

## Td Complexe

### Exercice 1 [Forme algébrique et calcul de $i^n$ ]

- 1 Déterminer les formes algébriques des nombres complexes donnés. Préciser, le cas échéant, s'il est réel ou imaginaire pur.

a  $z_1 = i(1 - 4i) + 3(2 - i)$

b  $z_2 = (3 - i)^2 + 6i$

c  $z_3 = \frac{3}{1 - i}$

d  $z_4 = \frac{1 + 2i}{2 - i}$

e  $z_5 = (2 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i)$

f  $z_6 = (2 + 5i)^2$

g  $z_7 = \frac{3 - 3i}{1 + i}$

- 2 Calculer  $i^{2025}$ ,  $i^{40}$ ,  $i^{27}$ ,  $i^{34}$

### Exercice 2 [Conjugué]

- 1 Déterminer le conjugué des nombres complexes suivants :

a  $z_1 = 3i$

b  $z_2 = -i(1 + 4i)$

c  $z_3 = (3 - 5i)^3$

d  $z_4 = \frac{2i}{i + 3} - \frac{3}{2 + i}$

- 2 Soit  $z_5 = \frac{2 - i}{1 + i}$  et  $z_6 = \frac{2 + i}{1 - i}$ .  
Montrer que  $\bar{z}_6 = z_5$ . Que peut-on en déduire sans calcul de  $z_5 + z_6$  et  $z_5 - z_6$  ?

### Exercice 3 [Module et argument]

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

1  $z_1 = -\sqrt{3} + i$

2  $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$

3  $z_3 = 1 - i$

4  $z_4 = 1 + i$

5  $z_5 = -\sqrt{3} + i$

6  $z_6 = \frac{2i - 2\sqrt{3}}{4i + 4}$

7  $z_7 = (\sqrt{3} + i)(1 - i)^2$

8  $z_8 = \frac{(-\sqrt{3} + i)^3}{(1 + i)^2}$

9  $z_9 = 2 \frac{(\sqrt{3} + i)^2}{(-1 - i)^2}$

10  $z_{10} = -2i(1 + i\sqrt{3})^6$

### Exercice 4 : [Forme trigonométrique]

Soit les nombres complexes  $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$  et  $z_2 = 1 - i$ .

- 1 Déterminer les formes trigonométriques de  $z_1$ ,  $z_2$  et  $Z = \frac{z_1}{z_2}$ .

- 2 Déterminer la forme algébrique de  $Z$ .

- 3 En déduire  $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ .

### Exercice 5 [Formes trigonométrique et exponentielle]

Dans chacun des cas suivants, déterminer la forme trigonométrique et la forme exponentielle.

1  $z_1 = 4$

2  $z_2 = -6$

3  $z_3 = -i$

4  $z_4 = -5 + 5i\sqrt{3}$

9  $z_7 = -2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

10  $z_9 = 4 \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$

5  $z_5 = -1 - i$

6  $z_6 = \sqrt{3} - i$

7  $z_{10} = -2e^{i\frac{\pi}{2}}$

8  $z_{11} = ie^{i\frac{\pi}{3}}$

### Exercice 6 [Forme trigonométrique]

On considère les nombres complexes :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}, \quad z_2 = 1 - i \quad \text{et} \quad z_3 = \frac{z_1}{z_2}.$$

- 1 Donner une écriture trigonométrique des nombres complexes  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$ .

- 2 Écrire sous forme algébrique  $z_3$ .

En déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$ .

### Exercice 7 [Classique !]

- 1 Écrire  $1 + i$  sous forme trigonométrique. En déduire l'expression de  $(1 + i)^6$  par la formule de Moivre.

2 Calculer  $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2026}$ .

**Exercice 8** [Racines carrées et Equations]

1 Déterminer les racines carrées de :

a  $z = 3 + 4i$

b  $z = 8 - 6i$

c  $z = -5 + 12i$

d  $z = 7 + 24i$

2 Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

a  $4z^2 - 12z + 153 = 0$

b  $z^2 - 4z + 5 = 0$

c  $z^2 + z + 1 = 0$

d  $iz^2 - iz - 3 - i = 0$

e  $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$

f  $z^2 - (2 + 4i)z - 2 + 4i = 0$

g  $(3 + i)z^2 - (7 - i)z + 10 = 0$

h  $z^2 - (1 + i\sqrt{3})z - 1 + i\sqrt{3} = 0$

**Exercice 9** [Racines  $n$ -ièmes]

1 Résoudre dans  $\mathbb{C}$  :  $z^6 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$

2 a Résoudre dans  $\mathbb{C}$  :  $z^3 = 1$ .

b Calculer  $(1 + i)^3$ .

c En déduire les racines cubiques de  $z = -2 + 2i$ .

3 Résoudre dans  $\mathbb{C}$  :  $z^3 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$

**Exercice 10** [Racines  $n$ -ièmes]

On donne  $z_0 = 1 - i\sqrt{3}$

1 Donner une écriture trigonométrique de  $z_0$ .

2 Montrer que  $z_0^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$ .

3 Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^4 = 1$ .

4 En déduire les solutions de  $(E)$  :  $z^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$  sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

**Exercice 11** [Linéarisation]

1 Linéariser les polynômes trigonométriques suivants :

a  $h(x) = \cos x \sin^2 x$

b  $k(x) = \cos 2x \sin 3x$

c  $m(x) = \sin^3 x$

2 a Linéariser  $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ .

b Déduisez-en une primitive sur  $\mathbb{R}$  de  $f$ .

**Exercice 12** [Lieux géométriques]

Dans chacun des cas, déterminer géométriquement l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  vérifiant la relation donnée.

1  $|z + 1 + 4i| = |z - 1 + i|$

2  $|z + 1 + 4i| = 4$

3  $|\bar{z} + 1 - 4i| = |z - 2i|$

4  $|3iz + 6| = 3|z - 1 + i|$

5  $\arg \frac{z - 2i}{z - 1 + i} = \frac{\pi}{2}[\pi]$ .

**Exercice 13** [Lieux géométriques]

On considère l'expression  $Z = \frac{z + 1}{z - 2i}$  où  $z \neq 2i$ . Déterminer par la méthode géométrique, l'ensemble des points  $M(z)$  tels que :

1  $Z$  soit réel.

2  $Z$  soit imaginaire pur.

3  $\arg(Z) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ .

**Exercice 14** [Deux méthodes pour un problème]

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  on note  $A$  et  $B$  les points d'affixes respectives  $2i$  et  $1 + i$ .

1 Soit  $z$  un nombre complexe différent de  $1 + i$ , écrit sous la forme  $z = x + iy$ , où  $x$  et  $y$  sont des réels. On pose

$$Z = \frac{z - 2i}{z - 1 - i}.$$

Montrer que :

$$\operatorname{Re}(Z) = \frac{x^2 + y^2 - x - 3y + 2}{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} \quad \text{et}$$

$$\operatorname{Im}(Z) = \frac{x - x - y + 2}{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}$$

avec  $(x; y) \neq (1; 1)$ .

- 2 Déterminer l'ensemble  $(E)$  des points  $M(z)$  tels que  $Z$  soit un réel et l'ensemble  $(F)$  des points  $M(z)$  tels que  $Z$  soit imaginaire pur.

- a En utilisant la forme algébrique de  $Z$ .  
b En utilisant les considérations sur les arguments.

### Exercice 15 [Complexe et géométrie]

Le plan  $(\mathcal{P})$  est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 1 cm. On note  $A, B$  et  $C$  les points de  $(\mathcal{P})$  d'affixes respectives  $z_A = 2 + 5i$ ,  $z_B = 5 - 4i$  et  $z_C = -1 - 4i$ .

- 1 Placer les points  $A, B$  et  $C$  dans  $(\mathcal{P})$ .
- 2 Calculer les distances  $AB, AC$  et  $BC$ , puis en déduire la nature du triangle  $ABC$ .
- 3 Soit  $D$  le point de  $(\mathcal{P})$  d'affixe  $z_D = 2 - 4i$ .
  - a Placer le point  $D$  dans  $(\mathcal{P})$ .
  - b Calculer  $\frac{z_A - z_D}{z_B - z_D}$ . En déduire la nature du triangle  $ADB$ .
- 4 Soit  $(\mathcal{C})$  le cercle circonscrit au triangle  $ADB$ . Déterminer l'affixe du centre  $J$  de  $(\mathcal{C})$  et calculer son rayon  $r$ .
- 5 Soit  $E$  le symétrique de  $D$  par rapport à  $J$ .
  - a Déterminer l'affixe de  $E$  et montrer que  $E$  appartient à  $(\mathcal{C})$ .
  - b Préciser la nature du quadrilatère  $AEBD$  en justifiant la réponse.

### Exercice 16

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives :

$$z_A = -3i, \quad z_B = -2 \quad \text{et} \quad z_C = 1 + 2i.$$

- 1 Déterminer le module et un argument du quotient  $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ .
- 2 En déduire la nature du triangle  $ABC$ .
- 3 Déterminer l'affixe  $z_D$  du point tel que le quadrilatère  $BADC$  soit un carré.
- 4 Montrer que les points  $A, B, C$  et  $D$  appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

### Exercice 17

On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation

$$(E) : z^3 + (-5 + 6i)z + 12 + 18i = 0.$$

- 1 a Vérifier que  $(E)$  admet une solution réelle  $z_0$  que l'on déterminera.  
b Montrer que  $2i$  est une solution de  $(E)$ .  
c Achever la résolution de l'équation  $(E)$ .
- 2 On considère dans le plan complexe muni d'un repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  les points  $A, B, M$  et  $M'$  d'affixes respectives  $2i, -3, z$  et  $z'$  tels que  $Z = \frac{z - 2i}{z + 3}$ .
  - a Montrer que  $OM' = \frac{MA}{MB}$ .
  - b Déterminer l'ensemble  $(\mathcal{G})$  des points  $M$  du plan tels que  $OM' = 1$ .

### Exercice 18

- 1 Calculer  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ . En déduire dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes les solutions de l'équation  $z^2 - i = 0$ .
- 2 On pose  $P(z) = z^3 + z^2 - iz - i$  où  $z$  est un nombre complexe.
  - a Démontrer que l'équation  $P(z) = 0$  admet une solution réelle (que l'on déterminera).
  - b Résoudre l'équation  $P(z) = 0$  dans l'ensemble des nombres complexes.
- 3 Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 2 cm. On considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ ,  $z_B = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$  et  $z_C = -1$ .
  - a Déterminer la forme exponentielle de  $z_A$  et celle de  $z_B$ .
  - b Placer avec précision les points  $A, B$  et  $C$  dans le plan complexe.
- 4 Soit  $D$  le symétrique du point  $A$  par rapport à l'axe réel.
  - a Donner l'affixe  $z_D$  du point  $D$  sous forme algébrique.
  - b Démontrer que :  $\frac{z_D - z_C}{z_A - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ . En déduire la nature du triangle  $ACD$ .

**Exercice 19**

- 1 On considère l'équation

$$(E) : z^3 - 13z^2 + 59z - 87 = 0, \quad \text{où } z \in \mathbb{C}.$$

- a Déterminer la solution réelle de  $(E)$ .  
 b Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E)$ .

- 2 On pose  $a = 3$ ,  $b = 5 - 2i$  et  $c = 5 + 2i$ .

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $a, b$  et  $c$ . Soit  $M$  le point d'affixe  $z$  distinct de  $A$  et de  $B$ .

- a Calculer  $\frac{b-a}{c-a}$ . En déduire la nature du triangle  $ABC$ .

- b On pose  $Z = \frac{z-3}{z-5+2i}$ .

Donner une interprétation géométrique de l'argument de  $Z$ .

En déduire l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $Z$  soit un réel non nul.

**Exercice 20**

- 1 Soit  $p(z) = z^3 + 3z^2 - 3z - 5 - 20i$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

- a Démontrer que  $2+i$  est une racine de  $p(z)$ .  
 b En déduire les solutions de l'équation  $p(z) = 0$  dans  $\mathbb{C}$ .

- 2 Dans le plan  $(\mathcal{P})$  rapporté au repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  d'unité 1cm, on considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $z_A = 2 + i$ ,  $z_B = -1 - 2i$  et  $z_C = -4 + i$ .

- a Placer les points  $A, B$  et  $C$  puis calculer les distances  $AB$  et  $BC$ .  
 b Démontrer que :

$$\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = (\vec{BA}, \vec{BC}) \pmod{2\pi}.$$

- c En déduire une mesure en radian de l'angle  $(\vec{BA}, \vec{BC})$ .  
 d Déduire de tout ce qui précède la nature du triangle  $ABC$ .

**Exercice 21**

Soit le complexe  $a = -1 - i$  et  $Z_n$  la suite définie par

$$\begin{cases} Z_0 = 0 \text{ et } Z_1 = i \\ Z_{n+1} = (1-a)Z_n + aZ_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

- 1 Déterminer  $Z_2$  et  $Z_3$  sous forme algébrique.

- 2 Soit  $(U_n)$  la suite définie par :

$$U_n = Z_{n+1} - Z_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- a Déterminer  $U_0$ .

- b Démontrer que  $(U_n)$  est une suite géométrique de raison  $-a$ .

- c Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$  et  $a$ .

- 3 Soit  $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$ . Exprimer  $S_n$  en fonction de  $Z_n$ . En déduire que  $Z_n = -1 + (1+i)^n$ .

**Exercice 22**

- 1 Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , les équations suivantes :

a  $z^2 - 2z + 5 = 0$ .

b  $z^2 - 2(1 + \sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$ .

- 2 On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  les points  $A, B, C$  et  $D$  d'affixes respectives  $z_A = 1 + 2i$ ,  $z_B = 1 + \sqrt{3} + i$ ,  $z_C = 1 + \sqrt{3} - i$ ,  $z_D = 1 - 2i$ .

- a Placer  $A, B, C$  et  $D$ .

- b Vérifier que  $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = i\sqrt{3}$ . En déduire la nature de  $ABD$ .

- c Montrer que les points  $A, B, C$  et  $D$  appartiennent à un même cercle  $(\mathcal{C})$  dont on précisera le centre et le rayon.

- 3 On considère

$$(\mathcal{E}) : z^2 - 2(1 + 2\cos\theta)z + 5 + 4\cos\theta = 0; \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

- a Résoudre  $(\mathcal{E})$  dans  $\mathbb{C}$ .

- b Montrer que les points images des solutions de  $(\mathcal{E})$  appartiennent à  $(\mathcal{C})$ .

**Exercice 23**

Soit  $p(z) = z^3 - (5+i)z^2 + 6(1+i)z - 8(1+i)$ .

- 1 Montrer que l'équation  $p(z) = 0$ ,  $z \in \mathbb{C}$  admet une solution réelle que l'on déterminera.

- 2 Vérifier que  $2i$  est une solution de  $p(z) = 0$ .

- 3 Factoriser  $p(z)$  et résoudre dans  $\mathbb{C}$ ,  $p(z) = 0$ .
- 4 On distinguera les solutions  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$  de l'équation  $p(z) = 0$  par :  $|z_1| < |z_2| < |z_3|$ .
- a Placer dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé les points  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  d'affixes respectives  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$ .
- b Montrer que le triangle  $M_1M_2M_3$  est rectangle isocèle.

### Exercice 24

Dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, on considère l'équation

$$(\mathcal{E}) : z^3 + (1 - 8i)z^2 - (23 + 4i)z - 3 + 24i = 0.$$

- 1 a Montrer que  $(\mathcal{E})$  admet une solution imaginaire pure et la déterminer.
- b Montrer que  $1 + 2i$  et  $-2 + 3i$  sont solutions de  $(\mathcal{E})$ .
- c Donner l'ensemble des solutions de  $(\mathcal{E})$ .
- 2 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $z_A = 1 + 2i$ ,  $z_B = 3i$  et  $z_C = -2 + 3i$ .

Soit  $G$  le barycentre des points  $A$ ,  $B$ , et  $C$  affectés des coefficients respectifs 2,  $-2$  et 1.

Montrer que les vecteurs  $\overrightarrow{GA}$ ,  $\overrightarrow{GB}$  et  $\overrightarrow{GC}$  ont pour affixes respectives  $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ,  $2i$  et  $2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$  et que ces affixes sont, dans cet ordre, en progression géométrique. Préciser la raison.

### Exercice 25

Soit la suite  $z_n$  définie par :

$$\begin{cases} z_0 = i \\ z_{n+1} = (1 + i)z_n + 2i \end{cases}$$

- 1 Calculer  $z_1$  et  $z_2$ .
- 2 On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = z_n + 2$ .
- a Montrer que :  $u_n = (2 + i)(1 + i)^n$ .
- b Exprimer  $z_n$  en fonction de  $n$ .
- 3 Soit  $M_{n+1}$ ,  $M_n$ ,  $A$  et  $B$  les points d'affixes respectives  $z_{n+1}$ ,  $z_n$ ,  $i$  et  $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ .

Démontrer que :  $\frac{AM_{n+1}}{BM_n} = \sqrt{2}$  et que :  $(\overrightarrow{BM_n}, \overrightarrow{AM_{n+1}}) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$ .

### Exercice 26

**PARTIE A :** Pour tout complexe  $z$  on note :  $f(z) = z^5 + 2z^4 + 2z^3 - z^2 - 2z - 2$ .

- 1 Déterminer le polynôme  $Q$  tel que, quel que soit  $z \in \mathbb{C}$ ,  $f(z) = (z^3 - 1)Q(z)$ .
- 2 Résoudre alors dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(\mathcal{E}) : f(z) = z$ .
- 3 Écrire les solutions de  $(\mathcal{E})$  sous forme trigonométrique puis les représenter dans le plan complexe  $\mathcal{P}$  muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

**PARTIE B :** Considérons les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  du plan  $\mathcal{P}$  tels que :  $A\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ,  $B(-1 + i)$ ,  $C(-1 - i)$  et  $D\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

- 1 Quelle est la nature du quadrilatère  $ABCD$ ?
- 2 Soit  $r$  la rotation de centre le point  $\Omega$  d'affixe 1 qui transforme  $A$  en  $D$ . Déterminer l'écriture complexe de  $r$ .
- 3 Quelle est la nature du triangle  $\Omega AD$ ?
- 4 Déterminer l'affixe du centre du cercle circonscrit du triangle  $\Omega AD$ .
- 5 On pose  $u_n = (z_A)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  où  $z_A$  est l'affixe du point  $A$ . Déterminer la valeur minimale de  $n$  pour laquelle  $u_n$  est un réel.
- 6 Donner la forme algébrique de  $u_{2019}$ .

### Exercice 27

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . Soit le nombre complexe  $a$  défini par :  $a = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ .

- 1 Montrer que  $a^2 = -2\sqrt{3} - 2i$ , puis en déduire le module de  $a$ .
- 2 Écrire  $a^2$  sous forme trigonométrique puis vérifier qu'une des mesures de l'argument de  $a$  est  $\frac{19\pi}{12}$ .
- 3 En déduire les valeurs exactes de  $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$  puis de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .
- 4 Représenter sur le même graphique les points images de  $a$ ,  $-a$  et  $a^2$ .

**Exercice 28**

Un jeune agriculteur décide de pratiquer de la culture sous serre dans son champ. A cet effet, il choisit dans son plan de représentation un repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . Il place dans ce repère deux points  $A$  et  $B$  dont les affixes respectives  $z_A$  et  $z_B$  sont des racines du polynôme  $P$  défini par :

$$P(z) = 2z^3 - 3(1+i)z^2 + 4iz + 1 - i, \quad \text{où } z \in \mathbb{C}.$$

Son objectif est de pratiquer sa culture sous serre dans l'ensemble  $(\mathcal{E})$  des points  $M$  de son plan de représentation tels que  $\|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MO}\| \leq 2$ , qui contient un point du segment  $[AB]$ .

- 1 Vérifier que 1 et  $i$  sont des racines de  $P$ .
- 2 Déterminer le polynôme  $g$  tel que :  $P(z) = (z-1)(z-i)g(z)$ .
- 3 Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$ .
- 4 On pose  $z_A = 1$ ,  $z_B = i$  et  $z_C = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ .
  - a Placer les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $z_A$ ,  $z_B$  et  $z_C$  dans le repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  en choisissant comme unité graphique 4 cm.
  - b Démontrer que  $C$  est le milieu de  $[AB]$ , puis que  $C$  appartient à l'ensemble  $(\mathcal{E})$ .
  - c Déterminer l'axe  $z_G$  du point  $G$  barycentre du système  $\{(A, 1); (B, 1); (O, 2)\}$ , puis placer  $G$ .
- 5 Déterminer puis construire l'ensemble  $\mathcal{E}$  des points  $M$  de son plan de représentation tels que :  $\|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MO}\| \leq 2$ .
- 6 Le jeune agriculteur atteindra-t-il son objectif?

**Exercice 29** (POLYNÔMES COMPLEXES)

Soit  $P$  le polynôme défini par :  $P(z) = z^3 - (11 + 2i)z^2 + 2(17 + 7i)z - 42$ .

- 1 Démontrer qu'il existe un nombre réel  $\alpha$  solution de l'équation :  $P(z) = 0$ .
- 2 Déterminer le polynôme  $Q$  tel que :  $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$ .
- 3 Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $P(z) = 0$ .

**Exercice 30** (POLYNÔMES COMPLEXES)

On pose  $P(z) = z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26$ ,  $\alpha$  désigne un nombre complexe quelconque.

- 1 Montrer que  $P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$ . En déduire que si  $P(\alpha) = 0$  alors  $P(\bar{\alpha}) = 0$ .
- 2 Calculer  $P(1+i)$ . Indiquer deux solutions complexes de l'équation  $P(z) = 0$ .
- 3 Calculer  $Q(z) = (z - (1+i))(z - (1-i))$ .
- 4 Vérifier que le polynôme  $P(z)$  est divisible par  $Q(z)$ .
- 5 Résoudre dans  $\mathbb{C}$ ,  $P(z) = 0$ .

**Exercice 31** (POLYNÔMES COMPLEXES)

On pose  $P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$ .

- 1 Montrer que si le complexe  $\alpha$  est solution de l'équation  $P(z) = 0$  alors  $\bar{\alpha}$  et  $\frac{1}{\alpha}$  sont aussi solutions de  $P(z) = 0$ .
- 2 Calculer  $P(1+i)$ . Indiquer trois solutions complexes de l'équation  $P(z) = 0$  puis en déduire la résolution de l'équation  $P(z) = 0$ .
- 3 Écrire  $P(z)$  sous forme d'un produit de deux polynômes du second degré, à coefficients réels.

**Exercice 32** Soit l'équation  $(\mathcal{E}) : z^3 + (4 - 5i)z^2 + (8 - 20i)z - 40i = 0$ .

- 1 Démontrer que  $(\mathcal{E})$  admet une solution imaginaire pure.
- 2 Résoudre  $(\mathcal{E})$  dans  $\mathbb{C}$ .

Soit l'équation  $(\mathcal{E}') : z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0$ .

- 1 Démontrer que 0 n'est pas solution de  $(\mathcal{E}')$ . En déduire que si  $\alpha$  est une solution de  $(\mathcal{E}')$  alors  $\frac{1}{\alpha}$  est aussi une solution de  $(\mathcal{E}')$ .
- 2 Démontrer que  $(\mathcal{E}')$  est équivalente à  $(\mathcal{E}'') : \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 5\left(z + \frac{1}{z}\right) + 4 = 0$ .
- 3 En posant  $Z = z + \frac{1}{z}$ , résoudre  $(\mathcal{E}'')$ .
- 4 En déduire la résolution de  $(\mathcal{E}')$  dans  $\mathbb{C}$ .