Td Ln Expo

Exercice 4

Partie A

Soit $g(x) = 2x\ln(-x) + x + 1$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_g de g.
2. Calculer les limites aux bornes de D_g.
3. Étudier les variations de g.
4. Calculer $g(-1)$ puis en déduire le signe de $g(x)$.

Partie B

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2\ln(-x) + x + 1 & \text{si } x < 0 \\ x\ln(x)^2 + x + 1 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interprétez graphiquement les résultats.
3. Donner le domaine de dérivabilité de f puis montrer que

$$f'(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x < 0 \\ (1 + \ln x)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

4. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
5. Étudier les branches infinies de (C_f).
6. Dresser le tableau de variations de f.
7. Montrer que dans $]-\infty; -1[$, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α puis vérifier que $-1,8 < \alpha < -1,7$.
8. Construire (C_f) (unité 2 cm) (on précisera la tangente au point d'abscisse e^{-1} et on placera le point d'abscisse 1).

Partie C

Soit h la restriction de f à $I =]0;+\infty[$.

1. Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à préciser.
2. Étudier la dérivabilité de h^{-1} sur J.
3. a. Calculer $h(1)$.
   b. Calculer $(h^{-1})'(2)$.
4. Construire la courbe de h^{-1}.

Exercice 5

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = -x + 1 - 2\ln x$

1. Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variations.
2. Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x + \ln x}{x^2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. a. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.
   b. Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.
3. a. Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$
   b. Dresser le tableau de variations de f.
   c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0;+\infty[$ une unique solution β et que $\beta \in]0,56;0,57[$.
4. Construire (C).

Partie C

Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{x}$ et (Γ) sa courbe.

1. Étudier les positions relatives de (C) et (Γ).
2. Construire dans le même repère (Γ).
3. Soit I_λ l'aire en unité d'aires de la partie du plan délimitée par les courbes (C), (Γ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$ où λ est un nombre réel strictement supérieur à 1.
   a. Montrer que $I_\lambda = 1 - \dfrac{1}{\lambda}(1 + \ln\lambda)$.
   b. Déterminer $\lim\limits_{\lambda\to +\infty} I_\lambda$.

Exercice 6

Soit $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$

Partie A

Soit $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$.

1. Déterminer D_g et montrer que si $0 < x < 1$ alors $g(x) \geq 1$.
2. Montrer que g est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.
3. Calculer $g(1)$ et $g(2)$. Montrer qu'il existe un unique réel α strictement positif tel que $g(\alpha) = 0$. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.
4. Donner le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B

1. a. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f.
   b. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha^2}$.
   c. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. Donner une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1.
3. Donner le tableau de variations de f puis tracer (C_f).

Exercice 7

Partie A

On considère dans $]0; +\infty[$ la fonction g donnée par : $g(x) = x\ln(x) - 1$.

1. Dresser le tableau des variations de g.
2. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0; +\infty[$.
   b. Montrer que $1,76 < \alpha < 1,77$.
   c. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{1+x}{1+\ln(x)}$.

1. Justifie que $D_f =]0; +\infty[\setminus \left\{\dfrac{1}{e}\right\}$.
2. Calcule les limites de f aux bornes de D_f.
3. Étudie les branches infinies à (C_f).

4 a Démontre que $\forall x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(1+\ln(x))^2}$.

b Donne le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

c En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

5 Démontre que $f(\alpha) = \alpha$.

6 Trace la courbe (C_f) et son asymptote. (On prendra $\alpha = 1,76$)

Exercice 8

Partie A

Soit $g(x) = 2x - (x+1)\ln(x+1)$.

1 Déterminer le domaine de définition D_g de g.

2 Calculer les limites aux bornes de D_g.

3 Dresser le tableau de variations de g.

4 Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions 0 et α avec $\alpha \in]3,9;4[$.

5 Donner le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} x + \ln(1+x^2) & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1 Déterminer le domaine de définition D_f de f.

2 Calculer les limites aux bornes de D_f.

3 Étudier les branches infinies de (C_f).

4 Étudier la continuité puis la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement les résultats.

5 Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha+1}$, puis encadrer $f(\alpha)$.

6 Montrer que f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et $f'(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$.

7 Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x(x+1)\sqrt{x}}$.

8 Étudier les variations de f.

9 Dresser le tableau de variations de f.

10 Calculer $f(-2)$.

11 Tracer (C_f).

Partie C

Soit h la restriction de f sur $]-\infty;0]$.

1. Montrer que h réalise une bijection de $]-\infty;0]$ vers un intervalle J à préciser.
2. Étudier la dérivabilité de h^{-1}.
3. Déterminer $(h^{-1})'(\ln 5-2)$.
4. Tracer $(C_{h^{-1}})$.

Exercice 9

Partie A

On considère la fonction :

$$\begin{array}{rccl} u: & [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| - \dfrac{2x}{x^2-1} \end{array}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de u, calculer $u(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$.
2. Étudier les variations de u, dresser son tableau de variations. (il n'est pas nécessaire de calculer la limite de u en 1).
3. Déduire des résultats précédents que :
   - a. $\forall x \in [0;1[$, $u(x) \geq 0$.
   - b. $\forall x \in]1;+\infty[$, $u(x) < 0$.

Partie B

Soit g la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccl} g: & [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| - 1 \end{array}$$

1. Déterminer D_g le domaine de définition de g, puis étudier la limite de g en 1.
2.
   - a. Vérifier que $\dfrac{x+1}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1}$.
   - b. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{2}\ln\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right) = 1$.
   - c. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$. Interpréter graphiquement ce résultat.
   - d. Dresser le tableau de variations de g.
   - e. Montrer qu'il existe un réel unique $\alpha \in]0;1[$ tel que $g(\alpha) = 0$. Donner un encadrement de d'ordre 1 de α.
3. Tracer la courbe (C_g) de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité : $2cm$).

Partie C

Soit la fonction définie par : $f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}\right)$

1. Montrer que f est dérivable sur $[0;1[$ et que $f'(x) = g(x)$ pour tout $x \in [0;1[$.

2. Déterminer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_g) ; l'axe des abscisses ; l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$.

Exercice 10

Partie A

Soit la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{x} - 2 - \ln x$.

1. Étudier les variations de g.

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0;+\infty[$. Vérifier que

$$0,6 < \alpha < 0,7.$$

3. En déduire le signe de $g(x)$.

Partie B

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} (1-x)(1+\ln x) & \text{si } x \geq 1 \\ (1-x)\ln(1-x) & \text{si } x < 1 \end{cases}$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

2. Étudier la continuité de f en 1.

3. Étudier la dérivabilité de f en 1.

4. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.

5. Étudier les branches infinies de f.

6. Dresser le tableau de variations de f.

7. Tracer C_f dans un repère orthonormé, unité : $2cm$.

8. Soit h la restriction de f sur $[1;+\infty[$.

   a. Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et les variations.

   b. Résoudre $h^{-1}(x) = e$
   puis calculer $(h^{-1})'(2-2e)$.

   c. Tracer la courbe de h^{-1} dans le même repère.

Exercice 12

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\left(1 + e^{2-x}\right)$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité $2cm$.

1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 1 + (1-x)e^{2-x}$
   - a. Étudier les variations de h (on ne déterminera pas les limites aux bornes de D_h).
   - b. En déduire le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2.
   - a. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   - b. Préciser la nature de la branche infinie de f en $-\infty$.
   - c. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x]$, puis interpréter le résultat obtenu.
   - d. Préciser la position de (C_f) par rapport à la droite d'équation $(\Delta) : y = x$.
3.
   - a. Dresser le tableau de variations de f.
   - b. Montrer que f admet une bijection réciproque notée f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.
   - c. f^{-1} est-elle dérivable en 4 ?
   - d. Étudier la position (C_f) par rapport à sa tangente au point d'abscisse 2.
   - e. Construire (C_f) (on tracera la tangente à (C_f) au point d'abscisse 2).
   - f. Construire $(C_{f^{-1}})$ dans le repère précédent.

Exercice 13

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} (2x-1)e^{\frac{1}{x}}, & \text{si } x < 0 \\ x\ln(x+1), & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Partie A

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
3. Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$.
4. Étudier la branche infinie de (C_f) en $+\infty$. La continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

Partie B

1. Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$.
2. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $]0; +\infty[$.
3. Étudier les variations de $f'(x)$ puis en déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$.
4. Calculer $f'(x)$ pour tout $x < 0$. En déduire le signe de $f'(x)$.
5. Dresser le tableau de variations de f.

Partie C

Soit g la restriction de f sur $I =]-\infty; 0[$.

1. Montrer que g réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser.
2. Soit g^{-1} la bijection réciproque de g. Calculer $g(-1)$ puis $(g^{-1})'\left(-\frac{3}{e}\right)$.
3. Construire (C_f) et (C_g) dans un même repère.

Exercice 14

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}(1+\ln x) - e^{-1}, & \text{si } x \geq 1 \\ (1-x)e^{-\frac{1}{1-x}}, & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1. Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$ puis calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2. Étudier la continuité de f en 1.
3. a. Montrer que pour tout $x \in]1; +\infty[$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = e^{-x}\left(\dfrac{1-e^{x-1}}{x-1} + \dfrac{\ln x}{x-1}\right)$.

   b. Étudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter graphiquement le résultat.
4. Soit la fonction g définie par : $g(x) = -\ln x + \dfrac{1}{x} - 1$

   a. Dresser le tableau de variations de g.

   b. Calculer $g(1)$ et préciser le signe de $g(x)$.

   c. Calculer la dérivée de f sur chaque intervalle où elle est dérivable.

   d. Étudier le signe de $f'(x)$ et donner le tableau de variations de f.
5. a. Donner la nature de la branche infinie de f en $+\infty$.

   b. Montrer que la droite $(D) : y = -x$ est une asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$.

   c. Étudier la position de (C_f) par rapport à (D) sur $]-\infty; 1[$.
6. Construire (C_f).
7. Soit h la restriction de f sur $]-\infty; 1[$.

   a. Montrer que h réalise une bijection de $]-\infty; 1[$ vers un intervalle J à préciser.

   b. Calculer $h(0)$. h^{-1} est-elle dérivable en e^{-1} ? Si oui, calculer $(h^{-1})'(e^{-1})$.

   c. Tracer $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère.

Exercice 15

Partie A

On considère la fonction g définie par $g(x) = (x+1)^2e^{-x} - 2$.

1. Dresser le tableau de variations de g.
2. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$, puis vérifier que $\alpha \in]-2;-1[$.

   b. Donner le signe de $g(x)$ dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\alpha = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$
4. Tracer la courbe (C_g) de g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, d'unité $2cm$.

Partie B

Soit la fonction f définie par $f(x) = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{x}{2}}$ si $x \in I = [-2;-1]$.

1. Étudier les variations de f sur I.
2. En déduire que si $x \in I$, alors $f(x) \leq -1$.
3. Montrer que si $x \in I$, alors $|f(x) - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|x - \alpha|$
4. Montrer que $|f(x) - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|x - \alpha|$ pour tout $x \in I$.
5. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = -2, \quad u_{n+1} = f(u_n)$

   a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$

   c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

   d. En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

   e. Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Exercice 16

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 + \dfrac{3e^x}{e^x + 2\ln(x+1)} & \text{si } x \leq 0 \\ x + 2 + \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique $1cm$.

1. Etablir que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. a. Etudier la continuité de f en 0.

   b. Pour $x < 0$, montrer que $\dfrac{f(x) - 2}{x - 0} = 1 + \dfrac{2(e^x - 1)}{x} \times \dfrac{1}{e^x}$

   En déduire que $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

c Conclure sur la dérivabilité de f en 0 et interpréter les résultats.

3 a En utilisant les variations de la h définie par $h(x) = -x$, montrer que $x < (x+1)^2$ pour $x > 0$. En déduire que $\ln(x+1) < (x+1)^2$ pour $x > 0$.

b Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et utiliser $3.a$ pour déterminer son signe.

c Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$ et donner son signe.

4 a Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition D_f.

b Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x+1)]$ et interpréter graphiquement le résultat.

c Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+2)]$ et interpréter graphiquement le résultat.

d Etudier le signe de $f(x) - (x+1)$ pour $x < 0$, montrer que $f(x) - (x+2) > 0$ pour $x > 0$ et interpréter graphiquement les résultats.

5 Déterminer les coordonnées du point A de la courbe où la tangente est parallèle à l'asymptote pour $x > 0$.

6 Etablir que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.

7 Représenter graphiquement les courbes de f et de f^{-1} dans un même repère.

8 Calculer $\displaystyle\int_{-\ln 3}^{0} (f(x) - (x+1))dx$.

9 Interpréter graphiquement le résultat précédent en terme d'aire.

Exercice 17

Partie A

On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln x + 1 - e^{-x}$.

1 Etudier les variations de g.

2 Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $0,6 < \alpha < 0,7$.

3 En déduire le signe de $g(x)$.

Partie B

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x\ln x + e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{e^{\frac{1}{2}x}}{|x^2 - 1|} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1 Justifier que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2 Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue.

3 Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. On pourra montrer que si $x \in]-1;0[$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{e^{\frac{1}{2}x} - 1}{\frac{1}{2}x}\right) - x}{x^2 - 1}$$

4. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f puis étudier les branches infinies.

5. Dresser le tableau de variations de f.

6. Montrer que $f(\alpha) = (\alpha + 1)\ln\alpha + 1$.

7. Soit h la restriction de f à $]\alpha; +\infty[$

   a. Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à préciser.

   b. h^{-1} est-elle dérivable sur J ? Justifier.

   c. Calculer $h(1)$ puis $(h^{-1})'\left(\dfrac{1}{e}\right)$.

8. Tracer C_f et $C_{h^{-1}}$ dans le même repère d'unité $2cm$.

9. Soit $\lambda > 1$ et $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire en cm^2 du domaine limité par C_h, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$. Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$ et sa limite en $+\infty$.

Exercice 18

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - e^{2x-2}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. Vérifier que pour tout réel x non nul, $f(x) = x\left[1 - 2e^{-2}\left(\dfrac{e^{2x}}{2x}\right)\right]$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

3. Dresser le tableau de variations de f.

4. Montrer que la droite (D) : $y = x$ est asymptote à C_f en $-\infty$. Étudier la position relative de C_f par rapport à (D).

5. Étudier la branche infinie de C_f en $+\infty$.

6. Déterminer une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 1.

7. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in I =]0; \frac{1}{2}[$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

8. Tracer C_f, (D) et (T).

Partie B

On définit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = e^{2u_n - 2} \end{cases}$

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x-2}$. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à $g(x) = x$. En déduire $g(\alpha)$.

2. Démontrer que pour tout $x \in I$, $|g'(x)| \leq \dfrac{2}{e}$.

3. Démontrer que pour tout $x \in I$, $g(x) \in I$.

4. a. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{e}|u_n - \alpha|$
   b. En déduire que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n$.
   c. Montrer que (u_n) converge vers un réel à déterminer.
   d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-5}$.

Exercice 19

Partie B

Soit la fonction h définie par $h(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$.

1. Dresser le tableau de variations de h.
2. a. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0, 1[$.
2. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
3. En déduire le signe de $h(x)$.

Partie B

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats.
3. Etudier les branches infinies de C_f.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Montrer que $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$.
6. Tracer C_f dans un repère orthonormé d'unité $2cm$.

Partie C

Soit g la restriction de f à $]-\infty, -1[$.

1. Prouver l'existence de g^{-1}. Etudier la dérivabilité de g^{-1}.
2. Résoudre $g^{-1}(x) = 2$, puis calculer

$$(g^{-1})'\left(\frac{2 - e^{-\frac{1}{2}}}{2}\right).$$

3. Tracer la courbe de g^{-1} dans le même repère.