Td Calcul vectoriel

Exercice 1 Déterminer deux nombres réels a et b tels que C soit le barycentre du système $\{(A,a);(B,b)\}$ dans des cas suivants :

1. $3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$
2. $\overrightarrow{BA} = \frac{3}{8}\overrightarrow{BC}$
3. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$
4. $\overrightarrow{AB} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$
5. $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$

Exercice 2
A et B sont deux points distants de 4 cm.

1. Ecrire comme barycentre des points A et B :
   - a. Le symétrique I de A par rapport à B.
   - b. Le symétrique E du milieu K de $[AB]$ par rapport à A.
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :
$$\left\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right\| = 6$$

Exercice 3
Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$ et $BC = 5$. On note
$$I = bar\{(A,3),(B,-2)\}$$
$$J = bar\{(B,-2),(C,5)\}$$

1. Construire I et J.
2. Soit G tel que : $3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + 5\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$. Montrer que $G = bar\{(I,1),(C,5)\}$.
3. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :
   - a. $\left\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|-2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right\|$.
   - b. $\left\|18\overrightarrow{MA} - 12\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MI} + 5\overrightarrow{MC}\right\|$.

Exercice 4 Soit ABC un triangle tel que : $AB = 10$; $AC = 12$ et $BC = 8$ et placer le barycentre G du système $\{(A,1),(B,2),(C,1)\}$.

1. Faire la figure que l'on complétera au fur et à mesure.
2. Déterminer et construire l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que : $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = AC$.
3. Soit (E) l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que : $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right\|$.
   - a. Montrer que $B \in (E)$.
   - b. Déterminer et représenter l'ensemble (E_2).
4. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 5

1. Construire le barycentre G de $(A,3)$ et $(B,3)$; E de $(B,3)$ et $(C,1)$; F de $(A,3)$ et $(C,1)$.
2. Soit I le barycentre de $(A,3),(B,3)$ et $(C,1)$. Démontrer que :
   - Les points A, I et E sont alignés.
   - Les points B, I et F sont alignés.
   - Les points C, I et G sont alignés.
3. Que peut-on en déduire pour les droites $(AE),(BF)$ et (CG) ?

Exercice 6
Soit ABC un triangle. On considère :

- Le barycentre I de $(A,2)$ et $(C,1)$.
- Le barycentre J de $(A,1)$ et $(B,2)$.

- Le barycentre K de $(C,1)$ et $(B,-4)$.

1. Démontrer que B est le barycentre de $(K,3)$ et $(C,1)$.
2. En déduire le barycentre de $(A,2),(K,3)$ et $(C,1)$.
3. Montrer que J est le milieu de $[IK]$.

Exercice 7 Soit ABC un triangle.

1. Construire les points P, Q et R tels que : $\overrightarrow{CP}=\dfrac{3}{8}\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BR}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{BC}$
2. Démontrer que les droites (AR), (BP) et (CQ) sont concourantes.

Exercice 8 ABC est un triangle équilatéral et $ABDC$ est un parallélogramme. Construire le point G vérifiant : $3\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

1. Montrer que G est le barycentre du système $\{(A,2),(B,-1),(C,2)\}$.
2. Soit I milieu de $[AC]$. Démontrer que G est barycentre de B et I affectés de coefficients que l'on déterminera. En déduire que G appartient à la médiatrice de $[AC]$.
3. En désignant par H l'isobarycentre de G et D. Déterminer puis construire l'ensemble (Γ) des points M tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}\|=6AB$$

Exercice 9 Soit RTS un triangle quelconque.

1. Construire les points A ; B ; C et D définis par : D est le milieu de $[RS]$; B celui de $[RT]$; A le symétrique de D par rapport à R et $\overrightarrow{CT}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{ST}$.
2. Déterminer les réels a ; b ; s et t tels que :

$$R=bar\{(A,a);(S,s)\}\ ;$$
$$C=bar\{(T,t);(S,b)\}$$

3. Démontrer que : $B=bar\{(T,3);(A,2);(S,1)\}$
4. En déduire que les points A ; B et C sont alignés.

Exercice 10 Soit ABC un triangle. $\forall m\in\mathbb{R}$ considérons le point
$G_m=bar\{(A,m);(B,2m);(C,1)\}$

1. Pour quelles valeurs de m le point G_m existe-t-il ?
2. Soit D barycentre de $(A,1)$ $(B,2)$.
3. Démontrer que $G_m\in(CD)$.
4. Pour quelles valeurs de m, G_m est un point de $[CD]$.

Exercice 11
Soit ABC un triangle isocèle en A. O,I et J les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

1.
   a. Montrer que pour tout M du plan on a : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MJ}$.
   b. En déduire que les triangles ABC et OIJ ont même centre de gravité.
2. Montrer que B est le barycentre $\{(J;1),(O;1),(I;-1)\}$.
3. On donne $H=bar\{(J;3),(C;-1)\}$. Montrer que les droites (OH) et (AJ) sont parallèles.
4. Soit $K=bar\{(A;2),(B;1),(C;1)\}$.
   a. Construire K puis montrer que est le milieu $[AJ]$.
   b. Montrer que $OAIJ$ est un losange.
5. On considère l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$$\left\|2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}+4\overrightarrow{KI}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|.$$

   a. Vérifier que $A\in(E)$.
   b. Montrer que (E) est la médiatrice du segment $[IO]$.

Exercice 12
Dans le plan, on considère le triangle ABC isocèle en A de hauteur AH tel que $AH=BC=4$ cm.

1. En justifiant la construction, placer le point G barycentre de $\{(A,2);(B,1),(C,1)\}$.
2. On désigne par M un point quelconque du plan.

   a- Montrer que $\vec{V}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ est vecteur constant et $\|\vec{V}\|=8$.

3. Déterminer et construire l'ensemble **F** des points M du plan tels que :

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\|\vec{V}\|$$

4. On considère le système $\{(A,2);(B,n);(C,n)\}$ où n est un entier naturel fixé.

   a. Montrer que G_n le barycentre de ce système existe pour tout n.

   b. Construire les points G_0, G_1 et G_2.

   c. Montrer que G_n appartient au segment $[AH]$.

5. Soit $\mathbf{E}_n$ l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+n\overrightarrow{MB}+n\overrightarrow{MC}\right\|=n\|\vec{V}\|.$$

   Montrer que $\mathbf{E}_n$ est un cercle qui passe par A. Construire $\mathbf{E}_n$.

Exercice 13 **Approfondissement :**

Soit $ABCD$ est un parallélogramme, on construit les points P, Q et R définis par : $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AR}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ et Q est tel que $PARQ$ est un parallélogramme.

1. Faire une figure soignée.

2. Trouver les réels x_1 et x_2 tels que P soit le barycentre de $\{(A,x_1);(B,x_2)\}$.

3. Trouver les réels y_1 et y_2 tels que R soit le barycentre de $\{(A,y_1);(D,y_2)\}$.

4. Montrer que (BR) et (DP) sont sécantes en I barycentre de ABD dont on précisera.

5. Prouver que $Q=\{(A,-5);(B,8);(D,9)\}$.

6. Montrer que les points I, Q et C sont alignés.

7. Préciser la position du point Q sur la droite (IC).

8. Démontrer que $(BR),(CQ)$ et (DP) sont concourantes.

Exercice 14

Exercice 15

Exercice 16

Exercice 17