⋄⋄⋄ Lycée de Maciré BA ⋄⋄⋄			A.S. : 2025/2026
Matière : Mathématiques	Niveau : 2ndS	Date : 21/10/2025	

TD : Calcul dans $\mathbb{R}$

Exercice 1 Effectuez les calculs suivants :

1. $(a+b)(x-y)-(a-b)(x+y)-b(x-y)$
2. $x(a-by)-y(b-ax)-xy(x-y)$
3. $4\left[\frac{1}{10}(5(2a+3)+5)-a+7\right]$
4. $3[5(x-a)-2(b-y)]-6(a-b)+15(x+y)$
5. $x-y-[z-y-(t-x)]-[y+t-(x+z)]-[x-(y-z+t)]$

Exercice 2 Développer à l'aide des égalités remarquables.

1. $(a^2b+c)^2$
2. $\left(\frac{2a}{3}+\frac{b}{4}\right)^2$
3. $\left((\frac{a^2}{2}-b\right)^3$
4. $\left(-\frac{1}{4}\right)\left[5\left\{\frac{9}{10}-\frac{3}{20}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\right\}-\left(\frac{2}{3}+5-\frac{1}{7}\right)\right]$

Exercice 3 Factoriser les expressions suivantes :

1. $a^2xy+aby^2+b^2xy+abx^2$
2. $3a^2+3b^2-12c^2-6ab$
3. y^2-x^2+2x-1
4. $a^2b^2-1+a^2-b^2$
5. $(ab-1)^2-(a-b)^2$
6. $(2a^2-3a-5)^2-(2a^2+3a+4)^2$
7. $8+36ab^2+54a^2b+27ab$
8. $a+8-2a^2+4aab$
9. $(a+b)^2-(c+d)^2+(a+c)^2-(b+d)^2$
10. $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2abc$

Exercice 4 Démontrer que $(a,b,c,x,y\in\mathbb{R})$

1. $(ax+by)^2+(ay-bx)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$

2. $(ax+by)^2-(ay+bx)^2=(a^2-b^2)(x^2-y^2)$
3. $(a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(c+a)=a^3+b^3+c^3$
4. $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=a^3+b^3+c^3$
5. $(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)=(aa'+bb')^2+(ab'-ba')^2$
6. $(a+b+c)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2=3(a^2+b^2+c^2)$

Exercice 5

1. Écrire sous la forme $2^m\times 3^n\times 5^p$ (avec m,n,p des entiers relatifs) les réels suivants :

$$A=\frac{(0{,}009)^{-3}\times(0{,}016)^2\times 250}{(0{,}00075)^{-1}\times 810^3\times 30}\quad ;\quad B=\frac{(-6)^4\times 30^{-2}\times(-10)^{-3}\times 15^4}{(-25)^2\times(36)^{-5}\times(-12)^3}$$

2. Écrire sous la forme $a^mb^nc^p$ (avec m,n,p entiers relatifs)

$$Q=\frac{(a^2b)^{-3}\times(bc^3)\times(a^{-2}b^5)^3}{(b^2c^2a)^{-4}\times(a^{-1}b^6)^2}\quad ;\quad R=\frac{(a^{-2}c)^{-4}\times(-b^2c)^5\times(a^3bc^{-1})^{-2}}{(-a^2b^{-3}c)^3\times(-b^4)\times(a^{-5}c)^2}$$

3. Calculer AB, A^2B^2, A^3B^4 où $A=-\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\times 3^2$ et $B=\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}\times 5$

Exercice 6 Simplifier les expressions suivantes :

1. $$A=\frac{(-a)^7\times(b^3c^2)^4}{-b^3c(-a)^4}\quad ;\quad B=\frac{91^{-1}\times(-39)^3\times 25}{26^2\times 45\times(-21)^{-2}\times 72}\quad ;\quad C=\frac{(28\times 12^{-2})^3\times 105^{-3}}{7^{-2}\times(-60)^{-4}\times 63^4}\div\left(\frac{5}{3}\right)^5$$

2. $$D=\frac{\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]^6\times\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}\right]^3\times\left[\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]^{-3}}{\left(-\frac{4}{9}\right)^6}\quad ;\quad E=\frac{(a^2b^3c)^2\times a^3c}{(ab)^4(c^2a)^2bc}$$

Exercice 7 m et n étant deux entiers positifs ou nuls, donner les différentes valeurs possibles de l'expression :

$$f(m,n)=\frac{5(-1)^m\times 7(-1)^{n+1}+8(-1)^{m+n}}{2(-1)^{m+n}}$$

Exercice 8 Factoriser les expressions suivantes :

1. $(4a^2+b^2-9)^2-16a^2b^2$
2. $(a^2+b^2-5)^2-4(ab+2)^2$
3. $(a^2+b^2-9)^2-4a^2b^2$
4. $(ax+by)^2-(ay+bx)^2$
5. $(ax+by)^2+(ay-bx)^2$
6. $(9x^2-12x+4)+(x-3)^2-(2x+1)^2$
7. $a^4-b^4+2ab(a^2-b^2)-(a^3-b^3)+ab^2-a^2b$
8. $(x+y)^3-x^3-y^3$

9. $a^5+b^5-ab^4-a^4b$

10. $25a^4-(9b^2-4a^2)^2$

11. $(a^2+ab+b^2)^2-(a^2-ab+b^2)^2$

Exercice 9 Factoriser les expressions suivantes :

1. $A=xy-xy^2+yz^2-xz^2+x^2z-xyz+y^2z-xyz$ (on trouvera trois facteurs)

2. $B=(xy^2z^3)^2\times(8y^5z^4)\times(x^8y^5z)^2\times(xyz)^2$ (on exprimera B sous forme de puissance d'un seul réel)

3. $C=25[4x^3(y^2z)^2]^2-2[10x^2(yz)^3]^2-[10(xyz)^2]^2$

Exercice 10 Soit a,b,c trois réels non nul tels que $ab+bc+ca=0$
Calculer la somme $S=\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}$

Exercice 11

1. Développer $(a+b+c)^2$.

2. Montrer que si $a+b+c=0$ alors $a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$.

3. On suppose a, b et c sont non nuls.
   Montrer que $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0 \implies (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$.

Exercice 12 Soit a,b,c trois réels :

1. Développer $(a+b+c)(ab+bc+ca)$ puis $(a+b+c)^3$

2. Démontrer que si $a+b+c=0$ alors $a^3+b^3+c^3=3abc$

3. En déduire que, pour tous réel x,y,z on a :

$$(x-y)^3-(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x)$$

Exercice 13
Soit a,b,c trois réels non nul tels que $ab+bc+ca=0$
Calculer la somme $S=\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}$

Exercice 14 Soient 4 entiers naturels consécutifs $n,n+1,n+2,n+3$, $(n>0)$

1. a. Démontrer que $(n+1)(n+2)=n(n+3)+2$
   b. On pose $(n+1)(n+2)=a$. Exprimer en fonction de a le produit $p=n(n+1)(n+2)(n+3)$
   c. En déduire que $p+1$ est le carré d'un entier (on dit carré parfait)

2. Déterminer n sachant que $p=5040$.

Exercice 15

a) Calculer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $A=\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$

b) Calculer $B=\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)$

c) Calculer en fonction de n : $X_n=\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)\dots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

Exercice 16

Simplifier les expressions suivantes (on suppose que tous les dénominateurs sont non nuls).

$$A = \frac{1}{(a+b)^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{2}{(a+b)^3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$
$$B = \left[\frac{(x^2+y^2)a+(x^2-y^2)b}{2xy}\right]^2-\left[\frac{(x^2-y^2)a+(x^2+y^2)b}{2xy}\right]^2$$
$$C = \frac{\frac{x+y}{1-xy}-\frac{x-y}{1+xy}}{1-\frac{x^2-y^2}{1-x^2y^2}}$$
$$D = \frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}\times\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{a+c}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a+c}}$$
$$E = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}\div\frac{a+b+c}{a-b-c}$$
$$F = \frac{x^2-yz+xy-xz}{x^2+yz-xy-xz}$$
$$G = \frac{\frac{x+t}{x-t}-\frac{x-t}{x+t}}{\frac{1}{(x+t)^2}+\frac{1}{(x-t)^2}}$$
$$H = \frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}$$
$$I = \frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\div\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}$$
$$J = \frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\times\frac{a^2-b^2}{a^3-b^3}$$

Exercice 17

On donne les expressions : $A=\dfrac{x}{t+z}; B=\dfrac{t}{z+x}; C=\dfrac{z}{x+t}$

Calculer les expressions : $X=\dfrac{x^2}{A(1-BC)}; Y=\dfrac{t^2}{B(1-CA)}; Z=\dfrac{t^2}{C(1-AB)}$

Exercice 18

On donne les expressions : $A=\dfrac{1}{1+\frac{a}{b+c}}; B=\dfrac{1}{1+\frac{b}{c+a}}; C=\dfrac{1}{1+\frac{c}{a+b}}$

Calculer la somme $A+B+C$

Exercice 19

Vérifier les identités suivantes :

a) $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)=1+\dfrac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$

b) $\dfrac{x^2}{(x-t)(x-z)}+\dfrac{t^2}{(t-z)(t-x)}+\dfrac{z^2}{(z-x)(z-t)}=1$

Exercice 20

a) Calculer $A=(a^2+b^2+c^2)^2$

b) Démontrer que : $(a+b+c=0) \implies [(a^2+b^2+c^2)^2=4(ab+bc+ca)^2]$

Exercice 21

a, b et c étant trois réels non nuls, simplifier l'expression :

$$A = \frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2) + \frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2) + \frac{c+a}{ca}(c^2+a^2-b^2)$$

Exercice 22

Soit x, y et z trois réels tels que: $xyz = 1$.
Montrer que :

$$\frac{x}{xy+x+1} + \frac{y}{yz+y+1} + \frac{z}{zx+z+1} = 1$$

Exercice 23

Démontrer que, a, b et c désignant trois nombres réels non nuls, on ne peut avoir :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

que si deux de ces nombres sont opposés (c'est-à-dire qu'on a : $a = -b$ ou $b = -c$ ou $c = -a$).

Exercice 24 Montrer que l'expression :

$$E = \frac{4a^2-1}{(a-b)(a-c)} + \frac{4b^2-1}{(b-c)(b-a)} + \frac{4c^2-1}{(c-a)(c-b)} \text{ est égale à } 4.$$

Exercice 25 Soient a, b et c trois nombres réels deux à deux inégaux.

1°) Démontrer l'identité :

$$\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b}\right) = \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2}$$

2°) Montrer que : $\dfrac{1}{b-c} + \dfrac{1}{c-a} + \dfrac{1}{a-b}$ est *non nul quels que soient a, b et c distincts deux à deux.*

Exercice 26

I. On donne : $a = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - y^2}}$ et $b = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - y^2}}$; avec $x > y \geq 0$.

1. Calculer a^2, b^2 et ab.
2. En déduire que $(a+b)^2 = 2(x+y)$.

II. Soient x et y deux nombres réels tels que $x > y \geq 0$.
Montrer que $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

III. Soient a et b deux nombres réels strictement positifs.

a) Développer l'expression $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$.

b) En déduire que $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.

IV. Simplifier $A = \sqrt{2} \times \sqrt{2+\sqrt{2}} \times \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.