Correction Exercice 1 : 4 pts (Factoriser les expressions suivantes :)

1 $a^2xy + aby^2 + b^2xy + abx^2$

$$(a^2xy + abx^2) + (b^2xy + aby^2) = ax(ax + by) + by(ax + by)$$
$$= (ax + by)(ax + by)$$

2 $3a^2 + 3b^2 - 4c^2 - 6ab$

$$(3a^2 - 6ab + 3b^2) - 4c^2 = 3(a^2 - 2ab + b^2) - 4c^2$$
$$= 3(a - b)^2 - (2 \cdot c)^2$$
$$= \left[\sqrt{3}(a - b)\right]^2 - (2 \cdot c)^2$$
$$= (\sqrt{3}(a - b) - 2c)(\sqrt{3}(a - b) + 2c)$$

3 $y^2 - x^2 + 2x - 1$

$$y^2 - (x^2 - 2x + 1) = y^2 - (x - 1)^2$$
$$= (y - (x - 1))(y + (x - 1))$$
$$= (y - x + 1)(y + x - 1)$$

4 $a^2b^2 - 1 + a^2 - b^2$

$$a^2b^2 - 1 + a^2 - b^2 = a^2b^2 - b^2 + a^2 - 1$$
$$= b^2(a^2 - 1) + (a^2 - 1)$$
$$= (a^2 - 1)(b^2 + 1)$$
$$= (a - 1)(a + 1)(b^2 + 1)$$

5 $(ab - 1)^2 - (a - b)^2$

$$(ab - 1)^2 - (a - b)^2 = [ab - 1 - (a - b)][ab - 1 + (a - b)]$$
$$= (ab - 1 - a + b)(ab - 1 + a - b)$$
$$= [a(b - 1) + (b - 1)][a(b + 1) - (1 + b)]$$
$$= [(a + 1)(b - 1)][(a + 1)(b - 1)]$$
$$= (a - 1)(a + 1)(b - 1)(b + 1)$$

Exercice 2 : 3 pts

1 Développons $(a+b+c)^2$.
$$[(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2c(a+b) + c^2$$
$$= \left(a^2 + 2ab + b^2\right) + 2ac + 2bc + c^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

2 Montrons que si $a+b+c=0$ alors $a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca)$.

On suppose que $a+b+c=0$.

On a: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ donc $(0)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 0 \implies a^2 + b^2 + c^2 = -2ab - 2ac - 2bc$$
$$\implies a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca)$$

3 On suppose a, b et c sont non nuls.
Montrons que $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 0 \implies (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \implies \frac{bc + ac + ab}{abc} = 0$$
$$\implies bc + ac + ab = 0$$

D'après la 1er question, $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$

Donc si $bc + ac + ab = 0$ alors $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Exercice 3 : 4 pts

Soit a, b, c trois réels :

1 Développons $(a+b+c)(ab+bc+ca)$ puis $(a+b+c)^3$

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) = a(ab+bc+ca) + b(ab+bc+ca) + c(ab+bc+ca)$$
$$= a^2b + abc + a^2c + ab^2 + b^2c + abc + abc + bc^2 + ac^2$$
$$= a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 + b^2c + bc^2 + 3abc$$

$$\boxed{(a+b+c)(ab+bc+ca) = a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 + b^2c + bc^2 + 3abc}$$

$$(a+b+c)^3 = (a+b)^3 + 3c(a+b)^2 + 3(a+b)c^2 + c^3$$
$$= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) + 3c(a^2 + 2ab + b^2) + 3(ac^2 + bc^2) + c^3$$
$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2.$$

$$\boxed{(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2}$$

2 Démontrons que si $a + b + c = 0$ alors $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

$$\begin{cases} (a+b+c)(ab+bc+ca) & = a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 + b^2c + bc^2 + 3abc \\ (a+b+c)^3 & = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b+c)(ab+bc+ca) & = a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 + b^2c + bc^2 + 3abc \\ (a+b+c)^3 & = 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 3b^2c + 6abc + 3bc^2 + a^3 + b^3 + c^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(a+b+c)(ab+bc+ca) = 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 9abc \\ (a+b+c)^3 = 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 9abc - 3abc + a^3 + b^3 + c^3 \end{cases}$$

$$3(a+b+c)(ab+bc+ca) - (a+b+c)^3 = 3abc - (a^3 + b^3 + c^3)$$

si $a + b + c = 0$ alors $3(0)(ab+bc+ca) - (0)^3 = 3abc - (a^3 + b^3 + c^3)$

donc $3abc - (a^3 + b^3 + c^3) = 0$ d'où $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

3 Déduisons-en que , pour tous réel x, y, z on a :

$$(x+y)^3 + (y+z)^3 + (z+x)^3 = 3(x+y)(y+z)(z+x)$$

En Posons $\begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ z + x = c \end{cases}$

donc $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ devient $(x+y)^3 + (y+z)^3 + (z+x)^3 = 3(x+y)(y+z)(z+x)$

Exercice 2 : 8 pts

1 Simplifions les expressions suivantes (on suppose que tous les dénominateurs sont non nuls).

$$A = \frac{\dfrac{x+y}{1-xy} - \dfrac{x-y}{1+xy}}{1 - \dfrac{x^2-y^2}{1-x^2y^2}}$$

$$= \frac{\dfrac{(x+y)(1+xy) - (x-y)(1-xy)}{(1-xy)(1+xy)}}{\dfrac{(1-x^2y^2) - (x^2-y^2)}{1-x^2y^2}}$$

$$= \frac{(x+y)(1+xy) - (x-y)(1-xy)}{(1-xy)(1+xy)} \cdot \frac{1-x^2y^2}{(1-x^2y^2) - (x^2-y^2)}$$

$$= \frac{2y(1+x^2)}{1-x^2y^2} \cdot \frac{1-x^2y^2}{1 - x^2 - x^2y^2 + y^2}$$

$$= \frac{2y(1+x^2)}{1 - x^2 - x^2y^2 + y^2}$$

$$= \frac{2y(1+x^2)}{(1+y^2)(1-x^2)}.$$

$$A = \frac{2y(1 + x^2)}{(1 + y^2)(1 - x^2)}$$

$$B = \frac{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}} \div \frac{a^2 - b^2}{(a + b)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{b - a}{ab}}{\dfrac{a + b}{ab}} \cdot \frac{(a + b)^2}{a^2 - b^2}$$

$$= \frac{b - a}{a + b} \cdot \frac{(a + b)^2}{(a - b)(a + b)}$$

$$= \frac{b - a}{a - b} \cdot \frac{(a + b)^2}{(a + b)^2}$$

$$= -1$$

$$\boxed{B = -1}$$

$$C = \frac{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b + c}}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b + c}} \times \frac{\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{a + c}}{\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a + c}}$$

$$= \frac{\dfrac{b + c - a}{a(b + c)}}{\dfrac{b + c + a}{a(b + c)}} \times \frac{\dfrac{a + c + b}{b(a + c)}}{\dfrac{a + c - b}{b(a + c)}}$$

$$= \frac{b + c - a}{a + b + c} \times \frac{a + b + c}{a + c - b}$$

$$= \frac{b + c - a}{a + c - b}.$$

$$\boxed{C = \frac{b + c - a}{a + c - b}}$$

$$D = \frac{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b + c}}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b + c}} \div \frac{a + b + c}{a - b - c}$$

$$= \frac{\dfrac{b + c + a}{a(b + c)}}{\dfrac{b + c - a}{a(b + c)}} \cdot \frac{a - b - c}{a + b + c}$$

$$= \frac{a + b + c}{b + c - a} \cdot \frac{a - b - c}{a + b + c}$$

$$= \frac{a - b - c}{b + c - a}.$$

$$D = \frac{a - b - c}{b + c - a}$$

2 Écrivons sous la forme $2^m \times 3^n \times 5^p$ (avec m, n, p des entiers relatifs) les réels suivants :

$$A = \frac{(0{,}009)^{-3}(0{,}016)^2 \cdot 250}{(0{,}00075)^{-1} \cdot 810^3 \cdot 30}$$

$$= \frac{(9 \cdot 10^{-3})^{-3}(16 \cdot 10^{-3})^2 \cdot (25 \cdot 10^1)}{(75 \cdot 10^{-5})^{-1} \cdot (2 \cdot 3^4 \cdot 5)^3 \cdot (3 \cdot 10)}$$

$$= \frac{9^{-3}10^9 \cdot 16^2 10^{-6} \cdot 25 \cdot 10}{75^{-1}10^5 \cdot 2^3 3^{12} 5^3 \cdot 3 \cdot 10}$$

$$= \frac{3^{-6} \cdot 2^8 \cdot 5^2 \cdot 10^4}{3^{-1}5^{-2}10^6 \cdot 2^3 3^{13} 5^3}$$

$$= 2^{8-3} \cdot 3^{-6+1-13} \cdot 5^{2+2-3} \cdot 10^{4-6}$$

$$= 2^5 \cdot 3^{-18} \cdot 5^1 \cdot 10^{-2}$$

$$= 2^5 \cdot 3^{-18} \cdot 5^1 \cdot 2^{-2} 5^{-2}$$

$$= 2^3 \cdot 3^{-18} \cdot 5^{-1}$$

$$\boxed{A = 2^3 \cdot 3^{-18} \cdot 5^{-1}}$$

$$B = \frac{(-6)^4 \cdot 30^{-2} \cdot (-10)^{-3} \cdot 15^4}{(-25)^2 \cdot 36^{-5} \cdot (-12)^3}$$

$$= \frac{(2 \cdot 3)^4 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5)^{-2} \cdot (2 \cdot 5)^{-3} \cdot (3 \cdot 5)^4}{(5^2)^2 \cdot (2^2 \cdot 3^2)^{-5} \cdot (2^2 \cdot 3)^3}$$

$$= \frac{2^4 3^4 \cdot 2^{-2} 3^{-2} 5^{-2} \cdot 2^{-3} 5^{-3} \cdot 3^4 5^4}{5^4 \cdot 2^{-10} 3^{-10} \cdot 2^6 3^3}$$

$$= 2^{4-2-3} \cdot 3^{4-2+4} \cdot 5^{-2-3+4} \cdot 2^{10-6} \cdot 3^{10-3} \cdot 5^{-4}$$

$$= 2^{-1+4} \cdot 3^{6+7} \cdot 5^{-1-4}$$

$$= 2^3 \cdot 3^{13} \cdot 5^{-5}.$$

$$\boxed{B = 2^3 \cdot 3^{13} \cdot 5^{-5}}$$