Td Probabilité

Exercice 1

Un jeu de 32 cartes est constitué de 4 couleurs : Piques, coeur, trèfle et carreau. Chaque couleur est composé de 8 cartes : l'As ; le Roi, la Dame, le Valet, le 10, le 9, le 8 et le 7.

1. On tire simultanément 3 cartes de ce jeu. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   (a) A : "Les trois cartes sont des As"
   (b) B : "Il y a au moins deux couleurs parmi les trois cartes"
   (c) C : "Il n'y a pas d'As parmi les trois cartes"
2. On tire successivement avec remise 3 cartes du jeu de 32 cartes. On définit la variable aléatoire X qui est égale au nombre de couleurs tiré. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 2

Une urne contient 12 fiches portant chacune une lettre du mot "BACCALAUREAT".

1. On tire successivement et au hasard les 12 fiches en les plaçant l'une après l'autre. Quelle est la probabilité d'obtenir :
   (a) Un mot commençant par une consonne ?
   (b) Un mot commençant par une voyelle ?
   (c) Le mot BACCALAUREAT ?
2. On remet les fiches dans l'urne et on en tire que 3 fiches toujours successivement et sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir :
   (a) Le mot BAC.
   (b) Trois voyelles.
   (c) Un seul A.
   (d) Au moins un A.

Exercice 3

Les laboratoires pharmaceutiques indiquent pour chaque test sa sensibilité α, qui est la probabilité que le test soit positif si le sujet est malade, et sa spécificité β, qui est la probabilité que le test soit négatif si le sujet est sain. Sachant qu'en moyenne il y a un malade sur 1000 personnes, calculer la probabilité d'être un sujet sain alors que le test est positif, avec $\alpha = 95\%$ et $\beta = 97\%$. Calculer la probabilité d'être malade alors que le test est négatif.

Exercice 4

Une porte monnaie comprend quatre pièces de 500F et six pièces de 200F. Un enfant tire au hasard simultanément 3 pièces de ce porte monnaie.

1. Calculer la probabilité de l'événement A : "tirer 3 pièces de 500F".
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces de 500F tiré.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de X et son écart type.
3. L'enfant répète 5 fois la même épreuve en remettant à chaque fois les trois pièces tirées dans le porte monnaie. Quelle est la probabilité que l'événement A se réalise trois fois à l'issue de l'épreuve ?

Exercice 5

Une urne contient neuf boules : trois rouges numérotées -1, -1, 1, deux vertes numérotées -2, 2 et quatre blanches numérotées 1, -2, 2, 2. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1. On tire **simultanément trois boules** de l'urne. Calculer la probabilité des événements suivants :
   A "avoir trois boules de même couleur"
   B "avoir trois boules dont le produit des numéros marqués est négatif"
   C "avoir trois boules de même couleur et de produit négatif"
   D "avoir trois boules de produit négatif **ou** de même couleur"
2. On tire **3 boules successivement et avec remise**. Calculer la probabilité des événements suivants :
   E "Avoir trois boules de couleurs différentes"
   F "avoir trois boules de couleurs différentes dont le premier est rouge"

Exercice 6

On dispose de deux dés cubiques parfaits A et B. Les faces du dé A sont numérotées $0, 1, 1, -1, -1, -1$ et celles du dé B sont numérotées $0, 0, 0, 1, 1, 1$.

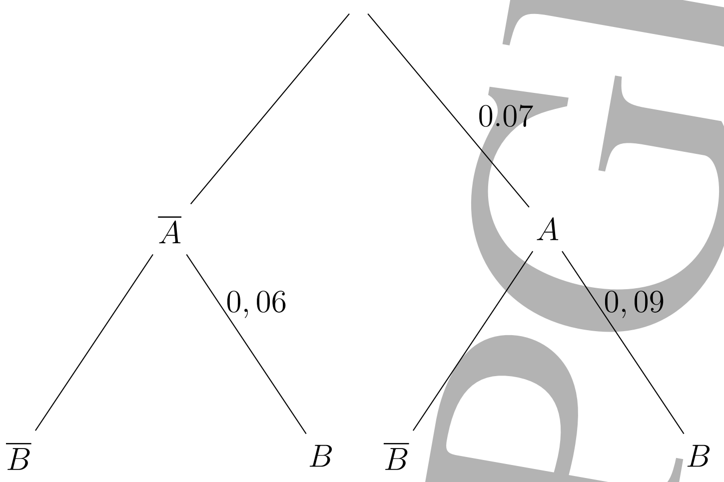
1. On lance les deux dés. À chaque lancer, on construit un nombre complexe $z = a + ib$ où a est le numéro obtenu du dé A et b le numéro obtenu du dé B.
   Calculer la probabilité des événements suivants :
   A "$z = 0$"
   B "z est réel"
   C "z est imaginaire pur non nul"
   D "$|Z| = \sqrt{2}$"
   E "$\Re(z) > 0$"
   F "$D \cup E$"
2. On lance le dé A quatre fois de suite.
   (a) Calculer la probabilité pour que la somme des numéros obtenus soit nulle.
   (b) Calculer la probabilité pour que le produit des numéros obtenus soit nul.

Exercice 7

Une usine fabrique en grande série de climatiseurs susceptibles de présenter deux défauts a et b. Une étude statistique de la production conduit aux résultats suivants :

- 7% des climatiseurs présentent le défaut a.
- Parmi les climatiseurs présentant le défaut a, 9% présentent le défaut b.
- Parmi les climatiseurs ne présentant pas le défaut a, 6% présentent le défaut b.

On prélève au hasard un climatiseur de la production. On désigne par A et B les événements suivants :
A « le climatiseur présente le défaut a » et B « le climatiseur présente le défaut b ».



1. L'arbre pondéré ci-contre représente cette situation. Recopier et compléter cet arbre.
2. (a) Calculer $p(A \cap B)$.
   (b) Montrer que $p(B) = 0.0621$.
   (c) Quelle est la probabilité que le climatiseur ne présente aucun défaut
3. Sachant que le climatiseur présente le défaut b, quelle est la probabilité que ce climatiseur présente le défaut a.

Exercice 8 BAC S2 2003

Dans un pays donné, la maladie du sida touche cinq pour mille de sa population.

Des études statistiques montrent que la probabilité pour un individu d'avoir un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8 et celui d'avoir un test négatif sachant qu'il n"est pas atteint par la maladie est 0,9. On note : T l'événement « avoir un test positif à cette maladie »

M l'événement « être malade »

$\overline{M}$ est l'événement contraire de M.

On rappelle que pour tous événements A et B, on a :

$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ et $P_A(B)$ désigne la probabilité de B sachant A.

1. (a) Réécrire la relation $(*)$ pour $A = T$ et $B = M$, puis pour $A = \overline{M}$ et $B = \overline{T}$.
   (b) En déduire que $P(A \cap \overline{M}) = P(\overline{M}) \left[1 - P_{\overline{M}}(\overline{T})\right]$
   (c) Calculer la probabilité pour qu'un individu ait un test positif à cette maladie.
2. (a) Calculer la probabilité pour qu'un individu soit malade sachant qu'il a un test positif à cette maladie.
   (b) Calculer la probabilité pour qu'un individu soit malade sachant qu'il a un test négatif à cette maladie.

   On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Exercice 9

Soit un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Lorsqu'on lance ce dé, on note par p_i la probabilité d'apparition de la face numérotée i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

- p_1, p_3 et p_5 sont dans cet ordre en progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
- p_2, p_4 et p_6 sont dans cet ordre en progression arithmétique de raison $\frac{1}{8}$ et $2p_2 = 3p_1$.

1. Déterminer p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6.
2. On lance ce dé 4 fois de suite et on note X la variable aléatoire égale au nombre de fois qu'on obtient un nombre pair au cours des 4 lancers.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (b) Déterminer $E(X)$ et $\sigma(X)$.
   (c) Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Cette fois-ci on lance n fois de suite. Déterminer le plus petit entier naturel n pour que la probabilité d'avoir au moins une fois un numéro pair soit supérieur ou égal à 0,99.

Exercice 10

On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par p_i la probabilité d'apparition de la face i lors d'un lancer du dé. Le dé est pipé de telle manière que p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6 sont dans cet ordre six termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

1. Montrer que $p_1 = \frac{32}{63}$ puis en déduire p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6.
2. Soit A l'événement « obtenir un chiffre pair », montrer que $p(A) = \frac{1}{3}$.
3. On dispose maintenant d'une urne U contenant
   - si A est réalisé alors on tire successivement et sans remise deux jetons de U.
   - sinon on tire simultanément deux jetons de U.

   Soit D l'événement « les deux jetons tirés sont de couleurs différentes ».
   (a) Calculer $p(D \cap A)$ et $p(D \cap \overline{A})$.
   (b) En déduire que $p(D) = \frac{3}{5}$ puis calculer $p_D(A)$.
4. On répète 10 fois de suite dans les mêmes conditions et de façon indépendantes le tirage précédent. Soit X la variable aléatoire égale aux nombres de réalisations de l'événement D à l'issu des deux tirages.
   (a) Déterminer la probabilité d'avoir exactement deux fois l'événement D.
   (b) Déterminer la probabilité d'avoir au moins une fois l'événement D à l'issu des 10 tirages.
   (c) Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X.

Exercice 11 BAC S2 2011

I. On considère Ω l'univers associé à une expérience aléatoire, A et B deux événements. Dans le cas d'équiprobabilité rappeler les probabilités des événements suivants :

A**,** A **sachant** B, $A \cap B$, $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.

II. Une société de distribution d'électricité ayant une production insuffisante en électricité pour assurer une alimentation continue dans tout le pays, procède à des délestages. Ainsi à partir d'un certain jour les délestages ont débuté dans une ville à un rythme décrit comme suit :

- Le premier jour la ville est délestée.
- Si la ville est délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{2}{9}$.
- Si elle n'est pas délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{5}{6}$.

On désigne par D_n l'événement «la ville est délestée le $n^{\text{ième}}$ jour» et $p_n = P(D_n)$.

1. Montrer les égalités suivantes : $p(D_1) = 1$; $p(D_{n+1}/D_n) = \frac{2}{9}$ et $p(D_{n+1}/\overline{D_n}) = \frac{5}{6}$.
2. Exprimer p_{n+1} en fonction de $p(D_{n+1} \cap D_n)$ et $p(D_{n+1} \cap \overline{D_n})$.
3. En déduire que, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $p_{n+1} = -\frac{11}{18}p_n + \frac{5}{6}$.
4. On pose $U_n = 6p_n - \frac{90}{29}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que la suite (U_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
   (b) Exprimer U_n puis p_n en fonction de n.
   (c) Un match de football doit se jouer le $20^{\text{ème}}$ jour. Quelle est la probabilité pour que les habitants de la ville le suivent sans délestage.

Exercice 12

Un jeu réunit 35 hommes, 40 femmes et 25 enfants. Sur une table, il y a 3 urnes U_1, U_2 et U_3 contenant des boules indiscernables au toucher. L'urne U_1 contient 1 boule noire, 5 boules blanches et 4 boules rouges ; l'urne U_2 contient 4 boules noires, 5 boules blanches et 1 boule rouge ; l'urne U_3 contient 8 boules noires, 2 boules blanches et 4 boules rouges.

Un présentateur aux yeux bandés désigne une personne au hasard et lui demande de tirer une boule de U_1 si cette personne est un homme, dans U_2 si cette personne est une femme et dans U_3 si cette personne est un enfant.

1. Calculer la probabilité de tirer une boule noire sachant que le présentateur a choisi un homme.
2. Calculer la probabilité de tirer une boule noire sachant que le présentateur a choisi une femme.
3. Calculer la probabilité de tirer une boule noire sachant que le présentateur a choisi un enfant.
4. Montrer que la probabilité de tirer une boule noire est égale à $\frac{79}{200}$.
5. Calculer la probabilité de tirer une boule blanche puis celle de tirer une boule rouge.
6. La boule tirée est noire, quelle est la probabilité pour que la boule soit tirée par un homme ?
7. On définit la règle suivante :

- si une boule noire est tirée, le joueur gagne 1000 FCFA,
- si une boule blanche est tirée, le joueur gagne 500 FCFA,
- si une boule rouge est tirée, le joueur perd 500 FCFA.

Soit X la variable aléatoire qui est égale au gain algébrique d'un joueur.

(a) Déterminer la loi de probabilité de X.

(b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

(c) Déterminer la fonction de répartition de X.

Exercice 13 BAC S2 2018

On considère la fonction de répartition F de la variable aléatoire X,

/home/pathegobelba/Documents/LatexCodes/TS/build/repart.png

1. $F : \mathbb{R} \to [0;1]$ définie par $x \mapsto P(X \leq x)$, étant une loi de probabilité définie sur un univers fini et non vide. Dans un repère orthogonal, la représentation graphique de F est la suivante :

   (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

   (b) Déterminer la loi de probabilité de X.

   (c) Calculer les probabilités $P(X \leq 0)$ et $P(X \geq 1)$.

   (d) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et X.

   (e) Vérifier que l'écart-type $\sigma(X)$ de X est égal à $\dfrac{\sqrt{12}}{3}$.

2. On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant chacune 3 boules. Les boules de U_1 sont numérotées 1, 2 et 3 et celles de U_2 sont numérotées -2, -1 et 0. On tire simultanément une boule de chaque urne et on effectue la somme Y des numéros des boules tirées.

   (a) Dresser un tableau à double entrée permettant d'obtenir les valeurs possibles de Y.

   (b) En déduire que X et Y ont la même loi de probabilité.

Exercice 14 BAC S2 2019

Dans une classe de première S2, sur 45 élèves 30 ont eu la moyenne au premier devoir de mathématiques. On considère que dans cette classe si un élève a la moyenne à un devoir donné la probabilité qu'il ait la moyenne au devoir suivant est $\dfrac{1}{2}$ et s'il a raté la moyenne à un devoir donné la probabilité qu'il ait la moyenne au devoir suivant est $\dfrac{1}{3}$.

Soit E_n l'événement « l'élève a eu la moyenne au $n^{\text{ième}}$ devoir », $\overline{E_n}$ l'événement « l'élève n'a pas eu la moyenne au $n^{\text{ième}}$ devoir » et p_n la probabilité de l'événement E_n.

1. Déterminer p_1.
2. (a) Déterminer $P(E_2/E_1)$ et $P(E_2/\overline{E_1})$.
   (b) En déduire p_2.
3. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $p_{n+1} = \dfrac{1}{6}p_n + \dfrac{1}{3}$.
4. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul, par : $u_n = p_n - \dfrac{2}{5}$.
   (a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) Exprimer u_n en fonction de n puis p_n en fonction de n.
   (c) Calculer la limite de p_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 15 BAC S2 2020

1. On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lance simultanément les deux dés et on s'intéresse à la somme S des chiffres apparus sur la face de dessus.
   (a) Déterminer les valeurs possibles de S.
   (b) Déterminer la probabilité d'obtenir une somme égale à 9.
2. Marame et Birane disposent chacun de deux dés et s'adonnent au jeu précédent, chacun de son côté.
   (a) Quelle est la probabilité que chacun affiche un même score de 9, 7 ou 8 ?
   (b) Quelle est la probabilité qu'ils affichent le même score ?
   (c) Celui qui affiche le plus grand score gagne. Calculer la probabilité pour que Marame gagne.

Exercice 16 BAC S2 2021

Une urne U_1 contient quatre boules noires et trois boules blanches. Une urne U_2 contient trois boules noires et deux boules blanches.

Expérience : on jette un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, chaque face ayant la même probabilité d'apparaître. Si la face numérotée 6 apparaît, on tire une boule de U_1 sinon on tire une boule de U_2. On considère les événements suivants :

- A : « obtenir une face numérotée 6 ».
- B : « tirer une boule blanche ».

1. Schématiser la situation de l'expérience sous forme d'un arbre pondéré.

2. Déterminer les probabilités de A et $\overline{A}$, où $\overline{A}$ est l'événement contraire de A.

3. Déterminer la probabilité de l'événement B.

4. Déterminer $P_B(A)$, la probabilité de A sachant B.

5. L'expérience précédente se déroule 5 fois de suite de façon indépendante. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.

   (b) Trouver l'espérance mathématique de X, $E(X)$ et la variance de X, $V(X)$.

6. L'expérience se déroule en n parties indépendantes. Déterminer la valeur minimale de n pour laquelle la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche dépasse 0,99.

Exercice 9 BAC S2 2022

On jette trois fois de suite un dé non truqué à six faces portant les chiffres allant de 1 à 6. On lit les numéros des faces supérieures et on les note dans l'ordre a, b et c. Puis on forme l'équation du second degré (E) : $ax^2 + bx + c = 0$. On note Ω l'univers de cette expérience aléatoire.

1. Soit A « -1 est solution de (E) et $b = 6$ ». Justifier que la probabilité de l'événement A est $p(A) = \dfrac{5}{216}$.

2. On considère les événements suivants :

   - B : « -2 est solution de (E) et $c = 4$ ».
   - C : « la somme des solutions est -2 et leur produit est 1 ».
   - D : « les deux solutions sont confondues et $b = 4$ ».

   La probabilité de chacun des événements B, C et D appartient à l'intervalle $I = \left\{\dfrac{1}{72}, \dfrac{1}{108}, \dfrac{1}{54}\right\}$. Donner la probabilité de chacun des événements B, C et D en le justifiant.

3. L'épreuve précédente est répétée 10 fois de suite et de façon indépendante.

   (a) Soit F l'événement : « L'événement A se réalise une seule fois au $3^{\text{ème}}$ essai ». Montrer que la probabilité de l'événement F est $p(F) = \dfrac{5 \times (211)^9}{(216)^{10}}$.

   (b) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de réalisations de l'événement A à l'issue des 10 épreuves.

      i. Déterminer la loi de probabilité de Y.

      ii. Montrer que le nombre espéré de réalisations de A est égal à $\dfrac{25}{108}$.

      iii. Calculer la variance de Y.