

Td Probabilité

Exercice 1 Calculer les intégrales :

1 $\int_1^2 2t^2 dt$

2 $\int_{-1}^3 -t^4 dt$

3 $\int_1^2 \frac{1}{s^4} ds$

4 $\int_0^2 \frac{1}{(x+2)^2} dx$

5 $\int_0^2 \frac{x}{(x^2+2)^2} dx$

6 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - 3 \sin t) dt$

7 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx$

8 $\int_0^2 \frac{e^x}{e^x + 3} dx$

9 $\int_{-1}^5 |x^2 - 9| dx$

10 $\int_0^2 e^x(e^x - 3) dx$

11 $\int_e^{e^3} \frac{dx}{x \ln x}$

$\int_0^1 \left(\sqrt{2t+1} + \frac{1}{\sqrt{t+5}} \right) dt, \int_0^2 (2t+3)\sqrt{t^2+3t} dt$

Exercice 2

1 Sans chercher de primitives, calculer les intégrales : $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 4t dt$; $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos 3x dx$

$\int_{-1}^1 \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right) dx$; $\int_{\ln 2}^{\ln 2} \frac{1-e^x}{1+e^x} dx$

2 Calculer les intégrales suivantes :

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 u du$; $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \cos^3 x dx$

Exercice 3

1 a Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1; -\frac{1}{2}\right\}, \frac{8x+5}{2x^2+3x+1} = \frac{3}{x+1} + \frac{2}{2x+1}$.

b En déduire la valeur de : $\int_0^2 \frac{8x+5}{2x^2+3x+1} dx$.

2 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{3x^3 - 5x^2 + 2x - 1}{(x-2)^2}.$$

a Déterminer les réels a, b, c et d tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{(x-2)^2}.$$

b En déduire une primitive de f sur $[-1; 1]$ puis calculer : $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

Exercice 4 : Calcul au moins d'une intégration par parties

1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$

2 $\int_1^e x \ln x dx$

3 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$

4 $\int_1^e \ln x dx$

5 $\int_1^e (2-t)e^t dt$

6 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1) \sin x dx$

7 $\int_1^3 (2x+1) \ln x dx$

8 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (u-1)^2 \sin u du$

9 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$

10 $\int_0^1 (x^2-1)e^{2x} dx$

11 $\int_0^{\pi} e^{-x} \cos x dx$

12 $\int_1^2 x\sqrt{3-x} dx$

13 $\int_1^2 (3x^2+1)^2 e^x dx$

14 $\int_1^2 u(\ln u)^2 du$

15 $\int_0^1 (x+1)\sqrt{x+1} dx$

Exercice 5 Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{x+1}{x} + \ln x - \ln(x+1).$$

1 Étudier les variations de f et tracer sa courbe.

- 2 Soit λ un réel supérieur à 1 et $D_\lambda = \{M(x, y), 1 \leq x \leq \lambda \text{ et } 1 \leq y \leq f(x)\}$. Calculer l'aire $A(D_\lambda)$ de D_λ . Étudier la limite de $A(D_\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

Exercice 6

On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^x \sin^5 t \cos t \, dt \right) dx$.

- 1 Liénariser $\sin^6 x$.
- 2 Démontrer que $I = \frac{15\pi - 44}{1152}$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$. On se propose de trouver un encadrement de l'aire A de l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

- 1 Étudier et tracer (C_f) .
- 2 Montrer que pour tout $x \geq 1$, $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$.
- 3 Calculer $I = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x} dx$ et $\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x^2} dx$.
- 4 En déduire un encadrement de $\int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx$ puis un encadrement de A .

Exercice 8 On se propose de calculer l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3} dx$.

- 1 Calculer les deux intégrales suivantes : $A = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$ et $\int_0^1 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx$.
- 2 Déterminer les réels a , b et c tels que pour $x \geq 0$,
- $$\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{t+1} + \frac{ct}{(1+t)^2}. \quad (1)$$
- 3 En posant $t = e^x$ dans l'égalité (1), calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+e^x)^2}$.
- 4 Établir une relation entre I et J et en déduire J .

Exercice 9 On pose, pour tout nombre entier naturel non nul : $I_n = \int_1^0 x^n (\ln x)^n dx$, où \ln désigne la fonction logarithme népérien, et $I_0 = \int_1^e x^2 dx$.

- 1 Calculer I_0 et I_1 .
- 2 En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul :
- $$3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3. \quad (1)$$

En déduire I_2 .

- 3 a Démontrer que pour tout entier naturel n , I_n est positif.
- b Déduire de l'égalité (1) pour tout entier naturel non nul, $I_n \leq \frac{e^3}{n+1}$.

Exercice 10 Soient f, g, h et k les fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} telles que :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \quad g(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}, \quad h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Soit α un réel, on pose $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^\alpha \frac{x^n}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ et

$$F = \int_0^\alpha \sqrt{x^2 + 1} dx, \quad G = \int_0^\alpha (x + \sqrt{x^2 + 1}) dx, \quad H = \int_0^\alpha \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$$

- 1 Démontrer que les fonctions f, g, h et k sont dérivables sur \mathbb{R} , et déterminer leurs applications dérivées f', g', h' et k' .
- 2 Justifier l'existence de I_n pour tout entier naturel n . Calculer I_0 et I_1 .
- 3 Justifier l'existence de F . Calculer $F + I_2$ et $F - I_2$. En déduire I_2 . Justifier l'existence de G , calculer G .
- 4 Justifier l'existence de H . Par une intégration par parties, calculer H .

Exercice 11 Pour tout entier naturel n , on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x \, dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x \, dx.$$

- 1 Calculer I_0 et J_0 .
- 2 Soit n un entier naturel non nul.
- a En intégrant par parties I_n puis J_n , montrer que :

$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}}. \end{cases}$$

- b** En déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de n .

- 3** Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.

Exercice 12 Dans cet exercice n est un entier naturel non nul. On considère la suite (U_n) par :

$$U_n = \int_0^2 \left(\frac{2t+3}{t+2} \right) e^{\frac{t}{n}} dt.$$

- 1** Soit f la fonction définie sur $[0; 2]$ par : $f(t) = \frac{2t+3}{t+2}$.

Étudier les variations de f sur $[0; 2]$.

- 2** En déduire que pour tout réel t de $[0; 2]$: $\frac{3}{2} \leq f(t) \leq \frac{7}{4}$.

- 3** Montrer que pour tout réel t de $[0; 2]$: $\frac{3}{2} e^{\frac{1}{n}} \leq f(t) e^{\frac{1}{n}} \leq \frac{7}{4} e^{\frac{1}{n}}$.

- 4** Par une intégration par parties, déduire que : $\frac{3}{2} n (e^{\frac{2}{n}} - 1) \leq U_n \leq \frac{7}{4} n (e^{\frac{2}{n}} - 1)$. On rappelle que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$. Montrer que si (U_n) possède une limite L , alors $3 \leq L \leq \frac{7}{2}$.

- 5** Vérifier que, pour tout réel t dans $[0; 2]$ on a : $\frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}$.

- a** En déduire l'intégrale $I = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} dt$.

- b** Montrer que pour tout t de $[0; 2]$ on a : $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$.

- c** En déduire que : $I \leq U_n \leq e^{\frac{2}{n}} \times I$.

- d** Montrer que (U_n) est convergente et déterminer sa limite L .

Exercice 13

PARTIE A

- 1** Étudier sur \mathbb{R} le signe de $4e^{2x} - 5e^x + 1$.

- 2** Soit φ la fonction définie par :

$$\varphi(x) = \ln x - 2\sqrt{x} + 2.$$

- a** Déterminer son domaine de définition D_φ et calculer ses limites aux bornes de D_φ .

- b** Étudier ses variations et dresser son tableau de variations.

- c** En déduire son signe.

PARTIE B

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{e^x}{2e^x - 1} & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - x + \sqrt{x} \ln x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On désigne par (τ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

- 1 a** Déterminer D_f le domaine de définition de f .

- b** Calculer les limites de f aux bornes de D_f et étudier les branches infinies de (τ) .

- c** Étudier la position de (τ) par rapport à l'asymptote non parallèle aux axes dans $] -\infty; 0]$.

- 2 a** Étudier la continuité de f en 0.

- b** Étudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement les résultats.

- 3** Déterminer la dérivée de f et dresser le tableau de variations de f .

- 4** Construire (τ) , les asymptotes et les demi-tangentes. On remarquera que $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$.

- 5** Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par (τ) , la droite d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = -\ln 8$ et $x = -\ln 4$.

Exercice 14

Partie A : BAC 1999 Remplacement

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \in]-\infty; 0[\\ f(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|, & x \in [0; 1] \cup]1; +\infty[\end{cases}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 2 cm.

- 1** Étudier la continuité de f en 0.

- 2 a** Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x}$.

- b** Étudier la dérivabilité de f en 0.

- c** En déduire que (C_f) admet au point d'abscisse 0 deux demi-tangentes dont on donnera les équations.

③ Étudier les variations de f .

④ Tracer (C_f) .

Partie B : Soit g la restriction de f à $]1; +\infty[$.

① Montrer que g est une bijection de $]1; +\infty[$ vers un intervalle J à préciser. On notera g^{-1} la bijection réciproque de g .

② Montrer que l'équation $g(x) = -e$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]1; +\infty[$.
(On ne demande pas de calculer α).

③ Montrer que $\forall x \in J, g^{-1}(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x - 1}$.

④ Construire $(C_{g^{-1}})$. (On indiquera la nature et l'équation de chacune des asymptotes à (C_g) et $(C_{g^{-1}})$).

⑤ Calculer en cm^2 l'aire A de l'ensemble des points $M(x; y)$ défini par :

$$\begin{cases} -\ln 7 \leq x \leq -1, \\ 0 \leq y \leq g^{-1}(x). \end{cases}$$