

Correction Composition Du 2nd Semestre

Exercice 2

06 points

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm, on considère les points A_0, A_1, A_2 d'affixe respective $z_0 = 5 - 4i, z_1 = -1 - 4i, z_2 = -4 - i$.

Soit f la fonction qui, à tout point $M(z)$, associe le point $M'(z')$, tel que :

$$z' = \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2}$$

- 1 a Trouver l'affixe b du point B invariant par f . (0,5pt)

PROBLEME

(10pt)

PARTIE A

Soit h la fonction dérivable sur \mathbb{R} définie par $h(x) = 1 + e^{2x-4}$ et $K = \left[1; \frac{5}{4}\right]$.

- 1 a) Calcul de $h'(x)$: $h(x) = 1 + e^{2x-4} \Rightarrow h'(x) = (1 + e^{2x-4})' = 2e^{2x-4}$
Comme $e^{2x-4} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $h'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ Donc, la fonction h est **strictement croissante** sur \mathbb{R} . (0,25pt + 0,25pt)

- b) Montrons que $h(K) \subset K$:

Comme h est croissante et $K = \left[1; \frac{5}{4}\right]$, on a :

$$h(K) = \left[h(1); h\left(\frac{5}{4}\right)\right]$$

Calculons :

$$h(1) = 1 + e^{2(1)-4} = 1 + e^{-2} \approx 1 + 0,1353 = 1,1353$$

$$h\left(\frac{5}{4}\right) = 1 + e^{2 \cdot \frac{5}{4} - 4} = 1 + e^{-1,5} \approx 1 + 0,2231 = 1,2231$$

Donc :

$$h(K) = [1,1353; 1,2231] \subset \left[1; \frac{5}{4}\right]$$

Ainsi, $h(K) \subset K$.

(0,5pt)

- 2 a) Résoudre $h(x) = x$ revient à résoudre $h(x) - x = 0$
On définit la fonction $\phi(x) = h(x) - x = 1 + e^{2x-4} - x$.

Existence

ϕ est continue sur $K = \left[1; \frac{5}{4}\right]$.

Calculons :

$$\phi(1) = 1 + e^{-2} - 1 = e^{-2} > 0 \quad ; \quad \phi\left(\frac{5}{4}\right) = 1 + e^{-1,5} - \frac{5}{4} \approx 1,2231 - 1,25 < 0$$

Donc, $\phi(1) > 0$ et $\phi\left(\frac{5}{4}\right) < 0$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un $\lambda \in \left]1; \frac{5}{4}\right[$ tel que $\phi(\lambda) = 0$, soit $h(\lambda) = \lambda$.

Unicité

$$\phi'(x) = h'(x) - 1 = 2e^{2x-4} - 1$$

Supposons que $\phi'(x) < 0$

$$\phi'(x) < 0 \iff 2e^{2x-4} - 1 < 0$$

$$\iff e^{2x-4} < \frac{1}{2}$$

$$\iff 2x - 4 < \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\iff 2x < 4 - \ln(2)$$

$$\iff x < 2 - \frac{\ln(2)}{2}$$

$$\iff x < 1,7$$

Donc si $x \in]-\infty; 1,7[$ alors $\phi'(x) < 0$

Comme $K = \left[1; \frac{5}{4}\right] \subset]-\infty; 1,7[$ donc $\forall x \in K, \phi'(x) < 0$

Donc $\phi'(x) < 0$ sur K , donc ϕ est strictement décroissante sur K .

Or, une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle admet ****au plus une**** racine. Comme on a déjà montré l'existence d'un λ , on en déduit que :

L'équation $h(x) = x$ admet une **unique solution** $\lambda \in K$.

(0,5pt)

b) On a : $h'(x) = 2e^{2x-4}$

Encadrons $x \in K = \left[1; \frac{5}{4}\right]$:

$$x \in K \implies 1 \leq x \leq \frac{5}{4}$$

$$\implies 2 \leq 2x \leq \frac{5}{2}$$

$$\implies -2 \leq 2x - 4 \leq -\frac{3}{2}$$

$$\implies e^{-2} \leq e^{2x-4} \leq e^{-1.5}$$

$$\implies 2e^{-2} \leq 2e^{2x-4} \leq 2e^{-1.5}$$

$$\implies 0 \leq 2e^{-2} \leq 2e^{2x-4} \leq 2e^{-1.5} \leq \frac{1}{2}$$

$$\implies 0 \leq 2e^{2x-4} \leq \frac{1}{2}$$

Donc : $\forall x \in K, \quad 0 < h'(x) < \frac{1}{2}$

(0,25pt)

c) Soit $x \in K$, et $\lambda \in K$ l'unique solution de $h(\lambda) = \lambda$.

D'après l'inégalité des accroissements finis (ou le théorème de la moyenne) appliquée à h sur K , il existe $c \in [x; \lambda] \subset K$ tel que :

$$h(x) - h(\lambda) = h(x) - \lambda = h'(c)(x - \lambda)$$

Donc :

$$|h(x) - \lambda| = |h'(c)| \times |x - \lambda| \leq \frac{1}{2}|x - \lambda|$$

(0,25pt)

3.a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, W_n \in K$.

Initialisation :

On a $W_0 = 1 \in K = \left[1; \frac{5}{4}\right]$. L'assertion est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité :

Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on ait $W_n \in K$.

Alors par définition :

$$W_{n+1} = h(W_n)$$

Or à la question 1.b), on a démontré que $h(K) \subset K$.

Donc comme $W_n \in K$, on a $W_{n+1} \in h(K) \subset K$.

Conclusion :

Par le principe de récurrence, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_n \in K$$

(0,5pt)

b) On veut montrer que :

$$|W_{n+1} - \lambda| \leq \frac{1}{2}|W_n - \lambda| \quad \text{et} \quad |W_n - \lambda| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Inégalité de récurrence :

On sait que $W_{n+1} = h(W_n)$ et que λ est l'unique solution de $h(\lambda) = \lambda$.

D'après la question 2.c), on a pour tout $x \in K$:

$$|h(x) - \lambda| \leq \frac{1}{2}|x - \lambda|$$

Or, à la question 3.a), on a montré que $\forall n, W_n \in K$. Donc :

$$|W_{n+1} - \lambda| = |h(W_n) - \lambda| \leq \frac{1}{2}|W_n - \lambda|$$

2) Majoration par $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ par récurrence :

3.b) On a $W_{n+1} = h(W_n)$ et $h(\lambda) = \lambda$.

D'après la question 2.c), pour tout $x \in K$, on a :

$$|h(x) - \lambda| \leq \frac{1}{2}|x - \lambda|$$

Or, à la question 3.a), on a montré que $W_n \in K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc on peut appliquer cette inégalité à chaque itération :

$$|W_1 - \lambda| \leq \frac{1}{2}|W_0 - \lambda|$$

$$|W_2 - \lambda| \leq \frac{1}{2}|W_1 - \lambda|$$

$$|W_3 - \lambda| \leq \frac{1}{2}|W_2 - \lambda|$$

\vdots

$$|W_k - \lambda| \leq \frac{1}{2}|W_{k-1} - \lambda|$$

En multipliant ces inégalités ****membre à membre****, on obtient :

$$|W_k - \lambda| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k |W_0 - \lambda|$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |W_k - \lambda| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

(0,5pt + 0,25pt)

c) D'après la question précédente, on a :

$$|W_n - \lambda| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Or $\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, donc :

$$|W_n - \lambda| \rightarrow 0 \quad \text{ce qui équivaut à} \quad W_n \rightarrow \lambda \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty$$

Ainsi, la suite (W_n) ****converge vers le réel λ ****, qui est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$ dans l'intervalle K . **(0,25pt)**

PARTIE B

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \ln \left(\left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) & \text{si } x \in [0; +\infty[\\ x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} & \text{si } x \in] - \infty; 0[\end{cases}$$

1 Déterminons le domaine de définition D_f de f .

Sur $[0; +\infty[$: on considère l'expression

$$f(x) = \ln \left(\left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right)$$

Cette expression est définie si :

- $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$ (toujours vrai car $x \geq 0$)
- $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| > 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

Donc sur $[0; +\infty[$, la fonction est définie sauf en $x = 1$.

Sur $] - \infty; 0[$: on considère

$$f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

Cette expression est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, car le dénominateur $e^x + 1 > 0$ pour tout x .

Donc la fonction f est définie sur :

$$D_f =] - \infty; 1[\cup] 1; +\infty[$$

(0,5pt)

2. Étudions la continuité de f en 0.

La fonction f est définie par morceaux :

$$f(x) = \begin{cases} \ln \left(\left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) & \text{si } x \in [0; +\infty[\\ x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} & \text{si } x \in] -\infty; 0[\end{cases}$$

A-t-on $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$?

Limite à gauche (vers 0^-) :

Pour $x < 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \\ &= 0 - \frac{1 - 1}{1 + 1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

Limite à droite (vers 0^+) :

Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \ln \left(\left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) \\ &= \ln \left(\left| \frac{-1}{1} \right| \right) \\ &= \ln(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

Conclusion :

La limite de $f(x)$ en 0 existe et vaut 0.

De plus, $f(0) = \ln \left(\left| \frac{0-1}{0+1} \right| \right) = \ln(1) = 0$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow f \text{ est continue en } 0$$

2 a Soit $x \in]0; 1[$.

On a : $x < 1$, donc $x - 1 < 0$, donc : $|x - 1| = -(x - 1) = 1 - x$

De plus, dans ce cas $x > 0$, donc $f(x) = \ln \left(\left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right)$.

On remplace $|x - 1|$ par $1 - x$, et on obtient : $f(x) = \ln \left(\frac{1-x}{x+1} \right)$

Or, on sait que : $\ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$

Donc : $f(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x) \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x}$

(0,5pt)

b Étudions la dérivabilité de f en 0.

On cherche la limite du taux d'accroissement : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ avec $f(0) = 0$ (voir question 2)

À gauche ($x \rightarrow 0^-$) :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{e^x + 1} \\ &= 1 - 1 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2}$$

À droite ($x \rightarrow 0^+$) :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x} \\ &= -1 - 1 \\ &= -2\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -2$$

Conclusion :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2}$$

Donc la fonction f n'est pas dérivable en 0.

(0,5pt)

c **À gauche de 0 :**

La pente de la demi-tangente est $\frac{1}{2}$, donc l'équation de la tangente gauche est :

$$y = \frac{1}{2}x$$

À droite de 0 :

La pente de la demi-tangente est -2 , donc l'équation de la tangente droite est :

$$y = -2x$$

$$y = \frac{1}{2}x \text{ et } y = -2x \quad \textbf{(0,5pt)}$$

- 3 Montrons que $\forall x \in]-\infty; 0[, f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$

Démonstration :

$$\begin{aligned} x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1} &= \frac{(x + 1)(e^x + 1) - 2e^x}{e^x + 1} \\ &= \frac{xe^x + x + e^x + 1 - 2e^x}{e^x + 1} \\ &= \frac{xe^x + x - e^x + 1}{e^x + 1} \\ &= \frac{x(e^x + 1) - e^x + 1}{e^x + 1} \\ &= x + \frac{-e^x + 1}{e^x + 1} \\ &= x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

Partons du membre de droite :

(0,25pt)

- 4 Calculons les limites de f aux bornes des intervalles de son domaine de définition.

(0,5pt)

À gauche de 1 : $x \rightarrow 1^-$

Sur $[0; 1[$, on a : $f(x) = \ln \left(\left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) = \ln \left(\frac{1-x}{x+1} \right)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \left(\frac{1-x}{x+1} \right) \\ &= \ln(0^+) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

À droite de 1 : $x \rightarrow 1^+$

Sur $]1; +\infty[$, même expression : $f(x) = \ln \left(\left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \\ &= \ln(0^+) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

À gauche de 0 : $x \rightarrow -\infty$

Sur $] -\infty; 0[$, on a $f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \\ &= -\infty - \frac{-1}{1} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

À droite de 0 : $x \rightarrow +\infty$

Sur $]1; +\infty[$, $f(x) = \ln \left(\left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) \\ &= \ln(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

- 5 En déduire les équations des asymptotes à la courbe \mathcal{C}_f de f .

(0,25pt)

Asymptote verticale :

D'après la question précédente, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

Donc la droite $x = 1$ est une **asymptote verticale** à la courbe \mathcal{C}_f .

Asymptote horizontale :

On a également :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Donc la droite $y = 0$ est une **asymptote horizontale** à droite de la courbe \mathcal{C}_f .

$$\text{Asymptotes de } \mathcal{C}_f : \quad x = 1 \quad \text{et} \quad y = 0$$

- 6 Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

(0,5pt)

Sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$:

Pour $x > 0$, on a :

$$f(x) = \ln \left(\left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) = \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \quad \text{car } \frac{x-1}{x+1} > 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \implies f'(x) = \frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

Sur $] -\infty; 0[$:

Pour $x < 0$, on a :

$$f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \text{ ou encore } f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2e^x(e^x + 1) - (e^x - 1)(e^x)}{(e^x + 1)^2} = 1 - \frac{e^x(e^x + 1 - e^x + 1)}{(e^x + 1)^2} = 1 - \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

Donc :

$$f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{(x+1)(x-1)} & \text{si } x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[\\ 1 - \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} & \text{si } x \in]-\infty; 0[\end{cases}$$

7 Étudier les variations de f .

(0,5pt)

On rappelle que le domaine de définition de f est :

$$D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$

Sur $]-\infty; 0[$:

On a montré précédemment :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{(e^x + 1)^2 - 2e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 2e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2} > 0 \end{aligned}$$

$$f'(x) > 0 \text{ sur }]-\infty; 0[\Rightarrow f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty; 0[$$

Sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$:

On a :

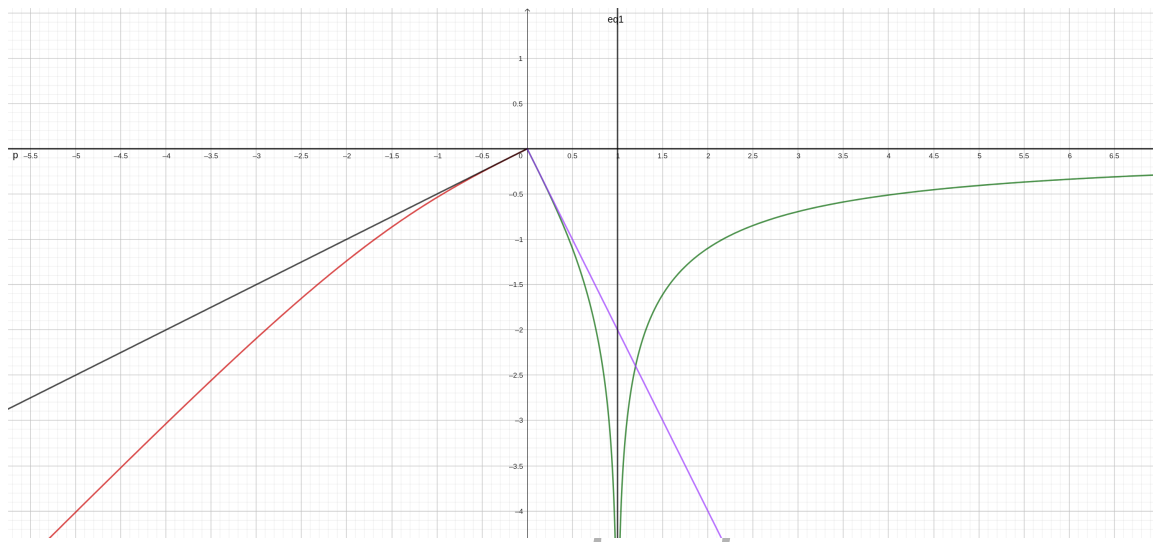
$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

Le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $(x+1)(x-1)$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$x + 1$		<div><div></div>0</div>	<div><div></div>0</div>	+	+	
$x - 1$		<div><div></div></div>	<div><div></div></div>	-	0	+
$(x + 1)(x - 1)$		<div><div></div></div>	<div><div></div></div>	-	0	+

- Sur $]0; 1[$, on a $(x+1)(x-1) < 0$ donc $f'(x) < 0$: f est décroissante sur $]0; 1[$
- Sur $]1; +\infty[$, $(x+1)(x-1) > 0$ donc $f'(x) > 0$: f est croissante sur $]1; +\infty[$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'	+	0	-	+
f	$-\infty$	0	$-\infty$	0



[Clique ici pour voir la figure sur géogébra](#)

PARTIE C

Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $I =]1; +\infty[$.

- 1 Montrons que g réalise une bijection de I vers un intervalle J .

On a vu que sur $]1; +\infty[$, la fonction f est définie et strictement croissante.

Or une fonction continue et strictement monotone est bijective de son domaine d'étude sur son image.

Donc, $g : I \rightarrow J$ est une bijection.

$$J =]-\infty; 0[$$

(0,5pt)

- 2 Soit $y \in J =]-\infty; 0[$. On cherche l'expression de $g^{-1}(y)$.

Par définition :

$$y = g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \quad \text{avec } x \in]1; +\infty[$$

Posons $y = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$. Exponentions :

$$e^y = \frac{x-1}{x+1}$$

On résout cette équation pour x :

$$\begin{aligned} e^y(x+1) &= x-1 \quad \Rightarrow \quad e^y x + e^y = x-1 \\ e^y x - x &= -1 - e^y \quad \Rightarrow \quad x(e^y - 1) = -1 - e^y \\ x &= \frac{-1 - e^y}{e^y - 1} = \frac{-(1 + e^y)}{e^y - 1} = 1 - \frac{2e^y}{e^y - 1} \end{aligned}$$

Donc :

$$g^{-1}(y) = 1 - \frac{2e^y}{e^y - 1} \quad \text{soit} \quad g^{-1}(x) = 1 - \frac{2e^x}{e^x - 1}$$

(0,25pt)

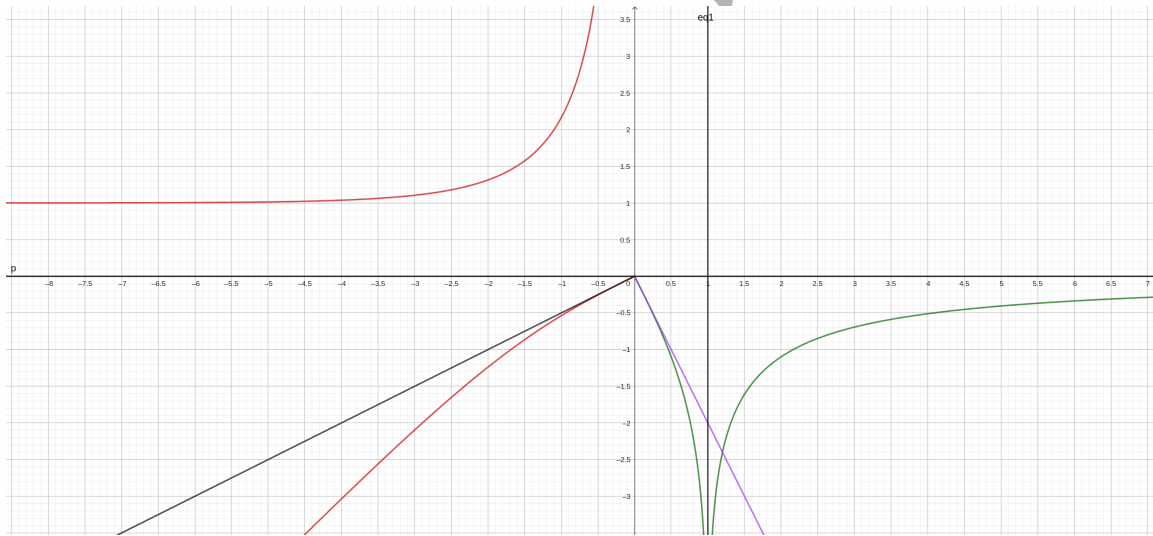
- 3 Pour tracer la courbe $C_{g^{-1}}$, on peut exploiter la symétrie par rapport à la droite $y = x$, puisque g^{-1} est la bijection réciproque de g .

On pourra donc obtenir $C_{g^{-1}}$ en prenant les points symétriques de ceux de C_g par rapport à la droite $y = x$.

Elle est définie sur $J =]-\infty; 0[$ et a pour équation :

$$C_{g^{-1}} : y = g^{-1}(x) = 1 - \frac{2e^x}{e^x - 1}$$

(0,5pt)



[Clique ici pour voir la figure sur géogébra](#)