◇◇◇ Lycée de Dindéfélo ◇◇◇			A.S. : 2024/2025
Matière: Mathématiques	Niveau : 2ndL	Date: 19/03/2025	Durée : 3 heures

Correction du devoir n° 1 du 2nd Semestre

Exercice 1 : 6 points (Application Affine et Factorisation)

1. Soit la fonction affine $f(x) = 2x + 1$.

   a. Calculer $f(1)$ puis conclure.
   $f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$
   Donc, l'image de 1 par la fonction f est 3.

   b. Résoudre $f(x) = 5$ puis conclure.
   $f(x) = 5 \Rightarrow 2x + 1 = 5 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$
   Donc, l'antécédent de 5 par la fonction f est 2.

2. Déterminer le taux d'accroissement de la fonction affine telle que : $f(3) = 3$ et $f(2) = 4$.

$$\text{Taux d'accroissement} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{3 - 4}{1} = -1$$

Donc, le taux d'accroissement de cette fonction affine entre 2 et 3 est -1.

3. Factorisons au mieux :

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= x^3 - 8 + 2(x-2)^2 \\
&= (x-2)(x^2 + 2x + 2^2) + 2(x-2)(x+2) \\
&= (x-2)\left[(x^2 + 2x + 2^2) + 2(x+2)\right] \\
&= (x-2)\left[x^2 + 2x + 4 + 2x + 4\right] \\
&= (x-2)\left[x^2 + 4x + 8\right].
\end{aligned}$$

$$\boxed{A = (x-2)\left[x^2 + 4x + 8\right]}$$

4. Factoriser, si possible, les trinômes suivants :

$\mathbf{B}(x) = -2x^2 + 4x + 6.$

Calcul du discriminant :

$$\begin{aligned}
\Delta &= b^2 - 4ac \\
&= 4^2 - 4(-2)(6) \\
&= 16 + 48 \\
&= 64.
\end{aligned}$$

Racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{64}}{2(-2)} = \frac{-4 - 8}{-4} = \frac{-12}{-4} = 3,$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{64}}{2(-2)} = \frac{-4 + 8}{-4} = \frac{4}{-4} = -1.$$

Forme factorisée :
$\mathbf{B}(x) = -2(x-3)(x+1)$.

$\boxed{\mathbf{B}(x) = -2(x-3)(x+1).}$

$\mathbf{C}(x) = x^2 - 8x + 17$.

Calcul du discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-8)^2 - 4(1)(17) \\ &= 64 - 68 \\ &= -4.\end{aligned}$$

Le discriminant est négatif, donc $\mathbf{C}(x)$ n'est pas factorisable sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\mathbf{C}(x) \text{ n'admet pas de factorisation réelle.}}$

$\mathbf{D}(x) = -9x^2 + 6x - 1$.

Calcul du discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 6^2 - 4(-9)(-1) \\ &= 36 - 36 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Racine unique :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(-9)} = \frac{-6}{-18} = \frac{1}{3}.$$

Forme factorisée :

$$\mathbf{D}(x) = -9(x - \frac{1}{3})^2.$$

$\boxed{\mathbf{D}(x) = -9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2.}$

Exercice 2 : 4 points (Résolution de systèmes par la méthode de Cramer)

Résolvons chacun des systèmes suivants en utilisant la méthode de Cramer :

a) $\begin{cases} 3x - y + 2 = 0 \\ 3x - y - 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 3x - y = -2 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

Calcul du déterminant de :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (3)(-1) - (3)(-1) = -3 + 3 = 0.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2)(-1) - (1)(-1) = 2 + 1 = 3.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (3)(-2) = 3 + 6 = 9.$$

$\Delta = 0, \Delta_x \neq 0$ **et** $\Delta_y \neq 0$

$\boxed{\text{Le système n'admet pas de solution.}}$

b) $\begin{cases} 2y + x = 5 \\ -y + 7 = 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 0 - y = -3 \end{cases}$

Calcul du déterminant de :

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-1) - (0)(2) = -1.$

Le déterminant est non nul, nous pouvons utiliser la règle de Cramer.

Calcul de x : $\quad x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \dfrac{(5)(-1) - (3)(2)}{-1} = \dfrac{-5-6}{-1} = \dfrac{-11}{-1} = 11.$

Calcul de y : $\quad y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{-1} = \dfrac{(1)(3) - (0)(5)}{-1} = \dfrac{3}{-1} = -3.$

Solution du système : $\boxed{S = \{(11, -3)\}}$.

c) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

Calcul du déterminant de :

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (3)(-1) - (2)(-1) = -3 + 2 = -1.$

Le déterminant est non nul, nous pouvons utiliser la règle de Cramer.

Calcul de x : $\quad x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \dfrac{(2)(-1) - (1)(-1)}{-1} = \dfrac{-2+1}{-1} = \dfrac{-1}{-1} = 1.$

Calcul de y : $\quad y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \dfrac{(3)(1) - (2)(2)}{-1} = \dfrac{3-4}{-1} = \dfrac{-1}{-1} = 1.$

Solution du système : $\boxed{S = \{(1, 1)\}}$.

d) $\begin{cases} x + y = 3 \\ -y + 4 = x - 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ -x - y = -6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 6 \end{cases}$

Calcul du déterminant de :

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (1)(1) = -1 + 1 = 0.$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (6)(1) = -3 + 6 = 3.$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = (1)(6) - (1)(3) = -6 + 3 = -3.$

$\Delta = 0, \Delta_x \neq 0$ **et** $\Delta_y \neq 0$

Le système n'admet pas de solution.

Exercice 3 : 6 points (Équations et inéquations du second degré)

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $-x^2 - x + 2 = 0$

Identifions les coefficients : $a = -1, \quad b = -1, \quad c = 2.$
Calcul du discriminant Δ : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(-1)(2) = 1 + 8 = 9.$
Le discriminant est positif, il y a donc deux solutions distinctes.

Calcul des solutions : $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2(-1)} = \dfrac{1 \pm 3}{-2}.$

Les deux solutions sont : $x_1 = \dfrac{1+3}{-2} = \dfrac{4}{-2} = -2$ et $x_2 = \dfrac{1-3}{-2} = \dfrac{-2}{-2} = 1.$

Les solutions de l'équation sont : $\boxed{S = \{-2, 1\}}$.

b) $-9x^2 + 12x - 3 = 0$

Identifions les coefficients : $a = -9, \quad b = 12, \quad c = -3.$
Calcul du discriminant Δ : $\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4(-9)(-3) = 144 - 108 = 36.$
Le discriminant est positif, il y a donc deux solutions distinctes.

Calcul des solutions : $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-12 \pm \sqrt{36}}{2 \times (-9)} = \dfrac{-12 \pm 6}{-18}.$

Les deux solutions sont : $x_1 = \dfrac{-12+6}{-18} = \dfrac{-6}{-18} = \dfrac{1}{3}$ et $x_2 = \dfrac{-12-6}{-18} = \dfrac{-18}{-18} = 1.$

Les solutions de l'équation sont : $\boxed{S = \left\{\dfrac{1}{3}, 1\right\}}$.

c) $-3x^2 + 4x - 2 \leq 0$

Posons $-3x^2 + 4x - 2 = 0$
Identifions les coefficients : $a = -3, \quad b = 4, \quad c = -2.$
Calcul du discriminant Δ : $\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(-3)(-2) = 16 - 24 = -8.$
Le discriminant est négatif, donc il y a pas de solutions.

x	$-\infty$	$+\infty$
$-3x^2 + 4x - 2$	$-$	

Les solutions de l'équation sont : $\boxed{S = \mathbb{R}}$.

d) $8x^2 + 34x + 21 < 0$

Posons $8x^2 + 34x + 21 = 0$
Identifions les coefficients : $a = 8, \quad b = 34, \quad c = 21.$
Calcul du discriminant Δ : $\Delta = b^2 - 4ac = (34)^2 - 4(8)(21) = 1156 - 672 = 484.$
Le discriminant est positif, il y a donc deux solutions distinctes.

Calcul des solutions : $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(34) \pm \sqrt{484}}{2(8)} = \dfrac{-34 \pm 22}{16}.$

Les deux solutions sont : $x_1 = \dfrac{-34+22}{16} = \dfrac{-12}{16} = -\dfrac{3}{4}$ et $x_2 = \dfrac{-34-22}{16} = \dfrac{-56}{16} = \dfrac{-7}{2}.$

x	$-\infty$		$\frac{-7}{2}$		$\frac{-3}{4}$		$+\infty$
$2x^2 - x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Les solutions de l'équation sont : $\boxed{S = \left]\dfrac{-7}{2}; \dfrac{-3}{4}\right[}$.

e) $2x^2 - x - 3 > 0$

Posons $2x^2 - x - 3 = 0$
Identifions les coefficients : $a = 2, \quad b = -1, \quad c = -3.$

Calcul du discriminant Δ : $\quad \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2)(-3) = 1 + 24 = 25.$
Le discriminant est positif, il y a donc deux solutions distinctes.

Calcul des solutions : $\quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2(2)} = \dfrac{1 \pm 5}{4}.$

Les deux solutions sont : $\quad x_1 = \dfrac{1+5}{4} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$ et $\quad x_2 = \dfrac{1-5}{4} = -\dfrac{4}{4} = -1.$

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x^2 - x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Les solutions de l'équation sont : $\boxed{S =]-\infty; -1[\cup \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[}$.

f) $4 - 9x^2 \geq 0$

Résolvons d'abord l'équation associée : $\quad 4 - 9x^2 = 0$

Isolons x^2 : $\quad 9x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \dfrac{4}{9}.$

En prenant la racine carrée : $\quad x = \pm\sqrt{\dfrac{4}{9}} = \pm\dfrac{2}{3}.$

Les racines sont donc : $\quad x_1 = -\dfrac{2}{3}, \quad x_2 = \dfrac{2}{3}.$

On étudie le signe de $\; 4 - 9x^2$.
Remarquons que $\; 4 - 9x^2 = -9x^2 + 4,\;$ une fonction trinôme de degré 2 avec $\; a = -9 < 0.$
Elle est donc négative à l'extérieur des racines, positive entre les racines.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$4 - 9x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On cherche les valeurs pour lesquelles $4 - 9x^2 \geq 0$.

Donc la solution est : $\boxed{S = \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]}$.

<u>Exercice 4 :</u> 4 points (Union et Intersection d'Intervalles)

1. On considère $I = [-1, 5]$ et $J = [0, 7]$.
   Déterminons $I \cup J$ et $I \cap J$:
   - $\boxed{I \cup J = [-1, 7]}$
   - $\boxed{I \cap J = [0, 5]}$

2. On considère $K = [-7, -3]$ et $L = [1, 3]$.
   Déterminons $K \cup L$ et $K \cap L$:
   - $\boxed{K \cup L = [-7, -3] \cup [1, 3]}$
   - $\boxed{K \cap L = \varnothing}$