Prof : M. BA

Dénombrement

Classe : Première S2

Année scolaire : 2024 – 2025

I. Rappel sur la théorie des ensembles

1. Définition et vocabulaire

Un ensemble est un regroupement d'objet défini par une caractéristique commune ou par une énumération complète.
Chaque objet de l'ensemble est appelé un élément.
Un ensemble est dit fini s'il est constitué d'un nombre fini d'éléments et ce nombre est appelé le cardinal de l'ensemble.
Il existe un ensemble qui ne contient aucun élément, il est appelé l'ensemble vide noté $\varnothing$.

Exemples :
$E = \{a, b, c, d, e\}$; $J = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$
$K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $P = \{n \in \mathbb{N} \mid 10 \leq n \leq 100\}$

Solution :
E, K et P sont des ensembles finis.
$\text{card}(E) = 5$; $\text{card}(P) = 91$; $\text{card}(K) = 6$; $\text{card}(\varnothing) = 0$

2. Partie d'un ensemble :

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
A est dit un sous-ensemble ou une partie de E ssi $x \in A \Rightarrow x \in E \Leftrightarrow A \subset E$ (A inclue dans E)
On écrit que $A \in \mathcal{P}(E)$ où $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des sous-ensembles de E et

$$\text{card } \mathcal{P}(E) = 2^{\text{card}(E)} \quad \Rightarrow \quad \text{card } \mathcal{P}(E) = 2^n$$

Exemple : Soit $E = \{1 ; 2 ; 3\}$
$\text{card}(E) = 3$
$\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^3 = 8$

$$\mathcal{P}(E) = \{E ; \varnothing ; \{1\} ; \{2\} ; \{3\} ; \{1, 2\} ; \{1, 3\} ; \{2, 3\}\}$$

3. Complémentaire d'un ensemble

Soit E un ensemble fini non vide, A un sous-ensemble de E.
On appelle **complémentaire de** A, l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A, noté $\overline{A}$. $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \in E$ et $x \notin A$. $\boxed{\text{card } \overline{A} = \text{card } E - \text{card } A}$

4. Réunion et intersection

Soit A et B deux sous-ensembles de E.
La réunion de A et B est un sous-ensemble de E noté :

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\} \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$$

Propriétés :

- $A \cup B \subset E$
- $A \subset A \cup B$
- $B \subset A \cup B$
- $A \cup E = E$
- $A \cup \overline{A} = E$
- $A \cup \varnothing = A$

L'intersection de A et B est un sous-ensemble de E noté :

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\} \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B$$

Propriétés :

— $A \cap B \subset E$

— $A \cap E = A$

— $A \cap \overline{A} = \varnothing$

— $A \cap B \subset A$

— $A \cap B \subset B$

— $A \cap \varnothing = \varnothing$

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

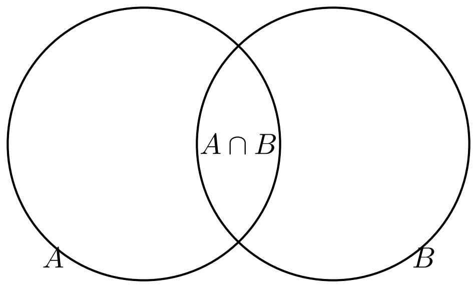

Diagramme de Venn

5. Différence de deux ensembles

Soit A et B deux sous-ensembles de E.
On appelle **la différence entre** A **et** B le sous-ensemble de E noté :

$A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$ (on lit A sans B)
$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \notin B$
$A \setminus B = A \cap \overline{B}$
$\text{card}(A \setminus B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B)$

6. Différence symétrique

On appelle **différence symétrique** le sous-ensemble de E noté :
$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
$\text{card}(A \triangle B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - 2\,\text{card}(A \cap B)$

Exercice d'application

Dans une classe de 45 élèves, 33 ont la moyenne en PC et 24 ont la moyenne en math, 20 élèves ont la moyenne en math et en PC.

1. Calculer le nombre d'élèves qui ont la moyenne en Math **ou** PC.
2. Calculer le nombre d'élèves qui ont la moyenne **qu'en** Math.
3. Calculer le nombre d'élèves qui ont la moyenne **qu'en une seule** des deux matières.
4. Calculer le nombre d'élèves qui **n'ont la moyenne ni en Math ni en PC**.

On notera par A l'ensemble des élèves qui ont la moyenne en PC, B ceux en Maths.

Solution

— $\text{card}(A) = 33\,;\quad \text{card}(B) = 24\,;\quad \text{card}(A \cap B) = 20$

1. $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$

$$\text{card}(A \cup B) = 33 + 24 - 20 = 37$$

Il y a **37 élèves** qui ont la moyenne en Math ou en PC.