La transformée gamma et son inversion

Par Pathy Kyungu

pathykyungu@gmail.com
https://pathykyungu.github.io

Résumé

Nous introduisons la transformée gamma d'une fonction analytique f, définie par la division de chaque terme de sa série de Taylor par $(n!)^2$. Nous montrons que cette transformée admet une forme intégrale issue du théorème intégral de Cauchy, que son inverse est donnée par une formule simple utilisant la transformée de Laplace, et que la dérivée de cette transformée gamma est reliée à la transformée de Laplace inverse d'une fonction modifiée.

1. Définition de la transformée gamma

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, avec développement de Taylor :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n.$$

On définit la transformée gamma $f^*(t)$ par :

$$\boxed{f^*(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{(n!)^2} t^n.}$$

Cette série modifie la croissance des coefficients en divisant par $n!$ supplémentaire.

2. Forme intégrale de la transformée gamma

Par le théorème intégral de Cauchy :

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz.$$

Substitution dans la série de f^* :

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \cdot \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz \cdot t^n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} f(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{t}{z}\right)^n \frac{1}{z}\, dz.$$

En inversant somme et intégrale, on obtient :

$$\boxed{f^*(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z} \exp\left(\frac{t}{z}\right) dz.}$$

3. Transformée gamma inverse

La fonction f s'obtient à partir de f^* via :

$$\boxed{f(t) = \int_0^\infty e^{-x} f^*(xt)\, dx.}$$

En posant $u = xt$, on peut écrire :

$$tf(t) = \int_0^\infty e^{-u/t} f^*(u)\, du = \mathcal{L}[f^*]\left(\frac{1}{t}\right),$$

d'où :

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{t}\mathcal{L}[f^*]\left(\frac{1}{t}\right).}$$

On définit ainsi la transformée gamma inverse :

$$\mathcal{G}^{-1} f^* := \frac{1}{t}\mathcal{L}[f^*]\left(\frac{1}{t}\right).$$

4. Lien avec la transformée de Laplace inverse

Soit la fonction auxiliaire $\varphi(x) := f(1/x)$. On a alors la relation clé :

$$\boxed{\frac{d}{dt} f^*(t) = \mathcal{L}^{-1}[\varphi],}$$

c'est-à-dire que la dérivée de la transformée gamma est égale à la transformée de Laplace inverse de φ.

5. Exemple

Considérons $f(t) = e^t$. Sa transformée gamma est :

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n!)^2} t^n.$$

On calcule :

$$\mathcal{L}[f^*](s) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n!)^2} \cdot \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{s}\right)^n = \frac{1}{s} e^{1/s}.$$

Donc :

$$\mathcal{G}^{-1} f^* = \frac{1}{t}\mathcal{L}[f^*]\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t} \cdot t \cdot e^t = e^t = f(t).$$

Conclusion

La transformée gamma et sa transformée inverse constituent un cadre élégant et puissant pour l'analyse fonctionnelle. Elles établissent un pont entre séries entières régularisées, intégrales de contour et transformées intégrales classiques, ouvrant de nouvelles pistes en analyse opérationnelle.

Auteur : Pathy Kyungu
Contact : pathykyungu@gmail.com
Site : https://pathykyungu.github.io