UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
OFFICE DU BACCALAURÉAT
Email : `office@ucad.edu.sn`
Site web : `officedubac.sn`

MATHÉMATIQUES

Séries : S1–S1A–S3 | Coef. 8

Épreuve du 1^{er} groupe
Durée : 4 heures

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

Exercice 1 : (04,75 points)

Pour préparer les tests de sélection aux Jeux Olympiques de la Jeunesse de Dakar 2026, les athlètes disposent de deux stades A et B pour les entraînements.

Partie I : (02,5 points)

Un athlète doit s'entraîner deux jours consécutifs.

— Le premier jour, la probabilité qu'il choisisse le stade A est égale à α.

— Le second jour, on admet que la probabilité qu'il choisisse un stade différent de celui fréquenté la veille est 0,8.

Pour $j \in \{1, 2\}$, on note les événements suivants :

A_j : « l'athlète choisit le stade A le $j^{\text{ième}}$ jour », B_j : « l'athlète choisit le stade B le $j^{\text{ième}}$ jour ».

1. Déterminer la valeur de α pour que les événements A_1 et A_2 aient la même probabilité. (01 point)
   Dans toute la suite de l'exercice, on prendra $\alpha = 0{,}5$.
2. Calculer la probabilité qu'un athlète se rende au même stade pendant les deux jours. (0,75 point)
3. Au deuxième jour, on aperçoit un athlète sortant du stade B. Quelle est la probabilité qu'il se soit entraîné au même stade la veille ? (0,75 point)

Partie II : (02,25 points)

Au premier jour, on a n athlètes ($n \geq 3$) qui doivent s'entraîner. Chacun d'entre eux choisit, au hasard et indépendamment des choix des autres, l'un des deux stades où il doit s'entraîner.
On suppose que les deux stades ne contiennent aucun athlète au départ.
On dit qu'un athlète est heureux s'il se trouve seul dans un stade où s'entraîner.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait deux athlètes heureux ? (0,5 point)
2. Soit p_n la probabilité qu'il y ait un athlète heureux parmi ces n athlètes.

a) Montrer que pour tout naturel ($n \geq 3$), que : $p_n = \frac{2n}{2^{n-1}}$. (0,75 point)

b) Étudier la variation et la convergence de la suite $(p_n)_{n\geq 3}$. (0,5 point)

c) Calculer p_{10} puis déterminer la plus grande valeur de n pour laquelle la probabilité d'avoir un athlète heureux est supérieur à $0,005$. (0,5 point)

Exercice 2 : (04,25 points)

Soient (Δ_1) et (Δ_2) deux droites distinctes de l'espace.
On note R_1 et R_2 les demi-tours d'axes respectifs (Δ_1) et (Δ_2).

Le but de cet exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur (Δ_1) et (Δ_2) pour que : $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

1. **On suppose que (Δ_1) et (Δ_2) sont perpendiculaires en un point noté O.**
   On adoptera les notations suivantes :
   — Le plan contenant (Δ_1) et (Δ_2) est noté (P).
   — La droite perpendiculaire en O au plan (P) est notée (Δ).
   — Le plan contenant (Δ) et (Δ_1) est noté (P_1).
   — Le plan contenant (Δ) et (Δ_2) est noté (P_2).
   — Les réflexions par rapport aux plans $(P), (P_1), (P_2)$ sont respectivement notées S_P, S_{P_1}, S_{P_2}.

   a) Faire une figure en faisant apparaître clairement le point O, les plans $(P), (P_1), (P_2)$ ainsi que les droites $(\Delta), (\Delta_1), (\Delta_2)$. (0,75 point)

   b) Déterminer $S_P \circ S_{P_1}$ et $S_{P_2} \circ S_P$. (0,5 + 0,5 = 1 point)

   c) En déduire que $R_2 \circ R_1$ est un demi-tour dont on précisera l'axe. (0,5 point)

   d) Prouver alors que $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$. (0,5 point)

2. **Réciproquement, on suppose que $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.**
   Soit A un point de (Δ_1) qui n'appartient pas à (Δ_2), et B l'image de A par R_2.

   a) Montrer que la droite (AB) et la droite (Δ_2) sont perpendiculaires. (0,5 point)

   b) En utilisant la relation $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$, prouver que $B = R_1(B)$. (0,5 point)

   c) En déduire que (Δ_1) et (Δ_2) sont perpendiculaires. (0,25 point)

3. En utilisant ce qui précède, énoncer une condition nécessaire et suffisante portant sur (Δ_1) et (Δ_2) pour que : $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$. (0,25 point)

Problème :(11 points)

On considère le plan complexe $\mathbb{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Partie A (02 points)

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $F_{a,b}$ l'application de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}$ qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' telle que : $z' = a\overline{z} + ib$ où $\overline{z}$ est le conjugué de z.

   a) Exprimer les coordonnées x' et y' de M' en fonction des coordonnées x et y de M. (0,25 point)

   b) Déterminer, suivant les valeurs de a et b, l'ensemble des points invariants par $F_{a,b}$. (0,5 point)

2. On suppose $|a| \neq 1$.
   Montrer que $F_{a,b} = S_\Delta \circ h$, où S_Δ est la symétrie orthogonale d'axe la droite (Δ) d'équation $y = \frac{b}{a+1}$ et h l'homothétie de centre le point Ω d'affixe $\frac{ib}{1+a}$ et de rapport a. (0,75 point)
3. Soit $(c,d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, et $G_{c,d}$ l'application de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}$ qui, au point N d'affixe z, fait correspondre le point N' d'affixe z' tel que : $z' = cz + id$.

   Déterminer, suivant les valeurs de c et d, la nature et les éléments géométriques caractéristiques de $G_{c,d}$. (0,5 point)

Partie B (03,25 points)

1. Dans cette question on suppose que $|a| \neq 1$.

   On définit la suite de points $(M_n)_{n\geq 1}$ par : $\begin{cases} M_1 \text{ est le point d'affixe } u_1 = a + ib \\ \forall n \geq 1,\ M_{n+1} = F_{a,b}(M_n) \end{cases}$

   a) Déterminer l'affixe u_2 du point M_2. (0,25 point)

   b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, M_n a pour affixe :

   $$u_n = a^n + ib\left(\frac{1-(-a)^n}{1+a}\right)$$

   (0,75 point)

   c) Soit (D_1) la droite passant par les points $\Omega\left(\dfrac{ib}{1+a}\right)$ et M_1, et soit (D_2) son image par $F_{a,b}$.

      i. Déterminer une équation cartésienne de la droite (D_2). (0,25 point)

      ii. Montrer que (D_1) est aussi l'image de (D_2) par $F_{a,b}$. (0,25 point)

      iii. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, le point M_{2n} appartient à (D_2) et le point M_{2n+1} appartient à (D_1). (0,5 point)

2. Dans cette question on suppose que $|c| \neq 1$.

   On définit la suite de points $(N_n)_{n\geq 1}$ par : $\begin{cases} N_1 \text{ est le point d'affixe } v_1 = c + id \\ \forall n \geq 1,\ N_{n+1} = G_{c,d}(N_n) \end{cases}$

   a) Déterminer l'affixe v_2 du point N_2. (0,25 point)

   b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, le point N_n a pour affixe : $v_n = c^n + id\left(\frac{c^n-1}{c-1}\right)$ (0,5 point)

   c) Montrer que tous les points N_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ appartiennent à la droite (Δ) passant par B et N_1, où B est le point d'affixe : $\frac{id}{1-c}$ (0,5 point)

Partie C (03,25 points)

On considère la famille de courbes $\mathcal{F} = \{C_n, n \geq 1\}$ définie de la manière suivante :

— La courbe C_1 est la courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ de la fonction Φ_1 définie par : $\Phi_1(x) = xe^{\frac{1}{x}} - 2$.

— Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $C_{n+1} = G_{2,1}(C_n)$ où $G_{2,1}$ est l'application de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}$ définie dans la question 3. de la partie A avec $c = 2$ et $d = 1$.

1. a) Étudier les variations de Φ_1, puis établir le tableau de variations de Φ_1. (0,75 point)

   b) Montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à C_1 en $+\infty$ et en $-\infty$. (0,25 point)

c) Tracer soigneusement la courbe C_1. (0,5 point)

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par Φ_n la fonction numérique à variable réelle dont la courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est C_n.

   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\Phi_n(x) = xe^{\left(\frac{2^{n-1}}{x}\right)} - 2^{n-1} - 1$. (0,75 point)

   b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe C_n. (0,5 point)

   c) i. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un unique point S_n où la tangente à la courbe C_n est parallèle à l'axe des abscisses. (0,25 point)

   ii. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, les points S_n, S_{n+1} et $B(0, -1)$ sont alignés. (0,25 point)

Partie D (02,5 points)

Pour tout entier naturel non nul, on considère la fonction numérique à variable réelle h_n définie par :

$$h_n(x) = x - 1 + 4^{n-1}\left(\frac{e-2}{x}\right)$$

On note $\mathcal{H}_n$ la courbe représentative de h_n dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Étudier les variations de h_1 puis dresser son tableau de variations. (0,5 point)

   b) Tracer $\mathcal{H}_1$. (0,5 point)

   c) Calculer, en unité de volume, le volume du solide obtenu par révolution autour de l'axe des abscisses, de la partie de $\mathcal{H}_1$ comprise entre les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$. (0,5 point)

2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\mathcal{H}_{n+1}$ est l'image de $\mathcal{H}_n$ par $G_{2,1}$. (0,5 point)

3. Pour tout entier naturel n non nul, on note $\mathcal{A}_n$ l'aire du domaine plan délimité par les courbes d'équations respectives dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$: $y = h_n(x)$, $y = x - 1$, $x = 2^{n-1}$ et $x = 2^n$.

   Montrer que $(\mathcal{A}_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme. (0,5 point)