

Exercice 1(points)(BAC 2005)

- 1 Calcul du coefficient de corrélation linéaire

$$r = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{V(x)}\sqrt{V(y)}}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 x_i = \frac{60 + 80 + 100 + 120 + 140 + 160 + 180 + 200}{8} = \frac{1040}{8} = 130$$

$$\bar{y} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 y_i = \frac{952 + 805 + 630 + 522 + 510 + 324 + 205 + 84}{8} = \frac{4032}{8} = 504$$

$$V(x) = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{152000}{8} - (130)^2 = 2100$$

$$V(y) = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 y_i^2 - \bar{y}^2 = \frac{2637870}{8} - (504)^2 = 75717,75$$

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 x_i y_i - \bar{x} \bar{y} = \frac{424100}{8} - 130 \times 504 = -12507,5$$

$$r = \frac{-12507,5}{\sqrt{2100} \times \sqrt{75717,75}} = \frac{-12507,5}{45,83 \times 275,17} \approx -0,99$$

$r \approx -1$, donc la valeur trouvée justifie la recherche d'un ajustement linéaire.

- 2 Équation de la droite de régression de y en x :

$$y = ax + b, \text{ avec :}$$

$$a = \frac{\text{cov}(x, y)}{V(x)} = \frac{-12507,5}{2100} = -5,95$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 504 - (-5,95)(130) = 1277,5$$

$$\Rightarrow y = -5,95x + 1277,5$$

- 3 Les frais de conception sont de 28 000 000 F. Le prix de fabrication de chaque produit est de 25 000 F.

a x est le prix de vente, donc y est le nombre d'exemplaires du produit.

le prix de vente est

$$yx = (-5,95x + 1277,5)x \quad \text{en milliers de francs}$$

le prix de revient est

$$25000y + 28000000 = 25y + 28000 \quad \text{en milliers de francs.}$$

Donc

$$z = (-5,95x + 1277,5)x - 25y - 28000$$

$$z = (-5,95x + 1277,5)x - 25(-5,95x + 1277,5) - 28000$$

$$z = -5,95x^2 + 1426,25x - 59937,5$$

b Déterminons le prix de vente x permettant de réaliser un bénéfice maximum.

On a :

$$z(x) = -5,95x^2 + 1426,25x - 59937,5$$

z est une fonction continue et dérivable en x sur \mathbb{R} et :

$$z'(x) = -11,9x + 1426,25 \Rightarrow z'(x) = 0 \quad \text{si} \quad x = 119,85$$

On voit ainsi que z atteint son maximum pour $x = 119,85$ en milliers de francs.

Donc le prix de vente permettant de réaliser un bénéfice maximum est $x = 119,850$ F.

$$z(119,85) = -5,95 \times (119,85)^2 + 1426,25 \times 119,85 - 59937,5 = 25532,628 \quad \text{en milliers de francs}$$

D'où le bénéfice maximum est **25.532.628 F**

Exercice 2(04,5 points)(BAC 2008)

1 Le nuage de point

CorrectionTdSta.png

BRG

- 2 G a pour coordonnées (\bar{x}, \bar{y}) avec :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^7 x_i \simeq 5,28 \quad \text{et} \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^7 y_i \simeq 17,28$$

- 3 a

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^7 x_i y_i - \bar{x} \times \bar{y} \simeq 50,63$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^7 x_i^2 - \bar{x}^2} \simeq 4,66 \quad \text{et} \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^7 y_i^2 - \bar{y}^2} \simeq 11,39$$

Le coefficient de corrélation linéaire est donné par la formule :

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \times \sigma_y} \simeq 0,99$$

- b r est très proche de 1, donc on a une très bonne corrélation.

- 4 $D_{y/x}$ a pour équation :

$$y - \bar{y} = a(x - \bar{x}) \quad \text{avec} \quad a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

Après calculs, on trouve qu'une équation de $D_{y/x}$ est :

$$y = 2,5x + 4,08$$

- 5 a D'après le graphique, on constate que les valeurs de y supérieures à 15 correspondent aux valeurs de x supérieures à 4,368. On ainsi dire qu'à partir de 5 ans le poids de l'enfant sera supérieur à 15 kg.

- b Pour retrouver ce résultat par le calcul, on considère l'équation $D_{y/x}$ de la droite de régression de y en x .

Soit $(D_{y/x}) : y = 2,5x + 4,08$, alors on a :

$$y > 15 \Leftrightarrow 2,5x + 4,08 > 15$$

$$\Leftrightarrow 2,5x > 15 - 4,08$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{10,92}{2,5}$$

$$\Leftrightarrow x > 4,368$$

$$\text{D'où, } y > 15 \Leftrightarrow x > 4,368$$

Exercice 3(03 points)(BAC 2009)

- 1 (D_1) droite de régression de Y en X ayant pour équation :

$$y = ax + b, \text{ on a :}$$

$$a = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} \quad \text{et} \quad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

(D_2) droite de régression de X en Y ayant pour équation :

$$x = a'y + b', \text{ on a :}$$

$$a' = \frac{\text{cov}(Y, X)}{V(Y)} \quad \text{et} \quad b' = \bar{x} - a'\bar{y}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} aa' &= \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} \cdot \frac{\text{cov}(Y, X)}{V(Y)} \\ &= \frac{(\text{cov}(X, Y))^2}{V(X) \cdot V(Y)} \\ &= \left(\frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \right)^2 \\ &= r^2 \end{aligned}$$

$$\text{D'où, } \boxed{aa' = r^2}$$

(D_1) droite de régression de Y en X ayant pour équation réduite :

$$y = 2,4x, \quad \text{on a : } a = 2,4 \quad \text{et} \quad b = 0$$

(D_2) droite de régression de X en Y ayant pour équation réduite :

$$x = \frac{3,5}{9}y + \frac{24}{9}, \quad \text{on a : } a' = \frac{3,5}{9} \quad \text{et} \quad b' = \frac{24}{9}$$

D'après la question précédente, le coefficient de corrélation vérifie :

$$\begin{aligned} r^2 &= aa' \\ &= 2,4 \times \frac{3,5}{9} \\ &= \frac{14}{15} \end{aligned}$$

Puisque $r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$, que $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ sont positifs par définition et que $\text{cov}(X, Y)$ est positif par hypothèse, alors r est positif.

Donc,

$$r = \sqrt{\frac{14}{15}}$$

2 On a :

$$\begin{cases} -a\bar{x} + \bar{y} = b & (1) \\ x - a'\bar{y} = b' & (2) \end{cases}$$

Je garde l'équation 1. Je multiplie l'équation 2 par a pour éliminer \bar{x} :

$$\begin{cases} -a\bar{x} + \bar{y} = b \\ a\bar{x} - aa'\bar{y} = ab' \end{cases}$$

J'additionne membre à membre : $(1 - aa')\bar{y} = b + ab'$, c'est-à-dire :

$$\bar{y} = \frac{b + ab'}{1 - r^2}$$

Pour trouver \bar{x} , j'utilise l'équation la plus simple ; ici c'est la 2 : $\bar{x} = b' + a'\bar{y}$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= b' + a' \cdot \frac{b + ab'}{1 - r^2} \\ &= \frac{b'(1 - r^2) + a'(b + ab')}{1 - r^2} \\ &= \frac{b' + a'b}{1 - r^2} \end{aligned}$$

Donc,

$$\bar{x} = \frac{b' + a'b}{1 - r^2}$$

Application numérique : Comme $\frac{1}{1 - r^2} = 15$, on a :

$$\bar{y} = 15 \times 2,4 \times \frac{24}{9} \quad \text{et} \quad \bar{x} = 15 \times \frac{24}{9}$$

$$\boxed{\bar{y} = 96 \quad \text{et} \quad \bar{x} = 40}$$

Exercice 4(03 points)(BAC 2010)

On considère le tableau ci-dessous indiquant les résultats d'une étude sur le nombre d'années x en service des ouvriers d'une entreprise et de leur salaire y en milliers de francs.

Notons x_i les modalités de x et n_i l'effectif de x_i , avec $1 \leq i \leq 6$.

Et notons y_j les modalités de y et n_j l'effectif de y_j , avec $1 \leq j \leq 4$.

Soit N l'effectif total.

$x \backslash y$	2	6	10	14	18	22	n_j
75	a	5	0	0	0	0	$a + 5$
125	0	7	1	0	2	0	10
175	2	0	9	8	15	4	38
225	0	1	0	3	b	1	$b + 5$
n_i	$a + 2$	13	10	11	$b + 17$	5	$N = a + b + 58$

- 1 Déterminons a et b pour que $\bar{x} = \frac{596}{59}$ et $\bar{y} = \frac{8450}{59}$.

On sait que :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 n_i x_i}{N} \quad \text{et} \quad \bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^4 n_j y_j}{N}$$

Alors :

$$\bar{x} = \frac{2(a + 2) + 6 \times 13 + 10 \times 10 + 14 \times 11 + 18(b + 17) + 22 \times 5}{a + b + 58}$$

$$\bar{y} = \frac{75(a + 5) + 10 \times 125 + 38 \times 175 + 225(b + 5)}{a + b + 58}$$

Or $\bar{x} = \frac{596}{59}$ et $\bar{y} = \frac{8450}{59}$, d'où :

$$\frac{2(a + 2) + 6 \times 13 + 10 \times 10 + 14 \times 11 + 18(b + 17) + 22 \times 5}{a + b + 58} = \frac{596}{59}$$

$$\frac{75(a + 5) + 10 \times 125 + 38 \times 175 + 225(b + 5)}{a + b + 58} = \frac{8450}{59}$$

On obtient ainsi le système suivant :

$$\begin{cases} 239a - 233b = 4900 \\ 161a - 193b = 2580 \end{cases}$$

D'où $a = 40$ et $b = 20$

On suppose $a = 40$ et $b = 20$ dans la suite.

En associant à chaque valeur x_i la moyenne m_i de la série conditionnelle ($y/x = x_i$), on a obtenu le tableau suivant :

x	2	6	10	14	18	22
m	80	113	170	189	199	185

- 2 a Calculons le coefficient de corrélation linéaire.
- b Déterminons d'abord les moyennes \bar{x} et \bar{m} , les variances V_x , V_m , les écarts-types σ_x , σ_m , et la covariance de x et m .

Notons que la série statistique double (x, m) est injective.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^6 x_i, \quad \bar{m} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^6 m_i$$

$$V_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^6 x_i^2 - \bar{x}^2, \quad V_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^6 m_i^2 - \bar{m}^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{V_x}, \quad \sigma_m = \sqrt{V_m}, \quad \text{et} \quad \text{cov}(x, m) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^6 x_i m_i - \bar{x} \bar{m}$$

$$\bar{x} = 12, \quad \bar{m} = 156, \quad V_x \simeq 46,66, \quad V_m \simeq 1933,33$$

$$\sigma_x \simeq 6,83, \quad \sigma_m \simeq 43,96, \quad \text{cov}(x, m) \simeq 267,33$$

- c Calculons maintenant le coefficient de corrélation linéaire r :

$$r = \frac{\text{cov}(x, m)}{\sigma_x \sigma_m}$$

D'où $r \simeq 0,89$

Puisque r est proche de 1, il y a alors une forte corrélation entre x et m .

- d La droite de régression de m en x , notée $D_{m/x}$, a pour équation $m = ax + b$ avec :

$$a = \frac{\text{cov}(x, m)}{V_x} \quad \text{et} \quad b = \bar{m} - a\bar{x}$$

$$\Rightarrow D_{m/x} : m = 5,73x + 87,25$$

- e Si $x = 30$, alors $m \simeq 259,128$. D'où le salaire moyen d'un ouvrier ayant 30 ans d'ancienneté est sensiblement égal à **259130 F**.

Exercice 5(05 points)(BAC 2013)

- 1 a Soit :

$$r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Donc, $r = -0,973$

Ce qui signifie qu'il y a une forte corrélation.

b) La droite de régression de Y en X est :

$$y = ax + b \quad \text{avec} \quad a = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} \quad \text{et} \quad b = \bar{Y} - a\bar{X}$$

$$\Rightarrow y = -0,874x + 4,12$$

Ainsi, $y = -0,874x + 4,12$

b Si $x = 6$ alors $y \simeq -1,124$

Cette équation ne permet pas d'estimer le degré de salinité car au 6^{ième} mois de pluie, le degré de salinité ne peut être négatif.

2 $Z = \ln(Y - 1)$

a Le tableau correspondant à la série (X, Z) est donné par :

X_i	0	1	2	3	4
Z_i	1,182	0,875	0,010	-1,830	-4,610

b Le coefficient de corrélation linéaire de cette série (X, Z) est :

$$r = \frac{\text{cov}(X, Z)}{\sigma_X \sigma_Z} = -0,944$$

La droite de régression de Z en X est :

$$z = ax + b \quad \text{avec} \quad a = \frac{\text{cov}(X, Z)}{V(X)} \quad \text{et} \quad b = \bar{Z} - a\bar{X}$$

$$\Rightarrow z = -1,428x + 1,982$$

D'où, $z = -1,428x + 1,982$

c Exprimons Y en fonction de X . On a : $z = \ln(y - 1)$ et $z = -1,428x + 1,982$ d'où,
 $\ln(y - 1) = -1,428x + 1,982 \Rightarrow y - 1 = e^{-1,428x + 1,982}$
 $\Rightarrow y = e^{-1,428x + 1,982} + 1$

Ainsi, $y = e^{-1,428x + 1,982} + 1$

d Si $x = 6$ alors, $y = 1,001$. Le degré de salinité estimé au 6^{ième} mois est positif, il est très proche de celui du quatrième mois et lui est inférieur.

Donc, l'équation $y = e^{-1,428x + 1,982} + 1$ nous permet de faire cette estimation.

Exercice 6(02,5 points)(BAC 2015)

1 Le coefficient de corrélation linéaire r est défini par

$$r = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

D'où : $r \approx 0,69$.

2 **a** La droite de régression de Y en X , $(D_{Y/X})$, a pour équation $y = 92,59x - 4,35$.

b Il faut investir 3,29 milliards de FCFA si l'on désire un chiffre d'affaire de 300 milliards.