◇◇◇ Lycée de Dindéfélo ◇◇◇			A.S. : 2024/2025
Matière: Mathématiques	Niveau : TS2	Date: 09/12/2024	Durée : 4 heures

Devoir n° 1 Du 1^er^ Semestre

Exercice 1 : $0,5 \times 8 = 4$ points

1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
2. Énoncer le théorème d'existence et d'unicité d'une solution.
3. Énoncer le théorème de l'inégalité des accroissements finis (IAF).
4. Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \ (a \neq 0)$ alors ...
5. Si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ alors ...
6. Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ alors ...
7. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \beta \in \mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - \beta x] = +\infty$ alors ...
8. Si f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; b]$, alors $f(]-\infty; b]) = ...$

Exercice 2 : 4 points

1. Calculer les limites suivantes : **(3 × 1 pt)**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{\sin 2x} \ ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^3 + x^2} \ ; \quad \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7} - \sqrt{10-x}}.$$

2. Donner les primitives des fonctions f et g respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$. **(2 × 0,5 pt)**

$$f(x) = (3x - 1)(3x^2 - 2x + 3)^3 \ ; \quad g(x) = \frac{1 - x^2}{(x^3 - 3x + 2)^3}.$$

Problème : 12 points

Partie A :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x}.$$

1. Déterminer D_f. **(0,5 pt)**
   - a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. (0,25 pt), **(0,5 pt)**
   - b) Étudier la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$. **(0,75 pt)**

c Interpréter la limite de f au voisinage de $+\infty$. **(0,75 pt)**

2 Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 2 et à gauche de 0, puis interpréter géométriquement les résultats obtenus. **(2 pt)**

a Justifier la dérivabilité de la fonction sur $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$, puis montrer que pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$: $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-2x}-(x-1)}{\sqrt{x^2-2x}}$. **(1,5 pt)**

b Montrer que : $\forall x \in]-\infty, 0], f'(x) > 0$ et $\forall x \in]2, +\infty[, f'(x) < 0$. **(1 pt)**

c Dresser le tableau de variations de la fonction f. **(1,25 pt)**

3 Tracer la courbe (C_f) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. **(1,25 pt)**

<u>Partie B :</u>

On considère la fonction g la restriction de la fonction f sur $[2, +\infty[$:

a Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera . **(0,5 pt)**

b Calculer $g^{-1}(2-2\sqrt{2})$. (On donne : $g(4) = (2-2\sqrt{2})$. **(0,75 pt)**

c Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$. **(0,5 pt)**

d Tracer la courbe $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. **(0,5 pt)**