

Devoir de contrôle n° 2

NB: ce document contient 4 exercices

Exercice 1 :5 points

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(x+1)}$.

Soit C la courbe de f dans un repère orthonormée (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1
 - a Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.
 - b Vérifier que $\forall x > 0, \ln(x+1) = \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.
 - c Dédire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Interpréter le résultat.
- 2
 - a Montrer que $\forall x > 0, f'(x) = \frac{x(\ln(x+1) - \ln(x)) + \ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$.
 - b En déduire que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
 - c Dresser le tableau de variation de la fonction f .
 - d Tracer la courbe C en précisant son intersection avec l'axe des abscisses.
- 3 Montrer que f admet une réciproque f^{-1} définie sur $] -\infty, 1[$.
- 4 Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose $a_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$.
 - a Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.
 - b Montrer que a_n est une solution de l'équation $x^n = x + 1$.
 - c Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^n$.

Exercice 2 :5pts

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(x+1)}$.

Soit C la courbe de f dans un repère orthonormée (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1
 - a Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.
 - b Vérifier que $\forall x > 0, \ln(x+1) = \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.
 - c Dédire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Interpréter le résultat.
- 2
 - a Montrer que $\forall x > 0, f'(x) = \frac{x(\ln(x+1) - \ln(x)) + \ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$.

- b** En déduire que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- c** Dresser le tableau de variation de la fonction f .
- d** Tracer la courbe C en précisant son intersection avec l'axe des abscisses.

3 Montrer que f admet une réciproque f^{-1} définie sur $] -\infty, 1[$.

4 Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose $a_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$.

- a** Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.
- b** Montrer que a_n est une solution de l'équation $x^n = x + 1$.
- c** Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^n$.