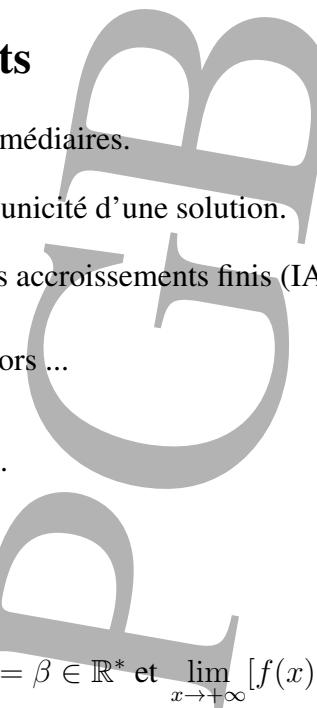


**Devoir n° 1 Du 1<sup>er</sup> Semestre****Exercice 1 :  $0,5 \times 8 = 4$  points**

- 1 Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
- 2 Énoncer le théorème d'existence et d'unicité d'une solution.
- 3 Énoncer le théorème de l'inégalité des accroissements finis (IAF).
- 4 Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$  ( $a \neq 0$ ) alors ...
- 5 Si  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$  alors ...
- 6 Si  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$  alors ...
- 7 Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \beta \in \mathbb{R}^*$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \beta x] = +\infty$  alors ...
- 8 Si  $f$  est continue et strictement décroissante sur  $]-\infty; b]$ , alors  $f(]-\infty; b]) = \dots$

**Exercice 2 : 4 points**

- 1 Calculer les limites suivantes : (3 x 1 pt)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{\sin 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^3 + x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7} - \sqrt{10-x}}.$$

- 2 Donner les primitives des fonctions  $f$  et  $g$  respectivement sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$ . (2 x 0,5 pt)

$$f(x) = (3x-1)(3x^2-2x+3)^3; \quad g(x) = \frac{1-x^2}{(x^3-3x+2)^3}.$$

**Problème : 12 points****Partie A :**

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x}.$$

- 1 Déterminer  $D_f$ . (0,5 pt)
  - a Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . (0,25 pt), (0,5 pt)
  - b Étudier la branche infinie de la courbe  $(C_f)$  au voisinage de  $-\infty$ . (0,75 pt)

c Interpréter la limite de  $f$  au voisinage de  $+\infty$ . (0,75 pt)

2 Étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  à droite de 2 et à gauche de 0, puis interpréter géométriquement les résultats obtenus. (2 pt)

a Justifier la dérivabilité de la fonction sur  $] -\infty, 0[ \cup ]2, +\infty[$ , puis montrer que pour tout  $x \in ] -\infty, 0[ \cup ]2, +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x} - (x - 1)}{\sqrt{x^2 - 2x}}$ . (1,5 pt)

b Montrer que :  $\forall x \in ] -\infty, 0]$ ,  $f'(x) > 0$  et  $\forall x \in ]2, +\infty[$ ,  $f'(x) < 0$ . (1 pt)

c Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ . (1,25 pt)

3 Tracer la courbe  $(C_f)$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . (1,25 pt)

### Partie B :

On considère la fonction  $g$  la restriction de la fonction  $f$  sur  $[2, +\infty[$  :

a Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera. (0,5 pt)

b Calculer  $g^{-1}(2 - 2\sqrt{2})$ . (On donne :  $g(4) = (2 - 2\sqrt{2})$ ). (0,75 pt)

c Déterminer  $g^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$ . (0,5 pt)

d Tracer la courbe  $(C_{g^{-1}})$  dans le même repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . (0,5 pt)