Exercice 2 : 2,25 points

Déterminons les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left[\dfrac{x+1}{x^2+x+1}\right]$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left[\dfrac{x+1}{x^2+x+1}\right]$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x^2+x+1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty \end{cases}$ Par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left[\dfrac{x+1}{x^2+x+1}\right] = -\infty$

$$\ln\left[\dfrac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{x^2+x+1}}\right] = -\infty$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+2)}{\ln(x+1)}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+2)}{\ln(x+1)} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left[x\left(1+\frac{2}{x}\right)\right]}{\ln\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)+\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)\left[1+\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\ln(x)}\right]}{\ln(x)\left[1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}\right]} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[1+\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\ln(x)}\right]}{\left[1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}\right]} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \frac{\ln(\mathbf{x+2})}{\ln(\mathbf{x+1})} = \mathbf{1}$$

3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x+2}{\ln x+1}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x+2}{\ln x+1} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x\left(1+\frac{2}{\ln x}\right)}{\ln x\left(1+\frac{1}{\ln x}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(1+\frac{2}{\ln x}\right)}{\left(1+\frac{1}{\ln x}\right)} \\
&=1
\end{aligned}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \lim_{\mathbf{x}\to 0^+} \frac{\ln \mathbf{x}+\mathbf{2}}{\ln \mathbf{x}+\mathbf{1}} = \mathbf{1}$$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left[(\sqrt{x})^2\right]}{\sqrt{x}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln\left[\sqrt{x}\right]}{\sqrt{x}}\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to+\infty}\frac{\ln \mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}}} = \mathbf{0}$$

Problème : 11,75 points

Partie A: 2,75 pts

Soit $g(x) = 2x\ln(-x) + x + 1$.

1. Déterminons l'ensemble de définition D_g de g. **(0,5 pt)**

g existe ssi $-x > 0$

$$\begin{aligned}-x > 0 &\implies x < 0\\ &\implies x \in]-\infty; 0[\end{aligned}$$

Donc $Dg =]-\infty; 0[$

$$\mathbf{Dg} =]-\infty; \mathbf{0}[$$

2. Calculons les limites aux bornes de D_g. **(0,5 pt)**

En $-\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} g(x) &= \lim_{x\to-\infty} 2x\ln(-x) + x + 1\\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to-\infty} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = -\infty$$

En 0^-

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} g(x) &= \lim_{x\to 0^-} 2x\ln(-x) + x + 1\\ &= \lim_{x\to 0^-} -2(-x\ln(-x)) + x + 1\\ &= 1\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = 1$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to \mathbf{0}^-} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{1}$$

3. Étudions les variations de g. **(1 pt)**

$$
\begin{aligned}
g(x) &= 2x\ln(-x) + x + 1 \\
&= 2(x\ln(-x))' + (x+1)' \\
&= 2\left[(x)'\ln(-x) + x(\ln(-x))'\right] + 1 \\
&= 2\left[\ln(-x) + x\left(\frac{1}{x}\right)\right] + 1 \\
&= 2\left[\ln(-x) + 1\right] + 1 \\
&= 2\ln(-x) + 3
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\mathbf{g'(x) = 2\ln(-x) + 3}}$$

Etudions le signe de g

Supposons que $2\ln(-x) + 3 > 0$

$$
\begin{aligned}
2\ln(-x) + 3 > 0 &\implies \ln(-x) > \frac{-3}{2} \\
&\implies \ln(-x) > \ln\left(e^{\frac{-3}{2}}\right) \\
&\implies -x > e^{\frac{-3}{2}} \\
&\implies x < -e^{\frac{-3}{2}} \\
&\implies x \in \left]-\infty; -e^{\frac{-3}{2}}\right[
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
\forall x \in \left]-\infty; -e^{\frac{-3}{2}}\right[, g'(x) > 0 \text{ donc } g \text{ y est croissant} \\
\forall x \in \left]-e^{\frac{-3}{2}}; 0\right[, g'(x) < 0 \text{ donc } g \text{ y est décroissant}
\end{cases}
$$

x	$-\infty$		0		β		1		$-\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$