

## Td Limites In

### Problème 1

**Partie A** Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = x(1 + \ln x)^2 - 1$ .

- 1 On admettra que  $g$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .
  - a Calculer  $g'(x)$  pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ .
  - b Vérifier que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $g'(x) = (1 + \ln x)(3 + \ln x)$ .
  - c Étudier le signe de  $g'(x)$  suivant les valeurs de  $x$  et en déduire le sens de variation de  $g$ .
- 2 Dresser le tableau de variation de  $g$ . (On ne calculera pas les limites en 0 et  $+\infty$ ).
- 3
  - a Calculer  $g(1)$ .
  - b En déduire que pour tout  $x \in ]0; 1[$ ,  $g(x) < 0$  et pour tout  $x \in ]1; +\infty[$ ,  $g(x) > 0$ .

**Partie B** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + \frac{1}{1 + \ln x} - 1 & \text{si } x \in ]0; \frac{1}{e}[ \cup ]\frac{1}{e}; +\infty[ \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

(C) est la représentation graphique dans le repère orthonormé  $(O, I, J)$  (unités : 2cm).

- 1
  - a Montrer que  $f$  est continue en 0.
  - b Étudier la dérivabilité de  $f$  en 0.
  - c En déduire la tangente à (C) au point  $A(0; -1)$ .
- 2
  - a Calculer  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
  - b Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x - 1$  est une asymptote à (C).
  - c Étudier les positions relatives de (C) et  $(\Delta)$ .
  - d Préciser l'autre asymptote à la courbe (C) de  $f$ .
- 3
  - a Montrer que pour tout  $x \in ]0; +\infty[ \setminus \{\frac{1}{e}\}$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1 + \ln x)^2}$ .
  - b En déduire le sens de variation de  $f$ .
  - c Dresser son tableau de variation.

### Partie C

- 1 Calculer la dérivée de la fonction  $h$  définie sur  $] \frac{1}{e}; +\infty[$  par  $h(x) = \ln(1 + \ln x)$ .
- 2
  - a En déduire les primitives sur  $] \frac{1}{e}; +\infty[$  de la fonction  $k : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ .
  - b Déterminer la primitive de  $k$  qui prend la valeur  $-1$  en 1.

## Problème 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$  d'unité graphique 2cm.

### Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$ .

- 1 Calculer  $g'(x)$  pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0; +\infty[$ .  
En déduire le sens de variation de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
- 2 Calculer  $g(1)$  et en déduire l'étude du signe de  $g(x)$  pour  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ .

### Partie B : Détermination de l'expression de la fonction $f$

On admet qu'il existe deux constantes réelles  $a$  et  $b$  telles que, pour tout nombre réel  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ ,  $f(x) = ax + b - \frac{\ln x}{x}$ .

- 1 On désigne par  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$ .  
Calculer  $f'(x)$  pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
- 2 Sachant que la courbe  $(C)$  passe par le point de coordonnées  $(1; 0)$  et qu'elle admet en ce point une tangente horizontale, déterminer les nombres  $a$  et  $b$ .

### Partie C : Étude de la fonction $f$

On admet désormais que, pour tout nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0; +\infty[$ ,  $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$ .

- 1
  - a Déterminer la limite de la fonction  $f$  en 0 et donner une interprétation graphique de cette limite.
  - b Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
- 2
  - a Vérifier que, pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .
  - b Établir le tableau de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
  - c En déduire le signe de  $f(x)$  pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
- 3 On considère la droite  $(D)$  d'équation  $y = x - 1$ .
  - a Justifier que la droite  $(D)$  est asymptote à la courbe  $(C)$ .
  - b Étudier les positions relatives de la courbe  $(C)$  et de la droite  $(D)$ .
  - c Tracer la droite  $(D)$  et la courbe  $(C)$  dans le plan  $P$  muni du repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

### Partie D : Calcul d'aire

On note  $A$  la mesure, exprimée en  $cm^2$ , de l'aire de la partie du plan  $P$  comprise entre la courbe  $C$ , l'axe des abscisses, et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$ .

- 1 On considère la fonction  $H$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $H(x) = (\ln x)^2$ .  
On désigne par  $H'$  la fonction dérivée de la fonction  $H$ .
  - a Calculer  $H'(x)$  pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
  - b En déduire une primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
- 2 Calculer  $A$  et donner sa valeur arrondie au  $mm^2$  près.

## Problème 3

**Partie A** On considère  $g$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par :

$$g(x) = 1 + x(2 \ln |x| + 1)$$

- 1
  - a Justifier que  $g$  est définie sur  $] - \infty; 0[ \cup ] 0; +\infty[$ .
  - b Déterminer les limites de  $g$  aux bornes de son ensemble de définition.
- 2
  - a Étudier le sens de variation de  $g$ .
  - b Dresser le tableau de variation de  $g$ .
- 3
  - a Calculer l'image de  $-1$  par  $g$ .
  - b Déterminer l'image  $J$  par  $g$  de l'intervalle  $I$  tel que :  $I = ] - \infty; -e^{-\frac{3}{2}}]$ .
  - c Démontrer que la restriction  $h$  de  $g$  sur l'intervalle  $I$  est une bijection de  $I$  sur  $J$ .
  - d En déduire l'ensemble des solutions de l'équation :  $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ .
- 4 Déduire de tout ce qui précède que :  
 $\forall x \in ] - \infty; -1[, g(x) < 0$  et  $\forall x \in ] - 1; 0[ \cup ] 0; +\infty[, g(x) > 0$ .

**Partie B** On considère  $f$  la fonction numérique de la fonction de la variable réelle  $x$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x(x \ln |x| + 1) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . (Unité : 5cm)

- 1 Démontrer que  $f$  est continue en 0.
- 2
  - a Donner l'ensemble de définition de  $f'$  et déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
  - b Étudier la dérivabilité de  $f$  en 0.
  - c Déterminer la fonction dérivée  $f'$  et déterminer le tableau de variation de  $f$ .
- 3
  - a Écrire une équation de la tangente  $(D)$  à la courbe  $(C)$  au point  $O$ .
  - b Démontrer que  $(D)$  coupe  $(C)$  en deux points  $E$  et  $F$  et calculer leurs coordonnées.
  - c Étudier la position de  $(C)$  par rapport à  $(D)$ .
- 4 Démontrer que  $(C)$  coupe l'axe  $(OI)$  en un point  $K$  d'abscisse  $\beta$  tel que  $-1,8 < \beta < -1,7$ .
- 5 Construire  $(C)$ .

### Partie C

- 1 Soit  $\alpha$  un réel appartenant à  $]0; 1[$ .  
 À l'aide d'une intégration par parties, calculer  $\int_{\alpha}^1 x^2 \ln(x) dx$ .
- 2
  - a Calculer l'aire  $A(\alpha)$  de la partie du plan limitée par  $(C)$ , la droite  $(D)$  et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = \alpha$ .
  - b Calculer  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} A(\alpha)$ .

On prendra :  $\ln(2) \approx 0,7$  ;  $\ln(3) \approx 1,1$  ;  $\ln(5) \approx 1,6$  ;  $\ln(17) \approx 2,9$  ;  $e \approx 2,7$  ;  $\sqrt{e} \approx 1,6$ .

### Problème 4

#### Partie A

On considère la fonction  $g$  dérivable et définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :

$$g(x) = -x^3 + x + 1 - \ln |x|$$

- 1 Montrer que  $-1$  est un zéro de la fonction polynôme  $P$  définie par :  $P(x) = -3x^3 + x - 2$ .
- 2
  - a Déterminer le signe de  $P(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
  - b Calculer les limites de  $g$  aux bornes des intervalles de son ensemble de définition.
  - c Étudier les variations de  $g$ .
  - d Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique. On note  $\alpha$  cette solution. Montrer que :  $1,2 < \alpha < 1,3$ .
  - e En déduire que :  $\forall x \in ]-\infty; 0[ \cup ]0; \alpha[, g(x) > 0$  ;  $\forall x \in ]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$ .

### Partie B

On considère la fonction  $f$  dérivable et définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :

$$f(x) = -x + 1 - \frac{x - \ln|x|}{x^2}$$

On appelle  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . (Unité graphique : 2cm)

- 1 Calculer les limites de  $f$  aux bornes des intervalles de son ensemble de définition.
- 2
  - a Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ .
  - b Étudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.
- 3 Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  au point d'abscisse  $-1$ .
- 4 Déterminer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = -x + 1$  est asymptote à la courbe  $(C)$ .
- 5
  - a Étudier les variations de la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $h(x) = x - \ln|x|$ .
  - b En déduire que  $(D)$  coupe  $(C)$  en un point unique d'abscisse  $\beta$  vérifiant :  $\ln(-\beta) = \beta$ .
  - c Montrer que :  $-0,57 < \beta < 0,56$ .
  - d Déterminer la position de  $(C)$  par rapport à  $(D)$ .
- 6 Construire  $(T)$ ,  $(D)$  et  $(C)$ .
- 7 Démontrer que la fonction numérique  $F$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :
 
$$F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{x} - \ln x - \frac{(\ln x)^2}{x}$$
 est une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

### Problème 5

### Partie A

Soit  $g$ , la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par  $g(x) = (x+2)^2 + \ln|x+2|$ .

- 1
  - a Calculer les limites de  $g$  au borne de son ensemble de définition.
  - b Etudier les variations de  $g$  sur  $] -2; +\infty[$ .
- 2
  - a Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\beta$  dans  $] -2; +\infty[$ .
  - b Montrer que  $\beta$  vérifie  $-1,35 < \beta < -1,34$ .
  - c Déterminer le signe de  $g(x)$  sur  $] -2; +\infty[$ .

## Partie B

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = -x - 1 + \frac{1 + \ln(x+2)}{x+2}$  et  $(\varepsilon)$  sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé  $(O, I, J)$ . Unité 2 centimètres.

- 1
  - a Déterminer l'ensemble de définition de  $f$  et la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
  - b Déterminer la limite de  $f$  à droite en  $-2$ . Interpréter graphiquement le résultat.
  - c Montrer que,  $\forall x \in ]-2; +\infty[$ ;  $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x+2)^2}$ . En déduire le signe de  $f'(x)$  et dresser le tableau de variation de  $f$ .
  - d Montrer que  $f(\beta) = -2\beta - 3 + \frac{1}{\beta+2}$ .
- 2
  - a Montre que la droite  $(D) : y = -x - 1$  est asymptote à  $(\varepsilon)$ .
  - b Déterminer les coordonnées de  $A$  intersection de  $(\varepsilon)$  et de  $(D)$ .
  - c Etudier la position de  $(\varepsilon)$  par rapport à  $(D)$ .
- 3 Construire  $(\varepsilon)$  et  $(D)$  sur le même graphique.
- 4 Déterminer  $G$ , la primitive de  $g(x)$  tel que  $g(x) = (x+2)^2 + \ln(x+2)$  sur  $] -2; +\infty[$  et s'annule en  $-1$ .  
Sachant que la primitive sur  $] -2; +\infty[$  de  $\ln(x+2)$  est  $(x+2)\ln(x+2) - (x+2)$ .
- 5
  - a Si  $h$  est la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[\beta; +\infty[$ , montrer que  $h$  est une bijection de  $[\beta; +\infty[$  sur une partie  $K$  que l'on déterminera.
  - b Calculer  $h(-1)$ .
  - c Montrer  $h^{-1}$  est dérivable en 1 et calculer  $(h^{-1})'(1)$ .
  - d Construire  $(\varepsilon')$ , la représentation graphique de  $h^{-1}$ , bijection réciproque de  $h$  sur le graphique précédent.

### Problème 6

**Partie A :** Etude d'une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par :

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{2x} - 4(x-1)e^x - 2$$

- 1
  - a Calculer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .
  - b Montrer que  $f(x) = xe^{2x} \left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{4}{e^x} + \frac{4}{xe^x} - \frac{2}{xe^{2x}}\right)$  et en déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- 2 Etudier les variations de  $f$ .
- 3 Soit  $(C_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans le repère orthonormé, unité graphique 2cm.
  - a Etudier les branches infinies de  $(C_f)$ .
  - b Montrer que  $(C)$  coupe l'axe des abscisses en un point, dont l'abscisse  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $[-2; -1]$ .
  - c Tracer  $(C_f)$ . On prendra  $\ln 2 \approx 0,7$ .
- 4 Montrer que  $F(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) e^{2x} + 4(2-x)e^x$  est une primitive de  $f(x) + 2$ .

**Partie B :** Etude d'une nouvelle fonction numérique de variable réelle  $x$  définie par :

$$\begin{cases} g(x) = (x^2 - 4x) \ln x - \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 4) & \forall x > 0 \\ g(0) = -2 \end{cases}$$

- 1 Montrer que :  $g(x) = f(\ln x), \forall x > 0$ .
- 2 Etudier la continuité et la dérivabilité de  $g$  à droite en 0.
- 3 Calculer les limites aux bornes de son domaine.
- 4 Etudier les variations de  $g$ .
- 5 Soit  $(C_g)$  la courbe représentative de  $g$  dans un repère orthonormé, unité 2cm.
  - a Etudier la branche infinie de  $(C_g)$ .

### Problème 7

Soit  $f$  la fonction numérique à variable réelle définie par :  $f(x) = \frac{1}{1 - xe^{-x}}$

On note  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct  $(O, I, J)$ . Unité graphique : 2cm

#### Partie A

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = 1 - xe^{-x}$

- 1 Démontrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (x - 1)e^{-x}$
- 2 Déterminer le sens de variation de  $g$  puis, dresser le tableau de variation de  $g$  (sans les limites aux bornes).
- 3 Démontrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$ .

#### Partie B

- 1 Démontrer que l'ensemble de définition de  $f$  est  $\mathbb{R}$ .
- 2 Calculer la limite de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ . En donner une interprétation graphique.
- 3
  - a Démontrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{(1 - x)e^{-x}}{(1 - xe^{-x})^2}$ .
  - b Déterminer le sens de variation de  $f$  puis dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 4
  - a Démontrer qu'une équation de la tangente  $(T)$  au point d'abscisse 0 est  $y = x + 1$ .
  - b Démontrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x - 1 = \frac{(x + 1 - e^x)xe^{-x}}{1 - xe^{-x}}$ .
  - c Déterminer le signe de la fonction  $h$  telle que :  $h(x) = x + 1 - e^{-x}$ .
  - d Dédire de la question précédente les positions relatives de  $(C)$  et de  $(T)$ .
- 5 Construire  $(T)$  et  $(C)$ .

### Problème 8

**Partie A :** (Etude d'une fonction auxiliaire  $g$ )

Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = x - 2 - 2x \ln x$

- 1 Justifier que l'ensemble des solutions de l'inéquation :  $-2 \ln x - 1 \geq 0$  est  $S = ]0; e^{-\frac{1}{2}}]$
- 2
  - a Calculer  $g'(x)$ .
  - b Etudier les variations de  $g$ .
- 3
  - a Etablir le tableau de variation de  $g$ . (On ne cherchera pas à calculer les limites de  $g$ ).
  - b En déduire que :  $\forall x \in ]0; +\infty[, g(x) < 0$ .

**Partie B :** (Etude et représentation graphique d'une fonction  $f$ )

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = (x-1)^2 - x^2 \ln x$  si  $x \in ]0; +\infty[$  et  $f(0) = 1$ . On note  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni du repère orthonormé  $(O, I, J)$ .

L'unité graphique est 2cm.

- 1
  - a Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
  - b Justifier que la courbe  $(C)$  admet en  $+\infty$  une branche parabolique dont on précisera la direction.
- 2
  - a Justifier que  $f$  est continue en 0.
  - b Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -2$ .
- 3 Soit  $(T)$  la droite d'équation  $y = -2x + 1$  et  $d$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $d(x) = f(x) - y$ .
  - a Justifier que  $(T)$  est la tangente à la courbe  $(C)$  au point d'abscisse 0.
  - b Vérifier que pour tout  $x \in ]0; +\infty[, d(x) = x^2 - x^2 \ln x$ .
  - c Etudier la position relative de  $(C)$  par rapport à  $(T)$ .
- 4
  - a Démontrer que :  $\forall x \in ]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$ .
  - b Etablir le tableau de variation de la fonction  $f$ .
- 5
  - a Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]0; +\infty[$ .
  - b Vérifier que  $\alpha = 1$  et démontrer que  $f(x) \geq 0$  si  $0 \leq x \leq 1$  et  $f(x) \leq 0$  si  $x \geq 1$ .
- 6 Construire  $(T)$  et  $(C)$ .

**Partie C :** (Etude d'une primitive  $F$  d'une restriction de la fonction  $f$ )

Soit  $F$  la primitive de  $f$  sur  $]1; +\infty[$  qui s'annule en  $e$ . (On ne cherchera pas à déterminer  $F$ ).

- 1 Déterminer  $F(e)$  et  $F'(x)$ . (On justifiera chaque réponse).
- 2 Démontrer que  $F$  est une bijection de  $]1; +\infty[$  vers  $F(]1; +\infty[)$ .
- 3 Soit  $F^{-1}$  la réciproque de  $F$ . Calculer  $(F^{-1})'(0)$ .

**Problème 9**

On désigne par  $(C)$  la courbe de la fonction  $f$  ci-dessous dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$  dans le plan d'un repère orthonormé  $(O; I, J)$ . L'unité de longueur : 2 cm.

**Partie A :** On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = x - 1 - \frac{2}{x} - \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right|$

- 1 Montrer que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ .

2 Montrer que :

- Pour tout  $x \in ]-\infty; 0[ \cup ]1; +\infty[$ ;  $f(x) = x - 1 - \frac{2}{x} - \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$
- Pour tout  $x \in ]0; 1[$ ;  $f(x) = x - 1 - \frac{2}{x} - \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$

- 3 Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
- 4 Calculer la limite de  $f$  en 1. Interpréter graphiquement ce résultat.
- 5 a Calculer les limites de  $f$  à gauche en 0 et à droite en 0.  
b Interpréter graphiquement ces résultats.

**Partie B :** Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = x^3 - x^2 + x - 2$ .

- 1 Calculer  $g'(x)$ ,  $g'$  étant la fonction dérivée de  $g$ .
- 2 Déterminer le sens de variation de  $g$ .
- 3 a Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$  et que  $1 < \alpha < 1,5$ .  
b En déduire un encadrement de  $\alpha$  par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.
- 4 Montrer que pour tout  $x \in ]-\infty; \alpha[$ ;  $g(x) < 0$  et pour tout  $x \in ]\alpha; +\infty[$ ;  $g(x) > 0$ .
- 5 Montrer que pour tout nombre réel  $x$  élément de  $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(x-1)}$ .
- 6 a Déterminer le signe de  $f'(x)$ .  
b Dresser le tableau de variation de  $f$ .

### Partie C

- 1 Soit  $(D)$  la droite d'équation  $y = x - 1$ .  
Montrer que la droite  $(D)$  est une asymptote à  $(C)$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
- 2 Calculer  $f(-2)$ ;  $f(-\frac{1}{2})$  et  $f(\frac{1}{2})$ .
- 3 Construire dans le repère  $(O; I, J)$  la courbe  $(C)$  et ses asymptotes. On prendra  $\alpha \approx 1,3$ .

### Partie D

On considère les fonctions  $h$  et  $k$  définies sur  $]2; +\infty[$  par  $h(x) = (x-1)\ln(x-1) - x\ln x$  et on admettra que pour tout  $x$  élément de  $]2; +\infty[$ ,  $f(x) - x + 1 < 0$ .

- 1 Calculer  $h'(x)$ ,  $h'$  étant la dérivée de  $h$ .
- 2 Calculer l'aire de la partie limitée par la courbe  $(C)$ , la droite  $(D)$  et les droites d'équations  $x = 2$  et  $x = 4$ .

### Problème 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . Unité :  $OI = 2\text{cm}$  et  $OJ = 1\text{cm}$ .

### Partie A

Soit  $g$  la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $g(0) = -1$  et  $g(x) = \frac{x}{(\ln(x))^2} - 1$  et  $(C_g)$  sa courbe.



- 1
  - a Déterminer l'ensemble de définition de  $g$ .
  - b Calculer les limites de  $g$  en 1 et en  $+\infty$ .
  - c Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$  puis interpréter graphiquement ce résultat.
- 2
  - a Démontrer que  $g$  est continue en 0.
  - b Étudier la dérivabilité de  $g$  en 0 et interpréter graphiquement ce résultat.
- 3 On admet que  $g$  est dérivable sur  $]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$ .
  - a Démontrer que  $\forall x \in ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[; g'(x) = \frac{\ln(x)(\ln(x) - 2)}{(\ln(x))^4}$ .
  - b Déterminer le sens de variation de  $g$  puis dresser son tableau de variation.
- 4
  - a Démontrer que l'équation  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]0; 1[$ .
  - b Vérifier que  $0,4 < \alpha < 0,5$ .
  - c En déduire que :  $\forall x \in [0; \alpha]; g(x) < 0$   
 $\forall x \in ]\alpha; 1[ \cup ]1; +\infty[; g(x) > 0$ .

### Partie B

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x)}$  et  $(C)$ , sa courbe.

- 1
  - a Calculer les limites de  $f$  en 0, en 1 et en  $+\infty$ .
  - b Interpréter graphiquement les résultats précédents.
- 2 On admet que  $f$  est dérivable sur  $]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$ .
  - a Démontrer que  $\forall x \in ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .
  - b Étudier le sens de variation de  $f$  et dresser son tableau de variation de  $f$ .
- 3 Démontrer que  $f(\alpha) = \frac{1 - \sqrt{\alpha}}{\alpha}$ . En déduire le signe de  $f(x)$  sur  $]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$ .
- 4 Construire la courbe  $(C)$ . On prendra  $\alpha \simeq 0,5$ .

### Partie C

Soit  $h$  la restriction de  $f$  à  $]1; +\infty[$ .

- 1 Démontrer que  $h$  est la bijection de  $]1; +\infty[$  sur un intervalle  $K$  que l'on déterminera.
- 2 On note  $h^{-1}$  la bijection réciproque de  $h$  et  $(\Gamma)$  sa représentation graphique.
  - a Dresser le tableau de variation de  $h^{-1}$ .
  - b Calculer  $h(e)$  ;  $h^{-1}\left(\frac{1-e}{e}\right)$  et  $(h^{-1})'\left(\frac{1-e}{e}\right)$ .
  - c Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $(\Gamma)$  au point d'abscisse  $\frac{1-e}{e}$ .
- 3 Construire  $(\Gamma)$  dans le même repère que  $(C)$ .

### Partie A

Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par : 
$$\begin{cases} \forall x > 0, g(x) = 1 - x \ln x \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

- 1 a Etudier la continuité de  $g$  en 0.
- b Etudier la dérivabilité de  $g$  en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
- 2 Calculer la limite de  $g$  en  $+\infty$ .
- 3 Etudier les variations de  $g$  et dresser son tableau de variations.
- 4 a Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in ]e^{-1}; +\infty[$ .
- b Justifier que :  $1,7 < \alpha < 1,8$ .
- 5 Démontrer que : 
$$\begin{cases} \forall x \in [0; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in [\alpha; +\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$$

### Partie B

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = e^{3-x} \ln x$

$(C_f)$  désigne sa représentation graphique dans le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; I; J)$  Unité graphique : 2cm

- 1 Calculer la limite de  $f$  en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
- 2 a Vérifier que :  $\forall x \in ]0; +\infty[: f(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right) \left(\frac{x}{e^x}\right) e^3$
- b En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ . Interpréter graphiquement le résultat.
- 3 a Montrer que :  $\forall x \in ]0; +\infty[, f'(x) = \frac{e^{3-x}}{x} g(x)$ .
- b En déduire le sens de variations de  $f$ .
- 4 a Montrer que :  $f(\alpha) = \frac{e^3}{\alpha e^\alpha}$ .
- b En déduire un encadrement de  $f(\alpha)$ .
- c Dresser le tableau de variations de  $f$ .
- 5 Construire  $(C_f)$ .
- 6 Soit  $h$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $]0; \alpha[$ .
  - a Montrer que  $h$  admet une bijection réciproque  $h^{-1}$  dont on précisera l'ensemble de départ, l'arrivée d'arrivée.
  - b Dresser le tableau de variation de  $h^{-1}$ .
  - c Calculer  $(h^{-1})'(0)$ .

## Partie A

On considère l'équation différentielle (1) :  $y' - 2y = xe^x$

- 1 Résoudre l'équation différentielle (2) :  $y' - 2y = 0$
- 2 Soient  $a$  et  $b$  deux réels et soit  $u$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $u(x) = (ax + b)e^x$ .
  - a Déterminer  $a$  et  $b$  pour que  $u$  soit solution de l'équation (1).
  - b Montrer que  $v$  est une solution de l'équation (1) si et seulement si  $u + v$  est une solution de l'équation (2).
  - c En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (1).
- 3 Déterminer la solution  $f$  de l'équation (1) qui s'annule en 0.

## Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = 2e^x - x - 2$

- 1 Déterminer les limites de  $g$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
- 2 Étudier le sens de variation de  $g$ , puis dresser son tableau de variation.
- 3
  - a Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet exactement deux solutions réelles : 0 et  $\alpha$  telle que  $-1,6 < \alpha < -1,5$ .
  - b Déterminer le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

## Partie C : Etude de la fonction principale $f$

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$

On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; I; J)$ . (Unité : 4cm)

- 1 Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
- 2
  - a Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x g(x)$ .
  - b En déduire les variations de  $f$  et dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 3 Montrer que  $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$ . En déduire un encadrement de  $f(\alpha)$  à  $10^{-2}$  près.
- 4 Tracer  $(C)$ .

## Partie D : Calcul d'aire

Soit  $m$  un réel négatif.

- 1 Interpréter graphiquement l'intégrale  $I = \int_m^0 f(x) dx$ 
  - a Calculer  $\int_m^0 xe^x dx$  à l'aide d'une intégration par parties.
  - b En déduire la valeur de  $I$ .
- 2 Calculer la limite de  $I$  lorsque  $m$  tend vers  $-\infty$ .

Problème 13

L'objet de ce problème est la fonction définie par : 
$$\begin{cases} f(x) = x(x - (\ln x)^2) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; I, J)$ .  
Unité graphique 5cm.

### Partie A

On considère la fonction  $h$  dérivable sur  $]0; +\infty[$  et définie par  $h(x) = 2 - \frac{2}{x} - 2\frac{\ln x}{x}$ .

- 1
  - a Calculer  $h'(x)$  et étudier les variations de  $h$ .
  - b En déduire que  $\forall x \in ]0; +\infty[, h(x) \geq 0$ .
- 2 On considère la fonction  $g$  dérivable sur  $]0; +\infty[$  et définie par  $g(x) = 2x - 2\ln(x) - (\ln x)^2$ .
  - a Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$  et montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .
  - b Calculer  $g'(x)$  et montrer que  $g'(x) = h(x)$ .
  - c Étudier les variations de  $g$ .
  - d Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  et vérifier que  $0,1 < \alpha < 0,2$ .
  - e Démontrer que 
$$\begin{cases} \forall x \in ]0; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in ]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$$

### Partie B

- 1 Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
- 2 Montrer que  $f$  est continue en 0.
- 3
  - a Étudier la dérivabilité de  $f$  en 0.
  - b Interpréter graphiquement ce résultat.
- 4
  - a Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .
  - b Interpréter graphiquement les résultats.
  - c Démontrer que  $f(\alpha) = \alpha(-\alpha + 2\ln(\alpha))$ .
- 5
  - a On suppose que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .
  - b On suppose que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ . Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $\forall x \in ]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$ .
  - c Étudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.

### Partie C

- 1 Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point d'abscisse 1.
- 2 Soit la fonction  $k(x) = f(x) - (2x - 1)$ .
  - a Vérifier que  $k'(x) = g(x) - 2$  et que  $k''(x) = h(x)$ .
  - b En déduire le sens de variation de  $k'$ . Calculer  $k'(1)$  puis donner le signe de  $k'$ .
  - c Dresser le tableau de variation de  $k$  puis donner le signe de  $k$ . (On ne calculera pas de limites).
  - d En déduire la position relative de  $(C)$  et de la droite  $(T)$ .

- ③ Tracer  $(C)$  et  $(T)$ . On prendra  $\alpha = 0, 1$ .
- ④ Soit la fonction  $q$ , restriction de  $f$  à l'intervalle  $[\alpha; +\infty[$ .
  - a Montrer que  $q$  admet une bijection réciproque notée  $q^{-1}$  dont on précisera les ensembles de départ et d'arrivée.
  - b Dresser le tableau de variation de  $q^{-1}$ .
  - c Calculer  $q(1)$ ,  $q^{-1}(1)$  et  $(q^{-1})'(1)$ .
  - d Construire la courbe de  $q^{-1}$  dans le même repère que  $(C)$ .

### Problème 14

#### Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^x(1-x) + 1$ .

- ① Étudier le sens de variation de  $g$ .
- ② Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution dans l'intervalle  $[1, 27; 1, 28]$ . On note  $\alpha$  cette solution.
- ③ Déterminer le signe de  $g(x)$  sur  $] -\infty; 0]$ .  
Montrer que  $g(x) > 0$  sur  $[0; \alpha[$  et  $g(x) < 0$  sur  $]\alpha; +\infty[$ .

#### Partie B :

Étude de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{x}{e^x + 1} + 2$ .

On désigne par  $(C_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  ; unités graphiques : 1cm sur l'axe des abscisses et 2cm sur l'axe des ordonnées.

- ①
  - a Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .
  - b Démontrer que la courbe  $(C_f)$  admet une asymptote oblique  $(d)$  dont on déterminera l'équation.
- ② Étudier la position de  $(C_f)$  par rapport à  $(d)$ .
- ③
  - a Montrer que la fonction dérivée de  $f$  a même signe que la fonction  $g$  étudiée dans la **Partie A**.
  - b Montrer qu'il existe deux entiers  $p$  et  $q$  tels que  $f(\alpha) = p\alpha + q$ .
  - c Dresser le tableau des variations de la fonction  $f$ .
- ④ Tracer la courbe  $(C_f)$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  avec ses asymptotes et sa tangente au point d'abscisse  $\alpha$ .

#### Partie C : Encadrement d'aire

Pour tout entier naturel  $n$ , tel que  $n \geq 2$ , on donne  $D_n$ , l'ensemble des points  $M(x; y)$  du plan, dont les coordonnées vérifient  $2 \leq x \leq n$  et  $2 \leq y \leq f(x)$ , et on appelle  $A_n$  son aire, exprimée en unité d'aire.

- ① Faire apparaître  $D_n$  sur la figure.

### Problème 15

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = e^{1-x} + \ln|x|$  et  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé  $(O; I; J)$  d'unité 2cm.

#### Partie A (Etude d'une fonction auxiliaire)

Soit  $g$  la fonction numérique définie par :  $g(x) = xe^{1-x}$

- 1 Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .
- 2 Démontrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (1 - x)e^{1-x}$ .
- 3 Déterminer les variations de  $g$  puis dresser son tableau de variation.
- 4 Démontrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq 1$ .

### Partie B (Etude de la fonction $f$ )

Soit  $f(x) = e^{1-x} + \ln|x|$

- 1 Déterminer  $D_f$  l'ensemble de définition de  $f$ .
- 2
  - a Calculer la limite de  $f$  en 0.
  - b En déduire une interprétation graphique du résultat.
- 3
  - a Calculer la limite de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
  - b Calculer la limite de  $\frac{f(x)}{x}$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
  - c Interpréter graphiquement les résultats.
- 4
  - a Démontrer que  $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{1 - g(x)}{x}$ .
  - b En déduire le signe de  $f'(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
- 5 Déterminer les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation.
- 6
  - a Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $0,08 < \alpha < 0,09$  et  $-0,06 < \beta < -0,05$ .
  - b Donner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-3}$  près.
  - c Construire  $(C)$  avec précision.

### Partie C

- 1 Soit  $(U_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par  $U_n = \int_n^{n+1} e^{-x} dx$  et  $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ 
  - a Démontrer que  $(U_n)_{n \geq 1}$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
  - b Exprimer  $U_n$  puis  $S_n$  en fonction de  $n$ .
- 2
  - a Démontrer que la suite  $(S_n)_{n \geq 1}$  est croissante.
  - b Démontrer que  $(S_n)_{n \geq 1}$  est majorée par  $\frac{1}{e}$ .
  - c Les suites  $(U_n)_{n \geq 1}$  et  $(S_n)_{n \geq 1}$  sont-elles convergentes ? Justifier votre réponse.
- 3 Soit  $(V_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par  $V_n = \int_1^{n+1} \ln|x| dx$ 
  - a En utilisant une intégration par parties, démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = (n+1) \ln(n+1) - n$
  - b La suite  $(V_n)_{n \geq 1}$  est-elle convergente ? Justifier votre réponse.

## Partie A

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = x + 1 - (x + 2) \ln |x + 2|, \quad x \neq -2 \text{ et } g(-2) = -1.$$

- 1 a Démontrer que  $g$  est continue en  $-2$ .  
b Étudier le dérivabilité de  $g$  en  $-2$ . Interpréter graphiquement le résultat.
- 2 Calculer les limites de  $g$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- 3 Calculer  $g'(x)$  pour  $x \neq -2$ , étudier le sens de variation de  $g$  et dresser son tableau de variation.
- 4 a Démontrer que pour  $x \neq -1$ ,  $g$  s'annule en une valeur  $\alpha$  comprise entre  $-5,6$  et  $-5,5$ .  
b En déduire que :  $\forall x \in ]-\infty; \alpha[, g(x) > 0$  et  $\forall x \in ]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$ .

## Partie B

On considère la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x \neq -2$  par :  $f(x) = \frac{\ln |x + 2|}{x + 1}$  si  $x \neq -1$  et  $f(-1) = 1$ .

On désigne par  $(C_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan du repère orthonormé  $(O; I; J)$ . Unité graphique 2cm.

- 1 Démontrer que  $f$  est continue en  $-1$ .
- 2 On suppose que :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$ .  
Démontrer que  $f$  est dérivable en  $-1$ .
- 3 a Calculer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .  
b Interpréter graphiquement les résultats.  
c Calculer la limite de  $f$  à droite et à gauche en  $-2$ .  
d Interpréter graphiquement les résultats.
- 4 a Démontrer que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x)$  et  $\frac{g(x)}{x+2}$  ont le même signe.  
b Dresser le tableau de variation de  $f$ .  
c Démontrer que  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 2}$ .

## Partie C

- 1 Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C_f)$  au point d'abscisse  $-1$ .
- 2 On pose  $h(x) = x^2 - 1 + 2 \ln(x + 2)$  pour  $x > -2$ .  
a Étudier le sens de variation de  $h$ .  
b Calculer  $h(-1)$ . En déduire le signe de  $h$ .  
c Démontrer que  $(C_f)$  est au-dessus de la tangente  $(T)$  pour  $x > -2$ .
- 3 Déterminer les coordonnées du point d'intersection de  $(C_f)$  et de l'axe des abscisses.
- 4 Tracer  $(T)$  et  $(C_f)$ .

### Partie A

On considère la fonction  $g$  de la variable réelle  $x$  définie pour tout  $x > 0$  par  $g(x) = 1 - x - 2 \ln x$ .

- 1 Calculer  $g(1)$ .
- 2 Calculer la limite de  $g$  en 0 et en  $+\infty$ .
- 3 Étudier les variations de  $g$  et en déduire son tableau de variation.
- 4 Démontrer que :  $\forall x \in ]0; 1[, g(x) > 0$  et  $\forall x \in ]1; +\infty[, g(x) < 0$ .

### Partie B

Soit la fonction  $h$  de la variable réelle  $x$  définie pour tout  $x > 0$  par  $h(x) = 2 + x - x^2 \ln x$ .

- 1 Calculer les limites de  $h$  en 0 et en  $+\infty$  et en déduire que  $h$  est prolongeable par continuité en 0.

Soit la fonction  $f$  de représentation graphique  $(C)$  dans le plan muni du repère orthogonal  $(O; I; J)$  d'unités 1 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées, définie par :

$$\begin{cases} f(x) = h(x) \text{ pour } x > 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

- 2 Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- 3 Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  et en déduire l'interprétation graphique correspondante.
- 4 **a** Démontrer que  $f$  est dérivable en 0.  
**b** En déduire une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point d'abscisse 0.
- 5 Démontrer que  $\forall x \in [0; +\infty[, f'(x) = g(x)$  et étudier les variations de  $f$ .
- 6 Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  telle que  $2, 2 < \alpha < 2, 3$ .
- 7 Tracer  $(T)$  puis la courbe  $(C)$ .

### Partie C

Soit  $k$  la fonction définie pour tout  $x \geq 1$  par  $k(x) = \frac{x^3}{3} \left( -\frac{1}{3} + \ln x \right)$ .

- 1 Déterminer  $k'(x)$  où  $k'$  est la dérivée de la fonction  $k$ .
- 2 En déduire une primitive de  $f$  sur  $[1; +\infty[$ .
- 3 Démontrer que  $g(\alpha) = -\frac{4}{3} - \alpha - 1$ .

### Problème 18

Dans tout le problème on admettra que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$  pour tout entier naturel  $n$ .

### Partie A

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$ .

- 1 **a** Calculer la limite de  $g$  en  $-\infty$ .



**b** Vérifier que  $g(x) = 1 - (1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2})x^2e^{-x}$  pour tout nombre réel  $x \neq 0$ . En déduire la limite de  $g$  en  $+\infty$ .

**2** On admet que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

**a** Calculer la dérivée  $g'$  de  $g$  et vérifier que  $g'(x) = (x - 2)^2e^{-x}$ .

**b** En déduire le signe de  $g'(x)$ .

**3** Etablir le tableau de variation de  $g$ .

**4** **a** Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique sur  $\mathbb{R}$ .

**b** On désigne par  $\alpha$  cette solution. Donner un encadrement d'amplitude  $10^{-1}$  de  $\alpha$ .

**5** Déduire de ce qui précède que :

$$\forall x \in ]-\infty; \alpha[, g(x) < 0 \text{ et } \forall x \in ]\alpha; +\infty[, g(x) > 0.$$

## Partie B

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$ .

**1** **a** Vérifier que  $f(x) = x \left[ 1 - \frac{1}{x} + (x + \frac{2}{x})e^{-x} \right]$  pour tout réel  $x \neq 0$ . En déduire la limite de  $f$  en  $-\infty$ .

**b** Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

**2** On admet que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Calculer la dérivée  $f'$  de  $f$  et vérifier que  $f'(x) = g(x)$  pour tout  $x$  réel.

**3** En déduire, à l'aide de la partie A, les variations de  $f$  et donner son tableau de variation.

**4** Démontrer que  $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$ .

**5** **a** Démontrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x - 1$  est asymptote oblique à  $(C)$  en  $+\infty$ .

**b** Préciser la position de  $(C)$  par rapport à  $(\Delta)$ .

**6** Donner une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  en son point d'abscisse 0.

**7** Tracer  $(\Delta)$ ,  $(T)$  puis  $(C)$ .

## Problème 19

Le but du problème est l'étude de la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{2\ln(x) - 1}{x} \text{ et } (C) \text{ sa courbe représentative dans le repère } (O; I; J).$$

Unité : 2 cm

## Partie A :

On considère la fonction numérique  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = -x^2 + 6 - 4\ln(x)$ .

**1** Calculer les limites de  $g$  aux bornes de son ensemble de définition.

**2** Étudier le sens de variation de  $g$  puis dresser son tableau de variation.

**3** **a** Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  a une unique solution  $\alpha$  dans  $]0; +\infty[$ .

**b** Vérifier que  $1,86 < \alpha < 1,87$ .

**c** Montrer que :  $\forall x \in ]0; \alpha[, g(x) > 0$  et  $\forall x \in ]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$ .

## Partie B

- 1
  - a Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
  - b Déterminer la dérivée  $f'$  de  $f$  et montrer que pour tout élément  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x)$  et  $g(x)$  ont le même signe. En déduire le sens de variation de  $f$ .
- 2
  - a Montrer que  $f(\alpha) = -\alpha + 3 + \frac{2}{\alpha}$ .
  - b Déduire un encadrement de  $f(\alpha)$  d'amplitude  $2 \cdot 10^{-1}$ .
- 3
  - a Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = -\frac{1}{2}x + 3$  est asymptote à la courbe  $(C)$ .
  - b Déterminer le point  $A$ , intersection de  $(D)$  et  $(C)$ .
  - c Étudier la position de  $(C)$  par rapport à  $(D)$ .
- 4
  - a Calculer  $\ln(e\sqrt{e})$ .
  - b Déterminer le point  $B$  de  $(C)$  où la tangente  $(T)$  est parallèle à la droite  $(D)$ .
- 5 Construire  $(D)$ ,  $(T)$  et  $(C)$ .

## Partie C :

- 1 Soit  $h : x \mapsto 2\frac{\ln x}{x}$  et  $u : x \mapsto \ln x$ .  
Exprimer  $h$  en fonction de  $u$  et  $u'$ . En déduire une primitive de  $h$  sur  $]0; +\infty[$ .
- 2 Donner une primitive  $F$  de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
- 3 Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe  $(C)$ , la droite  $(D)$  et les droites d'équations  $x = e$  et  $x = \sqrt{e}$ .

### Problème 20

On considère le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . Unité graphique 2cm.

Soit la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  par  $f(x) = x + \frac{\ln |x|}{|x|}$ . On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le repère donné.

## Partie A

Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$  et  $h$  la fonction définie sur l'intervalle  $] -\infty; 0[$  par  $h(x) = x^2 - 1 + \ln(-x)$ .

- 1
  - a Calculer la dérivée de la fonction  $g$  et déterminer le signe de cette dérivée. Dresser le tableau de variations de la fonction  $g$ . (On ne demande pas de calculer les limites de  $g$ ).
  - b Montrer que  $\forall x \in ]0; +\infty[, g(x) > 0$ .
- 2
  - a Calculer la dérivée de la fonction  $h$  et déterminer le signe de cette dérivée. Dresser le tableau de variation de la fonction  $h$ . (On ne demande pas de calculer les limites de  $h$ ).
  - b Calculer  $h(-1)$  et montrer que  $\forall x \in ] -\infty; -1[, h(x) > 0$  ;  $\forall x \in ] -1; 0[, h(x) < 0$ .

## Partie B

- 1
  - a Calculer les limites suivantes  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x)$  ;  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$  puis interpréter les graphiquement.

- b** Calculer les limites suivantes  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- 2** **a** Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x$  est une asymptote à  $(C)$ .  
**b** Étudier les positions relatives de  $(C)$  et  $(D)$ . (On précisera les coordonnées des points d'intersection de  $(C)$  et  $(D)$ ).
- 3** **a** Vérifier  $\forall x \in ]-\infty; 0[, f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$  et  $\forall x \in ]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .  
**b** Étudier le sens de variations de la fonction  $f$  puis dresser son tableau de variations.
- 4** **a** Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  et vérifier que  $0,6 < \alpha < 0,7$ .  
**b** En déduire le signe de  $f(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
- 5** Construire la courbe  $(C)$ .
- 6** **a** Déterminer une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .  
**b** En déduire la primitive de  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  qui s'annule en 1.

### Problème 21

#### Partie A

Soit  $g$  la fonction dérivable et définie de  $\mathbb{R}^*$  vers  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = \ln |x| - \frac{2}{x}$ .

- 1** **a** Démontrer que pour tout nombre réel  $x$  non nul,  $g'(x) = \frac{x+2}{x^2}$ .  
**b** En déduire les variations de la fonction  $g$  puis dresser son tableau de variation. (On ne calculera pas les limites).
- 2** **a** Démontrer que l'équation  $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  appartenant à l'intervalle  $]1; +\infty[$ .  
**b** Démontrer que :  $\forall x \in ]-\infty; 0[ \cup ]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$  et  $\forall x \in ]0; \alpha[, g(x) < 0$ .

#### Partie B

Soit  $f$  la fonction dérivable et définie sur  $\mathbb{R}$  par : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^x}{e^x + (\ln |x|)^2} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$(C)$  est la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . (L'unité graphique est 4 cm).

- 1** **a** Étudier la continuité de  $f$  en 0.  
**b** Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$  puis donner une interprétation graphique de chacun des résultats.
- 2** **a** Étudier la dérivabilité de  $f$  en 0. En déduire que  $(C)$  admet une tangente à l'origine que l'on précisera.  
**b** Pour tout nombre réel  $x$  différent de zéro, démontrer que :  $f'(x) = \frac{\varphi(x)g(x)}{(e^x + (\ln |x|)^2)^2}$  avec  $\varphi(x) = e^x \ln |x|$ .  
**c** Démontrer que  $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 4e^{-\alpha}}$  et en déduire que :  $0 < f(\alpha) < 1$ .  
**d** Déterminer le signe de  $f'(x)$  suivant les valeurs de  $x$  et en déduire le tableau de variation de  $f$ .

- 3 Démontrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq f(x) \leq 1$ .
- 4 Tracer la droite d'équation  $y = x$  et la courbe  $(C)$ .

### Problème 22

#### Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = 4x - (1+x)e^x$ .

- 1 Calculer les limites de  $g$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
- 2 Etudier les variations de  $g$  et dresser son tableau de variation.
- 3 a Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  telle que  $0,79 < \alpha < 0,80$ .  
b En déduire le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

#### Partie B : Etude de la fonction $f$

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 4x + 1 - xe^x$ .

On note  $(C)$  sa représentation graphique dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . Unité graphique : 4cm.

- 1 Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
- 2 a Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .  
b Donner une interprétation graphique du résultat.
- 3 a Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$ .  
b En déduire les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.
- 4 Montrer que  $f(\alpha) = e^\alpha + 4\alpha - 3$ .
- 5 a Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = 4x + 1$  est asymptote oblique à  $(C)$  en  $-\infty$ .  
b Etudier la position relative de  $(C)$  par rapport à  $(\Delta)$ .
- 6 a Montrer que la droite  $f(x) = 0$  admet exactement deux solutions  $\lambda$  et  $\beta$  telles que  $-1 < \lambda < 0$  et  $1 < \beta < 2$ .  
b Tracer  $(C)$  et  $(\Delta)$ .

#### Partie C : Calcul d'aire

$t$  est un nombre réel tel que  $(t \leq 0)$ .

On désigne par  $A(t)$  l'aire de partie du plan délimitée par  $(C)$ ,  $(\Delta)$  et les droites d'équations  $x = t$  et  $x = 0$ .

- 1 A l'aide d'une intégration par parties, calculer  $A(t)$ .
- 2 a Déterminer la limite de  $A(t)$  lorsque  $t$  tend vers  $-\infty$ .  
b Interpréter le résultat obtenu.