Correction Composition Du 2nd Semestre

PROBLEME (10pt)

PARTIE A

Soit h la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = 1 + e^{2x-4}$ et $K = \left[1; \frac{5}{4}\right]$.

1 a Calcul de $h'(x)$: $h(x) = 1 + e^{2x-4} \Rightarrow h'(x) = \left(1 + e^{2x-4}\right)' = 2e^{2x-4}$
Comme $e^{2x-4} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $h'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ Donc, la fonction h est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$. **(0,25pt + 0,25pt)**

b Montrons que $h(K) \subset K$:

Comme h est croissante et $K = \left[1; \frac{5}{4}\right]$, on a :

$$h(K) = \left[h(1); h\left(\frac{5}{4}\right)\right]$$

Calculons :

$$h(1) = 1 + e^{2(1)-4} = 1 + e^{-2} \approx 1 + 0{,}1353 = 1{,}1353$$

$$h\left(\frac{5}{4}\right) = 1 + e^{2\cdot\frac{5}{4}-4} = 1 + e^{-1{,}5} \approx 1 + 0{,}2231 = 1{,}2231$$

Donc :

$$h(K) = [1{,}1353; 1{,}2231] \subset \left[1; \frac{5}{4}\right]$$

Ainsi, $h(K) \subset K$. **(0,5pt)**

2 a Resoudre $h(x) = x$ revient à resoudre $h(x) - x = 0$
On définit la fonction $\phi(x) = h(x) - x = 1 + e^{2x-4} - x$.

Existance

ϕ est continue sur $K = \left[1; \frac{5}{4}\right]$.

Calculons :

$$\phi(1) = 1 + e^{-2} - 1 = e^{-2} > 0 \quad ; \quad \phi\left(\frac{5}{4}\right) = 1 + e^{-1.5} - \frac{5}{4} \approx 1.2231 - 1.25 < 0$$

Donc, $\phi(1) > 0$ et $\phi\left(\frac{5}{4}\right) < 0$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un $\lambda \in \left]1; \frac{5}{4}\right[$ tel que $\phi(\lambda) = 0$, soit $h(\lambda) = \lambda$.

Unicité

$$\phi'(x) = h'(x) - 1 = 2e^{2x-4} - 1$$

Supposons que $\phi'(x) < 0$

$$
\begin{aligned}
\phi'(x) < 0 &\iff 2e^{2x-4} - 1 < 0 \\
&\iff e^{2x-4} < \frac{1}{2} \\
&\iff 2x - 4 < \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\
&\iff 2x < 4 - \ln(2) \\
&\iff x < 2 - \frac{\ln(2)}{2} \\
&\iff x < 1,7
\end{aligned}
$$

Donc si $x \in]-\infty; 1,7[$ alors $\phi'(x) < 0$

Comme $K = \left[1; \frac{5}{4}\right] \subset]-\infty; 1,7[$ donc $\forall x \in K$, $\phi'(x) < 0$

Donc $\phi'(x) < 0$ sur K, donc ϕ est strictement décroissante sur K.

Or, une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle admet **au plus une** racine. Comme on a déjà montré l'existence d'un λ, on en déduit que :

L'équation $h(x) = x$ admet une **unique solution** $\lambda \in K$.

(0,5pt)

b On a : $h'(x) = 2e^{2x-4}$

Encadrons $x \in K = \left[1; \frac{5}{4}\right]$:

$$
\begin{aligned}
x \in K &\implies 1 \leq x \leq \frac{5}{4} \\
&\implies 2 \leq 2x \leq \frac{5}{2} \\
&\implies -2 \leq 2x - 4 \leq -\frac{3}{2} \\
&\implies e^{-2} \leq e^{2x-4} \leq e^{-1.5} \\
&\implies 2e^{-2} \leq 2e^{2x-4} \leq 2e^{-1.5} \\
&\implies 0 \leq 2e^{-2} \leq 2e^{2x-4} \leq 2e^{-1.5} \leq \frac{1}{2} \\
&\implies 0 \leq 2e^{2x-4} \leq \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Donc : $\forall x \in K, \quad 0 < h'(x) < \frac{1}{2}$ **(0,25pt)**

c Soit $x \in K$, et $\lambda \in K$ l'unique solution de $h(\lambda) = \lambda$.

D'après l'inégalité des accroissements finis (ou le théorème de la moyenne) appliquée à h sur K, il existe $c \in [x; \lambda] \subset K$ tel que :

$$h(x) - h(\lambda) = h(x) - \lambda = h'(c)(x - \lambda)$$

Donc :

$$|h(x) - \lambda| = |h'(c)| \times |x - \lambda| \leq \frac{1}{2}|x - \lambda|$$

(0,25pt)

3 a Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ W_n \in K$.

Initialisation :
On a $W_0 = 1 \in K = \left[1; \frac{5}{4}\right]$. L'assertion est vraie au rang $n = 0$.
Hérédité :
Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on ait $W_n \in K$.
Alors par définition :

$$W_{n+1} = h(W_n)$$

Or à la question 1.b), on a démontré que $h(K) \subset K$.
Donc comme $W_n \in K$, on a $W_{n+1} \in h(K) \subset K$.

Conclusion :
Par le principe de récurrence, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n \in K$$

(0,5pt)

b On veut montrer que :

$$|W_{n+1} - \lambda| \leq \frac{1}{2}|W_n - \lambda| \quad \text{et} \quad |W_n - \lambda| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Inégalité de récurrence :
On sait que $W_{n+1} = h(W_n)$ et que λ est l'unique solution de $h(\lambda) = \lambda$.
D'après la question 2.c), on a pour tout $x \in K$:

$$|h(x) - \lambda| \leq \frac{1}{2}|x - \lambda|$$

Or, à la question 3.a), on a montré que $\forall n, \ W_n \in K$. Donc :

$$|W_{n+1} - \lambda| = |h(W_n) - \lambda| \leq \frac{1}{2}|W_n - \lambda|$$

2) Majoration par $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ par récurrence :

On a $W_{n+1} = h(W_n)$ et $h(\lambda) = \lambda$.
D'après la question 2.c), pour tout $x \in K$, on a :

$$|h(x) - \lambda| \leq \frac{1}{2}|x - \lambda|$$

Or, à la question 3.a), on a montré que $W_n \in K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc on peut appliquer cette inégalité à chaque itération :

$$\begin{aligned}
|W_1 - \lambda| &\leq \frac{1}{2}|W_0 - \lambda| \\
|W_2 - \lambda| &\leq \frac{1}{2}|W_1 - \lambda| \\
|W_3 - \lambda| &\leq \frac{1}{2}|W_2 - \lambda| \\
&\vdots \\
|W_k - \lambda| &\leq \frac{1}{2}|W_{k-1} - \lambda|
\end{aligned}$$

En multipliant ces inégalités **membre à membre**, on obtient :

$$|W_k - \lambda| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k |W_0 - \lambda|$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |W_k - \lambda| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

(0,5pt + 0,25pt)

c D'après la question précédente, on a :

$$|W_n - \lambda| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Or $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ quand $n \to +\infty$, donc :

$$|W_n - \lambda| \to 0 \quad \text{ce qui équivaut à} \quad W_n \to \lambda \quad \text{quand } n \to +\infty$$

Ainsi, la suite (W_n) **converge vers le réel λ**, qui est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$ dans l'intervalle K. **(0,25pt)**

PARTIE B

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) & \text{si } x \in [0; +\infty[\\ x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} & \text{si } x \in]-\infty; 0[\end{cases}$$

1 Déterminons le domaine de définition D_f de f.

Sur $[0; +\infty[$: on considère l'expression

$$f(x) = \ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)$$

Cette expression est définie si :

- $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$ (toujours vrai car $x \geq 0$)
- $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| > 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

Donc sur $[0; +\infty[$, la fonction est définie sauf en $x = 1$.

Sur $]-\infty; 0[$: on considère

$$f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

Cette expression est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, car le dénominateur $e^x + 1 > 0$ pour tout x.

Donc la fonction f est définie sur :

$$D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$

(0,5pt)

2 Étudions la continuité de f en 0.

La fonction f est définie par morceaux :

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\right) & \text{si } x \in [0; +\infty[\\ x - \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} & \text{si } x \in]-\infty; 0[\end{cases}$$

A-t-on $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$?

Limite à gauche (vers 0^-) :

Pour $x < 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \\ &= 0 - \frac{1-1}{1+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{0}^-} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}}$$

Limite à droite (vers 0^+) :

Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) \\ &= \ln\left(\left|\frac{-1}{1}\right|\right) \\ &= \ln(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{0}^+} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}}$$

Conclusion :

La limite de $f(x)$ en 0 existe et vaut 0.

De plus, $f(0) = \ln\left(\left|\dfrac{0-1}{0+1}\right|\right) = \ln(1) = 0$

$$\boxed{\textbf{Donc} : \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{0}^-} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{0}^+} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{0}) \Rightarrow \textbf{f est continue en 0}}$$

3 a Soit $x \in]0; 1[$.

On a : $x < 1$, donc $x - 1 < 0$, donc : $|x-1| = -(x-1) = 1 - x$

De plus, dans ce cas $x > 0$, donc $f(x) = \ln\left(\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\right)$.

On remplace $|x-1|$ par $1-x$, et on obtient : $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{x+1}\right)$

Or, on sait que : $\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$

Donc : $f(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x) \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\ln(1-x)}{x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ **(0,5pt)** b Étudions la dérivabilité de f en 0.

On cherche la limite du taux d'accroissement : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ avec $f(0)=0$ (voir question 2)

À gauche ($x\to 0^-$) :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^-}\frac{x-\dfrac{e^x-1}{e^x+1}}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^-} 1-\frac{e^x-1}{x}\times\frac{1}{e^x+1}\\ &= 1-1\times\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{\mathbf{x}\to \mathbf{0}^-}\frac{\mathbf{f(x)-f(0)}}{\mathbf{x-0}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}$$

À droite ($x\to 0^+$) :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1-x)}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x}\\ &= -1-1\\ &= -2\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{\mathbf{x}\to \mathbf{0}^+}\frac{\mathbf{f(x)-f(0)}}{\mathbf{x-0}}=\mathbf{-2}}$$

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{\mathbf{x}\to \mathbf{0}^+}\frac{\mathbf{f(x)-f(0)}}{\mathbf{x-0}}=\mathbf{-2}\text{ et }\lim_{\mathbf{x}\to \mathbf{0}^-}\frac{\mathbf{f(x)-f(0)}}{\mathbf{x-0}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}$$

Donc la fonction f **n'est pas dérivable** en 0. **(0,5pt)**

c Les tangentes en 0:

À gauche de 0 :

La pente de la demi-tangente est $\frac{1}{2}$, donc l'équation de la tangente gauche est :

$$y=\frac{1}{2}x$$

À droite de 0 :

La pente de la demi-tangente est -2, donc l'équation de la tangente droite est :

$$y=-2x$$

$$\boxed{y=\frac{1}{2}x\quad\text{et}\quad y=-2x\qquad\textbf{(0,5pt)}}$$

4 Montrons que $\forall x \in]-\infty;0[$, $f(x) = x - \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = x + 1 - \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$

Démonstration :

Partons du membre de droite :

$$\begin{aligned}
x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1} &= \frac{(x+1)(e^x+1) - 2e^x}{e^x + 1} \\
&= \frac{xe^x + x + e^x + 1 - 2e^x}{e^x + 1} \\
&= \frac{xe^x + x - e^x + 1}{e^x + 1} \\
&= \frac{x(e^x + 1)}{e^x + 1} + \frac{-e^x + 1}{e^x + 1} \\
&= x + \frac{-e^x + 1}{e^x + 1} \\
&= x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \quad \textbf{CQFD}
\end{aligned}$$

(0,25pt)

5 Calculons les limites de f aux bornes des intervalles de son domaine de définition. **(0,5pt)**

À gauche de 1 : $x \to 1^-$

Sur $[0;1[$, on a : $f(x) = \ln\left(\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\right) = \ln\left(\dfrac{1-x}{x+1}\right)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1^-} \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right) \\
&= \ln(0^+) \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty}$$

À droite de 1 : $x \to 1^+$

Sur $]1;+\infty[$, même expression : $f(x) = \ln\left(\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\right)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1^+} f(x) &= \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \\
&= \ln(0^+) \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty}$$

À gauche de 0 : $x \to -\infty$

Sur $]-\infty;0[$, on a $f(x) = x - \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \\
&= -\infty - \frac{-1}{1} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$

À droite de 0 : $x \to +\infty$

Sur $]1;+\infty[$, $f(x) = \ln\left(\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\right)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)\\ &= \ln(1)\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

6 En déduire les équations des asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_f$ de f. **(0,25pt)**

Asymptote verticale :

D'après la question précédente, on a :

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$$

Donc la droite $x = 1$ est une **asymptote verticale** à la courbe $\mathscr{C}_f$.

Asymptote horizontale :

On a également :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Donc la droite $y = 0$ est une **asymptote horizontale** à droite de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Il y a une éventuelle branche parabolique Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - \frac{e^x-1}{e^x+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{e^x-1}{(e^x+1)x} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} - x = \lim_{x\to-\infty} x - \frac{e^x-1}{e^x+1} - x = \lim_{x\to-\infty} -\frac{e^x-1}{e^x+1} = 1$$

$y = x + 1$ est AO en $-\infty$

$$\boxed{\text{Asymptotes de } \mathscr{C}_f : \quad x = 1 \quad \text{et} \quad y = 0 \quad \text{et} \quad y = x + 1 \text{ est AO en } -\infty}$$

7 Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$. **(0,5pt)**

Sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$:

Pour $x > 0$, on a :

$$f(x) = \ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \quad \text{car } \frac{x-1}{x+1} > 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \implies f'(x) = \frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

Sur $]-\infty;0[$:

Pour $x < 0$, on a :

$$f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \text{ou encore} f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2e^x(e^x + 1) - (e^x)(2e^x)}{(e^x + 1)^2} = 1 - \frac{2e^x(e^x + 1 - e^x)}{(e^x + 1)^2} = 1 - \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

Donc :

$$f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x+1)(x-1)} & \text{si } x \in]0;1[\cup]1;+\infty[\\ \\ 1 - \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2} & \text{si } x \in]-\infty;0[\end{cases}$$

8 Étudier les variations de f. **(0,5pt)**

On rappelle que le domaine de définition de f est :

$$D_f =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$$

Sur $]-\infty;0[$:

On a montré précédemment :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{(e^x+1)^2 - 2e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 2e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{e^{2x} + 1}{(e^x+1)^2} > 0 \end{aligned}$$

$$f'(x) > 0 \text{ sur }]-\infty;0[\Rightarrow f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty;0[$$

Sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$:

On a :

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

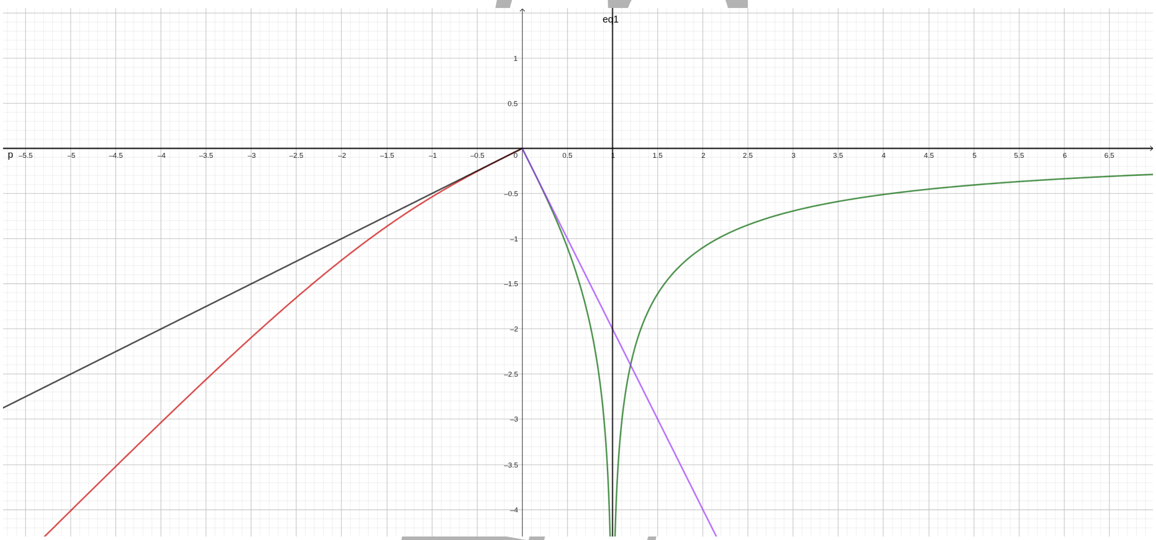
Le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $(x+1)(x-1)$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x+1$			0		0	$+$		$+$	
$x-1$						$-$	0	$+$	
$(x+1)(x-1)$						$-$	0	$+$	

- Sur $]0;1[$, on a $(x+1)(x-1) < 0$ donc $f'(x) < 0$: f est décroissante sur $]0;1[$

- Sur $]1;+\infty[$, $(x+1)(x-1) > 0$ donc $f'(x) > 0$: f est croissante sur $]1;+\infty[$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0



Clique ici pour voir la figure sur géogébra

PARTIE C

Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $I =]1;+\infty[$.

1. Montrons que g réalise une bijection de I vers un intervalle J.

   On a vu que sur $]1;+\infty[$, la fonction f est définie et strictement croissante.
   Or une fonction continue et strictement monotone est bijective de son domaine d'étude sur son image.

   $$\text{Donc, } g : I \to J \text{ est une bijection.}$$

   $$J =]-\infty;0[$$

   (0,5pt)

2. Soit $y \in J =]-\infty;0[$. On cherche l'expression de $g^{-1}(y)$.

   Par définition :
   $$y = g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \quad \text{avec } x \in]1;+\infty[$$

   Posons $y = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$. Exponentions :
   $$e^y = \frac{x-1}{x+1}$$

On résout cette équation pour x :

$$e^y(x+1) = x-1 \quad \Rightarrow \quad e^y x + e^y = x - 1$$

$$e^y x - x = -1 - e^y \quad \Rightarrow \quad x(e^y - 1) = -1 - e^y$$

$$x = \frac{-1-e^y}{e^y-1} = \frac{-(1+e^y)}{e^y-1} = 1 - \frac{2e^y}{e^y-1}$$

Donc :

$$g^{-1}(y) = 1 - \frac{2e^y}{e^y-1} \quad \text{soit} \quad g^{-1}(x) = 1 - \frac{2e^x}{e^x-1}$$

(0,25pt)

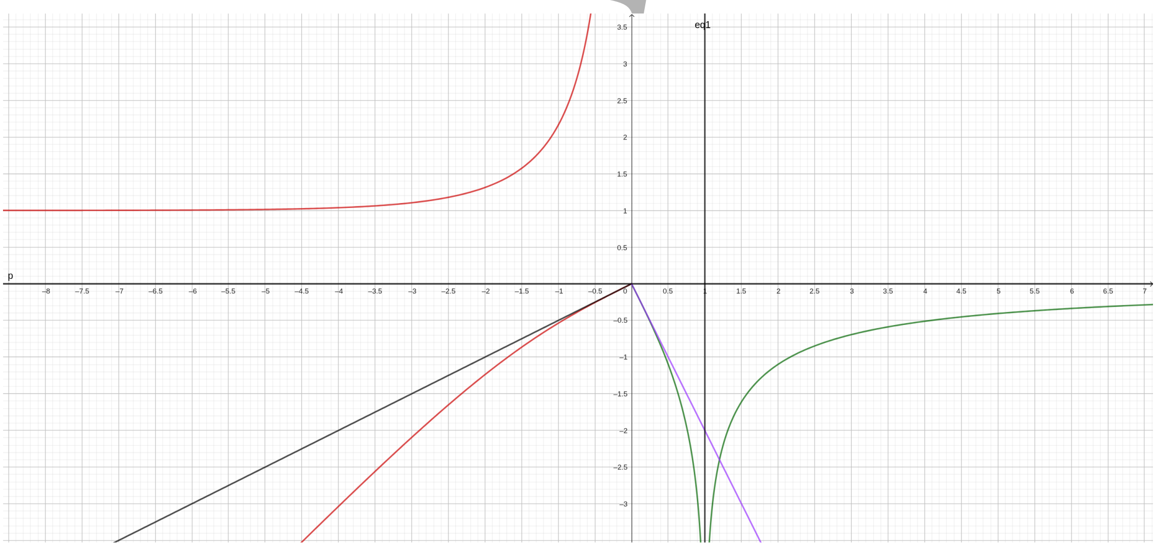
3 Pour tracer la courbe $\mathcal{C}_{g^{-1}}$, on peut exploiter la symétrie par rapport à la droite $y = x$, puisque g^{-1} est la bijection réciproque de g.

On pourra donc obtenir $\mathcal{C}_{g^{-1}}$ en prenant les points symétriques de ceux de $\mathcal{C}_g$ par rapport à la droite $y = x$.

Elle est définie sur $J =]-\infty; 0[$ et a pour équation :

$$\mathcal{C}_{g^{-1}} : \quad y = g^{-1}(x) = 1 - \frac{2e^x}{e^x-1}$$

(0,5pt)



Clique ici pour voir la figure sur géogébra

Exercice 2 — 06 points

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique $1\,\text{cm}$, on considère les points A_0, A_1, A_2 d'affixe respective $z_0 = 5 - 4i$, $z_1 = -1 - 4i$, $z_2 = -4 - i$.

Soit f la fonction qui, à tout point $M(z)$, associe le point $M'(z')$, tel que :

$$z' = \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2}$$

1 a Trouvons l'affixe b du point B invariant par f. **(0,5pt)**

Soit $b \in \mathbb{C}$ tel que $f(b) = b$.
On résout donc :

$$\begin{aligned}
b = \frac{1-i}{2}b + \frac{-3+i}{2} &\implies b - \frac{1-i}{2}b = \frac{-3+i}{2} \\
&\implies b\left(1 - \frac{1-i}{2}\right) = \frac{-3+i}{2} \\
&\implies b\left(\frac{2-(1-i)}{2}\right) = \frac{1+i}{2} \\
&\implies \frac{1+i}{2}b = \frac{-3+i}{2} \\
&\implies b = \frac{-3+i}{1+i} \\
&\implies b = \frac{(-3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\
&\implies b = \frac{-3(1-i)+i(1-i)}{1^2+1^2} \\
&\implies b = \frac{-3+3i+i-i^2}{2} \\
&\implies b = \frac{-3+4i+1}{2} \\
&\implies b = \frac{-2+4i}{2} \\
&\implies b = -1+2i
\end{aligned}$$

$$\boxed{b = -1+2i}$$

b Établir la relation $b - z' = i(z - z')$ **(0,5pt)**

On a: $z' = \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2}$, et $b = -1+2i$

Calculons $b - z'$:

$$\begin{aligned}
b - z' &= (-1+2i) - \left[\frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2}\right] \\
&= -1+2i - \frac{1-i}{2}z - \frac{-3+i}{2} \\
&= -1+2i + \frac{3-i}{2} - \frac{1-i}{2}z \\
&= \frac{1}{2} + \frac{3i}{2} - \frac{1-i}{2}z \\
&= \frac{1+3i}{2} - \frac{1-i}{2}z
\end{aligned}$$

Calculons maintenant $i(z - z')$:

$$
\begin{aligned}
i(z-z') &= i\left[z-\left(\frac{1-i}{2}z+\frac{-3+i}{2}\right)\right]\\
&= i\left[z-\frac{1-i}{2}z-\frac{-3+i}{2}\right]\\
&= i\left[\left(1-\frac{1-i}{2}\right)z+\frac{3-i}{2}\right]\\
&= i\left[\frac{1+i}{2}z+\frac{3-i}{2}\right]\\
&= i\cdot\frac{1+i}{2}z+i\cdot\frac{3-i}{2}\\
&= \frac{i(1+i)}{2}z+\frac{i(3-i)}{2}\\
&= \frac{-1+i}{2}z+\frac{1+3i}{2}\\
&= \frac{1+3i}{2}-\frac{1-i}{2}z
\end{aligned}
$$

Donc : $\boxed{b-z'=i(z-z')}$

Autre raisonnment concis et astucieux

$$
\begin{aligned}
b-z' &= (-1+2i)-\left[\frac{1-i}{2}z+\frac{-3+i}{2}\right]\\
&= i\left[i+2-\frac{-i-1}{2}z-\frac{3i+1}{2}\right]\\
&= i\left[\left(i+2-\frac{3i+1}{2}\right)-\frac{-i-1}{2}z\right]\\
&= i\left[\frac{2i+4-3i-1}{2}+\frac{1+i}{2}z\right]\\
&= i\left[\frac{-i+3}{2}+\frac{1+i}{2}z\right]\\
&= i\left(\frac{1+i}{2}z+\frac{3-i}{2}\right)
\end{aligned}
$$

or $\underline{z-z'=z-\left[\frac{1-i}{2}z+\frac{-3+i}{2}\right]=z+\frac{-1+i}{2}z+\frac{3-i}{2}=\frac{1+i}{2}z+\frac{3-i}{2}}$

$= i(z-z')$

Interprétation géométrique :

$$b-z'=i(z-z')\implies \overrightarrow{BM'}=i.\overrightarrow{MM'}$$

Multiplier un vecteur complexe par i, c'est effectuer une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens direct.

Donc le triangle BMM' est **rectangle en M'** (et orienté dans le sens direct). **(0,5pt)**

Le triangle BMM' est rectangle en M'

2 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, le point A_{n+1} est défini par la relation $A_{n+1}=f(A_n)$ et on pose $u_n=A_nA_{n+1}$.

a Calculer les affixes des points A_3, A_4, A_5 et A_6. **(0,25pt + 0,25pt + 0,25pt + 0,25pt)**

On a : $f(z)=\frac{1-i}{2}z+\frac{-3+i}{2}$ donc $f(A_n)=\frac{1-i}{2}A_n+\frac{-3+i}{2}$

$z_{n+1} = \frac{1-i}{2}z_n + \frac{-3+i}{2}$

D'où $A_{n+1} = \frac{1-i}{2}A_n + \frac{-3+i}{2}$

On connaît : $z_0 = 5-4i, \quad z_1 = -1-4i, \quad z_2 = -4-i$

Calculs successifs :

$$\begin{aligned}
z_3 = f(z_2) &= \frac{1-i}{2}(-4-i) + \frac{-3+i}{2} \\
&= \frac{(1-i)(-4-i)}{2} + \frac{-3+i}{2} \\
&= \frac{-4+4i-i+i^2}{2} + \frac{-3+i}{2} \\
&= \frac{-5+3i}{2} + \frac{-3+i}{2} \\
&= \frac{-8+4i}{2} \\
&= -4+2i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_4 = f(z_3) &= \frac{1-i}{2}(-4+2i) + \frac{-3+i}{2} \\
&= \frac{(1-i)(-4+2i)}{2} + \frac{-3+i}{2} \\
&= \frac{-4+4i+2i-2i^2}{2} + \frac{-3+i}{2} \\
&= \frac{-4+6i+2}{2} + \frac{-3+i}{2} \\
&= \frac{-2+6i}{2} + \frac{-3+i}{2} \\
&= \frac{-5+7i}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_5 = f(z_4) &= \frac{1-i}{2}\left(\frac{-5+7i}{2}\right) + \frac{-3+i}{2} \\
&= \frac{(1-i)(-5+7i)}{4} + \frac{-3+i}{2} \\
&= \frac{-5+7i+5i-7i^2}{4} + \frac{-3+i}{2} \\
&= \frac{-5+12i+7}{4} + \frac{-3+i}{2} \\
&= \frac{2+12i}{4} + \frac{-6+2i}{4} \\
&= \frac{-4+14i}{4} \\
&= \frac{-2+7i}{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z_6 = f(z_5) &= \frac{1-i}{2}\left(\frac{-2+7i}{2}\right) + \frac{-3+i}{2} \\
&= \frac{(1-i)(-2+7i)}{4} + \frac{-3+i}{2} \\
&= \frac{-2+7i+2i-7i^2}{4} + \frac{-3+i}{2} \\
&= \frac{-2+9i+7}{4} + \frac{-3+i}{2} \quad (\text{car } i^2 = -1) \\
&= \frac{5+9i}{4} + \frac{-6+2i}{4} \\
&= \frac{-1+11i}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\begin{aligned}
z_3 &= -4+2i \\
z_4 &= \frac{-5+7i}{2} \\
z_5 &= \frac{-2+7i}{2} \\
z_6 &= \frac{-1+11i}{4}
\end{aligned}}
$$

b Representation des points

diopLeParresseuxComplexe.png

Voir les points sur Géo

c **Démontrons que la suite (u_n) n'est pas géométrique.** **(0,5pt)**

On rappelle que $u_n = A_nA_{n+1} = |z_{n+1} - z_n|$. Calculons les premiers termes :

On a : $z_{n+1} = \dfrac{1-i}{2}z_n + \dfrac{-3+i}{2}$ donc $z_{n+2} = \dfrac{1-i}{2}z_{n+1} + \dfrac{-3+i}{2}$

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{|z_{n+2}-z_{n+1}|}{|z_{n+1}-z_n|} \\
&= \frac{|z_{n+2}-z_{n+1}|}{|z_{n+1}-z_n|} \\
&= \frac{\left|\frac{1-i}{2}z_{n+1}+\frac{-3+i}{2}-\left(\frac{1-i}{2}z_n+\frac{-3+i}{2}\right)\right|}{|z_{n+1}-z_n|} \\
&= \frac{\left|\frac{1-i}{2}z_{n+1}+\frac{-3+i}{2}-\frac{1-i}{2}z_n-\frac{-3+i}{2}\right|}{|z_{n+1}-z_n|} \\
&= \frac{\left|\frac{1-i}{2}z_{n+1}-\frac{1-i}{2}z_n\right|}{|z_{n+1}-z_n|} \\
&= \left|\frac{1-i}{2}\right|\frac{|z_{n+1}-z_n|}{|z_{n+1}-z_n|} \\
&= \left|\frac{1-i}{2}\right| \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &= |z_1-z_0| \\
&= |-1-4i-(5-4i)| \\
&= |-1-5| \\
&= |-6| = 6
\end{aligned}$$

$\boxed{u_0 = 6}$

La suite (u_n) est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3 Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

a Exprimons v_n en fonction de n. **(0,5pt)**

$$v_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

$$
\begin{aligned}
v_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\
&= u_p \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-p+1}}{1-q} \\
&= u_0 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \\
&= 6 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \\
&= 6 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} \\
&= 6 \times \frac{2}{2-\sqrt{2}} \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right) \\
&= \frac{12}{2-\sqrt{2}} \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right) \\
&= \frac{12(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right) \\
&= \frac{12(2+\sqrt{2})}{4-2} \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right) \\
&= \frac{12(2+\sqrt{2})}{2} \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right) \\
&= 6(2+\sqrt{2}) \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{v_n = 6(2+\sqrt{2}) \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right)}$$

b La Convergente de (v_n) **(0,5pt)**

On a : $v_n = 6(2+\sqrt{2}) \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right)$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} v_n &= \lim_{x\to+\infty} 6(2+\sqrt{2})\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty} 6(2+\sqrt{2})\,(1-0)\\
&= \lim_{x\to+\infty} 6(2+\sqrt{2})
\end{aligned}
$$

$$\boxed{(v_n) \text{ est convergente et } \lim_{n\to+\infty} v_n = 6(2+\sqrt{2})}$$

4 a Calculons en fonction de n le rayon r_n du cercle circonscrit au triangle BA_nA_{n+1}. **(0,5pt)**

On a : $\begin{cases} z' = \dfrac{1-i}{2}z + \dfrac{-3+i}{2} \\ A_{n+1} = \dfrac{1-i}{2}A_n + \dfrac{-3+i}{2} \\ (b-z') = i(z-z') \end{cases}$

En considérant la question **1.b** où BMM'est un triangle rectangle en M'.

Par analogie

$(b-z') = i(z-z') \implies \overrightarrow{BA_{n+1}} = i\cdot\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ donc BA_nA_{n+1} est un trinagle rectangle en A_{n+1}

Or, dans un triangle rectangle, le **rayon du cercle circonscrit** est égal à la moitié de l'hypoténuse.

Ici, l'hypoténuse est le segment $[BA_n]$, donc : $r_n = \dfrac{1}{2}\times|BA_n|$

Calculons $|BA_n|$. On sait que A_n est défini par récurrence :

$$z_n = A_n \quad \text{et} \quad z_B = b = -1+2i \quad \Rightarrow \quad |BA_n| = |z_n - b|$$