

## Introduction aux Systèmes

### **I. Systèmes de trois équations linéaires à trois inconnues**

#### **1. Exemple**

Le système  $\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 \\ 2x - y + 2z = 2 \\ -x + y + z = -3 \end{cases}$  est formé de trois équations. Chacune d'elle contient trois inconnues  $x$  ;  $y$  et  $z$  avec des exposants tous égaux à 1. On dit qu'on a un système de trois équations linéaires à trois inconnues  $x$  ;  $y$  et  $z$ .

Résoudre un tel système c'est trouver tous les triplets  $(x, y, z)$  de nombres réels qui vérifient les trois équations du système.

#### **2. Résolution avec la méthode du pivot de Gauss**

##### **Exemple 1:**

**Résolvons le système suivant en utilisant la méthode du pivot de Gauss**

$$\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 \\ 2x - y + 2z = 2 \\ -x + y + z = -3 \end{cases}$$

Pour résoudre un tel système, on commence par désigner les 3 équations respectivement par  $L_1$ ;  $L_2$  et  $L_3$

$$\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 & (L_1) \\ 2x - y + 2z = 2 & (L_2) \\ -x + y + z = -3 & (L_3) \end{cases}$$

**1<sup>ère</sup> étape :** On fixe l'équation  $(L_1)$  puis on élimine l'inconnue  $x$  dans  $(L_2)$  en considérant le

$$\text{sous-système} \quad -2 \begin{cases} x + 10y - 3z = 5 & (L_1) \\ 2x - y + 2z = 2 & (L_2) \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} -2x - 20y + 6z = -10 \\ 2x - y + 2z = 2 \end{cases} \quad \text{ainsi on a :}$$

$$-21y + 8z = -8 \quad (L'_2)$$

**2<sup>ème</sup> étape :** On fixe l'équation  $(L_1)$  puis on élimine l'inconnue  $x$  dans  $(L_3)$  en considérant le

$$\text{sous-système} \quad \begin{cases} x + 10y - 3z = 5 & (L_1) \\ -x + y + z = -3 & (L_3) \end{cases} \quad \text{d'où ainsi on a :}$$

$$11y - 2z = 2 \quad (L'_3)$$

Ainsi, on obtient le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 & (L_1) \\ -21y + 8z = -8 & (L'_2) \\ 11y - 2z = 2 & (L'_3) \end{cases}$$

**3<sup>ème</sup> étape :** On fixe  $(L'_2)$  puis on élimine  $y$  dans  $(L'_3)$  en considérant le sous-système

$$\begin{cases} -21y + 8z = -8 & (L'_2) \\ 11y - 2z = 2 & (L'_3) \end{cases} \quad \text{Ainsi on a } 46z = -46 \quad (L''_3)$$

On obtient le système équivalent suivant dit système triangulaire

$$\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 & (L_1) \\ -21y + 8z = -8 & (L'_2) \\ 46z = -46 & (L''_3) \end{cases}$$

**4<sup>ème</sup> étape :** Pour terminer la résolution, on détermine  $z$  dans  $(L''_3)$ , puis on remplace  $z$  par cette valeur dans  $(L'_2)$ , on obtient la valeur de  $y$  puis on obtient celle de  $x$ , en substituant à  $y$  et  $z$  par leurs valeurs respectives dans  $(L'_1)$ .

Ainsi on a :  $S = \{(2; 0; -1)\}$

**Exemple 2:**

## II. Systèmes d'inéquations linéaires à deux inconnues

### 1. Inéquations linéaires à deux inconnues

**Exemple 3:**

$2x + y - 5 > 0$  est une inéquation linéaire à deux inconnues  $x$  et  $y$ .

**Résolution graphique**

Pour résoudre graphiquement l'inéquation  $2x + y - 5 > 0$ , on représente la droite  $(D)$  d'équation  $2x + y - 5 = 0$  dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$ .

$x$	0	1
$y$	5	3

Ensuite, on choisit un point qui n'est pas sur  $(D)$  et dont ses coordonnées sont connues.

Par exemple : le point  $O(0; 0)$  puis on remplace dans l'inéquation  $x$  et  $y$  respectivement par les coordonnées de  $O$ .

Ainsi, on a  $2(0) + 0 - 5 > 0$  c'est à dire  $-5 > 0$  **faux** donc les coordonnées de  $O$  ne vérifie pas l'inéquation.

On barre donc le demi-plan de frontière  $(D)$  contenant  $O$ .

### 2. Systèmes de deux inéquations à deux inconnues

**Exemple 4:**

Le système  $\begin{cases} x - 2y + 1 \geq 0 \\ 2x + y - 3 < 0 \end{cases}$  est un système de deux inéquations linéaires à deux inconnues  $x$  et  $y$

**Résolution graphique**

Résolvons graphiquement le système  $\begin{cases} x - 2y + 1 \geq 0 \\ 2x + y - 3 < 0 \end{cases}$

On commence par représenter graphiquement les droites  $(D_1)$  d'équation  $x - 2y + 1 = 0$  et  $(D_2)$  d'équation  $2x + y - 3 = 0$  dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$ .

$x$	-1	1
$y$	0	1

$x$	0	1
$y$	3	1

Puis on choisit un point qui n'est ni sur  $(D_1)$ , ni sur  $(D_2)$  et dont les coordonnées sont connues. Par exemple : le point  $O(0;0)$ .

En remplaçant  $x$  et  $y$  par les coordonnées de  $O$  dans l'inéquation 1, on a :  $0 - 2(0) + 1 \geq 0$  c'est à dire  $1 \geq 0$  **vrai** donc les coordonnées de  $O$  vérifie l'inéquation 1. On barre donc le demi-plan de frontière  $(D_1)$  ne contenant pas  $O$ .

En remplaçant  $x$  et  $y$  par les coordonnées de  $O$ , dans l'inéquation 2, on a :  $2(0) + 0 - 3 < 0$  c'est à dire  $-3 < 0$  **vrai** donc les coordonnées de  $O$  vérifie l'inéquation 2. On barre donc le demi-plan de frontière  $(D_2)$  ne contenant pas  $O$ .

NB : le 3. Sera donné comme exercice à faire

### 3. Systèmes de trois inéquations à deux inconnues

#### Exemple 5:

Le système  $\begin{cases} -x + y + 2 \geq 0 \\ 2x - y - 4 < 0 \\ x - 2y - 1 > 0 \end{cases}$  est un système de trois inéquations à deux inconnues  $x$  et  $y$ .

**Résolution graphique**  $\begin{cases} -x + y + 2 \geq 0 \\ 2x - y - 4 < 0 \\ x - 2y - 1 > 0 \end{cases}$