

Systèmes d'équations et d'inéquations

Prof : M. BA

Classe : 1erL

Année scolaire : 2025 – 2026

Introduction aux Systèmes

I. Systèmes de trois équations linéaires à trois inconnues

1. Exemple

Le système $\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 \\ 2x - y + 2z = 2 \\ -x + y + z = -3 \end{cases}$ est formé de trois équations. Chacune d'elle contient trois inconnues x ; y et z avec des exposants tous égaux à 1. On dit qu'on a un système de trois équations linéaires à trois inconnues x ; y et z .

Résoudre un tel système c'est trouver tous les triplets (x, y, z) de nombres réels qui vérifient les trois équations du système.

2. Résolution avec la méthode du pivot de Gauss

Exemple 1:

Résolvons le système suivant en utilisant la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 \\ 2x - y + 2z = 2 \\ -x + y + z = -3 \end{cases}$$

Pour résoudre un tel système, on commence par désigner les 3 équations respectivement par L_1 ; L_2 et L_3

$$\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 & (L_1) \\ 2x - y + 2z = 2 & (L_2) \\ -x + y + z = -3 & (L_3) \end{cases}$$

1^{ère} étape : On fixe l'équation (L_1) puis on élimine l'inconnue x dans (L_2) en considérant le

$$\text{sous-système } -2 \begin{cases} x + 10y - 3z = 5 & (L_1) \\ 2x - y + 2z = 2 & (L_2) \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} -2x - 20y + 6z = -10 \\ 2x - y + 2z = 2 \end{cases} \text{ ainsi on a :}$$

$$-21y + 8z = -8 \quad (L'_2)$$

2^{ème} étape : On fixe l'équation (L_1) puis on élimine l'inconnue x dans (L_3) en considérant le

$$\text{sous-système } \begin{cases} x + 10y - 3z = 5 & (L_1) \\ -x + y + z = -3 & (L_3) \end{cases} \text{ d'où ainsi on a :}$$

$$11y - 2z = 2 \quad (L'_3)$$

Ainsi, on obtient le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 & (L_1) \\ -21y + 8z = -8 & (L'_2) \\ 11y - 2z = -3 & (L'_3) \end{cases}$$

3^{ème} étape : On fixe (L'_2) puis on élimine y dans (L'_3) en considérant le sous-système

$$\begin{cases} -21y + 8z = -8 & (L'_2) \\ 11y - 2z = 2 & (L'_3) \end{cases} \quad \text{Ainsi on a } 46z = -46 \quad (L''_3)$$

On obtient le système équivalent suivant dit système triangulaire

$$\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 & (L_1) \\ -21y + 8z = -8 & (L'_2) \\ 46z = -46 & (L''_3) \end{cases}$$

4^{ème} étape : Pour terminer la résolution, on détermine z dans (L''_3) , puis on remplace z par cette valeur dans (L'_2) , on obtient la valeur de y puis on obtient celle de x, en substituant à y et z par leurs valeurs respectives dans (L'_1) .

Ainsi on a : $S = \{(2; 0; -1)\}$

Exemple 2:

II. Systèmes d'inéquations linéaires à deux inconnues

1. Inéquations linéaires à deux inconnues

Exemple 3:

$2x + y - 5 > 0$ est une inéquation linéaire à deux inconnues x et y.

Résolution graphique

Pour résoudre graphiquement l'inéquation $2x + y - 5 > 0$, on représente la droite (D) d'équation $2x + y - 5 = 0$ dans un repère orthonormé (O, I, J) .

x	0	1
y	5	3

Ensuite, on choisit un point qui n'est pas sur (D) et dont ses coordonnées sont connues.

Par exemple : le point $O(0; 0)$ puis on remplace dans l'inéquation x et y respectivement par les coordonnées de O.

Ainsi, on a $2(0) + 0 - 5 > 0$ c'est à dire $-5 > 0$ **faux** donc les coordonnées de O ne vérifie pas l'inéquation.

On barre donc le demi-plan de frontière (D) contenant O.

2. Systèmes de deux inéquations à deux inconnues

Exemple 4:

Le système $\begin{cases} x - 2y + 1 \geq 0 \\ 2x + y - 3 < 0 \end{cases}$ est un système de deux inéquations linéaires à deux inconnues x et y

Résolution graphique

Résolvons graphiquement le système $\begin{cases} x - 2y + 1 \geq 0 \\ 2x + y - 3 < 0 \end{cases}$

On commence par représenter graphiquement les droites (D_1) d'équation $x - 2y + 1 = 0$ et (D_2) d'équation $2x + y - 3 = 0$ dans un repère orthonormé (O, I, J) .

x	-1	1
y	0	1

x	0	1
y	3	1

Puis on choisit un point qui n'est ni sur (D_1) , ni sur (D_2) et dont les coordonnées sont connues. Par exemple : le point $O(0; 0)$.

En remplaçant x et y par les coordonnées de O dans l'inéquation 1, on a : $0 - 2(0) + 1 \geq 0$ c'est à dire $1 \geq 0$ **vrai** donc les coordonnées de O vérifie l'inéquation 1. On barre donc le demi-plan de frontière (D_1) ne contenant pas O .

En remplaçant x et y par les coordonnées de O , dans l'inéquation 2, on a : $2(0) + 0 - 3 < 0$ c'est à dire $-3 < 0$ **vrai** donc les coordonnées de O vérifie l'inéquation 2. On barre donc le demi-plan de frontière (D_2) ne contenant pas O .

NB : le 3. Sera donné comme exercice à faire

3. Systèmes de trois inéquations à deux inconnues

Exemple 5:

Le système $\begin{cases} -x + y + 2 \geq 0 \\ 2x - y - 4 < 0 \\ x - 2y - 1 > 0 \end{cases}$ est un système de trois inéquations à deux inconnues x et y .

Résolution graphique $\begin{cases} -x + y + 2 \geq 0 \\ 2x - y - 4 < 0 \\ x - 2y - 1 > 0 \end{cases}$