◇◇◇ Lycée de Dindéfélo ◇◇◇			A.S. : 2024/2025
Matière: Mathématiques	Niveau : TS2	Date: 09/12/2024	Durée : 4 heures

Correction du devoir n° 2 Du 2er Semestre

Exercice 1 : (5 points) (BAC 2022)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 1cm.

1. On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme $P(z) = z^3 - 5z^2 + 19z + 25$.

a. Montrons que -1 est solution de l'équation $P(z) = 0$.

-1 est solution ssi $P(-1) = 0$

$$\begin{aligned} P(z) &= (-1)^3 - 5(-1)^2 + 19(-1) + 25 \\ &= -1 - 5 - 19 + 25 \\ &= -25 + 25 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$P(-1) = 0$ donc -1 est bien solution

$\mathbf{P(-1) = 0}$ donc -1 est bien solution (0,25 pt)

b. Déduisons-en les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

	1	-5	19	25
-1		-1	6	-25
	1	-6	25	0

donc $P(z) = (z + 1)(z^2 - 6z + 25)$

$$\begin{aligned} P(z) = 0 &\implies (z + 1)(z^2 - 6z + 25) = 0 \\ &\implies (z + 1) = 0 \text{ ou } (z^2 - 6z + 25) = 0 \\ &\implies \Delta' = (3)^2 - 25 \\ &\implies \quad = (3)^2 - 25 \\ &\implies \quad = -16 \\ &\implies \quad = 4i \\ &\implies z = -1 \text{ ou } z = 3 - 4i \text{ ou } z = 3 + 4i \end{aligned}$$

$\mathbf{S = \{-1, 3 - 4i, 3 + 4i\}}$ (1,25 pt)

2. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = -1; z_B = 3+4i; z_C = 3-4i; z_D = -7z_A$.

a. On note z_1 et z_2 les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

Montrons que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont parallèles.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont || ssi $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ en version complexe: $\dfrac{z_1}{z_2} = k \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_B - z_A}{z_C - z_D}\\ &= \frac{3+4i-(-1)}{3-4i-(-7(-1))}\\ &= \frac{3+4i+1}{3-4i-7}\\ &= \frac{4+4i}{-4-4i}\\ &= -1 \in \mathbb{R}^*\end{aligned}$$

Comme $\mathbf{\frac{z_B - z_A}{z_C - z_D}} \in \mathbb{R}^*$ donc $\overrightarrow{AB} || \overrightarrow{DC}$ **(01 pt)**

b Calculons $|z_1|$ et $|z_2|$

$$\begin{aligned}|z_1| &= |4+4i|\\ &= 4|1+i|\\ &= 4\sqrt{2}\end{aligned}$$

Par analogie

$|z_2| = 4\sqrt{2}$

$\mathbf{|z_1| = 4\sqrt{2}}$ et $\mathbf{|z_2| = 4\sqrt{2}}$ **(0,25 pt)**

Interprétons géométriquement le résultat **(0,25 pt)**

$|z_1| = |z_B - z_A| = 4\sqrt{2}$ Donc $\|\overrightarrow{AB}\| = 4\sqrt{2}$

$|z_1| = |z_C - z_D| = 4\sqrt{2}$ Donc $\|\overrightarrow{DC}\| = 4\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ **(0,25 pt)**

c On note z_3 l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BD}$.

Comparons $|z_1|$ et $|z_3|$

$$\begin{aligned}|z_3| &= |z_D - z_B|\\ &= |7-(3+4i)|\\ &= |4-4i|\\ &= 4\sqrt{2}\end{aligned}$$

Interprétons géométriquement le résultat

$|z_3| = |z_D - z_B| = 4\sqrt{2}$ Donc $\|\overrightarrow{DB}\| = 4\sqrt{2}$

Donc $\mathbf{|z_1| = |z_3|}$ **(0,25 pt)**

d Calculons $\arg(\frac{z_1}{z_3})$

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{z_1}{z_3}\right) &= \arg\left(\frac{4+4i}{4-4i}\right)\\ &= \arg\left(\frac{1+i}{1-i}\right)\\ &= \arg(1+i) - \arg(1-i)\\ &= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \arg\left(\frac{\mathbf{z_1}}{\mathbf{z_3}}\right) = \frac{\pi}{\mathbf{2}}$$ **(0,25 pt)**

Interprétons géométriquement le résultat

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_3}\right) = \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_B}\right)$$
$$= (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AB})$$

L'angle $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AB})$ mesure $\frac{\pi}{2}$

e Déduisons-en la nature précise du quadrilatère $ABDC$. **(1 pt)**

$AB = CD = BD$ et $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}$ donc $ABDC$ est un carré

Exercice 1 : 5,5 points (BAC 2008)

A)

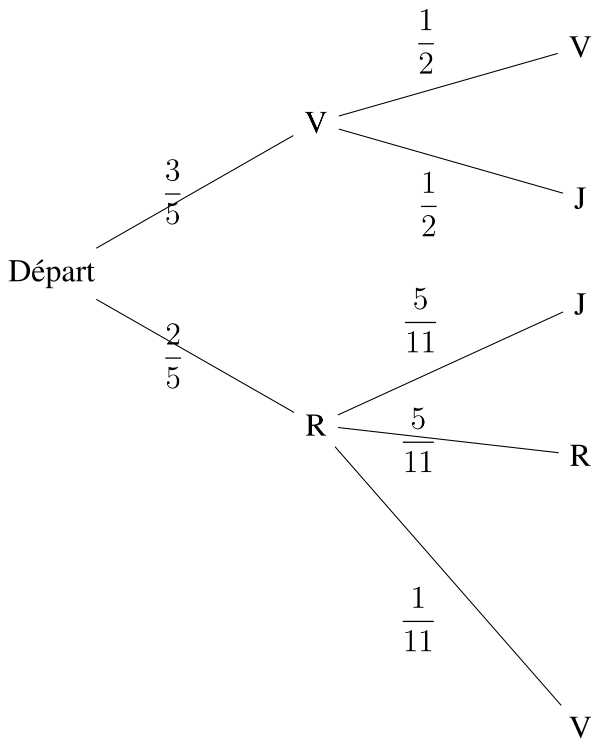
1. Si la première boule tirée est verte, on la met dans U_2.
Dans ce cas, U_2 comporte maintenant 5 boules vertes V et 5 boules jaunes J.
On a par conséquent :

$$p(V_2 \mid V_1) = \frac{5}{10} \Rightarrow p(V_2 \mid V_1) = \frac{1}{2}$$

2. De même,

$$p(V_2 \mid R_1) = \frac{1}{11}$$

3. Dressons un arbre pondéré de la situation.



D'après la formule des probabilités totales,

$$p(V_2) = p(V_2 \mid V_1)p(V_1) + p(V_2 \mid R_1)p(R_1)$$

Soit :

$$p(V_2) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{11} \times \frac{2}{5} \Rightarrow p(V_2) = \frac{37}{110}$$

4 De manière analogue,

$$\begin{aligned} p(J_2) &= p(J_2 \mid V_1)p(V_1) + p(J_2 \mid R_1)p(R_1) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{11} \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{53}{110} \end{aligned}$$

On trouve :

$$p(J_2) = \frac{53}{110}$$

5 De manière analogue à la question 3, on a :

$$\begin{aligned} p(R_2) &= p(R_2 \mid V_1)p(V_1) + p(R_2 \mid R_1)p(R_1) \\ &= 0 + \frac{5}{11} \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{2}{11} \end{aligned}$$

On trouve :

$$p(R_2) = \frac{2}{11}$$

B)

1 La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

X	1000	500	-500
$p(X)$	$\frac{37}{110}$	$\frac{53}{110}$	$\frac{2}{11}$

2

$$E(X) = \sum x_i p_i$$

$$E(X) = \left(1000 \times \frac{37}{110}\right) + \left(500 \times \frac{53}{110}\right) - \left(500 \times \frac{2}{11}\right)$$

$$E(X) = \frac{5350}{11}$$

Donc,

$$E(X) = \frac{5350}{11}$$

C)

1 On a affaire à un schéma de Bernoulli, la probabilité du succès étant $p(E) = \frac{37}{110}$ et le nombre d'épreuves étant 15.
La probabilité d'avoir exactement 8 succès est :

$$P_8 = C_8^{15} \left(\frac{37}{110}\right)^8 \left(\frac{73}{110}\right)^7$$

2) C'est l'événement : $\underbrace{\text{SSSSSSSS}}_{8 \text{ fois}}$ $\underbrace{\text{EEEEEEE}}_{7 \text{ fois}}$ (8 succès consécutifs suivis de 7 échecs consécutifs).

Sa probabilité est :

$$p(S)^8 \times p(E)^7 = \left(\frac{37}{110}\right)^8 \times \left(\frac{73}{110}\right)^7 \approx 9.310^{-6}$$

3) L'événement contraire est :

$$P_0 = C_0^{15}\left(\frac{37}{110}\right)^0\left(\frac{73}{110}\right)^{15}$$

La probabilité cherchée est donc :

$$\begin{aligned} p &= 1 - P_0 \\ &= 1 - \left(\frac{73}{110}\right)^{15} \\ &\approx 0.997 \end{aligned}$$

Problème : 9,5 points (BAC 2007)

Partie A: 3 pts

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = 1 + x + \ln x$$

1. Dressons le tableau de variation de g.

Soit g' la fonction dérivée de g, alors on a :

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

Donc, $\forall x \in]0;+\infty[;\ g'(x) > 0$.

Par suite, g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} g(x) &= \lim_{x\to 0^+}(1 + x + \ln x) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to +\infty} g(x) &= \lim_{x\to +\infty}(1 + x + \ln x) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

D'où, le tableau de variations de g suivant :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$
g	||	$-\infty \nearrow +\infty$

2. Montrons qu'il existe un unique réel α solution de l'équation $g(x) = 0$.

En effet, g est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
Or, $0 \in]-\infty;+\infty[$ donc, d'après le théorème de la bijection, il existe un unique réel $\alpha \in]0;+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

Vérifions que α appartient à $]0.2;0.3[$.

Soit : $g(0.2) = 1 + 0.2 + \ln 0.2 = -0.40$ et $g(0.3) = 1 + 0.3 + \ln 0.3 = 0.09$.
Alors, $g(0.2) \times g(0.3) = -0.36 < 0$.

Ainsi, g est continue sur $]0.2; 0.3[$ et $g(0.2) \times g(0.3) < 0$.

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\beta \in]0.2; 0.3[$ solution de l'équation $g(x) = 0$.
L'unique solution de cette équation est le réel α.

Par conséquent, $\alpha = \beta$. D'où, $\alpha \in]0.2; 0.3[$.

3 En déduisons le signe de g sur $]0; +\infty[$. D'après les questions précédentes, on peut alors écrire :

$$g([0; \alpha]) =]-\infty; 0] \quad \text{et} \quad g([\alpha; +\infty[) = [0; +\infty[$$

Ainsi,

$$g(x) \leq 0 \text{ sur }]0; \alpha[\quad \text{et} \quad g(x) \geq 0 \text{ sur } [\alpha; +\infty[$$

4 Établissons la relation $\ln(\alpha) = -1 - \alpha$.

D'après la question 2), α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$.

Ce qui signifie que $g(\alpha) = 0$.

Par suite,

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\iff 1 + \alpha + \ln\alpha = 0 \\ &\iff \ln\alpha = -1 - \alpha \end{aligned}$$

D'où, la relation :

$$\ln(\alpha) = -1 - \alpha$$

Partie B: 6,5 pts

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln x}{1+x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1 Montrons que f est continue en 0 puis sur $]0; +\infty[$.

Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln x}{1+x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{0}{1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

D'où, f est continue en 0. Par ailleurs, $\forall x_0 \in]0; +\infty[$, f est continue en x_0.

Par conséquent, f est continue sur $]0; +\infty[$.

2 Étudions la dérivabilité de f en 0.

Calculons

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{x \ln x}{(1+x)x} \\
&= \lim_{x \to 0^+} \frac{x \ln x}{x(1+x)} \\
&= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1+x} \\
&= \lim_{x \to 0^+} \frac{-\infty}{1} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$$

Ainsi, la fonction f n'est pas dérivable en 0.

Interprétons graphiquement ce résultat.

Comme

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty,$$

alors la courbe représentative de f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

3 Déterminons la limite de f en $+\infty$.

On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x \ln x}{1+x} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} \times \frac{\ln x}{\frac{1+x}{x}} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\frac{1}{x} + 1} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{\infty}{0+1} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

4 Montrons que, quel que soit x élément de $]0;+\infty[$. $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x)^2}$

On a : $\forall x \in]0;+\infty[;\ f(x) = \dfrac{x \ln x}{1+x}$.

Par suite,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(1+\ln x)(1+x) - x \ln x}{(1+x)^2} \\
&= \frac{1 + x + \ln x + x \ln x - x \ln x}{(1+x)^2} \\
&= \frac{1 + x + \ln x}{(1+x)^2} \\
&= \frac{g(x)}{(1+x)^2}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)^2}}$$

En déduisons le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Comme $(1+x)^2 > 0$ alors, le signe de $f'(x)$ dépend uniquement du signe de $g(x)$.

Or, $g(x)$ est négatif sur $]0;\alpha[$ et positif sur $[\alpha;+\infty[$.

Par conséquent,

- $f'(x) \leq 0$ sur $]0;\alpha[$
- $f'(x) \geq 0$ sur $[\alpha;+\infty[$

5 Montrons que $f(\alpha) = -\alpha$.

Soit : $f(\alpha) = \dfrac{\alpha \ln \alpha}{1+\alpha}$

Or, dans la première partie, à la question 4), on avait : $\ln \alpha = -1-\alpha$.

Donc, en remplaçant $\ln \alpha$ par son expression, on obtient :

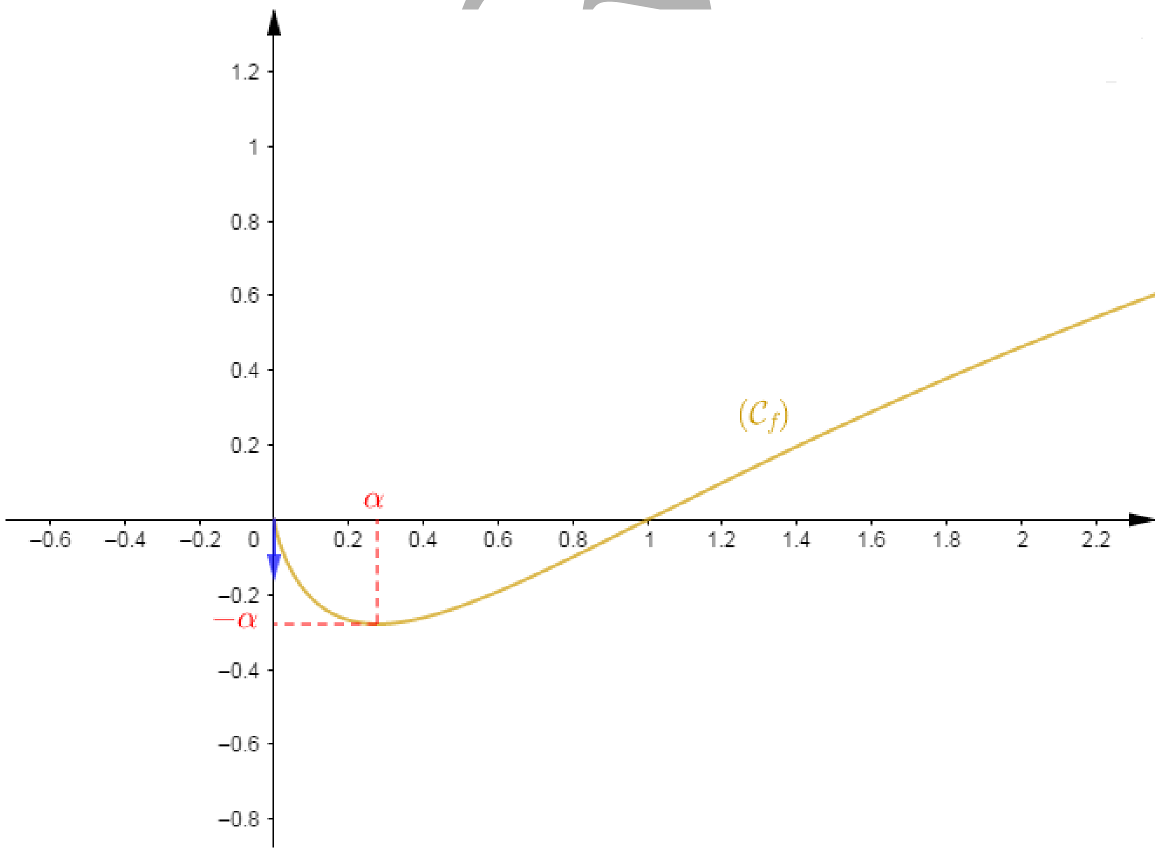
$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\alpha \ln \alpha}{1+\alpha} \\ &= \frac{\alpha(-1-\alpha)}{1+\alpha} \\ &= \frac{-\alpha(1+\alpha)}{1+\alpha} \\ &= -\alpha \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{f(\alpha) = -\alpha}$

6 Dressons le tableau de variations de la fonction f.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\alpha$	$\nearrow$	$+\infty$

7 Représentons la courbe de f dans le plan muni du repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. Unité graphique : 5 cm. Prendre $\alpha \approx 0.3$.



1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
$(\mathcal{C}_f)$
α
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
2.2
−0.2
$-\alpha$
−0.4
−0.6
−0.8