Exercice 4

Partie A

Soit $g(x) = 2x\ln(-x) + x + 1$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_g de g.
2. Calculer les limites aux bornes de D_g.
3. Étudier les variations de g.
4. Calculer $g(-1)$ puis en déduire le signe de $g(x)$.

Partie B

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2\ln(-x) + x + 1 & \text{si } x < 0 \\ x\ln(x)^2 + x + 1 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interprétez graphiquement les résultats.
3. Donner le domaine de dérivabilité de f puis montrer que

$$f'(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x < 0 \\ (1+\ln x)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

4. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
5. Étudier les branches infinies de (C_f).
6. Dresser le tableau de variations de f.
7. Montrer que dans $]-\infty; -1[$, l'équation $f(x) = 1$
   admet une unique solution α puis vérifier que $-1,8 < \alpha < -1,7$.
8. Construire (C_f) (unité 2 cm) (on précisera la tangente au point d'abscisse e^{-1} et on placera le point d'abscisse 1).

Partie C

Soit h la restriction de f à $I =]0; +\infty[$.

1. Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à préciser.
2. Étudier la dérivabilité de h^{-1} sur J.
3. a. Calculer $h(1)$.
   b. Calculer $(h^{-1})'(2)$.
4. Construire la courbe de h^{-1}.

Exercice 5

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -x + 1 - 2\ln x$

1. Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variations.
2. Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x + \ln x}{x^2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. a. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.
   b. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.
3. a. Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$
   b. Dresser le tableau de variations de f.
   c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0; +\infty[$ une unique solution β et que $\beta \in]0,56; 0,57[$.
4. Construire (C).

Partie C

Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{x}$ et (Γ) sa courbe.

1. Étudier les positions relatives de (C) et (Γ).
2. Construire dans le même repère (Γ).
3. Soit I_λ l'aire en unité d'aires de la partie du plan délimitée par les courbes (C), (Γ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$ où λ est un nombre réel strictement supérieur à 1.
   a. Montrer que $I_\lambda = 1 - \dfrac{1}{\lambda}(1 + \ln \lambda)$.
   b. Déterminer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} I_\lambda$.

Exercice 6

Soit $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$

Partie A

Soit $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$.

1. Déterminer D_g et montrer que si $0 < x < 1$ alors $g(x) \geq 1$.
2. Montrer que g est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.
3. Calculer $g(1)$ et $g(2)$. Montrer qu'il existe un unique réel α strictement positif tel que $g(\alpha) = 0$. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.
4. Donner le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B

1. a. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f.
   b. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha^2}$.
   c. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
2. Donner une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1.
3. Donner le tableau de variations de f puis tracer (C_f).

Exercice 7

Partie A

On considère dans $]0; +\infty[$ la fonction g donnée par : $g(x) = x\ln(x) - 1$.

1. Dresser le tableau des variations de g.
2. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0; +\infty[$.
   b. Montrer que $1,76 < \alpha < 1,77$.
   c. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{1+x}{1+\ln(x)}$.

1. Justifie que $D_f =]0; +\infty[\setminus \left\{\dfrac{1}{e}\right\}$.
2. Calcule les limites de f aux bornes de D_f.
3. Étudie les branches infinies à (C_f).

4 a Démontre que $\forall x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(1+\ln(x))^2}$.

b Donne le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

c En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

5 Démontre que $f(\alpha) = \alpha$.

6 Trace la courbe (C_f) et son asymptote. (On prendra $\alpha = 1,76$)

Exercice 8

Partie A

Soit $g(x) = 2x - (x+1)\ln(x+1)$.

1 Déterminer le domaine de définition D_g de g.

2 Calculer les limites aux bornes de D_g.

3 Dresser le tableau de variations de g.

4 Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions 0 et α avec $\alpha \in]3,9;4[$.

5 Donner le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} x + \ln(1+x^2) & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1 Déterminer le domaine de définition D_f de f.

2 Calculer les limites aux bornes de D_f.

3 Étudier les branches infinies de (C_f).

4 Étudier la continuité puis la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement les résultats.

5 Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha+1}$, puis encadrer $f(\alpha)$.

6 Montrer que f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et $f'(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$.

7 Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x(x+1)\sqrt{x}}$.

8 Étudier les variations de f.

9 Dresser le tableau de variations de f.

10 Calculer $f(-2)$.

11 Tracer (C_f).

Partie C

Soit h la restriction de f sur $]-\infty;0]$.

1. Montrer que h réalise une bijection de $]-\infty;0]$ vers un intervalle J à préciser.
2. Étudier la dérivabilité de h^{-1}.
3. Déterminer $(h^{-1})'(\ln 5-2)$.
4. Tracer $(C_{h^{-1}})$.

Exercice 9

Partie A

On considère la fonction :

$$\begin{array}{rcl} u:[0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|-\dfrac{2x}{x^2-1} \end{array}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de u, calculer $u(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$.
2. Étudier les variations de u, dresser son tableau de variations. (il n'est pas nécessaire de calculer la limite de u en 1).
3. Déduire des résultats précédents que :
   a. $\forall x \in [0;1[$, $u(x)\geq 0$.
   b. $\forall x \in]1;+\infty[$, $u(x)<0$.

Partie B

Soit g la fonction définie par :

$$\begin{array}{rcl} g:[0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|-1 \end{array}$$

1. Déterminer D_g le domaine de définition de g, puis étudier la limite de g en 1.
2. a. Vérifier que $\dfrac{x+1}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}$.
   b. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{2}\ln\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)=1$.
   c. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$. Interpréter graphiquement ce résultat.
   d. Dresser le tableau de variations de g.
   e. Montrer qu'il existe un réel unique $\alpha\in]0;1[$ tel que $g(\alpha)=0$. Donner un encadrement de d'ordre 1 de α.
3. Tracer la courbe (C_g) de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité : $2cm$).

Partie C

Soit la fonction définie par : $f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}\right)$

1. Montrer que f est dérivable sur $[0;1[$ et que $f'(x) = g(x)$ pour tout $x \in [0;1[$.
2. Déterminer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_g) ; l'axe des abscisses ; l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$.

Exercice 10

Partie A

Soit la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{x} - 2 - \ln x$.

1. Étudier les variations de g.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0;+\infty[$. Vérifier que

$$0,6 < \alpha < 0,7.$$

3. En déduire le signe de $g(x)$.

Partie B

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} (1-x)(1+\ln x) & \text{si } x \geq 1 \\ (1-x)\ln(1-x) & \text{si } x < 1 \end{cases}$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Étudier la continuité de f en 1.
3. Étudier la dérivabilité de f en 1.
4. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.
5. Étudier les branches infinies de f.
6. Dresser le tableau de variations de f.
7. Tracer C_f dans un repère orthonormé, unité : $2cm$.
8. Soit h la restriction de f sur $[1;+\infty[$.
   a. Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et les variations.
   b. Résoudre $h^{-1}(x) = e$
   puis calculer $(h^{-1})'(2-2e)$.
   c. Tracer la courbe de h^{-1} dans le même repère.

Exercice 12

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\left(1 + e^{2-x}\right)$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité $2cm$.

1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 1 + (1-x)e^{2-x}$
   - a) Étudier les variations de h (on ne déterminera pas les limites aux bornes de D_h).
   - b) En déduire le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2.
   - a) Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   - b) Préciser la nature de la branche infinie de f en $-\infty$.
   - c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x]$, puis interpréter le résultat obtenu.
   - d) Préciser la position de (C_f) par rapport à la droite d'équation $(\Delta) : y = x$.
3.
   - a) Dresser le tableau de variations de f.
   - b) Montrer que f admet une bijection réciproque notée f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.
   - c) f^{-1} est-elle dérivable en 4 ?
   - d) Étudier la position (C_f) par rapport à sa tangente au point d'abscisse 2.
   - e) Construire (C_f) (on tracera la tangente à (C_f) au point d'abscisse 2).
   - f) Construire $(C_{f^{-1}})$ dans le repère précédent.

Exercice 13

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} (2x-1)e^{\frac{1}{x}}, & \text{si } x < 0 \\ x\ln(x+1), & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Partie A

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
3. Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$.
4. Étudier la branche infinie de (C_f) en $+\infty$. La continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

Partie B

1. Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$.
2. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $]0; +\infty[$.
3. Étudier les variations de $f'(x)$ puis en déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$.
4. Calculer $f'(x)$ pour tout $x < 0$. En déduire le signe de $f'(x)$.
5. Dresser le tableau de variations de f.

Partie C

Soit g la restriction de f sur $I =]-\infty; 0[$.

1. Montrer que g réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser.
2. Soit g^{-1} la bijection réciproque de g. Calculer $g(-1)$ puis $(g^{-1})'\left(-\frac{3}{e}\right)$.
3. Construire (C_f) et (C_g) dans un même repère.

Exercice 14

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}(1+\ln x) - e^{-1}, & \text{si } x \geq 1 \\ (1-x)e^{-\frac{1}{1-x}}, & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1. Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$ puis calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2. Étudier la continuité de f en 1.
3. a. Montrer que pour tout $x \in]1; +\infty[$, $\dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = e^{-x}\left(\dfrac{1-e^{x-1}}{x-1} + \dfrac{\ln x}{x-1}\right)$.

   b. Étudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter graphiquement le résultat.
4. Soit la fonction g définie par : $g(x) = -\ln x + \dfrac{1}{x} - 1$

   a. Dresser le tableau de variations de g.

   b. Calculer $g(1)$ et préciser le signe de $g(x)$.

   c. Calculer la dérivée de f sur chaque intervalle où elle est dérivable.

   d. Étudier le signe de $f'(x)$ et donner le tableau de variations de f.
5. a. Donner la nature de la branche infinie de f en $+\infty$.

   b. Montrer que la droite $(D) : y = -x$ est une asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$.

   c. Étudier la position de (C_f) par rapport à (D) sur $]-\infty; 1[$.
6. Construire (C_f).
7. Soit h la restriction de f sur $]-\infty; 1[$.

   a. Montrer que h réalise une bijection de $]-\infty; 1[$ vers un intervalle J à préciser.

   b. Calculer $h(0)$. h^{-1} est-elle dérivable en e^{-1} ? Si oui, calculer $(h^{-1})'(e^{-1})$.

   c. Tracer $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère.