⋄⋄⋄ Lycée de Dindéfélo ⋄⋄⋄			A.S. : 2025/2026
Matière: Mathématiques	Niveau : 2ndS	Date: 29/12/2025	

Td Barycentre

Exercice 1 Déterminer deux nombres réels a et b tels que C soit le barycentre du système $\{(A,a);(B,b)\}$ dans des cas suivants :

1. $3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$
2. $\overrightarrow{BA} = \frac{3}{8}\overrightarrow{BC}$
3. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$
4. $\overrightarrow{AB} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$
5. $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$

Exercice 2
A et B sont deux points distants de 4 cm.

1. Ecrire comme barycentre des points A et B :
   - a. Le symétrique I de A par rapport à B.
   - b. Le symétrique E du milieu K de $[AB]$ par rapport à A.
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :
$$\left\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right\| = 6$$

Exercice 3
Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$ et $BC = 5$. On note
$$I = bar\{(A,3),(B,-2)\}$$
$$J = bar\{(B,-2),(C,5)\}$$

1. Construire I et J.
2. Soit G tel que : $3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + 5\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$. Montrer que $G = bar\{(I,1),(C,5)\}$.
3. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :
   - a. $\left\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|-2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right\|$.
   - b. $\left\|18\overrightarrow{MA} - 12\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MI} + 5\overrightarrow{MC}\right\|$.

Exercice 4 Soit ABC un triangle tel que : $AB = 10$; $AC = 12$ et $BC = 8$ et placer le barycentre G du système $\{(A,1),(B,2),(C,1)\}$.

1. Faire la figure que l'on complétera au fur et à mesure.
2. Déterminer et construire l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que : $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = AC$.
3. Soit (E) l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que :
$\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right\|$.
   - a. Montrer que $B \in (E)$.
   - b. Déterminer et représenter l'ensemble (E_2).
4. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 5

1. Construire le barycentre
G de $(A,3)$ et $(B,3)$
E de $(B,3)$ et $(C,1)$
F de $(A,3)$ et $(C,1)$.
2. Soit I le barycentre de $(A,3),(B,3)$ et $(C,1)$. Démontrer que :
   - Les points A, I et E sont alignés.
   - Les points B, I et F sont alignés.
   - Les points C, I et G sont alignés.
3. Que peut-on en déduire pour les droites $(AE),(BF)$ et (CG) ?

Exercice 6
Soit ABC un triangle. On considère :

- Le barycentre I de $(A,2)$ et $(C,1)$.
- Le barycentre J de $(A,1)$ et $(B,2)$.
- Le barycentre K de $(C,1)$ et $(B,-4)$.

1. Démontrer que B est le barycentre de $(K, 3)$ et $(C, 1)$.
2. En déduire le barycentre de $(A, 2), (K, 3)$ et $(C, 1)$.
3. Montrer que J est le milieu de $[IK]$.

Exercice 7 Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$ cm, $AC = 4$ cm et $BC = 3$ cm. G le barycentre des points pondérés $(A; 2), (B; 3)$ et $(C; 5)$, I barycentre des points pondérés $(A; 2)$ et $(B; 3)$, J barycentre des points pondérés $(A; 2)$ et $(C; 5)$ et H le milieu du segment $[AC]$.

1. Construire les points I, J et H.
2. Montrer que $G = \text{bar}\{(I, 1); (C, 1)\}$.
3. Montrer que les points B, J et G sont alignés.
4. Déterminer et construire les ensembles suivants :
   - a (Δ) : l'ensemble des points M du plan vérifiant $\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC}\| = 5\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\|$
   - b (Γ) : l'ensemble des points M du plan vérifiant $\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|5\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB}\|$.

Exercice 8 Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$cm, $AC = 2$cm, $BC = 3$cm ; J le barycentre du système $B; 1$, $C; 2$ et H le point tel que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AB}$.

1. Construire le triangle ABC et placer les points J et H.
2. Justifier que le système $\{(B, 1), (C, 2)\}$ admet un barycentre que l'on notera G.
3. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
4. Ecrire H comme barycentre des points A et B affectés de coefficients que l'on précisera.
5. Montrer que les droites (AJ) et (CH) se coupent en G.
6. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :
   - a $\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\| = 10$
   - b $-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AC}$.

Exercice 9 Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$ cm, $AC = 4$ cm et $BC = 3$ cm. G le barycentre des points pondérés $(A; 2), (B; 3)$ et $(C; 5)$, I barycentre des points pondérés $(A; 2)$ et $(B; 3)$, J barycentre des points pondérés $(A; 2)$ et $(C; 5)$ et H le milieu du segment $[AC]$.

1. Construire les points I, J et H.
2. Montrer que $G = \text{bar}\{(I, 5); (C, 5)\}$.
3. Montrer que les points B, J et G sont alignés.
4. Déterminer et construire les ensembles suivants :
   - a (Δ) : l'ensemble des points M du plan vérifiant $\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC}\| = 5\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\|$
   - b (Γ) : l'ensemble des points M du plan vérifiant $\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|5\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB}\|$.

Exercice 10 Soit ABC un triangle.

1. Construire les points P, Q et R tels que : $\overrightarrow{CP} = \frac{3}{8}\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BR} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$
2. Démontrer que les droites (AR), (BP) et (CQ) sont concourantes.

Exercice 11 ABC est un triangle équilatéral et $ABDC$ est un parallélogramme. Construire le point G vérifiant : $3\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

1. Montrer que G est le barycentre du système $\{(A, 2), (B, -1), (C, 2)\}$.
2. Soit I milieu de $[AC]$. Démontrer que G est barycentre de B et I affectés de coefficients que l'on déterminera. En déduire que G appartient à la médiatrice de $[AC]$.
3. En désignant par H l'isobarycentre de G et D. Déterminer puis construire l'ensemble (Γ) des points M tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}\| = 6AB$$

Exercice 12 Soit RTS un triangle quelconque.

1. Construire les points A ; B ; C et D définis par : D est le milieu de $[RS]$; B celui de $[RT]$; A le symétrique de D par rapport à R et $\overrightarrow{CT} = \frac{1}{4}\overrightarrow{ST}$.

2. Déterminer les réels a ; b ; s et t tels que :

$$R = bar\{(A, a); (S, s)\} \ ;$$
$$C = bar\{(T, t); (S, b)\}$$

3. Démontrer que : $B = bar\{(T, 3); (A, 2); (S, 1)\}$

4. En déduire que les points A ; B et C sont alignés.

Exercice 13 Soit ABC un triangle. $\forall m \in \mathbb{R}$ considérons le point $G_m = bar\{(A, m); (B, 2m); (C, 1)\}$

1. Pour quelles valeurs de m le point G_m existe-t-il ?

2. Soit D barycentre de $(A, 1)$ $(B, 2)$.

3. Démontrer que $G_m \in (CD)$.

4. Pour quelles valeurs de m, G_m est un point de $[CD]$.

Exercice 14

Soit ABC un triangle isocèle en A. O, I et J les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

1.
   - a. Montrer que pour tout M du plan on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ}$.
   - b. En déduire que les triangles ABC et OIJ ont même centre de gravité.

2. Montrer que B est le barycentre $\{(J; 1), (O; 1), (I; -1)\}$.

3. On donne $H = bar\{(J; 3), (C; -1)\}$. Montrer que les droites (OH) et (AJ) sont parallèles.

4. Soit $K = bar\{(A; 2), (B; 1), (C; 1)\}$.
   - a. Construire K puis montrer que est le milieu $[AJ]$.
   - b. Montrer que $OAIJ$ est un losange.

5. On considère l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$$\left\| 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} + 4\overrightarrow{KI} \right\| = 2 \left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \right\|.$$

   - a. Vérifier que $A \in (E)$.
   - b. Montrer que (E) est la médiatrice du segment $[IO]$.

Exercice 15

Dans le plan, on considère le triangle ABC isocèle en A de hauteur AH tel que $AH = BC = 4$ cm.

1. En justifiant la construction, placer le point G barycentre de $\{(A, 2); (B, 1), (C, 1)\}$.

2. On désigne par M un point quelconque du plan.
   - a- Montrer que $\vec{V} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ est vecteur constant et $\|\vec{V}\| = 8$.

3. Déterminer et construire l'ensemble **F** des points M du plan tels que :

$$\left\| 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = \|\vec{V}\|$$

4. On considère le système $\{(A, 2); (B, n); (C, n)\}$ où n est un entier naturel fixé.
   - a. Montrer que G_n le barycentre de ce système existe pour tout n.
   - b. Construire les points G_0, G_1 et G_2.
   - c. Montrer que G_n appartient au segment $[AH]$.

5. Soit $\mathbf{E}_n$ l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left\| 2\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB} + n\overrightarrow{MC} \right\| = n\|\vec{V}\|.$$

Montrer que $\mathbf{E}_n$ est un cercle qui passe par A. Construire $\mathbf{E}_n$.

Exercice 16

Soit $ABCD$ est un parallélogramme, on construit les points P, Q et R définis par : $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AR} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ et Q est tel que $PARQ$ est un parallélogramme.

1. Faire une figure soignée.

2. Trouver les réels x_1 et x_2 tels que P soit le barycentre de $\{(A, x_1); (B, x_2)\}$.

3. Trouver les réels y_1 et y_2 tels que R soit le barycentre de $\{(A, y_1); (D, y_2)\}$.

4. Montrer que (BR) et (DP) sont sécantes en I barycentre de ABD dont on précisera.

5. Prouver que $Q = \{(A, -5); (B, 8); (D, 9)\}$.

6. Montrer que les points I, Q et C sont alignés.

7 Préciser la position du point Q sur la droite (IC).

8 Démontrer que $(BR),(CQ)$ et (DP) sont concourantes.

Exercice 17

1 Construire un triangle ABC tels que :
$AC = 12$, $AB = 10$ et $BC = 8$ et placer le barycentre G du système de points pondérés $\{(A;1),(B;2),(C;1)\}$.

2 Déterminer et représenter l'ensemble des points M tels que :
$\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = AC$.

3 Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points N tels que :
$\|\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\| = \|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\|$.

a Montrer que B appartient à $\mathcal{E}$.

b Déterminer et représenter l'ensemble $\mathcal{E}$.

4 Déterminer et représenter l'ensemble des points P du plan tels que :
$\|\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\| = \|3\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}\|$.

Exercice 18

Soit A, B et C trois points du plan, a, b et c trois réels tels que : $a+b+c \neq 0$. Soit G le barycentre de $(A,a),(B,b)$ et (C,c).

1 Démontrer que le système
$\{(A,2a+1),(B,2b-2),(C,2c+1)\}$ admet un barycentre que l'on notera K.

2 Déterminer une relation vectorielle qui définit K.

3 En déduire que :
$$a\overrightarrow{KA}+b\overrightarrow{KB}+c\overrightarrow{KC} = \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}.$$

4 En déduire que G et K sont confondus si B est le milieu de $[AC]$.

5 En supposant que les points A, B et C ne soient pas alignés. Soit E le point vérifiant que $ABCE$ soit un parallélogramme.

a Montrer que : $\overrightarrow{GK} = \dfrac{\overrightarrow{BE}}{2(a+b+c)}$ en utilisant la question 2).

b Construire G et K pour $a = c = \dfrac{1}{2}$ et $b = 2$.

Exercice 19

Soit A, B et C trois points non alignés, α, β et γ trois réels vérifiant la condition d'existence des barycentres suivants :
$G = \text{bar}\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)\}$
$G_1 = \text{bar}\{(A;-\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)\}$
$G_2 = \text{bar}\{(A;\alpha),(B;-\beta),(C;\gamma)\}$
$G_3 = \text{bar}\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;-\gamma)\}$
Démontrer que les droites (AG_1), (BG_2) et (CG_3) sont concourantes en G.

Exercice 20

Soit ABC un triangle quelconque.

1 a Placer les points I et J tels que :
$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}.$$

b Ecrire le point I comme barycentre de A et B et J comme barycentre de B et C en précisant les coefficients des systèmes.

2 a Placer sur la figure le point
$K = \text{bar}\{(A;-2),(B;-3)\}$.

b Soit G le barycentre du système $\{(A;-2),(B;-1),(C;-3)\}$. Montrer que les droites (AJ), (CI) et (BK) sont concourantes en G.

3 Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan tels que :

a $(\mathcal{C})$: $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{BC}$.

b $(\mathcal{F})$: $\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}\| = 5MA$.

c $(\mathcal{G})$: $\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.

d $(\mathcal{H})$: $\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\| = 6AB$.

e $(\mathcal{L})$: $6 \leq \|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\| \leq 6\sqrt{2}$.