◇◇◇ Lycée de Dindéfélo ◇◇◇			A.S. : 2024/2025
Matière: Mathématiques	Niveau : 1^{er}S2	Date: 16/06/2025	Durée : 4 heures

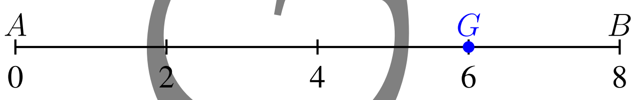
Correction de la composition Du 2^{nd} Semestre

Correction Exercice 1 : 4 pts

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 8$ cm.

1. Construisons le barycentre G des points pondérés $(A;1)$ et $(B;3)$. **0,1 pt**

$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$



2. Calculons les distances GA et GB. **0,5 pt + 0,5 pt**

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} &\Longrightarrow \|\overrightarrow{AG}\| = \frac{3}{4}\|\overrightarrow{AB}\| \\
&\Longrightarrow AG = \frac{3}{4} \times 8 \\
&\Longrightarrow AG = 6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} &\Longrightarrow \|\overrightarrow{BG}\| = \frac{1}{4}\|\overrightarrow{BA}\| \\
&\Longrightarrow BG = \frac{1}{4} \times 8 \\
&\Longrightarrow BG = 2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{GA = 6 \text{ et } GB = 2}}$$

3. Démontrons que pour tout point M du plan,

$$MA^2 + 3MB^2 = 4MG^2 + 48$$

0,1 pt

$$\begin{aligned}
MA^2 + 3MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + 3\overrightarrow{MB}^2 \\
&= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 \\
&= \overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}^2 + 3(\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}^2) \\
&= \overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}^2 + 3\overrightarrow{MG}^2 + 6\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GB}^2 \\
&= 4\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + 6\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GA}^2 \\
&= 4\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB}) + 3\overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GA}^2 \\
&= 4\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{O}) + 3\overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GA}^2 \\
&= 4\overrightarrow{MG}^2 + 3\overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GA}^2 \\
&= 4\overrightarrow{MG}^2 + 3(2)^2 + 6^2 \\
&= 4\overrightarrow{MG}^2 + 12 + 36 \\
&= 4MG + 48
\end{aligned}$$

$$\mathbf{MA^2 + 3MB^2 = 4MG^2 + 48} \quad \textbf{CQFD}$$

4 Démontrons et construisons l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MA^2 + 3MB^2 = 84$$

0,1 pt

D'après la relation précédente on a $MA^2 + 3MB^2 = 4MG^2 + 48$

$$\begin{aligned} 4MG^2 + 48 &= 84 \\ 4MG^2 &= 84 - 48 \\ 4MG^2 &= 36 \\ MG^2 &= 9 \\ MG &= 3 \end{aligned}$$

Donc, l'ensemble des points M tels que $MA^2 + 3MB^2 = 84$ est le cercle de centre I et de rayon 3 :

$$\mathscr{C}(\mathbf{I},\ \mathbf{3})$$

5 Déterminons et construison l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -12$$

0,1 pt

Soit I milieu de AB

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -12 &\implies \overrightarrow{MI}^2 - \frac{\overrightarrow{AB}^2}{4} = -12 \\ &\implies \overrightarrow{MI}^2 - \frac{8^2}{4} = -12 \\ &\implies \overrightarrow{MI}^2 - 16 = -12 \\ &\implies \overrightarrow{MI}^2 = 4 \end{aligned}$$

Donc, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -12$ est le cercle de centre I et de rayon 2 :

$$\mathscr{C}(\mathbf{I},\ \mathbf{2})$$

Exercice 2 : 5 pts

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$$

1 Déterminons les réels a et b tels que la courbe (C_f) passe par le point $A(0, 1)$ et admette en ce point une tangente horizontale. **0,5 pt + 0,75 pt**

- (C_f) passe par $A(0, 1)$ signifie que $f(0) = 1$.

  On calcule :

$$f(0) = \frac{0^2 + a \cdot 0 + b}{0 - 1} = \frac{b}{-1} = -b$$

  Donc, $-b = 1 \Rightarrow \boxed{b = -1}$.

- (C_f) admet une tangente horizontale en $A(0,1)$ signifie que $f'(0)=0$.

  On dérive f par le quotient :

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{avec} \quad u(x)=x^2+ax+b, \quad v(x)=x-1$$

$$f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{(x-1)^2}$$

$$u'(x)=2x+a, \quad v'(x)=1$$

$$f'(x)=\frac{(2x+a)(x-1)-(x^2+ax+b)}{(x-1)^2}$$

  Calculons $f'(0)$:

$$f'(0)=\frac{(0+a)(-1)-(0+0+b)}{1}=\frac{-a-b}{1}=-a-b$$

  On veut $f'(0)=0$, donc :

$$-a-b=0 \Rightarrow -a+1=0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

Ainsi, les réels recherchés sont $\boxed{a=1}$ et $\boxed{b=-1}$.

On suppose $a=1$ et $b=-1\ldots$

2 Déterminons les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$. Précisons les asymptotes éventuelles. **0,5 pt + 0,5 pt + 0,5 pt**

La fonction devient, avec $a=1$ et $b=-1$:

$$f(x)=\frac{x^2+x-1}{x-1}$$

Domaine de définition :

$$\mathcal{D}_\mathbf{f}=\mathbb{R}\setminus\{\mathbf{1}\}$$

Limites aux bornes du domaine :

- Limite en $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-1}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})}{x(1-\frac{1}{x})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})}{1-\frac{1}{x}}=-\infty$$

  Donc :

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

- Limite en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-1}{x-1}=+\infty$$

- Limite en 1^- :

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+x-1}{x-1}=\frac{1+1-1}{0^-}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

- Limite en 1^+ :

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+x-1}{x-1} = \frac{1+1-1}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Asymptotes :

- En $x = 1$, la fonction tend vers $\pm\infty$, donc la droite $x = 1$ est une **asymptote verticale**.

3 Déterminer les réels α, β, γ tels que :

$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x-1}$$

En déduire que la droite $(D) : y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe. **0,75 pt + 0,5 pt**

On part de :

$$f(x) = \frac{x^2+x-1}{x-1}$$

On effectue la division euclidienne du numérateur par le dénominateur.

Division de $x^2 + x - 1$ par $x - 1$:

$$\frac{x^2+x-1}{x-1} = x + 2 + \frac{1}{x-1}$$

Donc :

$$\boxed{f(x) = x + 2 + \frac{1}{x-1}} \quad \text{avec } \alpha = 1,\ \beta = 2,\ \gamma = 1$$

Conclusion sur l'asymptote oblique :

Lorsque $x \to \pm\infty$, $\dfrac{1}{x-1} \to 0$, donc : $y = x + 2$

Par conséquent, la droite $(D) : y = x + 2$ est une **asymptote oblique** à la courbe représentative de f.

4 Dresser le tableau de variations de f puis tracer la courbe. **0,1 pt + 0,5 pt**

On a vu précédemment que :

$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x-1}$$

On dérive :

$$f'(x) = \left(x + 2 + \frac{1}{x-1}\right)' = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$$

Étudions le signe de $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Tableau de signes de $f'(x)$:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(0)=1$	$\searrow$	$-\infty \ \Vert \ +\infty$	$\searrow$	$f(2)=5$	$\nearrow$	$+\infty$

Remarques : - En $x=1$, la fonction n'est pas définie (asymptote verticale).

- En $x=0$, $f(0)=1$

- En $x=2$, $f(2)=\dfrac{4+2-1}{1}=5$

Courbe représentative :

Tracer la courbe en tenant compte :

- de l'asymptote verticale $x=1$,
- de l'asymptote oblique $y=x+2$,
- des points remarquables : $A(0,1)$, $B(2,5)$.

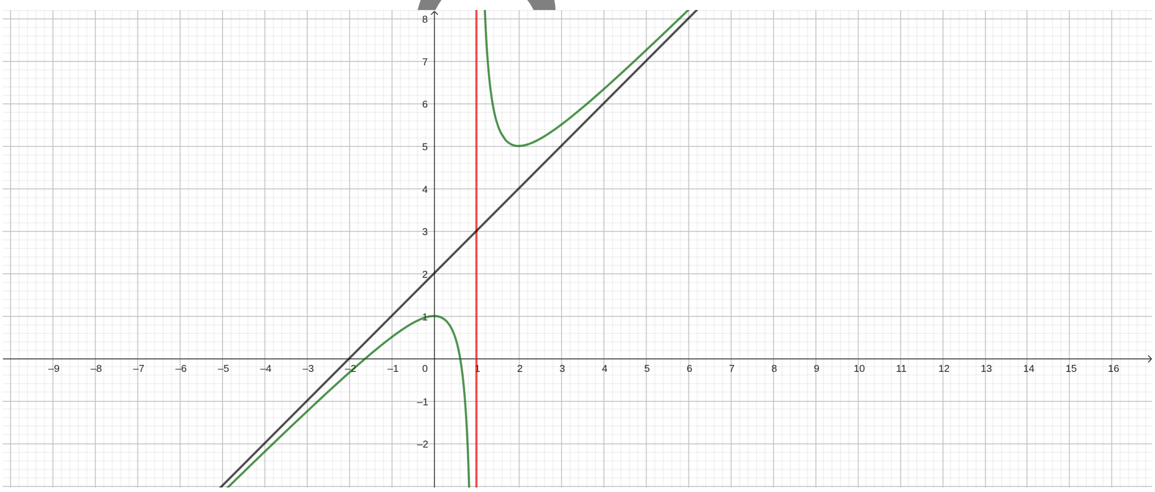


Figure 1: Représentation graphique de la courbe

Clique ici pour voir la courbe sur géogébra

Problème : 10 pts

Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x^2+5x-5}{x-1} & \text{si } x\leq 0\\ \dfrac{3x-5}{x^2-1} & \text{si } x>0\end{cases}$$

1 Montrons que $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **1,25 pt**

$$\textbf{Posons } f(x)=\begin{cases}f_1(x)=\dfrac{-x^2+5x-5}{x-1} & \text{si } x\leq 0\\ f_2(x)=\dfrac{3x-5}{x^2-1} & \text{si } x>0\end{cases}$$

$f_1 \exists$ ssi $x-1 \neq 0$ et $x \leq 0$

ssi $x \neq 1$ et $x \leq 0$

ssi $x \neq 1$ et $x \in]-\infty; 0]$

ssi $1 \notin]-\infty; 0]$

Donc $D_{f_1} =]-\infty; 0]$

$f_2 \exists$ ssi $x^2 - 1 \neq 0$ et $x \geq 0$

ssi $x \neq -1$ et $x \neq 1$ et $]0; +\infty[$

ssi $-1 \notin]0; +\infty[$ et $1 \in]0; +\infty[$

ssi $1 \in]0; +\infty[$

Donc $D_{f_2} =]0; 1[\cup]1; +\infty[$

$$\begin{aligned} D_f &= D_{f_1} \cup D_{f_2} \\ &= (]-\infty; 0]) \cup (]0; 1[\cup]1; +\infty[) \\ &=]-\infty; 0] \cup]0; 1[\cup]1; +\infty[\\ &=]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[\\ &= \mathbb{R} \setminus \{1\} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{D}_\mathfrak{f} = \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{1}\}}$$

Autre Méthode

Étude du domaine de définition de f_1 :

L'expression $f_1(x) = \dfrac{-x^2+5x-5}{x-1}$ est définie si $x-1 \neq 0$, soit $x \neq 1$.
Or, f_1 est définie uniquement sur $x \leq 0$, donc comme $1 \notin]-\infty; 0]$, on a :

$$D_{f_1} =]-\infty; 0]$$

Étude du domaine de définition de f_2 :

L'expression $f_2(x) = \dfrac{3x-5}{x^2-1}$ est définie si $x^2 - 1 \neq 0$, soit $x \neq \pm 1$.
Comme f_2 est définie pour $x > 0$, il faut exclure $x = 1$, mais $x = -1$ ne fait pas partie de l'intervalle. Donc :

$$D_{f_2} =]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

Conclusion :

$$D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2} =]-\infty; 0] \cup (]0; 1[\cup]1; +\infty[) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}}$$

2 Calculons les limites aux bornes de D_f. **0,1 pt**

En $-\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f_1(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2+5x-5}{x-1} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{x} \\ &= \lim_{x\to-\infty} -x \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to-\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = +\infty$$

En $+\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f_2(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-5}{x^2-1} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x^2} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

En 1^-:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1^-} f_2(x) &= \lim_{x\to1^-} \frac{3x-5}{x^2-1} \\
&= \lim_{x\to1^-} \frac{-2}{0^-} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{1}^-} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = +\infty$$

En 1^+:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1^+} f_2(x) &= \lim_{x\to1^+} \frac{3x-5}{x^2-1} \\
&= \lim_{x\to1^+} \frac{-2}{0^+} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{1}^+} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\infty$$

3 Déduisons-en les asymptotes de (C_f). **0,5 pt**

- La limite en $+\infty$ est nulle, donc la droite $y = 0$ est une **asymptote horizontale** à droite.
- La fonction tend vers $\pm\infty$ en $x = 1$, donc la droite $x = 1$ est une **asymptote verticale**.

$$\mathbf{y = 0} \text{ est une AH en } +\infty, \quad \mathbf{x = 1} \text{ est une AV}$$

4 Montrons que la droite d'équation $y = -x + 4$ est asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$. **0,5 pt**

On considère : $f_1(x) = \dfrac{-x^2+5x-5}{x-1}$

Une division euclidienne donne : $\dfrac{-x^2+5x-5}{x-1} = -x+4+\dfrac{-1}{x-1}$

Donc : $f_1(x) = -x+4+\dfrac{-1}{x-1}$

Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{x-1} = 0$, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = -x+4$

Ainsi, la droite $y = -x+4$ est une **asymptote oblique** à gauche.

$$\mathbf{y = -x + 4} \text{ est une asymptote oblique en } -\infty$$

Autre Méthode

D'après la question **2)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ donc cherchons $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{-x^2+5x-5}{x-1}}{x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2+5x-5}{x^2-x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{x^2} \\
&= -1
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$ donc cherchons $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)-(-x)]$

En effet :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} [f(x)+(-x)] &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2+5x-5}{x-1} + x \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2+5x-5+x^2-x}{x-1} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{5x-5-x}{x-1} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x-5}{x-1} \\
&= 4
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x)+x] = 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = -x+4 \text{ est une asymptote oblique à gauche}}$$

5 Étudier la continuité de f en 0. **0,75 pt**

$$\begin{aligned}
f(0) &= \frac{-0+0-5}{0-1} \\
&= \frac{-5}{-1} \\
&= 5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0^-} f(x) &= \lim_{x\to0^-} \frac{-x^2+5x-5}{x-1} \\
&= \frac{0+0-5}{0-1} \\
&= 5
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{3x-5}{x^2-1} \\
&= \frac{0-5}{0-1} \\
&= \frac{-5}{-1} \\
&= 5
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\text{Donc } \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 5 \implies f \text{ est continue en } x = 0}$$

6 Étudions la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement les résultats. **0,1 pt + 0,5 pt**

On calcule les limites du taux d'accroissement à gauche et à droite de 0 :

En 0^-: $f(x) = \dfrac{-x^2+5x-5}{x-1}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-5}{x} \\
&= \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{-x^2+5x-5}{x-1} - 5}{x} \\
&= \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{-x^2+5x-5-5(x-1)}{x-1}}{x} \\
&= \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{-x^2+5x-5-5x+5}{x-1}}{x} \\
&= \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{-x^2}{x-1}}{x} \\
&= \lim_{x \to 0^-} \frac{-x^2}{x(x-1)} \\
&= \lim_{x \to 0^-} \frac{-x^2}{x(x-1)} \\
&= \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x-1} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

En 0^+: $f(x) = \dfrac{3x-5}{x^2-1}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{3x-5}{x^2-1}-5}{x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{3x-5-5(x^2-1)}{x^2-1}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{3x-5-5x^2+5}{x^2-1}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{3x-5x^2}{x^2-1}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{3x-5x^2}{x(x^2-1)} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{3x-5x^2}{x(x^2-1)} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{3-5x}{x^2-1} \\
&= -3
\end{aligned}
$$

Conclusion :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0 \neq -3 = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$\boxed{f'_g(0) \neq f'_d(0) \text{ donc } f \text{ n'est pas dérivable en } x=0}$

Interprétation graphique :

f est continue en $x=0$ mais non dérivable en en $x=0$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$:$(C_f)$ admet une démi-tangeante horizontale en 0 d'équation $y=5$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -3$: (C_f) admet une démi-tangeante horizontale en 0 d'équation $y=-3x+5$

7 Calculons $f'(x)$ pour $x<0$ et pour $x>0$. **0,5 pt + 0,5 pt**

Pour $x<0$**, on a :** $f(x) = f_1(x) = \dfrac{-x^2+5x-5}{x-1}$

$$f_1'(x) = \frac{(-2x+5)(x-1)-(-x^2+5x-5)(1)}{(x-1)^2}$$

$$
\begin{aligned}
f_1'(x) &= \frac{(-2x+5)(x-1)+x^2-5x+5}{(x-1)^2} \\
&= \frac{(-2x^2+2x+5x-5)+x^2-5x+5}{(x-1)^2} \\
&= \frac{-2x^2+7x-5+x^2-5x+5}{(x-1)^2} \\
&= \frac{-x^2+2x}{(x-1)^2}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-x^2+2x}{(x-1)^2} \quad \text{pour } x<0}$$

Pour $x > 0$**, on a :** $f(x) = f_2(x) = \dfrac{3x-5}{x^2-1}$

$$f_2'(x) = \frac{3(x^2-1)-(3x-5)(2x)}{(x^2-1)^2}$$

$$f_2'(x) = \frac{3x^2-3-(6x^2-10x)}{(x^2-1)^2}$$
$$= \frac{3x^2-3-6x^2+10x}{(x^2-1)^2}$$
$$= \frac{-3x^2+10x-3}{(x^2-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-3x^2+10x-3}{(x^2-1)^2} \quad \text{pour } x > 0}$$

$$f'(x) = \begin{cases} f_1'(x) = \dfrac{-x^2+2x}{(x-1)^2} & \text{si } x \leq 0 \\ f_2'(x) = \dfrac{-3x^2+10x-3}{(x^2-1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

8 Étudions le signe de $f'(x)$ pour $x < 0$ puis pour $x > 0$. **0,5 pt + 0,5 pt**

Pour $x < 0$**, on a :**

$$f'(x) = \frac{-x^2+2x}{(x-1)^2}$$

Le dénominateur $(x-1)^2 > 0$ pour tout $x \neq 1$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur :

$$-x^2+2x = -x(x-2)$$

Étude du signe de $-x(x-2)$ **sur** $]-\infty; 0[$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$-x^2+2x$		$-$	0		0		

$$\boxed{f'(x) < 0 \quad \text{pour tout } x \in]-\infty; 0[}$$

Pour $x > 0$**, on a :**

$$f'(x) = \frac{-3x^2+10x-3}{(x^2-1)^2}$$

Le dénominateur est strictement positif pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, et ici $x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur : $-3x^2+10x-3$

Étudions le signe :

$$\Delta = 10^2 - 4 \times (-3) \times (-3) = 100 - 36 = 64$$
$$x_1 = \frac{-10-\sqrt{64}}{2\times(-3)} = \frac{-10-8}{-6} = \frac{-18}{-6} = 3$$
$$x_2 = \frac{-10+\sqrt{64}}{2\times(-3)} = \frac{-10+8}{-6} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

x	0		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$-3x^2+10x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{f'(x) < 0 \text{ sur }]0;\tfrac{1}{3}[\cup]3;+\infty[, \quad f'(x) > 0 \text{ sur }]\tfrac{1}{3};3[}$$

9 Dressons le tableau de variation de f. **1,5 pt**

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$ 0 -3	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	5 $\|$	$\searrow$	$\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

10 Construisons (C_f). **0,1 pt**

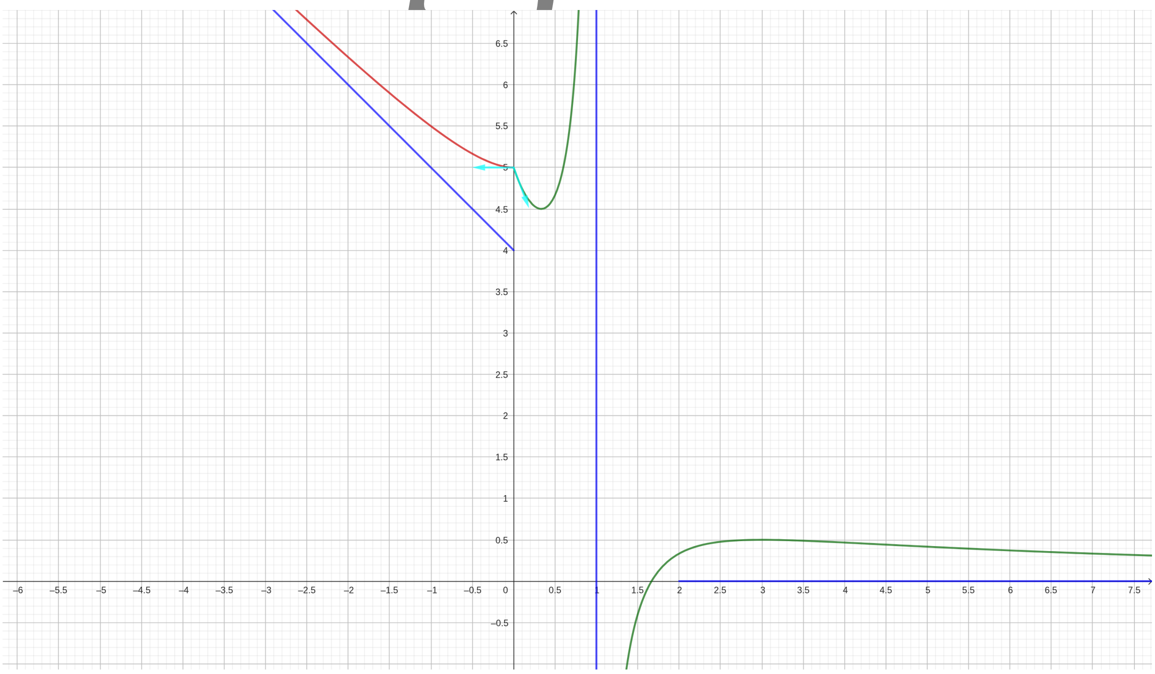


Figure 2: Représentation graphique de la courbe

Clique ici pour voir la courbe sur géogébra