⋄⋄⋄ Lycée de Dindéfélo ⋄⋄⋄			A.S. : 2024/2025
Matière: Mathématiques	Niveau : TS2	Date: 21/04/2025	

Td Intégrale

Exercice 1 Calculer les intégrales :

1. $\int_1^2 2t^2\,dt$
2. $\int_{-1}^3 -t^4\,dt$
3. $\int_1^2 \frac{1}{s^4}\,ds$
4. $\int_0^2 \frac{1}{(x+2)^2}\,dx$
5. $\int_0^2 \frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx$
6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2-3\sin t)\,dt$
7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\,dx$
8. $\int_0^2 \frac{e^x}{e^x+3}\,dx$
9. $\int_{-1}^5 |\,x^2-9\,|\,dx$
10. $\int_0^2 e^x(e^x-3)\,dx$
11. $\int_e^{e^3} \frac{dx}{x\ln x}$
12. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx$
13. $\int_{-3}^{-2} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$
14. $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(2+\cos x)^2}\,dx$
15. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x}$
16. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\,dx$
17. $\int_0^1 \frac{e^x+1}{e^x+x}\,dx$
18. $\int_e^{e^2} \frac{\ln u}{u}\,du$
19. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2u\,du$
20. $\int_{-2}^1 |2x-1|\,dx$
21. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx$

$\int_0^1 \left(\sqrt{2t+1}+\frac{1}{\sqrt{t+5}}\right)dt$, $\int_0^2 (2t+3)\sqrt{t^2+3t}\,dt$

Exercice 2

1. Sans chercher de primitives, calculer les intégrales : $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 4t\,dt$; $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos 3x\,dx$

   $\int_{-1}^1 \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)dx$; $\int_{\ln 2}^{\ln 2} \frac{1-e^x}{1+e^x}\,dx$

2. Calculer les intégrales suivantes :

   $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^2 x\,dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x\,dx$

   $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 u\,du$; $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x\cos^3 x\,dx$

Exercice 3

1. a. Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1; -\frac{1}{2}\right\}$, $\frac{8x+5}{2x^2+3x+1} = \frac{3}{x+1} + \frac{2}{2x+1}$.

   b. En déduire la valeur de : $\int_0^2 \frac{8x+5}{2x^2+3x+1}\,dx$.

2. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3x^3-5x^2+2x-1}{(x-2)^2}$.

   a. Déterminer les réels a, b, c et d tels que : $f(x) = ax+b+\frac{c}{x-2}+\frac{d}{(x-2)^2}$.

   b. En déduire une primitive de f sur $[-1;1]$ puis calculer : $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$.

Exercice 4 : Calcul au moins d'une intégration par parties

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$
2. $\int_1^e x\ln x\,dx$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$
4. $\int_1^e \ln x\,dx$
5. $\int_1^e (2-t)e^t\,dt$
6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1)\sin x\,dx$
7. $\int_1^3 (2x+1)\ln x\,dx$
8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (u-1)^2\sin u\,du$
9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\,dx$
10. $\int_0^1 (x^2-1)e^{2x}\,dx$
11. $\int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx$
12. $\int_1^2 x\sqrt{3-x}\,dx$
13. $\int_1^2 (3x^2+1)^2e^x\,dx$
14. $\int_1^2 u(\ln u)^2\,du$
15. $\int_0^1 (x+1)\sqrt{x+1}\,dx$

Exercice 5 Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :
$f(x) = \frac{x+1}{x} + \ln x - \ln(x+1)$.

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe.

2. Soit λ un réel supérieur à 1 et $D_\lambda = \{M(x,y),\ 1 \leq x \leq \lambda \text{ et } 1 \leq y \leq f(x)\}$. Calculer l'aire $A(D_\lambda)$ de D_λ. Étudier la limite de $A(D_\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

Exercice 6

On pose $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^x \sin^5 t \cos t\, dt\right) dx$.

1. Liénéariser $\sin^6 x$.
2. Démontrer que $I = \dfrac{15\pi - 44}{1152}$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x^2+x}$. On se propose de trouver un encadrement de l'aire A de l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $1 \leq x \leq \dfrac{3}{2}$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

1. Étudier et tracer (C_f).
2. Montrer que pour tout $x \geq 1$, $\dfrac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \dfrac{\ln x}{x}$.
3. Calculer $I = \displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x}\, dx$ et $\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$.
4. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} f(x)\, dx$ puis un encadrement de A.

Exercice 8 On se propose de calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3}\, dx$.

1. Calculer les deux intégrales suivantes : $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\, dx$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\, dx$.
2. Déterminer les réels a, b et c tels que pour $x \geq 0$,
$$\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{t+1} + \frac{ct}{(1+t)^2}. \qquad (1)$$
3. En posant $t = e^x$ dans l'égalité (1), calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+e^x)^2}$.
4. Établir une relation entre I et J et en déduire J.

Exercice 9 On pose, pour tout nombre entier naturel non nul : $I_n = \displaystyle\int_1^0 x^n (\ln x)^n\, dx$, où ln désigne la fonction logarithme népérien, et $I_0 = \displaystyle\int_1^e x^2\, dx$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul :
$$3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3. \qquad \textbf{(1)}$$
En déduire I_2.
3. a. Démontrer que pour tout entier naturel n, I_n est positif.
   b. Déduire de l'égalité **(1)** pour tout entier naturel non nul, $I_n \leq \dfrac{e^3}{n+1}$.

Exercice 10 Soient f, g, h et k les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que :

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}, \quad g(x) = x + \sqrt{x^2+1}, \quad h(x) = \ln(x+\sqrt{x$$

Soit α un réel, on pose $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \displaystyle\int_0^\alpha \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$ et

$$F = \int_0^\alpha \sqrt{x^2+1}\, dx, \quad G = \int_0^\alpha (x+\sqrt{x^2+1})\, dx, \quad H = \int_0$$

1. Démontrer que les fonctions f, g, h et k sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et déterminer leurs applications dérivées f', g', h' et k'.
2. Justifier l'existence de I_n pour tout entier naturel n. Calculer I_0 et I_1.
3. Justifier l'existence de F. Calculer $F + I_2$ et $F - I_2$. En déduire I_2. Justifier l'existence de G, calculer G.
4. Justifier l'existence de H. Par une intégration par parties, calculer H.

Exercice 11 Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x\, dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x\, dx.$$

1. Calculer I_0 et J_0.
2. Soit n un entier naturel non nul.
   a. En intégrant par parties I_n puis J_n, montrer que :
$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}}. \end{cases}$$

b En déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de n.

3 Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

Exercice 12 Dans cet exercice n est un entier naturel non nul. On considère la suite (U_n) par : $U_n = \int_0^2 \left(\frac{2t+3}{t+2}\right) e^{\frac{7}{n}}\,dt$.

1 Soit f la fonction définie sur $[0;2]$ par : $f(t) = \frac{2t+3}{t+2}$.

Étudier les variations de f sur $[0;2]$.

2 En déduire que pour tout réel t de $[0;2]$: $\frac{3}{2} \leq f(t) \leq \frac{7}{4}$.

3 Montrer que pour tout réel t de $[0;2]$: $\frac{3}{2}e^{\frac{1}{n}} \leq f(t)e^{\frac{1}{n}} \leq \frac{7}{4}e^{\frac{1}{n}}$.

4 Par une intégration par parties, déduire que : $\frac{3}{2}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right) \leq U_n \leq \frac{7}{4}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)$. On rappelle que $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$. Montrer que si (U_n) possède une limite L, alors $3 \leq L \leq \frac{7}{2}$.

5 Vérifier que, pour tout réel t dans $[0;2]$ on a : $\frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}$.

a En déduire l'intégrale $I = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}\,dt$.

b Montrer que pour tout t de $[0;2]$ on a : $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$.

c En déduire que : $I \leq U_n \leq e^{\frac{2}{n}} \times I$.

d Montrer que (U_n) est convergente et déterminer sa limite L.

Exercice 13

PARTIE A

1 Étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $4e^{2x} - 5e^x + 1$.

2 Soit φ la fonction définie par :

$$\varphi(x) = \ln x - 2\sqrt{x} + 2.$$

a Déterminer son domaine de définition D_φ et calculer ses limites aux bornes de D_φ.

b Étudier ses variations et dresser son tableau de variations.

c En déduire son signe.

PARTIE B

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{e^x}{2e^x-1} & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - x + \sqrt{x}\ln x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On désigne par (τ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

1 **a** Déterminer D_f le domaine de définition de f.

b Calculer les limites de f aux bornes de D_f et étudier les branches infinies de (τ).

c Étudier la position de (τ) par rapport à l'asymptote non parallèle aux axes dans $]-\infty;0]$.

2 **a** Étudier la continuité de f en 0.

b Étudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement les résultats.

3 Déterminer la dérivée de f et dresser le tableau de variations de f.

4 Construire (τ), les asymptotes et les demi-tangentes. On remarquera que $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$.

5 Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par (τ), la droite d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = -\ln 8$ et $x = -\ln 4$.

Exercice 14

Partie A :BAC 1999 Remplacement

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \in]-\infty;0[\\ f(x) = \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|, & x \in [0;1[\cup]1;+\infty[\end{cases}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité 2 cm.

1 Étudier la continuité de f en 0.

2 **a** Montrer que pour tout $x \in [0;1[$,

$f(x) = \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x}$.

b Étudier la dérivabilité de f en 0.

c En déduire que (C_f) admet au point d'abscisse 0 deux demi-tangentes dont on donnera les équations.

3. Étudier les variations de f.
4. Tracer (C_f).

Partie B : Soit g la restriction de f à $]1;+\infty[$.

1. Montrer que g est une bijection de $]1;+\infty[$ vers un intervalle J à préciser. On notera g^{-1} la bijection réciproque de g.
2. Montrer que l'équation $g(x) = -e$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]1;+\infty[$. *(On ne demande pas de calculer α).*
3. Montrer que $\forall x \in J$, $g^{-1}(x) = 1 - \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.
4. Construire $(C_{g^{-1}})$. *(On indiquera la nature et l'équation de chacune des asymptotes à (C_g) et $(C_{g^{-1}})$.*
5. Calculer en cm^2 l'aire A de l'ensemble des points $M(x;y)$ défini par :

$$\begin{cases} -\ln 7 \leq x \leq -1, \\ 0 \leq y \leq g^{-1}(x). \end{cases}$$