Td Dérivée et Application

Exercice 1
Étudier la dérivabilité de f en x_0

1. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, $x_0 = -2$
2. $f(x) = (1-x)\sqrt{x-1}$, $x_0 = 1$
3. $f(x) = x^2 + |x| + 2$, $x_0 = -2$
4. $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+1}$, $x_0 = 0$
5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x+1} & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$ $\quad x_0 = -1$
6. $f(x) = \begin{cases} x\sqrt{3-x} & \text{si } x \leq 3 \\ (x-3)\sqrt{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$ $\quad x_0 = 3$

Exercice 2 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x-1} & \text{si } x \in]-\infty, -1] \\ x^2 - 1 & \text{si } x \in]-1, 1] \\ 2\sin(x-1) & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f en -1 et 1.
2. Étudier la dérivabilité de f en -1 et 1.
3. Déterminer les intervalles sur lesquels f est dérivable et calculer la fonction dérivée de f.

Exercice 3 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2(x-1)^2}}{(x-1)(|x|+1)} & \text{si } x \neq 1 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 4 Fonction dérivée
Calculer la dérivée de f dans chacun des cas suivants

1. $f(x) = 3x^2 - 3x + 5$
2. $f(x) = -5x^3 + 2x + 1$
3. $f(x) = (2x^2 + 3x - 5)(-6x + 7)$
4. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$
5. $f(x) = \left(-3x^2 + 2x\right)^4$
6. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$
7. $f(x) = -\dfrac{3}{x^2-4}$
8. $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{2x^2+3x-5}$
9. $f(x) = \dfrac{1}{(4-5x)^3}$
10. $f(x) = \sqrt{3x-4}$
11. $f(x) = \sqrt{3x^2+x+1}$
12. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$
13. $f(x) = \left(\dfrac{3x-1}{2x+4}\right)^4$
14. $f(x) = (2x-1)^2(4-3x)^3$
15. $f(x) = \cos(3x+5)$
16. $f(x) = \sqrt{\cos x}$
17. $f(x) = \dfrac{1+\cos x}{\cos x - 3}$
18. $f(x) = \tan^2 x + \cos^2 x$
19. $f(x) = (x^2 - x)\sqrt{-x^2+9}$
20. $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x+7}{x^2+2x+1}}$

Exercice 5

1. Soit la fonction $f(x) = \dfrac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$. Déterminer les réels a et b tels que la courbe (C_f) passe par $A(0;3)$ et admet en ce point une tangente d'équation : $y = 4x + 3$.
2. Soit la fonction $g(x) = ax + b + \dfrac{1}{x}$. Déterminer les réels a et b pour que la courbe (C_g) passe par le point $A\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}-1\right)$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

PGB

3. Déterminer les réels a, b, et c pour que l'hyperbole (H) d'équation $y = \dfrac{ax+b}{x+c}$ ait le point $\Omega(-1;2)$ comme centre de symétrie et admette au point d'abscisse 1, une tangente parallèle à la droite (D) d'équation $y = -x$.

Exercice 6 TVI

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Étudier les variations de f.
2. En déduire le tableau de variations de f.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions.
4. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} près de chacune de ces solutions.

Exercice 7

1. Soit la fonction g définie par :
$g(x) = x\sqrt{x^2+1} - 1$.
   - a. Étudier les variations de g.
   - b. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [0,7]$ tel que $g(\alpha) = 0$.
2. Soit la fonction f définie par :
$f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \sqrt{1+x^2}$ et (C_f) sa courbe représentative.
   - a. Étudier les limites de f aux bornes de D_f, puis étudier les branches infinies de (C_f).
   - b. Montrer que : $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{\sqrt{1+x^2}}$.
   En déduire les variations de f.

Exercice 8 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-1}} & \text{si } |x| > 1 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$$

1. Déterminer D_f.
2. Peut-on prolonger f par continuité en 1 ? En -1 ? Si oui, préciser le prolongement par continuité.
3. Montrer que la fonction g, restriction de f à l'intervalle $]-1;1[$, définit une bijection de $]-1;1[$ vers un intervalle J à préciser.
4. g^{-1} est-elle dérivable en $\dfrac{3}{4}$? Justifier.
5. Déterminer $g^{-1}(x)$.

Exercice 9 Dresser le tableau de variation des fonctions f suivantes :

1. $f(x) = x^2 + 4x - 1$
2. $f(x) = ax^2 + bx + c \, (a \neq 0)$
3. $f(x) = \dfrac{2x-5}{x+1}$
4. $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$
5. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$
6. $f(x) = -4x^3 + 3x$
7. $f(x) = x^4 + 2x^2 - 10$
8. $f(x) = -x^4 + 8x^2 - 5$
9. $f(x) = \dfrac{x^2-x}{x^2+x}$
10. $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x^2-4}$
11. $f(x) = \dfrac{5x^2+2x-11}{x^2-x-2}$
12. $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^2}$
13. $f(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{2x}$
14. $f(x) = x^2 + 2x - 3$
15. $f(x) = \sqrt{x+3}$
16. $f(x) = \dfrac{2x^2+|x-3|}{x^2-|x-1|}$

PCB