◇◇◇ Lycée de Dindéfélo ◇◇◇			A.S. : 2024/2025
Matière: Mathématiques	Niveau : TS2	Date: 21/01/2025	Durée : 4 heures

Correction Devoir n° 2 Du 1er Semestre

Exercice 1 : 4 points [*Déjà corrigé en classe*]

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3}, \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*),\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1+(n+2)u_n}. \end{cases}$$

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $v_n = \dfrac{1}{u_n} - n$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique. **1,5 pt**
2. a. Déterminer v_n et u_n en fonction de n. **1 pt**

   b. Calculer en fonction de n la somme : $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$. **1,5 pt**

Correction Exercice 1 : 4 points [*Déjà corrigé en classe*]

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3}, \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*),\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1+(n+2)u_n}. \end{cases}$$

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $v_n = \dfrac{1}{u_n} - n$.

1. Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique. **1,5 pt**

   (v_n) est une suite géométrique ssi $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = q \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$

   In fact :

$$
\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{\frac{1}{u_{n+1}}-(n+1)}{\frac{1}{u_n}-n}\\
&= \frac{\frac{1}{\frac{2u_n}{1+(n+2)u_n}}-(n+1)}{\frac{1-nu_n}{u_n}}\\
&= \frac{\frac{1+(n+2)u_n}{2u_n}-(n+1)}{\frac{1-nu_n}{u_n}}\\
&= \frac{\frac{1+(n+2)u_n-(n+1)2u_n}{2u_n}}{\frac{1-nu_n}{u_n}}\\
&= \frac{\frac{1+nu_n+2u_n-n2u_n-2u_n}{2u_n}}{\frac{1-nu_n}{u_n}}\\
&= \frac{1+nu_n+2u_n-n2u_n-2u_n}{2(1-nu_n)}\\
&= \frac{1-nu_n}{2(1-nu_n)}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Donc v_n est une suite gémétrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme: $v_1 = \frac{1}{u_1} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{3}} - 1 = 3 - 1 = 2$

2 **a** Déterminons v_n et u_n en fonction de n. **1 pt**

(v_n) est une suite géométrique donc $v_n = v_p \times q^{n-p}$

Ainsi: $v_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\boxed{v_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

On a $v_n = \frac{1}{u_n} - n$ donc $u_n = \frac{1}{v_n + n}$

Ainsi: $u_n = \dfrac{1}{2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + n}$

b Calculer en fonction de n la somme : $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$. **1,5 pt**

$$
\begin{aligned}
S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n &= v_1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1+1}}{1-\frac{1}{2}}\\
&= 2 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{\frac{1}{2}}\\
&= 4 \times \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]
\end{aligned}
$$

$$\boxed{S_n = 4 \times \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]}$$

Exercice 2 (BAC 2022) : 4 points [*Déjà corrigé en classe par moi-même*]

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soit le nombre complexe a défini par

$$a = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

1 Montrer que $a^2 = -2\sqrt{3} - 2i$, puis en déduire le module de a. **0,5 + 0,5 pt**

2 Écrire a^2 sous forme trigonométrique puis
vérifier qu'une des mesures de l'argument de a est $\frac{19\pi}{12}$. **0,5 + 0,5 pt**

3 En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, puis de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. **1 pt**

4 Représenter sur le même graphique les points images de a, $-a$ et a^2. **1 pt**

Correction Exercice 2 (BAC 2022) : 4 points [*Déjà corrigé en classe par moi-même*]

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit le nombre complexe a défini par

$$a = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

1 Montrons que $a^2 = -2\sqrt{3} - 2i$. **0,5**

On a :

$$\begin{aligned}
a^2 &= \left(\sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 \\
&= \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 - 2i\sqrt{2-\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{3}} + \left(i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 \\
&= \left(2-\sqrt{3}\right) - 2i\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)} - \left(2+\sqrt{3}\right) \\
&= \left(2-\sqrt{3}\right) - \left(2+\sqrt{3}\right) - 2i\sqrt{2^2 - \sqrt{3}^2} \\
&= 2-\sqrt{3}-2-\sqrt{3}-2i\sqrt{4-3} \\
&= -\sqrt{3}-\sqrt{3}-2i\sqrt{1} \\
&= -2\sqrt{3}-2i
\end{aligned}$$

Donc $a^2 = -2\sqrt{3} - 2i$ cqfd

Déduisons-en le module de a **0,5**

On a $a^2 = -2\sqrt{3} - 2i$ donc $|a^2| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} \implies |a^2| = 4$

$|a^2| = 4 \implies |a^2| = |a|^2 = 2^2 \implies |a| = 2$

Donc $|a| = 2$

2 Écrivons a^2 sous forme trigonométrique **0,5**

$$\begin{aligned}
a^2 &= -2\sqrt{3} - 2i \\
&= 4\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) \\
&= 4\left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right]
\end{aligned}$$

Donc $a^2 = 4\left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right]$

Vérifions qu'une des mesures de l'argument de a est $\dfrac{19\pi}{12}$. **0,5**

On a :

$$\arg(a^2) = \frac{7\pi}{6}[2\pi]$$

$$2\arg(a) = \frac{7\pi}{6}[2\pi]$$

$$\arg(a) = \frac{7\pi}{12}[\pi]$$

$$\arg(a) = \frac{7\pi}{12}[\pi] \Leftrightarrow \arg(a) = \frac{7\pi}{12} + k\pi$$

Si $k = 1$ on a : $\arg(a) = \dfrac{19\pi}{12}$

③ Déduison-en les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$

On a : $\arg(a) = \dfrac{19\pi}{12}$ donc $\begin{cases} \cos\left(\dfrac{19\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\ \sin\left(\dfrac{19\pi}{12}\right) = -\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \end{cases}$

Or $\dfrac{19\pi}{12} = \dfrac{7\pi + 12\pi}{12} = \dfrac{7\pi}{12} + \pi$

donc $\begin{cases} \cos\left(\dfrac{19\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\ \sin\left(\dfrac{19\pi}{12}\right) = -\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos\left(\dfrac{7\pi}{12} + \pi\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\ \sin\left(\dfrac{7\pi}{12} + \pi\right) = -\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} -\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\ -\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = -\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = -\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\ \sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \end{cases}$$ **0,5 pt**

$$\boxed{\begin{cases} \cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = -\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\ \sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \end{cases}}$$

Puis les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$. **0,5 pt**

Or $\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{6\pi + \pi}{12} = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2}$

donc $\begin{cases} \cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = -\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\ \sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} -\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = -\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \end{cases}}$$

0,5 pt

4. Représentons sur le même graphique les points images de a, $-a$ et a^2. **1 pt**

NB ici $z_1 = -a$ et $b = a^2$

Exercice 3 : 2,25 points [*Exercice 1 du devoir N1 déjà corrigé par moi-même*]

1. Calculer les limites suivantes : **(0,5pt × 2+0,25pt)**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sin 2x} \; ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^3+x^2} \; ; \quad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x}}.$$

2. Donner les primitives des fonctions f et g respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. **(2 × 0,5 pt)**

$$f(x) = (3x-1)(3x^2-2x+3)^3 \; ; \quad g(x) = \frac{1-x^2}{(x^3-3x+2)^3}.$$

Correction 3 : 2,25 pts [*Exercice 1 du devoir N1 déjà corrigé par moi-même*]

1. Calculons les limites suivantes : **(0,5pt × 2+0,25pt)**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sin 2x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin 2x\left(\sqrt{1+\sin x}+1\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{2\sin 2x}{2x}} \times \frac{1}{\left(\sqrt{1+\sin x}+1\right)} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sin 2x} = \frac{1}{4}}$$ **0,5 points**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^3+x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2(x+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \times \frac{1}{x+1} \\
&= -\frac{1}{2} \times 1 \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^3+x^2} = -\frac{1}{2}}$$ **0,5 points**

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x}}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}\right)\left(\sqrt{2x+7}+\sqrt{10-x}\right)}{\left(\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x}\right)\left(\sqrt{2x+7}+\sqrt{10-x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{[x+3-(5-x)]\left(\sqrt{2x+7}+\sqrt{10-x}\right)}{[2x+7-(10-x)]\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2(-1+x)\left(\sqrt{2x+7}+\sqrt{10-x}\right)}{3(x-1)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)\left(\sqrt{2x+7}+\sqrt{10-x}\right)}{3(x-1)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2\left(\sqrt{2x+7}+\sqrt{10-x}\right)}{3\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}\right)}$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{6}{4}$$

$$\boxed{\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x}}=1}$$ **0,25 points**

2. Donnons les primitives des fonctions f et g respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. **(2 × 0,5 pt)**

$$f(x)=(3x-1)(3x^2-2x+3)^3$$

$$F(x)=\frac{1}{8}(3x^2-2x+3)^4+k$$

$$\boxed{F(x)=\frac{1}{8}(3x^2-2x+3)^4+k}$$ **0,25 points**

$$g(x)=\frac{1-x^2}{(x^3-3x+2)^3}.$$

$$\boxed{G(x)=\frac{1}{3(x^3-3x+2)}+k}$$ **0,5 points**

<u>Problème :</u> 9,75 points [*Exercice d'application déjà corrigé par moi-même*]

Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases}2x\sqrt{1-x^2} & \text{si } x>0\\ -x+\sqrt{x^2-2x} & \text{si } x\leq 0\end{cases}$$

1. Déterminer D_f, les limites aux bornes et préciser la branche infinie. **(0,5pt $\times$ 3)**

2. Étudier la dérivabilité de f en 0 et 1
interpréter géométriquement les résultats obtenus. **(0,5pt $\times$ 3+0,5pt $\times$ 3)**

3. Calculer $f'(x)$ là où f est définie, puis dresser le tableau de variation de f.**(0,5pt $\times$ 2+0,5pt $\times$ 2 + 0,5pt)**

4. Tracer la courbe de f. **(0,75pt)**

5. Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty;0]$.

a Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité et le tableau de variation. **(0,5pt)**

b Sans utiliser l'expression de $h^{-1}(x)$, calculer $(h^{-1})'(2)$. **(0,5pt)**

c Déterminer explicitement h^{-1}. **(0,5pt)**

d Tracer la courbe de h^{-1} dans le même repère que celle de f. **(0,5pt)**

Problème : 9,75 pts [*Exercice d'application déjà corrigé par moi-même*]

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sqrt{1-x^2} & \text{si } x > 0 \\ -x+\sqrt{x^2-2x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1 Déterminer D_f, les limites aux bornes et préciser la branche infinie. **(0,5pt × 3)**

$$\text{Posons } f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x > 0, \\ f_2(x) & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

• $f_1 \exists$ ssi $1-x^2 \geq 0$ et $x > 0$.

Posnos $1-x^2 = 0$ et $x = 0$.

$1-x^2 = 0$ et $x = 0 \implies x = -1$ ou $x = 1$ et $x = 0$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

$\underline{Df_1 =]0;1]}$

• $f_2 \exists$ ssi $x^2-2x \geq 0$ et $x \leq 0$.

Posnos $x^2-2x = 0$ et $x = 0$.

$x^2-2x = 0$ et $x = 0 \implies x = 0$ ou $x = 2$ et $x = 0$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x^2-x		$+$	0	$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	

$\underline{Df_2 = [-\infty;0]}$

$Df = Df_1 \cup Df_2$

$Df =]0;1] \cup [-\infty;0]$

$$\boxed{Df = [-\infty;1]} \text{ (0,5pt)}$$

Les limites aux bornes de Df

les bornes de Df sont : $-\infty$ et 1

<u>En $-\infty$</u> : $f(x) = f_2(x) = -x+\sqrt{x^2-2x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x+\sqrt{x^2-2x} = +\infty$ triviale !!!

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty} \text{ (0,5pt)}$$

En 1 : $f(x) = f_1(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} 2x\sqrt{1-x^2} = 0$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0}$ **(0,5pt)**

Asymptote et branches infinies

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ cherchons $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x+\sqrt{x^2-2x}}{x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(-x-\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}{x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} -1-\sqrt{1-\frac{2}{x}} \\
&= -2
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -2$

Cherhcons $\left[\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+2x\right]$

$$\begin{aligned}
\left[\lim_{x\to-\infty} f(x)+2x\right] &= \lim_{x\to-\infty} -x+\sqrt{x^2-2x}+2x \\
&= \lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2-2x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-(x^2-2x)}{x-\sqrt{x^2-2x}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x-\sqrt{x^2-2x}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

D'où $y = -2x+1$ est A.O à (Cf) en $+\infty$

2 La dérivabilité de f en 0 et en 1

En 0^- : $f(x) = f_2(x) = -x+\sqrt{x^2-2x}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{-x+\sqrt{x^2-2x}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2-2x}-x}{x} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-2x-x^2}{x(\sqrt{x^2-2x}+x)} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{-2}{\sqrt{x^2-2x}+x}
\end{aligned}$$

Supposons que $\sqrt{x^2-2x}+x < 0$

$$\sqrt{x^2-2x}<-x \implies \begin{cases} x^2-2x \geq 0 \\ -x \geq 0 \\ x^2-2x < x^2 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2-2x \geq 0 \\ -x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

Posons $\begin{cases} x^2-2x = 0 \\ -x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x=0, x=2 \\ x = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x^2-2x		$+$	0	$-$	0	$+$	
$-x$		$+$	0	$-$		$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$	

Donc $x \in \emptyset$

Donc il n'existe pas de x pour lequel $\sqrt{x^2-2x}+x$ est négatif.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{-2}{\sqrt{x^2-2x}+x} = \frac{-2}{0^+}$$

D'où $\boxed{\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty}$ **(0,5pt)**

<u>En 0^+</u> : $f(x) = f_1(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{1-x^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

D'où $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 2}$ **(0,5pt)**

<u>En 1^+</u> : $f(x) = f_1(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^-} \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{2x(1-x^2)}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{-2x(x-1)(x+1)}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{-2x(x+1)}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{-4}{0^+} \end{aligned}$$

D'où $\boxed{\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x} = -\infty}$ **(0,5pt)**

Interprétation :

$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$ donc f n'est pas dérivable en 0 mais C_f admet une demi-tangent à gauche de 0 au point $A(0,0)$ orientée ver le haut.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 2$ donc f est dérivable en 0^+ et C_f admet une demi-tangent à gauche de 0^+ d'équation $y = 2x$.