⋄⋄⋄ Lycée de Dindéfélo ⋄⋄⋄			A.S. : 2024/2025
Matière: Mathématiques	Niveau : TS2	Date: 22/05/2025	Durée : 4 heures

Correction Composition Du 2$^{\text{nd}}$ Semestre

PROBLEME (10pt)

PARTIE A

Soit h la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = 1 + e^{2x-4}$ et $K = \left[1; \frac{5}{4}\right]$.

1. a) Calcul de $h'(x)$: $h(x) = 1 + e^{2x-4} \Rightarrow h'(x) = \left(1 + e^{2x-4}\right)' = 2e^{2x-4}$
Comme $e^{2x-4} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $h'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ Donc, la fonction h est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$. **(0,25pt + 0,25pt)**

b) Montrons que $h(K) \subset K$:

Comme h est croissante et $K = \left[1; \frac{5}{4}\right]$, on a :

$$h(K) = \left[h(1); h\left(\frac{5}{4}\right)\right]$$

Calculons :

$$h(1) = 1 + e^{2(1)-4} = 1 + e^{-2} \approx 1 + 0{,}1353 = 1{,}1353$$

$$h\left(\frac{5}{4}\right) = 1 + e^{2\cdot\frac{5}{4}-4} = 1 + e^{-1{,}5} \approx 1 + 0{,}2231 = 1{,}2231$$

Donc :

$$h(K) = [1{,}1353; 1{,}2231] \subset \left[1; \frac{5}{4}\right]$$

Ainsi, $h(K) \subset K$. **(0,5pt)**

2. a) Resoudre $h(x) = x$ revient à resoudre $h(x) - x = 0$
On définit la fonction $\phi(x) = h(x) - x = 1 + e^{2x-4} - x$.

Existance

ϕ est continue sur $K = \left[1; \frac{5}{4}\right]$.

Calculons :

$$\phi(1) = 1 + e^{-2} - 1 = e^{-2} > 0 \quad ; \quad \phi\left(\frac{5}{4}\right) = 1 + e^{-1.5} - \frac{5}{4} \approx 1.2231 - 1.25 < 0$$

Donc, $\phi(1) > 0$ et $\phi\left(\frac{5}{4}\right) < 0$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un $\lambda \in \left]1; \frac{5}{4}\right[$ tel que $\phi(\lambda) = 0$, soit $h(\lambda) = \lambda$.

Unicité

$$\phi'(x) = h'(x) - 1 = 2e^{2x-4} - 1$$

Supposons que $\phi'(x) < 0$

$$\begin{aligned}\phi'(x) < 0 &\iff 2e^{2x-4} - 1 < 0\\ &\iff e^{2x-4} < \frac{1}{2}\\ &\iff 2x - 4 < \ln\left(\frac{1}{2}\right)\\ &\iff 2x < 4 - \ln(2)\\ &\iff x < 2 - \frac{\ln(2)}{2}\\ &\iff x < 1,7\end{aligned}$$

Donc si $x \in]-\infty; 1,7[$ alors $\phi'(x) < 0$

Comme $K = \left[1; \frac{5}{4}\right] \subset]-\infty; 1,7[$ donc $\forall x \in K$, $\phi'(x) < 0$

Donc $\phi'(x) < 0$ sur K, donc ϕ est strictement décroissante sur K.

Or, une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle admet **au plus une** racine. Comme on a déjà montré l'existence d'un λ, on en déduit que :

L'équation $h(x) = x$ admet une **unique solution** $\lambda \in K$.

(0,5pt)

b) On a : $h'(x) = 2e^{2x-4}$

Encadrons $x \in K = \left[1; \frac{5}{4}\right]$:

$$\begin{aligned}x \in K &\implies 1 \leq x \leq \frac{5}{4}\\ &\implies 2 \leq 2x \leq \frac{5}{2}\\ &\implies -2 \leq 2x - 4 \leq -\frac{3}{2}\\ &\implies e^{-2} \leq e^{2x-4} \leq e^{-1.5}\\ &\implies 2e^{-2} \leq 2e^{2x-4} \leq 2e^{-1.5}\\ &\implies 0 \leq 2e^{-2} \leq 2e^{2x-4} \leq 2e^{-1.5} \leq \frac{1}{2}\\ &\implies 0 \leq 2e^{2x-4} \leq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Donc : $\forall x \in K, \quad 0 < h'(x) < \frac{1}{2}$ **(0,25pt)**

c) Soit $x \in K$, et $\lambda \in K$ l'unique solution de $h(\lambda) = \lambda$.

D'après l'inégalité des accroissements finis (ou le théorème de la moyenne) appliquée à h sur K, il existe $c \in [x; \lambda] \subset K$ tel que :

$$h(x) - h(\lambda) = h(x) - \lambda = h'(c)(x - \lambda)$$

Donc :

$$|h(x) - \lambda| = |h'(c)| \times |x - \lambda| \leq \frac{1}{2}|x - \lambda|$$

(0,25pt)

3.a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ W_n \in K$.

Initialisation :
On a $W_0 = 1 \in K = \left[1; \frac{5}{4}\right]$. L'assertion est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité :
Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on ait $W_n \in K$.
Alors par définition :

$$W_{n+1} = h(W_n)$$

Or à la question 1.b), on a démontré que $h(K) \subset K$.
Donc comme $W_n \in K$, on a $W_{n+1} \in h(K) \subset K$.

Conclusion :
Par le principe de récurrence, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n \in K$$

(0,5pt)

b) On veut montrer que :

$$|W_{n+1} - \lambda| \leq \frac{1}{2}|W_n - \lambda| \quad \text{et} \quad |W_n - \lambda| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Inégalité de récurrence :
On sait que $W_{n+1} = h(W_n)$ et que λ est l'unique solution de $h(\lambda) = \lambda$.
D'après la question 2.c), on a pour tout $x \in K$:

$$|h(x) - \lambda| \leq \frac{1}{2}|x - \lambda|$$

Or, à la question 3.a), on a montré que $\forall n,\ W_n \in K$. Donc :

$$|W_{n+1} - \lambda| = |h(W_n) - \lambda| \leq \frac{1}{2}|W_n - \lambda|$$

2) Majoration par $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ par récurrence :

3.b) On a $W_{n+1} = h(W_n)$ et $h(\lambda) = \lambda$.
D'après la question 2.c), pour tout $x \in K$, on a :

$$|h(x) - \lambda| \leq \frac{1}{2}|x - \lambda|$$

Or, à la question 3.a), on a montré que $W_n \in K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc on peut appliquer cette inégalité à chaque itération :

$$\begin{aligned}
|W_1 - \lambda| &\leq \frac{1}{2}|W_0 - \lambda| \\
|W_2 - \lambda| &\leq \frac{1}{2}|W_1 - \lambda| \\
|W_3 - \lambda| &\leq \frac{1}{2}|W_2 - \lambda| \\
&\vdots \\
|W_k - \lambda| &\leq \frac{1}{2}|W_{k-1} - \lambda|
\end{aligned}$$

En multipliant ces inégalités **membre à membre**, on obtient :

$$|W_k - \lambda| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k |W_0 - \lambda|$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |W_k - \lambda| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

(0,5pt + 0,25pt)

c) D'après la question précédente, on a :

$$|W_n - \lambda| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Or $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ quand $n \to +\infty$, donc :

$$|W_n - \lambda| \to 0 \quad \text{ce qui équivaut à} \quad W_n \to \lambda \quad \text{quand } n \to +\infty$$

Ainsi, la suite (W_n) **converge vers le réel λ**, qui est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$ dans l'intervalle K. **(0,25pt)**

PARTIE B

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\right) & \text{si } x \in [0; +\infty[\\ x - \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} & \text{si } x \in]-\infty; 0[\end{cases}$$

1 Déterminons le domaine de définition D_f de f.

Sur $[0; +\infty[$: on considère l'expression

$$f(x) = \ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)$$

Cette expression est définie si :

- $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$ (toujours vrai car $x \geq 0$)
- $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| > 0 \Rightarrow \dfrac{x-1}{x+1} \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

Donc sur $[0; +\infty[$, la fonction est définie sauf en $x = 1$.

Sur $]-\infty; 0[$: on considère

$$f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

Cette expression est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, car le dénominateur $e^x + 1 > 0$ pour tout x.

Donc la fonction f est définie sur :

$$D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$

(0,5pt)

2. Étudions la continuité de f en 0.

La fonction f est définie par morceaux :

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\right) & \text{si } x \in [0; +\infty[\\ x - \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} & \text{si } x \in]-\infty; 0[\end{cases}$$

A-t-on $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$?

Limite à gauche (vers 0^-) :

Pour $x < 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \\ &= 0 - \frac{1-1}{1+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0}$$

Limite à droite (vers 0^+) :

Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) \\ &= \ln\left(\left|\frac{-1}{1}\right|\right) \\ &= \ln(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0}$$

Conclusion :

La limite de $f(x)$ en 0 existe et vaut 0.

De plus, $f(0) = \ln\left(\left|\dfrac{0-1}{0+1}\right|\right) = \ln(1) = 0$

Donc : $\mathbf{\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow}$ **f est continue en 0**

2 a Soit $x \in]0; 1[$.

On a : $x < 1$, donc $x - 1 < 0$, donc : $|x-1| = -(x-1) = 1 - x$

De plus, dans ce cas $x > 0$, donc $f(x) = \ln\left(\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\right)$.

On remplace $|x-1|$ par $1-x$, et on obtient : $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{x+1}\right)$

Or, on sait que : $\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$

Donc : $f(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x) \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\ln(1-x)}{x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ **(0,5pt)**

b Étudions la dérivabilité de f en 0.

On cherche la limite du taux d'accroissement : $\lim_{x\to0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ avec $f(0)=0$ (voir question 2)

À gauche ($x \to 0^-$) :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to0^-} \frac{f(x)}{x}\\
&= \lim_{x\to0^-} \frac{x-\dfrac{e^x-1}{e^x+1}}{x}\\
&= \lim_{x\to0^-} 1-\frac{e^x-1}{x}\times\frac{1}{e^x+1}\\
&= 1-1\times\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to0^-} \frac{\mathbf{f(x)-f(0)}}{\mathbf{x-0}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}$$

À droite ($x \to 0^+$) :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x}\\
&= \lim_{x\to0^+} \frac{\ln(1-x)}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x}\\
&= -1-1\\
&= -2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to0^+} \frac{\mathbf{f(x)-f(0)}}{\mathbf{x-0}} = \mathbf{-2}}$$

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{x\to0^+} \frac{\mathbf{f(x)-f(0)}}{\mathbf{x-0}} = \mathbf{-2} \text{ et } \lim_{x\to0^-} \frac{\mathbf{f(x)-f(0)}}{\mathbf{x-0}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}$$

Donc la fonction f **n'est pas dérivable** en 0. **(0,5pt)**

c **À gauche de 0 :**

La pente de la demi-tangente est $\frac{1}{2}$, donc l'équation de la tangente gauche est :

$$y = \frac{1}{2}x$$

À droite de 0 :

La pente de la demi-tangente est -2, donc l'équation de la tangente droite est :

$$y = -2x$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x \quad \text{et} \quad y = -2x \qquad \textbf{(0,5pt)}}$$

3 Montrons que $\forall x \in]-\infty;0[$, $f(x) = x - \dfrac{e^x-1}{e^x+1} = x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$

Démonstration :

Partons du membre de droite :

$$\begin{aligned} x+1-\frac{2e^x}{e^x+1} &= \frac{(x+1)(e^x+1)-2e^x}{e^x+1} \\ &= \frac{xe^x+x+e^x+1-2e^x}{e^x+1} \\ &= \frac{xe^x+x-e^x+1}{e^x+1} \\ &= \frac{x(e^x+1)}{e^x+1}+\frac{-e^x+1}{e^x+1} \\ &= x+\frac{-e^x+1}{e^x+1} \\ &= x-\frac{e^x-1}{e^x+1} \textbf{ CQFD} \end{aligned}$$

(0,25pt)

4 Calculons les limites de f aux bornes des intervalles de son domaine de définition. **(0,5pt)**

À gauche de 1 : $x \to 1^-$

Sur $[0;1[$, on a : $f(x) = \ln\left(\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\right) = \ln\left(\dfrac{1-x}{x+1}\right)$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right) \\ &= \ln(0^+) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty}$$

À droite de 1 : $x \to 1^+$

Sur $]1;+\infty[$, même expression : $f(x) = \ln\left(\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\right)$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \\ &= \ln(0^+) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty}$$

À gauche de 0 : $x \to -\infty$

Sur $]-\infty;0[$, on a $f(x) = x - \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -\infty} f(x) &= \lim_{x\to -\infty} x - \frac{e^x-1}{e^x+1} \\ &= -\infty - \frac{-1}{1} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$

À droite de 0 : $x \to +\infty$

Sur $]1;+\infty[$, $f(x) = \ln\left(\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\right)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)\\ &= \ln(1)\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

5 En déduire les équations des asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_f$ de f. **(0,25pt)**

Asymptote verticale :

D'après la question précédente, on a :

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$$

Donc la droite $x = 1$ est une **asymptote verticale** à la courbe $\mathscr{C}_f$.

Asymptote horizontale :

On a également :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Donc la droite $y = 0$ est une **asymptote horizontale** à droite de la courbe $\mathscr{C}_f$.

$$\boxed{\text{Asymptotes de } \mathscr{C}_f : \quad x = 1 \quad \text{et} \quad y = 0}$$

6 Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$. **(0,5pt)**

Sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$:

Pour $x > 0$, on a :

$$f(x) = \ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \quad \text{car } \frac{x-1}{x+1} > 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \implies f'(x) = \frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

Sur $]-\infty;0[$:

Pour $x < 0$, on a :

$$f(x) = x - \frac{e^x-1}{e^x+1} \text{ou encore} f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x+1}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2e^x(e^x+1)-(e^x-1)(e^x)}{(e^x+1)^2} = 1 - \frac{e^x(e^x+1-e^x+1)}{(e^x+1)^2} = 1 - \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

Donc :

$$f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{(x+1)(x-1)} & \text{si } x\in]0;1[\cup]1;+\infty[\\[2ex] 1-\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2} & \text{si } x\in]-\infty;0[\end{cases}$$

7 Étudier les variations de f. **(0,5pt)**

On rappelle que le domaine de définition de f est :

$$D_f=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$$

Sur $]-\infty;0[$:

On a montré précédemment :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1-\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}\\ &= \frac{(e^x+1)^2-2e^x}{(e^x+1)^2}\\ &= \frac{e^{2x}+2e^x+1-2e^x}{(e^x+1)^2}\\ &= \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}>0 \end{aligned}$$

$$f'(x)>0 \text{ sur }]-\infty;0[\Rightarrow f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty;0[$$

Sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$:

On a :

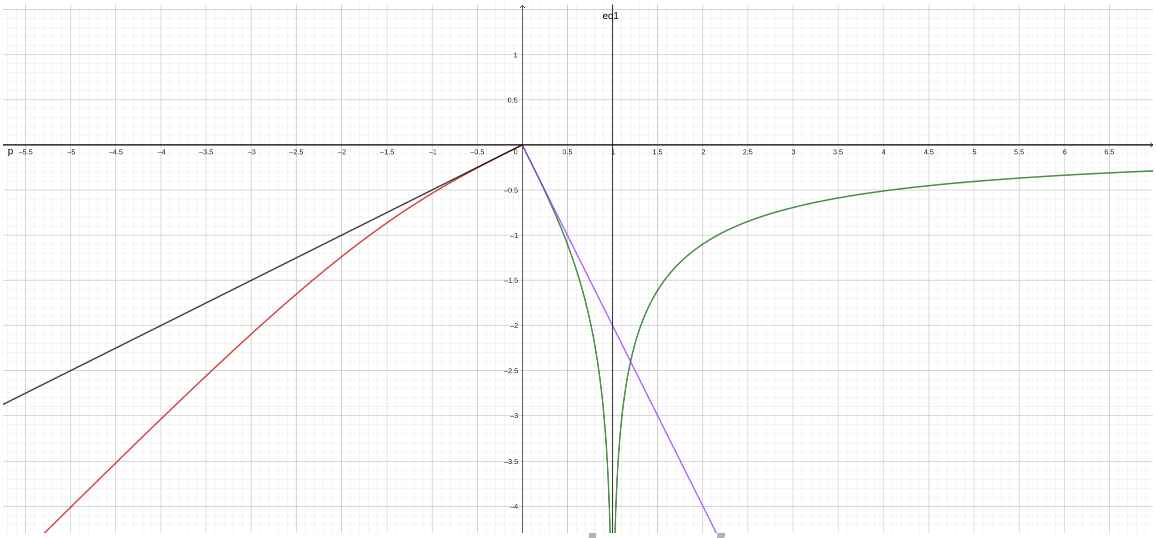
$$f'(x)=\frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

Le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $(x+1)(x-1)$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x+1$			0		0	$+$		$+$	
$x-1$						$-$	0	$+$	
$(x+1)(x-1)$						$-$	0	$+$	

- Sur $]0;1[$, on a $(x+1)(x-1)<0$ donc $f'(x)<0$: f est décroissante sur $]0;1[$
- Sur $]1;+\infty[$, $(x+1)(x-1)>0$ donc $f'(x)>0$: f est croissante sur $]1;+\infty[$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	‖	$+$	
f	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0



Clique ici pour voir la figure sur géogébra

PARTIE C

Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $I =]1; +\infty[$.

1. Montrons que g réalise une bijection de I vers un intervalle J.

   On a vu que sur $]1; +\infty[$, la fonction f est définie et strictement croissante.
   Or une fonction continue et strictement monotone est bijective de son domaine d'étude sur son image.

   Donc, $g : I \to J$ est une bijection.

   $$J =]-\infty; 0[$$

   (0,5pt)

2. Soit $y \in J =]-\infty; 0[$. On cherche l'expression de $g^{-1}(y)$.

   Par définition :
   $$y = g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \quad \text{avec } x \in]1; +\infty[$$

   Posons $y = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$. Exponentions :
   $$e^y = \frac{x-1}{x+1}$$

   On résout cette équation pour x :
   $$e^y(x+1) = x-1 \quad \Rightarrow \quad e^y x + e^y = x - 1$$
   $$e^y x - x = -1 - e^y \quad \Rightarrow \quad x(e^y - 1) = -1 - e^y$$
   $$x = \frac{-1-e^y}{e^y-1} = \frac{-(1+e^y)}{e^y-1} = 1 - \frac{2e^y}{e^y-1}$$

   Donc :
   $$g^{-1}(y) = 1 - \frac{2e^y}{e^y-1} \quad \text{soit} \quad g^{-1}(x) = 1 - \frac{2e^x}{e^x-1}$$

   (0,25pt)

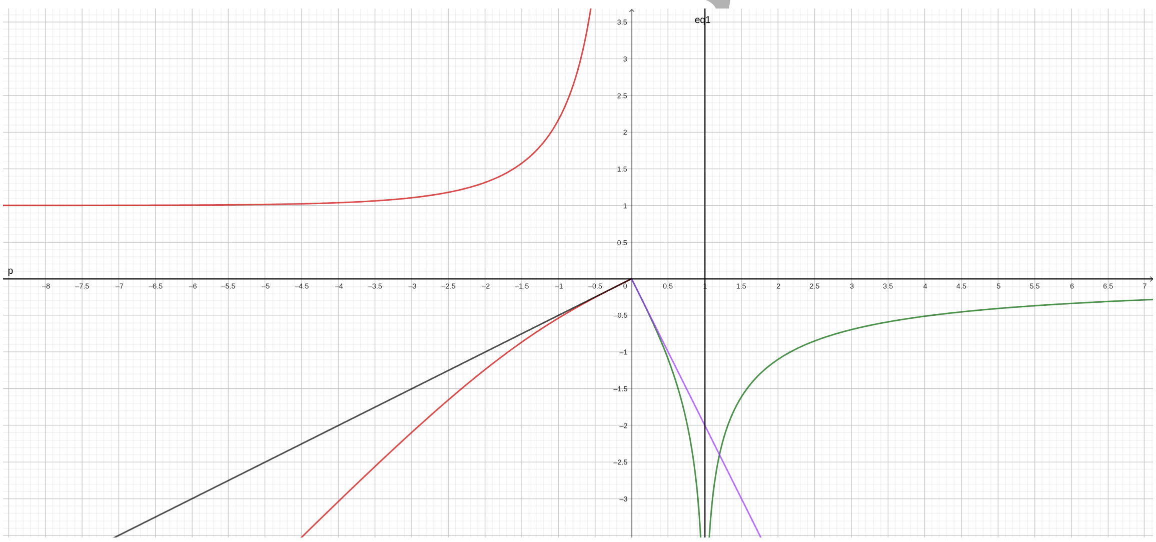
3 Pour tracer la courbe $\mathcal{C}_{g^{-1}}$, on peut exploiter la symétrie par rapport à la droite $y = x$, puisque g^{-1} est la bijection réciproque de g.

On pourra donc obtenir $\mathcal{C}_{g^{-1}}$ en prenant les points symétriques de ceux de $\mathcal{C}_g$ par rapport à la droite $y = x$.

Elle est définie sur $J =]-\infty; 0[$ et a pour équation :

$$\mathcal{C}_{g^{-1}} : \quad y = g^{-1}(x) = 1 - \frac{2e^x}{e^x - 1}$$

(0,5pt)



Clique ici pour voir la figure sur géogébra