

Correction du devoir n° 1 Du 1^{er} Semestre

Exercice 1 : $0,5 \times 8 = 4$ points

- 1 Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
- 2 Énoncer le théorème d'existence et d'unicité d'une solution.
- 3 Énoncer le théorème de l'inégalité des accroissements finis (IAF).
- 4 Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$ ($a \neq 0$) alors ...
- 5 Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ alors ...
- 6 Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ alors ...
- 7 Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \beta \in \mathbb{R}^*$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \beta x] = +\infty$ alors ...
- 8 Si f est continue et strictement décroissante sur $] - \infty; b]$, alors $f(] - \infty; b]) = \dots$

Exercice 2 : 4 points

- 1 Calculons les limites suivantes : (3 × 1 pt)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{\sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x (\sqrt{1 + \sin x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{2 \sin 2x}{2x}} \times \frac{1}{(\sqrt{1 + \sin x} + 1)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{\sin 2x} = \frac{1}{4}} \quad \text{1 points}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^3 + x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2(x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \times \frac{1}{x + 1} \\ &= -\frac{1}{2} \times 1 \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^3 + x^2} = -\frac{1}{2} \quad \mathbf{1 \text{ points}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7} - \sqrt{10-x}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x})(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x})(\sqrt{2x+7} - \sqrt{10-x})}{(\sqrt{2x+7} - \sqrt{10-x})(\sqrt{2x+7} + \sqrt{10-x})(\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[x+3 - (5-x)](\sqrt{2x+7} + \sqrt{10-x})}{[2x+7 - (10-x)](\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(-1+x)(\sqrt{2x+7} + \sqrt{10-x})}{3(x-1)(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(\sqrt{2x+7} + \sqrt{10-x})}{3(x-1)(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(\sqrt{2x+7} + \sqrt{10-x})}{3(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x})} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{6}{4} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7} - \sqrt{10-x}} = 1 \quad \mathbf{1 \text{ points}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} &= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi X)}{X} \\ &= \lim_{X \rightarrow 0} \pi \frac{\sin(\pi X)}{\pi X} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} = 1 \quad \mathbf{1 \text{ points}}$$

② Donnons les primitives des fonctions f , g et h respectivement sur \mathbb{R} et $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$. ($2 \times 0,5 \text{ pt}$)

$$f(x) = 2 \cos(x) - 3 \sin(x)$$

$$F(x) = 2 \sin(x) + 3 \cos(x) + k$$

$$F(x) = 2 \sin(x) + 3 \cos(x) + k \quad \mathbf{0,5 \text{ points}}$$

$$g(x) = (3x-1)(3x^2-2x+3)^3$$

$$G(x) = \frac{1}{8}(3x^2-2x+3)^4 + k$$

$$G(x) = \frac{1}{8}(3x^2-2x+3)^4 + k \quad \mathbf{0,5 \text{ points}}$$

$$h(x) = \frac{1-x^2}{(x^3-3x+2)^3}$$

$$H(x) = \frac{1}{3(x^3-3x+2)} + k \quad \mathbf{0,5 \text{ points}}$$

Problème : 9,5 points

Partie A : Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{x - 1} & \text{si } x < 0, \\ x + \sqrt{x^2 + x} & \text{si } x \geq 0, \end{cases} \quad \text{et } (C_f) \text{ sa courbe représentative dans un repère orthonormé } (O, \vec{i}, \vec{j}).$$

1 Déterminons l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de f . (0,5 pt)

Posons $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x < 0, \\ f_2(x) & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$

- $f_1 \quad \exists \quad \text{ssi } x - 1x \neq 0 \text{ et } x < 0$
 $x - 1 \neq 0 \implies x \neq 1 \text{ et } x < 0$
 $Df_1 =] - \infty; 0[$

- $f_2 \quad \exists \quad \text{ssi } x^2 + x \geq 0 \text{ et } x \geq 0$
Posons $x^2 + x = 0$
 $x^2 + x = 0 \implies x = 0 \text{ ou } x = -1$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x^2 + x$				+

$$Df_2 = [0; +\infty[$$

$$Df = Df_1 \cup Df_2$$

$$\text{Donc} \quad =] - \infty; 0] \cup [0; +\infty[\\ = \mathbb{R}$$

$$Df = \mathbb{R}$$

2 Déterminons les limites aux bornes de \mathcal{D}_f . (0,5 pt)

- En $-\infty$: $f(x) = f_1(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

- En $+\infty$: $f(x) = f_2(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x^2 + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x^2 + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \\ &= \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Etudions la Continuité de f en 0

- En 0^- : $f(x) = f_1(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

- En 0^+ : $f(x) = f_2(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \sqrt{x^2 + x}$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

On a $f(0) = 0$

Finalement $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0

Etudions la dérivabilité de f en 0

- En 0^- : $f(x) = f_1(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{x^2 - 2x}{x - 1} - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - 2}{x - 1}$$

$$= 2$$

f est dérivable à gauche de 0 et $y = 2x$ est une demi-tangente en 0^-

- En 0^+ : $f(x) = f_2(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sqrt{x^2 + x} - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x^2 - x}{x(x - \sqrt{x^2 + x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{x(x - \sqrt{x^2 + x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{(x - \sqrt{x^2 + x})}$$

$$= \frac{-1}{0}$$

Supposons que $x - \sqrt{x^2 + x} > 0$

$$x - \sqrt{x^2 + x} > 0 \implies \sqrt{x^2 + x} < x$$

$$\sqrt{x^2 + x} < x \implies \begin{cases} x^2 + x > 0 \\ x > 0 \\ x^2 + x < x^2 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x^2 + x > 0 \\ x > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x^2 + x$		0	0	$+$
x			0	$+$
x			0	$+$

$$S = \emptyset$$

Ainsi, il n'existe pas de $x > 0$ pour lequel $x - \sqrt{x^2 + x} > 0$

$$\text{Donc } x - \sqrt{x^2 + x} < 0, \forall x \in]0; +\infty[$$

Ainsi $\forall x \in]0; +\infty[f'(x) > 0$ donc f est croissant $]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{(x - \sqrt{x^2 + x})} \\ &= \frac{-1}{0^-} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

f n'est pas dérivable à droite de 0 donc admet une demi-tangente orientée vers le haut en 0^+

4 a Montrons que (\mathcal{C}_f) admet en $-\infty$ une asymptote oblique Δ_1 dont on déterminera l'équation. (0,5 pt)

$$\text{Comme } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

• Cherchons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2 - 2x}{x - 1}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

• Cherchons $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x}{x - 1} - x \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2 + x}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Donc (Δ_1) : $y = x - 1$ est une asymptote oblique à (\mathcal{C}_f) en $-\infty$

b Étudions la position relative de (\mathcal{C}_f) par rapport à Δ_1 sur $] -\infty; 0[$. (0,5 pt)

Étudions le signe de $f(x) - y$

$$\begin{aligned}
 f(x) - y &= f(x) - (x - 1) \\
 &= \frac{x^2 - 2x}{x - 1} - (x - 1) \\
 &= x - 1 - \frac{1}{x - 1} - x + 1 \\
 &= -\frac{1}{x - 1}
 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-\frac{1}{x-1}$	$+$		

Sur $] -\infty; 0[, f(x) - y > 0$ donc (C_f) est au-dessus de (Δ_1)

5 Montrons que (C_f) admet en $-\infty$ une asymptote oblique (Δ_1) dont on déterminera l'équation. (0,5 pt)

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

• Cherchons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + x}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$

• Cherchons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x^2 + x} - 2x \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Donc $(\Delta_2): y = 2x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$

- 6 Précisons l'ensemble de dérivabilité de f puis calculons $f'(x)$ sur chaque intervalle où f est dérivable. (0,5 pt)

$$Df' = \mathbb{R}^*$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{x - 1} & \text{si } x < 0, \\ x + \sqrt{x^2 + x} & \text{si } x \geq 0, \end{cases} \quad \text{et } (C_f) \text{ sa courbe représentative dans un repère orthonormé } (O, \vec{i}, \vec{j}).$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{(2x - 2)(x - 1) - (x^2 - 2x)}{(x - 1)^2} & \text{si } x < 0, \\ 1 + \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}} & \text{si } x > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - x^2 + 2x}{(x - 1)^2} & \text{si } x < 0, \\ \frac{2\sqrt{x^2 + x} + 2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 2x + 2}{(x - 1)^2} & \text{si } x < 0, \\ \frac{2\sqrt{x^2 + x} + 2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

- 7 Dressons le tableau de variation de f . (0,5 pt)

- Si $x < 0$, $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{(x - 1)^2}$ le signe dépend du numérateur

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \text{ Ainsi, si } x < 0, f(x) > 0 \text{ donc } f \text{ est croissante sur }] - \infty; 0[$$

- Si $x > 0$, $f(x) = \frac{2\sqrt{x^2 + x} + 2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$ le signe dépend du numérateur

$$\text{Or } 2\sqrt{x^2 + x} + 2x + 1 > 0 \forall x \in]0; +\infty[$$

$$\text{Ainsi } \forall x \in]0; +\infty[f'(x) > 0 \text{ donc } f \text{ est croissant }]0; +\infty[$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	
f	$-\infty$	\nearrow	$+\infty$

+++++

x	0	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+		
f	$-\infty$	\nearrow	$+\infty$

+++++

- 8 Précisons les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère. (0,25 pt)

- Pour $x < 0$, $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$

– Avec (ox) , nous ne pouvons pas calculer $f(0)$ car $x < 0$

– Avec (oy) résolvons $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\implies \frac{x^2 - 2x}{x - 1} = 0 \\ &\implies x = 0 \text{ ou } x = 2 \text{ Or } x < 0 \end{aligned}$$

• Pour $x \geq 0$, $f(x) = x + \sqrt{x^2 + x}$

– Avec (ox) , $f(0) = 0$

– Avec (oy) résolvons $f(x) = 0 \implies x + \sqrt{x^2 + x} = 0$.

$$\sqrt{x^2 + x} = -x,$$

$$\text{En élevant au carré : } x^2 + x = x^2 \implies x = 0.$$

Donc la solution est 0

9 Construire la courbe (C_f) . (1,5 pt)

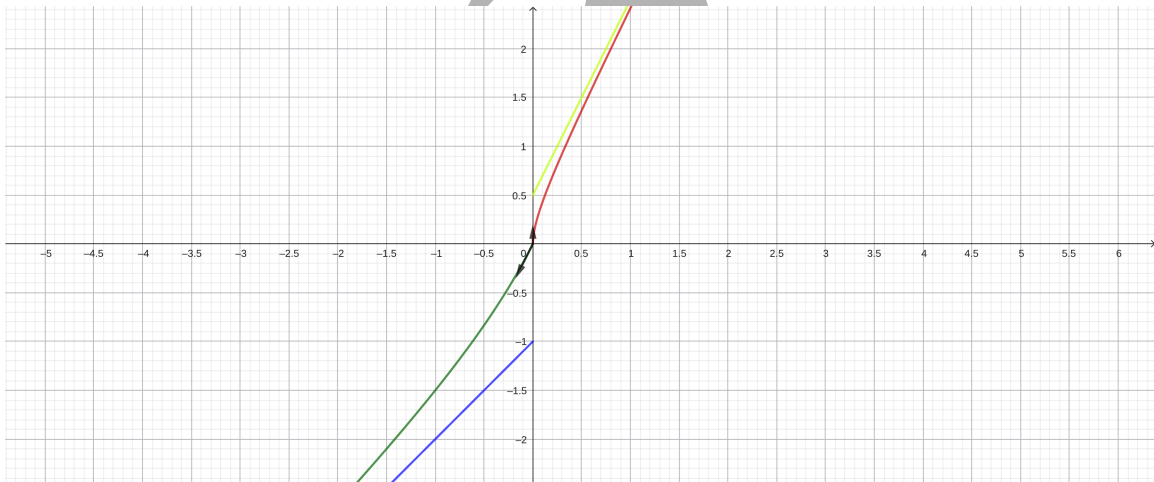


Figure 1: Courbe de (C_f)

[Clique ici pour voir la courbe sur géogebra](#)

Partie B :

Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = [0; +\infty[$.

1 Montrons que h réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera. (0,25 pt)

Sur I h est continue et strictement croissante donc réalise une bijection de I vers $J = [0, +\infty[$

2 La bijection réciproque h^{-1} est-elle dérivable sur J ? (0,25 pt)

Comme $\forall x \in I, h'(x) \neq 0$ donc h^{-1} est dérivable sur J

3 Calculons $h\left(\frac{4}{5}\right)$ puis $(h^{-1})'(2)$. (0,5 pt)

$$\begin{aligned} h\left(\frac{4}{5}\right) &= \frac{4}{5} + \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}} \\ &= \frac{4}{5} + \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{20}{25}} \\ &= \frac{4}{5} + \frac{6}{5} \\ &= \frac{10}{5} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$h\left(\frac{4}{5}\right) = 2$$

On a : $(h^{-1})'(2) = \frac{1}{h'\left(\frac{4}{5}\right)}$ et $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+x+2x+1}}$

$$h'(2) = \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right) + 2\left(\frac{4}{5}\right) + 1}}$$

$$\begin{aligned} (h^{-1})'(2) &= \frac{1}{h'\left(\frac{4}{5}\right)} \\ &= \frac{1}{\frac{2\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right) + 2\left(\frac{4}{5}\right) + 1}}{2\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)}}} \\ &= \frac{2\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)}}{2\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right) + 2\left(\frac{4}{5}\right) + 1}} \\ &= \frac{2 \cdot \frac{6}{5}}{2 \cdot \frac{6}{5} + \frac{8}{5} + 1} \\ &= \frac{\frac{12}{5}}{\frac{12}{5} + \frac{8}{5} + \frac{5}{5}} \\ &= \frac{\frac{12}{5}}{\frac{25}{5}} \\ &= \frac{12}{25} \end{aligned}$$

$$(h^{-1})'(2) = \frac{12}{25}$$

- 4 Construction de $(C_{h^{-1}})$ la courbe représentative de h^{-1} dans le même repère. (0,5 pt)

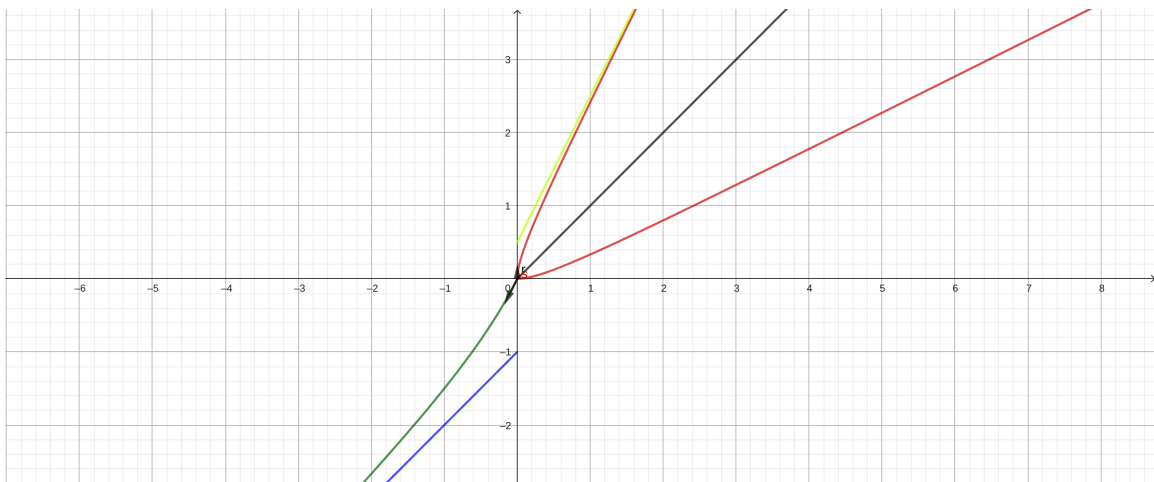


Figure 2: Courbe de (Cf)

5 Exprimons $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$. (0,5 pt)

$$\text{Soit } y = h(x) = x + \sqrt{x^2 + x}.$$

On isole la racine :

$$y - x = \sqrt{x^2 + x}.$$

En élevant au carré, on obtient :

$$(y - x)^2 = x^2 + x.$$

$$y^2 - 2xy + x^2 = x^2 + x.$$

En simplifiant :

$$y^2 - 2xy = x.$$

On factorise par x :

$$y^2 = x(1 + 2y).$$

D'où :

$$h^{-1}(x) = \frac{x^2}{1 + 2x}$$