

◇◇◇ Lycée de Dindéfelo ◇◇◇			A.S. : 2024/2025
Matière: Mathématiques	Niveau : TS2	Date: 09/12/2024	Durée : 4 heures
Devoir n° 1 Du 1 ^{er} Semestre			

Exercice 1 : 0,5 × 8 = 4 points

- 1 Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
- 2 Énoncer le théorème d'existence et d'unicité d'une solution.
- 3 Énoncer le théorème de l'inégalité des accroissements finis (IAF).
- 4 Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$ ($a \neq 0$) alors ...
- 5 Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ alors ...
- 6 Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ alors ...
- 7 Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \beta \in \mathbb{R}^*$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \beta x] = +\infty$ alors ...
- 8 Si f est continue et strictement décroissante sur $] -\infty; b]$, alors $f([-\infty; b]) = \dots$

Exercice 2 : 4 points

- 1 Calculer les limites suivantes : (3 × 1 pt)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{\sin 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^3 + x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7} - \sqrt{10-x}}.$$

- 2 Donner les primitives des fonctions f et g respectivement sur \mathbb{R} et $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$. (2 × 0,5 pt)

$$f(x) = (3x - 1)(3x^2 - 2x + 3)^3; \quad g(x) = \frac{1 - x^2}{(x^3 - 3x + 2)^3}.$$

Problème : 12 points

Partie A :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x}.$$

- 1 Déterminer D_f . (0,5 pt)

a Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. (0,25 pt), (0,5 pt)

b Étudier la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$. (0,75 pt)

c Interpréter la limite de f au voisinage de $+\infty$. **(0,75 pt)**

2 Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 2 et à gauche de 0, puis interpréter géométriquement les résultats obtenus. **(2 pt)**

a Justifier la dérivabilité de la fonction sur $] -\infty, 0[\cup]2, +\infty[$, puis
montrer que pour tout $x \in] -\infty, 0[\cup]2, +\infty[: f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x} - (x - 1)}{\sqrt{x^2 - 2x}}$. **(1,5 pt)**

b Montrer que : $\forall x \in] -\infty, 0], f'(x) > 0$ et $\forall x \in]2, +\infty[, f'(x) < 0$. **(1 pt)**

c Dresser le tableau de variations de la fonction f . **(1,25 pt)**

3 Tracer la courbe (C_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . **(1,25 pt)**

Partie B :

On considère la fonction g la restriction de la fonction f sur $[2, +\infty[$:

a Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera . **(0,5 pt)**

b Calculer $g^{-1}(2 - 2\sqrt{2})$. (On donne : $g(4) = (2 - 2\sqrt{2})$. **(0,75 pt)**

c Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$. **(0,5 pt)**

d Tracer la courbe $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . **(0,5 pt)**