Correction Composition Du 2nd Semestre

Exercice 1 :(3 pts) Restitution de Connaissances

Exercice 1 :(3 pts) Restitution de Connaissances

1. Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire E et p une probabilité définie sur Ω.
Recopie et complète les relations ci-dessous :

   a. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ **(0,25 pt)**

   b. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$ **(0,25 pt)**

   c. Si A et B sont deux événements incompatibles de Ω, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ **(0,25 pt)**

   d. Soit D un événement quelconque de Ω. $\mathbb{P}(D) = 1{,}5$ est-il possible ?
   Non, car une probabilité est toujours un nombre compris entre 0 et 1. **(0,25 pt)**

2. Soit f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite convergente vers un nombre réel $L \in I$, définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.
Répondre par vrai ou faux à l'affirmation : L **est solution de l'équation** $f(L) = L$.
Réponse : Vrai **(0,5 pt)**

3. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $u_2 = -3$.
Choisir la bonne réponse dans chaque cas : **(3 × 0,25 pt)**

Réponses	**A**	**B**	**C**
$\lim u_n$ est :			**X**
L'expression de u_n est :			**X**
L'expression de $S_n = u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ est :		**X**	

Correction de l'Exercice 2 :(3 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. On considère la transformation S du plan d'écriture complexe $z' = (1 - i\sqrt{3})z + 2$.
On pose $a = 1 - i\sqrt{3}$ et $b = 2$.
Le module de a est :
$$|a| = |1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2.$$
Donc la transformation est une **rotation homothétique** (ou similitude directe) de rapport 2 et d'angle θ tel que $\arg(a) = \arg(1 - i\sqrt{3})$.
Nature de S : $\boxed{\text{Similitude directe}}$. **(0,5 pt)**

2 **Rapport :** $|a| = 2$
Argument de a **:**

$$\arg(1 - i\sqrt{3}) = -\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

Donc l'angle est $\boxed{-\frac{\pi}{3}}$.

Rapport et angle : $\boxed{2 \text{ et } -\frac{\pi}{3}}$. **(0,5 pt)**

3 Soit A d'affixe $z_A = 2 - i\sqrt{3}$. Alors :

$$z'_C = (1 - i\sqrt{3})(2 - i\sqrt{3}) + 2.$$

Développons :

$$z'_C = 2(1) - 2i\sqrt{3} - i\sqrt{3}(1) + (i\sqrt{3})^2 + 2 = 2 - 3i - 3 + 2 = \boxed{-1 - 3i}.$$ **(1 pt)**

4 $z_D = -\frac{2\sqrt{3}}{3}i$.
On calcule :

$$z'_D = (1 - i\sqrt{3})\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}i\right) + 2.$$

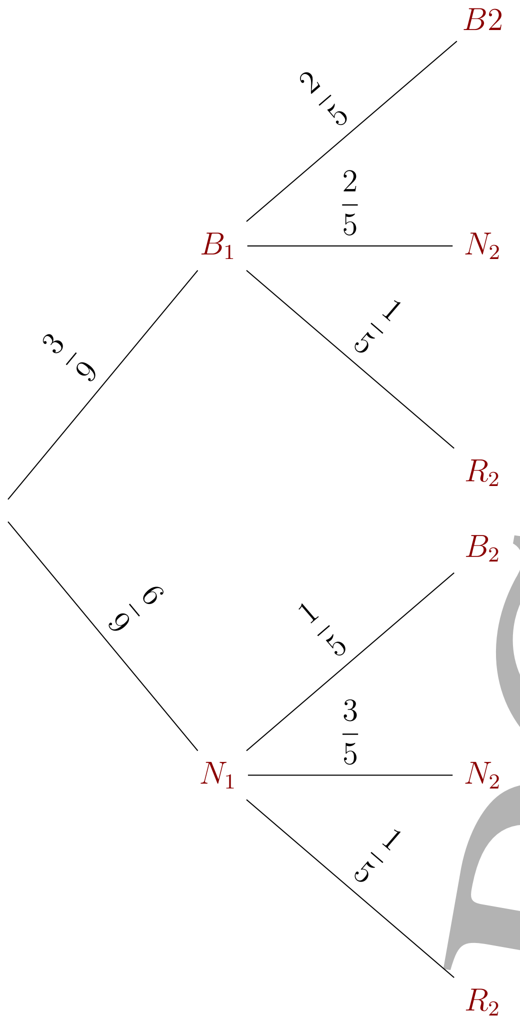
On simplifie :

$$z'_D = -\frac{2\sqrt{3}}{3}i + \frac{2 \cdot 3}{3} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}i + 2.$$

Donc $\boxed{z'_D = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}i}$. **(0,75 pt)**
Interprétation : D est un point situé sur le **cercle de centre** le centre de la similitude et de rayon proportionnel à son image. Ce n'est ni un point fixe ni un invariant remarquable ici.
Autre interprétation : comme l'image n'est pas identique à D, $\boxed{D \text{ n'est pas un point invariant de } S}$. **(0,25 pt)**

Exercice 3 :(4 pts)

1 Construisons un arbre pondère correspondant à cette épreuve.



2. Montrons que $P(N_2) = \frac{8}{15}$

a. $P(N_2)$ peut être calculé par la loi des totalisations :

$$\begin{aligned} P(N_2) &= P(N_2|B_1) \cdot P(B_1) + P(N_2|N_1) \cdot P(N_1) \\ &= \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{2}{15} + \frac{6}{15} \\ &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

b. Déterminons la probabilité de l'événement B_2

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_2|B_1) \cdot P(B_1) + P(B_2|N_1) \cdot P(N_1) \\ &= \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{1}{15} + \frac{2}{15} \\ &= \frac{3}{15} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

c. Déterminons la probabilité de tirer une boule blanche de u_1, sachant que la boule tirée dans u_2 est noire On utilise le théorème de Bayes :

$$P(B_1|N_2) = \frac{P(N_2|B_1)\cdot P(B_1)}{P(N_2)}$$
$$= \frac{\left(\frac{2}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{8}{15}}$$
$$= \frac{\frac{2}{15}}{\frac{8}{15}}$$
$$= \frac{2}{8}$$
$$= \frac{1}{4}$$

3 a Loi de probabilité de X Nous avons les différents gains :

- Boule blanche dans u_2 : $3000F - 500F = 2500F$
- Boule noire dans u_2 : $0F - 500F = -500F$
- Boule rouge dans u_2 : $500F - 500F = 0F$

Calcul des probabilités de X :

- $P(X = 2500) = P(B_2) = \frac{1}{5}$
- $P(X = -500) = P(N_2) = \frac{8}{15}$
- $P(X = 0) = P(R) = \left(\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{15}$

b Calculons de l'espérance mathématique, Variance et écart-type de X et écart-type de X

- **Espérance mathématique**
  $$E(X) = 2500\cdot P(X = 2500) + (-500)\cdot P(X = -500) + 0\cdot P(X = 0)$$
  $$= 2500\cdot\frac{1}{5} + (-500)\cdot\frac{8}{15} + 0\cdot\frac{4}{15}$$
  $$= 500 - \frac{4000}{15}$$
  $$= \frac{7500 - 4000}{15}$$
  $$= \frac{3500}{15}$$
  $$\approx 233.33$$
- **Variance de X**
  $$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$
  $$E(X^2) = (2500^2)\cdot P(X = 2500) + (-500)^2\cdot P(X = -500) + 0^2\cdot P(X = 0)$$
  $$= 6250000\cdot\frac{1}{5} + 250000\cdot\frac{8}{15}$$
  $$= 1250000 + \frac{2000000}{15}$$
  $$= 1250000 + \frac{133333.33}{1}$$
  $$\approx 1383333.33$$
  Donc,
  $$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$
  $$= 1383333.33 - (233.33)^2$$
  $$\approx 1383333.33 - 54444.44$$
  $$\approx 1338898.89$$
- **Ecart-type X**

$\sigma(X)$ est $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$

c Déterminons la fonction de répartition de X et représentons la.

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, -500[\\ \dfrac{8}{15} & \text{si } x \in [-500,\ 0[\\ \dfrac{11}{15} & \text{si } x \in [0,\ 2500[\\ 1 & \text{si } x \in [2500,\ +\infty[\end{cases}$$

4 Calculons cela pour trouver le nombre minimal de parties. Soit $p = P(N_2) = \dfrac{8}{15}$. On veut trouver le plus petit entier n tel que :

$$1 - (1-p)^n > 0{,}97$$

$$(1 - \frac{8}{15})^n < 0{,}03 \quad \text{soit} \quad \left(\frac{7}{15}\right)^n < 0{,}03$$

$$n \log\left(\frac{7}{15}\right) < \log(0{,}03)$$

$$n > \frac{\log(0{,}03)}{\log\left(\frac{7}{15}\right)} \approx 6{,}6$$

Donc $n = 7$

<u>Problème :</u> 10 pts