| ◇◇◇ Lycée de Dindéfélo ◇◇◇ | | | A.S. : 2024/2025 |
|---|---|---|---|
| Matière: Mathématiques | Niveau : 2ndL | Date: 14/02/2025 | Rendre le 19 à 10H |

# Correction Dm



## Exercice 1 :3pts

1. Calculons les expressions suivantes et donnons les résultats sous la forme de fractions irréductibles :

$$\begin{aligned}
A &= \left(-1+\frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\\
&= \left(-1+\frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{2}{4}}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)\\
&= \left(-1+\frac{1}{\frac{3}{4}}\right)\times\frac{1}{2}\\
&= \left(-1+\frac{4}{3}\right)\times\frac{1}{2}\\
&= \left(\frac{-3}{3}+\frac{4}{3}\right)\times\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{A = \frac{1}{6}} \qquad \textbf{0,75pt}$$

$$
\begin{aligned}
B &= \left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(3-\frac{\frac{3}{2}}{1+\frac{1}{3}}\right)\\
&= \left(\frac{3}{3}-\frac{1}{3}\right)\times\left(3-\frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{3}}\right)\\
&= \frac{2}{3}\times\left(3-\frac{3}{2}\times\frac{3}{4}\right)\\
&= \frac{2}{3}\times\left(3-\frac{9}{8}\right)\\
&= \frac{2}{3}\times\left(\frac{24}{8}-\frac{9}{8}\right)\\
&= \frac{2}{3}\times\frac{15}{8}\\
&= \frac{2\times 15}{3\times 8}\\
&= \frac{30}{24}\\
&= \frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}} \qquad \textbf{0,75pt}$$

2 Écrivons sous la forme $a\sqrt{b}$ l'expression suivante :

$$
\begin{aligned}
E &= 2\sqrt{28}+2\sqrt{63}+3\sqrt{7}\\
&= 2\times\sqrt{4\times 7}+2\times\sqrt{9\times 7}+3\sqrt{7}\\
&= 2\times\sqrt{4}\times\sqrt{7}+2\times\sqrt{9}\times\sqrt{7}+3\sqrt{7}\\
&= 2\times 2\sqrt{7}+2\times 3\sqrt{7}+3\sqrt{7}\\
&= 4\sqrt{7}+6\sqrt{7}+3\sqrt{7}\\
&= (4+6+3)\sqrt{7}\\
&= 13\sqrt{7}
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{13\sqrt{7}} \qquad \textbf{0,75pt}$$

3. Écrivons l'expression suivante sous la forme $2^m \times 5^n \times 7^p$ :

$$\begin{aligned}
A &= \frac{7^5 \times 4^2 \times 5^6}{5^3 \times 7^3 \times 8^3} \\
&= \frac{7^5 \times (2^2)^2 \times 5^6}{5^3 \times 7^3 \times (2^3)^3} \\
&= \frac{7^5 \times 2^4 \times 5^6}{5^3 \times 7^3 \times 2^9} \\
&= 7^{5-3} \times 2^{4-9} \times 5^{6-3} \\
&= 7^2 \times 2^{-5} \times 5^3 \\
&= \frac{5^3 \times 7^2}{2^5}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{A = \frac{5^3 \times 7^2}{2^5}} \qquad \textbf{0,75pt}$$



## <u>Exercice 2:</u> 6pts

1. Mettons les trinômes ci-dessus sous forme canonique

$$A = 5x^2 - 7x - 34$$

$$a = 5, \quad b = -7, \quad c = -34$$

$$\begin{aligned}
A &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\
&= 5\left[\left(x + \frac{-7}{2 \times 5}\right)^2 - \frac{(-7)^2 - 4(5)(-34)}{4(5^2)}\right] \\
&= 5\left[\left(x + \frac{-7}{10}\right)^2 - \frac{49 + 680}{100}\right] \\
&= 5\left[\left(x + \frac{-7}{10}\right)^2 - \frac{729}{100}\right]
\end{aligned}$$

$$\mathbf{A = 5\left[\left(x - \frac{7}{10}\right)^2 - \frac{729}{100}\right]} \qquad \textbf{0,75pt}$$

$$B = 2x^2 - 5x + 3$$

$$a = 2, \quad b = -5, \quad c = 3$$

$$
\begin{aligned}
B &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]\\
&= 2\left[\left(x+\frac{-5}{2\times 2}\right)^2-\frac{(-5)^2-4(2)(3)}{4(2^2)}\right]\\
&= 2\left[\left(x+\frac{-5}{4}\right)^2-\frac{25-24}{16}\right]\\
&= 2\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right]
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{B = 2\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right]} \qquad \textbf{0,75pt}$$

$$C = -5x^2+9x-5$$

$$a=-5, \quad b=9, \quad c=-5$$

$$
\begin{aligned}
C &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]\\
&= -5\left[\left(x+\frac{9}{2\times(-5)}\right)^2-\frac{(9)^2-4(-5)(-5)}{4(-5)^2}\right]\\
&= -5\left[\left(x+\frac{9}{-10}\right)^2-\frac{81-100}{100}\right]\\
&= -5\left[\left(x-\frac{9}{10}\right)^2-\frac{19}{100}\right]
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{C = -5\left[\left(x-\frac{9}{10}\right)^2-\frac{19}{100}\right]} \qquad \textbf{0,75pt}$$

$$D = 2x^2-6x+5$$

$$a=2, \quad b=-6, \quad c=5$$

$$
\begin{aligned}
D &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]\\
&= 2\left[\left(x+\frac{-6}{2\times 2}\right)^2-\frac{(-6)^2-4(2)(5)}{4(2^2)}\right]\\
&= 2\left[\left(x+\frac{-3}{2}\right)^2-\frac{36-40}{16}\right]\\
&= 2\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{4}{16}\right]\\
&= 2\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{D = 2\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]} \qquad \textbf{0,75pt}$$

2 Factorisons si possible les trinômes

- $A = 5x^2 - 7x - 34$

$$
\begin{aligned}
\Delta &= b^2-4ac\\
&= (-7)^2-4(5)(-34)\\
&= 49+680\\
&= 729
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\
&= \frac{-(-7)+\sqrt{729}}{2(5)}\\
&= \frac{7+27}{10}\\
&= \frac{34}{10}\\
&= \frac{17}{5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\\
&= \frac{-(-7)-\sqrt{729}}{2(5)}\\
&= \frac{7-27}{10}\\
&= \frac{-20}{10}\\
&= -2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= 5(x - x_1)(x - x_2) \\
&= 5\left(x - \frac{17}{5}\right)(x - (-2)) \\
&= 5\left(x - \frac{17}{5}\right)(x + 2)
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{A = 5\left(x - \frac{17}{5}\right)(x + 2) \qquad 0{,}75pt}$$

- $B = 2x^2 - 5x + 3$

$$a = 2, \quad b = -5, \quad c = 3$$

$$
\begin{aligned}
\Delta &= b^2 - 4ac \\
&= (-5)^2 - 4(2)(3) \\
&= 25 - 24 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\
&= \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2(2)} \\
&= \frac{5 + 1}{4} \\
&= \frac{6}{4} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\
&= \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2(2)} \\
&= \frac{5 - 1}{4} \\
&= \frac{4}{4} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= 2(x - x_1)(x - x_2) \\
&= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 1)
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{B = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 1) \qquad 0{,}75pt}$$

- $C = -5x^2 + 9x - 5$

$$a = -5, \quad b = 9, \quad c = -5$$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (9)^2 - 4(-5)(-5) \\ &= 81 - 100 \\ &= -19\end{aligned}$$

Puisque $\Delta < 0,$ il n'existe pas de racines réelles.

Donc, l'expression $C = -5x^2 + 9x - 5$ n'admet pas de forme factorisée dans $\mathbb{R}$.

| Pas de factorisation dans $\mathbb{R}$ **0,75pt** |
|---|

- $D = 2x^2 - 6x + 5$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-6)^2 - 4(2)(5) \\ &= 36 - 40 \\ &= -4\end{aligned}$$

Puisque $\Delta < 0,$ il n'existe pas de racines réelles.

Donc, l'expression $D = 2x^2 - 6x + 5$ n'admet pas de forme factorisée dans $\mathbb{R}$.

| Pas de factorisation dans $\mathbb{R}$ **0,75pt** |
|---|

## Exercice 3 :2,25pts

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $3x^2 - 5x + 11 = 0$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-5)^2 - 4(3)(11) \\ &= 25 - 132 \\ &= -107\end{aligned}$$

Puisque $\Delta < 0,$ il n'existe pas de racines réelles.

Donc, l'équation $3x^2 - 5x + 11 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

| Pas de solution réelle **0,75pt** |
|---|

(b) $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= (-5)^2 - 4(1)(6)\\ &= 25 - 24\\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\ &= \frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2(1)}\\ &= \frac{5+1}{2}\\ &= \frac{6}{2}\\ &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\\ &= \frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2(1)}\\ &= \frac{5-1}{2}\\ &= \frac{4}{2}\\ &= 2\end{aligned}$$

Donc, la solution de l'équation est :

**S $= \{3, 2\}$ 0,75pt**

(c) $-4x^2 + 28x - 49 = 0$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= (28)^2 - 4(-4)(-49)\\ &= 784 - 784\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\ &= \frac{-28+\sqrt{0}}{2(-4)}\\ &= \frac{-28}{-8}\\ &= \frac{7}{2}\end{aligned}$$

Donc, la solution de l'équation est :

**S $= \{7/2\}$ 0,75pt**

## Exercice 4 :2pts

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

(a) $-x^2 - x - 6 \leq 0$

**Posons :** $-x^2 - x - 6 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4(-1)(-6) = 1 - 24 = -23$

Puisque $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution réelle.

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $-x^2 - x - 6$ | | $-$ | |

$$\mathbf{S = \mathbb{R}} \qquad \textbf{1pt}$$

(c) $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$

**Posons :** $4x^2 - 4x + 1 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4(4)(1) = 16 - 16 = 0$

Puisque $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution :

$x = \dfrac{-(-4)}{2(4)} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $4x^2 - 4x + 1$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |

$$\mathbf{S = \emptyset} \qquad \textbf{1pt}$$

## Exercice 5 : 4.5pts

1 Factoriser les expressions suivantes :

- $A(x) = 25x^2 - 4 + (5x+2)(x-2)$

$$\begin{aligned}
A(x) &= 25x^2 - 4 + (5x+2)(x-2) \\
&= (5x)^2 - 2^2 + (5x+2)(x-2) \\
&= (5x-2)(5x+2) + (5x+2)(x-2) \\
&= (5x+2)\left[(5x-2) + (x-2)\right] \\
&= (5x+2)\left[6x-4\right] \\
&= 2(5x+2)(3x-2)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{A(x) = 2(5x+2)(3x-2)} \qquad \textbf{0,75pt}$$

- $C(x) = x^3 + 1 - 2x(x^2 - 1)$

$$\begin{aligned} C(x) &= x^3 + 1 - 2x(x^2 - 1) \\ &= (x^3 + 1) - 2x(x^2 - 1) \\ &= (x+1)(x^2 - x + 1) - 2x(x-1)(x+1) \\ &= (x+1)\left[(x^2 - x + 1) - 2x(x-1)\right] \\ &= (x+1)\left[x^2 - x + 1 - 2x^2 + 2x\right] \\ &= (x+1)\left[x^2 - 2x^2 - x + 2x + 1\right] \\ &= (x+1)\left[-x^2 + x + 1\right] \end{aligned}$$

$\mathbf{C(x) = -(x-1)(x^2 - x + 1)}$ **0,75pt**

- $B(x) = x^3 - 8 + (x-2)(2x-3)$

$$\begin{aligned} B(x) &= x^3 - 8 + (x-2)(2x-3) \\ &= x^3 - 2^3 + (x-2)(2x-3) \\ &= (x-2)(x^2 + 2x + 4) + (x-2)(2x-3) \\ &= (x-2)\left[(x^2 + 2x + 4) + (2x-3)\right] \\ &= (x-2)\left[x^2 + 2x + 4 + 2x - 3\right] \\ &= (x-2)\left[x^2 + 4x + 1\right] \end{aligned}$$

$\mathbf{B(x) = (x-2)(x^2 + 4x + 1)}$ **0,75pt**

2 Résolvons les équations et les inéquations suivantes :

$|4x + 3| = 2x + 1$

**Domaine de validité Dv:** $2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\dfrac{1}{2}$

$Dv = \left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$

$$\begin{aligned} |4x+3| = 2x+1 &\Longrightarrow 4x + 3 = 2x + 1 \text{ ou } 4x + 3 = -(2x+1) \\ &\Longrightarrow 4x + 3 = 2x + 1 \text{ ou } 4x + 3 = -2x - 1 \\ &\Longrightarrow 4x - 2x = 1 - 3 \text{ ou } 4x + 2x = -1 - 3 \\ &\Longrightarrow 2x = -2 \text{ ou } 6x = -4 \\ &\Longrightarrow x = -1 \text{ ou } x = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$x = -\dfrac{2}{3} \notin \left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$ (Hors domaine, rejeté)

$x = -1 \notin \left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$ (Hors domaine, rejeté)

$\mathbf{S = \varnothing}$ **0,75pt**

$|-2x + 4| \leq 6$

$$
\begin{aligned}
|-2x+4| \le 6 &\implies -6 \le -2x+4 \le 6 \\
&\implies -6-4 \le -2x+4-4 \le 6-4 \\
&\implies -10 \le -2x \le 2 \\
&\implies -1 \le x \le 5
\end{aligned}
$$

**$S = [-1, 5]$ 0,75pt**

$|x-2| = |7-3x|$

$$
\begin{aligned}
|x-2| = |7-3x| &\implies x-2 = 7-3x \text{ ou } x-2 = -(7-3x) \\
&\implies x-2 = 7-3x \text{ ou } x-2 = -7+3x \\
&\implies x+3x = 7+2 \text{ ou } x-3x = -7+2 \\
&\implies 4x = 9 \text{ ou } -2x = -5 \\
&\implies x = \frac{9}{4} \text{ ou } x = \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

**$S = \left\{\frac{9}{4}, \frac{5}{2}\right\}$ 0,75pt**

$$
\begin{aligned}
|7x-2| \ge 2 &\implies 7x-2 \ge 2 \text{ ou } 7x-2 \le -2 \\
&\implies 7x \ge 2+2 \text{ ou } 7x \le -2+2 \\
&\implies 7x \ge 4 \text{ ou } 7x \le 0 \\
&\implies x \ge \frac{4}{7} \text{ ou } x \le 0
\end{aligned}
$$

**$S = ]-\infty, 0] \cup \left[\frac{4}{7}, +\infty\right[$ 0,75pt**

## Exercice 6 :2,25pts

Résolvons dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivants :

$S_1 : \begin{cases} 3x+2y=7 \\ -4x+5y=6 \end{cases}$ ; $S_2 : \begin{cases} -2x-y=5 \\ -8x+7y=-13 \end{cases}$ ; $S_3 : \begin{cases} x+y=6 \\ -3x-17y=-18 \end{cases}$

$S_1 : \begin{cases} 3x+2y=7 \\ -4x+5y=6 \end{cases}$

**1. Élimination de $x$ :** $\begin{cases} 4(3x+2y)=4(7) \\ 3(-4x+5y)=3(6) \end{cases}$

$\begin{cases} 12x+8y=28 \\ -12x+15y=18 \end{cases}$

On additionne : $12x+8y-12x+15y=28+18$

$23y=46 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{46}{23}=2$

**2. Calcul de $x$ :** On remplace $y=2$ dans $3x+2y=7$

$3x+2(2)=7 \quad \Rightarrow \quad 3x+4=7$

$3x=3 \quad \Rightarrow \quad x=1$

**Conclusion :** $S=\{(1,2)\}$

$$\mathbf{S = \{(1, 2)\}} \qquad \textbf{0,75pt}$$

$S_2 : \begin{cases} -2x - y = 5 \\ -8x + 7y = -13 \end{cases}$

**1. Élimination de $x$ :** $\begin{cases} 4(-2x - y) = 4(5) \\ -8x + 7y = -13 \end{cases}$

$\begin{cases} -8x - 4y = 20 \\ -8x + 7y = -13 \end{cases}$

On soustrait : $(-8x - 4y) - (-8x + 7y) = 20 - (-13)$

$-11y = 33 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{33}{-11} = -3$

**2. Calcul de $x$ :** On remplace $y = -3$ dans $-2x - y = 5$

$-2x - (-3) = 5 \quad \Rightarrow \quad -2x + 3 = 5$

$-2x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = -1$

**Conclusion :** $S = \{(-1, -3)\}$

$$\mathbf{S = \{(-1, -3)\}} \qquad \textbf{0,75pt}$$

$$S_3 : \begin{cases} x + y = 6 \\ -3x - 17y = -18 \end{cases}$$

**1. Exprimer $x$ en fonction de $y$ :** $x = 6 - y$

**2. Remplacement dans la deuxième équation :**
$$\begin{aligned} &-3(6 - y) - 17y = -18 \\ &-18 + 3y - 17y = -18 \\ &-14y = 0 \\ &y = 0 \end{aligned}$$

**3. Calcul de $x$ :** $x = 6 - 0 = 6$

**Conclusion :** $S = \{(6, 0)\}$

$$\mathbf{S = \{(6, 0)\}} \qquad \textbf{0,75pt}$$