Correction du devoir n° 1 Du 1er Semestre

Exercice 1 : 0,5 $\times$ 10 = 5 points

1. **Théorème des valeurs intermédiaires (TVI).** Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = k.$$

Corollaire. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. En particulier, si $f(a)f(b) < 0$, alors f admet au moins une solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $[a, b]$.

2. **Théorème de la bijection.** Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors :

   - f est bijective de I vers $J = f(I)$,
   - l'application réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue,
   - f^{-1} est strictement monotone (même sens si f est croissante, sens opposé si f est décroissante).

3. **Théorème des accroissements finis (TAF).** Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b), alors il existe $c \in (a, b)$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Inégalité des accroissements finis (IAF). Si de plus $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in (a, b)$, alors :

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|, \qquad \forall x, y \in [a, b].$$

4. **(Rappel) Théorème de la bijection.** Même énoncé que dans la question 2.

5.

$$\text{Si } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \ (a \neq 0),$$

alors f est dérivable en x_0 et :

$$f'(x_0) = a.$$

En particulier, f est localement strictement monotone en x_0 et x_0 n'est pas un extremum.

6.

$$\text{Si } \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty,$$

alors la dérivée à gauche de f en x_0 est $+\infty$. La pente est verticale du côté gauche (pas de dérivée finie).

7.

$$\text{Si } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0,$$

alors f est dérivable en x_0 et :

$$f'(x_0) = 0.$$

La tangente en x_0 est horizontale.

8 Si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \beta \in \mathbb{R}^*, \qquad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - \beta x] = +\infty,$$

alors la droite d'équation $y = \beta x + b$ n'est **pas** une asymptote oblique pour f. L'écart entre $f(x)$ et βx diverge vers $+\infty$.

9 Si f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, b]$, alors :

$$f(]-\infty, b]) = (\ell, f(b)],$$

où $\ell = \lim_{x\to-\infty} f(x)$. L'intervalle est ouvert à gauche car $-\infty$ n'est pas un réel.

Exercice 2 : 4 points

1 Calculons les limites suivantes : **(3 × 1 pt)**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sin 2x} &= \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{\sin 2x\left(\sqrt{1+\sin x}+1\right)} \\
&= \lim_{x\to0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{2\sin 2x}{2x}} \times \frac{1}{\left(\sqrt{1+\sin x}+1\right)} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sin 2x} = \frac{1}{4}}$$ **1 points**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0} \frac{\cos x - 1}{x^3 + x^2} &= \lim_{x\to0} \frac{\cos x - 1}{x^2(x+1)} \\
&= \lim_{x\to0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \times \frac{1}{x+1} \\
&= -\frac{1}{2} \times 1 \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to0} \frac{\cos x - 1}{x^3 + x^2} = -\frac{1}{2}}$$ **1 points**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x}} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}\right)\left(\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x}\right)}{\left(\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x}\right)\left(\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x}\right)\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}\right)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{[x+3-(5-x)]\left(\sqrt{2x+7}+\sqrt{10-x}\right)}{[2x+7-(10-x)]\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}\right)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{2(-1+x)\left(\sqrt{2x+7}+\sqrt{10-x}\right)}{3(x-1)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}\right)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)\left(\sqrt{2x+7}+\sqrt{10-x}\right)}{3(x-1)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}\right)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{2\left(\sqrt{2x+7}+\sqrt{10-x}\right)}{3\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}\right)}\\
&= \frac{2}{3}\times\frac{6}{4}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x}}=1}$$ **1 points**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{x-1} &= \lim_{X\to 0}\frac{\sin(\pi X)}{X}\\
&= \lim_{X\to 0}\pi\frac{\sin(\pi X)}{\pi X}\\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{x-1}=1}$$ **1 points**

2 Donnons les primitives des fonctions f, g et h respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. **(2 × 0,5 pt)**

$$f(x)=2\cos(x)-3\sin(x)$$

$$F(x)=2\sin(x)+3\cos(x)+k$$

$$\boxed{F(x)=2\sin(x)+3\cos(x)+k}$$ **0,5 points**

$$g(x)=(3x-1)(3x^2-2x+3)^3$$

$$G(x)=\frac{1}{8}(3x^2-2x+3)^4+k$$

$$\boxed{G(x)=\frac{1}{8}(3x^2-2x+3)^4+k}$$ **0,5 points**

$$h(x)=\frac{1-x^2}{(x^3-3x+2)^3}.$$

$$\boxed{H(x)=\frac{1}{3(x^3-3x+2)}+k}$$ **0,5 points**

Problème : 9,5 points

Partie A : Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x}{x-1} & \text{si } x < 0, \\ x + \sqrt{x^2+x} & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminons l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f. **(0,5 pt)**

Posons $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x < 0, \\ f_2(x) & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$

- $f_1 \quad \exists \quad$ ssi $x - 1x \neq 0$ et $x < 0$
  $x - 1 \neq 0 \implies x \neq 1$ et $x < 0$
  $\underline{Df_1 =]-\infty; 0[}$
- $f_2 \quad \exists \quad$ ssi $x^2 + x \geq 0$ et $x \geq 0$
  Posons $x^2 + x = 0$
  $x^2 + x = 0 \implies x = 0$ **ou** $x = -1$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
x^2+x	//////	//////	$+$	

  $\underline{Df_2 = [0; +\infty[}$

$$\text{Donc} \quad \begin{aligned} Df &= Df_1 \cup Df_2 \\ &=]-\infty; 0] \cup [0; +\infty[\\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\boxed{Df = \mathbb{R}}$$

2. Déterminons les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

- $\underline{\text{En } -\infty}$: $f(x) = f_1(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x}{x-1} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} \\ &= \lim_{x\to-\infty} x \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$\underline{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$ **(0,25 pt)**

- $\underline{\text{En } +\infty}$: $f(x) = f_2(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} x + \sqrt{x^2+x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} x + \sqrt{x^2+x} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$\underline{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ **(0,25 pt)**

③ Étudions la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interprétons les résultats obtenus. **(1,5 pt)**

Etudions la Continuité de f en 0

- En 0^-: $f(x) = f_1(x)$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-2x}{x-1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

- En 0^+: $f(x) = f_2(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x+\sqrt{x^2+x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

On a $f(0) = 0$

Finalement $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0

Etudions la dérivabilité de f en 0

- En 0^-: $f(x) = f_1(x)$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{x^2-2x}{x-1}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-2x}{x^2-x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x-2}{x-1} = 2$$

f est dérivable à gauche de 0 et $y = 2x$ est une démi-tangent en 0^-

- En 0^+: $f(x) = f_2(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-x^2-x}{x(x-\sqrt{x^2+x})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{x(x-\sqrt{x^2+x})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{(x-\sqrt{x^2+x})} = \text{"}\frac{-1}{0}\text{"}$$

Supposons que $x-\sqrt{x^2+x} > 0$

$x-\sqrt{x^2+x} > 0 \implies \sqrt{x^2+x} < x$

$$\sqrt{x^2+x} < x \implies \begin{cases} x^2+x > 0 \\ x > 0 \\ x^2+x < x^2 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2+x > 0 \\ x > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \textbf{ ou } x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x^2 + x$		0	0	$+$
x			0	$+$
x			0	$+$

$$S = \emptyset$$

Ainsi, il n'existe pas de $x > 0$ pour lequel $x - \sqrt{x^2 + x} > 0$

Donc $x - \sqrt{x^2 + x} < 0, \forall x \in]0; +\infty[$

Ainsi $\forall x \in]0; +\infty[$ $f'(x) > 0$ donc f est croissant $0; +\infty[$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{-1}{(x - \sqrt{x^2 + x})} \\ &= \frac{-1}{0^-} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

f n'est pas dérivable à droite de 0 donc admet une démi-tangent orientée vers le haut en 0^+

4 **a** Montrons que $(\mathcal{C}_f)$ admet en $-\infty$ une asymptote oblique Δ_1 dont on déterminera l'équation. **(0,5 pt)**

Comme $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

- Cherchons $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^2 - 2x}{x - 1}}{x} \\ &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x} \\ &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

- Cherchons $\lim_{x \to -\infty} f(x) - x$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} f(x) - x &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2x}{x - 1} - x \\ &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2 + x}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Donc (Δ_1): $y = x - 1$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$

b Étudions la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à Δ_1 sur $] - \infty; 0[$. **(0,5 pt)**

Etudions le signe de $f(x) - y$

$$\begin{aligned} f(x) - y &= f(x) - (x-1) \\ &= \frac{x^2-2x}{x-1} - (x-1) \\ &= x - 1 - \frac{1}{x-1} - x + 1 \\ &= -\frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-\dfrac{1}{x-1}$	$+$		

Sur $]-\infty; 0[$, $f(x) - y > 0$ donc $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de (Δ_1)

5 Montrons que $(\mathcal{C}_f)$ admet en $-\infty$ une asymptote oblique (Δ_1) dont on déterminera l'équation. **(0,5 pt)**

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

- Cherchons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x^2+x}}{x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}{x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$

- Cherchons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x &= \lim_{x\to+\infty} x + \sqrt{x^2+x} - 2x \\ &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - x \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc (Δ_2): $y = 2x + \dfrac{1}{2}$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$

6 Précisons l'ensemble de dérivabilité de f puis calculons $f'(x)$ sur chaque intervalle où f est dérivable. **(0,5 pt)**

$$Df' = \mathbb{R}^*$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x}{x-1} & \text{si } x < 0, \\ x+\sqrt{x^2+x} & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x)}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0, \\ 1+\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} & \text{si } x > 0, \end{cases} \implies \begin{cases} \dfrac{2x^2-2x-2x+2-x^2+2x}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{2\sqrt{x^2+x}+2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \dfrac{x^2-2x+2}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{2\sqrt{x^2+x}+2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

7 Dressons le tableau de variation de f. **(0,5 pt)**

- Si $x < 0$, $f(x) = \dfrac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}$ le signe dépend du numérateur

  $x^2-2x+2=0 \implies \Delta < 0$ Ansi, si $x < 0$, $f(x) > 0$ donc f est croissante sur $]-\infty;0[$

- Si $x > 0$, $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x^2+x}+2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$ le signe dépend du numérateur

  Or $2\sqrt{x^2+x}+2x+1 > 0 \, \forall x \in]0;+\infty[$

  Ainsi $\forall x \in]0;+\infty[$ $f'(x) > 0$ donc f est croissant $0;+\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	0	$+\infty$

++++++++++++++++++++++++

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty$	$+\infty$

+++++++++++++++++++++++++

8 Précisons les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repère. **(0,25 pt)**

- Pour $x < 0$, $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x-1}$

– Avec (ox), nous ne pouvons pas calculer $f(0)$ car $x < 0$

– Avec (oy) résolvons $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \implies \frac{x^2 - 2x}{x - 1} = 0$$
$$\implies x = 0 \text{ ou } x = 2 \text{ Or } x < 0$$

- Pour $x \geq 0$, $f(x) = x + \sqrt{x^2 + x}$

  – Avec (ox), $f(0) = 0$

  – Avec (oy) résolvons $f(x) = 0 \implies x + \sqrt{x^2 + x} = 0.$
  $\sqrt{x^2 + x} = -x,$
  En élevant au carré : $x^2 + x = x^2 \Rightarrow x = 0.$
  Donc la solution est 0

9 Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$. **(1,5 pt)**

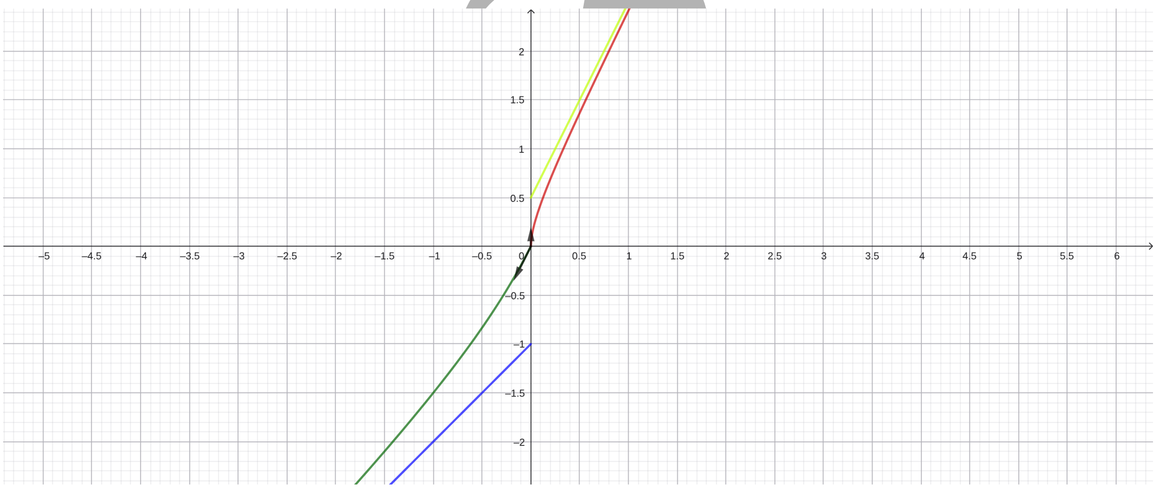

Figure 1: Courbe de (Cf)

Clique ici pour voir la courbe sur géogébra

<u>Partie B :</u>

Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = [0; +\infty[$.

1 Montrons que h réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera. **(0,25 pt)**

Sur I h est continue est strictement croissante donc réalise une bijection de I vers $J = [0, +\infty[$

2 La bijection réciproque h^{-1} est-elle dérivable sur J ? **(0,25 pt)**

Comme $\forall x \in I$, $h'(x) \neq 0$ donc h^{-1} est dérivable sur J

3 Calculons $h\left(\frac{4}{5}\right)$ puis $(h^{-1})'(2)$. **(0,5 pt)**

$$\begin{aligned}
h\left(\frac{4}{5}\right) &= \frac{4}{5} + \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}} \\
&= \frac{4}{5} + \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{20}{25}} \\
&= \frac{4}{5} + \frac{6}{5} \\
&= \frac{10}{5} \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\mathbf{h}\left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}\right) = \mathbf{2}$$

On a : $(h^{-1})'(2) = \dfrac{1}{h'\left(\frac{4}{5}\right)}$ et $h'(x) = \dfrac{1}{\dfrac{2\sqrt{x^2+x}+2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}}$

$$h'(2) = \frac{1}{\dfrac{2\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)}+2\left(\frac{4}{5}\right)+1}{2\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)}}}$$

$$\begin{aligned}
(h^{-1})'(2) &= \frac{1}{h'\left(\frac{4}{5}\right)} \\
&= \frac{1}{\dfrac{2\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)}+2\left(\frac{4}{5}\right)+1}{2\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)}}} \\
&= \frac{2\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)}}{2\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)}+2\left(\frac{4}{5}\right)+1} \\
&= \frac{2\cdot\frac{6}{5}}{2\cdot\frac{6}{5}+\frac{8}{5}+1} \\
&= \frac{\frac{12}{5}}{\frac{12}{5}+\frac{8}{5}+\frac{5}{5}} \\
&= \frac{\frac{12}{5}}{\frac{25}{5}} \\
&= \frac{12}{25}
\end{aligned}$$

$$(\mathbf{h}^{-1})'(\mathbf{2}) = \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{25}}$$

4 Construction de $(\mathcal{C}_{h^{-1}})$ la courbe représentative de h^{-1} dans le même repère. **(0,5 pt)**

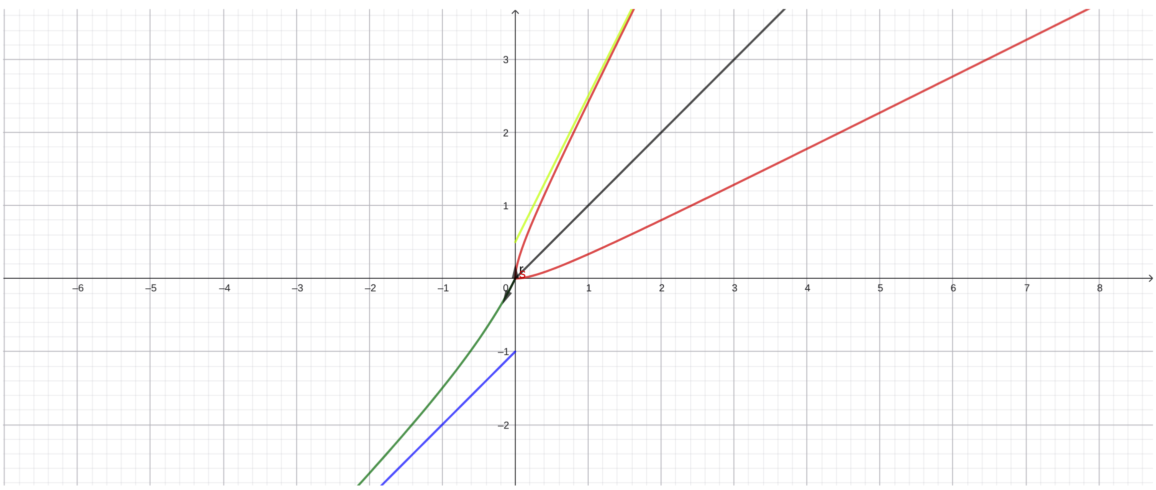

Figure 2: Courbe de (Cf)

Clique ici pour voir la courbe sur géogébra

5 Exprimons $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$. **(0,5 pt)**

$$\text{Soit } y = h(x) = x + \sqrt{x^2 + x}.$$

On isole la racine :

$$y - x = \sqrt{x^2 + x}.$$

En élevant au carré, on obtient :

$$(y - x)^2 = x^2 + x.$$

$$y^2 - 2xy + x^2 = x^2 + x.$$

En simplifiant :

$$y^2 - 2xy = x.$$

On factorise par x :

$$y^2 = x(1 + 2y).$$

D'où :

$$\mathbf{h^{-1}(x) = \frac{x^2}{1 + 2x}}$$