TD: Équations différentielles

<u>Exercice 1</u> Résoudre les équations différentielles suivantes :

1
$$y' - y = 0$$

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

$$2y' + y = 0$$

$$8y'' + y' - 9y = 0$$

3
$$3y' + \sqrt{2}y = 0$$

$$9 2y'' - 2\sqrt{2}y' + y = 0$$

$$\frac{1}{2}y'' - 2y' + 9y = 0$$

$$5 \quad y'' - 4y' + 3y = 0$$

$$11 \quad y'' - 4y' + 8y = 0$$

$$6 9y'' + 6y' + y = 0$$

12
$$y'' + 4y = 0$$

<u>Exercice 2</u> Résoudre dans chacun des cas suivants l'équation différentielle proposée, puis déterminer la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales données.

$$2 3y' + 5y = 0 ; y(3) = 5$$

3
$$y'' - 2y' + y = 0$$
; $y(0) = y'(0) = 2$

4
$$y'' - 4y' + 3y = 0$$
; $y(0) = 6$; $y'(0) = 10$

5
$$4y'' + 9y = 0$$
; $y(\pi) = 1$; $y'(\pi) = 0$

6
$$y'' + 6y' + 9y = 0$$
; $y(0) = y'(0) = 1$

7
$$y'' + y = 0$$
; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$

8
$$y'' - (\ln x)^2 y = 0$$
; $y(0) = 1$; $y'(2) = 1$

<u>Exercice 3</u> Donner les solutions générales des équations différentielles suivantes après avoir trouvé leurs solutions particulières sous la forme indiquée :

1
$$y'' + 2y' - 3y = \cos x$$
; $f(x) = a\cos x + b\sin x$

$$2 y'' - 2y' + 3y = e^{-x} \cos x ; f(x) = e^{-x} (a \cos x + b \sin x)$$

3
$$y'' + y' - 2y = \sin x$$
; $f(x) = a \cos x + b \sin x$

4
$$y'' + y' + y = xe^{-x}$$
 ; $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

Exercice 4

- 1 Résoudre dans \mathbb{R} l'équation différentielle (E_0) : y'' 2y' + y = 0.
- Soit l'équation différentielle (E): $y''-2y'+y=x^2-4x+2$. Vérifier que le polynôme $h(x)=x^2$ est une solution particulière de (E_0) .
- Montrer que si f est une solution, alors g telle que g = f h est une solution de (E_0) .
 - Réciproquement, montrer que si g est une solution de (E_0) , alors la fonction f telle que f = g + h est solution de (E).
 - c En déduire la générale des solutions de (E).
- En déduire une solution de (E) satisfaisant à la condition f(1) = 1 et f'(1) = 0.

Exercice 5

Soit l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 8y = 20 \sin 2x + 10 \cos 2x$.

- 1 Résoudre l'équation différentielle y'' + 4y' + 8y = 0 (E').
- 2 Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie par : $g(x) = a \cos 2x + b \sin 2x$ est solution de (E).
- 3 Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si f g est solution de (E').
- 4 Donner la solution générale de (E).

Exercice 6 Soit f la solution de l'équation différentielle y' - 2y = 0, vérifiant f(0) = 1.

- 1 Déterminer f(x) pour tout réel x.
- 2 Déterminer les réels a et b tels que la fonction g(x) = (ax+b)f(x) soit solution de l'équation différentielle $y'-2y=e^{2x}$ et vérifiant g(0)=1.
- 3 Déduisez-en sans intégration par parties la valeur des intégrales : $I=\int_0^1 (x+1)e^{2x}\,dx$ et $J=\int_0^1 (2x+1)e^{2x}\,dx$

Exercice 7 BAC 2009

- Résoudre l'équation différentielle (E): y'' + 2y' + y = 0
- 2 Soit (E') l'équation différentielle y'' + 2y' + y = x + 3. Déterminer les réels a et b tels que la fonction h(x) = ax + b soit solution de (E').
 - a Démontrer que g est solution de (E') si et seulement si g h est solution de (E).
 - b Résoudre alors (E').
- 3 Soit la fonction k définie par : $k(x) = (x+2)e^{-x}$
 - a Étudier les variations de k.
 - b Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_k) de k au point d'abscisse 0.
 - c Démontrer que le point I(0;2) est un point d'inflexion de la courbe (C_k) .
 - d Tracer (C_k) et (T) dans le même repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 8 BAC 2008

- 1 Soient les équations différentielles $(E_0): y' + y = 0$ et $(E): y' + y = e^{-x} \cos x$.
 - Déterminer les réels a et b tels que la fonction h définie par : $h(x) = e^{-x}(a\cos x + b\sin x) \text{ soit solution de } (E).$
 - b Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si f h est solution de (E_0) .
 - c Résoudre (E_0) .
 - d Déduire des questions précédentes la solution générale de (E).
 - e Déterminer la solution g de (E) telle que g(0) = 0.
- 2 Soit $I(x) = e^{-x} \sin x$.
 - a Exprimer $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
 - **b** Étudier les variations de I sur $[0; 2\pi[$.
 - Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} I(x) dx$.
 - d En déduire la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x} \cos x \, dx$ sans utiliser la technique d'intégration par parties.

Exercice 9

Partie A:

Soit $(E): y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2}e^{-x}, x \neq 0.$

- 1 Vérifier que $h(x) = e^{-x} \ln x$ est solution de (E).
- Montrer que f est solution de (E) si et seulement si f h est solution de (E') : y'' + 3y' + 2y = 0.
- 3 Résoudre (E') puis (E).
- Trouver la solution de (E) dont la courbe passe par $A(1; e^{-1})$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe (Ox).

Partie B : Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}(1+\ln x) - e^{-1} & \text{si } x \ge 1\\ (1-x)e^{-\frac{1}{1-x}} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

- 1 Vérifier que f est définie sur \mathbb{R} et calculer les limites aux bornes.
- $\mathbf{2}$ Étudier la continuité de f en 1.
- 3 Montrer que $\forall x \in]1; +\infty[,$ $\frac{f(x) f(1)}{x 1} = e^{-x} \left(\frac{1 e^{x 1}}{x 1} + \frac{\ln x}{x 1} \right).$
 - b Étudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter.

Partie C : Soit la fonction g définie par $g(x) = -\ln x + \frac{2}{x} - 1$.

- \bigcirc Dresser le tableau de variation de g.
- 2 Calculer g(1) et préciser le signe de g(x).
- 3 a Calculer f'(x) sur les intervalles où f est dérivable.
 - b Étudier le signe de f'(x) et dresser le tableau de variations de f.
- 4 Donner la nature de la branche infinie en $+\infty$.
 - b Montrer que (Δ) : y = 1 x est une asymptote à (C_f) en $-\infty$.
 - Étudier la position relative de (C_f) par rapport à (Δ) sur $]-\infty$; 1[.
- 5 Tracer (C_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) unité 1 cm.