◇◇◇ Lycée de Dindéfélo ◇◇◇			A.S. : 2024/2025
Matière: Mathématiques	Niveau : TS2	Date: 09/12/2024	Durée : 4 heures

Correction du devoir n° 2 Du 1er Semestre

Exercice 1 : 0,5 × 10 = 5 points

1. Déterminons une primitive F de la fonction f sur I.

a $f(x) = (6x-3)(4x^2-4x+2)^3 \quad ; I = \mathbb{R}$ **(0,5pt)**

$$\begin{aligned} f(x) &= (6x-3)(4x^2-4x+2)^3 \\ &= 3(2x-1)(4x^2-4x+2)^3 \\ &= 3 \times \frac{1}{4}(8x-4)(4x^2-4x+2)^3 \\ &= 3 \times \frac{1}{4}(4x^2-4x+2)'(4x^2-4x+2)^3 \\ &= 3 \times \frac{1}{4}u'u^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}u^4 + k \\ &= 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}(4x^2-4x+2)^4 + k \\ &= \frac{3}{16}(4x^2-4x+2)^4 + k \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{F(x) = \frac{3}{16}(4x^2-4x+2)^4} + k}$$

b $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{3+\cos x}} \quad ; I = \mathbb{R}$ **(0,5pt)**

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin x}{\sqrt{3+\cos x}} \\ &= \frac{-(3+\cos x)'}{\sqrt{3+\cos x}} \\ &= \frac{-(u)'}{\sqrt{u}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= -2\sqrt{u} + k \\ &= -2\sqrt{3+\cos x} + k \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{F(x) = -2\sqrt{3+\cos x} + k}}$$

c $f(x) = 2\cos 3x - 3\sin 2x \quad ; I = \mathbb{R}$ **(0,5pt)**

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\cos 3x - 3\sin 2x \\ &= 2 \times \cos(ax+b) - 3 \times \sin(ax+b) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 2 \times \frac{1}{a}\sin(ax+b) + 3 \times \frac{1}{a}\cos(ax+b)\\
&= 2 \times \frac{1}{3}\sin(3x) + 3 \times \frac{1}{2}\cos(2x)\\
&= \frac{2}{3}\sin(3x) + \frac{3}{2}\cos(2x)
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{F(x) = \frac{2}{3}\sin(3x) + \frac{3}{2}\cos(2x) + k}$$

d $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2-1}} + \sin x \sin 2x \quad ; I =]-\infty; -1[$ **(0,5pt)**

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}} + \sin x \sin 2x\\
&= \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}} + \sin x \times \cos x \times \sin x\\
&= \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}} + \cos x \times \sin^2 x\\
&= \frac{3}{2}\frac{(x^2-1)'}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{3}(\sin^3 x)'\\
&= \frac{3}{2}\frac{(u)'}{\sqrt{u}} + \frac{1}{n+1}(\sin^{n+1} x)'\\
F(x) &= \frac{3}{2} \times 2\sqrt{u} + \frac{1}{3}\sin^3 x + k\\
&= 3\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{3}\sin^3 x + k
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{F(x) = 3\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{3}\sin^3 x + k}$$

2 Résoulvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1+i)z + i = 0$. **(0,5pt)**

$\Delta = -2i$

Posons $\Delta = \delta^2$ avec $\delta = x + yi$ et $x, y \in \mathbb{R}$

$\delta^2 = \Delta \implies x^2 - y^2 + 2xyi = -2i.$ et $|\Delta| = 2$

Cela donne le système suivant :

$$
\begin{cases} x^2 + y^2 = |\Delta|, \\ x^2 - y^2 = 0, \\ 2xy = -2. \end{cases}
\implies
\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ x^2 - y^2 = 0, \\ xy = -. \end{cases}
$$

$$
\implies \begin{cases} 2x^2 = 2, \\ 2y^2 = 2, \\ 2xy = -1. \end{cases}
$$

$$
\implies \begin{cases} x^2 = 1, \\ y^2 = 1, \\ xy = -1. \end{cases}
$$

$$
\implies \begin{cases} x = 1, x = -1, \\ y = 1, y = -1 \\ xy = -1. \end{cases}
$$

Si $x = 1$, alors $y = -1$.

Si $x = -1$, alors $y = 1$.

$\delta_1 = 1 - i$ et $\delta_2 = -1 + i$.

Les solutions de l'équation quadratique sont données par :

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Pour $\delta_1 = 1 - i$:

$$z_1 = \frac{-(-1-i) + (1-i)}{2} = \frac{1+i+1-i}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

- Pour $\delta_2 = -1 + i$:

$$z_2 = \frac{-(-1-i) - (-1+i)}{2} = \frac{1+i-(-1+i)}{2} = \frac{1+i+1-i}{2} = \frac{2i}{2} = i.$$

Résultat final : Les solutions de $z^2 - (1+i)z + i = 0$ sont :

$$z_1 = 1 \quad \text{et} \quad z_2 = i.$$

$$\mathbf{S = \{1, i\}}$$

Exercice 2 : (04,75 points ≈ 60 mns)

1 a Écrivons le complexe $z = -1 + i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle. **(0,75pt)**

$$z = -1 + i\sqrt{3} \implies z = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

- Forme trigonométrique

$$z = 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$\mathbf{z = 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]}$$

- Forme exponentielle

$$z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\mathbf{z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}}$$

b Donnons le module et un argument de $z = (1-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}$. **(1pt)**

- Module $|z| = (1-\sqrt{2})$

$$\mathbf{|z| = (1-\sqrt{2})}$$

- Argument

$$\arg(z) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

$$\mathbf{\arg(z) = \frac{\pi}{4}[2\pi]}$$

2 a Donnons le module et un argument de $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1-i$. **(1pt)**

$$z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$
$$\Longrightarrow z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

- pour z_1
  - Module
    $|z_1| = \sqrt{2}$

    $$|\mathbf{z_1}| = \sqrt{\mathbf{2}}$$

  - Argument
    $\arg(z_1) = -\frac{\pi}{6}[2\pi]$

    $$\arg(\mathbf{z_1}) = -\frac{\pi}{\mathbf{6}}[\mathbf{2}\pi]$$

- pour z_2
  - Module
    $|z_2| = \sqrt{2}$

    $$|\mathbf{z_2}| = \sqrt{\mathbf{2}}$$

  - Argument
    $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

    $$\arg(\mathbf{z_2}) = -\frac{\pi}{\mathbf{4}}[\mathbf{2}\pi]$$

b Déduisons le module et un argument de chacun des complexes $u = \dfrac{z_1}{z_2}$ et u^5. **(1pt)**

- pour u
  - Module
    $|u| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = 1$

    $$|\mathbf{u}| = \mathbf{1}$$

  - Argument

$$\arg(u) = \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \Longrightarrow \arg(u) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$
$$\Longrightarrow \arg(u) = -\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$$
$$\Longrightarrow \arg(u) = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}[2\pi]$$
$$\Longrightarrow \arg(u) = \frac{\pi}{12}[2\pi]$$

$\arg(u) = \dfrac{\pi}{12}[2\pi]$

$$\arg(\mathbf{u}) = \frac{\pi}{\mathbf{12}}[\mathbf{2}\pi]$$

- pour u^5
  - Module
    $|u^5| = 1$
  - Argument
    $\arg(u^5) = 5\arg(u) \implies 5\arg(u) = \frac{5\pi}{12}[2\pi]$

$$\arg(\mathbf{u^5}) = \frac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{12}}[\mathbf{2\pi}]$$

c Déduis en les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. **(1pt)**

On a : $u = e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Or :

$$\begin{aligned} u = \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}}{1-i} \\ &= \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)} \\ &= \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)} \cdot \frac{1+i}{1+i} \\ &= \frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{2(1+1)} \\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} \end{aligned}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{\mathbf{12}}\right) = \frac{\sqrt{\mathbf{6}}+\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{4}} \textbf{ et } \sin\left(\frac{\pi}{\mathbf{12}}\right) = \frac{\sqrt{\mathbf{6}}-\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{4}}$$

Problème : (12,75 points $\approx$ 144 mns)

On note (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité $1cm$ avec

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-2x^2}{x^2-1} & ; \text{si } x \leq 0 \\ x+\sqrt{x^2+x} & ; \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire : (2pts)

Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = -x^3 + 3x - 4$.

1. Étudions les variations de g puis dressons son tableau de variations. **(0,75pt)**

$g'(x) = -3x^2 + 3$

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\implies -3x^2+3=0 \\ &\implies -x^2+1=0 \\ &\implies x=-1 \textbf{ ou } x=1 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$-x^2+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Sur $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$ $g'(x)\leq 0$ donc g est décroissant

Sur $[-1;1]$ $g'(x)\geq 0$ donc g est croissant

Limites

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} g(x) &= \lim_{x\to-\infty} -x^3+3x-4\\ &= \lim_{x\to-\infty} -x^3\\ &= +\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} g(x) &= \lim_{x\to+\infty} -x^3+3x-4\\ &= \lim_{x\to+\infty} -x^3\\ &= -\infty\end{aligned}$$

$g(-1)=-(-1)^3+3(-1)-4$

$g(-1)=1-3-4$

$\quad = -6$

$g(1)=-(1)^3+3(1)-4$

$g(1)=-1+3-4$

$\quad = -2$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-6	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$

2 a Montrons que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in\mathbb{R}$. **(0,5pt)**

<u>Existance</u>

D'après le tableau de vairation $\lim_{x\to-\infty} g(x)\times g(-1)<0$ d'où l'existance d'une solution

<u>Unicité</u>

g est continue et strictement décroissant de $]-\infty,-1[$ vers $]+\infty,-6[$ d'où l'unicité de la solution

b Donnons un encadrement de α à 10^{-1}. **(0,5pt)**

On sait que la solution unique α vérifie $\alpha<-1$.

Calculons $g(x)=-x^3+3x-4$ pour deux valeurs décimales consécutives.

$$g(-2)=-(-8)+3(-2)-4=8-6-4=-2<0$$

$$g(-1{,}5)=-(-3{,}375)+3(-1{,}5)-4=3{,}375-4{,}5-4=-5{,}125<0$$

On cherche donc plus à gauche.

$$g(-2{,}1)=-(-9{,}261)+3(-2{,}1)-4=9{,}261-6{,}3-4=-1{,}039<0$$

$$g(-2{,}2)=-(-10{,}648)+3(-2{,}2)-4=10{,}648-6{,}6-4=0{,}048>0$$

La fonction g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$, donc elle change de signe une seule fois sur cet intervalle.

Encadrement à 10^{-1} :

$$\boxed{-2{,}2<\alpha<-2{,}1}$$

3 En déduire le signe de $g(x)$ sur $]-\infty;0]$. **(0,25pt)**

$$\begin{aligned}
&g(x)>0 \quad \text{si } x\in]-\infty,\alpha[\\
&g(x)=0 \quad \text{si } x=\alpha\\
&g(x)<0 \quad \text{si } x\in]\alpha,0]
\end{aligned}$$

Partie B : Étude de la fonction f (9pts)

1 Déterminons l'ensemble de définition D_f de f. **(0,5pt)**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-1} & ;\text{ si } x\leq 0\\ x+\sqrt{x^2+x} & ;\text{ si } x>0\end{cases} \quad \text{Posons } f(x)=\begin{cases}f_1(x) & ;\text{ si } x\leq 0\\ f_2(x) & ;\text{ si } x>0\end{cases}$$

- f_1

  $f_1 \quad \exists \quad$ ssi $x^2-1\neq 0$ et $x\leq 0$

  $x\neq -1$ et $x\neq -1$ et $x\in]-\infty,0]$

  $-1\in]-\infty,0]$ et $1\notin]-\infty,0]$

  $\underline{Df_1=]-\infty;-1[\cap]-1;0[}$

- f_2

  $f_2 \quad \exists \quad$ ssi $x^2+x\geq 0$ et $x>0$

  Posons $x^2+x=0$

  $x^2+x=0 \implies x=0$ **ou** $x=-1$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
x^2+x	//////	//////	$+$	

$\underline{Df_2=]0;+\infty[}$

$$\text{Donc} \quad \begin{aligned}Df&=Df_1\cup Df_2\\ &=]-\infty;-1[\cap]-1;0[\cup]0;+\infty[\\ &=\mathbb{R}\setminus\{-1\}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{Df}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}}$$

2 a

- Calculons les limites de f aux bornes de D_f . **(1pt)**
  - $\underline{\text{En } -\infty}$: $f(x)=f_1(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x)&=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2x^2}{x^2-1}\\ &=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}\\ &=\lim_{x\to-\infty} x\\ &=-\infty\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{\mathbf{x}\to-\infty}\mathbf{f(x)}=-\infty}$$

– <u>En $+\infty$</u>: $f(x) = f_2(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} x + \sqrt{x^2+x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} x + \sqrt{x^2+x} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = +\infty}$$

– <u>En -1^-</u>: $f(x) = f_1(x)$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{x^3-2x^2}{x^2-1}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$			0		

$$\begin{aligned}&= ``\frac{-3}{0}" \\ &= ``\frac{-3}{0^+}" \\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{\mathbf{x}\to-1^-} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\infty}$$

– <u>En -1^+</u>: $f(x) = f_1(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1^+} f(x) &= \lim_{x\to1^+} \frac{x^3-2x^2}{x^2-1} \\ &= \frac{-3}{0^-} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{\mathbf{x}\to-1^+} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = +\infty}$$

- Déduisons-en l'existence d'une asymptote dont on précisera.**(0,25pt)**
  Comme $\lim_{x\to-1} f(x) = \infty$ donc $x = -1$ est une asymptote verticale

$$\boxed{\text{Donc } \mathbf{x = -1} \text{ est une asymptote verticale à } (\mathcal{C}_\mathbf{f})}$$

b

- Pour $x \leq 0$, déterminons les réels a, b, c et d tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{cx+d}{x^2-1}$**(0,5pt)**

$$\begin{aligned}f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2-1} &\implies f(x) = \frac{(ax+b)(x^2-1)+cx+d}{x^2-1} \\ &\implies f(x) = \frac{ax^3+bx^2-ax-b+cx+d}{x^2-1} \\ &\implies f(x) = \frac{ax^3+bx^2+(c-a)x+(d-b)}{x^2-1}\end{aligned}$$

On a $\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-1} = \dfrac{ax^3+bx^2+(c-a)x+(d-b)}{x^2-1}$

par identification $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c - a = 0 \\ d - b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c - 1 = 0 \\ d + 2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \\ d = -2 \end{cases}$

Ainsi, $f(x) = x - 2 + \dfrac{x-2}{x^2-1}$

- Déduisons-en la nature de la branche infinie en $-\infty$. **(0,25pt)**
  En posant $(\Delta_1) : y = x - 2$, si $\lim_{x\to-\infty} f(x) - y = 0$ alors $y = x - 2$ est asymptote oblique
  En effet

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) - y &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{x^2-1}\\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2}\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } (\mathbf{\Delta_1}) : \mathbf{y = x - 2} \text{ est une asymptote oblique à } (\mathcal{C}_\mathbf{f})\text{en } -\infty}$$

c Donner la nature de l'asymptote en $+\infty$. **(0,5pt)**
Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

- Cherchons $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x^2+x}}{x}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}{x}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\\ &= 2\end{aligned}$$

  Donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$

- Cherchons $\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x &= \lim_{x\to+\infty} x + \sqrt{x^2+x} - 2x\\ &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - x\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } (\mathbf{\Delta_2}) : \mathbf{y = 2x + \frac{1}{2}} \text{ est une asymptote oblique à } (\mathcal{C}_\mathbf{f})\text{en } +\infty}$$

3 a Montrons que f est continue sur D_f. **(0,75pt)**

- **Continuité sur chaque intervalle**
  - **Sur** $]-\infty, 0] \setminus \{-1\}$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{x^3-2x^2}{x^2-1}$ est une fonction rationnelle.
Elle est donc continue sur son domaine de définition $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.
En particulier, elle est continue sur $]-\infty,0]\setminus\{-1\}$.

- **Sur** $]0,+\infty[$
  Pour tout $x>0$, on a $x^2+x>0$, donc la fonction $x\longmapsto\sqrt{x^2+x}$ est bien définie et continue sur $]0,+\infty[$.
  Ainsi, la fonction $x\longmapsto x+\sqrt{x^2+x}$ étant somme de fonctions continues, est continue sur $]0,+\infty[$.

- **Continuité en** 0
  - En 0^-: $f(x)=f_1(x)$
    $$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\frac{x^3-2x^2}{x^2-1} = 0$$
    $$\lim_{x\to0^-} f(x) = 0$$
  - En 0^+: $f(x)=f_2(x)$
    $$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(x+\sqrt{x^2+x}\right) = 0$$
    $$\lim_{x\to0^+} f(x) = 0$$

  On a $f(0)=\dfrac{0^3-2\cdot0^2}{0^2-1}=0$
  Finalement $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0

- **Conclusion**
  La fonction f est continue sur $]-\infty,0]\setminus\{-1\}$, sur $]0,+\infty[$ et en 0.

  $$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}^-}\mathbf{f(x)} = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}^+}\mathbf{f(x)} = \mathbf{f(0)} = \mathbf{0} \text{ donc f est continue sur } \mathbf{D_f} = \mathbb{R}\setminus\{-\mathbf{1}\}.$$

b Étudions la dérivabilité de f en 0 puis interprétons le résultat obtenu. **(1,5pt)**

- Étudions la dérivabilité de f en 0
  - En 0^-: $f(x)=f_1(x)$
    $$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^-}\frac{\frac{x^3-2x^2}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to0^-}\frac{x^3-2x^2}{x^2-x} = \lim_{x\to0^-}\frac{x^2-2x}{x-1} = 0$$
  - En 0^+: $f(x)=f_2(x)$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{x+\sqrt{x^2+x}}{x}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-x^2-x}{x(x-\sqrt{x^2+x})}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{x(x-\sqrt{x^2+x})}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{(x-\sqrt{x^2+x})}\\
&= \text{"}\frac{-1}{0}\text{"}
\end{aligned}
$$

Supposons que $x-\sqrt{x^2+x}>0$

$x-\sqrt{x^2+x}>0 \implies \sqrt{x^2+x}<x$

$$
\sqrt{x^2+x}<x \implies \begin{cases} x^2+x>0\\ x>0\\ x^2+x<x^2\end{cases}
$$

$$
\implies \begin{cases} x^2+x>0\\ x>0\\ x<0\end{cases}
$$

$$
\begin{cases} x^2+x=0\\ x=0\end{cases} \implies \begin{cases} x=0 \textbf{ ou } x=-1\\ x=0\end{cases}
$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x^2+x			0		0	$+$	
x					0	$+$	
x					0	$+$	

$$S=\emptyset$$

Ainsi, il n'existe pas de $x>0$ pour lequel $x-\sqrt{x^2+x}>0$

Donc $x-\sqrt{x^2+x}<0,\ \forall x\in]0;+\infty[$

Ainsi $\forall x\in]0;+\infty[$ $f'(x)>0$ donc f est croissant $0;+\infty[$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{(x-\sqrt{x^2+x})}\\
&= \frac{-1}{0^-}\\
&= +\infty
\end{aligned}
$$

Autre Méthode

++

On calcule la dérivée à droite en 0 :

$$
f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+\sqrt{x^2+x}}{x}.
$$

On écrit :

$$
\frac{x+\sqrt{x^2+x}}{x}=1+\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}.
$$

Or,

$$
\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}=\sqrt{1+\frac{1}{x}}.
$$

Lorsque $x \to 0^+$, on a $\frac{1}{x} \to +\infty$, donc

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}} \to +\infty.$$

Ainsi,

$$f'_+(0) = +\infty.$$

++

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty}$$

- Interprétons le résultat obtenu.
  - f est dérivable à gauche de 0 et $y = 2x$ est une démi-tangent en 0^- ;
  - f n'est pas dérivable à droite de 0 donc admet une démi-tangent orientée vers le haut en 0^+

  Le point d'abscisse 0 est donc un point anguleux, ce qui explique la non-dérivabilité de f en 0.

4 Démontrons que : $f(x) = -2 + \frac{3(\alpha-2)}{\alpha^2-1}$. **(0,5pt)**

$f(x) = \frac{x^3-2x^2}{x^2-1} \implies f(x) = \frac{\alpha^3-2\alpha^2}{\alpha^2-1}$

Comme $g(\alpha) = 0$ alos $-\alpha^3 + 3\alpha - 4 = 0$ donc $\alpha^3 = 3\alpha - 4$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(\alpha) = \frac{\alpha^3-2\alpha^2}{\alpha^2-1} &\implies f(\alpha) = \frac{\alpha^3-2\alpha^2}{\alpha^2-1} \\ &\implies f(\alpha) = \frac{3\alpha-4-2\alpha^2}{\alpha^2-1} \\ &\implies f(\alpha) = -\frac{2\alpha^2-3\alpha+4}{\alpha^2-1} \\ &\implies f(\alpha) = -\frac{2(\alpha^2-1)-3(\alpha-2)}{\alpha^2-1} \\ &\implies f(\alpha) = \frac{-2(\alpha^2-1)+3(\alpha-2)}{\alpha^2-1} \\ &\implies f(\alpha) = \frac{-2(\alpha^2-1)}{\alpha^2-1} + \frac{3(\alpha-2)}{\alpha^2-1} \\ &\implies f(\alpha) = -2 + \frac{3(\alpha-2)}{\alpha^2-1} \end{aligned}$$

5 a Montrons que $\forall x \in]-\infty;-1[\cup]-1;0[$, on a : $f'(x) = \frac{-xg(x)}{(x^2-1)^2}$ puis étudier son signe

- Montrons que $\forall x \in]-\infty;-1[\cup]-1;0[$, on a : $f'(x) = \frac{-xg(x)}{(x^2-1)^2}$ **(0,5pt)**

  On a : $f'(x) = \frac{-xg(x)}{(x^2-1)^2}$

  La fonction f est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]-1,0[$ comme quotient de fonctions dérivables, avec $x^2-1 \neq 0$ sur ces intervalles.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x^3-2x^2)'(x^2-1)-(x^3-2x^2)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}\\
&= \frac{(3x^2-4x)(x^2-1)-(x^3-2x^2)(2x)}{(x^2-1)^2}.\\
&= \frac{3x^4-3x^2-4x^3+4x-(2x^4-4x^3)}{(x^2-1)^2}\\
&= \frac{x^4-3x^2+4x}{(x^2-1)^2}\\
&= \frac{-x(-x^3+3x-4)}{(x^2-1)^2}\\
&= \frac{-xg(x)}{(x^2-1)^2}
\end{aligned}
$$

Ainsi, $\forall x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 0[, \quad f'(x) = \dfrac{-xg(x)}{(x^2-1)^2}$.

- le signe de $f'(x)$ dépend du numérateur **(0,5pt)**

x	$-\infty$		α		-1		0		$+\infty$
$-x$		$+$		$+$	$\|$	$+$	0		
$g(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$			
$-xg(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0		

Ansi,
si $x \in]-\infty, \alpha]$, $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $]-\infty; \alpha]$
si $x \in [\alpha, -1[\cup]-1, 0]$, $f'(x) \leq 0$ donc f est croissante sur $[\alpha, -1[\cup]-1, 0]$

b Calculons $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$ et étudions son signe.

- Calculons $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$ **(0,5pt)**

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 1 + \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}\\
&= \frac{2\sqrt{x^2+x}+2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}\\
&= \frac{2\sqrt{x^2+x}+2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}
\end{aligned}
$$

- étudions son signe **(0,25pt)**

Si $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2\sqrt{x^2+x}+2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$ le signe dépend du numérateur

Or $2\sqrt{x^2+x}+2x+1 > 0 \, \forall x \in]0; +\infty[$

Ainsi $\forall x \in]0; +\infty[$ $f'(x) > 0$ donc f est croissant $]0; +\infty[$

c Dressons le tableau de variation de f sur D_f. **(0,75pt)**

x	$-\infty$		α		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	$-\infty \,\|\, 2$	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$+\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

6 Construisons soigneusement la courbe (C_f). **(0,75 pt)**

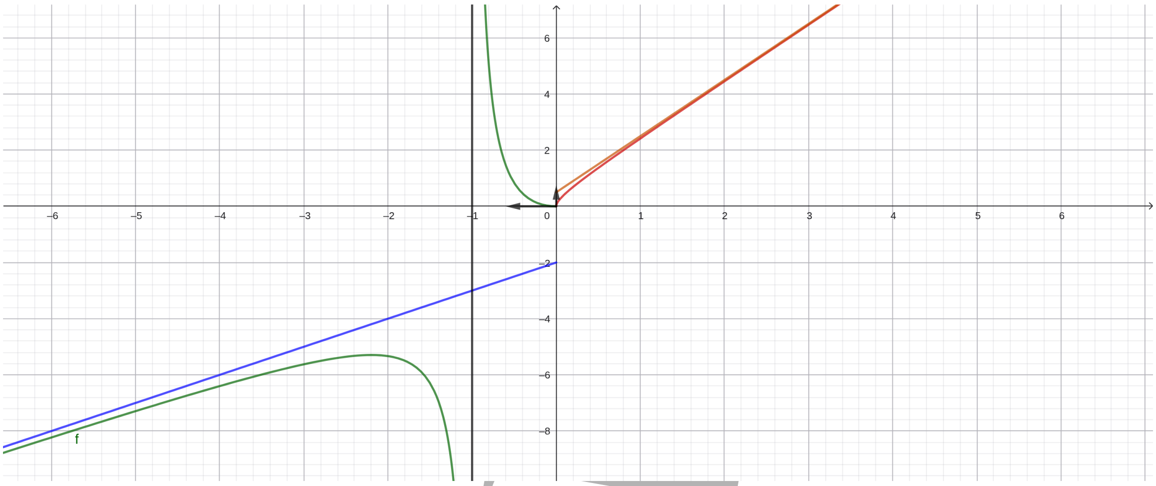

Figure 1: Courbe de (Cf)

Clique ici pour voir la courbe sur géogébra

Partie C : Bijection **(1,75pts)**

Soit h la restriction de f sur $I =]0; +\infty[$.

1. Montrons que h réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser. **(0,25pt)**

   Sur I h est continue est strictement croissante donc réalise une bijection de I vers $J = [0, +\infty[$

   Comme $\forall x \in I$, $h'(x) \neq 0$ donc h^{-1} est dérivable sur J

2. Calculons $h^{-1}(1)$ et $(h^{-1})'(\sqrt{2}+1)$. **(0,5pt)**

   $h(x) = x + \sqrt{x^2 + x}$.

   - **Calcul de** $h(1)$

     $h(1) = \sqrt{2} + 1$

     $$\mathbf{h(1) = \sqrt{2} + 1}$$

   - **Calcul de** $(h^{-1})'(\sqrt{2}+1)$

     $(h^{-1})'(\sqrt{2}+1) = \dfrac{1}{h'(h^{-1}(\sqrt{2}+1))}$ **Or** $h(1) = \sqrt{2}+1$ **donc** $h^{-1}(\sqrt{2}+1) = 1$

     $(h^{-1})'(\sqrt{2}+1) = \dfrac{1}{h'(1)}$ **comme** $h'(x) = 1 + \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$

     $$= \frac{1}{1 + \frac{2+1}{2\sqrt{1^2+1}}}$$

     $$= \frac{1}{1 + \frac{3}{2\sqrt{2}}}$$

     $$= \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}}}$$

     $$= \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+3}$$

     $$\mathbf{(h^{-1})'(\sqrt{2}+1) = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+3}}$$

3 Explicitons $h^{-1}(x)$. **(0,5pt)**

$$\text{Soit } y = h(x) = x + \sqrt{x^2 + x}.$$

On isole la racine :

$$y - x = \sqrt{x^2 + x}.$$

En élevant au carré, on obtient :

$$(y - x)^2 = x^2 + x.$$

$$y^2 - 2xy + x^2 = x^2 + x.$$

En simplifiant :

$$y^2 - 2xy = x.$$

On factorise par x :

$$y^2 = x(1 + 2y).$$

D'où :

$$\boxed{\mathbf{h^{-1}(x) = \frac{x^2}{1 + 2x}}}$$

4 Construisons $(C_{h^{-1}})$ dans le repère précédent. **(0,5pt)**

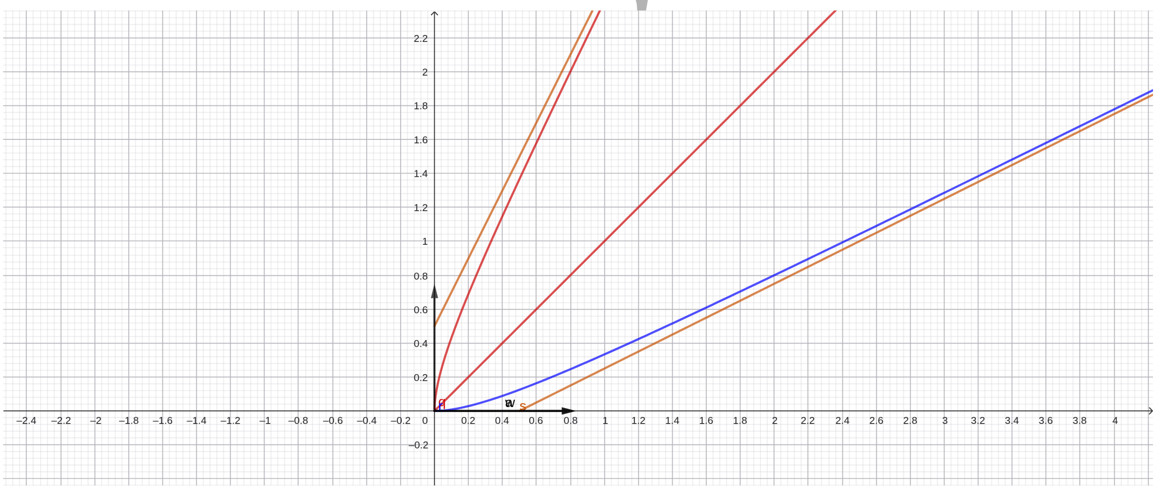

Figure 2: Courbe de (Cf)

Clique ici pour voir la courbe sur géogébra