Rappels et compléments sur les fonctions numériques

Destiné aux élèves de Terminale S
Lycée de Dindéfelo
Présenté par M. BA

14 novembre 2025

A. LIMITES-CONTINUITÉ

I.Limites

1) **Quelques limites usuelles**

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \ , \ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0^+$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases} \ , \ \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} 0^+ \text{ si } n \text{ est pair} \\ 0^- \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \ , \ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0^+$$

$$\lim_{x\to a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty \ , \ \lim_{x\to a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty$$

Autre Notation

$$(x \to a^+) \Leftrightarrow (x \to a_>) \ , \ (x \to a^-) \Leftrightarrow (x \to a_<)$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \text{ se note aussi } \lim_{x\to a_>} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \text{ se note aussi } \lim_{x\to a_<} f(x) = -\infty$$

2) **Quelques théorèmes sur les limites**

a) Théorème de comparaison

Soient f et g trois fonctions définies sur un intervalle I au voisianage α, α étant un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\text{Si pour tout } x \in I : \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ \lim_{x\to\alpha} g(x) = +\infty \end{cases} \quad \text{alors } \lim_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$$

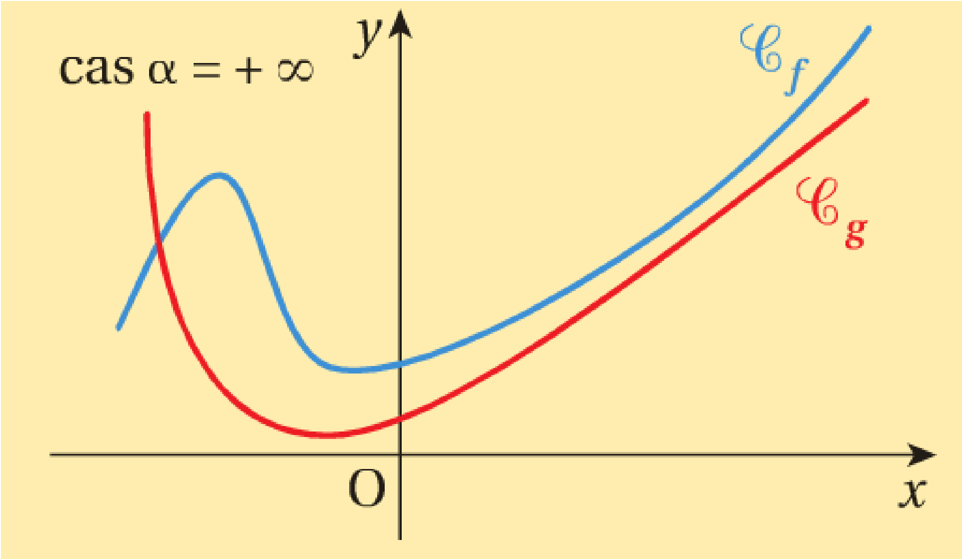


FIGURE 1 – Courbe de (Cf)

$$\text{Si pour tout } x \in I : \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim_{x\to\alpha} g(x) = -\infty \end{cases} \quad \text{alors } \lim_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$$

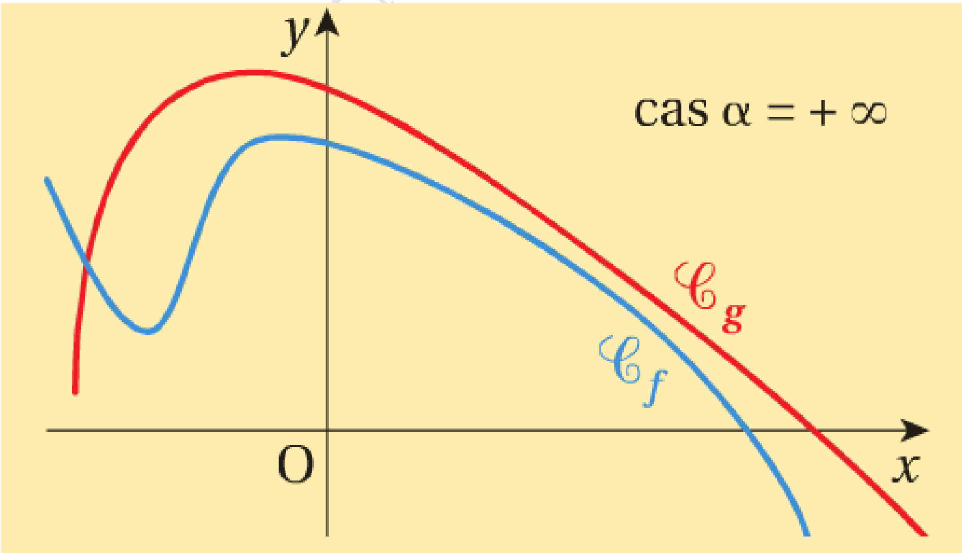


FIGURE 2 – Courbe de (Cf)

Exemple 1: :

Soit $f(x) = -x + \sin x$ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Solution 1: :

$$\text{Pour tout } x, \sin x \leq 1 \implies -x + \sin x \leq 1 - x \implies f(x) \leq 1 - x.$$

$$\text{Posons } g(x) = 1 - x \text{ donc } f(x) \leq g(x).$$

$$\text{Or, } \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty, \text{donc } \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Exemple 2: :

$$\text{Soit } g(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}. \text{ Calculer } \lim_{x \to 0} g(x)$$

Solution 2: :

$$\text{Posons } f(x) = \frac{1}{x^2}. \text{ Comme, pour tout } x \neq 0, \text{ on a, } 1 \leq \sqrt{1+x^2}., \text{ on a, pour tout } , x \neq 0$$

$$f(x) \geq g(x) \text{ Or, } \lim_{x \to 0} g(x) = +\infty, \text{donc } \lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

b) Théorème d'encadrement ou théorème des gendarmes

Soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I au voisianage α, α étant un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\text{Si } \forall x \in I \begin{cases} g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \lim_{x \to \alpha} g(x) = \lim_{x \to \alpha} h(x) = \ell, \end{cases} \quad \text{alors } \lim_{x \to \alpha} f(x) = \ell$$

Exercice d'application 1:

$$\text{Calculer } \lim_{x \to +\infty} \frac{x - \sin x}{x^2}$$

Correction 1:

c) Limite et composition de fonctions

Soit α, β et γ des réels ou $\pm\infty$ On considère deux fonctions u et v telles que

$$\text{Si } \begin{cases} \lim_{x \to \alpha} u(x) = \beta \\ \lim_{x \to \beta} v(x) = \gamma \end{cases} \quad \text{alors } \lim_{x \to \alpha} v(u(x)) = \gamma$$

Exercice d'application 2:

$$\text{Calculer } \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{9}{x} + 7}$$

Correction 2:

On commence par la fonction la plus à l'intérieur :

$$\text{Posons } u(x) = \frac{9}{x} + 7 \text{ et } v(x) = \sqrt{\frac{9}{x} + 7}$$

d) Théorème du changement de variable

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{t \to 0} f(x_0 + t)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{X \to 0^+} f\left(\frac{1}{X}\right)$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{X \to 0^-} f\left(\frac{1}{X}\right)$$

Preuve[Exercice]

3) Limites de fonctions trigonométriques

—

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

— $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

— $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

— $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0$$

Exercice d'application 3:

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\tan\frac{3}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)$$

Correction 3:

4) **Interprétations géométriques des limites**

Les limites peuvent être interprétées géométriquement de plusieurs manières en fonction du contexte. Voici quelques exemples typiques :

a) **Asymptote horizontale (AH)[Parllèle à (ox)]** :

Une fonction f a une asymptote horizontale en $y=\ell$ lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$

$$\text{Si } \lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell \text{ On dit que : } y=\ell \text{ est une AH à } (C_f) \text{ en } +\infty$$

$$\text{Si } \lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell \text{ on dit que : } y=\ell \text{ est une AH à } (C_f) \text{ en } -\infty$$

Cela signifie que la courbe de la fonction se rapproche de la droite $y=\ell$ à mesure que $x\to+\infty$ ou $x\to-\infty$.

Exemple 3: :

Déterminer l'AH de f

$$f(x)=\frac{2x^2}{x^2+1}$$

Solution 3: :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=2.$$

La courbe de la fonction se rapproche de la droite $y=2$ à mesure que $x\to+\infty$ ou $x\to-\infty$.

b) **Asymptote verticale (AV)[Parallèle à (oy)]** :

Soit $x=a\in\mathbb{R}$

$$\text{si } \lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty \text{ alors } x=a \text{ est une AV à } C_f$$

Cela signifie que la courbe de la fonction tend vers l'infini lorsque x approche a par la droite (ou la gauche).

Exemple 4: :

Déterminer de l'AV de f tel que $f(x)=\frac{1}{x}$

Solution 4: :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty,$$

ce qui signifie que la fonction a une asymptote verticale en $x=0$.

c) **Asymptote oblique (AO)** :

$$\text{Si } \lim_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0 \text{ alors } y=ax+b \text{ est une AO à } (C_f) \text{ en } +\infty$$

$$\text{Si } \lim_{x\to-\infty}(f(x)-(ax+b))=0 \text{ alors } y=ax+b \text{ est une AO à } (C_f) \text{ en } -\infty$$

Cette méthode est utilisée pour montrer que $y=ax+b$ est est une AO

Exemple 5: :

Soit $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x}$ une fonction et (C_f) sa courbe représentative.
Montrer que $y=x+2$ est AO à (C_f) en $\pm\infty$

Solution 5: :

$y=x+2$ est AO à (C_f) en $\pm\infty$ si $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=0$
En effet

$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x+2))=0.$$

La courbe de la fonction se rapproche de la droite $y=x+2$ pour $x\to+\infty$.

d) **Propriété 1[Autre façon de montrer que $y=ax+b$ est une AO]**

Soit f une fonction, a,b un réel et (C_f) sa courbe représentative .

$$\text{Si } \lim_{x\to+\infty}f(x)=\pm\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a \text{ et } \lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b$$

$$\text{alors } y=ax+b \text{ est une AO à } (C_f) \quad en \quad +\infty.$$

NB :

Cette propriété reste valable lorsque $x\to-\infty$
On aura $y=ax+b$ est une AO à (C_f) en $-\infty$

Exercice d'application 4:

1) Soit $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x+1}}$ Déterminer Df et montrer que $x=-1$ est une AV à (C_f).
2) Soit $g(x)=\sqrt{4x^2+1}+2x$
   a) Montrer que $y=0$ est une AH à (C_g) en $-\infty$
   b) Montrer que $y=4x$ est une AO à (C_g) en $+\infty$

Correction 4:

e) Branche parabolique de direction (oy)

$$\text{Si } \lim_{x\to+\infty}f(x)=\pm\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\pm\infty$$

$$\text{alors } (C_f) \text{ admet une branche parabolique de direction } (oy) \text{ en } +\infty$$

Remarque 1:

Cette propriété reste valable lorsque $x\to-\infty$

f) Branche parabolique de direction (ox)

$$\text{Si } \lim_{x\to+\infty}f(x)=\pm\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$

$$\text{alors } (C_f) \text{ admet une branche parabolique de direction } (ox) \text{ en } +\infty$$

Remarque 2:

Cette propriété reste valable lorsque $x\to-\infty$

g) Branche parabolique de direction $y = ax$ (a réel)

$$\text{Si } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ et } \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$$

alors (C_f) admet une branche parabolique de direction $y = ax$ en $+\infty$

Remarque 3:

Cette propriété reste valable lorsque $x \to -\infty$

Exercice d'application 5:

Étudier les branches infinies des courbes représentatives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{2x^3-1}{x-1}$

b) $g(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

c) $h(x) = x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

Correction 5:

II.Continuité

1) Définition

Soit f une fonction definie en x_0 on dit que f est continue en x_0 si $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Revoir

2) Prolongement par continuité

[**Continuité sur un intervalle**]

[**Continuité de fonctions usuelles**]

[**Opérations sur les fonctions continues**]

3) Compositions de deux fonctions continues

Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$ alors gof est continue en x_0 donc la composition de deux fonctions continues est une fonction continue.

Exercice d'application 6:

a) Soit $f(x) = \sqrt{|2x^5|}$
Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$

b) Soit $f(x) = x\sqrt{1-x}$
Etudier la continuité de f sur son domaine de définition.

Correction 6:

a) Continuité de $f(x) = \sqrt{|2x^5|}$ sur $\mathbb{R}$

Domaine de définition :

La fonction $f(x) = \sqrt{|2x^5|}$ est définie pour tous les $x \in \mathbb{R}$, car l'expression $|2x^5|$ est toujours positive ou nulle, et la racine carrée d'un nombre positif ou nul est bien définie. Donc, $f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Étude de la continuité :

La fonction $f(x)$ est composée des fonctions suivantes : - $g(x) = 2x^5$, une fonction polynomiale, qui est continue partout sur $\mathbb{R}$. - $h(x) = |x|$, la fonction valeur absolue, qui est continue partout. - $k(x) = \sqrt{x}$, la racine carrée, qui est continue pour $x \geq 0$.

Ainsi, $f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est la composition de fonctions continues sur leur domaine respectif.

Conclusion : La fonction $f(x) = \sqrt{|2x^5|}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Continuité de $f(x) = x\sqrt{1-x}$

Domaine de définition :

La fonction $f(x) = x\sqrt{1-x}$ impose que $1 - x \geq 0$, c'est-à-dire $x \leq 1$. Ainsi, la fonction est définie pour $x < 1$, sans autres contraintes. Le domaine de définition de $f(x)$ est donc $]-\infty, 1[$.

Étude de la continuité :
- La fonction $g(x) = x$ est continue partout sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $h(x) = \sqrt{1-x}$ est continue pour $x < 1$, car la racine carrée est définie pour les valeurs positives ou nulles.
Ainsi, $f(x) = x\sqrt{1-x}$ est continue sur $]-\infty, 1[$.
Point de discontinuité possible en $x = 1$:
Lorsque x tend vers 1, la fonction $\sqrt{1-x}$ tend vers 0. À $x = 1$, la racine carrée devient $\sqrt{1-1} = 0$, donc $f(1) = 1 \times 0 = 0$. Cependant, la fonction n'est pas définie en $x = 1$, ce qui entraîne une discontinuité en $x = 1$.
Conclusion : La fonction $f(x) = x\sqrt{1-x}$ est continue sur $]-\infty, 1[$ et présente une discontinuité en $x = 1$.

4) **Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone**

— L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

$$\text{C'est à dire} \begin{cases} f \text{ est continue sur } I \\ I \text{ est un intervalle} \end{cases} \quad \text{alors } f(I) \text{ est un intervalle}$$

— Lorsqu'une fonction f est continue et strictement monotone sur K, $f(K)$ est un intervalle de même nature que K et ses bornes sont les limites de f aux bornes de K.
Le tableau ci-dessous précise $f(K)$ suivant la nature de K et le sens de variation de f.

K	$f(K)$	$f(K)$
	f stictement croissante	f strictement décroissante
[a ;b]	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
[a ;b[	$[f(a); \lim_{x\to b^-} f(x)[$	$[\lim_{x\to b^-} f(x); f(a)[$
]a ;b[	$]\lim_{x\to b^+} f(x); \lim_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim_{x\to b^-} f(x); \lim_{x\to b^+} f(x)[$
$[a; +\infty[$	$[f(a); \lim_{x\to+\infty} f(x)[$	$[\lim_{x\to+\infty} f(x); f(a)[$
$\mathbb{R}$	$]\lim_{x\to-\infty} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)[$	$]\lim_{x\to+\infty} f(x); \lim_{x\to-\infty} f(x)[$

Exercice d'application 7:
Soit $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$
Déterminer l'image par f des intervalles $[-2; 0]$ et $]1; +\infty[$
Correction 7:
Soit $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

-D_f :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

-Continuité de f :
La fonction $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ est une fonction rationnelle donc continue sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
-Monotonie de f :
Calculons la dérivée de f : $f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$
Pour tout $x \in D_f$ $f'(x) < 0$.
Cela signifie que la fonction f est strictement décroissante sur chaque intervalle de son domaine de définition, à savoir $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$.
-$f([-2; 0]) = [f(0); f(-2)] = [-1; 1]$
-$f(]1; +\infty[) =]\lim_{x\to+\infty} f(x); \lim_{x\to 1^+} f(x)[=]2; +\infty[$

5) **Théorème des valeurs intermédiaires**

Si la fonction f est continue sur $[a; b]$ et si le réel m est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = m$ admet au moins une seule solution dans $[a; b]$.
Autrement dit, il existe au moins un réel c entre a et b tel que $f(c) = m$
Illustration graphique
[Image]
Exemple 6: :
Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + x - 5$ continue sur $[-2; 4]$.

Solution 6: :

$f([-2;4]) = [\lim_{x\to -2} f(x); \lim_{x\to 4} f(x)] = [-11;31]$.

D'après le théorème précédent, comme $5 \in [-11;31]$ donc l'équation $f(x) = 5$ a une solution dans $[-2;4]$.

NB

- Si $m = 0$ il suffit montrer que $\lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to b} f(x) < 0$
- Il faut toujours commencer par montrer que f est continue.

Exercice d'application 8:

$f(x) = 2x^5 + x^2 + x + 8$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[1;2]$.

Correction 8:

6) **Théorème d'existence et d'unicité d'une solution**

Si la fonction f est continue et strictement monotone (croissante ou bien décroissante) sur $[a;b]$. Pour tout réel m compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = m$ admet une unique continue dans $\alpha \in [a;b]$.

Ilustration graphique

[Image]

Cas particulier

Si la fonction f réalise une bijection(continue et strictement monotone) de $[a;b]$ de plus si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[a;b]$.

Ilustration graphique

[Image]

Exemple 7: :

Soit $f(x) = x^3 + x + 1$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-0,8;-0,6]$.

Solution 7: :

7) **Encadrement de la racine α à ϵ près**

Méthode de dichotomie(Approche par exemple)

Si f fonction strictement contenu sur un intervalle $[a;b]$, telle que $f(a) \geq 0$ et $f(b) \leq 0$; alors il existe au moins un réel α dans l'intervalle $[a;b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

L'idée est alors de trouver le signe de f au milieu de $[a;b]$, et de distinguer les deux cas

- Si $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq 0$, alors α est dans l'intervalle $\left[\frac{a+b}{2};b\right]$
- Sinon $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$, alors α est dans l'intervalle $\left[a;\frac{a+b}{2}\right]$

Dans les deux cas, on a trouvé un intervalle de longueur moité dans lequel est située une racine α de l'équation $f(x) = 0$.

On recommence alors avec cet intervalle, et ainsi de suite,jusqu'à ce qu'on trouve une approximation qui nous convienne.

Exercice d'application 9: Soit la fonction $f(x) = x^3 - 7x$

a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2;4]$.
b) Donner un encadrement de α à 0.1 près

Correction 9:

Méthode de balayage(Approche par exemple)[Exercice]

8) **Théorème d'existence d'une bijection et de sa réciproque**

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f est une bijection de I vers $J = f(I)$. Dans ce cas, f admet une fonction réciproque f^{-1} qui est également continue et strictement monotone sur l'intervalle J, avec les propriétés suivantes :

- La fonction réciproque f^{-1} est telle que $f(f^{-1}(y)) = y$ pour tout $y \in J$ et $f^{-1}(f(x)) = x$ pour tout $x \in I$.
- La monotonie de f^{-1} est de même sens que celle de f .

Exemple 8: :

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = 2x + 3$$

(a) La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
(b) La fonction f est-elle strictement monotone sur $\mathbb{R}$?
(c) La fonction f est-elle une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$?
(d) Déterminer l'expression explicite la fonction réciproque f^{-1} de la fonction f ?
(e) La fonction réciproque f^{-1} est-elle continue et strictement monotone ?

Solution 8: :

(a) Oui, la fonction $f(x) = 2x + 3$ est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est une fonction affine (polynomiale de degré 1).
(b) Oui, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, car sa dérivée est $f'(x) = 2 > 0$, ce qui signifie que la pente est positive.
(c) Oui, comme f est continue et strictement croissante, elle est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
(d) Pour trouver la fonction réciproque f^{-1}, nous résolvons l'équation $y = 2x + 3$ pour x :

$$y = 2x + 3 \implies x = \frac{y-3}{2}$$

Donc, la fonction réciproque est $f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$.
(e) Oui, la fonction réciproque $f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$ est également continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car elle est une fonction affine avec une pente positive.
(f) Calculer $f^{-1}(5)$

NB : Il n'est pas toujours possible de déterminer l'expression explicite de f^{-1}

9) **Calcul de $f^{-1}(y_0)$ sans connaître l'expression de f^{-1}**

Pour calculer $f^{-1}(y_0)$, on résout $f(x) = y_0$.

Exemple 9: :

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + x - 1}$. On admet que f est une bijection de $[0; +\infty[$ vers $[-1; +\infty[$
Calculer $f^{-1}(2)$

Solution 9: :

B.Dérivabilité

I.Dérivation

1.Notion de nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0
f est dérivable en x_0 ou f admet un nombre dérivé en x_0 si et seulement si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \text{ avec } (\ell \in \mathbb{R})$$

ℓ est appelé le nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$.
On a alors :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Exemple 10: :

Soit $f(x) = \frac{x}{2x+1}$ Etudier la dérivabilité de f en -1.

Solution 10: :

2.Dérivabilté à gauche-Dérivabilité à droite

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0 et ℓ un réel.
f est dérivable à gauche de x_0 si
$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$$
f est dérivable à droite de x_0 si
$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$$
f est dérivable en x_0 si
$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$$
NB : On note $f'_g(x)$ la dérivé à gauche et $f'_d(x)$ la dérivé à droite

Exemple 11: :

$f(x) = x|x - 1|$ f est-elle dérivable en 1 ?

Solution 11: :

3.Interprétation géométrique du nombre dérivé

- Si f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0)$ existe et C_f admet une tangente au point d'abscisse x_0 d'équation : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

La limite	**Dérivabilité en x_0**	**Interprétation géométrique : (C_f) admet**
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a \ (a \neq 0)$	f est dérivable en x_0	Une tangente au point $A\,(x_0; f(x_0))$ de coefficient directeur a
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$		Une tangente horizontale au point $A\,(x_0; f(x_0))$
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a \ (a \neq 0)$	f est dérivable à droite en x_0	Une demi-tangente à droite au point $A\,(x_0; f(x_0))$ de coefficient directeur a
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$		Une demi-tangente horizontale à droite au point $A\,(x_0; f(x_0))$
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$	f n'est pas dérivable à droite en x_0	Une demi-tangente verticale à droite au point $A\,(x_0; f(x_0))$ dirigée vers le bas
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$		Une demi-tangente verticale à droite au point $A\,(x_0; f(x_0))$ dirigée vers le haut
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a \ (a \neq 0)$	f est dérivable à gauche en x_0	Une demi-tangente à gauche au point $A\,(x_0; f(x_0))$ de coefficient directeur a
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$		Une demi-tangente horizontale à gauche au point $A\,(x_0; f(x_0))$
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$	f n'est pas dérivable à gauche en x_0	Une demi-tangente verticale à gauche au point $A\,(x_0; f(x_0))$ dirigée vers le haut
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$		Une demi-tangente verticale à gauche au point $A\,(x_0; f(x_0))$ dirigée vers le bas

4.Dérivabilité sur un intervalle

f est dérivable sur $]a;b[$ si et seulement si f est dérivable en tout point de $]a;b[$.

Propriété :

— Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

— Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition .

— $|f|$ est dérivable sur I si et selement si f est dérivable sur I et $f(x) \neq 0 \forall x \in I$

— $\sqrt{f}$ est dérivable sur I si et selement si f est dérivable sur I et $f(x) > 0 \forall x \in I$

5.Dérivée d'une fonction composée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle K contenant $f(I)$.

— Si f est dérivable en un élément x_0 de I et g dérivable en f alors $g \circ f$ est dérivable en et on a : $(g \circ f)'(x_0) = g' \circ f(x_0) \times f'(x_0)$

— Si f est dérivable sur I et g dérivable sur K alors $g \circ f$ est dérivable sur I et on a : $(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$

6.Dérivée de la fonction réciproque

Soit f une fonction dérivable et bijective de $I \to J$ et f^{-1} la bijection réciproque donc $f^{-1'}(y) = \frac{1}{f'(x)}$avec $f'(x) \neq 0$

En effet :

$$f : I \to J \qquad f^{-1} : J \to I$$
$$f : x \mapsto y = f(x) \qquad y \mapsto x = f^{-1}(y)$$

On a

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f(x) = x &\implies (f^{-1} \circ f(x))' = x' \\ &\implies (f^{-1})'(f(x)) \times f'(x) = 1 \\ &\implies (f^{-1})'(y) \times f'(x) = 1 \\ &\implies (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \end{aligned}$$

Propriété :

$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$avec $f'(x) \neq 0$

7.Inégalité des accroissements finis (IAF)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|f'(x)| \leq M$.

Alors pour tout a et $b \in I$, on a : $|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$

Exemple 12:

Démontrer que pour tout réels a et b $|\cos b - \cos a \leq |b - a|$

Solution 12:

C.Primitives

1.Définition

Soit F une fonction dérivable sur un intervalle I et soit f une fonction définie et continue sur I.

On dit que F est une primitive de f sur I si pour tout x élément de I

On a : $F'(x) = f(x)$

F est une primitive de f sur I si f est la dérivée de F sur I.

2.Théorème (admis)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.

Remarque :

Si f admet une primitive sur I alors elle en admet une infinité.

3.Théorème

Deux primitives d'une même fonction sur un même intervalle diffèrent d'une constante.

Donc si F et G sont des primitives de f sur I alors il existe une constante réelle k telle que pour tout x élément de I $F(x) = G(x) + k$

Pour la preuve voir la variation des fonctions avec l'utilisation des dérivées.

On en déduit que :

Chacune des primitives de f sur I est déterminée par sa valeur en un point de I.

Remarque :

Toute primitive de f sur I est dérivable sur I.

Il serait utile de connaitre les résultats figurant sur le tableau suivant :

$I =$ **intervalle de définition de** f	**Remarques ou restrictions**	**Fonction** f	**Primitive** F **où** k **est une constante réelle**
$I \subset \mathbb{R}$		$x \mapsto 0$	$x \mapsto k$
$I \subset \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto a$	$x \mapsto ax + k$
$I \subset \mathbb{R}$	n entier naturel	$x \mapsto x^n$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
$I \subset \mathbb{R}^*$	n entier relatif, $n \neq -1$	$x \mapsto x^n$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
$I \subset \mathbb{R}^+$	n réel $n \neq -1$	$x \mapsto x^n$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
$I \subset \mathbb{R}^*$		$x \mapsto \frac{1}{x^n}$	$x \mapsto -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + k$
$I \subset \mathbb{R}^+$		$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + k$
$I \subset \mathbb{R}$		$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + k$
$I \subset \mathbb{R}$		$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + k$
$I \subset \mathbb{R}$		$x \mapsto \sin(ax+b)$	$x \mapsto -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + k$
$I \subset \mathbb{R}$		$x \mapsto \cos(ax+b)$	$x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b) + k$
$I \subset \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$		$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x + k$
$I \subset \mathbb{R}$		$x \mapsto 1 + \tan^2 x$	$x \mapsto \tan x + k$
$I \subset \mathbb{R}^+$	x positif	$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{2}{3}x^{3/2} + k$
$I \subset \mathbb{R}$		$x \mapsto (ax+b)^n$	$x \mapsto \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + k$
$I \subset \mathbb{R}$	Avec les mêmes contraintes sur n et sur $(ax+b)$		

Table 1 – Tableau des primitives

Primitive de $u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
Primitive de $\dfrac{u'}{u^n}$ $n \neq 1$	$-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
Primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
Primitive de $f(ax+b)$	$\dfrac{1}{a}F(ax+b)$

Exercice d'application 10:

1.Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes, sur un intervalle bien choisi :

$$f_1(x) = 5x^3 - 3x + 7 \qquad f_2(x) = 2\cos(x) - 3\sin(x) \qquad f_3(x) =$$

$$f_4(x) = \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x^4} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} \qquad f_5(x) = \frac{x+5}{x^2} \qquad f_6(x) = \frac{x^2}{5} + \frac{1}{6}$$

$$f_3(x) = \sin(2x) \qquad f_4(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) \qquad f_5(x) = (2x+1)^2$$

$$f_6(x) = \frac{3}{\sqrt{5x+1}} \qquad f(x) = \frac{x}{1+x^2} \qquad m(x) = 3x\sqrt{1+x^2}$$

2.Reconnaissance de formes

1. $f(x) = (3x-1)(3x^2-2x+3)^3,\ I = \mathbb{R}$ **2.** $f(x) = \frac{1-x^2}{(x^3-3x+2)^3},\ I =]-\infty, -2[$

3. $f(x) = \frac{(x-1)}{\sqrt{x(x-2)}},\ I =]-\infty, 0[$ **4.** $f(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2},\ I =]1, +\infty[$.

Correction 10:

D.ÉTUDES DE FONCTIONS

1. Courbe de la fonction réciproque

Soit f une bijection de I vers J et f^{-1} sa bijection réciproque. La courbe de f (C_f) et la courbe de f^{-1} $(C_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice

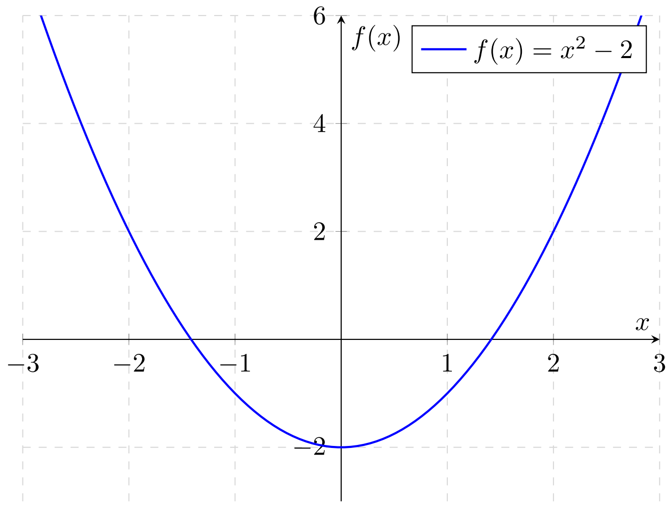
(Δ) d'équation $y = x$.

2. Fonction paire

Soit f une fonction et D_f son ensemble de définition. La fonction f est dite paire lorsque, pour tout x appartenant à D_f, on a :

$$-x \in D_f \text{ et } f(-x) = f(x).$$

NB La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

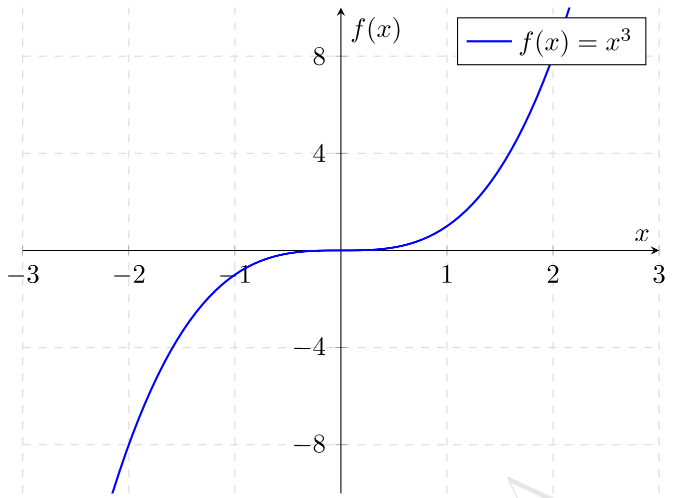


3. Fonction impaire

Soit f une fonction et D_f son ensemble de définition. f est dite impaire lorsque, pour tout x appartenant à D_f, on a :

$$-x \in D_f \text{ et } f(-x) = -f(x).$$

NB : La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.



4. Axe de symétrie

La droite d'équation cartésienne $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe C_f si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- $(\forall x \in D_f); (2a - x) \in D_f$
- $(\forall x \in D_f); f(2a - x) = f(x)$

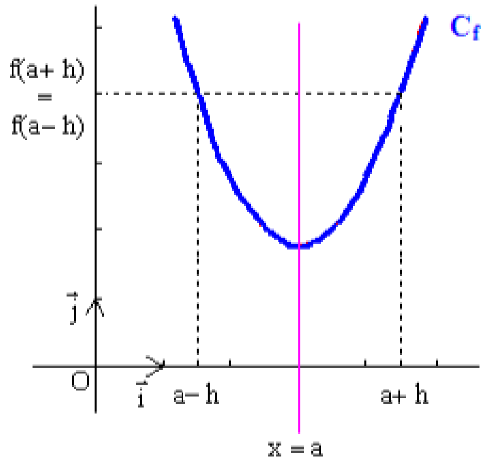


FIGURE 3 – centreSymetrie

Cas particulier Si $a = 0$; f est une fonction paire
Exemple 13:
$f(x) = 2x^2 - 2x + 1$ Montrer que $x = \frac{1}{2}$ est axe de symétrie pour la courbe C_f.
Solution 13:

5. Centre de symétrie

Le point $I(a; b)$ est un centre de symétrie de la courbe C_f si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- $(\forall x \in D_f); (2a - x) \in D_f$
- $(\forall x \in D_f); f(2a - x) + f(x) = 2b$

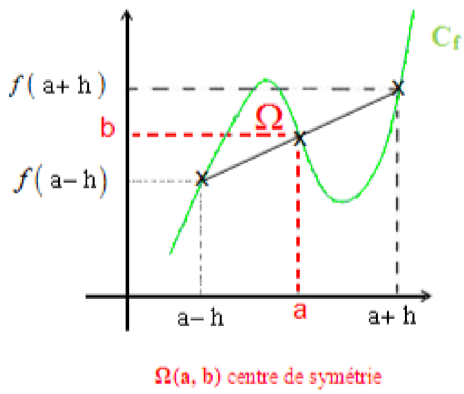


FIGURE 4 – centreSymetrie

Cas particulier Si $a = b = 0$; f est une fonction impaire
Exemple 14:
$f(x) = \frac{3x+1}{2x-6}$ Montrer que $I(3; \frac{3}{2})$ est centre de symétrie pour la courbe C_f.
Solution 14:

6. Périodicité

Soit f une fonction et D_f son ensemble de définition. Soit T un nombre réel strictement positif. On dit que
T est une période de f lorsque, pour tout x appartenant à D_f, on a :

— $x + T \in D_f$ (1)
— $f(x + T) = f(x)$ (2)

Le plus petit réel T strictement positif qui vérifie (1) et (2) est appelé la période de f.
Exemple 15:
Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
La fonction sinus est périodique de période $T = 2\pi$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

— $x + 2\pi \in \mathbb{R}$ (ce qui vérifie la condition (1)),
— $f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin(x) = f(x)$ (ce qui vérifie la condition (2)).

Ainsi, 2π est la période de $f(x) = \sin(x)$.

7. Position relative d'une courbe et de son asymptote $(\Delta) : y = ax + b$

Soient f une fonction et (C_f) sa courbe représentative. $(\Delta) : y = ax + b$.
Posons $g(x) = f(x) - (ax + b)$.

— Si $g(x) > 0$ $\forall x \in K$, alors (C_f) est au-dessus de (Δ) sur K.
— Si $g(x) < 0$ $\forall x \in K$, alors (C_f) est au-dessous (ou en dessous) de (Δ) sur K.
— Si $g(x) = 0$ $\forall x \in K$, alors (C_f) et (Δ) se coupent sur K.

Exemple 16:
Considérons la fonction $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$ et son asymptote oblique $(\Delta) : y = 2x$.
Calculons $g(x) = f(x) - (2x) = 2x + \frac{1}{x} - 2x = \frac{1}{x}$.

— Pour $x > 0$, $g(x) = \frac{1}{x} > 0$, donc (C_f) est au-dessus de (Δ) pour $x > 0$.
— Pour $x < 0$, $g(x) = \frac{1}{x} < 0$, donc (C_f) est en dessous de (Δ) pour $x < 0$.
— $g(x)$ ne s'annule jamais (sauf à l'infini), donc (C_f) et (Δ) ne se coupent pas.

Ainsi, la courbe de $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$ est au-dessus de l'asymptote $y = 2x$ pour $x > 0$ et en dessous pour $x < 0$, sans intersection entre (C_f) et (Δ).

8. Position relative d'une courbe et de sa tangente au point M_0 d'abscisse x_0

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle K et x_0 un élément de K.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative et par (T) la tangente à (C_f) au point M_0 d'abscisse x_0.

(T) a pour équation : $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

— Si $f'' > 0\ \forall x \in K$, alors (C_f) est au-dessus de (T) sur K. On dit que f est convexe sur K.

— Si $f'' < 0\ \forall x \in K$, alors (C_f) est au-dessous (ou en dessous) de (T) sur K. On dit que f est concave sur K.

— Si f'' s'annule et change de signe en x_0, alors la droite (T) traverse la courbe (C_f) en M_0. On dit que M_0 est un point d'inflexion de (C_f).

Exemple 17:

Considérons la fonction $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ et étudions sa tangente au point M_0 d'abscisse $x_0 = 1$.

1. **Calculons $f(x_0)$, $f'(x_0)$ et $f''(x_0)$:**

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$
$$f''(x) = 6x - 6$$

En prenant $x_0 = 1$:

$$f(1) = 1^3 - 3 \times 1^2 + 2 \times 1 = 0$$
$$f'(1) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 2 = -1$$
$$f''(1) = 6 \times 1 - 6 = 0$$

2. **Équation de la tangente (T) en M_0 :**

L'équation de la tangente au point $M_0(1,0)$ est donnée par :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0 + (-1)(x - 1) = -x + 1$$

3. **Analyse de la concavité :**

Pour $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, on a $f''(x) = 6x - 6$, qui s'annule en $x = 1$. En étudiant le signe de $f''(x)$ de part et d'autre de $x = 1$:

- Pour $x < 1$, $f''(x) < 0$, donc f est concave.
- Pour $x > 1$, $f''(x) > 0$, donc f est convexe.

Ainsi, $f''(x)$ change de signe en $x_0 = 1$, ce qui signifie que M_0 est un point d'inflexion de la courbe (C_f). La tangente (T) traverse la courbe en ce point.

PROBLÈME

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sqrt{1 - x^2} & \text{si } x > 0 \\ -x + \sqrt{x^2 - 2x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1) Déterminer D_f, les limites aux bornes et préciser les asymptotes et branches infinies éventuelles.
2) Étudier la dérivabilité de f en 0 et 1 ; interpréter géométriquement les résultats obtenus.
3) Calculer $f'(x)$ là où f est définie, puis dresser le tableau de variation de f.
4) Tracer la courbe de f.
5) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; 0]$.
   (a) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité et le tableau de variation.
   (b) Sans utiliser l'expression de $h^{-1}(x)$, calculer $(h^{-1})'(2)$.
   (c) Déterminer explicitement h^{-1}.
   (d) Tracer la courbe de h^{-1} dans le même repère que celle de f.

CORRECTION

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sqrt{1-x^2} & \text{si } x > 0, \\ -x + \sqrt{x^2 - 2x} & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

1) **Détermination de l'ensemble de définition D_f**
Première partie : $f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$ pour $x > 0$.
- L'expression $\sqrt{1-x^2}$ est définie si $1 - x^2 \geq 0$, soit $-1 \leq x \leq 1$.
- Comme $x > 0$, on obtient $0 < x \leq 1$.

Deuxième partie : $f(x) = -x + \sqrt{x^2 - 2x}$ pour $x \leq 0$.
- L'expression $\sqrt{x^2 - 2x}$ est définie si $x^2 - 2x \geq 0$, soit $x(x-2) \geq 0$.
- Résolvons cette inéquation :

$$x(x-2) \geq 0 \iff \begin{cases} x \leq 0 \quad \text{ou} \quad x \geq 2. \end{cases}$$

- Comme cette partie est définie pour $x \leq 0$, on conserve uniquement $x \leq 0$.

Ensemble de définition :
- La première partie est définie sur $0 < x \leq 1$.
- La deuxième partie est définie sur $x \leq 0$.
- En réunissant ces deux domaines, on obtient :

$$D_f =]-\infty, 1].$$

Limites aux bornes de D_f

Quand $x \to -\infty$:
Pour $x \to -\infty$, $f(x) = -x + \sqrt{x^2 - 2x}$.
Simplifions :

$$\sqrt{x^2 - 2x} = |x|\sqrt{1 - \frac{2}{x}} \quad (\text{avec } |x| = -x \text{ pour } x < 0).$$

Ainsi, $f(x) = -x + (-x)\sqrt{1 - \frac{2}{x}}$.
Quand $x \to -\infty$, $\sqrt{1 - \frac{2}{x}} \to 1$, donc :

$$f(x) \sim -x - x = -2x \to +\infty.$$

Quand $x \to 0^-$:
Pour $x \leq 0$, $f(x) = -x + \sqrt{x^2 - 2x}$.
Quand $x \to 0^-$, $x^2 - 2x \to 0$, donc $\sqrt{x^2 - 2x} \to 0$.
Par conséquent :

$$f(x) \to -x \to 0.$$

Quand $x \to 0^+$:
Pour $x > 0$, $f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.
Quand $x \to 0^+$, $\sqrt{1-x^2} \to \sqrt{1} = 1$, donc :

$$f(x) \to 2x \to 0.$$

Quand $x \to 1^-$:
Pour $x > 0$, $f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.
Quand $x \to 1^-$, $1 - x^2 \to 0^+$, donc $\sqrt{1-x^2} \to 0^+$.
Par conséquent :

$$f(x) = 2x\sqrt{1-x^2} \to 0.$$

Asymptotes et branches infinies éventuelles

Pour $x \to -\infty$:
On a montré que $f(x) \sim -2x$.
Ainsi, $f(x)$ admet une **branche infinie oblique** d'équation asymptotique :

$$y = -2x \quad \text{pour } x \to -\infty.$$

2) **Étude de la dérivabilité de f en 0 et 1 :**

En $x = 0$:

— **Continuité :**
- À gauche ($x \to 0^-$), $f(x) = -x + \sqrt{x^2 - 2x} \to 0$.
- À droite ($x \to 0^+$), $f(x) = 2x\sqrt{1 - x^2} \to 0$.
- Comme $f(0) = 0$, f est continue en $x = 0$.

— **Dérivabilité :**
- À gauche, la dérivée $f'(x) = -1 + \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}$ diverge vers $-\infty$.
- À droite, $f'(x) = 2\sqrt{1 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \to 2$.
- Les dérivées à gauche et à droite ne sont pas égales, donc f n'est pas dérivable en $x = 0$.

En $x = 1$:

— **Continuité :**
- Pour $x \to 1^-$, $f(x) = 2x\sqrt{1 - x^2} \to 0$.
- $f(1)$ n'est pas défini, donc f n'est pas continue en $x = 1$.
- Par conséquent, f n'est pas dérivable en $x = 1$.

Interprétation géométrique :

— En $x = 0$, f est continue mais présente une cassure (coussin), donc pas de tangente unique.
— En $x = 1$, f n'est pas définie, donc il n'y a pas de continuité ni de tangente.

3) **Calcul de $f'(x)$ et tableau de variation :**

Calcul de $f'(x)$ pour $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{2(1 - 2x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Calcul de $f'(x)$ pour $x \leq 0$:

$$f'(x) = -1 + \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}.$$

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	1
$f'(x)$	$+\infty$	0	$-$
$f(x)$	Croissante	Dérivabilité et continuité	Décroissante

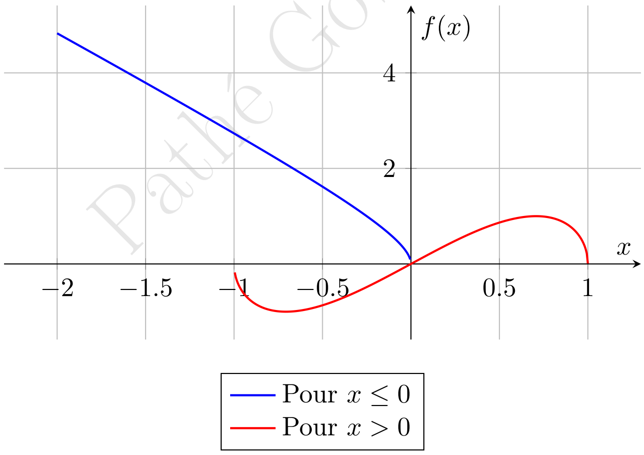


Figure 5 – Courbe de $f(x)$