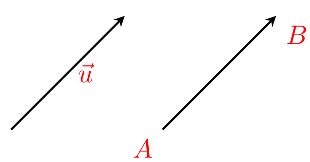
Chapitre 1 : Vecteurs

I - Généralités

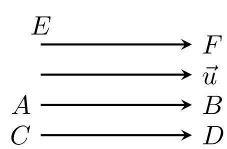
1- Définitions

Définition 1 :
On appelle **plan vectoriel** l'ensemble des vecteurs du plan.

Définition 2 :
Soient $\vec{u}$ un vecteur du plan vectoriel et (A, B) un couple de points. On dit que le couple (A, B) est un **représentant** du vecteur $\vec{u}$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.



Remarque 1 :
Tout vecteur du plan a une infinité de représentants.



$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = ...$

Remarque 2 : (Caractéristiques d'un vecteur).
Un vecteur est caractérisé par un sens, une direction et une norme :

$*_1$ La direction est celle de la "droite" dans laquelle est inclus le vecteur.
$*_2$ Le sens est donné par l'orientation du segment dans lequel est inclus le vecteur ("vers la gauche" ou bien "vers la droite").
$*_3$ La norme correspond à la longueur du segment sur lequel est inclus le vecteur.

Ainsi, on en déduit la propriété suivante :

Propriété :

i) $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \iff A = B \quad$ (donc $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$)

ii) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

2- Propriétés

Activité

Soient O un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur du plan vectoriel.

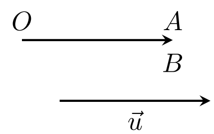
i) Construire un point A tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$. $(A \neq O)$

ii) Construire un point B tel que $\overrightarrow{OB} = \vec{u}$. $(B \neq O)$

iii) Que peut-on dire des points A et B ?

Correction

i) Construisons le point A.



ii) Construisons le point B (voir la question i).

iii) On peut dire que les points A et B sont **confondus**.

Propriété 1 : (Propriété fondamentale)

Pour tout point O et pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un et un seul (unique) point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

Preuve :

$\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ signifie que M est l'image de O par la translation du vecteur $\vec{u}$. D'où le point M est l'unique point tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

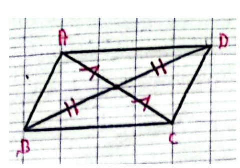
Propriété 2 :

Soient A, B, C et D des points du plan. Alors les 3 énoncés suivants sont équivalents :

i) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

ii) $ABDC$ est un parallélogramme.

iii) Les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu.



3- Norme d'un vecteur

Définition :

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan de représentant (A, B), $(\overrightarrow{AB} = \vec{u})$.
On appelle norme du vecteur notée $||\vec{u}||$ la distance AB : $||\vec{u}|| = AB$

Propriété :

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan vectoriel :

i) $||\vec{u}|| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$

ii) $||-\vec{u}|| = ||\vec{u}||$

Preuve :

i) Montrons que $||\vec{u}|| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$
$*_1$ $\vec{u} = \vec{0} \implies \vec{u} = \overrightarrow{AA}$ or $||\overrightarrow{AA}|| = 0$ d'où $||\vec{u}|| = 0$.
$*_2$ $||\vec{u}|| = 0$ donc si (A, B) est un représentant de $\vec{u}$ $(\overrightarrow{AB} = \vec{u})$ alors $AB = 0$. Donc $A = B \iff \overrightarrow{AB} = \vec{0}$. D'où $\vec{u} = \vec{0}$.

ii) Montrons que $||-\vec{u}|| = ||\vec{u}||$
(A, B) est un représentant du vecteur $\vec{u}$ équivaut à (B, A) est un représentant du vecteur $-\vec{u}$.
Donc $||\vec{u}|| = AB$ et $||-\vec{u}|| = BA$.
Comme $AB = BA$ alors on en déduit que $||\vec{u}|| = ||-\vec{u}||$.

Remarque 1 :

Deux vecteurs de même norme ne sont pas nécessairement égaux.

Par exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, on prend : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

On a :

$$||\vec{u}|| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$
$$||\vec{v}|| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Donc $||\vec{u}|| = ||\vec{v}||$ mais $\vec{u} \neq \vec{v}$.
Conclusion :
$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \not\Longrightarrow \vec{u} = \vec{v}$

Remarque 2 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

i) **En général**, on a :
$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

ii) **Par contre**, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ($\vec{u} \perp \vec{v}$), alors :
$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$

Cette propriété est le théorème de Pythagore.

Exemple :

i) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a :

$\vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{4^2+0^2} = 4 \quad (*)$

$\begin{cases} \|\vec{u}\| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5} \\ \|\vec{v}\| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5} \end{cases}$

$\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| = 2\sqrt{5} \quad (**)$

D'après $(*)$ et $(**)$, on a :

$\|\vec{u}+\vec{v}\| < \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$