⋄⋄⋄ Lycée de Dindéfélo ⋄⋄⋄			A.S. : 2025/2026
Matière: Mathématiques	Niveau : 2ndS	Date: 20/12/2025	Durée : 4 heures

Devoir n° 2 Du 1$^{\text{ère}}$ Semestre

Exercice 1 : (4,5 points)

Soient $x > 0$ et $y > 0$.

1. Démontrons que : $\dfrac{1}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{2xy}$.

   Comme $(x-y)^2 \geq 0$, on a : $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + y^2 \geq 2xy$.

   Les deux membres étant strictement positifs, on peut prendre les inverses :

$$\frac{1}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2xy}.$$

2. a) Déduisons que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).$$

En multipliant l'inégalité précédente par $x + y > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{x+y}{x^2+y^2} &\leq \frac{x+y}{2xy}\\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{x}{xy}+\frac{y}{xy}\right)\\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\end{aligned}$$

b) En utilisant des inégalités semblables, montrons que pour tous $x > 0$, $y > 0$ et $z > 0$, on a :

$$\frac{x+y}{x^2+y^2}+\frac{y+z}{y^2+z^2}+\frac{z+x}{z^2+x^2} \leq \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

En effet, on a successivement :

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right),$$
$$\frac{y+z}{y^2+z^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right),$$
$$\frac{z+x}{z^2+x^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right).$$

En additionnant membre à membre, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{x+y}{x^2+y^2}+\frac{y+z}{y^2+z^2}+\frac{z+x}{z^2+x^2} &\leq \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)\right]\\ &\leq \frac{1}{2}\left(2\frac{1}{x}+2\frac{1}{y}+2\frac{1}{z}\right)\\ &\leq \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\end{aligned}$$

Exercice 2 : (4,5 points)

1. **Encadrement du carré $x - y$. (1 point)**

   Encadrer $x - y$ dans les cas suivants :

   a $-2 \leq x \leq -1$ et $2 \leq y \leq 3$.

   b En déduire l'amplitude de l'encadrement de $x - y$

2. **Encadrement du carré xy. (1 point)**

   Encadrer xy dans les cas suivants :

   a $-10 \leq x \leq -7$ et $1 \leq y \leq 2$.

   b $-2 \leq x \leq 5$ et $2 \leq y \leq 7$.

3. **Encadrement du carré x^2. (1 point)**

   Encadrer x^2 dans les cas suivants :

   a $-7 \leq x \leq -3$

   b $-2 \leq x \leq 3$

4. **Encadrer $\dfrac{x}{y}$ dans les cas suivants. (1,5 point)**

   a $1 \leq x \leq 2$ et $3 \leq y \leq 7$

   b $-1 \leq x \leq -3$ et $-7 \leq y \leq 2$

   c $-5 \leq x \leq -3$ et $3 \leq y \leq -1$

++++++++++++++++++++++++++

Correction de l'Exercice 2

1. **Encadrement de $x - y$**

   On a $-2 \leq x \leq -1$ et $2 \leq y \leq 3$.

   - x est maximal pour $x = -1$ et y est minimal pour $y = 2$:

   $$x - y \leq -1 - 2 = -3$$

   - x est minimal pour $x = -2$ et y est maximal pour $y = 3$:

   $$x - y \geq -2 - 3 = -5$$

   Donc

   $$\boxed{-5 \leq x - y \leq -3}$$

   Amplitude de l'encadrement :

   $$-3 - (-5) = 2$$

2. **Encadrement de xy**

a $-10 \leq x \leq -7$ et $1 \leq y \leq 2$
x est négatif et y positif, donc xy est négatif.

$$x = -10,\ y = 2 \Rightarrow xy = -20$$
$$x = -7,\ y = 1 \Rightarrow xy = -7$$

Ainsi

$$\boxed{-20 \leq xy \leq -7}$$

b $-2 \leq x \leq 5$ et $2 \leq y \leq 7$
x peut être négatif ou positif, y est positif.

$$x = -2,\ y = 7 \Rightarrow xy = -14$$
$$x = 5,\ y = 7 \Rightarrow xy = 35$$

Donc

$$\boxed{-14 \leq xy \leq 35}$$

3 Encadrement de x^2

a $-7 \leq x \leq -3$

$$(-7)^2 = 49 \quad \text{et} \quad (-3)^2 = 9$$

Donc

$$\boxed{9 \leq x^2 \leq 49}$$

b $-2 \leq x \leq 3$
Le minimum est atteint en $x = 0$.

$$\boxed{0 \leq x^2 \leq 9}$$

4 Encadrement de $\dfrac{x}{y}$

a $1 \leq x \leq 2$ et $3 \leq y \leq 7$
x et y sont positifs.

$$\frac{1}{7} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{2}{3}$$

b $-3 \leq x \leq -1$ et $-7 \leq y \leq 2$
Attention : y peut s'annuler.

$$\boxed{\text{Encadrement impossible car } y = 0 \text{ est possible}}$$

c $-5 \leq x \leq -3$ et $-1 \leq y \leq 3$
Attention : y peut s'annuler.

$$\boxed{\text{Encadrement impossible car } y = 0 \text{ est possible}}$$

++++++++++++++++++++++++++

Exercice 3 : (2,75 points)

1 On donne :

$$A = \frac{1}{1+\frac{a}{b+c}}, \quad B = \frac{1}{1+\frac{b}{c+a}}, \quad C = \frac{1}{1+\frac{c}{a+b}}.$$

Vérifions que $A+B+C=2$.

$$A = \frac{1}{\frac{a+b+c}{b+c}} = \frac{b+c}{a+b+c}, \quad B = \frac{1}{\frac{a+b+c}{a+c}} = \frac{a+c}{a+b+c}, \quad C = \frac{1}{\frac{a+b+c}{a+b}} = \frac{a+b}{a+b+c}.$$

Ainsi :

$$A+B+C = \frac{b+c}{a+b+c} + \frac{a+c}{a+b+c} + \frac{a+b}{a+b+c}.$$

En regroupant :

$$A+B+C = \frac{(b+c)+(a+c)+(a+b)}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c}.$$

Donc :

$$A+B+C=2.$$

(1,5 point)

2 Mettons D sous la forme d'un produit de puissances de nombres premiers :

$$D = \frac{(-25)^3 \times (-16)^3 \times 36^{-3}}{(-8)^4 \times 48^{-2} \times (-15)^2}.$$

Décomposons chaque facteur :

$$(-25)^3 = -(5^2)^3 = -5^6, \quad (-16)^3 = -(2^4)^3 = -2^{12}, \quad 36^{-3} = (2^2 \cdot 3^2)^{-3} = 2^{-6}3^{-6}.$$

$$(-8)^4 = (2^3)^4 = 2^{12}, \quad 48^{-2} = (2^4 \cdot 3)^{-2} = 2^{-8}3^{-2}, \quad (-15)^2 = (3 \cdot 5)^2 = 3^2 5^2.$$

En remplaçant dans l'expression de D :

$$D = \frac{(-1)\cdot(-1)\cdot 2^{12}\cdot 2^{-6}\cdot 3^{-6}\cdot 5^6}{2^{12}\cdot 2^{-8}\cdot 3^{-2}\cdot 3^2\cdot 5^2}.$$

Les signes négatifs se compensent, donc :

$$D = 2^{(12-6-12+8)}\cdot 3^{(-6+2-2)}\cdot 5^{(6-2)}.$$

Ainsi :

$$D = 2^2 \cdot 3^{-6} \cdot 5^4.$$

(1,25 point)

<u>Exercice 4 :</u> (8,25 points)

(1) Complétons le tableau suivant : **(2,25 pt)**

Valeur absolue	Distance	Encadrement	Intervalle
$\lvert x-3\rvert \leq 1$	$d(x,3) \leq 1$	$2 \leq x \leq 4$	$x \in [2;4]$
$\lvert x+4\rvert < 2$	$d(x,-4) < 2$	$-6 < x < -2$	$x \in]-6;\,-2[$
$\lvert x+\frac{11}{4}\rvert \leq \frac{9}{4}$	$d\left(x,\,-\frac{11}{4}\right) \leq \frac{9}{4}$	$-5 \leq x \leq -\frac{1}{2}$	$x \in \left[-5;-\dfrac{1}{2}\right]$

(2) Résolvons dans $\mathbb{R}$

a $|2x+3| > 0$ toujours vrai deonc $S = \mathbb{R} \setminus \{-\dfrac{3}{2}\}$ **(1 point)**

$$\mathbf{S} = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$$

b $|-2x+3| \geq 6$ **(1 point)**

$$\begin{aligned}
|-2x+3| \geq 6 &\implies -2x+3 \geq 6 \textbf{ ou } -2x+3 \leq -6\\
&\implies -2x \geq 3 \textbf{ ou } -2x \leq -9\\
&\implies x \leq -\frac{3}{2} \textbf{ ou } x \geq \frac{9}{2}\\
&\implies x \in \left]-\infty;-\frac{3}{2}\right] \textbf{ ou } x \in \left]\frac{9}{2};+\infty\right]\\
&\implies x \in \left(\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right] \cup \left]\frac{9}{2};+\infty\right]\right)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{S} = \left(\left]-\infty;-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right] \cup \left]\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}};+\infty\right]\right)$$

c $|3x+5| \leq 2$ **(1 point)**

$$\begin{aligned}
|3x+5| \leq 2 &\implies -2 \leq 3x+5 \leq 2\\
&\implies -7 \leq 3x \leq -3\\
&\implies \frac{-7}{3} \leq x \leq \frac{-3}{3}\\
&\implies \frac{-7}{3} \leq x \leq -1
\end{aligned}$$

$$\mathbf{S} = \left[\frac{-\mathbf{7}}{\mathbf{3}},-\mathbf{1}\right]$$

d $|3-x| = 4x-3$ **(1 point)**

L'équation n'a de sens que ssi $4x-3 \geq 0$

$$\begin{aligned}
4x-3 \geq 0 &\implies x \geq \frac{3}{4}\\
&\implies x \in \left[\frac{3}{4},+\infty\right[
\end{aligned}$$

$$Dv = \left[\frac{3}{4},+\infty\right[$$

$$\begin{aligned} |3-x| = 4x-3 &\implies 3-x = 4x-3 \text{ ou } 3-x = -4x+3 \\ &\implies -5x = -6 \text{ ou } 3x = 0 \\ &\implies x = \frac{6}{5} \text{ ou } x = 0 \end{aligned}$$

$0 \notin Dv$ et $\frac{6}{5} \in Dv$

$$\mathbf{S} = \left\{\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}}\right\}$$

e $E(|x-3|) = 2$ **(1 point)**

$$\begin{aligned} E(|x-3|) = 2 &\implies E(|x-3|) \leq |x-3| < E(|x-3|)+1 \\ &\implies 2 \leq |x-3| < 3 \\ &\implies \begin{cases} |x-3| \geq 2 \\ |x-3| < 3 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} x-3 \geq 2 \text{ ou } x-3 \leq -2 \\ -3 < x-3 < 3 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} x \geq 5 \text{ ou } x \leq 1 \\ 0 < x < 6 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} x \in]5,+\infty[\text{ ou } x \in]-\infty,1[\\ x \in]0,6[\end{cases} \\ &\implies \begin{cases} x \in (]5,+\infty[\cup]-\infty,1[) \\ x \in]0,6[\end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= (]5,+\infty[\cup]-\infty,1[) \cap]0,6[\\ &= (]5,+\infty[\cap]0,6[) \cup (]-\infty,1[\cap]0,6[) \\ &= (]5,6[) \cup (]0,1[) \\ &=]0,1[\cup]5,6[\end{aligned}$$

$$\mathbf{S} =]\mathbf{0},\mathbf{1}[\cup]\mathbf{5},\mathbf{6}[$$

f $E(|x-2|) = -2$ **(1 point)**

$$\begin{aligned} E(|x-2|) = -2 &\implies E(|x-2|) \leq |x-2| < E(|x-2|)+1 \\ &\implies -2 \leq |x-2| < -1 \\ &\implies \begin{cases} |x-2| \geq -2 \\ |x-2| < -1 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in \emptyset \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \mathbb{R} \cap \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\mathbf{S} = \emptyset$$