

Correction Td Primitives

Exercice 1

1 Fonctions polynomiales et puissances simples

Dans cette section, on utilise principalement la formule de base : $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (pour $n \neq -1$)

a) $f(x) = x^3 - 2x + 1$
 $F(x) = \frac{x^4}{4} - 2\left(\frac{x^2}{2}\right) + x + C$
 $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + x + C$

b) $f(x) = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$
 $F(x) = \frac{x^3}{3} - 3\left(\frac{x^2}{2}\right) + 2x + C$
 $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$

c) $f(x) = 4x^4 - 2x^2 + 5x$
 $F(x) = 4\left(\frac{x^5}{5}\right) - 2\left(\frac{x^3}{3}\right) + 5\left(\frac{x^2}{2}\right) + C$
 $F(x) = \frac{4}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + C$

d) $f(x) = x + \frac{1}{x^2} = x + x^{-2}$
 $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^{-1}}{-1} + C$
 $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} + C$

e) $f(x) = (x+1)^3$
 On peut développer ou utiliser la forme $(ax+b)^n$.
 $F(x) = \frac{1}{4}(x+1)^4 + C$

f) $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}} = x + x^{-1/2}$
 $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C$
 $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2\sqrt{x} + C$

g) $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} = 2x^{-2} - 3x^{-3}$
 $F(x) = 2\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) - 3\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right) + C$
 $F(x) = -\frac{2}{x} + \frac{3}{2x^2} + C$

h) $f(x) = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^4}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 1 + x^{-2}$
 $F(x) = \frac{x^3}{3} + x - \frac{1}{x} + C$
 $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x - \frac{1}{x} + C$

2 Forme $u'u^n$ Formule : $\int u'u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$

- a) $f(x) = (2x-1)(x^2-x)^2$
- b) $f(x) = 2x(x^2-1)^5$
- c) $f(x) = \sin^2 x \cos x$
- d) $f(x) = \sin x \cos^3 x$

3 Forme $\frac{u'}{u^n}$ ($n \geq 2$)

Formule : $\int \frac{u'}{u^n} = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$

- a) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^3}$
- b) $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$
- c) $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$
- d) $f(x) = \frac{4x+3}{(2x^2+3x+1)^3}$
- e) $f(x) = \frac{1-x}{(x^2-2x+3)^2}$
- f) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$

4 Forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$

Formule : $\int \frac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}$

- a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$
- b) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$
- c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
- d) $f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+2}}$

5 Fonctions Trigonométriques

Formes : $\sin(ax + b)$, $u' \cos(u)$, linéarisation ou dérivées de $\tan(x)$

a) $f(x) = 3 \sin \frac{\pi x}{2}$

b) $f(x) = \sin 3x + \cos(2x + 3)$

c) $f(x) = \sin 2x - 2 \cos 2x$

d) $f(x) = x \cos x^2$

e) $f(x) = \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

f) $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$

g) $f(x) = \frac{\tan x}{\cos^2 x}$

h) $f(x) = \tan^2 x$

i) $f(x) = \tan x + \tan^3 x$

j) $f(x) = 1 + \frac{1}{\tan^2 x}$

k) $f(x) = \sin^2 x$

l) $f(x) = \cos^3 x$

- 1) Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de f sur I après avoir effectuée la transformation d'écriture indiquée.

a) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}, \quad I =]1; +\infty[$ Indication : Mettre $f(x)$ sous la forme $a + \frac{b}{(x-1)^2}$

b) $f(x) = \frac{3x^2 + 12x - 1}{(x+2)^2}, \quad I =]-2; +\infty[$ Indication : Mettre $f(x)$ sous la forme $a + \frac{b}{(x+2)^2}$

c) $f(x) = \frac{2x^3 + 13x^2 + 24x + 2}{(x+3)^2}, \quad I =]-3; +\infty[$

Indication : Mettre $f(x)$ sous la forme $ax + b + \frac{c}{(x+3)^2}$

d) $f(x) = \frac{x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}, \quad I =]-1; 1[$ Indication : Mettre $f(x)$ sous la forme $\frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x+1)^3}$