

◇◇◇ Lycée de Dindéfelo ◇◇◇			A.S. : 2024/2025
Matière: Mathématiques	Niveau : TS2	Date: 09/12/2024	Durée : 4 heures
<p align="center">Correction du devoir n° 2 Du 2^{er} Semestre</p>			

Exercice 1 : (5 points) (BAC 2022)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 1cm.

1 On considère dans \mathbb{C} le polynôme $P(z) = z^3 - 5z^2 + 19z + 25$.

a Montrons que -1 est solution de l'équation $P(z) = 0$.

-1 est solution ssi $P(-1) = 0$

$$P(z) = (-1)^3 - 5(-1)^2 + 19(-1) + 25$$

$$= -1 - 5 - 19 + 25$$

$$= -25 + 25$$

$$= 0$$

$P(-1) = 0$ donc -1 est bien solution

$P(-1) = 0$ donc -1 est bien solution

(0,25 pt)

b Déduisons-en les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $P(z) = 0$.

	1	-5	19	25
-1		-1	6	-25
	1	-6	25	0

donc $P(z) = (z + 1)(z^2 - 6z + 25)$

$$P(z) = 0 \implies (z + 1)(z^2 - 6z + 25) = 0$$

$$\implies (z + 1) = 0 \text{ ou } (z^2 - 6z + 25) = 0$$

$$\implies \Delta' = (3)^2 - 25$$

$$\implies = (3)^2 - 25$$

$$\implies = -16$$

$$\implies = 4i$$

$$\implies z = -1 \text{ ou } z = 3 - 4i \text{ ou } z = 3 + 4i$$

$S = \{-1, 3 - 4i, 3 + 4i\}$

(1,25 pt)

2 On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = -1; z_B = 3 + 4i; z_C = 3 - 4i; z_D = -7z_A$.

a On note z_1 et z_2 les affixes respectives des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{DC} .

Montrons que \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{DC} sont parallèles.

\overrightarrow{AB} et \overrightarrow{DC} sont || ssi $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ en version complexe: $\frac{z_1}{z_2} = k \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned}
 \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_B - z_A}{z_C - z_D} \\
 &= \frac{3 + 4i - (-1)}{3 - 4i - (-7(-1))} \\
 &= \frac{3 + 4i + 1}{3 - 4i - 7} \\
 &= \frac{4 + 4i}{-4 - 4i} \\
 &= -1 \in \mathbb{R}^*
 \end{aligned}$$

Comme $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_D} \in \mathbb{R}^*$ donc $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ (01 pt)

b Calculons $|z_1|$ et $|z_2|$

$$\begin{aligned}
 |z_1| &= |4 + 4i| \\
 &= 4|1 + i| \\
 &= 4\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Par analogie

$$|z_2| = 4\sqrt{2}$$

$$|z_1| = 4\sqrt{2} \text{ et } |z_2| = 4\sqrt{2} \quad (0,25 \text{ pt})$$

Interprétons géométriquement le résultat

(0,25 pt)

$$\begin{aligned}
 |z_1| &= |z_B - z_A| = 4\sqrt{2} \text{ Donc } \|\overrightarrow{AB}\| = 4\sqrt{2} \\
 |z_2| &= |z_C - z_D| = 4\sqrt{2} \text{ Donc } \|\overrightarrow{DC}\| = 4\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{DC} \quad (0,25 \text{ pt})$$

c On note z_3 l'affixe du vecteur \overrightarrow{BD} .

Comparons $|z_1|$ et $|z_3|$

$$\begin{aligned}
 |z_3| &= |z_D - z_B| \\
 &= |7 - (3 + 4i)| \\
 &= |4 - 4i| \\
 &= 4\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Interprétons géométriquement le résultat

$$|z_3| = |z_D - z_B| = 4\sqrt{2} \text{ Donc } \|\overrightarrow{DB}\| = 4\sqrt{2}$$

$$\text{Donc } |z_1| = |z_3| \quad (0,25 \text{ pt})$$

d Calculons $\arg\left(\frac{z_1}{z_3}\right)$

$$\begin{aligned}
 \arg\left(\frac{z_1}{z_3}\right) &= \arg\left(\frac{4 + 4i}{4 - 4i}\right) \\
 &= \arg\left(\frac{1 + i}{1 - i}\right) \\
 &= \arg(1 + i) - \arg(1 - i) \\
 &= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \arg \left(\frac{z_1}{z_3} \right) = \frac{\pi}{2}$$

(0,25 pt)

Interprétons géométriquement le résultat

$$\arg \left(\frac{z_1}{z_3} \right) = \arg \left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_B} \right) \\ = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AB})$$

L'angle $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AB})$ mesure $\frac{\pi}{2}$

e Déduisons-en la nature précise du quadrilatère $ABDC$.

(1 pt)

$AB = CD = BD$ et $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}$ donc $ABDC$ est un carré

Exercice 1 : 5,5 points (BAC 2008)

A)

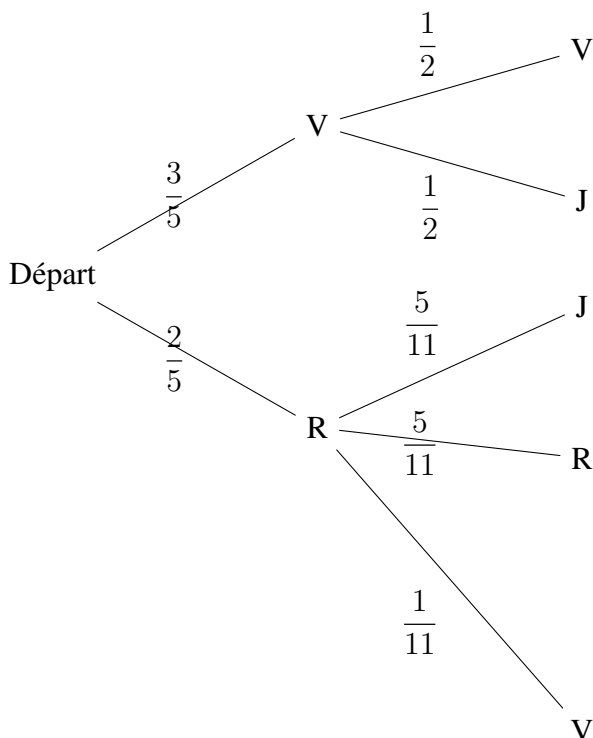
- 1 Si la première boule tirée est verte, on la met dans U_2 .
Dans ce cas, U_2 comporte maintenant 5 boules vertes V et 5 boules jaunes J .
On a par conséquent :

$$p(V_2 | V_1) = \frac{5}{10} \Rightarrow p(V_2 | V_1) = \frac{1}{2}$$

- 2 De même,

$$p(V_2 | R_1) = \frac{1}{11}$$

- 3 Dressons un arbre pondéré de la situation.



D'après la formule des probabilités totales,

$$p(V_2) = p(V_2 | V_1)p(V_1) + p(V_2 | R_1)p(R_1)$$

Soit :

$$p(V_2) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{11} \times \frac{2}{5} \Rightarrow p(V_2) = \frac{37}{110}$$

4 De manière analogue,

$$\begin{aligned} p(J_2) &= p(J_2 | V_1)p(V_1) + p(J_2 | R_1)p(R_1) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{11} \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{53}{110} \end{aligned}$$

On trouve :

$$p(J_2) = \frac{53}{110}$$

5 De manière analogue à la question 3, on a :

$$\begin{aligned} p(R_2) &= p(R_2 | V_1)p(V_1) + p(R_2 | R_1)p(R_1) \\ &= 0 + \frac{5}{11} \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{2}{11} \end{aligned}$$

On trouve :

$$p(R_2) = \frac{2}{11}$$

B)

1 La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

X	1000	500	-500
$p(X)$	$\frac{37}{110}$	$\frac{53}{110}$	$\frac{2}{11}$

2

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum x_i p_i \\ E(X) &= \left(1000 \times \frac{37}{110}\right) + \left(500 \times \frac{53}{110}\right) - \left(500 \times \frac{2}{11}\right) \\ E(X) &= \frac{5350}{11} \end{aligned}$$

Donc,

$$E(X) = \frac{5350}{11}$$

C)

1 On a affaire à un schéma de Bernoulli, la probabilité du succès étant $p(E) = \frac{37}{110}$ et le nombre d'épreuves étant 15.

La probabilité d'avoir exactement 8 succès est :

$$P_8 = C_8^{15} \left(\frac{37}{110}\right)^8 \left(\frac{73}{110}\right)^7$$

2) C'est l'événement : SSSSSSSS EEEEEEE (8 succès consécutifs suivis de 7 échecs consécutifs).
8 fois 7 fois

Sa probabilité est :

$$p(S)^8 \times p(E)^7 = \left(\frac{37}{110}\right)^8 \times \left(\frac{73}{110}\right)^7 \approx 9.310^{-6}$$

3) L'événement contraire est :

$$P_0 = C_0^{15} \left(\frac{37}{110} \right)^0 \left(\frac{73}{110} \right)^{15}$$

La probabilité cherchée est donc :

$$\begin{aligned} p &= 1 - P_0 \\ &= 1 - \left(\frac{73}{110} \right)^{15} \\ &\approx 0.997 \end{aligned}$$

Problème : 9,5 points (BAC 2007)

Partie A: 3 pts

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 + x + \ln x$$

- 1 Dressons le tableau de variation de g .

Soit g' la fonction dérivée de g , alors on a :

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

Donc, $\forall x \in]0; +\infty[; g'(x) > 0$.

Par suite, g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x + \ln x) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x + \ln x) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

D'où, le tableau de variations de g suivant :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
g		$+\infty$ $-\infty$ ↗

- 2 Montrons qu'il existe un unique réel α solution de l'équation $g(x) = 0$.

En effet, g est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Or, $0 \in]-\infty; +\infty[$ donc, d'après le théorème de la bijection, il existe un unique réel $\alpha \in]0; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

Vérifions que α appartient à $]0.2; 0.3[$.

Soit : $g(0.2) = 1 + 0.2 + \ln 0.2 = -0.40$ et $g(0.3) = 1 + 0.3 + \ln 0.3 = 0.09$.

Alors, $g(0.2) \times g(0.3) = -0.36 < 0$.

Ainsi, g est continue sur $]0.2; 0.3[$ et $g(0.2) \times g(0.3) < 0$.

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\beta \in]0.2; 0.3[$ solution de l'équation $g(x) = 0$.

L'unique solution de cette équation est le réel α .

Par conséquent, $\alpha = \beta$. D'où, $\alpha \in]0.2; 0.3[$.

- 3 En déduisons le signe de g sur $]0; +\infty[$. D'après les questions précédentes, on peut alors écrire :

$$g([0; \alpha]) =]-\infty; 0] \quad \text{et} \quad g([\alpha; +\infty[) = [0; +\infty[$$

Ainsi,

$$g(x) \leq 0 \text{ sur }]0; \alpha[\quad \text{et} \quad g(x) \geq 0 \text{ sur } [\alpha; +\infty[$$

- 4 Établissons la relation $\ln(\alpha) = -1 - \alpha$.

D'après la question 2), α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$.

Ce qui signifie que $g(\alpha) = 0$.

Par suite,

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\iff 1 + \alpha + \ln \alpha = 0 \\ &\iff \ln \alpha = -1 - \alpha \end{aligned}$$

D'où, la relation :

$$\ln(\alpha) = -1 - \alpha$$

Partie B: 6,5 pts

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{1+x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- 1 Montrons que f est continue en 0 puis sur $]0; +\infty[$.

Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{1+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{0}{1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$.

D'où, f est continue en 0. Par ailleurs, $\forall x_0 \in]0; +\infty[$, f est continue en x_0 .

Par conséquent, f est continue sur $]0; +\infty[$.

2 Étudions la dérivabilité de f en 0.

Calculons

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{(1+x)x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\infty}{1} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$$

Ainsi, la fonction f n'est pas dérivable en 0.

Interprétons graphiquement ce résultat.

Comme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty,$$

alors la courbe représentative de f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

3 Déterminons la limite de f en $+\infty$.

On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{1+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} \times \frac{\ln x}{\frac{1+x}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\frac{1}{x} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\infty}{0+1} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

4 Montrons que, quel que soit x élément de $]0; +\infty[$. $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)^2}$

$$\text{On a : } \forall x \in]0; +\infty[; f(x) = \frac{x \ln x}{1+x}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1 + \ln x)(1+x) - x \ln x}{(1+x)^2} \\ &= \frac{1+x + \ln x + x \ln x - x \ln x}{(1+x)^2} \\ &= \frac{1+x + \ln x}{(1+x)^2} \\ &= \frac{g(x)}{(1+x)^2} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)^2}$$

En déduisons le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Comme $(1+x)^2 > 0$ alors, le signe de $f'(x)$ dépend uniquement du signe de $g(x)$.

Or, $g(x)$ est négatif sur $]0; \alpha[$ et positif sur $[\alpha; +\infty[$.

Par conséquent,

- $f'(x) \leq 0$ sur $]0; \alpha[$
- $f'(x) \geq 0$ sur $[\alpha; +\infty[$

5 Montrons que $f(\alpha) = -\alpha$.

Soit : $f(\alpha) = \frac{\alpha \ln \alpha}{1 + \alpha}$

Or, dans la première partie, à la question 4), on avait : $\ln \alpha = -1 - \alpha$.

Donc, en remplaçant $\ln \alpha$ par son expression, on obtient :

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\alpha \ln \alpha}{1 + \alpha} \\ &= \frac{\alpha(-1 - \alpha)}{1 + \alpha} \\ &= \frac{-\alpha(1 + \alpha)}{1 + \alpha} \\ &= -\alpha \end{aligned}$$

Ainsi, $f(\alpha) = -\alpha$

6 Dressons le tableau de variations de la fonction f .

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	0	$-\alpha$	$+\infty$

7 Représentons la courbe de f dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique : 5 cm. Prendre $\alpha \approx 0.3$.

