OFFICE DU BACCALAURÉAT

Email : office@ucad.sn
Site web : officedubac.sn

MATHÉMATIQUES

Séries : S2–S2A–S4–S5 Coef. 5

Épreuve du 1er groupe
Durée : 4 heures

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/Dir. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 : (05,5 points)

A. Soit deux nombres complexes z_1, z_2 avec $z_2 \neq 0$. Rappeler les propriétés algébriques suivantes : $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$, $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$, $|z_1 \times z_2|$ et $\arg(z_1 \times z_2)$. **(01 point)**

B. On considère le polynôme P défini par : $P(z) = z^3 + (4-5i)z^2 - (5+12i)z - 8 + i$ où $z \in \mathbb{C}$.

- (a) Montrer que P admet une racine imaginaire pure β que l'on déterminera. (0,5 point)
- (b) Déterminer le polynôme g tel que $P(z) = (z-\beta)g(z)$. (0,5 point)
- (c) Factoriser $g(z)$ puis en déduire une factorisation de $P(z)$. (1 point)

C. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, unité 1 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 2 + i$, $z_C = -1 + i$.

- (a) Déterminer la nature du triangle ABC. (0,5 point)
- (b) Déterminer le point D tel que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. (0,5 point)
- (c) Soit f la translation qui transforme A en B. En déduire l'image du point C par f. (0,5 point)

D. Soit S la similitude plane directe qui laisse invariant A et transforme B en C.

- (a) Donner l'écriture complexe et l'écriture analytique de S. (0,5 point)
- (b) Déterminer les éléments caractéristiques de S. (0,75 point)
- (c) Soit le cercle (C) d'équation $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 4$.
  Déterminer l'équation de (C'), image de (C) par S. (0,5 point)
- (d) Tracer (C) et (C') dans le repère. (0,5 point)

EXERCICE 2 : (06 points)

Une usine fabrique des téléphones portables que l'on ne peut pas discerner en les touchant. Les téléphones produits seront vendus 45 000 FCFA l'unité. Le chef de l'usine remarque que 2 téléphones sur 100 sont défectueux. Il décide de mettre tous les téléphones fabriqués depuis 10 jours dans une caisse et de vérifier leur état. Il procède comme suit : il prend un téléphone de la caisse, vérifie son état et le remet dans la caisse. Il recommence ainsi de suite le processus.

1. Aide le chef de l'usine à déterminer le nombre n de téléphones à produire pour que la chance d'obtenir au moins un téléphone défectueux soit supérieure ou égale à 0,999. (03 points)
2. Sachant que la production de ces téléphones coûte en moyenne 11 970 000 FCFA à l'usine, on tirera-t-elle profit après la vente de tous les téléphones non défectueux ? (03 points)

Les résultats seront donnés à 10^{-3} près avec 3 chiffres significatifs.

PROBLÈME (08,5 points)

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par : $g(x) = 1 - x\ln x$.

1. Montrer que $\forall x \in [1;+\infty[$, $g'(x) < 0$. (0,25 point)
2. Dresser le tableau de variations de g. (0,5 point)
3. Montrer que g est une bijection de $[1;+\infty[$ sur un intervalle à préciser. (0,5 point)
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1;+\infty[$. (0,25 point)
5. Montrer que $1{,}7 < \alpha < 1{,}8$. (0,25 point)
6. Préciser le signe de g sur $[1;+\infty[$. (0,25 point)

PARTIE B

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} (-x+1)\ln(-x+1) & \text{si } x < 1 \\ e^{-x+1}\ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

(C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$ d'unité 2 cm.

1. a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$. (0,5 point)
   b) Rappeler les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x}$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^a}$ avec $a > 0$. (0,5 point)
   c) Déterminer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement, si possible, les résultats obtenus. (0,75 point)
   d) Étudier la branche infinie de la courbe (C_f) de f en $-\infty$. (0,25 point)

2. a) Montrer que f est continue en 1. (0,5 point)
   b) Étudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter géométriquement, si possible, les résultats obtenus. (0,5 point)

3. a) Calculer $f'(x)$ sur $]-\infty; 1[$ et étudier son signe. (0,5 point)
   b) Montrer que $\forall x \in]1;+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)e^{x+1}}{x}$ En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]1;+\infty[$. (0,25 point)

4. Dresser le tableau de variations de f. (0,5 point)
5. Tracer la courbe représentative (C_f) de f dans le plan muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (0,75 point)

PARTIE C

1. Soit h la restriction de f à l'intervalle $[\alpha;+\infty[$
   a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1}. (0,25 point)
   b) Préciser l'ensemble de définition de h^{-1} et tracer sa courbe dans le plan muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (0,5 point)

2. Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(g)$ de la partie $\mathcal{D}$ du plan comprise entre l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = -1$, l'axe des ordonnées et la courbe (C_f) de f. (1 point)