Calcul Intégral Ts2

Destiné aux élèves de Terminale S
Lycée de Dindéfelo
Présenté par M. BA

16 mai 2025

I. Intégrale d'une fonction continue :

1.Introduction :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I,F et G 2 primitives de f sur I, a et b deux éléments de I. On sait qu'il existe un nombre réel c tel que :$\forall x \in I,\ G(x) = F(x) + c$

$$\begin{cases} G(a) = F(a) + c \\ G(b) = F(b) + c \end{cases}$$

$$\overline{\quad G(b) - G(a) = F(b) - F(a)}$$

Le nombre réel $F(b) - F(a)$ est donc indépendant de la primitive f choisie

2.Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. En appelle intégrale de a à b de f le nombre réel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur I on note :

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b$$

- $\int_a^b f(x)\, dx$ se lit "intégrale ou somme de a à b de $f(x)dx$".
- $[F(x)]_a^b$ se lit "$F(x)$ pris entre a et b".
- a et b sont les bornes de l'intégrale $\int_a^b f(x)\, dx$
- Dans l'écriture $\int_a^b f(x)\, dx$ On peut remplaçer x par toute autre lettre (sauf a et b) on écrit $\int_a^b f(t)\, dt$ ou $\int_a^b f(s)\, ds$; x est appelé variable muette.

Exemple 1

$$f(x) = x^2, \quad F(x) = \frac{1}{3}x^3$$

$$\begin{aligned}
\int_1^2 f(x)\,dx &= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{3}\left[2^3 - 1^3\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[8 - 1\right] \\
&= \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^2 f(x)\,dx = \frac{7}{3}}$$

Exemple 2

$$f(x) = \cos x, \quad F(x) = \sin x$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx &= \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(0) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Propriété 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux élément de I. On a

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad ; \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

En effet :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = [P(x)]_a^b = F(b) - F(a) = -(P(b) - P(a)) = -\int_b^a f(x)\,dx$$

3. Intégrale et Primitive :

Soit f une fonction continue sur I (intervalle), $a \in I$, F primitive de f sur I, telle que $F'(x) = f(x)$, et $F(a) = 0$. $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

En effet :

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a) = F(x) - 0$$

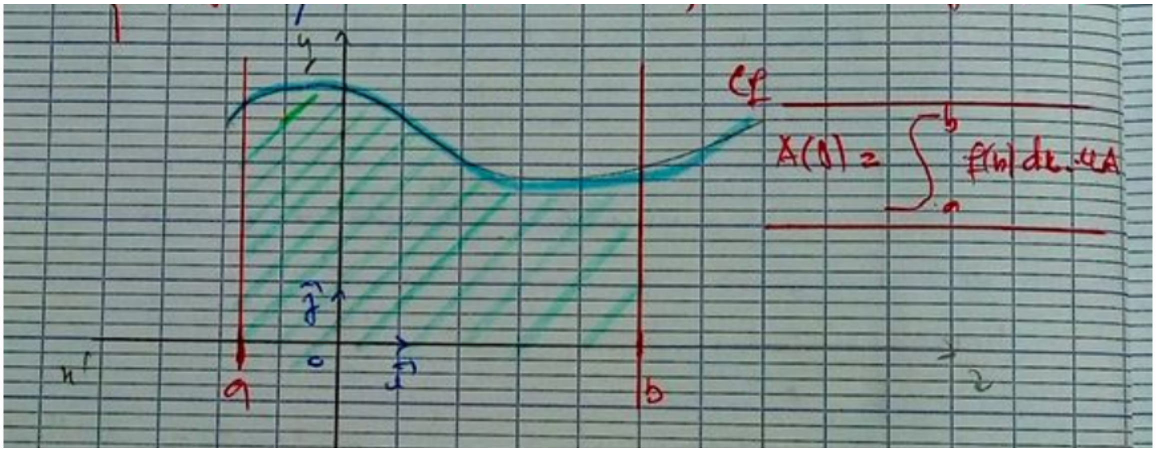
4. Interprétation graphique de l'intégrale :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I, (Cf) sa courbe représentative, a et $b \in I$ avec $a < b$.

$\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire (en unité d'aire) du domaine D délimité par la courbe (Cf), l'axe des abscisses (OI) et les droites d'équation $x = a$, $x = b$.

Ce domaine est aussi l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

Ainsi,en notant A(D), aire du domaine et u.a unité d'aire, on a : $A(D) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx.u.a$

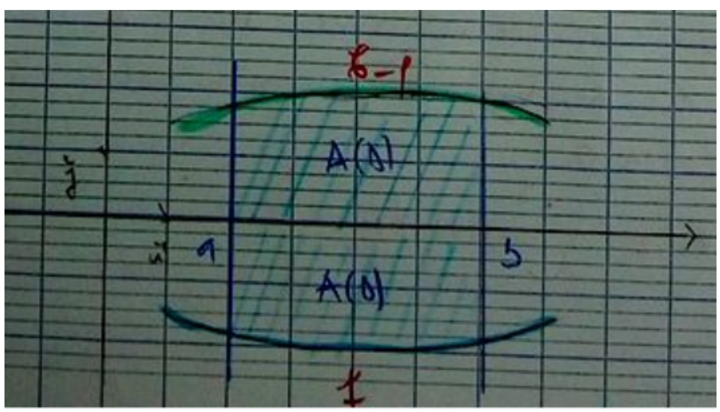


Remarque

Si f une fonction continue et négative sur $[a, b]$. La symétrie orthogonale d'axe (OI) transforme la courbe $\mathcal{C}_f$ en celle de $\mathcal{C}'_{-f}$ de f.

Le domaine D est tranformé en un domaine D' de meme aire

on a :$A(D) = A(D') = \int_a^b -f(x)\, dx.u.a$



Exemple 3

L'unité graphique est $2cm$ sur chaque axes.

Calculer l'aire, en cm^2 de l'ensemble D des points M(x,y) tels que :

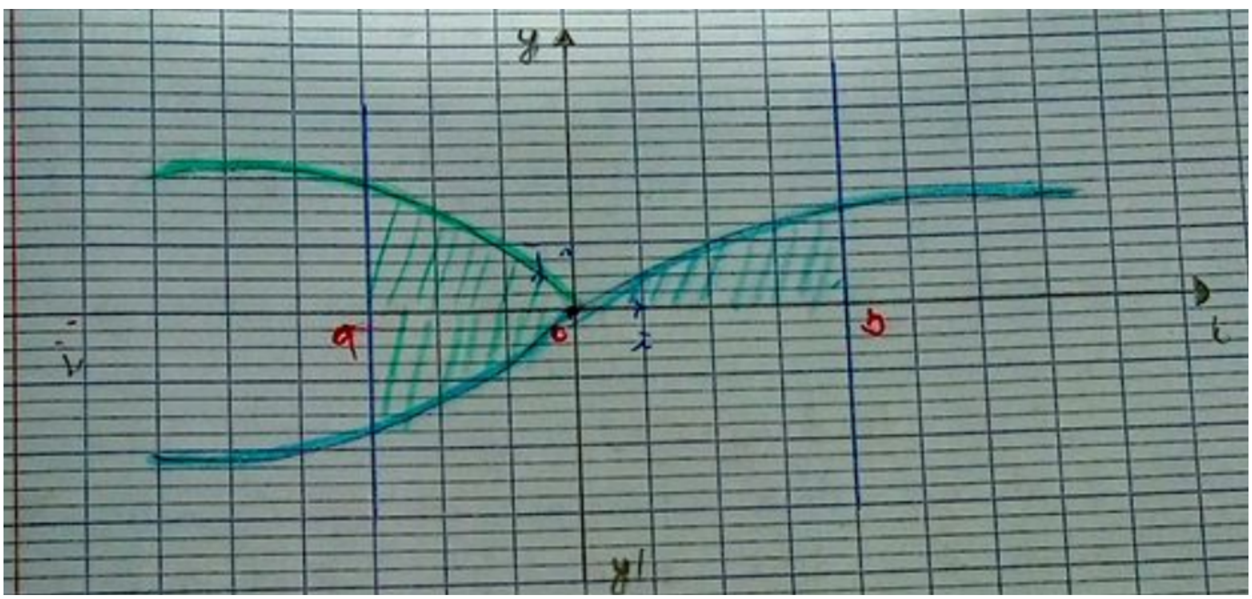
$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ et $0 \leq y \leq \cos x$

Solution 3

La fonctionFonction cosinus est continue et positif sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
On a : $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx.u.a$ avec $u.a = 2cm \times 2cm = 4cm^2$

Exemple 4

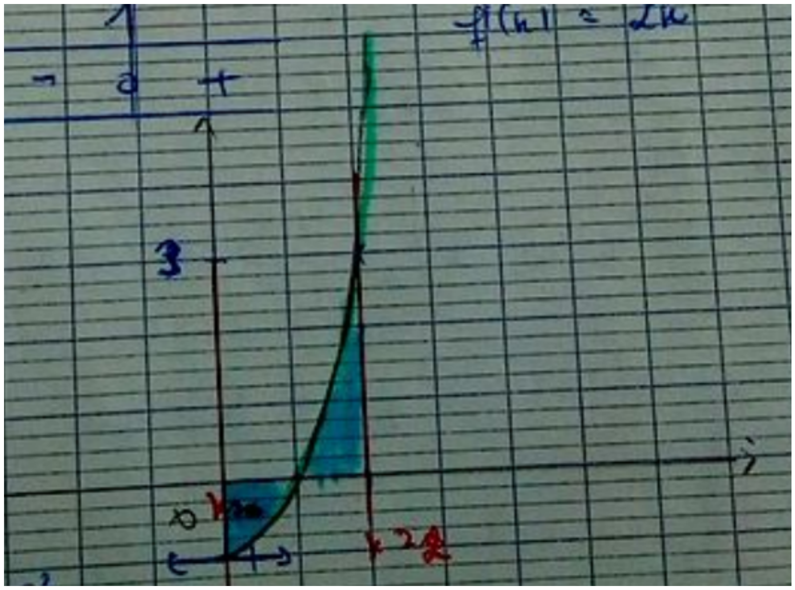
La courbe ci-dessous est la representation graphique de la fonction $f(x) = x^2 - 1$ .Calculer l'aire du domaine colorié.



Exemple 3

$f(x) = x^2 - 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	



$$\begin{aligned}
A(D) &= \left(\int_0^1 -f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx\right) u.A \\
&= \left(\int_0^1 -(x^2-1)\,dx + \int_1^2 (x^2-1)\,dx\right) u.A \\
&= \cdots \\
&= 2cm^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{A(D) = 2cm^2}$$

5.Propriété algébrique de l'intégrale

a.Relation de Chasles

Si f continue sur un intervalle I, a, b et c trois élément de K.
On a :

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Preuve

Interprétation graphique de la relation de Chasles Voire Ciam pas 298 section 1.2

Exemples

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin(t)|\; dt &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} -\sin(t)\, dt + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\, dt \\ &= -\left[\cos(t)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \left[\cos(t)\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1+1 \\ &= 2\end{aligned}$$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin(t)|\; dt = 2$

b.Linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur I.
α, β deux réels, $a, b \in I$.
On a :

$$\boxed{\int_{a}^{b} (\alpha f + \beta g)(x)\, dx = \alpha \int_{a}^{b} f(x)\, dx + \beta \int_{a}^{b} g(x)\, dx}$$

Exemples

Calculer les intégrales suivantes

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(t) dt$$

Solution

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(t) dt &= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(2t)}{2} dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 1+\cos(2t) dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 1 + \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos(2t) dt\end{aligned}$$

6.Signe de l'intégrale :

i)Soit f une fonction continue sur I, a et $b \in I$ $(a < b)$

— si $f > 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

— si $f < 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

ii)Soit f et g deux fonctions continues sur I, a et $b \in I$ $(a < b)$

— Si $f \leq g$, $\forall x \in [a, b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Exemples

Remarque :

Soit f une fonction continue sur I, a et $b \in I$, tel que $a \leq b$.

On a : $-|f| \leq |f| \leq |f|$ sur $[a; b]$; on en déduit que : $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

7. Inégalité de la moyenne :

i) Soit f une fonction continue sur I (intervalle) a et $b \in I$

Si m et M sont deux nombres réels tels que $x \in [a, b]$ $m \leq f(x) \leq M$,

$$\textbf{alors } m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

ii) Soit f une fonction continue sur un intervalle I tel que $a \leq b \in I$.

Si M deux réels tels que $|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in [a, b]$

On en déduit :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq M(b-a)$$

8. Valeur moyenne d'une fonction :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, on appelle valeur moyenne de f sur $[a, b]$ le nombre réel u défini par :

$$u = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

II. Techniques de calcul intégral

1. Primitives usuelles :

Le tableau suivant reprend quelques résultats concernant les primitives, vus dans les chapitres précédents. Dans ce tableau, u désigne une fonction dérivable sur un intervalle K, v une fonction dérivable sur un intervalle contenant $u(K)$ et α un nombre réel différent de -1.

Fonction	$\frac{u'}{u}$	$u'e^u$	$u'u^\alpha$	$u' \cdot v' \circ u$
Primitive	$\ln\|u\|$	e^u	$\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$	$v \circ u$
Commentaires	$u \neq 0$ sur K	-	$u > 0$ sur K	-

Examples

— $\int_0^1 (t^3 + 2t + 1)\ dt = \left[\frac{t^4}{4} + t^2 + t\right]_0^1 = \frac{9}{4}$

— $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)\ dt = \left[-\frac{1}{2}\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$

— $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2t}{t^2-1}\, dt = [\ln|t^2 - 1|]_0^{\frac{1}{2}} = \ln\frac{3}{4}$

— $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, e^{\sin t}\, dt = \left[e^{\sin t}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = e - 1$

2. Intégration par parties :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que les dérivées u' et v' sont continues sur I, a et b deux éléments de I.

On a :

$$\int_a^b u(t)v'(t)\, dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\, dt$$

Examples

— Calculer : $\int_1^2 \ln t\, dt$.

Posons : $u(t) = \ln t$ et $v'(t) = 1$.

On a : $u'(t) = \frac{1}{t}$; choisissons : $v(t) = t$.

u' et v' sont continues sur $[1; 2]$.

Donc :

$$\int_1^2 \ln t\, dt = [t\ln t]_1^2 - \int_1^2 dt$$

$$= [t\ln t]_1^2 - [t]_1^2$$
$$= [2\ln 2 - 2] - [1\ln 1 - 1] = 2\ln 2 - 1$$

— Calculer : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,dt$.

Posons : $u(t) = t$ et $v'(t) = \cos t$.
On a : $u'(t) = 1$; choisissons : $v(t) = \sin t$.
u' et v' sont continues sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.
Donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,dt = [t\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt$$
$$= [t\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \left[\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0\right] - \left[-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0\right]$$
$$= \left[\frac{\pi}{2}\times 1\right] - [-0+1] = \frac{\pi}{2} - 1$$

3. Intégration de fonctions paires, impaires, périodiques :

Propriété 1 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I symétrique par rapport à 0.

$\forall \alpha \in I$, on a :
— Si f est paire, $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_0^{\alpha} f(x)dx$
— Si f est impaire, $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$

Examples

CIAM

Propriété 2 :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique, de période p.
Pour tous nombres réel a et b, on a :
— Si f est paire, $\int_{a+p}^{b+p} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$
— Si f est impaire, $\int_a^{a+p} f(x)dx = \int_0^p f(x)dx$

Examples

CIAM

III. Application du calcul intégral

Propriété :

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ leurs réprésentations graphiques respectives a et b deux éléments de I $(a < b)$ Lorsque $f \leq g$ sur $[a;b]$, l'aire du domaine D délimité par $(\mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{C}_g)$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est : $\mathcal{A}(D) = \int_a^b [g(x) - g(x)]dx$

Voir dessin

Examples

CIAM