

# Nombre Complexe

Professeur : M. BA

Classe : Terminale S2

Durée : 10 minutes

Note : /5

Nom de l'élève : \_\_\_\_\_

1. Pour tout nombre complexe  $z \neq -1 + 2i$ , on pose  $Z = \frac{z-2+4i}{z+1-2i}$ .  
Déterminons l'ensemble des points  $M$  du plan tels que :

(a)  $|Z| = 1$

$$|Z| = 1 \implies \left| \frac{z-2+4i}{z+1-2i} \right| = 1$$

$$\implies \frac{|z-2+4i|}{|z+1-2i|} = 1$$

$$\implies |z-2+4i| = |z+1-2i|$$

$$\implies |x+iy-2+4i| = |x+iy+1-2i|$$

$$\implies |x-2+i(y+4)| = |x+1+i(y-2)|$$

$$\implies \sqrt{(x-2)^2 + (4+y)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2}$$

$$\implies (x-2)^2 + (4+y)^2 = (x+1)^2 + (y-2)^2$$

$$\implies (x^2 - 4x + 4) + (16 + 8y + y^2) = (x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4)$$

$$\implies x^2 - 4x + 4 + 16 + 8y + y^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4$$

$$\implies x^2 + y^2 - 4x + 8y + 20 = x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5$$

$$\implies -4x + 8y + 20 = 2x - 4y + 5$$

$$\implies -4x - 2x + 8y + 4y = 5 - 20$$

$$\implies -6x + 12y = -15$$

$$\implies 2x - 4y = 5$$

L'ensemble des points  $M$  tel que  $|Z| = 1$  est la droite d'équation :  $2x - 4y = 5$

## Autre méthode

$Z = \frac{z-2+4i}{z+1-2i}$  en posant  $z_M = x + iy$ ,  $z_A = 2 - 4i$  et  $z_B = -1 + 2i$

$$Z = \frac{z_M - z_A}{z_M - z_B}$$

$$|Z| = 1 \implies \left| \frac{z_M - z_A}{z_M - z_B} \right| = 1$$

$$\implies \frac{MA}{MB} = 1$$

$$\implies MA = MB$$

L'ensemble des points  $M$  tel que  $|Z| = 1$  est la Médiatrice du segment  $[AB]$

$$\mathbf{E} = \{ \mathbf{M}(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 4y = 5 \}$$

(b)  $Z$  soit un réel.

$$Z = \frac{x^2 + y^2 - x + 2y - 10 + i(6x + 3y)}{(x+1)^2 + (y-2)^2}$$

Pour que  $Z$  soit un réel, la partie imaginaire du numérateur doit être nulle, c'est-à-dire :

$$6x + 3y = 0$$

$$2x + y = 0$$

L'ensemble des points  $M$  tel que  $Z$  soit un réel est la droite d'équation  $2x + y = 0$  privé du point  $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{E} = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid 2\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

2. Pour tout complexe  $z \neq i$ , on pose  $U = \frac{z+i}{z-i}$ .

Déterminons l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que :

$$\begin{aligned} U &= \frac{z+i}{z-i} \\ &= \frac{x+iy+i}{x+iy-i} \\ &= \frac{x+i(y+1)}{x+i(y-1)} \\ &= \frac{[x+i(y+1)][x-i(y-1)]}{x^2+(y-1)^2} \\ &= \frac{x[x-i(y-1)]+i(y+1)[x-i(y-1)]}{x^2+(y-1)^2} \\ &= \frac{x^2-ix(y-1)+ix(y+1)-i^2(y+1)(y-1)}{x^2+(y-1)^2} \\ &= \frac{x^2-ixy+ix+ixy+ix+(y+1)(y-1)}{x^2+(y-1)^2} \\ &= \frac{x^2-ixy+ix+ixy+ix+y^2-1}{x^2+(y-1)^2} \\ &= \frac{x^2+2ix+y^2-1}{x^2+(y-1)^2} \\ &= \frac{x^2+y^2-1+2ix}{x^2+(y-1)^2} \end{aligned}$$

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 - 1 + 2i\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2 + (\mathbf{y} - 1)^2}$$

(a)  $U \in \mathbb{R}_-$

Pour que  $U \in \mathbb{R}_-$  soit réel, il faut que  $Im(U) = 0$  et  $Re(U) < 0$

$$Im(U) = 0 \text{ et } Re(U) < 0 \implies 2x = 0 \text{ et } x^2 + y^2 - 1 < 0$$

$$\implies x = 0 \text{ et } x^2 + y^2 < 1$$

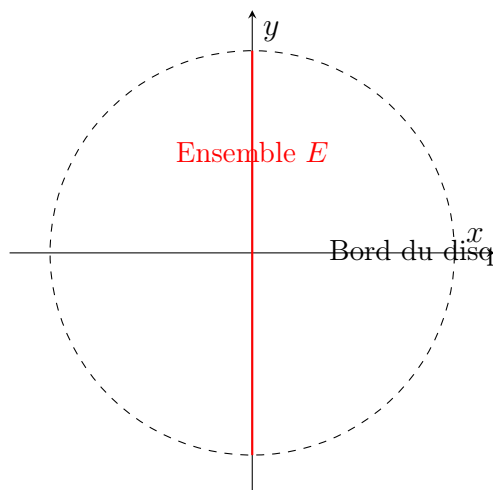
Ainsi, l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  est donné par :

$$\mathbf{E} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C} \mid Re(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \text{ et } |\mathbf{z}| < 1\}$$

ou, en coordonnées cartésiennes :

$$\mathbf{E} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x} = 0 \text{ et } \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 < 1\}$$

Cela représente l'intersection de la droite  $x = 0$  avec l'intérieur du disque de centre  $O(0,0)$  et de rayon 1, excluant le bord.



(b)  $U \in i\mathbb{R}$

Pour que  $U$  soit imaginaire pur, il faut que  $\text{Re}(U) = 0$ .

$$\text{Re}(\mathbf{U}) = \frac{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 - 1}{\mathbf{x}^2 + (\mathbf{y} - 1)^2} = 0$$

Ce qui donne :

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Ainsi, l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  est donné par :

$$E' = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

$$\mathbf{E}' = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C} \mid |\mathbf{z}| = 1\}$$

ou, en coordonnées cartésiennes :

$$E' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\mathbf{E}' = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 = 1\}$$

Cela représente le \*\*cercle de centre  $O(0,0)$  et de rayon 1\*\*.

