

◇◇◇ Lycée de Dindéfelo ◇◇◇			A.S. : 2025/2026
Matière: Mathématiques	Niveau : TS2	Date: 26/11/2024	Durée : 4 heures
Devoir n° 1 Du 1 ^{er} Semestre			

Exercice 1 : $0,5 \times 10 = 5$ points

- 1 Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire.
- 2 Énoncer Théorème de l'inégalité des accroissements finis (TIAF).
- 3 Énoncer le théorème de l'inégalité des accroissements finis (IAF).
- 4 Théorème de la bijection.
- 5 Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$ ($a \neq 0$) alors ...
- 6 Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ alors ...
- 7 Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ alors ...
- 8 Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \beta \in \mathbb{R}^*$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \beta x] = +\infty$ alors ...
- 9 Si f est continue et strictement décroissante sur $] - \infty; b]$, alors $f(] - \infty; b]) = \dots$

Exercice 2 : 5,5 points

- 1 Calculer les limites suivantes : (4×1 pt)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{\sin 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^3 + x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7} - \sqrt{10-x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$$

- 2 Donner les primitives des fonctions f, g et h respectivement sur \mathbb{R} et $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$. ($3 \times 0,5$ pt)

$$f(x) = 2 \cos(x) - 3 \sin(x); \quad g(x) = (3x - 1)(3x^2 - 2x + 3)^3; \quad h(x) = \frac{1 - x^2}{(x^3 - 3x + 2)^3}.$$

Problème : 9,5 points

Partie A : Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{x - 1} & \text{si } x < 0, \\ x + \sqrt{x^2 + x} & \text{si } x \geq 0, \end{cases} \quad \text{et } (C_f) \text{ sa courbe représentative dans un repère orthonormé } (O, \vec{i}, \vec{j}).$$

- 1 Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de f . ($0,5$ pt)

- 2 Déterminer les limites aux bornes de \mathcal{D}_f . (0,5 pt)
- 3 Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats obtenus. (1,5 pt)
- 4 a Montrer que (\mathcal{C}_f) admet en $-\infty$ une asymptote oblique Δ_1 dont on déterminera l'équation. (0,5 pt)
 b Étudier la position relative de (\mathcal{C}_f) par rapport à Δ_1 sur $(-\infty; 0[$. (0,5 pt)
- 5 Étudier la nature de la branche infinie en $+\infty$. (0,5 pt)
- 6 Préciser l'ensemble de dérivabilité de f puis calculer $f'(x)$ sur chaque intervalle où f est dérivable. (0,5 pt)
- 7 Dresser le tableau de variation de f . (0,5 pt)
- 8 Préciser les points d'intersection de (\mathcal{C}_f) avec les axes du repère. (0,25 pt)
- 9 Construire la courbe (\mathcal{C}_f) . (1,5 pt)

Partie B :

Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = [0; +\infty[$.

- 1 Montrer que h réalise une bijection de I dans un intervalle J à préciser. (0,25 pt)
- 2 La bijection réciproque h^{-1} est-elle dérivable sur J ? (0,25 pt)
- 3 Calculer $h\left(\frac{4}{5}\right)$ puis $(h^{-1})'(2)$. (0,5 pt)
- 4 Construire $(\mathcal{C}_{h^{-1}})$ la courbe représentative de h^{-1} dans le même repère. (0,5 pt)
- 5 Exprimer $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$. (0,5 pt)