

Correction du devoir n° 1 Du 1^{er} Semestre

Exercice 1 : 6 points

A) Réponses aux questions de cours

- 1 Soit z un nombre complexe non nul donné.
 - L'écriture algébrique de z est de la forme : $z = a + ib$, avec a sa partie réelle et b sa partie imaginaire,
 - L'écriture exponentielle de z est de la forme : $z = re^{i\theta}$, avec r son module et θ un de ses arguments,
 - L'écriture trigonométrique de z est de la forme : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, avec r son module et θ un de ses arguments.
- 2 Soient $K(z_0)$, $M(z)$ et $M'(z')$ et soit r la rotation de centre $K(z_0)$ qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ on a :

$$\begin{cases} KM' = KM \\ (\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KM'}) = \theta \quad [2\pi] \end{cases} \quad (1)$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} |z' - z_0| = |z - z_0| \\ \arg \frac{z' - z_0}{z - z_0} \equiv \theta \quad [2\pi] \end{cases} \quad (2)$$

D'où

$$z' = e^{i\theta} z + z_0(1 - e^{i\theta})$$

B) Soit $z_0 = 1 - i\sqrt{3}$.

- 1 Écriture trigonométrique de z_0 .

On a $|z_0| = \sqrt{1+3} = 2$,

soit θ un argument de z_0 alors $\cos \theta = \frac{1}{2}$ et $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ce qui donne $\theta = -\frac{\pi}{3} [2\pi]$ d'où

$$z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

- 2 Calculons z_0^4

$$z_0^4 = [2(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3})]^4 = 16(\cos \frac{4\pi}{3} - i \sin \frac{4\pi}{3}) = 16 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

D'où

$$z_0^4 = -8 + i8\sqrt{3}$$

3 Résolvons l'équation

$$z^4 = 1$$

$z^4 = 1$ implique $|z|^4 = 1$ et $4 \arg z = 0[2\pi]$ ce qui donne

$$|z| = 1 \text{ et } \arg z = k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

d'où l'ensemble des solutions S de l'équation $z^4 = 1$ est

$$S = \{-1; 1; i; -i\}$$

4 Déduisons-en les solutions de l'équation (E) : $z^4 = -8 + i8\sqrt{3}$.

$z^4 = -8 + i8\sqrt{3}$ est équivalent à

$$\frac{z^4}{-8 + i8\sqrt{3}} = 1$$

ce qui est équivalent, d'après B)2), à

$$\left(\frac{z}{1 - i\sqrt{3}} \right)^4 = 1$$

Ce qui donne d'après B)3) les solutions suivantes :

- Sous forme algébrique :

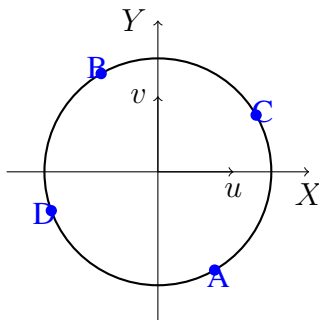
$$z_0 = 1 - i\sqrt{3}, \quad z_1 = -1 + i\sqrt{3}, \quad z_2 = \sqrt{3} + i, \quad z_3 = -\sqrt{3} - i$$

- Sous forme trigonométrique :

$$z_0 = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}\right), \quad z_1 = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right), \quad z_2 = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$$

$$z_3 = 2\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right)$$

5 Plaçons les points



- 6 Soit la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$.

D'après A)2) si $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par r alors

$$z' = ze^{i\frac{\pi}{2}}$$

- 7 Soient les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = z_0, z_B = z_1, z_C = z_2$ et $z_D = z_3$.

Vérifions que $r(A) = C$.

$$z_A e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = z_C$$

d'où $r(A) = C$.

Vérifions que $r(C) = B$.

$$z_C e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}} e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\frac{4\pi}{6}} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = z_B$$

d'où $r(C) = B$.

Vérifions que $r(B) = D$.

$$z_B e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = z_D$$

d'où $r(B) = D$.

$$r(A) = C \implies |z_A| = |z_C|,$$

$$8. r(C) = B \implies |z_C| = |z_B|,$$

$$r(B) = D \implies |z_B| = |z_D|$$

D'où

$$|z_A| = |z_C| = |z_B| = |z_D| = 2$$

Ce qui est équivalent à

$$OA = OB = OC = OD = 2.$$

D'où A, B, C et D sont sur le même cercle (C) de centre O et de rayon 2.

Exercice 2 : 2,25 points

Déterminons les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left[\frac{x+1}{x^2+x+1} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left[\frac{x+1}{x^2+x+1} \right] : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2+x+1} = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \end{cases} \quad \text{Par composition, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left[\frac{x+1}{x^2+x+1} \right] = -\infty$$

$$\ln \left[\frac{x+1}{x^2+x+1} \right] = -\infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{\ln(x+1)}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{\ln(x+1)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left[x \left(1 + \frac{2}{x} \right) \right]}{\ln \left[x \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) + \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right)}{\ln(x) + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) \left[1 + \frac{\ln(1+\frac{2}{x})}{\ln(x)} \right]}{\ln(x) \left[1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(x)} \right]} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left[1 + \frac{\ln(1+\frac{2}{x})}{\ln(x)} \right]}{\left[1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(x)} \right]} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{\ln(x+1)} = 1$$

$$\begin{aligned}
3. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x + 2}{\ln x + 1} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x \left(1 + \frac{2}{\ln x} \right)}{\ln x \left(1 + \frac{1}{\ln x} \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(1 + \frac{2}{\ln x} \right)}{\left(1 + \frac{1}{\ln x} \right)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x + 2}{\ln x + 1} = 1$$

$$\begin{aligned}
4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln [(\sqrt{x})^2]}{\sqrt{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln [\sqrt{x}]}{\sqrt{x}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$$

Problème : 11,75 points

Partie A: 2,75 pts

Soit $g(x) = 2x \ln(-x) + x + 1$.

- 1 Déterminons l'ensemble de définition D_g de g .

(0,5 pt)

g existe ssi $-x > 0$

$$-x > 0 \implies x < 0$$

$$\implies x \in]-\infty; 0[$$

Donc $Dg =] - \infty; 0[$

$Dg =] - \infty; 0[$ (0,5 pt)

2 Calculons les limites aux bornes de D_g .

(0,5 pt)

En $-\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x \ln(-x) + x + 1 \\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ (0,25 pt)

En 0^-

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x \ln(-x) + x + 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -2(-x \ln(-x)) + x + 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 1$$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 1$ (0,25 pt)

3 Étudions les variations de g .

(1 pt)

$$\begin{aligned}g(x) &= 2x \ln(-x) + x + 1 \\ &= 2(x \ln(-x))' + (x + 1)' \\ &= 2[(x)' \ln(-x) + x(\ln(-x))'] + 1 \\ &= 2\left[\ln(-x) + x\left(\frac{1}{x}\right)\right] + 1 \\ &= 2[\ln(-x) + 1] + 1 \\ &= 2\ln(-x) + 3\end{aligned}$$

$g'(x) = 2\ln(-x) + 3$ (0,5 pt)

Étudions le signe de g

Supposons que $2\ln(-x) + 3 > 0$

$$\begin{aligned}2\ln(-x) + 3 > 0 &\implies \ln(-x) > \frac{-3}{2} \\ &\implies \ln(-x) > \ln\left(e^{\frac{-3}{2}}\right) \\ &\implies -x > e^{\frac{-3}{2}} \\ &\implies x < -e^{\frac{-3}{2}} \\ &\implies x \in]-\infty; -e^{\frac{-3}{2}}[\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; -e^{\frac{-3}{2}}[, g'(x) > 0 \text{ donc } g \text{ y est croissant} \\ \forall x \in [-e^{\frac{-3}{2}}; 0[, g'(x) < 0 \text{ donc } g \text{ y est décroissant} \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	$-e^{\frac{-3}{2}}$	0
$f'(x)$			0	
$f(x)$	$-\infty$	0	$2e^{\frac{-3}{2}} + 1$	1

$$\begin{aligned}
 g(-e^{\frac{-3}{2}}) &= 2(-e^{\frac{-3}{2}}) \ln(-(-e^{\frac{-3}{2}})) + (-e^{\frac{-3}{2}}) + 1 \\
 &= -2e^{\frac{-3}{2}} \ln e^{\frac{-3}{2}} - e^{\frac{-3}{2}} + 1 \\
 &= -2e^{\frac{-3}{2}} \times \frac{-3}{2} - e^{\frac{-3}{2}} + 1 \\
 &= 3e^{\frac{-3}{2}} - e^{\frac{-3}{2}} + 1 \\
 &= 2e^{\frac{-3}{2}} + 1.
 \end{aligned}$$

$$g(-e^{\frac{-3}{2}}) = 2e^{\frac{-3}{2}} + 1$$

4 Calculons $g(-1)$.

(0,75 pt)

$$\begin{aligned}
 g(-1) &= 2(-1) \ln(-(-1)) + (-1) + 1 \\
 &= -2 \ln(1) - 1 + 1 \\
 g(-1) &= -2 \times 0 - 1 + 1 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

$$g(-1) = 0$$

Le signe de $g(x)$

D'après le tableau de variation:

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; -1[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]-1; 0[, g(x) > 0 \end{cases}$$

Partie B: 7 pts

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(-x) + x + 1 & \text{si } x < 0 \\ x \ln(x)^2 + x + 1 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1 Justifions que f est définie sur \mathbb{R} .

(0,5 pt)

$$\text{Posons } f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x^2 \ln(-x) + x + 1 & \text{si } x < 0 \\ f_2(x) = x \ln(x)^2 + x + 1 & \text{si } x > 0 \\ f_3(x) = 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

* f_1 existe ssi $-x > 0$

$$-x > 0 \implies x < 0$$

$$\implies x \in]-\infty; 0[$$

$$Df_1 =] - \infty; 0[$$

* f_2 existe ssi $x > 0$

$$x > 0 \implies x \in] - \infty; 0[$$

$$Df_2 = \emptyset$$

$$Df_3 = \{0\}$$

Donc

$$\begin{aligned} Df &= Df_1 \cup Df_2 \cup Df_3 \\ &=] - \infty; 0[\cup \emptyset \cup \{0\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$Df = \mathbb{R}$$

2 Étudions la continuité et la dérivabilité de f en 0. (1,5 pt)

Continuité

En 0^- , on a : $f(x) = x^2 \ln(-x) + x + 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 \ln(-x) + x + 1 : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 \ln(-x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 1 = 1 \end{cases} \quad \text{Par somme : } \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 \ln(-x) + x + 1 = 1$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$$

En 0^+ , on a : $f(x) = x \ln(x)^2 + x + 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)^2 + x + 1 : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{\frac{1}{2}} \ln(x))^2 = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x + 1 = 1. \end{cases} \quad \text{Par somme : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

Conclusion

On sait que $f(0) = 1$. De plus :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 1.$$

Par conséquent, la fonction f est **continue en** $x = 0$.

Dérivabilité

En 0^- , on a : $f(x) = x^2 \ln(-x) + x + 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 \ln(-x) + x + 1 - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 \ln(-x) + x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x \ln(-x) + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$$

En 0^+ , on a : $f(x) = x \ln(x)^2 + x + 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln(x)^2 + x + 1 - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln(x)^2 + x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x)^2 + 1 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Par conséquent, la fonction f n'est pas **dérivable en** $x = 0$.

Interprétons graphiquement les résultats:

- f est dérivable à gauche de 0 et admet une tangente d'équation $y = x + 1$
- f n'est pas dérivable à droite de 0 et admet une demi-tangente orientée vers le haut.

- 3 Donnons le domaine de dérivabilité de f puis montrons que $f'(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x < 0 \\ (1 + \ln x)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ (0,5×3 pts)

Domaine de dérivabilité

$f_1(x) = x^2 \ln(-x) + x + 1$ est dérivable si $x < 0$ ainsi $Df'_1 =]-\infty; 0[$

$f_2(x) = x \ln(x)^2 + x + 1$ est dérivable si $x > 0$ ainsi $Df'_2 =]0; +\infty[$

D'après ce qui précède, f n'est pas dérivable en 0 donc f est bien dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

ainsi

$$\begin{aligned} Df' &= Df'_1 \cup Df'_2 \cup Df'_3 \\ &=]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[\\ &= \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

$$Df' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} [x^2 \ln(-x) + x + 1]' & \text{si } x < 0 \\ [x \ln(x)^2 + x + 1]' & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (x^2 \ln(-x))' + (x + 1)' & \text{si } x < 0 \\ (x \ln(x)^2)' + (x + 1)' & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2x \ln(-x) + x^2 \times \frac{1}{x} + 1 & \text{si } x < 0 \\ \ln(x)^2 + 2x \times \frac{1}{x} \times \ln(x) + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2x \ln(-x) + x + 1 & \text{si } x < 0 \\ \ln(x)^2 + 2 \ln(x) + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} g(x) & \text{si } x < 0 \\ (\ln(x) + 1)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{cqfd} \end{aligned}$$

4 Calculons les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

(0,5 pt)

En $-\infty$, on a : $f(x) = x^2 \ln(-x) + x + 1$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \ln(-x) + x + 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left[\ln(-x) + \frac{x+1}{x} \right] \\ &= +\infty [+\infty + 1] \\ &= +\infty\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

En $+\infty$, on a : $f(x) = x \ln(x)^2 + x + 1$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x)^2 + x + 1 \\ &= +\infty\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

5 Étudions les branches infinies de (C_f) .

(0,5 pt)

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

En effet

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \ln(-x) + x + 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln(-x) + \frac{x+1}{x} \\ &= -\infty + 1 \\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

Donc C_f admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $-\infty$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

En effet

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x)^2 + x + 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)^2 + \frac{x+1}{x} \\ &= +\infty + 1 \\ &= +\infty\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

Donc (C_f) admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$

6 Dressons le tableau de variations de f .

(1 pt)

$$\text{Le signe de } f. \text{ on a : } f'(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x < 0 \\ (1 + \ln x)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; -1[, g(x) < 0 \text{ donc } f \text{ est y décroissante} \\ \forall x \in]-1; 0[, g(x) > 0 \text{ donc } f \text{ y est croissante} \\ \forall x \in]0; +\infty[, f(x) > 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	0	$+\infty$

- 7 Montrons que dans $] - \infty; -1[$, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α . (0,75 pt)

Posons $h(x) = f(x) - 1$

Montrer que $f(x) = 1$ admet une unique solution revient à montrer que $h(x) = 0$ admet une unique solution.

Existence

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) \times \lim_{x \rightarrow -1} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 1 \times \lim_{x \rightarrow -1} f(x) - 1 \\ &= +\infty \times -1 \\ &< 0 \end{aligned}$$

Donc l'équation $h(x) = 0$ admet une solution α

Unicité

Comme h hérite des propriétés de f donc h est continue et strictement décroissante sur $] - \infty; -1[$

D'où l'unicité de la solution

vérifions que $-1,8 < \alpha < -1,7$

$$\begin{aligned} h(-1,8) \times h(-1,7) &= (f(-1,8) - 1) \times (f(-1,7) - 1) \\ &= (1.104428794 - 1) \times (0.833515646 - 1) \\ &= (0.104428794) \times (-0.166484354) \\ &< 0 \end{aligned}$$

Donc $\alpha \in] - 1,8; -1,7[$

- 8 Construisons (C_f) (unité 2 cm) (on précisera la tangente au point d'abscisse e^{-1} et on placera le point d'abscisse 1). (0,75 pt)

$$f(x) = x \ln(x)^2 + x + 1$$

$$f(e^{-1}) = 2e^{-1} + 1$$

Équation de la tangente

L'équation de la tangente en $x = e^{-1}$ est donnée par :

$$y = f(e^{-1}) + f'(e^{-1})(x - e^{-1})$$

Puisque $f'(e^{-1}) = 0$, on a :

$$y = \frac{2}{e} + 1$$

la tangente est une droite horizontale d'équation :

$$y = \frac{2}{e} + 1$$

$$f(1) = 2$$

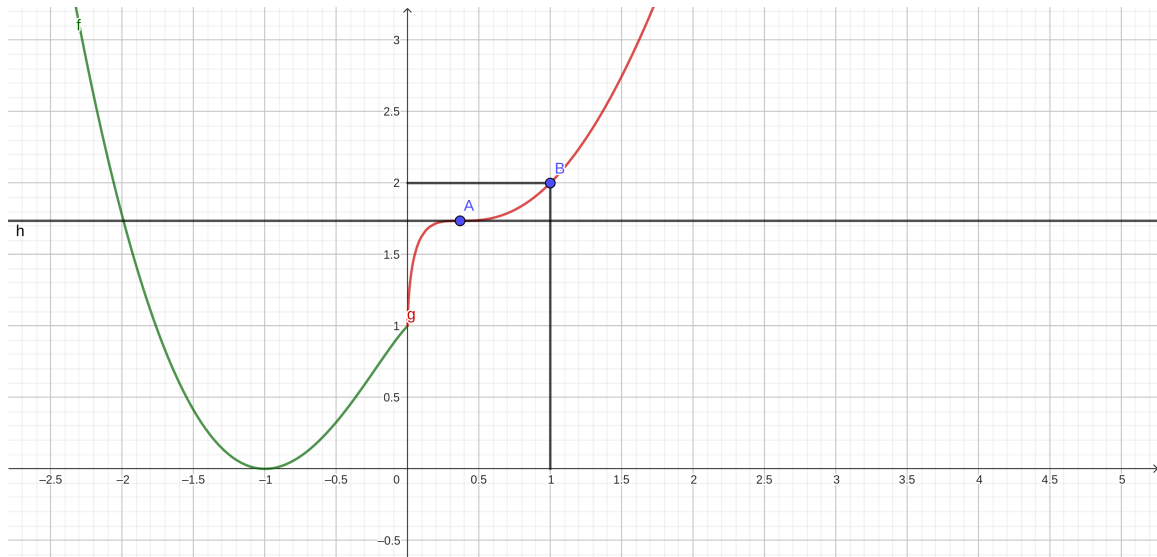


Figure 1: Courbe de (Cf)

[Clique ici pour voir la courbe sur géogébra](#)

Partie C: 2 pts

Soit h la restriction de f à $I =]0; +\infty[$.

- 1 Montrons que h admet une bijection réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que nous allons préciser. (0,5 pt)

La fonction h est continue et strictement croissante sur $I =]0; +\infty[$ et réalise une bijection de I sur $J =]1; +\infty[$.

Elle admet donc une bijection réciproque $h^{-1} : J \rightarrow I$.

- 2 Étudions la dérivabilité de h^{-1} sur J . (0,25 pt)

D'après le théorème de dérivation des fonctions réciproques, si h est dérivable et si $h'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors h^{-1} est dérivable sur J et sa dérivée est donnée par :

$$(h^{-1})'(y) = \frac{1}{h'(h^{-1}(y))}, \quad \forall y \in J.$$

Or, nous avons montré que $h'(x) = (\ln(x) + 1)^2$.

Puisque $(\ln(x) + 1)^2 > 0$ pour tout $x > 0$, on en déduit que $h'(x) \neq 0$ sur I .

Ainsi, h^{-1} est dérivable sur $J =]1; +\infty[$

- 3 a Calculons $h(1)$. (0,25 point)

$$h(x) = x \ln(x)^2 + x + 1.$$

$$h(1) = 1 \ln(1)^2 + 1 + 1.$$

$$= 1 \cdot 0 + 1 + 1 = 2.$$

$$= 2.$$

b Calculons $(h^{-1})'(2)$.

(0,5 pt)

Nous savons que la dérivée de la fonction réciproque h^{-1} est donnée par :

$$(h^{-1})'(y) = \frac{1}{h'(h^{-1}(y))}, \quad \forall y \in J.$$

Nous avons précédemment trouvé que :

$$h(1) = 2.$$

Cela signifie que :

$$h^{-1}(2) = 1.$$

Calculons maintenant $h'(1)$. La fonction h est définie par :

$$h(x) = x \ln(x)^2 + x + 1.$$

Sa dérivée est :

$$h'(x) = (\ln(x) + 1)^2.$$

En évaluant cette dérivée en $x = 1$, on a :

$$h'(1) = (\ln(1) + 1)^2 = (0 + 1)^2 = 1.$$

$$\text{Ainsi : } (h^{-1})'(2) = \frac{1}{h'(1)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Conclusion

Nous obtenons : $(h^{-1})'(2) = 1$.

4 Construisons la courbe de h^{-1} .

(0,5 pt)

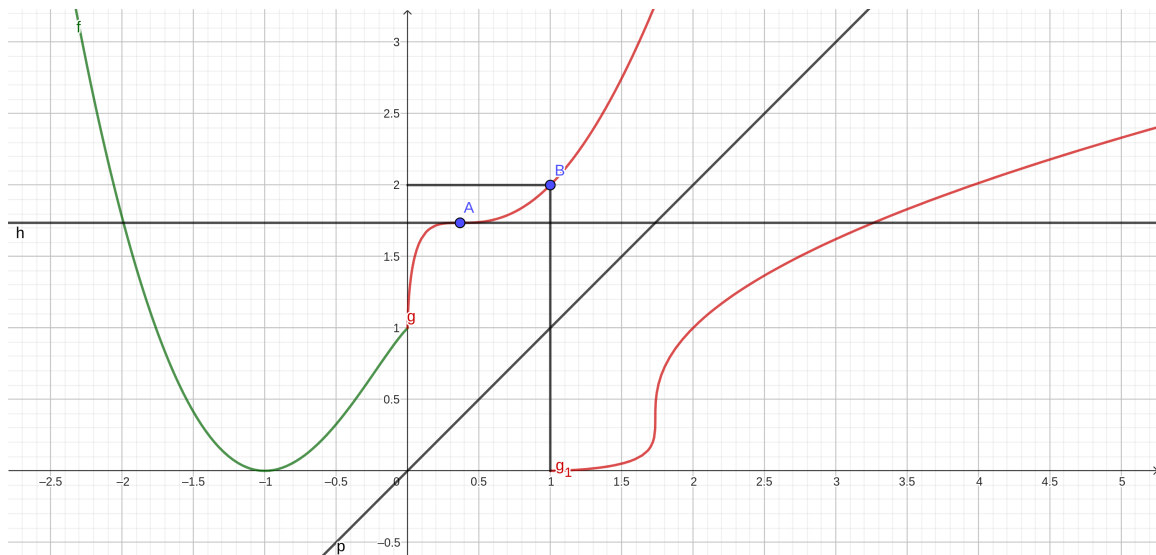


Figure 2: Courbe de (Cf)

[Clique ici pour voir la courbe sur géogebra](#)

5 Étudions la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interprétez graphiquement les résultats.

(1,5 pt)