◇◇◇ Lycée de Dindéfélo ◇◇◇			A.S. : 2024/2025
Matière: Mathématiques	Niveau : TS2	Date: 19/03/2025	Durée : 4 heures

Devoir n° 1 Du 2nd Semestre

Exercice 1 : 6 points

A) Questions de cours

1. Rappeler les formes algébrique, exponentielle et trigonométrique d'un nombre complexe z non nul. **(0,75 pt)**

2. Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre $K(z_0)$, d'angle θ. **(0,5 pt)**

B)On donne $z_0 = 1 - i\sqrt{3}$.

1. Donner une écriture trigonométrique de z_0. **(0,5 pt)**

2. Montrer que : $z_0^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$. **(0,25 pt)**

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^4 = 1$. **(0,5 pt)**

4. En déduire les solutions de (E) : $z^4 = -8+8i\sqrt{3}$ sous la forme algébrique et sous la forme trigonométrique. **(1 pt)**

   On peut remarquer que (E) équivaut à : $\left(\dfrac{z}{1-i\sqrt{3}}\right)^4 = 1$

5. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 2 cm, placer les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1 - i\sqrt{3}$, $z_B = -1 + i\sqrt{3}$, $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -\sqrt{3} - i$. **(0,75 pt)**

6. Donner une écriture complexe de la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. **(0,5 pt)**

7. Vérifier que : $r(A) = C$; $r(C) = B$ et $r(B) = D$. **(0,75 pt)**

8. En déduire que les points A, B, C et D sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. **(0,5 pt)**

Exercice 2 : 2,25 points

Déterminer les limites suivantes :

$$\textbf{1.}\ \lim_{x\to+\infty} \ln\left[\frac{x+1}{x^2+x+1}\right] \quad \textbf{2.}\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+2)}{\ln(x+1)} \quad \textbf{3.}\ \lim_{x\to0^+} \frac{\ln x + 2}{\ln x + 1} \quad \textbf{4.}\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

Problème : 11,75 points

Partie A: 2,75 pts

Soit $g(x) = 2x\ln(-x) + x + 1$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_g de g. **(0,5 pt)**
2. Calculer les limites aux bornes de D_g. **(0,5 pt)**
3. Étudier les variations de g. **(1 pt)**
4. Calculer $g(-1)$ puis en déduire le signe de $g(x)$. **(0,75 pt)**

Partie B: 7 pts

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2\ln(-x) + x + 1 & \text{si } x < 0 \\ x\ln(x)^2 + x + 1 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$. **(0,5 pt)**
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interprétez graphiquement les résultats. **(1,5 pt)**
3. Donner le domaine de dérivabilité de f puis montrer que $f'(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x < 0 \\ (1+\ln x)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ **(0,5×3 pts)**
4. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition. **(0,5 pt)**
5. Étudier les branches infinies de (C_f). **(0,5 pt)**
6. Dresser le tableau de variations de f. **(1 pt)**
7. Montrer que dans $]-\infty; -1[$, l'équation $f(x) = 1$
   admet une unique solution α puis vérifier que $-1,8 < \alpha < -1,7$. **(0,75 pt)**
8. Construire (C_f) (unité 2 cm) (on précisera la tangente au point d'abscisse e^{-1} et on placera le point d'abscisse 1). **(0,75 pt)**

Partie C: 2 pts

Soit h la restriction de f à $I =]0; +\infty[$.

1. Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à préciser. **(0,5 pt)**
2. Étudier la dérivabilité de h^{-1} sur J. **(0,25 pt)**
3. a. Calculer $h(1)$. **(0,25 point)**
   b. Calculer $(h^{-1})'(2)$. **(0,5 pt)**
4. Construire la courbe de h^{-1}. **(0,5 pt)**