Similitude

Exercice 1 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'écriture complexe de la similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ.

1. $\Omega = O$, $k = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{6}$.
2. $\Omega\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $k = \sqrt{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$.
3. $\Omega\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, $k = 1$ et $\theta = \frac{5\pi}{6}$.
4. $\Omega(-2 + i\frac{1}{2})$, $k = \frac{1}{2}$, $\theta = \frac{-\pi}{3}$.

Exercice 2 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application f du plan dans lui-même, qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' :

a.$z' = (\sqrt{3} + i)z$; **b.** ; $z' = -2z + i$; **c.** $z' = -z + 2i$; **d.** $z' = \frac{3 + i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$; **e.** $z' = iz + 1$; **f.** $z' = z + 3 - i$.

Exercice 3 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s définie par : $S(A) = A'$ et $S(B) = B'$.

a) $A(3 + 2i)$, $A'(3)$, $B(1)$ et $B'(i)$;

b) $A(2 + i)$, $A'(3 + 2i)$, $B(2)$ et $B'(3i)$.

Exercice 4 :

Soit s la similitude directe d'écriture complexe : $z' = 3iz - 9 - 3i$.

1. Déterminer les éléments caractéristiques de s.
2. Déterminer l'expression analytique de s.
3. Déterminer l'image par s :
   (a) du cercle de centre $K(1 - 3i)$ et de rayon 1;
   (b) de la droite $(\mathscr{D})$ d'équation : $x = 1$;
   (c) de la droite passant par le point $A(5; 3)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(-1; 3)$.

Exercice 5 :

Soit A, B et C les points d'affixes respectives : $i, 1+i$ et $2+2i$.

1. Déterminer l'affixe du barycentre G des points A, B et C affectés respectivement des coefficients $2, -2$ et 1.
2. Démontrer que la similitude directe s, qui transforme A en B et B en C, a pour centre le point G.
3. Déterminer l'angle et le rapport de s.

Exercice 6 : (BAC)

On considère les applications T_1 et T_2 dont les écritures complexes sont : $T_1 : z_1 = (\sqrt{3}+i)z$ et $T_2 : z_2 = (1-i\sqrt{3})z+3$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de T_1 et T_2.
2. Déterminer l'écriture complexe, la nature et les éléments caractéristiques de $T_2 \circ T_1$.
3. Démontrer qu'il existe un seul point K tel que $T_1(K) = T_2(K)$. Soit $L = T_1(K)$. Calculer les affixes des points K et L.
4. Démontrer que le point L est invariable pour chacune des applications $T_2 \circ T_1^{-1}$ et $T_1 \circ T_2^{-1}$.
5. Déterminer l'écriture complexe de chacune des applications $T_2 \circ T_1^{-1}$ et $T_1 \circ T_2^{-1}$. Préciser leurs natures et éléments caractéristiques.

Exercice 7 :

Soit S_1 l'application qui à tout point $M(x, y)$ associe $M'(x', y')$ définie par :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

1. Déterminer l'écriture complexe de S_1.
2. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de S_1.
3. Soient les points $A(1)$ et $B(-1)$. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S_2 telle que $S_2(A) = O$ et $S_2(B) = B$ puis caractériser S_2.
4. On pose $S = S_1 \circ S_2$. Déterminer l'écriture complexe de S.
5. Déterminer l'image par S :
   (a) de la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $2x + y - 1 = 0$;
   (b) du cercle $(\mathscr{C})$ d'équation $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 4$.

EXERCICE 1 :Bac 2024 **(05 points)**

1. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -3i$, $z_B = -2$ et $z_C = 1+2i$.

a. Déterminer le module et un argument du quotient

$$\frac{2z_C - z_B}{z_A - z_B}.$$

(0,75 point)

b. En déduire la nature du triangle ABC. **(0,75 point)**

c. Déterminer l'affixe z_D du point D tel que le quadrilatère $BADC$ soit un carré. **(0,5 point)**

d. Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. **(0,75 point)**

2. On considère les points M et M' d'affixes respectives $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x', y' sont des réels.

Soit S l'application du plan dans le plan d'expression analytique : $\begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$

a. Montrer que l'écriture complexe de S est :

$$z' = (1+i)z + 2 - i.$$

(0,5 point)

b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S. **(0,5 point)**

c. Déterminer l'image par S de la droite (D) d'équation $x + y + 1 = 0$. **(0,5 point)**

d. Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $|(1+i)z + 2 - i| = 2$. **(0,5 point)**