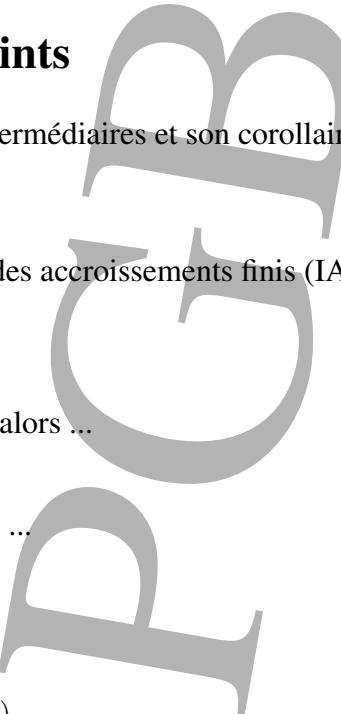


## Devoir n° 1 Du 1<sup>er</sup> Semestre

### Exercice 1 : 0,5 × 10 = 5 points

- 1 Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire.
- 2 Énoncer Théorème de la bijection.
- 3 Énoncer le théorème de l'inégalité des accroissements finis (IAF).
- 4 Théorème de la bijection.
- 5 Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$  ( $a \neq 0$ ) alors ...
- 6 Si  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$  alors ...
- 7 Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$  alors ...
- 8 Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \beta \in \mathbb{R}^*$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \beta x] = +\infty$  alors ...
- 9 Si  $f$  est continue et strictement décroissante sur  $]-\infty; b]$ , alors  $f(]-\infty; b]) = \dots$



### Exercice 2 : 5,5 points

- 1 Calculer les limites suivantes : (4 × 1 pt)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{\sin 2x} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^3 + x^2} ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7} - \sqrt{10-x}} ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$$

- 2 Donner les primitives des fonctions  $f, g$  et  $h$  respectivement sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$ . (3 × 0,5 pt)

$$f(x) = 2 \cos(x) - 3 \sin(x) ; \quad g(x) = (3x-1)(3x^2-2x+3)^3 ; \quad h(x) = \frac{1-x^2}{(x^3-3x+2)^3}.$$

### Problème : 9,5 points

**Partie A :** Soit la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{x - 1} & \text{si } x < 0, \\ x + \sqrt{x^2 + x} & \text{si } x \geq 0, \end{cases} \quad \text{et } (\mathcal{C}_f) \text{ sa courbe représentative dans un repère orthonormé } (O, \vec{i}, \vec{j}).$$

- 1 Déterminer l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de  $f$ . (0,5 pt)

- 2 Déterminer les limites aux bornes de  $\mathcal{D}_f$ . **(0,5 pt)**
- 3 Étudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en 0. Interpréter les résultats obtenus. **(1,5 pt)**
- 4 a Montrer que  $(\mathcal{C}_f)$  admet en  $-\infty$  une asymptote oblique ( $\Delta_1$ ) dont on déterminera l'équation. **(0,5 pt)**  
b Étudier la position relative de  $(\mathcal{C}_f)$  par rapport à  $\Delta_1$  sur  $]-\infty; 0[$ . **(0,5 pt)**
- 5 Montrer que  $(\mathcal{C}_f)$  admet en  $+\infty$  une asymptote oblique ( $\Delta_2$ ) dont on déterminera l'équation. **(0,5 pt)**
- 6 Préciser l'ensemble de dérivabilité de  $f$  puis calculer  $f'(x)$  sur chaque intervalle où  $f$  est dérivable. **(0,5 pt)**
- 7 Dresser le tableau de variation de  $f$ . **(0,5 pt)**
- 8 Préciser les points d'intersection de  $(\mathcal{C}_f)$  avec les axes du repère. **(0,25 pt)**
- 9 Construire la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ . **(1,5 pt)**

**Partie B :**

Soit  $h$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $I = [0; +\infty[$ .

- 1 Montrer que  $h$  réalise une bijection de  $I$  dans un intervalle  $J$  à préciser. **(0,25 pt)**
- 2 La bijection réciproque  $h^{-1}$  est-elle dérivable sur  $J$ ? **(0,25 pt)**
- 3 Calculer  $h\left(\frac{4}{5}\right)$  puis  $(h^{-1})'(2)$ . **(0,5 pt)**
- 4 Construire  $(\mathcal{C}_{h^{-1}})$  la courbe représentative de  $h^{-1}$  dans le même repère. **(0,5 pt)**
- 5 Exprimer  $h^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$ . **(0,5 pt)**