

◇◇◇ Lycée de Dindéfelo ◇◇◇			A.S. : 2024/2025
Matière: Mathématiques	Niveau : TS2	Date: 21/02/2025	
Td Ln Expo			

Exercice 4

Partie A

Soit $g(x) = 2x \ln(-x) + x + 1$.

- 1 Déterminer l'ensemble de définition D_g de g .
- 2 Calculer les limites aux bornes de D_g .
- 3 Étudier les variations de g .
- 4 Calculer $g(-1)$ puis en déduire le signe de $g(x)$.

Partie B

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(-x) + x + 1 & \text{si } x < 0 \\ x \ln(x)^2 + x + 1 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1 Justifier que f est définie sur \mathbb{R} .
- 2 Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interprétez graphiquement les résultats.
- 3 Donner le domaine de dérivabilité de f puis montrer que

$$f'(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x < 0 \\ (1 + \ln x)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- 4 Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
- 5 Étudier les branches infinies de (C_f) .
- 6 Dresser le tableau de variations de f .
- 7 Montrer que dans $] -\infty; -1[$, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α puis vérifier que $-1,8 < \alpha < -1,7$.
- 8 Construire (C_f) (unité 2 cm) (on précisera la tangente au point d'abscisse e^{-1} et on placera le point d'abscisse 1).

Partie C

Soit h la restriction de f à $I =]0; +\infty[$.

- 1 Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à préciser.
- 2 Étudier la dérivabilité de h^{-1} sur J .
- 3
 - a Calculer $h(1)$.
 - b Calculer $(h^{-1})'(2)$.
- 4 Construire la courbe de h^{-1} .

Exercice 5

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -x + 1 - 2 \ln x$

- 1 Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variations.
- 2 Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x + \ln x}{x^2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1 Déterminer le domaine de définition de f .
- 2
 - a Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.
 - b Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.
- 3
 - a Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
 - b Dresser le tableau de variations de f .
 - c Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0; +\infty[$ une unique solution β et que $\beta \in]0,56; 0,57[$.
- 4 Construire (C) .

Partie C

Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{x}$ et (Γ) sa courbe.

- 1 Étudier les positions relatives de (C) et (Γ) .
- 2 Construire dans le même repère (Γ) .
- 3 Soit I_λ l'aire en unité d'aires de la partie du plan délimitée par les courbes (C) , (Γ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$ où λ est un nombre réel strictement supérieur à 1.
 - a Montrer que $I_\lambda = 1 - \frac{1}{\lambda}(1 + \ln \lambda)$.
 - b Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I_\lambda$.

Exercice 6

Soit $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$

Partie A

Soit $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$.

- 1 Déterminer D_g et montrer que si $0 < x < 1$ alors $g(x) \geq 1$.
- 2 Montrer que g est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.
- 3 Calculer $g(1)$ et $g(2)$. Montrer qu'il existe un unique réel α strictement positif tel que $g(\alpha) = 0$. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.
- 4 Donner le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B

- 1
 - a Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f .
 - b Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$.
 - c Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2 Donner une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1.
- 3 Donner le tableau de variations de f puis tracer (C_f) .

Exercice 7

Partie A

On considère dans $]0; +\infty[$ la fonction g donnée par : $g(x) = x \ln(x) - 1$.

- 1 Dresser le tableau des variations de g .
- 2
 - a Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0; +\infty[$.
 - b Montrer que $1,76 < \alpha < 1,77$.
 - c En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B

On considère la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = \frac{1+x}{1+\ln(x)}$.

- 1 Justifie que $D_f =]0; +\infty[\setminus \left\{ \frac{1}{e} \right\}$.
- 2 Calcule les limites de f aux bornes de D_f .
- 3 Étudie les branches infinies à (C_f) .

- 4 a Démontrez que $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{g(x)}{x(1 + \ln(x))^2}$.
- b Donnez le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .
- c En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
- 5 Démontrez que $f(\alpha) = \alpha$.
- 6 Tracez la courbe (C_f) et son asymptote. (On prendra $\alpha = 1,76$)

Exercice 8

Partie A

Soit $g(x) = 2x - (x + 1) \ln(x + 1)$.

- Déterminer le domaine de définition D_g de g .
- Calculer les limites aux bornes de D_g .
- Dresser le tableau de variations de g .
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions 0 et α avec $\alpha \in]3, 9; 4[$.
- Donner le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B

Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \begin{cases} x + \ln(1 + x^2) & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln(x + 1)}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- Déterminer le domaine de définition D_f de f .
- Calculer les limites aux bornes de D_f .
- Étudier les branches infinies de (C_f) .
- Étudier la continuité puis la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement les résultats.
- Montrer que $f(\alpha) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha + 1}$, puis encadrer $f(\alpha)$.
- Montrer que f est dérivable sur $] - \infty; 0[$ et $f'(x) = \frac{(x + 1)^2}{x^2 + 1}$.
- Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{2x(x + 1)\sqrt{x}}$.
- Étudier les variations de f .
- Dresser le tableau de variations de f .
- Calculer $f(-2)$.
- Tracer (C_f) .

Partie C

Soit h la restriction de f sur $] - \infty; 0]$.

- 1 Montrer que h réalise une bijection de $] - \infty; 0]$ vers un intervalle J à préciser.
- 2 Étudier la dérivabilité de h^{-1} .
- 3 Déterminer $(h^{-1})'(\ln 5 - 2)$.
- 4 Tracer $(C_{h^{-1}})$.

Exercice 9

Partie A

On considère la fonction :

$$u : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{2x}{x^2-1}$$

- 1 Déterminer l'ensemble de définition de u , calculer $u(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$.
- 2 Étudier les variations de u , dresser son tableau de variations. (il n'est pas nécessaire de calculer la limite de u en 1).
- 3 Dédire des résultats précédents que :
 - a $\forall x \in [0; 1[, u(x) \geq 0$.
 - b $\forall x \in]1; +\infty[, u(x) < 0$.

Partie B

Soit g la fonction définie par :

$$g : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - 1$$

- 1 Déterminer D_g le domaine de définition de g , puis étudier la limite de g en 1.
- 2
 - a Vérifier que $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$.
 - b Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{2} \ln \left(1 + \frac{2}{x-1} \right) = 1$.
 - c En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$. Interpréter graphiquement ce résultat.
 - d Dresser le tableau de variations de g .
 - e Montrer qu'il existe un réel unique $\alpha \in]0; 1[$ tel que $g(\alpha) = 0$. Donner un encadrement de d'ordre 1 de α .
- 3 Tracer la courbe (C_g) de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité : 2cm).

Partie C

Soit la fonction définie par : $f(x) = (x^2 - 1) \ln \left(\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} \right)$

- 1 Montrer que f est dérivable sur $[0; 1[$ et que $f'(x) = g(x)$ pour tout $x \in [0; 1[$.
- 2 Déterminer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_g) ; l'axe des abscisses ; l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$.

Exercice 10

Partie A

Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{x} - 2 - \ln x$.

- 1 Étudier les variations de g .
- 2 Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0; +\infty[$. Vérifier que $0,6 < \alpha < 0,7$.
- 3 En déduire le signe de $g(x)$.

Partie B

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} (1-x)(1+\ln x) & \text{si } x \geq 1 \\ (1-x) \ln(1-x) & \text{si } x < 1 \end{cases}$

- 1 Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
- 2 Étudier la continuité de f en 1.
- 3 Étudier la dérivabilité de f en 1.
- 4 Déterminer les limites de f aux bornes de D_f .
- 5 Étudier les branches infinies de f .
- 6 Dresser le tableau de variations de f .
- 7 Tracer C_f dans un repère orthonormé, unité : $2cm$.
- 8 Soit h la restriction de f sur $[1; +\infty[$.
 - a Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et les variations.
 - b Résoudre $h^{-1}(x) = e$
puis calculer $(h^{-1})'(2 - 2e)$.
 - c Tracer la courbe de h^{-1} dans le même repère.

Exercice 12

On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x(1 + e^{2-x})$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité $2cm$.

- 1 Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 1 + (1 - x)e^{2-x}$
 - a Étudier les variations de h (on ne déterminera pas les limites aux bornes de D_h).
 - b En déduire le signe de $h(x)$ sur \mathbb{R} .
- 2
 - a Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
 - b Préciser la nature de la branche infinie de f en $-\infty$.
 - c Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$, puis interpréter le résultat obtenu.
 - d Préciser la position de (C_f) par rapport à la droite d'équation $(\Delta) : y = x$.
- 3
 - a Dresser le tableau de variations de f .
 - b Montrer que f admet une bijection réciproque notée f^{-1} définie sur \mathbb{R} .
 - c f^{-1} est-elle dérivable en 4 ?
 - d Étudier la position (C_f) par rapport à sa tangente au point d'abscisse 2.
 - e Construire (C_f) (on tracera la tangente à (C_f) au point d'abscisse 2).
 - f Construire $(C_{f^{-1}})$ dans le repère précédent.

Exercice 13

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} (2x - 1)e^{\frac{1}{x}}, & \text{si } x < 0 \\ x \ln(x + 1), & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Partie A

- 1 Déterminer le domaine de définition D_f de f .
- 2 Calculer les limites de f aux bornes de D_f .
- 3 Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$.
- 4 Étudier la branche infinie de (C_f) en $+\infty$. La continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

Partie B

- 1 Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$.
- 2 Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $]0; +\infty[$.
- 3 Étudier les variations de $f'(x)$ puis en déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$.
- 4 Calculer $f'(x)$ pour tout $x < 0$. En déduire le signe de $f'(x)$.
- 5 Dresser le tableau de variations de f .

Partie C

Soit g la restriction de f sur $I =]-\infty; 0[$.

- 1 Montrer que g réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser.
- 2 Soit g^{-1} la bijection réciproque de g . Calculer $g(-1)$ puis $(g^{-1})' \left(-\frac{3}{e} \right)$.
- 3 Construire (C_f) et (C_g) dans un même repère.

Exercice 14

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}(1 + \ln x) - e^{-1}, & \text{si } x \geq 1 \\ (1-x)e^{-\frac{1}{1-x}}, & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

- 1 Vérifier que f est définie sur \mathbb{R} puis calculer les limites de f aux bornes de D_f .
- 2 Étudier la continuité de f en 1.
- 3
 - a Montrer que pour tout $x \in]1; +\infty[$, $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = e^{-x} \left(\frac{1 - e^{x-1}}{x - 1} + \frac{\ln x}{x - 1} \right)$.
 - b Étudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter graphiquement le résultat.
- 4 Soit la fonction g définie par : $g(x) = -\ln x + \frac{1}{x} - 1$
 - a Dresser le tableau de variations de g .
 - b Calculer $g(1)$ et préciser le signe de $g(x)$.
 - c Calculer la dérivée de f sur chaque intervalle où elle est dérivable.
 - d Étudier le signe de $f'(x)$ et donner le tableau de variations de f .
- 5
 - a Donner la nature de la branche infinie de f en $+\infty$.
 - b Montrer que la droite $(D) : y = -x$ est une asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$.
 - c Étudier la position de (C_f) par rapport à (D) sur $] -\infty; 1[$.
- 6 Construire (C_f) .
- 7 Soit h la restriction de f sur $] -\infty; 1[$.
 - a Montrer que h réalise une bijection de $] -\infty; 1[$ vers un intervalle J à préciser.
 - b Calculer $h(0)$. h^{-1} est-elle dérivable en e^{-1} ? Si oui, calculer $(h^{-1})'(e^{-1})$.
 - c Tracer $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère.

Exercice 15

Partie A

On considère la fonction g définie par $g(x) = (x+1)^2 e^{-x} - 2$.

- 1 Dresser le tableau de variations de g .
- 2 **a** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans \mathbb{R} , puis vérifier que $\alpha \in]-2; -1[$.
b Donner le signe de $g(x)$ dans \mathbb{R} .
- 3 Montrer que $\alpha = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$
- 4 Tracer la courbe (C_g) de g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, d'unité $2cm$.

Partie B

Soit la fonction f définie par $f(x) = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{x}{2}}$ si $x \in I = [-2; -1]$.

- 1 Étudier les variations de f sur I .
- 2 En déduire que si $x \in I$, alors $f(x) \leq -1$.
- 3 Montrer que si $x \in I$, alors $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$
- 4 Montrer que $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$ pour tout $x \in I$.
- 5 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = -2$, $u_{n+1} = f(u_n)$
 - a** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
 - b** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$
 - c** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$
 - d** En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.
 - e** Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Exercice 16

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 + \frac{3e^x}{e^x + 2\ln(x+1)} & \text{si } x \leq 0 \\ x+2 + \frac{x}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique $1cm$.

- 1 Etablir que f est définie sur \mathbb{R} .
- 2 **a** Etudier la continuité de f en 0.
b Pour $x < 0$, montrer que $\frac{f(x) - 2}{x - 0} = 1 + \frac{2(e^x - 1)}{x} \times \frac{1}{e^x}$
En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

- c** Conclure sur la dérivabilité de f en 0 et interpréter les résultats.
- 3** **a** En utilisant les variations de la h définie par $h(x) = -x$, montrer que $x < (x+1)^2$ pour $x > 0$. En déduire que $\ln(x+1) < (x+1)^2$ pour $x > 0$.
 - b** Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et utiliser 3.a pour déterminer son signe.
 - c** Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$ et donner son signe.
- 4** **a** Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition D_f .
 - b** Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)]$ et interpréter graphiquement le résultat.
 - c** Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+2)]$ et interpréter graphiquement le résultat.
 - d** Etudier le signe de $f(x) - (x+1)$ pour $x < 0$, montrer que $f(x) - (x+2) > 0$ pour $x > 0$ et interpréter graphiquement les résultats.
- 5** Déterminer les coordonnées du point A de la courbe où la tangente est parallèle à l'asymptote pour $x > 0$.
- 6** Etablir que f est une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J à préciser.
- 7** Représenter graphiquement les courbes de f et de f^{-1} dans un même repère.
- 8** Calculer $\int_{-\ln 3}^0 (f(x) - (x+1))dx$.
- 9** Interpréter graphiquement le résultat précédent en terme d'aire.

Exercice 17

Partie A

On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln x + 1 - e^{-x}$.

- 1** Etudier les variations de g .
- 2** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $0,6 < \alpha < 0,7$.
- 3** En déduire le signe de $g(x)$.

Partie B

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x + e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{e^{\frac{1}{2}x}}{|x^2 - 1|} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- 1** Justifier que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- 2** Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue.
- 3** Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. On pourra montrer que si $x \in]-1; 0[$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-\frac{1}{2} \left(\frac{e^{\frac{1}{2}x} - 1}{\frac{1}{2}x} \right) - x}{x^2 - 1}$$

- 4 Déterminer les limites de f aux bornes de D_f puis étudier les branches infinies.
- 5 Dresser le tableau de variations de f .
- 6 Montrer que $f(\alpha) = (\alpha + 1) \ln \alpha + 1$.
- 7 Soit h la restriction de f à $]\alpha; +\infty[$
 - a Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à préciser.
 - b h^{-1} est-elle dérivable sur J ? Justifier.
 - c Calculer $h(1)$ puis $(h^{-1})' \left(\frac{1}{e} \right)$.
- 8 Tracer C_f et $C_{h^{-1}}$ dans le même repère d'unité $2cm$.
- 9 Soit $\lambda > 1$ et $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire en cm^2 du domaine limité par C_h , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$. Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$ et sa limite en $+\infty$.

Exercice 18

Partie A

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x - e^{2x-2}$.

- 1 Déterminer la limite de f en $-\infty$.
- 2 Vérifier que pour tout réel x non nul, $f(x) = x \left[1 - 2e^{-2} \left(\frac{e^{2x}}{2x} \right) \right]$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
- 3 Dresser le tableau de variations de f .
- 4 Montrer que la droite $(D) : y = x$ est asymptote à C_f en $-\infty$. Étudier la position relative de C_f par rapport à (D) .
- 5 Étudier la branche infinie de C_f en $+\infty$.
- 6 Déterminer une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 1.
- 7 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in I =]0; \frac{1}{2}[$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
- 8 Tracer C_f , (D) et (T) .

Partie B

On définit la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = e^{2u_n-2} \end{cases}$$

- 1 Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^{2x-2}$. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à $g(x) = x$. En déduire $g(\alpha)$.
- 2 Démontrer que pour tout $x \in I$, $|g'(x)| \leq \frac{2}{e}$.
- 3 Démontrer que pour tout $x \in I$, $g(x) \in I$.

- 4 a En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{e}|u_n - \alpha|$
- b En déduire que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n$.
- c Montrer que (u_n) converge vers un réel à déterminer.
- d Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-5}$.

Exercice 19

Partie B

Soit la fonction h définie par $h(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$.

- 1 Dresser le tableau de variations de h .
- 2 a Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0, 1[$.
- 2 Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
- 3 En déduire le signe de $h(x)$.

Partie B

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

- 1 Justifier que f est définie sur \mathbb{R} .
- 2 Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats.
- 3 Etudier les branches infinies de C_f .
- 4 Dresser le tableau de variations de f .
- 5 Montrer que $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$.
- 6 Tracer C_f dans un repère orthonormé d'unité $2cm$.

Partie C

Soit g la restriction de f à $] -\infty, -1[$.

- 1 Prouver l'existence de g^{-1} . Etudier la dérivabilité de g^{-1} .
- 2 Résoudre $g^{-1}(x) = 2$, puis calculer

$$(g^{-1})' \left(\frac{2 - e^{-\frac{1}{2}}}{2} \right).$$

- 3 Tracer la courbe de g^{-1} dans le même repère.