

Rappels et compléments sur les fonctions numériques

Destiné aux élèves de Terminale S

Lycée de Dindéfelo

Présenté par M. BA

13 novembre 2024

A. LIMITES-CONTINUITÉ

I. Limites

1) Quelques limites usuelles

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0^+$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} 0^+ & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0^- & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty$$

Autre Notation

$$(x \rightarrow a^+) \Leftrightarrow (x \rightarrow a_{>}), \quad (x \rightarrow a^-) \Leftrightarrow (x \rightarrow a_{<})$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \text{ se note aussi } \lim_{x \rightarrow a_{>}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \text{ se note aussi } \lim_{x \rightarrow a_{<}} f(x) = -\infty$$

2) Quelques théorèmes sur les limites

a) Théorème de comparaison

Soient f et g trois fonctions définies sur un intervalle I au voisinage α , α étant un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\text{Si pour tout } x \in I : \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = +\infty \end{cases} \quad \text{alors } \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = +\infty$$

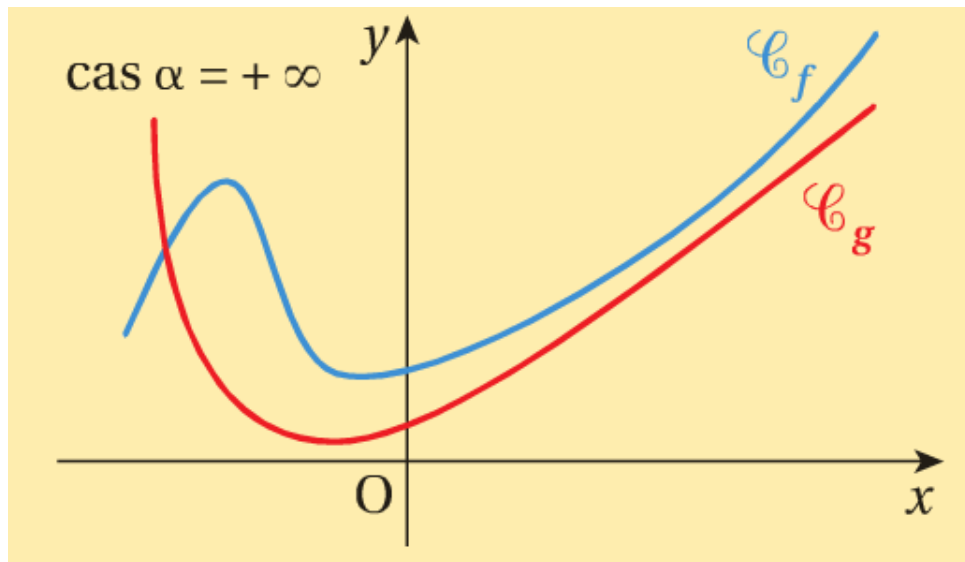


FIGURE 1 – Courbe de (Cf)

Si pour tout $x \in I$: $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = -\infty \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = -\infty$

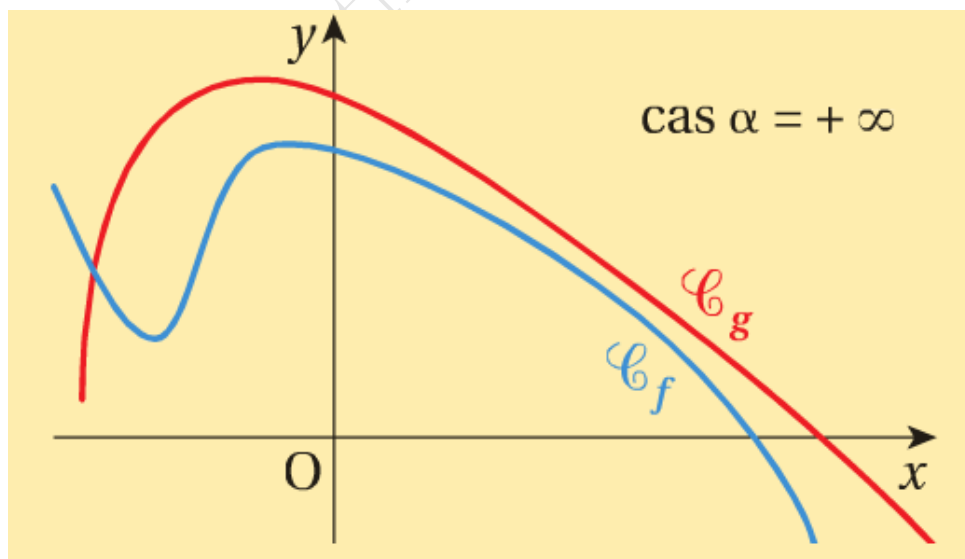


FIGURE 2 – Courbe de (Cf)

Exemple 1: :

Soit $f(x) = -x + \sin x$ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Solution 1:

Pour tout x , $\sin x \leq 1 \implies -x + \sin x \leq 1 - x \implies f(x) \leq 1 - x$.

Posons $g(x) = 1 - x$ donc $f(x) \leq g(x)$.

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Exemple 2:

Soit $g(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

Solution 2:

Posons $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Comme, pour tout $x \neq 0$, on a, $1 \leq \sqrt{1+x^2}$, on a, pour tout $x \neq 0$

$$f(x) \geq g(x) \text{ Or, } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

b) Théorème d'encadrement ou théorème des gendarmes

Soient f , g et h trois fonctions définies sur un intervalle I au voisinage α , α étant un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\text{Si } \forall x \in I \begin{cases} g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} h(x) = \ell, \end{cases} \quad \text{alors } \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \ell$$

Exercice d'application 1:

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x^2}$

Correction 1:

c) Limite et composition de fonctions

Soit α , β et γ des réels ou $\pm\infty$ On considère deux fonctions u et v telles que

$$\text{Si } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \alpha} u(x) = \beta \\ \lim_{x \rightarrow \beta} v(x) = \gamma \end{cases} \quad \text{alors } \lim_{x \rightarrow \alpha} v(u(x)) = \gamma$$

Exercice d'application 2:

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{9}{x} + 7}$

Correction 2:

On commence par la fonction la plus à l'intérieur :

Posons $u(x) = \frac{9}{x} + 7$ et $v(x) = \sqrt{\frac{9}{x} + 7}$

d) Théorème du changement de variable

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + t)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{X}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{X}\right)$$

Preuve[Exercice]

3) Limites de fonctions trigonométriques

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Exercice d'application 3:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \tan \frac{3}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{2}{x} \right)$$

Correction 3:

4) Interprétations géométriques des limites

Les limites peuvent être interprétées géométriquement de plusieurs manières en fonction du contexte. Voici quelques exemples typiques :

a) Asymptote horizontale (AH)[Parallèle à (ox)] :

Une fonction f a une asymptote horizontale en $y = \ell$ lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ On dit que : $y = \ell$ est une AH à (C_f) en $+\infty$

Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ on dit que : $y = \ell$ est une AH à (C_f) en $-\infty$

Cela signifie que la courbe de la fonction se rapproche de la droite $y = \ell$ à mesure que $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$.

Exemple 3: :

Déterminer l'AH de f

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$$

Solution 3: :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2.$$

La courbe de la fonction se rapproche de la droite $y = 2$ à mesure que $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$.

b) Asymptote verticale (AV)[Parallèle à (oy)] :

Soit $x = a \in \mathbb{R}$

si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ alors $x = a$ est une AV à C_f

Cela signifie que la courbe de la fonction tend vers l'infini lorsque x approche a par la droite (ou la gauche).

Exemple 4: :

Déterminer de l'AV de f tel que $f(x) = \frac{1}{x}$

Solution 4: :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty,$$

ce qui signifie que la fonction a une asymptote verticale en $x = 0$.

c) Asymptote oblique (AO) :

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ alors $y = ax + b$ est une AO à (C_f) en $+\infty$

Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ alors $y = ax + b$ est une AO à (C_f) en $-\infty$

Cette méthode est utilisée pour montrer que $y = ax + b$ est une AO

Exemple 5: :

Soit $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x}$ une fonction et (C_f) sa courbe représentative.

Montrer que $y = x + 2$ est AO à (C_f) en $\pm\infty$

Solution 5: :

$y = x + 2$ est AO à (C_f) en $\pm\infty$ si $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = 0$

En effet

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x + 2)) = 0.$$

La courbe de la fonction se rapproche de la droite $y = x + 2$ pour $x \rightarrow +\infty$.

d) Propriété 1 [Autre façon de montrer que $y = ax + b$ est une AO]

Soit f une fonction, a, b un réel et (C_f) sa courbe représentative .

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$$

alors $y = ax + b$ est une AO à (C_f) en $+\infty$.

NB :

Cette propriété reste valable lorsque $x \rightarrow -\infty$

On aura $y = ax + b$ est une AO à (C_f) en $-\infty$

Exercice d'application 4:

1) Soit $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}}$ Déterminer Df et montrer que $x = -1$ est une AV à (C_f) .

2) Soit $g(x) = \sqrt{4x^2 + 1} + 2x$

a) Montrer que $y = 0$ est une AH à (C_g) en $-\infty$

b) Montrer que $y = 4x$ est une AO à (C_g) en $+\infty$

Correction 4:

e) Branche parabolique de direction (oy)

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$$

alors (C_f) admet une branche parabolique de direction (oy) en $+\infty$

Remarque 1:

Cette propriété reste valable lorsque $x \rightarrow -\infty$

f) Branche parabolique de direction (ox)

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

alors (C_f) admet une branche parabolique de direction (ox) en $+\infty$

Remarque 2:

Cette propriété reste valable lorsque $x \rightarrow -\infty$

g) Branche parabolique de direction $y = ax$ (a réel)

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$$

alors (C_f) admet une branche parabolique de direction $y = ax$ en $+\infty$

Remarque 3:

Cette propriété reste valable lorsque $x \rightarrow -\infty$

Exercice d'application 5:

Étudier les branches infinies des courbes représentatives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{2x^3-1}{x-1}$

b) $g(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

c) $h(x) = x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

Correction 5:

II. Continuité

1) Définition

Soit f une fonction définie en x_0 on dit que f est continue en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Revoir

[Continuité à gauche et continuité à droite]

[Continuité à gauche et continuité à droite]

[Prolongement par continuité]

[Continuité sur un intervalle]

[Continuité de fonctions usuelles]

[Opérations sur les fonctions continues]

2) Compositions de deux fonctions continues

Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0 donc la composition de deux fonctions continues est une fonction continue.

Exercice d'application 6:

a) Soit $f(x) = \sqrt{|2x^5|}$

Étudier la continuité de f sur \mathbb{R}

b) Soit $f(x) = x\sqrt{1-x}$

Étudier la continuité de f sur son domaine de définition.

Correction 6:

a) **Continuité de $f(x) = \sqrt{|2x^5|}$ sur \mathbb{R}**

Domaine de définition :

La fonction $f(x) = \sqrt{|2x^5|}$ est définie pour tous les $x \in \mathbb{R}$, car l'expression $|2x^5|$ est toujours positive ou nulle, et la racine carrée d'un nombre positif ou nul est bien définie. Donc, $f(x)$ est définie sur \mathbb{R} .

Étude de la continuité :

La fonction $f(x)$ est composée des fonctions suivantes : - $g(x) = 2x^5$, une fonction polynomiale, qui est continue partout sur \mathbb{R} . - $h(x) = |x|$, la fonction valeur absolue, qui est continue partout. - $k(x) = \sqrt{x}$, la racine carrée, qui est continue pour $x \geq 0$.

Ainsi, $f(x)$ est continue sur \mathbb{R} , car c'est la composition de fonctions continues sur leur domaine respectif.

Conclusion : La fonction $f(x) = \sqrt{|2x^5|}$ est continue sur \mathbb{R} .

b) **Continuité de $f(x) = x\sqrt{1-x}$**

Domaine de définition :

La fonction $f(x) = x\sqrt{1-x}$ impose que $1-x \geq 0$, c'est-à-dire $x \leq 1$. Ainsi, la fonction est définie pour $x < 1$, sans autres contraintes. Le domaine de définition de $f(x)$ est donc $] -\infty, 1[$.

Étude de la continuité :

- La fonction $g(x) = x$ est continue partout sur \mathbb{R} .

- La fonction $h(x) = \sqrt{1-x}$ est continue pour $x < 1$, car la racine carrée est définie pour les valeurs positives ou nulles.

Ainsi, $f(x) = x\sqrt{1-x}$ est continue sur $] -\infty, 1[$.

Point de discontinuité possible en $x = 1$:

Lorsque x tend vers 1, la fonction $\sqrt{1-x}$ tend vers 0. À $x = 1$, la racine carrée devient $\sqrt{1-1} = 0$, donc $f(1) = 1 \times 0 = 0$. Cependant, la fonction n'est pas définie en $x = 1$, ce qui entraîne une discontinuité en $x = 1$.

Conclusion : La fonction $f(x) = x\sqrt{1-x}$ est continue sur $] -\infty, 1[$ et présente une discontinuité en $x = 1$.

3) Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

— L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

C'est à dire $\begin{cases} f \text{ est continue sur } I \\ I \text{ est un intervalle} \end{cases}$ alors $f(I)$ est un intervalle

— Lorsqu'une fonction f est continue et strictement monotone sur K , $f(K)$ est un intervalle de même nature que K et ses bornes sont les limites de f aux bornes de K .

Le tableau ci-dessous précise $f(K)$ suivant la nature de K et le sens de variation de f .

K	$f(K)$	$f(K)$
	f stictement croissante	f strictement décroissante
$[a; b]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
$[a; b[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$[\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a)[$
$]a; b]$	$] \lim_{x \rightarrow b^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow b^+} f(x)[$
$[a; +\infty[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a)[$
\mathbb{R}	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$

Exercice d'application 7:

Soit $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

Déterminer l'image par f des intervalles $[-2; 0]$ et $]1; +\infty[$

Correction 7:

Soit $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

$-D_f$:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

-Continuité de f :

La fonction $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ est une fonction rationnelle donc continue sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

-Monotonie de f :

Calculons la dérivée de f : $f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$

Pour tout $x \in D_f$ $f'(x) < 0$.

Cela signifie que la fonction f est strictement décroissante sur chaque intervalle de son domaine de définition, à savoir $] -\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$.

$$-f([-2; 0]) = [f(0); f(-2)] = [-1; 1]$$

$$-f(]1; +\infty[) =] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)[=]2; +\infty[$$

4) Théorème des valeurs intermédiaires

Si la fonction f est continue sur $[a; b]$ et si le réel m est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = m$ admet au moins une seule solution dans $[a; b]$.

Autrement dit, il existe au moins un réel c entre a et b tel que $f(c) = m$

Illustration graphique

[Image]

Exemple 6: :

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + x - 5$ continue sur $[-2; 4]$.

Solution 6: :

$$f([-2; 4]) = [\lim_{x \rightarrow -2} f(x); \lim_{x \rightarrow 4} f(x)] = [-11; 31].$$

D'après le théorème précédent, comme $5 \in [-11; 31]$ donc l'équation $f(x) = 5$ a une solution dans $[-2; 4]$.

NB

- Si $m = 0$ il suffit montrer que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow b} f(x) < 0$
- Il faut toujours commencer par montrer que f est continue.

Exercice d'application 8:

$$f(x) = 2x^5 + x^2 + x + 8$$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[1; 2]$.

Correction 8:

5) **Théorème d'existence et d'unicité d'une solution**

Si la fonction f est **continue** et **strictement monotone** (croissante ou bien décroissante) sur $[a; b]$. Pour tout réel m compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = m$ admet une **unique continue** dans $\alpha \in [a; b]$.

Illustration graphique

[Image]

Cas particulier

Si la fonction f réalise une bijection (continue et strictement monotone) de $[a; b]$ de plus si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[a; b]$.

Illustration graphique

[Image]

Exemple 7: :

$$\text{Soit } f(x) = x^3 + x + 1$$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-0, 8; -0, 6]$.

Solution 7: :

6) **Encadrement de la racine α à ϵ près**

Méthode de dichotomie (Approche par exemple)

Si f fonction **strictement continue** sur un intervalle $[a; b]$, telle que $f(a) \geq 0$ et $f(b) \leq 0$; alors il existe au moins un réel α dans l'intervalle $[a; b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

L'idée est alors de trouver le signe de f au **milieu** de $[a; b]$, et de distinguer les deux cas

- Si $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq 0$, alors α est dans l'intervalle $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$
- Sinon $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$, alors α est dans l'intervalle $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$

Dans les deux cas, on a trouvé un intervalle de longueur moitié dans lequel est située une racine α de l'équation $f(x) = 0$.

On recommence alors avec cet intervalle, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on trouve une approximation qui nous convienne.

Exercice d'application 9: Soit la fonction $f(x) = x^3 - 7x$

- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2; 4]$.
- Donner un encadrement de α à 0.1 près

Correction 9:

Méthode de balayage (Approche par exemple) [Exercice]

7) **Théorème d'existence d'une bijection et de sa réciproque**

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors f est une bijection de I vers $J = f(I)$. Dans ce cas, f admet une fonction réciproque f^{-1} qui est également continue et strictement monotone sur l'intervalle J , avec les propriétés suivantes :

- La fonction réciproque f^{-1} est telle que $f(f^{-1}(y)) = y$ pour tout $y \in J$ et $f^{-1}(f(x)) = x$ pour tout $x \in I$.

— La monotonie de f^{-1} est de même sens que celle de f .

Exemple 8: :

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = 2x + 3$$

- (a) La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} ?
- (b) La fonction f est-elle strictement monotone sur \mathbb{R} ?
- (c) La fonction f est-elle une bijection de \mathbb{R} vers \mathbb{R} ?
- (d) Déterminer l'expression explicite la fonction réciproque f^{-1} de la fonction f ?
- (e) La fonction réciproque f^{-1} est-elle continue et strictement monotone ?

Solution 8: :

- (a) Oui, la fonction $f(x) = 2x + 3$ est continue sur \mathbb{R} car elle est une fonction affine (polynomiale de degré 1).
- (b) Oui, la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} , car sa dérivée est $f'(x) = 2 > 0$, ce qui signifie que la pente est positive.
- (c) Oui, comme f est continue et strictement croissante, elle est bijective de \mathbb{R} vers \mathbb{R} .
- (d) Pour trouver la fonction réciproque f^{-1} , nous résolvons l'équation $y = 2x + 3$ pour x :

$$y = 2x + 3 \implies x = \frac{y - 3}{2}$$

Donc, la fonction réciproque est $f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$.

- (e) Oui, la fonction réciproque $f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$ est également continue et strictement croissante sur \mathbb{R} car elle est une fonction affine avec une pente positive.
- (f) Calculer $f^{-1}(5)$

NB : Il n'est pas toujours possible de déterminer l'expression explicite de f^{-1}

8) Calcul de $f^{-1}(y_0)$ sans connaître l'expression de f^{-1}

Pour calculer $f^{-1}(y_0)$, on résout $f(x) = y_0$.

Exemple 9: :

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + x - 1}$. On admet que f est une bijection de $[0; +\infty[$ vers $[-1; +\infty[$
Calculer $f^{-1}(2)$

Solution 9: :

B. Dérivabilité

I. Dérivation

1. Notion de nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0

f est dérivable en x_0 ou f admet un nombre dérivé en x_0 si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \text{ avec } (\ell \in \mathbb{R})$$

ℓ est appelé le nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$.

On a alors :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Exemple 10: :

Soit $f(x) = \frac{x}{2x+1}$ Etudier la dérivabilité de f en -1 .

Solution 10: :

2. Dérivabilité à gauche-Dérivabilité à droite

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0 et ℓ un réel.
 f est dérivable à gauche de x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$$

f est dérivable à droite de x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$$

f est dérivable en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$$

NB : On note $f'_g(x)$ la dérivé à gauche et $f'_d(x)$ la dérivé à droite

Exemple 11: :

$f(x) = x|x-1|$ f est-elle dérivable en 1 ?

Solution 11: :

3. Interprétation géométrique du nombre dérivé

- Si f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0)$ existe et C_f admet une tangente au point d'abscisse x_0
d'équation : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

La limite	Dérivabilité en x_0	Interprétation géométrique : (C_f) admet
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \ (a \neq 0)$	f est dérivable en x_0	Une tangente au point $A(x_0; f(x_0))$ de coefficient directeur a
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$		Une tangente horizontale au point $A(x_0; f(x_0))$
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \ (a \neq 0)$	f est dérivable à droite en x_0	Une demi-tangente à droite au point $A(x_0; f(x_0))$ de coefficient directeur a
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$		Une demi-tangente horizontale à droite au point $A(x_0; f(x_0))$
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$	f n'est pas dérivable à droite en x_0	Une demi-tangente verticale à droite au point $A(x_0; f(x_0))$ dirigée vers le bas
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$		Une demi-tangente verticale à droite au point $A(x_0; f(x_0))$ dirigée vers le haut
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \ (a \neq 0)$	f est dérivable à gauche en x_0	Une demi-tangente à gauche au point $A(x_0; f(x_0))$ de coefficient directeur a
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$		Une demi-tangente horizontale à gauche au point $A(x_0; f(x_0))$
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$	f n'est pas dérivable à gauche en x_0	Une demi-tangente verticale à gauche au point $A(x_0; f(x_0))$ dirigée vers le haut
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$		Une demi-tangente verticale à gauche au point $A(x_0; f(x_0))$ dirigée vers le bas

4. Dérivabilité sur un intervalle

f est dérivable sur $]a; b[$ si et seulement si f est dérivable en tout point de $]a; b[$.

Propriété :

- Toute fonction polynôme est dérivable sur \mathbb{R} .
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.
- $|f|$ est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable sur I et $f(x) \neq 0 \forall x \in I$
- \sqrt{f} est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable sur I et $f(x) > 0 \forall x \in I$

5. Dérivée d'une fonction composée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle K contenant $f(I)$.

- Si f est dérivable en un élément x_0 de I et g dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a : $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$
- Si f est dérivable sur I et g dérivable sur K alors $g \circ f$ est dérivable sur I et on a : $(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$

6. Dérivée de la fonction réciproque

Soit f une fonction dérivable et bijective de $I \rightarrow J$ et f^{-1} la bijection réciproque donc $f^{-1}'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ avec $f'(x) \neq 0$

En effet :

$$\begin{aligned} f : I &\rightarrow J & f^{-1} : J &\rightarrow I \\ f : x &\mapsto y = f(x) & y &\mapsto x = f^{-1}(y) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f(x) = x &\implies (f^{-1} \circ f(x))' = x' \\ &\implies f^{-1}'(f(x)) \times f'(x) = 1 \\ &\implies f^{-1}'(y) \times f'(x) = 1 \\ &\implies f^{-1}'(y) = \frac{1}{f'(x)} \end{aligned}$$

Propriété :

$$f^{-1}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \text{ avec } f'(x) \neq 0 \text{ Inégalité des accroissements finis (IAF)}$$

7. Inégalité des accroissements finis (IAF)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|f'(x)| \leq M$.

Alors pour tout a et $b \in I$, on a : $|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$

Exemple 12:

Démontrer que pour tout réels a et b $|\cos b - \cos a| \leq |b - a|$

Solution 12:

C. Primitives

1. Définition

Soit F une fonction dérivable sur un intervalle I et soit f une fonction définie et continue sur I .

On dit que F est une primitive de f sur I si pour tout x élément de I

On a : $F'(x) = f(x)$

F est une primitive de f sur I si f est la dérivée de F sur I .

2. Théorème (admis)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I .

Remarque :

Si f admet une primitive sur I alors elle en admet une infinité.

3. Théorème

Deux primitives d'une même fonction sur un même intervalle diffèrent d'une constante.

Donc si F et G sont des primitives de f sur I alors il existe une constante réelle k telle que pour tout x élément de I $F(x) = G(x) + k$

Pour la preuve voir la variation des fonctions avec l'utilisation des dérivées.

On en déduit que :

Chacune des primitives de f sur I est déterminée par sa valeur en un point de I .

Remarque :

Toute primitive de f sur I est dérivable sur I .

Il serait utile de connaître les résultats figurant sur le tableau suivant :

$I =$ intervalle de définition de f	Remarques ou restrictions	Fonction f	Primitive F où k est une constante réelle
$I \subset \mathbb{R}$		$x \mapsto 0$	$x \mapsto k$
$I \subset \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto a$	$x \mapsto ax + k$
$I \subset \mathbb{R}$	n entier naturel	$x \mapsto x^n$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
$I \subset \mathbb{R}^*$	n entier relatif, $n \neq -1$	$x \mapsto x^n$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
$I \subset \mathbb{R}^+$	n réel $n \neq -1$	$x \mapsto x^n$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
$I \subset \mathbb{R}^*$		$x \mapsto \frac{1}{x^n}$	$x \mapsto -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + k$
$I \subset \mathbb{R}^+$		$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + k$
$I \subset \mathbb{R}$		$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + k$
$I \subset \mathbb{R}$		$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + k$
$I \subset \mathbb{R}$		$x \mapsto \sin(ax + b)$	$x \mapsto -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + k$
$I \subset \mathbb{R}$		$x \mapsto \cos(ax + b)$	$x \mapsto \frac{1}{a} \sin(ax + b) + k$
$I \subset \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$		$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x + k$
$I \subset \mathbb{R}$		$x \mapsto 1 + \tan^2 x$	$x \mapsto \tan x + k$
$I \subset \mathbb{R}^+$	x positif	$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{2}{3}x^{3/2} + k$
$I \subset \mathbb{R}$		$x \mapsto (ax + b)^n$	$x \mapsto \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + k$
$I \subset \mathbb{R}$	Avec les mêmes contraintes sur n et sur $(ax + b)$		

TABLE 1 – Tableau des primitives

Lorsque U désigne une fonction dérivable sur I , positive et non nulle dans certains cas, on a :

$$\frac{U'}{U^2} \text{ a pour primitives } -\frac{1}{U} + k$$

$$U' \times U^n \text{ a pour primitives } \frac{U^{n+1}}{n+1} + k$$

$$U' \times \sqrt{U} \text{ a pour primitives } \frac{2}{3}U\sqrt{U} + k$$

$$\frac{U'}{\sqrt{U}} \text{ a pour primitives } 2\sqrt{U} + k$$

$$\frac{U'}{U^n} \text{ peut être ramenée à la forme } U' \times U^{-n}$$

Exercice d'application 10:

1. Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes, sur un intervalle bien choisi :

$$\begin{array}{lll} f_1(x) = 5x^3 - 3x + 7 & f_2(x) = 2\cos(x) - 3\sin(x) & f_3(x) = \\ f_4(x) = \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x^4} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} & f_5(x) = \frac{x+5}{x^2} & f_6(x) = \frac{x^2}{5} + \frac{1}{6} \\ f_3(x) = \sin(2x) & f_4(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) & f_5(x) = (2x+1)^2 \\ f_6(x) = \frac{3}{\sqrt{5x+1}} & f(x) = \frac{x}{1+x^2} & m(x) = 3x\sqrt{1+x^2} \end{array}$$

2. Reconnaissance de formes

$$\begin{array}{ll} 1. f(x) = (3x-1)(3x^2-2x+3)^3, I = \mathbb{R} & 2. f(x) = \frac{1-x^2}{(x^3-3x+2)^3}, I =]-\infty, -2[\\ 3. f(x) = \frac{(x-1)}{\sqrt{x(x-2)}}, I =]-\infty, 0[& 4. f(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, I =]1, +\infty[. \end{array}$$

Correction 10:

D.ÉTUDES DE FONCTIONS

1. Courbe de la fonction réciproque

Soit f une bijection de I vers J et f^{-1} sa bijection réciproque. La courbe de f (C_f) et la courbe de f^{-1} ($C_{f^{-1}}$) sont symétriques par rapport à la première bissectrice

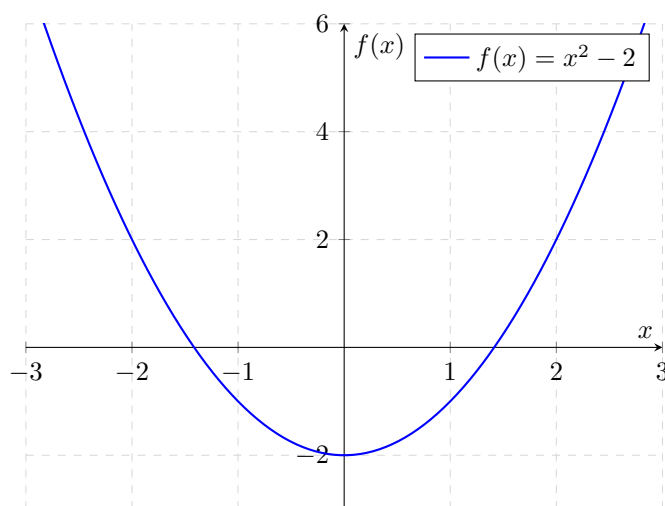
(Δ) d'équation $y = x$.

2. Fonction paire

Soit f une fonction et D_f son ensemble de définition. La fonction f est dite paire lorsque, pour tout x appartenant à D_f , on a :

$$-x \in D_f \text{ et } f(-x) = f(x).$$

NB La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

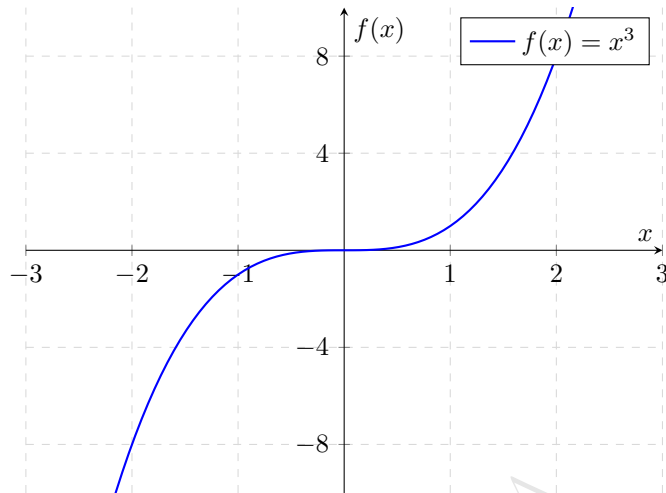


3. Fonction impaire

Soit f une fonction et D_f son ensemble de définition. f est dite impaire lorsque, pour tout x appartenant à D_f , on a :

$$-x \in D_f \text{ et } f(-x) = -f(x).$$

NB : La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.



4. Axe de symétrie

La droite d'équation cartésienne $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe C_f si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- $(\forall x \in D_f); (2a - x) \in D_f$
- $(\forall x \in D_f); f(2a - x) = f(x)$

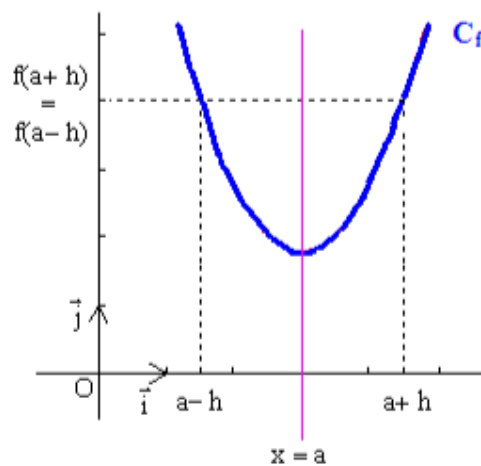


FIGURE 3 – centreSymetrie

Cas particulier Si $a = 0$; f est une fonction paire

Exemple 13:

$f(x) = 2x^2 - 2x + 1$ Montrer que $x = \frac{1}{2}$ est axe de symétrie pour la courbe C_f .

Solution 13:

5. Centre de symétrie

Le point $I(a; b)$ est un centre de symétrie de la courbe C_f si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- $(\forall x \in D_f); (2a - x) \in D_f$
- $(\forall x \in D_f); f(2a - x) + f(x) = 2b$

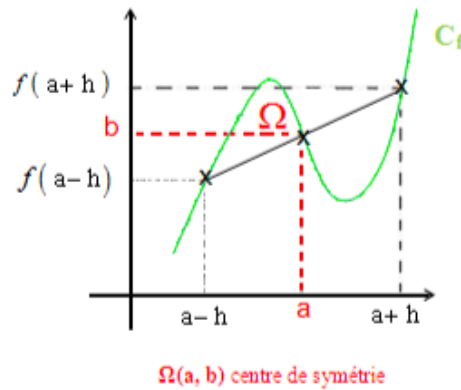


FIGURE 4 – centreSymetrie

Cas particulier Si $a = b = 0$; f est une fonction impaire

Exemple 14:

$f(x) = \frac{3x+1}{2x-6}$ Montrer que $I(3; \frac{3}{2})$ est centre de symétrie pour la courbe C_f .

Solution 14:

6. Périodicité

Soit f une fonction et D_f son ensemble de définition. Soit T un nombre réel strictement positif. On dit que

T est une période de f lorsque, pour tout x appartenant à D_f , on a :

$$— x + T \in D_f \quad (1)$$

$$— f(x + T) = f(x) \quad (2)$$

Le plus petit réel T strictement positif qui vérifie (1) et (2) est appelé la période de f .

Exemple 15:

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction sinus est périodique de période $T = 2\pi$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$— x + 2\pi \in \mathbb{R} \text{ (ce qui vérifie la condition (1))},$$

$$— f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin(x) = f(x) \text{ (ce qui vérifie la condition (2))}.$$

Ainsi, 2π est la période de $f(x) = \sin(x)$.

7. Position relative d'une courbe et de son asymptote $(\Delta) : y = ax + b$

Soient f une fonction et (C_f) sa courbe représentative. $(\Delta) : y = ax + b$.

Posons $g(x) = f(x) - (ax + b)$.

— Si $g(x) > 0 \forall x \in K$, alors (C_f) est au-dessus de (Δ) sur K .

— Si $g(x) < 0 \forall x \in K$, alors (C_f) est au-dessous (ou en dessous) de (Δ) sur K .

— Si $g(x) = 0 \forall x \in K$, alors (C_f) et (Δ) se coupent sur K .

Exemple 16:

Considérons la fonction $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$ et son asymptote oblique $(\Delta) : y = 2x$.

Calculons $g(x) = f(x) - (2x) = 2x + \frac{1}{x} - 2x = \frac{1}{x}$.

— Pour $x > 0$, $g(x) = \frac{1}{x} > 0$, donc (C_f) est au-dessus de (Δ) pour $x > 0$.

— Pour $x < 0$, $g(x) = \frac{1}{x} < 0$, donc (C_f) est en dessous de (Δ) pour $x < 0$.

— $g(x)$ ne s'annule jamais (sauf à l'infini), donc (C_f) et (Δ) ne se coupent pas.

Ainsi, la courbe de $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$ est au-dessus de l'asymptote $y = 2x$ pour $x > 0$ et en dessous pour $x < 0$, sans intersection entre (C_f) et (Δ) .

8. Position relative d'une courbe et de sa tangente au point M_0 d'abscisse x_0

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle K et x_0 un élément de K .

On désigne par (C_f) sa courbe représentative et par (T) la tangente à (C_f) au point M_0 d'abscisse x_0 .

(T) a pour équation : $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

— Si $f'' > 0 \forall x \in K$, alors (C_f) est au-dessus de (T) sur K . On dit que f est convexe sur K .

— Si $f'' < 0 \forall x \in K$, alors (C_f) est au-dessous (ou en dessous) de (T) sur K . On dit que f est concave sur K .

— Si f'' s'annule et change de signe en x_0 , alors la droite (T) traverse la courbe (C_f) en M_0 . On dit que M_0 est un point d'inflexion de (C_f) .

Exemple 17:

Considérons la fonction $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ et étudions sa tangente au point M_0 d'abscisse $x_0 = 1$.

1. Calculons $f(x_0)$, $f'(x_0)$ et $f''(x_0)$:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

En prenant $x_0 = 1$:

$$f(1) = 1^3 - 3 \times 1^2 + 2 \times 1 = 0$$

$$f'(1) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 2 = -1$$

$$f''(1) = 6 \times 1 - 6 = 0$$

2. Équation de la tangente (T) en M_0 :

L'équation de la tangente au point $M_0(1, 0)$ est donnée par :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0 + (-1)(x - 1) = -x + 1$$

3. Analyse de la concavité :

Pour $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, on a $f''(x) = 6x - 6$, qui s'annule en $x = 1$. En étudiant le signe de $f''(x)$ de part et d'autre de $x = 1$:

- Pour $x < 1$, $f''(x) < 0$, donc f est concave.

- Pour $x > 1$, $f''(x) > 0$, donc f est convexe.

Ainsi, $f''(x)$ change de signe en $x_0 = 1$, ce qui signifie que M_0 est un point d'inflexion de la courbe (C_f) . La tangente (T) traverse la courbe en ce point.

PROBLÈME

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sqrt{1-x^2} & \text{si } x > 0 \\ -x + \sqrt{x^2 - 2x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1) Déterminer D_f , les limites aux bornes et préciser les asymptotes et branches infinies éventuelles.

2) Étudier la dérivabilité de f en 0 et 1 ; interpréter géométriquement les résultats obtenus.

3) Calculer $f'(x)$ là où f est définie, puis dresser le tableau de variation de f .

4) Tracer la courbe de f .

5) Soit h la restriction de f à l'intervalle $] -\infty; 0]$.

(a) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité et le tableau de variation.

(b) Sans utiliser l'expression de $h^{-1}(x)$, calculer $(h^{-1})'(2)$.

(c) Déterminer explicitement h^{-1} .

(d) Tracer la courbe de h^{-1} dans le même repère que celle de f .