1.a. Détermination de la loi de probabilité de X

Probabilité d'obtenir un multiple de 3 au lancer du dé.
Il y a deux multiples de 3 entre 1 et 6 : 3 et 6.
Donc, la probabilité d'obtenir un multiple de 3 est :

$$P(\text{multiple de 3}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Probabilité de ne pas obtenir un multiple de 3 au lancer du dé.

$$P(\text{non multiple de 3}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Probabilité d'obtenir k boules noires à partir de U1 (deux tirages avec remise)
Dans U1, il y a 1 boule noire sur 5.

- $k = 0 : P(X = 0 \mid U1) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$
- $k = 1 : P(X = 1 \mid U1) = 2 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{25}$
- $k = 2 : P(X = 2 \mid U1) = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$

Probabilité d'obtenir k boules noires à partir de U2 (tirage simultané)
Dans U2, il y a 2 boules noires sur 5.

- $k = 0 : P(X = 0 \mid U2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$
- $k = 1 : P(X = 1 \mid U2) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{5}$
- $k = 2 : P(X = 2 \mid U2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

Loi de probabilité de X

$$P(X = 0) = \frac{16}{25} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{75} + \frac{15}{75} = \frac{31}{75}$$
$$P(X = 1) = \frac{8}{25} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{75} + \frac{30}{75} = \frac{38}{75}$$
$$P(X = 2) = \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{75} + \frac{5}{75} = \frac{6}{75} = \frac{2}{25}$$

Réponse :

$$P(X = 0) = \frac{31}{75}, \quad P(X = 1) = \frac{38}{75}, \quad P(X = 2) = \frac{2}{25}$$

1.b. Espérance et écart type de X

Espérance :

$$E(X) = 0 \cdot \frac{31}{75} + 1 \cdot \frac{38}{75} + 2 \cdot \frac{2}{25} = \frac{38}{75} + \frac{4}{25} = \frac{56}{75}$$

Variance :

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 \\ &= \left(0^2 \cdot \frac{31}{75} + 1^2 \cdot \frac{38}{75} + 4 \cdot \frac{2}{25}\right) - \left(\frac{56}{75}\right)^2 \\ &= \left(\frac{38}{75} + \frac{8}{25}\right) - \frac{3136}{5625} = \frac{74}{75} - \frac{3136}{5625} = \frac{52514}{5625} \end{aligned}$$

Écart type :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\frac{52514}{5625}} \approx 0{,}96$$

1.c. Fonction de répartition de X

La fonction de répartition $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ est :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{31}{75} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{69}{75} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

1.d. Probabilité conditionnelle par la formule de Bayes

On cherche $P(U2 \mid X = 1)$.

Données :

$$P(U2) = \frac{2}{3}, \quad P(X = 1 \mid U2) = \frac{3}{5}, \quad P(X = 1) = \frac{38}{75}$$

Calcul :

$$P(U2 \mid X = 1) = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{38}{75}} = \frac{2}{5} \div \frac{38}{75} = \frac{2}{5} \cdot \frac{75}{38} = \frac{150}{190} = \frac{15}{19}$$

Réponse : La probabilité cherchée est $\boxed{\frac{15}{19}}$.