◇◇◇ Lycée de Dindéfélo ◇◇◇			A.S. : 2024/2025
Matière: Mathématiques	Niveau : TS2	Date: 28/01/2025	Durée : 4 heures

Correction de la composition n° 1
Du 1er Semestre

Exercice 1 : $1,5$ points

1. Déterminons les racines cubiques de l'unité.

Résolvons pour cela $z^3 = 1$, $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 = 1 \Longrightarrow z^3 = e^{i(0+2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$z = e^{i\frac{(0+2k\pi)}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

- Pour $k = 0$, $z = e^{i0} = 1$, donc $z_0 = 1$.

- Pour $k = 1$, $z = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- Pour $k = 2$, $z = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi, l'ensemble des solutions est :

.

$$\boxed{S_{\mathbb{C}} = \left\{1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}}$$

2. Interprétation

- $\arg(z_B - z_A) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB})\ [2\pi]$

  Géométriquement, $\arg(z_B - z_A)$ est l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}})$ formé par le vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec l'axe réel du plan complexe $(O, \overrightarrow{OI})$.

- $\arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})\ [2\pi]$

  Géométriquement, $\arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_B - z_A}\right)$ est l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$ que forment les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

3. $f(x) = \sqrt{x}$, appliquons l'IAF

Appliquons l'IAF (Inégalité des Accroissements Finis) sur $[t, t+1]$.

Théorème des Inégalités des Accroissements Finis (TI-AF 1)
Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$.
Hypothèses :
$1)$, f est continue sur $[a, b]$.
$2)$, f est dérivable sur $]a, b[$.
$3)$, Il existe deux réels m et M tels que, pour tout $x \in]a, b[, m \leq f'(x) \leq M$.
Conclusion :
$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.
Théorème des Inégalités des Accroissements Finis (TI-AF 2)
Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$.
Hypothèses :
$1)$, f est continue sur $[a, b]$.
$2)$, f est dérivable sur $]a, b[$.
$3)$, Il existe un réel $m \geq 0$ tel que, pour tout $x \in]a, b[, |f'(x)| \leq m$.
Conclusion :
$|f(b) - f(a)| \leq m|b-a|$.

Applications $t > 0$

- f est continue sur $[t, t+1]$.
- f est dérivable sur $]t, t+1[$ et pour tout,

$$\forall x \in]t, t+1[, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Comme $x \in]t, t+1[$, alors $t < x < t+1$. Ainsi,

$$\frac{1}{2\sqrt{t+1}} < \frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

D'où :

$$\frac{1}{2\sqrt{t+1}} < f'(x) < \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis (IAF), nous avons :

$$\frac{1}{2\sqrt{t+1}}(t+1-t) < f(t+1) - f(t) < \frac{1}{2\sqrt{t}}(t+1-t).$$

Cela donne :

$$\frac{1}{2\sqrt{t+1}} < f(t+1) - f(t) < \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

Exercice 2 : 8,5 points

Partie A

1 Montrons que P admet une unique racine réelle.
Soit $z_0 = a \in \mathbb{R}$ tel que $P(z_0) = 0$.

$$P(z) = z^3 + (-5+2i)z^2 + (7-7i)z - 2 + 6i$$

$$P(z_0) = 0 \implies a^3 + (-5+2i)a^2 + (7-7i)a - 2 + 6i = 0$$

$$\implies a^3 - 5a^2 + 7a - 2 + i\big(2a^2 - 7a + 6\big) = 0$$

En séparant les parties réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} a^3 - 5a^2 + 7a - 2 = 0 & (1) \\ 2a^2 - 7a + 6 = 0 & (2) \end{cases}$$

L'équation (2) est plus facile à résoudre.

Résolution de (2)

$$2a^2 - 7a + 6 = 0$$

Calculons le discriminant :

$$\Delta = 7^2 - 4 \times 2 \times 6 = 49 - 48 = 1.$$

Les solutions sont :

$$a_1 = \frac{-(-7) - \sqrt{\Delta}}{2 \times 2} = \frac{7-1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2},$$
$$a_2 = \frac{-(-7) + \sqrt{\Delta}}{2 \times 2} = \frac{7+1}{4} = \frac{8}{4} = 2.$$

La racine de (2) qui vérifie (1) est la racine de $P(z)$.

Vérification pour $a = \frac{3}{2}$

Substituons $a = \frac{3}{2}$ dans (1) :

$$\begin{aligned} a^3 - 5a^2 + 7a - 2 &= \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 5\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{3}{2}\right) - 2 \\ &= \frac{27}{8} - 5 \times \frac{9}{4} + \frac{21}{2} - 2 \\ &= \frac{27}{8} - \frac{45}{8} + \frac{84}{8} - \frac{16}{8} \\ &= \frac{27 - 45 + 84 - 16}{8} \\ &= \frac{111 - 106}{8} = \frac{5}{8} \neq 0 \end{aligned}$$

Donc, $a = \frac{3}{2}$ n'est pas solution.

Vérification pour $a = 2$

Substituons $a = 2$ dans (1) :

$$\begin{aligned} a^3 - 5a^2 + 7a - 2 &= 2^3 - 5(2^2) + 7(2) - 2 \\ &= 8 - 20 + 14 - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc, $a = 2$ est une solution.

$$\boxed{z_0 = 2.}$$

2 Factorisons $P(z)$

Utilisons la méthode de la division synthétique pour factoriser $P(z)$. Le tableau est donné ci-dessous :

	1	$-5+2i$	$7-7i$	$2+6i$
2	$\downarrow$	2	$-6+i$	$2-6i$
	1	$-3+2i$	$1-3i$	0

Ainsi, nous avons :

$$\boxed{P(z) = (z-2)\big(z^2 + (-3+2i)z + 1 - 3i\big)}$$

3 Résolvons $P(z) = 0$

$$P(z) = 0 \implies z = 2 \quad \text{ou} \quad z^2 + (-3+2i)z + 1 - 3i = 0.$$

$$\begin{aligned}\Delta &= (-3+2i)^2 - 4(1)(1-3i)\\ &= 9 - 12i - 4 - 4 + 12i\\ &= 1\end{aligned}$$

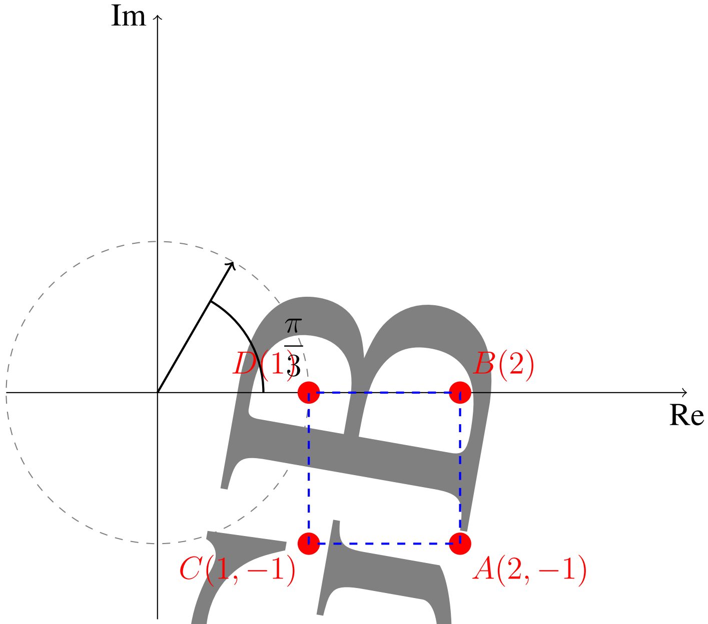
$$z_1 = \frac{-(-3+2i)-1}{2}, z_2 = \frac{-(-3+2i)+1}{2}$$
$$z_1 = \frac{3-2i-1}{2}, z_2 = \frac{3-2i+1}{2}$$

$$z_1 = \frac{2-2i}{2}, z_2 = \frac{4-2i}{2}$$

$$\boxed{S = \{2, 2-i, 1-i\}}$$

Partie B

1 Représentation



② Écriture exponentielle de z_C et z_E

Pour z_C :

$$\begin{aligned} z_C &= 1 - i \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

$$\boxed{z_C = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

Pour z_E :

$$\begin{aligned} z_E &= 1 + i\sqrt{3} \\ &= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= 2e^{i\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{z_E = 2e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

③ Plaçons exactement le point E

$$z_E = 2e^{i\pi/3}.$$

4 Écriture algébrique de z_E^8

$$\begin{aligned}
z_E = 2e^{i\pi/3} &\implies z_E^8 = 2^8 e^{8i\pi/3} \\
&\implies z_E^8 = 2^8\left[\cos\left(\frac{2\times 3\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\times 3\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)\right] \\
&\implies z_E^8 = \left[\cos\left(2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\right] \\
&\implies z_E^8 = 2^8\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{zz_E^8 = 2^8\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

5 Calculons les affixes de I et J

On a : $I = \text{bar}\{(A,1);(C,-2)\}$

$$\begin{aligned}
I = \text{bar}\{(A,1);(C,-2)\} &\implies \overrightarrow{AI} = \frac{-2}{1-2}\overrightarrow{AC} \\
&\implies \overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AC} \\
&\implies Z_I - Z_A = 2(Z_C - Z_A) \\
&\implies Z_I - Z_A = 2Z_C - 2Z_A \\
&\implies Z_I = 2Z_C - Z_A \\
&\implies Z_I = 2(1-i)-(2-i) \\
&\implies Z_I = 2-2i-2+i \\
&\implies Z_I = -i.
\end{aligned}$$

$$\boxed{Z_I = -i}$$

On a: $J = \text{bar}\{(A,1);(C,2)\}$

$$\begin{aligned}
\text{Donc } J = \text{bar}\{(A,1);(C,2)\} &\implies \overrightarrow{AJ} = \frac{2}{1+2}\overrightarrow{AC} \\
&\implies Z_J - Z_A = \frac{2}{3}Z_C - \frac{2}{3}Z_A \\
&\implies Z_J = \frac{2}{3}Z_C + \frac{1}{3}Z_A \\
&\implies Z_J = \frac{2}{3}(1-i)+\frac{1}{3}(2-i) \\
&\implies Z_J = \frac{2}{3}+\frac{2}{3}(-i)+\frac{2}{3}-\frac{i}{3} \\
&\implies Z_J = \frac{4}{3}-i
\end{aligned}$$

$$\boxed{Z_J = \frac{4}{3}-i}$$

6 Donner un module et un argument de $\dfrac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$

$$\begin{aligned}\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} &= \frac{2-(2-i)}{1-i-(2-i)}\\ &= \frac{i}{-1}\\ &= i\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = i}$$

Module

$$\left|\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}\right| = |i| = 1$$

$$\boxed{\left|\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}\right| = |i| = 1}$$

Un Argument

$$\arg\left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\arg\left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}\right) = \frac{\pi}{2}}$$

7 Nature de ABC

$$\begin{cases}\left|\dfrac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}\right| = 1\\ \arg\left(\dfrac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2}\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}AB = AC\\ \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

Donc ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.

8 Montrons que A, B, C, D sont cocycliques

On a :

$$BD = |Z_D - Z_B| = |1-2| = 1$$

$$DC = |Z_C - Z_D| = |i - i - 1| = 1$$

Conclusion

$$\text{donc } AB = AC = BD = DC \quad \text{et} \quad (\widehat{AC, AB}) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{donc } ABDC \text{ est un carré, donc il est inscrit dans un cercle } \mathcal{C}\left(\frac{z_A + z_D}{2}, \frac{|z_A - z_D|}{2}\right).$$

Tel que les sommets de $ABCD$ appartiennent à $\mathcal{C}$.

$$\begin{aligned}
\frac{z_A + z_D}{2} &= \frac{2 - i + 1}{2} \\
&= \frac{3 - i}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{|z_A - z_D|}{2} &= \frac{|2 - i - 1|}{2} \\
&= \frac{|1 - i|}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{C}\left(\left(\frac{3 - i}{2}\right), \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$\boxed{\mathcal{C}\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

9 Forme exponentielle de Z et Écriture algébrique Z

a Forme exponentielle de Z

$$Z = \frac{Z_E}{Z_C}$$

$$\begin{cases} Z_E = 2e^{i\pi/3} \\ Z_C = \sqrt{2}e^{-i\pi/4} \end{cases} \iff Z = \frac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}$$

$$\iff Z = \sqrt{2}e^{i(\pi/3 + \pi/4)}$$

$$\iff Z = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

$$\boxed{Z = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}}$$

b Les valeurs de $\cos \dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{7\pi}{12}$

Écriture algébrique de Z

$$Z = \frac{Z_E}{Z_C} \iff Z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$$
$$= \frac{(1+i\sqrt{3})(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$
$$= \frac{(1+i\sqrt{3})(1+i)}{2}$$
$$= \frac{1+\sqrt{3}i+i-\sqrt{3}}{2}$$
$$Z = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$Z = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$
$$Z = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right].$$

Par identification : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}}, \quad \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}}.$

D'où : $\boxed{\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}, \quad \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$

Partie C

Soit f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P} \setminus \{c(1-i)\} &\to \mathbb{P} \\ Z &\mapsto \frac{Z-2i}{Z-1+i} \end{aligned}$$

1 Expression de OM' en fonction de MA et MC On a :

$$Z' = \frac{Z-2i}{Z-1+i}.$$

$$Z' = \frac{Z-(2+i)}{Z-(1+i)}.$$

$$Z' = \frac{Z_M - Z_A}{Z_M - Z_C}.$$

$$|Z'_M| = \left|\frac{Z_M - Z_A}{Z_M - Z_C}\right|.$$

$$OM' = \frac{MA}{MC}.$$

$$\boxed{OM' = \frac{MA}{MC}}$$

2. Une interprétation géométrique de $\arg(Z')$

$\arg(Z') = \arg\left(\frac{Z_M - Z_A}{Z_M - Z_C}\right) = \left(\overrightarrow{CM};\overrightarrow{AM}\right) = \left(\overrightarrow{MC};\overrightarrow{MA}\right)$

Géométriquement, $\arg(Z')$ représente l'angle orienté entre les vecteurs $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MA}$.

3. L'ensemble des points M pour Z' soit un réel non nul.

$$Z' = \frac{Z_M - Z_A}{Z_M - Z_C}.$$

Pour que Z' soit un réel non nul, deux conditions doivent être satisfaites :

a. $Z_M \neq Z_A$, car le numérateur ne doit pas être nul.

b. $Z_M \neq Z_C$, car le dénominateur ne doit pas être nul.

Ensuite, pour que Z' soit un réel, l'argument de $\frac{Z_M - Z_A}{Z_M - Z_C}$ doit être nul ou un multiple de π,

$\arg(Z') = \arg\left(\frac{Z_M - Z_A}{Z_M - Z_C}\right) = 0[\pi]$, ce qui implique que les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

En termes géométriques, cela signifie que M appartient à la droite passant par A et C, à l'exclusion des points A et C.

L'ensemble des points M est donc donné par :

$$\mathcal{D} = \{M \in \mathbb{C} \mid M \in \text{droite}(A, C) \setminus \{A, C\}\}.$$

4. Donner et construire l'ensemble des points M tel que $|Z'| = 2$

$$|Z'_M| = \left|\frac{Z_M - Z_A}{Z_M - Z_C}\right| = OM = \frac{MA}{MC}.$$

$$\begin{aligned} MA = 2MC &\implies (MA)^2 = (2MC)^2 \\ &\implies (MA)^2 - (2MC)^2 = 0 \\ &\implies (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC}) = 0 \end{aligned}$$

Or $I = \text{bar}\{(A, 1); (C, -2)\}$ et $J = \text{bar}\{(A, 1); (C, 2)\}$

$$\begin{aligned} &\implies (1-2)\overrightarrow{MI}.(2+1)\overrightarrow{MJ} = 0 \\ &\implies -3\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0 \\ &\implies \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0 \end{aligned}$$

M décrit donc un cercle de centre $\frac{z_I + z_J}{2}$ et de rayon $\frac{|z_I - z_J|}{2}$

$\frac{z_I + z_J}{2} = \frac{-i + \left(\frac{4}{3} - i\right)}{2}$ et $\frac{|z_I - z_J|}{2} = \frac{|-i - \left(\frac{4}{3} - i\right)|}{2}$

$\frac{z_I + z_J}{2} = \frac{\left(\frac{4}{3} - 2i\right)}{2}$ et $\frac{|z_I - z_J|}{2} = \frac{|-\frac{4}{3}|}{2}$

$\frac{z_I + z_J}{2} = \frac{\left(\frac{4-6i}{3}\right)}{2}$ et $\frac{|z_I - z_J|}{2} = \frac{4}{6}$

$\frac{z_I + z_J}{2} = \frac{4 - 6i}{6}$ et $\frac{|z_I - z_J|}{2} = \frac{4}{6}$

$$\frac{z_I + z_J}{2} = \frac{2-3i}{3} \text{ et } \frac{|z_I - z_J|}{2} = \frac{4}{6}$$
$$\frac{z_I + z_J}{2} = \frac{2}{3} - i \text{ et } \frac{|z_I - z_J|}{2} = \frac{4}{6}$$

Finalement : $\boxed{\mathcal{C}\left(\left(\frac{2}{3} - i\right); \frac{4}{6}\right)}$

$$\boxed{\mathcal{C}\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{4}{6}\right)}$$

<u>Problème :</u> 10 points

Partie A

1 a Montrons que $\forall x > -3,\ u(x) = 2 - \dfrac{2}{x+3}$.

On a $u(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{2x+6-2}{x+3} \\ &= \frac{2(x+3)-2}{x+3} \\ &= 2 - \frac{2}{x+3} \end{aligned}$$

b Limites de u aux bornes de $]-3, +\infty[$:

En -3^+ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -3^+} u(x) &= \lim_{x \to -3^+} \left(2 - \frac{2}{x+3}\right) \\ &= 2 - \lim_{x \to -3^+} \frac{2}{x+3} \\ &= 2 - \frac{2}{0^+} \\ &= 2 - (+\infty) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x \to -3^+} u(x) = +\infty$

En $+\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} u(x) &= \lim_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{2}{x+3}\right)\\ &= 2 - \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x+3}\\ &= 2 - 0\\ &= 2\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \to +\infty} u(x) = 2$$

c **La primitive G de u telle que $G(-2) = 0$:**

$$u(x) = 2 - \frac{2}{x+3} \quad \text{donc} \quad G(x) = 2x - 2\ln(x+3) + k, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned}G(-2) &= 2(-2) - 2\ln(-2+3) + k\\ &= -4 - 2\ln(1) + k\\ &= -4 + k.\end{aligned}$$

Or $G(-2) = 0$:

$$-4 + k = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = 4.$$

Donc :

$$G(x) = 2x - 2\ln(x+3) + 4.$$

2 a **Calcul de $u(-2)$:**

$$u(-2) = 2 - \frac{2}{-2+3} \Longrightarrow u(-2) = 2 - 2 \Longrightarrow u(-2) = 0.$$

Donc $u(-2) = 0$.

Tableau de variation de G
G est la primitive de u sur $]-3, +\infty[$, donc :$G'(x) = u(x), \ \forall x \in]-3, +\infty[$.
Étude du signe de $u(x)$ sur $]-3, +\infty[$:

x	$-\infty$	-3	-2	$+\infty$
$\frac{2x+1}{x+3}$		‖ $-$	$+$	

- $\forall x \in]-3, -2[, u(x) < 0$ donc G est décroissante.
- $\forall x \in]-2, +\infty[, u(x) > 0$ donc G est croissante.

Limites aux bornes de $D_G =]-3, +\infty[$:
En -3^+ :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to -3^+} G(x) &= \lim_{x \to -3^+} (2x - 2\ln(x+3) + 4)\\ &= 2(-3) - 2\ln(0^+) + 4\\ &= -6 - 2(-\infty) + 4\\ &= +\infty\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \to -3^+} G(x) = +\infty$$

En $+\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} G(x) &= \lim_{x \to +\infty} (2x - 2\ln(x+3) + 4) \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x+3} - \lim_{x \to +\infty} \frac{2\ln(x+3)}{x+3} + \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x+3} \\
&= 2 - 0 + 0 \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \to +\infty} G(x) = 2$$

x	-3		-2		$+\infty$
u		$-$	0	$+$	
G	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2

3 Le signe de G.

$\forall x \in]-3; +\infty[$

Partie B

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x} & \text{si } x \leq -2, \\ \ln\left(\dfrac{2x+1}{x+3}\right) & \text{si } x > -2. \end{cases}$$

1 Le domaine $\mathcal{D}_f$

$$\text{Posons } f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x \leq -2, \\ f_2(x), & \text{si } x > -2. \end{cases}$$

- $f_1 \quad \exists \quad$ ssi $x^2 + 2x \geq 0$ et $x \leq 0$.
  Posons $x^2 + 2x = 0$
  $x^2 + 2x = 0 \implies x(x+2) = 0 \implies x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -2$.

x	$-\infty$		-2
$x^2 + 2x$		$+$	0

  $\underline{\mathcal{D}f_1 =]-\infty, -2]}$

- $f_2 \quad \exists \quad$ ssi $\dfrac{2x+1}{x+3} > 0$ et $x > -2$
  D'après la Partie A, $u(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$
  et que $\forall x \in]-2, +\infty[$, $u(x) > 0$.
  donc $\mathcal{D}_{f_2} =]-2, +\infty[\cap]-\infty, -2[$.
  $\underline{\mathcal{D}_{f_2} =]-2, +\infty[}$.

Finalement, $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f_1} \cup \mathcal{D}_{f_2}$.
Ainsi, $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}}$.

Les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$

Les bornes sont $-\infty$ et $+\infty$.

En $-\infty$: $f(x) = f_1(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x} = +\infty.$$

$$\text{Donc } \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

En $+\infty$: $f(x) = f_2(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2x+1}{x+3}\right).$$

$$\text{Donc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln(2).$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln(2)$ donc $(D): \quad y = \ln(2)$ est une asymptote horizontale

2 a La continuité de f en -2

En -2^- : $f(x) = f_1(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2^-} f(x) &= \lim_{x\to2^-} \sqrt{x^2+2x}\\ &= 0\end{aligned}$$

En -2^+ : $f(x) = f_2(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2^+} f(x) &= \lim_{x\to-2^+} \ln\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)\\ &= \ln(0^+)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

Finalement, $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$ **donc** f **n'est pas continue en** $x = -2$.

Dérivabilité en $x = 2$

f n'est pas continue en $x = -2$, donc f n'est pas dérivable en $x = -2$.

b Montrons que $(\Delta) : y = -x - 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})_f$ en $-\infty$

Pour ce faire, montrons que $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - y] = 0$

En effet,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x)-y &= \lim_{x\to-\infty} f(x)-(-x-1)\\
&= \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x}-(-x-1)\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x-x^2-2x-1}{\sqrt{x^2+2x}-(x+1)}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2+2x}-(x+1)}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}}-(x+1)}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{-x\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+\frac{1}{x})\right]}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+\frac{1}{x})\right]}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2x}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc, $\lim_{x\to-\infty} [f(x)-y]=0$

Finalement, (Δ) est asymptote à (φ) en $-\infty$.

3 a Montrons que $f'(x)=\dfrac{2}{(x+3)(2x+1)}$ pour $x>-2$

<u>Pour $x>-2$, on a : $f(x)=\ln\left(\dfrac{2x+1}{x+3}\right)$</u>

Calculons la dérivée :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(2x+4)'}{(2x+4)}-\frac{(x+3)'}{(x+3)}\\
&= \frac{2}{2x+4}-\frac{1}{x+3}\\
&= \frac{2(x+3)-(2x+4)}{(2x+4)(x+3)}\\
&= \frac{2x+6-2x-4}{(2x+4)(x+3)}\\
&= \frac{2}{(2x+4)(x+3)}
\end{aligned}$$

Donc, $f'(x)=\dfrac{2}{(x+3)(2x+4)}$

Le signe de f'

Le signe de f' dépend du dénominateur :

$$\forall x>-2,\quad 2x+1>0 \quad \text{et} \quad x+3>0$$

Donc, pour que le produit $(x+3)(2x+4)>0$.

Ainsi, $\forall x\in]-2,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{2}{(x+3)(2x+4)}>0$

Pour $x \leq -2$, on a : $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$

Si $x \leq -2$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$

$$f'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}}$$
$$= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$$

Donc $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$

Le signe de f' dépend du numérateur $x+1$

Donc $\forall x \in]-\infty; -2]$, donc $x+1 < -1 < 0$

Donc $\forall x \in]-\infty; -2]$, donc $f'(x) < 0$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\Vert$	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow 0$	$\Vert$	$-\infty \nearrow \ln(2)$

4 a Déterminons les intersections de A et B de $\mathcal{C}_f$ avec (Ox) et (Oy) respectivement.

$(\mathcal{C}_f)$ avec (Ox)

Pour ce faire résolvons de $f(x) = 0$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+2x} = 0 \\ \ln\left(\dfrac{2x+4}{x+3}\right) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2+2x = 0 \\ \dfrac{2x+4}{x+3} = 1 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = -2 \text{ si } x \leq -2 \\ x = -1 \text{ si } x > -2 \end{cases}$$

$A_{-1}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A_{-2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

($\mathcal{C}_f$) avec (Oy)

Pour ce faire calculons de $f(0)$

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x+4}{x+3}\right)$$

$$f(0) = \ln\left(\frac{2\times 0+4}{0+3}\right)$$

donc $f(0) = \ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$

$B\begin{pmatrix} 0 \\ \ln\left(\dfrac{4}{3}\right) \end{pmatrix}$

b Equation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ en $A\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(T): $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$

Or $f'(-1) = \dfrac{2}{(-1+3)(-2+4)}$ donc $f'(-1) = \dfrac{1}{2}$
et $f(-1) = 0$
(T): $y = \dfrac{1}{2} \times (x+1)$
(T): $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

c La courbe

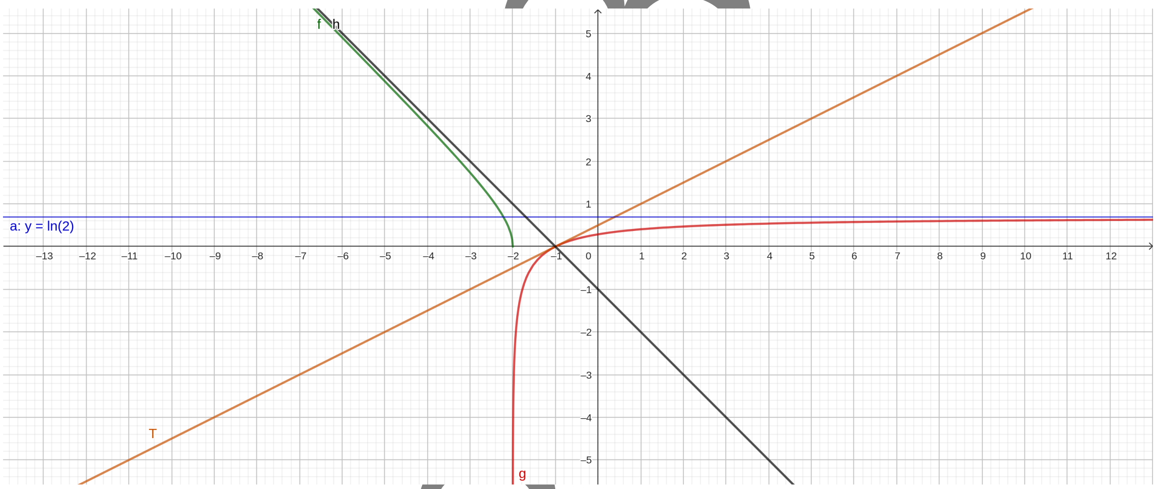


Figure 1: Courbe de (Cf)

Clique ici pour voir la courbe sur géogébra

Partie C

Soit h la restriction de f à $I =]-\infty; -2[$

1. Montrer que h est une bijection de I vers un intervalle I à préciser.
   h est continue et strictement décroissante sur I donc réalise une bijection de I vers $f(I) = J$
   avec $J = [0; +\infty[$

2. **a** h^{-1} est-elle dérivable sur J ?
   Comme h étant dérivable sur I et que $\forall x \in I, h'(x) \neq 0$ donc h^{-1} est dérivable sur J.
   Ainsi, h^{-1} est bien dérivable sur J.

$$\begin{aligned} h :]-\infty; -2[&\to]0; +\infty[\\ x &\mapsto h(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h^{-1} :]0; +\infty[&\to]-\infty; -2[\\ y &\mapsto h^{-1}(y) \end{aligned}$$

   b Dressons le tableau de h^{-1}

x	0 $\quad$ $+\infty$
$h^{-1}(x)$	$-$ ‖
h	-2 ↘ $-\infty$

Calculons $h(-3)$ **et** $(h^{-1})'(\sqrt{3})$

$h(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$

Pour $h(-3)$:

$$\begin{aligned} h(-3) &= \sqrt{(-3)^2 + 2(-3)} \\ &= \sqrt{9-6} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{h(-3) = \sqrt{3}}$

Pour $(h^{-1})'(\sqrt{3})$:

$$\text{On a : } (h^{-1})'(y) = \frac{1}{h'(h^{-1}(y))} \text{donc } (h^{-1})'(\sqrt{3}) = \frac{1}{h'(h^{-1}(\sqrt{3}))}$$

Calcul de $h^{-1}(\sqrt{3})$:

On sait que $h(-3) = \sqrt{3}$, donc $h^{-1}(\sqrt{3}) = -3$

Donc $(h^{-1})'(\sqrt{3}) = \dfrac{1}{h'(h^{-1}(\sqrt{3}))}$ devient $(h^{-1})'(\sqrt{3}) = \dfrac{1}{h'(-3)}$

Calcul de $h'(-3)$:

$$\begin{aligned} h'(-3) &= \frac{-3+1}{\sqrt{(-3)^2 + 2(-3)}} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{9-6}} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{3}} \\ &= -\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Calcul de $(h^{-1})'(\sqrt{3})$

$$(h^{-1})'(\sqrt{3}) = \frac{1}{h'(-3)} \quad = \frac{1}{-\frac{2\sqrt{3}}{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{3}} \quad = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{(h^{-1})'(\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

c Explicitons $(h^{-1})'(x)$

$$\begin{aligned} h^{-1} :]0; +\infty[&\to]-\infty; -2[\\ x &\mapsto h^{-1}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= y \\ \sqrt{x^2+2x} &= y \\ x^2+2x &= y^2 \\ x^2+2x-y^2 &= 0 \end{aligned}$$

Résolvons l'équation $x^2+2x-y^2=0$ en x
$\Delta = 2^2 - 4(1)(-y^2)$
$\quad = 4 + 4y^2$
$x = \dfrac{-2-\sqrt{4+4y^2}}{2}$ ou $x = \dfrac{-2+\sqrt{4+4y^2}}{2}$
Puisque $\forall x \in]0;+\infty[$, $h^{-1}(x) < 0$, nous devons choisir la solution qui respecte cette condition.
On en déduit que :

$$\boxed{h^{-1}(x) = -1-\sqrt{1+x^2}}$$