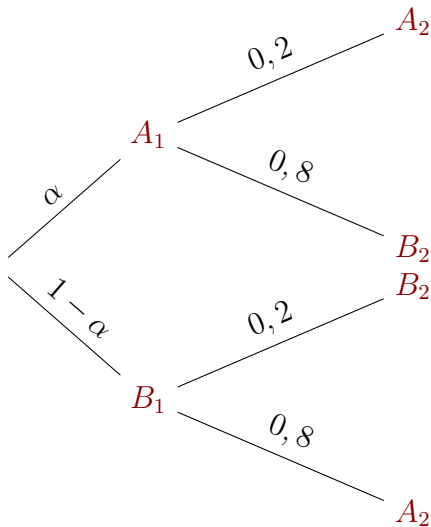


**Exercice 1 : (04.75 pts)****Partie I : (02,5 points)**

Construisons un arbre pondéré correspondant à cette épreuve.



- 1 Déterminons la valeur de  $\alpha$

$$\begin{aligned}
 P(A_2) &= P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(A_2) \\
 &= \alpha \times 0,2 + (1 - \alpha) \times 0,8 \\
 &= 0,2\alpha + 0,8 - 0,8\alpha \\
 &= -0,6\alpha + 0,8
 \end{aligned}$$

$$\text{Si } P(A_1) = P(A_2) \implies \alpha = -0,6\alpha + 0,8$$

$$\implies 1,6\alpha = 0,8$$

$$\alpha = \frac{0,8}{1,6}$$

$$\alpha = 0,5$$

**(01 point)**

- 2 Calculons la probabilité qu'un athlète se rende au même stade pendant les deux jours.

$A_1$  : « l'athlète choisit le stade A le 1<sup>er</sup> jour »

$B_1$  : « l'athlète choisit le stade B le 1<sup>er</sup> jour »

$A_2$  : « l'athlète choisit le stade A le 2<sup>er</sup> jour »

$B_2$  : « l'athlète choisit le stade B le 2<sup>er</sup> jour »

Un athlète se rende au même stade pendant les deux jours se traduit par:  $A_1 \cap A_2$  ou  $B_1 \cap B_2$

$$\begin{aligned}
P((A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2)) &= P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap B_2) \\
&= P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \\
&= 0,5 \times 0,2 + 0,5 \times 0,2 \\
&= 0,1 + 0,1 \\
&= 0,2
\end{aligned}$$

$$P((A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2)) = 0,2$$

(0,75 point)

- 3 Au deuxième jour, on aperçoit un athlète sortant du stade  $B$ . La probabilité qu'il se soit entraîné au même stade la veille

Se traduit par : entrer dans  $B$  deux jours successifs, c'est-à-dire :  $B_1$  sachant  $B_2$

$$\begin{aligned}
P_{B_2}(B_1) &= \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} \\
&= \frac{P(B_1) \times P_{B_1}(B_2)}{P(A_1) \times P_{A_1}(B_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(B_2)} \\
&= \frac{0,5 \times 0,2}{0,5 \times 0,8 + 0,5 \times 0,2} \\
&= \frac{0,1}{0,4 + 0,1} \\
&= \frac{0,1}{0,5} \\
&= 0,2
\end{aligned}$$

$$P_{B_2}(B_1) = 0,2$$

(0,75 point)

## Partie II : (02,25 points)

- 1 La probabilité qu'il y ait deux athlètes heureux

Il ne peut pas y avoir deux athlètes heureux car il ya au moins 3 athlètes donc l'un des stades sera occupé par au moins deux athlètes

La probabilité qu'il y ait deux athlètes heureux est nulle

(0,5 point)

- 2 Un athlète est heureux s'il est seul dans un stade. On note la probabilité que cela arrive parmi  $n$  athlètes :  
Pour un athlète donné, l'épreuve qui consiste à choisir un stade est une **épreuve de Bernoulli** dont la probabilité du succès (le stade  $A$ ) est 0,5.

- a Cette épreuve étant effectuée  $n$  fois de suite (par les  $n$  athlètes) et de manière indépendante, on a un **schéma de Bernoulli**.

On a deux cas :

- Un athlète se présente dans le stade  $A$  et  $n - 1$  athlètes dans le stade  $B$  : 1 succès ;
- Un athlète se présente dans le stade  $B$  et  $n - 1$  athlètes dans le stade  $A$  :  $n - 1$  succès.

La probabilité qu'il y ait un athlète heureux parmi ces  $n$  athlètes est :

$$p_n = C_n^1(0,5)^1(1 - 0,5)^{n-1} + C_n^1(0,5)^{n-1}(1 - 0,5)^1 = 2n \cdot (0,5)^n = \frac{n}{2^{n-1}}$$

$$p_n = \frac{n}{2^{n-1}} \quad (0,75 \text{ pt})$$

### Autre Approche

**Remarque : si on voulait le voir comme une variable aléatoire**

On peut modéliser le choix de chaque athlète comme une variable aléatoire de Bernoulli :

- On note  $X$  le nombre d'athlètes qui choisissent le stade  $A$ ,
- Chaque athlète a une probabilité  $\frac{1}{2}$  de choisir  $A$  ou  $B$ ,
- Donc  $X \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ , c'est-à-dire une loi binomiale.

Un athlète est **heureux** s'il est **seul** dans un stade, ce qui correspond à :

un seul athlète dans  $A$  ou un seul athlète dans  $B$

Autrement dit :

$$p_n = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = n - 1)$$

Avec la loi binomiale :

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Donc :

$$p_n = \left[ \binom{n}{1} + \binom{n}{n-1} \right] \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2n}{2^n}$$

Et comme :

$$2^n = 2 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow \frac{2n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

$$p_n = \frac{n}{2^{n-1}} \quad (0,75 \text{ point})$$

**b** Étudions la variation de la suite  $(p_n)_{n \geq 3}$ .

(0,5 point)

$$p_n = \frac{n}{2^{n-1}}$$

On a

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= \frac{(n+1)}{2^n} - \frac{n}{2^{n-1}} \\ &= \frac{n+1}{2^n} - \frac{2n}{2^n} \\ &= \frac{n+1-2n}{2^n} \\ &= \frac{-n+1}{2^n} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } p_{n+1} - p_n = \frac{-n+1}{2^n}$$

Comme  $n \geq 3$  alors  $-n+1 < 0$  donc  $\frac{-n+1}{2^n} < 0$  d'où  $\forall n \geq 3, p_n < 0$

Ainsi la suite  $(p_n)$  est décroissante

La convergence de la suite

$$\begin{aligned}
 p_n &= \frac{n}{2^{n-1}} \implies p_n = \frac{2n}{2^n} \\
 &\implies p_n = \frac{2n}{e^{\ln(2^n)}} \\
 &\implies p_n = \frac{2n}{e^{n \ln(2)}} \\
 &\implies p_n = \frac{2}{\ln(2)} \times \frac{n \ln(2)}{e^{n \ln(2)}}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } p_n = \frac{2}{\ln(2)} \times \frac{n \ln(2)}{e^{n \ln(2)}}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\ln(2)} \times \frac{n \ln(2)}{e^{n \ln(2)}} \\
 &= \frac{2}{\ln(2)} \times \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \ln(2)}{e^{n \ln(2)}} \\
 &= \frac{2}{\ln(2)} \times 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

D'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0$  donc la suite  $(p_n)_{n \geq 3}$  converge vers 0

**c** Calculons  $p_{10}$

$$\begin{aligned}
 p_n &= \frac{n}{2^{n-1}} \\
 p_{10} &= \frac{10}{2^{10-1}} \\
 &= \frac{10}{2^9} \\
 &= \frac{5}{2^8}
 \end{aligned}$$

$$p_{10} = \frac{5}{2^8} \approx 0,019$$

**(0,25 point)**

Déterminons la plus grande valeur de  $n$  pour laquelle la probabilité d'avoir un athlète heureux est supérieur à 0,005.

**(0,25 point)**

La suite  $(p_n)$  étant strictement décroissante, on va chercher la plus grande valeur de  $n$  supérieur à 10 telles que  $p_n$  reste supérieur à 0,005

$$p_n = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Calculs :

$$p_{11} = \frac{11}{2^{10}} \approx 0,01 > 0,005$$

$$p_{12} = \frac{12}{2^{11}} \approx 0,0059 > 0,005$$

$$p_{13} = \frac{13}{2^{12}} \approx 0,0031 < 0,005$$

**Conclusion :** La plus grande valeur de  $n$  pour laquelle la probabilité d'avoir un athlète heureux soit supérieur à 0,005 est 12.

$$n = 12$$

## Exercice 2 :(04,25 pts)

Soient  $(\Delta_1)$  et  $(\Delta_2)$  deux droites distinctes de l'espace.

On note  $R_1$  et  $R_2$  les demi-tours d'axes respectifs  $(\Delta_1)$  et  $(\Delta_2)$ .

Le but de cet exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur  $(\Delta_1)$  et  $(\Delta_2)$  pour que :  $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$ .

### 1 On suppose que $(\Delta_1)$ et $(\Delta_2)$ sont perpendiculaires en un point noté $O$ .

On adoptera les notations suivantes :

- Le plan contenant  $(\Delta_1)$  et  $(\Delta_2)$  est noté  $(P)$ .
- La droite perpendiculaire en  $O$  au plan  $(P)$  est notée  $(\Delta)$ .
- Le plan contenant  $(\Delta)$  et  $(\Delta_1)$  est noté  $(P_1)$ .
- Le plan contenant  $(\Delta)$  et  $(\Delta_2)$  est noté  $(P_2)$ .
- Les réflexions par rapport aux plans  $(P)$ ,  $(P_1)$ ,  $(P_2)$  sont respectivement notées  $S_P$ ,  $S_{P_1}$ ,  $S_{P_2}$ .

- a** Faisons une figure en faisant apparaître clairement le point  $O$ , les plans  $(P)$ ,  $(P_1)$ ,  $(P_2)$  ainsi que les droites  $(\Delta)$ ,  $(\Delta_1)$ ,  $(\Delta_2)$ . **(0,75 point)**

La figure, voir ce qui suit

- b** Déterminons  $S_P \circ S_{P_1}$  et  $S_{P_2} \circ S_P$

La transformation  $S_P \circ S_{P_1}$  est la rotation d'axe  $(P) \cap (P_1) = \Delta_1$  et d'angle  $2 \times [\text{l'angle formé par } (P) \text{ et } (P_1)] = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$

C'est donc le demi-tour d'axe  $\Delta_1$  c'est à dire  $R_1$

**(0,5 point)**

La transformation  $S_{P_2} \circ S_P$  est la rotation d'axe  $(P) \cap (P_2) = \Delta_2$  et d'angle  $2 \times [\text{l'angle formé par } (P) \text{ et } (P_2)] = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$

C'est donc le demi-tour d'axe  $\Delta_2$  c'est à dire  $R_2$

**(0,5 point)**

- c** En déduire que  $R_2 \circ R_1$  est un demi-tour dont on précisera l'axe.

$$R_2 \circ R_1 = (S_{P_2} \circ S_P) \circ (S_P \circ S_{P_1}) = S_{P_2} \circ S_{P_1}$$

- d** Prouver alors que  $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$ .

On peut aussi écrire :  $R_1 = S_{P_1} \circ S_P$ . On a alors :

$$R_1 \circ R_2 = (S_{P_1} \circ S_P) \circ (S_P \circ S_{P_2}) = S_{P_1} \circ S_{P_2}.$$

Or,  $S_{P_1} \circ S_{P_2}$  est aussi la rotation d'axe  $(P_1) \cap (P_2) = \Delta$  et d'angle  $2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$ .

C'est donc le **demi-tour d'axe  $\Delta$** . Finalement,  $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$ .

### 2 Réciproquement, on suppose que $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$ .

Soit  $A$  un point de  $(\Delta_1)$  qui n'appartient pas à  $(\Delta_2)$  et  $B$  l'image de  $A$  par  $R_2$ .

- a** Montrer que la droite  $(AB)$  et la droite  $(\Delta_2)$  sont perpendiculaires.

Soit  $(Q)$  le plan passant par  $A$  et orthogonal à  $(\Delta_2)$  et soit  $I$  le point d'intersection de  $(Q)$  et  $(\Delta_2)$ . Dire que le point  $B$  est l'image du point  $A$  par  $R_2$  signifie que  $B$  est l'image du point  $A$  par la restriction de  $R_2$  à  $(Q)$  qui est la symétrie centrale de centre  $I$ . On a  $(AB) \subset (Q)$ , donc  $(\Delta_2)$  est orthogonal à  $(AB)$ . De plus,  $A$ ,  $I$  et  $B$  sont alignés. Donc  $I \in (\Delta_2) \cap (AB)$ . Ainsi, la droite  $(AB)$  et la droite  $\Delta_2$  sont perpendiculaires en  $I$ .

- b** En utilisant la relation  $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$ , prouver que  $B = R_1(B)$ .

$$R_1(B) = R_1(R_2(A)) = R_2(R_1(A)) = R_2(A) = B.$$

**c** En déduire que  $(\Delta_1)$  et  $(\Delta_2)$  sont perpendiculaires.

On a :

$R_1(B) = B$  ; donc  $B \in (\Delta_1)$ .

$A \in \Delta_1$ .

$A \neq B$  car si  $A = B$ , on aurait  $R_2(A) = A$  ; ce qui signifierait que  $A \in (\Delta_2)$ .

On en déduit que  $(AB) = (\Delta_1)$ . D'après 2.a), la droite  $(AB)$  et la droite  $(\Delta_2)$  sont perpendiculaires.

On en déduit que  $(\Delta_1)$  et  $(\Delta_2)$  sont perpendiculaires.

**3** En utilisant ce qui précède, énoncer une condition nécessaire et suffisante portant sur  $(\Delta_1)$  et  $(\Delta_2)$  pour que  $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$ .

Soient  $(\Delta_1)$  et  $(\Delta_2)$  deux droites distinctes de l'espace,  $R_1$  et  $R_2$  les demi-tours d'axes respectifs  $(\Delta_1)$  et  $(\Delta_2)$ .

$$R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1 \iff (\Delta_1) \perp (\Delta_2).$$