

## Td Calcul vectoriel

### Exercice 1

$ABC$  est un triangle ;  $I$  milieu de  $[AB]$ ,  
 $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$ .

- 1 Faire la figure.
- 2 Montrer que  $I, J$  et  $K$  sont alignés.

**Exercice 2** Soit  $ABCD$  un parallélogramme.

- 1 Construire les points  $H, K$  et  $E$  définis par  
 $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$  ;  $\overrightarrow{AK} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$  ;  $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{8}\overrightarrow{BD}$ .
- 2 Démontrer que  $(KH)$  est parallèle à  $(AC)$  puis, montrer que  $E \in (KH)$ .

### Exercice 3

- 1  $ABC$  est triangle. Construire les points  $M, N, P$  et  $Q$  tels que :
  1.  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
  2.  $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AC}$
  3.  $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$
  4.  $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$
- 2  $ABCD$  est un parallélogramme. Construire les points  $M, N$  et  $P$  tel que :
  1.  $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{5}\overrightarrow{AD}$
  2.  $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$
  3.  $\overrightarrow{AP} = -2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

### Exercice 4

- 1 Exprimer les vecteurs en fonction de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ 
  - a  $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$
  - b  $\vec{v} = \overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{BC}$
  - c  $\vec{w} = \frac{2}{5}(\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CA}$

d  $\vec{v} = 2(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$

- 2  $A, B$  et  $C$  sont trois points distincts du plan. Montrer que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

a  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$  et  $\vec{v} = -12\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$

b  $\vec{u} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$  et  $\vec{v} = 3\overrightarrow{AB} + \frac{15}{4}\overrightarrow{AC}$

c  $\vec{u} = \frac{5}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{15}{2}\overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = -6\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

**Exercice 5** Soit  $ABCD$  un parallélogramme. Soient les points  $I, J$  et  $K$  tels que :

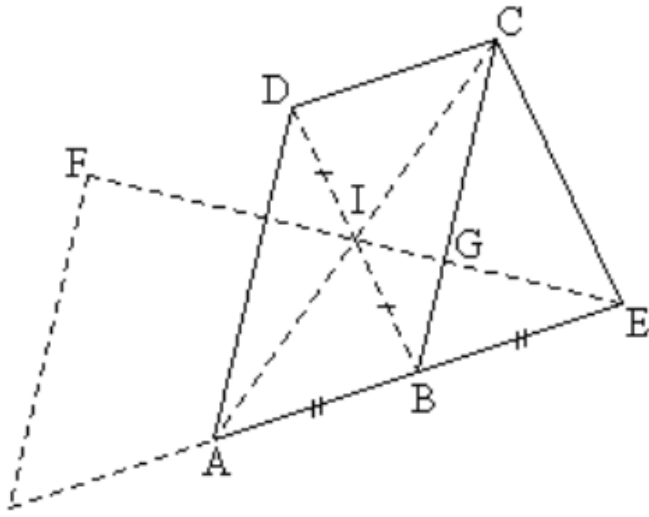
$$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$$

- 1 Construire les points  $I, J$  et  $K$ .
- 2 Exprimer les vecteurs  $\overrightarrow{IJ}$  et  $\overrightarrow{IK}$  en fonction des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BC}$ .
- 3 Montrer que les points  $I, J$  et  $K$  sont alignés.
- 4 Soit  $L$  le point tel que  $BCKL$  soit un parallélogramme.

a Déterminer les coordonnées du point  $L$  dans le repère  $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ .

b Démontrer que les droites  $(AJ)$  et  $(DL)$  sont parallèles.

**Exercice 6** Dans la figure ci-dessous  $ABCD$  est un parallélogramme de centre  $I$ ,  $B$  est le milieu du segment  $[AE]$ ,  $G$  est le centre de gravité du triangle  $ACE$  et  $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$ .



- 1 Déterminer les relations reliant  $\overrightarrow{AE}$  et  $\overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{CG}$  et  $\overrightarrow{CB}$  puis  $\overrightarrow{EI}$  et  $\overrightarrow{EG}$ .
- 2 Calculer  $\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF}$ , puis montrer que  $E, G, I$  et  $F$  sont alignés.

$ABC$  est un triangle quelconque.

- 1 Construire  $M$  et  $N$  tels que :  
 $\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$
- 2 Démontrer que les droites  $(MN)$  et  $(BC)$  sont parallèles.
- 3 Soit  $S$  et  $T$  les milieux respectifs de  $[BC]$  et  $[MN]$ . Démontrer que  $A, S$  et  $T$  sont alignés.

**Exercice 7** Soit  $ABC$  un triangle tel que :  
 $AB = 3,5\text{cm}$  ;  $AC = 4\text{cm}$  et  $BC = 4,5\text{cm}$ .

- 1 Faire une figure.
- 2 Placer les points  $E, F$  et  $I$  définis par :  
 $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$  ;  $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$  et  $I$  milieu de  $[AC]$ .
- 3 Démontrer que :  $\overrightarrow{IF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$   
et  $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ .
- 4 **a** Exprimer  $\overrightarrow{IF}$  en fonction de  $\overrightarrow{AE}$ .  
**b** Que peut-on en déduire pour les vecteurs  $\overrightarrow{IF}$  et  $\overrightarrow{AE}$ .

**Exercice 8** Soit  $ABCD$  un parallélogramme.

- 1 Placer les points  $M, N, P$  et  $Q$  tels que :  
 $2\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$  ;  $2\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{BC}$  ;  
 $2\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{CD}$  et  $2\overrightarrow{DQ} = 3\overrightarrow{DA}$ .
- 2 Exprimer  $\overrightarrow{BM}$  en fonction de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{DP}$  en fonction  $\overrightarrow{DC}$ .
- 3 **a** Exprimer  $\overrightarrow{MN}$  et  $\overrightarrow{QP}$  en fonction de  $\overrightarrow{AB}$  et de  $\overrightarrow{AC}$   
**b** En déduire la nature du quadrilatère  $MNPQ$

### Exercice 9

Soit  $ABCD$  un parallélogramme quelconque.

- 1 Construire les points  $I ; J ; K$  et  $L$  définis par :  $I$  et  $J$  milieux respectifs de  $[AB]$  et  $[AD]$  ;  $4\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$  et  $6\overrightarrow{CL} - \overrightarrow{CB} = \vec{0}$ .
- 2 Démontrer que les droites  $(BD)$  et  $(IJ)$  sont parallèles.
- 3 L'objectif est de montrer que les points  $I ; K$  et  $L$  sont alignés.

- a** Exprimer le vecteur  $\overrightarrow{KI}$  en fonction des vecteurs  $\overrightarrow{BA}$  et  $\overrightarrow{BC}$ .
- b** Exprimer le vecteur  $\overrightarrow{KL}$  en fonction des vecteurs  $\overrightarrow{BA}$  et  $\overrightarrow{BC}$ .
- c** Conclure.

**Exercice 10** Soit  $ABC$  un triangle quelconque,  $I$  milieu de  $[BC]$ .

- 1 Construire les points  $D$  et  $E$  définis par :  
 $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
- 2 Soit  $J$  le milieu du segment  $[DE]$ .  
**a** Démontrer que  $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AI}$   
**b** Démontrer que  $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$   
**c** Que peut-on en déduire pour les points  $A, I$  et  $J$  ?

### Exercice 11

Soit  $ABC$  un triangle quelconque,  $A'$  milieu de  $[BC]$  et  $B'$  milieu de  $[AC]$  ;  $O$  le centre du cercle circonscrit au triangle  $ABC$  et  $G$  son centre de gravité.

- 1 Placer le point  $H$  tel que :  
 $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$
- 2 Montrer que :  $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$  et  $\overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{OB'}$ .  
Que représente  $H$  pour le triangle  $ABC$  ?

3 Quelle est la nature du quadrilatère  $AHA'O$  ?

4 Démontrer que  $G \in (OH)$ .

**Exercice 12** Soit  $ABC$  un triangle quelconque,  $I$  milieu de  $[BC]$ .

1 Construire les points  $D$  et  $E$  définis par :  
 $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

2 Soit  $J$  le milieu du segment  $[DE]$ .

a Démontrer que  $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AI}$

b Démontrer que  $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$

c Que peut-on en déduire pour les points  $A, I$  et  $J$  ?

**Exercice 13** Soit  $ABC$  un triangle quelconque,  $A'$  milieu de  $[BC]$  et  $B'$  milieu de  $[AC]$  ;  $O$  le centre du cercle circonscrit au triangle  $ABC$  et  $G$  son centre de gravité.

1 Placer le point  $H$  tel que :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

2 Montrer que :  $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$  et  $\overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{OB'}$ .  
 Que représente  $H$  pour le triangle  $ABC$  ?

3 Quelle est la nature du quadrilatère  $AHA'O$  ?

4 Démontrer que  $G \in (OH)$ .

**Exercice 14**

Étant donné  $ABC$  est un triangle quelconque ;  
 $E$  et  $F$  les points tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{9}\overrightarrow{AC}$$

1 Faire la figure

2 Montrer que  $A, E$  et  $F$  sont alignés

3 Soit  $G$  et  $H$  les points tels que :  $\overrightarrow{CG} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$   
 et  $\overrightarrow{AH} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ .

a Exprimer  $\overrightarrow{BG}$  et  $\overrightarrow{BH}$  en fonction de  $\overrightarrow{AB}$   
 et  $\overrightarrow{AC}$ .

b En déduire que  $B, G$  et  $H$  sont alignés.

**Exercice 15**  $ABC$  un triangle. Soit  $M$  et  $N$  deux points définis par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

1 Placer les points  $M$  et  $N$  sur une figure.

2 Montrer que les droites  $(BC)$  et  $(MN)$  sont parallèles.

**Exercice 16** Soit  $ABC$  un triangle,  $M$  et  $N$  les points définis par :  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + (1-k)\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AN} = (1-k)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$  avec  $k \in \mathbb{R}$

1 Faire une figure pour  $k = 2$

2 Montrer que pour tout réel  $k$  les vecteurs  $\overrightarrow{MN}$  et  $\overrightarrow{BC}$  sont colinéaires

3 Déterminer les valeurs de  $k$  pour lesquelles

a  $M = N$

b  $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

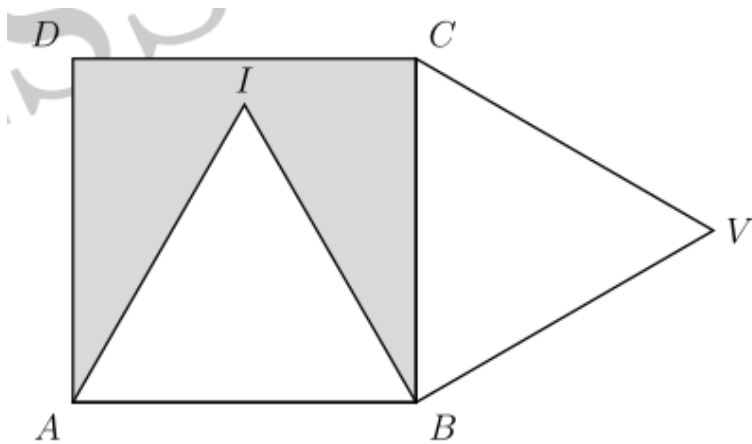
c  $2\overrightarrow{MN} - 3\overrightarrow{BC} = \vec{0}$

d  $BCNM$  est un parallélogramme

e  $BCM N$  est un parallélogramme

f  $BC = MN$

**Exercice 17**



À l'occasion d'un concours de logo organiser dans leur établissement, des élèves d'une classe de 2nde S de ISAK ont été déclarés lauréat grâce à la figure ci-dessus qu'elles ont produite. Sur cette figure,  $ABCD$  est un carré,  $AIB$  et  $BCV$  sont des triangles équilatéraux. Selon le jury, ces jeunes filles ont remporté le premier prix grâce à l'harmonie des couleurs mais surtout grâce à l'exactitude de leur figure qui, en conformité avec les indications données, présente les points  $D, I$  et  $V$  alignés.

Un groupe concurrent pas convaincu de l'alignement de ces trois points, veut en avoir le coeur net. Il sollicite ton aide.

En tant qu'élève en seconde S, en t'appuyant sur tes connaissances en mathématiques, sur les vecteurs, prouve qu'au-delà du tracé de la droite  $(DV)$ , les points  $D$ ,  $I$  et  $V$  sont bel et bien alignés.

**Exercice 18** Soit  $ABCD$  un trapèze tel que  $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD}$ ,  $k$  est un nombre réel et  $M$  le point défini par :  $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$  se projette en  $K$  sur  $(AC)$  et en  $N$  sur  $(CD)$  parallèlement à  $(BC)$ .

- 1 Montrer que  $\overrightarrow{MK} = 2k\overrightarrow{AD}$  et  $\overrightarrow{NK} = (1 - k)\overrightarrow{AD}$ .
- 2 Déterminer le réel  $k$  pour que  $k$  soit le milieu de  $[MN]$ .
- 3 Déterminer le réel  $k$  pour que  $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$ .

**Exercice 19** Soit  $ABCD$  un trapèze tel que  $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD}$ ,  $k$  est un nombre réel et  $M$  le point défini par :  $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$  se projette en  $K$  sur  $(AC)$  et en  $N$  sur  $(CD)$  parallèlement à  $(BC)$ .

- 1 Montrer que  $\overrightarrow{MK} = 2k\overrightarrow{AD}$  et  $\overrightarrow{NK} = (1 - k)\overrightarrow{AD}$ .
- 2 Déterminer le réel  $k$  pour que  $k$  soit le milieu de  $[MN]$ .
- 3 Déterminer le réel  $k$  pour que  $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$ .

#### Exercice 20

Soit  $IJK$  un triangle. On note  $A$  le symétrique de  $K$  par rapport à  $J$ ,  $B$  le symétrique de  $I$  par rapport à  $K$  et enfin  $C$  le symétrique de  $J$  par rapport à  $I$ .

- 1
  - a Exprimer le vecteur  $\overrightarrow{AK}$  en fonction des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AI}$  puis  $\overrightarrow{AI}$  en fonction de  $\overrightarrow{AJ}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .
  - b Exprimer  $\overrightarrow{AJ}$  en fonction de  $\overrightarrow{AK}$ .
  - c En déduire des résultats précédents que :  $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{7}(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ .
- 2 Soit  $P$  le point défini par :  $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ . Placer  $P$  et exprimer  $\overrightarrow{AP}$  en fonction de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ . En déduire des questions 1. et 2. que les points  $A$ ,  $K$ ,  $J$  et  $P$  sont alignés.
- 3 Soit  $Q$  le point défini par :  $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ .

a Exprimer  $\overrightarrow{BQ}$  en fonction des vecteurs  $\overrightarrow{BA}$  et  $\overrightarrow{BC}$  puis  $\overrightarrow{BK}$  en fonction de  $\overrightarrow{BI}$ .

b Exprimer le vecteur  $\overrightarrow{BK}$  en fonction des vecteurs  $\overrightarrow{BA}$  et  $\overrightarrow{BC}$ .

c En déduire des résultats précédents que :  $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{7}(2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC})$ , en déduire de même que les points  $B$ ,  $K$ ,  $I$  et  $Q$  sont alignés.

#### Exercice 21

Soit  $ABCD$  un parallélogramme et les points  $I$  et  $J$  milieux respectifs des segments  $[AB]$  et  $[CD]$ .

- 1 Démontrer que les droites  $(ID)$  et  $(JB)$  sont parallèles.
- 2 Construire les points  $N$  et  $M$  tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

- 3 Exprimer  $\overrightarrow{IM}$  et  $\overrightarrow{ID}$  en fonction des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ . En déduire que  $M$  appartient à la droite  $(ID)$ .
- 4 Exprimer  $\overrightarrow{BJ}$  et  $\overrightarrow{BN}$  en fonctions des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ . En déduire que  $N$  appartient à la droite  $(JB)$ .
- 5 Démontrer que  $MINJ$  est un parallélogramme.
- 6 Soit  $E$  le point d'intersection des droites  $(ID)$  et  $(BC)$ . Démontrer que  $B$  est le milieu du segment  $[CE]$ .

#### Exercice 22

Soit  $ABCD$  un parallélogramme. Soient les points  $I$ ,  $J$  et  $K$  tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{BJ} = \frac{3}{8}\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}.$$

- 1 Construire les points  $I$ ,  $J$  et  $K$ .
- 2 Exprimer les vecteurs  $\overrightarrow{IB}$  et  $\overrightarrow{KJ}$  en fonction des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AD}$ .
- 3 Montrer que les droites  $(BI)$  et  $(JK)$  sont parallèles.
- 4 Soit  $H$  le symétrique de  $K$  par rapport à  $C$ . Montrer que les points  $I$ ,  $J$  et  $H$  sont alignés.