Correction Devoir n° 1 Du 1ère Semestre

Exercice 1 : 9 pts (Résolution de systèmes triangulaires supérieurs)

Donnons la solution dans chaque cas

$$\begin{cases} 2x + y + z = 12 & L1 \\ 3y - z = 6 & L2 \\ z = 3 & L3 \end{cases}$$

$$(L3) : z = 3$$

$$\begin{aligned} (L2) :\ 3y - z = 6 &\implies 3y - 3 = 6 \\ &\implies 3y = 9 \\ &\implies y = \frac{9}{3} \\ &\implies y = 3 \\ (L1) :\ 2x + y + z = 12 &\implies 2x + 3 + 3 = 12 \\ &\implies 2x + 6 = 12 \\ &\implies 2x = 6 \\ &\implies x = \frac{6}{2} \\ &\implies x = 3 \end{aligned}$$

$$\boxed{S = \{(3,\, 3,\, 3)\}}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 & L1 \\ 4y + 2z = 6 & L2 \\ 3z - 9 = 0 & L3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (L3) :\ 3z - 9 = 0 &\implies 3z = 9 \\ &\implies z = \frac{9}{3} \\ &\implies z = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (L2) :\ 4y + 2z = 6 &\implies 4y + 2 \cdot 3 = 6 \\ &\implies 4y + 6 = 6 \\ &\implies 4y = 0 \\ &\implies y = \frac{0}{4} \\ &\implies y = 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(L1):\ 2x+3y-z=5 &\Longrightarrow 2x+3\cdot 0-3=5\\
&\Longrightarrow 2x-3=5\\
&\Longrightarrow 2x=8\\
&\Longrightarrow x=\frac{8}{2}\\
&\Longrightarrow x=4
\end{aligned}
$$

$$\boxed{S=\{(4,\,0,\,3)\}}$$

$$
\begin{cases}
3x+y+z=14\\
\qquad\quad z=2\\
2y-z\quad\ =4
\end{cases}
$$

$$(L2):z=2$$

$$
\begin{aligned}
(L3):\ 2y-z=4 &\Longrightarrow 2y-2=4\\
&\Longrightarrow 2y=6\\
&\Longrightarrow y=\frac{6}{2}\\
&\Longrightarrow y=3\\
(L1):\ 3x+y+z=14 &\Longrightarrow 3x+3+2=14\\
&\Longrightarrow 3x+5=14\\
&\Longrightarrow 3x=9\\
&\Longrightarrow x=\frac{9}{3}\\
&\Longrightarrow x=3
\end{aligned}
$$

$$\boxed{S=\{(3,\,3,\,2)\}}$$

<u>Exercice 2 :</u> 8 pts (Résolution de systèmes par le pivot de Gauss)

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode du pivot de Gauss

$$
\begin{cases}
x+y+z=9 & L1\\
2x-y+z=5 & L2\\
x+2y-z=4 & L3
\end{cases}
$$

Considérons $L1$ comme pivot

$$
\begin{cases}
2\times(x+y+z=9) & L1\\
\quad 2x-y+z=5 & L2
\end{cases}
\Longrightarrow
\begin{array}{rl}
\begin{cases}
-2x-2y-2z=-18 & L1\\
\quad 2x-y+z=5 & L2
\end{cases} & \\
\hline
-3y-z=-13 & L'2
\end{array}
$$

$$
\begin{cases}
-(x+y+z=9) & L1\\
x+2y-z=4 & L3
\end{cases}
\Longrightarrow
\begin{array}{rl}
\begin{cases}
-x-y-z=-9 & L1\\
\quad x+2y-z=4 & L3
\end{cases} & \\
\hline
y-2z=-5 & L'3
\end{array}
$$

$$\begin{cases} -3y - z = -13 & L'2 \\ 3(y - 2z = -5) & L'3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{r} \begin{cases} -3y - z = -13 & L'2 \\ \quad 3y - 6z = -15 & L'3 \end{cases} \\ \hline -7z = -28 \quad L''3 \end{array}$$

Le système devient

$$\begin{cases} x + y + z = 9 & L1 \\ \quad -3y - z = -13 & L'2 \\ \qquad -7z = -28 & L''3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 9 & L1 \\ -3y - z = -13 & L'2 \\ -7z = -28 & L''3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (L'2):\ -7z = -28 &\Longrightarrow z = \frac{-28}{-7} \\ &\Longrightarrow z = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (L'2):\ -3y - z = -13 &\Longrightarrow -3y - 4 = -13 \\ &\Longrightarrow -3y = -9 \\ &\Longrightarrow y = \frac{-9}{-3} \\ &\Longrightarrow y = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (L1):\ x + y + z = 9 &\Longrightarrow x + 3 + 4 = 9 \\ &\Longrightarrow x + 7 = 9 \\ &\Longrightarrow x = 9 - 7 \\ &\Longrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{S = \{(2,\ 3,\ 4)\}}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 10 & L1 \\ 2x - y + 3z = 13 & L2 \\ x + y - z = 2 & L3 \end{cases}$$

Considérons $L1$ comme pivot

$$\begin{cases} 2 \times (x + 2y + z = 10) & L1 \\ 2x - y + 3z = 13 & L2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{c} \begin{cases} 2x + 4y + 2z = 20 & L1 \\ 2x - y + 3z = 13 & L2 \end{cases} \\ \hline \end{array}$$

Soustrayons L2 de L1 pour éliminer x :

$$\begin{aligned} (2x + 4y + 2z) - (2x - y + 3z) &= 20 - 13 \\ 5y - z = 7 &\quad L'2 \end{aligned}$$

Pour L3, soustrayons L1 de L3 pour éliminer x :

$$\begin{aligned} (x + y - z) - (x + 2y + z) &= 2 - 10 \\ -y - 2z &= -8 \\ y + 2z &= 8 \quad L'3 \end{aligned}$$

On obtient le système triangulaire :

$$\begin{cases} 5y - z = 7 & L'2 \\ y + 2z = 8 & L'3 \end{cases}$$

Résolvons L'3 pour y en fonction de z :

$$L'3 : y + 2z = 8 \implies y = 8 - 2z$$

Substituons dans L'2 :

$$5(8 - 2z) - z = 7 \implies 40 - 10z - z = 7 \implies -11z = -33 \implies z = 3$$

$$y = 8 - 2 \cdot 3 = 8 - 6 = 2$$

$$L1 : x + 2y + z = 10 \implies x + 2 \cdot 2 + 3 = 10 \implies x + 7 = 10 \implies x = 3$$

$$\boxed{S = \{(3, 2, 3)\}}$$

Exercice 3 : 3 pts (Union et Intersection d'Intervalles)

1. On considère $I = [2, 5]$ et $J = [4, 7]$. Déterminons $I \cup J$ et $I \cap J$.
   $I \cup J = [2, 7]$ et $I \cap J = [4, 5]$
2. On considère $K = [2, 5]$ et $L = [6, 7]$. Déterminons $K \cap L$.
   $K \cap L = \emptyset$