Devoir n° 2 Du 1er Semestre

Exercice 1 : (03 points ≈ 36 mns)

1. Déterminer une primitive F de la fonction f sur I.

   a. $f(x) = (6x-3)(4x^2-4x+2)^3 \quad ; I = \mathbb{R}$ $(0,5pt)$

   b. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{3+\cos x}} \quad ; I = \mathbb{R}$ $(0,5pt)$

   c. $f(x) = 2\cos 3x - 3\sin 2x \quad ; I = \mathbb{R}$ $(0,5pt)$

   d. $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2-1}} + \sin x \sin 2x \quad ; I =]-\infty; -1[$ $(0,5pt)$

2. Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par : $k(x) = \dfrac{3x-2}{(x+2)^3}$.

   a. Déterminer les a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $k(x) = \dfrac{a}{(x+2)^2} + \dfrac{b}{(x+2)^3}$. $(0,5pt)$

   b. En déduire la primitive K de k qui prend la valeur 2 en -3. $(0,5pt)$

Exercice 2 : (05 points ≈ 60 mns)

1. a. Écrivez le complexe $z = -1 + i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle. $(1pt)$

   b. Donner le module et un argument de $z = (1-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}$. $(1pt)$

2. a. Donner le module et un argument de $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$. $(1pt)$

   b. Déduis en le module et un argument de chacun des complexes $u = \dfrac{z_1}{z_2}$ et u^5. $(1pt)$

   c. Déduis en les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$. $(1pt)$

Problème : (12 points ≈ 144 mns)

On note (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité $1cm$ avec

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-2x^2}{x^2-1} & ; \text{si } x \leq 0 \\ x + \sqrt{x^2+x} & ; \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire :

Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = -x^3 + 3x - 4$.

1. Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variations. $(0,75pt)$

2. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$. $(0,5pt)$

b Donner un encadrement de α à 10^{-1}. $(0,5pt)$

3 En déduire le signe de $g(x)$ sur $]-\infty;0]$. $(0,25pt)$

Partie B : Étude de la fonction f

1 Déterminer l'ensemble de définition D_f de f. $(0,5pt)$

2 a Calculer les limites de f aux bornes de D_f et en déduire l'existence d'une asymptote dont on précisera. $(01pt)$

b Pour $x \leq 0$, déterminer les réels a, b, c et d tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{cx+d}{x^2-1}$ et en déduire la nature de la branche infinie en $-\infty$. $(0,75pt)$

c Donner la nature de l'asymptote en $+\infty$. $(0,5pt)$

3 a Montrer que f est continue sur D_f. $(0,75pt)$

b Étudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter le résultat obtenu. $(01pt)$

4 Démontrer que : $f(\alpha) = -2 + \dfrac{3(\alpha-2)}{\alpha^2-1}$. $(0,5pt)$

5 a Montrer que $\forall x \in]-\infty;-1[\cup]-1;0[$, on a : $f'(x) = \dfrac{-xg(x)}{(x^2-1)^2}$ puis étudier son signe. $(1pt)$

b Calculer $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$ et étudier son signe. $(0,75pt)$

c Dresser le tableau de variation de f sur D_f. $(0,75pt)$

6 Construire soigneusement la courbe (C_f). $(01pt)$

Partie C : Bijection

Soit h la restriction de f sur $I =]0;+\infty[$.

1 Montrer que h réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser. $(0,5pt)$

2 Calculer $h^{-1}(1)$ et $(h^{-1})'(\sqrt{2}+1)$. $(0,5pt)$

3 Expliciter $h^{-1}(x)$. $(0,5pt)$

4 Construire $(C_{h^{-1}})$ dans le repère précédent. $(0,5pt)$