisant la méthode de Cramer :

a) $\begin{cases} 3x - y + 2 = 0 \\ 3x - y - 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 3x - y = -2 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

Calcul du déterminant de :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (3)(-1) - (3)(-1) = -3 + 3 = 0.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2)(-1) - (1)(-1) = 2 + 1 = 3.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (3)(-2) = 3 + 6 = 9.$$

$\Delta = 0$, $\Delta_x \neq 0$ **et** $\Delta_y \neq 0$

Le système n'admet pas de solution.

b) $\begin{cases} 2y + x = 5 \\ -y + 7 = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 0 - y = -3 \end{cases}$

Calcul du déterminant de :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-1) - (0)(2) = -1.$$

Le déterminant est non nul, nous pouvons utiliser la règle de Cramer.

Calcul de x : $\quad x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \dfrac{(5)(-1)-(3)(2)}{-1} = \dfrac{-5-6}{-1} = \dfrac{-11}{-1} = 11.$

Calcul de y : $\quad y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{-1} = \dfrac{(1)(3)-(0)(5)}{-1} = \dfrac{3}{-1} = -3.$

Solution du système : $\boxed{S = \{(11,\ -3)\}}$.

c) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

Calcul du déterminant de :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (3)(-1) - (2)(-1) = -3 + 2 = -1.$$

Le déterminant est non nul, nous pouvons utiliser la règle de Cramer.

Calcul de x : $\quad x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \dfrac{(2)(-1)-(1)(-1)}{-1} = \dfrac{-2+1}{-1} = \dfrac{-1}{-1} = 1.$

Calcul de y : $\quad y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \dfrac{(3)(1)-(2)(2)}{-1} = \dfrac{3-4}{-1} = \dfrac{-1}{-1} = 1.$

Solution du système : $\boxed{S = \{(1,\ 1)\}}$.

d) $\begin{cases} x + y = 3 \\ -y + 4 = x - 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y = 3 \\ -x - y = -6 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 6 \end{cases}$

Calcul du déterminant de :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (1)(1) = -1 + 1 = 0.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (6)(1) = -3 + 6 = 3.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = (1)(6) - (1)(3) = -6 + 3 = -3.$$

$\Delta = 0, \Delta_x \neq 0$ **et** $\Delta_y \neq 0$

$\boxed{\text{Le système n'admet pas de solution.}}$

Exercice 3 : 6 points (Équations et inéquations du second degré)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $-x^2 - x + 2 = 0$ **b)** $-9x^2 + 12x - 3 = 0$

c) $-3x^2 + 4x - 2 \leq 0$ **d)** $8x^2 + 34x + 21 < 0$

e) $2x^2 - x - 3 > 0$ **f)** $4 - 9x^2 \geq 0$

Exercice 4 : 4 points (Union et Intersection d'Intervalles)

1. On considère $I = [-1, 5]$ et $J = [0, 7]$. Déterminer $I \cup J$ et $I \cap J$.
2. On considère $K = [-7, -3]$ et $L = [1, 3]$. Déterminer $K \cup L$ et $K \cap L$.