Calcul Intégral Ts2

Destiné aux élèves de Terminale S
Lycée de Dindéfelo
Présenté par M. BA

12 juin 2024

I. Primitive

1. Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I. On dit que F est une primitive de f sur I notée $\int f$ si,
F est dérivable sur I et $\forall x \in I$, F'(x)=f(x)

Exemple

Soit f et F deux fonctions définies par :

Théorème 1

Toute fonction continue sur I y admet une primitive.

Théorème 2

Si F est une primitive de f sur I, alors toute fonction G définie par $G(x) = F(x) + c$;c une constante est aussi une primitive de f sur I.

Donc deux primitives quelconques d'une fonction diffèrent d'une constante et il existe une unique primitive qui prend une valeur y en x_0.

Théorème 3

Soit f une fonction dérivable sur I de dérivée f' continue sur I et g une fonction continue sur I de primitive G définie sur un intervalle J contenant $f(I)$, alors $(g \circ f)f'$ a pour primitive sur I, $G \circ f$.

2. Opération sur les primitives

Si F est une primitive de f et G une primitive de g, alors
$\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$;α, $\beta \in \mathbb{R}$

Tableau de quelques primitives

u et v sont deux fonctions continues et c une constante.

f	F
$\alpha \in \mathbb{R}$	$ax + c$
$\frac{1}{x}; x > 0$	$\ln(x) + c$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$-\sin x + c$
$\frac{1}{\sqrt{x}}; x > 0$	$2\sqrt{x}$
$\frac{1}{x^2}; x > 0$	$-\frac{1}{x}$

f	F
$\alpha \in \mathbb{R}$	$ax + c$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u \rvert)$
$u'e^u$	e^u
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$

f	F
$u' \cos u$	$\sin u$
$u' \sin u$	$-\cos u$
$\frac{u'}{\cos^2 u} = 1 + \tan^2 u$	$\tan u$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u'v + v'u$	uv
$\lambda f; \lambda \in \mathbb{R}$	λF
$\frac{u'v+v'u}{v^2}$	$\frac{u}{v}$

Théorème

Si u et v sont dérivables sur I de dérivées u' et v' continues sur I, alors $\int u'v = uv - \int uv'$ En effet, $(uv)' = u'v + v'u \Longrightarrow u'v = (uv)' - uv'$
$\Longrightarrow \int u'v = \int (uv)' - \int uv'$
$\Longrightarrow \int u'v = uv - \int uv'$

Exemple

Déterminer les primitives de :
$f(x) = x \cos x$; $g(x) = xe^x$; $h(x) = \ln x$

Résolution

II. Définition et propriétés

1. Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a, $b \in I$ et f une fonction continue sur I. On appelle intégrale de a à b de f le réel noté

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur $[a,b]$ ou $[b,a]$

Remarques

- Le choix de la primitive F n'influe pas le résultat de l'intégrale. En effet, si F et G sont deux primitives d'une même fonction f sur I, alors elles différent d'une constante. Les quantités $F(b)-F(a)$ et $G(b)-G(a)$ sont donc égales.
  Soit $G(x) = F(x) + c$, alors
  $$\int_a^b f(x)dx = [G(x)]_a^b = G(b)-G(a) = F(b)+c-(F(a)+c) = F(b)-F(a)$$
- Soit I un intervalle et $x_0 \in I$ pour tout réel x de I, nous avons :
  $$\int_{x_0}^x f(t)dt = [F(t)]_{x_0}^x = F(x) - F(x_0)$$
  La fonction $\mathtt{F}$ définie sur I par
  $$\mathtt{F} = \int_{x_0}^x f(t)dt$$
  est donc la primitive de f sur I qui s'annule en x_0.
- La lettre t (ou x) choisie pour la variable est une variable "muette" ; elle peut être notée par toute autre lettre. Ce qui signifie que :
  $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = F(b) - F(a)$$

Exemple

Calculer

$$I = \int_4^5 \frac{1}{x^2-9}dx, J = \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx, K = \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$$

Résolution

2. Propriétés

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b, c, \in I$, f et g deux fonctions continues sur I, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

- $$\int_a^a f(x)dx = 0$$
- $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$
- Relation de Chasles
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$
- Linéarité de l'intégration
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$
- Si f est paire, alors
$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$
- Si f est impaire, alors
$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$
- Si f est périodique de période T, alors
$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$
- Positivité de l'intégration : si $a \leq b$ et $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors
$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

- Conservation de l'ordre de l'intégration : $a \leq b$ et $f \geq g$ sur $[a, b]$, alors
$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$
- $$\mid \int_a^b f(x)dx \mid \leq \int_a^b g(x)dx$$
- Inégalité de la moyenne : La fonction f étant continue sur $[a, b]$, alors il existe deux réels m et M tels que, pour tout réel $x \in [a, b]$ on ait $m \leq f(x) \leq M$ et donc :
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$
En effet
$$m \leq f(x) \leq M \Longrightarrow \int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx \Longrightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Théorème de la moyenne

Pour toute fonction f définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que
$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$
Le réel $f(c)$ est appelé valeur moyenne de f sur $[a, b]$.

Interprétations géométriques

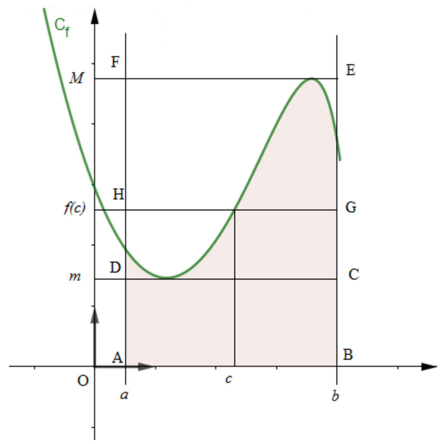
Le plan est muni d'un repère orthogonal $O, \vec{i}, \vec{j}$. Soit f une fonction continue et positive de courbe représentative C_f, alors

- L'encadrement
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$
signifie que l'aire du domaine coloré est minorée par l'aire du rectangle $ABCD$, et majorée par celle du rectangle $ABEF$

- L'égalité

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

signifie que l'aire du domaine coloré est égale à celle du rectangle $ABGH$



Exercice d'application

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$
Montrer que u_n est décroissante

Résolution

III. Méthodes d'intégration

1. A l'aide du tableau de primitives

Exemple

Calculer

$$I = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx, J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \cos 3x dx$$

2. A l'aide de la linéarisation

Exemple

Calculer

$$I = \int_0^{\pi} \sin^5 x dx$$

3. Par changement de variables

Théorème

Si g est continue sur $[a, b]$ et de dérivée g' continue sur $[a, b]$.
Si f est continue sur $[\alpha, \beta]$ avec $\alpha = g(a)$ et $\beta = g(b)$, alors

$$\int_a^b f \circ g(x) g'(x) dx = \int_\alpha^\beta f(u) du$$

Exemple

Calculer

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx, B = \int_0^{\pi} \sin x \cos^4 x dx$$

Résolution

Remarque

$$\int_a^b \alpha f(\alpha t + \beta) dt = \int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} f(u) du$$

$u = \alpha t + \beta \Rightarrow du = \alpha dt$

4. Intégration par parties

Si u et v sont dérivables sur I de dérivées u' et v' continues sur I et a, $b \in I$ alors

$$\int_a^b u'(x) v(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) v'(x) dx$$

Exemple

Calculer les intégrales suivantes

$$A = \int_0^{\pi} x\cos x dx, B = \int_1^e x\ln x dx$$

Résolution

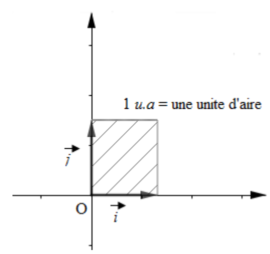
IV. Calcul d'aire et de volume

1. Calcul d'aires

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère orthogonale, $||\vec{i}|| = m$ cm, $||\vec{j}|| = n$ cm.

L'unité d'aire est l'aire du quadrilatère construit sur les vecteurs de bases du repères.

1 unité d'aire $(u.a) = m \times n\ cm^2$



- Soit $f \geq 0$ sur [a, b].
  L'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan comprise entre C_f,l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$est égale à :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx \quad u.a$$

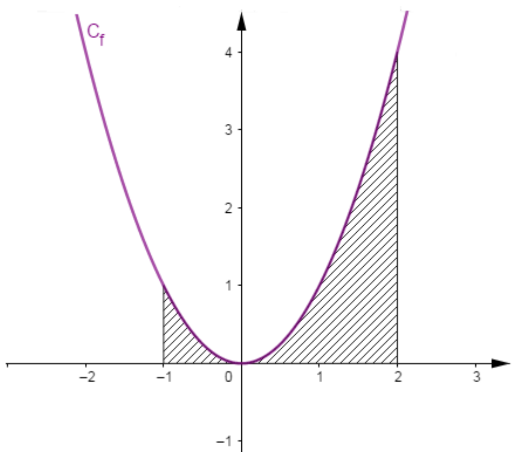
Exemple

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère orthogonale, $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 1$ cm. On Considère la parabole C_f représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 du domaine délimité par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$

Résolution

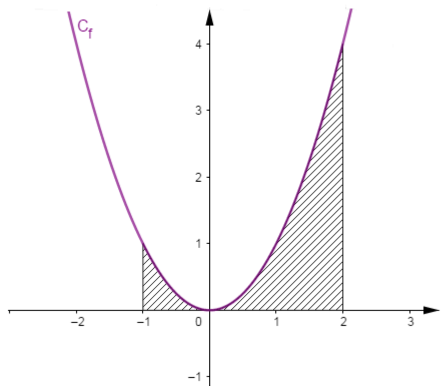
$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} |\mathrm{e}^x - 1| \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{0} -(\mathrm{e}^x - 1) \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \mathrm{e}^x - 1 \mathrm{d}x \\
&= -[\mathrm{e}^x - x]_{-1}^{0} + [\mathrm{e}^x - x]_{0}^{1} \\
&= -\left[1 - \frac{1}{\mathrm{e}} - 1\right] + [\mathrm{e} - 1 - 1] \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}} + \mathrm{e} - 2
\end{aligned}
$$



Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et D une droite d'équation $\alpha x + \beta$.

L'aire de la partie du plan comprise entre C_f, D et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à :

$$\int_a^b |f(x) - (\alpha x + \beta)| \mathrm{d}x \; u.a$$



- Soit $f \geq 0$ sur [a, b].
  L'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan comprise entre C_f,l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$est égale à :

$$\mathcal{A} = \int_a^b -f(x)dx \quad u.a$$

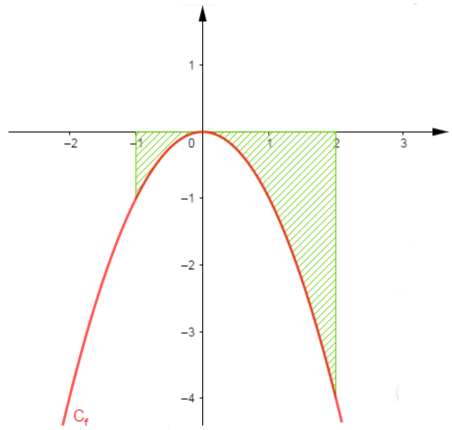
Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2$.

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine délimité par C_f,l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$

Résolution

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_{-1}^{2} -f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{2} x^2\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} \\
&= \frac{8}{3} - \frac{(-1)^3}{3} \\
&= \frac{8}{3} + \frac{1}{3} \\
&= 3 \text{ cm}^2
\end{aligned}$$



- Soit f et g deux fonctions continues sur [a, b]
  L'aire de la partie du plan comprise entre C_f, C_g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à :

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|dx \quad u.a$$

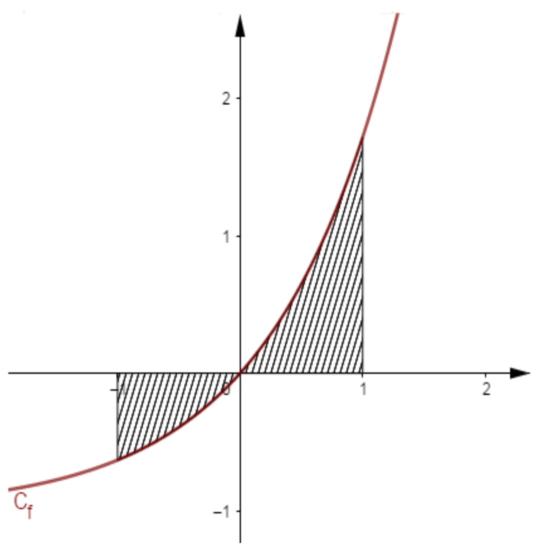
Exemple : cas particulier d'une fonction changeant de signe

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - 1$ et $g(x) = 0$

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine délimité par C_f, C_g et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$

Résolution

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} |\mathrm{e}^x - 1| \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{0} -(\mathrm{e}^x - 1) \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \mathrm{e}^x - 1 \mathrm{d}x \\
&= -[\mathrm{e}^x - x]_{-1}^{0} + [\mathrm{e}^x - x]_{0}^{1} \\
&= -\left[1 - \frac{1}{\mathrm{e}} - 1\right] + [\mathrm{e} - 1 - 1] \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}} + \mathrm{e} - 2
\end{aligned}$$



. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et D une droite d'équation $\alpha x + \beta$.

L'aire de la partie du plan comprise entre C_f, D et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à :

$$\int_{a}^{b} |f(x) - (\alpha x + \beta)| \mathrm{d}x \ u.a$$

Exemple

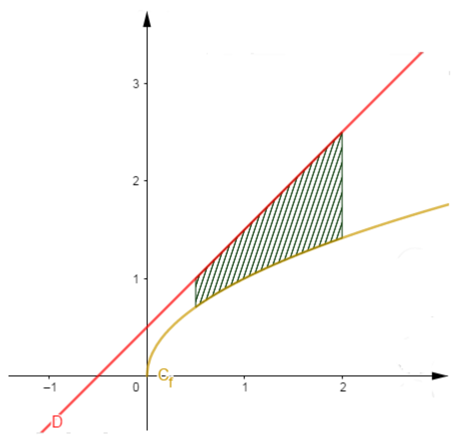
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$ et D et les droites d'équation $x = \frac{1}{2}$ et $x = 2$

$$\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{2}}^{2} |f(x) - (\alpha x + \beta)| dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2} (x + \frac{1}{2} - \sqrt{x}) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{1}{2}}^{2}$$

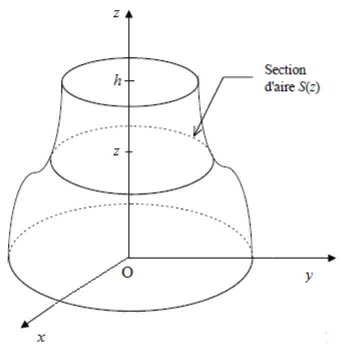
$$= 3 - \frac{3}{8} - \frac{7\sqrt{2}}{6}$$



IV.2 Calcul de volume

Soit $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k})$ un repère orthogonal.

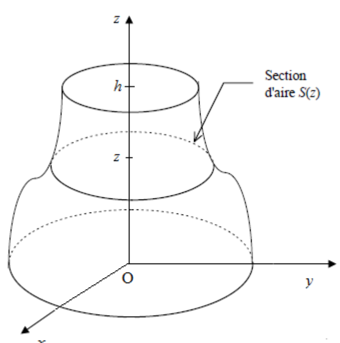
L'unité de volume est le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs de bases du repères.



Soit S un solide de hauteur h. Un plan $\mathcal{P}$ parallèle au plan $(x'Ox)$ coupe S suivant une figure plane de surface $S(z)$. Le volume $\mathcal{V}$ de S est égal à

$$\mathcal{V} = \int_0^h S(z)\,\mathrm{d}z\ u.v.$$

1 $u.v$ = une unité de volume

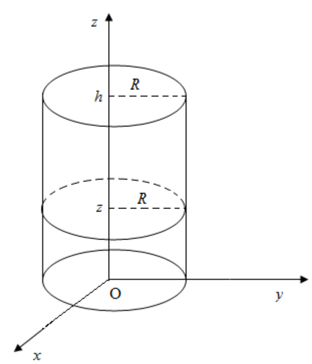


Exemples

a) Cylindre (R, h)

$S(z) = \pi R^2$

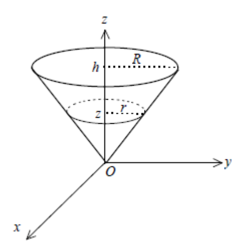
$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \int_0^h S(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^h \pi R^2\,\mathrm{d}z \\
&= \left[\pi R^2 z\right]_0^h \\
&= \pi R^2 h
\end{aligned}$$



b) Cône (R, h)

$S(z) = \pi r^2$, d'après Thalès $\dfrac{r}{R} = \dfrac{z}{h}$, donc $S(z) = \pi \dfrac{R^2}{h^2} z^2$.
Donc

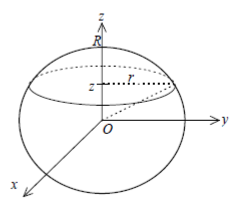
$$
\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \int_0^h S(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^h \pi\frac{R^2}{h^2}z^2\,\mathrm{d}z \\
&= \pi\frac{R^2}{h^2}\int_0^h z^2\,\mathrm{d}z \\
&= \pi\frac{R^2}{h^2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h \\
&= \pi\frac{R^2h}{3}
\end{aligned}
$$



c) Sphère de rayon R

$S(z)=\pi r^2$ or $r^2+z^2=R^2 \;\Rightarrow\; r^2=R^2-z^2$, donc $S(z)=\pi(R^2-z^2)$.
Alors

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \int_{-R}^{R} S(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - z^2)\,\mathrm{d}z \\
&= 2\pi \int_{0}^{R} (R^2 - z^2)\,\mathrm{d}z \\
&= 2\pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_0^R \\
&= 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) \\
&= \frac{4}{3}\pi R^3
\end{aligned}
$$



Remarque

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors le volume engendré par la rotation de C_f, $x = a$ et $x = b$ autour de l'axe des abscisses est égal à

$$\mathcal{V} = \int_a^b \pi(f(x))^2\,\mathrm{d}x$$