⋄⋄⋄ Lycée de Dindéfélo ⋄⋄⋄			A.S. : 2024/2025
Matière: Mathématiques	**Niveau : TS2**	**Date: 26/11/2024**	**Durée : 4 heures**

Devoir n° 1 Du 1$^{\text{er}}$ Semestre

Exercice 1 : 0,5 $\times$ 10 = 5 points

1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire.
2. Énoncer Théorème de l'inégalité des accroissements finis (TIAF).
3. Énoncer le théorème de l'inégalité des accroissements finis (IAF).
4. Théorème de la bijection.
5. Si $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a \ (a \neq 0)$ alors ...
6. Si $\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ alors ...
7. Si $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$ alors ...
8. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \beta \in \mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-\beta x] = +\infty$ alors ...
9. Si f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; b]$, alors $f(]-\infty; b]) = \ldots$

Exercice 2 : 5,5 points

1. Calculer les limites suivantes : **(4 × 1 pt)**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sin 2x} \ ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^3+x^2} \ ; \quad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x}} \ ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^3+x^2}$$

2. Donner les primitives des fonctions f et g respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$. **(3 × 0,5 pt)**

$$f(x) = 2\cos(x) - 3\sin(x) \ ; \quad g(x) = (3x-1)(3x^2-2x+3)^3 \ ; \quad h(x) = \frac{1-x^2}{(x^3-3x+2)^3}.$$

Problème : 9,5 points

Partie A : Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x}{x-1} & \text{si } x < 0, \\ x + \sqrt{x^2+x} & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f. **(0,5 pt)**

2. Déterminer les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$. **(0,5 pt)**

3. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats obtenus. **(1,5 pt)**

4.
   a. Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet en $-\infty$ une asymptote oblique Δ_1 dont on déterminera l'équation. **(0,5 pt)**
   b. Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à Δ_1 sur $(-\infty; 0[$. **(0,5 pt)**

5. Étudier la nature de la branche infinie en $+\infty$. **(0,5 pt)**

6. Préciser l'ensemble de dérivabilité de f puis calculer $f'(x)$ sur chaque intervalle où f est dérivable. **(0,5 pt)**

7. Dresser le tableau de variation de f. **(0,5 pt)**

8. Préciser les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repère. **(0,25 pt)**

9. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$. **(1,5 pt)**

<u>Partie B :</u>

Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = [0; +\infty[$.

1. Montrer que h réalise une bijection de I dans un intervalle J à préciser. **(0,25 pt)**

2. La bijection réciproque h^{-1} est-elle dérivable sur J ? **(0,25 pt)**

3. Calculer $h\left(\frac{4}{5}\right)$ puis $(h^{-1})'(2)$. **(0,5 pt)**

4. Construire $(\mathcal{C}_{h^{-1}})$ la courbe représentative de h^{-1} dans le même repère. **(0,5 pt)**

5. Exprimer $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$. **(0,5 pt)**