Problèmes proposés au BAC S2 Sénégal de 1999 à 2022

Problème 1 **Extrait BAC 1999 1^{er} groupe** On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| & \text{si } x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\\ x^2 e^{-x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, d'unité 2 cm.

Partie A

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f. Calculer $f(-2)$ et $f(3)$.
2. Calculer les limites aux bornes de D_f.
3. Étudier la continuité de f en 0.
4. a. Établir que la dérivée de f est donnée par :
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} \text{si } x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\\ xe^{-x}(2-x) \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$
   b. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Justifier votre réponse.
   c. Dresser le tableau de variations de f.
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α comprise entre $-1{,}6$ et $-1{,}5$.
6. a. Justifier que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C_f) en $-\infty$.
   b. Étudier la position relative de (C_f) par rapport à la droite (D) pour $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 0[$.
   c. Tracer (C_f).

Partie B :

Soit g la restriction de f à $I = [0; 2]$.

1. Montrer que g définit une bijection de I vers un intervalle J à préciser.
2. On note g^{-1} la bijection réciproque de g.
   a. Résoudre l'équation $g^{-1}(x) = 1$.
   b. Montrer que $\left(g^{-1}\right)'\left(\dfrac{1}{e}\right) = e$.
   c. Construire $(C_{g^{-1}})$, la courbe de g^{-1}.

Partie C :

β étant un réel strictement positif, on pose :
$$I(\beta) = \int_0^\beta f(x)\,dx$$

1. a. Interpréter graphiquement $I(\beta)$.
   b. En procédant par une intégration par parties, calculer $I(\beta)$.
2. Calculer $\lim\limits_{\beta \to -\infty} I(\beta)$.
3. On pose $\beta = 2$.
   a. Calculer $I(2)$.
   b. En déduire la valeur en cm^2 de l'aire du domaine du plan délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \dfrac{4}{e^2}$.

Problème 2 **BAC 1999 Remplacement**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \in]-\infty; 0[\\ \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| & \text{si } x \in [0; 1[\cup]1; +\infty[\end{cases}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité 2 cm.

Partie A :

1. Étudier la continuité de f en 0.
2. a. Montrer que $\forall x \in]0; 1[$, $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\ln(1-x)}{x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x}$
   b. Étudier la dérivabilité de f en 0.
   c. En déduire que (C_f) admet au point d'abscisse 0 deux demi-tangentes dont on donnera les équations.
3. Étudier les variations de f.
4. Tracer (C_f).

Partie B :

Soit g la restriction de f à $]1;+\infty[$.

1. Montrer que g est une bijection de $]1;+\infty[$ vers un intervalle J à préciser.
   On notera g^{-1} la bijection réciproque de g.
2. Montrer que l'équation $g(x) = -e$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]1;+\infty[$.
   (On ne demande pas de calculer α).
3. Montrer que $\forall x \in J,\ g^{-1}(x) = 1 - \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.
4. Construire $(C_{g^{-1}})$.
   (On indiquera la nature et l'équation de chacune des asymptotes à (C_g) et $(C_{g^{-1}})$).
5. Calculer en cm^2 l'aire A de l'ensemble des points $M(x;y)$ défini par :
   $$\begin{cases} -\ln 7 \leq x \leq -1 \\ 0 \leq y \leq g^{-1}(x) \end{cases}$$

Problème 3 **BAC 2000 1$^{\text{er}}$ groupe** Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x\ln(x+1) & \text{si } x \geq 0 \\ xe^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ **(unité graphique 2 cm)**.
On désigne par (C) la courbe représentative de f et (Δ) la droite d'équation $y = x$.

Partie A :

1. a. Montrer que f est continue en 0.
   b. Étudier la dérivabilité de f en 0.
   c. Interpréter les résultats précédents.
2. a. Montrer que $\forall x < 0,\ f'(x) > 0$.
   b. Étudier les variations de f sur $[0;+\infty[$. En déduire que $\forall x > 0,\ f'(x) > 0$.
   c. Donner le tableau de variations de f.
3. a. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$, **(on pourra poser** $u = \dfrac{1}{x}$**)**.
   b. Montrer que la droite $(D) : y = x + 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.
      On admettra que (C) est en dessous de (D).
   c. Déterminer la nature de la branche infinie de (C) en $+\infty$.
4. Construire (C), on précisera les coordonnées de I, intersection de (C) et (Δ) pour $x > 0$.

Partie B :

1. Déterminer les réels a, b et c tels que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad \frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}.$$
2. En déduire au moyen d'une intégration par parties que la fonction F telle que :
   $$F(x) = \frac{(x^2-1)\ln(x+1)}{2} - \frac{1}{4}(x^2 - 2x)$$
   est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$.
3. En déduire en cm^2 l'aire A de la partie du plan délimitée par (Δ), (C) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = e - 1$.

Partie C :

1. a. Montrer que f admet une bijection réciproque notée f^{-1}.
   b. f^{-1} est-elle dérivable en 0 ? Préciser la nature de la tangente en 0 à la courbe f^{-1}.
2. Construire (C_0), la courbe de f^{-1} dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
3. Déduire du **B.3)** l'aire du domaine D définie par : $M(x;y)$ tels que :
   $$\begin{cases} 0 \leq x \leq e - 1 \\ f(x) \leq y \leq f^{-1}(x) \end{cases}$$

Problème 4 **BAC 2000 Remplacement**
Partie A : Soit g la fonction définie par $g(x) = 1 - xe^{-x}$.

1. Étudier les variations de g.
2. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \ln(-x) & \text{si } x < -1 \\ (x+1)(1+e^{-x}) & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0;\vec{i};\vec{j})$ **(unité graphique 2 cm)**.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les variations de f, puis dresser le tableau de variations de f.
3. a. Montrer que la droite $(D) : y = x+1$ est une asymptote à (C_f) en $+\infty$.
   b. Étudier la position relative de (C_f) par rapport à (D) sur $[-1;+\infty[$.
4. Montrer qu'il existe un unique point de la courbe (C_f) où la tangente (T) est parallèle à la droite (D).

5. Tracer (C_f), l'asymptote (D) et la tangente (T), on précisera la tangente ou les demi-tangentes à (C_f) au point d'abscisse -1.

6. a. Montrer que f est une bijection de $[-1;+\infty[$ sur un ensemble J que l'on précisera.

   b. Construire (C_0), la courbe de f^{-1} sur le même graphique que la courbe (C_f).

Partie C : Pour $\beta \geq -1$, on note $A(\beta)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan définie par :

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq \beta \\ x+1 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

1. Calculer $A(\beta)$ à l'aide d'une intégration par parties.

2. Montrer que $A(\beta)$ admet une limite finie lorsque $\beta \to +\infty$.
   Interpréter graphiquement cette limite.

Problème 5 BAC 2001 1er groupe

On considère la fonction g définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x(1-\ln x)^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de g sur son ensemble de définition.

2. Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variations.

3. Tracer (C).

4. Soit α un réel appartenant à l'intervalle $]0;e[$.

   a. Calculer à l'aide de deux intégrales par parties, l'aire $A(\alpha)$ du domaine plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations respectives $x=\alpha$ et $x=e$.

   b. Calculer

5. a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C) et la droite (Δ) d'équation $y=x$.

   b. Pour quelles valeurs de m la droite (Δ_m) d'équation $y=mx$ recoupe-t-elle la courbe (C) en deux points M_1 et M_2 autres que O ?

   c. La droite (Δ_m) coupe la droite (D) d'équation $x=e$ en P.
   Montrer que $OM_1 \times OM_2 = OP^2$.

6. a. Montrer que la restriction h de la fonction g à l'intervalle $[e;+\infty[$ admet une réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.

   b. Sur quel ensemble h^{-1} est-elle dérivable ?
   Calculer $h(e^2)$; en déduire $(h^{-1})'(e^2)$.

   c. Construire la courbe de h^{-1}.

Problème 6 BAC 2002 1er groupe

Partie A : On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(\ln x)^2} - \dfrac{1}{\ln x} & \text{si } x > 0 \text{ et } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue en 0.

2. Étudier les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

3. Dresser le tableau de variations de g.

4. En déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x.

5. Calculer en cm^2 l'aire de la partie plane comprise entre la courbe de g, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives : $x=e$ et $x=e^2$.

Partie B : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{\ln x} & \text{si } x > 0 \text{ et } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue à droite et dérivable à droite au point 0.
   En déduire l'existence d'une demi-tangente à la courbe représentative (C) de f au point d'abscisse 0.

2. Étudier les limites aux bornes de son ensemble de définition.

3. Comparer $f'(x)$ et $g(x)$.
   En déduire les variations de f et son tableau de variations.

4. Déterminer l'équation de la tangente (D) à la courbe (C) au point d'abscisse e^2.

5. Soit M le point de (C) d'abscisse x et N le point de (D) de même abscisse x.
   On pose $\varphi(x) = \overline{MN}$.

   a. Montrer que $\varphi(x) = f(x) + \dfrac{x+e^2}{4}$.

   b. Déduire de la **partie A** le tableau de variations de $f'(x)$ puis le signe de $f'(x)$ sur $]1;+\infty[$.

   c. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $]1;+\infty[$ et la position de (C) par rapport à (D) pour les points d'abscisse $x > 1$.

6. Représenter dans le plan rapporté à un repère orthonormé la courbe (C) et la droite (D) **unité 2cm**.

Problème 7 BAC 2003 1$^{\text{er}}$ GROUPE

Partie A : On considère la fonction u définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$u(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{2x}{x^2-1}$$

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de u.
   b. Calculer $u(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$.
2. Étudier les variations de u.
   (il n'est pas nécessaire de calculer la limite de u en 1).
3. Déduire des résultats précédents que :
   a. $\forall x \in [0;1[,\ u(x) \geq 0.$
   b. $\forall x \in]1;+\infty[,\ u(x) < 0.$

Partie B : Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(x) = x\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - 1$$

1. Déterminer D_g (le domaine de définition de g) ; puis étudier la limite de g en 1.
1. a. Vérifier que $\dfrac{x+1}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1}$.
   b. En déduire que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{2}\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right) = 1.$$

   c. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$. Interpréter géométriquement ce résultat.
   d. Dresser le tableau de variations de g.
   e. Montrer qu'il existe un réel α unique appartenant à $]0;1[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   Donner un encadrement d'ordre 1 de α.
2. Tracer la courbe (C_g) de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé **(unité 2 cm)**.

Partie C : Soit h la fonction définie sur $[0;1[$ et

$$f(x) = (x^2-1)\ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $[0;1[$ et que : $f'(x) = g(x)$, $\forall x \in [0;1[$.
2. Déterminer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_g), l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \alpha$.

Problème 8 BAC 2004 1$^{\text{er}}$ GROUPE

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{(2x-1)e^x - 2x + 2}{e^x - 1}.$$

On note (C) la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, dont l'unité est 2 cm.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f, et trouver les réels a, b et c tels que pour tout $x \in D_f$, on ait :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{e^x - 1}.$$

2. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.
3. a. Déterminer la fonction dérivée de f.
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation :

$$2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0.$$

   c. En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variations de f.
4. Démontrer que les droites d'équations respectives $y = 2x-1$ et $y = 2x-2$ sont des asymptotes de (C) respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$.
   Préciser l'autre asymptote.
5. Soit x un réel de D_f. On considère les deux points M et M' de (C) d'abscisses respectives x et $-x$.
   Déterminer les coordonnées du milieu Ω du segment $[MM']$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?
6. Tracer la courbe (C).
7. a. Trouver les réels α et β tels que, pour tout réel x de l'ensemble D_f, on ait :

$$f(x) = 2x + \alpha + \frac{\beta e^x}{e^x - 1}.$$

   b. Soit k un réel supérieur ou égal à 2.
   Déterminer l'aire $A(k)$ en cm^2 de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x;y)$ vérifient :

$$\ln 2 \leq x \leq \ln k \quad \text{et} \quad 2x - 1 \leq y \leq f(x).$$

Problème 9 BAC 2004 Remplacement

Partie A : Soit l'équation différentielle

$$(E) : -\tfrac{1}{2}y'' + \tfrac{3}{2}y' - y = 0$$

Déterminer la solution g de (E) dont la courbe représentative (C) passe par le point $A(0;-1)$ et dont la tangente en ce point est parallèle à l'axe des abscisses.

Partie B : Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} - e^x.$$

On note (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ **(unité 2 cm)**.

1. Étudier les variations de f.
2. Déterminer l'équation de la tangente à (Γ) au point d'abscisse $\ln 2$.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

Partie C : Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0;+\infty[$.

1. Démontrer que h réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
2. Démontrer que h^{-1} est dérivable en 3, puis calculer $(h^{-1})'(3)$.
3. Déterminer $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
4. Tracer (C_0), la courbe représentative de h^{-1} dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Problème 10 BAC 2005 1er GROUPE

Partie A : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} - \ln(e^x+1).$$

On note (C) la représentation graphique de la fonction f dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ **(unité 2 cm)**.

1. Étudier les variations de f.
2. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - 1 + x] = 0$.
   Que peut-on en déduire pour (C_f) ?
3. Construire (C_f).
4. Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty;+\infty[$ sur $]-\infty;0[$.

Partie B : Soit g la fonction définie par :

$$f(x) = e^x \ln(1+e^x)$$

On note (C_g) sa courbe représentative.

1. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, pour tout réel x,
   $f'(x) = e^{-x} f(x)$.
3. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$.
4. En déduire la nature des branches infinies.
5. Dresser le tableau de variations de g.
6. Construire (C_g) dans le repère précédent.
7. a. Montrer que $\frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$.

   b. À tout réel β, on associe le réel
   $$I(\beta) = \int_0^\beta g(x)\,dx.$$
   Justifier l'existence de $I(\beta)$.

   c. Calculer $I(\beta)$ à l'aide d'une intégration par parties.

   d. Calculer $\lim\limits_{\beta\to+\infty} I(\beta)$.

Partie C : On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}.$$

1. Vérifier que la fonction g étudiée dans la **partie B** est solution de (E).
2. Montrer qu'une fonction ϕ est solution de (E) si et seulement si $\phi - g$ est solution de l'équation différentielle $(E_0) : y' + y = 0$.
3. Résoudre (E_0) et en déduire les solutions de (E).
4. Déterminer la solution de (E) qui s'annule en $\ln 2$.

Problème 11 BAC 2006 1er GROUPE

Partie A : Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 1 + (1-x)e^{2-x}$$

1. Étudier les variations de h **(on ne demande pas de calculer les limites aux bornes de D_h)**.
2. En déduire le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x(1+e^{2-x})$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ **(unité 2 cm)**.

1. a. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   b. Préciser la nature de la branche infinie en $-\infty$.

   c. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x]$, puis interpréter le résultat obtenu.

   d. Préciser la position de (C_f) par rapport à la droite $(\Delta) : y = x$.
2. a. Dresser le tableau de variations de f.

   b. Montrer que f admet une bijection réciproque notée f^{-1}, définie sur $\mathbb{R}$.

   c. f^{-1} est-elle dérivable en 4 ?

   d. Étudier la position de (C_f) par rapport à sa tangente au point d'abscisse 2.

   e. Construire (C_f) **(on tracera la tangente au point d'abscisse 2)**.

f Construire $(C_{f^{-1}})$, la courbe de f^{-1} dans le repère précédent.

Partie C : Soit β un réel strictement positif sur $\mathbb{R}$. La région du plan est délimitée par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \beta$, et les courbes d'équations respectives $y = f(x)$ et $y = x$. Soit $A(\beta)$ l'aire de cette région R_β, en cm^2.

1. Calculer $A(\beta)$ en fonction de β.
2. Déterminer $\alpha = \lim\limits_{\beta \to +\infty} A(\beta)$.
   Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Problème 12 BAC 2007 1^er GROUPE

Partie A : Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = 1 + x + \ln x.$$

1. Dresser le tableau de variations de g.
2. Montrer qu'il existe un unique α solution de l'équation $g(x) = 0$.
   Vérifier que $0{,}2 < \alpha < 0{,}3$.
3. En déduire le signe de g sur $]0;+\infty[$.
4. Établir la relation : $\ln \alpha = -1 - \alpha$.

Partie B : On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \ln x}{1+x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ **(unité 5 cm)**.

1. Montrer que la fonction f est continue en 0 puis sur $[0;+\infty[$.
2. Étudier la dérivabilité de f en 0.
   Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[$,
   $$f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)^2}.$$
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$.
5. Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$.
6. Dresser le tableau de variations de f.
7. Construire (C_f). **(on prendra $\alpha = 0{,}3$).**

Partie C : Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = [1;+\infty[$.

1. Montrer que h réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser.
2. Soit h^{-1} la bijection réciproque de h.
   Étudier la dérivabilité de h^{-1} sur J.
3. Calculer $h(2)$ et $\left(h^{-1}\right)'\left(\dfrac{2\ln 2}{3}\right)$.
4. Construire $(C_{h^{-1}})$, la courbe de h^{-1} dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Partie D :

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale
   $$I = \int_1^e x \ln x \, dx.$$
2. Montrer que pour tout $x \in [1;e]$,
   $$\frac{x \ln x}{e+1} \leq f(x) \leq \frac{x \ln x}{2}.$$
3. En déduire que :
   $$\frac{e^2+1}{4(e+1)} \leq \int_1^e f(x)\, dx \leq \frac{e^2+1}{8}.$$

Problème 13 BAC 2008 1^er GROUPE

Partie A : Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 + \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) & \text{si } x < 0 \\ (2+x)e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ **(unité 1 cm)**.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
2. **a** Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de f.
   Préciser les asymptotes parallèles aux axes.
   b Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-2)]$.
   Interpréter graphiquement le résultat.
3. **a** Étudier la continuité de f en 0.
   b Démontrer que :
   $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x}-1}{x} = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1.$$
   c En déduire que f est dérivable à gauche et à droite en 0.
   f est-elle dérivable en 0 ?
4. Calculer $f'(x)$ pour :
   a $x \in]0;+\infty[$.
   b $x \in]-\infty;-1[\cup]-1;0[$.

5. Étudier le signe de $f'(x)$ pour :

   a. $x \in]0; +\infty[$.

   b. $x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[$.

6. Dresser le tableau de variations de f.

7. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à $]-3; -2[$.

8. Tracer (C_f). On mettra en évidence l'allure de (C_f) au point d'abscisse 0 et les droites asymptotes.

Partie B : Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; -1[$.

1. Montrer que g définit une bijection de $]-\infty; -1[$ sur un intervalle J à préciser.

2. On note g^{-1} sa bijection réciproque.

   a. Calculer $g(-2)$. Montrer que g^{-1} est dérivable en $\ln 3$.

   b. Calculer $(g^{-1})'(\ln 3)$.

   c. Représenter la courbe de g^{-1} dans le repère précédent.

Partie C : Soit A l'aire de la région du plan délimitée par les droites d'équations respectives $x = -2$, $x = -3$ et $y = x + 2$ et la courbe de f.

Problème 14 BAC 2009 1er GROUPE

1. a. Étudier les variations de la fonction f définie sur $]-1; +\infty[$ par : $f(x) = 2\ln(x+1)$. Tracer sa courbe représentative (C) et (T) dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, unité 2 cm.

   b. Démontrer que sur $[2; +\infty[$, la fonction l, définie par $l(x) = f(x) - x$, est bijective et que l'équation $l(x) = 0$ admet une solution unique λ.

2. On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = 2\ln(1 + U_n) \end{cases}$$

   a. Sans faire de calcul, représenter les quatre premiers termes de la suite sur le graphique.

   b. Démontrer par récurrence que pour tout n, $U_n \geq 2$.

   c. Montrer que pour tout $x \in [2; +\infty[$, on a :

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{3}.$$

   d. En déduire que pour tout n, on a :

$$|U_{n+1} - \lambda| \leq \frac{2}{3}|U_n - \lambda|,$$

$$|U_n - \lambda| \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

   et que (U_n) converge vers λ.

   e. Déterminer le plus petit entier naturel p tel que :

$$|U_p - \lambda| \leq 10^{-2}.$$

   Que représente U_p pour λ ?