Ministère de l'éducation nationale
Inspection académique de Kédougou
Cellule de Mathématiques
M.BA
Classe : Tle

Année scolaire 2023-2024
Date : 14-05-2024
Durée : 3h 00

Correction du Devoir N2 Du Second Semestre

Exercice 1 : 6 pts

Resoudre dans $\mathbb{R}$ 1pt+1pt+1,5pts+1pt+1,5pts

a) $\ln(2x-1) = \ln(x+1)$
b) $\ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln(x+2)$
c) $\ln(2x-1) + 2\ln(x+1) = \ln(x-1)$
d) $\ln(x-1) \leq \ln(3-x)$
e) $\ln(1-x) - \ln(2x+3) \geq \ln(x-1)$

Correction Exercice 1 : 6 pts

a) $\ln(2x-1) = \ln(x+1)$

Domaine de Validité : D
L'équation n'a de sens que si $2x-1>0$ et $x+1>0$
Posons $2x-1=0$ et $x+1=0$
C'est-à-dire $x=\frac{1}{2}$ et $x=-1$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x-1$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0 $+$		$+$

Donc D$=\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$
Résolution
$\ln(2x-1) = \ln(x+1) \Longrightarrow 2x-1 = x+1 \Longrightarrow x=-2$
Comme $-2 \notin$D Donc $\boxed{S=\emptyset}$

b) $\ln(x-1)+\ln(x+1)=\ln(x+2)$

Domaine de Validité : D

L'équation n'a de sens que si $x-1>0$, $x+1>0$ et $x+2>0$.
Posons $x-1=0$, $x+1=0$ et $x+2=0$.
C'est-à-dire $x=1$, $x=-1$ et $x=-2$.

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$
$x-2$	$-$	0 $+$	$+$	$+$	
$x+1$	$-$	$-$	0 $+$	$+$	
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0 $+$	

Donc $D=]1,+\infty[$.

Résolution

$\ln(x-1)+\ln(x+1)=\ln(x+2) \Longrightarrow \ln((x-1)(x+1))=\ln(x+2)$
$\Longrightarrow (x-1)(x+1)=x+2 \Longrightarrow x^2-1=x+2 \Longrightarrow x^2-x-3=0$
$\Longrightarrow (x-3)(x+1)=0 \Longrightarrow x=3$ ou $x=-1$.
Comme $x\in D$, donc $S=\{3\}$.

---

c) $\ln(2x-1)+2\ln(x+1)=\ln(x-1)$

Domaine de Validité : D

L'équation n'a de sens que si $2x-1>0$, $x+1>0$ et $x-1>0$.
Posons $2x-1=0$, $x+1=0$ et $x-1=0$.
C'est-à-dire $x=\frac{1}{2}$, $x=-1$ et $x=1$.

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0 $+$	$+$	$+$	
$2x-1$	$-$	$-$	0 $+$	$+$	
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0 $+$	

Donc $D =]1, +\infty[$.

Résolution

$\ln(2x-1) + 2\ln(x+1) = \ln(x-1) \Longrightarrow \ln((2x-1)(x+1)^2) = \ln(x+2)$
$\Longrightarrow (2x-1)(x^2+2x+1) = x+2 \Longrightarrow 2x(x^2+2x+1) - (x^2+2x+1) = x+2$

$\Longrightarrow 2x^3 + 4x^2 + 2x - x^2 - 2x - 1 = x+2 \Longrightarrow 2x^3 + 3x^2 + x - 3 = 0$
Grosse erreur de ma part car pas de racines évidentes.

---

d) $\ln(x-1) \leq \ln(3-x)$

Domaine de Validité : D

L'équation n'a de sens que si $x-1>0$ et $3-x>0$
Posons $x-1=0$ et $3-x=0$
C'est-à-dire $x=1$ et $x=3$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x-3$	$-$	$-$	0 $+$	
$x-1$	$-$	0 $+$	$+$	

Donc D$=]3, +\infty[$

Résolution

$\ln(x-1) \leq \ln(3-x) \Longrightarrow x-1 \leq 3-x \Longrightarrow x \leq 4 \Longrightarrow x \in]-\infty, 4]$
S$=]3, +\infty[\cap]-\infty, 4]$

$\boxed{S =]3;4[}$

---

e) $\ln(1-x) - \ln(2x+3) \geq \ln(x-1)$

Domaine de Validité : D

L'équation n'a de sens que si $1 - x > 0$, $2x + 3 > 0$ et $x - 1 > 0$.
Posons $1 - x = 0$, $2x + 3 = 0$ et $x - 1 = 0$.
C'est-à-dire $x = 1$, $x = -\frac{3}{2}$ et $x = 1$.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$ $\quad$ $+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$ $\quad$ $-$	0	$+$	
$x+1$		$-$		$-$ $\quad$ $-$	0	$+$	

Donc $D =]1, +\infty[$.

Résolution

$\ln(1-x) - \ln(2x+3) \geq \ln(x-1) \Longrightarrow \ln(1-x) \geq \ln(2x+3) + \ln(x-1)$
$\Longrightarrow \ln(1-x) \geq \ln\left[(2x+3)(x-1)\right] \Longrightarrow (1-x) \geq (2x+3)(x-1) \Longrightarrow 1 - x \geq 2x^2 - 2x + 3x - 3$
$\Longrightarrow 2x^2 + 2x - 4 \leq 0$.
Posons $x^2 + x - 1 = 0$
$\Delta = 5$
$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
Donc $S = \left]\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[\cap]1, +\infty[= \emptyset$
Donc $\boxed{S = \emptyset}$

Correction Exercice 2 : 6 pts

1) Développons

$(x+1)(x-3)(x+2)$
Pour développer $(x+1)(x-3)(x+2)$, procédons en plusieurs étapes en utilisant la distributivité.
D'abord, développons les deux premiers facteurs :

$$(x+1)(x-3) = x(x-3) + 1(x-3) = x^2 - 3x + x - 3 = x^2 - 2x - 3$$

Ensuite, multiplions ce résultat par le troisième facteur $(x+2)$:

$$(x^2 - 2x - 3)(x+2) = (x^2 - 2x - 3)x + (x^2 - 2x - 3)2$$

Développons les deux produits :

$$(x^2 - 2x - 3)x = x^3 - 2x^2 - 3x$$
$$(x^2 - 2x - 3)2 = 2x^2 - 4x - 6$$

En ajoutant ces deux résultats ensemble, nous obtenons :

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 2x^2 - 4x - 6 = x^3 + (-2x^2 + 2x^2) + (-3x - 4x) - 6 = x^3 - 7x - 6$$

Donc, le résultat final est : $\boxed{(x+1)(x-3)(x+2) = x^3 - 7x - 6}$

2) résolvons

$e^{3x} - 7e^x - 6 = 0$

Pour résoudre l'équation $e^{3x} - 7e^x - 6 = 0$, faisons un changement de variable. Posons $y = e^x$. Ainsi, l'équation devient :

$$e^{3x} = (e^x)^3 = y^3$$

L'équation se réécrit donc :

$$y^3 - 7y - 6 = 0$$

Or, pla forme factorisée de $y^3 - 7y - 6$ est :

$$(y+1)(y-3)(y+2)$$

$$\text{Ainsi, } y^3 - 7y - 6 = 0 \Longrightarrow (y+1)(y-3)(y+2) = 0 \Longrightarrow (e^x+1)(e^x-3)(e^x+2) = 0$$

$$\text{Donc, } (e^x+1)(e^x-3)(e^x+2) = 0 \Longrightarrow e^x + 1 = 0 \text{ ou } e^x - 3 = 0 \text{ ou } e^x + 2 = 0$$

$$\text{Cela donne les solutions suivantes : } \begin{cases} e^x = -1 \text{ impossible} \\ e^x = 3 \\ e^x = -2 \text{ impossible} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \ln 3 \end{cases}$$

Donc, la solution de l'équation $e^{3x} - 7e^x - 6 = 0$ est :

$$\boxed{S = \ln 3}$$

3) résolvons

$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ puis $e^{4x} - 5e^{2x} + 6 = 0$

Pour résoudre $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$, faisons un changement de variable. Posons $y = x^2$. Ainsi, l'équation devient :

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

Ici, $a = 1$, $b = -5$, et $c = 6$. Calculons le discriminant :

$$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1$$

Donc, les solutions pour y sont :

$$y_1 = \frac{5-1}{2} = 2, y_2 = \frac{5+1}{2} = 3$$

Ce qui donne :

$$y_1 = 2 \quad \text{et } y_2 = 3$$

Revenons à la variable x, nous avons $y = x^2$, donc :

$$x^2 = 3 \implies x = \pm\sqrt{3}$$
$$x^2 = 2 \implies x = \pm\sqrt{2}$$

Les solutions pour x sont donc :

$$x = \pm\sqrt{3}, \quad x = \pm\sqrt{2}$$

$$\boxed{S = \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}}$$

Maintenant, résolvons $e^{4x} - 5e^{2x} + 6 = 0$. Faisons un changement de variable similaire. Posons $z = e^{2x}$. Ainsi, l'équation devient :

$$z^2 - 5z + 6 = 0$$

Cette équation est identique à l'équation précédente en y. Les solutions sont :

$$z = 3 \quad \text{et} \quad z = 2$$

Revenons à la variable x, nous avons $z = e^{2x}$, donc :

$$e^{2x} = 3 \implies 2x = \ln 3 \implies x = \frac{\ln 3}{2}$$
$$e^{2x} = 2 \implies 2x = \ln 2 \implies x = \frac{\ln 2}{2}$$

Les solutions pour x sont donc :

$$x = \frac{\ln 3}{2}, x = \frac{\ln 2}{2}$$

$$\boxed{S = \left\{\frac{\ln 3}{2}, \frac{\ln 2}{2}\right\}}$$

En résumé, les solutions sont :

Pour $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$:

$$\boxed{S = \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}}$$

Pour $e^{4x} - 5e^{2x} + 6 = 0$:

$$\boxed{S = \left\{\frac{\ln 3}{2}, \frac{\ln 2}{2}\right\}}$$

4) Développons

$(3+x)(2x-1)$ et $(x-2)(3+x)(2x-1)$
Développons d'abord $(3+x)(2x-1)$:

$$(3+x)(2x-1) = 3(2x-1) + x(2x-1) = 6x - 3 + 2x^2 - x = 2x^2 + 5x - 3$$

$$\boxed{(3+x)(2x-1) = 2x^2 + 5x - 3}$$

Ensuite, développons $(x-2)(3+x)(2x-1)$. Nous utilisons le résultat précédent :

$$(x-2)(2x^2 + 5x - 3)$$

Donc, le résultat final est :

$$\boxed{(x-2)(3+x)(2x-1) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6}$$

5) résolvons

$2e^{-2x} + 5e^{-x} - 3 = 0$ et $2e^{3x+1} + e^{2x+1} - 13e^{x+1} + 6e = 0$
Pour résoudre $2e^{-2x} + 5e^{-x} - 3 = 0$:
Faisons un changement de variable. Posons $y = e^{-x}$. Ainsi, l'équation devient :

$$2y^2 + 5y - 3 = 0$$

D'après ce qui précède, $2y^2 + 5y - 3 = (3+y)(2y-1)$
Donc $2y^2 + 5y - 3 = 0 \implies y = -3$ ou $y = \frac{1}{2}$
Revenons à la variable x, nous avons $z = e^{-x}$, donc :

$$e^{-x} = \frac{1}{2} \implies -x = \ln\frac{1}{2} \implies x = \ln 2$$

La solution pour x est donc :

$$x = \ln 2$$

$$\boxed{S = \{\ln 2\}}$$

Pour résoudre $2e^{3x+1} + e^{2x+1} - 13e^{x+1} + 6e = 0$:
Faisons un changement de variable. Posons $z = e^x$. Ainsi, l'équation devient :

$$2z^3e + z^2e - 13ze + 6e = 0 \implies 2z^3 + z^2 - 13z + 6 = 0$$

D'après ce qui précède, $2z^3 + z^2 - 13z + 6 = (z-2)(3+z)(2z-1)$
Donc $2z^3 + z^2 - 13z + 6 = 0 \implies z = 2$ ou $z = -3$ ou $z = \frac{1}{2}$
Revenons à la variable x, nous avons $z = e^x$, donc :

$$e^x = 2 \implies x = \ln 2$$
$$e^x = \frac{1}{2} \implies x = \ln\frac{1}{2} \implies x = -\ln 2$$

Les solutions pour x sont donc :

$$x = \ln 2, x = -\ln 2$$

$$\boxed{S = \{\ln 2, -\ln 2\}}$$

6) résolvons dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ \ln x + \ln y = 0 \end{cases}$$

Pour résoudre ce système d'équations dans $\mathbb{R}^2$, commençons par la deuxième équation. Utilisons la propriété des logarithmes $\ln x + \ln y = \ln(xy)$:

$$\ln(xy) = 0$$

Donc,

$$xy = e^0 = 1$$

Nous avons maintenant le système :

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, nous pouvons exprimer y en fonction de x à partir de la première équation :

$$y = 2 - x$$

Substituons cette expression dans la deuxième équation :

$$x(2 - x) = 1$$

Ce qui donne :

$$2x - x^2 = 1 \implies x^2 - 2x + 1 = 0 \implies (x - 1)^2 = 0$$

La seule solution est :

$$x = 1$$

En substituant $x = 1$ dans $y = 2 - x$, nous obtenons :

$$y = 2 - 1 = 1$$

Donc, la solution du système est :

$$\boxed{S = \{(1, 1)\}}$$

Problème : 8 pts

Soit $f(x) = \ln(x^2 - 6x + 9)$

1)a- Montrer que l'esemble de définition de f est $Df = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ et détermine les limites aux bornes de Df.**0,5pt+1pt**

b- Etuider les variations de f.**1,5pt**

2)Soit la courbe (Cf) représentative de f dans un repère orthonormé (unité 1 cm).

a- Déterminer les points d'intersections de Cf avec les axes du repère.**1pt**

b- Ecrire une équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 0.**0,5pt**

c- Montrer que la droite d'équation $x = 3$ est axe de symétrie de (Cf). **1pt**

d- Tracer (Cf) et la tangente (T). **1,5pt**

3) Montrer que $f(x) = 2\ln(x - 3)$ sur $]3 + \infty[$. **1pt**

Correction du problème : 8 pts

Soit $f(x) = f(x) = \ln(x^2 - 6x + 9)$.

1) a - Ensemble de définition et limites

Montrer que l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

La fonction f est définie lorsque l'argument du logarithme est strictement positif :

$$x^2 - 6x + 9 > 0$$

Nous remarquons que :

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

Donc, l'inéquation devient :

$$(x - 3)^2 > 0$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ f existe donc

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

Déterminer les limites aux bornes de D_f

Cherchons la limites à gauche et à droite de 3.

1. Lorsque $x \to 3^-$ (par la gauche) :

$$\lim_{x \to 3^-} \ln(x^2 - 6x + 9) = \ln(0^+) = -\infty$$

Donc,

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$$

2. Lorsque $x \to 3^+$ (par la gauche) :

$$\lim_{x \to 3^+} \ln(x^2 - 6x + 9) = \ln(0^+) = -\infty$$

Donc,

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$$

1. Lorsque $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \ln(x^2 - 6x + 9) = \ln(+\infty) = +\infty$$

Donc,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

2. Lorsque $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x^2 - 6x + 9) = \ln(+\infty) = +\infty$$

Donc,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

b - Étudions les variations de f

Pour étudier les variations de f, nous allons calculer sa dérivée et analyser son signe.

Calcul de la dérivée de f

La fonction $f(x)$ est définie par :

$$f(x) = \ln(x^2 - 6x + 9)$$

Calculons $u'(x)$:

$$u(x) = x^2 - 6x + 9 \implies u'(x) = 2x - 6$$

Donc, la dérivée de f est :

$$f'(x) = \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 9}$$

Signe de $f'(x)$

Analysons le signe de $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{2(x-3)}{(x-3)^2}$$

Le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $(x - 3)$:
$\forall x \in]-\infty, 3[$, $f'(x) < 0$ est croissante.
$\forall x \in]3, +\infty[$, $f'(x) > 0$ est décroissante.

2) Intersection de la courbe Cf avec les axes

a - Intersection avec l'axe des ordonnées

Pour trouver l'intersection avec l'axe des ordonnées, nous devons évaluer $f(0)$:

$$f(0) = \ln(0^2 - 6 \cdot 0 + 9) = \ln(9) = \ln(3^2) = 2\ln(3)$$

Donc, la courbe Cf intersecte l'axe des ordonnées au point $(0, 2\ln(3))$.

b - Intersection avec l'axe des abscisses

Pour trouver l'intersection avec l'axe des abscisses, nous devons résoudre $f(x) = 0$:

$$\ln(x^2 - 6x + 9) = 0$$
$$x^2 - 6x + 9 = e^0 = 1$$
$$x^2 - 6x + 9 - 1 = 0$$
$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Résolvons ce trinôme du second degré :
où $a = 1$, $b = -6$, et $c = 9$.
$\Delta' = 1$

$$x = 2$$
$$x = 4$$

Donc, la courbe Cf intersecte l'axe des abscisses aux points $(2, 0)$ et $(4, 0)$.

2) b - Équation de la tangente à Cf au point d'abscisse 0

1. Calcul de $f(0)$

$$f(0) = \ln(0^2 - 6 \cdot 0 + 9) = \ln(9) = \ln(3^2) = 2\ln(3)$$

Le point de tangence est donc $(0, 2\ln(3))$.

2. Calcul de la dérivée $f'(x)$ et évaluation en $x = 0$

La dérivée de f est :

$$f'(x) = \frac{2}{x-3}$$

Évaluons $f'(x)$ en $x = 0$:

$$f'(0) = \frac{2}{0-3} = -\frac{2}{3}$$

3. Équation de la tangente

L'équation de la tangente T en $x = 0$ est donnée par :

$$y = f(x) + f'(x)(x - x_0)$$
$$y = f(0) + f'(0)(x - 0)$$
$$y = 2\ln(3) - \frac{2}{3} \cdot x$$
$$y = -\frac{2}{3}x + 2\ln(3)$$

Ainsi, l'équation de la tangente T à Cf au point d'abscisse 0 est :

$$\boxed{(T) : y = -\frac{2}{3}x + 2\ln(3)}$$

2) c - Symétrie de la courbe par rapport à la droite $x = 3$

Pour montrer que la droite d'équation $x = 3$ est un axe de symétrie de Cf, nous devons prouver que $f(-x+6) = f(x)$.

Pour ce faire, vérifions si $\ln(x^2 - 6x + 9) = \ln((6-x)^2 - 6(6-x) + 9)$.

Calculons $\ln((6-x)^2 - 6(6-x) + 9)$:

$$(6-x)^2 = 36 - 12x + x^2$$

$$-6(6-x) = -36 + 6x$$

Donc,

$$(6-x)^2 - 6(6-x) + 9 = x^2 - 6x + 9$$

Ainsi, $\ln(x^2 - 6x + 9) = \ln((6-x)^2 - 6(6-x) + 9)$.

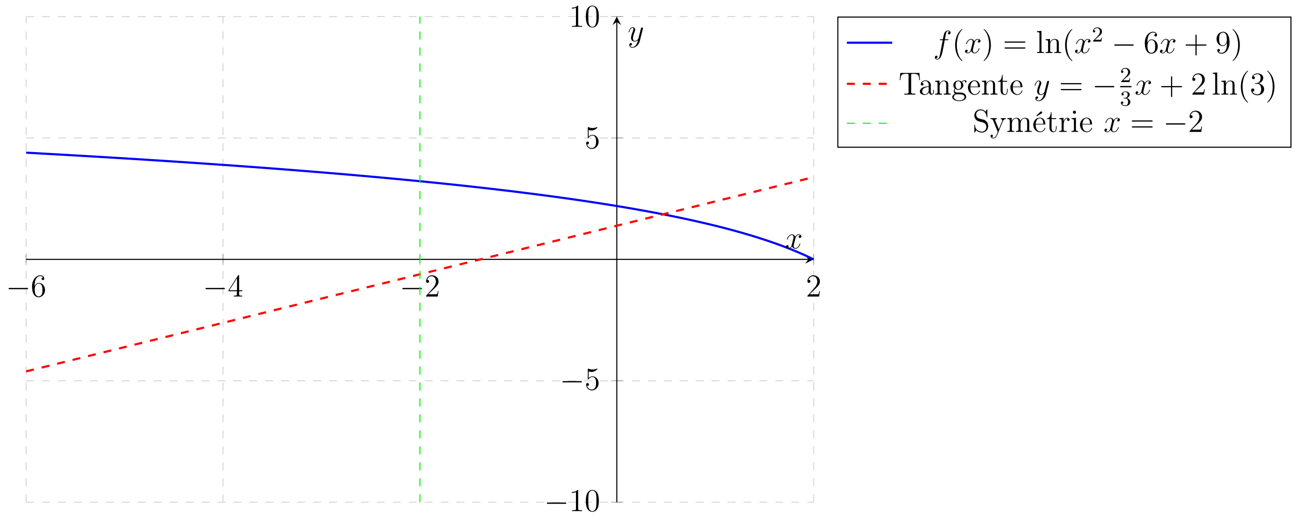
Cela montre que $\ln(x^2 - 6x + 9)$ est symétrique par rapport à $x = 3$,
car pour tout x, $\ln((6-x)^2 - 6(6-x) + 9) = \ln(x^2 - 6x + 9)$.

Conclusion : $\ln(x^2 - 6x + 9)$ a comme axe de symétrie la droite verticale $x = 3$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2) d - Tracé de Cf et de la tangente T



3) Preuve que $f(x) = 2\ln(x-3)$ sur $]-2, +\infty[$

Commençons par simplifier l'expression de $f(x)$:

$$f(x) = \ln(x^2 - 6x + 9)$$

Nous reconnaissons que $(x^2 - 6x + 9)$ peut être factorisé en un carré parfait :

$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

Ainsi,

$$f(x) = \ln((x-3)^2)$$

Nous utilisons maintenant la propriété des logarithmes qui dit que $\ln(a^b) = b\ln(a)$:

$$f(x) = \ln((x-3)^2) = 2\ln(x-3)$$

Par conséquent, nous avons montré que :

$$f(x) = 2\ln(x-3)$$

Il est important de noter que l'expression $\ln((x-3)^2) = 2\ln(x-3)$ est définie pour $x - 3 > 0$, c'est-à-dire $x > 3$. Donc, sur l'intervalle $]3, +\infty[$, nous avons :

$$f(x) = 2\ln(x-3)$$