Problème 9 — BAC 2004 Remplacement

Partie A : Soit l'équation différentielle :

$$(E) : -\frac{1}{2}y'' + \frac{3}{2}y' - y = 0$$

Déterminer la solution g de (E) dont la courbe représentative (C) passe par le point $A(0; -1)$ et dont la tangente en ce point est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Mise sous forme canonique

On commence par multiplier l'équation par -2 :

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

2. Résolution de l'équation homogène

C'est une équation linéaire homogène à coefficients constants. On cherche une solution sous la forme $y = e^{rx}$.

On résout l'équation caractéristique :

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow (r-1)(r-2) = 0 \Rightarrow r_1 = 1 \quad \text{et} \quad r_2 = 2$$

Donc la solution générale est :

$$y(x) = \lambda e^x + \mu e^{2x}$$

3. Détermination des constantes

On cherche λ et μ tels que :

$$g(0) = -1 \quad \text{et} \quad g'(0) = 0$$

On calcule :

$$g(0) = \lambda e^0 + \mu e^0 = \lambda + \mu = -1 \tag{1}$$

$$g'(x) = \lambda e^x + 2\mu e^{2x} \Rightarrow g'(0) = \lambda + 2\mu = 0 \tag{2}$$

Résolvons le système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = -1 \\ \lambda + 2\mu = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \text{Soustraction : } (\lambda + 2\mu) - (\lambda + \mu) = \mu = 1 \Rightarrow \lambda = -2$$

4. Solution particulière

$$\boxed{g(x) = -2e^x + e^{2x}}$$