Linéarisation

A.DIAO

Année scolaire 2025-2026

Linéarisation de $\cos^2(x)$ par les formules d'Euler

D'après la formule d'Euler, nous avons :

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

En élevant au carré, on obtient :

$$\cos^2(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 \tag{1}$$

On développe le numérateur en utilisant l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

$$\begin{aligned}\cos^2(x) &= \frac{(e^{ix})^2 + 2(e^{ix} \cdot e^{-ix}) + (e^{-ix})^2}{4} \\ &= \frac{e^{i2x} + 2e^0 + e^{-i2x}}{4} \\ &= \frac{e^{i2x} + e^{-i2x} + 2}{4}\end{aligned}$$

En isolant le terme qui correspond à la formule d'Euler pour $\cos(2x)$:

$$\begin{aligned}\cos^2(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2}\right) + \frac{2}{4} \\ &= \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Finalement, la forme linéarisée est :

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

Linéarisation de $\cos^3(x)$ par les formules d'Euler

On utilise la formule d'Euler pour le cosinus :

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

En élevant au cube, nous avons :

$$\cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3$$

On développe le numérateur à l'aide de l'identité remarquable $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$:

$$\begin{aligned}
\cos^3(x) &= \frac{(e^{ix})^3 + 3(e^{ix})^2 e^{-ix} + 3e^{ix}(e^{-ix})^2 + (e^{-ix})^3}{2^3} \\
&= \frac{e^{i3x} + 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-i2x} + e^{-i3x}}{8} \\
&= \frac{e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x}}{8}
\end{aligned}$$

On regroupe les termes de même fréquence pour faire apparaître les formules d'Euler :

$$\begin{aligned}
\cos^3(x) &= \frac{(e^{i3x} + e^{-i3x}) + 3(e^{ix} + e^{-ix})}{8} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)
\end{aligned}$$

En utilisant à nouveau la formule d'Euler $\cos(nx) = \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$, on obtient le résultat final :

$$\cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$$

Linéarisation de $\cos^4(x)$ par les formules d'Euler

$$\begin{aligned}
\cos^4(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 \\
&= \frac{1}{16}\left(e^{i4x}+4e^{i2x}+6+4e^{-i2x}+e^{-i4x}\right) \\
&= \frac{1}{16}\left((e^{i4x}+e^{-i4x})+4(e^{i2x}+e^{-i2x})+6\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(2\cos(4x)+8\cos(2x)+6\right) \\
&= \frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Linéarisation de $\cos^5(x)$ par les formules d'Euler

$$\begin{aligned}
\cos^5(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^5 \\
&= \frac{1}{32}\left(e^{i5x}+5e^{i3x}+10e^{ix}+10e^{-ix}+5e^{-i3x}+e^{-i5x}\right) \\
&= \frac{1}{32}\left[(e^{i5x}+e^{-i5x})+5(e^{i3x}+e^{-i3x})+10(e^{ix}+e^{-ix})\right] \\
&= \frac{1}{32}\left[2\cos(5x)+10\cos(3x)+20\cos(x)\right] \\
&= \frac{1}{16}\cos(5x)+\frac{5}{16}\cos(3x)+\frac{5}{8}\cos(x)
\end{aligned}$$

Linéarisation de $\sin^2(x)$ par les formules d'Euler

$$\begin{aligned}
\sin^2(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 \\
&= \frac{e^{i2x} - 2e^{ix}e^{-ix} + e^{-i2x}}{-4} \\
&= \frac{(e^{i2x} + e^{-i2x}) - 2}{-4} \\
&= \frac{2\cos(2x) - 2}{-4} \\
&= \frac{1 - \cos(2x)}{2}
\end{aligned}$$

Linéarisation de $\sin^3(x)$ par les formules d'Euler

$$\begin{aligned}
\sin^3(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 \\
&= \frac{e^{i3x} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-i3x}}{-8i} \\
&= \frac{(e^{i3x} - e^{-i3x}) - 3(e^{ix} - e^{-ix})}{-8i} \\
&= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)
\end{aligned}$$

Linéarisation de $\sin^4(x)$ par les formules d'Euler

$$
\begin{aligned}
\sin^4(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 \\
&= \frac{1}{16}\left(e^{i4x} - 4e^{i2x} + 6 - 4e^{-i2x} + e^{-i4x}\right) \\
&= \frac{1}{16}\left((e^{i4x} + e^{-i4x}) - 4(e^{i2x} + e^{-i2x}) + 6\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(2\cos(4x) - 8\cos(2x) + 6\right) \\
&= \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}
\end{aligned}
$$

Linéarisation de $\sin^5(x)$ par les formules d'Euler

$$
\begin{aligned}
\sin^5(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^5 \\
&= \frac{1}{32i}\left(e^{i5x} - 5e^{i3x} + 10e^{ix} - 10e^{-ix} + 5e^{-i3x} - e^{-i5x}\right) \\
&= \frac{1}{32i}\left[(e^{i5x} - e^{-i5x}) - 5(e^{i3x} - e^{-i3x}) + 10(e^{ix} - e^{-ix})\right] \\
&= \frac{2i\sin(5x) - 10i\sin(3x) + 20i\sin(x)}{32i} \\
&= \frac{1}{16}\sin(5x) - \frac{5}{16}\sin(3x) + \frac{5}{8}\sin(x)
\end{aligned}
$$

Linéarisation de $\cos^2(x)\sin^2(x)$ par les formules d'Euler

$$\begin{aligned}
\cos^2(x)\sin^2(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2\\
&= \left(\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{4i}\right)^2\\
&= \frac{e^{i4x}-2+e^{-i4x}}{-16}\\
&= \frac{2\cos(4x)-2}{-16}\\
&= \frac{1-\cos(4x)}{8}
\end{aligned}$$

Linéarisation de $\cos^3(x)\sin^2(x)$ par les formules d'Euler

$$\begin{aligned}
\cos^3(x)\sin^2(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2\\
&= \frac{1}{-32}(e^{i3x}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-i3x})(e^{i2x}-2+e^{-i2x})\\
&= \frac{1}{-32}\left[(e^{i5x}+e^{-i5x})+(e^{i3x}+e^{-i3x})-2(e^{ix}+e^{-ix})\right]\\
&= \frac{2\cos(5x)+2\cos(3x)-4\cos(x)}{-32}\\
&= \frac{1}{8}\cos(x)-\frac{1}{16}\cos(3x)-\frac{1}{16}\cos(5x)
\end{aligned}$$