

**Devoir n° 2 Du 1<sup>er</sup> Semestre****Exercice 1 : (03 points) ≈ 36 mns)**

- 1 Déterminer une primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur  $I$ .

- a  $f(x) = (6x - 3)(4x^2 - 4x + 2)^3 ; I = \mathbb{R}$  (0, 5pt)
- b  $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{3 + \cos x}} ; I = \mathbb{R}$  (0, 5pt)
- c  $f(x) = 2 \cos 3x - 3 \sin 2x ; I = \mathbb{R}$  (0, 5pt)
- d  $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}} + \sin x \sin 2x ; I = ]-\infty; -1[$  (0, 5pt)

- 2 Soit  $k$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$  par :  $k(x) = \frac{3x - 2}{(x + 2)^3}$ .

- a Déterminer les  $a$  et  $b$  tels que  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ,  $k(x) = \frac{a}{(x + 2)^2} + \frac{b}{(x + 2)^3}$ . (0, 5pt)
- b En déduire la primitive  $K$  de  $k$  qui prend la valeur 2 en -3. (0, 5pt)

**Exercice 2 : (05 points) ≈ 60 mns)**

- 1 a Écrivez le complexe  $z = -1 + i\sqrt{3}$  sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle. (1pt)
- b Donner le module et un argument de  $z = (1 - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}$ . (1pt)
- 2 a Donner le module et un argument de  $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$  et  $z_2 = 1 - i$ . (1pt)
- b Déduis en le module et un argument de chacun des complexes  $u = \frac{z_1}{z_2}$  et  $u^5$ . (1pt)
- c Déduis en les valeurs exactes de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ . (1pt)

**Problème : ( 12 points) ≈ 144 mns)**

On note  $(C_f)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité 1cm avec

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1} & ; \text{ si } x \leq 0 \\ x + \sqrt{x^2 + x} & ; \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

**Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire :**

Soit  $g$  la fonction numérique définie par :  $g(x) = -x^3 + 3x - 4$ .

- 1 Étudier les variations de  $g$  puis dresser son tableau de variations. (0, 75pt)
- 2 a Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in \mathbb{R}$ . (0, 5pt)

b) Donner un encadrement de  $\alpha$  à  $10^{-1}$ .

(0, 5pt)

3) En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $]-\infty; 0]$ .

(0, 25pt)

### Partie B : Étude de la fonction $f$

1) Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ .

(0, 5pt)

2) a) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$  et en déduire l'existence d'une asymptote dont on précisera.  
(01pt)

b) Pour  $x \leq 0$ , déterminer les réels  $a, b, c$  et  $d$  tels que :  $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 - 1}$  et en déduire la nature de la branche infinie en  $-\infty$ .

(0, 75pt)

c) Donner la nature de l'asymptote en  $+\infty$ .

(0, 5pt)

3) a) Montrer que  $f$  est continue sur  $D_f$ .

(0, 75pt)

b) Étudier la dérивabilité de  $f$  en 0 puis interpréter le résultat obtenu.

(01pt)

4) Démontrer que :  $f(\alpha) = -2 + \frac{3(\alpha - 2)}{\alpha^2 - 1}$ .

(0, 5pt)

5) a) Montrer que  $\forall x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0[$ , on a :  $f'(x) = \frac{-xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$  puis étudier son signe.

(1pt)

b) Calculer  $f'(x)$  sur  $]0; +\infty[$  et étudier son signe.

(0, 75pt)

c) Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $D_f$ .

(0, 75pt)

6) Construire soigneusement la courbe  $(C_f)$ .

(01pt)

### Partie C : Bijection

Soit  $h$  la restriction de  $f$  sur  $I = ]0; +\infty[$ .

1) Montrer que  $h$  réalise une bijection de  $I$  vers un intervalle  $J$  à préciser.

(0, 5pt)

2) Calculer  $h(1)$  et  $(h^{-1})'(\sqrt{2} + 1)$ .

(0, 5pt)

3) Expliciter  $h^{-1}(x)$ .

(0, 5pt)

4) Construire  $(C_{h^{-1}})$  dans le repère précédent.

(0, 5pt)