Ministère de l'Éducation Nationale
Inspection Académique de Kédougou
Lycée Dindéfelo
Cellule de Mathématiques

Année scolaire 2024-2025
Date : 27 /02/2025
Classe : Terminale S2
Professeur : M. BA

Généralités sur les fonctions

Exercice 1 **Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :**

1. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 15}{8x^2 - 5x - 3}$
2. $f(x) = \dfrac{4x^2 - 5x + 15}{x^3 + 6x}$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 18}$
4. $f(x) = \sqrt{4x - x^3}$
5. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 + x - 6}{-x^2 + x - 1}}$
6. $f(x) = \dfrac{\sqrt{-4x + 1}}{x + 2}$
7. $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x - 7}{\sqrt{2x^2 + 3x - 2}}$
8. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - x}}{(x - 2)(x + 3)}$
9. $f(x) = \sqrt{\dfrac{(1 - x)(2 + x)}{x^2 + x}}$
10. $f(x) = \sqrt{|x - 1| - 2}$
11. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 1}}{|2x - 5| - 2}$
12. $f(x) = \sqrt{|1 - 3x| - x + 2}$
13. $f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{6x^2 - |13x - 5|}$
14. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2 - 3x + 1}}{|x| - 1}$
15. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{\sqrt{x + 3} - \sqrt{2x - 1}}$
16. $f(x) = \dfrac{1}{|x| + x}$
17. $f(x) = \sqrt{3 - |2x + 5|}$
18. $f(x) = \sqrt{2x + 1} - \sqrt{7 - 6x}$
19. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - E(x)}$
20. $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}, & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \sqrt{x - 1}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$
21. $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + x, & \text{si } x > 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$
22. $\begin{cases} f(x) = |x + 1| - \dfrac{2}{x + 2}, & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x^2\sqrt{4 - x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
23. $\begin{cases} f(x) = x\sqrt{\left|\dfrac{x + 1}{x}\right|}, & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \dfrac{x^3 - x^2}{x^2 + 1}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
24. $\begin{cases} f(x) = x\sqrt{-x} + 1, & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x^3}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$
25. $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x(x - 2)}{x - 1}, & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x + \sqrt{x^2 - 4}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
26. $\begin{cases} f(x) = \dfrac{3}{|x + 1| - 2}, & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x - 3}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Exercice 2 **Dans chacun des cas suivants, dites si f est une application**

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x^2 - 1} - 1$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\begin{array}{rcl} f:[0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x-\sqrt{x} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & E(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f:[2;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x-2} \end{array}$$

Exercice 3 **Égalité de deux fonctions**

1. Soit les fonctions $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x^2+2}$ et $g(x) = x - 1$.
   - (a) Vérifier que : $(x^2+2)(x-1) = x^3 - x^2 + 2x - 2$
   - (b) Montrer que f et g sont égales.
2. Soient $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{20}{x-1}$ et $g(x) = \dfrac{2x^2 - x + 1}{x-1}$.
   - (a) Montrer que les fonctions f et g sont égales.
   - (b) Dans chacun des cas suivants, déterminer les réels a et b pour que les fonctions f et g soient égales. $f(x) = -2x^2 - 12x - 16$ et $g(x) = -2(x-a)^2 + b$.

     $f(x) = \dfrac{x+7}{x^2+2x-3}$ et $g(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+3}$.

Exercice 4 Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x-1| + 2|3-x|$.
Déterminer l'application affine g qui a même restriction que f sur l'intervalle $[1;3]$.

Exercice 5 Soient f et g des fonctions définies par $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$, $g(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

1. Déterminer le domaine de définition et l'expression des fonctions suivantes : $f+g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ et $3f - 2g$.
2. Déterminer le domaine de définition de $f \circ g$. et $g \circ f$ puis comparer $f \circ g$ et $g \circ f$; Que peut-on en déduire ?

Exercice 6 **Composition et décomposition**

1. On considère les fonctions suivantes : $f(x) = \sqrt{x+3}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$.

1. Déterminer D_f, D_g, D_{fog} et D_{gof}.
2. Calculer $f \circ g(x)$ et $g \circ f(x)$.

2. Trouver deux fonctions f et g telles que $h(x) = (f \circ g)(x)$.

a) $h(x) = \sqrt{x^2+3x+1}$	d) $h(x) = \dfrac{x^2+7}{x^2-2}$
b) $h(x) = (3x+1)^2$	e) $h(x) = (x+5)^2 + 4$
c) $h(x) = \dfrac{3}{x^2-5x+6}$	f) $h(x) = \dfrac{1}{x-1}$

Exercice 7 **Étude de la parité d'une fonction**

Étudier la parité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2^x + x^2 - 1$;
2. $f(x) = x^3 + x$;
3. $f(x) = x^2 - 3|x| + 1$;
4. $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2+1}$;
5. $f(x) = \dfrac{x^3}{|x^4 - x^2 + 1|}$;
6. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{4+x^2}}$;
7. $f(x) = \dfrac{\sin x}{2+\sin^2 x}$;
8. $f(x) = \dfrac{|1+x| - |1-x|}{|1+x| + |1-x|}$;
9. $f(x) = \dfrac{x+1}{1-x^2}$.

Exercice 8

1. Dans chacun des cas suivants, étudier la périodicité des fonctions numériques et préciser et d'en préciser la période.

a) $f(x) = \sin x$;
b) $f(x) = \cos x$;
c) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$;
d) $f(x) = \cos 2x \sin 3x$;
e) $f(x) = x - E(x)$;
f) $f(x) = [2x - E(2x)] \sin 3\pi x$;
g) $f(x) = \dfrac{\cos \pi x}{x - E(x)}$.

2. Soit la fonction numérique f telle que :
$f(x+2) = \dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$.
Calculer $f(x+4)$, $f(x+6)$, $f(x+8)$ en fonction de $f(x)$. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

Exercice 9 Étudier le sens de variations de f.

1. $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$; $f(x) = \sqrt{x^2-1}$.
2. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$; $f(x) = \sqrt{x^3+x}$.
3. $f(x) = x^3 - 3x$; $f(x) = \sqrt{x^3-x}$.
4. $f(x) = |x+1| - |x-1| + |2x|$.

Exercice 10 **Élément de symétrie**

1. Dans chacun des cas, montrer que (C_f) admet la droite (Δ) pour axe de symétrie.
   (a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ et $(\Delta) : x = -1$.
   (b) $f(x) = -3x^2 + 4x + 1$ et $(\Delta) : x = \dfrac{2}{3}$.
   (c) $f(x) = \dfrac{-2x^2 + 4x - 1}{(x-1)^2}$ et $(\Delta) : x = 1$.
   (d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{2x^2 + 8x + 9}$ et $(\Delta) : x = -2$.
2. Dans chacun des cas suivants, montrer que (C_f) admet le point K pour centre de symétrie.
   (a) $f(x) = \dfrac{x-4}{x-2}$ et $K(2; 1)$.
   (b) $f(x) = -x^3 + 3x + 4$ et $K(0; 4)$.
   (c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x-2}$ et $K(2; 1)$.
   (d) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - x}{2x^2 - 4 + 1}$ et $K(1; 1)$.
   (e) $f(x) = \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{x+1}$ et $K(-2; 0)$.

Exercice 11

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x(1-x)$ sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $f(x) \leq \dfrac{1}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire que la fonction f admet un maximum en $x = \dfrac{1}{2}$.
3. Démontrer que $f(x) = \dfrac{1}{4} - \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$.

Exercice 12

Soit l'application f définie par sa représentation graphique ci-dessous graph1.png

1. Trouver l'image directe par f des intervalles suivants : $[-3;-1]$; $]-1;4]$ et $\{-3;-1\}$.
2. Trouver l'image réciproque par f des intervalles suivants : $]1;3[$; $]-\infty;-3]$ et $[-2;3]$.
3. Donner les formules explicites de $f(x)$.
4. Montrer que f est bijective.

Exercice 13

Soient les fonctions f et g définies respectivement par :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}-\{1\} & \to & \mathbb{R}-\{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{x-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}-\{1\} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & 3x-2 \end{array}$$

1. Les fonctions f et g sont-elles bijectives ?
2. Calculer : $f \circ g(0)$, $g \circ f(0)$, $f \circ g(x)$ et $g \circ f(x)$.
3. Trouver $f([-2;-1])$; $g([-2;0])$; $f^{-1}([2;3[)$ et $f^{-1}(]-\infty;0[)$.
4. Résoudre l'équation $g(x) = g(x)$.
5. Sur quel intervalle I, f et g se rencontrent-elles ?

Exercice 14

La courbe tracée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 - x^3.$$

graph2.png

1. Dessiner la courbe représentative de la fonction g définie par : $g(x) = f(x) - 1$.
2. Soit h la fonction définie par : $h(x) = f(x-2)$.
   (a) Dessiner la courbe représentative de la fonction h.
   (b) Donner l'expression de $h(x)$.
   (c) Établir le tableau de variation de la fonction h.
3. Soit z la fonction définie par : $z(x) = |f(x)|$.
   (a) Donner l'expression de $z(x)$.
   (b) Établir le tableau de variation de la fonction z.

Exercice 15

Dans chacun des cas suivants, dire si l'application f est injective, surjective ou bijective.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} - \{2\} & \to & \mathbb{R} - \{2\} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x+1}{2x-4} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f : [\frac{1}{2}; +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{2x-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 2x - 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 2x - 3 \end{array}$$

Exercice 16

Soit la correspondance :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{|1 - x^2|} \end{array}$$

1. Justifier que f est une application.
2. Soit g la restriction de f sur $[1; +\infty[$
   (a) Montrer que $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.
   (b) Déterminer l'image directe par g de $A = \{1; 2; 3\}$.
   (c) Déterminer l'image réciproque par g de $B =]1; 4]$.
   (d) Montrer que g est une bijection de $[1; +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.
   (e) Déterminer $g^{-1}(x)$.
3. On définit la fonction h par $h(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$.
   (a) Déterminer $D_{g \circ h}$ et $D_{h \circ g}$.
   (b) Expliciter $g \circ h(x)$.

Exercice 18

Soit f et g les fonctions définies par :
$f(x) = -5x + 3 \quad$ et $\quad g(x) = \dfrac{4x^2 + 1}{x^2 + 2}$.

1. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $\frac{1}{2} \leq g(x) \leq 4$.
2. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $-17 \leq f \circ g(x) \leq \frac{1}{2}$.

Exercice 19

Soient E, F et G des ensembles non vides. On considère les applications suivantes $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. Montrer que $g \circ f$ injective implique que f est injective.

2. Montrer que $g \circ g$ injective et f surjective implique que g est injective.
3. Montrer que $g \circ f$ surjective sur G implique que g est surjective sur G.
4. Montrer que $g \circ f$ surjective sur G et g injective implique que f est surjective sur F.

Exercice 20

Soient E, F et G des ensembles non vides. On considère les applications suivantes $f : E \to F$ et $g : F \to G$.