

Correction de la composition Du 2nd Semestre

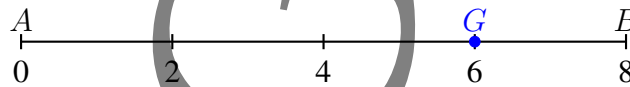
Correction Exercice 1 : 4 pts

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 8$ cm.

- 1 Construisons le barycentre G des points pondérés $(A; 1)$ et $(B; 3)$.

0,1 pt

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{BG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$$



- 2 Calculons les distances GA et GB .

0,5 pt + 0,5 pt

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \|\overrightarrow{AG}\| = \frac{3}{4}\|\overrightarrow{AB}\|$$

$$\Rightarrow AG = \frac{3}{4} \times 8$$

$$\Rightarrow AG = 6$$

$$\overrightarrow{BG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} \Rightarrow \|\overrightarrow{BG}\| = \frac{1}{4}\|\overrightarrow{BA}\|$$

$$\Rightarrow BG = \frac{1}{4} \times 8$$

$$\Rightarrow BG = 2$$

$$GA = 6 \text{ et } GB = 2$$

- 3 Démontrons que pour tout point M du plan,

$$MA^2 + 3MB^2 = 4MG^2 + 48$$

0,1 pt

$$\begin{aligned} MA^2 + 3MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + 3\overrightarrow{MB}^2 \\ &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 \\ &= \overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}^2 + 3(\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}^2) \\ &= \overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}^2 + 3\overrightarrow{MG}^2 + 6\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GB}^2 \\ &= 4\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + 6\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GA}^2 \\ &= 4\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB}) + 3\overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GA}^2 \\ &= 4\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}(\vec{O}) + 3\overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GA}^2 \\ &= 4\overrightarrow{MG}^2 + 3\overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GA}^2 \\ &= 4\overrightarrow{MG}^2 + 3(2)^2 + 6^2 \\ &= 4\overrightarrow{MG}^2 + 12 + 36 \\ &= 4MG + 48 \end{aligned}$$

$$MA^2 + 3MB^2 = 4MG^2 + 48 \quad \text{CQFD}$$

- 4 Démontrons et construisons l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MA^2 + 3MB^2 = 84$$

0,1 pt

D'après la relation précédente on a $MA^2 + 3MB^2 = 4MG^2 + 48$

$$4MG^2 + 48 = 84$$

$$4MG^2 = 84 - 48$$

$$4MG^2 = 36$$

$$MG^2 = 9$$

$$MG = 3$$

Donc, l'ensemble des points M tels que $MA^2 + 3MB^2 = 84$ est le cercle de centre I et de rayon 3 :

$$\mathcal{C}(I, 3)$$

- 5 Déterminons et construisons l'ensemble des points M tels que :

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = -12$$

0,1 pt

Soit I milieu de AB

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = -12 \implies \vec{MI}^2 - \frac{\vec{AB}^2}{4} = -12$$

$$\implies \vec{MI}^2 - \frac{8^2}{4} = -12$$

$$\implies \vec{MI}^2 - 16 = -12$$

$$\implies \vec{MI}^2 = 4$$

Donc, l'ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = -12$ est le cercle de centre I et de rayon 2 :

$$\mathcal{C}(I, 2)$$

Exercice 2 : 5 pts

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$$

- 1 Déterminons les réels a et b tels que la courbe (C_f) passe par le point $A(0, 1)$ et admette en ce point une tangente horizontale. 0,5 pt + 0,75 pt

- (C_f) passe par $A(0, 1)$ signifie que $f(0) = 1$.

On calcule :

$$f(0) = \frac{0^2 + a \cdot 0 + b}{0 - 1} = \frac{b}{-1} = -b$$

Donc, $-b = 1 \implies \boxed{b = -1}$.

- (C_f) admet une tangente horizontale en $A(0, 1)$ signifie que $f'(0) = 0$.

On dérive f par le quotient :

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{avec} \quad u(x) = x^2 + ax + b, \quad v(x) = x - 1$$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(x-1)^2}$$

$$u'(x) = 2x + a, \quad v'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{(2x+a)(x-1) - (x^2+ax+b)}{(x-1)^2}$$

Calculons $f'(0)$:

$$f'(0) = \frac{(0+a)(-1) - (0+0+b)}{1} = \frac{-a-b}{1} = -a-b$$

On veut $f'(0) = 0$, donc :

$$-a-b=0 \Rightarrow -a+1=0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

Ainsi, les réels recherchés sont $\boxed{a=1}$ et $\boxed{b=-1}$.

On suppose $a=1$ et $b=-1 \dots$

- 2 Déterminons les limites aux bornes de \mathcal{D}_f . Précisons les asymptotes éventuelles. **0,5 pt + 0,5 pt + 0,5 pt**

La fonction devient, avec $a=1$ et $b=-1$:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$$

Domaine de définition :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Limites aux bornes du domaine :

- Limite en $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})}{x(1 - \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})}{1 - \frac{1}{x}} = -\infty$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

- Limite en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} = +\infty$$

- Limite en 1^- :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} = \frac{1 + 1 - 1}{0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

- Limite en 1^+ :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} = \frac{1 + 1 - 1}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Asymptotes :

- En $x = 1$, la fonction tend vers $\pm\infty$, donc la droite $x = 1$ est une **asymptote verticale**.

- 3 Déterminer les réels α, β, γ tels que :

$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x - 1}$$

En déduire que la droite $(D) : y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe.

0,75 pt + 0,5 pt

On part de :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$$

On effectue la division euclidienne du numérateur par le dénominateur.

Division de $x^2 + x - 1$ par $x - 1$:

$$\frac{x^2 + x - 1}{x - 1} = x + 2 + \frac{1}{x - 1}$$

Donc :

$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x - 1} \quad \text{avec } \alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 1$$

Conclusion sur l'asymptote oblique :

Lorsque $x \rightarrow \pm\infty$, $\frac{1}{x - 1} \rightarrow 0$, donc : $y = x + 2$

Par conséquent, la droite $(D) : y = x + 2$ est une **asymptote oblique** à la courbe représentative de f .

- 4 Dresser le tableau de variations de f puis tracer la courbe.

0,1 pt + 0,5 pt

On a vu précédemment que :

$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x - 1}$$

On dérive :

$$f'(x) = \left(x + 2 + \frac{1}{x - 1} \right)' = 1 - \frac{1}{(x - 1)^2}$$

Étudions le signe de $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(x - 1)^2 - 1}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2}$$

Tableau de signes de $f'(x)$:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$- \quad 0 \quad +$			$- \quad 0 \quad +$	
f	$f(0) = 1$ $-\infty \nearrow \quad \searrow -\infty$			$+\infty \searrow \quad \nearrow +\infty$ $f(2) = 5$	

Remarques : - En $x = 1$, la fonction n'est pas définie (asymptote verticale).

- En $x = 0$, $f(0) = 1$

- En $x = 2$, $f(2) = \frac{4 + 2 - 1}{1} = 5$

Courbe représentative :

Tracer la courbe en tenant compte :

- de l'asymptote verticale $x = 1$,
- de l'asymptote oblique $y = x + 2$,
- des points remarquables : $A(0, 1)$, $B(2, 5)$.

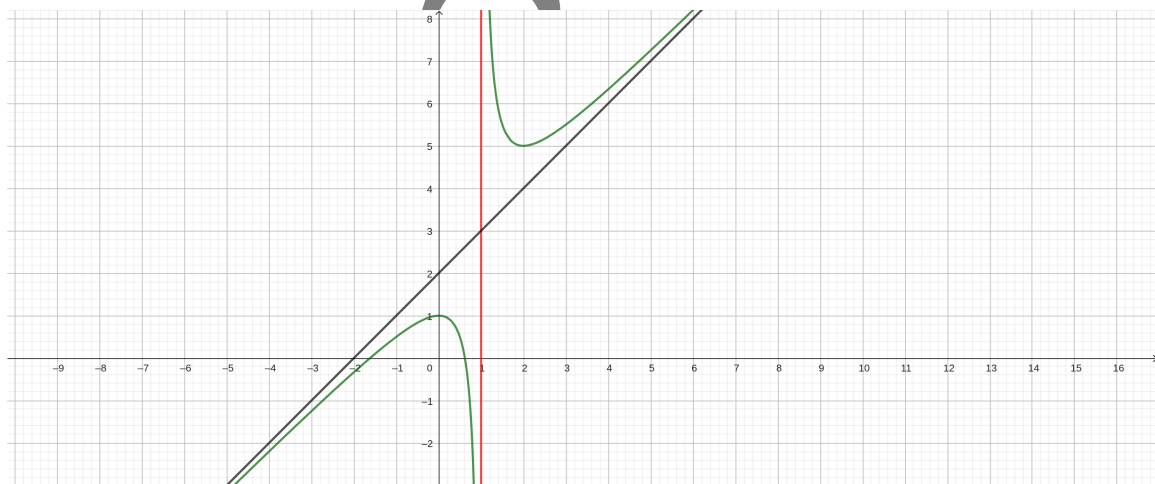


Figure 1: Représentation graphique de la courbe

[Clique ici pour voir la courbe sur géogébra](#)

Problème : 10 pts

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x^2 + 5x - 5}{x - 1} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{3x - 5}{x^2 - 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

① Montrons que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1,25 pt

Posons $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \frac{-x^2 + 5x - 5}{x - 1} & \text{si } x \leq 0 \\ f_2(x) = \frac{3x - 5}{x^2 - 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 f_1 &\exists \text{ssi } x - 1 \neq 0 \text{ et } x \leq 0 \\
 &\text{ssi } x \neq 1 \text{ et } x \leq 0 \\
 &\text{ssi } x \neq 1 \text{ et } x \in] - \infty; 0] \\
 &\text{ssi } 1 \notin] - \infty; 0]
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } D_{f_1} =] - \infty; 0]$$

$$\begin{aligned}
 f_2 &\exists \text{ssi } x^2 - 1 \neq 0 \text{ et } x \geq 0 \\
 &\text{ssi } x \neq -1 \text{ et } x \neq 1 \text{ et }]0; +\infty[\\
 &\text{ssi } -1 \notin]0; +\infty[\text{ et } 1 \in]0; +\infty[\\
 &\text{ssi } 1 \in]0; +\infty[
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } D_{f_2} =]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

$$\begin{aligned}
 D_f &= D_{f_1} \cup D_{f_2} \\
 &= (] - \infty; 0]) \cup (]0; 1[\cup]1; +\infty[) \\
 &=] - \infty; 0] \cup]0; 1[\cup]1; +\infty[\\
 &=] - \infty; 1[\cup]1; +\infty[\\
 &= \mathbb{R} \setminus \{1\}
 \end{aligned}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Autre Méthode

Étude du domaine de définition de f_1 :

L'expression $f_1(x) = \frac{-x^2 + 5x - 5}{x - 1}$ est définie si $x - 1 \neq 0$, soit $x \neq 1$.

Or, f_1 est définie uniquement sur $x \leq 0$, donc comme $1 \notin] - \infty; 0]$, on a :

$$D_{f_1} =] - \infty; 0]$$

Étude du domaine de définition de f_2 :

L'expression $f_2(x) = \frac{3x - 5}{x^2 - 1}$ est définie si $x^2 - 1 \neq 0$, soit $x \neq \pm 1$.

Comme f_2 est définie pour $x > 0$, il faut exclure $x = 1$, mais $x = -1$ ne fait pas partie de l'intervalle. Donc :

$$D_{f_2} =]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

Conclusion :

$$D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2} =] - \infty; 0] \cup (]0; 1[\cup]1; +\infty[) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

2 Calculons les limites aux bornes de D_f .

0,1 pt

En $-\infty$:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 5x - 5}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

En $+\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-5}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

En 1^- :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f_2(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x-5}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2}{0^-} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

En 1^+ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f_2(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x-5}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2}{0^+} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

3 Dédudions-en les asymptotes de (C_f) .

0,5 pt

- La limite en $+\infty$ est nulle, donc la droite $y = 0$ est une **asymptote horizontale** à droite.
- La fonction tend vers $\pm\infty$ en $x = 1$, donc la droite $x = 1$ est une **asymptote verticale**.

$y = 0$ est une AH en $+\infty$, $x = 1$ est une AV

4 Montrons que la droite d'équation $y = -x + 4$ est asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$.

0,5 pt

On considère : $f_1(x) = \frac{-x^2 + 5x - 5}{x - 1}$

Une division euclidienne donne : $\frac{-x^2 + 5x - 5}{x - 1} = -x + 4 + \frac{-1}{x - 1}$

$$\text{Donc : } f_1(x) = -x + 4 + \frac{-1}{x - 1}$$

$$\text{Or, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x - 1} = 0, \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = -x + 4$$

Ainsi, la droite $y = -x + 4$ est une **asymptote oblique** à gauche.

$y = -x + 4$ est une asymptote oblique en $-\infty$

Autre Méthode

D'après la question 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ donc cherchons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{-x^2 + 5x - 5}{x - 1}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 5x - 5}{x^2 - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x^2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ donc cherchons $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x)]$

En effet :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + (-x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 5x - 5}{x - 1} + x \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 5x - 5 + x^2 - x}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - 5 - x}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x - 5}{x - 1} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = 4 \Rightarrow \boxed{y = -x + 4 \text{ est une asymptote oblique à gauche}}$$

5 Étudier la continuité de f en 0.

0,75 pt

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{-0 + 0 - 5}{0 - 1} \\ &= \frac{-5}{-1} \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2 + 5x - 5}{x - 1} \\ &= \frac{0 + 0 - 5}{0 - 1} \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x - 5}{x^2 - 1} \\
 &= \frac{0 - 5}{0 - 1} \\
 &= \frac{-5}{-1} \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 5 \implies f$ est continue en $x = 0$

6 Étudions la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement les résultats.

0,1 pt + 0,5 pt

On calcule les limites du taux d'accroissement à gauche et à droite de 0 :

En 0^- : $f(x) = \frac{-x^2 + 5x - 5}{x - 1}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - 5}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{-x^2 + 5x - 5}{x - 1} - 5}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{-x^2 + 5x - 5 - 5(x - 1)}{x - 1}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{-x^2 + 5x - 5 - 5x + 5}{x - 1}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{-x^2}{x - 1}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2}{x(x - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2}{x(x - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x - 1} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

En 0^+ : $f(x) = \frac{3x - 5}{x^2 - 1}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3x-5}{x^2-1} - 5}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3x-5-5(x^2-1)}{x^2-1}}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3x-5-5x^2+5}{x^2-1}}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3x-5x^2}{x^2-1}}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x-5x^2}{x(x^2-1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x-5x^2}{x(x^2-1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3-5x}{x^2-1} \\
&= -3
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0 \neq -3 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

$f'_g(0) \neq f'_d(0)$ donc f n'est pas dérivable en $x = 0$

Interprétation graphique :

f est continue en $x = 0$ mais non dérivable en $x = 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ donc (C_f) admet une demi-tangente horizontale en 0 d'équation $y = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -3$ donc (C_f) admet une demi-tangente horizontale en 0 d'équation $y = -3x$

7 Calculons $f'(x)$ pour $x < 0$ et pour $x > 0$.

0,5 pt + 0,5 pt

Pour $x < 0$, on a : $f(x) = f_1(x) = \frac{-x^2 + 5x - 5}{x - 1}$

$$f'_1(x) = \frac{(-2x + 5)(x - 1) - (-x^2 + 5x - 5)(1)}{(x - 1)^2}$$

$$\begin{aligned}
f'_1(x) &= \frac{(-2x + 5)(x - 1) + x^2 - 5x + 5}{(x - 1)^2} \\
&= \frac{(-2x^2 + 2x + 5x - 5) + x^2 - 5x + 5}{(x - 1)^2} \\
&= \frac{-2x^2 + 7x - 5 + x^2 - 5x + 5}{(x - 1)^2} \\
&= \frac{-x^2 + 2x}{(x - 1)^2}
\end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x}{(x - 1)^2} \quad \text{pour } x < 0$$

Pour $x > 0$, on a : $f(x) = f_2(x) = \frac{3x-5}{x^2-1}$

$$f'_2(x) = \frac{3(x^2-1) - (3x-5)(2x)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'_2(x) = \frac{3x^2 - 3 - (6x^2 - 10x)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{3x^2 - 3 - 6x^2 + 10x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{-3x^2 + 10x - 3}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-3x^2 + 10x - 3}{(x^2-1)^2} \text{ pour } x > 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} f'_1(x) = \frac{-x^2 + 2x}{(x-1)^2} & \text{si } x \leq 0 \\ f'_2(x) = \frac{-3x^2 + 10x - 3}{(x^2-1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

8 Étudions le signe de $f'(x)$ pour $x < 0$ puis pour $x > 0$.

0,5 pt + 0,5 pt

Pour $x < 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x}{(x-1)^2}$$

Le dénominateur $(x-1)^2 > 0$ pour tout $x \neq 1$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur :

$$-x^2 + 2x = -x(x-2)$$

Étude du signe de $-x(x-2)$ sur $] -\infty; 0[$:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$-x^2 + 2x$	-	0	0	

$$f'(x) < 0 \text{ pour tout } x \in] -\infty; 0[$$

Pour $x > 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{-3x^2 + 10x - 3}{(x^2-1)^2}$$

Le dénominateur est strictement positif pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, et ici $x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur : $-3x^2 + 10x - 3$

Étudions le signe :

$$\Delta = 10^2 - 4 \times (-3) \times (-3) = 100 - 36 = 64$$

$$x_1 = \frac{-10 - \sqrt{64}}{2 \times (-3)} = \frac{-10 - 8}{-6} = \frac{-18}{-6} = 3$$

$$x_2 = \frac{-10 + \sqrt{64}}{2 \times (-3)} = \frac{-10 + 8}{-6} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

x	0	$\frac{1}{3}$	3	$+\infty$	
$-3x^2+10x-3$	-	0	+	0	-

$$f'(x) < 0 \text{ sur }]0; \frac{1}{3}[\cup]3; +\infty[, \quad f'(x) > 0 \text{ sur }]\frac{1}{3}; 3[$$

9 Dressons le tableau de variation de f .

1,5 pt

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	-	-	0	+	+	0	-
f	$+\infty$	5	$\frac{9}{2}$	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	0