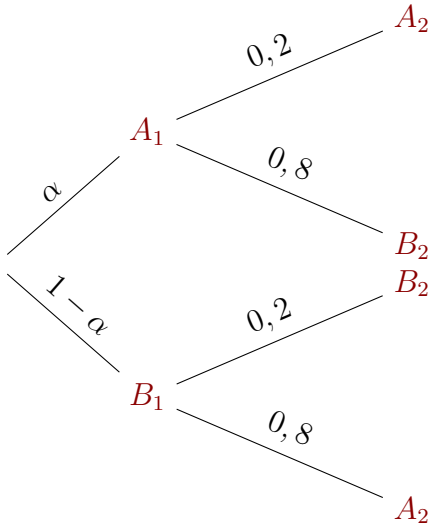


Exercice 1 : (04.75 pts)**Partie I : (02,5 points)**

Construisons un arbre pondéré correspondant à cette épreuve.



- 1 Déterminons la valeur de α

$$\begin{aligned}
 P(A_2) &= P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(A_2) \\
 &= \alpha \times 0,2 + (1 - \alpha) \times 0,8 \\
 &= 0,2\alpha + 0,8 - 0,8\alpha \\
 &= -0,6\alpha + 0,8
 \end{aligned}$$

$$\text{Si } P(A_1) = P(A_2) \implies \alpha = -0,6\alpha + 0,8$$

$$\implies 1,6\alpha = 0,8$$

$$\alpha = \frac{0,8}{1,6}$$

$$\alpha = 0,5$$

(01 point)

- 2 Calculons la probabilité qu'un athlète se rende au même stade pendant les deux jours.

A_1 : « l'athlète choisit le stade A le 1^{er} jour »

B_1 : « l'athlète choisit le stade B le 1^{er} jour »

A_2 : « l'athlète choisit le stade A le 2^{er} jour »

B_2 : « l'athlète choisit le stade B le 2^{er} jour »

Un athlète se rende au même stade pendant les deux jours se traduit par: $A_1 \cap A_2$ ou $B_1 \cap B_2$

$$\begin{aligned}
P((A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2)) &= P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap B_2) \\
&= P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \\
&= 0,5 \times 0,2 + 0,5 \times 0,2 \\
&= 0,1 + 0,1 \\
&= 0,2
\end{aligned}$$

$$P((A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2)) = 0,2$$

(0,75 point)

- 3 Au deuxième jour, on aperçoit un athlète sortant du stade B . La probabilité qu'il se soit entraîné au même stade la veille

Se traduit par : entrer dans B deux jours successifs, c'est-à-dire : B_1 sachant B_2

$$\begin{aligned}
P_{B_2}(B_1) &= \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} \\
&= \frac{P(B_1) \times P_{B_1}(B_2)}{P(A_1) \times P_{A_1}(B_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(B_2)} \\
&= \frac{0,5 \times 0,2}{0,5 \times 0,8 + 0,5 \times 0,2} \\
&= \frac{0,1}{0,4 + 0,1} \\
&= \frac{0,1}{0,5} \\
&= 0,2
\end{aligned}$$

$$P_{B_2}(B_1) = 0,2$$

(0,75 point)

Partie II : (02,25 points)

- 1 La probabilité qu'il y ait deux athlètes heureux

Il ne peut pas y avoir deux athlètes heureux car il ya au moins 3 athlètes donc l'un des stades sera occupé par au moins deux athlètes

La probabilité qu'il y ait deux athlètes heureux est nulle

(0,5 point)

- 2 Un athlète est heureux s'il est seul dans un stade. On note la probabilité que cela arrive parmi n athlètes :
Pour un athlète donné, l'épreuve qui consiste à choisir un stade est une **épreuve de Bernoulli** dont la probabilité du succès (le stade A) est 0,5.

- a Cette épreuve étant effectuée n fois de suite (par les n athlètes) et de manière indépendante, on a un **schéma de Bernoulli**.

On a deux cas :

- Un athlète se présente dans le stade A et $n - 1$ athlètes dans le stade B : 1 succès ;
- Un athlète se présente dans le stade B et $n - 1$ athlètes dans le stade A : $n - 1$ succès.

La probabilité qu'il y ait un athlète heureux parmi ces n athlètes est :

$$p_n = C_n^1(0,5)^1(1 - 0,5)^{n-1} + C_n^1(0,5)^{n-1}(1 - 0,5)^1 = 2n \cdot (0,5)^n = \frac{n}{2^{n-1}}$$

$$p_n = \frac{n}{2^{n-1}} \quad (0,75 \text{ pt})$$

Autre Approche

Remarque : si on voulait le voir comme une variable aléatoire

On peut modéliser le choix de chaque athlète comme une variable aléatoire de Bernoulli :

- On note X le nombre d'athlètes qui choisissent le stade A ,
- Chaque athlète a une probabilité $\frac{1}{2}$ de choisir A ou B ,
- Donc $X \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$, c'est-à-dire une loi binomiale.

Un athlète est **heureux** s'il est **seul** dans un stade, ce qui correspond à :

un seul athlète dans A ou un seul athlète dans B

Autrement dit :

$$p_n = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = n - 1)$$

Avec la loi binomiale :

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Donc :

$$p_n = \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{n-1} \right] \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2n}{2^n}$$

Et comme :

$$2^n = 2 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow \frac{2n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

$$p_n = \frac{n}{2^{n-1}} \quad (0,75 \text{ point})$$

b Étudions la variation de la suite $(p_n)_{n \geq 3}$.

(0,5 point)

$$p_n = \frac{n}{2^{n-1}}$$

On a

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= \frac{(n+1)}{2^n} - \frac{n}{2^{n-1}} \\ &= \frac{n+1}{2^n} - \frac{2n}{2^n} \\ &= \frac{n+1-2n}{2^n} \\ &= \frac{-n+1}{2^n} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } p_{n+1} - p_n = \frac{-n+1}{2^n}$$

Comme $n \geq 3$ alors $-n+1 < 0$ donc $\frac{-n+1}{2^n} < 0$ d'où $\forall n \geq 3, p_n < 0$

Ainsi la suite (p_n) est décroissante

La convergence de la suite

$$\begin{aligned}
 p_n &= \frac{n}{2^{n-1}} \implies p_n = \frac{2n}{2^n} \\
 &\implies p_n = \frac{2n}{e^{\ln(2^n)}} \\
 &\implies p_n = \frac{2n}{e^{n \ln(2)}} \\
 &\implies p_n = \frac{2}{\ln(2)} \times \frac{n \ln(2)}{e^{n \ln(2)}}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } p_n = \frac{2}{\ln(2)} \times \frac{n \ln(2)}{e^{n \ln(2)}}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\ln(2)} \times \frac{n \ln(2)}{e^{n \ln(2)}} \\
 &= \frac{2}{\ln(2)} \times \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \ln(2)}{e^{n \ln(2)}} \\
 &= \frac{2}{\ln(2)} \times 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0$ donc la suite $(p_n)_{n \geq 3}$ converge vers 0

c Calculons p_{10}

$$\begin{aligned}
 p_n &= \frac{n}{2^{n-1}} \\
 p_{10} &= \frac{10}{2^{10-1}} \\
 &= \frac{10}{2^9} \\
 &= \frac{5}{2^8}
 \end{aligned}$$

$$p_{10} = \frac{5}{2^8} \approx 0,019$$

(0,25 point)

Déterminons la plus grande valeur de n pour laquelle la probabilité d'avoir un athlète heureux est supérieur à 0,005.

(0,25 point)

La suite (p_n) étant strictement décroissante, on va chercher la plus grande valeur de n supérieur à 10 telles que p_n reste supérieur à 0,005

$$p_n = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Calculs :

$$p_{11} = \frac{11}{2^{10}} \approx 0,01 > 0,005$$

$$p_{12} = \frac{12}{2^{11}} \approx 0,0059 > 0,005$$

$$p_{13} = \frac{13}{2^{12}} \approx 0,0031 < 0,005$$

Conclusion : La plus grande valeur de n pour laquelle la probabilité d'avoir un athlète heureux soit supérieur à 0,005 est 12.

$$n = 12$$