⋄⋄⋄ **Lycée de Dindéfélo** ⋄⋄⋄			**A.S. : 2024/2025**
Matière: Mathématiques	**Niveau : TS2**	**Date: 22/05/2025**	**Durée : 4 heures**

Composition Du 2$^{\text{nd}}$ Semestre

Exercice 1 :(3 pts) Restitution de Connaissances

1. Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire E et p une probabilité définie sur Ω.
Recopie et complète les relations ci-dessous :

   a. $\mathbb{P}(\Omega) = \ldots$ **(0,25 pt)**

   b. $\mathbb{P}(\varnothing) = \ldots$ **(0,25 pt)**

   c. Si A et B sont deux événements incompatibles de Ω, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \ldots$ **(0,25 pt)**

   d. Soit D un événement quelconque de Ω. $\mathbb{P}(D) = 1{,}5$ est-il possible ?
   Si non, justifier votre réponse. **(0,25 pt)**

2. Soit f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite convergente vers un nombre réel $L \in I$, définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.
Répondre par vrai ou faux à l'affirmation : L **est solution de l'équation** $f(L) = L$. **(0,5 pt)**

3. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $u_2 = -3$.
Choisir la bonne réponse dans chaque cas : **(3 × 0,25 pt)**

Réponses	**A**	**B**	**C**
$\lim u_n$ est :	$-\infty$	$+\infty$	0
L'expression de u_n est :	$-3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$	$-3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$	$-3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$
L'expression de $S_n = u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ est :	$u_0 \times \dfrac{1-0{,}5^{n-1}}{0{,}5}$	$u_2 \times \dfrac{1-0{,}5^{n-2}}{0{,}5}$	$u_2 \times \dfrac{1-0{,}5^{n-2}}{0{,}5}$

Exercice 2 :(3 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. On considère la transformation S du plan d'écriture complexe $z' = (1 - i\sqrt{3})z + 2$.
Déterminer la nature de S. **(0,5 pt)**

2. Déterminer le rapport et l'angle de S. **(0,5 pt)**

3. Déterminer l'affixe du point C image par S du point $A(2 - i\sqrt{3})$. **(1 pt)**

4. Quelle est l'affixe du point image par S du point $D\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}i\right)$?
Que représente D pour la transformation S ? **(0,75 +0,25 pt)**

Exercice 3 :(4 pts)

On dispose de deux urnes identiques u_1 et u_2 contenant des boules indiscernables au toucher :
u_1 contient 3 boules blanches et 6 boules noires.
u_2 contient deux boules noires, une blanche et une rouge.

Une épreuve consiste à tirer au hasard une boule dans u_1, la mettre dans u_2, et tirer ensuite au hasard une boule dans u_2.
On note B_k l'événement : « Tirer une boule blanche dans u_k », N_k l'événement : « Tirer une boule noire dans u_k », avec $k \in \{1, 2\}$.
R l'événement : « Tirer une boule rouge dans u_2 ».

1. Construire un arbre pondéré correspondant à cette épreuve. **(0,5 pt)**

2. a. Montrer que $\mathbb{P}(N_2) = \dfrac{8}{15}$. **(0,5 pt)**

   b. Déterminer la probabilité de l'événement B_2. **(0,5 pt)**

   c. Déterminer la probabilité de tirer une boule blanche de u_1, sachant que la boule tirée dans u_2 est noire. **(0,5 pt)**

3. Un joueur mise 500F et effectue une épreuve. Si à la fin de l'épreuve le joueur tire une boule blanche dans u_2, il reçoit 3000F ; si la boule tirée dans u_2 est noire, le joueur ne reçoit rien et si elle est rouge, il reçoit 500F.
   On désigne X le gain du joueur (gain = différence entre ce qu'il reçoit et sa mise).

   a. Donner la loi de probabilité de X. **(0,5 pt)**

   b. Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X. **(0,75 pt)**

   c. Déterminer la fonction de répartition de X et la représenter. **(0,75 pt)**

4. Un joueur participe à plusieurs parties du jeu et on suppose que les épreuves sont indépendantes.
   Quelle est le nombre minimal de parties pour que la probabilité de réaliser au moins une fois l'événement $X = 2500$ soit supérieure à 0,97 ? **(0,25 pt)**

Problème : 10 pts

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$ et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans ce plan.

Partie A: 2,5 pts

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}$.

1. Calculer les limites $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$. **(0,5 pt)**

2. Étudier les variations de g et dresser le tableau de variations de g. **(1,5 pt)**

3. Déduire du tableau de variations le signe de $g(x)$ pour tout $x > 0$. **(0,5 pt)**

Partie B: 5 pts

On considère la fonction f donnée par : $f(x) = \begin{cases} x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)+1 & \text{si } x>0 \\ (x^2-3x+1)e^x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

1. a. Déterminer le domaine de définition de f. **(0,5 pt)**

   b. Calculer les limites aux bornes de D_f. **(0,5 pt)**

   c. En déduire l'existence d'asymptotes dont on précisera la nature et l'équation. **(0,5 pt)**

2. a. Étudier la continuité de f en 0. **(0,75 pt)**

   b. Étudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter les résultats. **(0,75 + 0,25 pt)**

3. Montrer que $f'(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x>0 \\ (x^2-x-2)e^x & \text{si } x<0 \end{cases}$ **(1 pt)**

4. Dresser le tableau de variations de f. **(0,75 pt)**

Partie C: 2,5 pts

Soit h la restriction de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

1. Montrer que h est bijective de $]0;+\infty[$ vers un intervalle J à préciser. **(0,5 pt)**
2. Étudier la dérivabilité de h^{-1} sur J. **(0,5 pt)**
3. Tracer sur le même graphe les asymptotes, $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{h^{-1}}$. **(1,5 pt)**