

Nombre Complex**Professeur : M. BA****Classe : Terminale S2****Durée : 10 minutes****Note :** /5

Nom de l'élève : _____

1. Pour tout nombre complexe $z \neq -1 + 2i$, on pose $Z = \frac{z-2+4i}{z+1-2i}$.

Déterminons l'ensemble des points M du plan tels que :

(a) $|Z| = 1$

$$\begin{aligned} |Z| = 1 &\implies \left| \frac{z-2+4i}{z+1-2i} \right| = 1 \\ &\implies \frac{|z-2+4i|}{|z+1-2i|} = 1 \\ &\implies |z-2+4i| = |z+1-2i| \\ &\implies |x+iy-2+4i| = |x+iy+1-2i| \\ &\implies |x-2+i(y+4)| = |x+1+i(y-2)| \\ &\implies \sqrt{(x-2)^2 + (4+y)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} \\ &\implies (x-2)^2 + (4+y)^2 = (x+1)^2 + (y-2)^2 \\ &\implies (x^2 - 4x + 4) + (16 + 8y + y^2) = (x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) \\ &\implies x^2 - 4x + 4 + 16 + 8y + y^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 \\ &\implies x^2 + y^2 - 4x + 8y + 20 = x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 \\ &\implies -4x + 8y + 20 = 2x - 4y + 5 \\ &\implies -4x - 2x + 8y + 4y = 5 - 20 \\ &\implies -6x + 12y = -15 \\ &\implies 2x - 4y = 5 \end{aligned}$$

L'ensemble des points M tel que $|Z| = 1$ est la droite d'équation : $2x - 4y = 5$

Autre méthode

$Z = \frac{z-2+4i}{z+1-2i}$ en posant $z_M = x + iy$, $z_A = 2 - 4i$ et $z_B = -1 + 2i$

$$Z = \frac{z_M - z_A}{z_M - z_B}$$

$$\begin{aligned} |Z| = 1 &\implies \left| \frac{z_M - z_A}{z_M - z_B} \right| = 1 \\ &\implies \frac{|MA|}{|MB|} = 1 \\ &\implies MA = MB \end{aligned}$$

L'ensemble des points M tel que $|Z| = 1$ est la Médiatrice du segment $[AB]$

$$E = \{M(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 4y = 5\}$$

(b) Z soit un réel.

$$Z = \frac{x^2 + y^2 - x + 2y - 10 + i(6x + 3y)}{(x + 1)^2 + (y - 2)^2}$$

Pour que Z soit un réel, la partie imaginaire du numérateur doit être nulle, c'est-à-dire :

$$6x + 3y = 0$$

$$2x + y = 0$$

L'ensemble des points M tel que Z soit un réel est la droite d'équation $2x + y = 0$ privé du point $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{E} = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid 2\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

2. Pour tout complexe $z \neq i$, on pose $U = \frac{z+i}{z-i}$.

Déterminons l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$$\begin{aligned} U &= \frac{z+i}{z-i} \\ &= \frac{x+iy+i}{x+iy-i} \\ &= \frac{x+i(y+1)}{x+i(y-1)} \\ &= \frac{[x+i(y+1)][x-i(y-1)]}{x^2+(y-1)^2} \\ &= \frac{x[x-i(y-1)]+i(y+1)[x-i(y-1)]}{x^2+(y-1)^2} \\ &= \frac{x^2-ix(y-1)+ix(y+1)-i^2(y+1)(y-1)}{x^2+(y-1)^2} \\ &= \frac{x^2-ixy+ix+ixy+ix+(y+1)(y-1)}{x^2+(y-1)^2} \\ &= \frac{x^2-ixy+ix+ixy+ix+y^2-1}{x^2+(y-1)^2} \\ &= \frac{x^2+2ix+y^2-1}{x^2+(y-1)^2} \\ &= \frac{x^2+y^2-1+2ix}{x^2+(y-1)^2} \end{aligned}$$

PGB

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 - \mathbf{1} + 2i\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2 + (\mathbf{y} - \mathbf{1})^2}$$

- (a) $U \in \mathbb{R}_*$

Pour que $U \in \mathbb{R}_*$ soit réel, il faut que $Im(U) = 0$ et $Re(U) < 0$

$$\begin{aligned} Im(U) = 0 \text{ et } Re(U) < 0 &\implies 2x = 0 \text{ et } x^2 + y^2 - 1 < 0 \\ &\implies x = 0 \text{ et } x^2 + y^2 < 1 \end{aligned}$$

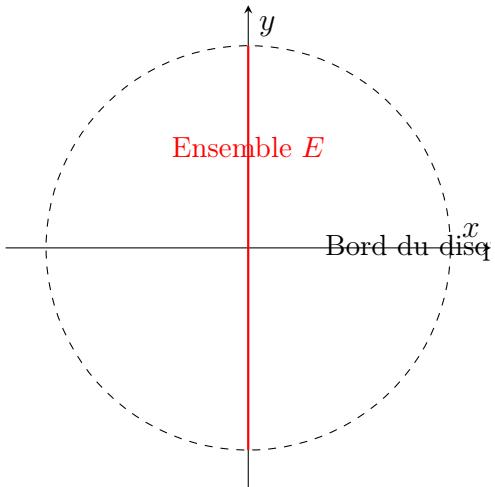
Ainsi, l'ensemble des points M d'affixe z est donné par :

$$\mathbf{E} = \{ \mathbf{z} \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \text{ et } |\mathbf{z}| < 1 \}$$

ou, en coordonnées cartésiennes :

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ et } x^2 + y^2 < 1\}$$

Cela représente l'intersection de la droite $x = 0$ avec l'intérieur du disque de centre $O(0, 0)$ et de rayon 1, excluant le bord.



(b) $U \in i\mathbb{R}$

Pour que U soit imaginaire pur, il faut que $\operatorname{Re}(U) = 0$.

$$\operatorname{Re}(U) = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y - 1)^2} = 0$$

Ce qui donne :



$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Ainsi, l'ensemble des points M d'affixe z est donné par :

$$E' = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

$$E' = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C} \mid |\mathbf{z}| = 1\}$$

ou, en coordonnées cartésiennes :

$$E' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

$$E' = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 = 1\}$$

Cela représente le ** cercle de centre $O(0, 0)$ et de rayon 1 **.

