

## Correction du devoir n° 2 Du 1<sup>er</sup> Semestre

### Exercice 1 : $0,5 \times 10 = 5$ points

1 Déterminons une primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur  $I$ .

a  $f(x) = (6x - 3)(4x^2 - 4x + 2)^3$  ;  $I = \mathbb{R}$  (0,5pt)

$$\begin{aligned} f(x) &= (6x - 3)(4x^2 - 4x + 2)^3 \\ &= 3(2x - 1)(4x^2 - 4x + 2)^3 \\ &= 3 \times \frac{1}{4}(8x - 4)(4x^2 - 4x + 2)^3 \\ &= 3 \times \frac{1}{4}(4x^2 - 4x + 2)'(4x^2 - 4x + 2)^3 \\ &= 3 \times \frac{1}{4}u'u^3 \\ F(x) &= 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}u^4 + k \\ &= 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}(4x^2 - 4x + 2)^4 + k \\ &= \frac{3}{16}(4x^2 - 4x + 2)^4 + k \end{aligned}$$

$$F(x) = \frac{3}{16}(4x^2 - 4x + 2)^4 + k$$

b  $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{3 + \cos x}}$  ;  $I = \mathbb{R}$  (0,5pt)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin x}{\sqrt{3 + \cos x}} \\ &= \frac{-(3 + \cos x)'}{\sqrt{3 + \cos x}} \\ &= \frac{-(u)'}{\sqrt{u}} \\ F(x) &= -2\sqrt{u} + k \\ &= -2\sqrt{3 + \cos x} + k \end{aligned}$$

$$F(x) = -2\sqrt{3 + \cos x} + k$$

c  $f(x) = 2 \cos 3x - 3 \sin 2x$  ;  $I = \mathbb{R}$  (0,5pt)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \cos 3x - 3 \sin 2x \\ &= 2 \times \cos(ax + b) - 3 \times \sin(ax + b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F(x) &= 2 \times \frac{1}{a} \sin(ax + b) + 3 \times \frac{1}{a} \cos(ax + b) \\
 &= 2 \times \frac{1}{3} \sin(3x) + 3 \times \frac{1}{2} \cos(2x) \\
 &= \frac{2}{3} \sin(3x) + \frac{3}{2} \cos(2x)
 \end{aligned}$$

$$F(x) = \frac{2}{3} \sin(3x) + \frac{3}{2} \cos(2x) + k$$

**d**  $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}} + \sin x \sin 2x \quad ; I = ]-\infty; -1[ \quad (0,5pt)$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}} + \sin x \sin 2x \\
 &= \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}} + \sin x \times \cos x \times \sin x \\
 &= \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}} + \cos x \times \sin^2 x \\
 &= \frac{3(x^2 - 1)'}{2\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{1}{3}(\sin^3 x)' \\
 &= \frac{3(u)'}{2\sqrt{u}} + \frac{1}{n+1}(\sin^{n+1} x)' \\
 F(x) &= \frac{3}{2} \times 2\sqrt{u} + \frac{1}{3} \sin^3 x + k \\
 &= 3\sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{3} \sin^3 x + k
 \end{aligned}$$

$$F(x) = 3\sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{3} \sin^3 x + k$$

**2** Soit  $k$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$  par :  $k(x) = \frac{3x - 2}{(x + 2)^3}$ .

**a** Déterminons les  $a$  et  $b$  tels que  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, k(x) = \frac{a}{(x + 2)^2} + \frac{b}{(x + 2)^3}$ . **(0,5pt)**

$$\begin{aligned}
 k(x) &= \frac{a}{(x + 2)^2} + \frac{b}{(x + 2)^3} \\
 &= \frac{a(x + 2)}{(x + 2)^3} + \frac{b}{(x + 2)^3} \\
 &= \frac{a(x + 2) + b}{(x + 2)^3} \\
 &= \frac{ax + 2a + b}{(x + 2)^3}
 \end{aligned}$$

Par identification  $3x - 2 = ax + 2a + b$

$$3x - 2 = ax + 2a + b \implies \begin{cases} a = 3 \\ 2a + b = -2 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} a = 3 \\ 6 + b = -2 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} a = 3 \\ b = -8 \end{cases}$$

$$\text{Donc } k(x) = \frac{3}{(x + 2)^2} + \frac{-8}{(x + 2)^3}$$

$$k(x) = \frac{3}{(x+2)^2} + \frac{-8}{(x+2)^3} + c$$

**b** Dédudions-en la primitive  $K$  de  $k$  qui prend la valeur 2 en -3. (0,5pt)

$$\begin{aligned} k(x) &= \frac{3}{(x+2)^2} + \frac{-8}{(x+2)^3} \\ &= 3 \frac{1}{(x+2)^2} - 8 \frac{1}{(x+2)^3} \\ &= 3 \frac{1}{u^2} - 8 \frac{1}{v^3} \\ &= 3 \frac{1}{u^n} - 8 \frac{1}{v^n} \\ K(x) &= 3 \frac{-1}{(n-1)u^{n-1}} - 8 \frac{-1}{(n-1)v^{n-1}} + k \\ &= -3 \frac{1}{(x+2)} + 8 \frac{1}{2(x+2)^2} + k \\ &= -\frac{1}{(x+2)} + 4 \frac{1}{(x+2)^2} + k \end{aligned}$$

$$K(x) = -\frac{1}{(x+2)} + \frac{4}{(x+2)^2} + c$$

## Problème : ( 12,75 points $\approx$ 144 mns)

On note  $(C_f)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité 1cm avec

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1} & ; \text{si } x \leq 0 \\ x + \sqrt{x^2 + x} & ; \text{si } x > 0 \end{cases}$$

### Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire : (2pts)

Soit  $g$  la fonction numérique définie par :  $g(x) = -x^3 + 3x - 4$ .

**1** Étudions les variations de  $g$  puis dressons son tableau de variations. (0,75pt)

$$g'(x) = -3x^2 + 3$$

$$g'(x) = 0 \implies -3x^2 + 3 = 0$$

$$\implies -x^2 + 1 = 0$$

$$\implies x = -1 \text{ ou } x = 1$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$-x^2 + 1$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

Sur  $] -\infty; -1] \cup [1; +\infty[$   $g'(x) \leq 0$  donc  $g$  est décroissant

Sur  $[-1; 1]$   $g'(x) \geq 0$  donc  $g$  est croissant

### Limites

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 + 3x - 4 \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 + 3x - 4 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 \\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$g(-1) = -(-1)^3 + 3(-1) - 4$$

$$\begin{aligned}g(-1) &= 1 - 3 - 4 \\ &= -6\end{aligned}$$

$$g(1) = -(1)^3 + 3(1) - 4$$

$$\begin{aligned}g(1) &= -1 + 3 - 4 \\ &= -2\end{aligned}$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$		$0$	$0$	
$f$	$+\infty$	$-6$	$-2$	$-\infty$

- 2 a Montrons que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in \mathbb{R}$ . (0,5pt)

#### Existence

D'après le tableau de variation  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \times g(-1) < 0$  d'où l'existence d'une solution

#### Unicité

$g$  est continue et strictement décroissant de  $]-\infty, -1[$  vers  $] +\infty, -6[$  d'où l'unicité de la solution

- b Donnons un encadrement de  $\alpha$  à  $10^{-1}$ . (0,5pt)

On sait que la solution unique  $\alpha$  vérifie  $\alpha < -1$ .

Calculons  $g(x) = -x^3 + 3x - 4$  pour deux valeurs décimales consécutives.

$$g(-2) = -(-8) + 3(-2) - 4 = 8 - 6 - 4 = -2 < 0$$

$$g(-1,5) = -(-3,375) + 3(-1,5) - 4 = 3,375 - 4,5 - 4 = -5,125 < 0$$

On cherche donc plus à gauche.

$$g(-2,1) = -(-9,261) + 3(-2,1) - 4 = 9,261 - 6,3 - 4 = -1,039 < 0$$

$$g(-2,2) = -(-10,648) + 3(-2,2) - 4 = 10,648 - 6,6 - 4 = 0,048 > 0$$

La fonction  $g$  est continue et strictement décroissante sur  $]-\infty, -1]$ , donc elle change de signe une seule fois sur cet intervalle.

Encadrement à  $10^{-1}$  :

$$-2,2 < \alpha < -2,1$$

- 3 En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $]-\infty; 0]$ . (0,25pt)

$$g(x) > 0 \quad \text{si } x \in ]-\infty, \alpha[$$

$$g(x) = 0 \quad \text{si } x = \alpha$$

$$g(x) < 0 \quad \text{si } x \in ]\alpha, 0]$$

## Partie B : Étude de la fonction $f$ (9pts)

1 Déterminons l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ . (0,5pt)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1} & ; \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^3 - 2x^2}{x + \sqrt{x^2 + x}} & ; \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{Posons } f(x) = \begin{cases} f_1(x) & ; \text{si } x \leq 0 \\ f_2(x) & ; \text{si } x > 0 \end{cases}$$

•  $f_1$

$$f_1 \quad \exists \quad \text{ssi } x^2 - 1 \neq 0 \text{ et } x \leq 0$$

$$x \neq -1 \text{ et } x \neq 1 \text{ et } x \in ]-\infty, 0]$$

$$-1 \in ]-\infty, 0] \text{ et } 1 \notin ]-\infty, 0]$$

$$Df_1 = ]-\infty; -1[ \cap ]-1; 0[$$

•  $f_2$

$$f_2 \quad \exists \quad \text{ssi } x^2 + x \geq 0 \text{ et } x > 0$$

$$\text{Posons } x^2 + x = 0$$

$$x^2 + x = 0 \implies x = 0 \text{ ou } x = -1$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$+\infty$
$x^2 + x$				+

$$Df_2 = ]0; +\infty[$$

$$Df = Df_1 \cup Df_2$$

$$\text{Donc} \quad = ]-\infty; -1[ \cap ]-1; 0[ \cup ]0; +\infty[$$

$$= \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

2 a • Calculons les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ . (1pt)

$$\text{-- En } -\infty: f(x) = f_1(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\text{-- En } +\infty: f(x) = f_2(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x^2 + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x^2 + x}$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- En  $-1^-$ :  $f(x) = f_1(x)$   

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{-3}{0}$$
  

$$= \frac{-3}{0^+}$$
  

$$= -\infty$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$x^2 - 1$		$+$	$0$	$-$	

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$$

- En  $-1^+$ :  $f(x) = f_1(x)$   

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1}$$
  

$$= \frac{-3}{0^-}$$
  

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

- Déduisons-en l'existence d'une asymptote dont on précisera. **(0,25pt)**  
 Comme  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty$  donc  $x = -1$  est une asymptote verticale

Donc  $x = -1$  est une asymptote verticale à  $(C_f)$

- b** • Pour  $x \leq 0$ , déterminons les réels  $a, b, c$  et  $d$  tels que :  $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 - 1}$  **(0,5pt)**

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 - 1} \Rightarrow f(x) = \frac{(ax + b)(x^2 - 1) + cx + d}{x^2 - 1}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 - ax - b + cx + d}{x^2 - 1}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + (c - a)x + (d - b)}{x^2 - 1}$$

On a  $\frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1} = \frac{ax^3 + bx^2 + (c - a)x + (d - b)}{x^2 - 1}$

par identification  $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c - a = 0 \\ d - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c - 1 = 0 \\ d + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \\ d = -2 \end{cases}$

Ainsi,  $f(x) = x - 2 + \frac{x - 2}{x^2 - 1}$

- Déduisons-en la nature de la branche infinie en  $-\infty$ . **(0,25pt)**  
 En posant  $(\Delta_1) : y = x - 2$ , si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y = 0$  alors  $y = x - 2$  est asymptote oblique

En effet

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2}{x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2}$$

$$= 0$$

Donc  $(\Delta_1) : y = x - 2$  est une asymptote oblique à  $(C_f)$  en  $-\infty$

**c** Donner la nature de l'asymptote en  $+\infty$ . (0,5pt)

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

• Cherchons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$

• Cherchons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x^2 + x} - 2x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc  $(\Delta_2) : y = 2x + \frac{1}{2}$  est une asymptote oblique à  $(C_f)$  en  $+\infty$

**3 a** Montrons que  $f$  est continue sur  $D_f$ . (0,75pt)

• **Continuité sur chaque intervalle**

– **Sur**  $] -\infty, 0] \setminus \{-1\}$

La fonction  $x \mapsto \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1}$  est une fonction rationnelle.

Elle est donc continue sur son domaine de définition  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .

En particulier, elle est continue sur  $] -\infty, 0] \setminus \{-1\}$ .

– **Sur**  $]0, +\infty[$

Pour tout  $x > 0$ , on a  $x^2 + x > 0$ , donc la fonction  $x \mapsto \sqrt{x^2 + x}$  est bien définie et continue sur  $]0, +\infty[$ .

Ainsi, la fonction  $x \mapsto x + \sqrt{x^2 + x}$  étant somme de fonctions continues, est continue sur  $]0, +\infty[$ .

- **Continuité en 0**

- En  $0^-$ :  $f(x) = f_1(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1}$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

- En  $0^+$ :  $f(x) = f_2(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \sqrt{x^2 + x})$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

On a  $f(0) = \frac{0^3 - 2 \cdot 0^2}{0^2 - 1} = 0$

Finalement  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$  donc  $f$  est continue en 0

- **Conclusion**

La fonction  $f$  est continue sur  $] -\infty, 0] \setminus \{-1\}$ , sur  $]0, +\infty[$  et en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0 \text{ donc } f \text{ est continue sur } D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

**b** Étudions la dérivabilité de  $f$  en 0 puis interprétons le résultat obtenu. (1,5pt)

- Étudions la dérivabilité de  $f$  en 0

- En  $0^-$ :  $f(x) = f_1(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1} - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$$

$$= 0$$

- En  $0^+$ :  $f(x) = f_2(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sqrt{x^2 + x} - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x^2 - x}{x(x - \sqrt{x^2 + x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{x(x - \sqrt{x^2 + x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{(x - \sqrt{x^2 + x})}$$

$$= \frac{-1}{0}$$

Supposons que  $x - \sqrt{x^2 + x} > 0$

$$x - \sqrt{x^2 + x} > 0 \implies \sqrt{x^2 + x} < x$$



$$\sqrt{x^2 + x} < x \implies \begin{cases} x^2 + x > 0 \\ x > 0 \\ x^2 + x < x^2 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x^2 + x > 0 \\ x > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$+\infty$
$x^2 + x$		$0$	$0$	$+$
$x$			$0$	$+$
$x$			$0$	$+$

$$S = \emptyset$$

Ainsi, il n'existe pas de  $x > 0$  pour lequel  $x - \sqrt{x^2 + x} > 0$

**Donc**  $x - \sqrt{x^2 + x} < 0, \forall x \in ]0; +\infty[$

Ainsi  $\forall x \in ]0; +\infty[ f'(x) > 0$  donc  $f$  est croissant  $]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{(x - \sqrt{x^2 + x})} \\ &= \frac{-1}{0^-} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

**Autre Méthode**

+++++

On calcule la dérivée à droite en 0 :

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sqrt{x^2 + x}}{x}.$$

On écrit :

$$\frac{x + \sqrt{x^2 + x}}{x} = 1 + \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x}.$$

Or,

$$\frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \sqrt{\frac{x^2 + x}{x^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}.$$

Lorsque  $x \rightarrow 0^+$ , on a  $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ , donc

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x}} \rightarrow +\infty.$$

Ainsi,

$$f'_+(0) = +\infty.$$

+++++

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$$

- Interprétons le résultat obtenu.

- $f$  est dérivable à gauche de 0 et  $y = 2x$  est une demi-tangente en  $0^-$  ;
- $f$  n'est pas dérivable à droite de 0 donc admet une demi-tangente orientée vers le haut en  $0^+$

Le point d'abscisse 0 est donc un point anguleux, ce qui explique la non-dérivabilité de  $f$  en 0.

4 Démontrons que :  $f(x) = -2 + \frac{3(\alpha - 2)}{\alpha^2 - 1}$ . (0,5pt)

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1} \implies f(x) = \frac{\alpha^3 - 2\alpha^2}{\alpha^2 - 1}$$

Comme  $g(\alpha) = 0$  alors  $-\alpha^3 + 3\alpha - 4 = 0$  donc  $\alpha^3 = 3\alpha - 4$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\alpha^3 - 2\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \implies f(\alpha) = \frac{\alpha^3 - 2\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \\ &\implies f(\alpha) = \frac{3\alpha - 4 - 2\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \\ &\implies f(\alpha) = -\frac{2\alpha^2 - 3\alpha + 4}{\alpha^2 - 1} \\ &\implies f(\alpha) = -\frac{2(\alpha^2 - 1) - 3(\alpha - 2)}{\alpha^2 - 1} \\ &\implies f(\alpha) = \frac{-2(\alpha^2 - 1) + 3(\alpha - 2)}{\alpha^2 - 1} \\ &\implies f(\alpha) = \frac{-2(\alpha^2 - 1)}{\alpha^2 - 1} + \frac{3(\alpha - 2)}{\alpha^2 - 1} \\ &\implies f(\alpha) = -2 + \frac{3(\alpha - 2)}{\alpha^2 - 1} \end{aligned}$$

5 a Montrons que  $\forall x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0[$ , on a :  $f'(x) = \frac{-xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$  puis étudier son signe

- Montrons que  $\forall x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0[$ , on a :  $f'(x) = \frac{-xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$  (0,5pt)

$$\text{On a : } f'(x) = \frac{-xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$$

La fonction  $f$  est dérivable sur  $]-\infty, -1[ \cup ]-1, 0[$  comme quotient de fonctions dérivables, avec  $x^2 - 1 \neq 0$  sur ces intervalles.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^3 - 2x^2)'(x^2 - 1) - (x^3 - 2x^2)(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{(3x^2 - 4x)(x^2 - 1) - (x^3 - 2x^2)(2x)}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{3x^4 - 3x^2 - 4x^3 + 4x - (2x^4 - 4x^3)}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{x^4 - 3x^2 + 4x}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{-x(-x^3 + 3x - 4)}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{-xg(x)}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \forall x \in ]-\infty, -1[ \cup ]-1, 0[, \quad f'(x) = \frac{-xg(x)}{(x^2 - 1)^2}.$$

- le signe de  $f'(x)$  dépend du numérateur (0,5pt)

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$-1$	$0$	$+\infty$
$-x$	+	+	+	0	
$g(x)$	+	0	-	-	
$-xg(x)$	+	0	-	-	

Ainsi,

si  $x \in ]-\infty, \alpha]$ ,  $f'(x) \geq 0$  donc  $f$  est croissante sur  $]-\infty; \alpha]$

si  $x \in [\alpha, -1[ \cup ]-1, 0]$ ,  $f'(x) \leq 0$  donc  $f$  est décroissante sur  $[\alpha, -1[ \cup ]-1, 0]$

**b** Calculons  $f'(x)$  sur  $]0; +\infty[$  et étudions son signe.

- Calculons  $f'(x)$  sur  $]0; +\infty[$  (0,5pt)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x^2+x} + 2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x^2+x} + 2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} \end{aligned}$$

- étudions son signe (0,25pt)

Si  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2+x} + 2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$  le signe dépend du numérateur

Or  $2\sqrt{x^2+x} + 2x+1 > 0 \forall x \in ]0; +\infty[$

Ainsi  $\forall x \in ]0; +\infty[$   $f'(x) > 0$  donc  $f$  est croissant  $]0; +\infty[$

**c** Dressons le tableau de variation de  $f$  sur  $D_f$ . (0,75pt)

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$-1$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	+
$f$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$	$0$	$+\infty$

**6** Construisons soigneusement la courbe  $(C_f)$ . (0,75pt)

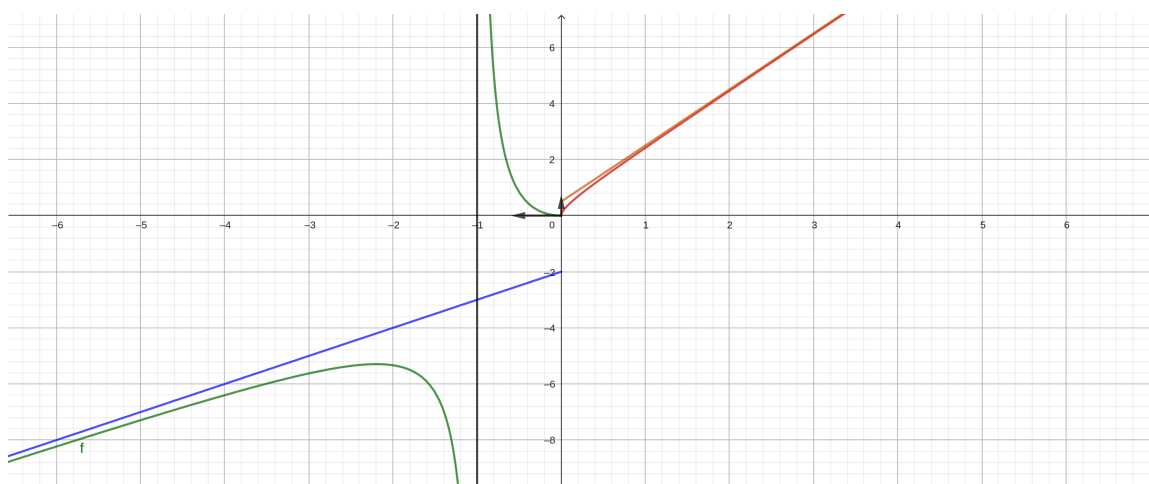


Figure 1: Courbe de  $(C_f)$

[Clique ici pour voir la courbe sur géogebra](#)

### Partie C : Bijection (1,75pts)

Soit  $h$  la restriction de  $f$  sur  $I = ]0; +\infty[$ .

- 1 Montrons que  $h$  réalise une bijection de  $I$  vers un intervalle  $J$  à préciser. (0,25pt)

Sur  $I$   $h$  est continue et strictement croissante donc réalise une bijection de  $I$  vers  $J = [0, +\infty[$

Comme  $\forall x \in I, h'(x) \neq 0$  donc  $h^{-1}$  est dérivable sur  $J$

- 2 Calculons  $h^{-1}(1)$  et  $(h^{-1})'(\sqrt{2} + 1)$ . (0,5pt)

$$h(x) = x + \sqrt{x^2 + x}.$$

- Calcul de  $h(1)$

$$h(1) = \sqrt{2} + 1$$

$$h(1) = \sqrt{2} + 1$$

- Calcul de  $(h^{-1})'(\sqrt{2} + 1)$

$$(h^{-1})'(\sqrt{2} + 1) = \frac{1}{h'(h^{-1}(\sqrt{2} + 1))} \text{ Or } h(1) = \sqrt{2} + 1 \text{ donc } h^{-1}(\sqrt{2} + 1) = 1$$

$$(h^{-1})'(\sqrt{2} + 1) = \frac{1}{h'(1)} \text{ comme } h'(x) = 1 + \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{2 + 1}{2\sqrt{1^2 + 1}}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{3}{2\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{\frac{2\sqrt{2} + 3}{2\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 3}$$

$$(h^{-1})'(\sqrt{2} + 1) = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 3}$$

- 3 Explicitons  $h^{-1}(x)$ . (0,5pt)

$$\text{Soit } y = h(x) = x + \sqrt{x^2 + x}.$$

On isole la racine :

$$y - x = \sqrt{x^2 + x}.$$

En élevant au carré, on obtient :

$$(y - x)^2 = x^2 + x.$$

$$y^2 - 2xy + x^2 = x^2 + x.$$

En simplifiant :

$$y^2 - 2xy = x.$$

On factorise par  $x$  :

$$y^2 = x(1 + 2y).$$

D'où :

$$h^{-1}(x) = \frac{x^2}{1+2x}$$

- 4 Construisons  $(C_{h^{-1}})$  dans le repère précédent. (0,5pt)

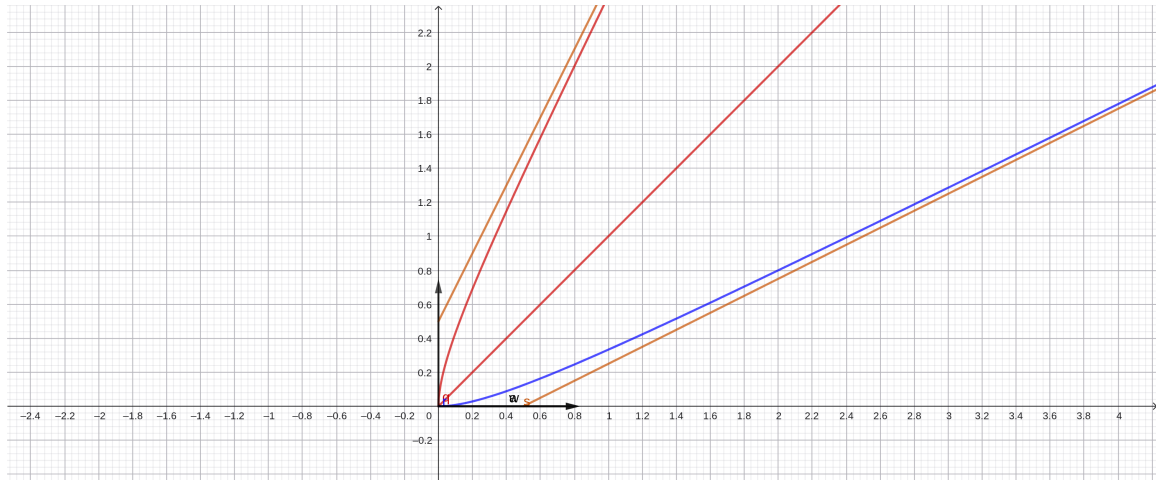


Figure 2: Courbe de  $(C_f)$

[Clique ici pour voir la courbe sur géogébra](#)