Correction de l'Exercice 4 : (6 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations et équations suivantes :

1. $|2x+3| > 0$ **(1 point)**
   - L'inégalité $|A| > 0$ est vraie pour tout $A \in \mathbb{R}$ tel que $A \neq 0$.
   - Ici, $A = 2x+3$. L'inégalité est vraie si et seulement si $2x+3 \neq 0$.
   - $2x+3=0 \iff 2x=-3 \iff x=-\frac{3}{2}$.
   - Donc, l'inégalité est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.
   - $\mathcal{S} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ ou $\mathcal{S} = \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[\cup \left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$.
2. $|-2x+3| \geq 6$ **(1 point)**
   - L'inégalité $|A| \geq a$ (avec $a > 0$) est équivalente à $A \geq a$ ou $A \leq -a$.
   - On a donc :
   $$-2x+3 \geq 6 \quad \text{ou} \quad -2x+3 \leq -6$$
   - Résolution de la première inéquation :
   $$-2x \geq 6-3 \iff -2x \geq 3 \iff x \leq -\frac{3}{2}$$
   - Résolution de la deuxième inéquation :
   $$-2x \leq -6-3 \iff -2x \leq -9 \iff x \geq \frac{9}{2}$$
   - L'ensemble des solutions est l'union des deux intervalles : $\mathcal{S} = \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{9}{2}; +\infty\right[$.
3. $|3x+5| \leq 2$ **(1 point)**
   - L'inégalité $|A| \leq a$ (avec $a > 0$) est équivalente à $-a \leq A \leq a$.
   - On a donc :
   $$-2 \leq 3x+5 \leq 2$$
   - On résout simultanément les deux inégalités :
   $$-2-5 \leq 3x \leq 2-5$$
   $$-7 \leq 3x \leq -3$$
   $$-\frac{7}{3} \leq x \leq -\frac{3}{3}$$
   $$-\frac{7}{3} \leq x \leq -1$$
   - L'ensemble des solutions est l'intervalle : $\mathcal{S} = \left[-\frac{7}{3}; -1\right]$.
4. $|3-x| = 4x-3$ **(1 point)**
   - L'équation $|A| = B$ exige que $B \geq 0$. On doit donc avoir $4x-3 \geq 0$, soit $4x \geq 3$, donc $x \geq \frac{3}{4}$. **(Condition de validité)**
   - Sous cette condition, l'équation est équivalente à $3-x = 4x-3$ ou $3-x = -(4x-3)$.
   - **Cas 1** : $3-x = 4x-3$
   $$3+3 = 4x+x \iff 6 = 5x \iff x = \frac{6}{5}$$
   Vérification de la condition : $\frac{6}{5} = 1,2$. $1,2 \geq 0,75$ (car $\frac{3}{4} = 0,75$). La solution $x = \frac{6}{5}$ est valide.

- **Cas 2** : $3 - x = -4x + 3$

$$-x + 4x = 3 - 3 \iff 3x = 0 \iff x = 0$$

Vérification de la condition : $0 < \frac{3}{4}$. La solution $x = 0$ n'est **pas** valide.

- L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \left\{\frac{6}{5}\right\}$.

5. $E(|x-3|) = 2$ **(1 point)**

- L'équation $E(A) = n$ (où n est un entier) est équivalente à $n \leq A < n+1$.
- Ici $A = |x-3|$ et $n = 2$. On a donc :

$$2 \leq |x-3| < 3$$

- Ceci est équivalent au système : $\begin{cases} |x-3| \geq 2 \\ |x-3| < 3 \end{cases}$
- **Résolution de** $|x-3| \geq 2$ (Équivalent à $x - 3 \geq 2$ ou $x - 3 \leq -2$) :

$$x \geq 5 \quad \text{ou} \quad x \leq 1$$

$\mathcal{S}_1 =]-\infty; 1] \cup [5; +\infty[$.

- **Résolution de** $|x-3| < 3$ (Équivalent à $-3 < x - 3 < 3$) :

$$-3 + 3 < x < 3 + 3 \iff 0 < x < 6$$

$\mathcal{S}_2 =]0; 6[$.

- La solution est l'intersection $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$.
- $\mathcal{S} = (]-\infty; 1] \cup [5; +\infty[) \cap]0; 6[=]0; 1] \cup [5; 6[$.

6. $E(|x-2|) = -2$ **(1 point)**

- L'expression $|x-2|$ est une valeur absolue, elle est donc toujours positive : $|x-2| \geq 0$.
- La partie entière $E(|x-2|)$ est donc toujours supérieure ou égale à 0 : $E(|x-2|) \geq 0$.
- L'équation $E(|x-2|) = -2$ est impossible puisque -2 est strictement négatif.
- L'ensemble des solutions est l'ensemble vide : $\mathcal{S} = \emptyset$.