⋄⋄⋄ Lycée de Dindéfélo ⋄⋄⋄			A.S. : 2025/2026
Matière: Mathématiques	Niveau : TS2	Date: 29/12/2025	

Td Limites ln

Problème 1

Partie A Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x(1+\ln x)^2-1$.

1. On admettra que g est dérivable sur $]0;+\infty[$.
   - a. Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.
   - b. Vérifier que pour tout $x\in]0;+\infty[$, $g'(x)=(1+\ln x)(3+\ln x)$.
   - c. Étudier le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire le sens de variation de g.
2. Dresser le tableau de variation de g. (On ne calculera pas les limites en 0 et $+\infty$).
3. - a. Calculer $g(1)$.
   - b. En déduire que pour tout $x\in]0;1[$, $g(x)<0$ et pour tout $x\in]1;+\infty[$, $g(x)>0$.

Partie B Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=x+\dfrac{1}{1+\ln x}-1 \quad \text{si } x\in]0;\dfrac{1}{e}[\cup]\dfrac{1}{e};+\infty[\\ f(0)=-1 \end{cases}$$

(C) est la représentation graphique dans le repère orthonormé (O,I,J) (unités : 2cm).

1. - a. Montrer que f est continue en 0.
   - b. Étudier la dérivabilité de f en 0.
   - c. En déduire la tangente à (C) au point $A(0;-1)$.
2. - a. Calculer $\lim\limits_{x\to\frac{1}{e}^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{e}^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   - b. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x-1$ est une asymptote à (C).
   - c. Étudier les positions relatives de (C) et (Δ).
   - d. Préciser l'autre asymptote à la courbe (C) de f.
3. - a. Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[\setminus\{\dfrac{1}{e}\}$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(1+\ln x)^2}$.
   - b. En déduire le sens de variation de f.
   - c. Dresser son tableau de variation.

Partie C

1. Calculer la dérivée de la fonction h définie sur $]\dfrac{1}{e};+\infty[$ par $h(x)=\ln(1+\ln x)$.
2. - a. En déduire les primitives sur $]\dfrac{1}{e};+\infty[$ de la fonction $k : x\mapsto\dfrac{f(x)}{x}$.
   - b. Déterminer la primitive de k qui prend la valeur -1 en 1.

Problème 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2cm.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.
   En déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2. Calculer $g(1)$ et en déduire l'étude du signe de $g(x)$ pour x appartenant à $]0; +\infty[$.

Partie B : Détermination de l'expression de la fonction f

On admet qu'il existe deux constantes réelles a et b telles que, pour tout nombre réel x appartenant à $]0; +\infty[$, $f(x) = ax + b - \dfrac{\ln x}{x}$.

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Calculer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.

2. Sachant que la courbe (C) passe par le point de coordonnées $(1; 0)$ et qu'elle admet en ce point une tangente horizontale, déterminer les nombres a et b.

Partie C : Étude de la fonction f

On admet désormais que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, $f(x) = x - 1 - \dfrac{\ln x}{x}$.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en 0 et donner une interprétation graphique de cette limite.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. a. Vérifier que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   b. Établir le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
   c. En déduire le signe de $f(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.

3. On considère la droite (D) d'équation $y = x - 1$.
   a. Justifier que la droite (D) est asymptote à la courbe (C).
   b. Étudier les positions relatives de la courbe (C) et de la droite (D).
   c. Tracer la droite (D) et la courbe (C) dans le plan P muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie D : Calcul d'aire

On note A la mesure, exprimée en cm^2, de l'aire de la partie du plan P comprise entre la courbe C, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

1. On considère la fonction H définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $H(x) = (\ln x)^2$.
   On désigne par H' la fonction dérivée de la fonction H.
   a. Calculer $H'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.
   b. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2. Calculer A et donner sa valeur arrondie au mm^2 près.

Problème 3

Partie A On considère g la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$g(x) = 1 + x(2 \ln |x| + 1)$$

1. a. Justifier que g est définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.
   b. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
2. a. Étudier le sens de variation de g.
   b. Dresser le tableau de variation de g.
3. a. Calculer l'image de -1 par g.
   b. Déterminer l'image J par g de l'intervalle I tel que : $I =]-\infty;-e^{-\frac{3}{2}}]$.
   c. Démontrer que la restriction h de g sur l'intervalle I est une bijection de I sur J.
   d. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation : $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$.
4. Déduire de tout ce qui précède que :
   $\forall x \in]-\infty;-1[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[, g(x) > 0$.

Partie B On considère f la fonction numérique de la fonction de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x(x\ln|x| + 1) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. (Unité : 5cm)

1. Démontrer que f est continue en 0.
2. a. Donner l'ensemble de définition de f' et déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   b. Étudier la dérivabilité de f en 0.
   c. Déterminer la fonction dérivée f' et déterminer le tableau de variation de f.
3. a. Écrire une équation de la tangente (D) à la courbe (C) au point O.
   b. Démontrer que (D) coupe (C) en deux points E et F et calculer leurs coordonnées.
   c. Étudier la position de (C) par rapport à (D).
4. Démontrer que (C) coupe l'axe (OI) en un point K d'abscisse β tel que $-1,8 < \beta < -1,7$.
5. Construire (C).

Partie C

1. Soit α un réel appartenant à $]0;1[$.
   À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_{\alpha}^{1} x^2\ln(x)\,dx$.
2. a. Calculer l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan limitée par (C), la droite (D) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \alpha$.
   b. Calculer $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0} A(\alpha)$.

On prendra : $\ln(2) \approx 0,7$; $\ln(3) \approx 1,1$; $\ln(5) \approx 1,6$; $\ln(17) \approx 2,9$; $e \approx 2,7$; $\sqrt{e} \approx 1,6$.