Ministère de l'Éducation Nationale
Inspection Académique de Kédougou
Lycée Dindéfelo
Cellule de Mathématiques

Année scolaire 2024-2025
Date : 02/12/2024
Classe : Terminale S2
Professeur : M. BA

<u>Suites Numériques</u>

Exercice 1

Soit (u_n) une suite définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{3u_n + 1}.$$

1. Calculer les 4 premiers termes de la suite (u_n).
2. Représenter graphiquement la suite (u_n).
3. Montrer que (u_n) est périodique de période 3.

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 13, \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 7. \end{cases}$$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n < 14$.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $v_n = 14 - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, puis écrire v_n en fonction de n.
   (b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = \frac{7u_n - 25}{u_n - 3}. \end{cases}$$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n \neq 5$.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \frac{1}{u_n - 5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.
   (b) Déterminer v_n, puis u_n en fonction de n.
3. (a) Calculer : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ en fonction de n.
   (b) On pose : $P_n = 2^{v_0} \times 2^{v_1} \times \cdots \times 2^{v_n}$. Déterminer P_n en fonction de n.

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3}, \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*),\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+(n+2)u_n}. \end{cases}$$

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $v_n = \frac{1}{u_n} - n$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique.
2. (a) Déterminer v_n et u_n en fonction de n.
   (b) Calculer en fonction de n la somme : $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

Exercice 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = \frac{2u_n^3}{3u_n^2+1}. \end{cases}$$

1. (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n > 0$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.
   (b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Exercice 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 4$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 4 - u_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
   (c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 7

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{10}{3}, \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 - 3u_n + 9}{u_n}. \end{cases}$$

   (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n \geq 3$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que : $(\forall n \in \mathbb{N}), 3 \leq u_n \leq \frac{10}{3}$.

2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} v_0 = \frac{1}{2}, \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ v_{n+1} = \frac{2v_n^2}{1+v_n^2}. \end{cases}$$

   (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), v_n > 0$ et $v_n \leq \frac{1}{2}$.
   (b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$. En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} t_0 = 1, \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ t_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}t_n + \frac{3}{2}}. \end{cases}$$

   Montrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

4. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} w_0 = 1, \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ w_{n+1} = f(w_n). \end{cases}$$

   où $f(x) = x^2 - 2x$.

5. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), w_n \geq 3$.
6. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{1 + x + x^2}.$$

1. (a) Étudier les variations de f.
   (b) Déterminer $f([0, 1])$.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 1$, puis $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}$, en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.
   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, puis calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 9

Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 2$ où
$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+1}. \end{cases}$$
4. Soit (u_n) la suite définie par :
$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 3u_n - 5, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$
Démontrer sur $\mathbb{N}$ que :
$$u_n = \frac{1}{2}(3^n - 5).$$
5. Soit la suite définie par $u_1 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$
Démontrer sur $\mathbb{N}^*$ que $u_n \geq 2$.
6. Démontrer que $\forall n \geq 4,\ 2^n \geq n^2$.

Exercice 10

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 0 \leq u_n \leq 4$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$.
   (b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 4 - u_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Exercice 11

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. (a) Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 2.

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_n-\sqrt{3}}{u_n+\sqrt{3}}$.
   (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique en déterminant sa raison et son premier terme.
   (b) Déterminer u_n en fonction de n.

Exercice 12

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$U_1 = 1, \quad (U_{n+1})^2 = 4U_n, \quad \forall n \geq 1.$$

1. Calculer U_2, U_3, U_4 et U_5 sous la forme 2^α.
2. Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = \ln(U_n) - \ln 4,\ \forall n \geq 1$.
   (a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique ; préciser la raison et le premier terme.
   (b) En déduire l'expression de V_n, puis celle de U_n en fonction de n.
3. Pour quelles valeurs de n a-t-on $U_n > 3,96$?

Exercice 13

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par :

$$U_1 = 2, \quad U_{n+1} = \frac{U_n + 2V_n}{3}, \quad V_1 = 8, \quad V_{n+1} = \frac{U_n + 5V_n}{6}, \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Soit $a_n = V_n - U_n$ pour tout entier naturel n non nul.
   (a) Démontrer que (a_n) est une suite géométrique.
   (b) Exprimer a_n en fonction de n.
2. (a) Démontrer que (U_n) est croissante et (V_n) décroissante.
   (b) Démontrer que (U_n) est majorée et (V_n) minorée.
   (c) En déduire que (U_n) et (V_n) ont une limite commune.
3. Soit $w_n = \frac{1}{4}U_n + V_n$ pour tout entier naturel n non nul.
   (a) Montrer que (w_n) est une suite constante.
   (b) En déduire les limites de (U_n) et (V_n).

Exercice 14

Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 2$.

2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) converge vers un réel l à déterminer.
4. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$, puis $|u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$.
5. Retrouver les résultats de la troisième question.

Exercice 15

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par :

$$\begin{cases} U_1 = 12, \\ U_{n+1} = \frac{U_n + 2V_n}{3}, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_1 = 1, \\ V_{n+1} = \frac{U_n + 3V_n}{4}, \end{cases} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*.$$

1. $W_n = U_n - V_n$ pour tout n non nul. Montrer que (W_n) est une suite géométrique convergente.
2. Exprimer W_n en fonction de n.
3. Démontrer que (U_n) est décroissante et (V_n) est croissante.
4. Démontrer que pour tout entier non nul n, $U_n \geq V_n$, et en déduire que $V_1 \leq V_n \leq U_n \leq U_1$. Conclure.
5. $T_n = 3U_n + 8V_n$ avec n entier naturel non nul. Montrer que (T_n) est une suite constante, puis déterminer les limites de (U_n) et (V_n).

Exercice 16

On considère la fonction f définie par $f(x) = x - \ln|x|$. Soit (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer son ensemble de définition D_f, puis calculer les limites aux bornes de D_f.
2. Calculer sa dérivée, étudier son signe puis dresser son tableau de variation.
3. Montrer que (C_f) coupe l'axe des abscisses en un seul point A d'abscisse α.
4. Établir les inégalités suivantes :
   (a) $\forall x \geq 1,\ x - \ln x \geq 1$ (on pourra utiliser l'étude de la fonction f de la partie I).
   (b) $0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq x$.
   (c) $0 \leq x \leq 1,\ \ln(1+x) - x - \frac{x^2}{2} \geq 0$ (on pourra étudier les variations de $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$).
5. On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_0 = 2, \quad U_{n+1} = U_n - \ln U_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Donner une valeur approchée de U_1 à 10^{-2} près et montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq 1$.
   (b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.
6. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = U_n - 1$.

(a) Calculer V_0, puis exprimer V_{n+1} en fonction de V_n.
(b) Préciser le sens de variation de la suite (V_n).
(c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq V_n \leq 1$. En déduire que (V_n) converge.
(d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} \leq \frac{1}{2}V_n$ et $0 \leq V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. En déduire la limite de (V_n).

Exercice 17

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Un individu décide d'investir dans un plan d'épargne où le capital initial est de 5000 F CFA. Chaque année, le montant investi croît de 5% par rapport à l'année précédente, grâce aux intérêts composés.

1. Déterminer la nature de la suite représentant le capital total après n années.
2. Calculer le premier terme de cette suite.
3. Exprimer le terme général u_n de la suite en fonction de n.
4. Calculer la somme $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, représentant le capital total accumulé après n années.
5. Calculer la limite de S_n lorsque $n \to +\infty$, si elle existe.

Partie B

Un individu décide de rembourser une dette de 10 000 € par versements annuels. Chaque année, il augmente son remboursement de 200 € par rapport à l'année précédente.

1. Déterminer la nature de la suite représentant le montant remboursé chaque année.
2. Calculer le premier terme de cette suite.
3. Exprimer le terme général u_n de la suite en fonction de n.
4. Calculer la somme $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, représentant le total remboursé après n années.
5. Calculer la limite de S_n lorsque $n \to +\infty$, si elle existe.