BAC 2025

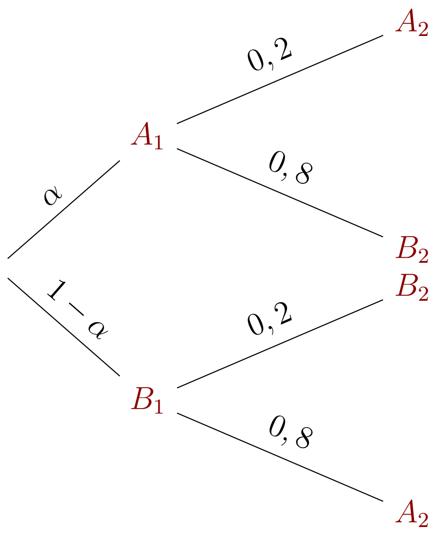
Matière: Mathématiques	Niveau : TS1

Correction

Exercice 1 :(04.75 pts)

Partie I : (02,5 points)

Construisons un arbre pondère correspondant à cette épreuve.



1. Déterminons la valeur de α

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(A_2) \\ &= \alpha \times 0,2 + (1-\alpha) \times 0,8 \\ &= 0,2\alpha + 0,8 - 0,8\alpha \\ &= -0,6\alpha + 0,8 \end{aligned}$$

Si $P(A_1) = P(A_2) \implies \alpha = -0,6\alpha + 0,8$

$$\implies 1,6\alpha = 0,8$$

$$\alpha = \frac{0,8}{1,6}$$

(01 point)

$$\alpha = 0,5$$

2. Calculons la probabilité qu'un athlète se rende au même stade pendant les deux jours.

A_1 : « l'athlète choisit le stade A le 1^{er}jour »

B_1 : « l'athlète choisit le stade B le 1^{er}jour »

A_2 : « l'athlète choisit le stade A le 2^{er}jour »

B_2 : « l'athlète choisit le stade B le 2^{er}jour »

Un athlète se rende au même stade pendant les deux jours se traduit par: $A_1 \cap A_2$ ou $B_1 \cap B_2$

$$
\begin{aligned}
P((A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2)) &= P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap B_2) \\
&= P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \\
&= 0,5 \times 0,2 + 0,5 \times 0,2 \\
&= 0,1 + 0,1 \\
&= 0,2
\end{aligned}
$$

$\boxed{P((A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2)) = 0,2}$ **(0,75 point)**

3 Au deuxième jour, on aperçoit un athlète sortant du stade B. La probabilité qu'il se soit entraîné au même stade la veille

Se traduit par : entrer dans B deux jours successifs, c'est-à-dire : B_1 *sachant* B_2

$$
\begin{aligned}
P_{B_2}(B_1) &= \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} \\
&= \frac{P(B_1) \times P_{B_1}(B_2)}{P(A_1) \times P_{A_1}(B_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(B_2)} \\
&= \frac{0,5 \times 0,2}{0,5 \times 0,8 + 0,5 \times 0,2} \\
&= \frac{0,1}{0,4 + 0,1} \\
&= \frac{0,1}{0,5} \\
&= 0,2
\end{aligned}
$$

$\boxed{P_{B_2}(B_1) = 0,2}$ **(0,75 point)**

Partie II : (02,25 points)

1 La probabilité qu'il y ait deux athlètes heureux

Il ne peut pas y avoir deux athlètes heureux car il ya au moins 3 athlètes donc l'un des stades sera occupé par au moins deux athlètes

$\boxed{\text{La probabilité qu'il y ait deux athlètes heureux est nulle}}$ **(0,5 point)**

2 Un athlète est heureux s'il est seul dans un stade. On note la probabilité que cela arrive parmi n athlètes :

Pour un athlète donné, l'épreuve qui consiste à choisir un stade est une **épreuve de Bernoulli** dont la probabilité du succès (le stade A) est $0,5$.

a Cette épreuve étant effectuée n fois de suite (par les n athlètes) et de manière indépendante, on a un **schéma de Bernoulli**.

On a deux cas :

- Un athlète se présente dans le stade A et $n-1$ athlètes dans le stade B : 1 succès ;
- Un athlète se présente dans le stade B et $n-1$ athlètes dans le stade A : $n-1$ succès.

La probabilité qu'il y ait un athlète heureux parmi ces n athlètes est :

$$p_n = C_n^1 (0,5)^1 (1-0,5)^{n-1} + C_n^1 (0,5)^{n-1} (1-0,5)^1 = 2n \cdot (0,5)^n = \frac{n}{2^{n-1}}$$

$$\boxed{p_n = \frac{n}{2^{n-1}}} \quad \textbf{(0,75 pt)}$$

Autre Approche

Remarque : si on voulait le voir comme une variable aléatoire

On peut modéliser le choix de chaque athlète comme une variable aléatoire de Bernoulli :

- On note X le nombre d'athlètes qui choisissent le stade A,
- Chaque athlète a une probabilité $\frac{1}{2}$ de choisir A ou B,
- Donc $X \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$, c'est-à-dire une loi binomiale.

Un athlète est **heureux** s'il est **seul** dans un stade, ce qui correspond à :

$$\text{un seul athlète dans } A \quad \text{ou} \quad \text{un seul athlète dans } B$$

Autrement dit :

$$p_n = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = n - 1)$$

Avec la loi binomiale :

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Donc :

$$p_n = \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{n-1}\right] \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2n}{2^n}$$

Et comme :

$$2^n = 2 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow \frac{2n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

$$\boxed{p_n = \frac{2n}{2^{n-1}}}$$ **(0,75 point)**

b Étudions la variation de la suite $(p_n)_{n \geq 3}$. **(0,5 point)**

$p_n = \dfrac{2n}{2^{n-1}}$

On a

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= \frac{2(n+1)}{2^n} - \frac{2n}{2^{n-1}} \\ &= \frac{2n+2}{2^n} - \frac{2n}{2^{n-1}} \\ &= \frac{n+1}{2^{n-1}} - \frac{2n}{2^{n-1}} \\ &= \frac{-n+1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

Donc $p_{n+1} - p_n = \dfrac{-n+1}{2^{n-1}}$

Comme $n \geq 3$ alors $-n + 1 < 0$ donc $\dfrac{-n+1}{2^{n-1}} < 0$ d'où $\forall n \geq 3$, $p_n < 0$

Ainsi la suite (p_n) est décroissante