

## Correction Composition Du 2<sup>nd</sup> Semestre

### PROBLEME

(10pt)

#### PARTIE A

Soit  $h$  la fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  définie par  $h(x) = 1 + e^{2x-4}$  et  $K = \left[1; \frac{5}{4}\right]$ .

- 1 a Calcul de  $h'(x)$  :  $h(x) = 1 + e^{2x-4} \Rightarrow h'(x) = (1 + e^{2x-4})' = 2e^{2x-4}$   
Comme  $e^{2x-4} > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :  $h'(x) > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  Donc, la fonction  $h$  est  
\*\*strictement croissante\*\* sur  $\mathbb{R}$ . (0,25pt + 0,25pt)

- b Montrons que  $h(K) \subset K$  :

Comme  $h$  est croissante et  $K = \left[1; \frac{5}{4}\right]$ , on a :

$$h(K) = \left[h(1); h\left(\frac{5}{4}\right)\right]$$

Calculons :

$$h(1) = 1 + e^{2(1)-4} = 1 + e^{-2} \approx 1 + 0,1353 = 1,1353$$

$$h\left(\frac{5}{4}\right) = 1 + e^{2 \cdot \frac{5}{4} - 4} = 1 + e^{-1,5} \approx 1 + 0,2231 = 1,2231$$

Donc :

$$h(K) = [1,1353; 1,2231] \subset \left[1; \frac{5}{4}\right]$$

Ainsi,  $h(K) \subset K$ .

(0,5pt)

- 2 a Résoudre  $h(x) = x$  revient à résoudre  $h(x) - x = 0$

On définit la fonction  $\phi(x) = h(x) - x = 1 + e^{2x-4} - x$ .

**Existence**

$\phi$  est continue sur  $K = \left[1; \frac{5}{4}\right]$ .

Calculons :

$$\phi(1) = 1 + e^{-2} - 1 = e^{-2} > 0 \quad ; \quad \phi\left(\frac{5}{4}\right) = 1 + e^{-1,5} - \frac{5}{4} \approx 1,2231 - 1,25 < 0$$

Donc,  $\phi(1) > 0$  et  $\phi\left(\frac{5}{4}\right) < 0$ , par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un  $\lambda \in \left]1; \frac{5}{4}\right[$  tel que  $\phi(\lambda) = 0$ , soit  $h(\lambda) = \lambda$ .

**Unicité**

$$\phi'(x) = h'(x) - 1 = 2e^{2x-4} - 1$$

Supposons que  $\phi'(x) < 0$

$$\phi'(x) < 0 \iff 2e^{2x-4} - 1 < 0$$

$$\iff e^{2x-4} < \frac{1}{2}$$

$$\iff 2x - 4 < \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\iff 2x < 4 - \ln(2)$$

$$\iff x < 2 - \frac{\ln(2)}{2}$$

$$\iff x < 1,7$$

Donc si  $x \in ]-\infty; 1,7[$  alors  $\phi'(x) < 0$

Comme  $K = \left[1; \frac{5}{4}\right] \subset ]-\infty; 1,7[$  donc  $\forall x \in K, \phi'(x) < 0$

Donc  $\phi'(x) < 0$  sur  $K$ , donc  $\phi$  est strictement décroissante sur  $K$ .

Or, une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle admet **au plus une** racine. Comme on a déjà montré l'existence d'un  $\lambda$ , on en déduit que :

L'équation  $h(x) = x$  admet une **unique solution**  $\lambda \in K$ .

(0,5pt)

**b** On a :  $h'(x) = 2e^{2x-4}$

Encadrons  $x \in K = \left[1; \frac{5}{4}\right]$  :

$$x \in K \implies 1 \leq x \leq \frac{5}{4}$$

$$\implies 2 \leq 2x \leq \frac{5}{2}$$

$$\implies -2 \leq 2x - 4 \leq -\frac{3}{2}$$

$$\implies e^{-2} \leq e^{2x-4} \leq e^{-1.5}$$

$$\implies 2e^{-2} \leq 2e^{2x-4} \leq 2e^{-1.5}$$

$$\implies 0 \leq 2e^{-2} \leq 2e^{2x-4} \leq 2e^{-1.5} \leq \frac{1}{2}$$

$$\implies 0 \leq 2e^{2x-4} \leq \frac{1}{2}$$

Donc :  $\forall x \in K, 0 < h'(x) < \frac{1}{2}$

(0,25pt)

**c** Soit  $x \in K$ , et  $\lambda \in K$  l'unique solution de  $h(\lambda) = \lambda$ .

D'après l'inégalité des accroissements finis (ou le théorème de la moyenne) appliquée à  $h$  sur  $K$ , il existe  $c \in [x; \lambda] \subset K$  tel que :

$$h(x) - h(\lambda) = h(x) - \lambda = h'(c)(x - \lambda)$$

Donc :

$$|h(x) - \lambda| = |h'(c)| \times |x - \lambda| \leq \frac{1}{2}|x - \lambda|$$

(0,25pt)

**3** **a** Montrons par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, W_n \in K$ .

**Initialisation :**

On a  $W_0 = 1 \in K = \left[1; \frac{5}{4}\right]$ . L'assertion est vraie au rang  $n = 0$ .

**Hérédité :**

Supposons que pour un entier  $n \in \mathbb{N}$ , on ait  $W_n \in K$ .

Alors par définition :

$$W_{n+1} = h(W_n)$$

Or à la question 1.b), on a démontré que  $h(K) \subset K$ .

Donc comme  $W_n \in K$ , on a  $W_{n+1} \in h(K) \subset K$ .

**Conclusion :**

Par le principe de récurrence, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n \in K$$

(0,5pt)

**b** On veut montrer que :

$$|W_{n+1} - \lambda| \leq \frac{1}{2}|W_n - \lambda| \quad \text{et} \quad |W_n - \lambda| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

**1) Inégalité de récurrence :**

On sait que  $W_{n+1} = h(W_n)$  et que  $\lambda$  est l'unique solution de  $h(\lambda) = \lambda$ .

D'après la question 2.c), on a pour tout  $x \in K$  :

$$|h(x) - \lambda| \leq \frac{1}{2}|x - \lambda|$$

Or, à la question 3.a), on a montré que  $\forall n, W_n \in K$ . Donc :

$$|W_{n+1} - \lambda| = |h(W_n) - \lambda| \leq \frac{1}{2}|W_n - \lambda|$$

**2) Majoration par  $\left(\frac{1}{2}\right)^n$  par récurrence :**

On a  $W_{n+1} = h(W_n)$  et  $h(\lambda) = \lambda$ .

D'après la question 2.c), pour tout  $x \in K$ , on a :

$$|h(x) - \lambda| \leq \frac{1}{2}|x - \lambda|$$

Or, à la question 3.a), on a montré que  $W_n \in K$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , donc on peut appliquer cette inégalité à chaque itération :

$$|W_1 - \lambda| \leq \frac{1}{2}|W_0 - \lambda|$$

$$|W_2 - \lambda| \leq \frac{1}{2}|W_1 - \lambda|$$

$$|W_3 - \lambda| \leq \frac{1}{2}|W_2 - \lambda|$$

$\vdots$

$$|W_k - \lambda| \leq \frac{1}{2}|W_{k-1} - \lambda|$$

En multipliant ces inégalités \*\*membre à membre\*\*, on obtient :

$$|W_k - \lambda| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k |W_0 - \lambda|$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |W_k - \lambda| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

(0,5pt + 0,25pt)

**c** D'après la question précédente, on a :

$$|W_n - \lambda| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Or  $\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , donc :

$$|W_n - \lambda| \rightarrow 0 \quad \text{ce qui équivaut à} \quad W_n \rightarrow \lambda \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty$$

Ainsi, la suite  $(W_n)$  \*\*converge vers le réel  $\lambda$ \*\*, qui est l'unique solution de l'équation  $h(x) = x$  dans l'intervalle  $K$ . (0,25pt)

## PARTIE B

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \ln \left( \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) & \text{si } x \in [0; +\infty[ \\ x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} & \text{si } x \in ] - \infty; 0[ \end{cases}$$

**1** Déterminons le domaine de définition  $D_f$  de  $f$ .

**Sur  $[0; +\infty[$  :** on considère l'expression

$$f(x) = \ln \left( \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right)$$

Cette expression est définie si :

- $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$  (toujours vrai car  $x \geq 0$ )
- $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| > 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

Donc sur  $[0; +\infty[$ , la fonction est définie sauf en  $x = 1$ .

**Sur  $] - \infty; 0[$  :** on considère

$$f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

Cette expression est définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , car le dénominateur  $e^x + 1 > 0$  pour tout  $x$ .

Donc la fonction  $f$  est définie sur :

$$D_f = ] - \infty; 1[ \cup ] 1; +\infty[$$

(0,5pt)

## 2 Étudions la continuité de $f$ en 0.

La fonction  $f$  est définie par morceaux :

$$f(x) = \begin{cases} \ln \left( \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) & \text{si } x \in [0; +\infty[ \\ x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} & \text{si } x \in ] -\infty; 0[ \end{cases}$$

A-t-on  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$  ?

**Limite à gauche (vers  $0^-$ ) :**

Pour  $x < 0$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \\ &= 0 - \frac{1 - 1}{1 + 1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

**Limite à droite (vers  $0^+$ ) :**

Pour  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \ln \left( \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) \\ &= \ln \left( \left| \frac{-1}{1} \right| \right) \\ &= \ln(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

**Conclusion :**

La limite de  $f(x)$  en 0 existe et vaut 0.

De plus,  $f(0) = \ln \left( \left| \frac{0-1}{0+1} \right| \right) = \ln(1) = 0$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow f \text{ est continue en } 0$$

## 3 a Soit $x \in ]0; 1[$ .

On a :  $x < 1$ , donc  $x - 1 < 0$ , donc :  $|x - 1| = -(x - 1) = 1 - x$

De plus, dans ce cas  $x > 0$ , donc  $f(x) = \ln \left( \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right)$ .

On remplace  $|x - 1|$  par  $1 - x$ , et on obtient :  $f(x) = \ln \left( \frac{1-x}{x+1} \right)$

Or, on sait que :  $\ln \left( \frac{1-x}{1+x} \right) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$

$$\text{Donc : } f(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x) \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x}$$

(0,5pt)

**b** Étudions la dérivabilité de  $f$  en 0.

On cherche la limite du taux d'accroissement :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$  avec  $f(0) = 0$  (voir question 2)

**À gauche ( $x \rightarrow 0^-$ ) :**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{e^x + 1} \\ &= 1 - 1 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2}$$

**À droite ( $x \rightarrow 0^+$ ) :**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x} \\ &= -1 - 1 \\ &= -2\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -2$$

**Conclusion :**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2}$$

Donc la fonction  $f$  n'est pas dérivable en 0.

**(0,5pt)**

**c** Les tangentes en 0:

**À gauche de 0 :**

La pente de la demi-tangente est  $\frac{1}{2}$ , donc l'équation de la tangente gauche est :

$$y = \frac{1}{2}x$$

**À droite de 0 :**

La pente de la demi-tangente est  $-2$ , donc l'équation de la tangente droite est :

$$y = -2x$$

$$y = \frac{1}{2}x \text{ et } y = -2x \quad \textbf{(0,5pt)}$$

- 4 Montrons que  $\forall x \in ]-\infty; 0[, f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$

**Démonstration :**

$$\begin{aligned} x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1} &= \frac{(x + 1)(e^x + 1) - 2e^x}{e^x + 1} \\ &= \frac{xe^x + x + e^x + 1 - 2e^x}{e^x + 1} \\ &= \frac{xe^x + x - e^x + 1}{e^x + 1} \\ &= \frac{x(e^x + 1) - e^x + 1}{e^x + 1} \\ &= x + \frac{-e^x + 1}{e^x + 1} \\ &= x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

Partons du membre de droite :

(0,25pt)

- 5 Calculons les limites de  $f$  aux bornes des intervalles de son domaine de définition.

(0,5pt)

**À gauche de 1 :**  $x \rightarrow 1^-$

Sur  $[0; 1[$ , on a :  $f(x) = \ln \left( \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) = \ln \left( \frac{1-x}{x+1} \right)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \left( \frac{1-x}{x+1} \right) \\ &= \ln(0^+) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

**À droite de 1 :**  $x \rightarrow 1^+$

Sur  $]1; +\infty[$ , même expression :  $f(x) = \ln \left( \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \ln \left( \frac{x-1}{x+1} \right) \\ &= \ln(0^+) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

**À gauche de 0 :**  $x \rightarrow -\infty$

Sur  $] -\infty; 0[$ , on a  $f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \\ &= -\infty - \frac{-1}{1} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

À droite de 0 :  $x \rightarrow +\infty$

Sur  $]1; +\infty[$ ,  $f(x) = \ln \left( \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right)$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) \\ &= \ln(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

- 6 En déduire les équations des asymptotes à la courbe  $\mathcal{C}_f$  de  $f$ .

(0,25pt)

**Asymptote verticale :**

D'après la question précédente, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

Donc la droite  $x = 1$  est une **asymptote verticale** à la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

**Asymptote horizontale :**

On a également :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Donc la droite  $y = 0$  est une **asymptote horizontale** à droite de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

Il y a une éventuelle branche parabolique Comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{e^x - 1}{(e^x + 1)x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1$$

$y = x + 1$  est AO en  $-\infty$

Asymptotes de  $\mathcal{C}_f$  :  $x = 1$  et  $y = 0$  et  $y = x + 1$  est AO en  $-\infty$

- 7 Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ .

(0,5pt)

**Sur**  $]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$  :

Pour  $x > 0$ , on a :

$$f(x) = \ln \left( \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) = \ln \left( \frac{x-1}{x+1} \right) \quad \text{car } \frac{x-1}{x+1} > 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \implies f'(x) = \frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

**Sur**  $] -\infty; 0[$  :



Pour  $x < 0$ , on a :

$$f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \text{ ou encore } f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2e^x(e^x + 1) - (e^x)(2e^x)}{(e^x + 1)^2} = 1 - \frac{2e^x(e^x + 1 - e^x)}{(e^x + 1)^2} = 1 - \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

Donc :

$$f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{(x+1)(x-1)} & \text{si } x \in ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[ \\ 1 - \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} & \text{si } x \in ]-\infty; 0[ \end{cases}$$

8 Étudier les variations de  $f$ .

(0,5pt)

On rappelle que le domaine de définition de  $f$  est :

$$D_f = ]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$$

**Sur**  $]-\infty; 0[$  :

On a montré précédemment :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{(e^x + 1)^2 - 2e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 2e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2} > 0 \end{aligned}$$

$f'(x) > 0$  sur  $]-\infty; 0[ \Rightarrow f$  est strictement croissante sur  $]-\infty; 0[$

**Sur**  $]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$  :

On a :

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

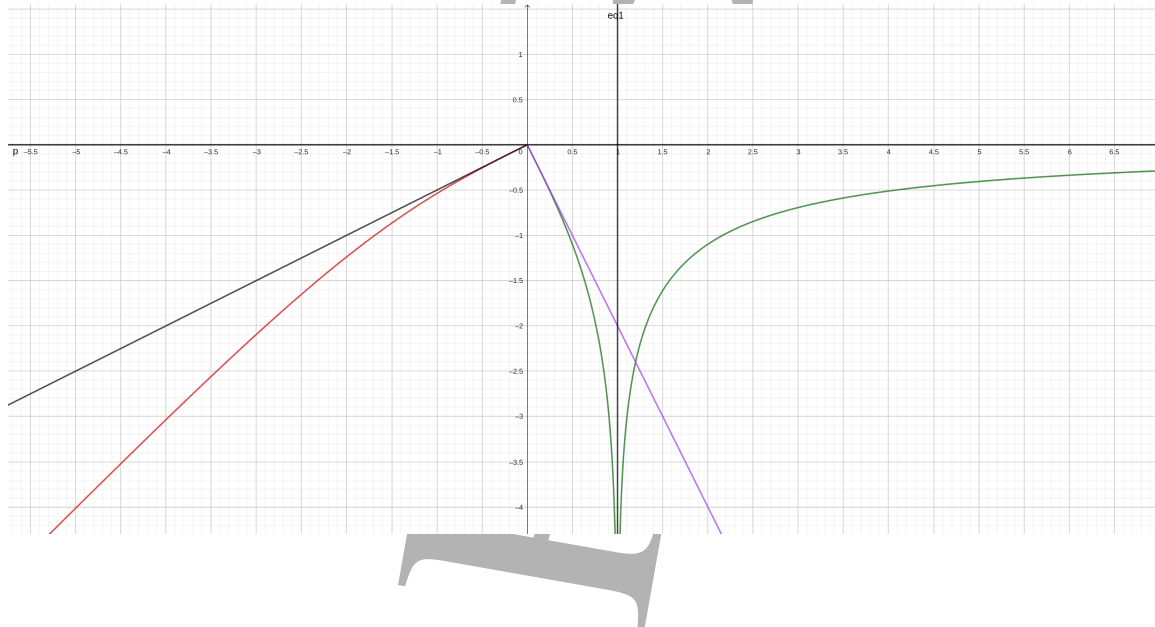
Le signe de  $f'(x)$  dépend du signe de  $(x+1)(x-1)$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$x + 1$		$0$	$0$	$+$	$+$
$x - 1$				$-$	$0$
$(x + 1)(x - 1)$				$-$	$0$

- Sur  $]0; 1[$ , on a  $(x+1)(x-1) < 0$  donc  $f'(x) < 0$  :  $f$  est décroissante sur  $]0; 1[$

- Sur  $]1; +\infty[$ ,  $(x+1)(x-1) > 0$  donc  $f'(x) > 0$  :  $f$  est croissante sur  $]1; +\infty[$

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'$	$+$	$0$	$-$	$+$
$f$	$-\infty$	$0$	$-\infty$	$0$



[Clique ici pour voir la figure sur géogébra](#)

## PARTIE C

Soit  $g$  la restriction de la fonction  $f$  à l'intervalle  $I = ]1; +\infty[$ .

- 1 Montrons que  $g$  réalise une bijection de  $I$  vers un intervalle  $J$ .

On a vu que sur  $]1; +\infty[$ , la fonction  $f$  est définie et strictement croissante.

Or une fonction continue et strictement monotone est bijective de son domaine d'étude sur son image.

Donc,  $g : I \rightarrow J$  est une bijection.

$$J = ]-\infty; 0[$$

(0,5pt)

- 2 Soit  $y \in J = ]-\infty; 0[$ . On cherche l'expression de  $g^{-1}(y)$ .

Par définition :

$$y = g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \quad \text{avec } x \in ]1; +\infty[$$

Posons  $y = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ . Exponentions :

$$e^y = \frac{x-1}{x+1}$$

On résout cette équation pour  $x$  :

$$\begin{aligned} e^y(x+1) &= x-1 \Rightarrow e^y x + e^y = x-1 \\ e^y x - x &= -1 - e^y \Rightarrow x(e^y - 1) = -1 - e^y \\ x &= \frac{-1 - e^y}{e^y - 1} = \frac{-(1 + e^y)}{e^y - 1} = 1 - \frac{2e^y}{e^y - 1} \end{aligned}$$

Donc :

$$g^{-1}(y) = 1 - \frac{2e^y}{e^y - 1} \text{ soit } g^{-1}(x) = 1 - \frac{2e^x}{e^x - 1}$$

(0,25pt)

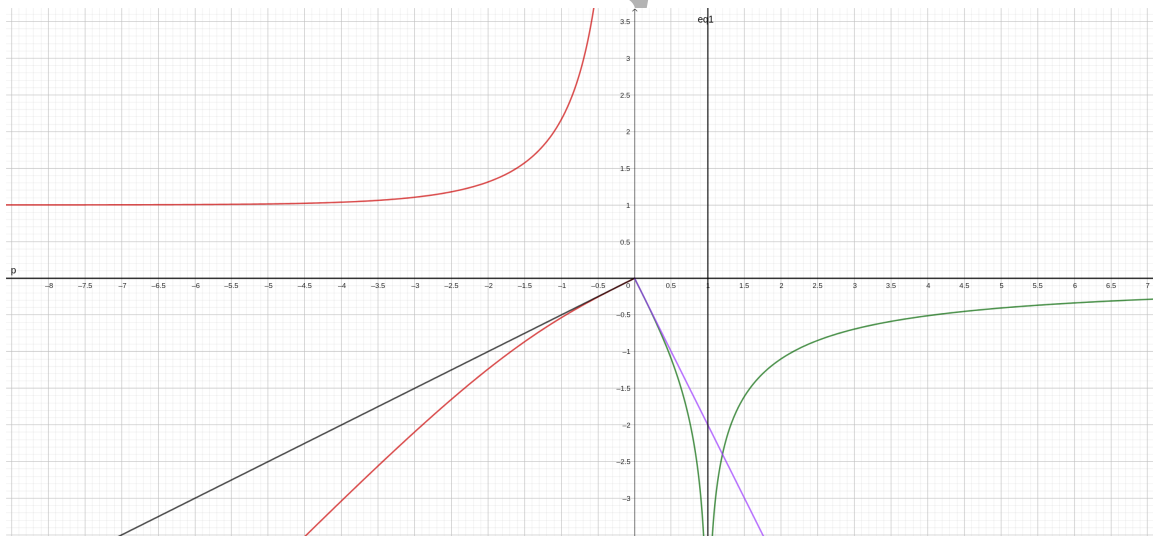
- 3 Pour tracer la courbe  $C_{g^{-1}}$ , on peut exploiter la symétrie par rapport à la droite  $y = x$ , puisque  $g^{-1}$  est la bijection réciproque de  $g$ .

On pourra donc obtenir  $C_{g^{-1}}$  en prenant les points symétriques de ceux de  $C_g$  par rapport à la droite  $y = x$ .

Elle est définie sur  $J = ]-\infty; 0[$  et a pour équation :

$$C_{g^{-1}} : y = g^{-1}(x) = 1 - \frac{2e^x}{e^x - 1}$$

(0,5pt)



[Clique ici pour voir la figure sur géogébra](#)

## Exercice 2

06 points

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 1 cm, on considère les points  $A_0, A_1, A_2$  d'affixe respective  $z_0 = 5 - 4i, z_1 = -1 - 4i, z_2 = -4 - i$ .

Soit  $f$  la fonction qui, à tout point  $M(z)$ , associe le point  $M'(z')$ , tel que :

$$z' = \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2}$$

1 a Trouvons l'affixe  $b$  du point  $B$  invariant par  $f$ .

(0,5pt)

Soit  $b \in \mathbb{C}$  tel que  $f(b) = b$ .

On résout donc :

$$\begin{aligned} b = \frac{1-i}{2}b + \frac{-3+i}{2} &\implies b - \frac{1-i}{2}b = \frac{-3+i}{2} \\ \implies b \left(1 - \frac{1-i}{2}\right) &= \frac{-3+i}{2} \\ \implies b \left(\frac{2 - (1-i)}{2}\right) &= \frac{-3+i}{2} \\ \implies \frac{1+i}{2}b &= \frac{-3+i}{2} \\ \implies b &= \frac{-3+i}{1+i} \\ \implies b &= \frac{(-3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\ \implies b &= \frac{-3(1-i) + i(1-i)}{1^2 + 1^2} \\ \implies b &= \frac{-3 + 3i + i - i^2}{2} \\ \implies b &= \frac{-3 + 4i + 1}{2} \\ \implies b &= \frac{-2 + 4i}{2} \\ \implies b &= -1 + 2i \end{aligned}$$

$$b = -1 + 2i$$

b Établir la relation  $b - z' = i(z - z')$

(0,5pt)

$$\text{On a: } z' = \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2}, \quad \text{et } b = -1 + 2i$$

Calculons  $b - z'$  :

$$\begin{aligned} b - z' &= (-1 + 2i) - \left[ \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2} \right] \\ &= -1 + 2i - \frac{1-i}{2}z - \frac{-3+i}{2} \\ &= -1 + 2i + \frac{3-i}{2} - \frac{1-i}{2}z \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3i}{2} - \frac{1-i}{2}z \\ &= \frac{1+3i}{2} - \frac{1-i}{2}z \end{aligned}$$

Calculons maintenant  $i(z - z')$  :

$$\begin{aligned}
i(z - z') &= i \left[ z - \left( \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2} \right) \right] \\
&= i \left[ z - \frac{1-i}{2}z - \frac{-3+i}{2} \right] \\
&= i \left[ \left( 1 - \frac{1-i}{2} \right) z + \frac{3-i}{2} \right] \\
&= i \left[ \frac{1+i}{2}z + \frac{3-i}{2} \right] \\
&= i \cdot \frac{1+i}{2}z + i \cdot \frac{3-i}{2} \\
&= \frac{i(1+i)}{2}z + \frac{i(3-i)}{2} \\
&= \frac{-1+i}{2}z + \frac{1+3i}{2} \\
&= \frac{1+3i}{2} - \frac{1-i}{2}z
\end{aligned}$$

Donc :  $b - z' = i(z - z')$

**Autre raisonnement concis et astucieux**

$$\begin{aligned}
b - z' &= (-1 + 2i) - \left[ \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2} \right] \\
&= i \left[ i + 2 - \frac{-i-1}{2}z - \frac{3i+1}{2} \right] \\
&= i \left[ \left( i + 2 - \frac{3i+1}{2} \right) - \frac{-i-1}{2}z \right] \\
&= i \left[ \frac{2i+4-3i-1}{2} + \frac{1+i}{2}z \right] \\
&= i \left[ \frac{-i+3}{2} + \frac{1+i}{2}z \right] \\
&= i \left( \frac{1+i}{2}z + \frac{3-i}{2} \right) \\
\text{or } z - z' &= z - \left[ \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2} \right] = z + \frac{-1+i}{2}z + \frac{3-i}{2} = \frac{1+i}{2}z + \frac{3-i}{2} \\
&= i(z - z')
\end{aligned}$$

**Interprétation géométrique :**

$$b - z' = i(z - z') \implies \overrightarrow{BM'} = i \cdot \overrightarrow{MM'}$$

Multiplier un vecteur complexe par  $i$ , c'est effectuer une rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  dans le sens direct.

Donc le triangle  $BMM'$  est **rectangle en  $M'$**  (et orienté dans le sens direct). **(0,5pt)**

Le triangle  $BMM'$  est rectangle en  $M'$

**2** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le point  $A_{n+1}$  est défini par la relation  $A_{n+1} = f(A_n)$  et on pose  $u_n = A_n A_{n+1}$ .

**a** Calculer les affixes des points  $A_3, A_4, A_5$  et  $A_6$ .

**(0,25pt + 0,25pt + 0,25pt + 0,25pt)**

$$\text{On a : } f(z) = \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2} \text{ donc } f(A_n) = \frac{1-i}{2}A_n + \frac{-3+i}{2}$$

$$z_{n+1} = \frac{1-i}{2}z_n + \frac{-3+i}{2}$$

$$\text{D'où } A_{n+1} = \frac{1-i}{2}A_n + \frac{-3+i}{2}$$

On connaît :  $z_0 = 5 - 4i$ ,  $z_1 = -1 - 4i$ ,  $z_2 = -4 - i$

Calculs successifs :

$$\begin{aligned} z_3 = f(z_2) &= \frac{1-i}{2}(-4-i) + \frac{-3+i}{2} \\ &= \frac{(1-i)(-4-i)}{2} + \frac{-3+i}{2} \\ &= \frac{-4 + 4i - i + i^2}{2} + \frac{-3+i}{2} \\ &= \frac{-5 + 3i}{2} + \frac{-3+i}{2} \\ &= \frac{-8 + 4i}{2} \\ &= -4 + 2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_4 = f(z_3) &= \frac{1-i}{2}(-4+2i) + \frac{-3+i}{2} \\ &= \frac{(1-i)(-4+2i)}{2} + \frac{-3+i}{2} \\ &= \frac{-4 + 4i + 2i - 2i^2}{2} + \frac{-3+i}{2} \\ &= \frac{-4 + 6i + 2}{2} + \frac{-3+i}{2} \\ &= \frac{-2 + 6i}{2} + \frac{-3+i}{2} \\ &= \frac{-5 + 7i}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_5 = f(z_4) &= \frac{1-i}{2} \left( \frac{-5+7i}{2} \right) + \frac{-3+i}{2} \\ &= \frac{(1-i)(-5+7i)}{4} + \frac{-3+i}{2} \\ &= \frac{-5 + 7i + 5i - 7i^2}{4} + \frac{-3+i}{2} \\ &= \frac{-5 + 12i + 7}{4} + \frac{-3+i}{2} \\ &= \frac{2 + 12i}{4} + \frac{-6 + 2i}{4} \\ &= \frac{-4 + 14i}{4} \\ &= \frac{-2 + 7i}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z_6 &= f(z_5) = \frac{1-i}{2} \left( \frac{-2+7i}{2} \right) + \frac{-3+i}{2} \\
 &= \frac{(1-i)(-2+7i)}{4} + \frac{-3+i}{2} \\
 &= \frac{-2+7i+2i-7i^2}{4} + \frac{-3+i}{2} \\
 &= \frac{-2+9i+7}{4} + \frac{-3+i}{2} \quad (\text{car } i^2 = -1) \\
 &= \frac{5+9i}{4} + \frac{-6+2i}{4} \\
 &= \frac{-1+11i}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z_3 &= -4 + 2i \\
 z_4 &= \frac{-5+7i}{2} \\
 z_5 &= \frac{-2+7i}{2} \\
 z_6 &= \frac{-1+11i}{4}
 \end{aligned}$$

**b** Representation des points

diopLeParresseuxComplexe.png

[Voir les points sur Géo](#)

**c** Démontrons que la suite  $(u_n)$  n'est pas géométrique.

**(0,5pt)**

On rappelle que  $u_n = A_n A_{n+1} = |z_{n+1} - z_n|$ . Calculons les premiers termes :

On a :  $z_{n+1} = \frac{1-i}{2}z_n + \frac{-3+i}{2}$  donc  $z_{n+2} = \frac{1-i}{2}z_{n+1} + \frac{-3+i}{2}$



$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{|z_{n+2} - z_{n+1}|}{|z_{n+1} - z_n|} \\
&= \frac{|z_{n+2} - z_{n+1}|}{|z_{n+1} - z_n|} \\
&= \frac{\left| \frac{1-i}{2} z_{n+1} + \frac{-3+i}{2} - \left( \frac{1-i}{2} z_n + \frac{-3+i}{2} \right) \right|}{|z_{n+1} - z_n|} \\
&= \frac{\left| \frac{1-i}{2} z_{n+1} + \frac{-3+i}{2} - \frac{1-i}{2} z_n - \frac{-3+i}{2} \right|}{|z_{n+1} - z_n|} \\
&= \frac{\left| \frac{1-i}{2} z_{n+1} - \frac{1-i}{2} z_n \right|}{|z_{n+1} - z_n|} \\
&= \left| \frac{1-i}{2} \right| \frac{|z_{n+1} - z_n|}{|z_{n+1} - z_n|} \\
&= \left| \frac{1-i}{2} \right| \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &= |z_1 - z_0| \\
&= |-1 - 4i - (5 - 4i)| \\
&= |-1 - 5| \\
&= |-6| = 6
\end{aligned}$$

$$u_0 = 6$$

La suite  $(u_n)$  est géométrique de raison  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3 Soit  $(v_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :

a Exprimons  $v_n$  en fonction de  $n$ .

(0,5pt)

$$v_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

$$v_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

$$\begin{aligned}
 &= u_p \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-p+1}}{1 - q} \\
 &= u_0 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \\
 &= 6 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \\
 &= 6 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}} \\
 &= 6 \times \frac{2}{2 - \sqrt{2}} \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right) \\
 &= \frac{12}{2 - \sqrt{2}} \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right) \\
 &= \frac{12(2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right) \\
 &= \frac{12(2 + \sqrt{2})}{4 - 2} \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right) \\
 &= \frac{12(2 + \sqrt{2})}{2} \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right) \\
 &= 6(2 + \sqrt{2}) \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right)
 \end{aligned}$$

$$v_n = 6(2 + \sqrt{2}) \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

**b** La Convergente de  $(v_n)$

(0,5pt)

$$\text{On a : } v_n = 6(2 + \sqrt{2}) \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} v_n &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 6(2 + \sqrt{2}) \left( 1 - \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n+1} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} 6(2 + \sqrt{2}) (1 - 0) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} 6(2 + \sqrt{2})
\end{aligned}$$

$(v_n)$  est convergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 6(2 + \sqrt{2})$

- 4 a Calculons en fonction de  $n$  le rayon  $r_n$  du cercle circonscrit au triangle  $BA_nA_{n+1}$ .

(0,5pt)

On a : 
$$\begin{cases}
z' = \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2} \\
A_{n+1} = \frac{1-i}{2}A_n + \frac{-3+i}{2} \\
(b - z') = i(z - z')
\end{cases}$$

En considérant la question 1.b où BMM' est un triangle rectangle en M'.

Par analogie

$(b - z') = i(z - z') \implies \overrightarrow{BA_{n+1}} = i \cdot \overrightarrow{A_nA_{n+1}}$  donc  $BA_nA_{n+1}$  est un triangle rectangle en  $A_{n+1}$

Or, dans un triangle rectangle, le \*\*rayon du cercle circonscrit\*\* est égal à la moitié de l'hypoténuse.

Ici, l'hypoténuse est le segment  $[BA_n]$ , donc :  $r_n = \frac{1}{2} \times |BA_n|$

Calculons  $|BA_n|$ . On sait que  $A_n$  est défini par récurrence :

$$z_n = A_n \quad \text{et} \quad z_B = b = -1 + 2i \quad \Rightarrow \quad |BA_n| = |z_n - b|$$