# Correction du devoir n° 2 Du 1er Semestre



## Exercice 1 : 0,5 × 10 = 5 points

1 Déterminons une primitive $F$ de la fonction $f$ sur $I$.

a $f(x) = (6x-3)(4x^2-4x+2)^3 \quad ; I = \mathbb{R}$ $(0,5pt)$

$$\begin{aligned} f(x) &= (6x-3)(4x^2-4x+2)^3 \\ &= 3(2x-1)(4x^2-4x+2)^3 \\ &= 3 \times \frac{1}{4}(8x-4)(4x^2-4x+2)^3 \\ &= 3 \times \frac{1}{4}(4x^2-4x+2)'(4x^2-4x+2)^3 \\ &= 3 \times \frac{1}{4}u'u^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}u^4 + k \\ &= 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}(4x^2-4x+2)^4 + k \\ &= \frac{3}{16}(4x^2-4x+2)^4 + k \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{F(x) = \frac{3}{16}(4x^2-4x+2)^4} + k}$$

b $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{3+\cos x}} \quad ; I = \mathbb{R}$ $(0,5pt)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin x}{\sqrt{3+\cos x}} \\ &= \frac{-(3+\cos x)'}{\sqrt{3+\cos x}} \\ &= \frac{-(u)'}{\sqrt{u}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= -2\sqrt{u} + k \\ &= -2\sqrt{3+\cos x} + k \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{F(x) = -2\sqrt{3+\cos x} + k}}$$

c $f(x) = 2\cos 3x - 3\sin 2x \quad ; I = \mathbb{R}$ $(0,5pt)$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\cos 3x - 3\sin 2x \\ &= 2 \times \cos(ax+b) - 3 \times \sin(ax+b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(x) &= 2\times\frac{1}{a}\sin(ax+b)+3\times\frac{1}{a}\cos(ax+b)\\ &= 2\times\frac{1}{3}\sin(3x)+3\times\frac{1}{2}\cos(2x)\\ &= \frac{2}{3}\sin(3x)+\frac{3}{2}\cos(2x)\end{aligned}$$

$$\mathbf{F(x)=\frac{2}{3}\sin(3x)+\frac{3}{2}\cos(2x)+k}$$

**d** $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x^2-1}}+\sin x\sin 2x \quad ; I=]-\infty;-1[$ $(0,5pt)$

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}+\sin x\sin 2x\\ &= \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}+\sin x\times\cos x\times\sin x\\ &= \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}+\cos x\times\sin^2 x\\ &= \frac{3}{2}\frac{(x^2-1)'}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{3}(\sin^3 x)'\\ &= \frac{3}{2}\frac{(u)'}{\sqrt{u}}+\frac{1}{n+1}(\sin^{n+1}x)'\\ F(x) &= \frac{3}{2}\times 2\sqrt{u}+\frac{1}{3}\sin^3 x+k\\ &= 3\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{3}\sin^3 x+k\end{aligned}$$

$$\mathbf{F(x)=3\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{3}\sin^3 x+k}$$

**2** Soit $k$ la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ par : $k(x)=\dfrac{3x-2}{(x+2)^3}$.

**a** Déterminons les $a$ et $b$ tels que $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, $k(x)=\dfrac{a}{(x+2)^2}+\dfrac{b}{(x+2)^3}$. $(0,5pt)$

$$\begin{aligned}k(x) &= \frac{a}{(x+2)^2}+\frac{b}{(x+2)^3}\\ &= \frac{a(x+2)}{(x+2)^3}+\frac{b}{(x+2)^3}\\ &= \frac{a(x+2)+b}{(x+2)^3}\\ &= \frac{ax+2a+b}{(x+2)^3}\end{aligned}$$

Par indentification $3x-2=ax+2a+b$

$$3x-2=ax+2a+b \implies \begin{cases}a=3\\ 2a+b=-2\end{cases}$$
$$\implies \begin{cases}a=3\\ 6+b=-2\end{cases}$$
$$\implies \begin{cases}a=3\\ b=-8\end{cases}$$

Donc $k(x)=\dfrac{3}{(x+2)^2}+\dfrac{-8}{(x+2)^3}$

$$\boxed{\mathbf{k(x) = \frac{3}{(x+2)^2} + \frac{-8}{(x+2)^3} + c}}$$

**b** Déduisons-en la primitive $K$ de $k$ qui prend la valeur 2 en -3. $(0,5pt)$

$$\begin{aligned} k(x) &= \frac{3}{(x+2)^2} + \frac{-8}{(x+2)^3} \\ &= 3\frac{1}{(x+2)^2} - 8\frac{1}{(x+2)^3} \\ &= 3\frac{1}{u^2} - 8\frac{1}{v^3} \\ &= 3\frac{1}{u^n} - 8\frac{1}{v^n} \\ K(x) &= 3\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}} - 8\frac{-1}{(n-1)v^{n-1}} + k \\ &= -3\frac{1}{(x+2)} + 8\frac{1}{2(x+2)^2} + k \\ &= -\frac{1}{(x+2)} + 4\frac{1}{(x+2)^2} + k \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{K(x) = -\frac{1}{(x+2)} + \frac{4}{(x+2)^2} + c}}$$



# Problème : ( 12 points ≈ 144 mns)

On note $(C_f)$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité $1cm$ avec

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-2x^2}{x^2-1} & ; \text{si } x \leq 0 \\ x+\sqrt{x^2+x} & ; \text{si } x > 0 \end{cases}$$

**Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire :**

Soit $g$ la fonction numérique définie par : $g(x) = -x^3 + 3x - 4$.

1. Étudions les variations de $g$ puis dressons son tableau de variations. $(0,75pt)$

$g'(x) = -3x^2 + 3$

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\implies -3x^2 + 3 = 0 \\ &\implies -x^2 + 1 = 0 \\ &\implies x = -1 \textbf{ ou } x = 1 \end{aligned}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Sur $]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$ $g'(x) \leq 0$ donc g est décroissant

Sur $[-1;1]$ $g'(x) \geq 0$ donc g est croissant

**Limites**

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} g(x) &= \lim_{x\to-\infty} -x^3 + 3x - 4 \\ &= \lim_{x\to-\infty} -x^3 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} g(x) &= \lim_{x\to+\infty} -x^3+3x-4\\ &= \lim_{x\to+\infty} -x^3\\ &= -\infty\end{aligned}$$

$g(-1) = -(-1)^3 + 3(-1) - 4$

$g(-1) = 1 - 3 - 4$

$\quad = -6$

$g(1) = -(1)^3 + 3(1) - 4$

$g(1) = -1 + 3 - 4$

$\quad = -2$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-6$ | $\nearrow$ | $-2$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

2 a Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$. $(0,5pt)$

**<u>Existance</u>**

D'après le tableau de vairation $\lim_{x\to-\infty} g(x) \times g(-1) < 0$ d'où l'existance d'une solution

**<u>Unicité</u>**

$g$ est continue et strictement décroissant de $]-\infty,-1[$ vers $]+\infty,-6[$ d'où l'unicité de la solution

b Donnons un encadrement de $\alpha$ à $10^{-1}$. $(0,5pt)$

On sait que la solution unique $\alpha$ vérifie $\alpha < -1$.

Calculons $g(x) = -x^3 + 3x - 4$ pour deux valeurs décimales consécutives.

$$g(-2) = -(-8) + 3(-2) - 4 = 8 - 6 - 4 = -2 < 0$$

$$g(-1{,}5) = -(-3{,}375) + 3(-1{,}5) - 4 = 3{,}375 - 4{,}5 - 4 = -5{,}125 < 0$$

On cherche donc plus à gauche.

$$g(-2{,}1) = -(-9{,}261) + 3(-2{,}1) - 4 = 9{,}261 - 6{,}3 - 4 = -1{,}039 < 0$$

$$g(-2{,}2) = -(-10{,}648) + 3(-2{,}2) - 4 = 10{,}648 - 6{,}6 - 4 = 0{,}048 > 0$$

La fonction $g$ est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$, donc elle change de signe une seule fois sur cet intervalle.

**Encadrement à $10^{-1}$ :**

$$\boxed{-2{,}2 < \alpha < -2{,}1}$$

3 En déduire le signe de $g(x)$ sur $]-\infty;0]$. $(0,25pt)$

$$\begin{aligned} &g(x) > 0 \quad \text{si } x \in ]-\infty,\alpha[\\ &g(x) = 0 \quad \text{si } x = \alpha\\ &g(x) < 0 \quad \text{si } x \in ]\alpha, 0] \end{aligned}$$

## Partie B : Étude de la fonction $f$

1 Déterminons l'ensemble de définition $D_f$ de $f$. $(0,5pt)$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-1} & ;\text{ si } x\leq 0\\ x+\sqrt{x^2+x} & ;\text{ si } x>0\end{cases} \quad \text{Posons } f(x)=\begin{cases}f_1(x) & ;\text{ si } x\leq 0\\ f_2(x) & ;\text{ si } x>0\end{cases}$$

- $f_1$

  $f_1 \quad \exists \quad$ ssi $x^2-1\neq 0$ et $x\leq 0$

  $x\neq -1$ et $x\neq -1$ et $x\in]-\infty,0]$

  $-1\in]-\infty,0]$ et $1\notin]-\infty,0]$

  $$\underline{Df_1=]-\infty;-1[\cap]-1;0[}$$

- $f_2$

  $f_2 \quad \exists \quad$ ssi $x^2+x\geq 0$ et $x>0$

  Posons $x^2+x=0$

  $x^2+x=0 \implies x=0$ **ou** $x=-1$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $x^2+x$ | | | | $+$ |

  $\underline{Df_2=]0;+\infty[}$

$$\begin{aligned} Df &= Df_1\cup Df_2\\ \text{Donc} \qquad &= ]-\infty;-1[\cap]-1;0[\cup]0;+\infty[\\ &= \mathbb{R}\setminus\{-1\}\end{aligned}$$

$$\mathbf{Df}=\mathbb{R}\setminus\{-\mathbf{1}\}$$

2 a

- Calculons les limites de $f$ aux bornes de $D_f$ . $(01pt)$

  – En $-\infty$: $f(x)=f_1(x)$

  $$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2x^2}{x^2-1}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}\\ &= \lim_{x\to-\infty} x\\ &= -\infty\end{aligned}$$

  $$\lim_{\mathbf{x}\to-\infty}\mathbf{f}(\mathbf{x})=-\infty$$

  – En $+\infty$: $f(x)=f_2(x)$

  $$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2+x}\\ &= \lim_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2+x}\\ &= +\infty\end{aligned}$$

  $$\lim_{\mathbf{x}\to+\infty}\mathbf{f}(\mathbf{x})=+\infty$$

- En $-1^-$ : $f(x) = f_1(x)$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1}$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 - 1$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | |

$= \text{"}\dfrac{-3}{0}\text{"}$

$= \text{"}\dfrac{-3}{0^+}\text{"}$

$= -\infty$

$$\lim_{\mathbf{x} \to -\mathbf{1}^-} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\infty$$

- En $-1^+$ : $f(x) = f_1(x)$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1}$

$= \dfrac{-3}{0^-}$

$= +\infty$

$$\lim_{\mathbf{x} \to -\mathbf{1}^+} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = +\infty$$

- Déduisons-en l'existence d'une asymptote dont on précisera.
  Comme $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \infty$ donc $x = -1$ est une asymptote verticale

**Donc $\mathbf{x = -1}$ est une asymptote verticale à $(\mathcal{C}_\mathbf{f})$**

b

- Pour $x \leq 0$, déterminons les réels $a, b, c$ et $d$ tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{cx + d}{x^2 - 1}$

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 - 1} \implies f(x) = \frac{(ax + b)(x^2 - 1) + cx + d}{x^2 - 1}$$

$$\implies f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 - ax - b + cx + d}{x^2 - 1}$$

$$\implies f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + (c - a)x + (d - b)}{x^2 - 1}$$

On a $\dfrac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1} = \dfrac{ax^3 + bx^2 + (c - a)x + (d - b)}{x^2 - 1}$

par identification $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c - a = 0 \\ d - b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c - 1 = 0 \\ d + 2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \\ d = -2 \end{cases}$

Ainsi, $f(x) = x - 2 + \dfrac{x - 2}{x^2 - 1}$

- Déduisons-en la nature de la branche infinie en $-\infty$. $(0,75pt)$
  En posant $(\Delta_1) : y = x - 2$, si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - y = 0$ alors $y = x - 2$ est asymptote oblique

En effet

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - y = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x - 2}{x^2 - 1}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x^2}$

$= 0$

Donc $(\mathbf{\Delta_1})$ : $\mathbf{y = x - 2}$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_\mathbf{f})$en $-\infty$

c Donner la nature de la branche infinie en $+\infty$. $(0,5pt)$

Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

- Cherchons $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x^2+x}}{x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}{x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) \\ &= 2\end{aligned}$$

Donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$

- Cherchons $\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x &= \lim_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2+x} - 2x \\ &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - x \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Donc $(\mathbf{\Delta_2})$ : $\mathbf{y = 2x + \frac{1}{2}}$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_\mathbf{f})$en $+\infty$

3 a Montrer que $f$ est continue sur $D_f$. $(0,75pt)$

b Étudier la dérivabilité de $f$ en $0$ puis interpréter le résultat obtenu. $(01pt)$

4 Démontrer que : $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha - 2$. $(0,5pt)$

5 a Montrer que $\forall x \in ]-\infty;-1[\cup]-1;0[$, on a : $f'(x) = \frac{-xg(x)}{(x^2-1)^2}$ $(0,5pt)$

b Calculer $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$ et étudier son signe. $(0,75pt)$

c Dresser le tableau de variation de $f$ sur $D_f$. $(0,75pt)$

6 Construire soigneusement la courbe $(C_f)$. $(01pt)$

**Partie C : Bijection**

Soit $h$ la restriction de $f$ sur $I = ]0; +\infty[$.

1. Montrer que $h$ réalise une bijection de $I$ vers un intervalle $J$ à préciser. $(0,5pt)$

2. Calculer $h^{-1}(1)$ et $(h^{-1})'(\sqrt{2}+1)$. $(0,5pt)$

3. Expliciter $h^{-1}(x)$. $(0,5pt)$

4. Construire $(C_{h^{-1}})$ dans le repère précédent. $(0,5pt)$