

## Correction du devoir n° 2 Du 1<sup>er</sup> Semestre

### Exercice 1 : 0,5 × 10 = 5 points

1 Déterminons une primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur  $I$ .

a)  $f(x) = (6x - 3)(4x^2 - 4x + 2)^3 ; I = \mathbb{R}$  (0,5pt)

$$\begin{aligned} f(x) &= (6x - 3)(4x^2 - 4x + 2)^3 \\ &= 3(2x - 1)(4x^2 - 4x + 2)^3 \\ &= 3 \times \frac{1}{4}(8x - 4)(4x^2 - 4x + 2)^3 \\ &= 3 \times \frac{1}{4}(4x^2 - 4x + 2)'(4x^2 - 4x + 2)^3 \\ &= 3 \times \frac{1}{4}u'u^3 \\ F(x) &= 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}u^4 + k \\ &= 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}(4x^2 - 4x + 2)^4 + k \\ &= \frac{3}{16}(4x^2 - 4x + 2)^4 + k \end{aligned}$$

$$F(x) = \frac{3}{16}(4x^2 - 4x + 2)^4 + k$$

b)  $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{3 + \cos x}} ; I = \mathbb{R}$  (0,5pt)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin x}{\sqrt{3 + \cos x}} \\ &= \frac{-(3 + \cos x)'}{\sqrt{3 + \cos x}} \\ &= \frac{-(u)'}{\sqrt{u}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= -2\sqrt{u} + k \\ &= -2\sqrt{3 + \cos x} + k \end{aligned}$$

$$F(x) = -2\sqrt{3 + \cos x} + k$$

c)  $f(x) = 2 \cos 3x - 3 \sin 2x ; I = \mathbb{R}$  (0,5pt)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \cos 3x - 3 \sin 2x \\ &= 2 \times \cos(ax + b) - 3 \times \sin(ax + b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(x) &= 2 \times \frac{1}{a} \sin(ax + b) + 3 \times \frac{1}{a} \cos(ax + b) \\
&= 2 \times \frac{1}{3} \sin(3x) + 3 \times \frac{1}{2} \cos(2x) \\
&= \frac{2}{3} \sin(3x) + \frac{3}{2} \cos(2x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{2}{3} \sin(3\mathbf{x}) + \frac{3}{2} \cos(2\mathbf{x}) + \mathbf{k}}$$

d)  $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}} + \sin x \sin 2x ; I = ]-\infty; -1[$  (0,5pt)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}} + \sin x \sin 2x \\
&= \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}} + \sin x \times \cos x \times \sin x \\
&= \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}} + \cos x \times \sin^2 x \\
&= \frac{3(x^2 - 1)'}{2\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{1}{3}(\sin^3 x)' \\
&= \frac{3(u)'}{2\sqrt{u}} + \frac{1}{n+1}(\sin^{n+1} x)' \\
F(x) &= \frac{3}{2} \times 2\sqrt{u} + \frac{1}{3} \sin^3 x + k \\
&= 3\sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{3} \sin^3 x + k
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 3\sqrt{\mathbf{x}^2 - 1} + \frac{1}{3} \sin^3 \mathbf{x} + \mathbf{k}}$$

2) Soit  $k$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$  par :  $k(x) = \frac{3x - 2}{(x + 2)^3}$ .

a) Déterminons les  $a$  et  $b$  tels que  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ,  $k(x) = \frac{a}{(x + 2)^2} + \frac{b}{(x + 2)^3}$ . (0,5pt)

$$\begin{aligned}
k(x) &= \frac{a}{(x + 2)^2} + \frac{b}{(x + 2)^3} \\
&= \frac{a(x + 2)}{(x + 2)^3} + \frac{b}{(x + 2)^3} \\
&= \frac{a(x + 2) + b}{(x + 2)^3} \\
&= \frac{ax + 2a + b}{(x + 2)^3}
\end{aligned}$$

Par identification  $3x - 2 = ax + 2a + b$

$$3x - 2 = ax + 2a + b \implies \begin{cases} a = 3 \\ 2a + b = -2 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} a = 3 \\ 6 + b = -2 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} a = 3 \\ b = -8 \end{cases}$$

$$\text{Donc } k(x) = \frac{3}{(x + 2)^2} + \frac{-8}{(x + 2)^3}$$

$$k(x) = \frac{3}{(x+2)^2} + \frac{-8}{(x+2)^3} + c$$

b) Déduisons-en la primitive  $K$  de  $k$  qui prend la valeur 2 en -3. (0,5pt)

$$\begin{aligned} k(x) &= \frac{3}{(x+2)^2} + \frac{-8}{(x+2)^3} \\ &= 3\frac{1}{(x+2)^2} - 8\frac{1}{(x+2)^3} \\ &= 3\frac{1}{u^2} - 8\frac{1}{v^3} \\ &= 3\frac{1}{u^n} - 8\frac{1}{v^n} \\ K(x) &= 3\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}} - 8\frac{-1}{(n-1)v^{n-1}} + k \\ &= -3\frac{1}{(x+2)} + 8\frac{1}{2(x+2)^2} + k \\ &= -\frac{1}{(x+2)} + 4\frac{1}{(x+2)^2} + k \end{aligned}$$

$$K(x) = -\frac{1}{(x+2)} + \frac{4}{(x+2)^2} + c$$

## Problème : ( 12,75 points ≈ 144 mns)

On note  $(C_f)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité 1cm avec

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1} & ; \text{ si } x \leq 0 \\ x + \sqrt{x^2 + x} & ; \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

### Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire : (2pts)

Soit  $g$  la fonction numérique définie par :  $g(x) = -x^3 + 3x - 4$ .

1) Étudions les variations de  $g$  puis dressons son tableau de variations. (0,75pt)

$$g'(x) = -3x^2 + 3$$

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\implies -3x^2 + 3 = 0 \\ &\implies -x^2 + 1 = 0 \\ &\implies x = -1 \text{ ou } x = 1 \end{aligned}$$

| $x$        | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |
|------------|-----------|------|-----|-----------|
| $-x^2 + 1$ | —         | 0    | +   | —         |

Sur  $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$   $g'(x) \leq 0$  donc  $g$  est décroissant

Sur  $[-1; 1]$   $g'(x) \geq 0$  donc  $g$  est croissant

### **LIMITES**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 + 3x - 4 \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 + 3x - 4$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3$$

$$= -\infty$$

$$g(-1) = -(-1)^3 + 3(-1) - 4$$

$$g(-1) = 1 - 3 - 4$$

$$= -6$$

$$g(1) = -(1)^3 + 3(1) - 4$$

$$g(1) = -1 + 3 - 4$$

$$= -2$$

|         |           |   |      |   |     |   |           |
|---------|-----------|---|------|---|-----|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |   | $-1$ |   | $1$ |   | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | - | 0    | + | 0   | - |           |
| $f$     | $+\infty$ |   | -6   |   | -2  |   | $-\infty$ |

- 2 a Montrons que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in \mathbb{R}$ . (0,5pt)

#### Existence

D'après le tableau de variation  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \times g(-1) < 0$  d'où l'existence d'une solution

#### Unicité

$g$  est continue et strictement décroissante de  $]-\infty, -1[$  vers  $] +\infty, -6[$  d'où l'unicité de la solution

- b Donnons un encadrement de  $\alpha$  à  $10^{-1}$ . (0,5pt)

On sait que la solution unique  $\alpha$  vérifie  $\alpha < -1$ .

Calculons  $g(x) = -x^3 + 3x - 4$  pour deux valeurs décimales consécutives.

$$g(-2) = -(-8) + 3(-2) - 4 = 8 - 6 - 4 = -2 < 0$$

$$g(-1,5) = -(-3,375) + 3(-1,5) - 4 = 3,375 - 4,5 - 4 = -5,125 < 0$$

On cherche donc plus à gauche.

$$g(-2,1) = -(-9,261) + 3(-2,1) - 4 = 9,261 - 6,3 - 4 = -1,039 < 0$$

$$g(-2,2) = -(-10,648) + 3(-2,2) - 4 = 10,648 - 6,6 - 4 = 0,048 > 0$$

La fonction  $g$  est continue et strictement décroissante sur  $]-\infty, -1]$ , donc elle change de signe une seule fois sur cet intervalle.

**Encadrement à  $10^{-1}$  :**

$$-2,2 < \alpha < -2,1$$

- 3 En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $]-\infty; 0]$ . (0,25pt)

$$g(x) > 0 \quad \text{si } x \in ]-\infty, \alpha[$$

$$g(x) = 0 \quad \text{si } x = \alpha$$

$$g(x) < 0 \quad \text{si } x \in [\alpha, 0]$$

## Partie B : Étude de la fonction $f$ (9pts)

- 1 Déterminons l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ . (0,5pt)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1} & ; \text{ si } x \leq 0 \\ x + \sqrt{x^2 + x} & ; \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Posons  $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & ; \text{ si } x \leq 0 \\ f_2(x) & ; \text{ si } x > 0 \end{cases}$

•  $f_1$

$$\begin{aligned} f_1 \quad \exists \quad \text{ssi } x^2 - 1 \neq 0 \text{ et } x \leq 0 \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq 1 \text{ et } x \in ]-\infty, 0] \\ -1 \in ]-\infty, 0] \text{ et } 1 \notin ]-\infty, 0] \end{aligned}$$

$$Df_1 = ]-\infty; -1[ \cap ]-1; 0[$$

•  $f_2$

$$f_2 \quad \exists \quad \text{ssi } x^2 + x \geq 0 \text{ et } x > 0$$

$$\text{Posons } x^2 + x = 0$$

$$x^2 + x = 0 \implies x = 0 \text{ ou } x = -1$$

| $x$       | $-\infty$ | -1      | 0       | $+\infty$ |
|-----------|-----------|---------|---------|-----------|
| $x^2 + x$ |           | Hatched | Hatched | +         |

$$Df_2 = ]0; +\infty[$$

$$Df = Df_1 \cup Df_2$$

$$\begin{aligned} \text{Donc} \quad &= ]-\infty; -1[ \cap ]-1; 0[ \cup ]0; +\infty[ \\ &= \mathbb{R} \setminus \{-1\} \end{aligned}$$

$$Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

- 2 a Calculons les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ . (1pt)

- En  $-\infty$ :  $f(x) = f_1(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

- En  $+\infty$ :  $f(x) = f_2(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x^2 + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x^2} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- En  $-1^-$ :  $f(x) = f_1(x)$
- $$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{-3}{0}$$

$$= \frac{-3}{0^+}$$

$$= -\infty$$

|           |           |      |     |     |           |
|-----------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x$       | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
| $x^2 - 1$ | +         | 0    | -   |     |           |

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$$

- En  $-1^+$ :  $f(x) = f_1(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{-3}{0^-}$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

- Déduisons-en l'existence d'une asymptote dont on précisera. (0,25pt)

Comme  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty$  donc  $x = -1$  est une asymptote verticale

Donc  $x = -1$  est une asymptote verticale à  $(C_f)$

b

- Pour  $x \leq 0$ , déterminons les réels  $a, b, c$  et  $d$  tels que :  $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 - 1}$  (0,5pt)

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 - 1} \implies f(x) = \frac{(ax + b)(x^2 - 1) + cx + d}{x^2 - 1}$$

$$\implies f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 - ax - b + cx + d}{x^2 - 1}$$

$$\implies f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + (c - a)x + (d - b)}{x^2 - 1}$$

$$\text{On a } \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1} = \frac{ax^3 + bx^2 + (c - a)x + (d - b)}{x^2 - 1}$$

par identification  $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c - a = 0 \\ d - b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c - 1 = 0 \\ d + 2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \\ d = -2 \end{cases}$

Ainsi,  $f(x) = x - 2 + \frac{x - 2}{x^2 - 1}$

- Déduisons-en la nature de la branche infinie en  $-\infty$ . (0,25pt)

En posant  $(\Delta_1)$  :  $y = x - 2$ , si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y = 0$  alors  $y = x - 2$  est asymptote oblique

En effet

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2}{x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2}$$

$$= 0$$

Donc ( $\Delta_1$ ) :  $y = x - 2$  est une asymptote oblique à  $(C_f)$  en  $-\infty$

c) Donner la nature de l'asymptote en  $+\infty$ . (0,5pt)

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

• Cherchons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right)$$

$$= 2$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

• Cherchons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x^2 + x} - 2x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Donc ( $\Delta_2$ ) :  $y = 2x + \frac{1}{2}$  est une asymptote oblique à  $(C_f)$  en  $+\infty$

3 a) Montrons que  $f$  est continue sur  $D_f$ . (0,75pt)

• Continuité sur chaque intervalle

- Sur  $]-\infty, 0] \setminus \{-1\}$

La fonction  $x \mapsto \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1}$  est une fonction rationnelle.

Elle est donc continue sur son domaine de définition  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .

En particulier, elle est continue sur  $]-\infty, 0] \setminus \{-1\}$ .

- Sur  $]0, +\infty[$

Pour tout  $x > 0$ , on a  $x^2 + x > 0$ , donc la fonction  $x \mapsto \sqrt{x^2 + x}$  est bien définie et continue sur  $]0, +\infty[$ .

Ainsi, la fonction  $x \mapsto x + \sqrt{x^2 + x}$  étant somme de fonctions continues, est continue sur  $]0, +\infty[$ .

• Continuité en 0

- En  $0^-$ :  $f(x) = f_1(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1}$$

$$= 0$$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$

- En  $0^+$ :  $f(x) = f_2(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \sqrt{x^2 + x})$$

$$= 0$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

On a  $f(0) = \frac{0^3 - 2 \cdot 0^2}{0^2 - 1} = 0$

Finalement  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$  donc  $f$  est continue en 0

• Conclusion

La fonction  $f$  est continue sur  $]-\infty, 0] \setminus \{-1\}$ , sur  $]0, +\infty[$  et en 0.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$  donc  $f$  est continue sur  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

b) Étudions la dérivabilité de  $f$  en 0 puis interprétons le résultat obtenu. (1,5pt)

• Étudions la dérivabilité de  $f$  en 0

- En  $0^-$ :  $f(x) = f_1(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1} - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$$

$$= 0$$

- En  $0^+$ :  $f(x) = f_2(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sqrt{x^2 + x} - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x^2 - x}{x(x - \sqrt{x^2 + x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{x(x - \sqrt{x^2 + x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{(x - \sqrt{x^2 + x})}$$

$$= \frac{-1}{0}$$

Supposons que  $x - \sqrt{x^2 + x} > 0$

$$x - \sqrt{x^2 + x} > 0 \implies \sqrt{x^2 + x} < x$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + x} < x &\implies \begin{cases} x^2 + x > 0 \\ x > 0 \\ x^2 + x < x^2 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} x^2 + x > 0 \\ x > 0 \\ x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + x = 0 \\ x = 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = -1 \\ x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

|           |           |      |     |           |
|-----------|-----------|------|-----|-----------|
| $x$       | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $+\infty$ |
| $x^2 + x$ |           | 0    | 0   | +         |
| $x$       |           |      | 0   | +         |
| $x$       |           |      | 0   | +         |

$$S = \emptyset$$

Ainsi, il n'existe pas de  $x > 0$  pour lequel  $x - \sqrt{x^2 + x} > 0$

**Donc**  $x - \sqrt{x^2 + x} < 0, \forall x \in ]0; +\infty[$

Ainsi  $\forall x \in ]0; +\infty[ f'(x) > 0$  donc  $f$  est croissant  $0; +\infty[$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{(x - \sqrt{x^2 + x})} \\ &= \frac{-1}{0^-} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

**Autre Méthode**

+++++

On calcule la dérivée à droite en 0 :

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sqrt{x^2 + x}}{x}.$$

On écrit :

$$\frac{x + \sqrt{x^2 + x}}{x} = 1 + \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x}.$$

Or,

$$\frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \sqrt{\frac{x^2 + x}{x^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}.$$

Lorsque  $x \rightarrow 0^+$ , on a  $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ , donc

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x}} \rightarrow +\infty.$$

Ainsi,

$$f'_+(0) = +\infty.$$

+++++

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$$

- Interprétons le résultat obtenu.

- $f$  est dérivable à gauche de 0 et  $y = 2x$  est une démi-tangent en  $0^-$  ;
- $f$  n'est pas dérivable à droite de 0 donc admet une démi-tangent orientée vers le haut en  $0^+$

Le point d'abscisse 0 est donc un point anguleux, ce qui explique la non-dérivabilité de  $f$  en 0.

- 4 Démontrons que :  $f(x) = -2 + \frac{3(\alpha - 2)}{\alpha^2 - 1}$ . (0,5pt)

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1} \implies f(x) = \frac{\alpha^3 - 2\alpha^2}{\alpha^2 - 1}$$

Comme  $g(\alpha) = 0$  alors  $-\alpha^3 + 3\alpha - 4 = 0$  donc  $\alpha^3 = 3\alpha - 4$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\alpha^3 - 2\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \implies f(\alpha) = \frac{\alpha^3 - 2\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \\ &\implies f(\alpha) = \frac{3\alpha - 4 - 2\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \\ &\implies f(\alpha) = -\frac{2\alpha^2 - 3\alpha + 4}{\alpha^2 - 1} \\ &\implies f(\alpha) = -\frac{2(\alpha^2 - 1) - 3(\alpha - 2)}{\alpha^2 - 1} \\ &\implies f(\alpha) = \frac{-2(\alpha^2 - 1) + 3(\alpha - 2)}{\alpha^2 - 1} \\ &\implies f(\alpha) = \frac{-2(\alpha^2 - 1)}{\alpha^2 - 1} + \frac{3(\alpha - 2)}{\alpha^2 - 1} \\ &\implies f(\alpha) = -2 + \frac{3(\alpha - 2)}{\alpha^2 - 1} \end{aligned}$$

- 5 a Montrons que  $\forall x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0[$ , on a :  $f'(x) = \frac{-xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$  puis étudier son signe

- Montrons que  $\forall x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0[$ , on a :  $f'(x) = \frac{-xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$  (0,5pt)

$$\text{On a : } f'(x) = \frac{-xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$$

La fonction  $f$  est dérivable sur  $] -\infty, -1[ \cup ] -1, 0[$  comme quotient de fonctions dérivables, avec  $x^2 - 1 \neq 0$  sur ces intervalles.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^3 - 2x^2)'(x^2 - 1) - (x^3 - 2x^2)(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{(3x^2 - 4x)(x^2 - 1) - (x^3 - 2x^2)(2x)}{(x^2 - 1)^2}. \\ &= \frac{3x^4 - 3x^2 - 4x^3 + 4x - (2x^4 - 4x^3)}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{x^4 - 3x^2 + 4x}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{-x(-x^3 + 3x - 4)}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{-xg(x)}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

Ainsi,  $\forall x \in ] -\infty, -1[ \cup ] -1, 0[$ ,  $f'(x) = \frac{-xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$ .

- le signe de  $f'(x)$  dépend du numérateur (0,5pt)

| $x$      | $-\infty$ | $\alpha$ | $-1$ | $0$ | $+\infty$ |
|----------|-----------|----------|------|-----|-----------|
| $-x$     | +         |          | +    | +   | 0         |
| $g(x)$   | +         | 0        | -    | -   |           |
| $-xg(x)$ | +         | 0        | -    | -   | 0         |

Ansí,

si  $x \in ]-\infty, \alpha]$ ,  $f'(x) \geq 0$  donc  $f$  est croissante sur  $]-\infty; \alpha]$

si  $x \in [\alpha, -1 \cup] -1, 0]$ ,  $f'(x) \leq 0$  donc  $f$  est croissante sur  $[\alpha, -1 \cup] -1, 0]$

b) Calculons  $f'(x)$  sur  $]0; +\infty[$  et étudions son signe.

- Calculons  $f'(x)$  sur  $]0; +\infty[$  (0,5pt)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x^2+x} + 2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x^2+x} + 2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} \end{aligned}$$

- étudions son signe (0,25pt)

Si  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2+x} + 2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$  le signe dépend du numérateur

Or  $2\sqrt{x^2+x} + 2x+1 > 0 \forall x \in ]0; +\infty[$

Ainsi  $\forall x \in ]0; +\infty[$   $f'(x) > 0$  donc  $f$  est croissant  $]0; +\infty[$

c) Dressons le tableau de variation de  $f$  sur  $D_f$ . (0,75pt)

| $x$     | $-\infty$ | $\alpha$    | $-1$      | $0$ | $+\infty$               |
|---------|-----------|-------------|-----------|-----|-------------------------|
| $f'(x)$ | +         | 0           | -         | -   | $-\infty \parallel 2 +$ |
| $f$     | $-\infty$ | $f(\alpha)$ | $+\infty$ | 0   | $+\infty$               |

6) Construisons soigneusement la courbe ( $C_f$ ). (0,75pt)

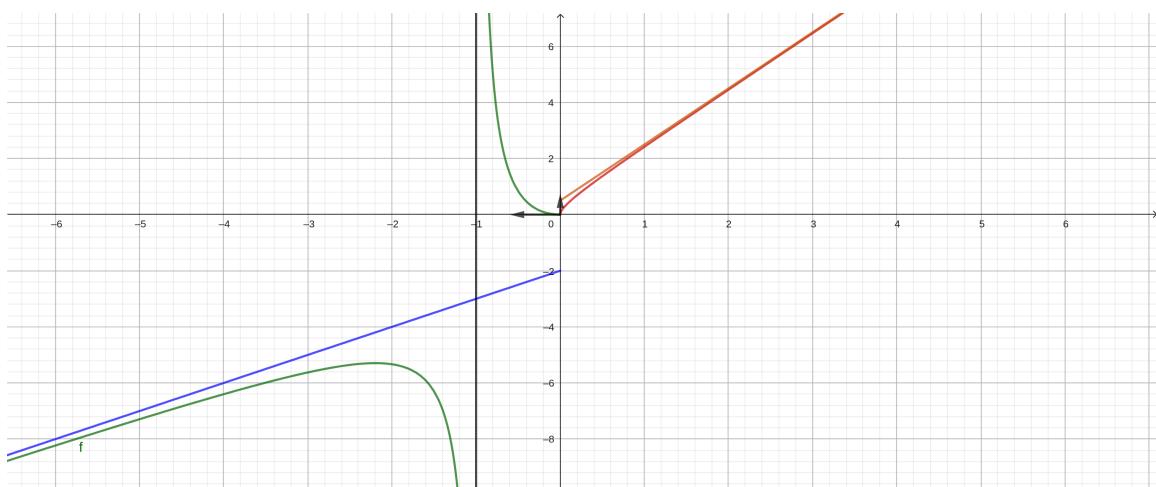


Figure 1: Courbe de ( $C_f$ )

[Clique ici pour voir la courbe sur géogébra](#)

### Partie C : Bijection (1,75pts)

Soit  $h$  la restriction de  $f$  sur  $I = ]0; +\infty[$ .

1 Montrons que  $h$  réalise une bijection de  $I$  vers un intervalle  $J$  à préciser. (0,25pt)

Sur  $I$   $h$  est continue et strictement croissante donc réalise une bijection de  $I$  vers  $J = [0, +\infty[$

Comme  $\forall x \in I, h'(x) \neq 0$  donc  $h^{-1}$  est dérivable sur  $J$

2 Calculons  $h^{-1}(1)$  et  $(h^{-1})'(\sqrt{2} + 1)$ . (0,5pt)

$$h(x) = x + \sqrt{x^2 + x}.$$

• Calcul de  $h(1)$

$$h(1) = \sqrt{2} + 1$$

$$\boxed{h(1) = \sqrt{2} + 1}$$

• Calcul de  $(h^{-1})'(\sqrt{2} + 1)$

$$(h^{-1})'(\sqrt{2} + 1) = \frac{1}{h'(h^{-1}(\sqrt{2} + 1))} \text{ Or } h(1) = \sqrt{2} + 1 \text{ donc } h^{-1}(\sqrt{2} + 1) = 1$$

$$\begin{aligned} (h^{-1})'(\sqrt{2} + 1) &= \frac{1}{h'(1)} \text{ comme } h'(x) = 1 + \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{2+1}{2\sqrt{1^2+1}}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{3}{2\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+3} \end{aligned}$$

$$\boxed{(h^{-1})'(\sqrt{2} + 1) = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+3}}$$

3 Explicitons  $h^{-1}(x)$ . (0,5pt)

$$\text{Soit } y = h(x) = x + \sqrt{x^2 + x}.$$

On isole la racine :

$$y - x = \sqrt{x^2 + x}.$$

En éllevant au carré, on obtient :

$$(y - x)^2 = x^2 + x.$$

$$y^2 - 2xy + x^2 = x^2 + x.$$

En simplifiant :

$$y^2 - 2xy = x.$$

On factorise par  $x$  :

$$y^2 = x(1 + 2y).$$

D'où :

$$h^{-1}(x) = \frac{x^2}{1+2x}$$

- 4 Construisons  $(C_{h^{-1}})$  dans le repère précédent. (0,5pt)

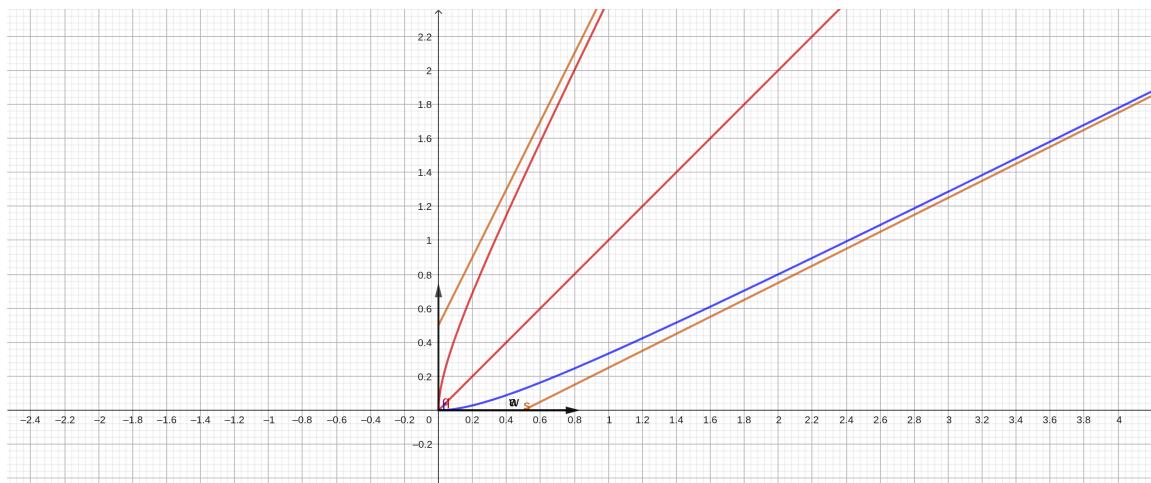


Figure 2: Courbe de  $(C_f)$

Clique ici pour voir la courbe sur géogébra

