Ministère de l'Éducation Nationale
Inspection Académique de Kédougou
Lycée Dindéfelo
Cellule de Mathématiques

Année scolaire 2024-2025
Date : 03/01/2025
Classe : Terminale S2
Professeur : M. BA

Nombres Complexes

Exercice 1 :

1. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :
   (a) $2i$;
   (b) $\sqrt{3} + 3i$;
   (c) $\sqrt{6} + i\sqrt{2}$;
   (d) 5 ;
   (e) $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$;
   (f) $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
   (g) $\frac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$.
2. Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :
   (a) $(2+2i)(1-i)$;
   (b) $\frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}$;
   (c) $\frac{\sqrt{2}}{1+i}$;
   (d) $\frac{-2i}{1+i\sqrt{3}}$;
   (e) $(-1-i)^4$;
   (f) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^2$.
3. Soit $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.
   (a) Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2.
   (b) Écrire sous forme algébrique et sous forme trigonométrique le produit $z_1 z_2$.
   (c) En déduire les valeurs de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Exercice 2 :

1. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :
   (a) $z_1 = (1-i)(5+i)$
   (b) $z_2 = (2-3i)^2$

   (c) $z_3 = \frac{1}{3+2i}$
   (d) $z_4 = \frac{4-5i}{3+2i}$

2. Ècrire en fonction de $\overline{z}$ les conjugués des nombres complexes suivants :
   (a) $z_1 = 1 + iz$
   (b) $z_2 = i(z+3)$
   (c) $z_3 = \frac{1-z}{1+iz}$
   (d) $z_4 = \frac{1+3z}{i+2z}$

3. Déterminer un argument de z dans chacun des cas suivants :
   (a) $z = -1 + i$
   (b) $z = \sqrt{6} + i\sqrt{6}$
   (c) $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
   (d) $z = (2+2i)(1-i)$
   (e) $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}$
   (f) $z = (-1-i)^4$

Exercice 3 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

1. Déterminer puis construire l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant :
   (a) $|z-3| = |z+i|$
   (b) $|iz+3| = |z+4+i|$
   (c) $|\overline{z} + \frac{1}{3}i| = 3$
   (d) $|z - \overline{z} + i| = 2$
   (e) $|\overline{z} - 2 + i| = |z + 5 - 2i|$
   (f) $|\overline{z} - 2 + i| = |z + 5 - 2i|$

2. Pour tout nombre complexe $z \neq -1 + 2i$, on pose $Z = \frac{z-2+4i}{z+1-2i}$.
   Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :
   (a) $|Z| = 1$
   (b) $|Z| = 2$
   (c) Z soit un réel.
   (d) Z soit un imaginaire pur.

3. Pour tout complexe $z \neq i$, on pose $U = \frac{z+i}{z-i}$.
   Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :
   (a) $U \in \mathbb{R}_-^*$
   (b) $U \in \mathbb{R}_+^*$
   (c) $U \in i\mathbb{R}$

Correction Exercice 3 :

Pour tout complexe $z \neq i$, on pose $U = \frac{z+i}{z-i}$.

1. Déterminons l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

   Nous cherchons l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ tels que :

$$U = \frac{x^2 + y^2 - 1 + 2ix}{x^2 + (y-1)^2}$$

(a) $U \in \mathbb{R}_-^*$

$$\begin{aligned} U \in \mathbb{R}_-^* &\implies \mathrm{Im}(U) < 0 \\ &\implies \frac{2x}{x^2 + (y-1)^2} \end{aligned}$$

Le dénominateur $x^2 + (y-1)^2$ étant toujours strictement positif sauf en $(0, 1)$, le signe de $\mathrm{Im}(U)$ dépend uniquement du numérateur $2x$.

Ainsi, on doit avoir : $2x < 0 \quad \implies \quad x < 0$

Conclusion

L'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $\mathrm{Im}(U) < 0$ est donné par :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}.$$

Autrement dit, il s'agit du demi-plan strictement à gauche de l'axe des ordonnées $x = 0$.

(b) $U \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} U \in \mathbb{R}_+^* &\implies \mathrm{Im}(U) > 0 \\ &\implies \frac{2x}{x^2 + (y-1)^2} \end{aligned}$$

Le dénominateur $x^2 + (y-1)^2$ étant toujours strictement positif sauf en $(0, 1)$, le signe de $\mathrm{Im}(U)$ dépend uniquement du numérateur $2x$.

Ainsi, on doit avoir : $2x > 0 \quad \implies \quad x > 0$

Conclusion

L'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $\mathrm{Im}(U) > 0$ est donné par :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}.$$

Autrement dit, il s'agit du demi-plan strictement à droite de l'axe des ordonnées $x = 0$.

(c) $U \in i\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} U \in i\mathbb{R} &\implies \mathrm{Re}(U) = 0 \\ &\implies \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y-1)^2} \end{aligned}$$

Conclusion

L'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $\mathrm{Re}(U) = 0$ est donné par :

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Autrement dit, il s'agit du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

Exercice 4 :

Soit le nombre complexe $z = \frac{2(-1+i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}}$.

1. Déterminer $Re(z)$ et $Im(z)$.
2. Déterminer le module et un argument de z.
3. En déduire le module et un argument de : $\frac{1}{z}$, $\frac{i}{z}$ et $\frac{1+i}{z}$.

Exercice 5 :

1. On pose $z_1 = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$; $z_2 = 1 - i$ et $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.
   (a) Déterminer un argument de z_1, z_2 et z_3.
   (b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.
2. On considère les nombres complexes : $a = 1 - i$, $b = 1 - i\sqrt{3}$ et $Z = \frac{a^5}{b^4}$.
   (a) Déterminer une écriture trigonométrique de Z.
   (b) Déterminer une écriture cartésienne de Z.
   En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
   (c) Calculer Z^{12} et Z^{2024}.
   (d) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n :
   Z^n est un réel.
   Z^n est un imaginaire pur.

Exercice 6 :

On donne $u = \sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1. Calculer u^2 et u^4 sous forme algébrique.
2. En déduire le module et un argument de u.
3. Soit M le point d'affixe $z \in \mathbb{C}$.
   Déterminer l'ensemble des points M tels que $|uz| = 8$.

Exercice 7 :

Soit dans le plan complexe les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c avec $a = -1 - i$, $b = 2 + i$ et $c = 4i$.

1. Représenter les points A, B et C.
2. Déterminer la forme trigonométrique de $\frac{a-b}{c-b}$.
   En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.
3. Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un carré.

Exercice 8 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
   (a) $\overline{z} = i - z$
   (b) $2z + \overline{z} = i - z$
   (c) $2z^2 - 6z + 5 = 0$
   (d) $z^2 + z + 1 = 0$
   (e) $z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0$
   (f) zš $- \sqrt{3}z - i = 0$
   (g) $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$
   (h) $4z^2 - 2z + 1 = 0$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes sachant qu'elles admettent une solution réelle :
   (a) $z^3 - (1 + i)z^2 - 2(1 + i)z + 8 = 0$
   (b) $iz^3 + (3 - 5i)z^2 + (16 - 2i)z + 30i = 0$
3. Résoudre chacune des équations suivantes sachant qu'elles admettent une solution imaginaire pure :
   (a) $z^3 - (3 + 4i)z^2 - 6(3 - 2i)z + 72i = 0$
   (b) $z^3 + (5i - 1)z^2 - (4i + 7)z + 3 - 3i = 0$

Exercice 9 :

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$Z^2 - 6Z + 13 = 0.$$

   (b) En déduire les solutions de l'équation :

$$\left(\frac{z - 3i}{z + 2i}\right)^2 - 6\left(\frac{z - 3i}{z + 2i}\right) + 13 = 0.$$

2. Soit $\theta \in [0; \pi]$, donner sous forme trigonométrique les solutions dans $\mathbb{C}$ des équations suivantes :
   (a) $Z^2 + 2(1 - \cos\theta)Z + 2(1 - \cos\theta) = 0.$
   (b) $Z^2 - (2^{\theta+1}\cos\theta)Z + 2^{2\theta} = 0.$

Exercice 10 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^3 = 1$.
2. (a) Développer $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3$.
   (b) Soit l'équation $(E) : z^3 = 4\sqrt{2}(-1-i)$.
   En posant $u = \frac{z}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$, déterminer sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique les racines de l'équation (E).
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

Exercice 11 :

1. Montrer que $(1+i)^6 = -8i$.
2. On considère l'équation $(E) : z^2 = -8i$.
   (a) Déduire de la question 1 une résolution de l'équation (E).
   (b) Donner sous forme algébrique les solutions de (E).
3. (a) Déduire également de 1 une solution notée t de l'équation $(E') : z^3 = -8i$.
   (b) On pose $j = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$.
   Montrer que jt et j^2t sont aussi des solutions de (E').

Exercice 12 :

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les équations suivantes :
   (a) $z^2 - 2z + 5 = 0$
   (b) $z^2 - 2(1+\sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$
2. On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, les points A, B, C et D d'affixes respectives $1+2i$, $1+\sqrt{3}+i$, $1+\sqrt{3}-i$ et $1-2i$.
   (a) Placer les points A, B, C et D et préciser la nature du quadrilatère $ABCD$.
   (b) Vérifier que
   $$\frac{Z_D - Z_B}{Z_A - Z_B} = i\sqrt{3}.$$
   Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (BD) ?
   (c) Prouver que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle Γ dont on précisera le rayon et le centre. Tracer Γ.
3. On considère l'équation :
   $$z^2 - 2(1+2\cos\theta)z + 5 + 4\cos\theta = 0,$$
   où θ est un nombre réel quelconque.
   (a) Résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$.
   (b) Montrer que les points ayant pour affixe les solutions de l'équation appartiennent à Γ.

Exercice 13 :

On considère l'équation

$$(E) : z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12) = 0.$$

1. Démontrer que l'équation (E) admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire pure z_2.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
3. Démontrer que les points images des solutions de (E) sont alignés.

Exercice 14 :

Soit la suite (z_n) définie par :

$$\begin{cases} z_0 = i \\ z_{n+1} = (1+i)z_n + 2i \end{cases}$$

1. Calculer z_1 et z_2.
2. On considère la suite (U_n) définie par $U_n = z_n + 2$.
   (a) Montrer que $U_n = (2+i)(1+i)^n$.
   (b) Exprimer z_n en fonction de n.
3. Soit M_{n+1}, M_n, A et B les points d'affixes respectives : z_{n+1}, z_n, i et $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.
   (a) Démontrer que $\frac{AM_{n+1}}{BM_n} = \sqrt{2}$.
   (b) Démontrer que
   $$(\overrightarrow{BM_n}; \overrightarrow{AM_{n+1}}) = \frac{\pi}{4}\,[2\pi].$$

Exercice 15 :

On considère la suite (z_n) de nombres complexes telle que $z_0 = 0$, $z_1 = i$ et pour tout entier $n \geq 2$:

$$z_n - z_{n-1} = i(z_{n-1} - z_{n-2}) \qquad (1)$$

1. (a) On pose $v_n = z_n - z_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$.
   Exprimer v_n en fonction de n.
   (b) En déduire que $z_n = \frac{1-i}{2}(i^n - 1)$.
   (c) Démontrer que la suite (z_n) est périodique.
2. On note M_n l'image dans le plan du complexe z_n.
   (a) Marquer les points M_0, M_1, M_2 et M_3.
   (b) Que peut-on dire des points M_0, M_1, M_2 et M_3 ?
   (c) Interpréter en module et argument la relation (1), puis déterminer la nature du polygone $M_nM_{n+1}M_{n+2}M_{n+3}$ pour tout entier naturel n.

Exercice 16 BAC 2023 :(04 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soit le nombre complexe a défini par

$$a = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

1. Montrer que $a^2 = -2\sqrt{3} - 2i$, puis en déduire le module de a. **0,5 + 0,5 pt**
2. Écrire a^2 sous forme trigonométrique puis vérifier qu'une des mesures de l'argument de a est $\frac{19\pi}{12}$. **0,5 + 0,5 pt**
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, puis de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. **01 pt**
4. Représenter sur le même graphique les points images de a, $-a$ et a^2. **01 pt**