Exercice 1 : 8 pts

Calculer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^2+3}{3x^4+x+2}$ **b.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ **c.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3}+x$ **d.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$

e. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}$ **f.** $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$ **g.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}$ **h.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+3x+2}}{2x+3}$

Exercice 2 : 8 pts

Soit g la fonction définie par : $g(x) = \begin{cases} x+\sqrt{|x^2-x|}, & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{x-x(x-2)}{x-1}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1 Justifions que la fonction g est définie sur $D_g = \mathbb{R}$.

Posons $g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{si } x \geq 0 \\ g_2(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} g_1\exists \text{ ssi } & |x^2-x| \geq 0 && \text{et } x \geq 0 \\ \text{ssi } & x \in \mathbb{R} && \text{et } x \in [0,+\infty[\\ \text{ssi } & x \in [0,+\infty[\\ & \underline{Dg_1 = [0,+\infty[} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2\exists \text{ ssi } & x-1 \neq 0 && \text{et } x < 0 \\ \text{ssi } & x \neq 1 && \text{et } x \in]-\infty,0[\\ \text{ssi } & x \in]-\infty,0[\\ & \underline{Dg_2 =]-\infty,0[} \end{aligned}$$

$$Dg = \mathbb{R}$$

$$\mathbf{Dg} = \mathbb{R}$$

2 Déterminons les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

Les bornes de Dg sont $-\infty, +\infty$

<u>En $+\infty$:</u> $g(x) = g_1(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} g(x) &= \lim_{x\to+\infty} g_1(x) \\ &= \lim_{x\to+\infty} x+\sqrt{|x^2-x|} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\underline{\lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = +\infty}$$

<u>En $-\infty$:</u> $g(x) = g_2(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} g(x) &= \lim_{x\to-\infty} g_2(x)\\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x - x(x-2)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to-\infty} -\frac{x^2}{x}\\ &= \lim_{x\to-\infty} -x\\ &= +\infty\end{aligned}$$

$$\underline{\lim_{\mathbf{x}\to-\infty} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = +\infty}$$

3. Étudions la continuité de g sur $[0, +\infty[$

   Sur $[0, +\infty[$, $g(x) = x + \sqrt{|x^2 - x|}$ qui est la somme de deux fonctions continues donc continue

4. Étudier la continuité de g sur $]-\infty, 0[$

5. Étudier la continuité de g en 0

6. En déduire l'ensemble de continuité de g

7. Soit f une fonction dont sa représentation graphique est ci-dessous. f est-elle continue sur $[-3, -1]$? Justifier.

Figure 1: Représentation graphique de la fonction f.

<u>Exercice 3 :</u> 4 pts

1. Déterminons le domaine de définition des fonctions suivantes :

   a $f(x) = \dfrac{(x-3)(x+8)}{x^2-2}$

   $f\,\exists$ ssi $x^2 - 2 \neq 0$

   $x^2 - 2 \neq 0 \implies x \neq \sqrt{2}$ et $x \neq -\sqrt{2}$

   $Df = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

   $$\mathbf{Df} = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{\mathbf{2}}, \sqrt{\mathbf{2}}\}$$

   b $g(x) = \dfrac{2x^2 - 8x + 2}{\sqrt{x^2 - 4}}$

   $g\,\exists$ ssi $x^2 - 4 > 0$

   $x^2 - 4 > 0 \implies x \in]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$

   $Df =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$

   $$\mathbf{Df} =]-\infty, -\sqrt{\mathbf{2}}[\cup]\sqrt{\mathbf{2}}, +\infty[$$

c $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x^2+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Posons $h(x) = \begin{cases} h_1(x) & \text{si } x < 0 \\ h_2(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$h_1 \exists$ ssi $x - 1 \neq 0$ et $x < 0$

ssi $x \neq 1$ et $x \in]-\infty, 0[$

ssi $x \in]-\infty, 0[$

$Dh_1 =]-\infty, 0[$

$h_2 \exists$ ssi $x^2 + x \geq 0$ et $x \geq 0$

ssi $x \in]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$ et $x \in [0, +\infty[$

ssi $x \in [0, +\infty[$

$Dh_2 = [0, +\infty[$

$Dh = Dh_1 \cup Dh_2$

$=]-\infty, 0[\cup [0, +\infty[$

$=]-\infty, +\infty[$

$= \mathbb{R}$

$$\mathbf{Dh = \mathbb{R}}$$

2 Soit $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $g(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$ deux fonctions.

a Déterminer Df et Dg

$$\mathbf{Df = [-1, +\infty[}$$

$$\mathbf{Dg = \mathbb{R} \setminus \{3\}}$$

b Déterminons $Dg \circ f$

$Dg \circ f = \{x \in Df | f(x) \in Dg\}$

$= \{x \in [-1, +\infty[\textbf{ et } f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{3\}\}$

$= \{x \in [-1, +\infty[\textbf{ et } f(x) \neq 3\}$

$= \{x \in [-1, +\infty[\textbf{ et } \sqrt{x+1} \neq 3\}$

$= \{x \in [-1, +\infty[\textbf{ et } x + 1 \neq 9\}$

$= \{x \in [-1, +\infty[\textbf{ et } x \neq 8\}$

$= \{x \in [-1, 8[\cup]8, +\infty[\}$

$= [-1, 8[\cup]8, +\infty[$

$$\mathbf{Dg \circ f = [-1, 8[\cup]8, +\infty[}$$

Calculons $g \circ f(x)$

$g \circ f(x) = \dfrac{f(x) + 2}{f(x) - 3}$

$= \dfrac{\sqrt{x+1} + 2}{\sqrt{x+1} - 3}$

$$\mathbf{g \circ f(x) = \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}-3}}$$