Equations Differnetielles Lineaires

Lycée de Dindéfelo
Mr BA

3 juin 2024

I. Définitions

Soient $a_0, a_1, ..., a_n$ des constantes réelles, $y = y(x)$ une fonction de x. On appelle équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants, une équation liant une fonction y et ses dérivées successives $y', y'', \cdots, y^n$. On a $a_n y^n(x) + a_{n-1}y^{n-1}(x) + \cdots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = g(x)$ où $g(x)$ est une fonction et $a_n \neq 0$

Exemple

$2y'' - 3y' + 4y = \sin 2x$ est une équation différentielle linéaire du 2^{nd} ordre, à coefficients constants.

- pour $a_n \neq 0$, **(E)**: $a_n y^n(x) + a_{n-1}y^{n-1}(x) + \cdots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = g(x)$ est une équation différentielle Linéaire d'ordre n, à coefficients constants, non homogène ou avec second membre.
- pour $a_n \neq 0$, **(E')**: $a_n y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre n, à coefficients constants, non homogène ou sans second membre ou homogène.
- **(E')** est associée à **(E)**
- Les solutions d'une équation différentielle sont des fonctions.
- f est une solution d'une équation différentielle d'ordre n, à coefficients constants sur **I**, si f est n fois dérivables sur **I** et f vérifie l'équation.
- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle est appelé solution générale de l'équation différentielle.
- Toute fonction vérifiant l'équation différentielle est appelée solution particulière.
- Une solution qui vérifie des conditions initiales est appelée solution singulière.

II. Théorèmes

Soit l'équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants avec 2^{nd} membre.

(E): $a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdot + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = g(x)$ et l'équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants sans 2^{nd} membre.

(E'): $a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdot + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$.

Si f_1 est une solution particulière de **(E)** et f_2 une solution générale de **(E')** alors, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ est une solution générale de **(E)**.

Preuve

Soit f_1 une solution particulière de l'équation **(E)** avec second membre, et f_2 une solution générale de l'équation homogène associée **(E')**. Nous devons montrer que $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ est une solution générale de l'équation **(E)**.

Puisque f_1 est une solution particulière de **(E)**, cela signifie que lorsque nous remplaçons y par f_1 dans **(E)**, nous obtenons une équation vraie.
C'est-à-dire :

$$a_n f_1^{(n)}(x) + a_{n-1} f_1^{(n-1)}(x) + \ldots + a_2 f_1''(x) + a_1 f_1'(x) + a_0 f_1(x) = 0$$

De même, puisque f_2 est une solution générale de **(E')**, lorsque nous remplaçons y par f_2 dans **(E')**, nous obtenons une équation vraie.
C'est-à-dire :

$$a_n f_2^{(n)}(x) + a_{n-1} f_2^{(n-1)}(x) + \cdots + a_2 f_2^{''}(x) + a_1 f_2^{'}(x) + a_0 f_2(x) = g(x)$$

En ajoutant les deux équations, nous obtenons l'équation :

$$a_n f_1^{(n)}(x) + a_{n-1} f_1^{(n-1)}(x) + \ldots + a_2 f_1''(x) + a_1 f_1'(x) + a_0 f_1(x) + a_n f_2^{(n)}(x) + a_{n-1} f_2^{(n-1)}(x) +$$
$$\ldots + a_2 f_2''(x) + a_1 f_2'(x) + a_0 f_2(x)$$
$$= 0 + g(x)$$

$$a_n (f_1 + f2)^{(n)}(x) + a_{n-1} (f_1 + f2)^{(n-1)}(x) + \cdots + a_2 (f_1 + f2)^{''}(x) + a_1 (f_1 + f2)^{(')}(x) + a_0 (f_1 + f2)(x) = g(x)$$

Puisque f_1 est une solution de l'équation avec second membre **(E)** et f_2 est une solution de l'équation homogène **(E')**, la partie gauche de l'équation ci-dessus est égale à $g(x) + 0$, ce qui est simplement $g(x)$. Ainsi,
$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ satisfait l'équation différentielle **(E)**, ce qui prouve que c'est une solution générale de **(E)**.

III. Équations différentielles linéaires d'ordre 1, à coefficients constants

Une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients constants est une équation de la forme

$$\textbf{(E)} : ay' + by = g(x) \textbf{(avec second membre)}$$

$$\textbf{(E')} : ay' + by = 0 \textbf{(sans second membre ou équation homogène)}$$

1. Recherche de la solution générale de l'équation homogène

Soit **(E')**: $ay' + by = 0$ alors,

$$ay' = -by \Longrightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{b}{a}$$

$$\Longrightarrow \ln|y| = -\frac{b}{a}x + c$$

$$\Longrightarrow |y| = e^{-\frac{b}{a}x+c} = e^c.e^{-\frac{b}{a}x}$$

$$\Longrightarrow y = \pm e^c.e^{-\frac{b}{a}x}$$

Soit **(E')** :$ay' + by = 0$ alors $ay' = -by$
Donc, f_2 est de la forme $f_2(x) = y_2(x) = ke^{-\frac{b}{a}x}$ où K est une constante.

2. Recherche d'une solution particulière de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec 2^nd membre

- Une fonction f_1 est solution de **(E)** si elle est dérivable et si elle vérifie **(E)**
$$af_1'(x) + bf_1(x) = g(x)$$
- Si $g(x)$ est un polynôme de degré n, alors f_1 est aussi un polynôme de degré n.
- Si $g(x)$ est de la forme $a\cos\beta x, a\sin\beta x$, $a\cos\beta x + b\sin\beta x$, alors f_1 sera de la forme $A\cos\beta x + B\sin\beta x$.

3. Solution générale de (E)

Une solution générale $y(x)$ de **(E)** est donnée par

$$y(x) = f_2(x) + f_1(x)$$

où f_2 est une solution générale de **(E')** et $f_1(x)$ une solution particulière de **(E).**

Exercice d'application

Soit ϕ la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle **(E)** :$2y' - 3y = x^2 + 5$ dont la dérivée s'annule en 0.

1. Montrer qu'il existe un polynôme de degré 2, notée f_1, solution de **(E).**
2. Résoudre l'équation différentielle **(E) :**$2y' = 3y$ et en déduire l'ensemble des solutions de **(E).**
3. Déterminer ϕ puis construire C_ϕ sa courbe représentative.

Résolution

1. Cherchons une solution particulière y_p de l'équation **(E)** sous la forme d'un polynôme de degré 2 : $y_p = ax^2 + bx + c$.
Calculons y_p' :
$$y_p' = 2ax + b$$
Substituons y_p et y_p' dans l'équation **(E)** :
$$2(2ax + b) - 3(ax^2 + bx + c) = x^2 + 5$$

$$4ax + 2b - 3ax^2 - 3bx - 3c = x^2 + 5$$

Regroupons les termes semblables :

$$-3ax^2 + (4a - 3b)x + (2b - 3c) = x^2 + 5$$

Égalons les coefficients :

$$\begin{cases} -3a = 1 \\ 4a - 3b = 0 \\ 2b - 3c = 5 \end{cases}$$

Résolvons ce système :

$$a = -\frac{1}{3}$$

$$4\left(-\frac{1}{3}\right) - 3b = 0 \implies -\frac{4}{3} - 3b = 0 \implies b = -\frac{4}{9}$$

$$2\left(-\frac{4}{9}\right) - 3c = 5 \implies -\frac{8}{9} - 3c = 5 \implies -3c = 5 + \frac{8}{9} \implies -3c = \frac{45+8}{9} \implies -3c = \frac{53}{9} \implies c = -\frac{53}{27}$$

La solution particulière est donc :

$$y_p = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x - \frac{53}{27}$$

2. Résolvons maintenant l'équation homogène associée **(E')** : $2y' - 3y = 0$.

$$2y' = 3y \implies \frac{y'}{y} = \frac{3}{2} \implies \int \frac{dy}{y} = \int \frac{3}{2}dx \implies \ln|y| = \frac{3}{2}x + C$$

$$y = Ce^{\frac{3}{2}x}$$

L'ensemble des solutions de **(E)** est donc :

$$y = Ce^{\frac{3}{2}x} + y_p$$

3. Puisque la dérivée de ϕ s'annule en 0, nous devons avoir $\phi'(0) = 0$.

$$\phi(x) = Ce^{\frac{3}{2}x} - \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x - \frac{53}{27}$$

Calculons $\phi'(x)$:

$$\phi'(x) = \frac{3}{2}Ce^{\frac{3}{2}x} - \frac{2}{3}x - \frac{4}{9}$$

$$\phi'(0) = \frac{3}{2}C - \frac{4}{9} = 0 \implies \frac{3}{2}C = \frac{4}{9} \implies C = \frac{8}{27}$$

La solution est donc :

$$\phi(x) = \frac{8}{27}e^{\frac{3}{2}x} - \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x - \frac{53}{27}$$

4. Pour construire la courbe représentative C_ϕ, nous traçons la fonction ϕ sur un graphique.

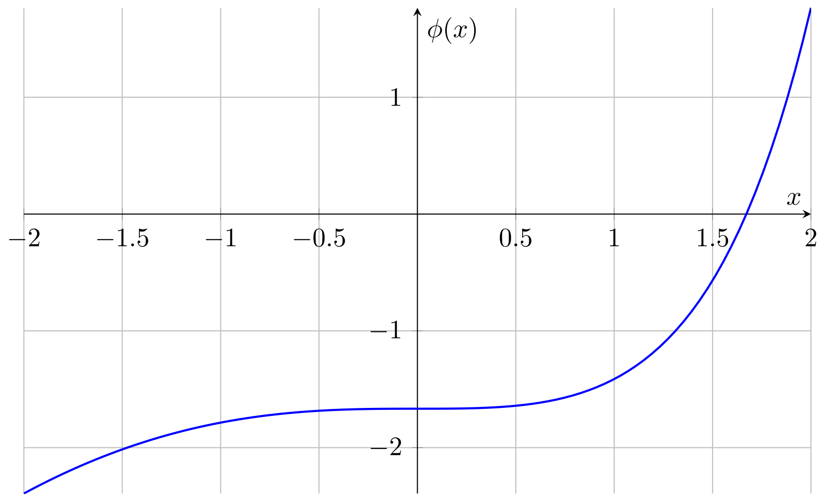

FIGURE 1 – Courbe représentative de $\phi(x)$.

IV. Équations différentielles du 2nd ordre, à coefficients constants

C'est une équation de la forme
(E) : $ay'' + by' + cy = g(x)\,; \neq 0$ (équation avec 2^{nd} membre)
(E') : $ay'' + by' + cy = 0\,; \neq 0$ (équation homogène)
f est une solution de **(E) :**(respectivement de **(E')**) sur **I** si f est deux fois dérivables sur **I** et f vérifie **(E)**(respectivement f vérifie **(E')**)

1. Recherche de la solution générale de (E')

Soit **(E' :)**$ay'' + by' + cy = 0$ avec $a \neq 0$, nous appelons équation caractéristique associée à **(E')** l'équation $ar^2 + br + c = 0$

Théorème

Soit **(E')** :$ay'' + by' + cy = 0$ et $ar^2 + br + c = 0$ équation caractéristique associée de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, alors :

- Si $\Delta > 0$ alors, l'équation $ar^2 + br + c = 0$ admet deux solutions réelles distinctes
$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
Dans ce cas, **(E')** :$ay'' + by' + cy = 0$ admet comme solution générale y_2 de la forme

  $\boxed{y_2(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}}$ Avec A et B des Constants déterminées par les conditions initales

- Si $\Delta = 0$ alors, l'équation $ar^2 + br + c = 0$ admet une solutions double réelle

$$r_0 = \frac{-b}{2a}$$

Et l'équation (E') admet une solution générale de la forme

$$\boxed{y_2(x) = (Ax + B)e^{r_0 x}}$$

- Si $\Delta < 0$ alors, l'équation $ar^2 + br + c = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées

$$\alpha + i\beta, \alpha - i\beta$$

Ainsi, **(E')** :$ay'' + by' + cy = 0$ admet une solution générale de la forme

$$\boxed{y_2(x) = Ae^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)}$$

Remarques

Dans tous les cas, les constantes A et B sont dépendantes des conditions initiales.

2. Recherche d'une solution particulière

- Si g est un polynôme de degré n, alors f_1 est aussi un polynôme de degré
— $n + 1$ si $c = 0$.
— n si $c \neq 0$
- Si $g(x)$ est de la forme $a\cos\beta x / a\sin\beta x$,$a\cos\beta x + b\sin\beta x$ alors, $f_1(x)$ sera de la forme $A\cos\beta x + B\sin\beta x$.

3. Solution générale de (E)

Soit $f_2(x)$ solution générale de **(E')**, si $f_1(x)$ donnée, est solution particulière de **(E)**, alors la solution générale de **(E)** ; $y(x)$,sera de la forme

$$y(x) = f_2(x) + f_1(x)$$

Exemple

Résoudre l'équation différentielle **(E :)**$y'' - 4y' + 3y = 0$ puis, déterminer et représenter graphiquement la solution qui passe par l'origine $O(0, 0)$ du repère et dont la dérivée vaut 1 en 0.

Solution

1. Résolution de l'équation différentielle homogène

L'équation différentielle donnée est une équation linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants :

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

Pour résoudre cette équation, nous cherchons les racines de l'équation caractéristique associée :

$$r^2 - 4r + 3 = 0$$

Cette équation se factorise facilement :

$$(r-3)(r-1) = 0$$

Les racines sont :

$$r_1 = 3 \quad \text{et} \quad r_2 = 1$$

Ainsi, la solution générale de l'équation différentielle est :

$$y(x) = C_1e^{3x} + C_2e^x$$

2. Détermination de la solution particulière

Nous devons maintenant déterminer les constantes C_1 et C_2 en utilisant les conditions initiales données :

$$y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = 1$$

Calculons $y'(x)$ à partir de la solution générale :

$$y'(x) = 3C_1e^{3x} + C_2e^x$$

En utilisant les conditions initiales :

$$y(0) = C_1e^0 + C_2e^0 = C_1 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -C_1$$

$$y'(0) = 3C_1e^0 + C_2e^0 = 3C_1 + C_2 = 1$$

Substituons $C_2 = -C_1$ dans la deuxième équation :

$$3C_1 - C_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2C_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{2}$$

$$C_2 = -\frac{1}{2}$$

La solution particulière est donc :

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{3x} - \frac{1}{2}e^x$$

3. Représentation graphique

Pour représenter graphiquement la solution $y(x) = \frac{1}{2}e^{3x} - \frac{1}{2}e^x$, nous traçons la courbe dans un repère.

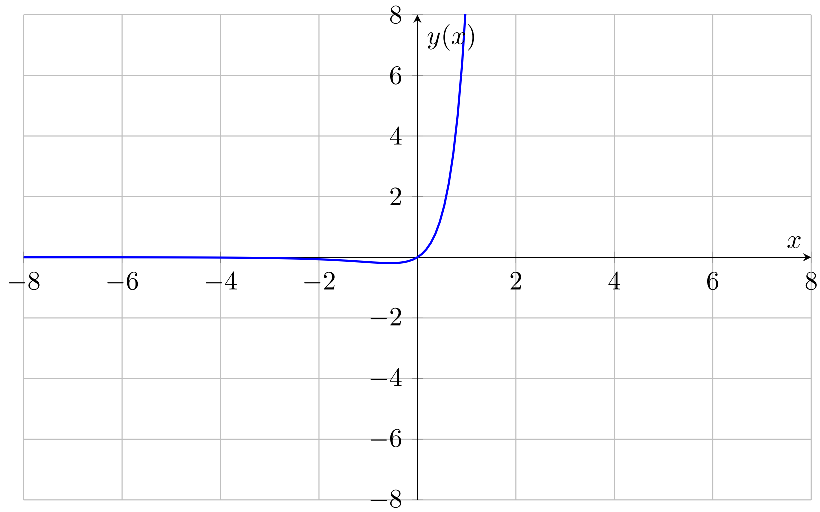

FIGURE 2 – Courbe représentative de $y(x) = \frac{1}{2}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{x}$.