

PROBLEME

(10pt)

PARTIE A

Soit h la fonction dérivable sur \mathbb{R} définie par $h(x) = 1 + e^{2x-4}$ et $K = \left[1; \frac{5}{4}\right]$.

1. a) Calcul de $h'(x)$: $h(x) = 1 + e^{2x-4} \Rightarrow h'(x) = (1 + e^{2x-4})' = 2e^{2x-4}$
Comme $e^{2x-4} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $h'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc, la fonction h est ****strictement croissante**** sur \mathbb{R} . **(0,25pt + 0,25pt)**
- b) Montrons que $h(K) \subset K$:
Comme h est croissante et $K = \left[1; \frac{5}{4}\right]$, on a :

$$h(K) = \left[h(1); h\left(\frac{5}{4}\right) \right]$$

Calculons :

$$h(1) = 1 + e^{2(1)-4} = 1 + e^{-2} \approx 1 + 0,1353 = 1,1353$$

$$h\left(\frac{5}{4}\right) = 1 + e^{2 \cdot \frac{5}{4} - 4} = 1 + e^{-1,5} \approx 1 + 0,2231 = 1,2231$$

Donc :

$$h(K) = [1,1353; 1,2231] \subset \left[1; \frac{5}{4}\right]$$

Ainsi, $h(K) \subset K$.

(0,5pt)

2. a) Résoudre $h(x) = x$ revient à résoudre $h(x) - x = 0$
On définit la fonction $\phi(x) = h(x) - x = 1 + e^{2x-4} - x$.

Existence

ϕ est continue sur $K = \left[1; \frac{5}{4}\right]$.

Calculons :

$$\phi(1) = 1 + e^{-2} - 1 = e^{-2} > 0 \quad ; \quad \phi\left(\frac{5}{4}\right) = 1 + e^{-1,5} - \frac{5}{4} \approx 1,2231 - 1,25 < 0$$

Donc, $\phi(1) > 0$ et $\phi\left(\frac{5}{4}\right) < 0$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un $\lambda \in \left]1; \frac{5}{4}\right[$ tel que $\phi(\lambda) = 0$, soit $h(\lambda) = \lambda$.

Unicité

$$\phi'(x) = h'(x) - 1 = 2e^{2x-4} - 1$$

Supposons que $\phi'(x) < 0$

$$\begin{aligned}
\phi'(x) < 0 &\iff 2e^{2x-4} - 1 < 0 \\
&\iff e^{2x-4} < \frac{1}{2} \\
&\iff 2x - 4 < \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\
&\iff 2x < 4 - \ln(2) \\
&\iff x < 2 - \frac{\ln(2)}{2} \\
&\iff x < 1,7
\end{aligned}$$

Donc si $x \in]-\infty; 1,7[$ alors $\phi'(x) < 0$

Comme $K = [1; \frac{5}{4}] \subset]-\infty; 1,7[$ donc $\forall x \in K, \phi'(x) < 0$

Donc $\phi'(x) < 0$ sur K , donc ϕ est strictement décroissante sur K .

Or, une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle admet ^{**}au plus une^{**} racine. Comme on a déjà montré l'existence d'un λ , on en déduit que :

L'équation $h(x) = x$ admet une **unique solution** $\lambda \in K$.

(0,5pt)

b) On a : $h'(x) = 2e^{2x-4}$

Encadrons $x \in K = [1; \frac{5}{4}]$:

$$\begin{aligned}
x \in K &\implies 1 \leq x \leq \frac{5}{4} \\
&\implies 2 \leq 2x \leq \frac{5}{2} \\
&\implies -2 \leq 2x - 4 \leq -\frac{3}{2} \\
&\implies e^{-2} \leq e^{2x-4} \leq e^{-1.5} \\
&\implies 2e^{-2} \leq 2e^{2x-4} \leq 2e^{-1.5} \\
&\implies 0 \leq 2e^{-2} \leq 2e^{2x-4} \leq 2e^{-1.5} \leq \frac{1}{2} \\
&\implies 0 \leq 2e^{2x-4} \leq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Donc : $\forall x \in K, \quad 0 < h'(x) < \frac{1}{2}$

(0,25pt)

c) Soit $x \in K$, et $\lambda \in K$ l'unique solution de $h(\lambda) = \lambda$.

D'après l'inégalité des accroissements finis (ou le théorème de la moyenne) appliquée à h sur K , il existe $c \in [x; \lambda] \subset K$ tel que :

$$h(x) - h(\lambda) = h(x) - \lambda = h'(c)(x - \lambda)$$

Donc :

$$|h(x) - \lambda| = |h'(c)| \times |x - \lambda| \leq \frac{1}{2}|x - \lambda|$$

(0,25pt)

3.a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, W_n \in K$.

Initialisation :

On a $W_0 = 1 \in K = \left[1; \frac{5}{4}\right]$. L'assertion est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité :

Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on ait $W_n \in K$.

Alors par définition :

$$W_{n+1} = h(W_n)$$

Or à la question 1.b), on a démontré que $h(K) \subset K$.

Donc comme $W_n \in K$, on a $W_{n+1} \in h(K) \subset K$.

Conclusion :

Par le principe de récurrence, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n \in K$$

(0,5pt)

b) On veut montrer que :

$$|W_{n+1} - \lambda| \leq \frac{1}{2}|W_n - \lambda| \quad \text{et} \quad |W_n - \lambda| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Inégalité de récurrence :

On sait que $W_{n+1} = h(W_n)$ et que λ est l'unique solution de $h(\lambda) = \lambda$.

D'après la question 2.c), on a pour tout $x \in K$:

$$|h(x) - \lambda| \leq \frac{1}{2}|x - \lambda|$$

Or, à la question 3.a), on a montré que $\forall n, W_n \in K$. Donc :

$$|W_{n+1} - \lambda| = |h(W_n) - \lambda| \leq \frac{1}{2}|W_n - \lambda|$$

2) Majoration par $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ par récurrence :

3.b) On a $W_{n+1} = h(W_n)$ et $h(\lambda) = \lambda$.

D'après la question 2.c), pour tout $x \in K$, on a :

$$|h(x) - \lambda| \leq \frac{1}{2}|x - \lambda|$$

Or, à la question 3.a), on a montré que $W_n \in K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc on peut appliquer cette inégalité à chaque itération :

$$\begin{aligned}
|W_1 - \lambda| &\leq \frac{1}{2}|W_0 - \lambda| \\
|W_2 - \lambda| &\leq \frac{1}{2}|W_1 - \lambda| \\
|W_3 - \lambda| &\leq \frac{1}{2}|W_2 - \lambda| \\
&\vdots \\
|W_k - \lambda| &\leq \frac{1}{2}|W_{k-1} - \lambda|
\end{aligned}$$

En multipliant ces inégalités ****membre à membre****, on obtient :

$$\begin{aligned}
|W_k - \lambda| &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^k |W_0 - \lambda| \\
\forall k \in \mathbb{N}, \quad |W_k - \lambda| &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^k
\end{aligned}$$

(0,5pt + 0,25pt)

c) D'après la question précédente, on a :

$$|W_n - \lambda| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Or $\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, donc :

$$|W_n - \lambda| \rightarrow 0 \quad \text{ce qui équivaut à} \quad W_n \rightarrow \lambda \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty$$

Ainsi, la suite (W_n) ****converge vers le réel λ^{**}** , qui est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$ dans l'intervalle K . **(0,25pt)**

PARTIE B

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \ln \left(\left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) & \text{si } x \in [0; +\infty[\\ \frac{e^x - 1}{e^x + 1} & \text{si } x \in] -\infty; 0[\end{cases}$$

1. Déterminons le domaine de définition D_f de f .

Sur $[0; +\infty[$: on considère l'expression

$$f(x) = \ln \left(\left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right)$$

Cette expression est définie si :

— $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$ (toujours vrai car $x \geq 0$)

— $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| > 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

Donc sur $[0; +\infty[$, la fonction est définie sauf en $x = 1$.

Sur $] -\infty; 0[$: on considère

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

Cette expression est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, car le dénominateur $e^x + 1 > 0$ pour tout x .

Donc la fonction f est définie sur :

$$D_f =] -\infty; 1[\cup] 1; +\infty[$$

(0,5pt)