

Fonction Exponentielle

Destiné à la TerminaleS2
Au Lycée de Dindéferlo

17 juin 2024

1. Définition :

La fonction $f(x) = \ln(x)$ est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ donc, c'est une bijection de $]0; +\infty[$ vers \mathbb{R} . Ainsi, f admet une bijection réciproque f^{-1} qui est continue et strictement croissante de \mathbb{R} vers $]0; +\infty[$. f^{-1} est appelée fonction exponentielle, notée : $\exp(x) = e^x$

2. Conséquences de la définition

3. Propriétés

Propriété fondamentale

Pour tout réel a et b , on a : $e^{a+b} = e^a \times e^b$.

Propriétés

- $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
- $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- $e^{ra} = (e^a)^r$
- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

Exemples

Remarque

4. Limites Usuelles

Limites aux bornes de Df

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Limites usuelles

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

Preuve de quelques limites

Exemple

Déterminer les limites suivantes :

- La fonction $x \mapsto e^{-x^2+x}$ est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est la fonction
- La fonction $x \mapsto e^{\cos x}$ est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est la fonction
- La fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est dérivable sur \mathbb{R}^* et sa dérivée est la fonction

Exercice d'application

Déterminer les limites suivantes :

Calculer les limites suivantes.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^x - 2}{5e^x + 3} ; b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} ; c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x) ; d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin 2x}{1 - e^x}$$

6. Limites des composées avec exp

Propriété

Soit U une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} .

La fonction $\exp \circ U$ est dérivable sur I et on a : $(\exp \circ U)' = U' \times \exp \circ U$

NB

La fonction $\exp \circ U$ est généralement notée e^U ; sa dérivée est alors $U' e^U$.

Exemple

Calcule la limite suivante

Solution

7.Dérivée

Soit u et v deux fonctions strictement positives

Exemple

8.Croissance Comparée de $\ln x$ e^x x^α

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$$

Remarque

Exemple

Détermine : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln(x^2+1)}$

9.Equation système et Inequation avec exp

a°)Equation

Exemple

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes

a) $e^x = -1$;

b) $e^{x+1} = 3$;

c) $e^{x^2} = e^{x+2}$;

d) $(e^x - 2)(e^{-x} + 1)$

b°)Système d'inéquations avec exp :

$$\begin{cases} 4e^x - 3e^y = 9 \\ 2e^x + e^y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^x e^y = 10 \\ e^{x-y} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{2x} - 7e^{y+1} = -10 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

c°)Inéquations avec exp :

a) $e^{-x} \geq 2$

b) $e^{x^2-3} \leq e^{2x}$

c) $2e^{2x} - 5e^x + 2 > 0$

10.Etude le fonction exp

Soit $f(x) = \exp(x)$ le domaine

Le Domaine D_f

$$D_f = \mathbb{R}$$

⊗ Limites aux bornes de D_f

En $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

En $+\infty$

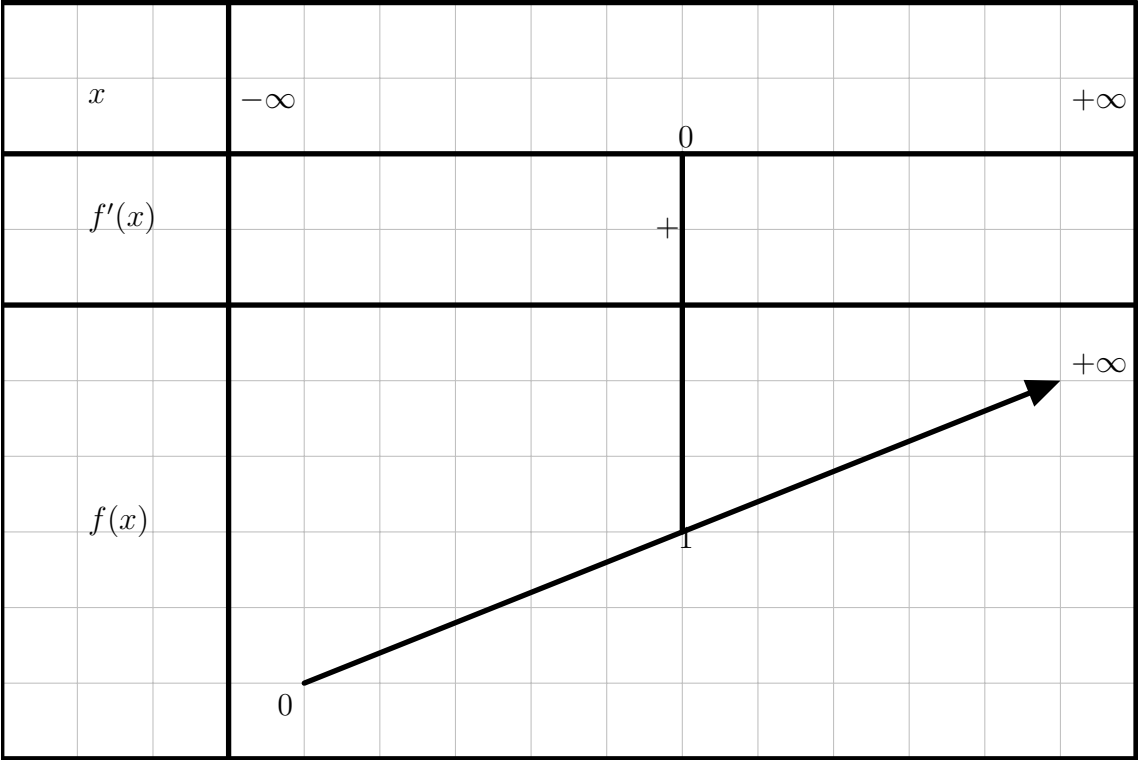
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

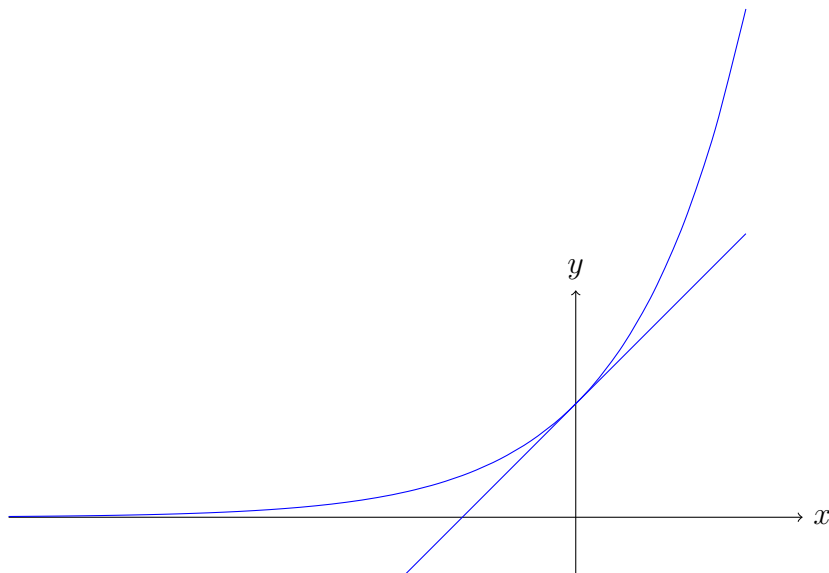
⊗ La dérivée de f

$$f'(x) = e^x$$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$, donc f est croissante sur $]0; +\infty[$

⊗ Tableau de variation





C_f est au-dessous de sa tangente en J ; donc $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > x + 1$

11. Branche infinie de ln

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Nous avons ainsi une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$.

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

12. Application