PROBLEME : 10 points

PARTIE A : 2,5 points

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^3 + 3x - 1$,

a) Dresser le tableau de variation de u. **0,5 pt**

b) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α et que $0 < \alpha < 1$. **1 pt**

c) Donner un encadrement de α à 10^{-1} près. **0,5 pt**

d) En déduire le signe de $u(x) - 1$ sur $\mathbb{R}$. **0,5 pt**

PARTIE B : 7,5 points

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x^3+1)}{x^2+1} & \text{si } x < 1, \\ f(x) = 1 + \sqrt{2x-1} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$. **0,5 pt**
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 1. **1 pt**
3. Écrire une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point $A(1, 2)$. **0,25 pt**
4. Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (T). **0,25 pt**
5. (a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty; 1]$, $f'(x) = \frac{2x\left[u(x)-1\right]}{(x^2+1)^2}$. **2,5 pt**
   (b) Calculer $f'(x)$ pour $x \in [1, +\infty[$. **0,5 pt**
   (c) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$. **0,5 pt**
   (d) Dresser le tableau de variation de f. **1 pt**
6. (a) Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$. **1,25 pt**
   (b) Tracer $(\mathcal{C}_f)$. (On prendra $\alpha \approx 0,6$). **0,75 pt**
7. Soit g la restriction de f sur $[1, +\infty[$.
   (a) Montrer que g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers un intervalle J à déterminer. **0,25 pt**
   (b) Soit g^{-1} la bijection réciproque de g. Étudier la dérivabilité de g^{-1} et donner son sens de variation. **0,5 pt**
   (c) Tracer la courbe de g^{-1} dans le même repère. **0,5 pt**