**Prof : M. BA**

# Équation Différentielle ($\neq$)

**Classe : TS2**

**Année scolaire : 2024 – 2025**

## I°) Équation du type : $y' + ay = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$

### 1/ Définition :

Toute équation $(E)$ : $y' + ay = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$ est appelée
équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre.

**Exemple :**
$(E_1)$ : $y' + 2y = 0$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre.

## I-2) Résolution

On considère l'équation différentielle $(E)$ : $y' + ay = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$

L'**ensemble des solutions** de $(E)$ est l'**ensemble des fonctions dérivables sur** $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$f'(x) + af(x) = 0$$

Soit $(E)$ : $y' + ay = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$

- La fonction nulle est solution de $(E)$
- $y \neq 0$ avec $y$ solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}$

$$y' + ay = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = -ay$$

$$\frac{y'}{y} = -a$$

On intègre :

$$\int \frac{y'}{y}\,dx = \int -a\,dx$$
$$\ln|y| = -ax + c \quad (\text{avec } c \in \mathbb{R})$$
$$|y| = e^{-ax+c} = e^c \cdot e^{-ax}$$

D'où :

$$y_1 = ke^{-ax} \quad \text{avec } k = e^c \in \mathbb{R}^*$$

**Conclusion :** L'ensemble des solutions est :

$$\boxed{y(x) = ke^{-ax}, \quad k \in \mathbb{R}}$$

## Réciproquement :

Soit $y$ une fonction de ($\mathbb{R}$) et $g(x) = y(x)e^{ax}$
Si $g(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors :

$$g(x) = y(x)e^{ax}$$

On a :

$$g'(x) = y'(x)e^{ax} + ay(x)e^{ax} = e^{ax}\left(y'(x) + ay(x)\right)$$

Comme $y'(x) + ay(x) = 0$, alors :

$$g'(x) = e^{ax} \cdot 0 = 0 \Rightarrow g'(x) = 0$$

Donc $g$ est une constante :

$$\text{Il existe } k \in \mathbb{R} \text{ tel que } g(x) = k \Rightarrow y(x)e^{ax} = k \Rightarrow y(x) = ke^{-ax}$$

**Conclusion :**

$$\boxed{(E) : \quad y' + ay = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = ke^{-ax}}$$