

Exercice 1

1. Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x)}{1 - \sqrt{x+1}} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x+3}}{x-2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^3 + x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin^2 x - \cos x + 1}{x^2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \tan x}$$

2. Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x^2 - x - 6}} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7} - \sqrt{10-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{\sin 2x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

3. Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x - \sqrt{x^2 + 3x - 1}) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x+3} - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x + \sqrt{x-1}) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x + \sqrt{2x^2 - 5x + 1}) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - \sqrt{|x|}}{3x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{5x-2} - \sqrt{x+1}$$

4. Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + \sin x}{x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \sin x}{2 - \sin x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{3 + 2 \sin x}$$

5. Déterminer les réels a et b pour que la droite d'équation $y = ax + b$ soit une asymptote à la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + 4} - \frac{x}{\sqrt{2}}$.

Exercice 2

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos x - \sqrt{2}}{x - \frac{\pi}{4}}$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1}$
2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sqrt{2} \cos x}{1 - \sqrt{2} \sin x}$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cos x + \sin x}{\sqrt{x+1} - 1}$
3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{2}{\cos x} + \cos x - 3 \right)$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \arctan(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2} x \right)$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \arctan \left(\frac{\sqrt{x}}{x+1} \right)$
5. $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(3x - 1 + \sqrt{9x^2 + 3x - 2} \right)$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2 E \left(\frac{1}{x} \right)}{1 + x^2 E \left(\frac{1}{x} \right)}$

Exercice 3

Étudier la continuité de la fonction f sur D_f dans chaque cas.

1. $f(x) = x + \sqrt{x+1}$.
2. $f(x) = 4x + 1 + \frac{1}{x-1}$.
3. $f(x) = 2\sqrt{x} - x$.
4. $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{1-x}$.

Exercice 4

Donner la dérivée des fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{1 - \sin(2x)} \quad ; \quad g(x) = \left(x + \frac{1}{x} \right) \sqrt{\frac{1}{x}} \quad ; \quad h(x) = \sqrt[3]{x-6} + \frac{1}{x} \quad ; \quad k(x) = \left| \frac{x^2 - x}{x-1} \right|$$

$$m(x) = x \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}} \quad ; \quad n(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x + 1} \quad ; \quad p(x) = \frac{\tan x}{1 - 2 \sin x}$$

$$q(x) = 3 \left(x^2 - 3x + 5 \right)^4 \quad ; \quad r(x) = \cos^2(3x) \quad ; \quad s(x) = -2 \tan^2(2x)$$

Exercice 5

Etude d'une fonction par lecture graphique La courbe (C_f) ci-dessus est celle d'une fonc-

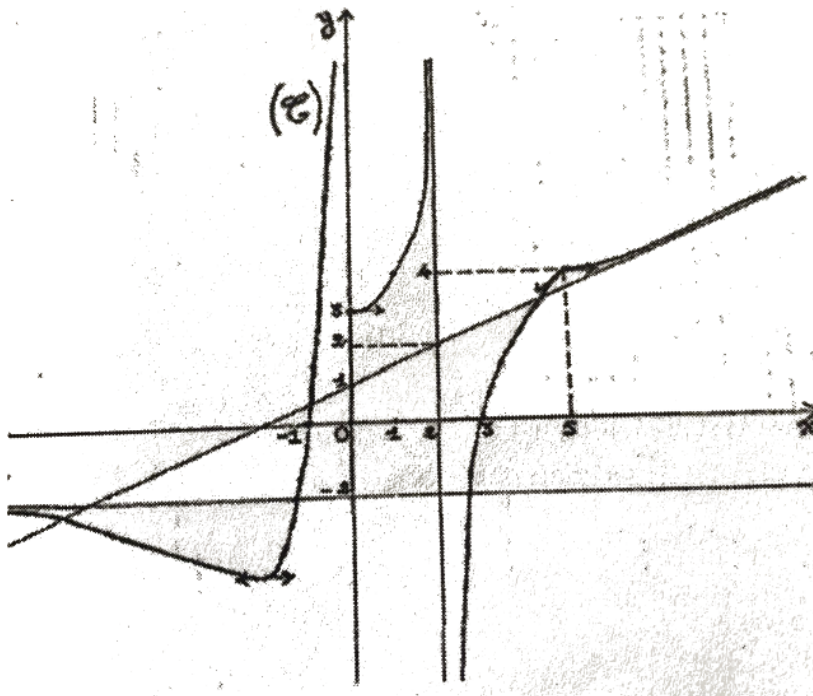


FIGURE 1 – Courbe de (C_f)

tion f dans un repère orthonormé. f est définie en 0 et on a : $f(0) = 3$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f .
2. Donner les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x);$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x);$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x);$

3. La courbe admet-elle une asymptote oblique ? Si oui, donner son équation.
4. Préciser les équations des autres asymptotes.
5. La fonction f est-elle dérivable en 5 ? Justifier la réponse.
6. Dresser le tableau de variation de f .

Exercice 6

Le tableau de variation ci-dessous est celui d'une fonction f continue sur son ensemble de définition avec $f'(1) = 0$ et $f'(4) = -1$. La courbe (C_f) de f coupe l'axe des abscisses en $A(-2; 0)$ et $B(-\frac{1}{2}; 0)$ et l'axe des ordonnées au point $C(0; 2)$.

La droite $(D) : y = x - 3$ est une asymptote oblique en $+\infty$ et est en dessous de (C_f) sur $[0; +\infty[$.

x	$-\infty$	-3	-1	1	3	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
f	-1	-3	$+\infty$	$-\infty \rightarrow 4$	2	$+\infty$

- Déterminer le domaine de définition de f puis donner les limites aux bornes.
- Déterminer le domaine de dérivabilité de f .
- Déterminer en justifiant toutes les asymptotes à la courbe de f .
- Donner l'équation de chacune des demi-tangentes à la courbe au point d'abscisse 1.
- Tracer (D) et (C_f) dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.
- Soit g la restriction de f à l'intervalle $[3; +\infty[$.
 - g est-elle bijective ? Justifier.
 - g^{-1} est-elle dérivable en 2 ? Justifier.
- Graphiquement, déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles l'équation $f(x) = m$ admet exactement 4 solutions réelles distinctes.

Exercice 7

Soit f la fonction donnée par : $f(x) = \frac{2 \sin(2x)}{1 + \cos(x)}$

- Déterminer le domaine de définition de f puis montrer qu'on peut réduire le domaine d'étude de f à l'intervalle $]0, 2\pi[$.
- Déterminer la limite de f en π .
- Soit α l'unique réel de $]0, 2\pi[$ tel que $\cos(\alpha) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Montrer que $\cos(2x) + \cos(x) - 1 > 0$ si et seulement si $x \in]0, \alpha[$.
- Montrer que $f'(x) = \frac{4(\cos^2(2x) + \cos(x) - 1)}{1 + \cos(x)}$, en déduire le signe de $f'(x)$ en utilisant (3), puis dresser le tableau de variation de f sur $]0, 2\pi[$.
- Tracer la courbe de f sur $] - 2\pi, 2\pi[$. Unité : 1 cm.

Problème n°1

Soit la fonction numérique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 - \frac{2x}{x^2 + 1} & \text{si } x \leq 1, \\ x - 1 - 3\sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Partie A

1. Justifier que $D_f = \mathbb{R}$.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 1$.
3. Interpréter les résultats obtenus
4. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f .
5. (a) Montrer que la courbe (C_f) admet deux asymptotes (D_1) et (D_2) à préciser.
(b) Préciser la position de (C_f) par rapport à (D_1) et (D_2) .
5. (a) Calculer $f'(x)$ dans les intervalles où f est dérivable (justifier l'existence de ces dérivées).
(b) Établir le tableau de variations de f .
(c) Tracer (C_f) et les asymptotes dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie B

Soit g la restriction de f à l'intervalle $] - \infty, 1]$.

1. Montrer que g est bijective de $] - \infty, 1]$ sur un intervalle J à préciser.
2. Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution β et que $\frac{1}{3} < \beta < \frac{3}{4}$.
3. (a) Étudier la dérivabilité de g^{-1} .
(b) Calculer $g^{-1}(2)$.
(c) Construire $(C_{g^{-1}})$ dans le repère précédent.
(d) Montrer que g admet une primitive sur $] - \infty, 1]$ et déterminer cette primitive qui s'annule en 0.

Problème n°2

Soit la fonction numérique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1+\sqrt{x^2-x}}{x-2} & \text{si } x \geq 1 \\ \frac{x-1}{x^2-4x+3} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative.

Partie A

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Calculer les limites aux bornes de D_f .
3. Étudier la continuité de f en 1.

4. Étudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter graphiquement les résultats.
5. (a) Déterminer les réels a , b , et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$, $\forall x < 1$.
 (b) En déduire que (C_f) admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote oblique (Δ) dont on précisera son équation.
 (c) Étudier la position relative de (C_f) par rapport à (Δ) sur $] -\infty; 1[$.
6. Étudier la nature de la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$, puis étudier sa position relative par rapport à (C_f) s'il s'agit d'une asymptote.
7. Déterminer $f'(x)$ sur chaque intervalle où f est dérivable, puis en déduire son signe.
8. Dresser le tableau de variation de f .

Partie B

Soit h la restriction de f à l'intervalle $I =] -\infty; 1[$.

1. Montrer que h réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser.
2. (a) Calculer $h(0)$.
 (b) h^{-1} est-elle dérivable en $-\frac{3}{2}$? Si oui, déterminer $(h^{-1})' \left(-\frac{3}{2} \right)$.
 (c) Déterminer le sens de variation de h^{-1} puis dresser son tableau de variation.
3. Déterminer l'expression de $h^{-1}(x)$.
4. Tracer soigneusement (C_f) et $(C_{h^{-1}})$ dans un repère orthonormé.

Problème n°3

Étude graphique

Soit f une fonction dont la courbe représentative est donnée ci-dessous

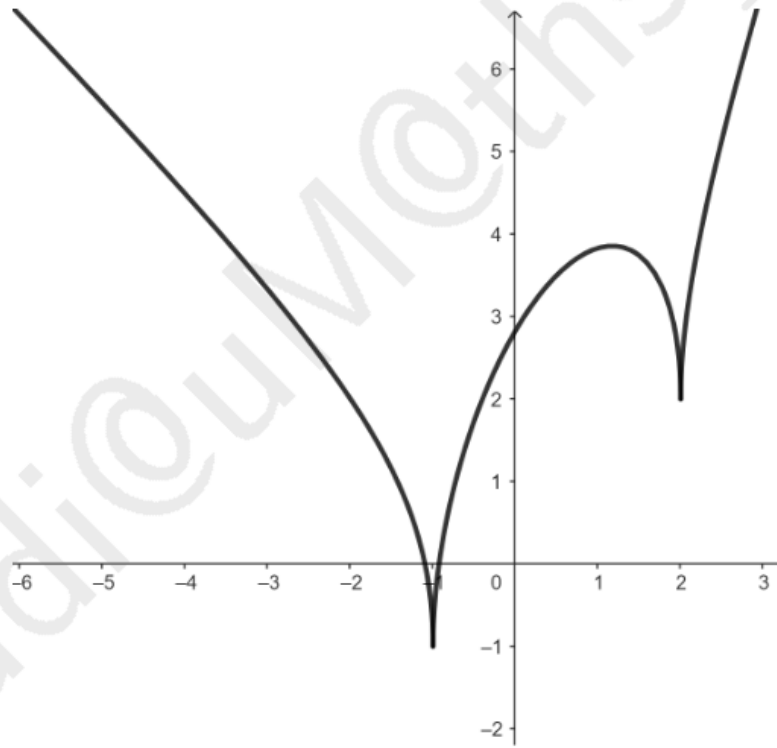


FIGURE 2 – Courbe de (C_f)

1. Déterminer $f(-1)$; $f(2)$ et D_f .
2. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f .
3. (a) f est-elle dérivable en -1 et en 2 ?
 (b) Déterminer les variations de f sur $] -\infty, -1[$ et sur $]2, +\infty[$.

Étude numérique

Dans cette partie, on prend $f(x) = x + 2\sqrt{|x^2 - x - 2|}$.

1. (a) Déterminer le domaine de définition de f .
 (b) Écrire $f(x)$ sans symbole de la valeur absolue puis calculer les limites aux bornes de D_f .
 (c) Montrer que (C_f) admet une asymptote oblique (D) en $+\infty$ et donner l'équation de cette asymptote.
 (d) Étudier la position de (C_f) par rapport à (D) .
 (e) Préciser la nature de l'asymptote à (C_f) en $-\infty$.
2. (a) Étudier la dérivabilité de f en -1 et 2 . Interpréter le résultat obtenu.
 (b) Donner l'ensemble de dérivabilité de f puis calculer $f'(x)$.
 (c) Démontrer que $f'(x) > 0$ sur $]2; +\infty[$ et que $f'(x) < 0$ sur $] -\infty; -1[$.
 (d) Résoudre l'inéquation $\sqrt{-x^2 + x + 2} \leq 2x - 1$ sur $] -1; 2[$.

- (e) Dresser le tableau de variation de f .
- 3. (a) Soit g la restriction de f sur $I =]2; +\infty[$. Montrer que g est une bijection de I sur I .
- (b) En étudiant la fonction h définie par $h(x) = x - g(x)$, montrer qu'il existe un réel α vérifiant $g(\alpha) = \alpha$.
- (c) Déterminer par le calcul la valeur exacte de α , puis déterminer $(g^{-1})(\alpha)$ si possible.
- (d) Tracer dans le même repère (Cg) et (Cg^{-1}) .

Problème n°4

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -x + \sqrt{x^2 + 4} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{|4 - x^2|} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Écrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
3. (a) Étudier la continuité de f en 0.
- (b) Étudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats.
- (c) Étudier la dérivabilité de f en 2. Interpréter les résultats.
4. (a) Calculer les limites aux bornes de D_f .
- (b) Étudier les branches infinies de (C_f) .
5. On pose pour tout $x \in [0, 2]$, $h(x) = f(x) - x$.
 - (a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution notée α .
 - (b) Vérifier que $\alpha \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$.
6. (a) Calculer $f'(x)$ sur chaque intervalle où f est dérivable.
- (b) Dresser le tableau de variations de f .
- (c) Construire (C_f) .
7. Soit g la restriction de f sur $I =]2; +\infty[$.
 - (a) Montrer que g est une bijection de I vers un intervalle J à préciser.
 - (b) Montrer que g^{-1} est dérivable en $\sqrt{5}$ puis calculer $(g^{-1})'(\sqrt{5})$.
 - (c) Expliciter $g^{-1}(x)$.
 - (d) Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère que (C_f) .
8. Montrer que pour tout $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$, $|f'(x)| \leq \frac{3\sqrt{7}}{7}$.
9. En déduire que $|f(x) - \alpha| \leq \frac{3\sqrt{7}}{7}|x - \alpha|$, pour tout $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$.