Ministère de l'Éducation Nationale
Inspection Académique de Kédougou
Lycée Dindéfelo
Cellule de Mathématiques

Année scolaire 2024-2025
Date : 02/12/2024
Classe : Terminale S2
Professeur : M. BA

Primitives

Exercice 1 Échauffement

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes sur I :

a) $f(x) = \cos x \sin^5 x, \quad I = \mathbb{R};$

b) $f(x) = \frac{7}{(x+2)^5}, \quad I =]-\infty; -2[;$

c) $f(x) = \frac{2x^2+3x-1}{x}, \quad I =]0; +\infty[;$

d) $f(x) = \frac{x^2}{1+x^3}, \quad I =]0; +\infty[;$

e) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3x^2+2}}, \quad I = \mathbb{R};$

f) $f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^6, \quad I = \mathbb{R}.$

Exercice 2 Recherche de primitives

Déterminer une primitive, sur un intervalle à préciser (le plus grand possible), des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2x^2 - 7x + 3;$
2. $f(x) = x^5 - 3x^2 + 5x;$
3. $f(x) = 6x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{2}x - 1;$
4. $f(x) = x^5 - 3x^3 + 5x;$
5. $f(x) = 3x^3 - \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{x^3};$
6. $f(x) = \frac{3}{x^2};$
7. $f(x) = -\frac{2}{x^6};$
8. $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}};$
9. $f(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\sqrt{x};$
10. $f(x) = 3x + \frac{2}{x^2} - \frac{5}{x^3};$
11. $f(x) = \frac{7x^3-4x^2+3x-1}{5};$
12. $f(x) = -\frac{5x^4+2x^3-3x+6}{x^3};$
13. $f(x) = \frac{4(x-1)^3-1}{(x-1)^2}.$

Exercice 3 : Recherche de primitives

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

1. (a) $f(x) = \dfrac{2x+5}{(x^2+5x)^4}$; $\quad I =]0;+\infty[$

   (b) $f(x) = \dfrac{3x^2+2}{(x^2+2x)^2}$; $\quad I =]0;+\infty[$

   (c) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^3}$; $\quad I = \mathbb{R}$

2. (a) $f(x) = \dfrac{7}{(x-1)^4}$; $\quad I =]-\infty;1[$

   (b) $f(x) = \dfrac{9}{(4x+1)^3}$; $\quad I = \mathbb{R}_+$

3. (a) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^3-3x+1}$; $\quad I = [2;+\infty[$

   (b) $f(x) = \dfrac{3x^2+2}{x^3+2x}$; $\quad I =]-\infty;0[$

   (c) $f(x) = \dfrac{-\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}}{x^2-4x+9}$; $\quad I = \mathbb{R}$

4. (a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$; $\quad I = \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$; $\quad I = \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

   (c) $f(x) = \dfrac{\tan x}{\cos x}$; $\quad I = \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

   (d) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin^3 x(1-\cos^2 x)^6}$; $\quad I = \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

5. (a) $f(x) = \dfrac{x-1}{(3x^2-6x+11)^7}$; $\quad I = \mathbb{R}$

   (b) $f(x) = \frac{6-4x}{(x^2-3x-4)^5}$; $\quad I =]-\infty;-1[$

   (c) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}\tan^3 x$; $\quad I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

6. (a) $f(x) = (3x^2-2)(x^3-2x+3)^3$; $\quad I = \mathbb{R}$

   (b) $f(x) = (2x+1)(x^2+x+1)^5$; $\quad I = \mathbb{R}$

   (c) $f(x) = \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}$; $\quad I = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

   (d) $f(x) = (x-1)^2(x+2)$; $\quad I = \mathbb{R}$

7. (a) $f(x) = \frac{1-x^2}{(x^3-3x+1)^3}$; $\quad I =]1;+\infty[$

   (b) $f(x) = \frac{-15x^2-10}{(x^3+2x)^4}$; $\quad I = \mathbb{R}^*$.

8. (a) $f(x) = \sin x\cos^4 x$; $\quad I = \mathbb{R}$

   (b) $f(x) = \sin(3x)\cos^3(3x)$; $\quad I = \mathbb{R}$

   (c) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$; $\quad I = \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

9. (a) Montrer que, pour tout x réel :

$$\sin^3 x = \sin x - \sin x \cos^2 x.$$

(b) En déduire une primitive de la fonction définie par :

(c)

$$f(x) = \sin^3 x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

10. (a) $f(x) = 1 + \tan^2 x, \quad I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

(b) $f(x) = \tan^2 x, \quad I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

(c) $f(x) = \tan^4 x + \tan^6 x, \quad I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

11. (a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+1}}, \quad I = \left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$.

(b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-5x}}, \quad I = \left]-\infty; \frac{4}{5}\right[$.

12. (a) $f(x) = \frac{2x^2+\sin x}{\sqrt{2x^3-3\cos x+3}}, \quad I = [1; +\infty[\,;$

(b) $f(x) = \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1+\sin^2 x}}, \quad I = \mathbb{R}.$

Exercice 4 Recherche de primitives

Déterminer la primitive de la fonction f sur l'intervalle I qui prend la valeur y_0 en $x_0 \in I$.

1. $f(x) = x - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad I = \mathbb{R}^*, \quad x_0 = 1$ et $y_0 = 0$.
2. $f(x) = \frac{1}{(2x+5)^4}, \quad I = \left]-\infty; -\frac{5}{2}\right[\quad x_0 = -4$ et $y_0 = 2$.
3. $f(x) = \frac{x^4+3x^2-2}{x^2}, \quad I = \mathbb{R}_+^*, \quad x_0 = 2$ et $y_0 = -3$.
4. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}(x^2-1) + 4x\sqrt{x}, \quad I = \mathbb{R}_+^*, \quad x_0 = 1$ et $y_0 = 10$.
5. $f(x) = \sin x \cos^3 x, \quad I = \mathbb{R}, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$ et $y_0 = 0$.

Exercice 5 Transformation d'écritures

1. Soit $f(x) = \frac{x^2+5x-1}{x+2}, \quad x \in\,]-2; +\infty[\,.$

(a) Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in\,]-2; +\infty[$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}.$$

(b) En déduire la primitive de f sur $]-2; +\infty[$ qui s'annule en 1.

2. Soit $f(x) = \frac{2x^2-3x+4}{(x-1)^2}, \quad x \in\,]1; +\infty[\,.$

(a) Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in\,]1; +\infty[$:

$$f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}.$$

(b) En déduire la primitive de f sur $]1;+\infty[$ qui vaut 3 en 2.

3. Soit $f(x) = \frac{2x+3}{(x+3)^3}, \quad x \in \left]-\infty;-3\right[$.

   (a) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \left]-\infty;-3\right[$:

$$f(x) = \frac{a}{(x+3)^2} + \frac{b}{(x+3)^3}.$$

   (b) En déduire la primitive de f sur $]-\infty;-3[$ qui s'annule en -4.

4. **Le B.A. BA... du bac !** Soit $f(x) = \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}, \quad x \in \left]1;+\infty\right[$.

   (a) Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in \left]1;+\infty\right[$:

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}.$$

   (b) En déduire la primitive de f sur $]1;+\infty[$ qui s'annule en 2.

5. Soit $f(x) = \frac{24x^3+18x^2+10x+9}{(3x-1)(2x+1)^2}, \quad x \in \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right[$.

   (a) Montrer qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que :

$$f(x) = a + \frac{b}{3x-1} + \frac{c}{2x+1} + \frac{d}{(2x+1)^2}.$$

   (b) En déduire toutes les primitives de f sur $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right[$.