Problème : (8 points)

Partie A

1. **Étudier les limites de $g(x) = x^3 + 3x + 2$ aux bornes de $\mathbb{R}$:**
   — Limite quand $x \to +\infty$:
   $$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^3 + 3x + 2) = +\infty$$
   — Limite quand $x \to -\infty$:
   $$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3 + 3x + 2) = -\infty$$

2. **Calculer la dérivée $g'(x)$ et dresser le tableau de variations :**
   $$g'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1)$$
   Comme $x^2 + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$g'(x) > 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$
   Donc, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. **Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[-1, 0]$:**
   Calcul aux bornes :
   $$g(-1) = (-1)^3 + 3(-1) + 2 = -1 - 3 + 2 = -2 < 0$$
   $$g(0) = 0 + 0 + 2 = 2 > 0$$
   Comme g est continue et strictement croissante sur $[-1, 0]$, il existe une unique solution $\alpha \in [-1, 0]$ telle que $g(\alpha) = 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

4. **Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près par dichotomie :**
   — $x = -0{,}5 \Rightarrow g(-0{,}5) = (-0{,}5)^3 + 3(-0{,}5) + 2 = -0{,}125 - 1{,}5 + 2 = 0{,}375 > 0 \Rightarrow \alpha \in [-1, -0{,}5]$
   — $x = -0{,}75 \Rightarrow g(-0{,}75) = -0{,}422 - 2{,}25 + 2 = -0{,}672 < 0 \Rightarrow \alpha \in [-0{,}75, -0{,}5]$
   — $x = -0{,}6 \Rightarrow g(-0{,}6) = -0{,}216 - 1{,}8 + 2 = -0{,}016 < 0 \Rightarrow \alpha \in [-0{,}6, -0{,}5]$
   — $x = -0{,}55 \Rightarrow g(-0{,}55) = -0{,}166 - 1{,}65 + 2 = 0{,}184 > 0 \Rightarrow \alpha \in [-0{,}6, -0{,}55]$
   Donc une valeur approchée de α à 10^{-1} près est :
   $$\boxed{-0{,}6}$$

Partie B

5. **Montrer que** $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$

   Posons $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2+1}$, donc :

$$u(x) = x^3 - 1, \quad v(x) = x^2 + 1$$

$$u'(x) = 3x^2, \quad v'(x) = 2x$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{3x^2(x^2+1) - (x^3-1)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

   Développons le numérateur :

$$3x^2(x^2+1) = 3x^4 + 3x^2, \quad (x^3-1)(2x) = 2x^4 - 2x$$

$$f'(x) = \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4 + 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2 + 2x}{(x^2+1)^2}$$

   Factorisons :

$$x^4 + 3x^2 + 2x = x(x^3 + 3x + 2) = xg(x)$$

   Donc :

$$\boxed{f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}}$$

6. **Étudier les variations de** f

   Les points critiques sont donnés par $f'(x) = 0$, soit :

$$xg(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad g(x) = 0 \Rightarrow x = \alpha \approx -0{,}6$$

   On étudie le signe de $f'(x)$ selon les intervalles :

- Pour $x < \alpha$, on a $x < 0$ et $g(x) < 0$ donc $xg(x) > 0$
- Pour $\alpha < x < 0$, on a $x < 0$, $g(x) > 0$ donc $xg(x) < 0$
- Pour $x > 0$, on a $x > 0$, $g(x) > 0$ donc $xg(x) > 0$

   Donc :

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{si } x \in (-\infty, \alpha) \\ < 0 & \text{si } x \in (\alpha, 0) \\ > 0 & \text{si } x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

   Valeur particulière : $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^3 - 1}{\alpha^2 + 1}$

   Tableau de variations (schématique) :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		↗	$f(\alpha)$	↘	$f(0) = -1$	↗	

7. **Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe (C_f) au point d'abscisse** $x_0 = 0$

$$f(0) = \frac{0^3 - 1}{0^2 + 1} = -1, \quad f'(0) = \frac{0 \cdot g(0)}{(0^2+1)^2} = 0$$

Donc la tangente T est horizontale et passe par le point $(0, -1)$. Son équation est donc :

$$\boxed{y = -1}$$