

◇◇◇ Lycée de Dindéfelo ◇◇◇			A.S. : 2024/2025
Matière: Mathématiques	Niveau : 1 ^{er} S2	Date: 10/05/2025	Durée : 4 heures
Devoir n° 2 Du 2 nd Semestre			

Exercice 1 : 8 pts

Calculer les limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + 3}{3x^4 + x + 2}$

b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3} + x$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2}$

e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$

f. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - 3}{x - 4}$

g. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 - x} - \sqrt{4 + x}}{x}$

h. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 3x + 2}}{2x + 3}$

Exercice 2 : 8 pts

Soit g la fonction définie par : $g(x) = \begin{cases} x + \sqrt{|x^2 - x|}, & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x - x(x - 2)}{x - 1}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

- 1 Justifions que la fonction g est définie sur $D_g = \mathbb{R}$.

Posons $g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{si } x \geq 0 \\ g_2(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$g_1 \exists$ ssi $|x^2 - x| \geq 0$ et $x \geq 0$
ssi $x \in \mathbb{R}$ et $x \in [0, +\infty[$
ssi $x \in [0, +\infty[$
 $Dg_1 = [0, +\infty[$

$g_2 \exists$ ssi $x - 1 \neq 0$ et $x < 0$
ssi $x \neq 1$ et $x \in]-\infty, 0[$
ssi $x \in]-\infty, 0[$
 $Dg_2 =]-\infty, 0[$

$$Dg = \mathbb{R}$$

$$Dg = \mathbb{R}$$

- 2 Déterminons les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

Les bornes de Dg sont $-\infty, +\infty$

En $+\infty$: $g(x) = g_1(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} g_1(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{|x^2 - x|} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

En $-\infty : g(x) = g_2(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} g_2(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - x(x - 2)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x^2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

- 3 Étudions la continuité de g sur $[0, +\infty[$
Sur $[0, +\infty[$, $g(x) = x + \sqrt{x^2 - x}$ qui est la somme de deux fonctions continues donc continue
- 4 Étudier la continuité de g sur $] -\infty, 0[$
- 5 Étudier la continuité de g en 0
- 6 En déduire l'ensemble de continuité de g
- 7 Soit f une fonction dont sa représentation graphique est ci-dessous. f est-elle continue sur $[-3, -1]$? Justifier.

Figure 1: Représentation graphique de la fonction f .

Exercice 3 : 4 pts

- 1 Déterminons le domaine de définition des fonctions suivantes :

a $f(x) = \frac{(x - 3)(x + 8)}{x^2 - 2}$
 $f \exists$ ssi $x^2 - 2 \neq 0$
 $x^2 - 2 \neq 0 \implies x \neq \sqrt{2} \text{ et } x \neq -\sqrt{2}$
 $Df = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

$$Df = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

b $g(x) = \frac{2x^2 - 8x + 2}{\sqrt{x^2 - 4}}$
 $g \exists$ ssi $x^2 - 4 > 0$
 $x^2 - 4 > 0 \implies x \in] -\infty, -\sqrt{2}[\cup] \sqrt{2}, +\infty[$
 $Df =] -\infty, -\sqrt{2}[\cup] \sqrt{2}, +\infty[$

$$Df =] -\infty, -\sqrt{2}[\cup] \sqrt{2}, +\infty[$$

c $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{x - 1} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Posons $h(x) = \begin{cases} h_1(x) & \text{si } x < 0 \\ h_2(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$h_1 \ni \text{ssi } x - 1 \neq 0 \text{ et } x < 0$

$\text{ssi } x \neq 1 \text{ et } x \in] - \infty, 0[$

$\text{ssi } x \in] - \infty, 0[$

$Dh_1 =] - \infty, 0[$

$h_2 \ni \text{ssi } x^2 + x \geq 0 \text{ et } x \geq 0$

$\text{ssi } x \in] - \infty, -1] \cup [0, +\infty[\text{ et } x \in [0, +\infty[$

$\text{ssi } x \in [0, +\infty[$

$Dh_2 = [0, +\infty[$

$Dh = Dh_1 \cup Dh_2$

$=] - \infty, 0[\cup [0, +\infty[$

$=] - \infty, +\infty[$

$= \mathbb{R}$

Dh = \mathbb{R}

2 Soit $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $g(x) = \frac{x+2}{x-3}$ deux fonctions.

a Déterminer Df et Dg

Df = $[-1, +\infty[$

Dg = $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

b Déterminons $Dg \circ f$

$Dg \circ f = \{x \in Df \mid f(x) \in Dg\}$

$= \{x \in [-1, +\infty[\text{ et } f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{3\}\}$

$= \{x \in [-1, +\infty[\text{ et } f(x) \neq 3\}$

$= \{x \in [-1, +\infty[\text{ et } \sqrt{x+1} \neq 3\}$

$= \{x \in [-1, +\infty[\text{ et } x+1 \neq 9\}$

$= \{x \in [-1, +\infty[\text{ et } x \neq 8\}$

$= \{x \in [-1, 8[\cup]8, +\infty[$

$= [-1, 8[\cup]8, +\infty[$

Dg \circ f = $[-1, 8[\cup]8, +\infty[$

Calculons $g \circ f(x)$

$g \circ f(x) = \frac{f(x) + 2}{f(x) - 3}$

$= \frac{\sqrt{x+1} + 2}{\sqrt{x+1} - 3}$

$$g \circ f(x) = \frac{\sqrt{x+1} + 2}{\sqrt{x+1} - 3}$$

PROF