Exercice 1 **Mesure principale**

Détermine la mesure principale de α :

$\alpha = \dfrac{37\pi}{4}$; $\alpha = \dfrac{103\pi}{6}$; $\alpha = -\dfrac{58\pi}{3}$; $\alpha = \dfrac{153\pi}{1047}$; $\alpha = -27\pi$; $\alpha = \dfrac{47\pi}{3}\alpha = -\dfrac{469\pi}{5}$; $\alpha = -\dfrac{1005\pi}{2}$; $\alpha = \dfrac{139\pi}{7}$; $\alpha = 1108\pi$; $\alpha = 713\pi$; $\alpha = -\pi$.

Exercice 2

ABC est un triangle équilatéral de centre S tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ait pour mesure $\dfrac{\pi}{3}$. Déterminer en radian et en degré les mesures principales des angles suivants : $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{SA})$, $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB})$, $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{CA})$ et $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AB})$.

Exercice 3

On considère les angles suivants :

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{63\pi}{4}\ [2\pi]$; $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = -\dfrac{221\pi}{12}\ [2\pi]$; $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}) = -\dfrac{89\pi}{3}$.

1. Déterminer leurs mesures principales.
2. Montrer que le triangle ABD est rectangle en A.

Exercice 4

I. Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -\dfrac{\pi}{9}$ et $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \dfrac{\pi}{4}$.

Déterminer la mesure principale de :

$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$; $(-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$; $(-\overrightarrow{v}, -2\overrightarrow{w})$ et $(-2\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$.

II. Dans la figure suivante, ABC est un triangle équilatéral direct, CBD, ACE et AFB sont des triangles rectangles et isocèles respectivement en D, E et F.

`chemin/vers/figure.png`

Déterminer la mesure principale des angles suivants : $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$; $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BF})$; $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CA})$; $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{CB})$.

Exercice 5 **Calcul de $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$**

1. Calculer $\cos x$ et $\tan x$ sachant que $\sin x = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ et $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$.
2. Calculer $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$ sachant que $\cos(5\pi - x) = \dfrac{4}{5}$ et $x \in]0, \pi[$.
3. Calculer
4. Calculer $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$ sachant que $\sin(-x) = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$ et $x \in \left]-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 6

Soient A, B et C les mesures principales des angles d'un triangle quelconque.

Démontrer que :

1. $\sin(B + C) = \sin A$ et $\cos(B + C) = -\cos A$.
2. $\sin(2B+2C) = -\sin 2A$ et $\cos(2B+2C) = \cos 2A$
3. $\sin\left(\dfrac{B+C}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{A}{2}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{B+C}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{A}{2}\right)$.

Exercice 7

I. Montrer que les expressions A, B et C suivantes sont indépendantes de θ.

$A = (\cos\theta + \sin\theta)^2 + (\cos\theta - \sin\theta)^2$

$B = \sin^4\theta - \cos^4\theta + 2\cos^2\theta$

$C = (a\cos\theta + b\sin\theta)^2 + (a\cos\theta - b\sin\theta)^2$ avec a et b des réels

II. Simplifier les expressions suivantes :

$A = \sin(\pi - x) + \cos(5\pi + x) - \sin(4\pi - x) + \cos(8\pi + x)$

$B = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi - x) + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + \cos(\pi - x) + \sin(-x)$

$C = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} -\right) - \cos(-x + 2k\pi) + \cos(3\pi + x) + \sin\left(x - \dfrac{7\pi}{2}\right)$

$D = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\dfrac{7\pi}{2} - x\right) - \sin\left(x + \dfrac{5\pi}{2}\right)$

$E = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} - \tan\left(\dfrac{7\pi}{2} + x\right) -$

$\dfrac{1}{\tan\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)}$

$F=\dfrac{-\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-3x\right)+\sin(x+k\pi)}{\cos(3x-\pi)+\cos(k\pi+3x)+3\sin\left(\frac{3\pi}{2}-3x\right)}$

$G=\tan\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)+\tan\left(x-\dfrac{5\pi}{2}\right)+\cot x-\cot(\pi-x)$

Exercice 8 Montrer les égalités suivantes

$(\sin x+\cos x)^2+(\cos x-\sin x)^2=2$

$(\sin x+\cos x)^2-(\sin x-\cos x)^2=4\sin x\cos x$

$(1+\cos x+\sin x)^2=2(1+\cos x)(1+\sin x)$

$\cos^4 x-\sin^4 x=\cos 2x$

$\tan^2 a+\cot^2 a=\dfrac{1}{\sin^2 a\cos^2 a}$

$\cos^4 x+\sin^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$; $\dfrac{1-\sin x}{\cos x}=\dfrac{1+\sin x}{1-\cos x}$

$\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$

$\cos^6 x+\sin^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x$

$\dfrac{1}{1+\cos x}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

$2\cos(a+b)\sin(a-b)=\sin 2a-\sin 2b$

$2\sin(a+b)\sin(a-b)=\cos 2a-\cos 2b$

$\sin 3a\sin^3 a-\cos 3a\cos^3 a=\cos^3 2a$

$\cot^2 a-\cos^2 a=\cot^2 a\cos^2 a$

$\tan 2a-\tan a=\dfrac{\tan a}{\cos 2a}$

$\cos^2 a-\sin^2 a=\cos a\cos 3a$; $\sin 2a=\dfrac{2}{\tan a+\frac{1}{\tan a}}$

Exercice 9

I. En remarquant que $\dfrac{\pi}{4}=2\times\dfrac{\pi}{8}$, démontrer que :

1. $\cos\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
2. Calculer $\cos\dfrac{3\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{3\pi}{8}$ sachant que $\dfrac{3\pi}{8}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{8}$.
3. Déterminer par la même méthode $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

II. En utilisant la relation $2\cos^2 x=1+\cos 2x$, démontrer que pour tout réel x :

1. $\cos^4 x=\dfrac{1}{8}(\cos 4x+4\cos 2x+3)$
2. $\sin^4 x=\dfrac{1}{8}(\cos 4x-4\cos 2x+3)$

Exercice 10

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   $\sin x=\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$; $\cos 3x=\cos\dfrac{\pi}{6}$
   $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$; $\sin\left(4x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$
   $2\sin\left(4x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}$; $\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$
   $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
   $\cos x-\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=0$; $\tan 2x=\tan\dfrac{\pi}{6}$
2. Résoudre dans $[0;2\pi[$ puis dans $]-\pi;\pi[$:
   $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$; $4\cos^2 x-3=0$
   $\sqrt{2}\cos^2 x-\cos x-\sqrt{2}=0$; $4\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$
   $\cos^2 4x-\sin^2 3x=0$; $\sin 2x+\sin 3x=0$
   $2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x-3=0$; $\sin x=\cos 2x$
   $\cos x+\sin x=\sqrt{2}$; $\cos 2x-\sin 2x=-1$
   $\tan^2 x-3\tan x-1=0$; $\sqrt{3}\cos x-3\sin x=0$
   $\tan^2 x+(1+\sqrt{3})\tan x+\sqrt{3}=0$
3. Résoudre dans D les inéquations suivantes :
   $\cos x\leq\cos\dfrac{\pi}{2}$ et $D=\mathbb{R}$; $2\cos x-1\geq 0$ et $D=\mathbb{R}$
   $\cos x-\cos\dfrac{\pi}{6}\leq 0$ et $D=]-\pi;\pi[$
   $\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)-1\leq 0$ et $D=[0;2\pi[$
   $\sin^2 x-\dfrac{1}{2}\leq 0$ et $D=]-\pi;\pi[$
   $\cos x(2\sin x-1)\leq 0$ et $D=]-\pi;\pi[$
   $2\cos^2 x+\sqrt{3}\cos x\geq 0$ et $D=[0;2\pi[$
   $\dfrac{1-2\cos x}{2\sin x-\sqrt{3}}\geq 0$ et $D=]-\pi;\pi[$
   $\dfrac{2\cos 2x-1}{1+2\cos 2x}<0$ et $D=[0;2\pi[$

Exercice 11

1. a. Sachant que $\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}$, donner les valeurs exactes de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.
   b. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.
2. Retrouver autrement les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
   (E) : $\cos 4x+\sin 4x=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$.
   Préciser les solutions de (E) qui appartiennent à l'intervalle $[0;2\pi[$.
4. Placer les images des solutions de (E) sur le cercle trigonométrique.
5. a. Calculer $(\cos^2 x+\sin^2 x)^2$ de deux façons différentes.
   b. Déterminer l'expression de $\sin^2 2x$ en fonction de $\cos 4x$.
   c. En déduire que l'expression de :
   $\cos^6 x+\sin^6 x=\dfrac{5}{8}+\dfrac{3}{8}\cos 4x$.

Exercice 12

Soit le polynôme défini par :
$P(x)=8x^3-4\sqrt{2}x^2-2x+\sqrt{2}$.

1. Montrer que $P(x) = 8\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $P(x) = 0$ puis $P(x) \geq 0$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
$8\sin^3 x - 4\sqrt{2}\sin^2 x - 2\sin x + \sqrt{2} = 0$.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
$8\sin^3 x - 4\sqrt{2}\sin^2 x - 2\sin x + \sqrt{2} \geq 0$.

Exercice 13 On se propose de résoudre l'équation (E) :
$\cos 3x - 7\cos 2x + 7\cos x - 1 = 0$.

1. Exprimer $\cos 2x$ et $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$.

2. Montrer que (E) est équivalente à :
$2\cos^3 x - 7\cos^2 x + 2\cos x + 3 = 0$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$2X^3 - 7X^2 + 2X + 3 = 0$.

4. En déduire les solutions dans $]-\pi; \pi]$ de l'équation (E).

Exercice 14

1. a et b sont deux réels de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tels que : $\cos a = \frac{1}{3}$ et $\sin b = \frac{4+\sqrt{2}}{6}$.

   a) Calculer $\sin a$, $\cos 2a$, $\sin 2a$, $\cos\frac{a}{2}$ et $\sin\frac{a}{2}$.

   b) Vérifier que $\cos b = \frac{4-\sqrt{2}}{6}$.

   c) Calculer $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$. En déduire $a+b$.

2. On donne : $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

   a. Trouver la valeur exacte de $\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}$.

   b. On pose :
   $A = \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$
   $B = \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8}$
   En remarquant que $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ et $\frac{7\pi}{8} = \pi - \frac{\pi}{8}$, calculer A et B.

3. x étant un réel non multiple de $\frac{\pi}{2}$,

   a. Démontrer que $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$.

   b. Exprimer en fonction de $\cos 2x$: $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$ et $\frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x}$.