TD Sur Le Calcul Intégral Ts2

Destiné aux élèves de Terminale S
Lycée de Dindéfelo
Présenté par M. BA

12 juin 2024

Calcul d'intégral par la recherche d'une primitive

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$$\mathrm{I} = \int_1^3 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \;; \qquad \mathrm{J} = \int_2^3 \frac{2}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \;;$$

$$\mathrm{K} = \int_{-1}^2 (x+1)(x^2+2x-7)\,\mathrm{d}x \;; \qquad \mathrm{L} = \int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{t+1}$$

$$\mathrm{M} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x\,\mathrm{d}x \;; \qquad \mathrm{N} = \int_{-3}^3 x\,\mathrm{e}^2\,\mathrm{d}x \;;$$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

$$1)\ \int_0^5 (x^4-x^2)\,\mathrm{d}x \qquad 2)\ \int_1^2 (2x^2+5x-1)\,\mathrm{d}x$$

$$3)\ \int_0^4 (2x^5+2x^3-1)\,\mathrm{d}x \qquad 4)\ \mathrm{J} = \int_2^5 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$$

$$5)\ \int_1^2 (x+5)^4\,\mathrm{d}x \qquad 6)\ \int_1^5 \left(x^2+\frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$7)\ \int_0^1 \left(2x^2-1-\frac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x \qquad 8)\ \int_{-1}^2 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$9)\ \int_{-1}^2 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2+5}}\,\mathrm{d}x \qquad 10)\ \int_{-1}^2 (x^3-5^2+1)^4(3x^2-10)\,\mathrm{d}x$$

$$11)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - 3\cos x + 1)\,\mathrm{d}x \qquad 12)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x + \cos 3x)\,\mathrm{d}x$$

$$13)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \qquad 14)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^2 x\,\mathrm{d}x$$

15) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x}$ 16) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + \cos x - 1)\sin x\,\mathrm{d}x$

17) $\displaystyle\int_1^{x} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$, $x > 0$ 18) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x + \tan^3 x)\,\mathrm{d}x$

19) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,\mathrm{d}x$ 20) $\displaystyle\int_0^{3} \frac{x^2+2x}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x$

21) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$ 22) $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 4} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$

23) $\displaystyle\int_0^{2} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ 24) $\displaystyle\int_1^{2} \sqrt{3x-1}\,\mathrm{d}x$

25) $\displaystyle\int_1^{3} \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$ 26) $\displaystyle\int_{-1}^{4} \frac{x^3+1}{(x^4+4x+7)^3}\,\mathrm{d}x$ 27) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + x\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

Exercice 3

Déterminer les réels a , b et c puis calculer I.

1) $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2} = a + \dfrac{b}{x+2}$ $\quad I = \displaystyle\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$

2) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x-3} = ax + b + \dfrac{c}{x-3}$ $\quad I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

3) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-5x+4} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x-4}$ $\quad I = \displaystyle\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$

4) $f(x) = \dfrac{x-2}{(x-1)^2} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{(x-1)^2}$ $\quad I = \displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x$

5) $f(x) = \dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$ $\quad I = \displaystyle\int_1^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}$

6) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x-2}{\mathrm{e}^x+1} = a + \dfrac{b\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ $\quad I = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)\mathrm{d}x$

Exercice 4

Calculer la fonction dérivée de la fonction $f : x \mapsto (ax^2+bx+c)\sqrt{x^2+2}$, a , b , c étant des constantes.

En déduire le calcul de l'intégrale

$$\int_{-1}^{4} \frac{6x^3 + 2x^2 + 9x + 2}{\sqrt{x^2 + 2}} \, \mathrm{d}x$$

Exercice 5

Soit :

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} \, \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} \, \mathrm{d}x$$

Calculer $I + J$ et $I - J$.

En déduire I et J.

Linéarisation

Exercice 6

Calculer les intégrales suivantes après linéarisation :

1) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x \mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \mathrm{d}t$

4) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin^2 u \cos^2 u \mathrm{d}u$

5) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x \cos 3x \cos 5x \mathrm{d}x$

6) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x \sin^3 x \mathrm{d}x$

Intégration par parties

Exercice 8

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou plusieurs intégrations par parties

1) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{2\mathrm{e}} x^3 \ln x \mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln x^2 \mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{2\mathrm{e}} x(\ln x)^2 \mathrm{d}x$ (double intégration par parties)

4) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$

5) $\displaystyle\int_1^2 x^2\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ (double intégration par parties)

6) $\displaystyle\int_0^1 (x-3)\mathrm{e}^{2x} \mathrm{d}x$

7) $\displaystyle\int_0^2 (t^2+1)\mathrm{e}^t \mathrm{d}t$ (double intégration par parties)

8) $\displaystyle\int_0^{\pi} (x+2)\sin x \mathrm{d}x$

9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin x \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^x \cos x \mathrm{d}x$ (double intégration par parties)

Exercice 9

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou plusieurs intégrations par parties

1) $\displaystyle\int_1^a x^2 \ln x^2 \mathrm{d}x \quad (a > 0)$

2) $\displaystyle\int_0^t (3x^2 + x + 1) \cos x \mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int_1^t \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} \mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \mathrm{d}x$

5) $\displaystyle\int_1^x t^n \ln t \mathrm{d}t \quad (x > 0,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{-1\})$

6) $\displaystyle\int_1^1 (x^2 + x + 1) \sin 2x \mathrm{d}x$

7) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + 1) \cos^2 x \mathrm{d}x$

8) $\displaystyle\int_{-1}^1 (1 + x)^2 \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$

9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{t \sin t}{\cos^3 t} \mathrm{d}x$

10) $\displaystyle\int_1^\lambda \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \mathrm{d}x \quad (\lambda > 1)$

11) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x \ln(\cos x + 1) \mathrm{d}x$

12) $\displaystyle\int_0^2 x^2 \mathrm{e}^{|x-1|} \mathrm{d}x$

13) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{e}^{-x} \sin^2 x (1 + \cos^2 x) \mathrm{d}x$

Exercice 10

Soit l'intégrale

$$I_n = \int_1^{\lambda} (\ln x)^n \mathrm{d}x, \quad \lambda > 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que l'on a :

$$I_n = \lambda(\ln \lambda)^n - n\, I_{n-1}.$$

2) Montrer alors que :

$I_n = \lambda[(\ln \lambda)^n - n(\ln \lambda)^{n-1} + n(n-1)(\ln \lambda)^{n-2} + \cdots + (-1)^n \times n!] - (-1)^n \times n!$

3) Calculer I_0, I_1, I_2 et I_3.

Exercice 11

Soit l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^5 x}$$

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^{2n+1} x}$$

1) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall\, x \in \left[0\,;\ \frac{\pi}{4}\right]\ ,\ \frac{1}{\cos x} = \frac{a\cos x}{1-\sin x} + \frac{b\cos x}{1+\sin x}$$

En déduire le calcul de I_0. 2) Montrer, par une intégration par parties que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$2nI_n = (2n-1)\ln -1 + \frac{2^n}{\sqrt{2}}.$$

3) En déduire le calcul de I.