PROBLÈMES

PROBLÈME 1

Partie A

Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x(1+\ln x)^2 - 1$.

1. On admettra que g est dérivable sur $]0;+\infty[$.
   (a) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.
   (b) Vérifier que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = (1+\ln x)(3+\ln x)$.
   (c) Étudier le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire le sens de variation de g.
2. Dresser le tableau de variation de g. (On ne calculera pas les limites en 0 et $+\infty$).
3. (a) Calculer $g(1)$.
   (b) En déduire que pour tout $x \in]0;1[$, $g(x) < 0$ et pour tout $x \in]1;+\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + \frac{1}{1+\ln x} - 1 \quad \text{si } x \in]0;\frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e};+\infty[\\ f(0) = -1 \end{cases}$$

(C) est la représentation graphique dans le repère orthonormé (O, I, J) (unités : 2cm).

1. (a) Montrer que f est continue en 0.
   (b) Étudier la dérivabilité de f en 0.
   (c) En déduire la tangente à (C) au point $A(0;-1)$.
2. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to\frac{1}{e}^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{e}^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   (b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à (C).
   (c) Étudier les positions relatives de (C) et (Δ).
   (d) Préciser l'autre asymptote à la courbe (C) de f.
3. (a) Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[\setminus\{\frac{1}{e}\}$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+\ln x)^2}$.
   (b) En déduire le sens de variation de f.
   (c) Dresser son tableau de variation.

Partie C

1. Calculer la dérivée de la fonction h définie sur $]\frac{1}{e};+\infty[$ par $h(x) = \ln(1 + \ln x)$.

2. (a) En déduire les primitives sur $]\frac{1}{e};+\infty[$ de la fonction $k : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$.

   (b) Déterminer la primitive de k qui prend la valeur -1 en 1.