PROBLEME (10pt)

PARTIE A

Soit h la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = 1 + e^{2x-4}$ et $K = \left[1; \frac{5}{4}\right]$.

1. a) Calcul de $h'(x)$: $h(x) = 1 + e^{2x-4} \Rightarrow h'(x) = (1 + e^{2x-4})' = 2e^{2x-4}$
   Comme $e^{2x-4} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $h'(x) > 0 \quad$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ Donc, la fonction h est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$. **(0,25pt + 0,25pt)**

   b) Montrons que $h(K) \subset K$:
   Comme h est croissante et $K = \left[1; \frac{5}{4}\right]$, on a :

$$h(K) = \left[h(1); h\left(\frac{5}{4}\right)\right]$$

   Calculons :

$$h(1) = 1 + e^{2(1)-4} = 1 + e^{-2} \approx 1 + 0{,}1353 = 1{,}1353$$

$$h\left(\frac{5}{4}\right) = 1 + e^{2\cdot\frac{5}{4}-4} = 1 + e^{-1{,}5} \approx 1 + 0{,}2231 = 1{,}2231$$

   Donc :

$$h(K) = [1{,}1353; 1{,}2231] \subset \left[1; \frac{5}{4}\right]$$

   Ainsi, $h(K) \subset K$. **(0,5pt)**

2. a) Resoudre $h(x) = x$ revient à resoudre $h(x) - x = 0$
   On définit la fonction $\phi(x) = h(x) - x = 1 + e^{2x-4} - x$.
   Existance
   ϕ est continue sur $K = \left[1; \frac{5}{4}\right]$.
   Calculons :

$$\phi(1) = 1 + e^{-2} - 1 = e^{-2} > 0 \quad ; \quad \phi\left(\frac{5}{4}\right) = 1 + e^{-1.5} - \frac{5}{4} \approx 1.2231 - 1.25 < 0$$

   Donc, $\phi(1) > 0$ et $\phi\left(\frac{5}{4}\right) < 0$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un $\lambda \in \left]1; \frac{5}{4}\right[$ tel que $\phi(\lambda) = 0$, soit $h(\lambda) = \lambda$.

   Unicité

$$\phi'(x) = h'(x) - 1 = 2e^{2x-4} - 1$$

   Supposons que $\phi'(x) < 0$

$$\begin{aligned}
\phi'(x) < 0 &\iff 2e^{2x-4} - 1 < 0 \\
&\iff e^{2x-4} < \frac{1}{2} \\
&\iff 2x - 4 < \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\
&\iff 2x < 4 - \ln(2) \\
&\iff x < 2 - \frac{\ln(2)}{2} \\
&\iff x < 1,7
\end{aligned}$$

Donc si $x \in]-\infty; 1,7[$ alors $\phi'(x) < 0$
Comme $K = \left[1; \frac{5}{4}\right] \subset]-\infty; 1,7[$ donc $\forall x \in K$, $\phi'(x) < 0$
Donc $\phi'(x) < 0$ sur K, donc ϕ est strictement décroissante sur K.

Or, une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle admet **au plus une** racine. Comme on a déjà montré l'existence d'un λ, on en déduit que :

L'équation $h(x) = x$ admet une **unique solution** $\lambda \in K$.

(0,5pt)

b) On a : $h'(x) = 2e^{2x-4}$
Encadrons $x \in K = \left[1; \frac{5}{4}\right]$:

$$\begin{aligned}
x \in K &\implies 1 \leq x \leq \frac{5}{4} \\
&\implies 2 \leq 2x \leq \frac{5}{2} \\
&\implies -2 \leq 2x - 4 \leq -\frac{3}{2} \\
&\implies e^{-2} \leq e^{2x-4} \leq e^{-1.5} \\
&\implies 2e^{-2} \leq 2e^{2x-4} \leq 2e^{-1.5} \\
&\implies 0 \leq 2e^{-2} \leq 2e^{2x-4} \leq 2e^{-1.5} \leq \frac{1}{2} \\
&\implies 0 \leq 2e^{2x-4} \leq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Donc : $\forall x \in K, \quad 0 < h'(x) < \frac{1}{2}$ **(0,25pt)**

c) Soit $x \in K$, et $\lambda \in K$ l'unique solution de $h(\lambda) = \lambda$.
D'après l'inégalité des accroissements finis (ou le théorème de la moyenne) appliquée à h sur K, il existe $c \in [x; \lambda] \subset K$ tel que :

$$h(x) - h(\lambda) = h(x) - \lambda = h'(c)(x - \lambda)$$

Donc :

$$|h(x) - \lambda| = |h'(c)| \times |x - \lambda| \leq \frac{1}{2}|x - \lambda|$$

(0,25pt)

3.a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ W_n \in K$.

Initialisation :

On a $W_0 = 1 \in K = \left[1; \frac{5}{4}\right]$. L'assertion est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité :

Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on ait $W_n \in K$.
Alors par définition :

$$W_{n+1} = h(W_n)$$

Or à la question 1.b), on a démontré que $h(K) \subset K$.
Donc comme $W_n \in K$, on a $W_{n+1} \in h(K) \subset K$.

Conclusion :

Par le principe de récurrence, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n \in K$$

(0,5pt)

b) On veut montrer que :

$$|W_{n+1} - \lambda| \leq \frac{1}{2}|W_n - \lambda| \quad \text{et} \quad |W_n - \lambda| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Inégalité de récurrence :

On sait que $W_{n+1} = h(W_n)$ et que λ est l'unique solution de $h(\lambda) = \lambda$.
D'après la question 2.c), on a pour tout $x \in K$:

$$|h(x) - \lambda| \leq \frac{1}{2}|x - \lambda|$$

Or, à la question 3.a), on a montré que $\forall n,\ W_n \in K$. Donc :

$$|W_{n+1} - \lambda| = |h(W_n) - \lambda| \leq \frac{1}{2}|W_n - \lambda|$$

2) Majoration par $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ par récurrence :

3.b) On a $W_{n+1} = h(W_n)$ et $h(\lambda) = \lambda$.
D'après la question 2.c), pour tout $x \in K$, on a :

$$|h(x) - \lambda| \leq \frac{1}{2}|x - \lambda|$$

Or, à la question 3.a), on a montré que $W_n \in K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc on peut appliquer cette inégalité à chaque itération :

$$|W_1 - \lambda| \leq \frac{1}{2}|W_0 - \lambda|$$
$$|W_2 - \lambda| \leq \frac{1}{2}|W_1 - \lambda|$$
$$|W_3 - \lambda| \leq \frac{1}{2}|W_2 - \lambda|$$
$$\vdots$$
$$|W_k - \lambda| \leq \frac{1}{2}|W_{k-1} - \lambda|$$

En multipliant ces inégalités **membre à membre**, on obtient :

$$|W_k - \lambda| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k |W_0 - \lambda|$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |W_k - \lambda| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

(0,5pt + 0,25pt)

c) D'après la question précédente, on a :

$$|W_n - \lambda| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Or $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ quand $n \to +\infty$, donc :

$$|W_n - \lambda| \to 0 \quad \text{ce qui équivaut à} \quad W_n \to \lambda \quad \text{quand } n \to +\infty$$

Ainsi, la suite (W_n) **converge vers le réel λ**, qui est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$ dans l'intervalle K. **(0,25pt)**

PARTIE B

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\right) & \text{si } x \in [0; +\infty[\\ x - \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} & \text{si } x \in]-\infty; 0[\end{cases}$$

1. Déterminons le domaine de définition D_f de f.

Sur $[0; +\infty[$: on considère l'expression

$$f(x) = \ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)$$

Cette expression est définie si :

— $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$ (toujours vrai car $x \geq 0$)

— $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| > 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

Donc sur $[0;+\infty[$, la fonction est définie sauf en $x=1$.

Sur $]-\infty;0[$: on considère

$$f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

Cette expression est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, car le dénominateur $e^x + 1 > 0$ pour tout x.

Donc la fonction f est définie sur :

$$D_f =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$$

(0,5pt)

2. Étudions la continuité de f en 0.

La fonction f est définie par morceaux :

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) & \text{si } x \in [0;+\infty[\\ x - \frac{e^x-1}{e^x+1} & \text{si } x \in]-\infty;0[\end{cases}$$

A-t-on $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$?

Limite à gauche (vers 0^-) :

Pour $x < 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \\ &= 0 - \frac{1-1}{1+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{\mathbf{x}\to \mathbf{0}^-} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}}$$

Limite à droite (vers 0^+) :

Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) \\ &= \ln\left(\left|\frac{-1}{1}\right|\right) \\ &= \ln(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{\mathbf{x}\to \mathbf{0}^+} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}}$$

Conclusion :
La limite de $f(x)$ en 0 existe et vaut 0.
De plus, $f(0) = \ln\left(\left|\frac{0-1}{0+1}\right|\right) = \ln(1) = 0$

$$\textbf{Donc :} \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}^-} \mathbf{f(x)} = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}^+} \mathbf{f(x)} = \mathbf{f(0)} \Rightarrow \mathbf{f} \text{ est continue en } \mathbf{0}$$

2. (a) Soit $x \in]0;1[$.

On a : $x < 1$, donc $x - 1 < 0$, donc : $|x-1| = -(x-1) = 1 - x$
De plus, dans ce cas $x > 0$, donc $f(x) = \ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)$.
On remplace $|x-1|$ par $1-x$, et on obtient : $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)$
Or, on sait que : $\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$
Donc : $f(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x) \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x}$ **(0,5pt)**

(b) Étudions la dérivabilité de f en 0.
On cherche la limite du taux d'accroissement : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ avec $f(0) = 0$ (voir question 2)

À gauche ($x \to 0^-$) :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{x - \dfrac{e^x-1}{e^x+1}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0^-} 1 - \frac{e^x-1}{x} \times \frac{1}{e^x+1} \\
&= 1 - 1 \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}^-} \frac{\mathbf{f(x)} - \mathbf{f(0)}}{\mathbf{x} - \mathbf{0}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

À droite ($x \to 0^+$) :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x} \\
&= -1 - 1 \\
&= -2
\end{aligned}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}^+} \frac{\mathbf{f(x)} - \mathbf{f(0)}}{\mathbf{x} - \mathbf{0}} = -\mathbf{2}$$

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}^+}\frac{\mathbf{f(x)-f(0)}}{\mathbf{x-0}}=\mathbf{-2}\text{ et }\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}^-}\frac{\mathbf{f(x)-f(0)}}{\mathbf{x-0}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}$$

Donc la fonction f **n'est pas dérivable** en 0. **(0,5pt)**

(c) D'après la question précédente, on a :

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-2$$

Donc, même si f n'est pas dérivable en 0, ces deux limites finies indiquent que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet deux demi-tangentes au point $A(0,0)$.

À gauche de 0 :

La pente de la demi-tangente est $\frac{1}{2}$, donc l'équation de la tangente gauche est :

$$y=\frac{1}{2}x$$

À droite de 0 :

La pente de la demi-tangente est -2, donc l'équation de la tangente droite est :

$$y=-2x$$

$$\boxed{y=\frac{1}{2}x\quad\text{et}\quad y=-2x\qquad\textbf{(0,5pt)}}$$

3. Montrons que $\forall x\in]-\infty;0[,\ f(x)=x-\frac{e^x-1}{e^x+1}=x+1-\frac{2e^x}{e^x+1}$

Démonstration :

Partons du membre de droite :

$$\begin{aligned}x+1-\frac{2e^x}{e^x+1}&=\frac{(x+1)(e^x+1)-2e^x}{e^x+1}\\&=\frac{xe^x+x+e^x+1-2e^x}{e^x+1}\\&=\frac{xe^x+x-e^x+1}{e^x+1}\\&=\frac{x(e^x+1)}{e^x+1}+\frac{-e^x+1}{e^x+1}\\&=x+\frac{-e^x+1}{e^x+1}\\&=x-\frac{e^x-1}{e^x+1}\ \textbf{CQFD}\end{aligned}$$

(0,25pt)

4. Calculons les limites de f aux bornes des intervalles de son domaine de définition. **(0,5pt)**

À gauche de 1 : $x\to1^-$

Sur $[0;1[$, on a : $f(x) = \ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) = \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)\\ &= \ln(0^+)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty}$$

À droite de 1 : $x \to 1^+$

Sur $]1;+\infty[$, même expression : $f(x) = \ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\\ &= \ln(0^+)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty}$$

À gauche de 0 : $x \to -\infty$

Sur $]-\infty;0[$, on a $f(x) = x - \frac{e^x-1}{e^x+1}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -\infty} f(x) &= \lim_{x\to -\infty} x - \frac{e^x-1}{e^x+1}\\ &= -\infty - \frac{-1}{1}\\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty}$$

À droite de 0 : $x \to +\infty$

Sur $]1;+\infty[$, $f(x) = \ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty} f(x) &= \lim_{x\to +\infty} \frac{x-1}{x+1}\\ &= \ln(1)\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0}$$