Chapitre III Équation Différentielle ($\neq$)

I°) Équation du type : $y' + ay = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$

1/ Définition :

Toute équation (E) : $y' + ay = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$ est appelée
équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre.

Exemple :
(E_1) : $y' + 2y = 0$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre.

I-2) Résolution

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + ay = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$

L'**ensemble des solutions** de (E) est l'**ensemble des fonctions dérivables sur** $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\boxed{f'(x) + af(x) = 0}$$

Soit (E) : $y' + ay = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$
— La fonction nulle est solution de (E)
— $y \neq 0$ avec y solution de (E) sur $\mathbb{R}$

$$y' + ay = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = -ay$$

$$\frac{y'}{y} = -a$$

On intègre :

$$\begin{aligned} \int \frac{y'}{y}\,dx &= \int -a\,dx \\ \ln|y| &= -ax + c \quad (\text{avec } c \in \mathbb{R}) \\ |y| &= e^{-ax+c} = e^c \cdot e^{-ax} \end{aligned}$$

D'où :

$$y_1 = ke^{-ax} \quad \text{avec } k = e^c \in \mathbb{R}^*$$

Conclusion : L'ensemble des solutions est :

$$\boxed{y(x) = ke^{-ax}, \quad k \in \mathbb{R}}$$

Réciproquement :

Soit y une fonction de $(\mathbb{R})$ et $g(x) = y(x)e^{ax}$
Si $g(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors :

$$g(x) = y(x)e^{ax}$$

On a :

$$g'(x) = y'(x)e^{ax} + ay(x)e^{ax} = e^{ax}\left(y'(x) + ay(x)\right)$$

Comme $y'(x) + ay(x) = 0$, alors :

$$g'(x) = e^{ax} \cdot 0 = 0 \Rightarrow g'(x) = 0$$

Donc g est une constante :

$$\text{Il existe } k \in \mathbb{R} \text{ tel que } g(x) = k \Rightarrow y(x)e^{ax} = k \Rightarrow y(x) = ke^{-ax}$$

Conclusion :

$$\boxed{(E): \quad y' + ay = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = ke^{-ax}}$$