TD : Équations différentielles

Exercice 1 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' - y = 0$
2. $2y' + y = 0$
3. $3y' + \sqrt{2}y = 0$
4. $y'^2 - yy' - 2y^2 = 0$
5. $y'' - 4y' + 3y = 0$
6. $9y'' + 6y' + y = 0$
7. $y'' - 4y' + 13y = 0$
8. $8y'' + y' - 9y = 0$
9. $2y'' - 2\sqrt{2}y' + y = 0$
10. $\frac{1}{3}y'' - 2y' + 9y = 0$
11. $y'' - 4y' + 8y = 0$
12. $y'' + 4y = 0$

Exercice 2 Résoudre dans chacun des cas suivants l'équation différentielle proposée, puis déterminer la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales données.

1. $y' - 3y = 0$; $y(0) = -3$
2. $3y' + 5y = 0$; $y(3) = 5$
3. $y'' - 2y' + y = 0$; $y(0) = y'(0) = 2$
4. $y'' - 4y' + 3y = 0$; $y(0) = 6$; $y'(0) = 10$
5. $4y'' + 9y = 0$; $y(\pi) = 1$; $y'(\pi) = 0$
6. $y'' + 6y' + 9y = 0$; $y(0) = y'(0) = 1$
7. $y'' + y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$
8. $y'' - (\ln x)^2 y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(2) = 1$

Exercice 3 Donner les solutions générales des équations différentielles suivantes après avoir trouvé leurs solutions particulières sous la forme indiquée :

1. $y'' + 2y' - 3y = \cos x$; $f(x) = a\cos x + b\sin x$
2. $y'' - 2y' + 3y = e^{-x}\cos x$; $f(x) = e^{-x}(a\cos x + b\sin x)$
3. $y'' + y' - 2y = \sin x$; $f(x) = a\cos x + b\sin x$
4. $y'' + y' + y = xe^{-x}$; $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

Exercice 4

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_0) : $y'' - 2y' + y = 0$.
2. Soit l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = x^2 - 4x + 2$. Vérifier que le polynôme $h(x) = x^2$ est une solution particulière de (E_0).
3.
   a. Montrer que si f est une solution, alors g telle que $g = f - h$ est une solution de (E_0).
   b. Réciproquement, montrer que si g est une solution de (E_0), alors la fonction f telle que $f = g + h$ est solution de (E).
   c. En déduire la générale des solutions de (E).
4. En déduire une solution de (E) satisfaisant à la condition $f(1) = 1$ et $f'(1) = 0$.

Exercice 5
Soit l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 8y = 20\sin 2x + 10\cos 2x$.

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y' + 8y = 0 \quad (E')$.
2. Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie par : $g(x) = a\cos 2x + b\sin 2x$ est solution de (E).
3. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E').
4. Donner la solution générale de (E).

Exercice 6 Soit f la solution de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$, vérifiant $f(0) = 1$.

1. Déterminer $f(x)$ pour tout réel x.
2. Déterminer les réels a et b tels que la fonction $g(x) = (ax + b)f(x)$ soit solution de l'équation différentielle $y' - 2y = e^{2x}$ et vérifiant $g(0) = 1$.
3. Déduisez-en sans intégration par parties la valeur des intégrales : $I = \int_0^1 (x+1)e^{2x}\,dx$ et $J = \int_0^1 (2x+1)e^{2x}\,dx$

Exercice 7 BAC 2009

1. Résoudre l'équation différentielle
$(E): \quad y'' + 2y' + y = 0$

2. Soit (E') l'équation différentielle
$y'' + 2y' + y = x + 3$.
Déterminer les réels a et b tels que la fonction $h(x) = ax + b$ soit solution de (E').

   a. Démontrer que g est solution de (E') si et seulement si $g - h$ est solution de (E).

   b. Résoudre alors (E').

3. Soit la fonction k définie par :
$k(x) = (x + 2)e^{-x}$

   a. Étudier les variations de k.

   b. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_k) de k au point d'abscisse 0.

   c. Démontrer que le point $I(0; 2)$ est un point d'inflexion de la courbe (C_k).

   d. Tracer (C_k) et (T) dans le même repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 8 BAC 2008

1. Soient les équations différentielles
$(E_0): y' + y = 0$ et $(E): y' + y = e^{-x} \cos x$.

   a. Déterminer les réels a et b tels que la fonction h définie par :
   $h(x) = e^{-x}(a \cos x + b \sin x)$ soit solution de (E).

   b. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de (E_0).

   c. Résoudre (E_0).

   d. Déduire des questions précédentes la solution générale de (E).

   e. Déterminer la solution g de (E) telle que $g(0) = 0$.

2. Soit $I(x) = e^{-x} \sin x$.

   a. Exprimer $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

   b. Étudier les variations de I sur $[0\,;\,2\pi[$.

   c. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} I(x)\,dx$.

   d. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x} \cos x\,dx$ sans utiliser la technique d'intégration par parties.

Exercice 9

Partie A :
Soit $(E): y'' + 3y' + 2y = \dfrac{x-1}{x^2}e^{-x}$, $x \neq 0$.

1. Vérifier que $h(x) = e^{-x} \ln x$ est solution de (E).

2. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de
$(E'): y'' + 3y' + 2y = 0$.

3. Résoudre (E') puis (E).

4. Trouver la solution de (E) dont la courbe passe par $A(1; e^{-1})$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe (Ox).

Partie B : Soit la fonction f définie par :
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}(1 + \ln x) - e^{-1} & \text{si } x \geq 1 \\ (1 - x)e^{-\frac{1}{1-x}} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1. Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer les limites aux bornes.

2. Étudier la continuité de f en 1.

3. a. Montrer que $\forall x \in]1; +\infty[$,
$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = e^{-x}\left(\frac{1 - e^{x-1}}{x - 1} + \frac{\ln x}{x - 1}\right).$$

   b. Étudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter.

Partie C : Soit la fonction g définie par
$g(x) = -\ln x + \dfrac{2}{x} - 1$.

1. Dresser le tableau de variation de g.

2. Calculer $g(1)$ et préciser le signe de $g(x)$.

3. a. Calculer $f'(x)$ sur les intervalles où f est dérivable.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

4. a. Donner la nature de la branche infinie en $+\infty$.

   b. Montrer que $(\Delta): y = 1 - x$ est une asymptote à (C_f) en $-\infty$.

   c. Étudier la position relative de (C_f) par rapport à (Δ) sur $]-\infty\,;\,1[$.

5. Tracer (C_f) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité 1 cm.