TD Sur Les Equations Différentielles

Destiné aux élèves de Terminale S
Lycée de Dindéfelo
Présenté par M. BA

12 juin 2024

Généralités. Équations du premier ordre

Exercice 1

— Montrer que chacune des fonctions f est solution de l'équation différentielle (E) :
  — $f(x) = \cos(2x+3) \quad (E)\ :\ y'' = 16y$
  — $f(x) = \sin(2x) \quad (E)\ :\ y'' + 3y = -2\sin x \cos x$
  — $f(x) = x\mathrm{e}^x \quad (E)\ :\ y' - y = \mathrm{e}^x$
  — $f(x) = \mathrm{e}^x \ln x \quad (E)\ :\ y'' - 2y' + y = \dfrac{-1}{x^2}\mathrm{e}^x$

Exercice 2

— Déterminer la solution f de chacune des équations différentielles (E) suivantes vérifiant la condition $f(x_0) = y_0$:
  — $(E)\ :\ -3y' + 2y = 0$, avec $x_0 = 3$ et $y_0 = 1$.
  — $(E)\ :\ 3y + 6y = 0$, avec $x_0 = -4$ et $y_0 = 2$
  — $(E)\ :\ 5y' + y = 0$, avec $x_0 = -5$ et $y_0 = 1$.
  — $(E)\ :\ 2y - 5y' = 0$, avec $x_0 = 1$ et $y_0 = -3$

Équations du second ordre

Exercice 3

— Déterminer la solution f de chacune des équations différentielles (E) suivantes vérifiant les conditions $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y'$:
  — $2y'' - 3y' - 2y = 0$, $f(0) = 2$ et $f'(0) = 3$
  — $y'' + y' + y = 0$, $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$
  — $4y'' - 4y' + y = 0$, $f(0) = -3$ et $f'(0) = 2$
  — $y'' - 5y' + 6y = 0$, $f(0) = 0$ et $f'(0) = 6$
  — $9y'' + 6y' + y = 0$, $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$
  — $y'' - 4y' + 5y = 0$, $f(0) = -1$ et $f'(0) = 3$

Exercice 4

— Soit (E) l'équation différentielle du second ordre :

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

  — a) Quelles sont les solutions de (E) ?

— b) Quelle est la solution de (E) dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ admet au point d'abscisse $x = 0$ la même tangente que la courbe $\mathcal{C}'$ représentative de $y = x$?

— c) Préciser les positions relatives de $\mathcal{C}_\lambda$ et $\mathcal{C}'_\lambda$.

Exercice 5

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + 16y = 0.$$

2. Trouver la solution f de cette équation vérifiant :

$$f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = 4.$$

3. Trouver deux réels positifs ω et φ tels que pour tout réel t, $f(t) = \sqrt{2}\cos(\omega t - \varphi)$.
4. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $\left[0\ ,\ \dfrac{\pi}{8}\right]$.

Équations différentielles linéaires du second ordre avec un second membre non nul

Exercice 6

On considère l'équation $(E)\ :\ y'' + my' + py = g(x)$ où m et p sont deux réels et g une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

I. Étude générale

On suppose qu'il existe une solution f_1 de (E).

1. Prouver que si f est solution de (E), alors $f - f_1$ est solution de l'équation différentielle :

$$(E_0)\ :\ y'' + my' + py = 0.$$

2. Prouver que si h est solution de (E_0), alors $h + f_1$ est solution de (E).
3. En déduire toutes les solutions de (E) si on connaît une solution de (E).

II. Cas où g est un polynôme

1. On considère l'équation $(E)\ :\ y'' - 3y' + 2y = x + 1$.
   (a) Déterminer a et b réels tels que : $f_1\ :\ x \mapsto ax + b$ soit solution de (E).
   (b) Résoudre (E).
2. On considère l'équation $(E)\ :\ y'' - 3y' + 2y = x^2 + 2x + 3$.
   (a) Déterminer a et b réels tels que : $f_1\ :\ x \mapsto ax^2 + bx + c$ soit solution de (E).
   (b) Résoudre (E).

   Soit P une fonction polynômiale du second degré.
3. Résoudre :
   (a) $y'' - 8y' + 17y = x^2 - x + 2$.
   (b) $y'' + 4y' + 4y = x^2 + 1$.

III. Cas où $g(x) = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$

1. On considère l'équation $(E)\ :\ y'' + 4y' + 5y = 2\cos 3x - \sin 3x$.
   (a) Déterminer a et b réels tels que : $f_1\ :\ x \mapsto a\cos 3x + b\sin 3x$ soit solution de (E).
   (b) Résoudre (E).
2. On considère l'équation $(E)\ :\ y'' + 4y' + 5y = \alpha\cos 3x + \beta\sin 3x$.
   (a) Déterminer a et b réels tels que : $f_1\ :\ x \mapsto a\cos 3x + b\sin 3x$ soit solution de (E).
   (b) Résoudre (E).
3. Résoudre :
   (a) $y'' - 6y' + 8y = \cos x + 2\sin x$.
   (b) $y'' + 4y' + 4y = \sin 5x$.

IV. Cas où $g(x) = \mathrm{e}^{ax}$

1. On considère l'équation $(E)\ :\ y'' - 4y' + 4y = \mathrm{e}^{-2\,x}$.
   (a) Déterminer a réel tels que : $f_1\ :\ x \mapsto a\mathrm{e}^{-2\,x}$ soit solution de (E).

(b) Résoudre (E).

2. On considère l'équation $(E)\ :\ y'' - 5y' + 6y = \mathrm{e}^{2x}$.
   (a) Peut-on déterminer une solution particulière de (E) sous la forme $x \mapsto a\mathrm{e}^{2x}$?
   (b) Déterminer a et b réels tels que : $f_1\ :\ x \mapsto (ax+b)\mathrm{e}^{2x}$ soit solution de (E).
   (c) Résoudre (E).
3. On considère l'équation $(E)\ :\ y'' - 4y' + 4y = \mathrm{e}^{2x}$.
   (a) Peut-on déterminer une solution particulière de (E) sous la forme $x \mapsto a\mathrm{e}^{2x}$?
   (b) Peut-on déterminer une solution particulière de (E) sous la forme $x \mapsto (ax+b)\mathrm{e}^{2x}$?
   (c) Déterminer a et b réels tels que : $f_1\ :\ x \mapsto (a\,x^2 + bx + c)\mathrm{e}^{2x}$ soit solution de (E).
   (d) Résoudre (E).
4. On considère l'équation $(E)\ :\ y'' + my' + py = \mathrm{e}^{a\,x}$.
   (a) Prouver que si a n'est pas solution de $r^2 + mr + p = 0$, il existe une solution du type $x \mapsto a\mathrm{e}^{a\,x}$.
   (b) Prouver que si a est une racine simple de $r^2 + mr + p = 0$, il n'existe pas de solution du type $x \mapsto a\mathrm{e}^{a\,x}$ mais une solution du type $x \mapsto (ax+b)\mathrm{e}^{a\,x}$
   (c) Prouver que si a est une racine double de $r^2+mr+p = 0$, il n'existe pas de solution du type $x \mapsto a\mathrm{e}^{a\,x}$, ni du type $x \mapsto (ax+b)\mathrm{e}^{a\,x}$, mais une solution du type $x \mapsto (a\,x^2 + bx + c)\mathrm{e}^{a\,x}$
   (d) Résoudre :
      i. $y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^{3\,x}$
      ii. $y'' + 2y' - 3y = \mathrm{e}^{x}$.