Ministère de l'Éducation Nationale

Inspection Académique de Kédougou Lycée Dindéfelo Cellule de Mathématiques

Année scolaire 2025-2026

Date: 24/10/2025 Classe: Terminale S2 Professeur: M. BA

Exercice 1

1. Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(3x)}{1 - \sqrt{x+1}} \quad ; \quad \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x+3}}{x-2} \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^3 + x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{3\sin^2 x - \cos x + 1}{x^2} \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x \tan x}$$

2. Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \quad ; \quad \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x + 1} - 2}{\sqrt{x^2 - x - 6}} \quad ; \quad \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x + 3} - \sqrt{5 - x}}{\sqrt{2x + 7} - \sqrt{10 - x}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{\sin 2x} \quad ; \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

3. Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(x-\sqrt{x^2+3x-1}\right)\quad;\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+\sqrt{x^2+1}}{x}\quad;\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x+3}-2}$$

$$\lim_{x \to \pm \infty} \left(2x + \sqrt{x - 1} \right) \quad ; \quad \lim_{x \to \pm \infty} \left(x + \sqrt{2x^2 - 5x + 1} \right) \quad ; \quad \lim_{x \to \pm \infty} \left(x \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}} \right)$$

$$\lim_{x \to \pm \infty} \frac{x - \sqrt{|x|}}{3x + 2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{5x - 2} - \sqrt{x + 1}$$

4. Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x \to \pm \infty} \frac{x^2 + \sin x}{x} \quad ; \quad \lim_{x \to \pm \infty} \frac{x + \sin x}{2 - \sin x} \quad ; \quad \lim_{x \to \pm \infty} \frac{x^3}{3 + 2\sin x}$$

5. Déterminer les réels a et b pour que la droite d'équation y=ax+b soit une asymptote à la courbe représentative de la fonction $x\mapsto \sqrt{x^2+4}-\frac{x}{\sqrt{2}}$.

1

Exercice 2

Calculer les limites suivantes :

1.
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{2\cos x - \sqrt{2}}{x - \frac{\pi}{4}}$$
 ; $\lim_{x \to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1}$

2.
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sqrt{2}\cos x}{1 - \sqrt{2}\sin x}$$
 ; $\lim_{x \to 0^+} \frac{x\cos x + \sin x}{\sqrt{x + 1} - 1}$

3.
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$$
 ; $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{2}{\cos x} + \cos x - 3 \right)$

4.
$$\lim_{x \to +\infty} \left(x \arctan(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2} x \right)$$
 ; $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1} \right)$

5.
$$\lim_{|x| \to +\infty} \left(3x - 1 + \sqrt{9x^2 + 3x - 2} \right)$$
 ; $\lim_{x \to 0} \frac{1 - x^2 E\left(\frac{1}{x}\right)}{1 + x^2 E\left(\frac{1}{x}\right)}$

Exercice 3

Étudier la continuité de la fonction f sur D_f dans chaque cas.

1.
$$f(x) = x + \sqrt{x+1}$$

1.
$$f(x) = x + \sqrt{x+1}$$
.
2. $f(x) = 4x + 1 + \frac{1}{x-1}$.

$$3. f(x) = 2\sqrt{x} - x.$$

4.
$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{1-x}$$
.

Exercice 4

Donner la dérivée des fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{1 - \sin(2x)} \quad ; \quad g(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)\sqrt{\frac{1}{x}} \quad ; \quad h(x) = \sqrt[3]{x - 6} + \frac{1}{x} \quad ; \quad k(x) = \left|\frac{x^2 - x}{x - 1}\right|$$

$$m(x) = x\sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}} \quad ; \quad n(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x + 1} \quad ; \quad p(x) = \frac{\tan x}{1 - 2\sin x}$$

$$q(x) = 3\left(x^2 - 3x + 5\right)^4 \quad ; \quad r(x) = \cos^2(3x) \quad ; \quad s(x) = -2\tan^2(2x)$$

Exercice 5

Etude d'une fonction par lecture graphique La courbe (C_f) ci-dessus est celle d'une fonc-

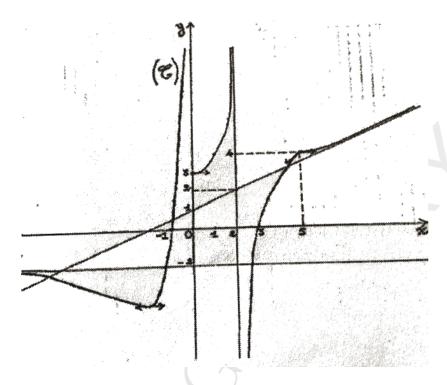


FIGURE 1 – Courbe de (Cf)

tion f dans un repère orthonormé. f est définie en 0 et on a : f(0) = 3.

- 1. Préciser l'ensemble de définition de f.
- 2. Donner les limites suivantes :

a)
$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$
, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$;

b)
$$\lim_{x \to 0^+} f(x)$$
, $\lim_{x \to 0^-} f(x)$;
c) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$, $\lim_{x \to 2^-} f(x)$;

c)
$$\lim_{x \to 2^+} f(x)$$
, $\lim_{x \to 2^-} f(x)$;

- 3. La courbe admet-elle une asymptote oblique? Si oui, donner son équation.
- 4. Préciser les équations des autres asymptotes.
- 5. La fonction f est-elle dérivable en 5? Justifier la réponse.
- 6. Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 6

Le tableau de variation ci-dessous est celui d'une fonction f continue sur son ensemble de définition avec f'(1) = 0 et f'(4) = -1. La courbe (C_f) de f coupe l'axe des abscisses en A(-2;0) et $B\left(-\frac{1}{2};0\right)$ et l'axe des ordonnées au point C(0;2).

La droite (D): y = x - 3 est une asymptote oblique en $+\infty$ et est en dessous de (C_f) sur $[0; +\infty[$.

| x | $-\infty$ | -3 | _ | -1 | 1 | | 3 | | $+\infty$ |
|----|-----------|----|-----------|-----------|-----|---|-----|-----------|-----------|
| f' | _ | 0 | + | + | 0 | _ | 0 | + | |
| f | -1 | -3 | $+\infty$ | $-\infty$ | , 4 | | * 2 | <i></i> * | $+\infty$ |

- 1. Déterminer le domaine de définition de f puis donner les limites aux bornes.
- 2. Déterminer le domaine de dérivabilité de f.
- 3. Déterminer en justifiant toutes les asymptotes à la courbe de f.
- 4. Donner l'équation de chacune des demi-tangentes à la courbe au point d'abscisse 1.
- 5. Tracer (D) et (C_f) dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.
- 6. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[3; +\infty[$.
 - (a) g est-elle bijective? Justifier.
 - (b) g^{-1} est-elle dérivable en 2? Justifier.
- 7. Graphiquement, déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles l'équation f(x) = m admet exactement 4 solutions réelles distinctes.

Exercice 7

Soit f la fonction donnée par : $f(x) = \frac{2\sin(2x)}{1 + \cos(x)}$

- 1. Déterminer le domaine de définition de f puis montrer qu'on peut réduire le domaine d'étude de f à l'intervalle $]0,2\pi[$.
- 2. Déterminer la limite de f en π .
- 3. Soit α l'unique réel de $]0, 2\pi[$ tel que $\cos(\alpha) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Montrer que $\cos(2x) + \cos(x) 1 > 0$ si et seulement si $x \in]0, \alpha[$.
- 4. Montrer que $f'(x) = \frac{4(\cos^2(2x) + \cos(x) 1)}{1 + \cos(x)}$, en déduire le signe de f'(x) en utilisant (3), puis dresser le tableau de variation de f sur $]0, 2\pi[$.
- 5. Tracer la courbe de f sur $]-2\pi, 2\pi[$. Unité : 1 cm.

Problème n°1

Soit la fonction numérique $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 - \frac{2x}{x^2 + 1} & \text{si } x \le 1, \\ x - 1 - 3\sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Partie A

- 1. Justifier que $D_f = \mathbb{R}$.
- 2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 1$.
- 3. Iterpréter les résultats obtenus
- 4. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f .
- 5. (a) Montrer que la courbe (C_f) admet deux asymptotes (D_1) et (D_2) à préciser.
- (b) Préciser la position de (C_f) par rapport à (D_1) et (D_2) .
- 5. (a) Calculer f'(x) dans les intervalles où f est dérivable (justifier l'existence de ces dérivées).
- (b) Établir le tableau de variations de f.
- (c) Tracer (C_f) et les asymptotes dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie B

Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty,1]$.

- 1. Montrer que g est bijective de $]-\infty,1]$ sur un intervalle J à préciser.
- 2. Montrer que l'équation g(x) = x admet une unique solution β et que $\frac{1}{3} < \beta < \frac{3}{4}$.
- 3. (a) Étudier la dérivabilité de g^{-1} .
 - (b) Calculer $g^{-1}(2)$.
 - (c) Construire $(C_{g^{-1}})$ dans le repère précédent.
 - (d) Montrer que g admet une primitive sur $]-\infty,1]$ et déterminer cette primitive qui s'annule en 0.

Problème n°2

Soit la fonction numérique $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - 1 + \sqrt{x^2 - x}}{x - 2} & \text{si } x \ge 1\\ \frac{x - 1}{x^2 - 4x + 3} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative.

Partie A

- 1. Déterminer le domaine de définition de f.
- 2. Calculer les limites aux bornes de D_f .
- 3. Étudier la continuité de f en 1.

- 4. Étudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter graphiquement les résultats.
- 5. (a) Déterminer les réels a, b, et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}, \forall x < 1.$
 - (b) En déduire que (C_f) admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote oblique (Δ) dont on précisera son équation.
 - (c) Étudier la position relative de (C_f) par rapport à (Δ) sur $]-\infty;1[$.
- 6. Étudier la nature de la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$, puis étudier sa position relative par rapport à (C_f) s'il s'agit d'une asymptote.
- 7. Déterminer f'(x) sur chaque intervalle où f est dérivable, puis en déduire son signe.
- 8. Dresser le tableau de variation de f.

Partie B

Soit h la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty; 1[$.

- 1. Montrer que h réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser.
- 2. (a) Calculer h(0).
 - (b) h^{-1} est-elle dérivable en $-\frac{3}{2}$? Si oui, déterminer $(h^{-1})'\left(-\frac{3}{2}\right)$.
 - (c) Déterminer le sens de variation de h^{-1} puis dresser son tableau de variation.
- 3. Déterminer l'expression de $h^{-1}(x)$.
- 4. Tracer soigneusement (C_f) et $(C_{h^{-1}})$ dans un repère orthonormé.

Problème n°3

Étude graphique

Soit f une fonction dont la courbe représentative est donnée ci-dessous

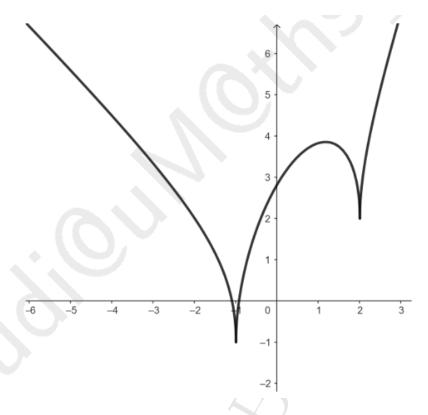


FIGURE 2 – Courbe de (Cf)

- 1. Déterminer f(-1); f(2) et D_f .
- 2. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f .
- 3. (a) f est-elle dérivable en -1 et en 2?
 - (b) Déterminer les variations de f sur $]-\infty,-1[$ et sur $]2,+\infty[$.

Étude numérique

Dans cette partie, on prend $f(x) = x + 2\sqrt{|x^2 - x - 2|}$.

- 1. (a) Déterminer le domaine de définition de f.
 - (b) Écrire f(x) sans symbole de la valeur absolue puis calculer les limites aux bornes de D_f .
 - (c) Montrer que (C_f) admet une asymptote oblique (D) en $+\infty$ et donner l'équation de cette asymptote.
 - (d) Étudier la position de (C_f) par rapport à (D).
 - (e) Préciser la nature de l'asymptote à (C_f) en $-\infty$.
- 2. (a) Étudier la dérivabilité de f en -1 et 2. Interpréter le résultat obtenu.
 - (b) Donner l'ensemble de dérivabilité de f puis calculer f'(x).
 - (c) Démontrer que f'(x) > 0 sur $]2; +\infty[$ et que f'(x) < 0 sur $]-\infty; -1[$.
 - (d) Résoudre l'inéquation $\sqrt{-x^2+x+2} \le 2x-1$ sur] -1;2[.

- (e) Dresser le tableau de variation de f.
- 3. (a) Soit g la restriction de f sur $I=]2;+\infty[$. Montrer que g est une bijection de I sur I.
 - (b) En étudiant la fonction h définie par h(x) = x g(x), montrer qu'il existe un réel α vérifiant $g(\alpha) = \alpha$.
 - (c) Déterminer par le calcul la valeur exacte de α , puis déterminer $(g^{-1})(\alpha)$ si possible.
 - (d) Tracer dans le même repère (Cg) et (Cg^{-1}) .

Problème n°4

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -x + \sqrt{x^2 + 4} & \text{si } x < 0\\ \sqrt{|4 - x^2|} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
- 2. Écrire f(x) sans le symbole de la valeur absolue.
- 3. (a) Étudier la continuité de f en 0.
 - (b) Étudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats.
 - (c) Étudier la dérivabilité de f en 2. Interpréter les résultats.
- 4. (a) Calculer les limites aux bornes de D_f .
 - (b) Étudier les branches infinies de (C_f) .
- 5. On pose pour tout $x \in [0, 2]$, h(x) = f(x) x.
 - (a) Montrer que l'équation h(x) = 0 admet une unique solution notée α .
 - (b) Vérifier que $\alpha \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$.
- 6. (a) Calculer f'(x) sur chaque intervalle où f est dérivable.
 - (b) Dresser le tableau de variations de f.
 - (c) Construire (C_f) .
- 7. Soit g la restriction de f sur $I =]2; +\infty[$.
 - (a) Montrer que g est une bijection de I vers un intervalle J à préciser.
 - (b) Montrer que g^{-1} est dérivable en $\sqrt{5}$ puis calculer $(g^{-1})'(\sqrt{5})$.
 - (c) Expliciter $g^{-1}(x)$.
 - (d) Tracer $(C_{q^{-1}})$ dans le même repère que (C_f) .
- 8. Montrer que pour tout $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right], |f'(x)| \le \frac{3\sqrt{7}}{7}$.
- 9. En déduire que $|f(x) \alpha| \le \frac{3\sqrt{7}}{7}|x \alpha|$, pour tout $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$.