⋄⋄⋄ Lycée de Dindéfélo ⋄⋄⋄			A.S. : 2024/2025
Matière: Mathématiques	Niveau : 1^{er}S2	Date: 16/06/2025	Durée : 4 heures

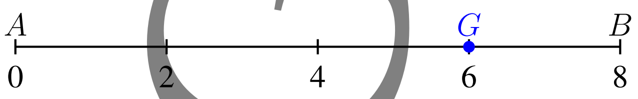
Correction de la composition Du 2^{nd} Semestre

Correction Exercice 1 : 4 pts

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 8$ cm.

1. Construisons le barycentre G des points pondérés $(A;1)$ et $(B;3)$. **0,1 pt**

$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$



2. Calculons les distances GA et GB. **0,5 pt + 0,5 pt**

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} &\Longrightarrow \|\overrightarrow{AG}\| = \frac{3}{4}\|\overrightarrow{AB}\| \\
&\Longrightarrow AG = \frac{3}{4} \times 8 \\
&\Longrightarrow AG = 6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} &\Longrightarrow \|\overrightarrow{BG}\| = \frac{1}{4}\|\overrightarrow{BA}\| \\
&\Longrightarrow BG = \frac{1}{4} \times 8 \\
&\Longrightarrow BG = 2
\end{aligned}$$

$$\mathbf{GA = 6 \text{ et } GB = 2}$$

3. Démontrons que pour tout point M du plan,

$$MA^2 + 3MB^2 = 4MG^2 + 48$$

0,1 pt

$$\begin{aligned}
MA^2 + 3MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + 3\overrightarrow{MB}^2 \\
&= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 \\
&= \overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}^2 + 3(\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}^2) \\
&= \overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}^2 + 3\overrightarrow{MG}^2 + 6\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GB}^2 \\
&= 4\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + 6\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GA}^2 \\
&= 4\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB}) + 3\overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GA}^2 \\
&= 4\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{O}) + 3\overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GA}^2 \\
&= 4\overrightarrow{MG}^2 + 3\overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GA}^2 \\
&= 4\overrightarrow{MG}^2 + 3(2)^2 + 6^2 \\
&= 4\overrightarrow{MG}^2 + 12 + 36 \\
&= 4MG + 48
\end{aligned}$$

$$\mathbf{MA^2 + 3MB^2 = 4MG^2 + 48} \quad \textbf{CQFD}$$

4 Démontrons et construisons l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MA^2 + 3MB^2 = 84$$

0,1 pt

D'après la relation précédente on a $MA^2 + 3MB^2 = 4MG^2 + 48$

$$\begin{aligned} 4MG^2 + 48 &= 84 \\ 4MG^2 &= 84 - 48 \\ 4MG^2 &= 36 \\ MG^2 &= 9 \\ MG &= 3 \end{aligned}$$

Donc, l'ensemble des points M tels que $MA^2 + 3MB^2 = 84$ est le cercle de centre I et de rayon 3 :

$$\mathscr{C}(\mathbf{I},\ \mathbf{3})$$

5 Déterminons et construison l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -12$$

0,1 pt

Soit I milieu de AB

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -12 &\implies \overrightarrow{MI}^2 - \frac{\overrightarrow{AB}^2}{4} = -12 \\ &\implies \overrightarrow{MI}^2 - \frac{8^2}{4} = -12 \\ &\implies \overrightarrow{MI}^2 - 16 = -12 \\ &\implies \overrightarrow{MI}^2 = 4 \end{aligned}$$

Donc, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -12$ est le cercle de centre I et de rayon 2 :

$$\mathscr{C}(\mathbf{I},\ \mathbf{2})$$

Exercice 2 : 5 pts

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$$

1 Déterminons les réels a et b tels que la courbe (C_f) passe par le point $A(0, 1)$ et admette en ce point une tangente horizontale. **0,5 pt + 0,75 pt**

- (C_f) passe par $A(0, 1)$ signifie que $f(0) = 1$.

  On calcule :

  $$f(0) = \frac{0^2 + a \cdot 0 + b}{0 - 1} = \frac{b}{-1} = -b$$

  Donc, $-b = 1 \Rightarrow \boxed{b = -1}$.

- (C_f) admet une tangente horizontale en $A(0,1)$ signifie que $f'(0)=0$.

  On dérive f par le quotient :

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{avec} \quad u(x)=x^2+ax+b, \quad v(x)=x-1$$

$$f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{(x-1)^2}$$
$$u'(x)=2x+a, \quad v'(x)=1$$
$$f'(x)=\frac{(2x+a)(x-1)-(x^2+ax+b)}{(x-1)^2}$$

  Calculons $f'(0)$:

$$f'(0)=\frac{(0+a)(-1)-(0+0+b)}{1}=\frac{-a-b}{1}=-a-b$$

  On veut $f'(0)=0$, donc :

$$-a-b=0 \Rightarrow -a+1=0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

Ainsi, les réels recherchés sont $\boxed{a=1}$ et $\boxed{b=-1}$.

On suppose $a=1$ et $b=-1\dots$

2 Déterminons les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$. Précisons les asymptotes éventuelles. **0,5 pt + 0,5 pt + 0,5 pt**

La fonction devient, avec $a=1$ et $b=-1$:

$$f(x)=\frac{x^2+x-1}{x-1}$$

Domaine de définition :

$$\mathcal{D}_\mathbf{f}=\mathbb{R}\setminus\{\mathbf{1}\}$$

Limites aux bornes du domaine :

- Limite en $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-1}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})}{x(1-\frac{1}{x})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})}{1-\frac{1}{x}}=-\infty$$

  Donc :

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

- Limite en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-1}{x-1}=+\infty$$

- Limite en 1^- :

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+x-1}{x-1}=\frac{1+1-1}{0^-}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

- Limite en 1^+ :

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} = \frac{1 + 1 - 1}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Asymptotes :

- En $x = 1$, la fonction tend vers $\pm\infty$, donc la droite $x = 1$ est une **asymptote verticale**.

3 Déterminer les réels α, β, γ tels que :

$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x - 1}$$

En déduire que la droite $(D) : y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe. **0,75 pt + 0,5 pt**

On part de :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$$

On effectue la division euclidienne du numérateur par le dénominateur.

Division de $x^2 + x - 1$ par $x - 1$:

$$\frac{x^2 + x - 1}{x - 1} = x + 2 + \frac{1}{x - 1}$$

Donc :

$$\boxed{f(x) = x + 2 + \frac{1}{x - 1}} \quad \text{avec } \alpha = 1,\ \beta = 2,\ \gamma = 1$$

Conclusion sur l'asymptote oblique :

Lorsque $x \to \pm\infty$, $\dfrac{1}{x - 1} \to 0$, donc : $y = x + 2$

Par conséquent, la droite $(D) : y = x + 2$ est une **asymptote oblique** à la courbe représentative de f.

4 Dresser le tableau de variations de f puis tracer la courbe. **0,1 pt + 0,5 pt**

On a vu précédemment que :

$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x - 1}$$

On dérive :

$$f'(x) = \left(x + 2 + \frac{1}{x - 1}\right)' = 1 - \frac{1}{(x - 1)^2}$$

Étudions le signe de $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(x - 1)^2 - 1}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2}$$

Tableau de signes de $f'(x)$:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(0)=1$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$f(2)=5$	$\nearrow$	$+\infty$

Remarques : - En $x = 1$, la fonction n'est pas définie (asymptote verticale).

- En $x = 0$, $f(0) = 1$

- En $x = 2$, $f(2) = \dfrac{4+2-1}{1} = 5$

Courbe représentative :

Tracer la courbe en tenant compte :

- de l'asymptote verticale $x = 1$,
- de l'asymptote oblique $y = x + 2$,
- des points remarquables : $A(0, 1)$, $B(2, 5)$.

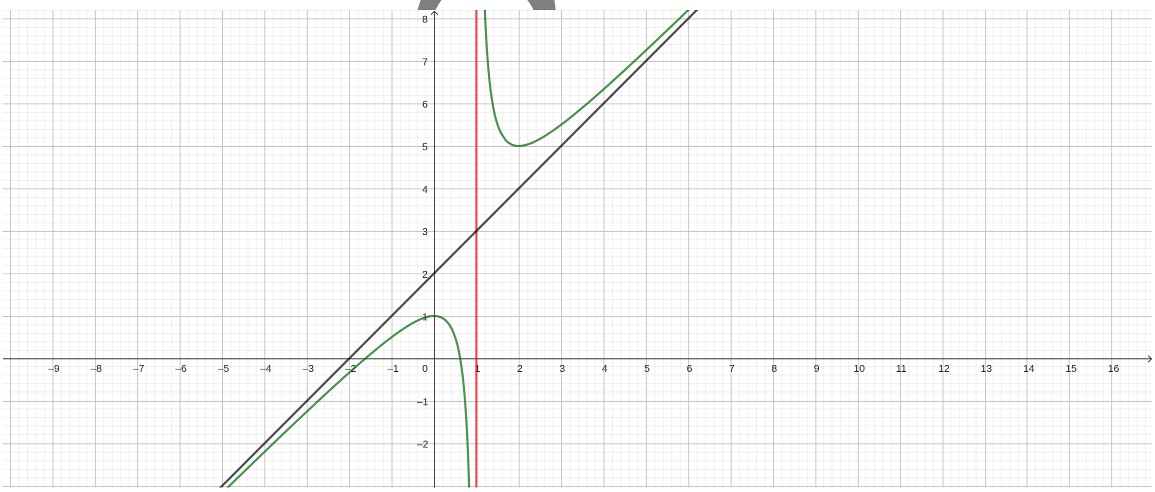


Figure 1: Représentation graphique de la courbe

Clique ici pour voir la courbe sur géogébra

Problème : 10 pts

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2+5x-5}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{3x-5}{x^2-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Montrons que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. **1,25 pt**

$$\textbf{Posons } f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \dfrac{-x^2+5x-5}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ f_2(x) = \dfrac{3x-5}{x^2-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f_1 \exists$ ssi $x - 1 \neq 0$ et $x \leq 0$

ssi $x \neq 1$ et $x \leq 0$

ssi $x \neq 1$ et $x \in]-\infty; 0]$

ssi $1 \notin]-\infty; 0]$

Donc $D_{f_1} =]-\infty; 0]$

$f_2 \exists$ ssi $x^2 - 1 \neq 0$ et $x \geq 0$

ssi $x \neq -1$ et $x \neq 1$ et $]0; +\infty[$

ssi $-1 \notin]0; +\infty[$ et $1 \in]0; +\infty[$

ssi $1 \in]0; +\infty[$

Donc $D_{f_2} =]0; 1[\cup]1; +\infty[$

$$\begin{aligned}
D_f &= D_{f_1} \cup D_{f_2} \\
&= (]-\infty; 0]) \cup (]0; 1[\cup]1; +\infty[) \\
&=]-\infty; 0] \cup]0; 1[\cup]1; +\infty[\\
&=]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[\\
&= \mathbb{R} \setminus \{1\}
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}}$$

Autre Méthode

Étude du domaine de définition de f_1 :

L'expression $f_1(x) = \dfrac{-x^2 + 5x - 5}{x - 1}$ est définie si $x - 1 \neq 0$, soit $x \neq 1$.
Or, f_1 est définie uniquement sur $x \leq 0$, donc comme $1 \notin]-\infty; 0]$, on a :

$$D_{f_1} =]-\infty; 0]$$

Étude du domaine de définition de f_2 :

L'expression $f_2(x) = \dfrac{3x - 5}{x^2 - 1}$ est définie si $x^2 - 1 \neq 0$, soit $x \neq \pm 1$.
Comme f_2 est définie pour $x > 0$, il faut exclure $x = 1$, mais $x = -1$ ne fait pas partie de l'intervalle.
Donc :

$$D_{f_2} =]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

Conclusion :

$$D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2} =]-\infty; 0] \cup (]0; 1[\cup]1; +\infty[) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}}$$

2 Calculons les limites aux bornes de D_f. **0,1 pt**

<u>En $-\infty$</u>:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} f_1(x) &= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2 + 5x - 5}{x - 1} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2}{x} \\
&= \lim_{x \to -\infty} -x \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{\mathbf{x}\to-\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = +\infty}$$

En $+\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f_2(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-5}{x^2-1}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x^2}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x}\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

En 1^-:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^-} f_2(x) &= \lim_{x\to1^-} \frac{3x-5}{x^2-1}\\ &= \lim_{x\to1^-} \frac{-2}{0^-}\\ &= +\infty\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{1}^-} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = +\infty}$$

En 1^+:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^+} f_2(x) &= \lim_{x\to1^+} \frac{3x-5}{x^2-1}\\ &= \lim_{x\to1^+} \frac{-2}{0^+}\\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{1}^+} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\infty}$$