Fonction Exponentielle

Destiné à la TerminaleS2
Au Lycée de Dindéferlo

7 février 2025

1.Définition :

La fonction $f(x) = \ln(x)$ est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, donc c'est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f admet une bijection réciproque f^{-1}, qui est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $]0;+\infty[$.

Cette fonction réciproque est appelée **fonction exponentielle** et est notée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = e^x$$

Elle est caractérisée par la relation :

$$e^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(y).$$

2.Conséquences de la définition

(a) **Image et ensemble de définition :**
- e^x est définie sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans $]0;+\infty[$.
- e^x est toujours strictement positive : $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) **Lien avec le logarithme :**
- $e^{\ln(x)} = x$ pour tout $x > 0$.
- $\ln(e^x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(c) **Comportement aux valeurs remarquables :**
- $e^0 = 1$.
- $e^1 = e \approx 2.718$.

(d) **Monotonie de e^x :**
- La fonction exponentielle est strictement **croissante** sur $\mathbb{R}$, car sa dérivée est toujours positive.

3.Propriétés fondamentales de la fonction exponentielle

Propriété fondamentale

Pour tout réel a et b, on a : $e^{a+b} = e^a \times e^b$.

Autres propriétés :

- $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
- $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- $e^{ra} = (e^a)^r$
- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

4. Limites

(a) **Les limites aux bornes de l'ensemble de définition de e^x :**

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

(b) **Limites Usuelles :**

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
$\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$
$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Preuve de quelques limites

Exercice d'application

Déterminer les limites suivantes :
Calculer les limites suivantes.
a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3e^x-2}{5e^x+3}$; b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$ c) $\lim_{x \to +\infty} (x - e^x)$; d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin 2x}{1-e^x}$

6.Limites des composées avec exp

Propriété

Soit U une fonction dérivablesur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
La fonction $\exp \circ u$ est dérivable sur I et on a : $(\exp \circ u)' = u' \times \exp \circ u$

NB

La fonction $\exp \circ u$ est généralement notée e^u ; sa dérivée est alors $u'e^u$.

Exemple

Calcule la limite suivante

Solution

7.Dérivée

Soit u et v deux fonctions strictement positives

Exemple

Déterminer les limites suivantes :
- La fonction $x \longmapsto e^{-x^2+x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction
- La fonction $x \longmapsto e^{\cos x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction
- La fonction $x \longmapsto e^{\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est la fonction

8.Croissance Comparée de $\ln x$ e^x x^α

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$
$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Remarque

Exemple

Détermine : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\ln(x^2+1)}$

9.Equation système et Inequation avec exp

a°)Equation

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes
a)$e^x = -1$;
b)$e^{x+1} = 3$;
c)$e^{x^2} = e^{x+2}$;
d)$(e^x - 2)(e^{-x} + 1)$

b°)Système d'inéquations avec exp :

$$\begin{cases} 4e^x - 3e^y = 9 \\ 2e^x + e^y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^x e^y = 10 \\ e^{x-y} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{2x} - 7e^{y+1} = -10 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

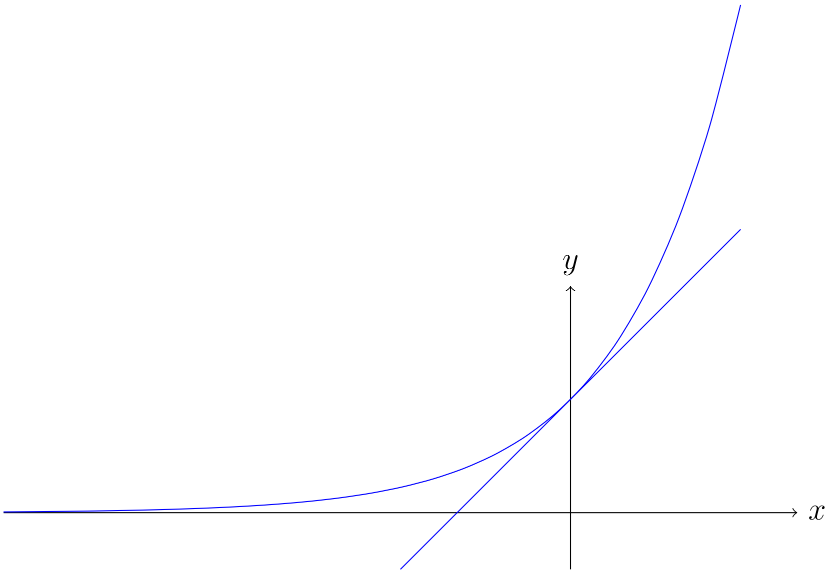
c°)Inéquations avec exp :

a)$e^{-x} \geq 2$
b)$e^{x^2-3} \leq e^{2x}$
c)$2e^{2x} - 5e^x + 2 > 0$

10.Etude le fonction exp

Soit $f(x) = exp(x)$ le domaine
Le Domaine D_f
$D_f = \mathbb{R}$
$\bigotimes$ Limites aux bornes de D_f
En $-\infty$
$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
En $+\infty$
$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
$\bigotimes$ La dérivée de f
$f'(x) = e^x$
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$, donc f est croissante sur $]0; +\infty[$
$\bigotimes$ Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	|		
$f(x)$	0	↗	1	↗	$+\infty$



C_f est au-dessous de sa tangente en J ; donc $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > x + 1$

11.Branche infinie de ln

On a $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
Nous avons ainsi une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$.
Car $\lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$

12.Application