Correction du devoir n° 1 Du 1er Semestre

Exercice 1 : $1,5$ points

1. Déterminons les racines cubiques de l'unité.

Résolvons pour cela $z^3 = 1$, $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 = 1 \Longrightarrow z^3 = e^{i(0+2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$z = e^{i\frac{(0+2k\pi)}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

- Pour $k = 0$, $z = e^{i0} = 1$, donc $z_0 = 1$.

- Pour $k = 1$, $z = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- Pour $k = 2$, $z = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

2. Interprétation

- $\arg(z_B - z_A) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB})\ [2\pi]$

  Géométriquement, $\arg(z_B - z_A)$ est l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}})$ formé par le vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec l'axe réel du plan complexe $(O, \overrightarrow{OI})$.

- $\arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})\ [2\pi]$

  Géométriquement, $\arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_B - z_A}\right)$ est l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$ que forment les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

3. $f(x) = \sqrt{x}$, appliquons l'IAF

Appliquons l'IAF (Inégalité des Accroissements Finis) sur $[t, t+1]$.

Théorème des Inégalités des Accroissements Finis (TI-AF 1)
Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$.
Hypothèses :
$1)$, f est continue sur $[a,b]$.
$2)$, f est dérivable sur $]a,b[$.
$3)$, Il existe deux réels m et M tels que, pour tout $x \in]a,b[, m \leq f'(x) \leq M$.
Conclusion :
$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.
Théorème des Inégalités des Accroissements Finis (TI-AF 2)
Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$.
Hypothèses :
$1)$, f est continue sur $[a,b]$.
$2)$, f est dérivable sur $]a,b[$.
$3)$, Il existe un réel $m \geq 0$ tel que, pour tout $x \in]a,b[, |f'(x)| \leq m$.
Conclusion :
$|f(b) - f(a)| \leq m|b-a|$.

Applications $t > 0$

- f est continue sur $[t, t+1]$.
- f est dérivable sur $]t, t+1[$ et pour tout,

$$\forall x \in]t, t+1[, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Comme $x \in]t, t+1[$, alors $t < x < t+1$. Ainsi,

$$\frac{1}{2\sqrt{t+1}} < \frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

D'où :

$$\frac{1}{2\sqrt{t+1}} < f'(x) < \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis (IAF), nous avons :

$$\frac{1}{2\sqrt{t+1}}(t+1-t) < f(t+1) - f(t) < \frac{1}{2\sqrt{t}}(t+1-t).$$

Cela donne :

$$\frac{1}{2\sqrt{t+1}} < f(t+1) - f(t) < \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

Exercice 2 : 8,5 points

Partie A

1 Montrons que P admet une unique racine réelle.
Soit $z_0 = a \in \mathbb{R}$ tel que $P(z_0) = 0$.

$$P(z) = z^3 + (-5+2i)z^2 + (7-7i)z - 2 + 6i$$

$$P(z_0) = 0 \implies a^3 + (-5+2i)a^2 + (7-7i)a - 2 + 6i = 0$$

$$\implies a^3 - 5a^2 + 7a - 2 + i\big(2a^2 - 7a + 6\big) = 0$$

En séparant les parties réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} a^3 - 5a^2 + 7a - 2 = 0 \quad (1) \\ 2a^2 - 7a + 6 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

L'équation (2) est plus facile à résoudre.

Résolution de (2)

$$2a^2 - 7a + 6 = 0$$

Calculons le discriminant :

$$\Delta = 7^2 - 4 \times 2 \times 6 = 49 - 48 = 1.$$

Les solutions sont :

$$a_1 = \frac{-(-7) - \sqrt{\Delta}}{2 \times 2} = \frac{7-1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2},$$
$$a_2 = \frac{-(-7) + \sqrt{\Delta}}{2 \times 2} = \frac{7+1}{4} = \frac{8}{4} = 2.$$

La racine de (2) qui vérifie (1) est la racine de $P(z)$.

Vérification pour $a = \frac{3}{2}$

Substituons $a = \frac{3}{2}$ dans (1) :

$$\begin{aligned} a^3 - 5a^2 + 7a - 2 &= \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 5\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{3}{2}\right) - 2 \\ &= \frac{27}{8} - 5 \times \frac{9}{4} + \frac{21}{2} - 2 \\ &= \frac{27}{8} - \frac{45}{8} + \frac{84}{8} - \frac{16}{8} \\ &= \frac{27 - 45 + 84 - 16}{8} \\ &= \frac{111 - 106}{8} = \frac{5}{8} \neq 0 \end{aligned}$$

Donc, $a = \frac{3}{2}$ n'est pas solution.

Vérification pour $a = 2$

Substituons $a = 2$ dans (1) :

$$\begin{aligned} a^3 - 5a^2 + 7a - 2 &= 2^3 - 5(2^2) + 7(2) - 2 \\ &= 8 - 20 + 14 - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc, $a = 2$ est une solution.

$$z_0 = 2.$$

2 Factorisons $P(z)$

Utilisons la méthode de la division synthétique pour factoriser $P(z)$. Le tableau est donné ci-dessous :

	1	$-5+2i$	$7-7i$	$2+6i$
2	$\downarrow$	2	$-6+i$	$2-6i$
	1	$-3+2i$	$1-3i$	0

Ainsi, nous avons :

$$P(z) = (z-2)\big(z^2 + (-3+2i)z + 1 - 3i\big).$$

3 Résolvons $P(z) = 0$

$$P(z) = 0 \implies z = 2 \quad \text{ou} \quad z^2 + (-3+2i)z + 1 - 3i = 0.$$

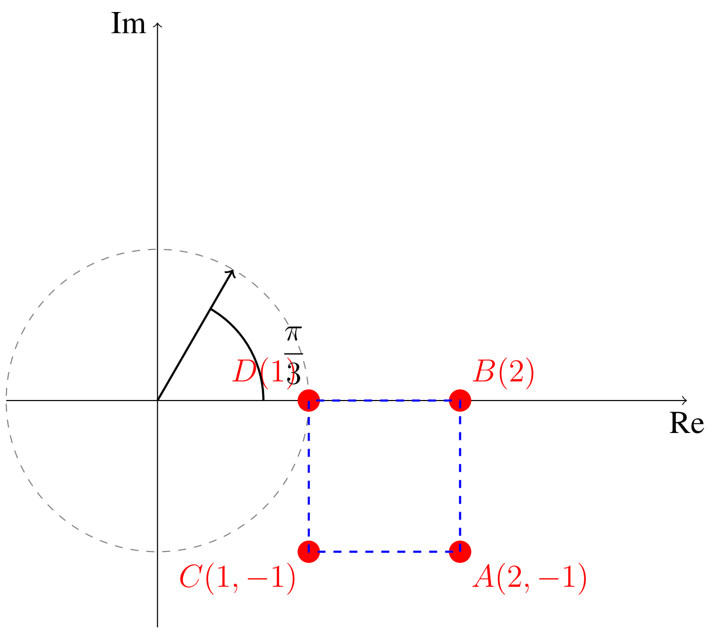
$$\begin{aligned}\Delta &= (-3+2i)^2 - 4(1)(1-3i)\\ &= 9 - 12i - 4 + 12i\\ &= 5\end{aligned}$$

$$z_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} - i, z_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} - i$$

$$S = \left\{2, \frac{3-\sqrt{5}}{2} - i, \frac{3+\sqrt{5}}{2} - i\right\}.$$

Partie B

1 Représentation



2 Écriture exponentielle de z_C et z_E

Pour z_C :

$$\begin{aligned} z_C &= 1 - i \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}e^{-i\pi/4} \end{aligned}$$

$$\boxed{z_C = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}}$$

Pour z_E :

$$\begin{aligned} z_E &= 1 + i\sqrt{3} \\ &= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= 2e^{i\pi/3} \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{z_E = 2e^{i\pi/3}}$$

3 3. Plaçons exactement le point E

$$z_E = 2e^{i\pi/3}.$$

4 Écriture algébrique de z_E^8

$$\begin{aligned} z_E = 2e^{i\pi/3} &\Longrightarrow z_E^8 = 2^8 e^{8i\pi/3} \\ &\Longrightarrow z_E^8 = 2^8\left[\cos\left(\frac{2\times 3\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\times 3\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ &\Longrightarrow z_E^8 = \left[\cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ &\Longrightarrow z_E^8 = 2^8\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{z_E^8 = 2^8\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}.$$

5 5. Calculons les affixes de I et J

On a : $I = \text{bar}\{(A,1);(C,-2)\}$

$$\begin{aligned}
I = \text{bar}\{(A,1);(C,-2)\} &\Longrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{-2}{1-2}\overrightarrow{AC} \\
&\Longrightarrow \overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AC} \\
&\Longrightarrow Z_I - Z_A = 2(Z_C - Z_A) \\
&\Longrightarrow Z_I - Z_A = 2Z_C - 2Z_A \\
&\Longrightarrow Z_I = 2Z_C - Z_A \\
&\Longrightarrow Z_I = 2(1-i) - (2-i) \\
&\Longrightarrow Z_I = 2 - 2i - 2 + i \\
&\Longrightarrow Z_I = -i.
\end{aligned}$$

$$\boxed{Z_I = -i}$$

On a: $J = \text{bar}\{(A,1);(C,2)\}$

$$\begin{aligned}
\text{Donc } J = \text{bar}\{(A,1);(C,2)\} &\Longrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{2}{1+2}\overrightarrow{AC} \\
&\Longrightarrow Z_J - Z_A = \frac{2}{3}Z_C - \frac{2}{3}Z_A \\
&\Longrightarrow Z_J = \frac{2}{3}Z_C + \frac{1}{3}Z_A \\
&\Longrightarrow Z_J = \frac{2}{3}(1-i) + \frac{1}{3}(2-i) \\
&\Longrightarrow Z_J = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(-i) + \frac{2}{3} - \frac{i}{3} \\
&\Longrightarrow Z_J = \frac{4}{3} - i
\end{aligned}$$

$$\boxed{Z_J = \frac{4}{3} - i}$$

6 Donner un module et un argument de $\dfrac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$

$$\begin{aligned}
\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} &= \frac{2-(2-i)}{1-i-(2-i)} \\
&= \frac{i}{-1} \\
&= i
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \boxed{\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = i}$$

Module

$$\left|\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}\right| = |i| = 1$$

Un Argument

$$\arg\left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$$

7 Nature de ABC

$$\begin{cases} \left|\dfrac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Donc ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.

8 Montrons que A, B, C, D sont cocycliques

On a :

$$BD = |Z_D - Z_B| = |1 - 2| = 1$$

$$DC = |Z_C - Z_D| = |i - i - 1| = 1$$

Conclusion

$$\text{donc } AB = AC = BD = DC \quad \text{et} \quad (\widehat{AC, AB}) = \frac{\pi}{2}.$$

donc $ABDC$ est un carré, donc il est inscrit dans un cercle $\mathcal{C}\left(\dfrac{z_A + z_D}{2}, \dfrac{|z_A - z_D|}{2}\right)$.

Tel que les sommets de $ABCD$ appartiennent à $\mathcal{C}$.

$$\begin{aligned} \frac{z_A + z_D}{2} &= \frac{2 - i + 1}{2} \\ &= \frac{3 - i}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{|z_A - z_D|}{2} &= \frac{|2 - i - 1|}{2} \\ &= \frac{|1 - i|}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{C}\left(\left(\frac{3 - i}{2}\right), \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$\boxed{\mathcal{C}\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

9 Forme exponentielle de Z et Écriture algébrique Z

a Forme exponentielle de Z

$$Z = \frac{Z_E}{Z_C}$$

$$\begin{cases} Z_E = 2e^{i\pi/3} \\ Z_C = \sqrt{2}e^{-i\pi/4} \end{cases} \iff Z = \frac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}$$
$$\iff Z = \sqrt{2}e^{i(\pi/3+\pi/4)}$$
$$\iff Z = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

$$\boxed{Z = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}}$$

b Les valeurs de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$

Écriture algébrique de Z

$$\begin{aligned} Z = \frac{Z_E}{Z_C} \iff Z &= \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \\ &= \frac{(1+i\sqrt{3})(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{(1+i\sqrt{3})(1+i)}{2} \\ &= \frac{1+\sqrt{3}i+i-\sqrt{3}}{2} \\ Z &= \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} \\ Z &= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right]. \end{aligned}$$

Par identification : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}}, \quad \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}}.$

D'où : $\boxed{\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}, \quad \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}.$

Partie C

Soit f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P} \setminus \{c(1-i)\} &\to \mathbb{P} \\ Z &\mapsto \frac{Z-2i}{Z-1+i} \end{aligned}$$

1 Expression de OM' en fonction de MA et MC On a :

$$Z' = \frac{Z-2i}{Z-1+i}.$$

$$Z' = \frac{Z-(2+i)}{Z-(1+i)}.$$

$$Z' = \frac{Z_M - Z_A}{Z_M - Z_C}.$$

$$|Z'_M| = \left|\frac{Z_M - Z_A}{Z_M - Z_C}\right|.$$

$$OM' = \frac{MA}{MC}.$$

$$\boxed{OM' = \frac{MA}{MC}}$$

2 Une interprétation géométrique de $\arg(Z')$

$\arg(Z') = \arg\left(\frac{Z_M - Z_A}{Z_M - Z_C}\right) = \left(\overrightarrow{CM};\overrightarrow{AM}\right) = \left(\overrightarrow{MC};\overrightarrow{MA}\right)$

Géométriquement, $\arg(Z')$ représente l'angle orienté entre les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AM}$.

3 L'ensemble des points M pour Z' soit un réel non nul.

$$Z' = \frac{Z_M - Z_A}{Z_M - Z_C}.$$

Pour que Z' soit un réel non nul, deux conditions doivent être satisfaites :

a $Z_M \neq Z_A$, car le numérateur ne doit pas être nul.

b $Z_M \neq Z_C$, car le dénominateur ne doit pas être nul.

Ensuite, pour que Z' soit un réel, l'argument de $\frac{Z_M - Z_A}{Z_M - Z_C}$ doit être nul ou un multiple de π,

$\arg(Z') = \arg\left(\frac{Z_M - Z_A}{Z_M - Z_C}\right) = 0[\pi]$, ce qui implique que les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

En termes géométriques, cela signifie que M appartient à la droite passant par A et C, à l'exclusion des points A et C.

L'ensemble des points M est donc donné par :

$$\mathcal{D} = \{M \in \mathbb{C} \mid M \in \text{droite}(A,C) \setminus \{A,C\}\}.$$

4 Donner et construire l'ensemble des points M tel que $|Z'| = 2$

$$|Z'_M| = \left|\frac{Z_M - Z_A}{Z_M - Z_C}\right| = OM = \frac{MA}{MC}.$$

$$\begin{aligned} MA = 2MC &\implies (MA)^2 = (2MC)^2 \\ &\implies (MA)^2 - (2MC)^2 = 0 \\ &\implies (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC}) = 0 \end{aligned}$$

Or $I = \text{bar}\{(A,1);(C,-2)\}$ et $J = \text{bar}\{(A,1);(C,2)\}$

$$\begin{aligned} &\implies (1-2)\overrightarrow{MI}.(2+1)\overrightarrow{MJ} = 0 \\ &\implies -3\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0 \\ &\implies \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0 \end{aligned}$$

M décrit donc un cercle de centre $\dfrac{z_I + z_J}{2}$ et de rayon $\dfrac{|z_I - z_J|}{2}$

$\dfrac{z_I + z_J}{2} = \dfrac{-i + \left(\frac{4}{3} - i\right)}{2}$ et $\dfrac{|z_I - z_J|}{2} = \dfrac{|-i - \left(\frac{4}{3} - i\right)|}{2}$

$\dfrac{z_I + z_J}{2} = \dfrac{\left(\frac{4}{3} - 2i\right)}{2}$ et $\dfrac{|z_I - z_J|}{2} = \dfrac{|-\frac{4}{3}|}{2}$

$\dfrac{z_I + z_J}{2} = \dfrac{\left(\frac{4-6i}{3}\right)}{2}$ et $\dfrac{|z_I - z_J|}{2} = \dfrac{4}{6}$

$\dfrac{z_I + z_J}{2} = \dfrac{4 - 6i}{6}$ et $\dfrac{|z_I - z_J|}{2} = \dfrac{4}{6}$

$\dfrac{z_I + z_J}{2} = \dfrac{2 - 3i}{3}$ et $\dfrac{|z_I - z_J|}{2} = \dfrac{4}{6}$

$\dfrac{z_I + z_J}{2} = \dfrac{2}{3} - i$ et $\dfrac{|z_I - z_J|}{2} = \dfrac{4}{6}$

Finalement : $\boxed{\mathcal{C}\left(\left(\dfrac{2}{3} - i\right); \dfrac{4}{6}\right)}$

$$\boxed{\mathcal{C}\left(\begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \dfrac{4}{6}\right)}$$

<u>Problème :</u> 10 points

Partie A

Soit $\mu(x) = x^3 + 3x - 1$

a) **Tableau de variation** :

- Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}$
- Limites aux bornes :
  - En $x \to -\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} \mu(x) = -\infty$
  - En $x \to +\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \mu(x) = +\infty$
- Variation de μ :
  - μ est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme.
  - μ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Dérivée de μ
  On a : $\mu'(x) = 3x^2 + 3$
- Le signe de $\mu'(x)$
  Résolvons $\mu'(x) = 0$:
  $3x^2 + 3 = 0$
  $x^2 = -1$
  Comme $x^2 = -1$ n'a pas de solution réelle, on en déduit que :
  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mu'(x) > 0$
  Donc, $\mu(x)$ est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$\mu'(x)$		$+$	
$\mu(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

b) Montrons que $\mu(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0, 1[$

Existence

$\mu(0) = -1$ et $\mu(1) = 3$

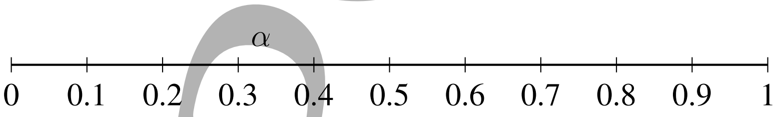
Comme $\mu(0) \times \mu(1) < 0$, donc $\mu(x) = 0$ admet une solution dans $]0, 1[$.

Unicité

μ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc sur $]0, 1[$, $\mu(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0, 1[$.

c) Un encadrement de α à 10^{-1} près

Par la méthode de balayage



$$0.3 \leq \alpha \leq 0.4$$

d) Le signe de $\mu(x) - 1$ pour $\mathbb{R}$

$\mu(x) - 1$ et $\mu(x)$ ont les mêmes variations et mêmes limites en $-\infty$ et $+\infty$.

Il existe un β tel que $\mu(\beta) - 1 = 0$

x	$-\infty$	β	$+\infty$
$\mu'(x)$		$+$	
$\mu(x) - 1$	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

- $\forall x \in]-\infty; \beta[$, $\mu(x) - 1 < 0$
- $\forall x \in]-\infty; \beta[$, $\mu(x) - 1 > 0$

Partie B

La fonction f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x^3+1)}{x^2+1}, & \text{si } x < 1 \\ 1 + \sqrt{2x-1}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1 Montrer que $Df = \mathbb{R}$

$$\text{Posons } f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x < 1 \\ f_2(x), & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

* f_1 existe si $x^2 + 1 \neq 0$ et $x < 1$.
  $x \in \mathbb{R}$ et $x < 1$
  $D_1 =]-\infty, 1[$
* f_2 existe si $2x - 1 \geq 0$ et $x \geq 1$.
  $2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \dfrac{1}{2}$
  $x \geq \dfrac{1}{2}$ et $x \geq 1$
  $x \in \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ et $x \in [1, +\infty[$
  $x \in \left(\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[\cap [1, +\infty[\right)$
  $x \in [1, +\infty[$
  $D_2 = [1, +\infty[$

$D_f = D_1 \cup D_2$
$D_f =]-\infty, 1[\cup [1, +\infty[$
$D_f = \mathbb{R}$

2 La continuité et la dérivabilité de f en 1

Continuité

<u>En 1^-</u> :

$f(x) = f_1(x) = \dfrac{2(x^3+1)}{x^2+1}$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2(x^3+1)}{x^2+1}$
$= 2$

donc $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$

<u>En 1^+</u> :

$f(x) = f_2(x) = 1 + \sqrt{2x - 1}$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 1 + \sqrt{2x - 1}$
$= 2$

donc $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$

Comme

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$$

donc f est continue en 1.

<u>**Dérivabilité**</u>

En 1^-

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to1^-}\frac{\frac{2(x^3+1)}{x^2+1}-2}{x-1}\\ &= \lim_{x\to1^-}\frac{2x^3+2-2x^2-2}{(x^2+1)(x-1)}\\ &= \lim_{x\to1^-}\frac{2x^3-2x^2}{(x^2+1)(x-1)}\\ &= \lim_{x\to1^-}\frac{2x^2(x-1)}{(x^2+1)(x-1)}\\ &= \lim_{x\to1^-}\frac{2x^2}{(x^2+1)}\\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to1}\frac{2x^2}{x^2+1}\\ &= 1\end{aligned}$$

Donc, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1$

En 1^+ :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to1^+}\frac{1+\sqrt{2x-1}-2}{x-1}\\ &= \lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}\\ &= \lim_{x\to1^+}\frac{2x-1-1}{(x-1)(\sqrt{2x-1}+1)}\\ &= \lim_{x\to1^+}\frac{2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{2x-1}+1)}\\ &= \lim_{x\to1^+}\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}\\ &= 1\end{aligned}$$

Donc $\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1$

$$\text{Finalement }\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

Donc f est dérivable en 1.

3 Équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point A(1,2).

$$(T): y = f'(1)(x-1)+f(1)$$

$$y=(x-1)+2$$

Donc $(T): y = x+1$

4. Position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (T).

Pour ce faire, étudions le signe de $f(x) - y$.

<u>Pour $x < 1$</u>

$$\begin{aligned}
f(x) - y &= \frac{2(x^3+1)}{x^2+1} - (x+1) \\
&= \frac{2(x^3+1) - (x+1)(x^2+1)}{x^2+1} \\
&= \frac{2x^3 + 2 - (x^3 + x + x^2 + 1)}{x^2+1} \\
&= \frac{2x^3 + 2 - x^3 - x^2 - x - 1}{x^2+1} \\
&= \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2+1}
\end{aligned}$$

$$f(x) - y = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2+1}$$

Le signe dépend du numérateur, que nous étudions avec la méthode de Horner :

	1	-1	-1	1
1	1	0	-1	0
	1	0	-1	0

On obtient la factorisation :

$$\begin{aligned}
x^3 - x^2 - x - 1 &= (x-1)(x^2-1) \\
&= (x-1)(x-1)(x+1) \\
&= (x+1)(x-1)^2
\end{aligned}$$

Donc $f(x) - y = \dfrac{(x+1)(x-1)^2}{x^2+1}$

Si $x < -1$, $f(x) - y < 0$ donc $(\mathcal{T})$ est au-dessus de $(\mathcal{C}_f)$

Si $x \in]-1, 1[$, $f(x) - y > 0$ donc $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de $(\mathcal{T})$

<u>Pour $x > 1$</u>

$$\begin{aligned}
f(x) - y &= 1 + \sqrt{2x-1} - (x+1) \\
&= \sqrt{2x-1} - x
\end{aligned}$$

Supposons que $\sqrt{2x-1} - x < 0$

$$\sqrt{2x-1} < x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2x - 1 > 0 \\ 2x - 1 < x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2x - 1 > 0 \\ x^2 - 2x + 1 > 0 \end{cases}$$

Posons $\begin{cases} x > 0 \\ 2x - 1 > 0 \\ x^2 - 2x + 1 > 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x=0 \\ 2x-1=0 \\ x^2-2x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \\ x=1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
x		0			$+$
$2x-1$			0		$+$
x^2-2x+1				0	$+$

Donc pour que $\sqrt{2x-1}-x<0,$ il faut que $x\geq 1$

Donc si $x\geq 1$ alors $f(x)-y<0$

D'où si $x\geq 1$ alors $(\mathcal{T})$ est au-dessus de $(\mathcal{C}_f)$

5 **a** Montrons que$\forall x\in]-\infty,1[, f'(x)=\dfrac{2x\,[u(x)-1]}{(x^2+1)^2}$

$\forall x\in]-\infty,1[,\quad f(x)=\dfrac{2(x^3+1)}{x^2+1}$

$$f'(x)=\frac{2x\,(3x^2(x^2+1)-2x(x^3+1))}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2x\,[3x(x^2+1)-2x(x^3+1)]}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2x\,[3x^3+3x-2x^4-2x]}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2x\,[x^3+3x-1-1]}{(x^2+1)^2}$$

$\forall x\in]-\infty,1[, f'(x)=\dfrac{2x\,[u(x)-1]}{(x^2+1)^2}$ cqfd.

b Calculons $f'(x)$ pour $x\in[1,+\infty[$

$$f(x)=1+\sqrt{2x-1}$$

$$f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

$$\text{Donc } \forall x\in[1,+\infty[,\quad f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

c Le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$

Sur $]-\infty;1[, f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$

Le signe de $f(x)$ dépend du numérateur.

D'après la réponse à la question d) de la partie A, on a : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty, \beta[, \mu(x) - 1 < 0 \\ \forall x \in]\beta, +\infty[, \mu(x) - 1 > 0 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		β		1		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$		$+$		//////	
$\mu(x)-1$		$-$		$-$	0	$+$		//////	
$2x[\mu(x)-1]$		$+$	0	$-$	0	$+$		//////	

Finalement

- Si $x \in]-\infty, 0[\cup]\beta, 1[, f'(x) > 0$ donc f est croissante.
- Si $x \in]0, \beta[, f'(x) < 0$ donc f est décroissante.

Sur $[1, +\infty[, f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$

$\forall x \in]1, +\infty[, \quad f'(x) > 0$

Donc f est croissante sur $]1, +\infty[$.

d Tableau de variation

x	$-\infty$		0		β		1		$-\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Limites aux bornes de $D_f = \mathbb{R}$

En $-\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{2(x^3+1)}{x^2+1} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3+2}{x^2+1} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{x^2} \\
&= \lim_{x\to-\infty} 2x \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

En $+\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \left(1+\sqrt{2x-1}\right) \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

6 **a** Les Bandes Asymptotiques

En $-\infty$:

Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, cherchons $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2(x^3+1)}{x^2+1}}{x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+2}{x^3+x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^3}\\
&= 2.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=2$. Donc, cherchons $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}[f(x)-2x]$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}(f(x)-2x) &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2(x^3+1)}{x^2+1}-2x\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+2-2x(x^2+1)}{x^2+1}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+2-2x^3-2x}{x^2+1}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+2}{x^2+1}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x^2}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{x}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction $y=2x$.

<u>En $+\infty$:</u>

Puisque

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,

cherchons $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{2x-1}}{x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{1-(2x-1)}{x\left[1-\sqrt{2x-1}\right]}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{2(1-x)}{x\sqrt{1-\frac{2}{2x-1}}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\times\frac{2}{1-\sqrt{2x-1}}\right)\\
&= \frac{1}{1}\times\frac{1}{\infty}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction Ox.

b La courbe $(\mathcal{C})$

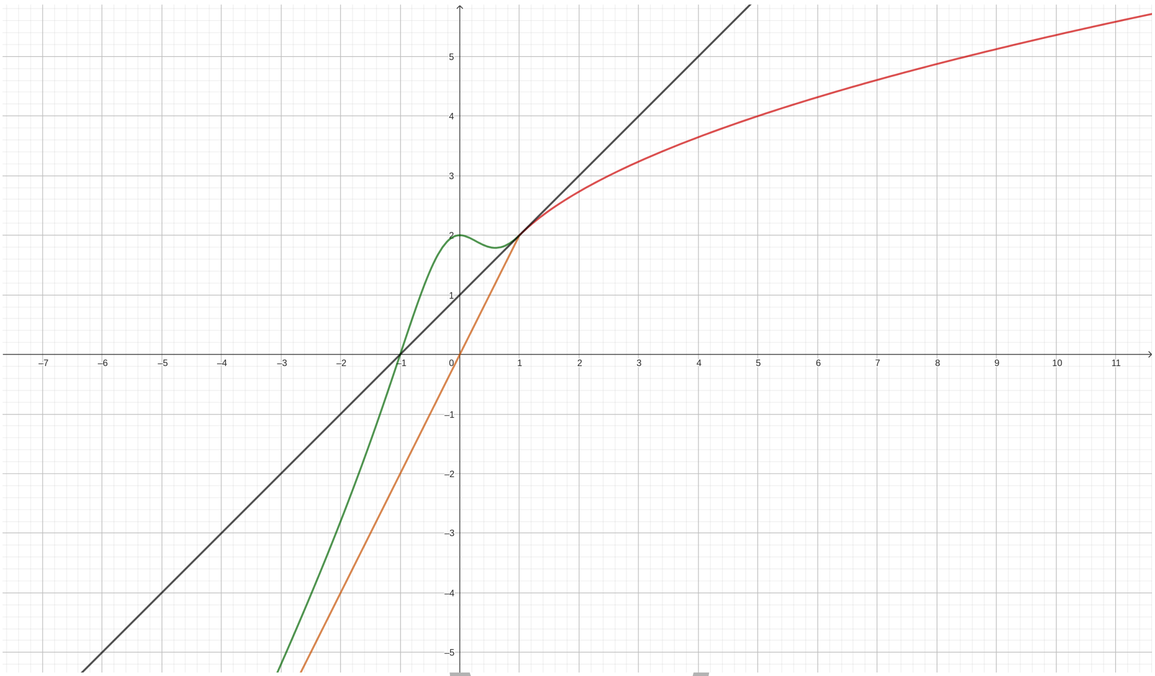


Figure 1: Courbe de (Cf)

Clique ici pour voir la figure sur géogébra

7 a g est continue et croissante sur $[1;\infty[$ donc réalise une bijection de $[1;\infty[$ vers $J=[2;\infty[$

b Comme $\forall x\in[1;\infty[, g'(x)\neq 0$ donc donc g^{-1} estn dérivable sur J et a même sens de variation que g donc croissante aussi.

c Courbe g^{-1}

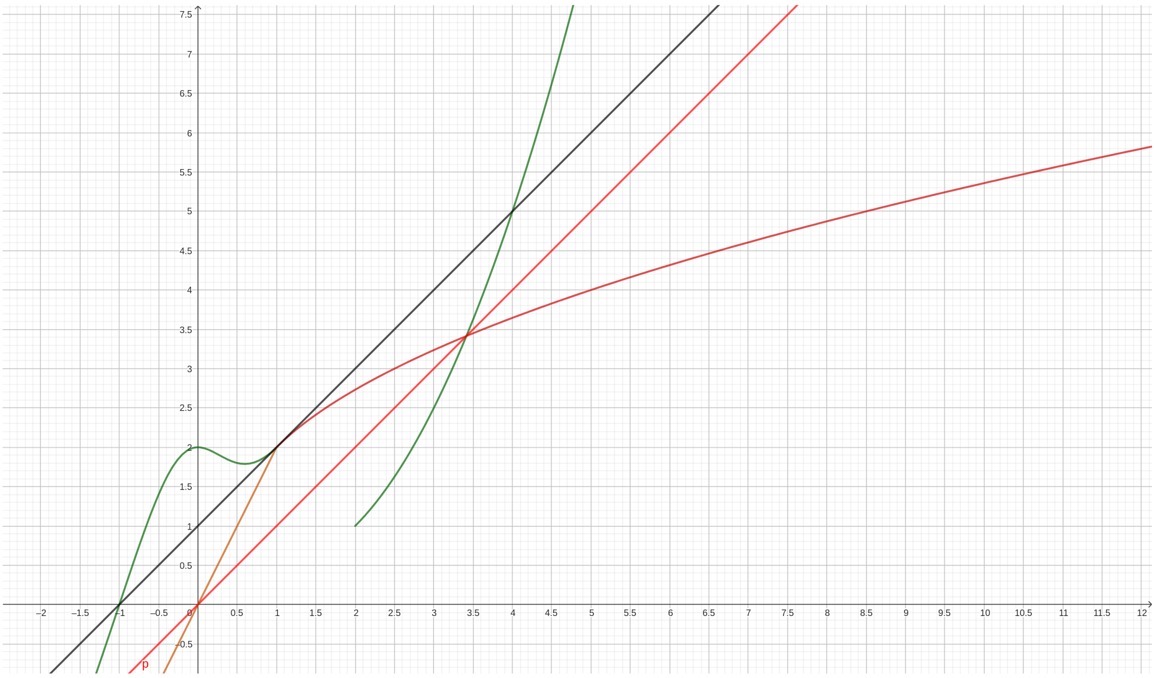


Figure 2: Courbe de (Cf)

Clique ici pour voir la figure sur géogébra