# Exercice 1 :(3 pts) Restitution de Connaissances



1. Soit $\Omega$ l'univers associé à une expérience aléatoire $E$ et $p$ une probabilité définie sur $\Omega$.
Recopie et complète les relations ci-dessous :

   a. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ **(0,25 pt)**

   b. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$ **(0,25 pt)**

   c. Si $A$ et $B$ sont deux événements incompatibles de $\Omega$, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ **(0,25 pt)**

   d. Soit $D$ un événement quelconque de $\Omega$. $\mathbb{P}(D) = 1{,}5$ est-il possible ?
   **Non**, car une probabilité est toujours un nombre compris entre 0 et 1. **(0,25 pt)**

2. Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et $(u_n)$ une suite convergente vers un nombre réel $L \in I$, définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.
Répondre par vrai ou faux à l'affirmation : $L$ **est solution de l'équation** $f(L) = L$.
**Réponse : Vrai** **(0,5 pt)**

3. Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $u_2 = -3$.
Choisir la bonne réponse dans chaque cas : **(3 × 0,25 pt)**

| **Réponses** | **A** | **B** | **C** |
|---|---|---|---|
| $\lim u_n$ est : | | | **X** |
| L'expression de $u_n$ est : | | | **X** |
| L'expression de $S_n = u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ est : | | **X** | |

# Correction de l'Exercice 2 :(3 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. On considère la transformation $S$ du plan d'écriture complexe $z' = (1 - i\sqrt{3})z + 2$.
On pose $a = 1 - i\sqrt{3}$ et $b = 2$.
Le module de $a$ est :
$$|a| = |1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2.$$
Donc la transformation est une **rotation homothétique** (ou similitude directe) de rapport 2 et d'angle $\theta$ tel que $\arg(a) = \arg(1 - i\sqrt{3})$.
**Nature de** $S$ : $\boxed{\text{Similitude directe}}$. **(0,5 pt)**

2 **Rapport :** $|a| = 2$
**Argument de** $a$ :

$$\arg(1 - i\sqrt{3}) = -\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

Donc l'angle est $\boxed{-\frac{\pi}{3}}$.

**Rapport et angle :** $\boxed{2 \text{ et } -\frac{\pi}{3}}$. **(0,5 pt)**

3 Soit $A$ d'affixe $z_A = 2 - i\sqrt{3}$. Alors :

$$z'_C = (1 - i\sqrt{3})(2 - i\sqrt{3}) + 2.$$

Développons :

$$z'_C = 2(1) - 2i\sqrt{3} - i\sqrt{3}(1) + (i\sqrt{3})^2 + 2 = 2 - 3i - 3 + 2 = \boxed{-1 - 3i}.\textbf{(1 pt)}$$

4 $z_D = -\frac{2\sqrt{3}}{3}i.$
On calcule :

$$z'_D = (1 - i\sqrt{3})\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}i\right) + 2.$$

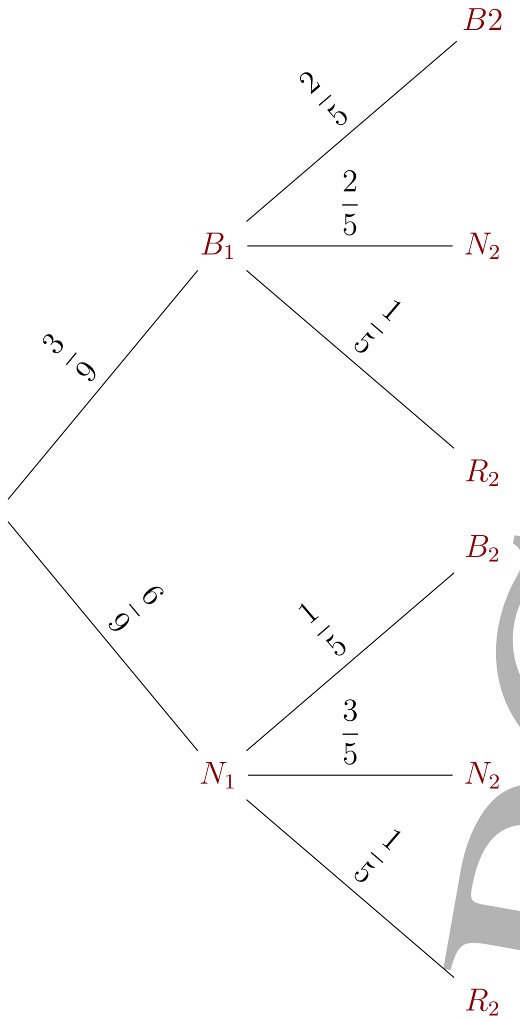
On simplifie :

$$z'_D = -\frac{2\sqrt{3}}{3}i + \frac{2 \cdot 3}{3} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}i + 2.$$

Donc $\boxed{z'_D = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}i}$. **(0,75 pt)**
Interprétation : $D$ est un point situé sur le **cercle de centre** le centre de la similitude et de rayon proportionnel à son image. Ce n'est ni un point fixe ni un invariant remarquable ici.
Autre interprétation : comme l'image n'est pas identique à $D$, $\boxed{D \text{ n'est pas un point invariant de } S}$. **(0,25 pt)**

## Exercice 3 :(4 pts)

1 Construisons un arbre pondère correspondant à cette épreuve.






2. Montrons que $P(N_2) = \frac{8}{15}$

**a** $P(N_2)$ peut être calculé par la loi des totalisations :

$$\begin{aligned}
P(N_2) &= P(N_2|B_1) \cdot P(B_1) + P(N_2|N_1) \cdot P(N_1) \\
&= \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{2}{15} + \frac{6}{15} \\
&= \frac{8}{15}
\end{aligned}$$

**b** Déterminons la probabilité de l'événement $B_2$

$$\begin{aligned}
P(B_2) &= P(B_2|B_1) \cdot P(B_1) + P(B_2|N_1) \cdot P(N_1) \\
&= \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{1}{15} + \frac{2}{15} \\
&= \frac{3}{15} \\
&= \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

**c** Déterminons la probabilité de tirer une boule blanche de $u_1$, sachant que la boule tirée dans $u_2$ est noire On utilise le théorème de Bayes :

$$
\begin{aligned}
P(B_1|N_2) &= \frac{P(N_2|B_1)\cdot P(B_1)}{P(N_2)} \\
&= \frac{\left(\frac{2}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{8}{15}} \\
&= \frac{\frac{2}{15}}{\frac{8}{15}} \\
&= \frac{2}{8} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

3 **a** Loi de probabilité de $X$ Nous avons les différents gains :

- Boule blanche dans $u_2$ : $3000F - 500F = 2500F$
- Boule noire dans $u_2$ : $0F - 500F = -500F$
- Boule rouge dans $u_2$ : $500F - 500F = 0F$

Calcul des probabilités de $X$ :

- $P(X = 2500) = P(B_2) = \frac{1}{5}$
- $P(X = -500) = P(N_2) = \frac{8}{15}$
- $P(X = 0) = P(R) = \left(\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{15}$

**b** Calculons de l'espérance mathématique, Variance et écart-type de $X$ et écart-type de $X$

- **Espérance mathématique**

$$
\begin{aligned}
E(X) &= 2500\cdot P(X = 2500) + (-500)\cdot P(X = -500) + 0\cdot P(X = 0) \\
&= 2500\cdot\frac{1}{5} + (-500)\cdot\frac{8}{15} + 0\cdot\frac{4}{15} \\
&= 500 - \frac{4000}{15} \\
&= \frac{7500 - 4000}{15} \\
&= \frac{3500}{15} \\
&\approx 233.33
\end{aligned}
$$

- **Variance de $X$**

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= (2500^2)\cdot P(X = 2500) + (-500)^2\cdot P(X = -500) + 0^2\cdot P(X = 0) \\
&= 6250000\cdot\frac{1}{5} + 250000\cdot\frac{8}{15} \\
&= 1250000 + \frac{2000000}{15} \\
&= 1250000 + \frac{133333.33}{1} \\
&\approx 1383333.33
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\
&= 1383333.33 - (233.33)^2 \\
&\approx 1383333.33 - 54444.44 \\
&\approx 1338898.89
\end{aligned}
$$

- **Ecart-type $X$**

$\sigma(X)$ est $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$

c Déterminons la fonction de répartition de X et représentons la.

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]-\infty, -500[ \\ \dfrac{8}{15} & \text{si } x \in [-500,\ 0[ \\ \dfrac{11}{15} & \text{si } x \in [0,\ 2500[ \\ 1 & \text{si } x \in [2500,\ +\infty[ \end{cases}$$

4 Calculons cela pour trouver le nombre minimal de parties. Soit $p = P(N_2) = \dfrac{8}{15}$. On veut trouver le plus petit entier $n$ tel que :

$$1 - (1-p)^n > 0{,}97$$

$$(1 - \frac{8}{15})^n < 0{,}03 \quad \text{soit} \quad \left(\frac{7}{15}\right)^n < 0{,}03$$

$$n \log\left(\frac{7}{15}\right) < \log(0{,}03)$$

$$n > \frac{\log(0{,}03)}{\log\left(\frac{7}{15}\right)} \approx 6{,}6$$

**Donc** $n = 7$

# <u>Problème :</u> 10 pts

## Partie A

On considère la fonction $g$ définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}.$$

**1. Calcul des limites**

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} g(x) &= \lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x+1} \\ &= +\infty - 1 \\ &= +\infty, \text{ puisque } \frac{x+1}{x} \to +\infty \text{ quand } x \to 0^+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to +\infty} g(x) &= \lim_{x\to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x+1} \\ &= 0 - 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

**2. Étude des variations et tableau**

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)' - \left(\frac{1}{x+1}\right)' \\
&= \frac{(x+1)'}{x+1} - \frac{x'}{x} + \frac{(x+1)'}{(x+1)^2} \\
&= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} \\
&= \frac{x(x+1) - (x+1)^2 + x}{x(x+1)^2} \\
&= \frac{x(x+1) - (x+1)^2 + x}{x(x+1)^2} \\
&= \frac{x^2 + x - (x^2 + 2x + 1) + x}{x(x+1)^2} \\
&= \frac{-1}{x(x+1)^2}
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0 \quad \text{pour tout } x > 0.$$



**Tableau de variations de $g$ sur $]0; +\infty[$**

| $x$ | $0$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ |
| $g$ | $+\infty$ ↘ $0$ |

**3. Signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$**

Comme $g$ est strictement décroissante et tend vers 0 par la droite quand $x \to +\infty$, et part de $+\infty$ à 0, on en déduit que

$$g(x) > 0 \quad \text{pour tout } x > 0.$$

## Partie B

Soit la fonction $f$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) + 1 & \text{si } x > 0, \\ (x^2 - 3x + 1)\,e^x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

1 a Domaine de définition de $f$ Pour $x > 0$, $\dfrac{x+1}{x} = 1 + \dfrac{1}{x} > 1$, donc le logarithme est défini. La fonction est donc définie sur cet intervalle.

Pour $x \leq 0$, l'expression est polynomiale multipliée par une exponentielle : bien définie sur tout $\mathbb{R}$.

Par conséquent, la fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.

b Limites aux bornes du domaine

**Limite en $-\infty$ :**

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 - 3x + 1)\,e^x = 0$, car $e^x \to 0$ plus vite que toute puissance.

**Limite en $+\infty$ :**

Posons $X = \dfrac{x+1}{x}$ donc $x = \dfrac{1}{X-1}$ Si $x \to +\infty$ alors $X \to 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+1\\ &= \lim_{X\to 0}\frac{1}{X-1}\ln(X)+1\\ &= \lim_{X\to 0}\frac{\ln(X)}{X-1}+1\\ &= 1+1\end{aligned}$$

Ainsi : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

**c** Asymptotes

- En $-\infty$, la limite est 0, donc asymptote horizontale : $y=0$.
- En $+\infty$, la limite est 2, donc asymptote horizontale : $y=2$.

**Conclusion :** La fonction admet deux asymptotes horizontales : $y=0$ en $-\infty$, et $y=2$ en $+\infty$.

2 **a** **Continuité de $f$ en 0.** **(0,75 pt)**

**En $0^-$:**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-}(x^2-3x+1)\,e^x\\ &= 1\end{aligned}$$

**En $0^+$:**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+}\left(x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+1\right)\\ &= 1\end{aligned}$$

De plus, $f(0) = (0^2-3\cdot 0+1)\,e^0 = 1$.

Donc $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 1$

ce qui prouve que $f$ est **continue en 0**.

**b** **Dérivabilité de $f$ en 0 et interprétation des résultats.** **(0,75 + 0,25 pt)**

Pour $x \leq 0$, on a : $f(x) = (x^2-3x+1)e^x$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^-}\frac{(x^2-3x+1)e^x-1}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^-}\frac{(x^2-3x+1)e^x-1}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^-}\frac{(x^2-3x)\,e^x+(e^x-1)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^-}(x-3)\,e^x+\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}\\ &= -3+1\\ &= -2.\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -2$$

Pour $x>0$, on a : $f(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+1$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+1-1}{x}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\\ &= \lim_{x\to 0^+} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\\ &= +\infty\end{aligned}$$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} \neq \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ donc $f$ n'est **pas dérivable en 0**.

**Interprétation :**

- En $0^-$ : $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -2$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une **demi-tangente** à gauche d'équation : $y=-2x+1$
- En $0^+$ : $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une **demi-tangente verticale orientée vers le haut** à droite.

3 **Montrons que** $f'(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x>0 \\ (x^2-x-2)\,e^x & \text{si } x<0 \end{cases}$ **(1 pt)**

$$f(x) = \begin{cases} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+1 & \text{si } x>0, \\ (x^2-3x+1)\,e^x & \text{si } x\le 0. \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \left[x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+1\right]' \\ \left[(x^2-3x+1)\,e^x\right]' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+x\left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right] \\ (x^2-3x+1)'\,e^x+(x^2-3x+1)\,(e^x)' \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+\frac{x}{x+1}-1 \\ (2x-3+x^2-3x+1)\,e^x \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1} \\ (x^2-x-2)\,e^x \end{cases}$$

**Conclusion :** On a bien :

$$f'(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x>0 \\ (x^2-x-2)\,e^x & \text{si } x<0 \end{cases}$$

4 Tableau de variation

$f'(x) = (x^2-x-2)\,e^x$

Comme $e^x>0$ pour tout réel, le signe de $f'(x)$ est celui du polynôme :$P(x)=x^2-x-2$

On résout $P(x)=0$ :

$$x^2-x-2=0 \iff x=-1 \quad \text{ou} \quad x=2$$

On dresse le tableau de signes de $P(x)$, mais en restreignant à $x<0$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | | $0$ | | |

- Pour $x < -1$, $f'(x) > 0$, donc $f$ est **croissante**.
- Pour $-1 < x < 0$, $f'(x) < 0$, donc $f$ est **décroissante**.
- Pour $x > 0$, on a montré que $f'(x) = g(x) > 0$, donc $f$ est **croissante**.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ $\color{red}{-2}$ | $\Vert$ | $\color{red}{+\infty}$ $+$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $5e^{-1}$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

## Partie C : 2,5 pts

Soit $h$ la restriction de $f$ à l'intervalle $]0;+\infty[$ :

$$h(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + 1$$

5 Montrons que $h$ est bijective de $]0;+\infty[$ vers un intervalle $J$. **(0,5 pt)**

On a déjà montré que $f$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ car $f'(x) = g(x) > 0$.
Ainsi, $h$ est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, donc **bijective**.

D'autre part :

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} h(x) = 2$$

Donc :

$$\boxed{h : ]0;+\infty[ \to ]1;2[, \text{ bijection}}$$

6 Étudier la dérivabilité de $h^{-1}$ sur $J$. **(0,5 pt)**

$h'(x) = g(x) > 0$ sur $]0;+\infty[$.
Donc $h$ est dérivable, strictement croissante, et $\forall x \in ]0;+\infty[\ h'(x) \neq 0$, donc sa réciproque est dérivable sur $J = ]1;2[$.

$$\boxed{h^{-1} \text{ est dérivable sur } J, \text{ avec } (h^{-1})'(y) = \frac{1}{g(h^{-1}(y))}}$$

7 Tracer sur le même graphe les asymptotes, $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{h^{-1}}$. **(1,5 pt)**

Compo2.png



Clique ici pour voir la figure sur géogébra