

## Correction de la composition Du 2<sup>nd</sup> Semestre

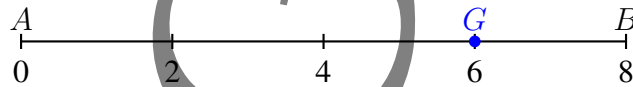
### Correction Exercice 1 : 4 pts

Soient  $A$  et  $B$  deux points du plan tels que  $AB = 8\text{ cm}$ .

- ① Construisons le barycentre  $G$  des points pondérés  $(A; 1)$  et  $(B; 3)$ .

0,1 pt

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{BG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$$



- ② Calculons les distances  $GA$  et  $GB$ .

0,5 pt + 0,5 pt

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \implies \|\overrightarrow{AG}\| = \frac{3}{4}\|\overrightarrow{AB}\|$$

$$\implies AG = \frac{3}{4} \times 8$$

$$\implies AG = 6$$

$$\overrightarrow{BG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} \implies \|\overrightarrow{BG}\| = \frac{1}{4}\|\overrightarrow{BA}\|$$

$$\implies BG = \frac{1}{4} \times 8$$

$$\implies BG = 2$$

$$GA = 6 \text{ et } GB = 2$$

- ③ Démontrons que pour tout point  $M$  du plan,

$$MA^2 + 3MB^2 = 4MG^2 + 48$$

0,1 pt

$$\begin{aligned} MA^2 + 3MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + 3\overrightarrow{MB}^2 \\ &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 \\ &= \overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}^2 + 3(\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}^2) \\ &= \overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}^2 + 3\overrightarrow{MG}^2 + 6\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GB}^2 \\ &= 4\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + 6\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GA}^2 \\ &= 4\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB}) + 3\overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GA}^2 \\ &= 4\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}(\vec{O}) + 3\overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GA}^2 \\ &= 4\overrightarrow{MG}^2 + 3\overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GA}^2 \\ &= 4\overrightarrow{MG}^2 + 3(2)^2 + 6^2 \\ &= 4\overrightarrow{MG}^2 + 12 + 36 \\ &= 4MG + 48 \end{aligned}$$

$$MA^2 + 3MB^2 = 4MG^2 + 48 \quad \text{CQFD}$$

- 4 Démontrons et construisons l'ensemble des points  $M$  du plan tels que :

$$MA^2 + 3MB^2 = 84$$

0,1 pt

D'après la relation précédente on a  $MA^2 + 3MB^2 = 4MG^2 + 48$

$$4MG^2 + 48 = 84$$

$$4MG^2 = 84 - 48$$

$$4MG^2 = 36$$

$$MG^2 = 9$$

$$MG = 3$$

Donc, l'ensemble des points  $M$  tels que  $MA^2 + 3MB^2 = 84$  est le cercle de centre  $I$  et de rayon 3 :

$$\mathcal{C}(I, 3)$$

- 5 Déterminons et construisons l'ensemble des points  $M$  tels que :

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = -12$$

0,1 pt

Soit  $I$  milieu de  $AB$

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = -12 \implies \vec{MI}^2 - \frac{\vec{AB}^2}{4} = -12$$

$$\implies \vec{MI}^2 - \frac{8^2}{4} = -12$$

$$\implies \vec{MI}^2 - 16 = -12$$

$$\implies \vec{MI}^2 = 4$$

Donc, l'ensemble des points  $M$  tels que  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = -12$  est le cercle de centre  $I$  et de rayon 2 :

$$\mathcal{C}(I, 2)$$

## Exercice 2 : 5 pts

On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$$

- 1 Déterminons les réels  $a$  et  $b$  tels que la courbe  $(C_f)$  passe par le point  $A(0, 1)$  et admette en ce point une tangente horizontale. 0,5 pt + 0,75 pt

- $(C_f)$  passe par  $A(0, 1)$  signifie que  $f(0) = 1$ .

On calcule :

$$f(0) = \frac{0^2 + a \cdot 0 + b}{0 - 1} = \frac{b}{-1} = -b$$

Donc,  $-b = 1 \implies \boxed{b = -1}$ .

- $(C_f)$  admet une tangente horizontale en  $A(0, 1)$  signifie que  $f'(0) = 0$ .

On dérive  $f$  par le quotient :

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{avec} \quad u(x) = x^2 + ax + b, \quad v(x) = x - 1$$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(x-1)^2}$$

$$u'(x) = 2x + a, \quad v'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{(2x+a)(x-1) - (x^2+ax+b)}{(x-1)^2}$$

Calculons  $f'(0)$  :

$$f'(0) = \frac{(0+a)(-1) - (0+0+b)}{1} = \frac{-a-b}{1} = -a-b$$

On veut  $f'(0) = 0$ , donc :

$$-a-b=0 \Rightarrow -a+1=0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

Ainsi, les réels recherchés sont  $\boxed{a=1}$  et  $\boxed{b=-1}$ .

On suppose  $a = 1$  et  $b = -1 \dots$

- 2 Déterminons les limites aux bornes de  $\mathcal{D}_f$ . Précisons les asymptotes éventuelles. **0,5 pt + 0,5 pt + 0,5 pt**

La fonction devient, avec  $a = 1$  et  $b = -1$  :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$$

**Domaine de définition :**

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

**Limites aux bornes du domaine :**

- Limite en  $-\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})}{x(1 - \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})}{1 - \frac{1}{x}} = -\infty$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

- Limite en  $+\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} = +\infty$$

- Limite en  $1^-$  :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} = \frac{1 + 1 - 1}{0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

- Limite en  $1^+$  :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} = \frac{1 + 1 - 1}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

**Asymptotes :**

- En  $x = 1$ , la fonction tend vers  $\pm\infty$ , donc la droite  $x = 1$  est une **asymptote verticale**.

- 3 Déterminer les réels  $\alpha, \beta, \gamma$  tels que :

$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x - 1}$$

En déduire que la droite  $(D) : y = x + 2$  est asymptote oblique à la courbe.

**0,75 pt + 0,5 pt**

On part de :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$$

On effectue la division euclidienne du numérateur par le dénominateur.

**Division de  $x^2 + x - 1$  par  $x - 1$  :**

$$\frac{x^2 + x - 1}{x - 1} = x + 2 + \frac{1}{x - 1}$$

Donc :

$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x - 1} \quad \text{avec } \alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 1$$

**Conclusion sur l'asymptote oblique :**

Lorsque  $x \rightarrow \pm\infty$ ,  $\frac{1}{x - 1} \rightarrow 0$ , donc :  $y = x + 2$

Par conséquent, la droite  $(D) : y = x + 2$  est une **asymptote oblique** à la courbe représentative de  $f$ .

- 4 Dresser le tableau de variations de  $f$  puis tracer la courbe.

**0,1 pt + 0,5 pt**

On a vu précédemment que :

$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x - 1}$$

On dérive :

$$f'(x) = \left( x + 2 + \frac{1}{x - 1} \right)' = 1 - \frac{1}{(x - 1)^2}$$

Étudions le signe de  $f'(x)$  :

$$f'(x) = \frac{(x - 1)^2 - 1}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2}$$

**Tableau de signes de  $f'(x)$  :**

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$- \quad 0 \quad +$			$- \quad 0 \quad +$	
$f$	$-\infty \nearrow f(0) = 1 \searrow -\infty$			$+\infty \searrow f(2) = 5 \nearrow +\infty$	

**Remarques :** - En  $x = 1$ , la fonction n'est pas définie (asymptote verticale).

- En  $x = 0$ ,  $f(0) = 1$

- En  $x = 2$ ,  $f(2) = \frac{4 + 2 - 1}{1} = 5$

**Courbe représentative :**

Tracer la courbe en tenant compte :

- de l'asymptote verticale  $x = 1$ ,
- de l'asymptote oblique  $y = x + 2$ ,
- des points remarquables :  $A(0, 1)$ ,  $B(2, 5)$ .

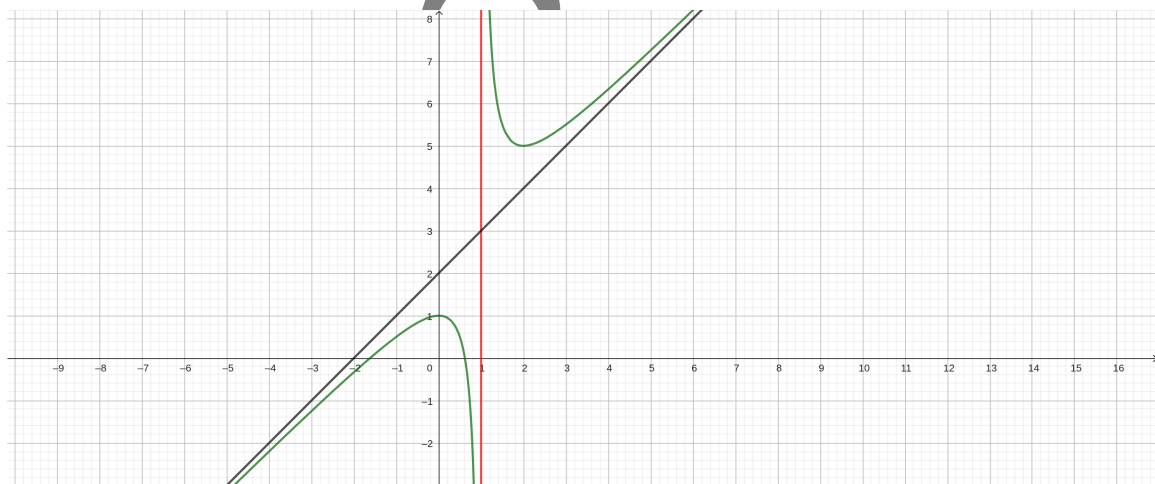


Figure 1: Représentation graphique de la courbe

[Clique ici pour voir la courbe sur géogébra](#)

## Problème : 10 pts

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x^2 + 5x - 5}{x - 1} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{3x - 5}{x^2 - 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

① Montrons que  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

1,25 pt

**Posons**  $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \frac{-x^2 + 5x - 5}{x - 1} & \text{si } x \leq 0 \\ f_2(x) = \frac{3x - 5}{x^2 - 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 f_1 &\exists \text{ssi } x - 1 \neq 0 \text{ et } x \leq 0 \\
 &\text{ssi } x \neq 1 \text{ et } x \leq 0 \\
 &\text{ssi } x \neq 1 \text{ et } x \in ] - \infty; 0] \\
 &\text{ssi } 1 \notin ] - \infty; 0]
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } D_{f_1} = ] - \infty; 0]$$

$$\begin{aligned}
 f_2 &\exists \text{ssi } x^2 - 1 \neq 0 \text{ et } x \geq 0 \\
 &\text{ssi } x \neq -1 \text{ et } x \neq 1 \text{ et } ]0; +\infty[ \\
 &\text{ssi } -1 \notin ]0; +\infty[ \text{ et } 1 \in ]0; +\infty[ \\
 &\text{ssi } 1 \in ]0; +\infty[
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } D_{f_2} = ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$$

$$\begin{aligned}
 D_f &= D_{f_1} \cup D_{f_2} \\
 &= (] - \infty; 0]) \cup (]0; 1[ \cup ]1; +\infty[) \\
 &= ] - \infty; 0] \cup ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[ \\
 &= ] - \infty; 1[ \cup ]1; +\infty[ \\
 &= \mathbb{R} \setminus \{1\}
 \end{aligned}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

### Autre Méthode

#### Étude du domaine de définition de $f_1$ :

L'expression  $f_1(x) = \frac{-x^2 + 5x - 5}{x - 1}$  est définie si  $x - 1 \neq 0$ , soit  $x \neq 1$ .

Or,  $f_1$  est définie uniquement sur  $x \leq 0$ , donc comme  $1 \notin ] - \infty; 0]$ , on a :

$$D_{f_1} = ] - \infty; 0]$$

#### Étude du domaine de définition de $f_2$ :

L'expression  $f_2(x) = \frac{3x - 5}{x^2 - 1}$  est définie si  $x^2 - 1 \neq 0$ , soit  $x \neq \pm 1$ .

Comme  $f_2$  est définie pour  $x > 0$ , il faut exclure  $x = 1$ , mais  $x = -1$  ne fait pas partie de l'intervalle. Donc :

$$D_{f_2} = ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$$

#### Conclusion :

$$D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2} = ] - \infty; 0] \cup (]0; 1[ \cup ]1; +\infty[) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

2 Calculons les limites aux bornes de  $D_f$ .

0,1 pt

#### En $-\infty$ :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 5x - 5}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

**En  $+\infty$ :**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 5}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$x^2 - 1$		$+$	$0$	$-$
			$0$	$+$

**En  $1^-$ :**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f_2(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 5}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2}{0^-} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

**En  $1^+$ :**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f_2(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x - 5}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2}{0^+} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

3 Dédisons-en les asymptotes de  $(C_f)$ .

0,5 pt

- La limite en  $+\infty$  est nulle, donc la droite  $y = 0$  est une **asymptote horizontale** à droite.
- La fonction tend vers  $\pm\infty$  en  $x = 1$ , donc la droite  $x = 1$  est une **asymptote verticale**.

$y = 0$  est une AH en  $+\infty$ ,  $x = 1$  est une AV

4 Montrons que la droite d'équation  $y = -x + 4$  est asymptote oblique à  $(C_f)$  en  $-\infty$ .

0,5 pt

On considère :  $f_1(x) = \frac{-x^2 + 5x - 5}{x - 1}$

Une division euclidienne donne :  $\frac{-x^2 + 5x - 5}{x - 1} = -x + 4 + \frac{-1}{x - 1}$

Donc :  $f_1(x) = -x + 4 + \frac{-1}{x-1}$

Or,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x-1} = 0$ , donc :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = -x + 4$

Ainsi, la droite  $y = -x + 4$  est une **asymptote oblique** à gauche.

$y = -x + 4$  est une asymptote oblique en  $-\infty$

### Autre Méthode

D'après la question 2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  donc cherchons  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{-x^2+5x-5}{x-1}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2+5x-5}{x^2-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x^2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$  donc cherchons  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x)]$

En effet :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + (-x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2+5x-5}{x-1} + x \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2+5x-5+x^2-x}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x-5-x}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x-5}{x-1} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = 4 \Rightarrow y = -x + 4 \text{ est une asymptote oblique à gauche}$

5 Étudier la continuité de  $f$  en 0.

0,75 pt

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{-0+0-5}{0-1} \\ &= \frac{-5}{-1} \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2+5x-5}{x-1} \\ &= \frac{0+0-5}{0-1} \\ &= 5 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x - 5}{x^2 - 1} \\
 &= \frac{0 - 5}{0 - 1} \\
 &= \frac{-5}{-1} \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

Donc  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 5 \implies f$  est continue en  $x = 0$

- 6 Étudions la dérivabilité de  $f$  en 0 puis interpréter graphiquement les résultats.

0,1 pt + 0,5 pt

On calcule les limites du taux d'accroissement à gauche et à droite de 0 :

**En  $0^-$ :**  $f(x) = \frac{-x^2 + 5x - 5}{x - 1}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - 5}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{-x^2 + 5x - 5}{x - 1} - 5}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{-x^2 + 5x - 5 - 5(x - 1)}{x - 1}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{-x^2 + 5x - 5 - 5x + 5}{x - 1}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{-x^2}{x - 1}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2}{x(x - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2}{x(x - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x - 1} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

**En  $0^+$ :**  $f(x) = \frac{3x - 5}{x^2 - 1}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3x-5}{x^2-1} - 5}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3x-5-5(x^2-1)}{x^2-1}}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3x-5-5x^2+5}{x^2-1}}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3x-5x^2}{x^2-1}}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x-5x^2}{x(x^2-1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x-5x^2}{x(x^2-1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3-5x}{x^2-1} \\
&= -3
\end{aligned}$$

**Conclusion :**

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0 \neq -3 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

$f'_g(0) \neq f'_d(0)$  donc  $f$  n'est pas dérivable en  $x = 0$

**Interprétation graphique :**

$f$  est continue en  $x = 0$  mais non dérivable en  $x = 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$  donc  $(C_f)$  admet une demi-tangente horizontale en 0 d'équation  $y = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -3$  donc  $(C_f)$  admet une demi-tangente horizontale en 0 d'équation  $y = -3x$

7 Calculons  $f'(x)$  pour  $x < 0$  et pour  $x > 0$ .

**0,5 pt + 0,5 pt**

**Pour  $x < 0$ , on a :**  $f(x) = f_1(x) = \frac{-x^2 + 5x - 5}{x - 1}$

$$f'_1(x) = \frac{(-2x + 5)(x - 1) - (-x^2 + 5x - 5)(1)}{(x - 1)^2}$$

$$\begin{aligned}
f'_1(x) &= \frac{(-2x + 5)(x - 1) + x^2 - 5x + 5}{(x - 1)^2} \\
&= \frac{(-2x^2 + 2x + 5x - 5) + x^2 - 5x + 5}{(x - 1)^2} \\
&= \frac{-2x^2 + 7x - 5 + x^2 - 5x + 5}{(x - 1)^2} \\
&= \frac{-x^2 + 2x}{(x - 1)^2}
\end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x}{(x - 1)^2} \quad \text{pour } x < 0$$

Pour  $x > 0$ , on a :  $f(x) = f_2(x) = \frac{3x-5}{x^2-1}$

$$f'_2(x) = \frac{3(x^2-1) - (3x-5)(2x)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'_2(x) = \frac{3x^2 - 3 - (6x^2 - 10x)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{3x^2 - 3 - 6x^2 + 10x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{-3x^2 + 10x - 3}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-3x^2 + 10x - 3}{(x^2-1)^2} \text{ pour } x > 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} f'_1(x) = \frac{-x^2 + 2x}{(x-1)^2} & \text{si } x \leq 0 \\ f'_2(x) = \frac{-3x^2 + 10x - 3}{(x^2-1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

8 Étudions le signe de  $f'(x)$  pour  $x < 0$  puis pour  $x > 0$ .

0,5 pt + 0,5 pt

Pour  $x < 0$ , on a :

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x}{(x-1)^2}$$

Le dénominateur  $(x-1)^2 > 0$  pour tout  $x \neq 1$ , donc le signe de  $f'(x)$  est celui du numérateur :

$$-x^2 + 2x = -x(x-2)$$

Étude du signe de  $-x(x-2)$  sur  $] -\infty; 0[$  :

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$-x^2 + 2x$	-	0	0	

$$f'(x) < 0 \text{ pour tout } x \in ] -\infty; 0[$$

Pour  $x > 0$ , on a :

$$f'(x) = \frac{-3x^2 + 10x - 3}{(x^2-1)^2}$$

Le dénominateur est strictement positif pour  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ , et ici  $x > 0$ , donc le signe de  $f'(x)$  est celui du numérateur :  $-3x^2 + 10x - 3$

Étudions le signe :

$$\Delta = 10^2 - 4 \times (-3) \times (-3) = 100 - 36 = 64$$

$$x_1 = \frac{-10 - \sqrt{64}}{2 \times (-3)} = \frac{-10 - 8}{-6} = \frac{-18}{-6} = 3$$

$$x_2 = \frac{-10 + \sqrt{64}}{2 \times (-3)} = \frac{-10 + 8}{-6} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

$x$	0	$\frac{1}{3}$	3	$+\infty$	
$-3x^2+10x-3$	-	0	+	0	-

$$f'(x) < 0 \text{ sur } ]0; \frac{1}{3}[ \cup ]3; +\infty[, \quad f'(x) > 0 \text{ sur } ]\frac{1}{3}; 3[$$

9 Dressons le tableau de variation de  $f$ .

1,5 pt

$x$	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	1	3	$+\infty$							
$f'(x)$		-	-	0	+		+	0	-				
$f$	$+\infty$				$+\infty$			$\frac{1}{2}$			$-\infty$		0