Ministère de l'Éducation Nationale
Inspection Académique de Kédougou
Lycée Dindéfelo
Cellule de Mathématiques

Année scolaire 2024-2025
Date : 17/10/2024
Classe : Terminale S2
Professeur : M. BA

Exercice 1

1. Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)}{1-\sqrt{x+1}} \quad ; \quad \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x+3}}{x-2} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^3+x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin^2 x-\cos x+1}{x^2} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\tan x}$$

2. Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\tan x}{1+\tan x} \quad ; \quad \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x^2-x-6}} \quad ; \quad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{10-x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sin 2x} \quad ; \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1-\sin x}$$

3. Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to \pm\infty}\left(x-\sqrt{x^2+3x-1}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to \pm\infty}\frac{2x+\sqrt{x^2+1}}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to \pm\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x+3}-2}$$

$$\lim_{x\to \pm\infty}\left(2x+\sqrt{x-1}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to \pm\infty}\left(x+\sqrt{2x^2-5x+1}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to \pm\infty}\left(x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$$

$$\lim_{x\to \pm\infty}\frac{x-\sqrt{|x|}}{3x+2}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{5x-2}-\sqrt{x+1}$$

4. Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to \pm\infty}\frac{x^2+\sin x}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to \pm\infty}\frac{x+\sin x}{2-\sin x} \quad ; \quad \lim_{x\to \pm\infty}\frac{x^3}{3+2\sin x}$$

5. Déterminer les réels a et b pour que la droite d'équation $y=ax+b$ soit une asymptote à la courbe représentative de la fonction $x\mapsto \sqrt{x^2+4}-\frac{x}{\sqrt{2}}$.

Exercice 2

Calculer les limites suivantes :

$$1.\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos x-\sqrt{2}}{x-\frac{\pi}{4}} \quad ; \quad \lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$$

$$2.\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\sin x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cos x+\sin x}{\sqrt{x+1}-1}$$

$$3.\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{\cos x}+\cos x-3\right)$$

$$4.\quad \lim_{x\to+\infty} \left(x\arctan(\sqrt{x})-\frac{\pi}{2}x\right) \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)$$

$$5.\quad \lim_{|x|\to+\infty} \left(3x-1+\sqrt{9x^2+3x-2}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-x^2E\left(\frac{1}{x}\right)}{1+x^2E\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Exercice 3

Étudier la continuité de la fonction f sur D_f dans chaque cas.
1. $f(x)=x+\sqrt{x+1}$.
2. $f(x)=4x+1+\frac{1}{x-1}$.
3. $f(x)=2\sqrt{x}-x$.
4. $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}}{1-x}$.

Exercice 4

Donner la dérivée des fonctions définies par :

$$f(x)=\frac{1+\cos(2x)}{1-\sin(2x)} \quad ; \quad g(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)\sqrt{\frac{1}{x}} \quad ; \quad h(x)=\sqrt[3]{x-6}+\frac{1}{x} \quad ; \quad k(x)=\left|\frac{x^2-x}{x-1}\right|$$

$$m(x)=x\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}} \quad ; \quad n(x)=\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x+1} \quad ; \quad p(x)=\frac{\tan x}{1-2\sin x}$$

$$q(x)=3\left(x^2-3x+5\right)^4 \quad ; \quad r(x)=\cos^2(3x) \quad ; \quad s(x)=-2\tan^2(2x)$$

Exercice 5

Etude d'une fonction par lecture graphique La courbe (C_f) ci-dessus est celle d'une fonc-

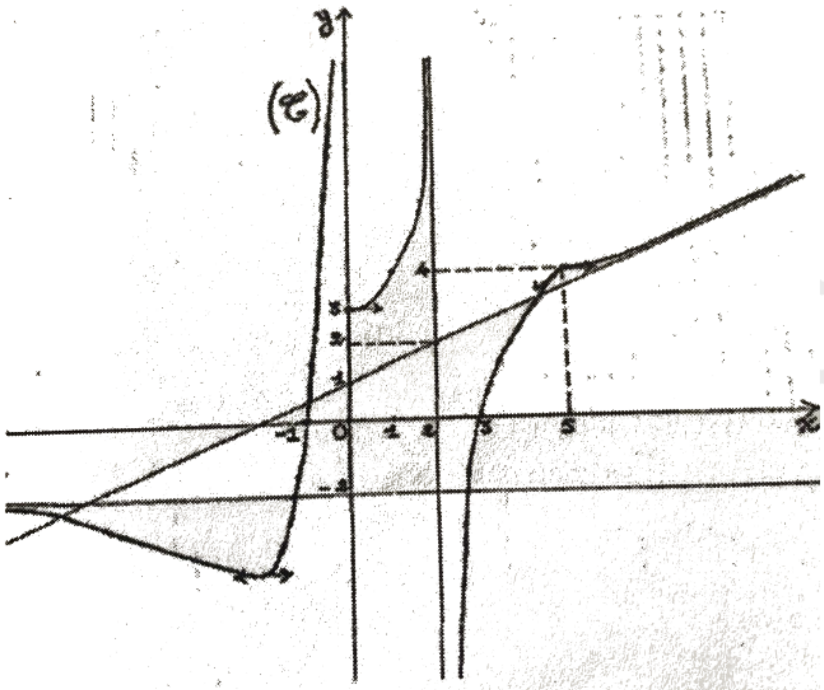

Figure 1 – Courbe de (Cf)

tion f dans un repère orthonormé. f est définie en 0 et on a : $f(0) = 3$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Donner les limites suivantes :

$$\textbf{a)} \lim_{x\to+\infty} f(x), \quad \lim_{x\to-\infty} f(x);$$
$$\textbf{b)} \lim_{x\to 0^+} f(x), \quad \lim_{x\to 0^-} f(x);$$
$$\textbf{c)} \lim_{x\to 2^+} f(x), \quad \lim_{x\to 2^-} f(x);$$

3. La courbe admet-elle une asymptote oblique ? Si oui, donner son équation.
4. Préciser les équations des autres asymptotes.
5. La fonction f est-elle dérivable en 5 ? Justifier la réponse.
6. Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 6

Le tableau de variation ci-dessous est celui d'une fonction f continue sur son ensemble de définition avec $f'(1) = 0$ et $f'(4) = -1$. La courbe (C_f) de f coupe l'axe des abscisses en $A(-2;0)$ et $B\left(-\frac{1}{2};0\right)$ et l'axe des ordonnées au point $C(0;2)$.

La droite $(D) : y = x - 3$ est une asymptote oblique en $+\infty$ et est en dessous de (C_f) sur $[0; +\infty[$.

x	$-\infty$		-3		-1		1		3		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-1	↘	-3	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	4	↘	2	↗	$+\infty$

1. Déterminer le domaine de définition de f puis donner les limites aux bornes.
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de f.
3. Déterminer en justifiant toutes les asymptotes à la courbe de f.
4. Donner l'équation de chacune des demi-tangentes à la courbe au point d'abscisse 1.
5. Tracer (D) et (C_f) dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.
6. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[3; +\infty[$.
   (a) g est-elle bijective ? Justifier.
   (b) g^{-1} est-elle dérivable en 2 ? Justifier.
7. Graphiquement, déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles l'équation $f(x) = m$ admet exactement 4 solutions réelles distinctes.

Exercice 7

Soit f la fonction donnée par : $f(x) = \frac{2\sin(2x)}{1+\cos(x)}$

1. Déterminer le domaine de définition de f puis montrer qu'on peut réduire le domaine d'étude de f à l'intervalle $]0, 2\pi[$.
2. Déterminer la limite de f en π.
3. Soit α l'unique réel de $]0, 2\pi[$ tel que $\cos(\alpha) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Montrer que $\cos(2x) + \cos(x) - 1 > 0$ si et seulement si $x \in]0, \alpha[$.
4. Montrer que $f'(x) = \frac{4(\cos^2(2x)+\cos(x)-1)}{1+\cos(x)}$, en déduire le signe de $f'(x)$ en utilisant (3), puis dresser le tableau de variation de f sur $]0, 2\pi[$.
5. Tracer la courbe de f sur $]-2\pi, 2\pi[$. Unité : 1 cm.

Problème n°1

Soit la fonction numérique f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 - \frac{2x}{x^2+1} & \text{si } x \leq 1, \\ x - 1 - 3\sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Partie A

1. Justifier que $D_f = \mathbb{R}$.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 1$.
3. Iterpréter les résultats obtenus
4. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.
5. (a) Montrer que la courbe (C_f) admet deux asymptotes (D_1) et (D_2) à préciser.

   (b) Préciser la position de (C_f) par rapport à (D_1) et (D_2).
5. (a) Calculer $f'(x)$ dans les intervalles où f est dérivable (justifier l'existence de ces dérivées).

   (b) Établir le tableau de variations de f.

   (c) Tracer (C_f) et les asymptotes dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie B

Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 1]$.

1. Montrer que g est bijective de $]-\infty, 1]$ sur un intervalle J à préciser.
2. Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution β et que $\frac{1}{3} < \beta < \frac{3}{4}$.
3. (a) Étudier la dérivabilité de g^{-1}.

   (b) Calculer $g^{-1}(2)$.

   (c) Construire $(C_{g^{-1}})$ dans le repère précédent.

   (d) Montrer que g admet une primitive sur $]-\infty, 1]$ et déterminer cette primitive qui s'annule en 0.

Problème n°2

Soit la fonction numérique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1+\sqrt{x^2-x}}{x-2} & \text{si } x \geq 1 \\ \frac{x-1}{x^2-4x+3} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative.

Partie A

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer les limites aux bornes de D_f.
3. Étudier la continuité de f en 1.
4. Étudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter graphiquement les résultats.
5. (a) Déterminer les réels a, b, et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$, $\forall x < 1$.

(b) En déduire que (C_f) admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote oblique (Δ) dont on précisera son équation.

(c) Étudier la position relative de (C_f) par rapport à (Δ) sur $]-\infty; 1[$.

6. Étudier la nature de la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$, puis étudier sa position relative par rapport à (C_f) s'il s'agit d'une asymptote.
7. Déterminer $f'(x)$ sur chaque intervalle où f est dérivable, puis en déduire son signe.
8. Dresser le tableau de variation de f.

Partie B

Soit h la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty; 1[$.

1. Montrer que h réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser.
2. (a) Calculer $h(0)$.

   (b) h^{-1} est-elle dérivable en $-\frac{3}{2}$? Si oui, déterminer $(h^{-1})'\left(-\frac{3}{2}\right)$.

   (c) Déterminer le sens de variation de h^{-1} puis dresser son tableau de variation.
3. Déterminer l'expression de $h^{-1}(x)$.
4. Tracer soigneusement (C_f) et $(C_{h^{-1}})$ dans un repère orthonormé.

Problème n°3

Étude graphique

Soit f une fonction dont la courbe représentative est donnée ci-dessous

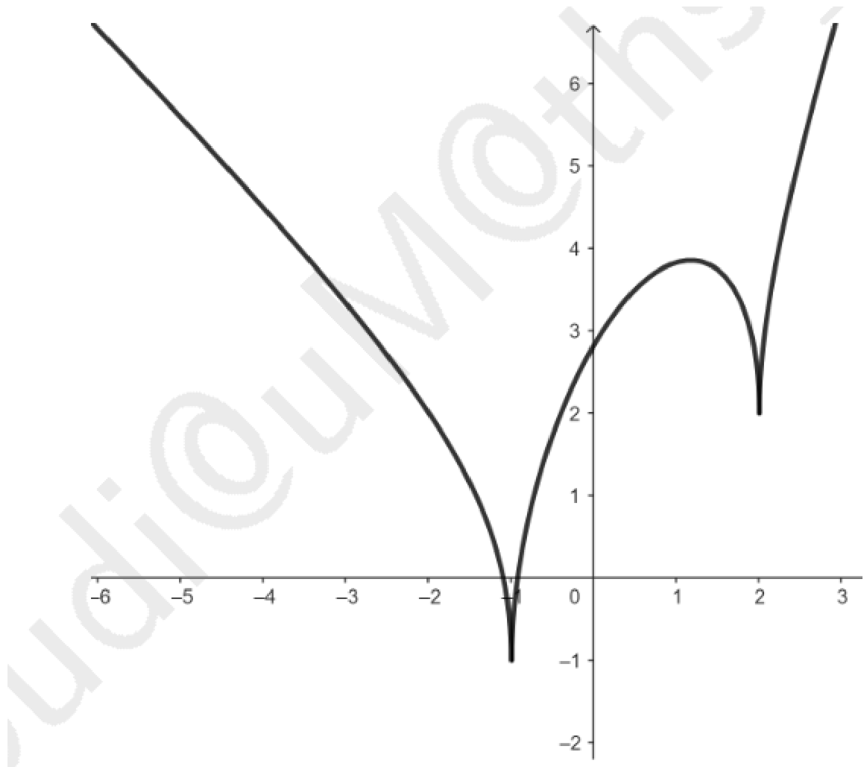

Figure 2 – Courbe de (Cf)

1. Déterminer $f(-1)$; $f(2)$ et D_f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.
3. (a) f est-elle dérivable en -1 et en 2 ?
   (b) Déterminer les variations de f sur $]-\infty, -1[$ et sur $]2, +\infty[$.

Étude numérique

Dans cette partie, on prend $f(x) = x + 2\sqrt{|x^2 - x - 2|}$.

1. (a) Déterminer le domaine de définition de f.
   (b) Écrire $f(x)$ sans symbole de la valeur absolue puis calculer les limites aux bornes de D_f.
   (c) Montrer que (C_f) admet une asymptote oblique (D) en $+\infty$ et donner l'équation de cette asymptote.
   (d) Étudier la position de (C_f) par rapport à (D).
   (e) Préciser la nature de l'asymptote à (C_f) en $-\infty$.
2. (a) Étudier la dérivabilité de f en -1 et 2. Interpréter le résultat obtenu.
   (b) Donner l'ensemble de dérivabilité de f puis calculer $f'(x)$.
   (c) Démontrer que $f'(x) > 0$ sur $]2; +\infty[$ et que $f'(x) < 0$ sur $]-\infty; -1[$.
   (d) Résoudre l'inéquation $\sqrt{-x^2 + x + 2} \leq 2x - 1$ sur $]-1; 2[$.

(e) Dresser le tableau de variation de f.

3. (a) Soit g la restriction de f sur $I =]2; +\infty[$. Montrer que g est une bijection de I sur I.
   (b) En étudiant la fonction h définie par $h(x) = x - g(x)$, montrer qu'il existe un réel α vérifiant $g(\alpha) = \alpha$.
   (c) Déterminer par le calcul la valeur exacte de α, puis déterminer $(g^{-1})(\alpha)$ si possible.
   (d) Tracer dans le même repère (Cg) et (Cg^{-1}).

Problème n°4

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -x + \sqrt{x^2+4} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{|4-x^2|} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Écrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
3. (a) Étudier la continuité de f en 0.
   (b) Étudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats.
   (c) Étudier la dérivabilité de f en 2. Interpréter les résultats.
4. (a) Calculer les limites aux bornes de D_f.
   (b) Étudier les branches infinies de (C_f).
5. On pose pour tout $x \in [0, 2]$, $h(x) = f(x) - x$.
   (a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution notée α.
   (b) Vérifier que $\alpha \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$.
6. (a) Calculer $f'(x)$ sur chaque intervalle où f est dérivable.
   (b) Dresser le tableau de variations de f.
   (c) Construire (C_f).
7. Soit g la restriction de f sur $I =]2; +\infty[$.
   (a) Montrer que g est une bijection de I vers un intervalle J à préciser.
   (b) Montrer que g^{-1} est dérivable en $\sqrt{5}$ puis calculer $(g^{-1})'(\sqrt{5})$.
   (c) Expliciter $g^{-1}(x)$.
   (d) Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère que (C_f).
8. Montrer que pour tout $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$, $|f'(x)| \leq \frac{3\sqrt{7}}{7}$.
9. En déduire que $|f(x) - \alpha| \leq \frac{3\sqrt{7}}{7}|x - \alpha|$, pour tout $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$.