Devoir n° 1 Du 2nd Semestre

Exercice 1 : 5 pts

Déterminons le domaine de définition dans chaque cas

1. $f(x) = \sqrt{4x - x^3}$

$f \quad \exists \quad$ ssi $\quad 4x - x^3 \geq 0$

Posons $4x - x^3 = 0$

$$\begin{aligned} 4x - x^3 = 0 &\implies x(4 - x^2) = 0 \\ &\implies x = 0 \text{ **ou** } 4 - x^2 = 0 \\ &\implies x = 0 \textbf{ ou } x = 2 \textbf{ ou } x = -2 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$4 - x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$x(4-x^2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$$Df =]-\infty; -2] \cup [0; 2]$$

Df $=]-\infty; -2] \cup [0; 2]$ 1pt

2. $f(x) = \sqrt{|1 - 3x| - x + 2}$

$f \quad \exists \quad$ ssi $\quad |1 - 3x| - x + 2 \geq 0$

$$\begin{aligned} |1 - 3x| - x + 2 \geq 0 &\implies |1 - 3x| \geq x - 2 \\ &\implies 1 - 3x \geq x - 2 \textbf{ ou } 1 - 3x \leq -x + 2 \\ &\implies 4x \leq 3 \textbf{ ou } 2x \geq -1 \\ &\implies x \leq \frac{3}{4} \textbf{ ou } x \geq \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

$\left]-\infty; \frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{-1}{2}; +\infty\right[$

$]-\infty; +\infty[$

$$Df = \mathbb{R}$$

Df $= \mathbb{R}$ 1pt

3 $\begin{cases} f(x) = x\sqrt{\left|\dfrac{x+1}{x}\right|}, & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \dfrac{x^3 - x^2}{x^2+1}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Posons $\begin{cases} f_1(x) = x\sqrt{\left|\dfrac{x+1}{x}\right|}, & \text{si } x < 0 \\ f_2(x) = \dfrac{x^3 - x^2}{x^2+1}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$f_1 \quad \exists$ ssi $\quad \left|\dfrac{x+1}{x}\right| \geq 0$ et $x \neq 0$ et $x < 0$

$Df_1 =]-\infty; 0[$

$f_2 \quad \exists$ ssi $\quad x^2 + 1 \neq 0$ et $x \geq 0$

$Df_2 = [0; +\infty[$

$$Df = Df_1 \cup Df_2$$
$$Df =]-\infty; 0[\cup [0; +\infty[$$
$$Df = \mathbb{R}$$

Df $= \mathbb{R}$ **1pt**

4 $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x(x-2)}{x-1}, & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x + \sqrt{x^2-4}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Posons $\begin{cases} f_1(x) = \dfrac{x(x-2)}{x-1}, & \text{si } x < 0 \\ f_2(x) = x + \sqrt{x^2-4}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$f_1 \quad \exists$ ssi $\quad x - 1 \neq 0$ et $x < 0$

$x - 1 \neq 0$ et $x < 0$

$x \neq 1$ et $x < 0$

$x \neq 1$ et $x \in]-\infty; 0[$

$x \in]-\infty; 0[$

$x \in]-\infty; 0[$

$Df_1 =]-\infty; 0[$

$f_2 \quad \exists$ ssi $\quad x^2 - 4 \geq 0$ et $x \geq 0$

Posons $f_2 \quad \exists$ ssi $\quad x^2 - 4 = 0$ et $x = 0$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

$Df_2 = [2; +\infty[$

$$Df = Df_1 \cup Df_2$$
$$Df =]-\infty; 0[\cup[2; +\infty[$$

$$\mathbf{Df} =]-\infty; \mathbf{0}[\cup[\mathbf{2}; +\infty[\qquad \textbf{1pt}$$

5 $\begin{cases} f(x) = \dfrac{3}{|x+1|-2}, & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x-3}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Posons $\begin{cases} f_1(x) = \dfrac{3}{|x+1|-2}, & \text{si } x \leq 1 \\ f_2(x) = \sqrt{x-3}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$$\begin{array}{lll} f_1 \quad \exists \text{ ssi} & |x+1| - 2 \neq 0 & \text{et} \quad x \leq 1 \\ & |x+1| \neq 2 & \text{et} \quad x \leq 1 \\ & x+1 \neq -2 \text{ et } x+1 \neq 2 & \text{et} \quad x \leq 1 \\ & x \neq -3 \text{ et } x \neq 1 & \text{et} \quad x \leq 1 \\ & x \neq -3 \text{ et } x \neq 1 & \text{et} \quad x \in]-\infty; 1] \\ & x \in]-\infty; -3[\cup]-3; 1[& \end{array}$$

$$Df_1 =]-\infty; -3[\cup]-3; 1[$$

$$\begin{array}{llll} f_2 \quad \exists \text{ ssi} & x - 3 \geq 0 & \text{et} & x > 1 \\ & x \geq 3 & \text{et} & x > 1 \\ & x \in [3; +\infty[& \text{et} & x \in]1; +\infty[\\ & x \in]1; +\infty[& \cap & x \in [3; +\infty[\\ & x \in (]1; +\infty[& \cap & [3; +\infty[) \\ & x \in [3; +\infty[& & \end{array}$$

$$Df_2 = [3; +\infty[$$

$$Df = Df_1 \cup Df_2$$
$$Df = (]-\infty; -3[\cup]-3; 1[) \cup [3; +\infty[$$

$$\mathbf{Df} = (]-\infty; -\mathbf{3}[\cup]-\mathbf{3}; \mathbf{1}[) \cup [\mathbf{3}; +\infty[\qquad \textbf{1pt}$$

Exercice 2 : 4 pts

1 Dans chacun des cas suivants, montrons que (C_f) admet la droite (Δ) pour axe de symétrie.

a $f(x) = -3x^2 + 4x + 1$ et $(\Delta) : x = \dfrac{2}{3}$.

$(\Delta) : x = \dfrac{2}{3}$ est axe de symétrie ssi $f(2a - x) = f(x)$ où $a = \dfrac{2}{3}$

$$
\begin{aligned}
f(2a-x)=f(x) &\implies -3(2a-x)^2+4(2a-x)+1=-3x^2+4x+1\\
&\implies -3\left(2\times\frac{2}{3}-x\right)^2+4\left(2\times\frac{2}{3}-x\right)+1=-3x^2+4x+1\\
&\implies -3\left(\frac{4}{3}-x\right)^2+4\left(\frac{4}{3}-x\right)+1=-3x^2+4x+1\\
&\implies -3\left(\frac{16}{9}+x^2-\frac{8x}{3}\right)+\left(\frac{16}{3}-4x\right)+1=-3x^2+4x+1\\
&\implies \frac{-16}{3}-3x^2+8x+\frac{16}{3}-4x+1=-3x^2+4x+1\\
&\implies -3x^2+4x+1=-3x^2+4x+1 \textbf{ vrai}
\end{aligned}
$$

Donc $x=\dfrac{2}{3}$ est bien axe de symétrie

Donc $x=\dfrac{2}{3}$ est bien axe de symétrie **0,75pt**

b $f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{2x^2+8x+9}$ et $(\Delta): x=-2$.

$(\Delta): x=-2$ est axe de symétrie ssi $f(2a-x)=f(x)$ où $a=-2$

$$
\begin{aligned}
f(2a-x)=f(x) &\implies \frac{(2a-x)^2+4(2a-x)+3}{2(2a-x)^2+8(2a-x)+9}=\frac{x^2+4x+3}{2x^2+8x+9}\\
&\implies \frac{(2\times(-2)-x)^2+4(2\times(-2)-x)+3}{2(2\times(-2)-x)^2+8(2\times(-2)-x)+9}=\frac{x^2+4x+3}{2x^2+8x+9}\\
&\implies \frac{(-4-x)^2+4(-4-x)+3}{2(-4-x)^2+8(-4-x)+9}=\frac{x^2+4x+3}{2x^2+8x+9}\\
&\implies \frac{16+8x+x^2-16-4x+3}{2(16+8x+x^2)-32-8x+9}=\frac{x^2+4x+3}{2x^2+8x+9}\\
&\implies \frac{x^2+4x+3}{32+16x+2x^2-32-8x+9}=\frac{x^2+4x+3}{2x^2+8x+9}\\
&\implies \frac{x^2+4x+3}{2x^2+8x+9}=\frac{x^2+4x+3}{2x^2+8x+9} \textbf{ vrai}
\end{aligned}
$$

Donc $x=-2$ est bien axe de symétrie

Donc $x=-2$ est bien axe de symétrie **0,75pt**

2 Dans chacun des cas suivants, montrons que (C_f) admet le point I pour centre de symétrie.

a $f(x)=-x^3+3x+4$ et $I(0;4)$.

$I(0;4)$ est centre de symétrie ssi $f(2a-x)+f(x)=2\times b$ où $a=0$ et $b=4$

$$
\begin{aligned}
f(2a-x)+f(x)=2\times b &\implies -(2a-x)^3+3(2a-x)+4+-x^3+3x+4=2\times b\\
&\implies -(2\times 0-x)^3+3(2\times 0-x)+4+-x^3+3x+4=2\times 4\\
&\implies x^3-3x+4-x^3+3x+4=8\\
&\implies 8=8 \textbf{ vrai}
\end{aligned}
$$

Donc $I(1;1)$ est bien centre de symétrie

Donc $I(1;1)$ est bien centre de symétrie **0,75pt**

b $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-x}{2x^2-4x+1}$ et $I(1;1)$.

$I(1;1)$ est centre de symétrie ssi $f(2a-x)+f(x)=2\times b$ où $a=1$ et $b=1$

$$
\begin{aligned}
f(2a-x)+f(x)=2\times b &\implies \frac{(2a-x)^3-(2a-x)^2-(2a-x)}{2(2a-x)^2-4(2a-x)+1}+\frac{x^3-x^2-x}{2x^2-4x+1}=2\times b\\
&\implies \frac{(2-x)^3-(2-x)^2-(2-x)}{2(2-x)^2-4(2-x)+1}+\frac{x^3-x^2-x}{2x^2-4x+1}=2\times 1\\
&\implies \frac{8-12x+6x^2-x^3-(4-4x+x^2)-2+x}{2(4-4x+x^2)-4(2-x)+1}+\frac{x^3-x^2-x}{2x^2-4x+1}=2\times 1\\
&\implies \frac{8-12x+6x^2-x^3-4+4x-x^2-2+x}{2(4-4x+x^2)-4(2-x)+1}+\frac{x^3-x^2-x}{2x^2-4x+1}=2\times 1\\
&\implies \frac{8-12x+6x^2-x^3-4+4x-x^2-2+x}{8-8x+2x^2-8+4x+1}+\frac{x^3-x^2-x}{2x^2-4x+1}=2\times 1\\
&\implies \frac{-x^3+5x^2-7x+2}{2x^2-4x+1}+\frac{x^3-x^2-x}{2x^2-4x+1}=2\times 1\\
&\implies \frac{-x^3+5x^2-7x+2+x^3-x^2-x}{2x^2-4x+1}=2\times 1\\
&\implies \frac{4x^2-8x+2}{2x^2-4x+1}=2\times 1\\
&\implies \frac{2(2x^2-4x+1)}{2x^2-4x+1}=2\times 1\\
&\implies 2\times 1=2\times 1\\
&\implies 2=2 \ \textbf{vrai}
\end{aligned}
$$

Donc $I(0;4)$ est bien centre de symétrie

Donc $I(0;4)$ est bien centre de symétrie **0,75pt**

c $f(x) = \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+1}$ et $I(-2;0)$.

$I(-2;0)$ est centre de symétrie ssi $f(2a-x)+f(x) = 2\times 0$ où $a=-2$ et $b=0$

$$\begin{aligned} f(2a-x)+f(x) = 2\times b &\implies \frac{1}{(2a-x)+3} + \frac{1}{(2a-x)+1} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+1} = 2\times 0 \\ &\implies \frac{1}{(2\times(-2)-x)+3} + \frac{1}{(2\times(-2)-x)+1} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+1} = 2\times 0 \\ &\implies \frac{1}{-4-x+3} + \frac{1}{-4-x+1} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+1} = 2\times 0 \\ &\implies -\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+1} = 2\times 0 \\ &\implies 0 = 0 \textbf{ vrai} \end{aligned}$$

Donc $I(-2;0)$ est bien centre de symétrie

Donc $I(-2;0)$ est bien centre de symétrie **1pt**

Exercice 3: 5pts

1 Soient les fonctions f et g telles que :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2 \qquad x \mapsto 2x^2 - 5x - 3$$

a Montrons que f et g sont des applications. **(0,5 pt)**

$Df = \mathbb{R}$ donc f est une application

$Dg = \mathbb{R}$ donc g est une application

b Les fonctions f et g sont-elles injectives ? Surjectives ? **(2 × 0,5 pt)**

Pour f:

Vérifions si f injective

Soit x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}$ a-t-on $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$?

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\implies x_1^2 = x_2^2 \\ &\implies x_1 = x_2 \text{ ou } x_1 = -x_2 \end{aligned}$$

Donc f n'est pas injective

Vérifions si f surjective

Soit $y \in \mathbb{R}$ a-t-on $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = y$?

$$\begin{aligned} f(x) = y &\implies x^2 = y \\ &\implies x^2 = y \end{aligned}$$

Cette équation n'a pas toujours une solution. Car si $y < 0$ alors pas de solution.

Donc f n'est pas surjective non plus.

Pour g:

Vérifions si g injective

Soit x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}$ a-t-on $g(x_1) = g(x_2) \implies x_1 = x_2$?

$$\begin{aligned} g(x_1)=g(x_2) &\Longrightarrow 2x_1^2-5x_1-3=2x_2^2-5x_2-3\\ &\Longrightarrow 2x_1^2-5x_1=2x_2^2-5x_2\\ &\Longrightarrow 2x_1^2-2x_2^2-5x_1+5x_2=0\\ &\Longrightarrow 2[x_1^2-x_2^2]-5(x_1-x_2)=0\\ &\Longrightarrow 2[(x_1-x_2)(x_1+x_2)]-5(x_1-x_2)=0\\ &\Longrightarrow (x_1-x_2)[2(x_1+x_2)-5]=0\\ &\Longrightarrow (x_1-x_2)=0 \text{ ou } [2(x_1+x_2)-5]=0\\ &\Longrightarrow x_1=x_2 \text{ ou } 2x_1=-2x_2+5 \end{aligned}$$

Donc g n'est pas injective

Vérifions si g surjective

Soit $y\in\mathbb{R}$ a-t-on $\forall x\in\mathbb{R}, g(x)=y$?

$$\begin{aligned} g(x)=y &\Longrightarrow 2x^2-5x-3=y\\ &\Longrightarrow 2x^2-5x-3-y=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 5^2-4(2)(-3-y)\\ &=25-8(-3-y)\\ &=25+24+8y\\ &=49+8y \end{aligned}$$

Si $y\in\left]-\infty;\frac{-49}{8}\right[$ alors il n'existe pas de $x\in\mathbb{R}$ tel que $g(x)=y$

Donc g n'est pas surjective non plus.

2 Soit l'application

$$\begin{aligned} h:]3;+\infty[&\to]0;+\infty[\\ x &\mapsto 2x^2-5x-3 \end{aligned}$$

Démontrons que h est une bijection.

Soit $y\in\mathbb{R}$ montrons $\forall x\in\mathbb{R}, g(x)=y$

$$\begin{aligned} g(x)=y &\Longrightarrow 2x^2-5x-3=y\\ &\Longrightarrow 2x^2-5x-3-y=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 5^2-4(2)(-3-y)\\ &=25-8(-3-y)\\ &=25+24+8y\\ &=49+8y \end{aligned}$$

Comme $y>0$ donc $\Delta>0$ donc $\forall x\in]3;+\infty[, \exists y\in]0;+\infty[$ tel que $h(x)=y$

Donc h est surjective.

Déterminons sa bijection réciproque h^{-1}. **(1 pt)**

Comme $\Delta=49+8y$ donc $x_1=\dfrac{5-\sqrt{49+8y}}{4}$ et $x_2=\dfrac{5+\sqrt{49+8y}}{4}$

Or $\forall y\in]0;+\infty[, 49+8y>5$ donc $x_1<0$ et $x_2>0$

Donc $h^{-1}(x)=\dfrac{5+\sqrt{49+8x}}{4}$

$Dh^{-1}=\left[\dfrac{-49}{8};+\infty\right[$

$$\mathbf{h^{-1}(x) = \frac{5+\sqrt{49+8x}}{4}}$$

3 On considère les intervalles $I = [4;5]$ et $J = [0;4]$.

Déterminons l'image directe de I par h et l'image réciproque de J par h. **(2x0,5 pt)**

Calculons h(I)

$$\begin{aligned}
\forall x \in Dh \cap [4;5] &\implies x \in [4;5]\\
&\implies 4 \leq x \leq 5\\
&\implies 16 \leq 2x^2 \leq 25\\
&\implies 32 \leq 2x^2 \leq 50
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall x \in Dh \cap [4;5] &\implies x \in [4;5]\\
&\implies 4 \leq x \leq 5\\
&\implies -20 \leq -5x \leq -25\\
&\implies -23 \leq -5x - 3 \leq -28
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} 32 \leq 2x^2 \leq 50 \\ -23 \leq -5x - 3 \leq -28 \end{cases}$$

$$\overline{9 \leq 2x^2 - 5x - 3 \leq 22}$$

Donc $\forall x \in [4;5], 9 \leq x \leq 22 \implies h([4;5]) = [9;22]$

Finalement $h([4;5]) = [9;22]$

Calculons $h^{-1}(J)$

$$\begin{aligned}
h^{-1} :]0;+\infty[&\to]3;+\infty[\\
x &\mapsto \frac{5+\sqrt{49+8x}}{4}
\end{aligned}$$

$$Dh^{-1} = \left[\frac{-49}{8};+\infty\right[$$

$$\begin{aligned}
\forall x \in Dh^{-1} \cap [0;4] &\implies x \in [0;4]\\
&\implies 0 \leq h^{-1}(x) \leq 4\\
&\implies 0 \leq \frac{5+\sqrt{49+8x}}{4} \leq 4\\
&\implies 0 \leq 5+\sqrt{49+8x} \leq 16\\
&\implies -5 \leq \sqrt{49+8x} \leq 11\\
&\implies 25 \leq 49+8x \leq 121\\
&\implies 25-49 \leq 8x \leq 121-49\\
&\implies -24 \leq 8x \leq 72\\
&\implies -3 \leq x \leq 9\\
&\implies h^{-1}(x) \in [-3;9]
\end{aligned}$$

Donc $\forall x \in [0;4], -3 \leq x \leq 9 \implies h^{-1}([0;4]) = [-3;9]$

Finalement $h^{-1}([0;4]) = [-3;9]$

Exercice 4 : 6 pts

Dans le plan, on considère le triangle ABC tel que $AB = 2$, $AC = 4\sqrt{2}$ et $BC = 2\sqrt{5}$ (unité cm). I est le milieu de $[AB]$.

1 a Calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. **(01 pt)**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} &\Longrightarrow \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2\\ &\Longrightarrow \overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}\\ &\Longrightarrow \overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\\ &\Longrightarrow 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{BC}^2\\ &\Longrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{BC}^2\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \mathbf{\frac{1}{2}}\left(\overrightarrow{BA}^{\mathbf{2}} + \overrightarrow{AC}^{\mathbf{2}} - \overrightarrow{BC}^{\mathbf{2}}\right)}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(2^2 + (4\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{5})^2\right)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(4 + 32 - 20)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(36 - 20)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(16)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 8$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \mathbf{8}}$$

b Déduisons-en $\cos\widehat{BAC}$. **(0,5 pt)**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC} &\Longrightarrow \cos\widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC}\\ &\Longrightarrow \cos\widehat{BAC} = \frac{8}{2 \times 4\sqrt{2}}\\ &\Longrightarrow \cos\widehat{BAC} = \frac{1}{\sqrt{2}}\\ &\Longrightarrow \cos\widehat{BAC} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos\widehat{\mathbf{BAC}} = \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}}$$

c L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$.

L'ensemble des points M du plan est la perpendiulaire à (AB) passant par C.

2 Soit l'ensemble $\mathcal{E} = \{M \in \mathbb{P} \;/\; MA^2 + MB^2 = 6\}$

a Montrons que $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2$. **(01 pt)**

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2 &= (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2\\
&= \overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IA}^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IB}^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}\\
&= 2\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2\\
&= 2\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2\\
&= 2\overrightarrow{MI}^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2\\
&= 2\overrightarrow{MI}^2+2\left(\frac{AB}{2}\right)^2\\
&= 2\overrightarrow{MI}^2+\frac{AB^2}{2}\\
&= 2\overrightarrow{MI}^2+\frac{2^2}{2}\\
&= 2\overrightarrow{MI}^2+2 \ \textbf{cqfd}
\end{aligned}
$$

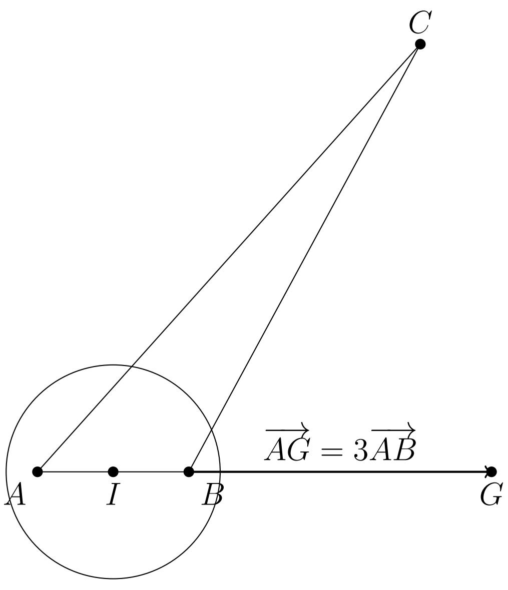
b Déterminons et construions l'ensemble $\mathcal{E}$. **(0,5+0,5 pt)**

$$
\begin{aligned}
MA^2+MB^2=6 &\implies 2\overrightarrow{MI}^2+2=6\\
&\implies 2\overrightarrow{MI}^2=4\\
&\implies \overrightarrow{MI}^2=2
\end{aligned}
$$

L'ensemble $\mathcal{E}$ est un cercle de centre I et de rayon $\sqrt{2}$

$$\mathcal{E}=\{C(I;\sqrt{2})\}.$$

$$\boxed{\mathcal{E}=\{\mathbf{C}(\mathbf{I};\sqrt{\mathbf{2}})\}}$$



3 Soit G le barycentre des points pondérés $(A;2)$; $(B;-3)$ et $\mathcal{F}=\{M\in\mathbb{P}\ /\ 2MA^2-3MB^2=15\}$

a Construisons G et calculer GA et GB. **(0,5+0,5 pt)**

G le barycentre de $(A;2)$; $(B;-3)$

$$
\begin{aligned}
G=bar\{(A;2);(B;-3)\} &\implies \overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB}\\
&\implies \overrightarrow{BG}=-2\overrightarrow{BA}
\end{aligned}
$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BG} = -2\overrightarrow{BA} \end{cases} \iff \begin{cases} \|\overrightarrow{AG}\| = \|3\overrightarrow{AB}\| \\ \|\overrightarrow{BG}\| = \|-2\overrightarrow{BA}\| \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} AG = 3AB \\ BG = 2BA \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} GA = 6 \\ GB = 4 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} GA = 6 \\ GB = 4 \end{cases}}$$

b Montrons que $2MA^2 - 3MB^2 = -MG^2 + 24$. **(01 pt)**

$$\begin{aligned} 2MA^2 - 3MB^2 &= 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 - 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 \\ &= 2(MG^2 + GA^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}) - 3(MG^2 + GB^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}) \\ &= 2MG^2 + 2GA^2 + 4\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} - 3MG^2 - 3GB^2 - 6\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} \\ &= -MG^2 + 2GA^2 - 3GB^2 + 4\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} - 6\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} \\ &= -MG^2 + 2GA^2 - 3GB^2 + 2\overrightarrow{MG}(2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB}) \\ &= -MG^2 + 2GA^2 - 3GB^2 \\ &= -MG^2 + 2(6)^2 - 3(4)^2 \\ &= -MG^2 + 2 \times 36 - 3 \times 16 \\ &= -MG^2 + 72 - 48 \\ &= -MG^2 + 24 \ \textbf{cqfd} \end{aligned}$$

c Déterminonns l'ensemble $\mathcal{F}$. **(0,5 pt)**

$\mathcal{F} = \{M \in \mathbb{P} \,/\, 2MA^2 - 3MB^2 = 15\}$ d'après la question précédente, $2MA^2 - 3MB^2 = -MG^2 + 24$

$$\begin{aligned} 2MA^2 - 3MB^2 = 15 &\implies -MG^2 + 24 = 15 \\ &\implies -MG^2 + 24 = 15 \\ &\implies -MG^2 = 15 - 24 \\ &\implies -MG^2 = -9 \\ &\implies MG^2 = 9 \\ &\implies MG = 3 \end{aligned}$$

$\boxed{\mathcal{F} = \{\mathcal{C}(\mathbf{I}, \mathbf{2})\} \text{ Donc l'ensemble des point } M \text{ est un cercle de centre } I \text{ et de rayon de } 2}$