BAC 2025

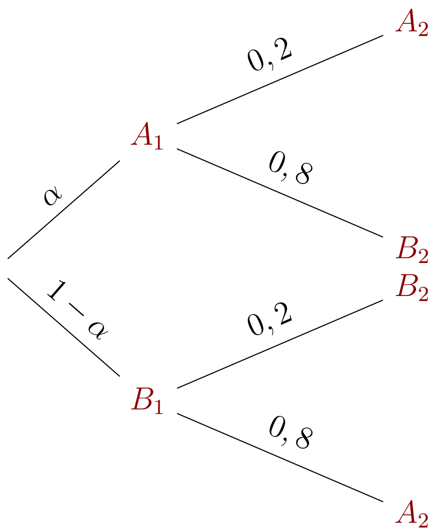
Matière: Mathématiques	Niveau : TS1

Correction

Exercice 1 :(04.75 pts)

Partie I : (02,5 points)

Construisons un arbre pondère correspondant à cette épreuve.



1. Déterminons la valeur de α

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(A_2) \\ &= \alpha \times 0,2 + (1-\alpha) \times 0,8 \\ &= 0,2\alpha + 0,8 - 0,8\alpha \\ &= -0,6\alpha + 0,8 \end{aligned}$$

Si $P(A_1) = P(A_2) \implies \alpha = -0,6\alpha + 0,8$

$\implies 1,6\alpha = 0,8$

$$\alpha = \frac{0,8}{1,6}$$

(01 point)

$\alpha = 0,5$

2. Calculons la probabilité qu'un athlète se rende au même stade pendant les deux jours.

A_1 : « l'athlète choisit le stade A le 1^{er}jour »

B_1 : « l'athlète choisit le stade B le 1^{er}jour »

A_2 : « l'athlète choisit le stade A le 2^{er}jour »

B_2 : « l'athlète choisit le stade B le 2^{er}jour »

Un athlète se rende au même stade pendant les deux jours se traduit par: $A_1 \cap A_2$ ou $B_1 \cap B_2$

$$
\begin{aligned}
P((A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2)) &= P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap B_2) \\
&= P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \\
&= 0,5 \times 0,2 + 0,5 \times 0,2 \\
&= 0,1 + 0,1 \\
&= 0,2
\end{aligned}
$$

$\boxed{P((A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2)) = 0,2}$ **(0,75 point)**

3. Au deuxième jour, on aperçoit un athlète sortant du stade B. La probabilité qu'il se soit entraîné au même stade la veille

Se traduit par : entrer dans B deux jours successifs, c'est-à-dire : B_1 *sachant* B_2

$$
\begin{aligned}
P_{B_2}(B_1) &= \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} \\
&= \frac{P(B_1) \times P_{B_1}(B_2)}{P(A_1) \times P_{A_1}(B_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(B_2)} \\
&= \frac{0,5 \times 0,2}{0,5 \times 0,8 + 0,5 \times 0,2} \\
&= \frac{0,1}{0,4 + 0,1} \\
&= \frac{0,1}{0,5} \\
&= 0,2
\end{aligned}
$$

$\boxed{P_{B_2}(B_1) = 0,2}$ **(0,75 point)**

Partie II : (02,25 points)

1. La probabilité qu'il y ait deux athlètes heureux

Il ne peut pas y avoir deux athlètes heureux car il ya au moins 3 athlètes donc l'un des stades sera occupé par au moins deux athlètes

$\boxed{\text{La probabilité qu'il y ait deux athlètes heureux est nulle}}$ **(0,5 point)**

2. Un athlète est heureux s'il est seul dans un stade. On note la probabilité que cela arrive parmi n athlètes :

Pour un athlète donné, l'épreuve qui consiste à choisir un stade est une **épreuve de Bernoulli** dont la probabilité du succès (le stade A) est $0,5$.

a. Cette épreuve étant effectuée n fois de suite (par les n athlètes) et de manière indépendante, on a un **schéma de Bernoulli**.

On a deux cas :

- Un athlète se présente dans le stade A et $n-1$ athlètes dans le stade B : 1 succès ;
- Un athlète se présente dans le stade B et $n-1$ athlètes dans le stade A : $n-1$ succès.

La probabilité qu'il y ait un athlète heureux parmi ces n athlètes est :

$$p_n = C_n^1(0,5)^1(1-0,5)^{n-1} + C_n^1(0,5)^{n-1}(1-0,5)^1 = 2n \cdot (0,5)^n = \frac{n}{2^{n-1}}$$

$$\boxed{p_n = \frac{n}{2^{n-1}}} \quad \textbf{(0,75 pt)}$$

Autre Approche

Remarque : si on voulait le voir comme une variable aléatoire

On peut modéliser le choix de chaque athlète comme une variable aléatoire de Bernoulli :

- On note X le nombre d'athlètes qui choisissent le stade A,
- Chaque athlète a une probabilité $\frac{1}{2}$ de choisir A ou B,
- Donc $X \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$, c'est-à-dire une loi binomiale.

Un athlète est **heureux** s'il est **seul** dans un stade, ce qui correspond à :

$$\text{un seul athlète dans } A \quad \text{ou} \quad \text{un seul athlète dans } B$$

Autrement dit :

$$p_n = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = n-1)$$

Avec la loi binomiale :

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Donc :

$$p_n = \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{n-1}\right]\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2n}{2^n}$$

Et comme :

$$2^n = 2\cdot 2^{n-1} \Rightarrow \frac{2n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

$$\boxed{p_n = \frac{n}{2^{n-1}}}\textbf{(0,75 point)}$$

b Étudions la variation de la suite $(p_n)_{n\geq 3}$. **(0,5 point)**

$p_n = \dfrac{n}{2^{n-1}}$

On a

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= \frac{(n+1)}{2^n} - \frac{n}{2^{n-1}} \\ &= \frac{n+1}{2^n} - \frac{n}{2^{n-1}} \\ &= \frac{n+1}{2^n} - \frac{2n}{2^n} \\ &= \frac{-n+1}{2^n} \end{aligned}$$

Donc $p_{n+1} - p_n = \dfrac{-n+1}{2^n}$

Comme $n \geq 3$ alors $-n+1 < 0$ donc $\dfrac{-n+1}{2^n} < 0$ d'où $\forall n \geq 3$, $p_n < 0$

Ainsi la suite (p_n) est décroissante

La convergence de la suite

$$p_n = \frac{n}{2^{n-1}} \implies p_n = \frac{2n}{2^n}$$
$$\implies p_n = \frac{2n}{e^{\ln(2^n)}}$$
$$\implies p_n = \frac{2n}{e^{n\ln(2)}}$$
$$\implies p_n = \frac{2}{\ln(2)} \times \frac{n\ln(2)}{e^{n\ln(2)}}$$

Donc $p_n = \dfrac{2}{\ln(2)} \times \dfrac{n\ln(2)}{e^{n\ln(2)}}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} p_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\ln(2)} \times \frac{n\ln(2)}{e^{n\ln(2)}} \\ &= \frac{2}{\ln(2)} \times \lim_{n\to+\infty} \frac{n\ln(2)}{e^{n\ln(2)}} \\ &= \frac{2}{\ln(2)} \times 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$ donc la suite $(p_n)_{n\geq 3}$ converge vers 0

c Calculons p_{10}

$$\begin{aligned}p_n &= \frac{n}{2^{n-1}} \\ p_{10} &= \frac{10}{2^{10-1}} \\ &= \frac{10}{2^9} \\ &= \frac{5}{2^8}\end{aligned}$$

$$\boxed{p_{10} = \frac{5}{2^8} \approx 0,019}$$

(0,25 point)

Déterminons la plus grande valeur de n pour laquelle la probabilité d'avoir un athlète heureux est supérieur à $0,005$. **(0,25 point)**

La suite (p_n) étant strictement décroissante, on va chercher la plus grande valeur de n supérieur à 10 telles que p_n reste supérieur à $0,005$

$$p_n = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Calculs :

$$p_{11} = \frac{11}{2^{10}} \approx 0,01 > 0,005$$
$$p_{12} = \frac{12}{2^{11}} \approx 0,0059 > 0,005$$
$$p_{13} = \frac{13}{2^{12}} \approx 0,0031 < 0,005$$

Conclusion : La plus grande valeur de n pour laquelle la probabilité d'avoir un athlète heureux soit supérieur à $0,005$ est 12.

$$\boxed{n = 12}$$

Exercice 2 :(04,25 pts)

Soient (Δ_1) et (Δ_2) deux droites distinctes de l'espace.
On note R_1 et R_2 les demi-tours d'axes respectifs (Δ_1) et (Δ_2).

Le but de cet exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur (Δ_1) et (Δ_2) pour que : $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

1 **On suppose que (Δ_1) et (Δ_2) sont perpendiculaires en un point noté O.**

On adoptera les notations suivantes :

- Le plan contenant (Δ_1) et (Δ_2) est noté (P).
- La droite perpendiculaire en O au plan (P) est notée (Δ).
- Le plan contenant (Δ) et (Δ_1) est noté (P_1).
- Le plan contenant (Δ) et (Δ_2) est noté (P_2).
- Les réflexions par rapport aux plans $(P), (P_1), (P_2)$ sont respectivement notées S_P, S_{P_1}, S_{P_2}.

a Faisons une figure en faisant apparaître clairement le point O, les plans $(P), (P_1), (P_2)$ ainsi que les droites $(\Delta), (\Delta_1), (\Delta_2)$. **(0,75 point)**

La figure, voir ce qui suit

b Déterminons $S_p \circ S_{p_1}$ et $S_{p_2} \circ S_p$

La transformation $S_p \circ S_{p_1}$ est la rotation d'axe $(P) \cap (P_1) = \Delta_1$ et d'angle $2 \times$ [l'angle formé par (P) et (P_1)] $= 2 \times \dfrac{\pi}{2} = \pi$

C'est donc le demi-tour d'axe Δ_1 c'est à dire R_1 **(0,5 point)**

La transformation $S_{p_2} \circ S_p$ est la rotation d'axe $(P) \cap (P_2) = \Delta_2$ et d'angle $2 \times$ [l'angle formé par (P) et (P_2)] $= 2 \times \dfrac{\pi}{2} = \pi$

C'est donc le demi-tour d'axe Δ_2 c'est à dire R_2 **(0,5 point)**

c En déduire que $R_2 \circ R_1$ est un demi-tour dont on précisera l'axe.

$R_2 \circ R_1 = (S_{p_2} \circ S_p) \circ (S_p \circ S_{p_1}) = S_{p_2} \circ S_{p_1}$

d Prouver alors que $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

On peut aussi écrire : $R_1 = S_{P_1} \circ S_P$. On a alors :

$$R_1 \circ R_2 = (S_{P_1} \circ S_P) \circ (S_P \circ S_{P_2}) = S_{P_1} \circ S_{P_2}.$$

Or, $S_{P_1} \circ S_{P_2}$ est aussi la rotation d'axe $(P_1) \cap (P_2) = \Delta$ et d'angle $2 \times \dfrac{\pi}{2} = \pi$.

C'est donc le **demi-tour d'axe** Δ. Finalement, $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

2 Réciproquement, on suppose que $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

Soit A un point de (Δ_1) qui n'appartient pas à (Δ_2) et B l'image de A par R_2.

a Montrer que la droite (AB) et la droite (Δ_2) sont perpendiculaires.

Soit (Q) le plan passant par A et orthogonal à (Δ_2) et soit I le point d'intersection de (Q) et (Δ_2). Dire que le point B est l'image du point A par R_2 signifie que B est l'image du point A par la restriction de R_2 à (Q) qui est la symétrie centrale de centre I. On a $(AB) \subset (Q)$, donc (Δ_2) est orthogonal à (AB). De plus, A, I et B sont alignés. Donc $I \in (\Delta_2) \cap (AB)$. Ainsi, la droite (AB) et la droite Δ_2 sont perpendiculaires en I.

b En utilisant la relation $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$, prouver que $B = R_1(B)$.

$$R_1(B) = R_1(R_2(A)) = R_2(R_1(A)) = R_2(A) = B.$$

c En déduire que (Δ_1) et (Δ_2) sont perpendiculaires.

On a :

$R_1(B) = B$; donc $B \in (\Delta_1)$.

$A \in \Delta_1$.

$A \neq B$ car si $A = B$, on aurait $R_2(A) = A$; ce qui signifierait que $A \in (\Delta_2)$.

On en déduit que $(AB) = (\Delta_1)$. D'après 2.a), la droite (AB) et la droite (Δ_2) sont perpendiculaires.

On en déduit que (Δ_1) et (Δ_2) sont perpendiculaires.

3 En utilisant ce qui précède, énoncer une condition nécessaire et suffisante portant sur (Δ_1) et (Δ_2) pour que $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

Soient (Δ_1) et (Δ_2) deux droites distinctes de l'espace, R_1 et R_2 les demi-tours d'axes respectifs (Δ_1) et (Δ_2).

$$R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1 \iff (\Delta_1) \perp (\Delta_2).$$

Problème :(11 pts)

On considère le plan complexe $\mathbb{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

PARTIE A (2 points)

1 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $F_{a,b}$ l'application de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}$ qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' telle que : $z' = a\overline{z} + ib$ où $\overline{z}$ est le conjugué de z.

a Exprimons les coordonnées x' et y' de M' en fonction des coordonnées x et y de M.

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = b - ay \end{cases}$$

b Déterminer, suivant les valeurs de a et b, l'ensemble des points invariants par $F_{a,b}$.

$$F_{a,b}(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = ax \\ y = b - ay \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(a-1) = 0 \\ y(1+a) = b \end{cases}$$

Si $a = 1$ alors $y = \dfrac{1}{2}b$ et x peut prendre n'importe quelle valeur réelle. L'ensemble des points invariants est la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}b$.

Si $a \neq 1$ alors $x = 0$.

Si $a = -1$ et $b \neq 0$, l'ensemble des points invariants est vide.

Si $a = -1$ et $b = 0$, y peut prendre n'importe quelle valeur réelle. L'ensemble des points invariants est la droite (D) d'équation $x = 0$.

Si $a \neq -1$, alors $y = \dfrac{b}{1+a}$. L'ensemble des points invariants est $\Omega\left(\dfrac{ib}{1+a}\right)$.

2 On suppose $|a| \neq 1$. Montrer que $F_{a,b} = S_\Delta \circ h$, où S_Δ est la symétrie orthogonale d'axe la droite (Δ) d'équation $y = \dfrac{b}{a+1}$ et h l'homothétie de centre le point Ω d'affixe $\dfrac{ib}{1+a}$ et de rapport a.

Déterminons les expressions analytiques de S_Δ et de h.

Soit $M(x,y)$ et $M'(x',y')$.

Expression analytique de S_Δ :

$$S_\Delta(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} MM' \text{ est orthogonal à } \vec{u} \\ \text{Le milieu } I \text{ de } [MM'] \text{ appartient à } \Delta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=-y+\dfrac{2b}{1+a} \end{cases}$$

Expression analytique de h:

$$h(M)=M' \Leftrightarrow \overline{\Omega M'}=a\overline{\Omega M}$$

$$\begin{cases} x'=ax \\ y'=ay+\dfrac{b}{1+a}(1-a) \end{cases}$$

La composée $S_\Delta \circ h$ a pour expression analytique :

$$\begin{cases} x'=ax \\ y'=-\left(ay+\dfrac{b}{1+a}(1-a)\right)+\dfrac{2b}{1+a} \end{cases}$$

$$S_\Delta \circ h : \begin{cases} x'=ax \\ y'=-ay+b \end{cases}$$

Finalement, $S_\Delta \circ h$ a pour écriture complexe $z'=x'+iy'=ax-aiy+ib=a(x-iy)+ib=a\overline{z}+ib$. Donc $S_\Delta \circ h=F_{a,b}$. $F_{a,b}$ est la composée de la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ d'équation $y=\dfrac{b}{a+1}$ et de l'homothétie h de centre Ω d'affixe $Z_\Omega=\dfrac{ib}{1+a}$ et de rapport a.

3. Soit $(c,d)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ et $G_{c,d}$ l'application de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}$ qui, au point N d'affixe z, fait correspondre le point N' d'affixe z' tel que : $z'=cz+id$.

Déterminer, suivant les valeurs de c et d, la nature et les éléments géométriques caractéristiques de $G_{c,d}$.

Si $c=1$, $G_{c,d}$ est la translation de vecteur $\vec{v}$ d'affixe id.

Si $c\neq 1$, $G_{c,d}$ est l'homothétie de centre Π d'affixe $\dfrac{id}{1-c}$ et de rapport c.

PARTIE B (2 points)

1. Dans cette , on suppose que $|a|\neq 1$.

On définit la suite de points $(M_n)_{n\geq 1}$ par :

$$\begin{cases} M_1 \text{ est le point d'affixe } u_1=a+ib \\ \forall n\geq 1, M_{n+1}=F_{a,b}(M_n) \end{cases}$$

a. Déterminons l'affixe u_2 du point M_2.

$$\begin{aligned} M_2=F_{a,b}(M_1) &\Leftrightarrow u_2=a\overline{u_1}+ib \\ &\Leftrightarrow u_2=a^2+ib(1-a) \end{aligned}$$

b Montrer que pour tout entier naturel n non nul, M_n a pour affixe :

$$u_n = a^n + ib\left(\frac{1-(-a)^n}{1+a}\right).$$

On va faire une démonstration par récurrence.

La formule est vraie pour $n = 1$. En effet, $u_1 = a + ib = a^1 + ib\left(\frac{1-(-a)^1}{1+a}\right)$.

Supposons que la formule est vraie à l'ordre n, c'est-à-dire que M_n a pour affixe :

$u_n = a^n + ib\left(\frac{1-(-a)^n}{1+a}\right)$ et montrons que M_{n+1} a pour affixe : $u_{n+1} = a^{n+1} + ib\left(\frac{1-(-a)^{n+1}}{1+a}\right)$.

$$\begin{aligned} M_{n+1} = F_{a,b}(M_n) &\Leftrightarrow u_{n+1} = a\overline{u_n} + ib \\ &\Leftrightarrow u_{n+1} = a\left(a^n - ib\left(\frac{1-(-a)^n}{1+a}\right)\right) + ib \\ &\Leftrightarrow u_{n+1} = a^{n+1} + ib\left(\frac{1-(-a)^{n+1}}{1+a}\right) \end{aligned}$$

Conclusion : M_n a pour affixe $\boxed{u_n = a^n + ib\left(\frac{1-(-a)^n}{1+a}\right)}$.