

◇◇◇ Lycée de Dindéfelo ◇◇◇			A.S. : 2024/2025
Matière: Mathématiques	Niveau : TS2	Date: 21/01/2025	Durée : 4 heures
<p align="center">Correction Devoir n° 2 Du 1^{er} Semestre</p>			

Exercice 1 : 4 points [Déjà corrigé en classe]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3}, \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*), u_{n+1} = \frac{2u_n}{1 + (n+2)u_n}. \end{cases}$$

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $v_n = \frac{1}{u_n} - n$.

- ① Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique. 1,5 pt
- ② a Déterminer v_n et u_n en fonction de n . 1 pt
- b Calculer en fonction de n la somme : $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$. 1,5 pt

Correction Exercice 1 : 4 points [Déjà corrigé en classe]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3}, \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*), u_{n+1} = \frac{2u_n}{1 + (n+2)u_n}. \end{cases}$$

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $v_n = \frac{1}{u_n} - n$.

- ① Montrons que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique. 1,5 pt
- (v_n) est une suite géométrique ssi $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$
- In fact :

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{\frac{1}{u_{n+1}} - (n+1)}{\frac{1}{u_n} - n} \\
&= \frac{\frac{1}{\frac{2u_n}{1+(n+2)u_n}} - (n+1)}{\frac{1-nu_n}{u_n}} \\
&= \frac{\frac{1+(n+2)u_n}{2u_n} - (n+1)}{\frac{1-nu_n}{u_n}} \\
&= \frac{\frac{1+(n+2)u_n - (n+1)2u_n}{2u_n}}{\frac{1-nu_n}{u_n}} \\
&= \frac{\frac{1+nu_n+2u_n-n2u_n-2u_n}{2u_n}}{\frac{1-nu_n}{u_n}} \\
&= \frac{1+nu_n+2u_n-n2u_n-2u_n}{2(1-nu_n)} \\
&= \frac{1-nu_n}{2(1-nu_n)} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Donc v_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme: $v_1 = \frac{1}{u_1} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{3}} - 1 = 3 - 1 = 2$

2 a Déterminons v_n et u_n en fonction de n . 1 pt

(v_n) est une suite géométrique donc $v_n = v_p \times q^{n-p}$

Ainsi: $v_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$v_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

On a $v_n = \frac{1}{u_n} - n$ donc $u_n = \frac{1}{v_n + n}$

Ainsi: $u_n = \frac{1}{2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + n}$

b Calculer en fonction de n la somme : $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$. 1,5 pt

$$\begin{aligned}
S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n &= v_1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \\
&= 4 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]
\end{aligned}$$

$$S_n = 4 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

Exercice 2 (BAC 2022) : 4 points [Déjà corrigé en classe par moi-même]

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit le nombre complexe a défini par

$$a = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

- 1 Montrer que $a^2 = -2\sqrt{3} - 2i$, puis en déduire le module de a . 0,5 + 0,5 pt
- 2 Écrire a^2 sous forme trigonométrique puis vérifier qu'une des mesures de l'argument de a est $\frac{19\pi}{12}$. 0,5 + 0,5 pt
- 3 En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, puis de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. 1 pt
- 4 Représenter sur le même graphique les points images de a , $-a$ et a^2 . 1 pt

Correction Exercice 2 (BAC 2022) : 4 points [Déjà corrigé en classe par moi-même]

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit le nombre complexe a défini par

$$a = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

- 1 Montrons que $a^2 = -2\sqrt{3} - 2i$. 0,5

On a :

$$\begin{aligned} a^2 &= \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}} \right)^2 \\ &= \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} \right)^2 - 2i\sqrt{2 - \sqrt{3}}\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \left(i\sqrt{2 + \sqrt{3}} \right)^2 \\ &= (2 - \sqrt{3}) - 2i\sqrt{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} - (2 + \sqrt{3}) \\ &= (2 - \sqrt{3}) - (2 + \sqrt{3}) - 2i\sqrt{2^2 - \sqrt{3}^2} \\ &= 2 - \sqrt{3} - 2 - \sqrt{3} - 2i\sqrt{4 - 3} \\ &= -\sqrt{3} - \sqrt{3} - 2i\sqrt{1} \\ &= -2\sqrt{3} - 2i \end{aligned}$$

Donc $a^2 = -2\sqrt{3} - 2i$ cqfd

Déduisons-en le module de a

0,5

On a $a^2 = -2\sqrt{3} - 2i$ donc $|a^2| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} \implies |a^2| = 4$

$$|a^2| = 4 \implies |a^2| = |a|^2 = 2^2 \implies |a| = 2$$

Donc $|a| = 2$

- 2 Écrivons a^2 sous forme trigonométrique 0,5

$$a^2 = -2\sqrt{3} - 2i$$

$$= 4 \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right)$$

$$= 4 \left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \right]$$

Donc $a^2 = 4 \left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \right]$

Vérifions qu'une des mesures de l'argument de a est $\frac{19\pi}{12}$.

0,5

On a :

$$\arg(a^2) = \frac{7\pi}{6}[2\pi]$$

$$2\arg(a) = \frac{7\pi}{6}[2\pi]$$

$$\arg(a) = \frac{7\pi}{12}[\pi]$$

$$\arg(a) = \frac{7\pi}{12}[\pi] \Leftrightarrow \arg(a) = \frac{7\pi}{12} + k\pi$$

$$\text{Si } k = 1 \text{ on a : } \arg(a) = \frac{19\pi}{12}$$

3 Déduison-en les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

$$\text{On a : } \arg(a) = \frac{19\pi}{12} \text{ donc } \begin{cases} \cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\ \sin\left(\frac{19\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Or } \frac{19\pi}{12} = \frac{7\pi + 12\pi}{12} = \frac{7\pi}{12} + \pi$$

$$\text{donc } \begin{cases} \cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\ \sin\left(\frac{19\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12} + \pi\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{12} + \pi\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\ -\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \end{cases}$$

0,5 pt

$$\boxed{\begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \end{cases}}$$

Puis les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

0,5 pt

$$\text{Or } \frac{7\pi}{12} = \frac{6\pi + \pi}{12} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{donc } \begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\ \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\ \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \end{cases}$$

0,5 pt

- ④ Représentons sur le même graphique les points images de a , $-a$ et a^2 .

1 pt

NB ici $z_1 = -a$ et $b = a^2$

Exercice 3 : 2,25 points [*Exercice 1 du devoir N1 déjà corrigé par moi-même*]

- ① Calculer les limites suivantes :

(0,5pt × 2+0,25pt)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - 1}{\sin 2x} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^3 + x^2} ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7} - \sqrt{10-x}}.$$

- ② Donner les primitives des fonctions f et g respectivement sur \mathbb{R} et $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

(2 × 0,5 pt)

$$f(x) = (3x-1)(3x^2-2x+3)^3 ; \quad g(x) = \frac{1-x^2}{(x^3-3x+2)^3}.$$

Correction 3 : 2,25 pts [*Exercice 1 du devoir N1 déjà corrigé par moi-même*]

- ① Calculons les limites suivantes :

(0,5pt × 2+0,25pt)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - 1}{\sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x (\sqrt{1+\sin x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{2 \sin 2x}{2x}} \times \frac{1}{(\sqrt{1+\sin x} + 1)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - 1}{\sin 2x} = \frac{1}{4}} \quad \text{0,5 points}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^3 + x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \times \frac{1}{x+1} \\ &= -\frac{1}{2} \times 1 \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^3 + x^2} = -\frac{1}{2}} \quad \text{0,5 points}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7} - \sqrt{10-x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x})(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x})(\sqrt{2x+7} + \sqrt{10-x})}{(\sqrt{2x+7} - \sqrt{10-x})(\sqrt{2x+7} + \sqrt{10-x})(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[x+3 - (5-x)](\sqrt{2x+7} + \sqrt{10-x})}{[2x+7 - (10-x)](\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(-1+x)(\sqrt{2x+7} + \sqrt{10-x})}{3(x-1)(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(\sqrt{2x+7} + \sqrt{10-x})}{3(x-1)(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(\sqrt{2x+7} + \sqrt{10-x})}{3(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x})} \\
&= \frac{2}{3} \times \frac{6}{4}
\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7} - \sqrt{10-x}} = 1 \quad \text{0,25 points}$$

- 2) Donnons les primitives des fonctions f et g respectivement sur \mathbb{R} et $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$. (2 × 0,5 pt)

$$f(x) = (3x - 1)(3x^2 - 2x + 3)^3$$

$$F(x) = \frac{1}{8}(3x^2 - 2x + 3)^4 + k$$

$$F(x) = \frac{1}{8}(3x^2 - 2x + 3)^4 + k \quad \text{0,25 points}$$

$$g(x) = \frac{1 - x^2}{(x^3 - 3x + 2)^3}.$$

$$G(x) = \frac{1}{3(x^3 - 3x + 2)} + k \quad \text{0,5 points}$$

Problème : 9,75 points [Exercice d'application déjà corrigé par moi-même]

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sqrt{1-x^2} & \text{si } x > 0 \\ -x + \sqrt{x^2 - 2x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- 1) Déterminer D_f , les limites aux bornes et préciser la branche infinie. (0,5pt × 3)
- 2) Étudier la dérivabilité de f en 0 et 1
interpréter géométriquement les résultats obtenus. (0,5pt × 3 + 0,5pt × 3)
- 3) Calculer $f'(x)$ là où f est définie, puis dresser le tableau de variation de f . (0,5pt × 2 + 0,5pt × 2 + 0,5pt)
- 4) Tracer la courbe de f . (0,75pt)
- 5) Soit h la restriction de f à l'intervalle $] -\infty; 0]$.

- a** Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité et le tableau de variation. (0,5pt)
- b** Sans utiliser l'expression de $h^{-1}(x)$, calculer $(h^{-1})'(2)$. (0,5pt)
- c** Déterminer explicitement h^{-1} . (0,5pt)
- d** Tracer la courbe de h^{-1} dans le même repère que celle de f . (0,5pt)

Problème : 9,75 pts [Exercice d'application déjà corrigé par moi-même]

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sqrt{1-x^2} & \text{si } x > 0 \\ -x + \sqrt{x^2 - 2x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- 1** Déterminer D_f , les limites aux bornes et préciser la branche infinie. (0,5pt × 3)

Posons $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x > 0, \\ f_2(x) & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$

• $f_1 \exists$ ssi $1 - x^2 \geq 0$ et $x > 0$.

Posons $1 - x^2 = 0$ et $x = 0$.

$1 - x^2 = 0$ et $x = 0 \implies x = -1$ ou $x = 1$ et $x = 0$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$1 - x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$
x		$-$	$-$	0	$+$	$+$

$Df_1 =]0; 1]$

• $f_2 \exists$ ssi $x^2 - 2x \geq 0$ et $x \leq 0$.

Posons $x^2 - 2x = 0$ et $x = 0$.

$x^2 - 2x = 0$ et $x = 0 \implies x = 0$ ou $x = 2$ et $x = 0$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$x^2 - x$	$+$	0	$-$	0
x	$-$	0	$+$	$+$

$Df_2 = [-\infty; 0]$

$Df = Df_1 \cup Df_2$

$Df =]0; 1] \cup [-\infty; 0]$

$Df = [-\infty; 1]$ (0,5pt)

Les limites aux bornes de Df

les bornes de Df sont : $-\infty$ et 1

En $-\infty$: $f(x) = f_2(x) = -x + \sqrt{x^2 - 2x}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + \sqrt{x^2 - 2x} = +\infty$ triviale !!!

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ (0,5pt)

En 1 : $f(x) = f_1(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x\sqrt{1-x^2} = 0$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

 (0,5pt)

Asymptote et branches infinies

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ cherchons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + \sqrt{x^2 - 2x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(-1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}} \right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}} \\ &= -2 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$

Cherchons $\left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 2x \right]$

$$\begin{aligned} \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 2x \right] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + \sqrt{x^2 - 2x} + 2x \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{x^2 - 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 2x)}{x - \sqrt{x^2 - 2x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x - \sqrt{x^2 - 2x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

D'où $y = -2x + 1$ est A.O à (Cf) en $+\infty$

2 La dérivabilité de f en 0 et en 1

En 0⁻ : $f(x) = f_2(x) = -x + \sqrt{x^2 - 2x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x + \sqrt{x^2 - 2x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2 - 2x} - x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2x - x^2}{x(\sqrt{x^2 - 2x} + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} \end{aligned}$$

Supposons que $\sqrt{x^2 - 2x} + x < 0$

$$\sqrt{x^2 - 2x} < -x \implies \begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ -x \geq 0 \\ x^2 - 2x < x^2 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ -x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

Posons $\begin{cases} x^2 - 2x = 0 \\ -x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0, x = 2 \\ x = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$x^2 - 2x$	$+$	0	$-$	$+$
$-x$	$+$	0	$-$	$-$
x	$-$	0	$+$	$+$

Donc $x \in \emptyset$

Donc il n'existe pas de x pour lequel $\sqrt{x^2 - 2x} + x$ est négatif.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \frac{-2}{0^+}$$

D'où $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$ (0,5pt)

En 0^+ : $f(x) = f_1(x) = 2x\sqrt{1 - x^2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x\sqrt{1 - x^2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{1 - x^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

D'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2$ (0,5pt)

En 1^- : $f(x) = f_1(x) = 2x\sqrt{1 - x^2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x\sqrt{1 - x^2}}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x(1 - x^2)}{(x - 1)\sqrt{1 - x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2x(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)\sqrt{1 - x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2x(x + 1)}{\sqrt{1 - x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-4}{0^+} \end{aligned}$$

D'où $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\infty$ (0,5pt)

Interprétation :

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$ donc f n'est pas dérivable en 0 mais C_f admet une demi-tangente à gauche de 0 au point $A(0, 0)$ orientée vers le haut.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2$ donc f est dérivable en 0^+ et C_f admet une demi-tangente à gauche de 0^+ d'équation $y = 2x$.

PROF