

Td Complexe**Exercice 1** [Forme algébrique et calcul de i^n]

- 1) Déterminer les formes algébriques des nombres complexes donnés. Préciser, le cas échéant, s'il est réel ou imaginaire pur.

a) $z_1 = i(1 - 4i) + 3(2 - i)$
b) $z_2 = (3 - i)^2 + 6i$
c) $z_3 = \frac{3}{1 - i}$
d) $z_4 = \frac{1 + 2i}{2 - i}$

e) $z_5 = (2 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i)$
f) $z_6 = (2 + 5i)^2$
g) $z_7 = \frac{3 - 3i}{1 + i}$

- 2) Calculer $i^{2025}, i^{40}, i^{27}, i^{34}$

Exercice 2 [Conjugué]

- 1) Déterminer le conjugué des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = 3i$
b) $z_2 = -i(1 + 4i)$
c) $z_3 = (3 - 5i)^3$
d) $z_4 = \frac{2i}{i+3} - \frac{3}{2+i}$

- 2) Soit $z_5 = \frac{2-i}{1+i}$ et $z_6 = \frac{2+i}{1-i}$.

Montrer que $\overline{z_6} = z_5$. Que peut-on en déduire sans calcul de $z_5 + z_6$ et $z_5 - z_6$?

Exercice 3 [Module et argument]

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

- 1) $z_1 = -\sqrt{3} + i$
2) $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$
3) $z_3 = 1 - i$
4) $z_4 = 1 + i$
5) $z_5 = -\sqrt{3} + i$
6) $z_6 = \frac{2i - 2\sqrt{3}}{4i + 4}$

- 7) $z_7 = (\sqrt{3} + i)(1 - i)^2$
8) $z_8 = \frac{(-\sqrt{3} + i)^3}{(1 + i)^2}$
9) $z_9 = 2 \frac{(\sqrt{3} + i)^2}{(-1 - i)^2}$
10) $z_{10} = -2i(1 + i\sqrt{3})^6$

Exercice 4 : [Forme trigonométrique]

Soit les nombres complexes $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - i$.

- 1) Déterminer les formes trigonométriques de z_1, z_2 et $Z = \frac{z_1}{z_2}$.
2) Déterminer la forme algébrique de Z .
3) En déduire $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 5 [Formes trigonométrique et exponentielle]

Dans chacun des cas suivants, déterminer la forme trigonométrique et la forme exponentielle.

- 1) $z_1 = 4$
2) $z_2 = -6$
3) $z_3 = -i$
4) $z_4 = -5 + 5i\sqrt{3}$
9) $z_7 = -2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$
10) $z_9 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$
5) $z_5 = -1 - i$
6) $z_6 = \sqrt{3} - i$
7) $z_{10} = -2e^{i\frac{\pi}{2}}$
8) $z_{11} = ie^{i\frac{\pi}{2}}$

Exercice 6 [Forme trigonométrique]

On considère les nombres complexes :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}, \quad z_2 = 1 - i \quad \text{et} \quad z_3 = \frac{z_1}{z_2}.$$

- 1) Donner une écriture trigonométrique des nombres complexes z_1, z_2 et z_3 .
2) Écrire sous forme algébrique z_3 .
En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 7 [Classique !]

- 1) Écrire $1 + i$ sous forme trigonométrique. En déduire l'expression de $(1 + i)^6$ par la formule de Moivre.

2 Calculer $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2026}$.

Exercice 8 [Racines carrées et Equations]

1 Déterminer les racines carrées de :

- a $z = 3 + 4i$
- b $z = 8 - 6i$
- c $z = -5 + 12i$
- d $z = 7 + 24i$

2 Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

- a $4z^2 - 12z + 153 = 0$
- b $z^2 - 4z + 5 = 0$
- c $z^2 + z + 1 = 0$
- d $iz^2 - iz - 3 - i = 0$
- e $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$
- f $z^2 - (2 + 4i)z - 2 + 4i = 0$
- g $(3 + i)z^2 - (7 - i)z + 10 = 0$
- h $z^2 - (1 + i\sqrt{3})z - 1 + i\sqrt{3} = 0$

Exercice 9 [Racines n -ièmes]

- 1 Résoudre dans \mathbb{C} : $z^6 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$
- 2 a Résoudre dans \mathbb{C} : $z^3 = 1$.
b Calculer $(1 + i)^3$.
c En déduire les racines cubiques de $z = -2 + 2i$.
- 3 Résoudre dans \mathbb{C} : $z^3 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$

Exercice 10 [Racines n -ièmes]

On donne $z_0 = 1 - i\sqrt{3}$

- 1 Donner une écriture trigonométrique de z_0 .
- 2 Montrer que $z_0^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$.
- 3 Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^4 = 1$.
- 4 En déduire les solutions de (E) : $z^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$ sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

Exercice 11 [Linéarisation]

- 1 Linéariser les polynômes trigonométriques suivants :

a $h(x) = \cos x \sin^2 x$

b $k(x) = \cos 2x \sin 3x$

c $m(x) = \sin^3 x$

2 a Linéariser $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

b Déduisez-en une primitive sur \mathbb{R} de f .

Exercice 12 [Lieux géométriques]

Dans chacun des cas, déterminer géométriquement l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la relation donnée.

1 $|z + 1 + 4i| = |z - 1 + i|$

2 $|z + 1 + 4i| = 4$

3 $|\bar{z} + 1 - 4i| = |z - 2i|$

4 $|3iz + 6| = 3|z - 1 + i|$

5 $\arg \frac{z - 2i}{z - 1 + i} = \frac{\pi}{2}[\pi]$.

Exercice 13 [Lieux géométriques]

On considère l'expression $Z = \frac{z + 1}{z - 2i}$ où $z \neq 2i$. Déterminer par la méthode géométrique, l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

1 Z soit réel.

2 Z soit imaginaire pur.

3 $\arg(Z) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Exercice 14 [Deux méthodes pour un problème]

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ on note A et B les points d'affixes respectives $2i$ et $1 + i$.

- 1 Soit z un nombre complexe différent de $1 + i$, écrit sous la forme $z = x + iy$, où x et y sont des réels. On pose

$$Z = \frac{z - 2i}{z - 1 - i}.$$

Montrer que :

$$\operatorname{Re}(Z) = \frac{x^2 + y^2 - x - 3y + 2}{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} \quad \text{et}$$

$$\operatorname{Im}(Z) = \frac{x - x - y + 2}{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}$$

avec $(x; y) \neq (1; 1)$.

2 Déterminer l'ensemble (E) des points $M(z)$ tels que Z soit un réel et l'ensemble (F) des points $M(z)$ tels que Z soit imaginaire pur.

- a En utilisant la forme algébrique de Z .
- b En utilisant les considérations sur les arguments.

Exercice 15 [Complexe et géométrie]

Le plan (\mathcal{P}) est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm. On note A , B et C les points de (\mathcal{P}) d'affixes respectives $z_A = 2 + 5i$, $z_B = 5 - 4i$ et $z_C = -1 - 4i$.

- 1 Placer les points A , B et C dans (\mathcal{P}) .
- 2 Calculer les distances AB , AC et BC , puis en déduire la nature du triangle ABC .
- 3 Soit D le point de (\mathcal{P}) d'affixe $z_D = 2 - 4i$.

- a Placer le point D dans (\mathcal{P}) .
- b Calculer $\frac{z_A - z_D}{z_B - z_D}$. En déduire la nature du triangle ADB .

- 4 Soit (\mathcal{C}) le cercle circonscrit au triangle ADB . Déterminer l'affixe du centre J de (\mathcal{C}) et calculer son rayon r .
- 5 Soit E le symétrique de D par rapport à J .

- a Déterminer l'affixe de E et montrer que E appartient à (\mathcal{C}) .
- b Préciser la nature du quadrilatère $AEBD$ en justifiant la réponse.

Exercice 16

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -3i, \quad z_B = -2 \quad \text{et} \quad z_C = 1 + 2i.$$

- 1 Déterminer le module et un argument du quotient $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$.
- 2 En déduire la nature du triangle ABC .
- 3 Déterminer l'affixe z_D du point tel que le quadrilatère $BADC$ soit un carré.
- 4 Montrer que les points A , B , C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 17

On considère dans \mathbb{C} l'équation

$$(E) : z^3 + (-5 + 6i)z + 12 + 18i = 0.$$

- 1 a Vérifier que (E) admet une solution réelle z_0 que l'on déterminera.
 - b Montrer que $2i$ est une solution de (E) .
 - c Achever la résolution de l'équation (E) .
- 2 On considère dans le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ les points A , B , M et M' d'affixes respectives $2i$, -3 , z et z' tels que $Z = \frac{z - 2i}{z + 3}$.
- a Montrer que $OM' = \frac{MA}{MB}$.
 - b Déterminer l'ensemble (\mathcal{G}) des points M du plan tels que $OM' = 1$.

Exercice 18

- 1 Calculer $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$. En déduire dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes les solutions de l'équation $z^2 - i = 0$.

- 2 On pose $P(z) = z^3 + z^2 - iz - i$ où z est un nombre complexe.
 - a Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle (que l'on déterminera).
 - b Résoudre l'équation $P(z) = 0$ dans l'ensemble des nombres complexes.

- 3 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm. On considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $z_B = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ et $z_C = -1$.

- a Déterminer la forme exponentielle de z_A et celle de z_B .
 - b Placer avec précision les points A , B et C dans le plan complexe.
- 4 Soit D le symétrique du point A par rapport à l'axe réel.
 - a Donner l'affixe z_D du point D sous forme algébrique.
 - b Démontrer que : $\frac{z_D - z_C}{z_A - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$. En déduire la nature du triangle ACD .

Exercice 19

- 1 On considère l'équation

$$(E) : z^3 - 13z^2 + 59z - 87 = 0, \quad \text{où } z \in \mathbb{C}.$$

- a Déterminer la solution réelle de (E) .
b Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} l'équation (E) .

- 2 On pose $a = 3$, $b = 5 - 2i$ et $c = 5 + 2i$.

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c . Soit M le point d'affixe z distinct de A et de B .

- a Calculer $\frac{b-a}{c-a}$. En déduire la nature du triangle ABC .

b On pose $Z = \frac{z-3}{z-5+2i}$.

Donner une interprétation géométrique de l'argument de Z .

En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit un réel non nul.

Exercice 20

- 1 Soit $p(z) = z^3 + 3z^2 - 3z - 5 - 20i$, $z \in \mathbb{C}$.

- a Démontrer que $2+i$ est une racine de $p(z)$.
b En déduire les solutions de l'équation $p(z) = 0$ dans \mathbb{C} .

- 2 Dans le plan (\mathcal{P}) rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité 1cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2 + i$, $z_B = -1 - 2i$ et $z_C = -4 + i$.

- a Placer les points A, B et C puis calculer les distances AB et BC .

- b Démontrer que :

$$\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = (\vec{BA}, \vec{BC}) \pmod{2\pi}.$$

- c En déduire une mesure en radian de l'angle (\vec{BA}, \vec{BC}) .
d Déduire de tout ce qui précède la nature du triangle ABC .

Exercice 21

Soit le complexe $a = -1 - i$ et Z_n la suite définie par

$$\begin{cases} Z_0 = 0 \text{ et } Z_1 = i \\ Z_{n+1} = (1-a)Z_n + aZ_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

- 1 Déterminer Z_2 et Z_3 sous forme algébrique.
2 Soit (U_n) la suite définie par :

$$U_n = Z_{n+1} - Z_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- a Déterminer U_0 .
b Démontrer que (U_n) est une suite géométrique de raison $-a$.
c Exprimer U_n en fonction de n et a .

- 3 Soit $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$. Exprimer S_n en fonction de Z_n . En déduire que $Z_n = -1 + (1+i)^n$.

Exercice 22

- 1 Résoudre dans \mathbb{C} , les équations suivantes :

a $z^2 - 2z + 5 = 0$.

b $z^2 - 2(1 + \sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$.

- 2 On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 1 + \sqrt{3} + i$, $z_C = 1 + \sqrt{3} - i$, $z_D = 1 - 2i$.

- a Placer A, B, C et D .

- b Vérifier que $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = i\sqrt{3}$. En déduire la nature de ABD .

- c Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle (\mathcal{C}) dont on précisera le centre et le rayon.

- 3 On considère

$$(\mathcal{E}) : z^2 - 2(1 + 2\cos\theta)z + 5 + 4\cos\theta = 0; \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

- a Résoudre (\mathcal{E}) dans \mathbb{C} .

- b Montrer que les points images des solutions de (\mathcal{E}) appartiennent à (\mathcal{C}) .

Exercice 23

Soit $p(z) = z^3 - (5+i)z^2 + 6(1+i)z - 8(1+i)$.

- 1 Montrer que l'équation $p(z) = 0$, $z \in \mathbb{C}$ admet une solution réelle que l'on déterminera.
2 Vérifier que $2i$ est une solution de $p(z) = 0$.

3 Factoriser $p(z)$ et résoudre dans \mathbb{C} , $p(z) = 0$.

4 On distingue les solutions z_1 , z_2 et z_3 de l'équation $p(z) = 0$ par : $|z_1| < |z_2| < |z_3|$.

a Placer dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé les points M_1 , M_2 et M_3 d'affixes respectives z_1 , z_2 et z_3 .

b Montrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est rectangle isocèle.

Exercice 24

Dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, on considère l'équation

$$(\mathcal{E}) : z^3 + (1 - 8i)z^2 - (23 + 4i)z - 3 + 24i = 0.$$

1 a Montrer que (\mathcal{E}) admet une solution imaginaire pure et la déterminer.

b Montrer que $1 + 2i$ et $-2 + 3i$ sont solutions de (\mathcal{E}) .

c Donner l'ensemble des solutions de (\mathcal{E}) .

2 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 3i$ et $z_C = -2 + 3i$.

Soit G le barycentre des points A , B , et C affectés des coefficients respectifs 2, -2 et 1.

Montrer que les vecteurs \overrightarrow{GA} , \overrightarrow{GB} et \overrightarrow{GC} ont pour affixes respectives $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $2i$ et $2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et que ces affixes sont, dans cet ordre, en progression géométrique. Préciser la raison.

Exercice 25

Soit la suite z_n définie par :

$$\begin{cases} z_0 = i \\ z_{n+1} = (1+i)z_n + 2i \end{cases}$$

1 Calculer z_1 et z_2 .

2 On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = z_n + 2$.

a Montrer que : $u_n = (2+i)(1+i)^n$.

b Exprimer z_n en fonction de n .

3 Soit M_{n+1} , M_n , A et B les points d'affixes respectives z_{n+1} , z_n , i et $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

Démontrer que : $\frac{AM_{n+1}}{BM_n} = \sqrt{2}$ et que : $(\overrightarrow{BM_n}, \overrightarrow{AM_{n+1}}) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

Exercice 26

PARTIE A : Pour tout complexe z on note : $f(z) = z^5 + 2z^4 + 2z^3 - z^2 - 2z - 2$.

1 Déterminer le polynôme Q tel que, quel que soit $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = (z^3 - 1)Q(z)$.

2 Résoudre alors dans \mathbb{C} l'équation (\mathcal{E}) : $f(z) = z$.

3 Écrire les solutions de (\mathcal{E}) sous forme trigonométrique puis les représenter dans le plan complexe \mathcal{P} muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

PARTIE B : Considérons les points A , B , C et D du plan \mathcal{P} tels que : $A\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B(-1+i)$, $C(-1-i)$ et $D\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1 Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

2 Soit r la rotation de centre le point Ω d'affixe 1 qui transforme A en D . Déterminer l'écriture complexe de r .

3 Quelle est la nature du triangle ΩAD ?

4 Déterminer l'affixe du centre du cercle circonscrit du triangle ΩAD .

5 On pose $u_n = (z_A)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ où z_A est l'affixe du point A . Déterminer la valeur minimale de n pour laquelle u_n est un réel.

6 Donner la forme algébrique de u_{2019} .

Exercice 27

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit le nombre complexe a défini par : $a = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

1 Montrer que $a^2 = -2\sqrt{3} - 2i$, puis en déduire le module de a .

2 Écrire a^2 sous forme trigonométrique puis vérifier qu'une des mesures de l'argument de a est $\frac{19\pi}{12}$.

3 En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ puis de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

4 Représenter sur le même graphique les points images de a , $-a$ et a^2 .

Exercice 28

Un jeune agriculteur décide de pratiquer de la culture sous serre dans son champ. A cet effet, il choisit dans son plan de représentation un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Il place dans ce repère deux points A et B dont les affixes respectives z_A et z_B sont des racines du polynôme P défini par :

$$P(z) = 2z^3 - 3(1+i)z^2 + 4iz + 1 - i, \quad \text{où } z \in \mathbb{C}.$$

Son objectif est de pratiquer sa culture sous serre dans l'ensemble (\mathcal{E}) des points M de son plan de représentation tels que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MO}\| \leq 2$, qui contient un point du segment $[AB]$.

- 1 Vérifier que 1 et i sont des racines de P .
- 2 Déterminer le polynôme g tel que : $P(z) = (z-1)(z-i)g(z)$.
- 3 Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$.
- 4 On pose $z_A = 1$, $z_B = i$ et $z_C = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.
 - a Placer les points A , B et C d'affixes respectives z_A , z_B et z_C dans le repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ en choisissant comme unité graphique 4 cm.
 - b Démontrer que C est le milieu de $[AB]$, puis que C appartient à l'ensemble (\mathcal{E}) .
 - c Déterminer l'affixe z_G du point G barycentre du système $\{(A, 1); (B, 1); (O, 2)\}$, puis placer G .
- 5 Déterminer puis construire l'ensemble \mathcal{E} des points M de son plan de représentation tels que : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MO}\| \leq 2$.
- 6 Le jeune agriculteur atteindra-t-il son objectif ?

Exercice 29 (POLYNÔMES COMPLEXES)

Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - (11+2i)z^2 + 2(17+7i)z - 42$.

- 1 Démontrer qu'il existe un nombre réel α solution de l'équation : $P(z) = 0$.
- 2 Déterminer le polynôme Q tel que : $P(z) = (z-\alpha)Q(z)$.
- 3 Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $P(z) = 0$.

Exercice 30 (POLYNÔMES COMPLEXES)

On pose $P(z) = z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26$, α désigne un nombre complexe quelconque.

- 1 Montrer que $P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$. En déduire que si $P(\alpha) = 0$ alors $P(\bar{\alpha}) = 0$.
- 2 Calculer $P(1+i)$. Indiquer deux solutions complexes de l'équation $P(z) = 0$.
- 3 Calculer $Q(z) = (z - (1+i))(z - (1-i))$.
- 4 Vérifier que le polynôme $P(z)$ est divisible par $Q(z)$.
- 5 Résoudre dans \mathbb{C} , $P(z) = 0$.

Exercice 31 (POLYNÔMES COMPLEXES)

On pose $P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$.

- 1 Montrer que si le complexe α est solution de l'équation $P(z) = 0$ alors $\bar{\alpha}$ et $\frac{1}{\alpha}$ sont aussi solutions de $P(z) = 0$.
- 2 Calculer $P(1+i)$. Indiquer trois solutions complexes de l'équation $P(z) = 0$ puis en déduire la résolution de l'équation $P(z) = 0$.
- 3 Écrire $P(z)$ sous forme d'un produit de deux polynômes du second degré, à coefficients réels.

Exercice 32 Soit l'équation (\mathcal{E}) : $z^3 + (4-5i)z^2 + (8-20i)z - 40i = 0$.

- 1 Démontrer que (\mathcal{E}) admet une solution imaginaire pure.
- 2 Résoudre (\mathcal{E}) dans \mathbb{C} .
Soit l'équation (\mathcal{E}') : $z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0$.
- 3 Démontrer que 0 n'est pas solution de (\mathcal{E}') . En déduire que si α est une solution de (\mathcal{E}') alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi une solution de (\mathcal{E}') .
- 4 Démontrer que (\mathcal{E}') est équivalente à (\mathcal{E}'') : $\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 5\left(z + \frac{1}{z}\right) + 4 = 0$.
- 5 En posant $Z = z + \frac{1}{z}$, résoudre (\mathcal{E}'') .
- 6 En déduire la résolution de (\mathcal{E}') dans \mathbb{C} .