Correction de la composition Du 2nd Semestre

Correction Exercice 1 : 4 pts

1 Résolution algébrique du système : **2 pts**

$$\begin{cases} 2x + y = 3 & (1) \\ 3x + 2y = 6 & (2) \end{cases}$$

Méthode : substitution (ou addition)

De (1) : $y = 3 - 2x$

On remplace dans (2) :

$$\begin{aligned} 3x + 2(3 - 2x) &= 6 \\ 3x + 6 - 4x &= 6 \\ -x + 6 &= 6 \\ -x &= 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \end{aligned}$$

On remplace $x = 0$ dans (1) : $2 \cdot 0 + y = 3 \Rightarrow y = 3$

$$\mathbf{S} = \{(\mathbf{0}; \mathbf{3})\}$$

2 Résolution graphique du système : **2 pts**

Cramer

Résolution par la méthode de Cramer

On considère le système :

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$$

On note :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 9 = 3$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{0}{1} ; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{3}{1}$$

$$\mathbf{S} = \{(\mathbf{0}; \mathbf{3})\}$$

Compo2ndL.png

Figure 1: Représentation graphique du système

Clique ici pour voir la courbe sur géogébra

Correction Exercice 2 : 8 pts

1 **Discriminant, forme canonique et factorisée** **3 pts**

On considère le trinôme : $f(x) = -2x^2 + 7x - 5$

Calcul du discriminant :

$$a=-2,\quad b=7,\quad c=-5$$

$$\Delta = b^2-4ac = 7^2-4\times(-2)\times(-5)=49-40=9$$

Forme canonique :

$$\begin{aligned}
f(x) &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]\\
&= -2\left[\left(x-\frac{7}{2(-2)}\right)^2-\frac{9}{4(-2)^2}\right]\\
&= -2\left[\left(x-\frac{7}{-4}\right)^2-\frac{9}{16}\right]\\
&= -2\left[\left(x+\frac{7}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right]
\end{aligned}$$

$$\mathbf{f(x)=-2\left[\left(x+\frac{7}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right]}$$

Forme factorisée :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-7-3}{-4}=\frac{-10}{-4}=\frac{5}{2},\quad x_2=\frac{-7+3}{-4}=\frac{-4}{-4}=1$$

$$\mathbf{f(x)=-2(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)}$$

2 **Résolution de l'équation** $x^2-3x-10=0$ **1 pt**

$$\Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-10)=9+40=49 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=7$$

$$x_1=\frac{3-7}{2}=-2,\quad x_2=\frac{3+7}{2}=5$$

$$\mathbf{S=\{-2;5\}}$$

3 **Résolution de l'inéquation** $x^2-3x-10\le 0$ **2 pts**

On a déjà les racines : $x=-2$ et $x=5$

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$x^2-3x-10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathbf{S} = [\mathbf{-2}\,;\,\mathbf{5}]$

4 **Résolution du système** **2 pts**

$$\begin{cases} x + y = -5 \quad (1) \\ x \times y = 6 \quad (2) \end{cases}$$

Première Mèthode

Résolution du système

Résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = -5 \quad (1) \\ x \cdot y = 6 \quad (2) \end{cases}$$

Étape 1 : Exprimer une variable à partir de l'équation (1) :

$$y = -5 - x$$

Étape 2 : Remplacer dans (2) :

$$x(-5 - x) = 6 \quad \Rightarrow \quad -5x - x^2 = 6 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 5x + 6 = 0$$

Étape 3 : Résolution du trinôme :

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$$

$$x_1 = \frac{-5 - 1}{2} = -3 \quad ; \quad x_2 = \frac{-5 + 1}{2} = -2$$

Étape 4 : Calcul des valeurs de y :

- Si $x = -3$, alors $y = -5 - (-3) = -2$
- Si $x = -2$, alors $y = -5 - (-2) = -3$

Solution finale :

$$\boxed{(x, y) \in \{(-3, -2),\ (-2, -3)\}}$$

Deuxième Mèthode

$$\begin{cases} x + y = -5 \quad (1) \\ x \times y = 6 \quad (2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} S = -5 \quad (1) \\ P = 6 \quad (2) \end{cases}$$

Ce système est équivalente à : $X^2 - SX + P = 0$ donc $X^2 + 5X + 6 = 0$

$\mathbf{S} = \{(\mathbf{-3}, \mathbf{-2}),\ (\mathbf{-2}, \mathbf{-3})\}$

Correction Exercice 3 : 8 pts

PARTIE A : 5 pts

On considère les fonctions suivantes :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 \quad ; \quad g(x) = 5x + 10 \quad ; \quad h(x) = 3$$

1 Sens de variation **1,5 pt**

- $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ est une fonction affine de coefficient directeur ,$-\frac{1}{2} < 0$, négatif donc elle est **décroissante** sur $\mathbb{R}$.
- $g(x) = 5x + 10$ est une fonction affine de coefficient directeur ,$5 > 0$, positif, donc elle est **croissante** sur $\mathbb{R}$.
- $h(x) = 3$ est une fonction constante ,$a = 0$, donc elle est **ni croissante ni décroissante**.

2 Soit $k(x) = -3x + 2$

a Calcul de l'image de -1 et de 0 **1 pt**

$$k(-1) = -3 \times (-1) + 2 = 3 + 2 = 5$$
$$k(0) = -3 \times 0 + 2 = 0 + 2 = 2$$

$$\mathbf{k(-1) = 5 \quad ; \quad k(0) = 2}$$

b Détermination des antécédents de 7 et $\frac{1}{2}$ **1 pt**

Résolvons $-3x + 2 = 7$:

$$-3x = 7 - 2 = 5 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{5}{3}$$

Résolvons $-3x + 2 = \frac{1}{2}$:

$$-3x = \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{2} = -\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{k^{-1}(7) = -\frac{5}{3} \quad ; \quad k^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}}$$

c Représentation graphique de $k(x) = -3x + 2$ **1,5 pt**

Deux points suffisent pour tracer la droite :

- Pour $x = 0$, $k(0) = 2$ point $(0\,;\,2)$
- Pour $x = 1$, $k(1) = -3 + 2 = -1$ point $(1\,;\,-1)$

Figure 2: Représentation graphique de la droite

Clique ici pour voir la courbe sur géogébra

PARTIE B : 3 pts

1. Les droites (D) et (D') ont pour équations :

$$(D) : y = -7x + 8 \quad \text{et} \quad (D') : y = -7x + 2$$

Ce sont deux droites de la forme $y = ax + b$, avec $a = -7$ dans les deux cas.

Conclusion : Elles ont le même coefficient directeur $\Rightarrow$ elles sont **parallèles**.

$$\boxed{(D) \parallel (D')}$$

2. On cherche la valeur de m pour que la droite $(D_1) : y = mx + 2$ soit parallèle à $(D_2) : 4x - 2y + 3 = 0$

Réécrivons (D_2) sous la forme $y = ax + b$:

$$4x - 2y + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2y = -4x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x + \frac{3}{2}$$

Donc la pente de (D_2) est $a = 2$

Pour que $(D_1) \parallel (D_2)$, il faut $m = 2$

$$\boxed{\mathbf{m = 2}}$$