◇◇◇ Lycée de Dindéfélo ◇◇◇			A.S. : 2024/2025
Matière: Mathématiques	Niveau : TS2	Date: 09/12/2024	Durée : 4 heures

Correction du devoir n° 2 Du 1er Semestre

Exercice 1 : 0,5 × 10 = 5 points

1. Déterminons une primitive F de la fonction f sur I.

a $f(x) = (6x-3)(4x^2-4x+2)^3 \quad ; I = \mathbb{R}$ $(0,5pt)$

$$\begin{aligned} f(x) &= (6x-3)(4x^2-4x+2)^3 \\ &= 3(2x-1)(4x^2-4x+2)^3 \\ &= 3 \times \frac{1}{4}(8x-4)(4x^2-4x+2)^3 \\ &= 3 \times \frac{1}{4}(4x^2-4x+2)'(4x^2-4x+2)^3 \\ &= 3 \times \frac{1}{4}u'u^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}u^4 + k \\ &= 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}(4x^2-4x+2)^4 + k \\ &= \frac{3}{16}(4x^2-4x+2)^4 + k \end{aligned}$$

$$\mathbf{F(x) = \frac{3}{16}(4x^2-4x+2)^4} + k$$

b $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{3+\cos x}} \quad ; I = \mathbb{R}$ $(0,5pt)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin x}{\sqrt{3+\cos x}} \\ &= \frac{-(3+\cos x)'}{\sqrt{3+\cos x}} \\ &= \frac{-(u)'}{\sqrt{u}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= -2\sqrt{u} + k \\ &= -2\sqrt{3+\cos x} + k \end{aligned}$$

$$\mathbf{F(x) = -2\sqrt{3+\cos x} + k}$$

c $f(x) = 2\cos 3x - 3\sin 2x \quad ; I = \mathbb{R}$ $(0,5pt)$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\cos 3x - 3\sin 2x \\ &= 2 \times \cos(ax+b) - 3 \times \sin(ax+b) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 2\times\frac{1}{a}\sin(ax+b)+3\times\frac{1}{a}\cos(ax+b)\\
&= 2\times\frac{1}{3}\sin(3x)+3\times\frac{1}{2}\cos(2x)\\
&= \frac{2}{3}\sin(3x)+\frac{3}{2}\cos(2x)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\mathbf{F(x)=\frac{2}{3}\sin(3x)+\frac{3}{2}\cos(2x)+k}}$$

d $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x^2-1}}+\sin x\sin 2x \quad ; I=]-\infty;-1[$ $(0,5pt)$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}+\sin x\sin 2x\\
&= \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}+\sin x\times\cos x\times\sin x\\
&= \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}+\cos x\times\sin^2 x\\
&= \frac{3}{2}\frac{(x^2-1)'}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{3}(\sin^3 x)'\\
&= \frac{3}{2}\frac{(u)'}{\sqrt{u}}+\frac{1}{n+1}(\sin^{n+1}x)'\\
F(x) &= \frac{3}{2}\times 2\sqrt{u}+\frac{1}{3}\sin^3 x+k\\
&= 3\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{3}\sin^3 x+k
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\mathbf{F(x)=3\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{3}\sin^3 x+k}}$$

2 Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ par : $k(x)=\dfrac{3x-2}{(x+2)^3}$.

a Déterminons les a et b tels que $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, $k(x)=\dfrac{a}{(x+2)^2}+\dfrac{b}{(x+2)^3}$. $(0,5pt)$

$$
\begin{aligned}
k(x) &= \frac{a}{(x+2)^2}+\frac{b}{(x+2)^3}\\
&= \frac{a(x+2)}{(x+2)^3}+\frac{b}{(x+2)^3}\\
&= \frac{a(x+2)+b}{(x+2)^3}\\
&= \frac{ax+2a+b}{(x+2)^3}
\end{aligned}
$$

Par indentification $3x-2=ax+2a+b$

$$
\begin{aligned}
3x-2=ax+2a+b &\Longrightarrow \begin{cases} a=3\\ 2a+b=-2\end{cases}\\
&\Longrightarrow \begin{cases} a=3\\ 6+b=-2\end{cases}\\
&\Longrightarrow \begin{cases} a=3\\ b=-8\end{cases}
\end{aligned}
$$

Donc $k(x)=\dfrac{3}{(x+2)^2}+\dfrac{-8}{(x+2)^3}$

$$\boxed{\mathbf{k(x) = \frac{3}{(x+2)^2} + \frac{-8}{(x+2)^3} + c}}$$

b Déduisons-en la primitive K de k qui prend la valeur 2 en -3. $(0,5pt)$

$$\begin{aligned}
k(x) &= \frac{3}{(x+2)^2} + \frac{-8}{(x+2)^3} \\
&= 3\frac{1}{(x+2)^2} - 8\frac{1}{(x+2)^3} \\
&= 3\frac{1}{u^2} - 8\frac{1}{v^3} \\
&= 3\frac{1}{u^n} - 8\frac{1}{v^n} \\
K(x) &= 3\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}} - 8\frac{-1}{(n-1)v^{n-1}} + k \\
&= -3\frac{1}{(x+2)} + 8\frac{1}{2(x+2)^2} + k \\
&= -\frac{1}{(x+2)} + 4\frac{1}{(x+2)^2} + k
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{K(x) = -\frac{1}{(x+2)} + \frac{4}{(x+2)^2} + c}}$$

Problème : (12 points ≈ 144 mns)

On note (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité $1cm$ avec

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1} & ; \text{si } x \leq 0 \\ x + \sqrt{x^2 + x} & ; \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire :

Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = -x^3 + 3x - 4$.

1 Étudions les variations de g puis dressons son tableau de variations. $(0,75pt)$

$g'(x) = -3x^2 + 3$

$$\begin{aligned}
g'(x) = 0 &\implies -3x^2 + 3 = 0 \\
&\implies -x^2 + 1 = 0 \\
&\implies x = -1 \textbf{ ou } x = 1
\end{aligned}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$-x^2+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Sur $]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$ $g'(x) \leq 0$ donc g est décroissant

Sur $[-1;1]$ $g'(x) \geq 0$ donc g est croissant

Limites

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} g(x) &= \lim_{x\to-\infty} -x^3 + 3x - 4 \\
&= \lim_{x\to-\infty} -x^3 \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} g(x) &= \lim_{x\to+\infty} -x^3+3x-4\\ &= \lim_{x\to+\infty} -x^3\\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(-1) &= -(-1)^3+3(-1)-4\\ g(-1) &= 1-3-4\\ &= -6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(1) &= -(1)^3+3(1)-4\\ g(1) &= -1+3-4\\ &= -2\end{aligned}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-6	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$

2 a Montrons que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in\mathbb{R}$. $(0,5pt)$

Existance

D'après le tableau de vairation $\lim_{x\to-\infty} g(x)\times g(-1)<0$ d'où l'existance d'une solution

Unicité

g est continue et strictement décroissant de $]-\infty,-1[$ vers $]+\infty,-6[$ d'où l'unicité de la solution

b Donnons un encadrement de α à 10^{-1}. $(0,5pt)$

On sait que la solution unique α vérifie $\alpha<-1$.

Calculons $g(x)=-x^3+3x-4$ pour deux valeurs décimales consécutives.

$$g(-2)=-(-8)+3(-2)-4=8-6-4=-2<0$$

$$g(-1{,}5)=-(-3{,}375)+3(-1{,}5)-4=3{,}375-4{,}5-4=-5{,}125<0$$

On cherche donc plus à gauche.

$$g(-2{,}1)=-(-9{,}261)+3(-2{,}1)-4=9{,}261-6{,}3-4=-1{,}039<0$$

$$g(-2{,}2)=-(-10{,}648)+3(-2{,}2)-4=10{,}648-6{,}6-4=0{,}048>0$$

La fonction g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$, donc elle change de signe une seule fois sur cet intervalle.

Encadrement à 10^{-1} :

$$\boxed{-2{,}2<\alpha<-2{,}1}$$

3 En déduire le signe de $g(x)$ sur $]-\infty;0]$. $(0,25pt)$

$$\begin{aligned}g(x)>0 &\quad \text{si } x\in]-\infty,\alpha[\\ g(x)=0 &\quad \text{si } x=\alpha\\ g(x)<0 &\quad \text{si } x\in]\alpha,0]\end{aligned}$$

Partie B : Étude de la fonction f

1 Déterminons l'ensemble de définition D_f de f. $(0,5pt)$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-1} & ;\text{ si } x\leq 0\\ x+\sqrt{x^2+x} & ;\text{ si } x>0\end{cases} \quad \text{Posons } f(x)=\begin{cases} f_1(x) & ;\text{ si } x\leq 0\\ f_2(x) & ;\text{ si } x>0\end{cases}$$

- f_1

  $f_1 \quad \exists \quad$ ssi $x^2-1\neq 0$ et $x\leq 0$

  $x\neq -1$ et $x\neq -1$ et $x\in]-\infty,0]$

  $-1\in]-\infty,0]$ et $1\notin]-\infty,0]$

  $$\underline{Df_1=]-\infty;-1[\cap]-1;0[}$$

- f_2

  $f_2 \quad \exists \quad$ ssi $x^2+x\geq 0$ et $x>0$

  Posons $x^2+x=0$

  $x^2+x=0 \implies x=0$ **ou** $x=-1$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
x^2+x				$+$

  $\underline{Df_2=]0;+\infty[}$

$$\begin{aligned} Df &= Df_1\cup Df_2\\ \text{Donc} \qquad &=]-\infty;-1[\cap]-1;0[\cup]0;+\infty[\\ &= \mathbb{R}\setminus\{-1\}\end{aligned}$$

$$\mathbf{Df}=\mathbb{R}\setminus\{\mathbf{-1}\}$$

2 a
- Calculons les limites de f aux bornes de D_f . $(01pt)$
  - En $-\infty$: $f(x)=f_1(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2x^2}{x^2-1}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}\\ &= \lim_{x\to-\infty} x\\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to-\infty}\mathbf{f}(\mathbf{x})=-\infty$$

  - En $+\infty$: $f(x)=f_2(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2+x}\\ &= \lim_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2+x}\\ &= +\infty\end{aligned}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to+\infty}\mathbf{f}(\mathbf{x})=+\infty$$

– En -1^- : $f(x) = f_1(x)$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^3-2x^2}{x^2-1}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$			0		

$$= \text{“}\frac{-3}{0}\text{”}$$
$$= \text{“}\frac{-3}{0^+}\text{”}$$
$$= -\infty$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to -\mathbf{1}^-} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\infty$$

– En -1^+ : $f(x) = f_1(x)$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3-2x^2}{x^2-1}$$
$$= \frac{-3}{0^-}$$
$$= +\infty$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to -\mathbf{1}^+} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = +\infty$$

- Déduisons-en l'existence d'une asymptote dont on précisera.
  Comme $\lim_{x\to -1} f(x) = \infty$ donc $x = -1$ est une asymptote verticale

Donc $\mathbf{x} = -\mathbf{1}$ est une asymptote verticale à $(\mathcal{C}_\mathbf{f})$

b

- Pour $x \leq 0$, déterminons les réels a, b, c et d tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{cx+d}{x^2-1}$

$$f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2-1} \Longrightarrow f(x) = \frac{(ax+b)(x^2-1)+cx+d}{x^2-1}$$
$$\Longrightarrow f(x) = \frac{ax^3+bx^2-ax-b+cx+d}{x^2-1}$$
$$\Longrightarrow f(x) = \frac{ax^3+bx^2+(c-a)x+(d-b)}{x^2-1}$$

On a $\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-1} = \dfrac{ax^3+bx^2+(c-a)x+(d-b)}{x^2-1}$

par identification $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c-a=0 \\ d-b=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c-1=0 \\ d+2=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=1 \\ d=-2 \end{cases}$

Ainsi, $f(x) = x - 2 + \dfrac{x-2}{x^2-1}$

- Déduisons-en la nature de la branche infinie en $-\infty$. $(0,75pt)$
  En posant $(\Delta_1) : y = x - 2$, si $\lim_{x\to -\infty} f(x) - y = 0$ alors $y = x - 2$ est asymptote oblique
  En effet

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) - y = \lim_{x\to -\infty} \frac{x-2}{x^2-1}$$
$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{x^2}$$
$$= 0$$

Donc $(\mathbf{\Delta_1}) : \mathbf{y = x - 2}$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_\mathbf{f})$en $-\infty$

c Donner la nature de la branche infinie en $+\infty$. $(0,5pt)$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

- Cherchons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x^2+x}}{x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)}{x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) \\
&= 2
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$

- Cherchons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x &= \lim_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2+x}-2x \\
&= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-x \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Donc $(\mathbf{\Delta_2}) : \mathbf{y = 2x + \frac{1}{2}}$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_\mathbf{f})$en $+\infty$

3 a Montrons que f est continue sur D_f. $(0,75pt)$

- **Continuité sur chaque intervalle**
  - **Sur** $]-\infty,0]\setminus\{-1\}$

    La fonction $x \longmapsto \dfrac{x^3-2x^2}{x^2-1}$est une fonction rationnelle.
    Elle est donc continue sur son domaine de définition $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.
    En particulier, elle est continue sur $]-\infty,0]\setminus\{-1\}$.

  - **Sur** $]0,+\infty[$

    Pour tout $x>0$, on a $x^2+x>0$, donc la fonction $x\longmapsto\sqrt{x^2+x}$ est bien définie et continue sur $]0,+\infty[$.
    Ainsi, la fonction $x\longmapsto x+\sqrt{x^2+x}$ étant somme de fonctions continues, est continue sur $]0,+\infty[$.

- **Continuité en** 0
  - En 0^-: $f(x) = f_1(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3-2x^2}{x^2-1}\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\underline{\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0}$$

  - En 0^+: $f(x) = f_2(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \left(x+\sqrt{x^2+x}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\underline{\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0}$$

On a $f(0) = \dfrac{0^3 - 2\cdot 0^2}{0^2-1} = 0$

Finalement $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0

- **Conclusion**

La fonction f est continue sur $]-\infty, 0]\setminus\{-1\}$, sur $]0, +\infty[$ et en 0.

$$\lim_{\mathbf{x}\to 0^-} \mathbf{f(x)} = \lim_{\mathbf{x}\to 0^+} \mathbf{f(x)} = \mathbf{f(0)} = \mathbf{0} \text{ donc } \mathbf{f} \text{ est continue sur } \mathbf{D_f} = \mathbb{R}\setminus\{-\mathbf{1}\}.$$

b Étudions la dérivabilité de f en 0 puis interprétons le résultat obtenu. $(01pt)$

- Étudions la dérivabilité de f en 0
  - En 0^-: $f(x) = f_1(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{x^3-2x^2}{x^2-1}}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3-2x^2}{x^2-x}\\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-2x}{x-1}\\ &= 0\end{aligned}$$

  - En 0^+: $f(x) = f_2(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x+\sqrt{x^2+x}}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-x^2-x}{x(x-\sqrt{x^2+x})}\\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{x(x-\sqrt{x^2+x})}\\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{(x-\sqrt{x^2+x})}\\ &= " \frac{-1}{0} "\end{aligned}$$

Supposons que $x - \sqrt{x^2+x} > 0$

$x - \sqrt{x^2+x} > 0 \implies \sqrt{x^2+x} < x$

$$\sqrt{x^2+x} < x \implies \begin{cases} x^2+x > 0 \\ x > 0 \\ x^2+x < x^2 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x^2+x > 0 \\ x > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \textbf{ ou } x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
x^2+x		0	0	$+$
x			0	$+$
x			0	$+$

$$S = \emptyset$$

Ainsi, il n'existe pas de $x > 0$ pour lequel $x - \sqrt{x^2+x} > 0$

Donc $x - \sqrt{x^2+x} < 0$, $\forall x \in]0; +\infty[$

Ainsi $\forall x \in]0; +\infty[$ $f'(x) > 0$ donc f est croissant $0; +\infty[$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{(x-\sqrt{x^2+x})}$$
$$= \frac{-1}{0^-}$$
$$= +\infty$$

Autre Méthode

++

On calcule la dérivée à droite en 0 :

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+\sqrt{x^2+x}}{x}.$$

On écrit :

$$\frac{x+\sqrt{x^2+x}}{x} = 1 + \frac{\sqrt{x^2+x}}{x}.$$

Or,

$$\frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}} = \sqrt{1+\frac{1}{x}}.$$

Lorsque $x \to 0^+$, on a $\frac{1}{x} \to +\infty$, donc

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}} \to +\infty.$$

Ainsi,

$$f'_+(0) = +\infty.$$

+++

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$$

- Interprétons le résultat obtenu.

– f est dérivable à gauche de 0 et $y = 2x$ est une démi-tangent en 0^- ;

– f n'est pas dérivable à droite de 0 donc admet une démi-tangent orientée vers le haut en 0^+

Le point d'abscisse 0 est donc un point anguleux, ce qui explique la non-dérivabilité de f en 0.

4 Démontrons que : $f(x) = -2 + \dfrac{3(\alpha-2)}{\alpha^2-1}$. $(0,5pt)$

$f(x) = \dfrac{x^3-2x^2}{x^2-1} \implies f(x) = \dfrac{\alpha^3-2\alpha^2}{\alpha^2-1}$

Comme $g(\alpha) = 0$ alos $-\alpha^3 + 3\alpha - 4 = 0$ donc $\alpha^3 = 3\alpha - 4$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f(\alpha) = \frac{\alpha^3-2\alpha^2}{\alpha^2-1} &\implies f(\alpha) = \frac{\alpha^3-2\alpha^2}{\alpha^2-1}\\
&\implies f(\alpha) = \frac{3\alpha-4-2\alpha^2}{\alpha^2-1}\\
&\implies f(\alpha) = -\frac{2\alpha^2-3\alpha+4}{\alpha^2-1}\\
&\implies f(\alpha) = -\frac{2(\alpha^2-1)-3(\alpha-2)}{\alpha^2-1}\\
&\implies f(\alpha) = \frac{-2(\alpha^2-1)+3(\alpha-2)}{\alpha^2-1}\\
&\implies f(\alpha) = \frac{-2(\alpha^2-1)}{\alpha^2-1} + \frac{3(\alpha-2)}{\alpha^2-1}\\
&\implies f(\alpha) = -2 + \frac{3(\alpha-2)}{\alpha^2-1}
\end{aligned}$$

5 a Montrons que $\forall x \in]-\infty;-1[\cup]-1;0[$, on a : $f'(x) = \dfrac{-xg(x)}{(x^2-1)^2}$ puis étudier son signe $(0,5pt)$

- Montrons que $\forall x \in]-\infty;-1[\cup]-1;0[$, on a : $f'(x) = \dfrac{-xg(x)}{(x^2-1)^2}$ $(0,5pt)$ On a :

  $f'(x) = \dfrac{-xg(x)}{(x^2-1)^2}$

  La fonction f est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]-1,0[$ comme quotient de fonctions dérivables, avec $x^2-1 \neq 0$ sur ces intervalles.

  $$\begin{aligned}
  f'(x) &= \frac{(x^3-2x^2)'(x^2-1)-(x^3-2x^2)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}\\
  &= \frac{(3x^2-4x)(x^2-1)-(x^3-2x^2)(2x)}{(x^2-1)^2}.\\
  &= \frac{3x^4-3x^2-4x^3+4x-(2x^4-4x^3)}{(x^2-1)^2}\\
  &= \frac{x^4-3x^2+4x}{(x^2-1)^2}\\
  &= \frac{-x(-x^3+3x-4)}{(x^2-1)^2}\\
  &= \frac{-xg(x)}{(x^2-1)^2}
  \end{aligned}$$

  Ainsi, $\forall x \in]-\infty,-1[\cup]-1,0[, \quad f'(x) = \dfrac{-xg(x)}{(x^2-1)^2}$.

- le signe de $f'(x)$ dépend du numérateur

x	$-\infty$	α		-1		0	$+\infty$
$-x$	$+$		$+$	‖	$+$	0	(hachuré)
$g(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$		(hachuré)
$-xg(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	(hachuré)

Ansi,

si $x \in]-\infty, \alpha]$, $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $]-\infty; \alpha]$

si $x \in [\alpha, -1[\cup]-1, 0]$, $f'(x) \leq 0$ donc f est croissante sur $[\alpha, -1[\cup]-1, 0]$

b Calculons $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$ et étudions son signe.

- Calculons $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$$
$$= \frac{2\sqrt{x^2+x}+2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$$
$$= \frac{2\sqrt{x^2+x}+2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$$ **(0,5pt)**

- étudions son signe

Si $x > 0$, $f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2+x}+2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$ le signe dépend du numérateur

Or $2\sqrt{x^2+x}+2x+1 > 0 \, \forall x \in]0; +\infty[$

Ainsi $\forall x \in]0; +\infty[$ $f'(x) > 0$ donc f est croissant $]0; +\infty[$ **(0,5pt)**

c Dressons le tableau de variation de f sur D_f. $(0, 75pt)$

x	$-\infty$		α		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	$-\infty$ ‖ 2	$+$	
f	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

6 Construisons soigneusement la courbe (C_f). $(01pt)$

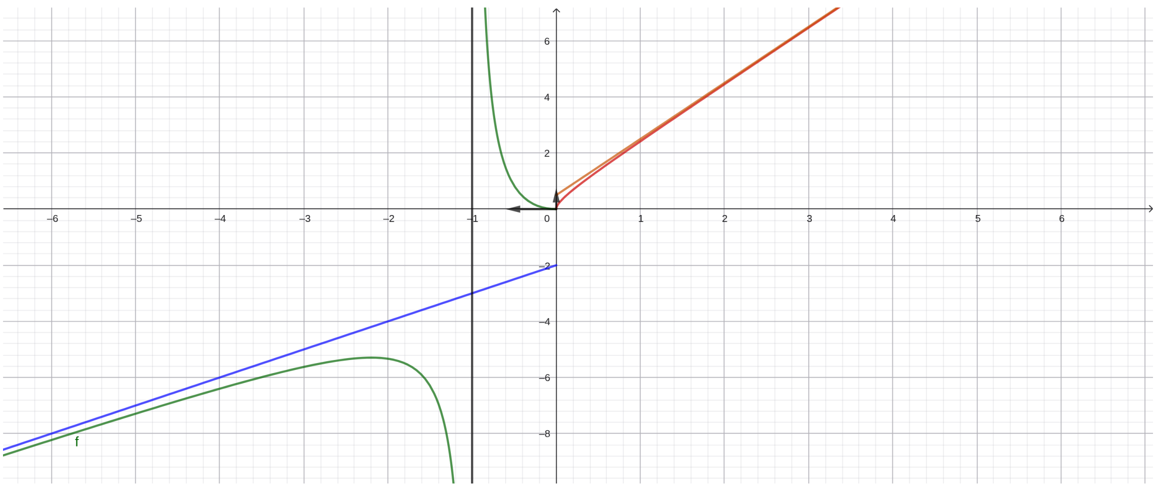

Figure 1: Courbe de (Cf)

Clique ici pour voir la courbe sur géogébra

Partie C : Bijection

Soit h la restriction de f sur $I =]0; +\infty[$.

1 Montrons que h réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser. $(0,5pt)$

Sur I h est continue est strictement croissante donc réalise une bijection de I vers $J=[0,+\infty[$

Comme $\forall x\in I$, $h'(x)\neq 0$ donc h^{-1} est dérivable sur J

2 Calculons $h^{-1}(1)$ et $(h^{-1})'(\sqrt{2}+1)$. $(0,5pt)$

$h(x)=x+\sqrt{x^2+x}$.

- **Calcul de** $h(1)$

  $h(1)=\sqrt{2}+1$

$$\mathbf{h(1)=\sqrt{2}+1}$$

- **Calcul de** $(h^{-1})'(\sqrt{2}+1)$

  $(h^{-1})'(\sqrt{2}+1)=\dfrac{1}{h'(h^{-1}(\sqrt{2}+1))}$ **Or** $h(1)=\sqrt{2}+1$ **donc** $h^{-1}(\sqrt{2}+1)=1$

$$\begin{aligned}(h^{-1})'(\sqrt{2}+1)&=\frac{1}{h'(1)} \quad \textbf{comme } h'(x)=1+\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}\\&=\frac{1}{1+\frac{2+1}{2\sqrt{1^2+1}}}\\&=\frac{1}{1+\frac{3}{2\sqrt{2}}}\\&=\frac{1}{\frac{2\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}}}\\&=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+3}\end{aligned}$$

$$\mathbf{(h^{-1})'(\sqrt{2}+1)=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+3}}$$

3 Explicitons $h^{-1}(x)$. $(0,5pt)$

$$\text{Soit } y=h(x)=x+\sqrt{x^2+x}.$$

On isole la racine :

$$y-x=\sqrt{x^2+x}.$$

En élevant au carré, on obtient :

$$(y-x)^2=x^2+x.$$

$$y^2-2xy+x^2=x^2+x.$$

En simplifiant :

$$y^2-2xy=x.$$

On factorise par x :

$$y^2=x(1+2y).$$

D'où :

$$\mathbf{h^{-1}(x) = \frac{x^2}{1+2x}}$$

4 Construisons $(C_{h^{-1}})$ dans le repère précédent. $(0,5pt)$

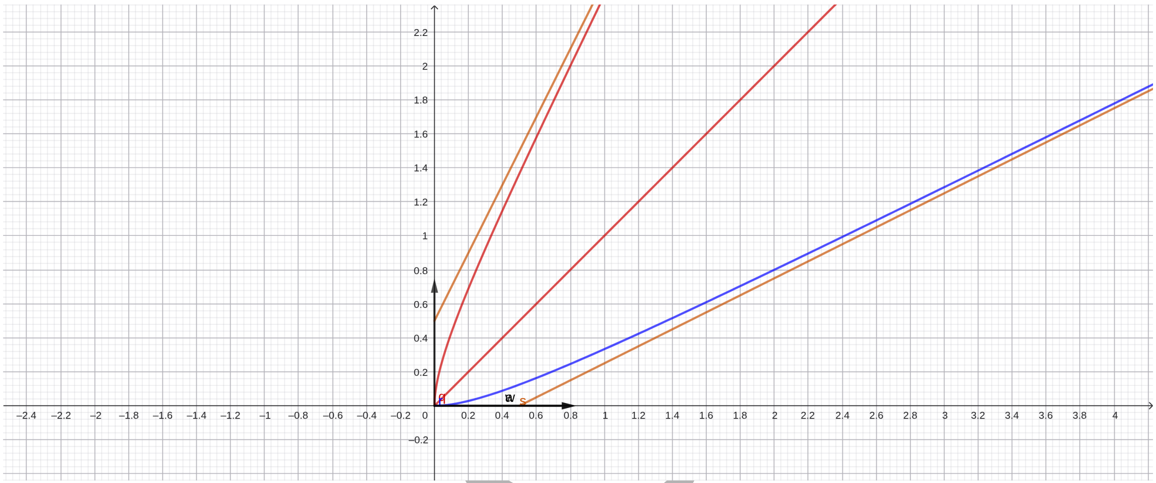

Figure 2: Courbe de (Cf)

Clique ici pour voir la courbe sur géogébra