**Ministère de l'Éducation Nationale**
Inspection Académique de Kédougou
Lycée Dindéfelo
Cellule de Mathématiques

**Année scolaire 2025-2026**
Date : 24/10/2025
Classe : Terminale S2
Professeur : M. BA

# Exercice 1

1. Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(3x)}{1-\sqrt{x+1}} \quad ; \quad \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x+3}}{x-2} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^3+x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\sin^2 x - \cos x + 1}{x^2} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x \tan x}$$

2. Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\tan x}{1+\tan x} \quad ; \quad \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x^2-x-6}} \quad ; \quad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sin 2x} \quad ; \quad \lim_{x\to \dfrac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1-\sin x}$$

3. Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to \pm\infty} \left(x-\sqrt{x^2+3x-1}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to \pm\infty} \frac{2x+\sqrt{x^2+1}}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x+3}-2}$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \left(2x+\sqrt{x-1}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to \pm\infty} \left(x+\sqrt{2x^2-5x+1}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to \pm\infty} \left(x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x-\sqrt{|x|}}{3x+2}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{5x-2}-\sqrt{x+1}$$

4. Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2+\sin x}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x+\sin x}{2-\sin x} \quad ; \quad \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^3}{3+2\sin x}$$

5. Déterminer les réels $a$ et $b$ pour que la droite d'équation $y = ax + b$ soit une asymptote à la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+4} - \dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

# Exercice 2

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{2\cos x - \sqrt{2}}{x - \frac{\pi}{4}} \quad ; \quad \lim_{x \to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1}$

2. $\displaystyle \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sqrt{2}\cos x}{1 - \sqrt{2}\sin x} \quad ; \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{x\cos x + \sin x}{\sqrt{x+1} - 1}$

3. $\displaystyle \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{\cos x} + \cos x - 3\right)$

4. $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(x \arctan(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2}x\right) \quad ; \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)$

5. $\displaystyle \lim_{|x| \to +\infty} \left(3x - 1 + \sqrt{9x^2 + 3x - 2}\right) \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - x^2 E\left(\frac{1}{x}\right)}{1 + x^2 E\left(\frac{1}{x}\right)}$



# Exercice 3

Étudier la continuité de la fonction $f$ sur $D_f$ dans chaque cas.
1. $f(x) = x + \sqrt{x+1}$.
2. $f(x) = 4x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$.
3. $f(x) = 2\sqrt{x} - x$.
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}}{1-x}$.

# Exercice 4

Donner la dérivée des fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{1+\cos(2x)}{1-\sin(2x)} \quad ; \quad g(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)\sqrt{\frac{1}{x}} \quad ; \quad h(x) = \sqrt[3]{x-6} + \frac{1}{x} \quad ; \quad k(x) = \left|\frac{x^2 - x}{x-1}\right|$$

$$m(x) = x\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}} \quad ; \quad n(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x+1} \quad ; \quad p(x) = \frac{\tan x}{1 - 2\sin x}$$

$$q(x) = 3\left(x^2 - 3x + 5\right)^4 \quad ; \quad r(x) = \cos^2(3x) \quad ; \quad s(x) = -2\tan^2(2x)$$

# Exercice 5

Etude d'une fonction par lecture graphique La courbe $(C_f)$ ci-dessus est celle d'une fonc-

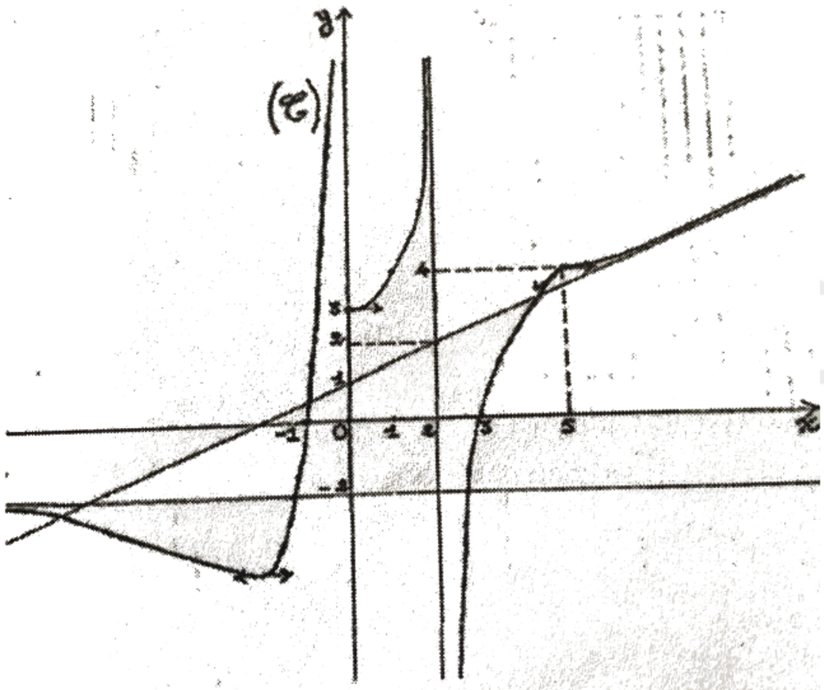

Figure 1 – Courbe de (Cf)

tion $f$ dans un repère orthonormé. $f$ est définie en 0 et on a : $f(0) = 3$.

1. Préciser l'ensemble de définition de $f$.
2. Donner les limites suivantes :

$$\textbf{a)} \lim_{x\to+\infty} f(x), \quad \lim_{x\to-\infty} f(x);$$
$$\textbf{b)} \lim_{x\to 0^+} f(x), \quad \lim_{x\to 0^-} f(x);$$
$$\textbf{c)} \lim_{x\to 2^+} f(x), \quad \lim_{x\to 2^-} f(x);$$

3. La courbe admet-elle une asymptote oblique ? Si oui, donner son équation.
4. Préciser les équations des autres asymptotes.
5. La fonction $f$ est-elle dérivable en 5 ? Justifier la réponse.
6. Dresser le tableau de variation de $f$.

# Exercice 6

Le tableau de variation ci-dessous est celui d'une fonction $f$ continue sur son ensemble de définition avec $f'(1) = 0$ et $f'(4) = -1$. La courbe $(C_f)$ de $f$ coupe l'axe des abscisses en $A(-2; 0)$ et $B\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ et l'axe des ordonnées au point $C(0; 2)$.

La droite $(D) : y = x - 3$ est une asymptote oblique en $+\infty$ et est en dessous de $(C_f)$ sur $[0; +\infty[$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $-1$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $+\infty \;\|\|\; -\infty$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

1. Déterminer le domaine de définition de $f$ puis donner les limites aux bornes.
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de $f$.
3. Déterminer en justifiant toutes les asymptotes à la courbe de $f$.
4. Donner l'équation de chacune des demi-tangentes à la courbe au point d'abscisse 1.
5. Tracer $(D)$ et $(C_f)$ dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.
6. Soit $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $[3; +\infty[$.
   (a) $g$ est-elle bijective ? Justifier.
   (b) $g^{-1}$ est-elle dérivable en 2 ? Justifier.
7. Graphiquement, déterminer l'ensemble des valeurs de $m$ pour lesquelles l'équation $f(x) = m$ admet exactement 4 solutions réelles distinctes.

# Exercice 7

Soit $f$ la fonction donnée par : $f(x) = \dfrac{2\sin(2x)}{1+\cos(x)}$

1. Déterminer le domaine de définition de $f$ puis montrer qu'on peut réduire le domaine d'étude de $f$ à l'intervalle $]0, 2\pi[$.
2. Déterminer la limite de $f$ en $\pi$.
3. Soit $\alpha$ l'unique réel de $]0, 2\pi[$ tel que $\cos(\alpha) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Montrer que $\cos(2x) + \cos(x) - 1 > 0$ si et seulement si $x \in ]0, \alpha[$.
4. Montrer que $f'(x) = \dfrac{4(\cos^2(2x) + \cos(x) - 1)}{1+\cos(x)}$, en déduire le signe de $f'(x)$ en utilisant (3), puis dresser le tableau de variation de $f$ sur $]0, 2\pi[$.
5. Tracer la courbe de $f$ sur $]-2\pi, 2\pi[$. Unité : 1 cm.

# Problème n°1

Soit la fonction numérique f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 - \dfrac{2x}{x^2+1} & \text{si } x \leq 1, \\ x - 1 - 3\sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

## Partie A

1. Justifier que $D_f = \mathbb{R}$.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ en $x_0 = 1$.
3. Iterpréter les résultats obtenus
4. Déterminer les limites de $f$ aux bornes de $D_f$.
5. (a) Montrer que la courbe $(C_f)$ admet deux asymptotes $(D_1)$ et $(D_2)$ à préciser.

   (b) Préciser la position de $(C_f)$ par rapport à $(D_1)$ et $(D_2)$.

5. (a) Calculer $f'(x)$ dans les intervalles où $f$ est dérivable (justifier l'existence de ces dérivées).

   (b) Établir le tableau de variations de $f$.

   (c) Tracer $(C_f)$ et les asymptotes dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

## Partie B

Soit $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $]-\infty, 1]$.

1. Montrer que $g$ est bijective de $]-\infty, 1]$ sur un intervalle $J$ à préciser.
2. Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution $\beta$ et que $\dfrac{1}{3} < \beta < \dfrac{3}{4}$.
3. (a) Étudier la dérivabilité de $g^{-1}$.

   (b) Calculer $g^{-1}(2)$.

   (c) Construire $(C_{g^{-1}})$ dans le repère précédent.

   (d) Montrer que $g$ admet une primitive sur $]-\infty, 1]$ et déterminer cette primitive qui s'annule en 0.

# Problème n°2

Soit la fonction numérique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 1 + \sqrt{x^2 - x}}{x - 2} & \text{si } x \geq 1 \\ \dfrac{x - 1}{x^2 - 4x + 3} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

On désigne par $(C_f)$ sa courbe représentative.

## Partie A

1. Déterminer le domaine de définition de $f$.
2. Calculer les limites aux bornes de $D_f$.
3. Étudier la continuité de $f$ en 1.

4. Étudier la dérivabilité de $f$ en 1. Interpréter graphiquement les résultats.
5. (a) Déterminer les réels $a$, $b$, et $c$ tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$, $\forall x < 1$.
   (b) En déduire que $(C_f)$ admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote oblique $(\Delta)$ dont on précisera son équation.
   (c) Étudier la position relative de $(C_f)$ par rapport à $(\Delta)$ sur $]-\infty; 1[$.
6. Étudier la nature de la branche infinie de $(C_f)$ au voisinage de $+\infty$, puis étudier sa position relative par rapport à $(C_f)$ s'il s'agit d'une asymptote.
7. Déterminer $f'(x)$ sur chaque intervalle où $f$ est dérivable, puis en déduire son signe.
8. Dresser le tableau de variation de $f$.

### Partie B

Soit $h$ la restriction de $f$ à l'intervalle $I = ]-\infty; 1[$.

1. Montrer que $h$ réalise une bijection de $I$ vers un intervalle $J$ à préciser.
2. (a) Calculer $h(0)$.
   (b) $h^{-1}$ est-elle dérivable en $-\dfrac{3}{2}$ ? Si oui, déterminer $(h^{-1})'\left(-\dfrac{3}{2}\right)$.
   (c) Déterminer le sens de variation de $h^{-1}$ puis dresser son tableau de variation.
3. Déterminer l'expression de $h^{-1}(x)$.
4. Tracer soigneusement $(C_f)$ et $(C_{h^{-1}})$ dans un repère orthonormé.



## Problème n°3

### Étude graphique

Soit $f$ une fonction dont la courbe représentative est donnée ci-dessous

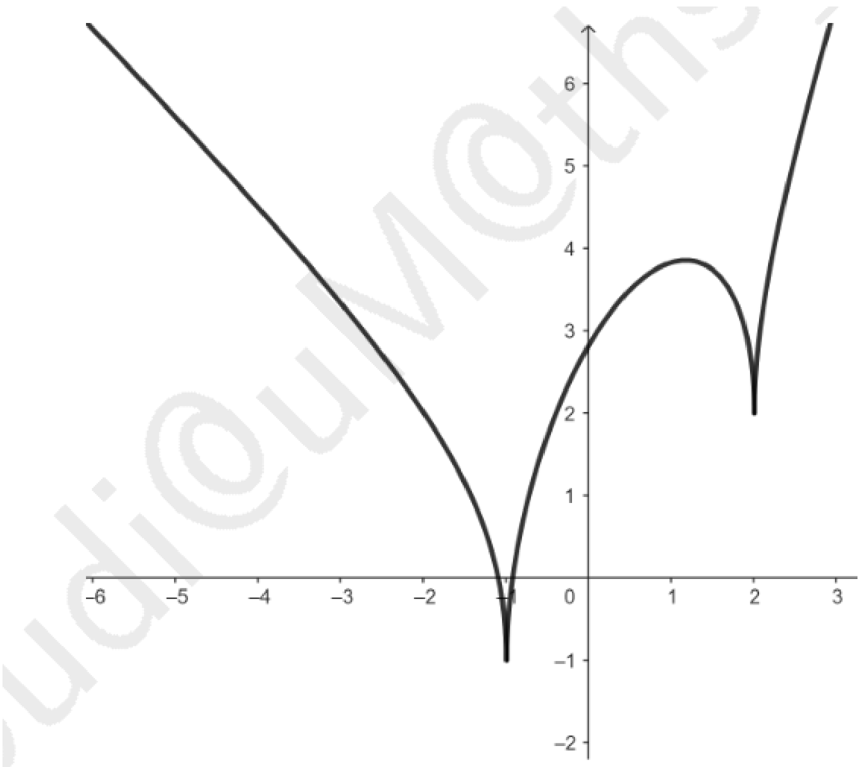


FIGURE 2 – Courbe de (Cf)

1. Déterminer $f(-1)$ ; $f(2)$ et $D_f$.
2. Déterminer les limites de $f$ aux bornes de $D_f$.
3. (a) $f$ est-elle dérivable en $-1$ et en $2$ ?
   (b) Déterminer les variations de $f$ sur $]-\infty,-1[$ et sur $]2,+\infty[$.

## Étude numérique

Dans cette partie, on prend $f(x) = x + 2\sqrt{|x^2 - x - 2|}$.

1. (a) Déterminer le domaine de définition de $f$.
   (b) Écrire $f(x)$ sans symbole de la valeur absolue puis calculer les limites aux bornes de $D_f$.
   (c) Montrer que $(C_f)$ admet une asymptote oblique $(D)$ en $+\infty$ et donner l'équation de cette asymptote.
   (d) Étudier la position de $(C_f)$ par rapport à $(D)$.
   (e) Préciser la nature de l'asymptote à $(C_f)$ en $-\infty$.
2. (a) Étudier la dérivabilité de $f$ en $-1$ et $2$. Interpréter le résultat obtenu.
   (b) Donner l'ensemble de dérivabilité de $f$ puis calculer $f'(x)$.
   (c) Démontrer que $f'(x) > 0$ sur $]2;+\infty[$ et que $f'(x) < 0$ sur $]-\infty;-1[$.
   (d) Résoudre l'inéquation $\sqrt{-x^2 + x + 2} \leq 2x - 1$ sur $]-1;2[$.

(e) Dresser le tableau de variation de $f$.

3. (a) Soit $g$ la restriction de $f$ sur $I = ]2; +\infty[$. Montrer que $g$ est une bijection de $I$ sur $I$.
   (b) En étudiant la fonction $h$ définie par $h(x) = x - g(x)$, montrer qu'il existe un réel $\alpha$ vérifiant $g(\alpha) = \alpha$.
   (c) Déterminer par le calcul la valeur exacte de $\alpha$, puis déterminer $(g^{-1})(\alpha)$ si possible.
   (d) Tracer dans le même repère $(Cg)$ et $(Cg^{-1})$.

## Problème n°4

Soit $f$ la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -x + \sqrt{x^2 + 4} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{|4 - x^2|} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On note $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f$.
2. Écrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
3. (a) Étudier la continuité de $f$ en 0.
   (b) Étudier la dérivabilité de $f$ en 0. Interpréter les résultats.
   (c) Étudier la dérivabilité de $f$ en 2. Interpréter les résultats.
4. (a) Calculer les limites aux bornes de $D_f$.
   (b) Étudier les branches infinies de $(C_f)$.
5. On pose pour tout $x \in [0, 2]$, $h(x) = f(x) - x$.
   (a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution notée $\alpha$.
   (b) Vérifier que $\alpha \in \left[1, \dfrac{3}{2}\right]$.
6. (a) Calculer $f'(x)$ sur chaque intervalle où $f$ est dérivable.
   (b) Dresser le tableau de variations de $f$.
   (c) Construire $(C_f)$.
7. Soit $g$ la restriction de $f$ sur $I = ]2; +\infty[$.
   (a) Montrer que $g$ est une bijection de $I$ vers un intervalle $J$ à préciser.
   (b) Montrer que $g^{-1}$ est dérivable en $\sqrt{5}$ puis calculer $(g^{-1})'(\sqrt{5})$.
   (c) Expliciter $g^{-1}(x)$.
   (d) Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère que $(C_f)$.
8. Montrer que pour tout $x \in \left[1, \dfrac{3}{2}\right]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$.
9. En déduire que $|f(x) - \alpha| \leq \dfrac{3\sqrt{7}}{7}|x - \alpha|$, pour tout $x \in \left[1, \dfrac{3}{2}\right]$.