

Probabilité

Lycée de Dindéfelo
Mr BA

22 mai 2024

I. Vocabulaire Et Notation

1. Expérience aléatoire

Une expérience est dite aléatoire si l'issue est impossible à prévoir.

Exemple

Le lancer d'une pièce de monnaie est une expérience aléatoire car on ne peut pas prédire avec certitude si elle va tomber sur pile ou face.

2. Univers des possibles

L'univers des possibles noté Ω désigne l'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire.

Cet ensemble comprend tous les résultats que l'expérience pourrait produire

Exemple

- Dans le lancé d'un dé à six faces, l'univers des possibles est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, car ce sont les six valeurs que le dé peut afficher.
- Dans le lancé d'un dé à six faces, l'univers des possibles est $\Omega = \{pile, face\}$

3. Évènement

Soit $\Omega = \{pile, face\}$ l'univers d'une expérience aléatoire.

On appelle évènement une partie ou un sous ensemble de $\Omega = \{pile, face\}$

Exemple

Soit un dé numéroté de 1 à 6.

l'univers de de cette expérience est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{1, 5, 2\}$ est un évènement de $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{6, 4\}$ est un évènement de $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

4. Évènement Élémentaire

Soit Ω un univers associé à l'expérience aléatoire.
On appelle évènement élémentaire tout singleton de Ω

Exemple

Un dé numéroté de 1 à 6.
 $A = \{1\}$ et $B = \{3\}$ sont des évènements élémentaires

5. Évènement réalisé

Un évènement est réalisé s'il contient le résultat de l'expérience.

Exemple

Soit un dé numéroté de 1 à 6.
 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
 $A = \{1, 2, 6\}$ est un évènement de Ω .
Si au cours d'un lancé le numéro 2 apparaît on dit que A est réalisé.

6. Évènement certain

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. Un évènement est dit certain s'il correspond à l'ensemble de l'univers, c'est-à-dire s'il inclut toutes les issues possibles de l'expérience.

Exemple

Supposons que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ soit l'univers des possibles lors du lancer d'un dé à six faces.
L'évènement avoir A : "Avoir une face inférieure à 7" est certain.

7. Évènement impossible

Un évènement est considéré comme impossible s'il correspond à l'ensemble vide, c'est-à-dire s'il ne contient aucune issue possible de l'expérience aléatoire.

Exemple

Supposons que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ soit l'univers des possibles lors du lancer d'un dé à six faces.

Un événement impossible serait un événement qui ne peut pas se produire. Par exemple, si nous définissons l'événement $A = \{7\}$, cet événement est impossible car le dé ne peut afficher que des valeurs de 1 à 6 incluses.

En notation mathématique :
 $A = \{7\}$

8. Évènement contraire

L'évènement contraire d'un événement A dans Ω , noté \overline{A} , est l'ensemble des issues de l'expérience aléatoire qui ne sont pas dans A .

On dit que \overline{A} est le complémentaire de A dans Ω et on note $\overline{A} = C_{\Omega}^A$

Exemple

Supposons que lors du lancer d'un dé à six faces, A représente l'évènement "obtenir un nombre pair". Alors, l'évènement contraire, \overline{A} , serait "obtenir un nombre impair".

En notation mathématique :

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$\overline{A} = \{1, 3, 5\}$$

Ainsi, si A est l'évènement "obtenir un nombre pair", alors \overline{A} est l'évènement "obtenir un nombre impair".

Remarque

Si A et \overline{A} sont deux événements contraires alors :

$$A \cap \overline{A} = \emptyset; A \cup \overline{A} = \Omega$$

8. Évènements incompatibles

Deux événements sont dits incompatibles s'ils ne peuvent pas se produire simultanément, c'est-à-dire s'ils n'ont aucune issue en commun.

Exemple

Supposons que dans un lancer de dé à six faces, nous définissons les événements suivants :

$$A = \{\text{lancer un nombre pair}\} = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{\text{lancer un nombre impair}\} = \{1, 3, 5\}$$

Comme aucun nombre ne peut être à la fois pair et impair, les événements A et B sont incompatibles.

Remarque

Si A et B sont deux événements incompatibles alors : $A \cap B$

II. Généralités sur la probabilité

1. Probabilité d'un événement

Considérons un dé numéroté de 1 à 6.

Soit Ω l'univers de cette expérience, donné par $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Supposons l'évènement $A = \{5\}$. Il y a une chance sur 6 de réaliser cette possibilité.

La probabilité de l'évènement A est donc égale à $\frac{1}{6}$, que l'on note

$$P(A) = \frac{1}{6}.$$

De même, considérons l'évènement $B = \{1, 6\}$. Il y a deux chances sur 6 de réaliser l'évènement B .

La probabilité de l'évènement B est donc égale à $\frac{2}{6}$. On note $P(B) = \frac{1}{3}$.

2. Probabilité uniforme

Lorsque les événements **élémentaires** ont la même probabilité, on dit que on a une **équiprobabilité**.

Une probabilité est dite uniforme si tous les évènements élémentaire sont équiprobables.

3. Formule de probabilité uniforme

Soit Ω un univers et p une probabilité définie dans cet univers.

$\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ on suppose que on a une probabilité uniforme. Donc $p\{w_1\} = p\{w_2\} = \dots = p\{w_n\}$

Comme Ω est formé des évènements w_1, w_2, \dots, w_n Donc

$$p\{\Omega\} = p\{w_1\} + p\{w_2\} + \dots + p\{w_n\}$$

Puisqu'il y a équiprobabilité $p\{\Omega\} = n \times p\{w_1\}$

Or Ω est un évènement certain donc $p(\Omega) = 1$

Ainsi, $p\{w_1\} = \frac{1}{n}$ avec $n = \text{card}(\Omega)$, $p\{w_1\} = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$

De façon général,

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d'issues favorables à } A}{\text{Nombre total d'issues dans } \Omega}$$

Autrement dit,

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Exercice d'application

Supposons que vous lanciez un dé équilibré à six faces. Calculez la probabilité des événements suivants :

1. Événement A : Obtenir un nombre pair.
2. Événement B : Obtenir un nombre impair.
3. Événement C : Obtenir un nombre inférieur ou égal à 3.

Solution

Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire on a

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $\text{card}(\Omega) = 6$

1. Pour l'événement A (obtenir un nombre pair), les issues favorables sont 2, 4 et 6. On a $A = \{2, 4, 6\}$ et $\text{card}(A) = 3$

Ainsi, la probabilité de l'événement A est :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2. Pour l'événement B (obtenir un nombre impair), les issues favorables sont 1, 3 et 5. On a $B = \{1, 3, 5\}$ et $\text{card}(B) = 3$. Ainsi, la probabilité de l'événement B est également :

$$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3. Pour l'événement C (obtenir un nombre inférieur ou égal à 3), les issues favorables sont 1, 2 et 3. On a $C = \{1, 2, 3\}$ et $\text{card}(C) = 3$. La probabilité de l'événement C est donc :

$$P(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, dans tous les cas, la probabilité est $\frac{1}{2}$, ce qui est conforme à la notion de probabilité uniforme pour un dé équilibré à six faces.

4. Définition de Probabilité

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoires.

On appelle probabilité sur un univers Ω toute application $p : \Omega \rightarrow [0; 1]$ vérifiant :

1. $p(\Omega) = 1$
2. Si A et B deux évènements de Ω et $A \cap B = \emptyset \implies p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Conséquence

1. $\forall A$ la probabilité de l'évènement est compris entre $[0, 1]$
 $0 \leq p(A) \leq 1$
2. $p(\emptyset) = 0$
3. $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
4. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Exercice 1

On considère l'ensemble E des entiers de 20 à 40. On choisit l'un de ses nombres au hasard.

- A est l'événement : « le nombre est multiple de 3 »
- B est l'événement : « le nombre est multiple de 2 »
- C est l'événement : « le nombre est multiple de 6 ».

Calculer $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$, $p(A \cap B)$, $p(A \cup B)$, $p(A \cap C)$ et $p(A \cup C)$.

III. Probabilité conditionnelle et indépendance

A. Probabilité conditionnelle

1. Définition

Soit Ω un univers, associe à une expérience aléatoire et p la probabilité définie dans cet univers. A et B deux évènements de Ω tel que $p(B) \neq 0$

$$p_{\frac{A}{B}} = p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(B)}$$

Exemple

Soit une expérience aléatoire comportant les évènements A et B. On sait que $P(A)=0,4$, $P(B)=0,7$ et $P(A \cap B)=0,2$. Calcule $p_B(A)$ et $p_A(B)$.

Pour calculer la 1^{re} probabilité conditionnelle, on utilise la formule.

$$p_{A/B} = p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(B)}$$

Exemple

Soit une expérience aléatoire comportant les évènements A et B.

On donne $P(A)=0,4$, $P(B)=0,7$ et $P(A \cap B)=0,2$. Calcule $p_B(A)$ et $p_A(B)$.

Pour calculer la 1^{re} probabilité conditionnelle ($p_B(A)$), on utilise la formule.

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

$$p_B(A) = \frac{0,2}{0,7}$$

$$p_B(A) = \frac{2}{7}$$

Pour calculer la 2^e probabilité conditionnelle, on utilise aussi la formule. Il est important de remarquer que l'intersection est **commutative**, donc Pour calculer la 2^e probabilité conditionnelle ($p_A(B)$), on utilise aussi la formule.

Il est important de remarquer que l'intersection est **commutative**, donc $p(A \cap B) = p(B \cap A)$

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

$$p_A(B) = \frac{0,2}{0,4}$$

$$p_A(B) = \frac{1}{2}$$

$$p_A(B) = 0,5$$

B. Arbre pondéré

Un arbre pondéré permet de représenter une situation probabiliste qui comporte des probabilités conditionnelles.

Exemple

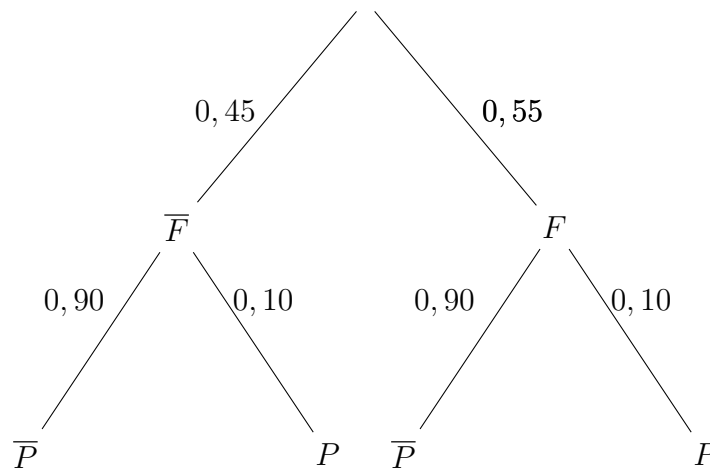
Dans un lycée comportant 800 élèves, 55% sont des filles. Parmi les filles, 10% sont des pensionnaires. Ce pourcentage est le même chez les garçons.

On choisit un élève au hasard dans ce lycée et admet que ces choix sont équiprobables.

On choisit un élève au hasard dans ce lycée et on admet que ces choix sont équiprobables.

On note F (resp. P) l'événement "l'élève choisi est une fille (resp. une pensionnaire)".

On obtient l'arbre probabiliste suivante :



- La somme des probabilités des deux premières branches (c'est-à-dire issues de la racine) est 1.
- La somme des probabilités des probabilités des branches issues du noeud F est 1.
- La somme des probabilité des probabilité des branches issues du noeud \overline{F} est 1.

Propriété 1

La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même noeud est égale à 1.

Propriété 2

Propriété

La probabilité de l'évènement représenté par un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.

En considérant l'exemple précédent, la probabilité de l'évènement $F \cap \bar{P}$ est :

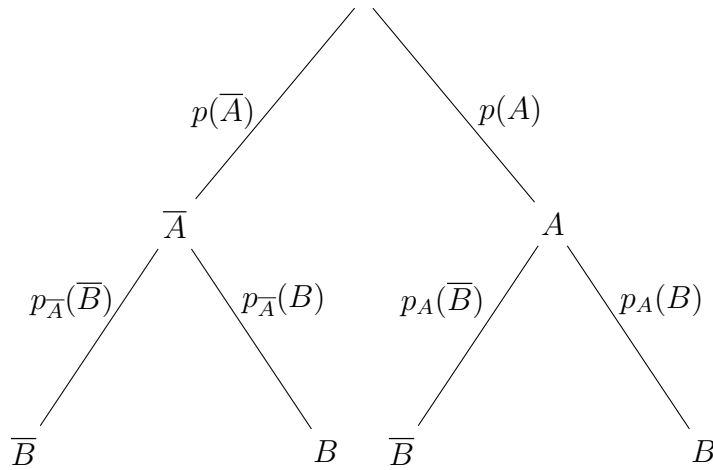
$$p(F \cap \bar{P}) = p(F) \times p_F(\bar{P})$$

On obtient :

$$p(F \cap \bar{P}) = 0,55 \times 0,90$$

$$p(F \cap \bar{P}) = 0,495$$

La lecture d'un arbre pondéré



La probabilité de \bar{A} et \bar{B} est : $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p_{\bar{A}}(\bar{B}) \times p(\bar{A})$

La probabilité de \bar{A} et B est : $p(\bar{A} \cap B) = p_{\bar{A}}(B) \times p(\bar{A})$

La probabilité de A et \bar{B} est : $p(A \cap \bar{B}) = p_A(\bar{B}) \times p(A)$

La probabilité de A et B est : $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$

Propriété 3 : Probabilités totales

Soit l'univers Ω d'une expérience aléatoire A_1, A_2, \dots, A_n des évènements tels que $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ forme une partition de l'univers Ω .

Alors, pour tout évènement B , on a :

$$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \dots + p(B \cap A_n).$$

Cette formule est appelé formule des probabilité totale

Et, si pour tout $p(A_i) \neq 0$, alors :

$$p(B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + \dots + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$$

C.L'indépendance de deux événements

1.Définition

On dit que deux événements A et B de probabilités non nulles sont indépendants lorsque :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Exemple

En considérant l'exemple précédent, montre que F et P sont deux événements indépendants.

Solution

Already solve but think first

On a :

- $p(F) = 0,55$
- $p(F \cap P) = p(F) \times p_P(p) = 0,55 \times 0,10$
- $p(\overline{F} \cap P) = p(\overline{F}) \times p_{\overline{F}}(p) = 0,45 \times 0,10$

L'ensemble $\{F, \overline{F}\}$ formant une partition de l'univers, on a, d'après la formule des probabilités totales :

$$p(P) = p(F \cap P) + p(\overline{F} \cap P)$$

Alors :

- $p(F \cap P) = 0,055$
- $p(F) \times p(P) = 0,55 \times 0,10$

Les événements F et P sont donc indépendants

Exercice

Soit A et B deux événements indépendants de probabilité non nulle.

Montrer que \overline{A} et \overline{B} sont aussi indépendants.

IV. Loïs de probabilité et Fonction de Répartition

A. Epreuve de Bernoulli

1.Définition

On appelle une épreuve de Bernoulli toute expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles. L'une des issues est appelée succès, l'autre est appelée échec.

2.Probabilité sur une épreuve de Bernoulli

Avec une épreuve de Bernoulli, la probabilité du succès est notée p et celle de l'échec est notée $1 - p$.

3.Schéma de Bernoulli

On appelle schéma de Bernoulli toute épreuve où on a n répétitions qui sont

identiques et indépendantes.

Propriété

Soit un schéma de Bernoulli à n épreuves où pour chaque épreuve la probabilité du succès est notée p et celle de l'échec est noté $1-p$.

La probabilité d'avoir exactement k succès avec $0 \leq k \leq n$.

$$p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

k =nombre de succès

n =le nombre de répétition

Exercice d'application

On soumet à un candidat 10 questions.

Chaque question est assortie de 3 réponses parmi lesquelles une seule est exacte.

Le candidat répond au hasard aux questions.

1. Déterminez la probabilité pour que le candidat trouve 3 bonnes réponses.
2. Déterminez la probabilité pour que le candidat trouve au moins une bonne réponse.

Correction :

Already solve but think first

B. Loi Binomiale

1. Variables aléatoires

Exemple

On lance **trois fois** de suite une pièce de monnaie équilibrée.

On gagne $2F$ pour chaque résultat « pile » et on perd $1F$ pour chaque résultat « face ».

1°) Quel est l'ensemble E des issues possibles ?

2°) Soit X l'application de E dans \mathbb{R} qui, à chaque issue, associe le gain correspondant.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Quelle est la probabilité de l'événement « obtenir un gain de $3F$ » ?

On note cette probabilité $p(X = 3)$.

Solution

On a :

Presenter les résultats sous à l'aide de l'arbre

D'après l'arbre, on a :

$$E = \{GGG, GGP, GPG, GPP, PGG, PGP, PPG, PPP\}$$

La pièce de monnaie était supposée parfaitement équilibrée, cette expérience a lieu dans le cadre de l'équiprobabilité des événements élémentaires.

Donc la probabilité d'un événement élémentaire de E est $\frac{1}{8}$

Variable aléatoire X donnant le gain pour chaque éventualité de E.

Eventualité de E	GGG	GGP	GPG	GPP	PGG	PGP	PPG	PPP
Valeurs prises par X	6	3	3	0	3	0	0	-3

OU

Eventualité de E	PPP	PPF	PFP	PFF	FPP	FPF	FFP	FFF
Valeurs prises par X	6	3	3	0	3	0	0	-3

D'où : $X(E) = \{-3; 0; 3; 6\}$

Probabilité sur l'univers $X(E)$ au loi de probabilité de la variable aléatoire X

$$p_1 = P(X = -3) = \frac{1}{8}; p_2 = P(X = 0) = \frac{3}{8}; p_3 = P(X = 3) = \frac{3}{8}; p_4 = P(X = 6) = \frac{1}{8}$$

Gain x_i	$X_1 = -3$	$X_2 = 0$	$X_3 = 3$	$X_4 = 6$
Probabilité $p_i = p(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2. Définition

- Une variable aléatoire X est une application définie sur un ensemble E muni d'une probabilité P, à valeurs dans \mathbb{R} .
- X prend les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n avec les probabilités p_1, p_2, \dots, p_n définies par : $p_i = p(X = x_i)$.
- L'affectation des p_i aux x_i permet de définir une nouvelle loi de probabilité. Cette loi notée P_X , est appelée loi de probabilité de X

C. Fonction de répartition

On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow [0; 1] \\ x &\mapsto P(X \leq x) \end{aligned}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 \\ p_1 & \text{si } x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{si } x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \\ p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_k & \text{si } x_k \leq x < x_{k+1} \\ \vdots & \\ p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{n-1} & \text{si } x_{n-1} \leq x < x_n \\ 1 & \text{si } x \geq x_n \end{cases}$$

F est une fonction en escalier.

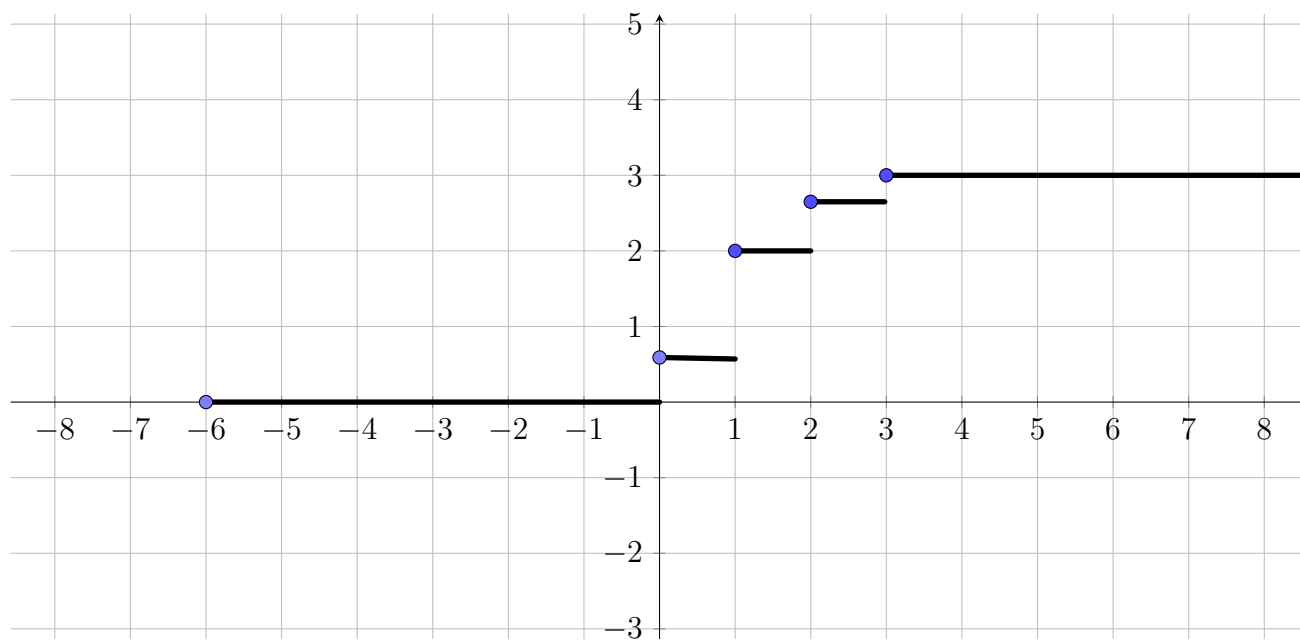
Exemple 1

En considérant le tableau suivant

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

Ce qui entraîne

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{8}{27} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{20}{27} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{26}{27} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$



Exemple 2

Du tableau précédent donnant la loi de probabilité de X , on déduit le tableau ci-dessous qui détermine la fonction de répartition F de X .

x_i	$-\infty$	-3	0	3	6	$+\infty$
$P(X \leq x_i)$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	1	1

Représenter la fonction de repartition

3. Loi Binomiale

Soit un schéma de Bernoulli constitué d'une suite de n épreuves. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus, alors :

$$P(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1 - p)^{n-k} \text{ avec } (0 \leq k \leq n)$$

Exemple

Un dé cubique est mal équilibré : la probabilité d'obtenir 6 est de $1/7$.

On appelle succès l'événement « obtenir 6 » et échec « obtenir un numéro différent de 6 ».

on appelle X la variable aléatoire comptant le nombre de succès à l'issue des 5 lancers. On obtient les probabilités suivantes :

$$P_0 = P(X = 0) = C_5^0 \left(\frac{1}{7}\right)^0 \left(\frac{6}{7}\right)^5$$

$$P_1 = 0,3856; P_2 = 0,1285; P_3 = 0,0214; P_4 = 0,0018; P_5 = 0,0001.$$

4. Espérance et Ecart-type :

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n avec les probabilités p_1, p_2, \dots, p_n . On appelle respectivement espérance mathématique de X , variance de X et écart-type de X , les nombres suivants :

- L'espérance mathématique est le nombre $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n (p_i x_i)$$

- La variance est le nombre V défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - E(X)^2$$

- L'écart-type est le nombre σ défini par : $\sigma = \sqrt{V}$

Exercice :

Un joueur lance un dé : si le numéro est un nombre premier, le joueur gagne une somme égale au nombre considéré (en franc) ; sinon il perd ce même nombre de franc.

1°) Si X est le gain algébrique réalisé, donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique et son écart-type.

2°) Le jeu est-il favorable au joueur ?

- Pour une loi de Bernoulli de paramètre p , l'espérance est p et l'écart type est \sqrt{pq}
- Pour une loi Binomiale de paramètres n et p , l'espérance est np et l'écart type est \sqrt{npq}