

Devoir n° 2 Du 1^{er} Semestre

Exercice 1 : (03 points ≈ 36 mns)

1 Déterminer une primitive F de la fonction f sur I .

a $f(x) = (6x - 3)(4x^2 - 4x + 2)^3$; $I = \mathbb{R}$ (0, 5pt)

b $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{3 + \cos x}}$; $I = \mathbb{R}$ (0, 5pt)

c $f(x) = 2 \cos 3x - 3 \sin 2x$; $I = \mathbb{R}$ (0, 5pt)

d $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}} + \sin x \sin 2x$; $I =]-\infty; -1[$ (0, 5pt)

2 Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par : $k(x) = \frac{3x - 2}{(x + 2)^3}$.

a Déterminer les a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, k(x) = \frac{a}{(x + 2)^2} + \frac{b}{(x + 2)^3}$. (0, 5pt)

b En déduire la primitive K de k qui prend la valeur 2 en -3. (0, 5pt)

Exercice 2 : (05 points ≈ 60 mns)

1 a Écrivez le complexe $z = -1 + i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle. (1pt)

b Donner le module et un argument de $z = (1 - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}$. (1pt)

2 a Donner le module et un argument de $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$. (1pt)

b Déduis en le module et un argument de chacun des complexes $u = \frac{z_1}{z_2}$ et u^5 . (1pt)

c Déduis en les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. (1pt)

Problème : (12 points ≈ 144 mns)

On note (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm avec

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1} & ; \text{si } x \leq 0 \\ x + \sqrt{x^2 + x} & ; \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire :

Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = -x^3 + 3x - 4$.

1 Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variations. (0, 75pt)

2 a Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$. (0, 5pt)

b Donner un encadrement de α à 10^{-1} .

(0, 5pt)

3 En déduire le signe de $g(x)$ sur $] -\infty; 0]$.

(0, 25pt)

Partie B : Étude de la fonction f

1 Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

(0, 5pt)

2 **a** Calculer les limites de f aux bornes de D_f et en déduire l'existence d'une asymptote dont on précisera. (01pt)

b Pour $x \leq 0$, déterminer les réels a, b, c et d tels que : $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 - 1}$ et en déduire la nature de la branche infinie en $-\infty$.

(0, 75pt)

c Donner la nature de l'asymptote en $+\infty$.

(0, 5pt)

3 **a** Montrer que f est continue sur D_f .

(0, 75pt)

b Étudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter le résultat obtenu.

(01pt)

4 Démontrer que : $f(\alpha) = -2 + \frac{3(\alpha - 2)}{\alpha^2 - 1}$.

(0, 5pt)

5 **a** Montrer que $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[$, on a : $f'(x) = \frac{-xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$ puis étudier son signe.

(1pt)

b Calculer $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$ et étudier son signe.

(0, 75pt)

c Dresser le tableau de variation de f sur D_f .

(0, 75pt)

6 Construire soigneusement la courbe (C_f) .

(01pt)

Partie C : Bijection

Soit h la restriction de f sur $I =]0; +\infty[$.

1 Montrer que h réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser.

(0, 5pt)

2 Calculer $h(1)$ et $(h^{-1})'(\sqrt{2} + 1)$.

(0, 5pt)

3 Expliciter $h^{-1}(x)$.

(0, 5pt)

4 Construire $(C_{h^{-1}})$ dans le repère précédent.

(0, 5pt)