Fonction logarithme Népérien

Destiné à la TerminaleS2
Au Lycée de Dindéferlo

26 juin 2025

Introduction :

En 1614, un mathématicien écossais, John Napier (1550 ; 1617) ci-contre, plus connu sous le nom francisé de Neper publie « Mirifici logarithmorum canonis descriptio ». Dans cet ouvrage, qui est la finalité d'un travail de 20 ans, Neper présente un outil permettant de simplifier les calculs opératoires : le logarithme. Neper construit le mot à partir des mots grecs « logos » (logique) et arithmos (nombre). Toutefois cet outil ne trouvera son essor qu'après la mort de Neper. Les mathématiciens anglais Henri Briggs (1561 ; 1630) et William Oughtred (1574 ; 1660) reprennent et prolongent les travaux de Neper. Les mathématiciens de l'époque établissent alors des tables de logarithmes de plus en plus précises. L'intérêt d'établir ces tables logarithmiques est de permettre de substituer une multiplication par une addition (paragraphe II). Ceci peut paraître dérisoire aujourd'hui, mais il faut comprendre qu'à cette époque, les calculatrices n'existent évidemment pas, les nombres décimaux ne sont pas d'usage courant et les opérations posées telles que nous les utilisons ne sont pas encore connues. Et pourtant l'astronomie, la navigation ou le commerce demandent d'effectuer des opérations de plus en plus complexes.

I.Définition et propriétés

1.Définition

On appelle fonction logarithmique népérien la fonction notée ln qui est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ et qui vérifie $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$ et $\ln 1 = 0$

$$\begin{array}{rcl} \ln\ :\ ]0\ ;\ +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}$$

2.Conséquences de la définition

Soit u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors :
- $\ln u$ existe si $u > 0$
- $\ln |u|$ existe si $u \neq 0$
- $\ln u^2$ existe si $u \neq 0$

3.Propriétés

Les propriétés fondamentales de la fonction logarithmique, ln, sont :
— $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ pour $a > 0$ et $b > 0$.
— $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ pour $a > 0$ et $b > 0$.
— $\ln(a^p) = p \ln a$ pour $a > 0$ et $p \in \mathbb{R}$.
— $\ln \sqrt{a} = \dfrac{1}{2} \ln a$ pour $a > 0$.

4.Remarque

La fonction ln est strictement croissante sur son domaine $]0\ ;\ +\infty[$, c'est-à-dire que :

$$\forall a,b \in]0\ ;\ +\infty[, \quad a < b \implies \ln a < \ln b.$$

II.Limites et Dérivée

1.Limites aux bornes de D_{ln}

- $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.
- $\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$.

2.Limites usuelles

- $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$.
- $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

  Soit a un nombre rationnel strictement positif.
- $\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}\ln(x) = 0^-$
- $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\alpha}} = 0^+$

Preuve de quelques limites

Montrons que $\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}\ln(x) = 0^-$ pour $\alpha = 1$
pour tout $x \in]0;+\infty[$, en posant $X = \frac{1}{x}$, on a : $xlnx = -\frac{lnX}{X}$
ainsi, $\lim_{x\to 0^+} -\frac{\ln(X)}{X} = 0^-$ Donc $\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}\ln(x) = 0^-$

Exemple

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln(x) - x^2 + 1$
2. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) - x^2 + 1$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x\ln(x)}{x^2+1}$

Exercice d'application

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} x + 1 - \ln(x)$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{2}[\ln(1+\frac{1}{x})]$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$
4. $\lim\limits_{x\to 1^+} (x-1)\ln(x-1)$
5. $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$

3.Dérivée

Soit u et v deux fonctions strictement positives
$[\ln(u(x)] = \frac{u'(x)}{u(x)}$
$[\ln(\frac{u(x)}{v(x)})] = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Exemple

f(x)=$\frac{\ln(x^2+2x+9)}{x}$
f(x)=$\ln[\frac{x^2+2x+9}{x-2}]$

4.Limites des composées avec ln

Soit $U(x)$ une fonction strictement positive.
Cherchons $\lim_{x\to a} \ln[u(x)]$

$\otimes$ Si $\lim_{x\to a} u(x) = l$ et que $\lim_{x\to l} \ln(x) = l'$
Alors
$\otimes$ Si $\lim_{x\to a} ln[u(x)] = l'$
Exemple
Calcule la limite suivante
$\lim_{x\to\infty} \ln(\frac{x^2}{2x^2-1})$
Solution

III.Etude le fonction ln

Soit $f(x) = \ln(x)$ le domaine
Le Domaine D_f
f existe ssi $x \in \mathbb{R}_+^*$ donc $D_f = \mathbb{R}_+^*$

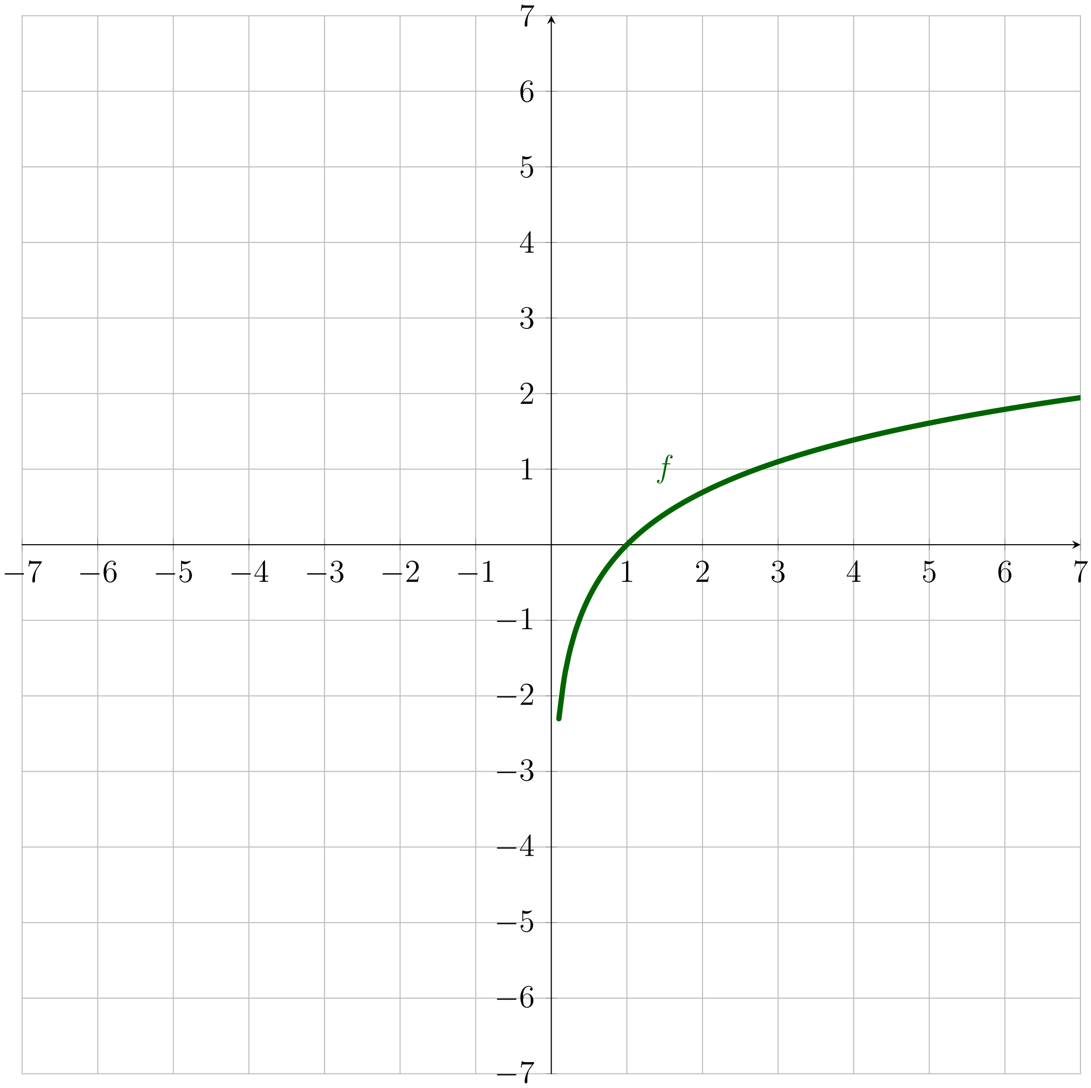
Limites aux bornes de D_f
En 0^+
$\lim_{x\to 0^+} lnx = -\infty$
En $+\infty$
$\lim_{x\to+\infty} lnx = +\infty$
La dérivée de f
$f'(x) = \frac{1}{x}$
$\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) > 0$, donc f est croissante sur $]0;+\infty[$

Tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$			
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Branche infinie de ln

$\lim_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$ donc ln admet une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de $+\infty$.



11.Application

IV.Equation et Inequation et systèmes avec ln

a°)Equation

Pour résoudre les équations avec ln, on peut procécédé comme suit :

$\otimes$ on détermine le domaine de validité
$\otimes$ on utilise la propriété ln(a)=ln(b) $\Longrightarrow$ a=b
$\otimes$ Puis résoudre l'équation a=b
$\otimes$ vérifier si les ou la solutions appartiennent au domaine de validité

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes
a)$\ln(x+1) = \ln(2x-1)$
b)$\ln(x+1) - \ln(2x+1) = \ln(2x-1)$

Exemple

Considérons l'inéquation a)$\ln(x-4) \geq \ln(2x+4)$.
b)$\ln(x-1) \leq \ln(5x+5) - \ln(x-1)$.

b°)Système d'inéquations avec $\ln$:

$$\begin{cases} \ln(x) + \ln(y) = 7 \\ 2\ln(x) - 3ln(y) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln(x) + \ln(y) = ln(2) \\ \ln(x+y) = ln(x) \end{cases}$$