

Td Limites In

Problème 1

Partie A Soit g la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x(1 + \ln x)^2 - 1$.

- 1 On admettra que g est dérivable sur $]0; +\infty[$.
 - a Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.
 - b Vérifier que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $g'(x) = (1 + \ln x)(3 + \ln x)$.
 - c Étudier le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire le sens de variation de g .
- 2 Dresser le tableau de variation de g . (On ne calculera pas les limites en 0 et $+\infty$).
- 3
 - a Calculer $g(1)$.
 - b En déduire que pour tout $x \in]0; 1[$, $g(x) < 0$ et pour tout $x \in]1; +\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + \frac{1}{1 + \ln x} - 1 & \text{si } x \in]0; \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}; +\infty[\\ f(0) = -1 \end{cases}$$

(C) est la représentation graphique dans le repère orthonormé (O, I, J) (unités : 2cm).

- 1
 - a Montrer que f est continue en 0.
 - b Étudier la dérivabilité de f en 0.
 - c En déduire la tangente à (C) au point $A(0; -1)$.
- 2
 - a Calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - b Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à (C).
 - c Étudier les positions relatives de (C) et (Δ) .
 - d Préciser l'autre asymptote à la courbe (C) de f .
- 3
 - a Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[\setminus \{\frac{1}{e}\}$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1 + \ln x)^2}$.
 - b En déduire le sens de variation de f .
 - c Dresser son tableau de variation.

Partie C

- 1 Calculer la dérivée de la fonction h définie sur $]\frac{1}{e}; +\infty[$ par $h(x) = \ln(1 + \ln x)$.
- 2
 - a En déduire les primitives sur $]\frac{1}{e}; +\infty[$ de la fonction $k : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$.
 - b Déterminer la primitive de k qui prend la valeur -1 en 1.

Problème 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2cm.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.

- 1 Calculer $g'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.
En déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- 2 Calculer $g(1)$ et en déduire l'étude du signe de $g(x)$ pour x appartenant à $]0; +\infty[$.

Partie B : Détermination de l'expression de la fonction f

On admet qu'il existe deux constantes réelles a et b telles que, pour tout nombre réel x appartenant à $]0; +\infty[$, $f(x) = ax + b - \frac{\ln x}{x}$.

- 1 On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f .
Calculer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.
- 2 Sachant que la courbe (C) passe par le point de coordonnées $(1; 0)$ et qu'elle admet en ce point une tangente horizontale, déterminer les nombres a et b .

Partie C : Étude de la fonction f

On admet désormais que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$.

- 1
 - a Déterminer la limite de la fonction f en 0 et donner une interprétation graphique de cette limite.
 - b Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
- 2
 - a Vérifier que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
 - b Établir le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - c En déduire le signe de $f(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.
- 3 On considère la droite (D) d'équation $y = x - 1$.
 - a Justifier que la droite (D) est asymptote à la courbe (C) .
 - b Étudier les positions relatives de la courbe (C) et de la droite (D) .
 - c Tracer la droite (D) et la courbe (C) dans le plan P muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie D : Calcul d'aire

On note A la mesure, exprimée en cm^2 , de l'aire de la partie du plan P comprise entre la courbe C , l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

- 1 On considère la fonction H définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $H(x) = (\ln x)^2$.
On désigne par H' la fonction dérivée de la fonction H .
 - a Calculer $H'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - b En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- 2 Calculer A et donner sa valeur arrondie au mm^2 près.

Problème 3

Partie A On considère g la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$g(x) = 1 + x(2 \ln |x| + 1)$$

- 1
 - a Justifier que g est définie sur $] - \infty; 0[\cup] 0; +\infty[$.
 - b Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
- 2
 - a Étudier le sens de variation de g .
 - b Dresser le tableau de variation de g .
- 3
 - a Calculer l'image de -1 par g .
 - b Déterminer l'image J par g de l'intervalle I tel que : $I =] - \infty; -e^{-\frac{3}{2}}]$.
 - c Démontrer que la restriction h de g sur l'intervalle I est une bijection de I sur J .
 - d En déduire l'ensemble des solutions de l'équation : $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$.
- 4 Déduire de tout ce qui précède que :
 $\forall x \in] - \infty; -1[, g(x) < 0$ et $\forall x \in] - 1; 0[\cup] 0; +\infty[, g(x) > 0$.

Partie B On considère f la fonction numérique de la fonction de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x(x \ln |x| + 1) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (Unité : 5cm)

- 1 Démontrer que f est continue en 0.
- 2
 - a Donner l'ensemble de définition de f' et déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
 - b Étudier la dérivabilité de f en 0.
 - c Déterminer la fonction dérivée f' et déterminer le tableau de variation de f .
- 3
 - a Écrire une équation de la tangente (D) à la courbe (C) au point O .
 - b Démontrer que (D) coupe (C) en deux points E et F et calculer leurs coordonnées.
 - c Étudier la position de (C) par rapport à (D) .
- 4 Démontrer que (C) coupe l'axe (OI) en un point K d'abscisse β tel que $-1,8 < \beta < -1,7$.
- 5 Construire (C) .

Partie C

- 1 Soit α un réel appartenant à $]0; 1[$.
 À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_{\alpha}^1 x^2 \ln(x) dx$.
- 2
 - a Calculer l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan limitée par (C) , la droite (D) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \alpha$.
 - b Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow 0} A(\alpha)$.

On prendra : $\ln(2) \approx 0,7$; $\ln(3) \approx 1,1$; $\ln(5) \approx 1,6$; $\ln(17) \approx 2,9$; $e \approx 2,7$; $\sqrt{e} \approx 1,6$.

Problème 4

Partie A

On considère la fonction g dérivable et définie sur \mathbb{R}^* par :

$$g(x) = -x^3 + x + 1 - \ln |x|$$

- 1 Montrer que -1 est un zéro de la fonction polynôme P définie par : $P(x) = -3x^3 + x - 2$.
- 2
 - a Déterminer le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x .
 - b Calculer les limites de g aux bornes des intervalles de son ensemble de définition.
 - c Étudier les variations de g .
 - d Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique. On note α cette solution. Montrer que : $1,2 < \alpha < 1,3$.
 - e En déduire que : $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; \alpha[, g(x) > 0$; $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$.

Partie B

On considère la fonction f dérivable et définie sur \mathbb{R}^* par :

$$f(x) = -x + 1 - \frac{x - \ln|x|}{x^2}$$

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) . (Unité graphique : 2cm)

- 1 Calculer les limites de f aux bornes des intervalles de son ensemble de définition.
- 2
 - a Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.
 - b Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
- 3 Déterminer une équation de la tangente (T) au point d'abscisse -1 .
- 4 Déterminer que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à la courbe (C) .
- 5
 - a Étudier les variations de la fonction h définie sur \mathbb{R}^* par : $h(x) = x - \ln|x|$.
 - b En déduire que (D) coupe (C) en un point unique d'abscisse β vérifiant : $\ln(-\beta) = \beta$.
 - c Montrer que : $-0,57 < \beta < 0,56$.
 - d Déterminer la position de (C) par rapport à (D) .
- 6 Construire (T) , (D) et (C) .
- 7 Démontrer que la fonction numérique F définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{x} - \ln x - \frac{(\ln x)^2}{x}$$
 est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

Problème 5

Partie A

Soit g , la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par $g(x) = (x+2)^2 + \ln|x+2|$.

- 1
 - a Calculer les limites de g au borne de son ensemble de définition.
 - b Etudier les variations de g sur $] -2; +\infty[$.
- 2
 - a Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β dans $] -2; +\infty[$.
 - b Montrer que β vérifie $-1,35 < \beta < -1,34$.
 - c Déterminer le signe de $g(x)$ sur $] -2; +\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie par $f(x) = -x - 1 + \frac{1 + \ln(x+2)}{x+2}$ et (ε) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) . Unité 2 centimètres.

- 1
 - a Déterminer l'ensemble de définition de f et la limite de f en $+\infty$.
 - b Déterminer la limite de f à droite en -2 . Interpréter graphiquement le résultat.
 - c Montrer que, $\forall x \in]-2; +\infty[$; $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x+2)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .
 - d Montrer que $f(\beta) = -2\beta - 3 + \frac{1}{\beta+2}$.
- 2
 - a Montre que la droite $(D) : y = -x - 1$ est asymptote à (ε) .
 - b Déterminer les coordonnées de A intersection de (ε) et de (D) .
 - c Etudier la position de (ε) par rapport à (D) .
- 3 Construire (ε) et (D) sur le même graphique.
- 4 Déterminer G , la primitive de $g(x)$ tel que $g(x) = (x+2)^2 + \ln(x+2)$ sur $] -2; +\infty[$ et s'annule en -1 .
Sachant que la primitive sur $] -2; +\infty[$ de $\ln(x+2)$ est $(x+2)\ln(x+2) - (x+2)$.
- 5
 - a Si h est la restriction de f à l'intervalle $[\beta; +\infty[$, montrer que h est une bijection de $[\beta; +\infty[$ sur une partie K que l'on déterminera.
 - b Calculer $h(-1)$.
 - c Montrer h^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(h^{-1})'(1)$.
 - d Construire (ε') , la représentation graphique de h^{-1} , bijection réciproque de h sur le graphique précédent.

Problème 6

Partie A : Etude d'une fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{2x} - 4(x-1)e^x - 2$$

- 1
 - a Calculer la limite de f en $-\infty$.
 - b Montrer que $f(x) = xe^{2x} \left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{4}{e^x} + \frac{4}{xe^x} - \frac{2}{xe^{2x}}\right)$ et en déduire la limite de f en $+\infty$.
- 2 Etudier les variations de f .
- 3 Soit (C_f) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé, unité graphique 2cm.
 - a Etudier les branches infinies de (C_f) .
 - b Montrer que (C) coupe l'axe des abscisses en un point, dont l'abscisse α appartient à l'intervalle $[-2; -1]$.
 - c Tracer (C_f) . On prendra $\ln 2 \approx 0,7$.
- 4 Montrer que $F(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) e^{2x} + 4(2-x)e^x$ est une primitive de $f(x) + 2$.

Partie B : Etude d'une nouvelle fonction numérique de variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} g(x) = (x^2 - 4x) \ln x - \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 4) & \forall x > 0 \\ g(0) = -2 \end{cases}$$

- 1 Montrer que : $g(x) = f(\ln x), \forall x > 0$.
- 2 Etudier la continuité et la dérivabilité de g à droite en 0.
- 3 Calculer les limites aux bornes de son domaine.
- 4 Etudier les variations de g .
- 5 Soit (C_g) la courbe représentative de g dans un repère orthonormé, unité 2cm.
 - a Etudier la branche infinie de (C_g) .

Problème 7

Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par : $f(x) = \frac{1}{1 - xe^{-x}}$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct (O, I, J) . Unité graphique : 2cm

Partie A

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = 1 - xe^{-x}$

- 1 Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (x - 1)e^{-x}$
- 2 Déterminer le sens de variation de g puis, dresser le tableau de variation de g (sans les limites aux bornes).
- 3 Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$.

Partie B

- 1 Démontrer que l'ensemble de définition de f est \mathbb{R} .
- 2 Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En donner une interprétation graphique.
- 3
 - a Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{(1 - x)e^{-x}}{(1 - xe^{-x})^2}$.
 - b Déterminer le sens de variation de f puis dresser le tableau de variation de f .
- 4
 - a Démontrer qu'une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0 est $y = x + 1$.
 - b Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x - 1 = \frac{(x + 1 - e^x)xe^{-x}}{1 - xe^{-x}}$.
 - c Déterminer le signe de la fonction h telle que : $h(x) = x + 1 - e^{-x}$.
 - d Dédire de la question précédente les positions relatives de (C) et de (T) .
- 5 Construire (T) et (C) .

Problème 8

Partie A : (Etude d'une fonction auxiliaire g)

Soit g la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x - 2 - 2x \ln x$

- 1 Justifier que l'ensemble des solutions de l'inéquation : $-2 \ln x - 1 \geq 0$ est $S =]0; e^{-\frac{1}{2}}]$
- 2
 - a Calculer $g'(x)$.
 - b Etudier les variations de g .
- 3
 - a Etablir le tableau de variation de g . (On ne cherchera pas à calculer les limites de g).
 - b En déduire que : $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) < 0$.

Partie B : (Etude et représentation graphique d'une fonction f)

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = (x-1)^2 - x^2 \ln x$ si $x \in]0; +\infty[$ et $f(0) = 1$.
On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) .
L'unité graphique est 2cm.

- 1
 - a Calculer la limite de f en $+\infty$.
 - b Justifier que la courbe (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.
- 2
 - a Justifier que f est continue en 0.
 - b Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -2$.
- 3 Soit (T) la droite d'équation $y = -2x + 1$ et d la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $d(x) = f(x) - y$.
 - a Justifier que (T) est la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
 - b Vérifier que pour tout $x \in]0; +\infty[, d(x) = x^2 - x^2 \ln x$.
 - c Etudier la position relative de (C) par rapport à (T) .
- 4
 - a Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$.
 - b Etablir le tableau de variation de la fonction f .
- 5
 - a Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$.
 - b Vérifier que $\alpha = 1$ et démontrer que $f(x) \geq 0$ si $0 \leq x \leq 1$ et $f(x) \leq 0$ si $x \geq 1$.
- 6 Construire (T) et (C) .

Partie C : (Etude d'une primitive F d'une restriction de la fonction f)

Soit F la primitive de f sur $[1; +\infty[$ qui s'annule en e . (On ne cherchera pas à déterminer F).

- 1 Déterminer $F(e)$ et $F'(x)$. (On justifiera chaque réponse).
- 2 Démontrer que F est une bijection de $]1; +\infty[$ vers $F(]1; +\infty[)$.
- 3 Soit F^{-1} la réciproque de F . Calculer $(F^{-1})'(0)$.

Problème 9

On désigne par (C) la courbe de la fonction f ci-dessous dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ dans le plan d'un repère orthonormé $(O; I, J)$. L'unité de longueur : 2 cm.

Partie A : On considère la fonction f définie par : $f(x) = x - 1 - \frac{2}{x} - \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right|$

- 1 Montrer que f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

2 Montrer que :

- Pour tout $x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$; $f(x) = x - 1 - \frac{2}{x} - \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$
- Pour tout $x \in]0; 1[$; $f(x) = x - 1 - \frac{2}{x} - \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$

- 3 Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 4 Calculer la limite de f en 1. Interpréter graphiquement ce résultat.
- 5 a Calculer les limites de f à gauche en 0 et à droite en 0.
b Interpréter graphiquement ces résultats.

Partie B : Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x^3 - x^2 + x - 2$.

- 1 Calculer $g'(x)$, g' étant la fonction dérivée de g .
- 2 Déterminer le sens de variation de g .
- 3 a Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans \mathbb{R} et que $1 < \alpha < 1,5$.
b En déduire un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.
- 4 Montrer que pour tout $x \in]-\infty; \alpha[$; $g(x) < 0$ et pour tout $x \in]\alpha; +\infty[$; $g(x) > 0$.
- 5 Montrer que pour tout nombre réel x élément de $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(x-1)}$.
- 6 a Déterminer le signe de $f'(x)$.
b Dresser le tableau de variation de f .

Partie C

- 1 Soit (D) la droite d'équation $y = x - 1$.
Montrer que la droite (D) est une asymptote à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2 Calculer $f(-2)$; $f(-\frac{1}{2})$ et $f(\frac{1}{2})$.
- 3 Construire dans le repère $(O; I, J)$ la courbe (C) et ses asymptotes. On prendra $\alpha \approx 1,3$.

Partie D

On considère les fonctions h et k définies sur $]2; +\infty[$ par $h(x) = (x-1)\ln(x-1) - x\ln x$ et on admettra que pour tout x élément de $]2; +\infty[$, $f(x) - x + 1 < 0$.

- 1 Calculer $h'(x)$, h' étant la dérivée de h .
- 2 Calculer l'aire de la partie limitée par la courbe (C) , la droite (D) et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

Problème 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Unité : $OI = 2\text{cm}$ et $OJ = 1\text{cm}$.

Partie A

Soit g la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $g(0) = -1$ et $g(x) = \frac{x}{(\ln(x))^2} - 1$ et (C_g) sa courbe.

- 1
 - a Déterminer l'ensemble de définition de g .
 - b Calculer les limites de g en 1 et en $+\infty$.
 - c Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement ce résultat.
- 2
 - a Démontrer que g est continue en 0.
 - b Étudier la dérivabilité de g en 0 et interpréter graphiquement ce résultat.
- 3 On admet que g est dérivable sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.
 - a Démontrer que $\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[; g'(x) = \frac{\ln(x)(\ln(x) - 2)}{(\ln(x))^4}$.
 - b Déterminer le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.
- 4
 - a Démontrer que l'équation $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; 1[$.
 - b Vérifier que $0,4 < \alpha < 0,5$.
 - c En déduire que : $\forall x \in [0; \alpha]; g(x) < 0$
 $\forall x \in]\alpha; 1[\cup]1; +\infty[; g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction numérique f définie sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x)}$ et (C) , sa courbe.

- 1
 - a Calculer les limites de f en 0, en 1 et en $+\infty$.
 - b Interpréter graphiquement les résultats précédents.
- 2 On admet que f est dérivable sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.
 - a Démontrer que $\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
 - b Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation de f .
- 3 Démontrer que $f(\alpha) = \frac{1 - \sqrt{\alpha}}{\alpha}$. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.
- 4 Construire la courbe (C) . On prendra $\alpha \simeq 0,5$.

Partie C

Soit h la restriction de f à $]1; +\infty[$.

- 1 Démontrer que h est la bijection de $]1; +\infty[$ sur un intervalle K que l'on déterminera.
- 2 On note h^{-1} la bijection réciproque de h et (Γ) sa représentation graphique.
 - a Dresser le tableau de variation de h^{-1} .
 - b Calculer $h(e)$; $h^{-1}\left(\frac{1-e}{e}\right)$ et $(h^{-1})'\left(\frac{1-e}{e}\right)$.
 - c Déterminer une équation de la tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse $\frac{1-e}{e}$.
- 3 Construire (Γ) dans le même repère que (C) .

Problème 11

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} \forall x > 0, g(x) = 1 - x \ln x \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

- 1
 - a Etudier la continuité de g en 0.
 - b Etudier la dérivabilité de g en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
- 2 Calculer la limite de g en $+\infty$.
- 3 Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations.
- 4
 - a Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]e^{-1}; +\infty[$.
 - b Justifier que : $1,7 < \alpha < 1,8$.
- 5 Démontrer que :
$$\begin{cases} \forall x \in [0; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in [\alpha; +\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = e^{3-x} \ln x$

(C_f) désigne sa représentation graphique dans le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$ Unité graphique : 2cm

- 1 Calculer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
- 2
 - a Vérifier que : $\forall x \in]0; +\infty[: f(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right) \left(\frac{x}{e^x}\right) e^3$
 - b En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
- 3
 - a Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{e^{3-x}}{x} g(x)$.
 - b En déduire le sens de variations de f .
- 4
 - a Montrer que : $f(\alpha) = \frac{e^3}{\alpha e^\alpha}$.
 - b En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
 - c Dresser le tableau de variations de f .
- 5 Construire (C_f) .
- 6 Soit h la restriction de f à l'intervalle $]0; \alpha[$.
 - a Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de départ, l'arrivée d'arrivée.
 - b Dresser le tableau de variation de h^{-1} .
 - c Calculer $(h^{-1})'(0)$.

Problème 12

Partie A

On considère l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = xe^x$

- 1 Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$
- 2 Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur \mathbb{R} par $u(x) = (ax + b)e^x$.
 - a Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).
 - b Montrer que v est une solution de l'équation (1) si et seulement si $u + v$ est une solution de l'équation (2).
 - c En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (1).
- 3 Déterminer la solution f de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = 2e^x - x - 2$

- 1 Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
- 2 Étudier le sens de variation de g , puis dresser son tableau de variation.
- 3
 - a Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions réelles : 0 et α telle que $-1,6 < \alpha < -1,5$.
 - b Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie C : Etude de la fonction principale f

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; I; J)$. (Unité : 4cm)

- 1 Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
- 2
 - a Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x g(x)$.
 - b En déduire les variations de f et dresser le tableau de variation de f .
- 3 Montrer que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.
- 4 Tracer (C) .

Partie D : Calcul d'aire

Soit m un réel négatif.

- 1 Interpréter graphiquement l'intégrale $I = \int_m^0 f(x) dx$
 - a Calculer $\int_m^0 xe^x dx$ à l'aide d'une intégration par parties.
 - b En déduire la valeur de I .
- 2 Calculer la limite de I lorsque m tend vers $-\infty$.

Problème 13

L'objet de ce problème est la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x(x - (\ln x)^2) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$.
Unité graphique 5cm.

Partie A

On considère la fonction h dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par $h(x) = 2 - \frac{2}{x} - 2\frac{\ln x}{x}$.

- 1
 - a Calculer $h'(x)$ et étudier les variations de h .
 - b En déduire que $\forall x \in]0; +\infty[, h(x) \geq 0$.
- 2 On considère la fonction g dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par $g(x) = 2x - 2\ln(x) - (\ln x)^2$.
 - a Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.
 - b Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x) = h(x)$.
 - c Étudier les variations de g .
 - d Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et vérifier que $0,1 < \alpha < 0,2$.
 - e Démontrer que
$$\begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$$

Partie B

- 1 Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2 Montrer que f est continue en 0.
- 3
 - a Étudier la dérivabilité de f en 0.
 - b Interpréter graphiquement ce résultat.
- 4
 - a Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
 - b Interpréter graphiquement les résultats.
 - c Démontrer que $f(\alpha) = \alpha(-\alpha + 2\ln(\alpha))$.
- 5
 - a On suppose que f est dérivable sur $]0; +\infty[$.
 - b On suppose que f est dérivable sur $]0; +\infty[$. Calculer $f'(x)$ et montrer que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$.
 - c Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

Partie C

- 1 Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
- 2 Soit la fonction $k(x) = f(x) - (2x - 1)$.
 - a Vérifier que $k'(x) = g(x) - 2$ et que $k''(x) = h(x)$.
 - b En déduire le sens de variation de k' . Calculer $k'(1)$ puis donner le signe de k' .
 - c Dresser le tableau de variation de k puis donner le signe de k . (On ne calculera pas de limites).
 - d En déduire la position relative de (C) et de la droite (T) .

- ③ Tracer (C) et (T) . On prendra $\alpha = 0, 1$.
- ④ Soit la fonction q , restriction de f à l'intervalle $[\alpha; +\infty[$.
 - a Montrer que q admet une bijection réciproque notée q^{-1} dont on précisera les ensembles de départ et d'arrivée.
 - b Dresser le tableau de variation de q^{-1} .
 - c Calculer $q(1)$, $q^{-1}(1)$ et $(q^{-1})'(1)$.
 - d Construire la courbe de q^{-1} dans le même repère que (C) .

Problème 14

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^x(1-x) + 1$.

- ① Étudier le sens de variation de g .
- ② Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1, 27; 1, 28]$. On note α cette solution.
- ③ Déterminer le signe de $g(x)$ sur $] -\infty; 0]$.
Montrer que $g(x) > 0$ sur $[0; \alpha[$ et $g(x) < 0$ sur $] \alpha; +\infty[$.

Partie B :

Étude de la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x}{e^x + 1} + 2$.

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$; unités graphiques : 1cm sur l'axe des abscisses et 2cm sur l'axe des ordonnées.

- ①
 - a Déterminer la limite de f en $-\infty$.
 - b Démontrer que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique (d) dont on déterminera l'équation.
- ② Étudier la position de (C_f) par rapport à (d) .
- ③
 - a Montrer que la fonction dérivée de f a même signe que la fonction g étudiée dans la **Partie A**.
 - b Montrer qu'il existe deux entiers p et q tels que $f(\alpha) = p\alpha + q$.
 - c Dresser le tableau des variations de la fonction f .
- ④ Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec ses asymptotes et sa tangente au point d'abscisse α .

Partie C : Encadrement d'aire

Pour tout entier naturel n , tel que $n \geq 2$, on donne D_n , l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan, dont les coordonnées vérifient $2 \leq x \leq n$ et $2 \leq y \leq f(x)$, et on appelle A_n son aire, exprimée en unité d'aire.

- ① Faire apparaître D_n sur la figure.

Problème 15

On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{1-x} + \ln|x|$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O; I; J)$ d'unité 2cm.

Partie A (Etude d'une fonction auxiliaire)

Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = xe^{1-x}$

- 1 Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- 2 Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (1 - x)e^{1-x}$.
- 3 Déterminer les variations de g puis dresser son tableau de variation.
- 4 Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq 1$.

Partie B (Etude de la fonction f)

Soit $f(x) = e^{1-x} + \ln|x|$

- 1 Déterminer D_f l'ensemble de définition de f .
- 2
 - a Calculer la limite de f en 0.
 - b En déduire une interprétation graphique du résultat.
- 3
 - a Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
 - b Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
 - c Interpréter graphiquement les résultats.
- 4
 - a Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{1 - g(x)}{x}$.
 - b En déduire le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .
- 5 Déterminer les variations de f puis dresser son tableau de variation.
- 6
 - a Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β tels que $0,08 < \alpha < 0,09$ et $-0,06 < \beta < -0,05$.
 - b Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
 - c Construire (C) avec précision.

Partie C

- 1 Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $U_n = \int_n^{n+1} e^{-x} dx$ et $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$
 - a Démontrer que $(U_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - b Exprimer U_n puis S_n en fonction de n .
- 2
 - a Démontrer que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est croissante.
 - b Démontrer que $(S_n)_{n \geq 1}$ est majorée par $\frac{1}{e}$.
 - c Les suites $(U_n)_{n \geq 1}$ et $(S_n)_{n \geq 1}$ sont-elles convergentes ? Justifier votre réponse.
- 3 Soit $(V_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $V_n = \int_1^{n+1} \ln|x| dx$
 - a En utilisant une intégration par parties, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = (n+1) \ln(n+1) - n$
 - b La suite $(V_n)_{n \geq 1}$ est-elle convergente ? Justifier votre réponse.

Partie A

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = x + 1 - (x + 2) \ln |x + 2|, \quad x \neq -2 \text{ et } g(-2) = -1.$$

- 1 a Démontrer que g est continue en -2 .
b Étudier le dérivabilité de g en -2 . Interpréter graphiquement le résultat.
- 2 Calculer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
- 3 Calculer $g'(x)$ pour $x \neq -2$, étudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
- 4 a Démontrer que pour $x \neq -1$, g s'annule en une valeur α comprise entre $-5,6$ et $-5,5$.
b En déduire que : $\forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq -2$ par : $f(x) = \frac{\ln |x + 2|}{x + 1}$ si $x \neq -1$ et $f(-1) = 1$.

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans le plan du repère orthonormé $(O; I; J)$. Unité graphique 2cm.

- 1 Démontrer que f est continue en -1 .
- 2 On suppose que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$.
Démontrer que f est dérivable en -1 .
- 3 a Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
b Interpréter graphiquement les résultats.
c Calculer la limite de f à droite et à gauche en -2 .
d Interpréter graphiquement les résultats.
- 4 a Démontrer que pour tout réel x , $f'(x)$ et $\frac{g(x)}{x+2}$ ont le même signe.
b Dresser le tableau de variation de f .
c Démontrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 2}$.

Partie C

- 1 Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse -1 .
- 2 On pose $h(x) = x^2 - 1 + 2 \ln(x + 2)$ pour $x > -2$.
a Étudier le sens de variation de h .
b Calculer $h(-1)$. En déduire le signe de h .
c Démontrer que (C_f) est au-dessus de la tangente (T) pour $x > -2$.
- 3 Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (C_f) et de l'axe des abscisses.
- 4 Tracer (T) et (C_f) .

Partie A

On considère la fonction g de la variable réelle x définie pour tout $x > 0$ par $g(x) = 1 - x - 2 \ln x$.

- 1 Calculer $g(1)$.
- 2 Calculer la limite de g en 0 et en $+\infty$.
- 3 Étudier les variations de g et en déduire son tableau de variation.
- 4 Démontrer que : $\forall x \in]0; 1[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]1; +\infty[, g(x) < 0$.

Partie B

Soit la fonction h de la variable réelle x définie pour tout $x > 0$ par $h(x) = 2 + x - x^2 \ln x$.

- 1 Calculer les limites de h en 0 et en $+\infty$ et en déduire que h est prolongeable par continuité en 0.

Soit la fonction f de représentation graphique (C) dans le plan muni du repère orthogonal $(O; I; J)$ d'unités 1 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées, définie par :

$$\begin{cases} f(x) = h(x) \text{ pour } x > 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

- 2 Calculer la limite de f en $+\infty$.
- 3 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et en déduire l'interprétation graphique correspondante.
- 4 **a** Démontrer que f est dérivable en 0.
b En déduire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
- 5 Démontrer que $\forall x \in [0; +\infty[, f'(x) = g(x)$ et étudier les variations de f .
- 6 Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $2, 2 < \alpha < 2, 3$.
- 7 Tracer (T) puis la courbe (C) .

Partie C

Soit k la fonction définie pour tout $x \geq 1$ par $k(x) = \frac{x^3}{3} \left(-\frac{1}{3} + \ln x \right)$.

- 1 Déterminer $k'(x)$ où k' est la dérivée de la fonction k .
- 2 En déduire une primitive de f sur $[1; +\infty[$.
- 3 Démontrer que $g(\alpha) = -\frac{4}{3} - \alpha - 1$.

Problème 18

Dans tout le problème on admettra que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$ pour tout entier naturel n .

Partie A

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$.

- 1 **a** Calculer la limite de g en $-\infty$.

b Vérifier que $g(x) = 1 - (1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2})x^2e^{-x}$ pour tout nombre réel $x \neq 0$. En déduire la limite de g en $+\infty$.

2 On admet que g est dérivable sur \mathbb{R} .

a Calculer la dérivée g' de g et vérifier que $g'(x) = (x - 2)^2e^{-x}$.

b En déduire le signe de $g'(x)$.

3 Etablir le tableau de variation de g .

4 **a** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique sur \mathbb{R} .

b On désigne par α cette solution. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α .

5 Déduire de ce qui précède que :

$$\forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0 \text{ et } \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0.$$

Partie B

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$.

1 **a** Vérifier que $f(x) = x \left[1 - \frac{1}{x} + (x + \frac{2}{x})e^{-x} \right]$ pour tout réel $x \neq 0$. En déduire la limite de f en $-\infty$.

b Calculer la limite de f en $+\infty$.

2 On admet que f est dérivable sur \mathbb{R} .

Calculer la dérivée f' de f et vérifier que $f'(x) = g(x)$ pour tout x réel.

3 En déduire, à l'aide de la partie A, les variations de f et donner son tableau de variation.

4 Démontrer que $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$.

5 **a** Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

b Préciser la position de (C) par rapport à (Δ) .

6 Donner une équation de la tangente (T) à (C) en son point d'abscisse 0.

7 Tracer (Δ) , (T) puis (C) .

Problème 19

Le but du problème est l'étude de la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{2\ln(x) - 1}{x} \text{ et } (C) \text{ sa courbe représentative dans le repère } (O; I; J).$$

Unité : 2 cm

Partie A :

On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = -x^2 + 6 - 4\ln(x)$.

1 Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

2 Étudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

3 **a** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution α dans $]0; +\infty[$.

b Vérifier que $1,86 < \alpha < 1,87$.

c Montrer que : $\forall x \in]0; \alpha[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$.

Partie B

- 1 **a** Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
b Déterminer la dérivée f' de f et montrer que pour tout élément x de $]0; +\infty[$, $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. En déduire le sens de variation de f .
- 2 **a** Montrer que $f(\alpha) = -\alpha + 3 + \frac{2}{\alpha}$.
b Déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude $2 \cdot 10^{-1}$.
- 3 **a** Montrer que la droite (D) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 3$ est asymptote à la courbe (C) .
b Déterminer le point A , intersection de (D) et (C) .
c Étudier la position de (C) par rapport à (D) .
- 4 **a** Calculer $\ln(e\sqrt{e})$.
b Déterminer le point B de (C) où la tangente (T) est parallèle à la droite (D) .
- 5 Construire (D) , (T) et (C) .

Partie C :

- 1 Soit $h : x \mapsto 2\frac{\ln x}{x}$ et $u : x \mapsto \ln x$.
Exprimer h en fonction de u et u' . En déduire une primitive de h sur $]0; +\infty[$.
- 2 Donner une primitive F de f sur $]0; +\infty[$.
- 3 Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C) , la droite (D) et les droites d'équations $x = e$ et $x = \sqrt{e}$.

Problème 20

On considère le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Unité graphique 2cm.

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = x + \frac{\ln |x|}{|x|}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère donné.

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$ et h la fonction définie sur l'intervalle $] -\infty; 0[$ par $h(x) = x^2 - 1 + \ln(-x)$.

- 1 **a** Calculer la dérivée de la fonction g et déterminer le signe de cette dérivée. Dresser le tableau de variations de la fonction g . (On ne demande pas de calculer les limites de g).
b Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$.
- 2 **a** Calculer la dérivée de la fonction h et déterminer le signe de cette dérivée. Dresser le tableau de variation de la fonction h . (On ne demande pas de calculer les limites de h).
b Calculer $h(-1)$ et montrer que $\forall x \in] -\infty; -1[, h(x) > 0$; $\forall x \in] -1; 0[, h(x) < 0$.

Partie B

- 1 **a** Calculer les limites suivantes $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x)$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ puis interpréter les graphiquement.

- b** Calculer les limites suivantes $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2** **a** Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C) .
b Étudier les positions relatives de (C) et (D) . (On précisera les coordonnées des points d'intersection de (C) et (D)).
- 3** **a** Vérifier $\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ et $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
b Étudier le sens de variations de la fonction f puis dresser son tableau de variations.
- 4** **a** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et vérifier que $0,6 < \alpha < 0,7$.
b En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .
- 5** Construire la courbe (C) .
- 6** **a** Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
b En déduire la primitive de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1.

Problème 21

Partie A

Soit g la fonction dérivable et définie de \mathbb{R}^* vers \mathbb{R} par : $g(x) = \ln |x| - \frac{2}{x}$.

- 1** **a** Démontrer que pour tout nombre réel x non nul, $g'(x) = \frac{x+2}{x^2}$.
b En déduire les variations de la fonction g puis dresser son tableau de variation. (On ne calculera pas les limites).
- 2** **a** Démontrer que l'équation $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $]1; +\infty[$.
b Démontrer que : $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]0; \alpha[, g(x) < 0$.

Partie B

Soit f la fonction dérivable et définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^x}{e^x + (\ln |x|)^2} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) . (L'unité graphique est 4 cm).

- 1** **a** Étudier la continuité de f en 0.
b Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ puis donner une interprétation graphique de chacun des résultats.
- 2** **a** Étudier la dérivabilité de f en 0. En déduire que (C) admet une tangente à l'origine que l'on précisera.
b Pour tout nombre réel x différent de zéro, démontrer que : $f'(x) = \frac{\varphi(x)g(x)}{(e^x + (\ln |x|)^2)^2}$ avec $\varphi(x) = e^x \ln |x|$.
c Démontrer que $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 4e^{-\alpha}}$ et en déduire que : $0 < f(\alpha) < 1$.
d Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire le tableau de variation de f .

- 3 Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq f(x) \leq 1$.
- 4 Tracer la droite d'équation $y = x$ et la courbe (C) .

Problème 22

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = 4x - (1+x)e^x$.

- 1 Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2 Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
- 3
 - a Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $0,79 < \alpha < 0,80$.
 - b En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B : Etude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 4x + 1 - xe^x$.

On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O, I, J) . Unité graphique : 4cm.

- 1 Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2
 - a Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
 - b Donner une interprétation graphique du résultat.
- 3
 - a Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$.
 - b En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.
- 4 Montrer que $f(\alpha) = e^\alpha + 4\alpha - 3$.
- 5
 - a Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 4x + 1$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$.
 - b Etudier la position relative de (C) par rapport à (Δ) .
- 6
 - a Montrer que la droite $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions λ et β telles que $-1 < \lambda < 0$ et $1 < \beta < 2$.
 - b Tracer (C) et (Δ) .

Partie C : Calcul d'aire

t est un nombre réel tel que $(t \leq 0)$.

On désigne par $A(t)$ l'aire de partie du plan délimitée par (C) , (Δ) et les droites d'équations $x = t$ et $x = 0$.

- 1 A l'aide d'une intégration par parties, calculer $A(t)$.
- 2
 - a Déterminer la limite de $A(t)$ lorsque t tend vers $-\infty$.
 - b Interpréter le résultat obtenu.

Problème 23

L'objet de ce problème est l'étude de la fonction f dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par $f(x) = 2x - 3 + \frac{\ln x}{x}$. On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) . Unité graphique est 2 cm.

Partie A

Soit g la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$.

- 1 Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variation. (On ne demandera pas de calculer les limites).
- 2 Justifier que $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

- 1
 - a Calculer la limite de f en $+\infty$.
 - b Déterminer la limite à droite en 0 de f puis interpréter graphiquement le résultat.
- 2
 - a Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 3$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.
 - b Préciser la position de (C) par rapport par (D) .
- 3
 - a Démontrer que pour tout nombre strictement positif x , $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
 - b Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
 - c Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 est $y = 3x - 4$.
- 4
 - a Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α .
 - b Justifier que : $1,3 < \alpha < 1,4$.

Partie C

On pose $\varphi(x) = f(x) - (3x - 4)$ et $h(x) = -x^2 + 1 - \ln x$.

- 1
 - a Déterminer le sens de variation de h sur $]0; +\infty[$.
 - b Calculer $h(1)$ puis justifier que : $\forall x \in]0; 1[, h(x) > 0$; $\forall x \in]1; +\infty[, h(x) < 0$.
- 2
 - a Démontrer que $\forall x \in]0; +\infty[, \varphi'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$.
 - b Étudier les variations de φ puis en déduire le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x .
 - c Déterminer la position de (C) par rapport à la tangente (T) .
- 3 Tracer la courbe (C) , la droite (D) et la tangente (T) . On prendra $\alpha = 1,35$.

Problème 24

Partie A

Soit g la fonction définie sur $] -\infty; 2[$ par : $g(x) = 2 - (2 - x) \ln(2 - x)$.

- 1 Calculer les limites de g en 2 et en $-\infty$.
- 2 Calculer $g'(x)$ et étudier le sens de variation de g .
- 3 Dresser le tableau de variation de la fonction g .

- 4 Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $] -\infty; 2[$ et vérifier que $-0,4 < \alpha < -0,3$.
- 5 Dédire des questions précédentes que pour tout $x < \alpha$, $g(x) < 0$ et pour tout $x > \alpha$, $g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $] -\infty; 2[$ par : $f(x) = x(1 - \ln(2 - x))$.

On appelle (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) . Unité graphique 2 cm.

- 1
 - a Calculer les limites de f en 2 et en $-\infty$; interpréter graphiquement si possible les résultats obtenus.
 - b Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 2
 - a Démontrer que pour tout $x < 2$, $f'(x) = \frac{g(x)}{2 - x}$.
 - b En utilisant les résultats de la partie A, déterminer les variations de f puis dresser son tableau de variation.
- 3 Justifier que $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2 - \alpha}$.
- 4 Calculer $f(0)$ et $f(2 - e)$.
- 5 Tracer dans le repère (O, I, J) la courbe (C) . (On prendra $\alpha \simeq -0,35$).

Partie C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0; 2[$.

- 1 Justifier que h réalise une bijection de $[0; 2[$ sur un intervalle L à préciser.
- 2 Etablir le tableau de variation de h^{-1} , bijection réciproque de h .
- 3 Représenter dans le même repère $(C_{h^{-1}})$ la courbe de la bijection réciproque de h .

Problème 25

Partie A

La fonction f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln x$.

- 1
 - a Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
 - b Calculer $f'(x)$ et étudier le sens de variation de f . (On ne demande pas de représentation graphique).
- 2
 - a Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0; +\infty[$ une solution unique α . Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
 - b Etudier le signe de $f(x)$ lorsque x décrit $]0; +\infty[$.

Partie B

La fonction g est définie sur $[0; +\infty[$ par

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x, \text{ pour tout réel } x > 0 \end{cases}$$

- 1
 - a Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 0.
 - b Déterminer la limite de g en $+\infty$.
- 2 Soit g' la dérivée de la fonction g .
Pour tout réel $x > 0$ calculer $g'(x)$, puis vérifier que $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$.
- 3
 - a En déduire que : si $x \in \left[0; \frac{1}{\alpha}\right]$, alors $g'(x) > 0$ et si $x \in \left]\frac{1}{\alpha}; +\infty\right]$, alors $g'(x) < 0$.
 - b Dresser le tableau de variation de la fonction g .
- 4
 - a Donner les équations des tangentes à la courbe (Γ) représentative de g aux points d'abscisses 0 et 1.
 - b Tracer (Γ) et ses tangentes.

Problème 26

Partie A

Soit la fonction g dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $g(x) = 1 + x \ln x$;

- 1
 - a Justifier que : $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = 1 + \ln x$.
 - b Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation. (On ne calculera pas les limites de g).
- 2 En déduire que : $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \frac{x}{1 + x \ln x} \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . (Unité : 4cm)

- 1
 - a Etudier la continuité de f en 0.
 - b Etudier la dérivabilité de f en 0.
 - c Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point 0 est : $y = x$.
 - d Démontrer que :
 (C) est au-dessus de (T) sur $]0; 1[$.
 (C) est au-dessous de (T) sur $]1; +\infty[$.
- 2 Démontrer que la droite (OI) est asymptote à (C) en $+\infty$.
- 3
 - a On suppose que f est dérivable sur $]0; +\infty[$.
Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{1 - x}{(1 + x \ln x)^2}$
 - b En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.
- 4 Construire la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni d'un repère (O, I, J) .

Partie C

- 1
 - a Justifier que : $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) \leq 1$.

b Démontrer que : $\forall x \in [1; e], 1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x)$.

2 Soit A l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C) , (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Démontrer que : $16(e-1) + 16 \ln\left(\frac{2}{1+e}\right) \leq A \leq 16(e-1)$.

Problème 27

Dans ce problème, le plan est muni d'un repère (O, I, J) ; Unité : 1 cm. Les fonctions sont supposées dérivables sur leur ensemble de définition.

Partie A :

On considère la fonction g définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par : $g(x) = -x + \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, et (C_g) sa représentation graphique.

1 Démontrer l'ensemble de définition de g est \mathbb{R} .

2 **a** Démontrer que pour tout nombre réel x , $g'(x) = -1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

b Etudier les variations de g .

3 Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B :

On considère la fonction f définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ et (C_f) sa représentation graphique.

1 Calculer la limite de f en $+\infty$.

2 Démontrer que f est impaire.

3 En déduire la limite de f en $-\infty$.

4 En déduire la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.

5 Pour tout nombre réel x , calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .

6 Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.

7 Déterminer les positions relatives de (C_f) et (T) .

8 Tracer (C_f) et (T) .

Partie C :

1 Démontrer que f est une bijection de \mathbb{R} vers \mathbb{R} .

2 Soit f^{-1} la bijection réciproque de f . Exprimer $f^{-1}(x)$, pour tout nombre réel x .

3 Construire dans le repère (O, I, J) , en utilisant une couleur différente de celle utilisée pour (C_f) , la représentation graphique (C') de f^{-1} en indiquant la méthode de construction.

4 En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, (C_f) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie A

On considère la fonction numérique g définie par :

$$g(x) = 2(x-2)\ln(2-x) + x - 2 \text{ si } x \in]-\infty; 2[\text{ et } g(2) = 0.$$

- 1 Etudier la continuité de g en 2.
- 2
 - a Déterminer les limites de g aux bornes de l'ensemble de définition.
 - b Etudier le sens de variation de g .
 - c Dresser le tableau de variation de g .
- 3
 - a Calculer $g\left(2 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.
 - b En déduire que :

$$\forall x \in \left] -\infty; 2 - \frac{1}{\sqrt{e}} \right[, g(x) < 0 \text{ et } \forall x \in \left[2 - \frac{1}{\sqrt{e}}; 2 \right[, g(x) > 0.$$

Partie B

On considère la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 2[, f(x) = (x-2)^2 \ln(2-x) - 4 \\ \forall x \in [2; +\infty[, f(x) = (x^2 - 4x)e^{x-2} \end{cases}$$

- 1
 - a Montrer que f est dérivable à gauche en 2.
 - b Vérifier que $x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$.
 - c Montrer que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - 1}{x-2} = 1$.
 - d En déduire que f est dérivable à droite en 2.
 - e f est-elle dérivable en 2 ?
- 2
 - a Montrer que : $\forall x \in]-\infty; 2[, f'(x) = g(x)$ et $\forall x \in [2; +\infty[, f'(x) = (x^2 - 2x - 4)e^{x-2}$.
 - b Etudier le sens de variation de f .
 - c Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
 - d Dresser le tableau de variation de f .
- 3 On désigne par (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé (O, I, J) . Et soit h la restriction de f à l'intervalle $] -\infty; 1[$.
 - a Montrer que h réalise une bijection de $] -\infty; 1[$ vers un intervalle K à préciser.
 - b Soit h^{-1} la réciproque de h .
 h^{-1} est-elle dérivable en -4 ? Si oui, calculer alors $(h^{-1})'(-4)$.
 - c Déterminer une équation de la tangente (T) à $(C_{h^{-1}})$ au point d'abscisse -4 .
 - d Construire les courbes (C) , $(C_{h^{-1}})$ et la droite (T) dans le même repère.

Partie C :

Soit le nombre réel a tel que : $2 - \frac{1}{\sqrt{e}} < a < 2$.

- 1 Calculer l'aire $A(a) = \int_{2-\frac{1}{\sqrt{e}}}^a f(x)dx$ et déduire $\lim_{a \rightarrow 2} A(a)$.
- 2 Montrer que la fonction $F(x) = (x^2 - 6x + 6)e^{x-2}$ est une primitive de f sur $]2; +\infty[$.
- 3 Calculer l'aire en cm^2 du domaine limité par les droites d'équations $x = 2$, $x = 4$, l'axe (OI) et la courbe (C) .
- 4 En déduire l'aire en cm^2 du domaine limité par les droites d'équations $x = 4$, $x = 2 - \frac{1}{\sqrt{e}}$, l'axe (OI) et la courbe (C) .

Problème 29

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ dont la représentation graphique (C) est donnée sur la feuille annexe.

On admet que f est définie sur $]0; +\infty[$ par
$$\begin{cases} \forall x > 0, f(x) = 2x(a(\ln x)^2 + b \ln x + c) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1
 - a Calculer en fonction de a, b et c , la dérivée de la fonction f .
 - b Déterminer, à l'aide du graphique, les valeurs de : $f'\left(\frac{1}{e}\right)$, $f'(\sqrt{e})$ et $f(e)$.
 - c En déduire que : $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = 2x(2(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2)$.
- 2
 - a Justifier que : $\lim_{x \rightarrow 0} x(\ln x)^2 = 0$ et en déduire que f est continue en 0.
 - b Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.
- 3
 - a Calculer la limite de f en $+\infty$.
 - b Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = 2(1 + \ln x)(-1 + 2 \ln x)$.
 - c Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f .
 - d Dresser le tableau de variation de f .

Partie B

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{e^{2x} - 1}$.

On note (C_g) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Unité graphique : 2cm.

- 1
 - a Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
 - b Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, e^{2x} - 1 > 0$.
 - c Calculer $g'(x)$.
 - d Etudier le sens de variations de g et dresser son tableau de variations.
- 2 Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = f(x) - g(x)$.
On admet que h est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
 - a Démontrer que l'équation $f(x) = g(x)$ admet une unique solution $\alpha \in [0, 1; 0, 3]$.
 - b Etudier le signe de $h(x)$ et déduire la position relative de (C_f) et (C_g) .
- 3
 - a Construire (C_g) sur la feuille annexe.

- 4 a Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x} - 1} - 1$.
- b En déduire une primitive G de g sur $]0; +\infty[$.
- c Calculer l'aire A , en cm^2 , de la partie du plan délimitée par (C_g) , l'axe (OI) et les droites d'équations $x = \ln 2$ et $x = 1$. (Annexe à réaliser)

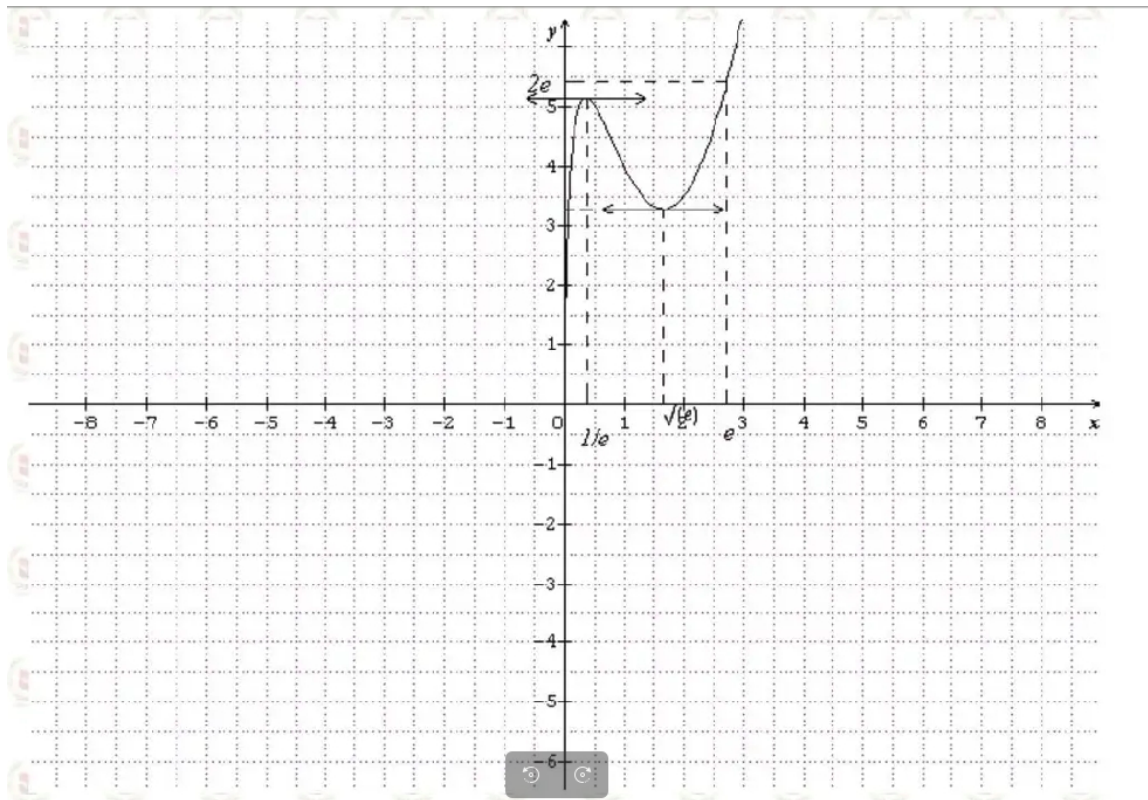


Figure 1: Représentation graphique de la fonction f (Annexe)

Problème 30

Partie A : Résolution d'une équation différentielle.

Soit l'équation différentielle $(E') : f' + f = \left(\frac{e-1}{2}\right)x^2 + (e-2)x - 1$.

- 1 Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $(E) : f' + f = 0$.
- 2 Déterminer un polynôme P du second degré solution de l'équation différentielle (E') .
- 3 Montrer qu'une fonction numérique f est une solution de l'équation différentielle (E') si et seulement si la fonction numérique $f - P$ est solution de l'équation différentielle (E) .
- 4 Démontrer que les solutions de l'équation différentielle (E') sont les fonctions f_k définies sur \mathbb{R} par : $f_k(x) = ke^{-x} + \left(\frac{e-1}{2}\right)x^2 - x; k \in \mathbb{R}$.
- 5 Trouver la solution f de l'équation différentielle (E') telle que $f(0) = 1$.

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire g et de la fonction f .

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = e^{-x} + \left(\frac{e-1}{2}\right)x^2 - x$.

On note (C_f) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) où $OI = 2$ cm et $OJ = 4$ cm.

Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = -e^{-x} + (e-1)x - 1$.

- 1 Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2
 - a Etudier le sens de variation de g .
 - b Dresser le tableau de variation de g .
- 3
 - a Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - b Vérifier que $0,8 < \alpha < 0,9$ puis déduire la valeur approchée de α à 10^{-1} près.
- 4 Montrer que $\forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$.
- 5
 - a Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
 - b Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- 6
 - a Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
 - b Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- 7
 - a Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$.
 - b En déduire le sens de variation de f .
 - c Dresser le tableau de variation de f .
- 8
 - a Déterminer les coordonnées du point B d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe (OJ) puis donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'ordonnée 1.
 - b Tracer la courbe (C_f) ainsi que la tangente (T) .
 - c Calculer à 10^{-2} près l'aire A de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses (OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Problème 31

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) avec $OI = 2\text{cm}$.

Partie A

Soit h la fonction dérivable et définie sur \mathbb{R} par $h(x) = -\frac{2x^2}{(x^2 + 1)^2} + \ln(x^2 + 1)$.

- 1 Calculer les limites de h en $-\infty$ et $+\infty$.
- 2 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = \frac{-2x(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^3}$.
- 3 Etudier le sens de variation h et dresser son tableau de variation.
- 4
 - a Justifier que sur $]0; +\infty[$ l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α .
 - b Montrer que $1,98 < \alpha < 1,99$.
- 5
 - a Etudier la parité de h .
 - b En déduire que $-\alpha$ est une racine de h .

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; -\alpha[\cup]\alpha; +\infty[, h(x) > 0. \\ \forall x \in]-\alpha; 0[\cup]0; \alpha[, h(x) < 0. \\ \forall x \in \{-\alpha; 0; \alpha\}, h(x) = 0. \end{cases}$$

Partie B

Soit g la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par $\begin{cases} g(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{3x} & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$ et (C_g) est sa courbe représentative dans (O, I, J) .

- 1 Montrer que g est impaire.
- 2
 - a Calculer la limite à droite de g en 0. (On pourra poser $X = x^2$)
 - b En déduire la limite à gauche de g en 0 et que g est continue en 0.
- 3
 - a Montrer que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = \frac{1}{3}$.
 - b Donner une équation de la tangente (T) à (C_g) au point d'abscisse 0.
- 4
 - a Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = \frac{2 \ln|x|}{3x} + \frac{1}{3x} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$.
 - b En déduire les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de g .
 - c Interpréter graphiquement ces limites.
- 5
 - a Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = \frac{-h(x)}{3x^2}$.
 - b Déterminer le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
 - c Justifier que $g(\alpha) = \frac{2\alpha}{3(\alpha^2 + 1)}$ puis en déduire $g(-\alpha)$ en fonction de α .
 - d Déterminer $g([-1; 2])$
- 6 Construire (T) et (C_g) . On prendra $\alpha = 1,98$.
- 7
 - a Montrer que $\forall x \in [1; +\infty[, \frac{2 \ln x}{x} \leq \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} \leq \frac{2 \ln x}{x} + \frac{\ln 2}{x}$.
 - b En déduire que : $\frac{2}{3e} \leq g(e) \leq \frac{2 + \ln 2}{3e}$.
- 8 Soit f la restriction de g à l'intervalle $K =]-\alpha; 0[$.
 - a Justifier que f réalise une bijection de K sur un intervalle L à préciser.
 - b Calculer $f(-1)$ puis justifier que la réciproque f^{-1} de f est dérivable en $\ln(\sqrt[3]{2})$.

Problème 32

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Unité graphique : 4cm

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire g

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ par :

$$g(x) = \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| - \frac{1}{x+1}$$

- 1
 - a Montrer que : $\begin{cases} \text{si } x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[, g(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} \\ \text{si } x \in]-1; 0[, g(x) = \ln \left(-1 - \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} \end{cases}$

- b** Déterminer les limites de g en $-\infty, +\infty$ et en 0 . (On admettra que la limite de g en -1 à gauche est égale à $+\infty$ et la limite de g en -1 à droite est égale à $-\infty$)
- 2 a** Démontrer que $\forall x \in D_g, g'(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2}$.
- b** Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
- 3 a** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $]-\frac{1}{2}; -\frac{1}{8}[$.
- b** Dédurre des questions précédentes que :
$$\begin{cases} \text{si } x \in]-\infty; -1[\cup \alpha; 0[\cup 0; +\infty[, g(x) \geq 0 \\ \text{si } x \in]-1; \alpha[, g(x) < 0 \end{cases}$$

Partie B : Etude de la fonction principale f .

On considère la fonction f définie sur $] -\infty; -1[\cup] -1; +\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = x \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et on note (C) sa courbe représentative dans le repère (O, I, J)

- 1 a** Ecrire f sans le symbole de la valeur absolue.
- b** Déterminer les limites de f en $-\infty, +\infty$ et -1 . (On pourra poser $X = \frac{1}{x}$)
- c** Préciser les asymptotes de (C) .
- 2 a** Démontrer que f est continue en 0 .
- b** Etudier la dérivabilité de f en 0 . Interpréter graphiquement le résultat.
- 3 a** Vérifier que $\forall x \in D_g \setminus \{0\}, f'(x) = g(x)$.
- b** Démontrer que $f(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha+1}$, α étant le réel défini dans la partie A - 3)
- c** Etudier le sens de variation de f ; puis donner le tableau de variation de f .
- 4 a** Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec la droite (OI) .
- b** Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$.
- 5** Construire avec soins (T) , (C) et ses asymptotes. On prendra $\alpha = -0,25$ et $f(\alpha) = -0,4$.

Problème 33

Partie A

On considère la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - 3 + \ln x$.

- 1** Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de g .
- 2 a** On admet que g est dérivable sur $]0; +\infty[$, calculer $g'(x)$.
- b** Étudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
- 3 a** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $2,20 < \alpha < 2,21$.

- b** Démontrer que $\forall x \in]0; \alpha[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2-2x}{x} + \frac{x-1}{x} \ln x$ de courbe (C) dans un repère orthonormé (O, I, J) . (Unité : 2 cm)

- 1 Calculer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
- 2 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.
- 3 On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$.
 - a Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ pour tout x de $]0; +\infty[$.
 - b En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
- 4 En remarquant que $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(-2 + \ln x)$, déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.
- 5 Écrire l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
- 6 Démontrer que $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$.
- 7 Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .
- 8 Construire (C) avec ses asymptotes et (T) .

Partie C

Soit F la primitive de f sur $]0; +\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$.

On appelle (Γ) la courbe représentative de F relativement au repère (O, I, J) .

- 1
 - a Sans calculer $F(x)$, étudier les variations de F sur $]0; +\infty[$.
 - b Que peut-on dire des tangentes à (Γ) en ses points d'abscisses 1 et e^2 .
- 2
 - a x étant un réel strictement positif, calculer l'intégrale $\int_1^x \ln t \, dt$ (On pourra utiliser une intégration par parties).
 - b Démontrer que, pour tout x strictement positif $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2$.
 - c En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de x .
- 3
 - a Sachant que $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = 0$ déterminer la limite de F en 0.
 - b Démontrer que, pour tout x strictement supérieur à 1
$$F(x) = x \ln x \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - \frac{3}{\ln x}\right) + 3.$$
 En déduire la limite de F en $+\infty$.
 - c Dresser le tableau de variation de F .
 - d Tracer (Γ) sur le même graphique que (C) .
- 4 Calculer en cm^2 , l'aire du domaine limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e^2$.

Problème 34

Partie A

On considère la fonction numérique g définie par : $g(x) = 4e^{-x} - (1 + e^{-x})^2$.

- 1 Etudier les variations de g . (On ne calculera pas de limites aux bornes de son ensemble de définition).
- 2 En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$.

- 1 Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 2 On admet que f est dérivable et continue sur \mathbb{R} .

- a Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{g(x)}{4(1+e^{-x})^2}$.
- b Etudier le sens de variation de f .
- c Dresser le tableau de variation de f .
- d Calculer $f(0)$ puis étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie C

On considère la fonction numérique h définie par : $h(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ et (C_h) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) . (Unité graphique : 4cm)

- 1 Calculer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition, puis interpréter graphiquement les résultats.
- 2 Montrer que le point $S\left(0; \frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de la courbe (C_h) .
- 3 Etudier le sens de variation de h et dresser son tableau de variation.
- 4 Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C_h) au point S .
- 5 Etudier les positions relatives de la courbe (C_h) par rapport à la tangente (T) .
- 6 Justifier que h réalise une bijection de \mathbb{R} vers un intervalle K à préciser.
Soit h^{-1} la bijection réciproque de h .
 - a Justifier que h^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$ et calculer $(h^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$.
 - b Dresser le tableau de variation de h^{-1} .
 - c Justifier que la courbe $(C_{h^{-1}})$ admet des asymptotes dont on précisera la nature et les équations.
 - d Déterminer l'expression explicite de h^{-1} .
- 7 Construire les courbes (C_h) et $(C_{h^{-1}})$ et leurs asymptotes respectives dans le même repère.

Problème 35

Partie A

a, b et c sont des nombres réels. Soit la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = (ax + b)e^{-x} + c$ dont le tableau de variation se présente comme suit :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$h'(x)$		+		0	-
h	$-\infty$	1	2	$2 + e^{-2}$	2

- 1 On note h' la dérivée de h . Calculer $h'(x)$ en fonction de a et b .
- 2 En utilisant les données numériques du tableau de variation de h :
 - a Déterminer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.
 - b Démontrer que $a = 1$, $b = -1$ et $c = 2$.
Ainsi donc dans la suite du problème $h(x) = (x - 1)e^{-x} + 2$.
- 3
 - a Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $] -1; 0[$.
 - b En déduire le signe de $h(x)$.

Partie B

On note (C_f) la courbe représentative de la fonction f par $f(x) = 2x - 1 - xe^{-x}$.
(Unité : 2 cm)

- 1
 - a Calculer la limite de f en $+\infty$.
 - b Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$.
 - c Préciser les positions de (C_f) par rapport à (D) .
- 2 Calculer les limites en $-\infty$ de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$. En donner une interprétation graphique.
- 3
 - a Démontrer que $f'(x) = h(x)$.
 - b Donner le sens de variation de f puis dresser le tableau de variation de f .
- 4
 - a Démontrer que $f(\alpha) = 2\alpha + 1 + \frac{2\alpha}{\alpha - 1}$.
 - b Donner l'arrondi d'ordre 1 de $f(\alpha)$. (On prendra $\alpha \simeq -0,375$).
- 5 Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.
- 6 Tracer (T) , (D) et (C_f) .

Partie C

- 1
 - a Déterminer les nombres réels m et p de sorte que la fonction G définie par $G(x) = (mx + p)e^{-x}$ soit une primitive sur \mathbb{R} de la fonction g définie par $g(x) = -xe^{-x}$.
 - b En déduire une primitive de f sur \mathbb{R} .

- 2 Soit A l'aire en cm^2 du domaine Δ délimité par (C_f) , l'axe des abscisses et des droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$.

- a Faire apparaître Δ sur la figure.
- b Calculer A .

Problème 36

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . L'unité graphique est 2 cm.
On considère la fonction f dérivable et définie sur $] -\infty; 1[$ par $f(x) = x^2 - 1 + \ln(1 - x)$.
On note (C) la courbe représentative de f .

- 1
 - a Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - b Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis donner une interprétation graphique du résultat.
 - c Calculer la limite de f à gauche en 1 puis donner une interprétation graphique du résultat.
- 2
 - a Pour tout nombre réel x de l'intervalle $] -\infty; 1[$, calculer $f'(x)$.
 - b Démontrer que f est strictement décroissante sur $] -\infty; 1[$.
 - c Dresser le tableau de variation de f .
- 3
 - a Démontrer que l'équation $(E) : x \in] -\infty; 1[, f(x) = 0$ admet une solution unique α .
 - b Justifier que $-0,7 < \alpha < -0,6$.
- 4
 - a Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est : $y = -x - 1$.
 - b On donne le tableau de valeurs suivant :

x	-2	-1,5	-1	-0,5	-0,2	-0,1	0,2	0,5	0,7
arrondi d'ordre 1	4,1	2,2	0,7	0,1	-0,8	-0,9	-1,2	-1,4	-1,7

- c Tracer (T) et (C) . On pourra faire la figure dans la partie du plan caractérisée par $\begin{cases} -3 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 6 \end{cases}$.
- 5 On désigne par A l'aire de la partie du plan délimitée par (C) , la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 0$.
 - a Calculer $\int_{\alpha}^0 \ln(1 - x) dx$ à l'aide d'une intégration par parties.
 - b Démontrer que la valeur de A en unités d'aire est : $A = \frac{\alpha^3}{3} - 2\alpha - (1 - \alpha) \ln(1 - \alpha)$.
 - c Déterminer en cm^2 l'arrondi d'ordre 2 de la valeur de A pour $\alpha = -0,65$.
 - 6 Soit f^{-1} la bijection réciproque de f et (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le plan muni du repère (O, I, J) .
 - a Calculer $f(-1)$.
 - b Démontrer que le nombre dérivé de f^{-1} en $\ln 2$ existe puis le calculer.
 - c Construire la courbe (C') et sa tangente (Δ) au point d'abscisse $\ln 2$ sur la figure de la courbe (C) .

Problème 37

Partie A

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x + e^{-2x}$

- 1 Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation. On ne calculera pas les limites.
- 2 Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq \frac{1 + \ln(2)}{2}$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 - e^{-2x}$ et sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) . (Unité graphique : 4cm)

- 1
 - a Déterminer la limite de f aux bornes de son ensemble de définition.
 - b Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement ces résultats.
- 2
 - a Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2g(x)$.
 - b Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
 - c Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet unique solution α .
 - d Justifier que $0,56 < \alpha < 0,57$.
 - e Démontrer que $\frac{\ln(\alpha)}{\alpha} = -1$.
- 3 Soit (D) la tangente à (C) au point d'abscisse $\frac{\ln 2}{2}$? Déterminer une équation de (D) .

Partie C

- 1 Soit la fonction h dérivable sur \mathbb{R} , et définie par : $h(x) = f(x) - \frac{(\ln 2)^2}{4} + \frac{1}{2} - (1 + \ln 2) \left(x - \frac{\ln 2}{2} \right)$
 - a Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = 2g(x) - (1 + \ln 2)$.
 - b Etudier le sens de variation de h .
 - c Calculer $h\left(\frac{\ln 2}{2}\right)$ puis déduire la position relative de (C) par rapport à (D) .
- 2 Construire (C) et (D) .
- 3 Soit un nombre réel supérieur ou égal à α .
 - a Calculer en cm^2 l'aire $A(t)$ de la partie délimitée par la courbe (C) , l'axe (OI) et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$.
 - b Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(t)$.

Problème 38

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) avec $OI = 2\text{cm}$ et $OJ = 0,5\text{cm}$.

Partie A

Soit g la fonction numérique dérivable et définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $g(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x+1} - \ln|x+1|$

- 1 Calculer les limites de g à droite en -1 et en $-\infty$.
- 2
 - a Justifier que pour tout nombre réel x différent de -1 , on a : $g'(x) = \frac{x(2x+3)}{(x+1)^2}$
 - b Déterminer les signes de $g'(x)$ selon les valeurs de x .
 - c Dresser le tableau de variation de g . (On ne calculera pas les autres limites aux bornes de D_g)
- 3
 - a En déduire que : $\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty; -1[, g(x) < -3 \\ \text{pour } x \in]-1; +\infty[, g(x) > 2 \end{cases}$
- 4 Soit k la restriction de g à l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - a Justifier que k admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.
 - b Prouver que k^{-1} est dérivable en 2012.
- 5 Soit u la fonction définie sur $] -\infty; -1[$ par $u(x) = (x+1) \ln(-x-1)$
 - a Calculer $u'(x)$ et montrer que pour tout réel $x < -1$, on a : $g(x) + u'(x) = 2(x+1) + \frac{1}{x+1}$
 - b En déduire sur $] -\infty; -1[$, la primitive G de la fonction g telle que $G(-2) = 1$.

Partie B

Soit f la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par $f(x) = x \ln |x+1| - (x+1)^2 + 2x$ de courbe représentative (C_f) et (D) la droite d'équation $x+1=0$; dans le repère (O, I, J) .

- 1
 - a Préciser l'ensemble de définition de f et justifier que (D) est une asymptote à (C_f) .
 - b Calculer les limites en $-\infty$ de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$.
- 2
 - a Justifier que pour $x > -1$, $f(x) = -x(x+1) \left[\frac{x+1}{x} - \frac{2}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right]$
 - b En déduire le calcul des limites en $+\infty$ de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$.
- 3
 - a Démontrer que pour tout nombre réel x différent de -1 , on a : $f'(x) = -g(x) + 2$
 - b Vérifier que la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses (OI) .
 - c Prouver que f est croissante sur $] -\infty; -1[$ et décroissante sur $] -1; +\infty[$.
 - d Dresser le tableau de variation de f .
- 4
 - a Vérifier que sur $] -1; +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution β et que $-0,9 < \beta < -0,8$.
 - b Prouver que $f'(\beta) = \frac{1}{\beta} - \frac{\beta^2}{\beta+1}$ et que $f'(\beta) < 0$.

Partie C

Soit t la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $t(x) = x[-1 + \ln |x+1|]$ et (Γ) la parabole d'équation $y = -x^2 + x - 1$.

- 1 Justifier que pour x différent de -1 : $\ln |x+1| - 1 \geq 0 \iff x \in]-\infty; -1-e] \cup [e-1; +\infty[$.
- 2 En déduire les signes de $t(x)$ selon les valeurs de x .
- 3 Etudier alors les positions relatives des courbes (Γ) et (C_f) .

- 4 a Etudier le sens de variation de la fonction h de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par $h(x) = -x^2 + x - 1$.
b Dresser son tableau de variation.
- 5 Tracer dans le repère (O, I, J) les droites (T) , (D) et les courbes (Γ) et (C_f) .

Problème 39

Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln(1+x)$

Partie A

On désigne par h la fonction numérique définie par $h(x) = x - \ln(1+x)$

- 1 a Déterminer le domaine de définition de h .
b Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition.
- 2 a Etudier le sens de variation de h .
b Dresser le tableau de variation de h .
- 3 En déduire le signe de h .

Partie B

- 1 a Quel est l'ensemble de définition de f .
b Déterminer les limites de f respectivement en $+\infty$ et en -1 .
- 2 a Montrer que f peut être prolongée par continuité au point -1 .
b Soit k ce prolongement, étudier la dérivabilité de k en -1 .
- 3 a Montrer que f peut être prolongée par continuité au point 0 .
b Soit g ce prolongement, étudier la continuité et la dérivabilité de g en 0 .
- 4 a Exprimer la dérivée $g'(x)$ de $g(x)$ en fonction de $h(x)$.
b Dresser alors le tableau de variation de g .
- 5 Construire (C_g) la courbe de g dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

Problème 40

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{x+1-\ln x}{2x+1}$

- 1 Etudier le sens de variation de g (dérivée, limites, tableau de variation).
- 2 Calculer $g(1)$ et $g(2)$; en déduire que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution α .
Montrer que α appartient à l'intervalle $]1, 8; 1, 9[$.
- 3 En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$.

On note (C) , la courbe représentative de f dans un repère orthogonal. (unité : 2cm sur (Ox) ; 4cm sur (Oy))

- 1 Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.

Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{2(2x+1)g(x)}{(x^2+x)^2}$.

En déduire le signe de $f'(x)$.

- 2 Construire le tableau de variation de f et montrer que $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$.

- 3 Tracer la courbe (C) dans le repère orthogonal. (Préciser la tangente au point d'abscisse 1).

Problème 41

Partie A : (Etude d'une fonction auxiliaire g)

Soit g la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - 2 - 2x \ln x$.

- 1 Justifier que l'ensemble des solutions de l'équation : $-2 \ln x - 1 \geq 0$ est $S =]0; e^{-\frac{1}{2}}]$.

- 2 a Calculer $g'(x)$.

b Etudier les variations de g .

- 3 a Etablir le tableau de variation de g . (On ne cherchera pas à calculer les limites de g).

b En déduire que : $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) < 0$.

Partie B : (Etude et représentation graphique d'une fonction f)

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par :

$f(x) = (x-1)^2 - x^2 \ln x$ si $x \in]0; +\infty[$ et $f(0) = 1$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) . L'unité graphique est 2 cm.

- 1 a Calculer la limite de f en $+\infty$.

b Justifier que la courbe (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.

- 2 a Justifier que f est continue en 0.

b Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -2$.

- 3 Soit (T) la droite d'équation $y = -2x + 1$ et d la fonction sur $]0; +\infty[$ par : $d(x) = f(x) - y$.

a Justifier que (T) est la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

b Vérifier que pour tout $x \in]0; +\infty[, d(x) = x^2 - x^2 \ln x$.

c Etudier la position relative de (C) par rapport à (T) .

- 4 a Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$.

b Etablir le tableau de variation de la fonction f .

- 5 a Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; +\infty[$.

b Vérifier que $\alpha = 1$ et vérifier que $f(x) \geq 0$ si $0 \leq x \leq 1$ et $f(x) \leq 0$ si $x \geq 1$.

- 6 Construire (C) et (T) .

Partie C : (Etude d'une primitive F d'une restriction de la fonction f)

Soit F la primitive de f sur $[1; +\infty[$ qui s'annule en e (On ne cherchera pas à déterminer F).

- 1 Déterminer $F(e)$ et $F'(x)$. (On justifiera chaque réponse).
- 2 Démontrer que F est une bijection de $[1; +\infty[$ vers $F([1; +\infty[)$.
- 3 Soit F^{-1} la réciproque de F calculer $F^{-1}(0)$.

Problème 42

Partie A

Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x + 1 + \ln x$

- 1
 - a Déterminer les limites de g en 0 puis en $+\infty$.
 - b Etudier les variations de g .
 - c Dresser le tableau de variation de g .
- 2
 - a Montrer que la courbe de g coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse α tel que $\alpha \in]0, 2; 0, 3[$.
 - b En utilisant la méthode de balayage, donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
 - c En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{4x \ln x}{1+x} \text{ pour } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1
 - a Montrer que f est continue en 0.
 - b Etudier la dérivabilité de f en 0.
- 2
 - a f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
 - b Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- 3
 - a Exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.
 - b En déduire le signe de $f'(x)$.
 - c Montrer que $f(\alpha) = -4\alpha$.
- 4 Dresser le tableau de variation de f .

Partie C

Soit la courbe (C) de f dans un repère orthonormal (O, I, J) d'unité 4cm et (T) la tangente à (C) au point d'abscisse 1.

- 1 Donner une équation de (T) .
- 2 On considère φ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $\varphi(x) = f(x) - 2(x - 1)$.

a Montrer que $\varphi''(x) = f''(x) = \frac{4h(x)}{(x+1)^3}$ où $h(x) = -x + \frac{1}{x} - 2 \ln x$.

- b** Etudier les variations de h .
- c** Calculer $h(1)$ puis en déduire le signe de h puis le signe de φ'' .
- d** Dresser le tableau de variation de φ' puis en déduire le signe de φ' .
- e** Dresser le tableau de variation de φ en déduire la position de (C) par rapport à (T) .

Partie D

On prendra $\alpha \simeq 0,28$

- 1** Calculer les images par f de : 0,1; 0,28; 0,5; 1; 1,5 et 2.
- 2** Tracer la portion de (C) pour $x \in [0; 2]$; (T) et la tangente en α de la courbe (C) .
- 3**
 - a** Calculer $f(1)$.
 - b** f^{-1} est-elle dérivable en 0 ?
 - c** Calculer $(f^{-1})(0)$.
 - d** Donner une équation de la tangente à la courbe de f^{-1} au point $K(0; 1)$.

Problème 43

Soit la fonction dérivable sur $]1; +\infty[$ et définie par : $f(x) = 2 + \frac{\ln(x-1)}{x^2}$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) . L'unité graphique est 2 cm.

Partie A

Soit g la fonction dérivable sur $]1; +\infty[$ et définie par : $g(x) = \frac{x}{x-1} - 2\ln(x-1)$.

- 1**
 - a** Calculer la limite de g à droite en 1.
 - b** Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- 2**
 - a** Démontrer que pour tout nombre réel, $g'(x) = \frac{1-2x}{(x-1)^2}$.
 - b** Déterminer le sens de variation de g .
 - c** Dresser le tableau de variation de g .
- 3**
 - a** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α . Vérifier que : $3,093 < \alpha < 3,094$.
 - b** Démontrer que :
$$\begin{cases} \forall x \in]1; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$$

Partie B

- 1** Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2$ est asymptote à (C_f) .
- 2** Déterminer les coordonnées du point B d'intersection de (C_f) et de (D) .
- 3** Démontrer que pour tout nombre réel x strictement supérieur à 1, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

- 4 a Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire le sens de variation de f .
 b Dresser le tableau de variation de f .
- 5 α étant le nombre réel défini à la question 3 de la partie A,
 a Démontrer que : $f(\alpha) = 2 + \frac{1}{2\alpha(\alpha-1)}$.
 b En déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$ à $2 \cdot 10^{-3}$ près par défaut.
- 6 Tracer la courbe (C_f) .

Partie C

Soit β un nombre réel appartenant à l'intervalle $]1; 2[$.

On désigne par $A(\beta)$ l'aire de la partie (E) délimitée par (C_f) , la droite (D) et les droites d'équations $x = \beta$ et $x = 2$.

- 1 Vérifier que pour tout nombre réel x différent de 0 et 1 :

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}.$$
- 2 Exprimer $\int_{\beta}^2 \frac{1}{x(x-1)} dx$ en fonction de β .
- 3 À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$A(\beta) = \frac{(\beta-1)\ln(\beta-1)}{\beta} - \ln \beta + \ln 2.$$
- 4 En déduire $\lim_{x \rightarrow 1} A(\beta)$.

Problème 44

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$$

Le plan \mathcal{P} est rapporté à un repère orthogonal (O, I, J) . (Unité graphique : 2cm). On note (C) la courbe représentative de f dans \mathcal{P} .

Partie A : (Etude d'une fonction auxiliaire)

On introduit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 3 - 2 \ln x$.

- 1 Etudier le sens de variation de $g(x)$. (Limite aux bornes de D_g ; dérivée, sens de variation).
 2 Dresser le tableau de variation de g .
 3 Montrer que $g(x) > 0, \forall x \in]0; +\infty[$.

Partie B : (Etude de la fonction f .)

- 1 Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$.
 En déduire le sens de variations de f .

- 2 Calculer la limite de f en 0 et en $+\infty$. (On rappelle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$). Quelle est la conséquence graphique ?
- 3 Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{x}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe (C) en $+\infty$.
- 4 Montrer que (C) et (D) se coupent au point d'abscisse \sqrt{e} .
Etudier la position relative de (C) et (D) .

Partie C : (Courbe représentative de f .)

- 1 Dresser le tableau de variation de f .
- 2 Après avoir recopié, compléter le tableau suivant. (On donnera les valeurs de $f(x)$ sous forme décimale approchée à 10^{-2} près).

x	0,5	1	\sqrt{e}	e	5
$f(x)$					

- 3 Tracer (C) et (D) .

Partie D : (Calcul d'une aire)

- 1 Soit K la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $K(x) = (\ln x)^2$.
Calculer $K'(x)$.

Problème 45

(O, I, J) est un repère orthonormé du plan. (unité graphique : 4cm)

Partie A :

Soit la fonction g définie sur $] -\infty; 0[$ par $g(x) = x + 1 + \ln(-x)$.

- 1 Etudier les limites de g aux bornes de D_g .
- 2 Dresser le tableau de variation de g puis calculer $g(-1)$.
- 3 En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B :

Soit f définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x \ln(-x) ; \text{ si } x \in] -\infty; 0[\\ f(x) = (e^x - 1) \ln(e^x - 1) ; \text{ si } x \in]0; +\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$
 et (C) la courbe représentative.

- 1 **a** Etudier la continuité de f en 0.
b Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement ce résultat.
- 2 **a** Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et en donner une interprétation graphique.

- b Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et en donner une interprétation graphique.
- 3 a $\forall x \in]-\infty; 0[$, calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
 b $\forall x \in]0; +\infty[$, calculer $f'(x)$ et justifier que $f'(x)$ a le même signe que $1 + \ln(e^x - 1)$.
 c Résoudre l'équation $\forall x \in]0; +\infty[$, $\ln(e^x - 1) > 0$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$.
 d Dresser le tableau de variation de f sur \mathbb{R} .
- 4 a Prouver que (C) coupe la droite (OI) en deux points dont on précisera les coordonnées.
 b Construire (C) .
- 5 Soit h la restriction de f à l'intervalle $]\ln\left(1 + \frac{1}{e}\right); +\infty[$.
 a Montrer que h est une bijection de $]\ln\left(1 + \frac{1}{e}\right); +\infty[$ sur un intervalle K à préciser.
 b Dresser le tableau de variation de h^{-1} dans le même repère que (C) .
- 6 Soit u la fonction définie de $]-\infty; 0[$ par $u(x) = \frac{1}{2}x^2 \left(\ln(-x) - \frac{1}{2}\right)$.
 a Calculer la fonction dérivée de u .
 b En déduire la primitive de f sur $]-\infty; 0[$ qui s'annule en -1 .

Partie C

Soit la fonction v définie sur $[\ln 2; 1]$ par : $v(x) = f(x) - (e^x - 1)$.

- 1 Justifier que $\forall x \in [\ln 2; 1]$, on a $e^x - 1 > 0$.
 2 Prouver que $\forall x \in [\ln 2; 1]$, on a : $-1 \leq \ln(e^x - 1) - 1 \leq \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right)$.
 3 Déduire de ce qui précède le signe de $v(x)$ sur $[\ln 2; 1]$.
 4 Justifier que $\forall x \in [\ln 2; 1]$, $f(x) \leq e^x - 1$. Interpréter graphiquement ce résultat.

Problème 46

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{(x-1)^2 \ln x}{x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) .

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \ln x + \frac{x-1}{x+1}$.

- 1 Démontrer que g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
 2 Dresser le tableau de variation de g . (sans les limites aux bornes)
 3 a Calculer $g(1)$.
 b Démontrer que : $\forall x \in]0; 1[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]1; +\infty[, g(x) > 0$.

Partie B :

- 1 Calculer la limite de f à droite en 0. En donner une interprétation graphique.
- 2 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. En donner une interprétation graphique.
- 3
 - a Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{(x^2 - 1)g(x)}{x^2}$.
 - b Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x puis dresser le tableau de variation de f .
- 4
 - a Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α .
 - b Vérifier que : $2,64 < \alpha < 2,65$.
 - c Démontrer que : $\forall x \in]0; \alpha[, f(x) < 1$ et $\forall x \in [\alpha; +\infty[, f(x) > 1$.
- 5
 - a Déterminer une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 1.
 - b Déterminer les positions relatives de (C) et de l'axe des abscisses.
- 6 Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. On note (Γ) sa courbe représentative dans le repère orthonormé direct (O, I, J).
 - a Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, h(x) = -f(x)$.
 - b Construire (C) puis (Γ) dans le même repère.

Problème 47

Soit f la fonction dérivable et définie sur $[0; +\infty[$ par
$$\begin{cases} \forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, f(x) = \frac{x^2 - x}{\ln x} \\ f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = (2x - 1) \ln x - x + 1$.

- 1 Démontrer que pour tout nombre réel x strictement positif, $g'(x) = \ln(x^2) + 1 - \frac{1}{x}$.
- 2
 - a Vérifier que : $g'(1) = 0$.
 - b Démontrer que : $\forall x \in]0; 1[, g'(x) < 0$ et $\forall x \in]1; +\infty[, g'(x) > 0$.
- 3 En déduire le sens de variation de g .
- 4 Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[\setminus \{1\}, g(x) > 0$ et $g(1) = 0$.

Partie B

- 1 Etudier la continuité de f en 0 et en 1.
- 2 Démontrer que la fonction f est dérivable à droite en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
- 3 Soit h la fonction définie sur $] -1; +\infty[\setminus \{0\}$ par $h(x) = \frac{x+1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x}$.
 - a Démontrer que : $\forall x \in]0; 1[, x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

b Démontrer que : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} h(x) = \frac{3}{2}$ puis, en déduire la valeur de $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

4 On admet que $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3}{2}$. Justifier que f est dérivable en 1.

Partie C

1 Calculer la limite de f en $+\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. En donner une interprétation graphique.

2 **a** Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[\setminus \{1\}, f'(x) = \frac{g(x)}{\ln^2 x}$.

b Déterminer le sens de variation de f .

c Dresser le tableau de variation de f .

3 Tracer la courbe (C) . (Unité graphique : 2cm en abscisse et 2cm en ordonnée).

4 Démontrer que f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle à déterminer.

Problème 48

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . L'unité du graphique est le centimètre.

Partie A

Soit g la fonction dérivable et définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x + (ax + b)e^{-x}$ où a et b sont des nombres réels.

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) , on désigne par :

(C) la courbe représentative de g .

(D) la droite d'équation $y = x$.

1 **a** On donne $g(0) = 1$. Déterminer la valeur de b .

b On admet que la tangente (T) à (C) en 0 est parallèle à (D) . En déduire que $a = 1$.

2 Soit h la fonction dérivable et définie sur \mathbb{R} par : $h(x) = e^x - x$.

a Soit h' la fonction dérivée de h . Calculer $h'(x)$ pour tout x élément de \mathbb{R} .

b Dresser le tableau de variation de h . (On ne demande pas de calculer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$).

c En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction dérivable et définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x + (x + 1)e^{-x}$.

1 **a** Calculer la limite de f en $-\infty$.

b Justifier que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

c Donner une interprétation graphique de ces résultats.

2 **a** Calculer la limite de f en $+\infty$.

b Démontrer que (D) est une asymptote à (C) en $+\infty$.

- c Etudier les positions relatives de (C) et (D) .
- 3 a On désigne par f' la fonction dérivée de f . Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x}h(x)$.
- b Déterminer le sens de variation de f .
- c Dresser le tableau de variation de f .
- 4 Construire sur le graphique (T) , (D) et (C) .
- 5 a Démontrer que f est une bijection de \mathbb{R} vers \mathbb{R} .
- b On note f^{-1} la bijection réciproque de f , calculer $(f^{-1})'(1)$.
- c Calculer (Γ) la courbe représentative de f^{-1} sur le même graphique que (C) .

Partie C

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_{-1}^n (t+1)e^{-t} dt$.

- 1 A l'aide d'une intégration par partie démontrer que :
 $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = (-2 - n)e^{-n} + e$.
- 2 Calculer l'aire A_n en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe (C) , la droite (D) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = n$.