CHAP 10 : LES STATISTIQUES

I. VOCABULAIRE

1. **Population** : C'est l'ensemble des individus sur les quels porte une étude statistique.
2. **Échantillon** : C'est une partie de la population.
3. **Caractère** : Le caractère est l'information sur laquelle l'étude statistique est réalisée. Il peut être quantitatif s'il est mesurable, exemple *la taille, la masse*, etc., ou qualitatif dans le cas contraire, exemple *la couleur, la nationalité*, etc.
4. **Effectif** : C'est le nombre d'individus d'une population ou d'une partie de cette population.
5. **Modalité** : C'est l'une des différentes valeurs ou qualités de la variable d'une série statistique.
6. **Fréquence** : C'est le nombre de fois qu'une modalité est représentée par rapport à l'effectif total. Elle est donc toujours inférieure à 1 et la somme totale de toutes les fréquences donne 1.

Exemple illustratif du vocabulaire statistique

Situation

Un professeur interroge les élèves d'une classe de 4^{e} (soit 25 élèves) pour connaître leur moyen de transport principal pour venir à l'école. Il note les réponses suivantes :

Bus, Bus, Voiture, Marche, Bus, Vélo, Voiture, Bus, Vélo, Bus, Voiture, Bus, Marche, Vélo, Bus, Bus, Bus, Voiture, Marche, Bus, Vélo, Voiture, Bus, Vélo, Bus

Analyse :

- **Population** : L'ensemble des 25 élèves de la classe.
- **Individu** : Chaque élève interrogé.
- **Échantillon** : Si on avait choisi uniquement 10 élèves sur les 25, cela aurait constitué un échantillon.
- **Caractère** : Le moyen de transport utilisé pour venir à l'école. C'est un caractère **qualitatif**.
- **Modalités** : Les différentes réponses possibles : *Bus, Voiture, Marche, Vélo.*
- **Effectifs** :
  - Bus : 12 élèves
  - Voiture : 5 élèves
  - Marche : 3 élèves
  - Vélo : 5 élèves
- **Fréquences** :
  - Bus : $\frac{12}{25} = 0{,}48$
  - Voiture : $\frac{5}{25} = 0{,}20$
  - Marche : $\frac{3}{25} = 0{,}12$
  - Vélo : $\frac{5}{25} = 0{,}20$

II. SÉRIE STATISTIQUE D'UNE VARIABLE

1. Définition

On appelle série statistique d'une variable x ou série statistique simple, la série obtenue si l'étude est réalisée sur un seul caractère x. Elle peut être *groupée* ou *non groupée* en classes. On la note (x_i, n_i). Avec $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ et n_i est l'effectif de la modalité x_i.

2. Effectif total, Moyenne, Variance, Écart-type, Fréquence partielle, Espéran

Effectif total : $\boxed{N = \sum_{i=1}^{p} n_i}$ **Moyenne** : $\boxed{\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}$

Si la série est *groupée en classes*, alors : $\boxed{\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i c_i}$ où $c_i = \frac{a+b}{2}$, le centre de la classe i de la forme $[a\ ;\ b[$.

Variance : $\boxed{V(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - \bar{x}^2}$

Si la série est groupée en classes alors :

Variance : $\boxed{V(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i c_i^2 - \bar{x}^2}$ *La variance est toujours positive.*

Écart-type : $\boxed{\sigma(x) = \sqrt{V(x)}}$ **Fréquence partielle** : $\boxed{f_i = \dfrac{n_i}{N}}$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{p} f_i = 1}$$

Exemple : On représente au tableau N°1 les tailles en cm de 10 jeunes garçons et au tableau N°2, les notes en maths de 11 élèves d'une classe de TS2.

Tableau N°1

Tailles x_i en cm	170	172	175	180	185
Effectifs n_i	1	2	3	3	1

Tableau N°2

Notes en maths x_i	[8 ;10[	[10 ;12[	[12 ;14[	[14 ;16[	[16 ;18[
Effectifs n_i	3	4	2	1	1

Pour chacun des tableaux ci-dessus, déterminer l'effectif total, la moyenne, la variance, l'écart-type et les fréquences partielles.

Solution

— **Tableau N°1 :** Série non groupée en classes.
$N = 1 + 2 + 3 + 3 + 1 = 10$.
$\bar{x} = \frac{1}{10}(1 \times 170 + 2 \times 172 + 3 \times 175 + 3 \times 180 + 1 \times 185) = 176{,}4$ cm.
$V(x) = \frac{1}{10}(1 \times 170^2 + 2 \times 172^2 + 3 \times 175^2 + 3 \times 180^2 + 1 \times 185^2) - (176{,}4)^2 = 19{,}84$.

$\sigma(x) = \sqrt{19{,}84} = 4{,}45.$

$f_1 = \frac{1}{10}$; $f_2 = \frac{2}{10}$; $f_3 = \frac{3}{10}$; $f_4 = \frac{3}{10}$ et $f_5 = \frac{1}{10}$.

— **Tableau N°2 :** Série groupée en classes.
$N = 3 + 4 + 2 + 1 + 1 = 11.$

$$\bar{x} = \frac{1}{11}\left[3 \times \left(\frac{8+10}{2}\right) + 4 \times \left(\frac{10+12}{2}\right) + 2 \times \left(\frac{12+14}{2}\right) + 1 \times \left(\frac{14+16}{2}\right) + 1 \times \left(\frac{16+18}{2}\right)\right] = 11,$$

$$V(x) = \frac{1}{11}\left(3 \times 9^2 + 4 \times 11^2 + 2 \times 13^2 + 1 \times 15^2 + 1 \times 17^2\right) - (11{,}73)^2 = 5{,}95.$$

$\sigma(x) = \sqrt{5{,}95} = 2{,}44.$

$f_1 = \frac{3}{11}$; $f_2 = \frac{4}{11}$; $f_3 = \frac{2}{11}$; $f_4 = \frac{1}{11}$ et $f_5 = \frac{1}{11}$.

III. SÉRIE STATISTIQUE DE DEUX VARIABLES

1. Définitions : Cas général, série non injective

On appelle série statistique de deux variables x et y, ou série statistique double, la série obtenue si l'étude est réalisée à la fois sur deux caractères différents x et y.
Elle est donc formée de deux séries simples qui peuvent être groupées ou non ; ou l'une peut être groupée et l'autre non groupée.
On la note (x_i, y_j, n_{ij}). On la représente dans un tableau à double entrée appelé tableau de contingence.

Si $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ et $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_q\}$, alors :

— n_{ij} est l'effectif du couple (x_i, y_j). L'effectif total sera $\boxed{N = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij}}$

— $\boxed{n_{i\bullet} = n_{i1} + n_{i2} + \cdots + n_{iq} \quad \text{et} \quad n_{\bullet j} = n_{1j} + n_{2j} + \cdots + n_{pj}}$ sont respectivement les effectifs partiels sur la ligne i et sur la colonne j.

— $\boxed{f_{ij} = \frac{n_{ij}}{N}}$ est la fréquence du couple (x_i, y_j). $\boxed{f_{i\bullet} = \frac{n_{i\bullet}}{N} \quad \text{et} \quad f_{\bullet j} = \frac{n_{\bullet j}}{N}}$ sont les fréquences partielles sur la ligne i et la colonne j.

— Les fréquences conditionnelles : $\boxed{f_{x_i/y_j} = \frac{n_{ij}}{n_{\bullet j}} \quad \text{et} \quad f_{y_j/x_i} = \frac{n_{ij}}{n_{i\bullet}}}$

— On appelle **nuage de points** l'ensemble des points $M(x_i; y_j)$, que l'on notera M_{ij} dans un repère.
On appelle **point moyen** le point G, barycentre des points $(M_{ij}; n_{ij})$.

— On appelle **covariance** d'une série statistique de deux variables x et y, le réel noté :

$$\boxed{\mathbf{Cov}(x, y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij} x_i y_j - \bar{x} \cdot \bar{y}}$$

Exemple : Le tableau ci-dessous représente les notes x en Maths et les notes y en PC de 10 élèves d'une classe de TS_2.

x_i \ y_j	**8**	**11**	**12**
9	2	0	0
10	0	3	1
11	0	1	2
12	0	0	1

1. Donner la valeur de n_{23}. Interpréter cette valeur.
2. Déterminer les séries marginales de x et y, puis donner $\bar{x}$ et $\bar{y}$.
3. Déterminer la série conditionnelle $z = x \,/\, _{y=12}$. Calculer sa moyenne puis l'interpréter.
4. Déterminer $f_{3\bullet}$ et $f_{\bullet 2}$.
5. Calculer $\text{cov}(x, y)$.

Solution

1. n_{23} est la valeur qui se situe sur la deuxième ligne et la troisième colonne.
   Donc $n_{23} = 1$. Ça veut dire qu'il y a 1 seul élève qui a 10 en Maths et 12 en PC.
2. La série marginale de x : (On extrait la série de x de la série double)

Notes de Maths x_i	9	10	11	12
Effectifs n_i	2	4	3	1

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(2 \times 9 + 4 \times 10 + 3 \times 11 + 1 \times 12) = 10{,}3$$

   La série marginale de y : (On extrait la série de y de la série double)

Notes de PC y_j	8	11	12
Effectifs n_j	2	4	4

$$\bar{y} = \frac{1}{10}(2 \times 8 + 4 \times 11 + 4 \times 12) = 10{,}8$$

3. La série conditionnelle $z = x \,/\, _{y=12}$:

$z_i = x_i/_{y=12}$	10	11	12
n_i	1	2	1

$$\bar{z} = \frac{1}{4}(1 \times 10 + 2 \times 11 + 1 \times 12) = 11.$$

   C'est la moyenne en Maths des élèves qui ont 12 en PC.
4. Déterminer $f_{3.}$ et $f_{.2}$.

$$f_{3.} = \frac{n_{3.}}{10} \quad \text{et } n_{3.} = 0 + 1 + 2 = 3 \quad \Rightarrow \quad f_{3.} = \frac{3}{10}$$
$$f_{.2} = \frac{n_{.2}}{10} \quad \text{et } n_{.2} = 0 + 3 + 1 + 0 = 4 \quad \Rightarrow \quad f_{.2} = \frac{4}{10}$$

5. La covariance de x et y.
   $\text{Cov}(x, y) = \frac{(2\times8\times9+3\times11\times10+1\times12\times10+1\times11\times11+2\times12\times11+1\times12\times12)}{10} - 10{,}3 \times 10{,}8 = 1{,}06.$

2. Cas particulier : Série injective

Une série est dite injective si : $\boxed{n_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}}$. Elle est notée $\boxed{(x_i ; y_i)}$ et se présente sous forme d'un tableau de deux lignes de même longueur.
Dans ce cas, l'effectif total N est le nombre de couples $(x_i ; y_i)$.

— $\boxed{\bar{x} = \frac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{p} x_i}$ et $\boxed{\bar{y} = \frac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{p} y_i}$ si la série n'est pas groupée en classes.

— $\boxed{\bar{x} = \frac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{p} n_i c_i}$ et $\boxed{\bar{y} = \frac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{p} n_i c_i}$ si la série est groupée en classes.

— $\boxed{V(x) = \frac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{p} x_i^2 - \bar{x}^2}$ et $\boxed{V(y) = \frac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{p} y_i^2 - \bar{y}^2}$

Plus simplement on a : $\boxed{V(x) = \overline{x^2} - \bar{x}^2}$ et $\boxed{V(y) = \overline{y^2} - \bar{y}^2}$

— $\boxed{\sigma(x) = \sqrt{V(x)}}$ et $\boxed{\sigma(y) = \sqrt{V(y)}}$

— $\boxed{\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{p} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}$ ou plus simplement : $\boxed{\text{Cov}(x, y) = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}$

Le *nuage de points* est l'ensemble des points $M(x_i ; y_i)$ dans un repère.
Le **point moyen** est le point $\boxed{G(\bar{x} ; \bar{y})}$, il sera toujours au centre du nuage (Isobarycentre).

Exemple : Série non groupée en classes

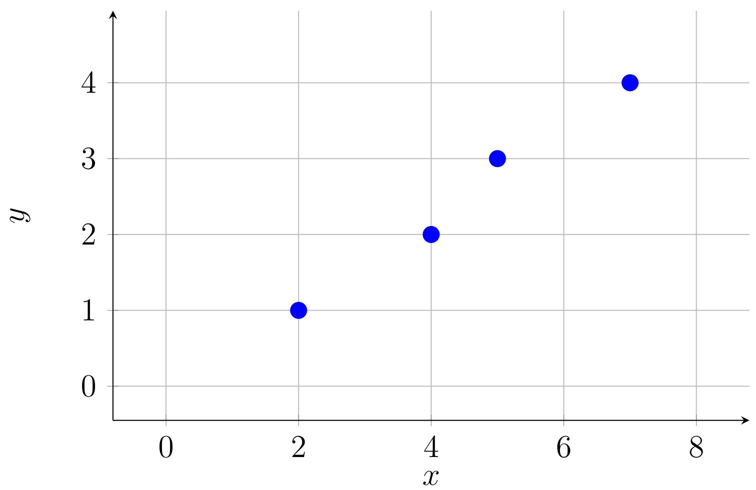
: On donne le tableau statistique ci-dessous :

x_i	2	4	5	7
y_i	1	2	3	4

1. Représenter le nuage de points de cette série statistique.
2. Calculer $\bar{x}, \bar{y}, V(x), V(y)$ et $\text{Cov}(x, y)$.
3. Représenter le point moyen G dans le nuage.

Solution

1. Le nuage de points



— Si le nuage de points a la forme d'une droite, alors les variables x et y sont liées par une relation linéaire qu'on verra plus tard dans la suite du cours.

2.

					Total
x_i	2	4	5	7	18
y_i	1	2	3	4	**10**
x_i^2	4	16	25	49	**94**
y_i^2	1	4	9	16	**30**
x_iy_i	2	8	15	28	**53**

$$\bar{x} = \frac{18}{4} = 4{,}5 \quad ; \quad \bar{y} = \frac{10}{4} = 2{,}5 \quad ; \quad V(x) = \frac{94}{4} - (4{,}5)^2 = 3{,}25 \quad ; \quad V(y) = \frac{30}{4} - (2{,}5)^2 = 1{,}25$$

$$\mathrm{Cov}(x, y) = \frac{53}{4} - 4{,}5 \times 2{,}5 = 2$$

3. Le point moyen est donc $G(4{,}5\,;\,2{,}5)$. On peut le placer dans le nuage.

Exemple : Série groupée en classes

Durées de connexion (en minutes) de 40 élèves sur une plateforme :

Classe	$[0\,;\,10[$	$[10\,;\,20[$	$[20\,;\,30[$	$[30\,;\,40[$	$[40\,;\,50[$
Effectif n_i	5	8	12	10	5
Centre c_i	5	15	25	35	45

Effectif total : $N = 5 + 8 + 12 + 10 + 5 = 40$

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{40}(5 \times 5 + 8 \times 15 + 12 \times 25 + 10 \times 35 + 5 \times 45) \\ &= \frac{5 \cdot 5 + 8 \cdot 15 + 12 \cdot 25 + 10 \cdot 35 + 5 \cdot 45}{40} \\ &= 25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(x) &= \frac{1}{40}(5 \cdot 5^2 + 8 \cdot 15^2 + 12 \cdot 25^2 + 10 \cdot 35^2 + 5 \cdot 45^2) - \bar{x}^2 \\ &= \frac{5 \cdot 25 + 8 \cdot 225 + 12 \cdot 625 + 10 \cdot 1225 + 5 \cdot 2025}{40} - 625 \\ &= 125\end{aligned}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{125} \approx 11{,}18$$

Fréquence partielle de la classe $[20; 30[$: $\quad f_3 = \frac{12}{40} = 0{,}3$

IV. AJUSTEMENT LINÉAIRE

1. Coefficient de corrélation

On appelle coefficient de corrélation linéaire entre les variables x et y (le lien entre les deux variables) d'une série statistique double, le réel

$\boxed{r = \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\sqrt{V(x) \times V(y)}}}$ ou encore $\boxed{r = \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\sigma(x)\,\sigma(y)}}$

- On a toujours $\boxed{-1 \leq r \leq 1}$
- Si $|r| \geq 0{,}87$ ou $r^2 \geq 0{,}75$ alors la *corrélation entre x et y est forte.*
- Si $|r| < 0{,}87$ ou $r^2 < 0{,}75$ alors la *corrélation entre x et y est faible.*
- Si $r = -1$ ou $r = 1$ alors la *corrélation entre x et y est parfaite.*
- Si $r = 0$, alors la *corrélation entre x et y est nulle.*
  Dans ce cas, il n'y a aucune relation entre x et y.
  On dira que les variables x et y sont *indépendantes*.

Remarque : Quand la corrélation entre deux variables est forte, alors on peut faire une **estimation** d'une des valeurs connaissant l'autre à l'aide des droites de régression.

2. Droites de régression : Par la méthode des moindres carrés

On peut déterminer les droites de régression linéaires de la manière ci-dessous, appelée la méthode des moindres carrés :

$\boxed{(D_{y/x}) : y - \bar{y} = a(x - \bar{x}) \quad \text{avec} \quad a = \frac{\text{Cov}(x,y)}{V(x)}}$ est la droite de régression de y en x.

$\boxed{(D_{x/y}) : x - \bar{x} = a'(y - \bar{y}) \quad \text{avec} \quad a' = \frac{\text{Cov}(x,y)}{V(y)}}$ est la droite de régression de x en y.

- Après transformation, elles s'écrivent sous la forme :
  $(D_{y/x}) : y = ax + b$ et $(D_{x/y}) : x = a'y + b'$
- On « peut » retrouver $D_{y/x}$ à partir de $D_{x/y}$ et réciproquement.
- Les droites de régression linéaires passent toujours par le point moyen.
- $\boxed{\text{On a toujours } aa' = r^2}$ (À démontrer).

Exercice d'application

D'après des études scientifiques, la croissance d'un arbre ne s'arrête jamais.
On considère un arbre dont la hauteur x en *mètres* et son âge y en *années* sont consignés dans le tableau ci-dessous :
Les résultats seront donnés à 1 chiffre après la virgule.

x_i	3	5	7,5	8
y_i	2	4	6	7

1. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.
2. Justifier qu'on peut estimer la hauteur de cet arbre si on connaît son âge.
3. Quelle serait sa hauteur à l'âge de 10 ans ?
4. Si l'arbre mesure 11 mètres, estimer son âge en années.

Correction de l'exercice

1. **Détermination du coefficient de corrélation linéaire**

$$r = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma(x)\sigma(y)} \approx 0{,}995$$

Il y a donc une **corrélation linéaire très forte et positive** entre la hauteur et l'âge de l'arbre.

2. **Justification de l'utilisation d'une estimation linéaire**
Comme $r \approx 1$, la corrélation est très forte. On peut donc utiliser la droite de régression pour estimer la hauteur de l'arbre à partir de son âge, ou inversement.

3. **Estimation de la hauteur à 10 ans**
Droite de régression de y en fonction de x :

$$y = ax + b \quad \text{avec } a \approx 0{,}95 \quad \text{et } b \approx -0{,}83$$

$$y(10) = 0{,}95 \times 10 - 0{,}83 = \boxed{8{,}7 \text{ mètres}}$$

4. **Estimation de l'âge si l'arbre mesure 11 mètres**
Droite de régression de x en fonction de y :

$$x = a'y + b' \quad \text{avec } a' \approx 1{,}042 \quad \text{et } b' \approx 0{,}924$$

$$y(11) = \frac{11 - 0{,}924}{1{,}042} \approx \boxed{12{,}4 \text{ années}}$$