

TD : Calcul dans \mathbb{R}

Exercice 1 Effectuez les calculs suivants :

- 1 $(a + b)(x - y) - (a - b)(x + y) - b(x - y)$
- 2 $x(a - by) - y(b - ax) - xy(x - y)$
- 3 $4 \left[\frac{1}{10}(5(2a + 3) + 5) - a + 7 \right]$
- 4 $3[5(x - a) - 2(b - y)] - 6(a - b) + 15(x + y)$
- 5 $x - y - [z - y - (t - x)] - [y + t - (x + z)] - [x - (y - z + t)]$

Exercice 2 Développer à l'aide des égalités remarquables.

- 1 $(a^2b + c)^2$
- 2 $\left(\frac{2a}{3} + \frac{b}{4} \right)^2$
- 3 $\left(\frac{a^2}{2} - b \right)^3$
- 4 $\left(-\frac{1}{4} \right) \left[5 \left\{ \frac{9}{10} - \frac{3}{20} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \right\} - \left(\frac{2}{3} + 5 - \frac{1}{7} \right) \right]$

Exercice 3 Factoriser les expressions suivantes :

- 1 $a^2xy + aby^2 + b^2xy + abx^2$
- 2 $3a^2 + 3b^2 - 12c^2 - 6ab$
- 3 $y^2 - x^2 + 2x - 1$
- 4 $a^2b^2 - 1 + a^2 - b^2$
- 5 $(ab - 1)^2 - (a - b)^2$
- 6 $(2a^2 - 3a - 5)^2 - (2a^2 + 3a + 4)^2$
- 7 $8 + 36ab^2 + 54a^2b + 27ab$
- 8 $a + 8 - 2a^2 + 4aab$
- 9 $(a + b)^2 - (c + d)^2 + (a + c)^2 - (b + d)^2$
- 10 $ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) + 2abc$

Exercice 4 Démontrer que $(a, b, c, x, y \in \mathbb{R})$

- 1 $(ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$

- 2 $(ax + by)^2 - (ay + bx)^2 = (a^2 - b^2)(x^2 - y^2)$
- 3 $(a + b + c)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a) = a^3 + b^3 + c^3$
- 4 $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = a^3 + b^3 + c^3$
- 5 $(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = (aa' + bb')^2 + (ab' - ba')^2$
- 6 $(a + b + c)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$

Exercice 5

- 1 Écrire sous la forme $2^m \times 3^n \times 5^p$ (avec m, n, p des entiers relatifs) les réels suivants :

$$A = \frac{(0,009)^{-3} \times (0,016)^2 \times 250}{(0,00075)^{-1} \times 810^3 \times 30} ; \quad B = \frac{(-6)^4 \times 30^{-2} \times (-10)^{-3} \times 15^4}{(-25)^2 \times (36)^{-5} \times (-12)^3}$$

- 2 Écrire sous la forme $a^m b^n c^p$ (avec m, n, p entiers relatifs)

$$Q = \frac{(a^2 b)^{-3} \times (b c^3) \times (a^{-2} b^5)^3}{(b^2 c^2 a)^{-4} \times (a^{-1} b^6)^2} ; \quad R = \frac{(a^{-2} c)^{-4} \times (-b^2 c)^5 \times (a^3 b c^{-1})^{-2}}{(-a^2 b^{-3} c)^3 \times (-b^4) \times (a^{-5} c)^2}$$

- 3 Calculer $AB, A^2 B^2, A^3 B^4$ où $A = -\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \times 3^2$ et $B = \left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} \times 5$

Exercice 6 Simplifier les expressions suivantes :

1

$$A = \frac{(-a)^7 \times (b^3 c^2)^4}{-b^3 c (-a)^4} ; \quad B = \frac{91^{-1} \times (-39)^3 \times 25}{26^2 \times 45 \times (-21)^{-2} \times 72} ; \quad C = \frac{(28 \times 12^{-2})^3 \times 105^{-3}}{7^{-2} \times (-60)^{-4} \times 63^4} \div \left(\frac{5}{3}\right)^5$$

2

$$D = \frac{\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]^6 \times \left[\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}\right]^3 \times \left[\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]^{-3}}{\left(-\frac{4}{9}\right)^6} ; \quad E = \frac{(a^2 b^3 c)^2 \times a^3 c}{(ab)^4 (c^2 a)^2 bc}$$

Exercice 7 m et n étant deux entiers positifs ou nuls, donner les différentes valeurs possibles de l'expression :

$$f(m, n) = \frac{5(-1)^m \times 7(-1)^{n+1} + 8(-1)^{m+n}}{2(-1)^{m+n}}$$

Exercice 8 Factoriser les expressions suivantes :

- 1 $(4a^2 + b^2 - 9)^2 - 16a^2 b^2$
- 2 $(a^2 + b^2 - 5)^2 - 4(ab + 2)^2$
- 3 $(a^2 + b^2 - 9)^2 - 4a^2 b^2$
- 4 $(ax + by)^2 - (ay + bx)^2$
- 5 $(ax + by)^2 + (ay - bx)^2$
- 6 $(9x^2 - 12x + 4) + (x - 3)^2 - (2x + 1)^2$
- 7 $a^4 - b^4 + 2ab(a^2 - b^2) - (a^3 - b^3) + ab^2 - a^2 b$
- 8 $(x + y)^3 - x^3 - y^3$

9 $a^5 + b^5 - ab^4 - a^4b$

10 $25a^4 - (9b^2 - 4a^2)^2$

11 $(a^2 + ab + b^2)^2 - (a^2 - ab + b^2)^2$

Exercice 9 Factoriser les expressions suivantes :

1 $A = xy - xy^2 + yz^2 - xz^2 + x^2z - xyz + y^2z - xyz$ (on trouvera trois facteurs)

2 $B = (xy^2z^3)^2 \times (8y^5z^4) \times (x^8y^5z)^2 \times (xyz)^2$ (on exprimera B sous forme de puissance d'un seul réel)

3 $C = 25[4x^3(y^2z)^2]^2 - 2[10x^2(yz)^3]^2 - [10(xyz)^2]^2$

Exercice 10 Soit a, b, c trois réels non nul tels que $ab + bc + ca = 0$

Calculer la somme $S = \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$

Exercice 11

1 Développer $(a + b + c)^2$.

2 Montrer que si $a + b + c = 0$ alors $a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca)$.

3 On suppose a, b et c sont non nuls.

Montrer que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \implies (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Exercice 12 Soit a, b, c trois réels :

1 Développer $(a + b + c)(ab + bc + ca)$ puis $(a + b + c)^3$

2 Démontrer que si $a + b + c = 0$ alors $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

3 En déduire que, pour tous réel x, y, z on a :

$$(x - y)^3 - (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3(x - y)(y - z)(z - x)$$

Exercice 13

Soit a, b, c trois réels non nul tels que $ab + bc + ca = 0$

Calculer la somme $S = \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$

Exercice 14 Soient 4 entiers naturels consécutifs $n, n + 1, n + 2, n + 3, (n > 0)$

1 a Démontrer que $(n + 1)(n + 2) = n(n + 3) + 2$

b On pose $(n + 1)(n + 2) = a$. Exprimer en fonction de a le produit $p = n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$

c En déduire que $p + 1$ est le carré d'un entier (on dit carré parfait)

2 Déterminer n sachant que $p = 5040$.

Exercice 15

a) Calculer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $A = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

b) Calculer $B = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right)$

c) Calculer en fonction de n : $X_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

Exercice 16

Simplifier les expressions suivantes (on suppose que tous les dénominateurs sont non nuls).

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{(a+b)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{2}{(a+b)^3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \\
 B &= \left[\frac{(x^2 + y^2)a + (x^2 - y^2)b}{2xy} \right]^2 - \left[\frac{(x^2 - y^2)a + (x^2 + y^2)b}{2xy} \right]^2 \\
 C &= \frac{\frac{x+y}{1-xy} - \frac{x-y}{1+xy}}{1 - \frac{x^2-y^2}{1-x^2y^2}} \\
 D &= \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}} \times \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{a+c}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a+c}} \\
 E &= \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}} \div \frac{a+b+c}{a-b-c} \\
 F &= \frac{x^2 - yz + xy - xz}{x^2 + yz - xy - xz} \\
 G &= \frac{\frac{x+t}{x-t} - \frac{x-t}{x+t}}{\frac{1}{(x+t)^2} + \frac{1}{(x-t)^2}} \\
 H &= \frac{1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{1 + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}} \\
 I &= \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \div \frac{a^2 - b^2}{(a+b)^2} \\
 J &= \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \times \frac{a^2 - b^2}{a^3 - b^3}
 \end{aligned}$$

Exercice 17

On donne les expressions : $A = \frac{x}{t+z}$; $B = \frac{t}{z+x}$; $C = \frac{z}{x+t}$

Calculer les expressions : $X = \frac{x^2}{A(1-BC)}$; $Y = \frac{t^2}{B(1-CA)}$; $Z = \frac{t^2}{C(1-AB)}$

Exercice 18

On donne les expressions : $A = \frac{1}{1 + \frac{a}{b+c}}$; $B = \frac{1}{1 + \frac{b}{c+a}}$; $C = \frac{1}{1 + \frac{c}{a+b}}$

Calculer la somme $A + B + C$

Exercice 19

Vérifier les identités suivantes :

$$a) (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 1 + \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$$

$$b) \frac{x^2}{(x-t)(x-z)} + \frac{t^2}{(t-z)(t-x)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-t)} = 1$$

Exercice 20

$$a) \text{ Calculer } A = (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

$$b) \text{ Démontrer que : } (a+b+c=0) \implies [(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 4(ab + bc + ca)^2]$$

Exercice 21

a, b et c étant trois réels non nuls, simplifier l'expression :

$$A = \frac{a+b}{ab}(a^2 + b^2 - c^2) + \frac{b+c}{bc}(b^2 + c^2 - a^2) + \frac{c+a}{ca}(c^2 + a^2 - b^2)$$

Exercice 22

Soit x, y et z trois réels tels que: $xyz = 1$.

Montrer que :

$$\frac{x}{xy + x + 1} + \frac{y}{yz + y + 1} + \frac{z}{zx + z + 1} = 1$$

Exercice 23

Démontrer que, a, b et c désignant trois nombres réels non nuls, on ne peut avoir :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

que si deux de ces nombres sont opposés (c'est-à-dire qu'on a : $a = -b$ ou $b = -c$ ou $c = -a$).

Exercice 24 Montrer que l'expression :

$$E = \frac{4a^2 - 1}{(a-b)(a-c)} + \frac{4b^2 - 1}{(b-c)(b-a)} + \frac{4c^2 - 1}{(c-a)(c-b)} \text{ est égale à } 4.$$

Exercice 25 Soient a, b et c trois nombres réels deux à deux inégaux.

1°) Démontrer l'identité :

$$\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \right) \left(\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} \right) = \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2}$$

2°) Montrer que : $\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b}$ est non nul quels que soient a, b et c distincts deux à deux.

Exercice 26

I. On donne : $a = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - y^2}}$ et $b = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - y^2}}$; avec $x > y \geq 0$.

1 Calculer a^2 , b^2 et ab .

2 En déduire que $(a+b)^2 = 2(x+y)$.

II. Soient x et y deux nombres réels tels que $x > y \geq 0$.

Montrer que $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

III. Soient a et b deux nombres réels strictement positifs.

a) Développer l'expression $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$.

b) En déduire que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

IV. Simplifier $A = \sqrt{2} \times \sqrt{2 + \sqrt{2}} \times \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \times \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$.