◇◇◇ Lycée de Dindéfélo ◇◇◇			A.S. : 2024/2025
Matière: Mathématiques	Niveau : 1^{er}S2	Date: 16/06/2025	Durée : 4 heures

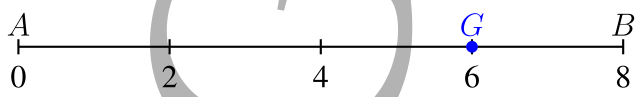
Composition n° 2 Du 2^{nd} Semestre

Exercice 1 : 5 pts

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 8$ cm.

1. Construisons le barycentre G des points pondérés $(A; 1)$ et $(B; 3)$. **0,1 pt**

$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$



2. Calculons les distances GA et GB. **0,5 pt + 0,5 pt**

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \implies \|\overrightarrow{AG}\| = \frac{3}{4}\|\overrightarrow{AB}\|$$
$$\implies AG = \frac{3}{4} \times 8$$
$$\implies AG = 6$$
$$\overrightarrow{BG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} \implies \|\overrightarrow{BG}\| = \frac{1}{4}\|\overrightarrow{BA}\|$$
$$\implies BG = \frac{1}{4} \times 8$$
$$\implies BG = 2$$

GA = 6 et GB = 2

3. Démontrons que pour tout point M du plan,

$$MA^2 + 3MB^2 = 4MG^2 + 48$$

0,1 pt

$$\begin{aligned}
MA^2 + 3MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + 3\overrightarrow{MB}^2 \\
&= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 \\
&= \overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}^2 + 3(\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}^2) \\
&= \overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}^2 + 3\overrightarrow{MG}^2 + 6\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GB}^2 \\
&= 4\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + 6\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GA}^2 \\
&= 4\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB}) + 3\overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GA}^2 \\
&= 4\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{O}) + 3\overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GA}^2 \\
&= 4\overrightarrow{MG}^2 + 3\overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GA}^2 \\
&= 4\overrightarrow{MG}^2 + 3(2)^2 + 6^2 \\
&= 4\overrightarrow{MG}^2 + 12 + 36 \\
&= 4MG + 48
\end{aligned}$$

$$\mathbf{MA^2 + 3MB^2 = 4MG^2 + 48} \quad \textbf{CQFD}$$

4 Démontrons et construisons l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MA^2 + 3MB^2 = 84$$

0,1 pt

D'après la relation précédente on a $MA^2 + 3MB^2 = 4MG^2 + 48$

$$\begin{aligned}
4MG^2 + 48 &= 84 \\
4MG^2 &= 84 - 48 \\
4MG^2 &= 36 \\
MG^2 &= 9 \\
MG &= 3
\end{aligned}$$

Donc, l'ensemble des points M tels que $MA^2 + 3MB^2 = 84$ est le cercle de centre I et de rayon 3 :

$$\mathscr{C}(\mathbf{I},\ \mathbf{3})$$

5 Déterminons et construison l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -12$$

0,1 pt

Soit I milieu de AB

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -12 &\implies \overrightarrow{MI}^2 - \frac{\overrightarrow{AB}^2}{4} = -12 \\
&\implies \overrightarrow{MI}^2 - \frac{8^2}{4} = -12 \\
&\implies \overrightarrow{MI}^2 - 16 = -12 \\
&\implies \overrightarrow{MI}^2 = 4
\end{aligned}$$

Donc, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -12$ est le cercle de centre I et de rayon 2 :

$$\mathscr{C}(\mathbf{I},\ \mathbf{2})$$