◇◇◇ Lycée de Dindéfélo ◇◇◇			A.S. : 2025/2026
Matière: Mathématiques	Niveau : TS2	Date: 29/12/2025	

Td Limites ln

Problème 1

Partie A Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x(1+\ln x)^2 - 1$.

1. On admettra que g est dérivable sur $]0;+\infty[$.
   - a. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.
   - b. Vérifier que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = (1+\ln x)(3+\ln x)$.
   - c. Étudier le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire le sens de variation de g.
2. Dresser le tableau de variation de g. (On ne calculera pas les limites en 0 et $+\infty$).
3. - a. Calculer $g(1)$.
   - b. En déduire que pour tout $x \in]0;1[$, $g(x) < 0$ et pour tout $x \in]1;+\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + \dfrac{1}{1+\ln x} - 1 & \text{si } x \in]0;\frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e};+\infty[\\ f(0) = -1 \end{cases}$$

(C) est la représentation graphique dans le repère orthonormé (O, I, J) (unités : 2cm).

1. - a. Montrer que f est continue en 0.
   - b. Étudier la dérivabilité de f en 0.
   - c. En déduire la tangente à (C) au point $A(0;-1)$.
2. - a. Calculer $\lim\limits_{x\to\frac{1}{e}^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{e}^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   - b. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à (C).
   - c. Étudier les positions relatives de (C) et (Δ).
   - d. Préciser l'autre asymptote à la courbe (C) de f.
3. - a. Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[\setminus\{\frac{1}{e}\}$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(1+\ln x)^2}$.
   - b. En déduire le sens de variation de f.
   - c. Dresser son tableau de variation.

Partie C

1. Calculer la dérivée de la fonction h définie sur $]\frac{1}{e};+\infty[$ par $h(x) = \ln(1+\ln x)$.
2. - a. En déduire les primitives sur $]\frac{1}{e};+\infty[$ de la fonction $k : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$.
   - b. Déterminer la primitive de k qui prend la valeur -1 en 1.

Problème 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2cm.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.
   En déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2. Calculer $g(1)$ et en déduire l'étude du signe de $g(x)$ pour x appartenant à $]0;+\infty[$.

Partie B : Détermination de l'expression de la fonction f

On admet qu'il existe deux constantes réelles a et b telles que, pour tout nombre réel x appartenant à $]0;+\infty[$, $f(x) = ax + b - \dfrac{\ln x}{x}$.

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Calculer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

2. Sachant que la courbe (C) passe par le point de coordonnées $(1;0)$ et qu'elle admet en ce point une tangente horizontale, déterminer les nombres a et b.

Partie C : Étude de la fonction f

On admet désormais que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f(x) = x - 1 - \dfrac{\ln x}{x}$.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en 0 et donner une interprétation graphique de cette limite.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. a. Vérifier que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   b. Établir le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   c. En déduire le signe de $f(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

3. On considère la droite (D) d'équation $y = x - 1$.
   a. Justifier que la droite (D) est asymptote à la courbe (C).
   b. Étudier les positions relatives de la courbe (C) et de la droite (D).
   c. Tracer la droite (D) et la courbe (C) dans le plan P muni du repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie D : Calcul d'aire

On note A la mesure, exprimée en cm^2, de l'aire de la partie du plan P comprise entre la courbe C, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

1. On considère la fonction H définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $H(x) = (\ln x)^2$.
   On désigne par H' la fonction dérivée de la fonction H.
   a. Calculer $H'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.
   b. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2. Calculer A et donner sa valeur arrondie au mm^2 près.

Problème 3

Partie A On considère g la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$g(x) = 1 + x(2\ln|x| + 1)$$

1 a Justifier que g est définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

b Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

2 a Étudier le sens de variation de g.

b Dresser le tableau de variation de g.

3 a Calculer l'image de -1 par g.

b Déterminer l'image J par g de l'intervalle I tel que : $I=]-\infty;-e^{-\frac{3}{2}}]$.

c Démontrer que la restriction h de g sur l'intervalle I est une bijection de I sur J.

d En déduire l'ensemble des solutions de l'équation : $x \in \mathbb{R}, g(x)=0$.

4 Déduire de tout ce qui précède que :
$\forall x \in]-\infty;-1[, g(x)<0$ et $\forall x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[, g(x)>0$.

Partie B On considère f la fonction numérique de la fonction de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x)=x(x\ln|x|+1) & \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

et (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. (Unité : 5cm)

1 Démontrer que f est continue en 0.

2 a Donner l'ensemble de définition de f' et déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b Étudier la dérivabilité de f en 0.

c Déterminer la fonction dérivée f' et déterminer le tableau de variation de f.

3 a Écrire une équation de la tangente (D) à la courbe (C) au point O.

b Démontrer que (D) coupe (C) en deux points E et F et calculer leurs coordonnées.

c Étudier la position de (C) par rapport à (D).

4 Démontrer que (C) coupe l'axe (OI) en un point K d'abscisse β tel que $-1,8<\beta<-1,7$.

5 Construire (C).

Partie C

1 Soit α un réel appartenant à $]0;1[$.
À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_{\alpha}^{1} x^2\ln(x)\,dx$.

2 a Calculer l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan limitée par (C), la droite (D) et les droites d'équation $x=1$ et $x=\alpha$.

b Calculer $\lim\limits_{\alpha\to 0} A(\alpha)$.

On prendra : $\ln(2)\approx 0,7$; $\ln(3)\approx 1,1$; $\ln(5)\approx 1,6$; $\ln(17)\approx 2,9$; $e\approx 2,7$; $\sqrt{e}\approx 1,6$.

Problème 4

Partie A

On considère la fonction g dérivable et définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x)=-x^3+x+1-\ln|x|$$

1. Montrer que -1 est un zéro de la fonction polynôme P définie par : $P(x) = -3x^3 + x - 2$.
2. a. Déterminer le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.
   b. Calculer les limites de g aux bornes des intervalles de son ensemble de définition.
   c. Étudier les variations de g.
   d. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique. On note α cette solution. Montrer que : $1,2 < \alpha < 1,3$.
   e. En déduire que : $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; \alpha[, g(x) > 0$; $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$.

Partie B

On considère la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = -x + 1 - \frac{x - \ln|x|}{x^2}$$

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J). (Unité graphique : 2cm)

1. Calculer les limites de f aux bornes des intervalles de son ensemble de définition.
2. a. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.
   b. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Déterminer une équation de la tangente (T) au point d'abscisse -1.
4. Déterminer que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à la courbe (C).
5. a. Étudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $h(x) = x - \ln|x|$.
   b. En déduire que (D) coupe (C) en un point unique d'abscisse β vérifiant : $\ln(-\beta) = \beta$.
   c. Montrer que : $-0,57 < \beta < 0,56$.
   d. Déterminer la position de (C) par rapport à (D).
6. Construire (T), (D) et (C).
7. Démontrer que la fonction numérique F définie sur $]0; +\infty[$ par :
   $F(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + x - \dfrac{1}{x} - \ln x - \dfrac{(\ln x)^2}{x}$ est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

Problème 5

Partie A

Soit g, la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = (x+2)^2 + \ln|x+2|$.

1. a. Calculer les limites de g au borne de son ensemble de définition.
   b. Etudier les variations de g sur $]-2; +\infty[$.
2. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β dans $]-2; +\infty[$.
   b. Montrer que β vérifie $-1,35 < \beta < -1,34$.
   c. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-2; +\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie par $f(x) = -x - 1 + \dfrac{1 + \ln(x+2)}{x+2}$ et (ε) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). Unité 2 centimètres.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition de f et la limite de f en $+\infty$.
   b) Déterminer la limite de f à droite en -2. Interpréter graphiquement le résultat.
   c) Montrer que, $\forall x \in]-2; +\infty[$; $f'(x) = \dfrac{-g(x)}{(x+2)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
   d) Montrer que $f(\beta) = -2\beta - 3 + \dfrac{1}{\beta + 2}$.
2. a) Montre que la droite (D) : $y = -x - 1$ est asymptote à (ε).
   b) Déterminer les coordonnées de A intersection de (ε) et de (D).
   c) Etudier la position de (ε) par rapport à (D).
3. Construire (ε) et (D) sur le même graphique.
4. Déterminer G, la primitive de $g(x)$ tel que $g(x) = (x+2)^2 + \ln(x+2)$ sur $]-2; +\infty[$ et s'annule en -1.
   Sachant que la primitive sur $]-2; +\infty[$ de $\ln(x+2)$ est $(x+2)\ln(x+2) - (x+2)$.
5. a) Si h est la restriction de f à l'intervalle $[\beta; +\infty[$, montrer que h est une bijection de $[\beta; +\infty[$ sur une partie K que l'on déterminera.
   b) Calculer $h(-1)$.
   c) Montrer h^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(h^{-1})'(1)$.
   d) Construire (ε'), la représentation graphique de h^{-1}, bijection réciproque de h sur le graphique précédent.

Problème 6

Partie A : Etude d'une fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x} - 4(x-1)e^{x} - 2$$

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$.
   b) Montrer que $f(x) = xe^{2x}\left(1 - \dfrac{1}{2x} - \dfrac{4}{e^x} + \dfrac{4}{xe^x} - \dfrac{2}{xe^{2x}}\right)$ et en déduire la limite de f en $+\infty$.
2. Etudier les variations de f.
3. Soit (C_f) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé, unité graphique 2cm.
   a) Etudier les branches infinies de (C_f).
   b) Montrer que (C) coupe l'axe des abscisses en un point, dont l'abscisse α appartient à l'intervalle $[-2; -1]$.
   c) Tracer (C_f). On prendra $\ln 2 \approx 0,7$.
4. Montrer que $F(x) = \left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\right)e^{2x} + 4(2-x)e^{x}$ est une primitive de $f(x) + 2$.

Partie B : Etude d'une nouvelle fonction numérique de variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} g(x) = (x^2 - 4x)\ln x - \dfrac{1}{2}(x^2 - 8x + 4) & \forall x > 0 \\ g(0) = -2 \end{cases}$$

1. Montrer que : $g(x) = f(\ln x), \forall x > 0$.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de g à droite en 0.
3. Calculer les limites aux bornes de son domaine.
4. Etudier les variations de g.
5. Soit (C_g) la courbe représentative de g dans un repère orthonormé, unité 2cm.
   - a. Etudier la branche infinie de (C_g).

Problème 7

Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par : $f(x) = \dfrac{1}{1 - xe^{-x}}$
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct (O, I, J). Unité graphique : 2cm

Partie A
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - xe^{-x}$

1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (x-1)e^{-x}$
2. Déterminer le sens de variation de g puis, dresser le tableau de variation de g (sans les limites aux bornes).
3. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$.

Partie B

1. Démontrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
2. Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En donner une interprétation graphique.
3. - a. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{(1-x)e^{-x}}{(1 - xe^{-x})^2}$.
   - b. Déterminer le sens de variation de f puis dresser le tableau de variation de f.
4. - a. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0 est $y = x + 1$.
   - b. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x - 1 = \dfrac{(x + 1 - e^x)xe^{-x}}{1 - xe^{-x}}$.
   - c. Déterminer le signe de la fonction h telle que : $h(x) = x + 1 - e^{-x}$.
   - d. Déduire de la question précédente les positions relatives de (C) et de (T).
5. Construire (T) et (C).

Problème 8

Partie A : (Etude d'une fonction auxiliaire g)
Soit g la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x - 2 - 2x\ln x$

1. Justifier que l'ensemble des solutions de l'inéquation : $-2\ln x - 1 \geq 0$ est $S = \left]0; e^{-\frac{1}{2}}\right]$

2. a. Calculer $g'(x)$.

   b. Etudier les variations de g.

3. a. Etablir le tableau de variation de g. (On ne cherchera pas à calculer les limites de g).

   b. En déduire que : $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) < 0$.

Partie B : (Etude et représentation graphique d'une fonction f)
Soit f la fonction numérique définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = (x-1)^2 - x^2 \ln x$ si $x \in]0; +\infty[$ et $f(0) = 1$.
On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).
L'unité graphique est 2cm.

1. a. Calculer la limite de f en $+\infty$.

   b. Justifier que la courbe (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.

2. a. Justifier que f est continue en 0.

   b. Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -2$.

3. Soit (T) la droite d'équation $y = -2x + 1$ et d la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $d(x) = f(x) - y$.

   a. Justifier que (T) est la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

   b. Vérifier que pour tout $x \in]0; +\infty[, d(x) = x^2 - x^2 \ln x$.

   c. Etudier la position relative de (C) par rapport à (T).

4. a. Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$.

   b. Etablir le tableau de variation de la fonction f.

5. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$.

   b. Vérifier que $\alpha = 1$ et démontrer que $f(x) \geq 0$ si $0 \leq x \leq 1$ et $f(x) \leq 0$ si $x \geq 1$.

6. Construire (T) et (C).

Partie C : (Etude d'une primitive F d'une restriction de la fonction f)
Soit F la primitive de f sur $[1; +\infty[$ qui s'annule en e. (On ne cherchera pas à déterminer F).

1. Déterminer $F(e)$ et $F'(x)$. (On justifiera chaque réponse).

2. Démontrer que F est une bijection de $]1; +\infty[$ vers $F(]1; +\infty[)$.

3. Soit F^{-1} la réciproque de F. Calculer $(F^{-1})'(0)$.

Problème 9

On désigne par (C) la courbe de la fonction f ci-dessous dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ dans le plan d'un repère orthonormé $(O; I, J)$. L'unité de longueur : 2 cm.

Partie A : On considère la fonction f définie par : $f(x) = x - 1 - \dfrac{2}{x} - \ln\left|1 - \dfrac{1}{x}\right|$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

2. Montrer que :

- Pour tout $x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$; $f(x) = x - 1 - \dfrac{2}{x} - \ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$
- Pour tout $x \in]0; 1[$; $f(x) = x - 1 - \dfrac{2}{x} - \ln\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$

3. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

4. Calculer la limite de f en 1. Interpréter graphiquement ce résultat.

5. a. Calculer les limites de f à gauche en 0 et à droite en 0.
   b. Interpréter graphiquement ces résultats.

Partie B : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - x^2 + x - 2$.

1. Calculer $g'(x)$, g' étant la fonction dérivée de g.

2. Déterminer le sens de variation de g.

3. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $1 < \alpha < 1,5$.
   b. En déduire un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.

4. Montrer que pour tout $x \in]-\infty; \alpha[$; $g(x) < 0$ et pour tout $x \in]\alpha; +\infty[$; $g(x) > 0$.

5. Montrer que pour tout nombre réel x élément de $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2(x-1)}$.

6. a. Déterminer le signe de $f'(x)$.
   b. Dresser le tableau de variation de f.

Partie C

1. Soit (D) la droite d'équation $y = x - 1$.
   Montrer que la droite (D) est une asymptote à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Calculer $f(-2)$; $f(-\frac{1}{2})$ et $f(\frac{1}{2})$.

3. Construire dans le repère $(O; I, J)$ la courbe (C) et ses asymptotes. On prendra $\alpha \approx 1,3$.

Partie D

On considère les fonctions h et k définies sur $]2; +\infty[$ par $h(x) = (x-1)\ln(x-1) - x\ln x$ et on admettra que pour tout x élément de $]2; +\infty[$, $f(x) - x + 1 < 0$.

1. Calculer $h'(x)$, h' étant la dérivée de h.

2. Calculer l'aire de la partie limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

Problème 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité : $OI = 2\text{cm}$ et $OJ = 1\text{cm}$.

Partie A

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(0) = -1$ et $g(x) = \dfrac{x}{(\ln(x))^2} - 1$ et (C_g) sa courbe.

1 a Déterminer l'ensemble de définition de g.

b Calculer les limites de g en 1 et en $+\infty$.

c Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement ce résultat.

2 a Démontrer que g est continue en 0.

b Étudier la dérivabilité de g en 0 et interpréter graphiquement ce résultat.

3 On admet que g est dérivable sur $[0;1[\cup]1;+\infty[$.

a Démontrer que $\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[; g'(x) = \dfrac{\ln(x)(\ln(x)-2)}{(\ln(x))^4}$.

b Déterminer le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

4 a Démontrer que l'équation $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;1[$.

b Vérifier que $0,4 < \alpha < 0,5$.

c En déduire que : $\forall x \in [0;\alpha[; g(x) < 0$
$\forall x \in]\alpha;1[\cup]1;+\infty[; g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(x)}$ et (C), sa courbe.

1 a Calculer les limites de f en 0, en 1 et en $+\infty$.

b Interpréter graphiquement les résultats précédents.

2 On admet que f est dérivable sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$.

a Démontrer que $\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[, f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation de f.

3 Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{1-\sqrt{\alpha}}{\alpha}$. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$.

4 Construire la courbe (C). On prendra $\alpha \simeq 0,5$.

Partie C

Soit h la restriction de f à $]1;+\infty[$.

1 Démontrer que h est la bijection de $]1;+\infty[$ sur un intervalle K que l'on déterminera.

2 On note h^{-1} la bijection réciproque de h et (Γ) sa représentation graphique.

a Dresser le tableau de variation de h^{-1}.

b Calculer $h(e)$; $h^{-1}\left(\dfrac{1-e}{e}\right)$ et $(h^{-1})'\left(\dfrac{1-e}{e}\right)$.

c Déterminer une équation de la tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse $\dfrac{1-e}{e}$.

3 Construire (Γ) dans le même repère que (C).

Problème 11

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} \forall x > 0, g(x) = 1 - x\ln x \\ g(0) = 1 \end{cases}$

1. a. Etudier la continuité de g en 0.
   b. Etudier la dérivabilité de g en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
2. Calculer la limite de g en $+\infty$.
3. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations.
4. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]e^{-1};+\infty[$.
   b. Justifier que : $1,7 < \alpha < 1,8$.
5. Démontrer que : $\begin{cases} \forall x \in [0;\alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in [\alpha;+\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = e^{3-x}\ln x$
(C_f) désigne sa représentation graphique dans le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$ Unité graphique : 2cm

1. Calculer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
2. a. Vérifier que : $\forall x \in]0;+\infty[$: $f(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)\left(\frac{x}{e^x}\right)e^3$
   b. En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
3. a. Montrer que : $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = \frac{e^{3-x}}{x}g(x)$.
   b. En déduire le sens de variations de f.
4. a. Montrer que : $f(\alpha) = \frac{e^3}{\alpha e^\alpha}$.
   b. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
   c. Dresser le tableau de variations de f.
5. Construire (C_f).
6. Soit h la restriction de f à l'intervalle $]0;\alpha[$.
   a. Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de départ, l'arrivée d'arrivée.
   b. Dresser le tableau de variation de h^{-1}.
   c. Calculer $(h^{-1})'(0)$.

Problème 12

Partie A
On considère l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = xe^x$

1. Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$

2. Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax+b)e^x$.

   a. Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).

   b. Montrer que v est une solution de l'équation (1) si et seulement si $u+v$ est une solution de l'équation (2).

   c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (1).

3. Déterminer la solution f de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2e^x - x - 2$

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

2. Étudier le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variation.

3. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions réelles : 0 et α telle que $-1,6 < \alpha < -1,5$.

   b. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie C : Etude de la fonction principale f
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; I; J)$. (Unité : 4cm)

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

2. a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x g(x)$.

   b. En déduire les variations de f et dresser le tableau de variation de f.

3. Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

4. Tracer (C).

Partie D : Calcul d'aire
Soit m un réel négatif.

1. Interpréter graphiquement l'intégrale $I = \displaystyle\int_m^0 f(x)\,dx$

   a. Calculer $\displaystyle\int_m^0 xe^x\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

   b. En déduire la valeur de I.

2. Calculer la limite de I lorsque m tend vers $-\infty$.

Problème 13

L'objet de ce problème est la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x(x - (\ln x)^2) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$. Unité graphique 5cm.

Partie A

On considère la fonction h dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par $h(x) = 2 - \dfrac{2}{x} - 2\dfrac{\ln x}{x}$.

1. a. Calculer $h'(x)$ et étudier les variations de h.
   b. En déduire que $\forall x \in]0; +\infty[, h(x) \geq 0$.
2. On considère la fonction g dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par $g(x) = 2x - 2\ln(x) - (\ln x)^2$.
   a. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
   b. Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x) = h(x)$.
   c. Étudier les variations de g.
   d. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et vérifier que $0,1 < \alpha < 0,2$.
   e. Démontrer que $\begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est continue en 0.
3. a. Étudier la dérivabilité de f en 0.
   b. Interpréter graphiquement ce résultat.
4. a. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
   b. Interpréter graphiquement les résultats.
   c. Démontrer que $f(\alpha) = \alpha(-\alpha + 2\ln(\alpha))$.
5. a. On suppose que f est dérivable sur $]0; +\infty[$.
   b. On suppose que f est dérivable sur $]0; +\infty[$. Calculer $f'(x)$ et montrer que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$.
   c. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

Partie C

1. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
2. Soit la fonction $k(x) = f(x) - (2x - 1)$.
   a. Vérifier que $k'(x) = g(x) - 2$ et que $k''(x) = h(x)$.
   b. En déduire le sens de variation de k'. Calculer $k'(1)$ puis donner le signe de k'.
   c. Dresser le tableau de variation de k puis donner le signe de k. (On ne calculera pas de limites).
   d. En déduire la position relative de (C) et de la droite (T).

3. Tracer (C) et (T). On prendra $\alpha = 0,1$.

4. Soit la fonction q, restriction de f à l'intervalle $[\alpha; +\infty[$.

   a. Montrer que q admet une bijection réciproque notée q^{-1} dont on précisera les ensembles de départ et d'arrivée.

   b. Dresser le tableau de variation de q^{-1}.

   c. Calculer $q(1)$, $q^{-1}(1)$ et $(q^{-1})'(1)$.

   d. Construire la courbe de q^{-1} dans le même repère que (C).

Problème 14

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x(1-x)+1$.

1. Étudier le sens de variation de g.

2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1,27; 1,28]$. On note α cette solution.

3. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-\infty; 0]$.
   Montrer que $g(x) > 0$ sur $[0; \alpha[$ et $g(x) < 0$ sur $]\alpha; +\infty[$.

Partie B :
Étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{e^x+1} + 2$.
On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$; unités graphiques : 1cm sur l'axe des abscisses et 2cm sur l'axe des ordonnées.

1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   b. Démontrer que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique (d) dont on déterminera l'équation.

2. Étudier la position de (C_f) par rapport à (d).

3. a. Montrer que la fonction dérivée de f a même signe que la fonction g étudiée dans la **Partie A**.

   b. Montrer qu'il existe deux entiers p et q tels que $f(\alpha) = p\alpha + q$.

   c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.

4. Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec ses asymptotes et sa tangente au point d'abscisse α.

Partie C : Encadrement d'aire
Pour tout entier naturel n, tel que $n \geq 2$, on donne D_n, l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan, dont les coordonnées vérifient $2 \leq x \leq n$ et $2 \leq y \leq f(x)$, et on appelle A_n son aire, exprimée en unité d'aire.

1. Faire apparaître D_n sur la figure.

Problème 15

On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{1-x} + \ln|x|$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O; I; J)$ d'unité 2cm.

Partie A (Etude d'une fonction auxiliaire)
Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = xe^{1-x}$

1. Calculer $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.
2. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (1-x)e^{1-x}$.
3. Déterminer les variations de g puis dresser son tableau de variation.
4. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq 1$.

Partie B (Etude de la fonction f)
Soit $f(x) = e^{1-x} + \ln|x|$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
2. Calculer la limite de f en 0.
   En déduire une interprétation graphique du résultat.
3. a) Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b) Calculer la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
   Interpréter graphiquement les résultats.
4. a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \dfrac{1-g(x)}{x}$.
   b) En déduire le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
5. Déterminer les variations de f puis dresser son tableau de variation.
6. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β tels que $0,08 < \alpha < 0,09$ et $-0,06 < \beta < -0,05$.
   b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
   c) Construire (C) avec précision.

Partie C

1. Soit $(U_n)_{n\geq1}$ la suite définie par $U_n = \displaystyle\int_n^{n+1} e^{-x}dx$ et $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$
   - a Démontrer que $(U_n)_{n\geq1}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   - b Exprimer U_n puis S_n en fonction de n.
2. a) Démontrer que la suite $(S_n)_{n\geq1}$ est croissante.
   b) Démontrer que $(S_n)_{n\geq1}$ est majorée par $\dfrac{1}{e}$.
   c) Les suites $(U_n)_{n\geq1}$ et $(S_n)_{n\geq1}$ sont-elles convergentes ? Justifier votre réponse.
3. Soit $(V_n)_{n\geq1}$ la suite définie par $V_n = \displaystyle\int_1^{n+1} \ln|x|dx$