⋄⋄⋄ Lycée de Dindéfélo ⋄⋄⋄			A.S. : 2024/2025
Matière: Mathématiques	Niveau : TS2	Date: 09/12/2024	Durée : 4 heures

Correction du devoir n° 1 Du 1er Semestre

Exercice 1 : $0,5 \times 8 = 4$ points

1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
2. Énoncer le théorème d'existence et d'unicité d'une solution.
3. Énoncer le théorème de l'inégalité des accroissements finis (IAF).
4. Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \ (a \neq 0)$ alors ...
5. Si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ alors ...
6. Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ alors ...
7. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \beta \in \mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - \beta x] = +\infty$ alors ...
8. Si f est continue et strictement décroissante sur $] - \infty; b]$, alors $f(] - \infty; b]) = ...$

Exercice 2 : 4 points

1. Calculons les limites suivantes : **(3 × 1 pt)**

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{\sin 2x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sin 2x \left(\sqrt{1 + \sin x} + 1\right)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{2 \sin 2x}{2x}} \times \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \sin x} + 1\right)} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{\sin 2x} = \frac{1}{4}}$$ **0,25 points**

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^3 + x^2} &= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2(x + 1)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \times \frac{1}{x + 1} \\
&= -\frac{1}{2} \times 1 \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^3+x^2}=-\frac{1}{2}}$$ **0,25 points**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x}} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}\right)\left(\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x}\right)}{\left(\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x}\right)\left(\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x}\right)\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}\right)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{[x+3-(5-x)]\left(\sqrt{2x+7}+\sqrt{10-x}\right)}{[2x+7-(10-x)]\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}\right)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{2(-1+x)\left(\sqrt{2x+7}+\sqrt{10-x}\right)}{3(x-1)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}\right)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)\left(\sqrt{2x+7}+\sqrt{10-x}\right)}{3(x-1)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}\right)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{2\left(\sqrt{2x+7}+\sqrt{10-x}\right)}{3\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}\right)}\\
&= \frac{2}{3}\times\frac{6}{4}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x}}=1}$$ **0,25 points**

2 Donnons les primitives des fonctions f et g respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. **(2 × 0,5 pt)**

$$f(x)=(3x-1)(3x^2-2x+3)^3$$

$$F(x)=\frac{1}{8}(3x^2-2x+3)^4+k$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1}F(x)=\frac{1}{8}(3x^2-2x+3)^4+k}$$ **0,25 points**

$$g(x)=\frac{1-x^2}{(x^3-3x+2)^3}.$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1}G(x)=\frac{1}{3(x^3-3x+2)}+k}$$ **0,25 points**

Correction : 12 points

Partie A :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=x-2-\sqrt{x^2-2x}.$$

1 Déterminons D_f. **(0,5 pt)** $f \quad \exists \quad$ ssi $x^2-2x\geq 0$

Posons $x^2-2x\geq 0=0$

$x^2-2x\geq 0=0 \implies x=0$ **ou** $x=2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x^2-2x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $D_f=]-\infty;0]\cup[2;+\infty[$

a Les limites en $-\infty$ et en $+\infty$

en $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x - 2 - \sqrt{x^2-2x} = -\infty$$

$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$ **0,25 points**

en $+\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} x - 2 - \sqrt{x^2-2x}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-2)^2-(x^2-2x)}{x-2+\sqrt{x^2-2x}}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4x+4-x^2+2x}{x-2+\sqrt{x^2-2x}}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x+4}{x-2+\sqrt{x^2-2x}}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(-2+\frac{4}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(-2+\frac{4}{x}\right)}{\left(1-\frac{2}{x}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}\\ &= -1\end{aligned}$$

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1}$ **0,25 points**

b La branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$

Comme $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ Cherchons $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x-2-\sqrt{x^2-2x}}{x}\\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{x} - \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x}\\ &= 1 - \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x}\\ &= 1 - \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{x}\\ &= 1 - \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1-\frac{2}{x}}\\ &= 2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x)-2x &= \lim_{x\to-\infty} x-2-\sqrt{x^2-2x}-2x\\
&= \lim_{x\to-\infty} -x-2-\sqrt{x^2-2x}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{(-x-2)^2-(x^2-2x)}{(-x-2)+\sqrt{x^2-2x}}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+4x+4-(x^2-2x)}{(-x-2)+\sqrt{x^2-2x}}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{6x+4}{(-x-2)+\sqrt{x^2-2x}}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x(6+\frac{4}{x})}{x\left[(-1-\frac{2}{x})-\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right]}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{(6+\frac{4}{x})}{\left[(-1-\frac{2}{x})-\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right]}\\
&= -3
\end{aligned}
$$

Donc $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale $y = 2x - 2$ au voisinage de $-\infty$

c On a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ Donc $y = -1$ est A.H à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$

2 Étudions la dérivabilité de la fonction f à droite de 2 et à gauche de 0, puis interprétons géométriquement les résultats obtenus. **(2 pt)**

En 2^+ :

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x\to2^+} \frac{x-2-\sqrt{x^2-2x}}{x-2}\\
&= \lim_{x\to2^+} \frac{x-2}{x-2} - \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-2}\\
&= 1 - \lim_{x\to2^+} \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-2}\\
&= 1 - \lim_{x\to2^+} \frac{x(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x^2-2x})}\\
&= 1 - \lim_{x\to2^+} \frac{x}{(\sqrt{x^2-2x})}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\lim_{x\to2^+} f(x) = -\infty}$ **0,25 points**

Interprétation: f n'est pas dérivable en 0 mais admet au point $A(2;0=f(2))$ une demi-tangente verticale orientée vers le bas.

En 0^- :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(2)}{x} &= \lim_{x\to 0^-}\frac{x-2-\sqrt{x^2-2x}+2}{x}\\
&= \lim_{x\to 0^-}\frac{x-\sqrt{x^2-2x}}{x}\\
&= \lim_{x\to 0^-} 1-\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x}\\
&= 1-\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x}\\
&= 1-\lim_{x\to 0^-}\frac{x(x-2)}{x(\sqrt{x^2-2x})}\\
&= 1-\lim_{x\to 0^-}\frac{(x-2)}{\sqrt{x^2-2x}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty}\ \textbf{0,25 points}$$

Interprétation: f n'est pas dérivable en 0 mais admet au point $A(0;-2=f(0))$ une demi-tangente verticale orientée vers le bas.

a Justifions la dérivabilité de la fonction sur $]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$

$x\mapsto x-2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme fonction polynome, en particulier sur $]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$
$x\mapsto -\sqrt{x^2-2x}$ est dérivable sur $]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$, comme fonction irrationnelle
Par somme, $x\mapsto x-2-\sqrt{x^2-2x}$ est dérivable sur $]-\infty,0]\cup]2,+\infty[$.

Montrons que pour tout $x\in]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-2x}-(x-1)}{\sqrt{x^2-2x}}$. **(1,5 pt)**

En effet $f(x)=x-2-\sqrt{x^2-2x}$

$$f'(x)=1-\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}=1-\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}=\frac{\sqrt{x^2-2x}-(x-1)}{\sqrt{x^2-2x}}$$

b Montrons que : $\forall x\in]-\infty,0]$, $f'(x)>0$ et $\forall x\in]2,+\infty[$, $f'(x)<0$. **(1 pt)**
Le signe de f' dépend du numérateur.
Supposons que $\sqrt{x^2-2x}-(x-1)<0$

$$\sqrt{x^2-2x}-(x-1)<0 \implies \sqrt{x^2-2x}<(x-1) \implies \begin{cases} x^2-2x\geq 0\\ x-1\geq 0\\ x^2-2x<(x-1)^2\end{cases} \implies \begin{cases} x^2-2x\geq 0\\ x-1\geq 0\\ 0<1\end{cases}$$

$$\text{Posons } \begin{cases} x^2-2x=0\\ x-1=0\end{cases} \implies \begin{cases} x=0 \text{ ou } x=2\\ x=1\end{cases}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x^2-2x		$+$	0		0	$+$	
$x-1$		$-$	0		0	$+$	

x	$-\infty$		6		8		$+\infty$
$f(x)$		$-$				$+$	
$g(x)$		$-$				$+$	

Donc pour que $\sqrt{x^2-2x}-(x-1)<0$ il faut que $x\in]2,+\infty[$
Ainsi, si $x\in]-\infty,0[$ alors $\sqrt{x^2-2x}-(x-1)>0$
Donc $\forall x\in]-\infty,0]$, $f'(x)>0$ et $\forall x\in]2,+\infty[$, $f'(x)<0$

c Dressons le tableau de variations de la fonction f. **(1,25 pt)**

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		$+$				$-$	
f	-1	$\nearrow$	$+\infty$		$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\searrow$	4

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$				$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2		0	$\searrow$	-1

3

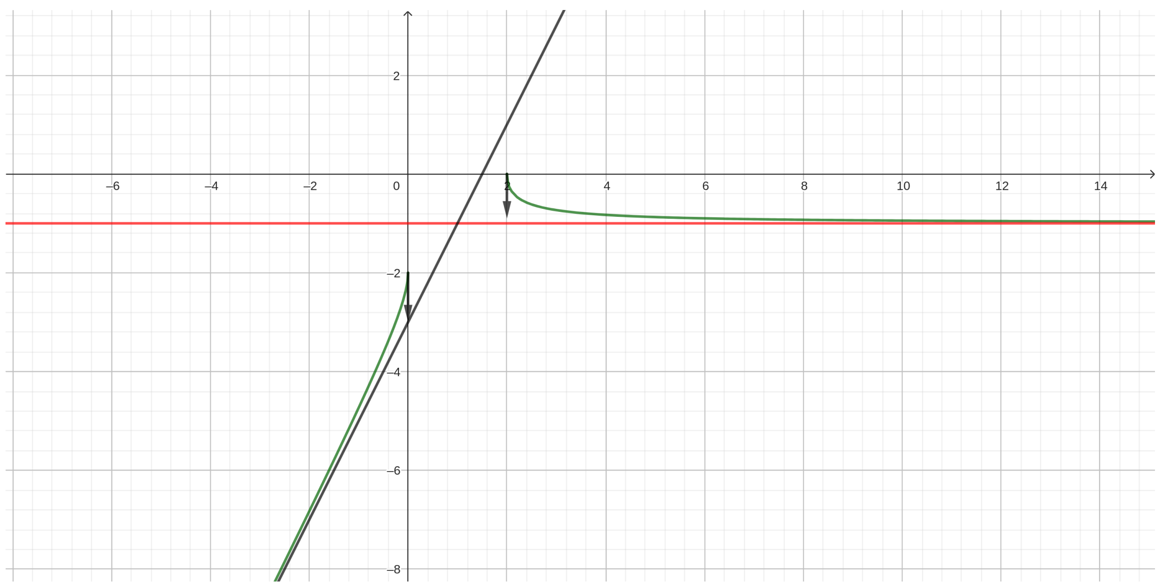

Figure 1: Courbe de (Cf)

Clique ici pour voir la figure sur géogébra

Partie B :

On considère la fonction g la restriction de la fonction f sur $[2,+\infty[$:

a Montrons que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera . **(0,5 pt)**

g est continue et strictement décroissante sur $[2, +\infty[$ vers $[-1, 0]$ donc g est bijectif.

Donc admet aussi une bijection réciproque de $[-1, 0]$ vers $[2, +\infty[$

b Calculons $g^{-1}(2 - 2\sqrt{2})$. (On donne : $g(4) = (2 - 2\sqrt{2})$. **(0,75 pt)**

$g(4) = (2 - 2\sqrt{2}) \implies g^{-1}(2 - 2\sqrt{2}) = 4$

c Déterminons $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$. **(0,5 pt)**

Pour déterminer $g^{-1}(x)$, résolvons $g(x) = y$

$$
\begin{aligned}
g(x) = y \implies x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x} = y &\implies \sqrt{x^2 - 2x} = x - 2 - y \\
&\implies x^2 - 2x = (x - 2 - y)^2 \\
&\implies x^2 - 2x = (x - 2)^2 - 2(x - 2)y + y^2 \\
&\implies x^2 - 2x = x^2 - 4x + 4 - 2xy + 4y + y^2 \\
&\implies 2x + 2xy = 4 + 4y + y^2 \\
&\implies x(2 + 2y) = 4 + 4y + y^2 \\
&\implies x = \frac{4 + 4y + y^2}{2(1 + y)}
\end{aligned}
$$

Donc $\boxed{g^{-1}(x) = \dfrac{4 + 4x + x^2}{2(1 + x)}}$

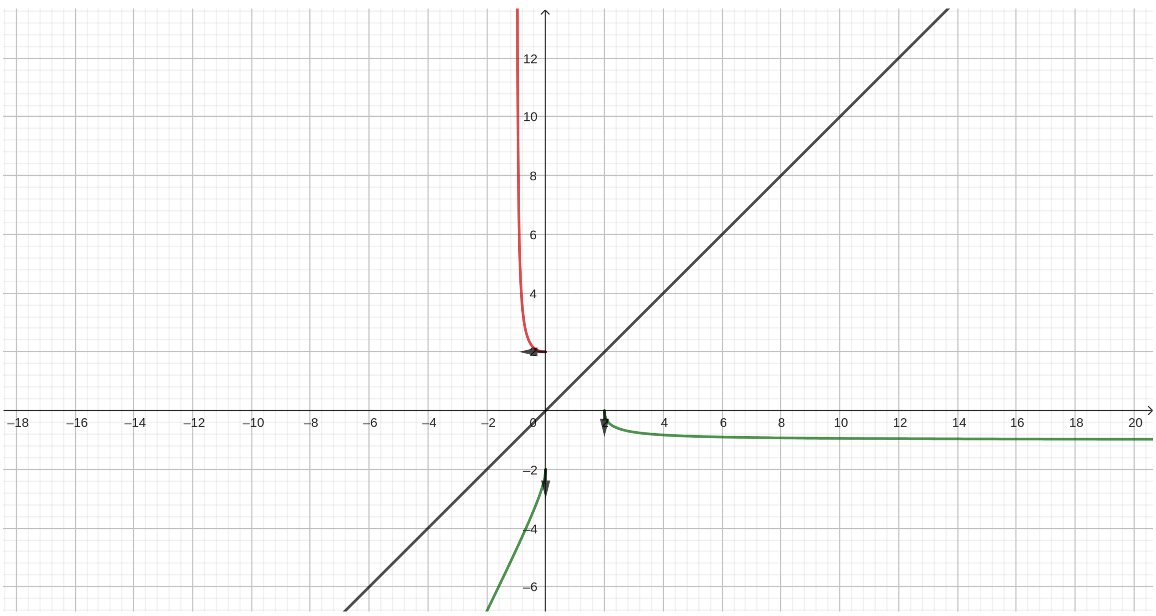

Figure 2: Courbe de (Cf)

Clique ici pour voir la figure sur géogébra