Td Limites ln

Problème 1

Partie A Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x(1+\ln x)^2 - 1$.

1. On admettra que g est dérivable sur $]0;+\infty[$.
   - a. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.
   - b. Vérifier que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = (1+\ln x)(3+\ln x)$.
   - c. Étudier le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire le sens de variation de g.
2. Dresser le tableau de variation de g. (On ne calculera pas les limites en 0 et $+\infty$).
3. a. Calculer $g(1)$.
   - b. En déduire que pour tout $x \in]0;1[$, $g(x) < 0$ et pour tout $x \in]1;+\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + \dfrac{1}{1+\ln x} - 1 & \text{si } x \in]0;\frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e};+\infty[\\ f(0) = -1 \end{cases}$$

(C) est la représentation graphique dans le repère orthonormé (O, I, J) (unités : 2cm).

1. a. Montrer que f est continue en 0.
   - b. Étudier la dérivabilité de f en 0.
   - c. En déduire la tangente à (C) au point $A(0;-1)$.
2. a. Calculer $\lim\limits_{x \to \frac{1}{e}^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to \frac{1}{e}^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   - b. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à (C).
   - c. Étudier les positions relatives de (C) et (Δ).
   - d. Préciser l'autre asymptote à la courbe (C) de f.
3. a. Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[\setminus\{\frac{1}{e}\}$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(1+\ln x)^2}$.
   - b. En déduire le sens de variation de f.
   - c. Dresser son tableau de variation.

Partie C

1. Calculer la dérivée de la fonction h définie sur $]\frac{1}{e};+\infty[$ par $h(x) = \ln(1+\ln x)$.
2. a. En déduire les primitives sur $]\frac{1}{e};+\infty[$ de la fonction $k : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$.
   - b. Déterminer la primitive de k qui prend la valeur -1 en 1.

Problème 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2cm.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.
   En déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2. Calculer $g(1)$ et en déduire l'étude du signe de $g(x)$ pour x appartenant à $]0; +\infty[$.

Partie B : Détermination de l'expression de la fonction f

On admet qu'il existe deux constantes réelles a et b telles que, pour tout nombre réel x appartenant à $]0; +\infty[$, $f(x) = ax + b - \dfrac{\ln x}{x}$.

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Calculer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.

2. Sachant que la courbe (C) passe par le point de coordonnées $(1; 0)$ et qu'elle admet en ce point une tangente horizontale, déterminer les nombres a et b.

Partie C : Étude de la fonction f

On admet désormais que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, $f(x) = x - 1 - \dfrac{\ln x}{x}$.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en 0 et donner une interprétation graphique de cette limite.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. a. Vérifier que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   b. Établir le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
   c. En déduire le signe de $f(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.

3. On considère la droite (D) d'équation $y = x - 1$.
   a. Justifier que la droite (D) est asymptote à la courbe (C).
   b. Étudier les positions relatives de la courbe (C) et de la droite (D).
   c. Tracer la droite (D) et la courbe (C) dans le plan P muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie D : Calcul d'aire

On note A la mesure, exprimée en cm^2, de l'aire de la partie du plan P comprise entre la courbe C, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

1. On considère la fonction H définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $H(x) = (\ln x)^2$.
   On désigne par H' la fonction dérivée de la fonction H.
   a. Calculer $H'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.
   b. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2. Calculer A et donner sa valeur arrondie au mm^2 près.

Problème 3

Partie A On considère g la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$g(x) = 1 + x(2\ln|x| + 1)$$

1. a. Justifier que g est définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.
   b. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
2. a. Étudier le sens de variation de g.
   b. Dresser le tableau de variation de g.
3. a. Calculer l'image de -1 par g.
   b. Déterminer l'image J par g de l'intervalle I tel que : $I=]-\infty;-e^{-\frac{3}{2}}]$.
   c. Démontrer que la restriction h de g sur l'intervalle I est une bijection de I sur J.
   d. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation : $x \in \mathbb{R}, g(x)=0$.
4. Déduire de tout ce qui précède que :
   $\forall x \in]-\infty;-1[, g(x)<0$ et $\forall x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[, g(x)>0$.

Partie B On considère f la fonction numérique de la fonction de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x(x\ln|x|+1) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

et (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. (Unité : 5cm)

1. Démontrer que f est continue en 0.
2. a. Donner l'ensemble de définition de f' et déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   b. Étudier la dérivabilité de f en 0.
   c. Déterminer la fonction dérivée f' et déterminer le tableau de variation de f.
3. a. Écrire une équation de la tangente (D) à la courbe (C) au point O.
   b. Démontrer que (D) coupe (C) en deux points E et F et calculer leurs coordonnées.
   c. Étudier la position de (C) par rapport à (D).
4. Démontrer que (C) coupe l'axe (OI) en un point K d'abscisse β tel que $-1,8<\beta<-1,7$.
5. Construire (C).

Partie C

1. Soit α un réel appartenant à $]0;1[$.
   À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_{\alpha}^{1} x^2\ln(x)\,dx$.
2. a. Calculer l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan limitée par (C), la droite (D) et les droites d'équation $x=1$ et $x=\alpha$.
   b. Calculer $\lim\limits_{\alpha\to 0} A(\alpha)$.

On prendra : $\ln(2)\approx 0,7$; $\ln(3)\approx 1,1$; $\ln(5)\approx 1,6$; $\ln(17)\approx 2,9$; $e\approx 2,7$; $\sqrt{e}\approx 1,6$.

Problème 4

Partie A

On considère la fonction g dérivable et définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = -x^3+x+1-\ln|x|$$

1. Montrer que -1 est un zéro de la fonction polynôme P définie par : $P(x) = -3x^3 + x - 2$.

2. a. Déterminer le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.

   b. Calculer les limites de g aux bornes des intervalles de son ensemble de définition.

   c. Étudier les variations de g.

   d. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique. On note α cette solution. Montrer que : $1,2 < \alpha < 1,3$.

   e. En déduire que : $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; \alpha[, g(x) > 0$; $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$.

Partie B

On considère la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = -x + 1 - \frac{x - \ln|x|}{x^2}$$

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J). (Unité graphique : 2cm)

1. Calculer les limites de f aux bornes des intervalles de son ensemble de définition.

2. a. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.

   b. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3. Déterminer une équation de la tangente (T) au point d'abscisse -1.

4. Déterminer que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à la courbe (C).

5. a. Étudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $h(x) = x - \ln|x|$.

   b. En déduire que (D) coupe (C) en un point unique d'abscisse β vérifiant : $\ln(-\beta) = \beta$.

   c. Montrer que : $-0,57 < \beta < 0,56$.

   d. Déterminer la position de (C) par rapport à (D).

6. Construire (T), (D) et (C).

7. Démontrer que la fonction numérique F définie sur $]0; +\infty[$ par :
   $F(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + x - \dfrac{1}{x} - \ln x - \dfrac{(\ln x)^2}{x}$ est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

Problème 5

Partie A

Soit g, la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = (x + 2)^2 + \ln|x + 2|$.

1. a. Calculer les limites de g au borne de son ensemble de définition.

   b. Etudier les variations de g sur $]-2; +\infty[$.

2. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β dans $]-2; +\infty[$.

   b. Montrer que β vérifie $-1,35 < \beta < -1,34$.

   c. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-2; +\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie par $f(x) = -x - 1 + \dfrac{1 + \ln(x+2)}{x+2}$ et (ε) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). Unité 2 centimètres.

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de f et la limite de f en $+\infty$.
   b. Déterminer la limite de f à droite en -2. Interpréter graphiquement le résultat.
   c. Montrer que, $\forall x \in]-2; +\infty[$; $f'(x) = \dfrac{-g(x)}{(x+2)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
   d. Montrer que $f(\beta) = -2\beta - 3 + \dfrac{1}{\beta + 2}$.
2. a. Montre que la droite (D) : $y = -x - 1$ est asymptote à (ε).
   b. Déterminer les coordonnées de A intersection de (ε) et de (D).
   c. Etudier la position de (ε) par rapport à (D).
3. Construire (ε) et (D) sur le même graphique.
4. Déterminer G, la primitive de $g(x)$ tel que $g(x) = (x+2)^2 + \ln(x+2)$ sur $]-2; +\infty[$ et s'annule en -1.
   Sachant que la primitive sur $]-2; +\infty[$ de $\ln(x+2)$ est $(x+2)\ln(x+2) - (x+2)$.
5. a. Si h est la restriction de f à l'intervalle $[\beta; +\infty[$, montrer que h est une bijection de $[\beta; +\infty[$ sur une partie K que l'on déterminera.
   b. Calculer $h(-1)$.
   c. Montrer h^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(h^{-1})'(1)$.
   d. Construire (ε'), la représentation graphique de h^{-1}, bijection réciproque de h sur le graphique précédent.

Problème 6

Partie A : Etude d'une fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x} - 4(x-1)e^x - 2$$

1. a. Calculer la limite de f en $-\infty$.
   b. Montrer que $f(x) = xe^{2x}\left(1 - \dfrac{1}{2x} - \dfrac{4}{e^x} + \dfrac{4}{xe^x} - \dfrac{2}{xe^{2x}}\right)$ et en déduire la limite de f en $+\infty$.
2. Etudier les variations de f.
3. Soit (C_f) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé, unité graphique 2cm.
   a. Etudier les branches infinies de (C_f).
   b. Montrer que (C) coupe l'axe des abscisses en un point, dont l'abscisse α appartient à l'intervalle $[-2; -1]$.
   c. Tracer (C_f). On prendra $\ln 2 \approx 0,7$.
4. Montrer que $F(x) = \left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\right)e^{2x} + 4(2-x)e^x$ est une primitive de $f(x) + 2$.

Partie B : Etude d'une nouvelle fonction numérique de variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} g(x) = (x^2 - 4x)\ln x - \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 4) \quad \forall x > 0 \\ g(0) = -2 \end{cases}$$

1. Montrer que : $g(x) = f(\ln x), \forall x > 0$.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de g à droite en 0.
3. Calculer les limites aux bornes de son domaine.
4. Etudier les variations de g.
5. Soit (C_g) la courbe représentative de g dans un repère orthonormé, unité 2cm.
   a. Etudier la branche infinie de (C_g).

Problème 7

Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par : $f(x) = \dfrac{1}{1 - xe^{-x}}$
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct (O, I, J). Unité graphique : 2cm

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - xe^{-x}$

1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (x-1)e^{-x}$
2. Déterminer le sens de variation de g puis, dresser le tableau de variation de g (sans les limites aux bornes).
3. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$.

Partie B

1. Démontrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
2. Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En donner une interprétation graphique.
3. a. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{(1-x)e^{-x}}{(1-xe^{-x})^2}$.
   b. Déterminer le sens de variation de f puis dresser le tableau de variation de f.
4. a. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0 est $y = x + 1$.
   b. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x - 1 = \dfrac{(x+1-e^{x})xe^{-x}}{1-xe^{-x}}$.
   c. Déterminer le signe de la fonction h telle que : $h(x) = x + 1 - e^{-x}$.
   d. Déduire de la question précédente les positions relatives de (C) et de (T).
5. Construire (T) et (C).

Problème 8

Partie A : (Etude d'une fonction auxiliaire g)
Soit g la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x - 2 - 2x\ln x$

1. Justifier que l'ensemble des solutions de l'inéquation : $-2\ln x - 1 \geq 0$ est $S = \left]0; e^{-\frac{1}{2}}\right]$

2. a. Calculer $g'(x)$.

   b. Etudier les variations de g.

3. a. Etablir le tableau de variation de g. (On ne cherchera pas à calculer les limites de g).

   b. En déduire que : $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) < 0$.

Partie B : (Etude et représentation graphique d'une fonction f)
Soit f la fonction numérique définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = (x-1)^2 - x^2\ln x$ si $x \in]0; +\infty[$ et $f(0) = 1$.
On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).
L'unité graphique est 2cm.

1. a. Calculer la limite de f en $+\infty$.

   b. Justifier que la courbe (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.

2. a. Justifier que f est continue en 0.

   b. Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -2$.

3. Soit (T) la droite d'équation $y = -2x + 1$ et d la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $d(x) = f(x) - y$.

   a. Justifier que (T) est la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

   b. Vérifier que pour tout $x \in]0; +\infty[, d(x) = x^2 - x^2\ln x$.

   c. Etudier la position relative de (C) par rapport à (T).

4. a. Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$.

   b. Etablir le tableau de variation de la fonction f.

5. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$.

   b. Vérifier que $\alpha = 1$ et démontrer que $f(x) \geq 0$ si $0 \leq x \leq 1$ et $f(x) \leq 0$ si $x \geq 1$.

6. Construire (T) et (C).

Partie C : (Etude d'une primitive F d'une restriction de la fonction f)
Soit F la primitive de f sur $[1; +\infty[$ qui s'annule en e. (On ne cherchera pas à déterminer F).

1. Déterminer $F(e)$ et $F'(x)$. (On justifiera chaque réponse).

2. Démontrer que F est une bijection de $]1; +\infty[$ vers $F(]1; +\infty[)$.

3. Soit F^{-1} la réciproque de F. Calculer $(F^{-1})'(0)$.

Problème 9

On désigne par (C) la courbe de la fonction f ci-dessous dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ dans le plan d'un repère orthonormé $(O; I, J)$. L'unité de longueur : 2 cm.

Partie A : On considère la fonction f définie par : $f(x) = x - 1 - \dfrac{2}{x} - \ln\left|1 - \dfrac{1}{x}\right|$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

2. Montrer que :
   - Pour tout $x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$; $f(x) = x - 1 - \frac{2}{x} - \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$
   - Pour tout $x \in]0; 1[$; $f(x) = x - 1 - \frac{2}{x} - \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$
3. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. Calculer la limite de f en 1. Interpréter graphiquement ce résultat.
5. a. Calculer les limites de f à gauche en 0 et à droite en 0.
   b. Interpréter graphiquement ces résultats.

Partie B : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - x^2 + x - 2$.

1. Calculer $g'(x)$, g' étant la fonction dérivée de g.
2. Déterminer le sens de variation de g.
3. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $1 < \alpha < 1,5$.
   b. En déduire un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.
4. Montrer que pour tout $x \in]-\infty; \alpha[$; $g(x) < 0$ et pour tout $x \in]\alpha; +\infty[$; $g(x) > 0$.
5. Montrer que pour tout nombre réel x élément de $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(x-1)}$.
6. a. Déterminer le signe de $f'(x)$.
   b. Dresser le tableau de variation de f.

Partie C

1. Soit (D) la droite d'équation $y = x - 1$.
   Montrer que la droite (D) est une asymptote à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Calculer $f(-2)$; $f(-\frac{1}{2})$ et $f(\frac{1}{2})$.
3. Construire dans le repère $(O; I, J)$ la courbe (C) et ses asymptotes. On prendra $\alpha \approx 1,3$.

Partie D

On considère les fonctions h et k définies sur $]2; +\infty[$ par $h(x) = (x-1)\ln(x-1) - x\ln x$ et on admettra que pour tout x élément de $]2; +\infty[$, $f(x) - x + 1 < 0$.

1. Calculer $h'(x)$, h' étant la dérivée de h.
2. Calculer l'aire de la partie limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

Problème 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité : $OI = 2$cm et $OJ = 1$cm.

Partie A

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(0) = -1$ et $g(x) = \frac{x}{(\ln(x))^2} - 1$ et (C_g) sa courbe.

1 a Déterminer l'ensemble de définition de g.

b Calculer les limites de g en 1 et en $+\infty$.

c Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement ce résultat.

2 a Démontrer que g est continue en 0.

b Étudier la dérivabilité de g en 0 et interpréter graphiquement ce résultat.

3 On admet que g est dérivable sur $[0;1[\cup]1;+\infty[$.

a Démontrer que $\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[; g'(x) = \dfrac{\ln(x)(\ln(x)-2)}{(\ln(x))^4}$.

b Déterminer le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

4 a Démontrer que l'équation $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;1[$.

b Vérifier que $0,4 < \alpha < 0,5$.

c En déduire que : $\forall x \in [0;\alpha[; g(x) < 0$
$\forall x \in]\alpha;1[\cup]1;+\infty[; g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(x)}$ et (C), sa courbe.

1 a Calculer les limites de f en 0, en 1 et en $+\infty$.

b Interpréter graphiquement les résultats précédents.

2 On admet que f est dérivable sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$.

a Démontrer que $\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[, f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation de f.

3 Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{1-\sqrt{\alpha}}{\alpha}$. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$.

4 Construire la courbe (C). On prendra $\alpha \simeq 0,5$.

Partie C

Soit h la restriction de f à $]1;+\infty[$.

1 Démontrer que h est la bijection de $]1;+\infty[$ sur un intervalle K que l'on déterminera.

2 On note h^{-1} la bijection réciproque de h et (Γ) sa représentation graphique.

a Dresser le tableau de variation de h^{-1}.

b Calculer $h(e)$; $h^{-1}\left(\dfrac{1-e}{e}\right)$ et $(h^{-1})'\left(\dfrac{1-e}{e}\right)$.

c Déterminer une équation de la tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse $\dfrac{1-e}{e}$.

3 Construire (Γ) dans le même repère que (C).

Problème 11

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} \forall x > 0, g(x) = 1 - x\ln x \\ g(0) = 1 \end{cases}$

1. a. Etudier la continuité de g en 0.

   b. Etudier la dérivabilité de g en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

2. Calculer la limite de g en $+\infty$.

3. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations.

4. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]e^{-1};+\infty[$.

   b. Justifier que : $1,7 < \alpha < 1,8$.

5. Démontrer que : $\begin{cases} \forall x \in [0;\alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in [\alpha;+\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = e^{3-x}\ln x$
(C_f) désigne sa représentation graphique dans le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$ Unité graphique : 2cm

1. Calculer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

2. a. Vérifier que : $\forall x \in]0;+\infty[: f(x) = \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)\left(\dfrac{x}{e^x}\right)e^3$

   b. En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

3. a. Montrer que : $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = \dfrac{e^{3-x}}{x}g(x)$.

   b. En déduire le sens de variations de f.

4. a. Montrer que : $f(\alpha) = \dfrac{e^3}{\alpha e^\alpha}$.

   b. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

   c. Dresser le tableau de variations de f.

5. Construire (C_f).

6. Soit h la restriction de f à l'intervalle $]0;\alpha[$.

   a. Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de départ, l'arrivée d'arrivée.

   b. Dresser le tableau de variation de h^{-1}.

   c. Calculer $(h^{-1})'(0)$.

Problème 12

Partie A

On considère l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = xe^x$

1. Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$
2. Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax+b)e^x$.
   - a. Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).
   - b. Montrer que v est une solution de l'équation (1) si et seulement si $u+v$ est une solution de l'équation (2).
   - c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (1).
3. Déterminer la solution f de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2e^x - x - 2$

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variation.
3. - a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions réelles : 0 et α telle que $-1,6 < \alpha < -1,5$.
   - b. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie C : Etude de la fonction principale f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; I; J)$. (Unité : 4cm)

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2. - a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x g(x)$.
   - b. En déduire les variations de f et dresser le tableau de variation de f.
3. Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.
4. Tracer (C).

Partie D : Calcul d'aire

Soit m un réel négatif.

1. Interpréter graphiquement l'intégrale $I = \displaystyle\int_m^0 f(x)\,dx$
   - a. Calculer $\displaystyle\int_m^0 xe^x\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties.
   - b. En déduire la valeur de I.
2. Calculer la limite de I lorsque m tend vers $-\infty$.

Problème 13

L'objet de ce problème est la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x(x-(\ln x)^2) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$. Unité graphique 5cm.

Partie A

On considère la fonction h dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par $h(x) = 2 - \frac{2}{x} - 2\frac{\ln x}{x}$.

1. a. Calculer $h'(x)$ et étudier les variations de h.
   b. En déduire que $\forall x \in]0; +\infty[, h(x) \geq 0$.
2. On considère la fonction g dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par $g(x) = 2x - 2\ln(x) - (\ln x)^2$.
   a. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
   b. Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x) = h(x)$.
   c. Étudier les variations de g.
   d. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et vérifier que $0,1 < \alpha < 0,2$.
   e. Démontrer que $\begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est continue en 0.
3. a. Étudier la dérivabilité de f en 0.
   b. Interpréter graphiquement ce résultat.
4. a. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
   b. Interpréter graphiquement les résultats.
   c. Démontrer que $f(\alpha) = \alpha(-\alpha + 2\ln(\alpha))$.
5. a. On suppose que f est dérivable sur $]0; +\infty[$.
   b. On suppose que f est dérivable sur $]0; +\infty[$. Calculer $f'(x)$ et montrer que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$.
   c. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

Partie C

1. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
2. Soit la fonction $k(x) = f(x) - (2x - 1)$.
   a. Vérifier que $k'(x) = g(x) - 2$ et que $k''(x) = h(x)$.
   b. En déduire le sens de variation de k'. Calculer $k'(1)$ puis donner le signe de k'.
   c. Dresser le tableau de variation de k puis donner le signe de k. (On ne calculera pas de limites).
   d. En déduire la position relative de (C) et de la droite (T).

3. Tracer (C) et (T). On prendra $\alpha = 0,1$.

4. Soit la fonction q, restriction de f à l'intervalle $[\alpha; +\infty[$.

   a. Montrer que q admet une bijection réciproque notée q^{-1} dont on précisera les ensembles de départ et d'arrivée.

   b. Dresser le tableau de variation de q^{-1}.

   c. Calculer $q(1)$, $q^{-1}(1)$ et $(q^{-1})'(1)$.

   d. Construire la courbe de q^{-1} dans le même repère que (C).

Problème 14

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x(1-x)+1$.

1. Étudier le sens de variation de g.

2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1,27; 1,28]$. On note α cette solution.

3. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-\infty; 0]$.
   Montrer que $g(x) > 0$ sur $[0; \alpha[$ et $g(x) < 0$ sur $]\alpha; +\infty[$.

Partie B :
Étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{e^x+1} + 2$.
On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$; unités graphiques : 1cm sur l'axe des abscisses et 2cm sur l'axe des ordonnées.

1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   b. Démontrer que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique (d) dont on déterminera l'équation.

2. Étudier la position de (C_f) par rapport à (d).

3. a. Montrer que la fonction dérivée de f a même signe que la fonction g étudiée dans la **Partie A**.

   b. Montrer qu'il existe deux entiers p et q tels que $f(\alpha) = p\alpha + q$.

   c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.

4. Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec ses asymptotes et sa tangente au point d'abscisse α.

Partie C : Encadrement d'aire
Pour tout entier naturel n, tel que $n \geq 2$, on donne D_n, l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan, dont les coordonnées vérifient $2 \leq x \leq n$ et $2 \leq y \leq f(x)$, et on appelle A_n son aire, exprimée en unité d'aire.

1. Faire apparaître D_n sur la figure.

Problème 15

On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{1-x} + \ln|x|$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O; I; J)$ d'unité 2cm.

Partie A (Etude d'une fonction auxiliaire)
Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = xe^{1-x}$

1. Calculer $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.
2. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (1-x)e^{1-x}$.
3. Déterminer les variations de g puis dresser son tableau de variation.
4. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq 1$.

Partie B (Etude de la fonction f)
Soit $f(x) = e^{1-x} + \ln|x|$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
2. a. Calculer la limite de f en 0.
   b. En déduire une interprétation graphique du résultat.
3. a. Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b. Calculer la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
   c. Interpréter graphiquement les résultats.
4. a. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \dfrac{1-g(x)}{x}$.
   b. En déduire le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
5. Déterminer les variations de f puis dresser son tableau de variation.
6. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β tels que $0,08 < \alpha < 0,09$ et $-0,06 < \beta < -0,05$.
   b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
   c. Construire (C) avec précision.

Partie C

1. Soit $(U_n)_{n\geq1}$ la suite définie par $U_n = \displaystyle\int_n^{n+1} e^{-x}dx$ et $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$
   a. Démontrer que $(U_n)_{n\geq1}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b. Exprimer U_n puis S_n en fonction de n.
2. a. Démontrer que la suite $(S_n)_{n\geq1}$ est croissante.
   b. Démontrer que $(S_n)_{n\geq1}$ est majorée par $\dfrac{1}{e}$.
   c. Les suites $(U_n)_{n\geq1}$ et $(S_n)_{n\geq1}$ sont-elles convergentes ? Justifier votre réponse.
3. Soit $(V_n)_{n\geq1}$ la suite définie par $V_n = \displaystyle\int_1^{n+1} \ln|x|dx$
   a. En utilisant une intégration par parties, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = (n+1)\ln(n+1) - n$
   b. La suite $(V_n)_{n\geq1}$ est-elle convergente ? Justifier votre réponse.

Problème 16

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = x + 1 - (x+2)\ln|x+2|$, $x \neq -2$ et $g(-2) = -1$.

1. a. Démontrer que g est continue en -2.

   b. Étudier le dérivabilité de g en -2. Interpréter graphiquement le résultat.

2. Calculer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. Calculer $g'(x)$ pour $x \neq -2$, étudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

4. a. Démontrer que pour $x \neq -1$, g s'annule en une valeur α comprise entre $-5,6$ et $-5,5$.

   b. En déduire que : $\forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq -2$ par : $f(x) = \dfrac{\ln|x+2|}{x+1}$ si $x \neq -1$ et $f(-1) = 1$.
On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans le plan du repère orthonormé $(O; I; J)$. Unité graphique 2cm.

1. Démontrer que f est continue en -1.

2. On suppose que : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$

   Démontrer que f est dérivable en -1.

3. a. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   b. Interpréter graphiquement les résultats.

   c. Calculer la limite de f à droite et à gauche en -2.

   d. Interpréter graphiquement les résultats.

4. a. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x)$ et $\dfrac{g(x)}{x+2}$ ont le même signe.

   b. Dresser le tableau de variation de f.

   c. Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha + 2}$.

Partie C

1. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse -1.

2. On pose $h(x) = x^2 - 1 + 2\ln(x+2)$ pour $x > -2$.

   a. Etudier le sens de variation de h.

   b. Calculer $h(-1)$. En déduire le signe de h.

   c. Démontrer que (C_f) est au-dessus de la tangente (T) pour $x > -2$.

3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (C_f) et de l'axe des abscisses.

4. Tracer (T) et (C_f).

Problème 17

Partie A

On considère la fonction g de la variable réelle x définie pour tout $x > 0$ par $g(x) = 1 - x - 2\ln x$.

1. Calculer $g(1)$.
2. Calculer la limite de g en 0 et en $+\infty$.
3. Étudier les variations de g et en déduire son tableau de variation.
4. Démontrer que : $\forall x \in]0;1[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]1;+\infty[, g(x) < 0$.

Partie B

Soit la fonction h de la variable réelle x définie pour tout $x > 0$ par $h(x) = 2 + x - x^2 \ln x$.

1. Calculer les limites de h en 0 et en déduire que h est prolongeable par continuité en 0.

Soit la fonction f de représentation graphique (C) dans le plan muni du repère orthogonal $(O; I; J)$ d'unités 1 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées, définie par :

$$\begin{cases} f(x) = h(x) \text{ pour } x > 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

2. Calculer la limite de f en $+\infty$.
3. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et en déduire l'interprétation graphique correspondante.
4. a. Démontrer que f est dérivable en 0.
   b. En déduire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
5. Démontrer que $\forall x \in [0;+\infty[, f'(x) = g(x)$ et étudier les variations de f.
6. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $2,2 < \alpha < 2,3$.
7. Tracer (T) puis la courbe (C).

Partie C

Soit k la fonction définie pour tout $x \geq 1$ par $k(x) = \dfrac{x^3}{3}\left(-\dfrac{1}{3} + \ln x\right)$.

1. Déterminer $k'(x)$ où k' est la dérivée de la fonction k.
2. En déduire une primitive de f sur $[1;+\infty[$.
3. Démontrer que $g(\alpha) = -\dfrac{4}{\cdot} - \alpha - 1$

Problème 18

Dans tout le problème on admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0$ pour tout entier naturel n.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$.

1. a. Calculer la limite de g en $-\infty$.

b Vérifier que $g(x) = 1 - (1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2})x^2e^{-x}$ pour tout nombre réel $x \neq 0$. En déduire la limite de g en $+\infty$.

2 On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

a Calculer la dérivée g' de g et vérifier que $g'(x) = (x-2)^2e^{-x}$.

b En déduire le signe de $g'(x)$.

3 Etablir le tableau de variation de g.

4 **a** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$.

b On désigne par α cette solution. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α.

5 Déduire de ce qui précède que :
$\forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + (x^2+2)e^{-x}$.

1 **a** Vérifier que $f(x) = x\left[1 - \frac{1}{x} + (x + \frac{2}{x})e^{-x}\right]$ pour tout réel $x \neq 0$. En déduire la limite de f en $-\infty$.

b Calculer la limite de f en $+\infty$.

2 On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Calculer la dérivée f' de f et vérifier que $f'(x) = g(x)$ pour tout x réel.

3 En déduire, à l'aide de la partie A, les variations de f et donner son tableau de variation.

4 Démontrer que $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$.

5 **a** Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

b Préciser la position de (C) par rapport à (Δ).

6 Donner une équation de la tangente (T) à (C) en son point d'abscisse 0.

7 Tracer (Δ), (T) puis (C).

Problème 19

Le but du problème est l'étude de la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :
$f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{2\ln(x) - 1}{x}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère $(O; I; J)$.
Unité : 2 cm

Partie A :

On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = -x^2 + 6 - 4\ln(x)$.

1 Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

2 Étudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

3 **a** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution α dans $]0; +\infty[$.

b Vérifier que $1,86 < \alpha < 1,87$.

c Montrer que : $\forall x \in]0; \alpha[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$.

Partie B

1. a. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

   b. Déterminer la dérivée f' de f et montrer que pour tout élément x de $]0;+\infty[$, $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. En déduire le sens de variation de f.

2. a. Montrer que $f(\alpha) = -\alpha + 3 + \dfrac{2}{\alpha}$.

   b. Déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude $2 \cdot 10^{-1}$.

3. a. Montrer que la droite (D) d'équation $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$ est asymptote à la courbe (C).

   b. Déterminer le point A, intersection de (D) et (C).

   c. Étudier la position de (C) par rapport à (D).

4. a. Calculer $\ln(e\sqrt{e})$.

   b. Déterminer le point B de (C) où la tangente (T) est parallèle à la droite (D).

5. Construire (D), (T) et (C).

Partie C :

1. Soit $h : x \mapsto 2\dfrac{\ln x}{x}$ et $u : x \mapsto \ln x$.
   Exprimer h en fonction de u et u'. En déduire une primitive de h sur $]0;+\infty[$.

2. Donner une primitive F de f sur $]0;+\infty[$.

3. Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = e$ et $x = \sqrt{e}$.

Problème 20

On considère le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique 2cm.
Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = x + \dfrac{\ln|x|}{|x|}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère donné.

Partie A
Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$ et h la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty;0[$ par $h(x) = x^2 - 1 + \ln(-x)$.

1. a. Calculer la dérivée de la fonction g et déterminer le signe de cette dérivée. Dresser le tableau de variations de la fonction g. (On ne demande pas de calculer les limites de g).

   b. Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[, g(x) > 0$.

2. a. Calculer la dérivée de la fonction h et déterminer le signe de cette dérivée. Dresser le tableau de variation de la fonction h. (On ne demande pas de calculer les limites de h).

   b. Calculer $h(-1)$ et montrer que $\forall x \in]-\infty;-1[, h(x) > 0$; $\forall x \in]-1;0[, h(x) < 0$.

Partie B

1. a. Calculer les limites suivantes $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$ puis interpréter les graphiquement.

b Calculer les limites suivantes $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2 a Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C).

b Étudier les positions relatives de (C) et (D). (On précisera les coordonnées des points d'intersection de (C) et (D)).

3 a Vérifier $\forall x \in]-\infty; 0[$, $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$ et $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b Étudier le sens de variations de la fonction f puis dresser son tableau de variations.

4 a Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et vérifier que $0,6 < \alpha < 0,7$.

b En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

5 Construire la courbe (C).

6 a Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

b En déduire la primitive de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1.

Problème 21

Partie A

Soit g la fonction dérivable et définie de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \ln|x| - \dfrac{2}{x}$.

1 a Démontrer que pour tout nombre réel x non nul, $g'(x) = \dfrac{x+2}{x^2}$.

b En déduire les variations de la fonction g puis dresser son tableau de variation. (On ne calculera pas les limites).

2 a Démontrer que l'équation $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $]1; +\infty[$.

b Démontrer que : $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]0; \alpha[, g(x) < 0$.

Partie B

Soit f la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + (\ln|x|)^2} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J). (L'unité graphique est 4 cm).

1 a Étudier la continuité de f en 0.

b Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ puis donner une interprétation graphique de chacun des résultats.

2 a Étudier la dérivabilité de f en 0. En déduire que (C) admet une tangente à l'origine que l'on précisera.

b Pour tout nombre réel x différent de zéro, démontrer que : $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)g(x)}{(e^x + (\ln|x|)^2)^2}$ avec $\varphi(x) = e^x \ln|x|$.

c Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{\alpha^2 + 4e^{-\alpha}}$ et en déduire que : $0 < f(\alpha) < 1$.

d Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire le tableau de variation de f.

3. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq f(x) \leq 1$.
4. Tracer la droite d'équation $y = x$ et la courbe (C).

Problème 22

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 4x - (1+x)e^x$.

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
3. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $0,79 < \alpha < 0,80$.
   b. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B : Etude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x + 1 - xe^x$.
On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 4cm.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. a. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
   b. Donner une interprétation graphique du résultat.
3. a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$.
   b. En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Montrer que $f(\alpha) = e^\alpha + 4\alpha - 3$.
5. a. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 4x + 1$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$.
   b. Etudier la position relative de (C) par rapport à (Δ).
6. a. Montrer que la droite $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions λ et β telles que $-1 < \lambda < 0$ et $1 < \beta < 2$.
   b. Tracer (C) et (Δ).

Partie C : Calcul d'aire

t est un nombre réel tel que $(t \leq 0)$.
On désigne par $A(t)$ l'aire de partie du plan délimitée par (C), (Δ) et les droites d'équations $x = t$ et $x = 0$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $A(t)$.
2. a. Déterminer la limite de $A(t)$ lorsque t tend vers $-\infty$.
   b. Interpréter le résultat obtenu.

Problème 23

L'objet de ce problème est l'étude de la fonction f dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par $f(x)=2x-3+\dfrac{\ln x}{x}$. On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J). Unité graphique est 2 cm.

Partie A

Soit g la fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par $g(x)=2x^2+1-\ln x$.

1. Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variation. (On ne demandera pas de calculer les limites).

2. Justifier que $\forall x\in]0;+\infty[, g(x)>0$.

Partie B

1. a. Calculer la limite de f en $+\infty$.
   b. Déterminer la limite à droite en 0 de f puis interpréter graphiquement le résultat.

2. a. Démontrer que la droite (D) d'équation $y=2x-3$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.
   b. Préciser la position de (C) par rapport par (D).

3. a. Démontrer que pour tout nombre strictement positif x, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.
   b. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
   c. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 est $y=3x-4$.

4. a. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α.
   b. Justifier que : $1,3<\alpha<1,4$.

Partie C

On pose $\varphi(x)=f(x)-(3x-4)$ et $h(x)=-x^2+1-\ln x$.

1. a. Déterminer le sens de variation de h sur $]0;+\infty[$.
   b. Calculer $h(1)$ puis justifier que : $\forall x\in]0;1[, h(x)>0$; $\forall x\in]1;+\infty[, h(x)<0$.

2. a. Démontrer que $\forall x\in]0;+\infty[, \varphi'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}$.
   b. Étudier les variations de φ puis en déduire le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.
   c. Déterminer la position de (C) par rapport à la tangente (T).

3. Tracer la courbe (C), la droite (D) et la tangente (T). On prendra $\alpha=1,35$.

Problème 24

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]-\infty;2[$ par : $g(x)=2-(2-x)\ln(2-x)$.

1. Calculer les limites de g en 2 et en $-\infty$.

2. Calculer $g'(x)$ et étudier le sens de variation de g.

3. Dresser le tableau de variation de la fonction g.

4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-\infty; 2[$ et vérifier que $-0,4 < \alpha < -0,3$.
5. Déduire des questions précédentes que pour tout $x < \alpha, g(x) < 0$ et pour tout $x > \alpha, g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]-\infty; 2[$ par : $f(x) = x(1 - \ln(2 - x))$.
On appelle (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique 2 cm.

1. a. Calculer les limites de f en 2 et en $-\infty$; interpréter graphiquement si possible les résultats obtenus.
   b. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. a. Démontrer que pour tout $x < 2$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2-x}$.
   b. En utilisant les résultats de la partie A, déterminer les variations de f puis dresser son tableau de variation.
3. Justifier que $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{2-\alpha}$.
4. Calculer $f(0)$ et $f(2 - e)$.
5. Tracer dans le repère (O, I, J) la courbe (C). (On prendra $\alpha \simeq -0,35$).

Partie C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0; 2[$.

1. Justifier que h réalise une bijection de $[0; 2[$ sur un intervalle L à préciser.
2. Etablir le tableau de variation de h^{-1}, bijection réciproque de h.
3. Représenter dans le même repère $(C_{h^{-1}})$ la courbe de la bijection réciproque de h.

Problème 25

Partie A

La fonction f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - 2 + \dfrac{1}{2}\ln x$.

1. a. Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
   b. Calculer $f'(x)$ et étudier le sens de variation de f. (On ne demande pas de représentation graphique).
2. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0; +\infty[$ une solution unique α. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
   b. Etudier le signe de $f(x)$ lorsque x décrit $]0; +\infty[$.

Partie B

La fonction g est définie sur $[0; +\infty[$ par

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(x) = -\dfrac{7}{8}x^2 + x - \dfrac{1}{4}x^2\ln x, \text{ pour tout réel } x > 0 \end{cases}$$

1 a Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 0.

b Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2 Soit g' la dérivée de la fonction g.
Pour tout réel $x > 0$ calculer $g'(x)$, puis vérifier que $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$.

3 a En déduire que : si $x \in \left[0; \frac{1}{\alpha}\right[$, alors $g'(x) > 0$ et si $x \in \left]\frac{1}{\alpha}; +\infty\right[$, alors $g'(x) < 0$.

b Dresser le tableau de variation de la fonction g.

4 a Donner les équations des tangentes à la courbe (Γ) représentative de g aux points d'abscisses 0 et 1.

b Tracer (Γ) et ses tangentes.

Problème 26

Partie A

Soit la fonction g dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $g(x) = 1 + x \ln x$;

1 a Justifier que : $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = 1 + \ln x$.

b Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation. (On ne calculera pas les limites de g).

2 En déduire que : $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \dfrac{x}{1 + x \ln x} \end{cases}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). (Unité : 4cm)

1 a Etudier la continuité de f en 0.

b Etudier la dérivabilité de f en 0.

c Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point 0 est : $y = x$.

d Démontrer que :
(C) est au-dessus de (T) sur $]0; 1[$.
(C) est au-dessous de (T) sur $]1; +\infty[$.

2 Démontrer que la droite (OI) est asymptote à (C) en $+\infty$.

3 a On suppose que f est dérivable sur $]0; +\infty[$.
Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \dfrac{1 - x}{(1 + x \ln x)^2}$

b En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.

4 Construire la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

Partie C

1 a Justifier que : $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) \leq 1$.

b) Démontrer que : $\forall x \in [1; e], 1 - \dfrac{1}{1+x} \leq f(x)$.

2) Soit A l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
Démontrer que : $16(e-1) + 16\ln\left(\dfrac{2}{1+e}\right) \leq A \leq 16(e-1)$.

Problème 27

Dans ce problème, le plan est muni d'un repère (O, I, J) ; Unité : 1 cm. Les fonctions sont supposées dérivables sur leur ensemble de définition.

Partie A :
On considère la fonction g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -x + \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, et (C_g) sa représentation graphique.

1) Démontrer l'ensemble de définition de g est $\mathbb{R}$.

2) a) Démontrer que pour tout nombre réel x, $g'(x) = -1 + \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

   b) Etudier les variations de g.

3) Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B :
On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ et (C_f) sa représentation graphique.

1) Calculer la limite de f en $+\infty$.

2) Démontrer que f est impaire.

3) En déduire la limite de f en $-\infty$.

4) En déduire la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.

5) Pour tout nombre réel x, calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

6) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.

7) Déterminer les positions relatives de (C_f) et (T).

8) Tracer (C_f) et (T).

Partie C :

1) Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

2) Soit f^{-1} la bijection réciproque de f. Exprimer $f^{-1}(x)$, pour tout nombre réel x.

3) Construire dans le repère (O, I, J), en utilisant une couleur différente de celle utilisée pour (C_f), la représentation graphique (C') de f^{-1} en indiquant la méthode de construction.

4) En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, (C_f) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Problème 28

Partie A

On considère la fonction numérique g définie par :
$g(x) = 2(x-2)\ln(2-x) + x - 2$ si $x \in]-\infty; 2[$ et $g(2) = 0$.

1. Etudier la continuité de g en 2.

2. a. Déterminer les limites de g aux bornes de l'ensemble de définition.
   b. Etudier le sens de variation de g.
   c. Dresser le tableau de variation de g.

3. a. Calculer $g\left(2 - \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$.
   b. En déduire que :
   $\forall x \in \left]-\infty; 2 - \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right[, g(x) < 0$ et $\forall x \in \left]2 - \dfrac{1}{\sqrt{e}}; 2\right[, g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 2[, f(x) = (x-2)^2\ln(2-x) - 4 \\ \forall x \in [2; +\infty[, f(x) = (x^2 - 4x)e^{x-2} \end{cases}$$

1. a. Montrer que f est dérivable à gauche en 2.
   b. Vérifier que $x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$.
   c. Montrer que $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{e^{x-2} - 1}{x - 2} = 1$.
   d. En déduire que f est dérivable à droite en 2.
   e. f est-elle dérivable en 2 ?

2. a. Montrer que : $\forall x \in]-\infty; 2[, f'(x) = g(x)$ et $\forall x \in]2; +\infty[, f'(x) = (x^2 - 2x - 4)e^{x-2}$.
   b. Etudier le sens de variation de f.
   c. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   d. Dresser le tableau de variation de f.

3. On désigne par (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé (O, I, J). Et soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; 1[$.
   a. Montrer que h réalise une bijection de $]-\infty; 1[$ vers un intervalle K à préciser.
   b. Soit h^{-1} la réciproque de h.
   h^{-1} est-elle dérivable en -4 ? Si oui, calculer alors $(h^{-1})'(-4)$.
   c. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(C_{h^{-1}})$ au point d'abscisse -4.
   d. Construire les courbes (C), $(C_{h^{-1}})$ et la droite (T) dans le même repère.

Partie C :

Soit le nombre réel a tel que : $2 - \dfrac{1}{\sqrt{e}} < a < 2$.

1 Calculer l'aire $A(a) = \int_{2-\frac{1}{\sqrt{e}}}^{a} f(x)dx$ et déduire $\lim\limits_{a \to 2} A(a)$.

2 Montrer que la fonction $F(x) = (x^2 - 6x + 6)e^{x-2}$ est une primitive de f sur $]2; +\infty[$.

3 Calculer l'aire en cm^2 du domaine limité par les droites d'équations $x = 2$, $x = 4$, l'axe (OI) et la courbe (C).

4 En déduire l'aire en cm^2 du domaine limité par les droites d'équations $x = 4$, $x = 2 - \dfrac{1}{\sqrt{e}}$, l'axe (OI) et la courbe (C).

Problème 29

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ dont la représentation graphique (C) est donnée sur la feuille annexe.

On admet que f est définie sur $]0; +\infty[$ par $\begin{cases} \forall x > 0, f(x) = 2x(a(\ln x)^2 + b\ln x + c) \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1 a Calculer en fonction de a, b et c, la dérivée de la fonction f.

b Déterminer, à l'aide du graphique, les valeurs de : $f'\left(\dfrac{1}{e}\right)$, $f'\left(\sqrt{e}\right)$ et $f(e)$.

c En déduire que : $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = 2x(2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2)$.

2 a Justifier que : $\lim\limits_{x \to 0} x(\ln x)^2 = 0$ et en déduire que f est continue en 0.

b Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.

3 a Calculer la limite de f en $+\infty$.

b Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = 2(1 + \ln x)(-1 + 2\ln x)$.

c Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f.

d Dresser le tableau de variation de f.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{e^{2x} - 1}$.
On note (C_g) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 2cm.

1 a Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

b Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, e^{2x} - 1 > 0$.

c Calculer $g'(x)$.

d Etudier le sens de variations de g et dresser son tableau de variations.

2 Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = f(x) - g(x)$.
On admet que h est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

a Démontrer que l'équation $f(x) = g(x)$ admet une unique solution $\alpha \in [0,1; 0,3]$.

b Etudier le signe de $h(x)$ et déduire la position relative de (C_f) et (C_g).

3 a Construire (C_g) sur la feuille annexe.

4 a Démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[, g(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}-1} - 1$.

b En déduire une primitive G de g sur $]0;+\infty[$.

c Calculer l'aire A, en cm^2, de la partie du plan délimitée par (C_g), l'axe (OI) et les droites d'équations $x = \ln 2$ et $x = 1$. (Annexe à réaliser)

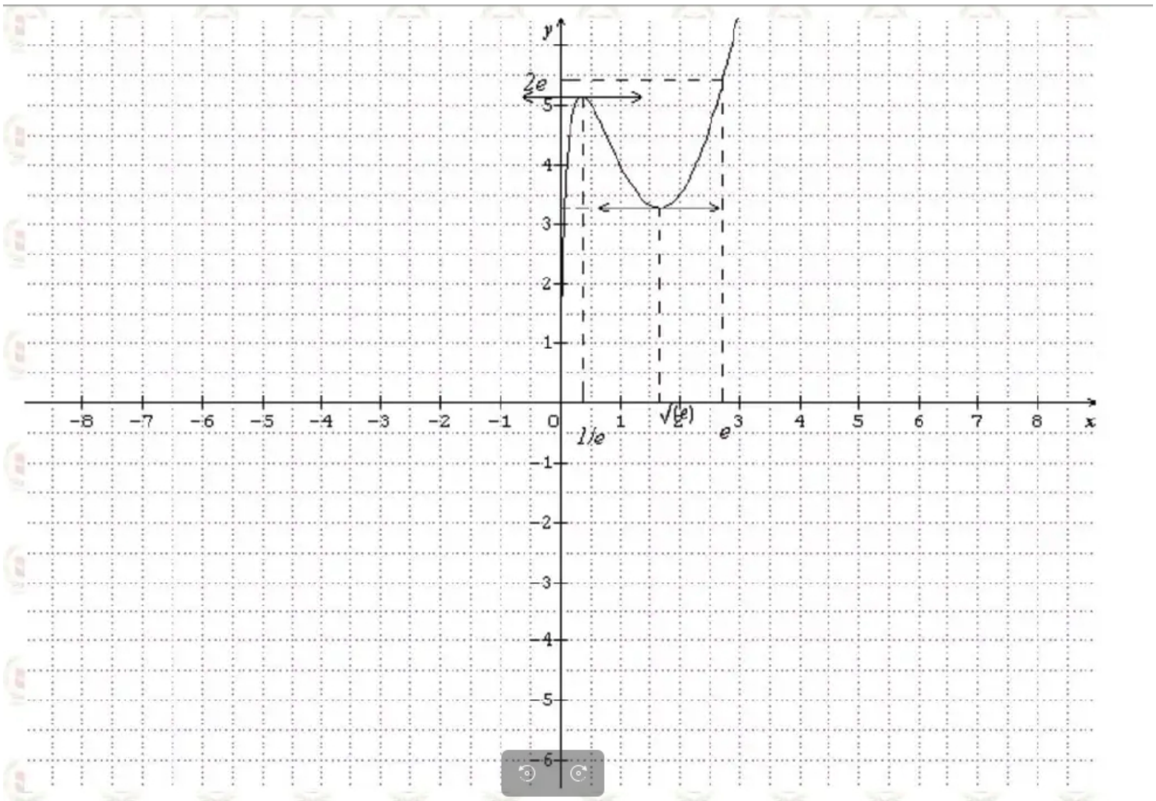

Figure 1: Représentation graphique de la fonction f (Annexe)

Problème 30

Partie A : Résolution d'une équation différentielle.

Soit l'équation différentielle (E') : $f' + f = \left(\dfrac{e-1}{2}\right)x^2 + (e-2)x - 1$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $f' + f = 0$.
2. Déterminer un polynôme P du second degré solution de l'équation différentielle (E').
3. Montrer qu'une fonction numérique f est une solution de l'équation différentielle (E') si et seulement si la fonction numérique $f - P$ est solution de l'équation différentielle (E).
4. Démontrer que les solutions de l'équation différentielle (E') sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{-x} + \left(\dfrac{e-1}{2}\right)x^2 - x; k \in \mathbb{R}$.
5. Trouver la solution f de l'équation différentielle (E') telle que $f(0) = 1$.

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire g et de la fonction f.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} + \left(\dfrac{e-1}{2}\right)x^2 - x$.
On note (C_f) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) où $OI = 2$ cm et $OJ = 4$ cm.
Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -e^{-x} + (e-1)x - 1$.

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. a) Etudier le sens de variation de g.

   b) Dresser le tableau de variation de g.

3. a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \mathbb{R}$.

   b) Vérifier que $0,8 < \alpha < 0,9$ puis déduire la valeur approchée de α à 10^{-1} près.

4. Montrer que $\forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$.

5. a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

   b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

6. a) Calculer la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

   b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

7. a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$.

   b) En déduire le sens de variation de f.

   c) Dresser le tableau de variation de f.

8. a) Déterminer les coordonnées du point B d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe (OJ) puis donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'ordonnée 1.

   b) Tracer la courbe (C_f) ainsi que la tangente (T).

   c) Calculer à 10^{-2} près l'aire A de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses (OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Problème 31

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) avec $OI = 2\text{cm}$.

Partie A

Soit h la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -\dfrac{2x^2}{(x^2+1)^2} + \ln(x^2+1)$.

1. Calculer les limites de h en $-\infty$ et $+\infty$.

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = \dfrac{-2x(1-x^2)}{(x^2+1)^3}$.

3. Etudier le sens de variation h et dresser son tableau de variation.

4. a) Justifier que sur $]0; +\infty[$ l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α.

   b) Montrer que $1,98 < \alpha < 1,99$.

5. a) Etudier la parité de h.

   b) En déduire que $-\alpha$ est une racine de h.

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; -\alpha[\cup]\alpha; +\infty[, h(x) > 0. \\ \forall x \in]-\alpha; 0[\cup]0; \alpha[, h(x) < 0. \\ \forall x \in \{-\alpha; 0; \alpha\}, h(x) = 0. \end{cases}$$

Partie B

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} g(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{3x} & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$ et (C_g) est sa courbe représentative dans (O, I, J).

1. Montrer que g est impaire.
2. a. Calculer la limite à droite de g en 0. (On pourra poser $X = x^2$)
   b. En déduire la limite à gauche de g en 0 et que g est continue en 0.
3. a. Montrer que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = \dfrac{1}{3}$.
   b. Donner une équation de la tangente (T) à (C_g) au point d'abscisse 0.
4. a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = \dfrac{2\ln|x|}{3x} + \dfrac{1}{3x}\ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$.
   b. En déduire les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de g.
   c. Interpréter graphiquement ces limites.
5. a. Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = \dfrac{-h(x)}{3x^2}$.
   b. Déterminer le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
   c. Justifier que $g(\alpha) = \dfrac{2\alpha}{3(\alpha^2+1)}$ puis en déduire $g(-\alpha)$ en fonction de α.
   d. Déterminer $g([-1; 2])$
6. Construire (T) et (C_g). On prendra $\alpha = 1,98$.
7. a. Montrer que $\forall x \in [1; +\infty[, \dfrac{2\ln x}{x} \leq \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} \leq \dfrac{2\ln x}{x} + \dfrac{\ln 2}{x}$.
   b. En déduire que : $\dfrac{2}{3e} \leq g(e) \leq \dfrac{2+\ln 2}{3e}$.
8. Soit f la restriction de g à l'intervalle $K =]-\alpha; 0[$.
   a. Justifier que f réalise une bijection de K sur un intervalle L à préciser.
   b. Calculer $f(-1)$ puis justifier que la réciproque f^{-1} de f est dérivable en $\ln(\sqrt[3]{2})$.

Problème 32

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 4cm

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire g

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ par :

$$g(x) = \ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| - \frac{1}{x+1}$$

1. a. Montrer que : $\begin{cases} \text{si } x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[, g(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1} \\ \text{si } x \in]-1; 0[, g(x) = \ln\left(-1 - \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1} \end{cases}$

b Déterminer les limites de g en $-\infty, +\infty$ et en 0. (On admettra que la limite de g en -1 à gauche est égale à $+\infty$ et la limite de g en -1 à droite est égale à $-\infty$)

2 a Démontrer que $\forall x \in D_g, g'(x) = -\dfrac{1}{x(x+1)^2}$.

b Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

3 a Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{8}\right[$.

b Déduire des questions précédentes que : $\begin{cases} \text{si } x \in]-\infty; -1[\cup]\alpha; 0[\cup]0; +\infty[, g(x) \geq 0 \\ \text{si } x \in]-1; \alpha[, g(x) < 0 \end{cases}$

Partie B : Etude de la fonction principale f.

On considère la fonction f définie sur $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = x\ln\left|1 + \dfrac{1}{x}\right| & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et on note (C) sa courbe représentative dans le repère (O, I, J)

1 a Ecrire f sans le symbole de la valeur absolue.

b Déterminer les limites de f en $-\infty, +\infty$ et -1. (On pourra poser $X = \dfrac{1}{x}$)

c Préciser les asymptotes de (C).

2 a Démontrer que f est continue en 0.

b Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

3 a Vérifier que $\forall x \in D_g \setminus \{0\}, f'(x) = g(x)$.

b Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{\alpha + 1}$, α étant le réel défini dans la partie A - 3)

c Etudier le sens de variation de f ; puis donner le tableau de variation de f.

4 a Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec la droite (OI).

b Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $-\dfrac{1}{2}$.

5 Construire avec soins (T), (C) et ses asymptotes. On prendra $\alpha = -0,25$ et $f(\alpha) = -0,4$.

Problème 33

Partie A

On considère la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - 3 + \ln x$.

1 Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de g.

2 a On admet que g est dérivable sur $]0; +\infty[$, calculer $g'(x)$.

b Étudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

3 a Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $2,20 < \alpha < 2,21$.

b Démontrer que $\forall x \in]0;\alpha[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha;+\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2-2x}{x} + \dfrac{x-1}{x}\ln x$ de courbe (C) dans un repère orthonormé (O, I, J). (Unité : 2 cm)

1. Calculer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.
3. On admet que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.
   - **a** Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ pour tout x de $]0;+\infty[$.
   - **b** En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
4. En remarquant que $\forall x \in]0;+\infty[, f(x) = \left(1-\dfrac{1}{x}\right)(-2+\ln x)$, déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.
5. Écrire l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
6. Démontrer que $f(\alpha) = -\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$.
7. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
8. Construire (C) avec ses asymptotes et (T).

Partie C

Soit F la primitive de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$.
On appelle (Γ) la courbe représentative de F relativement au repère (O, I, J).

1. - **a** Sans calculer $F(x)$, étudier les variations de F sur $]0;+\infty[$.
   - **b** Que peut-on dire des tangentes à (Γ) en ses points d'abscisses 1 et e^2.
2. - **a** x étant un réel strictement positif, calculer l'intégrale $\int_1^x \ln t\, dt$ (On pourra utiliser une intégration par parties).
   - **b** Démontrer que, pour tout x strictement positif $f(x) = \ln x - \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{2}{x} - 2$.
   - **c** En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de x.
3. - **a** Sachant que $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x) = 0$ déterminer la limite de F en 0.
   - **b** Démontrer que, pour tout x strictement supérieur à 1
     $F(x) = x\ln x\left(1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{\ln x}\right) + 3$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
   - **c** Dresser le tableau de variation de F.
   - **d** Tracer (Γ) sur le même graphique que (C).
4. Calculer en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e^2$.

Problème 34

Partie A

On considère la fonction numérique g définie par : $g(x) = 4e^{-x} - (1 + e^{-x})^2$.

1. Etudier les variations de g. (On ne calculera pas de limites aux bornes de son ensemble de définition).

2. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x} - \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2}$.

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. On admet que f est dérivable et continue sur $\mathbb{R}$.

   a. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{g(x)}{4(1 + e^{-x})^2}$.

   b. Etudier le sens de variation de f.

   c. Dresser le tableau de variation de f.

   d. Calculer $f(0)$ puis étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie C

On considère la fonction numérique h définie par : $h(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$ et (C_h) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J). (Unité graphique : 4cm)

1. Calculer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition, puis interpréter graphiquement les résultats.

2. Montrer que le point $S\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de la courbe (C_h).

3. Etudier le sens de variation de h et dresser son tableau de variation.

4. Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C_h) au point S.

5. Etudier les positions relatives de la courbe (C_h) par rapport à la tangente (T).

6. Justifier que h réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle K à préciser.
   Soit h^{-1} la bijection réciproque de h.

   a. Justifier que h^{-1} est dérivable en $\dfrac{1}{2}$ et calculer $(h^{-1})'\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

   b. Dresser le tableau de variation de h^{-1}.

   c. Justifier que la courbe $(C_{h^{-1}})$ admet des asymptotes dont on précisera la nature et les équations.

   d. Déterminer l'expression explicite de h^{-1}.

7. Construire les courbes (C_h) et $(C_{h^{-1}})$ et leurs asymptotes respectives dans le même repère.

Problème 35

Partie A

a, b et c sont des nombres réels. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (ax+b)e^{-x} + c$ dont le tableau de variation se présente comme suit :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$h'(x)$			$+$				0	$-$	
h	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$2+e^{-2}$	$\searrow$	2

1. On note h' la dérivée de h. Calculer $h'(x)$ en fonction de a et b.
2. En utilisant les données numériques du tableau de variation de h :
   - a. Déterminer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.
   - b. Démontrer que $a = 1$, $b = -1$ et $c = 2$.
     Ainsi donc dans la suite du problème $h(x) = (x-1)e^{-x} + 2$.
3. - a. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-1; 0[$.
   - b. En déduire le signe de $h(x)$.

Partie B

On note (C_f) la courbe représentative de la fonction f par $f(x) = 2x - 1 - xe^{-x}$.
(Unité : 2 cm)

1. - a. Calculer la limite de f en $+\infty$.
   - b. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$.
   - c. Préciser les positions de (C_f) par rapport à (D).
2. Calculer les limites en $-\infty$ de $f(x)$ et de $\dfrac{f(x)}{x}$. En donner une interprétation graphique.
3. - a. Démontrer que $f'(x) = h(x)$.
   - b. Donner le sens de variation de f puis dresser le tableau de variation de f.
4. - a. Démontrer que $f(\alpha) = 2\alpha + 1 + \dfrac{2\alpha}{\alpha - 1}$.