Probabilité

Lycée de Dindéfelo
Mr BA

14 avril 2025

I.Vocabulaire Et Notation

1.Expérience aléatoire

Une expérience est dite aléatoire si l'issue est impossible à prevoir.

Exemple

1. On lance une pièce de monnaie. On ne peut pas prévoir que c'est une expérience aléatoire.
2. On lance un dé et on note le numéro de la face supérieure. On ne peut pas prévoir cette expérience. On dit que c'est une expérience aléatoire.

2.Univers des possibles

On appelle univers d'une expérience aléatoire noté Ω, l'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience aléatoire .

Exemple

— Lancer d' une pièce de monnaie .

L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{pile, face\}$

— Lancer un dé numéroté de 1 à 6 .

L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

3.Evènement

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire . On appelle évènement de Ω toute partie (ou sous ensemble) de Ω .

Exemple

Soit le Lancer d'un dé numéroté de 1 à 6 .
L'univers associé cette expérience est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
$A = \{2, 3, 4, 5, \}$ est un évènement de Ω .
$B = \{1, 6\}$ est un évènement de Ω .

4.Evènement Elémentaire

Soit Ω un univers associé à l'expérience aléatoire. On appelle évènement élémentaire tout singleton de Ω

Exemple

Soit le Lancer d'un dé numéroté de 1 à 6 .

L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$A = \{1\}$, $B = \{3\}$ et $C = \{3\}$ sont des évènements élémentaires Ω.

5.Evènement réalisé

Un événement est dit réalisé s'il contient le résultat de l'expérience .

Exemple

Soit un dé numéroté de 1 à 6.

L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$A = \{1, 2, 6\}$ est un évèvement de Ω. Si au cours d'un lancé le numéro 2 apparait on dit que A est réalisé.

6. Évènement certain

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. Un évènement est dit certain s'il correspond à l'ensemble de l'univers, c'est-à-dire s'il inclut toutes les issues possibles de l'expérience.

Exemple

Soit le Lancer d'un dé numéroté de 1 à 6 .

L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

L'événement « le numéro de la face apparue est inférieur à 7 » est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. C'est l'événement certain.

7. Évènement incertain ou évènement impossible

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire .

Lorsqu'un évènement est l'ensemble vide, on l'appelle évènement impossible .

Il ne se réalise jamais .

Exemple

Soit le Lancer un dé numéroté de 1 à 6 .

L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

L'événement « le numéro de la face apparue est supérieur à 7 » est $\emptyset$.

C'est l'événement impossible. Il ne se réalise jamais.

8. Évènement contraire

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire .

Soit A un évènement de Ω .

L'évènement contraire de A noté $\overline{A}$, est le complémentaire de A dans Ω .

Autrement dit $\overline{A} = C_{\Omega}^{A}$

Exemple

Soit le Lancer d'un dé numéroté de 1 à 6 .

L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Supposons que lors du lancer d'un dé à six faces, A représente l'évènement "obtenir un nombre pair".

Alors, l'évènement contraire, $\overline{A}$, serait "obtenir un nombre impair".

En notation mathématique :

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$\overline{A} = \{1, 3, 5\}$$

Ainsi, si A est l'évènement "obtenir un nombre pair", alors $\overline{A}$ est l'évènement "obtenir un nombre impair".

Remarque

Si A et $\overline{A}$ sont deux évènements contraires alors :

$A \cap \overline{A} = \emptyset$; $A \cup \overline{A} = \Omega$

8. Évènements incompatibles

Deux événements sont incompatibles lorsque leur intersection est vide ; ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.

Exemple

Soit le Lancer d'un dé numéroté de 1 à 6 .

$$A = \{\text{lancer un nombre pair}\} = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{\text{lancer un nombre impair}\} = \{1, 3, 5\}$$

Comme aucun nombre ne peut être à la fois pair et impair, les événements A et B sont incompatibles.

Remarque

Si A et B sont deux évènements incompatibles alors : $A \cap B = \emptyset$

II. Généralités sur la probabilité

1. Probabilité d'un évènement

Considérons un dé numéroté de 1 à 6.

Soit Ω l'univers de cette expérience, donné par $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Supposons l'évènement $A = \{5\}$.Il y a une chance sur 6 de réaliser cette possibilité.

La probabilité de l'évènement A est donc égale à $\frac{1}{6}$, que l'on note $P(A) = \frac{1}{6}$.

De même, considérons l'évènement $B = \{1, 6\}$. Il y a deux chances sur 6 de réaliser l'évènement B.

La probabilité de l'évènement B est donc égale à $\frac{2}{6}$. On note $P(B) = \frac{1}{3}$.

2. Probabilité uniforme

Lorsque les évènements élémentaires ont la même probabilité, on dit que on a une équiprobabilité.

Une probabilité est dite uniforme si tous les évènements élémentaire sont équiprobables.

3.Formule de probabilité uniforme

Soit Ω un univers et p une probabilité définit dans cet univers.

$\Omega = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ on suppose que on a une probabilité uniforme. Donc $p\{w_1\} = p\{w_2\} = ... = p\{w_n\}$

Comme Ω est formé des évènements $w_1, w_2, ..., w_n$ Donc

$p\{\Omega\} = p\{w_1\} + p\{w_2\} + ... + p\{w_n\}$

Puisqu'il y a équiprobabilité $p\{\Omega\} = n \times p\{w_1\}$

Or Ω est un évènement certain donc $p(\Omega) = 1$

Ainsi, $p\{w_1\} = \frac{1}{n}$ avec $n = card(\Omega)$, $p\{w_1\} = \frac{1}{card(\Omega)}$

De façon général,

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d'issues favorables à } A}{\text{Nombre total d'issues dans } \Omega}$$

Autrement dit,

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Exerice d'application

Supposons que vous lanciez un dé équilibré à six faces. Calculez la probabilité des événements suivants :

1. Événement A : Obtenir un nombre pair.
2. Événement B : Obtenir un nombre impair.
3. Événement C : Obtenir un nombre inférieur ou égal à 3.

Solution

Soit Ω l'univers associé a cette expérience aléatoire on a
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $card(\Omega) = 6$

1. Pour l'événement A (obtenir un nombre pair), les issues favorables sont 2, 4 et 6. On a $A = \{2, 4, 6\}$ et $card(A) = 3$

   Ainsi, la probabilité de l'événement A est :

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2. Pour l'événement B (obtenir un nombre impair), les issues favorables sont 1, 3 et 5.On a $B = \{1, 3, 5\}$ et $card(B) = 3$

   Ainsi, la probabilité de l'événement B est également :

$$P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3. Pour l'événement C (obtenir un nombre inférieur ou égal à 3), les issues favorables sont 1, 2 et 3.On a $C = \{1, 2, 3\}$ et $card(C) = 3$. La probabilité de l'événement C est donc :

$$P(C) = \frac{card(C)}{card(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, dans tous les cas, la probabilité est $\frac{1}{2}$, ce qui est conforme à la notion de probabilité uniforme pour un dé équilibré à six faces.

4. Définition de Probabilité

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoires.
On appelle probabilité sur un univers Ω toute application $p : \Omega \to [0;1]$ vérifiant :

1. $p(\Omega) = 1$
2. Si A et B deux évènements de Ω et
   $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Conséquence

1. $\forall A$ la probabilité de l'évènement est compris entre $[0, 1]$
   $0 \leq p(A) \leq 1$
2. $p(\emptyset) = 0$
3. $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
4. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

   Exercice 1

   On considère l'ensemble E des entiers de 20 à 40. On choisit l'un de ses nombres au hasard.

- A est l'événement : « le nombre est multiple de 3 »
- B est l'événement : « le nombre est multiple de 2 »
- C est l'événement : « le nombre est multiple de 6 ».

Calculer $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$, $p(A \cap B)$, $p(A \cup B)$, $p(A \cap C)$ et $p(A \cup C)$.

III. Probabilité conditionnelle et indépendance

A. Probabilité conditionnelle

1.Définition

Soit Ω un univers, associe à une expérience aléatoire et p la probabilité définie dans cet univers. A et B deux évèvenements de Ω tel que $p(B) \neq 0$

$p_{\frac{A}{B}} = p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$

1.Propriété

Dans une situation d'équiprobabilité, on a $p_{\frac{A}{B}} = p_B(A) = \frac{card(A \cap B)}{card(B)}$

Exemple

Soit une expérience aléatoire comportant les évènements A et B. On sait que P(A)=0,4, P(B)=0,7 et P($A \cap B$)=0,2. Calcule $p_B(A)$ et $p_A(B)$.

Pour calculer la 1^{re} probabilité conditionnelle, on utilise la formule.

$p_{A/B} = p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{card(A \cap B)}{card(B)}$

Solution

Soit une expérience aléatoire comportant les évènements A et B.

On donne P(A)=0,4, P(B)=0,7 et P($A \cap B$)=0,2. Calcule $p_B(A)$ et $p_A(B)$.

Pour calculer la 1^{re} probabilité conditionnelle ($p_B(A)$), on utilise la formule.

$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$

$p_B(A) = \frac{0{,}2}{0{,}7}$

$p_B(A) = \frac{2}{7}$

Pour calculer la 2^{e} probabilité conditionnelle, on utilise aussi la formule. Il est important de remarquer que l'intersection est **commutative**, donc Pour calculer la 2^{e} probabilité conditionnelle ($p_A(B)$), on utilise aussi la formule. Il est important de remarquer que l'intersection est **commutative**, donc $p(A \cap B) = p(B \cap A)$

$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

$p_A(B) = \frac{0{,}2}{0{,}4}$

$p_A(B) = \frac{1}{2}$

$p_A(B) = 0,5$

B.Arbre pondéré

Un arbre pondéré permet de représenter une situation probabiliste qui comporte des probabilités conditionnelles.

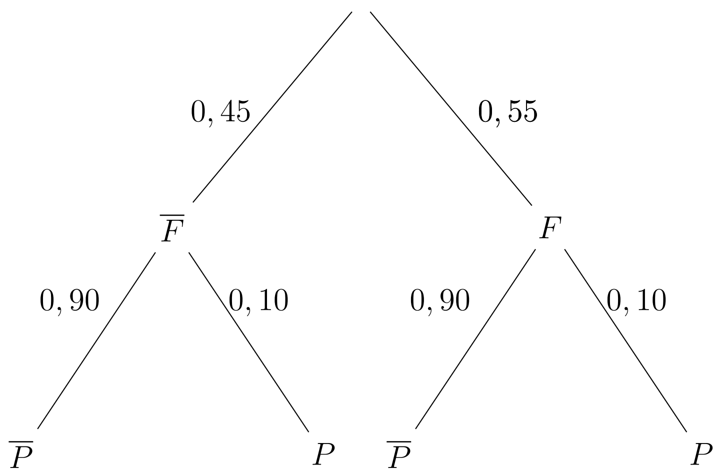
Exemple

Dans un lycée comportant 800 élèves, 55% sont des filles. Parmi les filles, 10% sont des pensionnaires. Ce pourcentage est le même chez les garçons.

On choisit un élève au hasard dans ce lycée et admet que ces choix sont équiprobables.

On note F(resp. P) l'événement "l'élève choisi est une fille (resp. une pensionnaire)".

On obtient l'arbre probabiliste suivante :



- La somme des probabilités des deux premières branches (c'est-à-dire issues de la racine) est 1.
- La somme des probabilités des branches issues du noeud F est 1.
- La somme des probabilité des branches issues du noeud $\overline{F}$ est 1.

Propriété 1

Quand plusieurs branches partent d'un même nœud dans un arbre de probabilités, les probabilités sur ces branches doivent toujours s'additionner pour donner 1, car elles représentent toutes les issues possibles à ce moment-là.

Propriété 2

Lorsqu'on suit un chemin dans un arbre pondéré, la probabilité de l'événement associé à ce chemin est égale au produit des probabilités indiquées sur les branches empruntées.

En considérant l'exemple précédent, la probabilité de l'évèvenement $F \cap \overline{P}$ est :

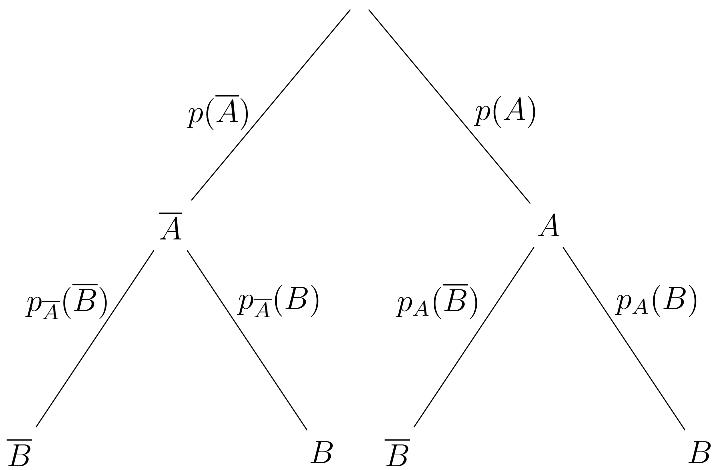
$p(F \cap \overline{P}) = p(F) \times p_F(\overline{P})$

On obtient :

$p(F \cap \overline{P}) = 0,55 \times 0,90$

$p(F \cap \overline{P}) = 0,495$

La lecture d'un arbre pondéré



La probabilité de $\overline{A}$ et $\overline{B}$ est : $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p_{\overline{A}}(\overline{B}) \times p(\overline{A})$
La probabilité de $\overline{A}$ et B est : $p(\overline{A} \cap B) = p_{\overline{A}}(B) \times p(\overline{A})$
La probabilité de A et $\overline{B}$ est : $p(A \cap \overline{B}) = p_A(\overline{B}) \times p(A)$
La probabilité de A et B est : $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$

Propriété 3 :Probabilités totales

Soit l'univers Ω d'une expérience aléatoire $A_1, A_2, ..., A_n$ des évènements tels que $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ forme une parition de l'univers Ω.
Alors, pour tout événement B, on a :
$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + ... + p(B \cap A_n)$.

Cette formule est appelé formule des probabilité totale

Et, si pour tout $p(A_i) \neq 0$, alors :
$p(B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + ... + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$

C.L'indépendance de deux évènements

1.Définition

Deux événements sont dits indépendants lorsque le fait que l'un se produise n'a aucune influence sur la probabilité que l'autre se produise.

Si A et B sont deux évènements sont indépendants probabilités non nulles alors : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

propriété

Soient A et B sont deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ et qui sont indépendants, on a :

— $p_B(A) = p(A)$

— $p_A(B) = p(B)$

— $p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A) \times p(B)$

Exemple

En considérant l'exemple précédent, montre que F et P sont deux événements indépendants.

Solution

Already solve but think first

On a :

- $p(F) = 0,55$
- $p(F \cap P) = p(F) \times p_F(p) = 0,55 \times 0,10$
- $p(\overline{F} \cap P) = p(\overline{F}) \times p_{\overline{F}}(p) = 0,45 \times 0,10$

L'ensemble $\{F, \overline{F}\}$ formant une partition de l'univers, on a, d'après la formule des probabilité totales :

$p(P) = p(F \cap P) + p(\overline{F} \cap P)$

Alors :

- $p(F \cap P) = 0,055$
- $p(F) \times p(P) = 0,55 \times 0,10$

Les événement F et P sont donc indépendants

Exercice

Soit A et B deux événements indépendantes de probabilité non nulle.

Montrer que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont aussi indépendantes.

IV. Lois de probabilité et Fonction de Répartition

A. Epreuve de Bernoulli

1.Définition

On appelle une epreuve de bernoulli toute expérience aléatoire qui n'a que deux issueS possible. L'un des issue est appelé succès, l'autre est appelé echec.

2.Probabilté sur une epreuve de Bernoulli

Avec une epreuve de Bernoulli, la probabilité du succès est noté p et celle de l'echec est notée $1 - p$.

3.Schéma de Bernoulli

On appelle schéma de bernoulli toute épreuve où on a n répétitions qui sont identiques et indépendantes.

Propriété

Soit un schéma de Bernoulli à n épreuves où pour chaque épreuve la probabilité du succé est notée p et celle de l'echec est noté 1-p.

La probabilité d'avoir exactement k succé avec $0 \leq k \leq n$.

$p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

k=nombre de succés

n=le nombre de répétition

Exercice d'application

On soumet à un candidat 10 questions.

Chaque question est assortie de 3 réponses parmi lesquelles une seule est exacte.

Le candidat répond au hasard aux questions.

1. Déterminez la probabilité pour que le candidat trouve 3 bonnes réponses.
2. Déterminez la probabilité pour que le candidat trouve au moins une bonne réponse.

Correction :

Already solve but think first

B. Loi Binomiale

1.Variables aléatoires

Exemple

On lance **trois fois** de suite une pièce de monnaie équilibrée.
On gagne $2F$ pour chaque résultat « pile » et on perd $1F$ pour chaque résultat « face ».

1°) Quel est l'ensemble E des issues possibles ?

2°) Soit X l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui, à chaque issue, associe le gain correspondant.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Quelle est la probabilité de l'événement « obtenir un gain de $3F$ » ? On note cette probabilité $p(X = 3)$.

Solution

On a :
Presenter les résultats sous à l'aide de l'arbre

D'après l'arbre, on a :

$E = \{GGG, GGP, GPG, GPP, PGG, PGP, PPG, PPP\}$

La pièce de monnaie était supposée parfaitement équilibrée, cette expérience a lieu dans le cadre de l'équiprobabilité des évènement élémentaires.

Donc la probabilité d'un évènement élémentaire de E est $\frac{1}{8}$

Variable aléatoire X donnant le gain pour chaque éventualité de E.

Eventualité de E	GGG	GGP	GPG	GPP	PGG	PGP	PPG	PPP
Valeurs prises par X	6	3	3	0	3	0	0	-3

OU

Eventualité de E	PPP	PPF	PFP	PFF	FPP	FPF	FFP	FFF
Valeurs prises par X	6	3	3	0	3	0	0	-3

D'où :$X(E) = \{-3; 0; 3; 6\}$

Probabilité sur l'univers $X(E)$ au loi de probabilité de la variable aléatoire X

$p_1 = P(X = -3) = \frac{1}{8}$; $p_2 = P(X = 0) = \frac{3}{8}$; $p_3 = P(X = 3) = \frac{3}{8}$; $p_4 = P(X = 6) = \frac{1}{8}$

Gain x_i	$X_1 = -3$	$X_2 = 0$	$X_3 = 3$	$X_4 = 6$
Probabilité $p_i = p(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2.Définition

- Une variable aléatoire X est une application définie sur un ensemble E muni d'une probabilité P, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- X prend les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_n$ définies par : $p_i = p(X = x_i)$.
- L'affectation des p_i aux x_i permet de définir une nouvelle loi de probabilité. Cette loi notée P_X, est appelée loi de probabilité de X

C.Fonction de répartition

On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X l'application

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & [0;1] \\ & & x & \mapsto & P(X \leq x) \end{array}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 \\ p_1 & \text{si } x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{si } x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \\ p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_k & \text{si } x_k \leq x < x_{k+1} \\ \vdots & \\ p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{n-1} & \text{si } x_{n-1} \leq x < x_n \\ 1 & \text{si } x \geq x_n \end{cases}$$

F est une fonction en escalier.

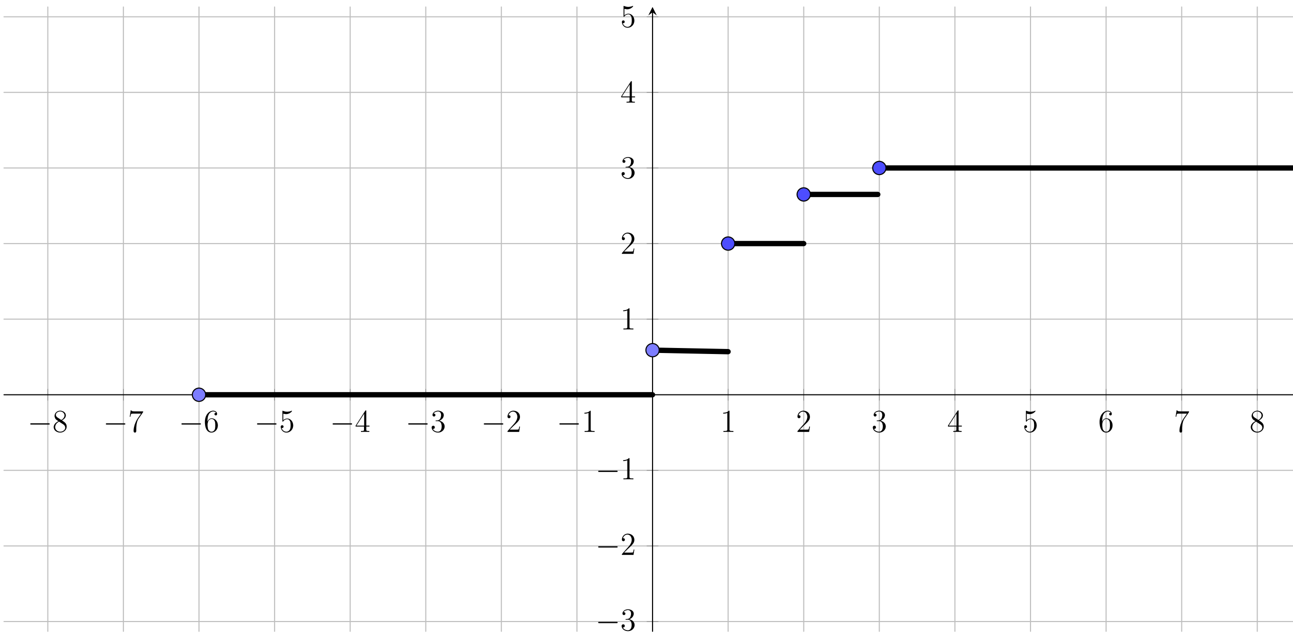
Exemple 1

En considérant le tableau suivant

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

Ce qui entraine

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{8}{27} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{20}{27} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{26}{27} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$



Exemple 2

Du tableau précédent donnant la loi de probabilité de X, on déduit le tableau ci-dessous qui détermine qui détermine la fonction de répartition F de X.

x_i	$-\infty$	-3	0	3	6	$+\infty$
$P(X \leq x_i)$	0	$\boxed{\frac{1}{8}}$ $\frac{1}{8}$	$\boxed{\frac{4}{8}}$ $\frac{4}{8}$	$\boxed{\frac{7}{8}}$ $\frac{7}{8}$	$\boxed{1}$ 1	

Representer la fonction de repartition

3. Loi Binomiale

Soit un schéma de Bernoulli constitué d'une suite de n épreuves. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus, alors :
$P(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$ avec $(0 \leq k \leq n)$

Exemple

Un dé cubique est mal équilibré : la probabilité d'obtenir 6 est de 1/7.

On appelle succès l'événement « obtenir 6 » et échec « obtenir un numéro différent de 6 ».

on appelle X la variable aléatoire comptant le nombre de succès à l'issue des 5 lancés. On obtient les probabilités suivantes :

$P_0 = P(X = 0) = C_5^0(\frac{1}{7})^0(\frac{6}{7})^5$

$P_1 = 0,3856$; $P_2 = 0,1285$; $P_3 = 0,0214$; $P_4 = 0,0018$; $P_5 = 0,0001$.

4.Espérence et Ecart-type :

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_n$. On appelle respectivement espérance mathématique de X, variance de X et écart-type de X , les nombres suivants :

- L'espérance mathématique est le nombre E(X) défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} (p_i x_i)$$

- La variance est le nombre V défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - E(X)^2$$

- L'écart-type est le nombre σ défini par : $\sigma = \sqrt{V}$

Exercice :

Un joueur lance un dé : si le numéro est un nombre premier, le joueur gagne une somme égale au nombre considéré (en franc) ; sinon il perd ce même nombre de franc.

1°) Si X est le gain algébrique réalisé, donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique et son écart-type.

2°) Le jeu est-il favorable au joueur ?

- Pour une loi de Bernoulli de paramètre p, l'espérance est p et l'écart type est $\sqrt{pq}$
- Pour une loi Binomiale de paramètres n et p, l'espérance est np et l'écart type est $\sqrt{npq}$