6) *Similitude plane directe*

Toute transformation du plan d'écriture complexe $z' = az + b, a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $|a| \neq 1$ est une *similitude plane directe*. La similitude plane directe est souvent notée S.

λ, θ et Ω sont appelés *les éléments caractéristiques de la similitude plane directe* :

- **Son rapport :** $\lambda = |a|$
- **Son angle :** $\theta = \arg(a)\ [2\pi]$
- **Son centre :** son centre est Ω tel que $z_\Omega = \dfrac{b}{1-a}$.

On dit que S est la similitude directe de rapport λ, d'angle θ et de centre Ω et on note $S(\Omega, \theta, \lambda)$.

Toute similitude plane directe $z' = az+b$ de rapport λ, d'angle θ et de centre Ω s'écrit sous la forme :

$$z' = \lambda e^{i\theta} z + b$$

avec :

$$a = \lambda e^{i\theta} \quad \text{et} \quad b = (1-a)z_\Omega.$$

Démonstration

On a : $z' = az + b \quad (1), \qquad S(\Omega) = \Omega \qquad$ donc $z_\Omega = az_\Omega + b \quad (2)$.

En faisant la différence de (1) et (2), on a :

$$z' - z_\Omega = a(z - z_\Omega) \quad \text{donc} \quad a = \frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega}.$$

$$\left| \frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} \right| = |a| = \lambda \quad (3),$$

$$\arg\left(\frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} \right) = \arg(a) = \theta \quad (4).$$

D'après (3) et (4), on a

$$\frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} = \lambda \times e^{i\theta} = \lambda e^{i\theta}.$$

$$\frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} = \lambda e^{i\theta} \quad \text{donc} \quad z' - z_\Omega = \lambda e^{i\theta}(z - z_\Omega).$$

Exemple

1) Soit la similitude directe S telle que

$$z_A - z_B = 2e^{i\frac{\pi}{4}}(z_C - z_B).$$

On a $\quad S(C) = A, \quad \lambda = 2, \quad \theta = \frac{\pi}{4}$.

S est la similitude directe de rapport 2, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et son centre est le point B.

2) Soit la similitude directe S telle que

$$z_E - z_D = 5e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_F - z_D).$$

On a $\quad S(F) = E, \quad \lambda = 5, \quad \theta = \frac{2\pi}{3}$.

S est la similitude directe de rapport 5, d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et son centre est le point D.

6) *Nature d'une similitude directe*

- **Translation :** Si $a = 1$, alors la similitude S est une translation de vecteur b. Son rapport est $\lambda = 1$, son angle est $\theta = 0$, et elle n'a pas de centre.

- **Homothétie :** Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, alors la similitude S est une homothétie de rapport $k = a$ et de centre Ω tel que :

$$z_\Omega = \frac{b}{1-a}.$$

  Son rapport est $\lambda = |a|$, et son angle est :

$$\theta = 0 \quad \text{si } k > 0, \quad \theta = \pi \quad \text{si } k < 0.$$

- **Rotation :** Si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $|a| = 1$, alors la similitude S est une rotation d'angle $\theta = \arg(a)$ et de centre Ω tel que :

$$z_\Omega = \frac{b}{1-a}.$$

  Son rapport est $\lambda = 1$ et son centre Ω est d'affixe :

$$\frac{b}{1-a}.$$

- **Cas général :** Si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $|a| \neq 1$, alors la similitude S est la composition d'une homothétie et d'une rotation de même centre.

$$S = h \circ r = r \circ h.$$

  Avec :

  Rotation de centre Ω et d'angle $\theta = \arg(a)$.

  Homothétie de centre Ω et de rapport $\lambda = |a|$.

  Son centre est donné par :

$$z_\Omega = \frac{b}{1-a}.$$

Exercice d'application

1) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude plane directe S d'écriture complexe :

$$z' = (1+i)z - 2i.$$

2) Donner l'écriture complexe de la similitude plane directe de rapport 2, d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ et de centre Ω d'affixe $1+i$.

8.Propriété

Une similitude plane directe est soit une translation, soit une homothétie, soit une rotation , soit une composition commutative de rotation et d'homothétie de même centre .

9.Détermination d'une similitude à partir de ses éléments caractéristiques

a) À partir de deux points et de leurs images

Soit la similitude plane directe S telle que $\quad S(A) = A' \quad$ et $\quad S(B) = B'$.

La similitude plane directe S est d'écriture complexe :

$$z' = az + b$$

avec

$$a = \frac{z_{A'} - z_{B'}}{z_A - z_B} \quad \text{et} \quad b = z_{A'} - az_A.$$

Démonstration

b) À partir de son centre, d'un point et son image

Soit la similitude plane directe S telle que $\quad S(A) = A' \quad$ et $\quad S(\Omega) = \Omega$.

La similitude plane directe S est d'écriture complexe :

$$z' = az + b$$

avec

$$a = \frac{z_{A'} - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} \quad \text{et} \quad b = z_\Omega - az_\Omega.$$

Démonstration

Exercice d'application

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ soient les points :

$$A(2,0), \quad B(0,2), \quad C(2,4), \quad D(4,2).$$

a) *Déterminer l'affixe de G, l'isobarycentre de A, B, C, D.*

b) Soit $\mathbf{R}$ la rotation de centre G et d'angle $+\frac{\pi}{2}$. *Donner une écriture complexe de R.*

Déterminer : $R(A)$, $R(D)$, $R(C)$ et $R(B)$.

10.Similitude plane directe déterminée par son écriture complexe

Soit S l'application du plan dans lui-même d'écriture complexe :

$$z' = 3iz - 1 - 7i.$$

1. Justifier que S est une similitude plane directe et préciser ses éléments caractéristiques.
2. Déterminer l'expression analytique de S.
3. Déterminer une équation de l'image par S de la droite (BC), B et C étant les points d'affixes respectives 2 et $3 - i$.
4. Déterminer une équation de (C'), image par S du cercle (C) d'équation :

$$(x-2)^2 + y^2 = 1.$$

Similitude plane directe déterminée par son expression analytique

Pour déterminer l'écriture complexe d'une application du plan dans lui-même d'expression analytique donnée, on peut procéder de la manière suivante :

- **Écrire $z' = x' + iy'$ et remplacer x' et y' en fonction de x et y.**
- **Remplacer x par $\dfrac{z+\bar{z}}{2}$, y par $\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ et développer l'expression obtenue en fonction de z et $\bar{z}$.**

Exercice d'application

Soit S l'application du plan dans lui-même d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$$

1. Déterminer l'écriture complexe de S.

2. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de S.

Propriété

Soit S la similitude plane directe de rapport k.

- **La similitude plane directe S conserve :** l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité, les angles orientés, les barycentres et le contact.
- **La similitude plane directe S multiplie :** les longueurs par k et les aires par k^2.
- **La similitude plane directe S transforme :** les droites en droites, les demi-droites en demi-droites, les segments en segments et les cercles en cercles.