◇◇◇ Lycée de Dindéfélo ◇◇◇			A.S. : 2024/2025
Matière: Mathématiques	Niveau : 2ndL	Date: 19/03/2025	Durée : 3 heures

Correction du devoir n° 1 du 2nd Semestre

Exercice 1 : 6 points (Développement, Réduction et Factorisation)

1. Développons et réduisons les expressions données :

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(x) &= (2x-3)(4x^2+6x+9)\\ &= 2x\cdot(4x^2+6x+9) - 3\cdot(4x^2+6x+9)\\ &= (2x\cdot 4x^2) + (2x\cdot 6x) + (2x\cdot 9) - (3\cdot 4x^2) - (3\cdot 6x) - (3\cdot 9)\\ &= 8x^3 + 12x^2 + 18x - 12x^2 - 18x - 27\\ &= 8x^3 + (12x^2 - 12x^2) + (18x - 18x) - 27\\ &= 8x^3 - 27.\end{aligned}$$

$$\boxed{E = 8x^3 - 27}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(x) &= (-5x-4)(2x^2+x-3) + (2x-3)^3\\ &= -5x(2x^2+x-3) - 4(2x^2+x-3) + (2x-3)^3\\ &= (-5x\cdot 2x^2) + (-5x\cdot x) + (-5x\cdot(-3)) - (4\cdot 2x^2) - (4\cdot x) - (4\cdot(-3)) + (2x-3)^3\\ &= -10x^3 - 5x^2 + 15x - 8x^2 - 4x + 12 + (2x-3)^3\\ &= -10x^3 + (-5x^2 - 8x^2) + (15x - 4x) + 12 + (2x-3)^3\\ &= -10x^3 - 13x^2 + 11x + 12 + (2x-3)^3\\ &= -10x^3 - 13x^2 + 11x + 12 + 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27\\ &= (-10x^3 + 8x^3) + (-13x^2 - 36x^2) + (11x + 54x) + (12 - 27)\\ &= -2x^3 - 49x^2 + 65x - 15.\end{aligned}$$

$$\boxed{B(x) = -2x^3 - 49x^2 + 65x - 15.}$$

2. Factorisons au mieux :

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= x^3 - 8 + 2(x-2)^2\\ &= (x-2)(x^2+2x+2^2) + 2(x-2)(x+2)\\ &= (x-2)\left[(x^2+2x+2^2) + 2(x+2)\right]\\ &= (x-2)\left[x^2+2x+4+2x+4\right]\\ &= (x-2)\left[x^2+4x+8\right].\end{aligned}$$

$$\boxed{C = (x-2)\left[x^2+4x+8\right]}$$

3 Factoriser, si possible, les trinômes suivants :

$\mathbf{D}(x) = -2x^2 + 4x + 6.$

Calcul du discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= 4^2 - 4(-2)(6)\\ &= 16 + 48\\ &= 64.\end{aligned}$$

Racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-\sqrt{64}}{2(-2)} = \frac{-4-8}{-4} = \frac{-12}{-4} = 3,$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+\sqrt{64}}{2(-2)} = \frac{-4+8}{-4} = \frac{4}{-4} = -1.$$

Forme factorisée :

$\mathbf{D}(x) = -2(x-3)(x+1).$

$\boxed{\mathbf{D}(x) = -2(x-3)(x+1).}$

$\mathbf{E}(x) = x^2 - 8x + 17.$

Calcul du discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= (-8)^2 - 4(1)(17)\\ &= 64 - 68\\ &= -4.\end{aligned}$$

Le discriminant est négatif, donc $\mathbf{E}(x)$ n'est pas factorisable sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\mathbf{E}(x) \text{ n'admet pas de factorisation réelle.}}$

$\mathbf{F}(x) = -9x^2 + 6x - 1.$

Calcul du discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= 6^2 - 4(-9)(-1)\\ &= 36 - 36\\ &= 0.\end{aligned}$$

Racine unique :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(-9)} = \frac{-6}{-18} = \frac{1}{3}.$$

Forme factorisée :

$$\mathbf{F}(x) = -9(x - \frac{1}{3})^2.$$

$$\boxed{\mathbf{F}(x) = -9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2.}$$

<u>Exercice 2 :</u> 4 points (Résolution de systèmes par la méthode de Cramer)

Résolvons chacun des systèmes suivants en utilisant la méthode de Cramer :

a) $\begin{cases} 3x - y + 2 = 0 \\ 3x - y - 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 3x - y = -2 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

Calcul du déterminant de :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (3)(-1) - (3)(-1) = -3 + 3 = 0.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2)(-1) - (1)(-1) = 2 + 1 = 3.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (3)(-2) = 3 + 6 = 9.$$

$\Delta = 0, \Delta_x \neq 0$ **et** $\Delta_y \neq 0$

Le système n'admet pas de solution.

b) $\begin{cases} 2y + x = 5 \\ -y + 7 = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 0 - y = -3 \end{cases}$

Calcul du déterminant de :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-1) - (0)(2) = -1.$$

Le déterminant est non nul, nous pouvons utiliser la règle de Cramer.

Calcul de x : $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \dfrac{(5)(-1) - (3)(2)}{-1} = \dfrac{-5-6}{-1} = \dfrac{-11}{-1} = 11.$

Calcul de y : $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{-1} = \dfrac{(1)(3) - (0)(5)}{-1} = \dfrac{3}{-1} = -3.$

Solution du système : $\boxed{S = \{(11, -3)\}}$.

c) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

Calcul du déterminant de :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (3)(-1) - (2)(-1) = -3 + 2 = -1.$$

Le déterminant est non nul, nous pouvons utiliser la règle de Cramer.

Calcul de x : $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \dfrac{(2)(-1) - (1)(-1)}{-1} = \dfrac{-2+1}{-1} = \dfrac{-1}{-1} = 1.$

Calcul de y : $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \dfrac{(3)(1) - (2)(2)}{-1} = \dfrac{3-4}{-1} = \dfrac{-1}{-1} = 1.$

Solution du système : $\boxed{S = \{(1, 1)\}}$.

d) $\begin{cases} x + y = 3 \\ -y + 4 = x - 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y = 3 \\ -x - y = -6 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 6 \end{cases}$

Calcul du déterminant de :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (1)(1) = -1 + 1 = 0.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (6)(1) = -3 + 6 = 3.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = (1)(6) - (1)(3) = -6 + 3 = -3.$$

$\Delta = 0, \Delta_x \neq 0$ **et** $\Delta_y \neq 0$

$\boxed{\text{Le système n'admet pas de solution.}}$

<u>Exercice 3 :</u> 6 points (Équations et inéquations du second degré)

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $-x^2 - x + 12 = 0$

Identifions les coefficients : $a = -1, \quad b = -1, \quad c = 12.$
Calcul du discriminant Δ : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(-1)(12) = 1 + 48 = 49.$
Le discriminant est positif, il y a donc deux solutions distinctes.

Calcul des solutions : $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{49}}{2(-1)} = \dfrac{1 \pm 7}{-2}.$

Les deux solutions sont : $x_1 = \dfrac{1+7}{-2} = \dfrac{8}{-2} = -4$ et $x_2 = \dfrac{1-7}{-2} = \dfrac{-6}{-2} = 3.$

Les solutions de l'équation sont : $\boxed{S = \{-4, 3\}}$.

b) $2x^2 - x - 3 > 0$

Posons $2x^2 - x - 3 = 0$
Identifions les coefficients : $a = 2, \quad b = -1, \quad c = -3.$
Calcul du discriminant Δ : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2)(-3) = 1 + 24 = 25.$
Le discriminant est positif, il y a donc deux solutions distinctes.

Calcul des solutions : $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2(2)} = \dfrac{1 \pm 5}{4}.$

Les deux solutions sont : $x_1 = \dfrac{1+5}{4} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1-5}{4} = \dfrac{4}{4} = 1.$

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x^2 - x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Les solutions de l'équation sont : $\boxed{S = \left]-\infty; \dfrac{3}{2}\right[\cup \left]\dfrac{3}{2}; +\infty\right[}$.

c) $-3x^2 + 4x - 2 \leq 0$

Posons $-3x^2 + 4x - 2 = 0$
Identifions les coefficients : $a = -3, \quad b = 4, \quad c = -2.$
Calcul du discriminant Δ : $\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(-3)(-2) = 16 - 24 = -8.$
Le discriminant est négatif, donc il y a pas de solutions.

x	$-\infty$		$+\infty$
$-3x^2 + 4x - 2$		$-$	

Les solutions de l'équation sont : $\boxed{S = \mathbb{R}}$.

d) $8x^2 + 34x + 21 < 0$

Posons $8x^2 + 34x + 21 = 0$
Identifions les coefficients : $a = 8, \quad b = 34, \quad c = 21.$
Calcul du discriminant Δ : $\Delta = b^2 - 4ac = (34)^2 - 4(8)(21) = 1156 - 672 = 484.$
Le discriminant est positif, il y a donc deux solutions distinctes.

Calcul des solutions : $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(34) \pm \sqrt{484}}{2(8)} = \dfrac{-34 \pm 22}{16}.$

Les deux solutions sont : $x_1 = \dfrac{-34 + 22}{16} = \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$ et $x_2 = \dfrac{-34 - 22}{16} = \dfrac{-56}{16} = \dfrac{-7}{2}.$

x	$-\infty$		$\frac{-7}{2}$		$\frac{3}{8}$		$+\infty$
$2x^2 - x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Les solutions de l'équation sont : $\boxed{S = \left]\dfrac{-7}{2}; \dfrac{3}{8}\right[}$.

e) $-9x^2 + 12x - 4 = 0$

Identifions les coefficients : $a = -9, \quad b = 12, \quad c = -4.$
Calcul du discriminant Δ : $\Delta = b^2 - 4ac = (12)^2 - 4(-9)(-4) = 144 - 144 = 0.$
Le discriminant est nul, il y a donc une seule solution double.

Calcul de la solution : $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-12}{2(-9)} = \dfrac{-12}{-18} = \dfrac{2}{3}.$

La solution de l'équation est : $\boxed{S = \left\{\dfrac{2}{3}\right\}}$.

f) $4 - 9x^2 = 0$

Résolvons l'équation : $4 - 9x^2 = 0$

Isolons x^2 : $9x^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = \dfrac{4}{9}.$

Prenons la racine carrée des deux côtés : $x = \pm\sqrt{\dfrac{4}{9}} = \pm\dfrac{2}{3}.$

Les solutions de l'équation sont : $\boxed{S = \left\{\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}\right\}}$.

Exercice 4 : 4 points (Union et Intersection d'Intervalles)

1. On considère $I = [2, 5]$ et $J = [4, 7]$. Déterminer $I \cup J$ et $I \cap J$.
2. On considère $K = [2, 5]$ et $L = [6, 7]$. Déterminer $K \cap L$.

1. On considère $I = [2, 5]$ et $J = [4, 7]$:
   - $I \cup J = [2, 7]$
   - $I \cap J = [4, 5]$
2. On considère $K = [2, 5]$ et $L = [6, 7]$:
   - $K \cap L = \varnothing$

     $\boxed{K \cap L = \varnothing}$.