Correction du devoir n° 1 Du 1er Semestre

Exercice 1 : $0,5 \times 8 = 4$ points

1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
2. Énoncer le théorème d'existence et d'unicité d'une solution.
3. Énoncer le théorème de l'inégalité des accroissements finis (IAF).
4. Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a \ (a \neq 0)$ alors ...
5. Si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ alors ...
6. Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$ alors ...
7. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \beta \in \mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - \beta x] = +\infty$ alors ...
8. Si f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; b]$, alors $f(]-\infty; b]) = ...$

Exercice 2 : 4 points

1. Calculons les limites suivantes : **(3 × 1 pt)**

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sin 2x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sin 2x\left(\sqrt{1+\sin x}+1\right)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{2\sin 2x}{2x}} \times \frac{1}{\left(\sqrt{1+\sin x}+1\right)} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sin 2x} = \frac{1}{4}}$$ **1 points**

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^3 + x^2} &= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2(x+1)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \times \frac{1}{x+1} \\
&= -\frac{1}{2} \times 1 \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^3 + x^2} = -\frac{1}{2}}$$ **1 points**

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7} - \sqrt{10-x}} &= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}\right)\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}\right)\left(\sqrt{2x+7} - \sqrt{10-x}\right)}{\left(\sqrt{2x+7} - \sqrt{10-x}\right)\left(\sqrt{2x+7} - \sqrt{10-x}\right)\left(\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}\right)} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{[x+3-(5-x)]\left(\sqrt{2x+7} + \sqrt{10-x}\right)}{[2x+7-(10-x)]\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}\right)} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{2(-1+x)\left(\sqrt{2x+7} + \sqrt{10-x}\right)}{3(x-1)\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}\right)} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{2(x-1)\left(\sqrt{2x+7} + \sqrt{10-x}\right)}{3(x-1)\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}\right)} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{2\left(\sqrt{2x+7} + \sqrt{10-x}\right)}{3\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}\right)} \\
&= \frac{2}{3} \times \frac{6}{4}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7} - \sqrt{10-x}} = 1}$$ **1 points**

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} &= \lim_{X \to 0} \frac{\sin(\pi X)}{X} \\
&= \lim_{X \to 0} \pi \frac{\sin(\pi X)}{\pi X} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} = 1}$$ **1 points**

2 Donnons les primitives des fonctions f, g et h respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$. **(2 × 0,5 pt)**

$$f(x) = 2\cos(x) - 3\sin(x)$$

$$F(x) = 2\sin(x) + 3\cos(x) + k$$

$$\boxed{F(x) = 2\sin(x) + 3\cos(x) + k}$$ **0,5 points**

$$g(x) = (3x-1)(3x^2 - 2x + 3)^3$$

$$G(x) = \frac{1}{8}(3x^2 - 2x + 3)^4 + k$$

$$\boxed{G(x) = \frac{1}{8}(3x^2 - 2x + 3)^4 + k}$$ **0,5 points**

$$h(x) = \frac{1 - x^2}{(x^3 - 3x + 2)^3}.$$

$$\boxed{H(x) = \frac{1}{3(x^3 - 3x + 2)} + k}$$ **0,5 points**

Problème : 9,5 points

Partie A : Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x}{x - 1} & \text{si } x < 0, \\ x + \sqrt{x^2 + x} & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminons l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f. **(0,5 pt)**

Posons $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x < 0, \\ f_2(x) & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$

- $f_1 \quad \exists \quad$ ssi $x - 1x \neq 0$ et $x < 0$
  $x - 1 \neq 0 \implies x \neq 1$ et $x < 0$
  $\underline{Df_1 =]-\infty; 0[}$
- $f_2 \quad \exists \quad$ ssi $x^2 + x \geq 0$ et $x \geq 0$
  Posons $x^2 + x = 0$
  $x^2 + x = 0 \implies x = 0$ **ou** $x = -1$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x^2 + x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\text{Donc} \quad \begin{aligned} Df &= Df_1 \cup Df_2 \\ &=]-\infty; 0] \cup [0; +\infty[\\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\boxed{Df = \mathbb{R}}$$

2. Déterminons les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$. **(0,5 pt)**

- En $-\infty$: $f(x) = f_1(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2x}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} \\ &= \lim_{x \to -\infty} x \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\underline{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$$

- En $+\infty$: $f(x) = f_2(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} x + \sqrt{x^2 + x} \\ &= \lim_{x \to +\infty} x + \sqrt{x^2 + x} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \\ &= \end{aligned}$$

$$\underline{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$$

3 Étudions la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interprétons les résultats obtenus. **(1,5 pt)**

- <u>En 0^-</u>: $f(x) = f_1(x)$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$$
$$= 0$$
$$\underline{\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0}$$

- <u>En 0^+</u>: $f(x) = f_2(x)$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x + \sqrt{x^2 + x}$$
$$= 0$$
$$\underline{\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0}$$

On a $f(0) = 0$

Finalement $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0

4 a Montrons que $(\mathcal{C}_f)$ admet en $-\infty$ une asymptote oblique Δ_1 dont on déterminera l'équation. **(0,5 pt)**

Comme $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

- Cherchons $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^2 - 2x}{x - 1}}{x}$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x}$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2}$$
$$= 1$$

Donc $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

- Cherchons $\lim_{x \to -\infty} f(x) - x$

b Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à Δ_1 sur $]-\infty; 0[$. **(0,5 pt)**

5 Étudier la nature de la branche infinie en $+\infty$. **(0,5 pt)**

6 Préciser l'ensemble de dérivabilité de f puis calculer $f'(x)$ sur chaque intervalle où f est dérivable. **(0,5 pt)**

7 Dresser le tableau de variation de f. **(0,5 pt)**

8 Préciser les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repère. **(0,25 pt)**

9 Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$. **(1,5 pt)**

<u>Partie B :</u>

Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = [0; +\infty[$.

1 Montrer que h réalise une bijection de I dans un intervalle J à préciser. **(0,25 pt)**

2 La bijection réciproque h^{-1} est-elle dérivable sur J ? **(0,25 pt)**

3. Calculer $h\left(\frac{4}{5}\right)$ puis $(h^{-1})'(2)$. **(0,5 pt)**

4. Construire $(\mathcal{C}_{h^{-1}})$ la courbe représentative de h^{-1} dans le même repère. **(0,5 pt)**

5. Exprimer $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$. **(0,5 pt)**

++++++++++++++++++++++++++

Partie A :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x^2 - 2x$		$+$				$+$	
$x - 1$		$-$				$+$	

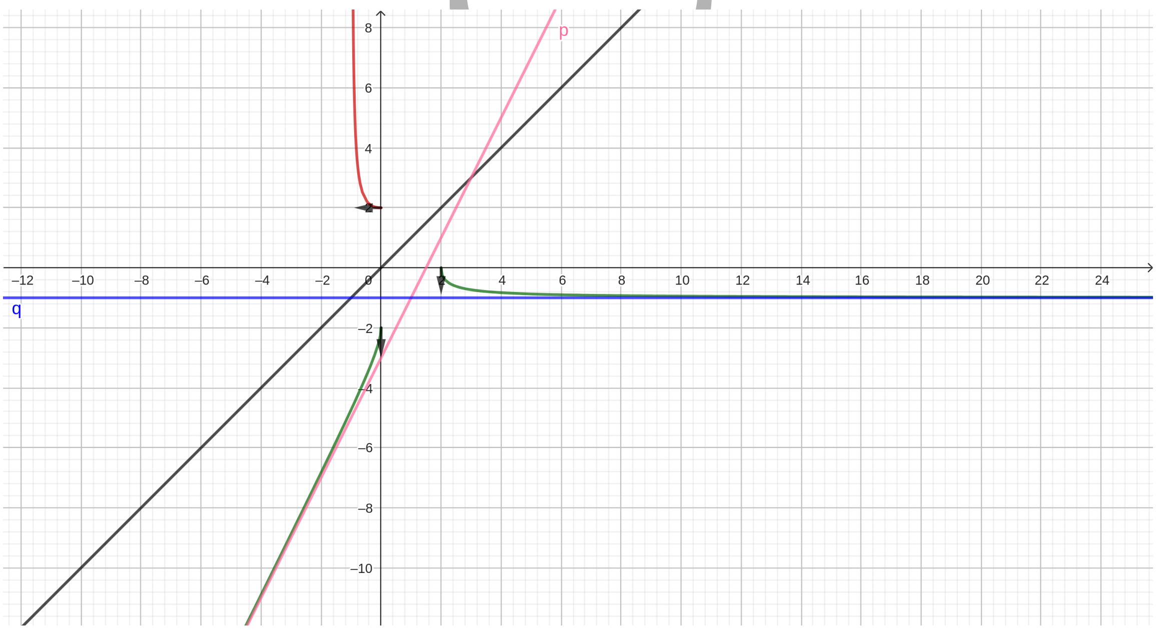

Figure 1: Courbe de (Cf)

Clique ici pour voir la courbe sur géogébra