

Exercice 1 :(3 pts) Restitution de Connaissances

- Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire E et p une probabilité définie sur Ω . Recopie et complète les relations ci-dessous :
 - $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (0,25 pt)
 - $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ (0,25 pt)
 - Si A et B sont deux événements incompatibles de Ω , alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ (0,25 pt)
 - Soit D un événement quelconque de Ω . $\mathbb{P}(D) = 1,5$ est-il possible ?
Non, car une probabilité est toujours un nombre compris entre 0 et 1. (0,25 pt)
- Soit f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite convergente vers un nombre réel $L \in I$, définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Répondre par vrai ou faux à l'affirmation : L est solution de l'équation $f(L) = L$.
Réponse : Vrai (0,5 pt)
- Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $u_2 = -3$. Choisir la bonne réponse dans chaque cas : (3 × 0,25 pt)

Réponses	A	B	C
$\lim u_n$ est :			X
L'expression de u_n est :			X
L'expression de $S_n = u_2 + u_3 + \dots + u_n$ est :		X	

Correction de l'Exercice 2 :(3 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

- On considère la transformation S du plan d'écriture complexe $z' = (1 - i\sqrt{3})z + 2$. On pose $a = 1 - i\sqrt{3}$ et $b = 2$. Le module de a est :

$$|a| = |1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2.$$
 Donc la transformation est une **rotation homothétique** (ou similitude directe) de rapport 2 et d'angle θ tel que $\arg(a) = \arg(1 - i\sqrt{3})$.
Nature de S : Similitude directe. (0,5 pt)

- 2 **Rapport :** $|a| = 2$
Argument de a :

$$\arg(1 - i\sqrt{3}) = -\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

Donc l'angle est $-\frac{\pi}{3}$.

Rapport et angle : 2 et $-\frac{\pi}{3}$.

(0,5 pt)

- 3 Soit A d'affixe $z_A = 2 - i\sqrt{3}$. Alors :

$$z'_C = (1 - i\sqrt{3})(2 - i\sqrt{3}) + 2.$$

Développons :

$$z'_C = 2(1) - 2i\sqrt{3} - i\sqrt{3}(1) + (i\sqrt{3})^2 + 2 = 2 - 3i - 3 + 2 = \boxed{-1 - 3i}. \text{ (1 pt)}$$

- 4 $z_D = -\frac{2\sqrt{3}}{3}i$.
 On calcule :

$$z'_D = (1 - i\sqrt{3})\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}i\right) + 2.$$

On simplifie :

$$z'_D = -\frac{2\sqrt{3}}{3}i + \frac{2 \cdot 3}{3} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}i + 2.$$

Donc $z'_D = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}i$.

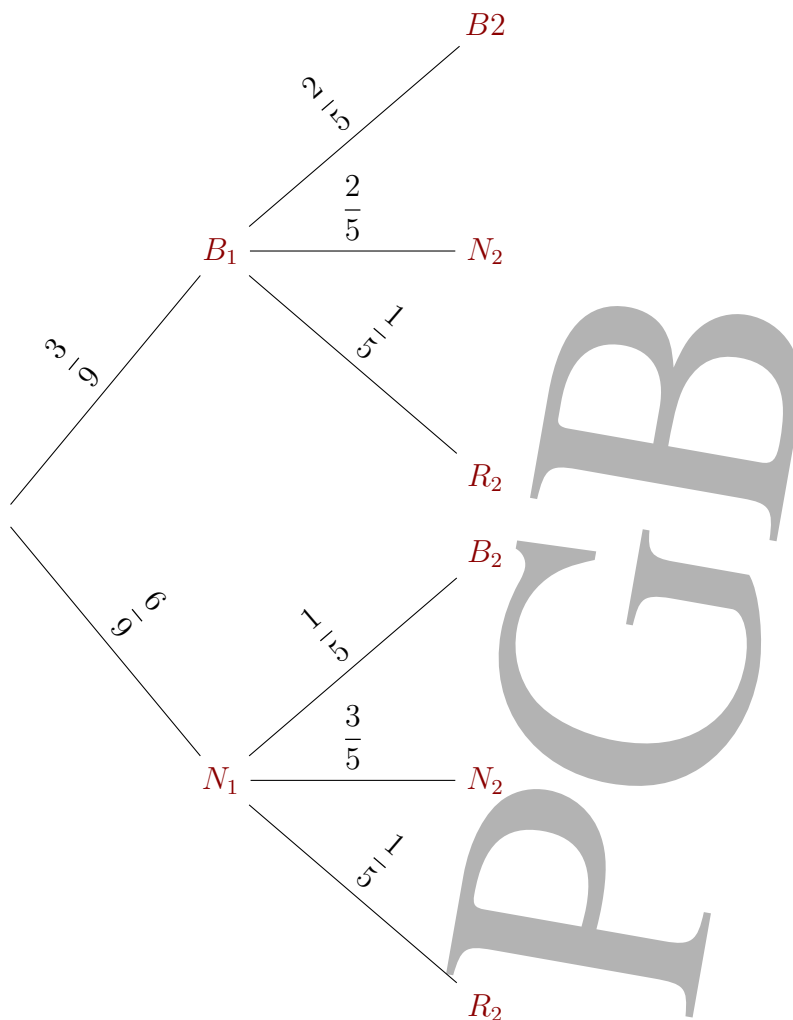
(0,75 pt)

Interprétation : D est un point situé sur le **cercle de centre** le centre de la similitude et de rayon proportionnel à son image. Ce n'est ni un point fixe ni un invariant remarquable ici.

Autre interprétation : comme l'image n'est pas identique à D , D n'est pas un point invariant de S . (0,25 pt)

Exercice 3 : (4 pts)

- 1 Construisons un arbre pondère correspondant à cette épreuve.



2 Montrons que $P(N_2) = \frac{8}{15}$

a $P(N_2)$ peut être calculé par la loi des totalisations :

$$\begin{aligned}
 P(N_2) &= P(N_2|B_1) \cdot P(B_1) + P(N_2|N_1) \cdot P(N_1) \\
 &= \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}\right) \\
 &= \frac{2}{15} + \frac{6}{15} \\
 &= \frac{8}{15}
 \end{aligned}$$

b Déterminons la probabilité de l'événement B_2

$$\begin{aligned}
 P(B_2) &= P(B_2|B_1) \cdot P(B_1) + P(B_2|N_1) \cdot P(N_1) \\
 &= \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}\right) \\
 &= \frac{1}{15} + \frac{2}{15} \\
 &= \frac{3}{15} \\
 &= \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

c Déterminons la probabilité de tirer une boule blanche de u_1 , sachant que la boule tirée dans u_2 est noire On utilise le théorème de Bayes :

$$\begin{aligned}
 P(B_1|N_2) &= \frac{P(N_2|B_1) \cdot P(B_1)}{P(N_2)} \\
 &= \frac{\left(\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{8}{15}} \\
 &= \frac{\frac{2}{15}}{\frac{8}{15}} \\
 &= \frac{2}{8} \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

3 a Loi de probabilité de X Nous avons les différents gains :

- Boule blanche dans u_2 : $3000F - 500F = 2500F$
- Boule noire dans u_2 : $0F - 500F = -500F$
- Boule rouge dans u_2 : $500F - 500F = 0F$

Calcul des probabilités de X :

- $P(X = 2500) = P(B_2) = \frac{1}{5}$
- $P(X = -500) = P(N_2) = \frac{8}{15}$
- $P(X = 0) = P(R) = \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{15}$

b Calculons de l'espérance mathématique, Variance et écart-type de X et écart-type de X

• **Espérance mathématique**

$$\begin{aligned}
 E(X) &= 2500 \cdot P(X = 2500) + (-500) \cdot P(X = -500) + 0 \cdot P(X = 0) \\
 &= 2500 \cdot \frac{1}{5} + (-500) \cdot \frac{8}{15} + 0 \cdot \frac{4}{15} \\
 &= 500 - \frac{4000}{15} \\
 &= \frac{7500 - 4000}{15} \\
 &= \frac{3500}{15} \\
 &\approx 233.33
 \end{aligned}$$

• **Variance de X**

$$\begin{aligned}
 Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\
 E(X^2) &= (2500^2) \cdot P(X = 2500) + (-500)^2 \cdot P(X = -500) + 0^2 \cdot P(X = 0) \\
 &= 6250000 \cdot \frac{1}{5} + 250000 \cdot \frac{8}{15} \\
 &= 1250000 + \frac{2000000}{15} \\
 &= 1250000 + \frac{133333.33}{1} \\
 &\approx 1383333.33
 \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\
 &= 1383333.33 - (233.33)^2 \\
 &\approx 1383333.33 - 54444.44 \\
 &\approx 1338898.89
 \end{aligned}$$

• **Ecart-type X**

$\sigma(X)$ est $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$

c Déterminons la fonction de répartition de X et représentons la.

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, -500[\\ \frac{8}{15} & \text{si } x \in [-500, 0[\\ \frac{11}{15} & \text{si } x \in [0, 2500[\\ 1 & \text{si } x \in [2500, +\infty[\end{cases}$$

- 4 Calculons cela pour trouver le nombre minimal de parties. Soit $p = P(N_2) = \frac{8}{15}$. On veut trouver le plus petit entier n tel que :

$$\begin{aligned} 1 - (1 - p)^n &> 0,97 \\ (1 - \frac{8}{15})^n &< 0,03 \quad \text{soit} \quad \left(\frac{7}{15}\right)^n < 0,03 \\ n \log\left(\frac{7}{15}\right) &< \log(0,03) \\ n &> \frac{\log(0,03)}{\log\left(\frac{7}{15}\right)} \approx 6,6 \end{aligned}$$

Donc $n = 7$

Problème : 10 pts

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}.$$

1. Calcul des limites

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1} \\ &= +\infty - 1 \\ &= +\infty, \text{ puisque } \frac{x+1}{x} \rightarrow +\infty \text{ quand } x \rightarrow 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} \\ &= 0 - 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Étude des variations et tableau

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)' - \left(\frac{1}{x+1}\right)' \\
 &= \frac{(x+1)'}{x+1} - \frac{x'}{x} + \frac{(x+1)'}{(x+1)^2} \\
 &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} \\
 &= \frac{x(x+1) - (x+1)^2 + x}{x(x+1)^2} \\
 &= \frac{x(x+1) - (x+1)^2 + x}{x(x+1)^2} \\
 &= \frac{x^2 + x - (x^2 + 2x + 1) + x}{x(x+1)^2} \\
 &= \frac{-1}{x(x+1)^2}
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0 \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Tableau de variations de g sur $]0; +\infty[$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		—
g	$+\infty$	0

3. Signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$

Comme g est strictement décroissante et tend vers 0 par la droite quand $x \rightarrow +\infty$, et part de $+\infty$ à 0, on en déduit que

$$g(x) > 0 \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Partie B

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + 1 & \text{si } x > 0, \\ (x^2 - 3x + 1)e^x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

- 1 a Domaine de définition de f Pour $x > 0$, $\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} > 1$, donc le logarithme est défini. La fonction est donc définie sur cet intervalle.

Pour $x \leq 0$, l'expression est polynomiale multipliée par une exponentielle : bien définie sur tout \mathbb{R} .

Par conséquent, la fonction f est définie sur \mathbb{R} .

- b Limites aux bornes du domaine

Limite en $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x + 1)e^x = 0, \text{ car } e^x \rightarrow 0 \text{ plus vite que toute puissance.}$$

Limite en $+\infty$:

$$\text{Posons } X = \frac{x+1}{x} \text{ donc } x = \frac{1}{X-1} \text{ Si } x \rightarrow +\infty \text{ alors } X \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) + 1 \\
 &= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{X-1} \ln(X) + 1 \\
 &= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(X)}{X-1} + 1 \\
 &= 1 + 1
 \end{aligned}$$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

c Asymptotes

- En $-\infty$, la limite est 0, donc asymptote horizontale : $y = 0$.
- En $+\infty$, la limite est 2, donc asymptote horizontale : $y = 2$.

Conclusion : La fonction admet deux asymptotes horizontales : $y = 0$ en $-\infty$, et $y = 2$ en $+\infty$.

2 **a** Continuité de f en 0. (0,75 pt)

En 0^- :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 3x + 1) e^x \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

En 0^+ :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) + 1 \right) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

De plus, $f(0) = (0^2 - 3 \cdot 0 + 1) e^0 = 1$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 1$

ce qui prouve que f est continue en 0.

b Dérivabilité de f en 0 et interprétation des résultats. (0,75 + 0,25 pt)

Pour $x \leq 0$, on a : $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x^2 - 3x + 1)e^x - 1}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x^2 - 3x + 1)e^x - 1}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x^2 - 3x)e^x + (e^x - 1)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 3)e^x + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} \\
 &= -3 + 1 \\
 &= -2.
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -2$$

Pour $x > 0$, on a : $f(x) = x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) + 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) + 1 - 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{x+1}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \text{ donc } f \text{ n'est pas dérivable en } 0.$$

Interprétation :

- En 0^- : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -2$ donc la courbe \mathcal{C}_f admet une **demi-tangente** à gauche d'équation : $y = -2x + 1$
- En 0^+ : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$ donc la courbe \mathcal{C}_f admet une **demi-tangente verticale orientée vers le haut** à droite.

3 Montrons que $f'(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x > 0 \\ (x^2 - x - 2)e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ **(1 pt)**

$$f(x) = \begin{cases} x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) + 1 & \text{si } x > 0, \\ (x^2 - 3x + 1)e^x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} \left[x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) + 1 \right]' & \\ \left[(x^2 - 3x + 1)e^x \right]' & \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) + x \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \right] & \\ (x^2 - 3x + 1)' e^x + (x^2 - 3x + 1) (e^x)' & \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) + \frac{x}{x+1} - 1 & \\ (2x - 3 + x^2 - 3x + 1) e^x & \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} & \\ (x^2 - x - 2) e^x & \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion : On a bien :

$$f'(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x > 0 \\ (x^2 - x - 2)e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

4 Tableau de variation

$$f'(x) = (x^2 - x - 2)e^x$$

Comme $e^x > 0$ pour tout réel, le signe de $f'(x)$ est celui du polynôme : $P(x) = x^2 - x - 2$

On résout $P(x) = 0$:

$$x^2 - x - 2 = 0 \iff x = -1 \text{ ou } x = 2$$

On dresse le tableau de signes de $P(x)$, mais en restreignant à $x < 0$:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0

- Pour $x < -1$, $f'(x) > 0$, donc f est **croissante**.
- Pour $-1 < x < 0$, $f'(x) < 0$, donc f est **décroissante**.
- Pour $x > 0$, on a montré que $f'(x) = g(x) > 0$, donc f est **croissante**.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
f	0	$5e^{-1}$	1	$+\infty$

Partie C : 2,5 pts

Soit h la restriction de f à l'intervalle $]0; +\infty[$:

$$h(x) = x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) + 1$$

- 5 Montrons que h est bijective de $]0; +\infty[$ vers un intervalle J . (0,5 pt)

On a déjà montré que f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ car $f'(x) = g(x) > 0$.
Ainsi, h est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, donc **bijective**.

D'autre part :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 2$$

Donc :

$$h :]0; +\infty[\rightarrow]1; 2[, \text{ bijection}$$

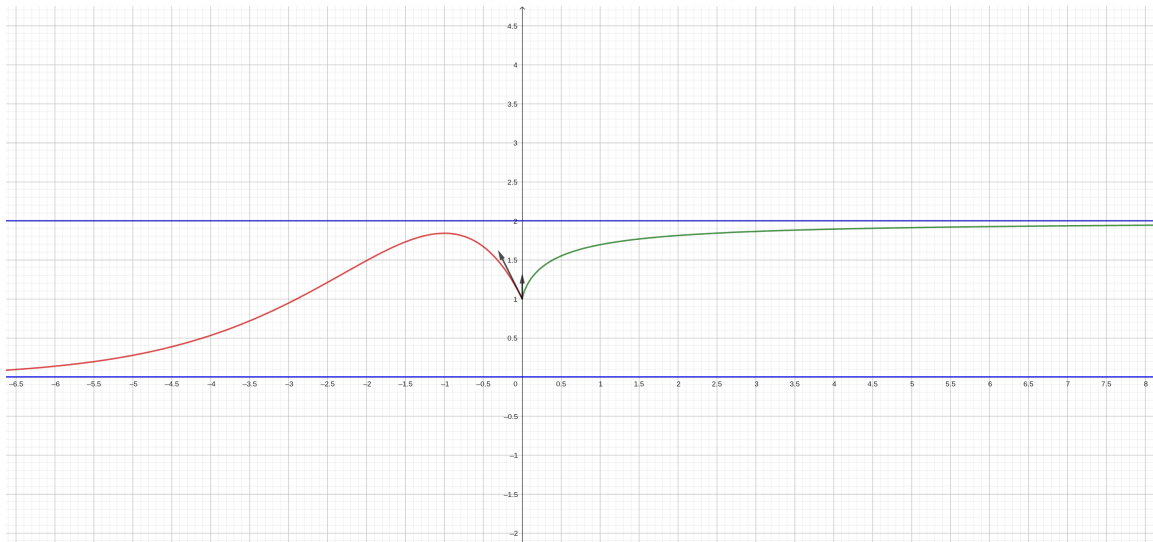
- 6 Étudier la dérivabilité de h^{-1} sur J . (0,5 pt)

$$h'(x) = g(x) > 0 \text{ sur }]0; +\infty[.$$

Donc h est dérivable, strictement croissante, et $\forall x \in]0; +\infty[$ $h'(x) \neq 0$, donc sa réciproque est dérivable sur $J =]1; 2[$.

$$h^{-1} \text{ est dérivable sur } J, \text{ avec } (h^{-1})'(y) = \frac{1}{g(h^{-1}(y))}$$

- 7 Tracer sur le même graphe les asymptotes, \mathcal{C}_f et $\mathcal{C}_{h^{-1}}$. (1,5 pt)



[Clique ici pour voir la figure sur géogébra](#)