Td Complexe

Exercice 1 [Forme algébrique et calcul de i^n]

1. Déterminer les formes algébriques des nombres complexes donnés. Préciser, le cas échéant, s'il est réel ou imaginaire pur.

   a. $z_1 = i(1-4i) + 3(2-i)$
   b. $z_2 = (3-i)^2 + 6i$
   c. $z_3 = \dfrac{3}{1-i}$
   d. $z_4 = \dfrac{1+2i}{2-i}$
   e. $z_5 = (2+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)$
   f. $z_6 = (2+5i)^2$
   g. $z_7 = \dfrac{3-3i}{1+i}$

2. Calculer i^{2025}, i^{40}, i^{27}, i^{34}

Exercice 2 [Conjugué]

1. Déterminer le conjugué des nombres complexes suivants :

   a. $z_1 = 3i$
   b. $z_2 = -i(1+4i)$
   c. $z_3 = (3-5i)^3$
   d. $z_4 = \dfrac{2i}{i+3} - \dfrac{3}{2+i}$

2. Soit $z_5 = \dfrac{2-i}{1+i}$ et $z_6 = \dfrac{2+i}{1-i}$.
   Montrer que $\overline{z_6} = z_5$. Que peut-on en déduire sans calcul de $z_5 + z_6$ et $z_5 - z_6$?

Exercice 3 [Module et argument]

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = -\sqrt{3} + i$
2. $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$
3. $z_3 = 1 - i$
4. $z_4 = 1 + i$
5. $z_5 = -\sqrt{3} + i$
6. $z_6 = \dfrac{2i - 2\sqrt{3}}{4i + 4}$
7. $z_7 = (\sqrt{3}+i)(1-i)^2$
8. $z_8 = \dfrac{(-\sqrt{3}+i)^3}{(1+i)^2}$
9. $z_9 = 2\dfrac{(\sqrt{3}+i)^2}{(-1-i)^2}$
10. $z_{10} = -2i(1+i\sqrt{3})^6$

Exercice 4 : [Forme trigonométrique]

Soit les nombres complexes $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - i$.

1. Déterminer les formes trigonométrique de z_1, z_2 et $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.
2. Déterminer la forme algébrique de Z.
3. En déduire $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 5 [Formes trigonométrique et exponentielle]

Dans chacun des cas suivants, déterminer la forme trigonométrique et la forme exponentielle.

1. $z_1 = 4$
2. $z_2 = -6$
3. $z_3 = -i$
4. $z_4 = -5 + 5i\sqrt{3}$
5. $z_5 = -1 - i$
6. $z_6 = \sqrt{3} - i$
7. $z_{10} = -2e^{i\frac{\pi}{2}}$
8. $z_{11} = ie^{i\frac{\pi}{3}}$
9. $z_7 = -2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$
10. $z_9 = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$

Exercice 6 [Forme trigonométrique]

On considère les nombres complexes :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}, \quad z_2 = 1 - i \quad \text{et} \quad z_3 = \frac{z_1}{z_2}.$$

1. Donner une écriture trigonométrique des nombres complexes z_1, z_2 et z_3.
2. Écrire sous forme algébrique z_3.
   En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 7 [Classique !]

1. Écrire $1+i$ sous forme trigonométrique. En déduire l'expression de $(1+i)^6$ par la formule de Moivre.

2. Calculer $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2026}$.

Exercice 8 [Racines carrées et Equations]

1. Déterminer les racines carrées de :
   - a $z = 3+4i$
   - b $z = 8-6i$
   - c $z = -5+12i$
   - d $z = 7+24i$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
   - a $4z^2-12z+153=0$
   - b $z^2-4z+5=0$
   - c $z^2+z+1=0$
   - d $iz^2-iz-3-i=0$
   - e $iz^2+(1-5i)z+6i-2=0$
   - f $z^2-(2+4i)z-2+4i=0$
   - g $(3+i)z^2-(7-i)z+10=0$
   - h $z^2-(1+i\sqrt{3})z-1+i\sqrt{3}=0$

Exercice 9 [Racines n-ièmes]

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^6 = 4\sqrt{2}(-1+i)$
2.
   - a Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^3 = 1$.
   - b Calculer $(1+i)^3$.
   - c En déduire les racines cubiques de $z = -2+2i$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$

Exercice 10 [Racines n-ièmes]
On donne $z_0 = 1-i\sqrt{3}$

1. Donner une écriture trigonométrique de z_0.
2. Montrer que $z_0^4 = -8+8i\sqrt{3}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 1$.
4. En déduire les solutions de (E) : $z^4 = -8+8i\sqrt{3}$ sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

Exercice 11 [Linéarisation]

1. Linéariser les polynômes trigonométriques suivants :
   - a $h(x) = \cos x \sin^2 x$
   - b $k(x) = \cos 2x \sin 3x$
   - c $m(x) = \sin^3 x$
2.
   - a Linéariser $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.
   - b Déduisez-en une primitive sur $\mathbb{R}$ de f.

Exercice 12 [Lieux géométriques]
Dans chacun des cas, déterminer géométriquement l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la relation donnée.

1. $|z+1+4i| = |z-1+i|$
2. $|z+1+4i| = 4$
3. $|\overline{z}+1-4i| = |z-2i|$
4. $|3iz+6| = 3|z-1+i|$
5. $\arg \dfrac{z-2i}{z-1+i} = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.

Exercice 13 [Lieux géométriques]
On considère l'expression $Z = \dfrac{z+1}{z-2i}$ où $z \neq 2i$. Déterminer par la méthode géométrique, l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

1. Z soit réel.
2. Z soit imaginaire pur.
3. $\arg(Z) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

Exercice 14 [Deux méthodes pour un problème]
Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ on note A et B les points d'affixes respectives $2i$ et $1+i$.

1. Soit z un nombre complexe différent de $1+i$, écrit sous la forme $z = x+iy$, où x et y sont des réels. On pose

$$Z = \frac{z-2i}{z-1-i}.$$

Montrer que :

$$\mathrm{Re}(Z) = \frac{x^2+y^2-x-3y+2}{(x-1)^2+(y-1)^2} \quad \text{et}$$

$$\mathrm{Im}(Z) = \frac{x-x-y+2}{(x-1)^2+(y-1)^2}$$

avec $(x;y) \neq (1;1)$.

2. Déterminer l'ensemble (E) des points $M(z)$ tels que Z soit un réel et l'ensemble (F) des points $M(z)$ tels que Z soit imaginaire pur.
   a. En utilisant la forme algébrique de Z.
   b. En utilisant les considérations sur les arguments.

Exercice 15 [Complexe et géométrie]

Le plan $(\mathcal{P})$ est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm. On note A, B et C les points de $(\mathcal{P})$ d'affixes respectives $z_A = 2+5i$, $z_B = 5-4i$ et $z_C = -1-4i$.

1. Placer les points A, B et C dans $(\mathcal{P})$.
2. Calculer les distances AB, AC et BC, puis en déduire la nature du triangle ABC.
3. Soit D le point de $(\mathcal{P})$ d'affixe $z_D = 2-4i$.
   a. Placer le point D dans $(\mathcal{P})$.
   b. Calculer $\dfrac{z_A - z_D}{z_B - z_D}$. En déduire la nature du triangle ADB.
4. Soit $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle ADB. Déterminer l'affixe du centre J de $(\mathcal{C})$ et calculer son rayon r.
5. Soit E le symétrique de D par rapport à J.
   a. Déterminer l'affixe de E et montrer que E appartient à $(\mathcal{C})$.
   b. Préciser la nature du quadrilatère AEBD en justifiant la réponse.

Exercice 16

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -3i, \quad z_B = -2 \quad \text{et} \quad z_C = 1+2i.$$

1. Déterminer le module et un argument du quotient $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$.
2. En déduire la nature du triangle ABC.
3. Déterminer l'affixe z_D du point tel que le quadrilatère $BADC$ soit un carré.
4. Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 17

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E) : z^3 + (-5+6i)z + 12 + 18i = 0.$$

1. a. Vérifier que (E) admet une solution réelle z_0 que l'on déterminera.
   b. Montrer que $2i$ est une solution de (E).
   c. Achever la résolution de l'équation (E).
2. On considère dans le plan complexe muni d'un repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ les points A, B, M et M' d'affixes respectives $2i, -3, z$ et z' tels que $Z = \dfrac{z-2i}{z+3}$.
   a. Montrer que $OM' = \dfrac{MA}{MB}$.
   b. Déterminer l'ensemble $(\mathcal{G})$ des points M du plan tels que $OM' = 1$.

Exercice 18

1. Calculer $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$. En déduire dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les solutions de l'équation $z^2 - i = 0$.
2. On pose $P(z) = z^3 + z^2 - iz - i$ où z est un nombre complexe.
   a. Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle (que l'on déterminera).
   b. Résoudre l'équation $P(z) = 0$ dans l'ensemble des nombres complexes.
3. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $z_B = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ et $z_C = -1$.
   a. Déterminer la forme exponentielle de z_A et celle de z_B.
   b. Placer avec précision les points A, B et C dans le plan complexe.
4. Soit D le symétrique du point A par rapport à l'axe réel.
   a. Donner l'affixe z_D du point D sous forme algébrique.
   b. Démontrer que : $\dfrac{z_D - z_C}{z_A - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$. En déduire la nature du triangle ACD.

Exercice 19

1. On considère l'équation

$$(E) : z^3 - 13z^2 + 59z - 27 = 0, \quad \text{où } z \in \mathbb{C}.$$

a. Déterminer la solution réelle de (E).

b. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2. On pose $a = 3$, $b = 5 - 2i$ et $c = 5 + 2i$.
Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c. Soit M le point d'affixe z distinct de A et de B.

a. Calculer $\dfrac{b-a}{c-a}$. En déduire la nature du triangle ABC.

b. On pose $Z = \dfrac{z-3}{z-5+2i}$.
Donner une interprétation géométrique de l'argument de Z.
En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit un réel non nul.

Exercice 20

1. Soit $p(z) = z^3 + 3z^2 - 3z - 5 - 20i$, $z \in \mathbb{C}$.

a. Démontrer que $2+i$ est une racine de $p(z)$.

b. En déduire les solutions de l'équation $p(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

2. Dans le plan $(\mathcal{P})$ rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2 + i$, $z_B = -1 - 2i$ et $z_C = -4 + i$.

a. Placer les points A, B et C puis calculer les distances AB et BC.

b. Démontrer que :

$$\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \left(\vec{BA}, \vec{BC}\right) \pmod{2\pi}.$$

c. En déduire une mesure en radian de l'angle $\left(\vec{BA}, \vec{BC}\right)$.

d. Déduire de tout ce qui précède la nature du triangle ABC.

Exercice 21

Soit le complexe $a = -1 - i$ et Z_n la suite définie par

$$\begin{cases} Z_0 = 0 \text{ et } Z_1 = i \\ Z_{n+1} = (1-a)Z_n + aZ_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. Déterminer Z_2 et Z_3 sous forme algébrique.

2. Soit (U_n) la suite définie par :

$$U_n = Z_{n+1} - Z_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

a. Déterminer U_0.

b. Démontrer que (U_n) est une suite géométrique de raison $-a$.

c. Exprimer U_n en fonction de n et a.

3. Soit $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1}$. Exprimer S_n en fonction de Z_n. En déduire que $Z_n = -1 + (1+i)^n$.

Exercice 22

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

a. $z^2 - 2z + 5 = 0$.

b. $z^2 - 2(1+\sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$.

2. On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 1 + \sqrt{3} + i$, $z_C = 1 + \sqrt{3} - i$, $z_D = 1 - 2i$.

a. Placer A, B, C et D.

b. Vérifier que $\dfrac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = i\sqrt{3}$. En déduire la nature de ABD.

c. Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle $(\mathcal{C})$ dont on précisera le centre et le rayon.

3. On considère

$$(\mathcal{E}) : z^2 - 2(1 + 2\cos\theta)z + 5 + 4\cos\theta = 0; \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

a. Résoudre $(\mathcal{E})$ dans $\mathbb{C}$.

b. Montrer que les points images des solutions de $(\mathcal{E})$ appartiennent à $(\mathcal{C})$.

Exercice 23

Soit $p(z) = z^3 - (5+i)z^2 + 6(1+i)z - 8(1+i)$.

1. Montrer que l'équation $p(z) = 0$, $z \in \mathbb{C}$ admet une solution réelle que l'on déterminera.

2. Vérifier que $2i$ est une solution de $p(z) = 0$.

3. Factoriser $p(z)$ et résoudre dans $\mathbb{C}$, $p(z)=0$.
4. On distinguera les solutions z_1, z_2 et z_3 de l'équation $p(z)=0$ par : $|z_1|<|z_2|<|z_3|$.
   a. Placer dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.
   b. Montrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est rectangle isocèle.

Exercice 24

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation

$$(\mathcal{E}) : z^3+(1-8i)z^2-(23+4i)z-3+24i=0.$$

1. a. Montrer que $(\mathcal{E})$ admet une solution imaginaire pure et la déterminer.
   b. Montrer que $1+2i$ et $-2+3i$ sont solutions de $(\mathcal{E})$.
   c. Donner l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.
2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=1+2i$, $z_B=3i$ et $z_C=-2+3i$.

   Soit G le barycentre des points A, B, et C affectés des coefficients respectifs 2, -2 et 1.

   Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ ont pour affixes respectives $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $2i$ et $2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et que ces affixes sont, dans cet ordre, en progression géométrique. Préciser la raison.

Exercice 25

Soit la suite z_n définie par :

$$\begin{cases} z_0=i \\ z_{n+1}=(1+i)z_n+2i \end{cases}$$

1. Calculer z_1 et z_2.
2. On considère la suite (u_n) définie par : $u_n=z_n+2$.
   a. Montrer que : $u_n=(2+i)(1+i)^n$.
   b. Exprimer z_n en fonction de n.
3. Soit M_{n+1}, M_n, A et B les points d'affixes respectives z_{n+1}, z_n, i et $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$.

   Démontrer que : $\dfrac{AM_{n+1}}{BM_n}=\sqrt{2}$ et que : $(\overrightarrow{BM_n},\overrightarrow{AM_{n+1}})=\dfrac{\pi}{4}\pmod{2\pi}$.

Exercice 26

PARTIE A : Pour tout complexe z on note : $f(z)=z^5+2z^4+2z^3-z^2-2z-2$.

1. Déterminer le polynôme Q tel que, quel que soit $z\in\mathbb{C}$, $f(z)=(z^3-1)Q(z)$.
2. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $(\mathcal{E}) : f(z)=z$.
3. Écrire les solutions de $(\mathcal{E})$ sous forme trigonométrique puis les représenter dans le plan complexe $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

PARTIE B : Considérons les points A, B, C et D du plan $\mathcal{P}$ tels que : $A\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B(-1+i)$, $C(-1-i)$ et $D\left(-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
2. Soit r la rotation de centre le point Ω d'affixe 1 qui transforme A en D. Déterminer l'écriture complexe de r.
3. Quelle est la nature du triangle ΩAD?
4. Déterminer l'affixe du centre du cercle circonscrit du triangle ΩAD.
5. On pose $u_n=(z_A)^n, n\in\mathbb{N}^*$ où z_A est l'affixe du point A. Déterminer la valeur minimale de n pour laquelle u_n est un réel.
6. Donner la forme algébrique de u_{2019}.

Exercice 27

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soit le nombre complexe a défini par : $a=\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

1. Montrer que $a^2=-2\sqrt{3}-2i$, puis en déduire le module de a.
2. Écrire a^2 sous forme trigonométrique puis vérifier qu'une des mesures de l'argument de a est $\dfrac{19\pi}{12}$.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ puis de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
4. Représenter sur le même graphique les points images de a, $-a$ et a^2.

Exercice 28

Un jeune agriculteur décide de pratiquer de la culture sous serre dans son champ. A cet effet, il choisit dans son plan de représentation un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Il place dans ce repère deux points A et B dont les affixes respectives z_A et z_B sont des racines du polynôme P défini par :

$$P(z) = 2z^3 - 3(1+i)z^2 + 4iz + 1 - i, \quad \text{où } z \in \mathbb{C}.$$

Son objectif est de pratiquer sa culture sous serre dans l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M de son plan de représentation tels que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MO}\| \leq 2$, qui contient un point du segment $[AB]$.

1. Vérifier que 1 et i sont des racines de P.
2. Déterminer le polynôme g tel que : $P(z) = (z-1)(z-i)g(z)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
4. On pose $z_A = 1$, $z_B = i$ et $z_C = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.
   - a. Placer les points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C dans le repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ en choisissant comme unité graphique 4 cm.
   - b. Démontrer que C est le milieu de $[AB]$, puis que C appartient à l'ensemble $(\mathcal{E})$.
   - c. Déterminer l'affixe z_G du point G barycentre du système $\{(A,1); (B,1); (O,2)\}$, puis placer G.
5. Déterminer puis construire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M de son plan de représentation tels que : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MO}\| \leq 2$.
6. Le jeune agriculteur atteindra-t-il son objectif?

Exercice 29 (POLYNÔMES COMPLEXES)

Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - (11+2i)z^2 + 2(17+7i)z - 42$.

1. Démontrer qu'il existe un nombre réel α solution de l'équation : $P(z) = 0$.
2. Déterminer le polynôme Q tel que : $P(z) = (z-\alpha)Q(z)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

Exercice 30 (POLYNÔMES COMPLEXES)

On pose $P(z) = z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26$, α désigne un nombre complexe quelconque.

1. Montrer que $P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$. En déduire que si $P(\alpha) = 0$ alors $P(\bar{\alpha}) = 0$.
2. Calculer $P(1+i)$. Indiquer deux solutions complexes de l'équation $P(z) = 0$.
3. Calculer $Q(z) = (z-(1+i))(z-(1-i))$.
4. Vérifier que le polynôme $P(z)$ est divisible par $Q(z)$.
5. Résoudre dans $\mathbb{C}$, $P(z) = 0$.

Exercice 31 (POLYNÔMES COMPLEXES)

On pose $P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$.

1. Montrer que si le complexe α est solution de l'équation $P(z) = 0$ alors $\bar{\alpha}$ et $\frac{1}{\alpha}$ sont aussi solutions de $P(z) = 0$.
2. Calculer $P(1+i)$. Indiquer trois solutions complexes de l'équation $P(z) = 0$ puis en déduire la résolution de l'équation $P(z) = 0$.
3. Écrire $P(z)$ sous forme d'un produit de deux polynômes du second degré, à coefficients réels.

Exercice 32 Soit l'équation $(\mathcal{E}) : z^3 + (4-5i)z^2 + (8-20i)z - 40i = 0$.

1. Démontrer que $(\mathcal{E})$ admet une solution imaginaire pure.
2. Résoudre $(\mathcal{E})$ dans $\mathbb{C}$.

Soit l'équation $(\mathcal{E}') : z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0$.

1. Démontrer que 0 n'est pas solution de $(\mathcal{E}')$. En déduire que si α est une solution de $(\mathcal{E}')$ alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi une solution de $(\mathcal{E}')$.
2. Démontrer que $(\mathcal{E}')$ est équivalente à $(\mathcal{E}'')$: $\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 5\left(z + \frac{1}{z}\right) + 4 = 0$.
3. En posant $Z = z + \frac{1}{z}$, résoudre $(\mathcal{E}'')$.
4. En déduire la résolution de $(\mathcal{E}')$ dans $\mathbb{C}$.