Correction Composition Du 2$^{\text{nd}}$ Semestre

Exercice 1 :(3 pts) Restitution de Connaissances

1. Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire E et p une probabilité définie sur Ω.
Recopie et complète les relations ci-dessous :

   a. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ **(0,25 pt)**

   b. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$ **(0,25 pt)**

   c. Si A et B sont deux événements incompatibles de Ω, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ **(0,25 pt)**

   d. Soit D un événement quelconque de Ω. $\mathbb{P}(D) = 1{,}5$ est-il possible ?
   Non, car une probabilité est toujours un nombre compris entre 0 et 1. **(0,25 pt)**

2. Soit f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite convergente vers un nombre réel $L \in I$, définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.
Répondre par vrai ou faux à l'affirmation : L **est solution de l'équation** $f(L) = L$.
Réponse : Vrai **(0,5 pt)**

3. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $u_2 = -3$.
Choisir la bonne réponse dans chaque cas : **(3 × 0,25 pt)**

Réponses	**A**	**B**	**C**
$\lim u_n$ est :			**X**
L'expression de u_n est :			**X**
L'expression de $S_n = u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ est :		**X**	

Correction de l'Exercice 2 :(3 pts)

On considère la transformation S du plan complexe d'écriture :

$$z' = (1 - i\sqrt{3})z + 2$$

1. Déterminer la nature de S.

   La transformation est de la forme $z' = az + b$ avec $a = 1 - i\sqrt{3}$ et $b = 2$, $a \neq 0$.
   C'est donc une **similitude directe**.

2. Déterminer le rapport et l'angle de S.

   - $a = 1 - i\sqrt{3}$
   - Le **rapport** de la similitude est $|a| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

- L'**angle** est l'argument de a :

$$\theta = \arg(1 - i\sqrt{3}) = -\arctan(\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$

3 Déterminer l'affixe du point C, image du point $A(2 - i\sqrt{3})$ par S.

$$z_C = (1 - i\sqrt{3})(2 - i\sqrt{3}) + 2$$

Développement :

$$(1 - i\sqrt{3})(2 - i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3} - 2i\sqrt{3} + 3i^2 = -1 - 3i\sqrt{3}$$

$$z_C = -1 - 3i\sqrt{3} + 2 = \boxed{1 - 3i\sqrt{3}}$$

4 Déterminer l'affixe de l'image de $D\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}i\right)$ par S.

$$z_D = (1 - i\sqrt{3}) \cdot \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}i\right) + 2$$

Produit :

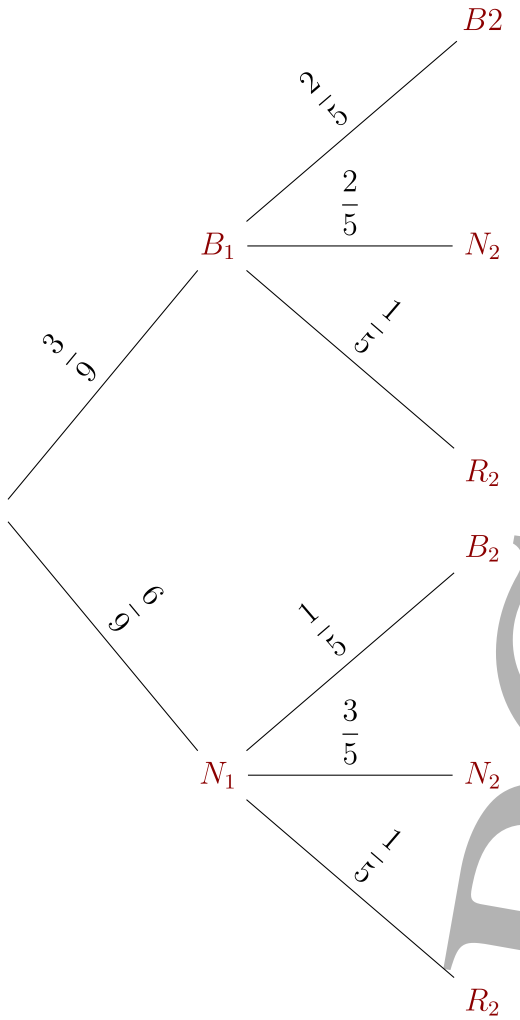
$$= -\frac{2\sqrt{3}}{3}i + \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot i^2 \cdot \sqrt{3} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}i - 2$$

$$z'_D = -\frac{2\sqrt{3}}{3}i - 2 + 2 = \boxed{-\frac{2\sqrt{3}}{3}i}$$

Donc, $S(D) = D$: le point D est **invariant** par S.
Conclusion : D est le **centre de la similitude**.

Exercice 3 :(4 pts)

1 Construisons un arbre pondère correspondant à cette épreuve.



2 Montrons que $P(N_2) = \dfrac{8}{15}$

a $P(N_2)$ peut être calculé par la loi des totalisations :

$$\begin{aligned} P(N_2) &= P(N_2|B_1) \cdot P(B_1) + P(N_2|N_1) \cdot P(N_1) \\ &= \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{2}{15} + \frac{6}{15} \\ &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

b Déterminons la probabilité de l'événement B_2

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_2|B_1) \cdot P(B_1) + P(B_2|N_1) \cdot P(N_1) \\ &= \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{2}{15} + \frac{2}{15} \\ &= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

c Déterminons la probabilité de tirer une boule blanche de u_1, sachant que la boule tirée dans u_2 est noire On utilise le théorème de Bayes :

$$P(B_1|N_2) = \frac{P(N_2|B_1)\cdot P(B_1)}{P(N_2)}$$
$$= \frac{\left(\frac{2}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{8}{15}}$$
$$= \frac{\frac{2}{15}}{\frac{8}{15}}$$
$$= \frac{2}{8}$$
$$= \frac{1}{4}$$

3 a Loi de probabilité de X Nous avons les différents gains :

- Boule blanche dans u_2 : $3000F - 500F = 2500F$
- Boule noire dans u_2 : $0F - 500F = -500F$
- Boule rouge dans u_2 : $500F - 500F = 0F$

Calcul des probabilités de X :

- $P(X = 2500) = P(B_2) = \frac{1}{5}$
- $P(X = -500) = P(N_2) = \frac{8}{15}$
- $P(X = 0) = P(R) = \left(\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{15}$

b Calculons de l'espérance mathématique, Variance et écart-type de X et écart-type de X

- **Espérance mathématique**
$$E(X) = 2500\cdot P(X = 2500) + (-500)\cdot P(X = -500) + 0\cdot P(X = 0)$$
$$= 2500\cdot\frac{1}{5} + (-500)\cdot\frac{8}{15} + 0\cdot\frac{4}{15}$$
$$= 500 - \frac{4000}{15}$$
$$= \frac{7500 - 4000}{15}$$
$$= \frac{3500}{15}$$
$$\approx 233.33$$
- **Variance de X**
$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$
$$E(X^2) = (2500^2)\cdot P(X = 2500) + (-500)^2\cdot P(X = -500) + 0^2\cdot P(X = 0)$$
$$= 6250000\cdot\frac{1}{5} + 250000\cdot\frac{8}{15}$$
$$= 1250000 + \frac{2000000}{15}$$
$$= 1250000 + \frac{133333.33}{1}$$
$$\approx 1383333.33$$
Donc,
$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$
$$= 1383333.33 - (233.33)^2$$
$$\approx 1383333.33 - 54444.44$$
$$\approx 1338898.89$$
- **Ecart-type X**

$\sigma(X)$ est $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$

c Déterminons la fonction de répartition de X et représentons la.

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, -500[\\ \dfrac{8}{15} & \text{si } x \in [-500,\ 0[\\ \dfrac{11}{15} & \text{si } x \in [0,\ 2500[\\ 1 & \text{si } x \in [2500,\ +\infty[\end{cases}$$

4 Calculons cela pour trouver le nombre minimal de parties. Soit $p = P(N_2) = \dfrac{8}{15}$. On veut trouver le plus petit entier n tel que :

$$1 - (1-p)^n > 0{,}97$$

$$(1 - \frac{8}{15})^n < 0{,}03 \quad \text{soit} \quad \left(\frac{7}{15}\right)^n < 0{,}03$$

$$n \log\left(\frac{7}{15}\right) < \log(0{,}03)$$

$$n > \frac{\log(0{,}03)}{\log\left(\frac{7}{15}\right)} \approx 6{,}6$$

Donc $n = 7$

Problème : 10 pts

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}.$$

1. Calcul des limites

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} g(x) &= \lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x+1} \\ &= +\infty - 1 \\ &= +\infty, \text{ puisque } \frac{x+1}{x} \to +\infty \text{ quand } x \to 0^+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to +\infty} g(x) &= \lim_{x\to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x+1} \\ &= 0 - 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Étude des variations et tableau

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)' - \left(\frac{1}{x+1}\right)' \\
&= \frac{(x+1)'}{x+1} - \frac{x'}{x} + \frac{(x+1)'}{(x+1)^2} \\
&= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} \\
&= \frac{x(x+1)-(x+1)^2+x}{x(x+1)^2} \\
&= \frac{x(x+1)-(x+1)^2+x}{x(x+1)^2} \\
&= \frac{x^2+x-(x^2+2x+1)+x}{x(x+1)^2} \\
&= \frac{-1}{x(x+1)^2}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0 \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Tableau de variations de g sur $]0;+\infty[$

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
g	$+\infty$ ↘ 0

3. Signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$

Comme g est strictement décroissante et tend vers 0 par la droite quand $x \to +\infty$, et part de $+\infty$ à 0, on en déduit que

$$g(x) > 0 \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Partie B

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)+1 & \text{si } x > 0, \\ (x^2-3x+1)\,e^x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

1 a Domaine de définition de f Pour $x > 0$, $\dfrac{x+1}{x} = 1 + \dfrac{1}{x} > 1$, donc le logarithme est défini. La fonction est donc définie sur cet intervalle.

Pour $x \leq 0$, l'expression est polynomiale multipliée par une exponentielle : bien définie sur tout $\mathbb{R}$.

Par conséquent, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

b Limites aux bornes du domaine

Limite en $-\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2-3x+1)\,e^x = 0$, car $e^x \to 0$ plus vite que toute puissance.

Limite en $+\infty$:

Posons $X = \dfrac{x+1}{x}$ donc $x = \dfrac{1}{X-1}$ Si $x \to +\infty$ alors $X \to 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+1\\ &= \lim_{X\to 0}\frac{1}{X-1}\ln(X)+1\\ &= \lim_{X\to 0}\frac{\ln(X)}{X-1}+1\\ &= 1+1\end{aligned}$$

Ainsi : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2.$

c Asymptotes

- En $-\infty$, la limite est 0, donc asymptote horizontale : $y=0$.
- En $+\infty$, la limite est 2, donc asymptote horizontale : $y=2$.

Conclusion : La fonction admet deux asymptotes horizontales : $y=0$ en $-\infty$, et $y=2$ en $+\infty$.

2 a **Continuité de f en 0.** **(0,75 pt)**

En 0^-:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^-} f(x) &= \lim_{x\to0^-}\left(x^2-3x+1\right)e^x\\ &= 1\end{aligned}$$

En 0^+:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+} f(x) &= \lim_{x\to0^+}\left(x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+1\right)\\ &= 1\end{aligned}$$

De plus, $f(0) = (0^2-3\cdot0+1)\,e^0 = 1.$

Donc $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) = f(0) = 1$

ce qui prouve que f est **continue en 0**.

b **Dérivabilité de f en 0 et interprétation des résultats.** **(0,75 + 0,25 pt)**

Pour $x \leq 0$, on a : $f(x) = (x^2-3x+1)e^x$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to0^-}\frac{(x^2-3x+1)e^x-1}{x}\\ &= \lim_{x\to0^-}\frac{(x^2-3x+1)e^x-1}{x}\\ &= \lim_{x\to0^-}\frac{(x^2-3x)\,e^x+(e^x-1)}{x}\\ &= \lim_{x\to0^-}(x-3)\,e^x+\lim_{x\to0^-}\frac{e^x-1}{x}\\ &= -3+1\\ &= -2.\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -2$$

Pour $x>0$, on a : $f(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+1.$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+1-1}{x}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}&=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{x}\\&=\lim_{x\to 0^+}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\\&=\lim_{x\to 0^+}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\\&=+\infty\end{aligned}$$

$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}\neq\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ donc f n'est **pas dérivable en 0**.

Interprétation :

- En 0^- : $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-2$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une **demi-tangente** à gauche d'équation : $y=-2x+1$
- En 0^+ : $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=+\infty$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une **demi-tangente verticale orientée vers le haut** à droite.

(3) **Montrons que** $f'(x)=\begin{cases}g(x) & \text{si } x>0\\(x^2-x-2)\,e^x & \text{si } x<0\end{cases}$ **(1 pt)**

$$f(x)=\begin{cases}x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+1 & \text{si } x>0,\\(x^2-3x+1)\,e^x & \text{si } x\le 0.\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\left[x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+1\right]'\\\left[(x^2-3x+1)\,e^x\right]'\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+x\left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right]\\(x^2-3x+1)'\,e^x+\left(x^2-3x+1\right)(e^x)'\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+\frac{x}{x+1}-1\\\left(2x-3+x^2-3x+1\right)e^x\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\\(x^2-x-2)\,e^x\end{cases}$$

Conclusion : On a bien :

$$f'(x)=\begin{cases}g(x) & \text{si } x>0\\(x^2-x-2)\,e^x & \text{si } x<0\end{cases}$$

(4) Tableau de variation

$f'(x)=(x^2-x-2)\,e^x$

Comme $e^x>0$ pour tout réel, le signe de $f'(x)$ est celui du polynôme :$P(x)=x^2-x-2$

On résout $P(x)=0$:

$$x^2-x-2=0\quad\Longleftrightarrow\quad x=-1\quad\text{ou}\quad x=2$$

On dresse le tableau de signes de $P(x)$, mais en restreignant à $x<0$:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0		0		

- Pour $x < -1$, $f'(x) > 0$, donc f est **croissante**.
- Pour $-1 < x < 0$, $f'(x) < 0$, donc f est **décroissante**.
- Pour $x > 0$, on a montré que $f'(x) = g(x) > 0$, donc f est **croissante**.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-2 \,\|\|\, +\infty$	$+$	
f	0	$\nearrow$	$5e^{-1}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Partie C : 2,5 pts

Soit h la restriction de f à l'intervalle $]0; +\infty[$:

$$h(x) = x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + 1$$

5 Montrons que h est bijective de $]0; +\infty[$ vers un intervalle J. **(0,5 pt)**

On a déjà montré que f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ car $f'(x) = g(x) > 0$.
Ainsi, h est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, donc **bijective**.

D'autre part :

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} h(x) = 2$$

Donc :

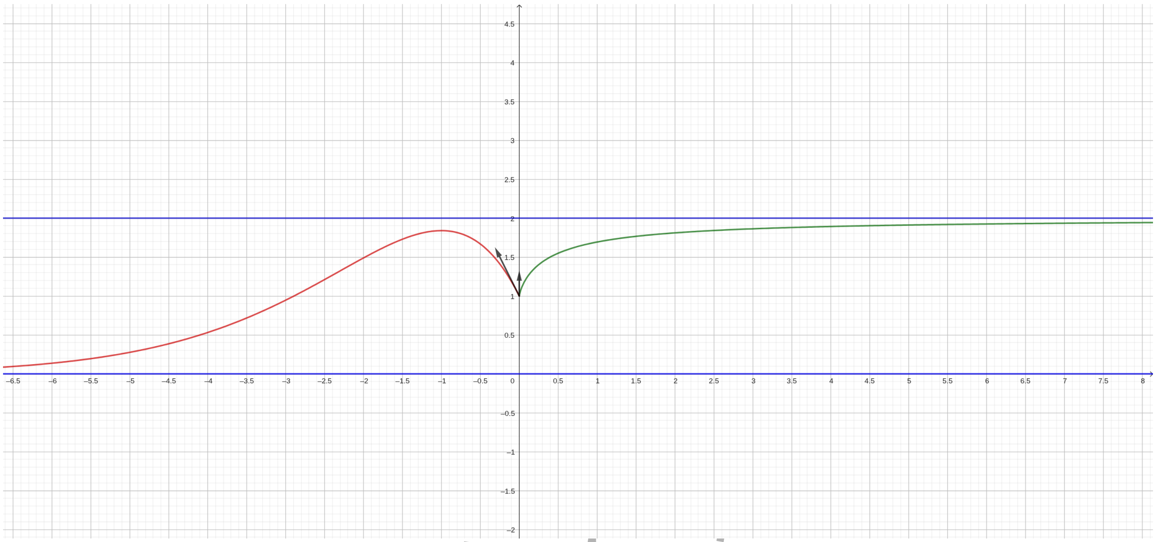
$$\boxed{h :]0; +\infty[\to]1; 2[, \text{ bijection}}$$

6 Étudier la dérivabilité de h^{-1} sur J. **(0,5 pt)**

$h'(x) = g(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$.
Donc h est dérivable, strictement croissante, et $\forall x \in]0; +\infty[\ h'(x) \neq 0$, donc sa réciproque est dérivable sur $J =]1; 2[$.

$$\boxed{h^{-1} \text{ est dérivable sur } J, \text{ avec } (h^{-1})'(y) = \frac{1}{g(h^{-1}(y))}}$$

7 Tracer sur le même graphe les asymptotes, $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{h^{-1}}$. **(1,5 pt)**



Clique ici pour voir la figure sur géogébra