◇◇◇ Lycée de Dindéfélo ◇◇◇			A.S. : 2025/2026
Matière: Mathématiques	Niveau : TS2	Date: 18/12/2025	Durée : 4 heures

Devoir n° 2 Du 1$^{\text{er}}$ Semestre

Exercice 1 : (02,5 points ≈ 36 mns)

1. Déterminer une primitive F de la fonction f sur I.
   - a. $f(x) = (6x-3)(4x^2-4x+2)^3 \quad ; I = \mathbb{R}$ **(0,5pt)**
   - b. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{3+\cos x}} \quad ; I = \mathbb{R}$ **(0,5pt)**
   - c. $f(x) = 2\cos 3x - 3\sin 2x \quad ; I = \mathbb{R}$ **(0,5pt)**
   - d. $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2-1}} + \sin x \sin 2x \quad ; I =]-\infty; -1[$ **(0,5pt)**
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1+i)z + i = 0$. **(0,5pt)**

Exercice 2 : (04,75 points ≈ 60 mns)

1.
   - a. Écrivez le complexe $z = -1+i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle. **(0,75pt)**
   - b. Donner le module et un argument de $z = (1-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}$. **(1pt)**
2.
   - a. Donner le module et un argument de $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1-i$. **(1pt)**
   - b. Déduis en le module et un argument de chacun des complexes $u = \dfrac{z_1}{z_2}$ et u^5. **(1pt)**
   - c. Déduis en les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$. **(1pt)**

Problème : (12,75 points ≈ 144 mns)

On note (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité $1cm$ avec

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-2x^2}{x^2-1} & ; \text{si } x \leq 0 \\ x + \sqrt{x^2+x} & ; \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire : (2pts)

Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = -x^3 + 3x - 4$.

1. Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variations. **(0,75pt)**
2.
   - a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$. **(0,5pt)**
   - b. Donner un encadrement de α à 10^{-1}. **(0,5pt)**
3. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]-\infty; 0]$. **(0,25pt)**

Partie B : Étude de la fonction f **(9pts)**

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f. **(0,5pt)**

2. a. Calculer les limites de f aux bornes de D_f **(1pt)**
   et en déduire l'existence d'une asymptote dont on précisera. **(0,25pt)**

   b. Pour $x \leq 0$, déterminer les réels a, b, c et d tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{cx+d}{x^2-1}$ **(0,5pt)**
   et en déduire la nature de l'asymptote $-\infty$. **(0,25pt)**

   c. Donner la nature de l'asymptote en $+\infty$. **(0,5pt)**

3. a. Montrer que f est continue sur D_f. **(0,75pt)**

   b. Étudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter le résultat obtenu. **(1,5pt)**

4. Démontrer que : $f(\alpha) = -2 + \dfrac{3(\alpha-2)}{\alpha^2-1}$. **(0,5pt)**

5. a. Montrer que $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[$, on a : $f'(x) = \dfrac{-xg(x)}{(x^2-1)^2}$ puis étudier son signe. **(1pt)**

   b. Calculer $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$ et étudier son signe. **(0,75pt)**

   c. Dresser le tableau de variation de f sur D_f. **(0,75pt)**

6. Construire soigneusement la courbe (C_f). **(0,75pt)**

Partie C : Bijection **(1,75pts)**

Soit h la restriction de f sur $I =]0; +\infty[$.

1. Montrer que h réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser. **(0,25pt)**

2. Calculer $h(1)$ et $(h^{-1})'(\sqrt{2}+1)$. **(0,5pt)**

3. Expliciter $h^{-1}(x)$. **(0,5pt)**

4. Construire $(C_{h^{-1}})$ dans le repère précédent. **(0,5pt)**