Nombre Complexe

Professeur : M. BA

Classe : Terminale S2

Durée : 10 minutes

Note : /5

Nom de l'élève : ______________________________

1. Pour tout nombre complexe $z \neq -1+2i$, on pose $Z = \frac{z-2+4i}{z+1-2i}$.
   Déterminons l'ensemble des points M du plan tels que :

   (a) $|Z| = 1$

$$
\begin{aligned}
|Z| = 1 &\Longrightarrow \left| \frac{z-2+4i}{z+1-2i} \right| = 1 \\
&\Longrightarrow \frac{|\, z-2+4i \,|}{|\, z+1-2i \,|} = 1 \\
&\Longrightarrow |\, z-2+4i \,| = |\, z+1-2i \,| \\
&\Longrightarrow |\, x+iy-2+4i \,| = |\, x+iy+1-2i \,| \\
&\Longrightarrow |\, x-2+i(y+4) \,| = |\, x+1+i(y-2) \,| \\
&\Longrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(4+y)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2} \\
&\Longrightarrow (x-2)^2+(4+y)^2 = (x+1)^2+(y-2)^2 \\
&\Longrightarrow (x^2-4x+4)+(16+8y+y^2) = (x^2+2x+1)+(y^2-4y+4) \\
&\Longrightarrow x^2-4x+4+16+8y+y^2 = x^2+2x+1+y^2-4y+4 \\
&\Longrightarrow x^2+y^2-4x+8y+20 = x^2+y^2+2x-4y+5 \\
&\Longrightarrow -4x+8y+20 = 2x-4y+5 \\
&\Longrightarrow -4x-2x+8y+4y = 5-20 \\
&\Longrightarrow -6x+12y = -15 \\
&\Longrightarrow 2x-4y = 5
\end{aligned}
$$

L'ensemble des points M tel que $|Z| = 1$ est la droite d'équation : $2x-4y=5$

Autre méthode

$Z = \frac{z-2+4i}{z+1-2i}$ en posant $z_M = x+iy$, $z_A = 2-4i$ et $z_B = -1+2i$

$Z = \frac{z_M - z_A}{z_M - z_B}$

$$
\begin{aligned}
|Z| = 1 &\Longrightarrow \left| \frac{z_M - z_A}{z_M - z_B} \right| = 1 \\
&\Longrightarrow \frac{MA}{MB} = 1 \\
&\Longrightarrow MA = MB
\end{aligned}
$$

L'ensemble des points M tel que $|Z| = 1$ est la Médiatrice du segment [AB]

$$\mathbf{E} = \left\{ \mathbf{M(x,y)} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}} \mid \mathbf{2x - 4y = 5} \right\}$$

(b) Z soit un réel.

$$Z = \frac{x^2+y^2-x+2y-10+i(6x+3y)}{(x+1)^2+(y-2)^2}$$

Pour que Z soit un réel, la partie imaginaire du numérateur doit être nulle, c'est-à-dire :

$$6x+3y=0$$

$$2x+y=0$$

L'ensemble des points M tel que Z soit un réel est la droite d'équation $2x+y=0$ privé du point $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

$$\boxed{\mathbf{E} = \left\{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}} \mid \mathbf{2x+y=0}, \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right\}}$$

2. Pour tout complexe $z \neq i$, on pose $U = \frac{z+i}{z-i}$.
Déterminons l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$$\begin{aligned}
U &= \frac{z+i}{z-i} \\
&= \frac{x+iy+i}{x+iy-i} \\
&= \frac{x+i(y+1)}{x+i(y-1)} \\
&= \frac{[x+i(y+1)]\,[x-i(y-1)]}{x^2+(y-1)^2} \\
&= \frac{x\,[x-i(y-1)]+i(y+1)\,[x-i(y-1)]}{x^2+(y-1)^2} \\
&= \frac{x^2-ix(y-1)+ix(y+1)-i^2(y+1)(y-1)}{x^2+(y-1)^2} \\
&= \frac{x^2-ixy+ix+ixy+ix+(y+1)(y-1)}{x^2+(y-1)^2} \\
&= \frac{x^2-ixy+ix+ixy+ix+y^2-1}{x^2+(y-1)^2} \\
&= \frac{x^2+2ix+y^2-1}{x^2+(y-1)^2} \\
&= \frac{x^2+y^2-1+2ix}{x^2+(y-1)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{U} = \frac{\mathbf{x^2+y^2-1+2ix}}{\mathbf{x^2+(y-1)^2}}}$$

(a) $U \in \mathbb{R}_-^*$
Pour que $U \in \mathbb{R}_-^*$ soit réel, il faut que $Im(U)=0$ et $Re(U)<0$

$$\begin{aligned}
Im(U)=0 \text{ et } Re(U)<0 &\implies 2x=0 \text{ et } x^2+y^2-1<0 \\
&\implies x=0 \text{ et } x^2+y^2<1
\end{aligned}$$

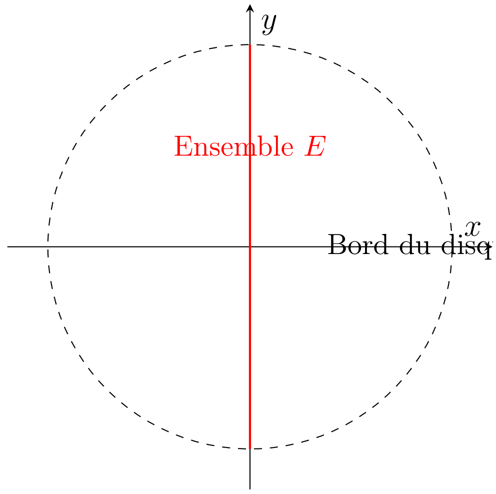
Ainsi, l'ensemble des points M d'affixe z est donné par :

$$\boxed{\mathbf{E} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \text{ et } |\mathbf{z}| < \mathbf{1}\}}$$

ou, en coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{\mathbf{E} = \left\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}} \mid \mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{x^2} + \mathbf{y^2} < \mathbf{1}\right\}}$$

Cela représente l'intersection de la droite $x = 0$ avec l'intérieur du disque de centre $O(0, 0)$ et de rayon 1, excluant le bord.



(b) $U \in i\mathbb{R}$

Pour que U soit imaginaire pur, il faut que $\mathrm{Re}(U) = 0$.

$$\boxed{\mathrm{Re}(\mathbf{U}) = \frac{\mathbf{x^2} + \mathbf{y^2} - \mathbf{1}}{\mathbf{x^2} + (\mathbf{y} - \mathbf{1})^{\mathbf{2}}} = \mathbf{0}}$$

Ce qui donne :

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Ainsi, l'ensemble des points M d'affixe z est donné par :

$$E' = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

$$\boxed{\mathbf{E'} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C} \mid |\mathbf{z}| = \mathbf{1}\}}$$

ou, en coordonnées cartésiennes :

$$E' = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$$

$$\boxed{\mathbf{E'} = \left\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}} \mid \mathbf{x^2} + \mathbf{y^2} = \mathbf{1}\right\}}$$

Cela représente le **cercle de centre $O(0, 0)$ et de rayon 1**.