Analityczne reprezentacje sygnałów ciągłych

Przedstawienie sygnału w postaci analitycznej:

- umożliwia uproszczenie i unifikację metod analizy,
- pozwala na prostszą interpretację niektórych jego cech fizycznych.

W teorii sygnałów największe znaczenie ma ***widmowa reprezentacja sygnału***:

funkcje czasu przedstawia się w równoważnej reprezentacji w dziedzinie częstotliwości (pulsacji), lub, bardziej ogólnie, pulsacji zespolonej.

Reprezentacja dyskretna:

przyporządkowanie danemu sygnałowi skończonego lub przeliczalnego ciągu liczb (rzeczywistych lub zespolonych).
Reprezentacja dyskretna odwzorowuje daną przestrzeń sygnałów w przestrzenie R^n, C^n lub l^2

Reprezentacja ciągła:

przyporządkowuje elementom danej przestrzeni sygnałów elementy innej przestrzeni funkcyjnej, rzeczywistej lub zespolonej, poprzez odpowiednie przekształcenie całkowe.

Dyskretne reprezentacje sygnałów ciągłych

Przestrzeń sygnałów L_T^2 (przestrzeń sygnałów okresowych o skończonej mocy)

$$x(t) = x(t - kT), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left| x(t) \right|^2 \mathrm{d}t < \infty$$

$$x, y \in L_T^2$$

Przestrzeń jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\, y^*(t)\, \mathrm{d}t$$

i normą

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\, x^*(t)\, \mathrm{d}t} = \sqrt{P_x}$$

Przestrzeń Hilberta L_T^2 jest przestrzenią ośrodkową

Zbiorem ortonormalnym domkniętym jest zbiór funkcji z przestrzeni L_T^2

$$\left\{1,\ \sqrt{2}\cos k\frac{2\pi}{T}t,\ \sqrt{2}\sin k\frac{2\pi}{T}t\ :\quad k\in\mathbb{N}\right\}$$

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\sqrt{2}\sin k\frac{2\pi}{T}\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\sqrt{2}\cos k\frac{2\pi}{T}\mathrm{d}t=0$$

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\sqrt{2}\sin k\frac{2\pi}{T}\sqrt{2}\cos l\frac{2\pi}{T}\mathrm{d}t=0,\qquad k,l\in\mathbb{N}$$

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\sqrt{2}\sin k\frac{2\pi}{T}\sqrt{2}\sin l\frac{2\pi}{T}\mathrm{d}t=\begin{cases}0 & k\neq l\\ 1 & k=l\end{cases}$$

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\sqrt{2}\cos k\frac{2\pi}{T}\sqrt{2}\cos l\frac{2\pi}{T}\mathrm{d}t=\begin{cases}0 & k\neq l\\ 1 & k=l\end{cases}$$

Zbiór ten może być bazą ortonormalną przestrzeni L_T^2

$$\left\{1,\ \sqrt{2}\cos k\frac{2\pi}{T}t,\ \sqrt{2}\sin k\frac{2\pi}{T}t\ :\quad k\in\mathbb{N}\right\}$$

$$x(t)\in L_T^2$$

$$x(t)=X_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k\sqrt{2}\cos k\frac{2\pi}{T}t+\beta_k\sqrt{2}\sin k\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$X_0=\langle x,1\rangle=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\alpha_k=\left\langle x,\sqrt{2}\cos k\frac{2\pi}{T}t\right\rangle=\frac{\sqrt{2}}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)\cos k\frac{2\pi}{T}t\,\mathrm{d}t$$

$$\beta_k=\left\langle x,\sqrt{2}\sin k\frac{2\pi}{T}t\right\rangle=\frac{\sqrt{2}}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)\sin k\frac{2\pi}{T}t\,\mathrm{d}t$$

Wprowadzimy oznaczenia

$$\omega_0 \triangleq \frac{2\pi}{T}$$ — ***pulsacja podstawowa*** sygnału $x(t)$

oraz

$$\alpha_k \sqrt{2} = a_k , \qquad \beta_k \sqrt{2} = b_k$$

Wówczas

$$X_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \mathrm{d}t$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos k\omega_0 t \, \mathrm{d}t \qquad b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin k\omega_0 t \, \mathrm{d}t$$

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t \right)$$

Trygonometryczny szereg Fouriera sygnału $x(t)$

Inną bazą przestrzeni Hilberta L_T^2 może być ortonormalny domknięty zbiór *zespolonych* funkcji:

$$\left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t} : \quad k \in \mathbb{Z} \right\}, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t}, \mathrm{e}^{\mathrm{j}l\omega_0 t} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t} \cdot \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}l\omega_0 t} \right)^* \mathrm{d}t = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}l\omega_0 t} \mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ 1 & k = l \end{cases}$$

Wówczas, gdy $x(t) \in L_T^2$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t}, \qquad X_k \in \mathbb{C}$$

gdzie

$$X_k = \left\langle x, \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t} \right)^* \mathrm{d}t = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_0 t} \mathrm{d}t$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t}, \qquad X_k \in \mathbb{C}$$

$$X_k = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_0 t}\mathrm{d}t, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Wykładniczy szereg Fouriera sygnału $x(t)$

$$X_k^* = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x^*(t)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_0 t}\right)^* \mathrm{d}t$$

Jeżeli $x(t)$ jest rzeczywistą funkcją czasu, to $x(t)=x^*(t)$

Wówczas

$$X_k^* = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t}\mathrm{d}t = X_{-k}$$

$$X_k = \left|X_k\right| e^{\mathrm{j}\varphi_k}, \qquad \varphi_k \triangleq \arg X_k$$

$$X_{-k} = X_k^* = \left|X_k\right| e^{-\mathrm{j}\varphi_k}$$

$$\left|X_{-k}\right| = \left|X_k\right|, \qquad \arg X_{-k} = -\arg X_k, \qquad X_0 = X_0^* \quad \Rightarrow \quad X_0 \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{\mathrm{j}k\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{\mathrm{j}k\omega_0 t} + X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{\mathrm{j}k\omega_0 t} = \sum_{k=1}^{\infty} X_{-k} e^{-\mathrm{j}k\omega_0 t} + X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{\mathrm{j}k\omega_0 t} =$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left|X_k\right| e^{\mathrm{j}\varphi_k} e^{\mathrm{j}k\omega_0 t} + \left|X_k\right| e^{-\mathrm{j}\varphi_k} e^{-\mathrm{j}k\omega_0 t} \right) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left|X_k\right| \underbrace{\left[e^{\mathrm{j}(k\omega_0 t + \varphi_k)} + e^{-\mathrm{j}(k\omega_0 t + \varphi_k)} \right]}_{2\cos(k\omega_0 t + \varphi_k)}$$

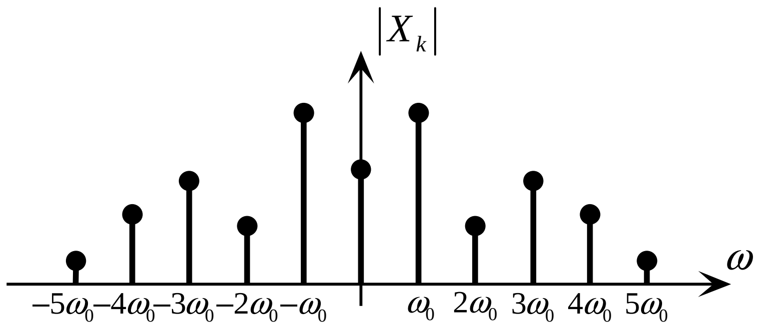
$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\left|X_k\right| \cos\left(k\omega_0 t + \varphi_k\right)$$

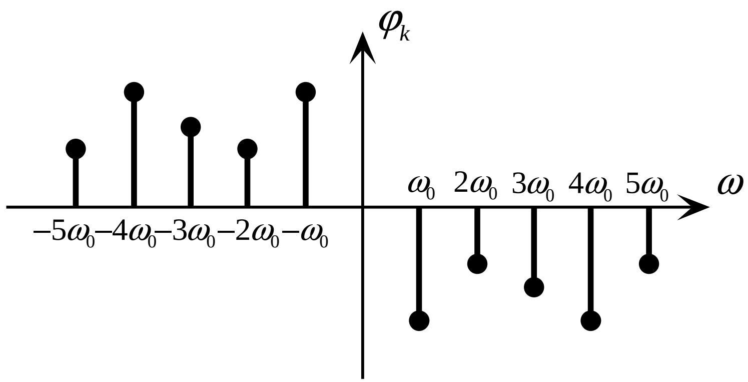
Alternatywna postać trygonometrycznego szeregu Fouriera

$$x(t) = \underbrace{X_0}_{\text{składowa stała}} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{2\left|X_k\right|\cos\left(k\omega_0 t + \varphi_k\right)}_{\text{składowe harmoniczne}}$$

Przebieg okresowy można przedstawić jako sumę **składowej stałej** X_0 i **składowych harmonicznych**, którymi są przebiegi sinusoidalne o **dyskretnych** pulsacjach $k\omega_0$, amplitudach $2|X_k|$ i fazach początkowych φ_k

$\left|X_k\right|$ i φ_k możemy traktować jako funkcje ω, których dziedziną jest dyskretny zbiór $\{k\omega_0: \ k \in \mathbb{Z}\}$. Funkcje te nazywa się odpowiednio: **dyskretnym widmem amplitudowym** i **dyskretnym widmem fazowym**.





$$\cos\left(k\omega_0 t+\varphi_k\right)=\cos\varphi_k\cos k\omega_0 t-\sin\varphi_k\sin k\omega_0 t$$

$$x(t)=X_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(2\left|X_k\right|\cos\varphi_k\cos k\omega_0 t-2\left|X_k\right|\sin\varphi_k\sin k\omega_0 t\right)$$

$$x(t)=X_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos k\omega_0 t+b_k\sin k\omega_0 t\right)$$

$$a_k=2\left|X_k\right|\cos\varphi_k=2\,\mathrm{Re}\left\{X_k\right\}=X_k+X_{-k}$$

$$b_k=-2\left|X_k\right|\sin\varphi_k=-2\,\mathrm{Im}\left\{X_k\right\}=\mathrm{j}\left(X_k-X_{-k}\right)$$

$$X_k=\frac{a_k-\mathrm{j}b_k}{2}$$

Równość Parsevala

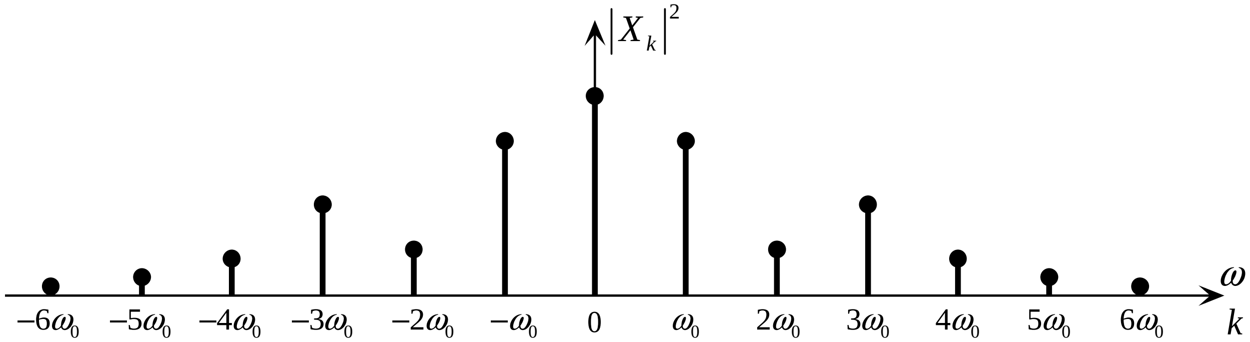
$$P_x = \left\langle x(t), x(t) \right\rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| X_k \right|^2 = X_0^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \left| X_k \right|^2$$

$2\left|X_k\right|$ — amplituda k-tej harmonicznej

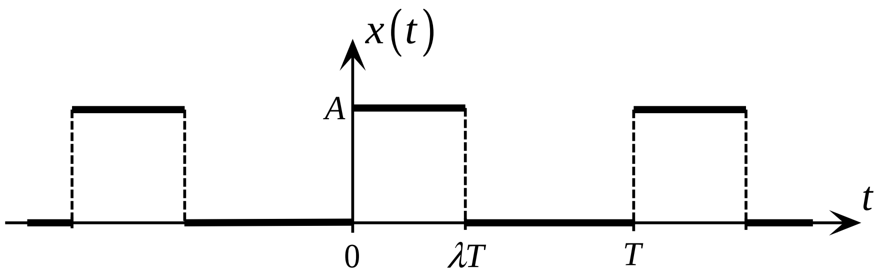
$\dfrac{\left(2\left|X_k\right|\right)^2}{2} = 2\left|X_k\right|^2$ — moc k-tej harmonicznej, X_0^2 — moc składowej stałej

Moc sygnału okresowego jest równa sumie mocy składowej stałej i mocy składowych harmonicznych

Funkcję $\left|X_k\right|^2$, określoną na **dyskretnym** zbiorze $\{k\omega_0 : k \in \mathbb{Z}\}$, nazywa się **dyskretnym widmem mocy**.



Przykład 1.



$$0 < \lambda < 1$$

$$X_k = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_0 t}\mathrm{d}t \quad = \frac{1}{T}\left[\int_0^{\lambda T} A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_0 t}\mathrm{d}t + \int_{\lambda T}^{T} 0\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_0 t}\mathrm{d}t\right] = \frac{A}{T}\int_0^{\lambda T}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

$k \neq 0$

$$X_k = \frac{A}{T}\left[\frac{1}{-\mathrm{j}k\omega_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_0 t}\right]_0^{\lambda T} = \frac{A}{\mathrm{j}k\omega_0 T}\left(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_0\lambda T}\right)$$

$$\omega_0 T = 2\pi \qquad \Rightarrow \qquad X_k = \frac{A}{2\mathrm{j}k\pi}\left(1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}k\pi\lambda}\right) = \frac{A}{k\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\pi\lambda}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\pi\lambda}}{2\mathrm{j}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\pi\lambda} = \frac{A\sin(k\pi\lambda)}{k\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\pi\lambda}$$

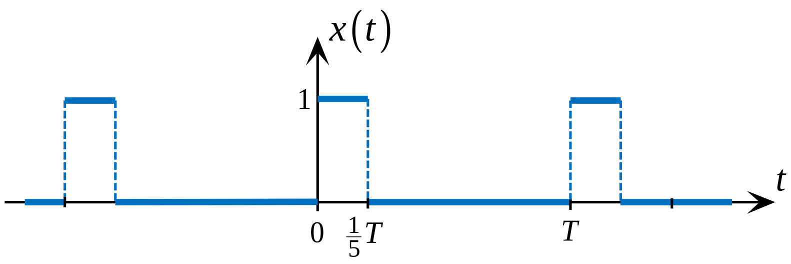
$k = 0$

$$X_0 = \frac{A}{T}\int_0^{\lambda T}\mathrm{d}t = A\lambda$$

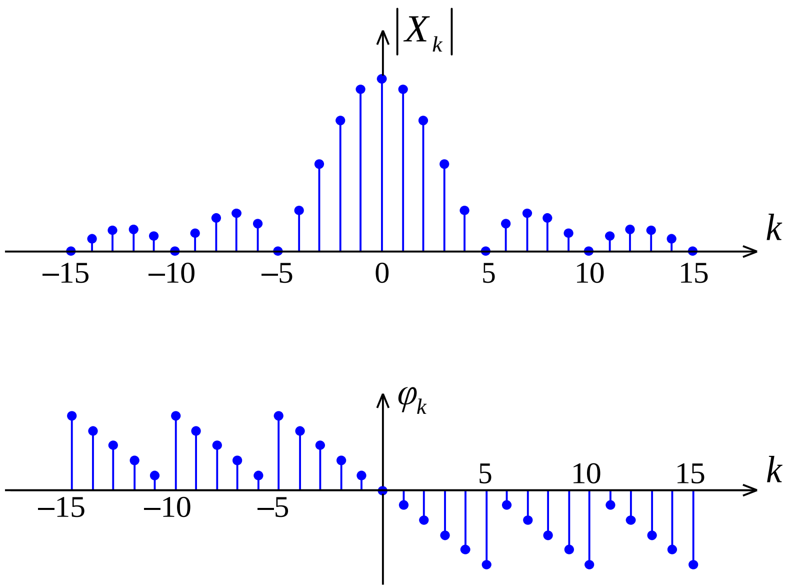
$A = 1, \quad \lambda = \frac{1}{5}$

$$X_k = \begin{cases} \dfrac{\sin(0,2k\pi)}{k\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}0,2k\pi} & k \neq 0 \\ 0,2 & k = 0 \end{cases}$$

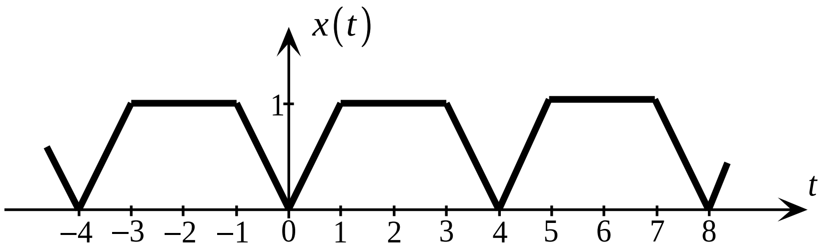
Reprezentacja w dziedzinie czasu



Reprezentacja w dziedzinie częstotliwości



Przykład 2.

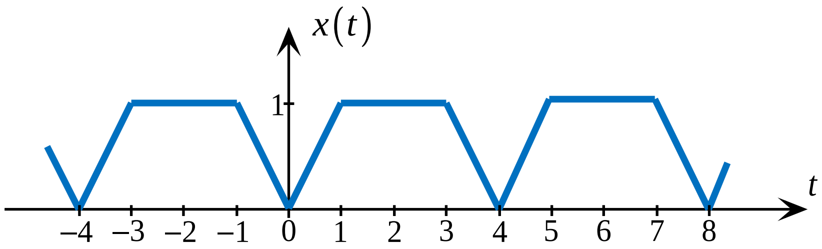


$$T = 4, \quad \omega_0 = \frac{\pi}{2}$$

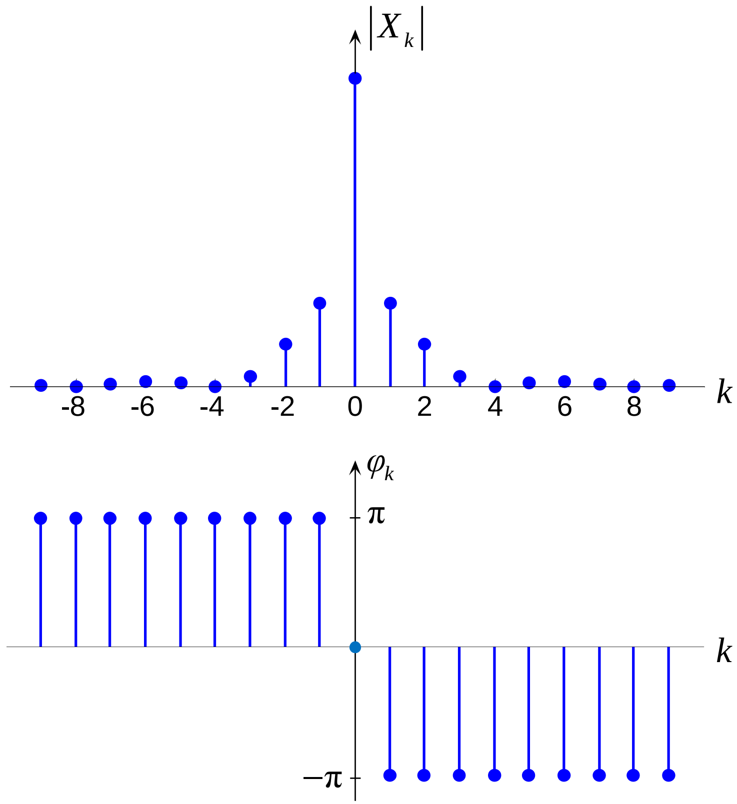
$$X_k = \frac{1}{4}\left[\int_0^1 t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{\pi}{2}t}\,\mathrm{d}t + \int_1^3 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{\pi}{2}t}\,\mathrm{d}t + \int_3^4 (4-t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{\pi}{2}t}\,\mathrm{d}t\right]$$

$$X_k = \begin{cases} \dfrac{3}{4} & \text{gdy} \quad k = 0 \\[2ex] -\dfrac{4\sin^2\dfrac{k\pi}{4}}{k^2\pi^2} & \text{gdy} \quad k \neq 0 \end{cases}$$

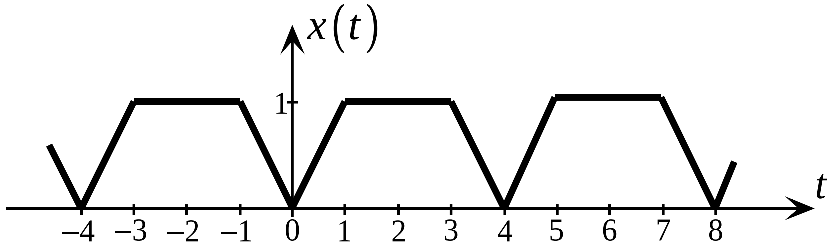
Reprezentacja w dziedzinie czasu

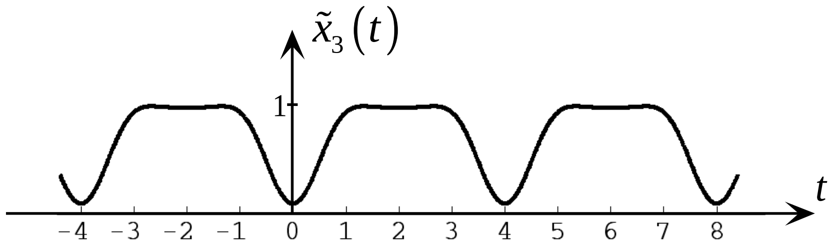


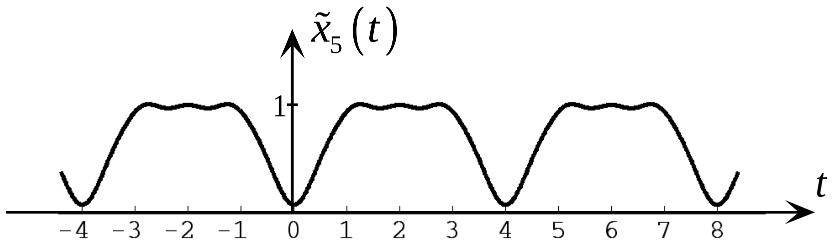
Reprezentacja w dziedzinie częstotliwości

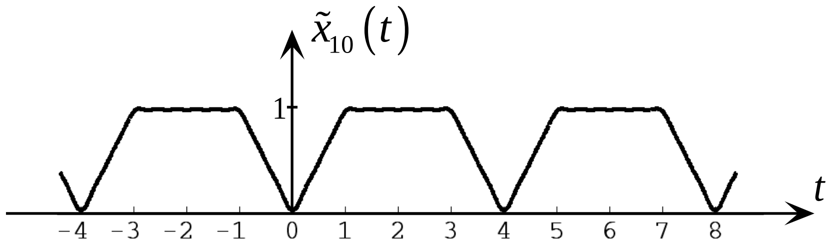


Aproksymacja szeregiem skończonym







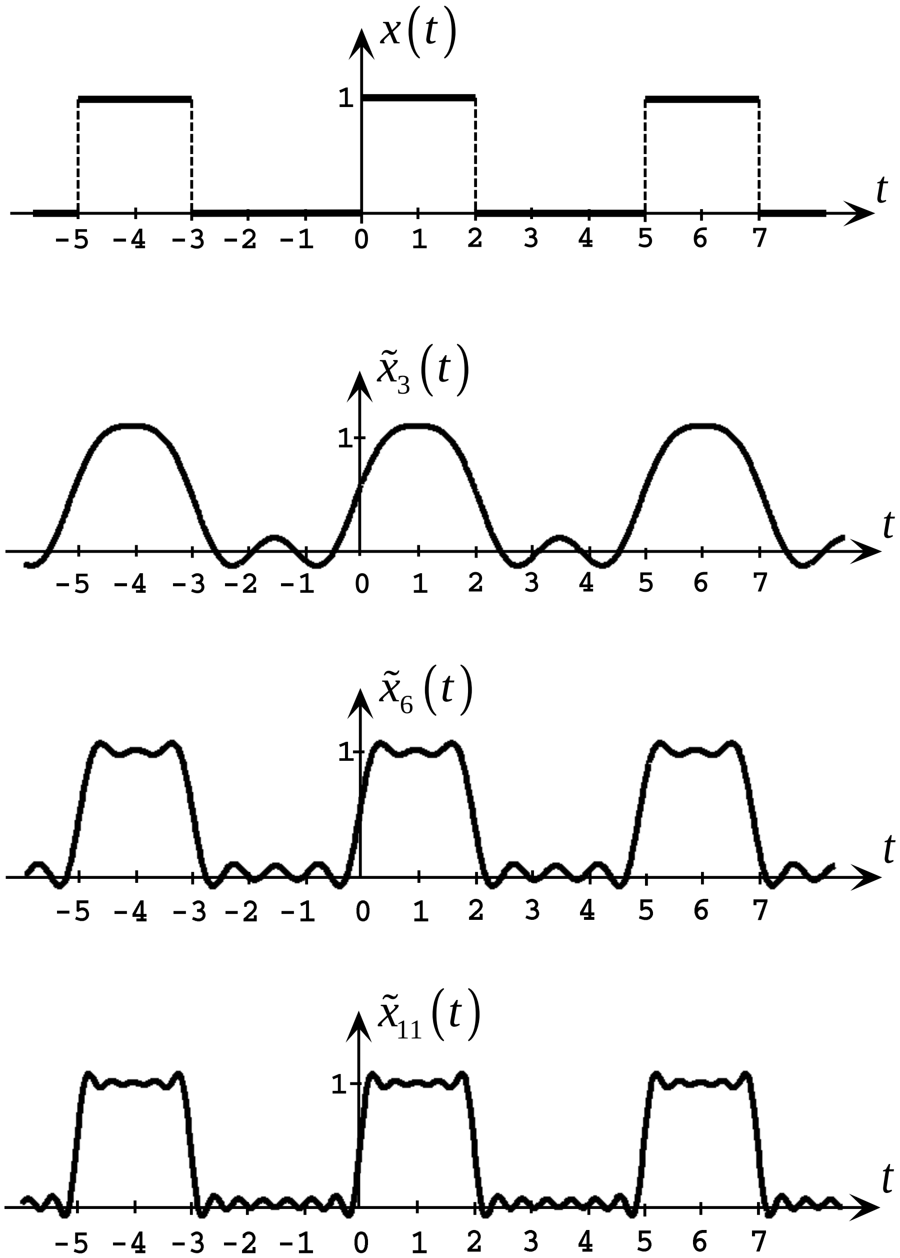


$$T = 4, \quad \omega_0 = \frac{\pi}{2},$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t},$$

$$X_k = -\frac{4\sin^2 \dfrac{k\pi}{4}}{k^2\pi^2}, \quad k \neq 0, \quad X_0 = \frac{3}{4}.$$

$$\tilde{x}_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} X_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t}$$

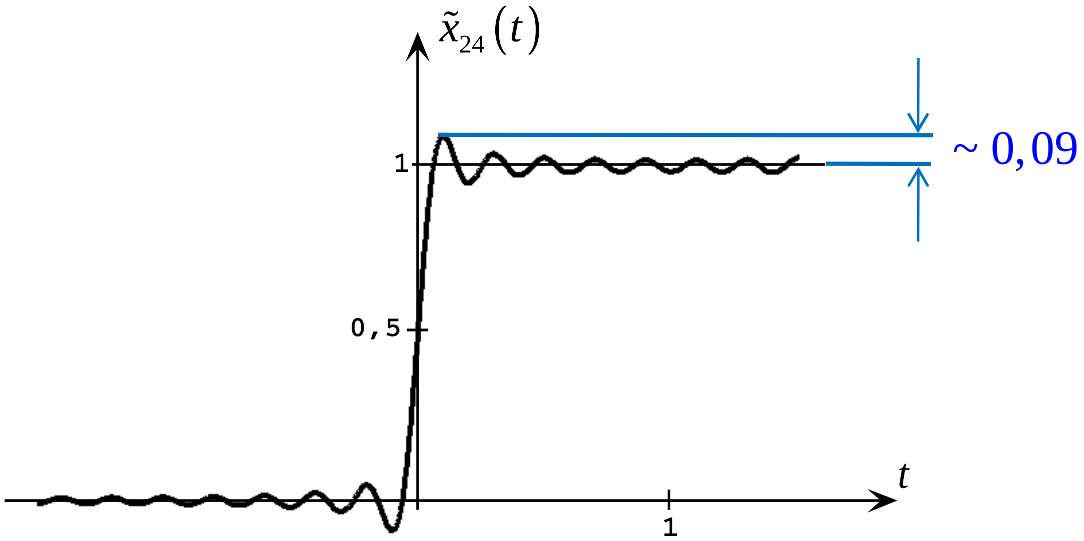


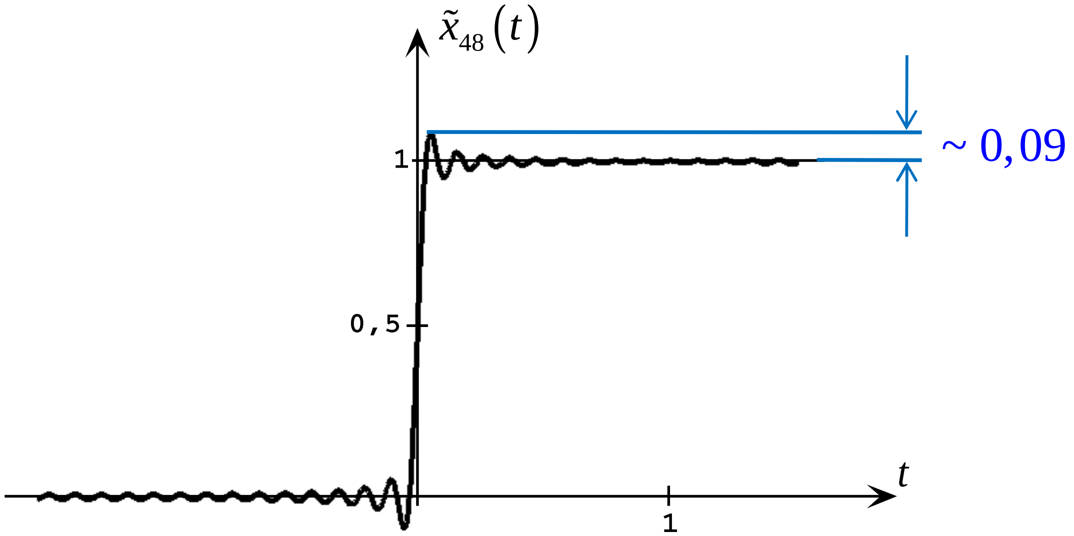
$$T=5,\quad \omega_0=\frac{2\pi}{5},$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t},$$

$$X_k=\frac{\sin k\dfrac{2\pi}{5}}{k\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{5}},\quad k\neq 0,\quad X_0=\frac{2}{5}.$$

$$\tilde{x}_n(t)=\sum_{k=-n}^{n} X_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t}$$





Efekt Gibbsa

Jeżeli funkcja $x(t)$ ma nieciągłość w punkcie t_0, to

1. $$\left.\sum_{k=-n}^{n} X_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t}\right|_{t=t_0} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{x(t_0-)+x(t_0+)}{2}.$$

2. W otoczeniu t_0 suma szeregu ma zafalowania o wartości

   $$\sim 0{,}09\left|x(t_0+)-x(t_0-)\right| \; .$$

   Wartość ta praktycznie nie zależy od n. Zjawisko to nazywa się **efektem Gibbsa**.

Sygnały impulsowe, różne o zera w przedziale [0, *T*]

Przestrzeń $L^2(0,T)$

$T = 1$

Szereg Haara

Bazą przestrzeni $L^2(0,1)$ może być zbiór ortonormalny funkcji Haara

$$x_0(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1)$$

$$x_m^i(t) = \sqrt{2^m}\left[\mathbf{1}\left(t - \frac{2i-2}{2^{m+1}}\right) - 2\cdot\mathbf{1}\left(t - \frac{2i-1}{2^{m+1}}\right) + \mathbf{1}\left(t - \frac{2i}{2^{m+1}}\right)\right],$$

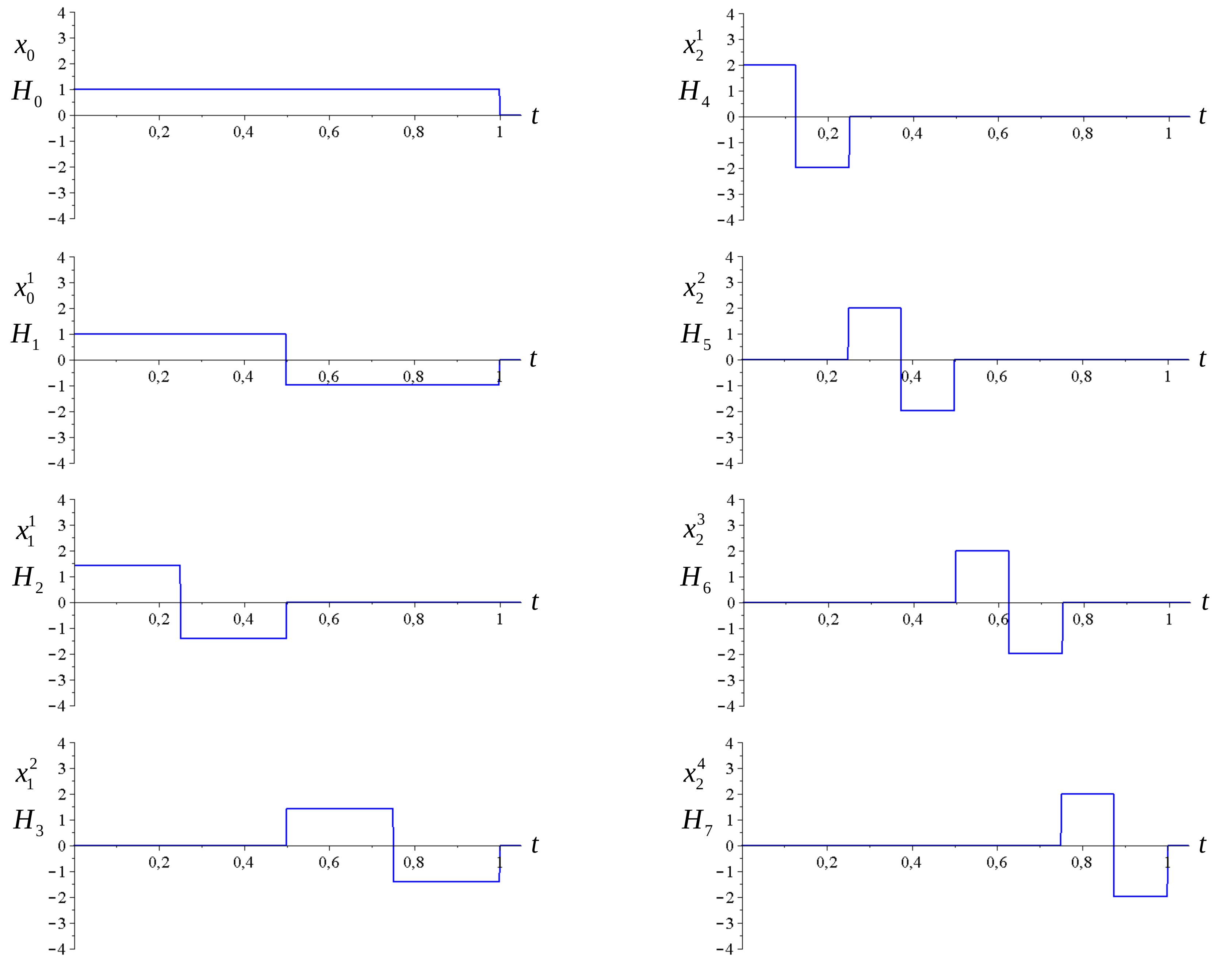
$$m = 0,1,2,3,\ldots$$

$$i = 1,2,3,\ldots,2^m$$

Funkcje można przenumerować następująco:

$$H_0(t) = x_0(t)$$

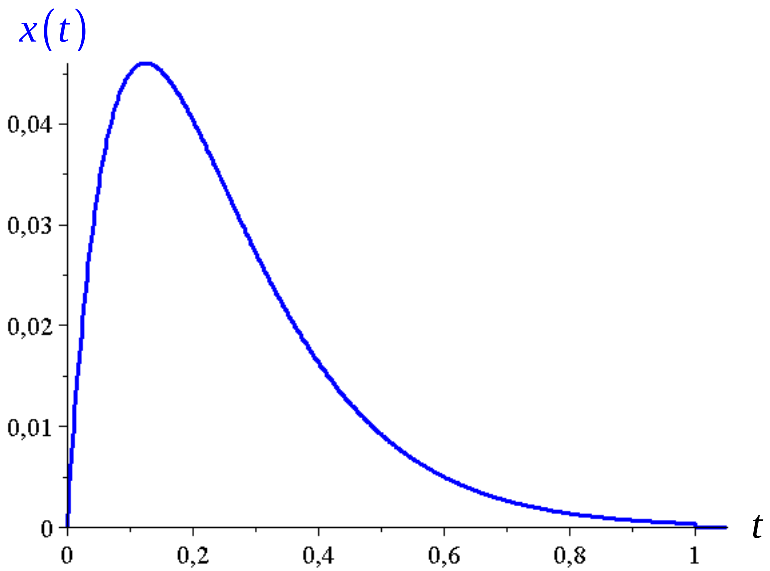
$$H_k(t) = x_m^i(t) \quad \text{gdzie} \quad k = 2^m + i - 1 \quad \text{oraz} \quad i = 1,\ldots,2^m$$



x_0
H_0
x_0^1
H_1
x_1^1
H_2
x_1^2
H_3
x_2^1
H_4
x_2^2
H_5
x_2^3
H_6
x_2^4
H_7
t
4 3 2 1 0 -1 -2 -3 -4
0,2 0,4 0,6 0,8 1

Przykład 1.

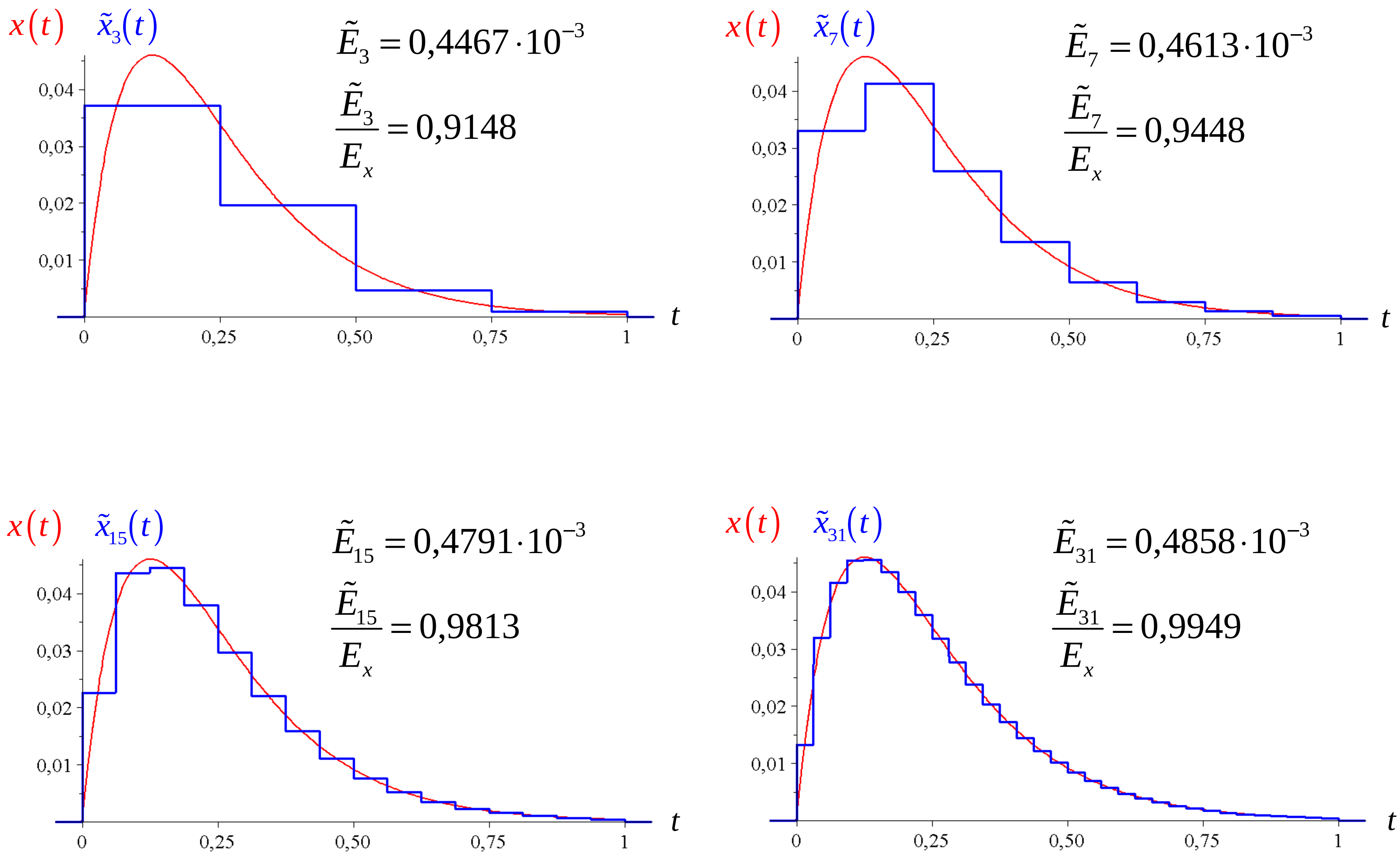
$$x(t) = t\mathrm{e}^{-8t}, \quad t \in [0,1]$$



$$E_x = \int_0^1 x^2(t)\,\mathrm{d}t = 0{,}48827 \cdot 10^{-3}$$

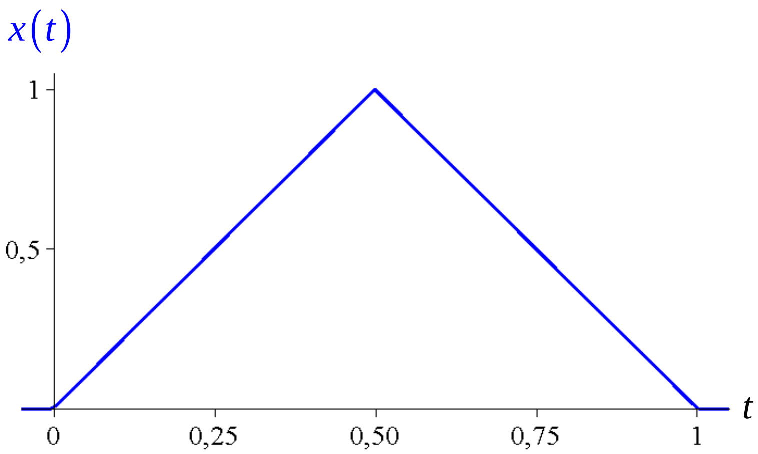
$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k H_k(t) \qquad \text{gdzie} \qquad \alpha_k = \int_0^1 x(t) H_k(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\tilde{x}_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k H_k(t) \qquad\qquad \tilde{E}_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2$$


$x(t)$ $\tilde{x}_3(t)$
$\tilde{E}_3 = 0{,}4467 \cdot 10^{-3}$
$\dfrac{\tilde{E}_3}{E_x} = 0{,}9148$
$x(t)$ $\tilde{x}_7(t)$
$\tilde{E}_7 = 0{,}4613 \cdot 10^{-3}$
$\dfrac{\tilde{E}_7}{E_x} = 0{,}9448$
$x(t)$ $\tilde{x}_{15}(t)$
$\tilde{E}_{15} = 0{,}4791 \cdot 10^{-3}$
$\dfrac{\tilde{E}_{15}}{E_x} = 0{,}9813$
$x(t)$ $\tilde{x}_{31}(t)$
$\tilde{E}_{31} = 0{,}4858 \cdot 10^{-3}$
$\dfrac{\tilde{E}_{31}}{E_x} = 0{,}9949$
0,04
0,03
0,02
0,01
0
0,25
0,50
0,75
1
t

Przykład 2.

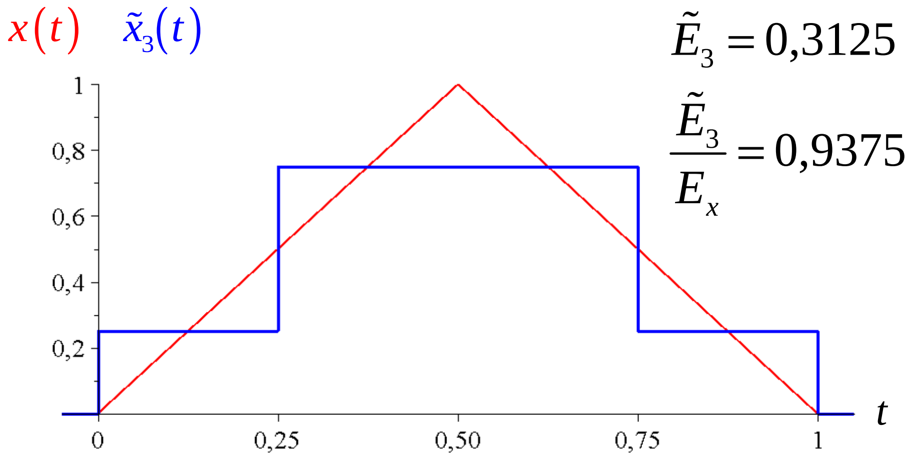
$$x(t) = 2t\mathbf{1}(t) - 4\left(t - \frac{1}{2}\right)\mathbf{1}\left(t - \frac{1}{2}\right) + 2(t-1)\mathbf{1}(t-1)$$



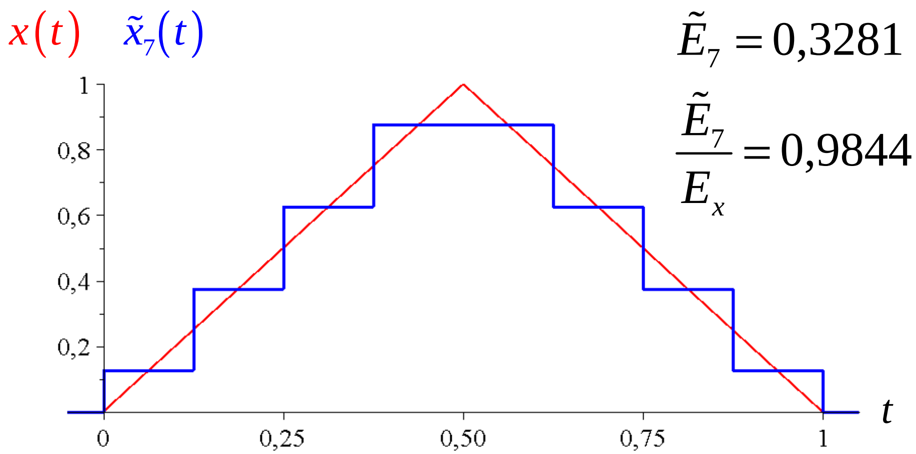
$$E_x = \int_0^1 x^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3} \approx 0{,}3333$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k H_k(t) \qquad \text{gdzie} \qquad \alpha_k = \int_0^1 x(t) H_k(t)\,\mathrm{d}t$$

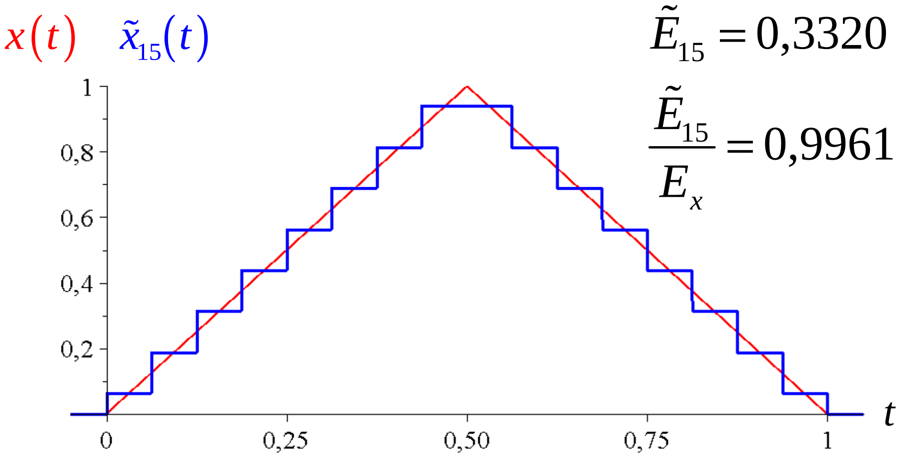
$$\tilde{x}_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k H_k(t) \qquad \tilde{E}_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2$$



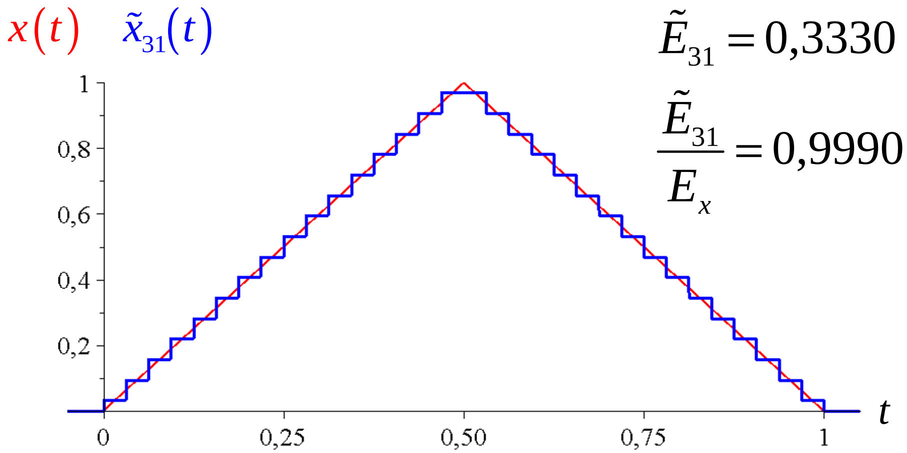
x(t)
x̃3(t)
Ẽ3 = 0,3125
Ẽ3 / Ex = 0,9375
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0,25
0,50
0,75
1
t



x(t)
x̃7(t)
Ẽ7 = 0,3281
Ẽ7 / Ex = 0,9844
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0,25
0,50
0,75
1
t



x(t)
x̃15(t)
Ẽ15 = 0,3320
Ẽ15 / Ex = 0,9961
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0,25
0,50
0,75
1
t



x(t)
x̃31(t)
Ẽ31 = 0,3330
Ẽ31 / Ex = 0,9990
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0,25
0,50
0,75
1
t

Szereg Walsha

Bazą przestrzeni $L^2(0,1)$ może być zbiór ortonormalny funkcji Walsha

$$x_0(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1)$$

$$x_1(t) = \mathbf{1}(t) - 2\cdot\mathbf{1}\left(t-\tfrac{1}{2}\right) + \mathbf{1}(t-1)$$

$$x_2^1(t) = \mathbf{1}(t) - 2\cdot\mathbf{1}\left(t-\tfrac{1}{4}\right) + 2\cdot\mathbf{1}\left(t-\tfrac{3}{4}\right) - \mathbf{1}(t-1)$$

$$x_2^2(t) = \mathbf{1}(t) - 2\cdot\mathbf{1}\left(t-\tfrac{1}{4}\right) + 2\cdot\mathbf{1}\left(t-\tfrac{1}{2}\right) - 2\cdot\mathbf{1}\left(t-\tfrac{3}{4}\right) + \mathbf{1}(t-1)$$

i rekurencyjnie dla $m = 3, 4, \ldots$ oraz $i = 1, \ldots, 2^{m-1}$

$$x_{m+1}^{2i-1}(t) = \begin{cases} x_m^i(2t) & \text{dla } 0 \le t < \frac{1}{2} \\ (-1)^{i+1} x_m^i(2t-1) & \text{dla } \frac{1}{2} < t \le 1 \end{cases}$$

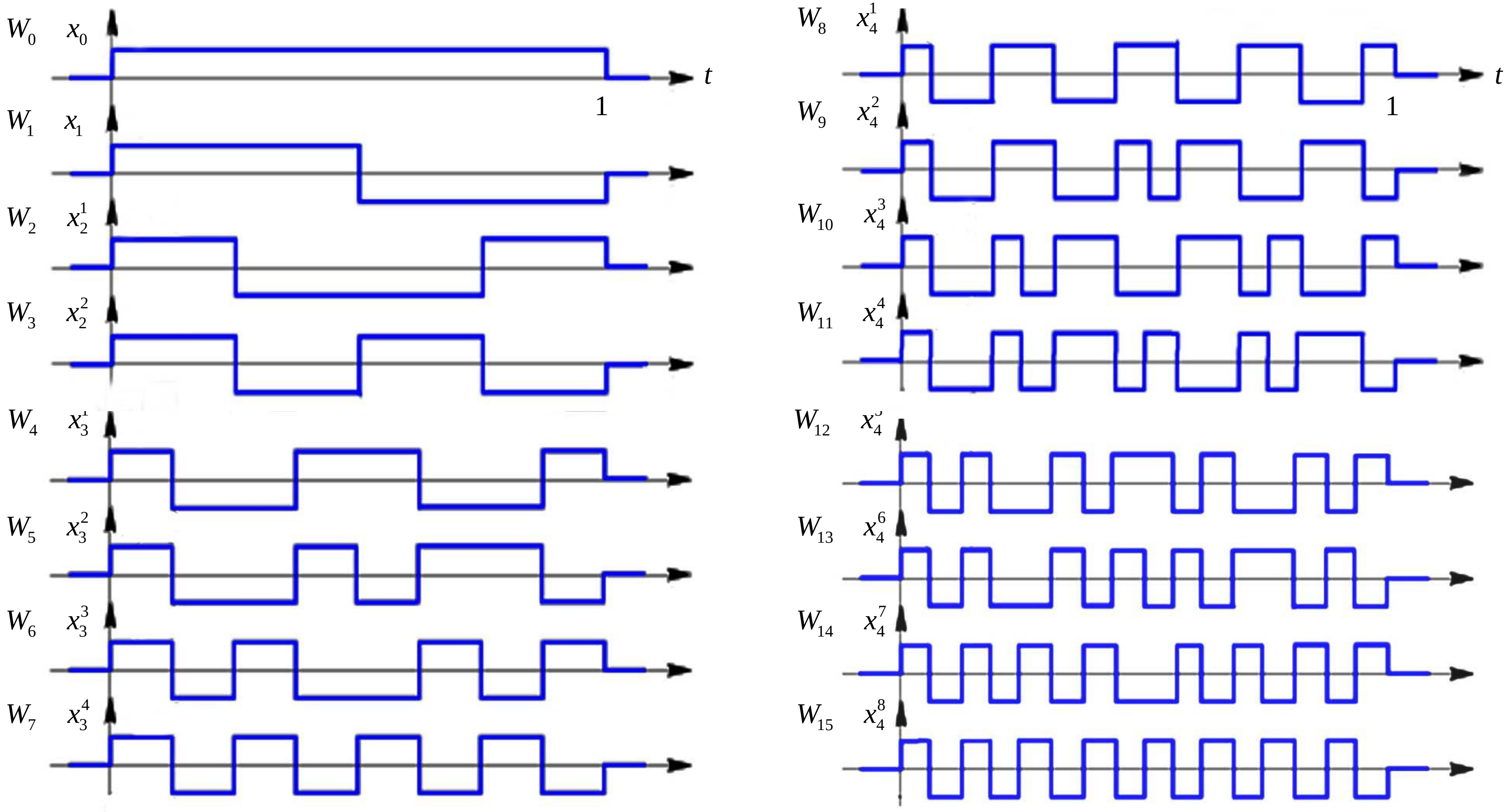
$$x_{m+1}^{2i}(t) = \begin{cases} x_m^i(2t) & \text{dla } 0 \le t < \frac{1}{2} \\ (-1)^{i} x_m^i(2t-1) & \text{dla } \frac{1}{2} < t \le 1 \end{cases}$$

Można przenumerować:

$$W_0(t) = x_0(t), \quad W_1(t) = x_1(t),$$

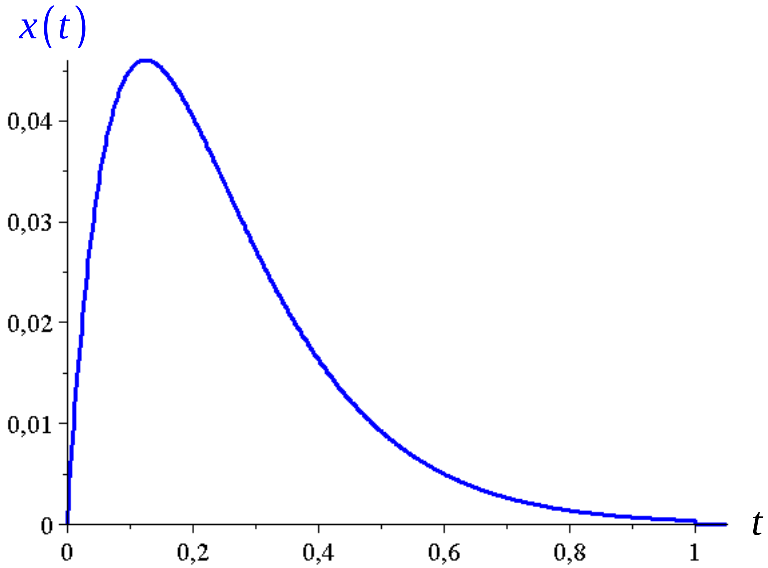
$$W_k(t) = x_m^i(t), \qquad k = 2^{m-1} + i - 1$$

$$i = 1, \ldots, 2^{m-1}$$



W_0 x_0
t
1
W_1 x_1
W_2 x_2^1
W_3 x_2^2
W_4 x_3
W_5 x_3^2
W_6 x_3^3
W_7 x_3^4
W_8 x_4^1
t
1
W_9 x_4^2
W_{10} x_4^3
W_{11} x_4^4
W_{12} x_4
W_{13} x_4^6
W_{14} x_4^7
W_{15} x_4^8

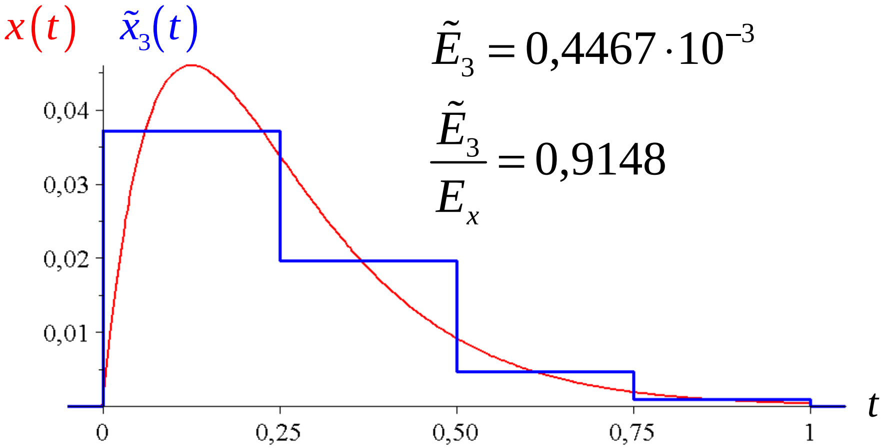
$$x(t) = t\mathrm{e}^{-8t}, \quad t \in [0,1]$$



$$E_x = \int_0^1 x^2(t)\,\mathrm{d}t = 0{,}48827 \cdot 10^{-3}$$

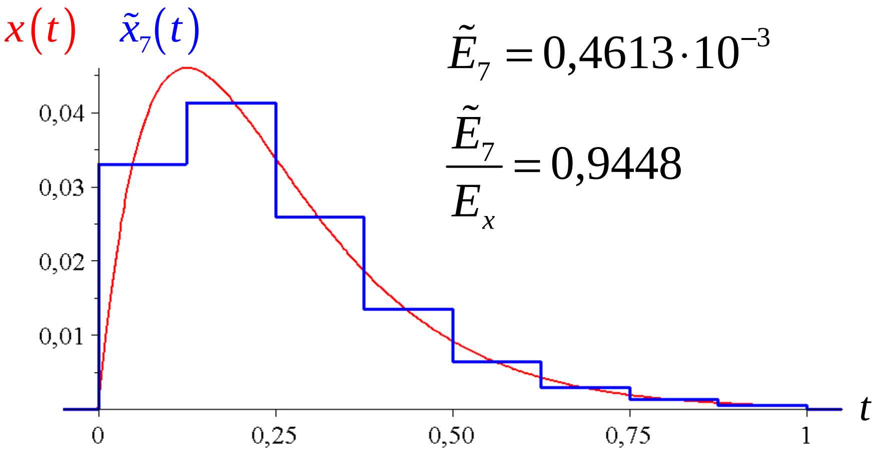
$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k W_k(t) \qquad \text{gdzie} \qquad \beta_k = \int_0^1 x(t) W_k(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\tilde{x}_n = \sum_{k=0}^{n} \beta_k W_k(t) \qquad \tilde{E}_n = \sum_{k=0}^{n} \beta_k^2$$



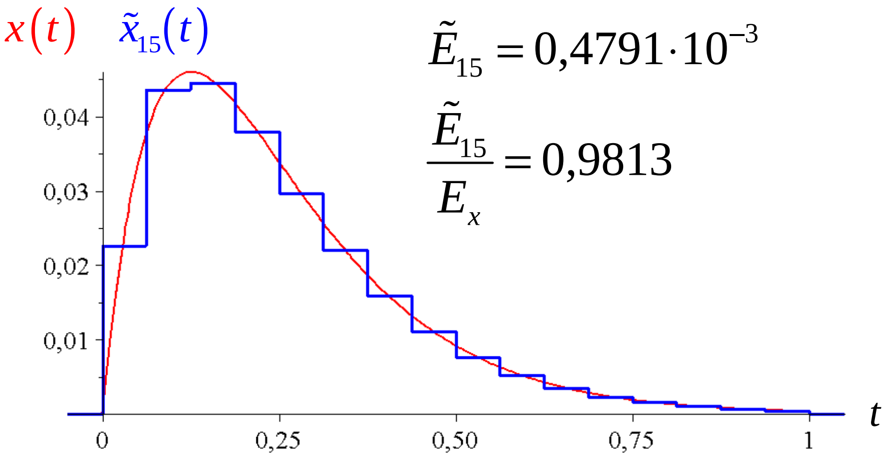
$$\tilde{E}_3 = 0{,}4467 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{\tilde{E}_3}{E_x} = 0{,}9148$$



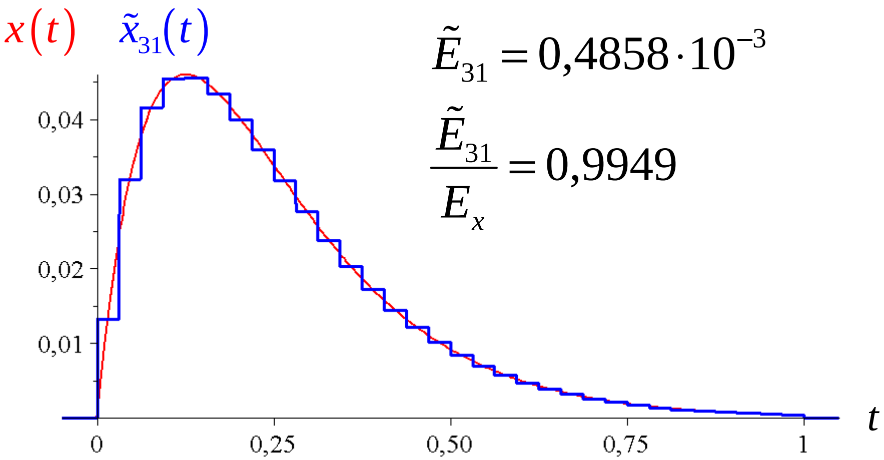
$$\tilde{E}_7 = 0{,}4613 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{\tilde{E}_7}{E_x} = 0{,}9448$$



$$\tilde{E}_{15} = 0{,}4791 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{\tilde{E}_{15}}{E_x} = 0{,}9813$$



$$\tilde{E}_{31} = 0{,}4858 \cdot 10^{-3}$$

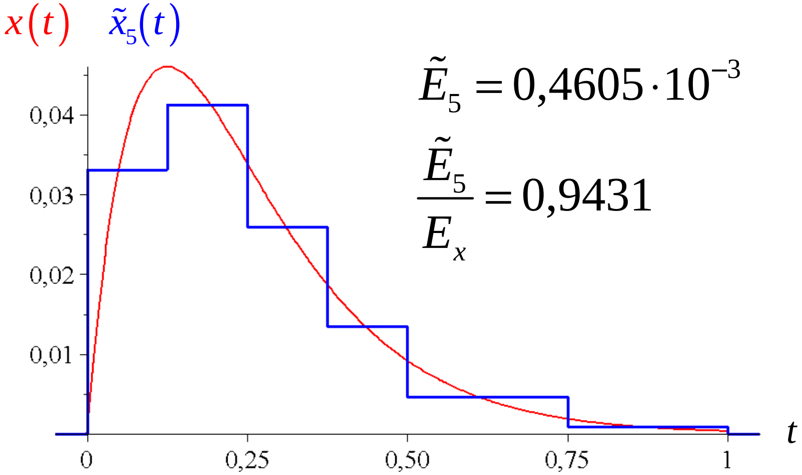
$$\frac{\tilde{E}_{31}}{E_x} = 0{,}9949$$

Gdy $n = 2^p - 1, \quad p \in \mathbb{N}$

$$\tilde{x}_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k H_k(t) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k W_k(t) \qquad \tilde{E}_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2 = \sum_{k=0}^{n} \beta_k^2$$

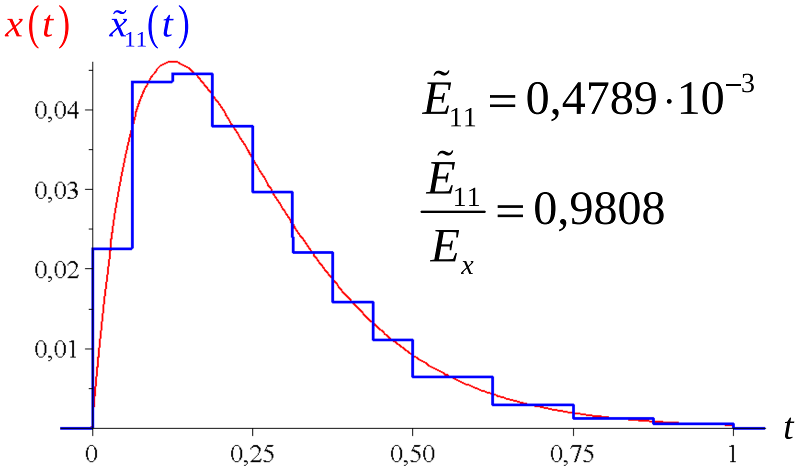
Gdy $n \neq 2^p - 1$

Szereg Haara



$$\tilde{E}_5 = 0{,}4605 \cdot 10^{-3}$$

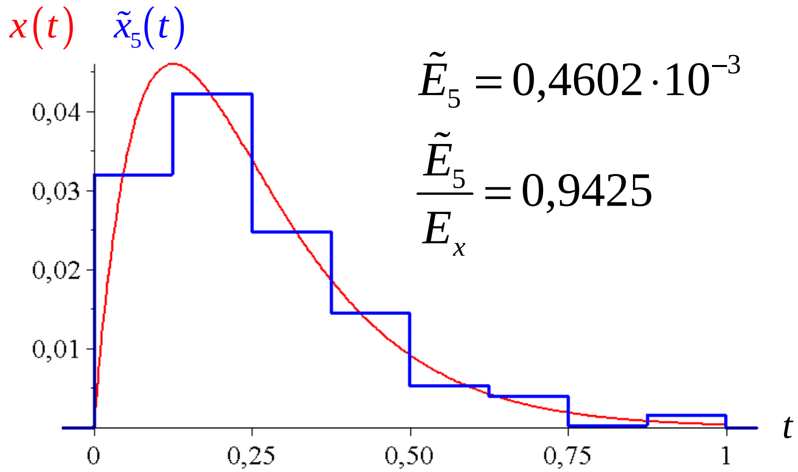
$$\frac{\tilde{E}_5}{E_x} = 0{,}9431$$



$$\tilde{E}_{11} = 0{,}4789 \cdot 10^{-3}$$

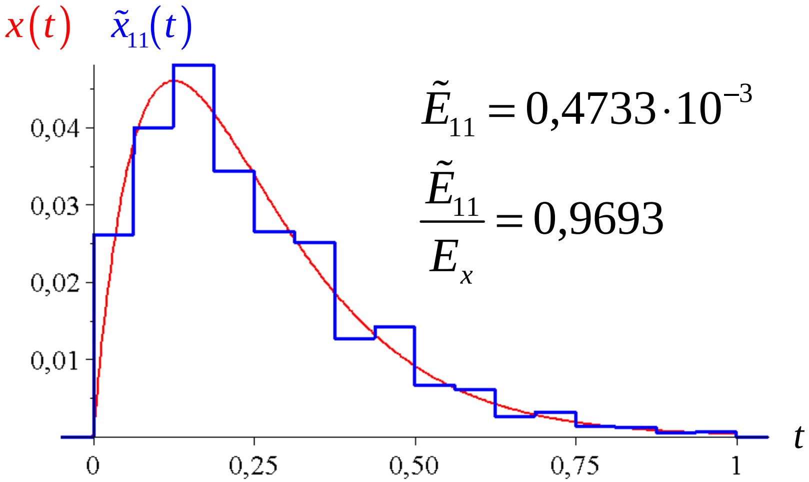
$$\frac{\tilde{E}_{11}}{E_x} = 0{,}9808$$

Szereg Walsha



$$\tilde{E}_5 = 0{,}4602 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{\tilde{E}_5}{E_x} = 0{,}9425$$



$$\tilde{E}_{11} = 0{,}4733 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{\tilde{E}_{11}}{E_x} = 0{,}9693$$

Sygnały impulsowe, różne o zera w przedziale [0, *T*]

Przestrzeń $L^2(0,T)$, gdzie przedział $[0,T]$ jest *przedziałem obserwacji* sygnałów $x(t)$ o skończonej energii

$$E_x = \int_0^T |x(t)|^2 \,\mathrm{d}t < \infty$$

Przestrzeń jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym

$$\langle x, y\rangle = \int_0^T x(t)\, y^*(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x, y \in L^2(0,T)$$

i normą

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\int_0^T |x(t)|^2 \,\mathrm{d}t}$$

Bazą ortonormalną może być zbiór zespolonych funkcji wykładniczych

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\frac{2\pi}{T}t} : \quad k \in \mathbb{Z} \right\},$$

Wówczas, gdy $x(t) \in L^2(0,T)$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \frac{1}{\sqrt{T}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\frac{2\pi}{T}t}, \qquad \alpha_k \in \mathbb{C}$$

gdzie

$$\alpha_k = \left\langle x, \frac{1}{\sqrt{T}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\frac{2\pi}{T}t} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T x(t) \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\frac{2\pi}{T}t} \right)^* \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T x(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{T}t} \mathrm{d}t$$

Po oznaczeniu

$$\alpha_k \frac{1}{\sqrt{T}} = X_k, \qquad \frac{2\pi}{T} = \omega_0$$

otrzymujemy

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t}, \qquad X_k \in \mathbb{C} \\ X_k &= \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_0 t}\mathrm{d}t, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \end{aligned}}$$

Szereg Fouriera jest zbieżny do sygnału $x(t)$ gdy $t \in [0,T]$

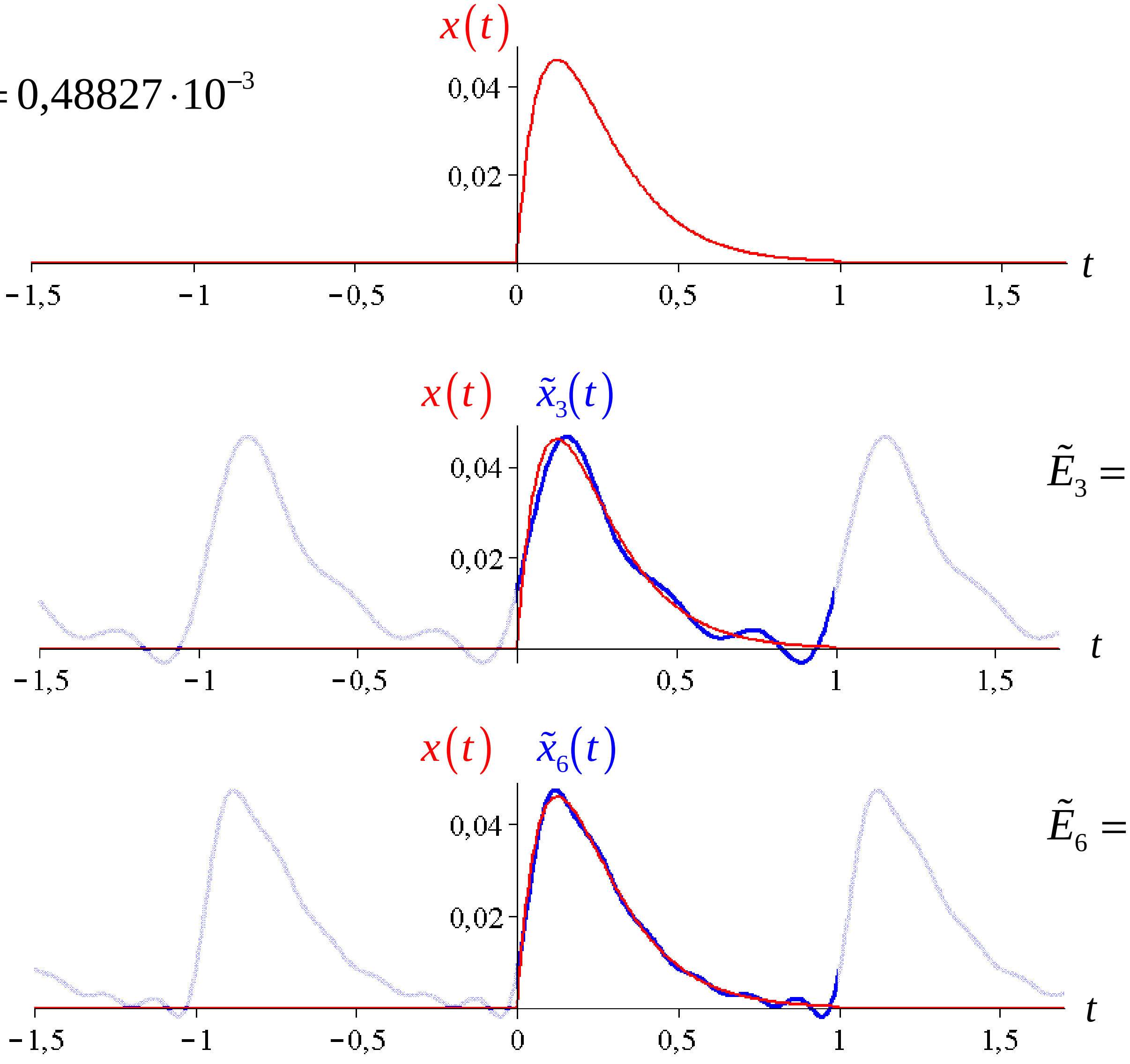
Poza przedziałem $[0,T]$ szereg ten jest zbieżny do funkcji okresowej, o okresie T, która jest okresowym powieleniem sygnału $x(t)$

Przykład 1.

$$x(t) = te^{-8t}, \quad t \in [0,1]$$

$$E_x = \int_0^1 x^2(t)\,\mathrm{d}t = 0{,}48827 \cdot 10^{-3}$$

$T = 1$



$\tilde{E}_3 = 0{,}98304 E_x$

$\tilde{E}_6 = 0{,}99699 E_x$

Przykład 2.

$$x(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1)$$

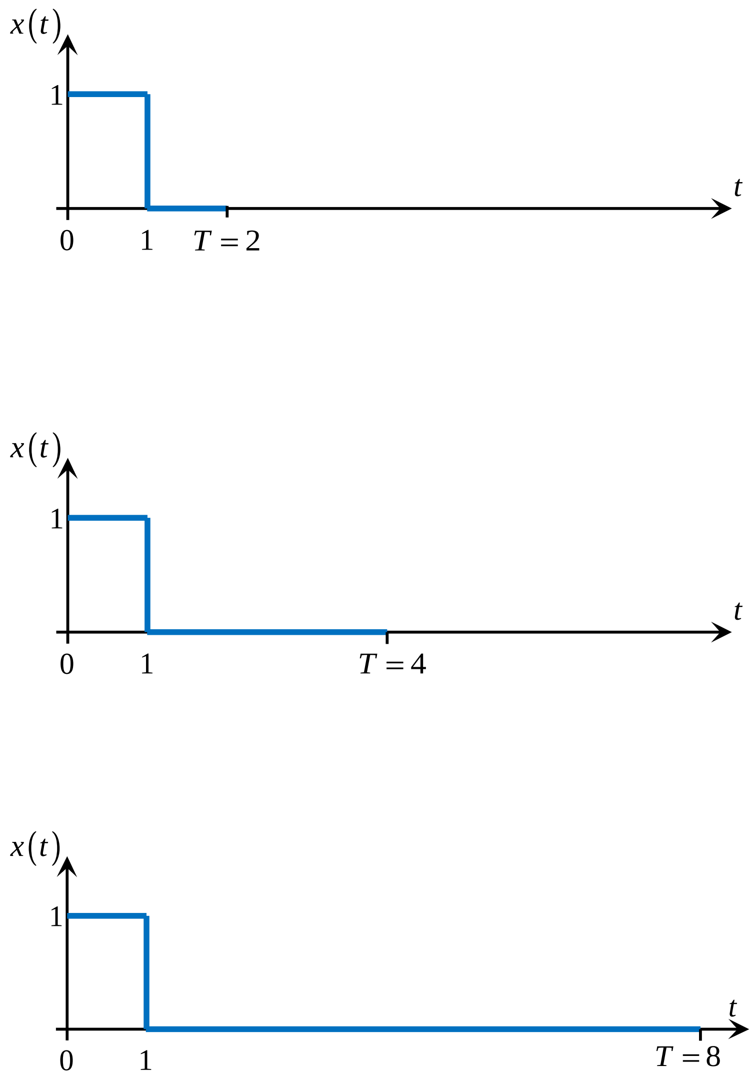
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$X_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_0 t}\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_0 t}\mathrm{d}t \overset{k\neq 0}{=} \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_0}}{\mathrm{j}k\omega_0 T} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{k\pi}{T}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{k\pi}{T}}}{2\mathrm{j}k\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{k\pi}{T}} = \frac{1}{T}\,\frac{\sin\frac{k\pi}{T}}{\frac{k\pi}{T}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{k\pi}{T}}$$

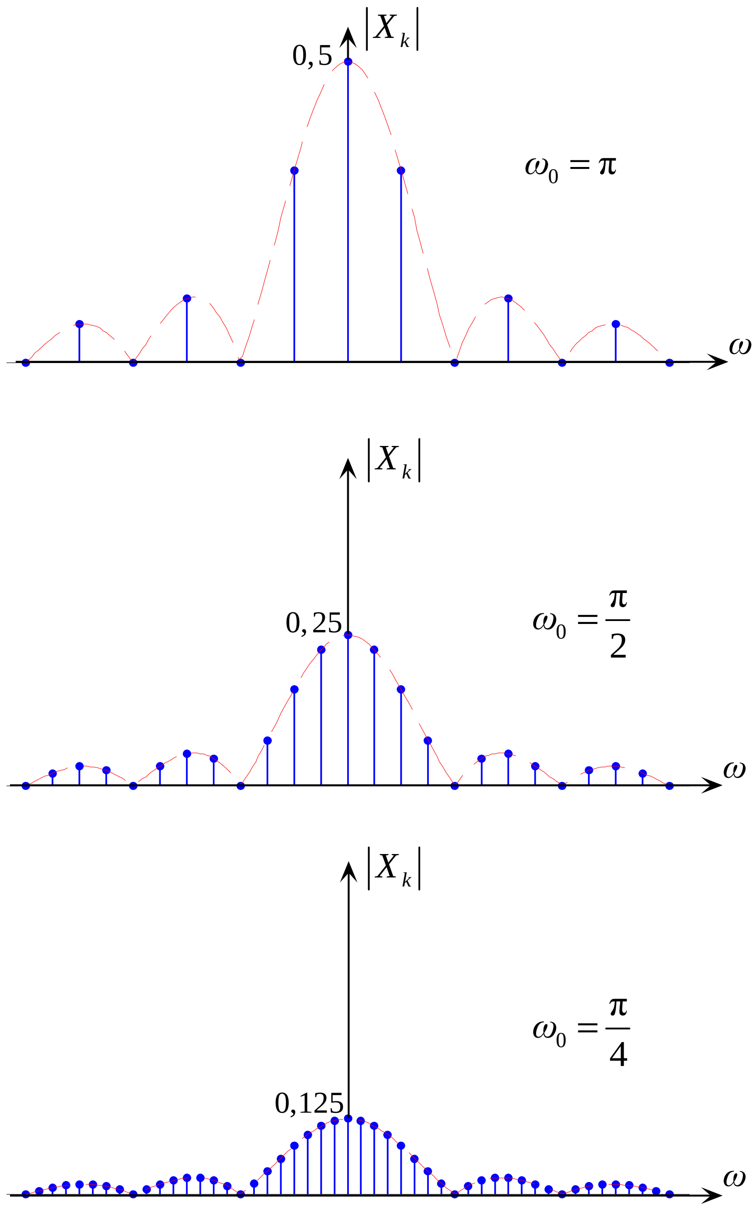
$$X_0 = \frac{1}{T}$$

$$|X_k| = \frac{1}{T}\left|\frac{\sin\frac{k\pi}{T}}{\frac{k\pi}{T}}\right|$$

Reprezentacja w dziedzinie czasu



Reprezentacja w dziedzinie częstotliwości



Splot funkcji

(*krótkie korepetycje z matematyki*)

$x(t),\ y(t)$ — dowolne funkcje

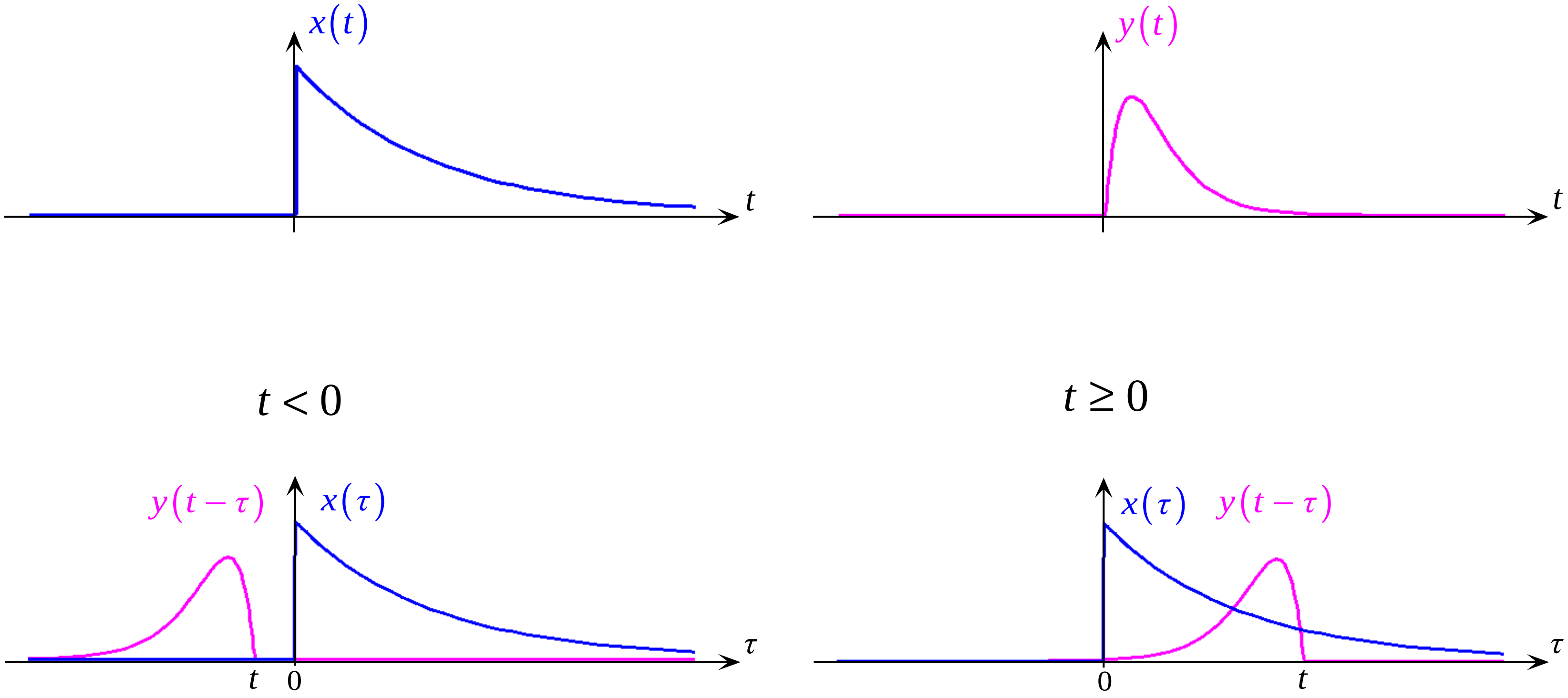
Splotem funkcji $x(t)$ i $y(t)$ nazywa się funkcję $z(t)$, określoną jako

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, y(\tau)\,\mathrm{d}\tau = y(t) * x(t)$$

Własności splotu:

- przemienność: $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$
- łączność: $x(t) * \left[y(t) * w(t) \right] = \left[x(t) * y(t) \right] * w(t)$
- rozdzielność względem dodawania: $\left[x_1(t) + x_2(t) \right] * y(t) = x_1(t) * y(t) + x_2(t) * y(t)$
- mnożenie splotu przez stałą : $a\left[x(t) * y(t) \right] = \left[a x(t) \right] * y(t) = x(t) * \left[a y(t) \right]$

Jeżeli $x(t) \equiv 0$ i $y(t) \equiv 0$ dla $t < 0$



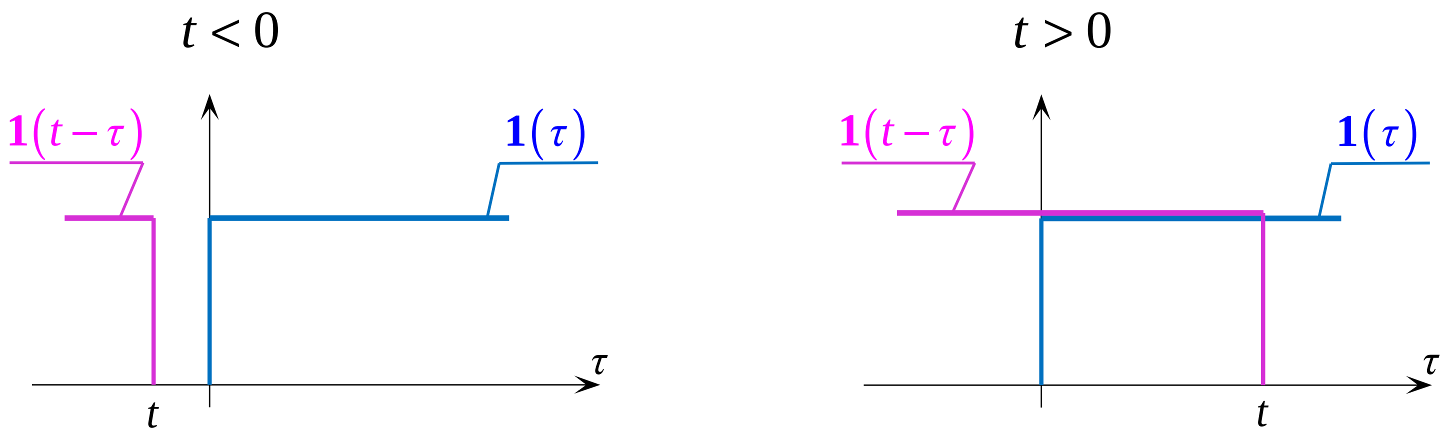
$$x(t) * y(t) = \begin{cases} \int_0^t x(\tau)\, y(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Przykład

$$x(t) = \mathrm{e}^{-t} \sin t \cdot \mathbf{1}(t)$$

$$y(t) = \mathbf{1}(t)$$

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\tau} \sin \tau \, \mathbf{1}(\tau) \mathbf{1}(t-\tau) \, \mathrm{d}\tau$$



$$z(t) = \left[\int_0^t \mathrm{e}^{-\tau} \sin \tau \, \mathrm{d}\tau \right] \mathbf{1}(t) = \left[-\frac{1}{2} \mathrm{e}^{-\tau} (\cos \tau + \sin \tau) \Big|_0^t \right] \mathbf{1}(t) =$$

$$= \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-t} (\cos t + \sin t) \right] \mathbf{1}(t)$$

Splot funkcji i dystrybucji Diraca

$$\delta(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) x(t-\tau) \mathrm{d}\tau = x(t-\tau)\Big|_{\tau=0} = x(t)$$

$$\delta(t-t_0) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-t_0) x(t-\tau) \mathrm{d}\tau = x(t-\tau)\Big|_{\tau=t_0} = x(t-t_0)$$

$$\boxed{x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) \mathrm{d}\tau}$$

$$\delta_T(t) * x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) * x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-kT)$$

Jeżeli $x(t) \in L^2(0,T)$ to $\delta_T(t) * x(t)$ jest okresowym powieleniem sygnału $x(t)$

Ciągłe reprezentacje sygnałów z czasem ciągłym

Przestrzenie Hilberta $L^2(-\infty,\infty)$ i $L^2(0,\infty)$ sygnałów o skończonej energii *nie są przestrzeniami ośrodkowymi* i nie istnieją w nich przeliczalne bazy.

Reprezentacjami tych sygnałów mogą być przekształcenia całkowe, które przyporządkowują elementom danej przestrzeni sygnałów elementy innej przestrzeni funkcyjnej, rzeczywistej lub zespolonej. Ogólnie

$$x(t) = \int_{\Gamma} X(s)\psi(s,t)\,\mathrm{d}s$$

Funkcja $\psi(s,t)$ nosi nazwę ***jądra przekształcenia***. Jest to odpowiednik bazy w reprezentacjach dyskretnych.
$\psi(s,t)$ jako funkcja *t* ***nie musi*** być elementem tej samej przestrzeni co $x(t)$.

Funkcja rzeczywista lub zespolona $X(s)$ zmiennej rzeczywistej lub zespolonej *s* nazywa się ***transformatą sygnału*** $x(t)$ i jest ciągłą reprezentacją tego sygnału.

Jeżeli sygnał $x(t)$ jest określony na zbiorze $t \in \Omega$, to

$$X(s) = \int_{\Omega} x(t)\varphi(t,s)\,\mathrm{d}t$$

Funkcja $\varphi(t,s)$ nazywa się ***jądrem sprzężonym*** przekształcenia.

Twierdzenie:

Jeżeli

$$\int_{\Gamma} \psi(s,t)\varphi(\tau,s)\,\mathrm{d}s = \delta(t-\tau)$$

lub równoważnie

$$\int_{\Omega} \varphi(t,s)\psi(p,t)\,\mathrm{d}t = \delta(s-p)$$

to para przekształceń całkowych jest wzajemnie jednoznaczna

$$\left.\begin{aligned} X(s) &= \int_{\Omega} x(t)\varphi(t,s)\,\mathrm{d}t \\ x(t) &= \int_{\Gamma} X(s)\psi(s,t)\,\mathrm{d}s \end{aligned}\right\} \begin{aligned} t &\in \Omega \\ s &\in \Gamma \end{aligned}$$

Będziemy oznaczać: $x(t) \rightleftharpoons X(s)$

Przekształcenie Hilberta

$$X(s)=\int_{\Omega} x(t)\varphi(t,s)\,\mathrm{d}t,\quad t\in\Omega \qquad x(t)=\int_{\Gamma} X(s)\psi(s,t)\,\mathrm{d}s,\quad s\in\Gamma$$

$$\varphi(t,s)=\frac{1}{\pi(s-t)} \qquad \psi(s,t)=-\frac{1}{\pi(t-s)}$$

$$X(s)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(t)}{s-t}\,\mathrm{d}t \qquad x(t)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{X(s)}{t-s}\,\mathrm{d}s$$

s ma wymiar czasu

$$\left.\begin{aligned} t&\to\tau\\ s&\to t\end{aligned}\right\}\quad X(s)\to\hat{x}(t) \qquad s\to\tau$$

$$\boxed{\hat{x}(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}\,\mathrm{d}\tau \qquad x(t)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{x}(\tau)}{t-\tau}\,\mathrm{d}\tau}$$

$$\hat{x}(t)=\mathcal{H}\{x(t)\} \qquad x(t)=\mathcal{H}^{-1}\{\hat{x}(t)\} \qquad x(t)\rightleftharpoons\hat{x}(t)$$

Parę transformat Hilberta można również zapisać:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\pi t} * x(t) \qquad x(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{x}(\tau)}{t-\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{-1}{\pi t} * \hat{x}(t)$$

Przykłady par transformat Hilberta

$x(t)$ $\rightleftharpoons$	$\hat{x}(t)$
$\cos\omega_0 t$	$\sin\omega_0 t$
$\sin\omega_0 t$	$-\cos\omega_0 t$
$\dfrac{\sin\omega_0 t}{\omega_0 t}$	$\dfrac{1-\cos\omega_0 t}{\omega_0 t}$
$\delta(t)$	$\dfrac{1}{\pi t}$

Własności transformaty Hilberta

- $x(-t) = x(t) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{x}(-t) = -\hat{x}(t)$

  $x(-t) = -x(t) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{x}(-t) = \hat{x}(t)$

- $ax(t) + by(t) \rightleftharpoons a\hat{x}(t) + b\hat{y}(t) \qquad a, b \in \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ (liniowość)

- $x(at) \rightleftharpoons \hat{x}(at) \qquad a \in \mathbb{R}$ (podobieństwo)

- $x(t - t_0) \rightleftharpoons \hat{x}(t - t_0)$ (przesunięcie)

Jeżeli $x, y \in L^2(\Omega) \qquad \left(\Omega = (t_1, t_2),\ (0, \infty),\ (-\infty, \infty)\right)$

- $\langle x, \hat{x} \rangle = 0$ (ortogonalność sygnału i jego transformaty Hilberta)

- $\langle x, y \rangle = \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle$ (równość iloczynów skalarnych)

- $\langle x, x \rangle = \langle \hat{x}, \hat{x} \rangle$ (równość energii)

Analityczna reprezentacja sygnału

$x(t)$ — sygnał rzeczywisty

$\hat{x}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$

Definicja

Sygnałem analitycznym sygnału $x(t)$ nazywa się sygnał zespolony

$$z_x(t) = x(t) + \mathrm{j}\,\hat{x}(t)$$

$z_x(t)$ jest zespoloną reprezentacją ciągłą sygnału rzeczywistego $x(t)$ taką, że

$$x(t) = \mathrm{Re}\{z_x(t)\}, \qquad \hat{x}(t) = \mathrm{Im}\{z_x(t)\}$$

Przykład

$$x(t) = X_{\mathrm{m}} \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad \hat{x}(t) = X_{\mathrm{m}} \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$z_x(t) = X_{\mathrm{m}} \cos(\omega_0 t + \varphi) + \mathrm{j}\, X_{\mathrm{m}} \sin(\omega_0 t + \varphi) = X_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0 t + \varphi)} = X_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} = \underline{X}_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$$

$\underline{X}_{\mathrm{m}} = X_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ — zespolona amplituda sygnału $x(t)$

$$x(t) = \mathrm{Re}\{\underline{X}_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\}$$

Przekształcenie Laplace'a

$$X(s)=\int_{\Omega} x(t)\varphi(t,s)\,\mathrm{d}t,\quad t\in\Omega \qquad x(t)=\int_{\Gamma} X(s)\psi(s,t)\,\mathrm{d}s,\quad s\in\Gamma$$

$$\varphi(t,s)=\mathrm{e}^{-st} \qquad \psi(s,t)=\frac{\mathrm{e}^{st}}{2\pi\mathrm{j}}$$

Dwustronne przekształcenie Laplace'a — $\Omega=(-\infty,\infty)$

$$X(s)=\mathcal{L}_{\mathrm{II}}\{x(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$s=\sigma+\mathrm{j}\omega$ — pulsacja zespolona

Obszar Γ na płaszczyźnie zespolonej, taki, że dla $s\in\Gamma$ całka jest zbieżna, nazywa się *obszarem zbieżności* transformaty

$$x(t)=\mathcal{L}_{\mathrm{II}}^{-1}\{X(s)\}=\int_{\Gamma} X(s)\mathrm{e}^{st}\,\frac{\mathrm{d}s}{2\pi\mathrm{j}}$$

Do wyznaczenia transformaty odwrotnej przekształcenia dwustronnego jest niezbędna znajomość obszaru zbieżności

Jednostronne przekształcenie Laplace'a — $\Omega = (0, \infty)$

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{0-}^{\infty} x(t) \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t, \qquad s = \sigma + \mathrm{j}\omega$$

Obszarem zbieżności Γ jest obszar $\mathrm{Re}\{s\} > \sigma_0$ na płaszczyźnie zespolonej s, gdzie σ_0 nazywa się *odciętą zbieżności* transformaty

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \int_{c-\mathrm{j}\infty}^{c+\mathrm{j}\infty} X(s) \mathrm{e}^{st} \frac{\mathrm{d}s}{2\pi\mathrm{j}} \quad \text{— wzór Riemanna-Mellina}$$

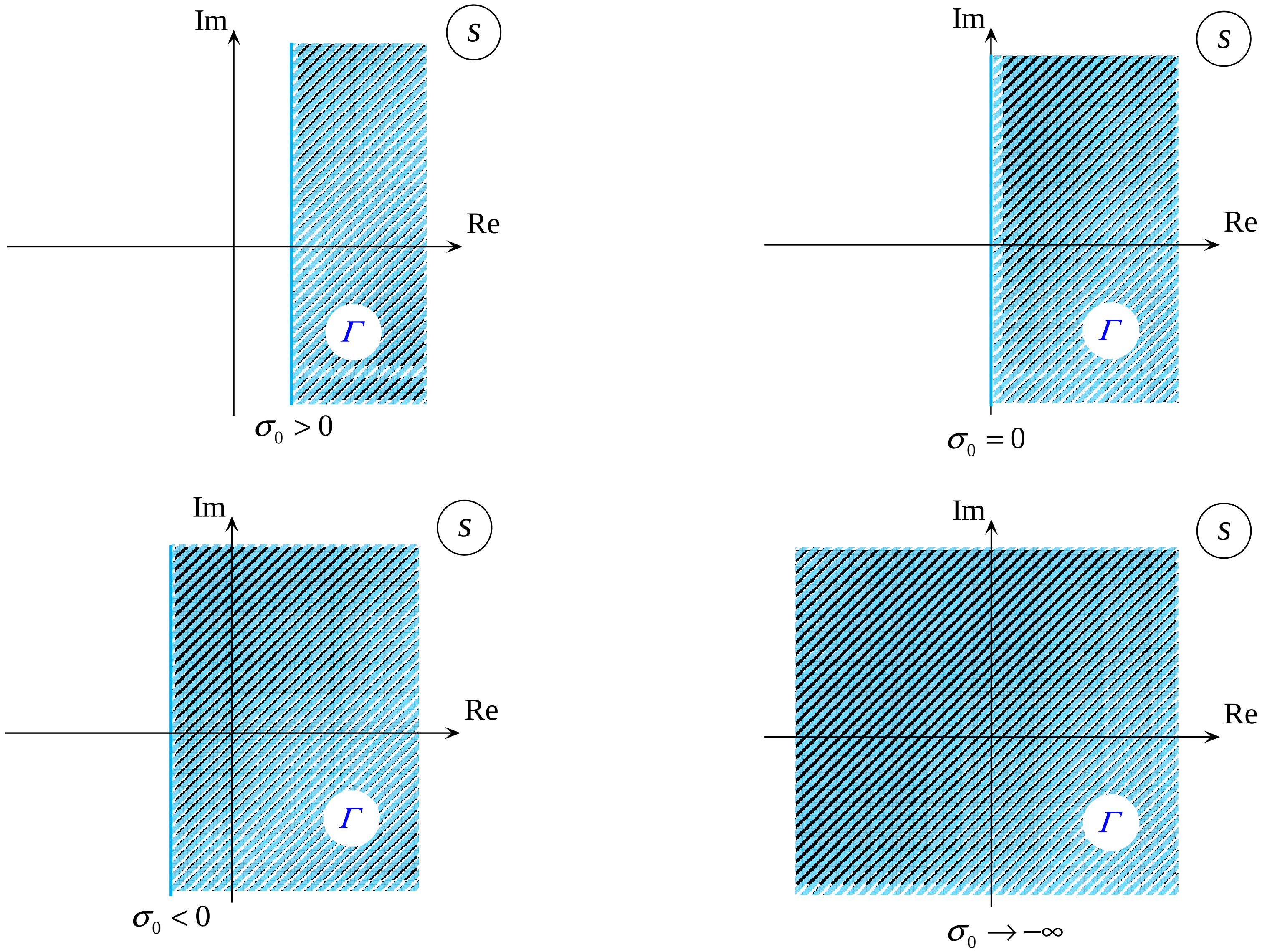
c może być dowolną stałą $c > \sigma_0$

Jednostronne przekształcenie Laplace'a *funkcji opisujących przebiegi fizyczne* jest wzajemnie jednoznaczne, tzn.

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$$

Oznacza się również: $x(t) \rightleftharpoons X(s)$

Przykłady możliwych obszarów zbieżności transformaty Laplace'a funkcji typu wykładniczego na płaszczyźnie *s*. σ_0 — odcięta zbieżności



Własności przekształcenia Laplace'a

$x(t) \rightleftharpoons X(s) \qquad y(t) \rightleftharpoons Y(s)$

- $ax(t) + by(t) \rightleftharpoons aX(s) + bY(s)$ — liniowość
- $\mathrm{e}^{\xi t} x(t) \rightleftharpoons X(s-\xi), \qquad \xi \in \mathbb{C}$ — przesunięcie w dziedzinie s
- $x(t-t_0)\mathbf{1}(t-t_0) \rightleftharpoons X(s)\mathrm{e}^{-st_0}$ — przesunięcie w dziedzinie czasu
- $\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \rightleftharpoons s\,X(s) - x(0-)$ — różniczkowanie w dziedzinie czasu
- $t\,x(t) \rightleftharpoons -\dfrac{\mathrm{d}\,X(s)}{\mathrm{d}s}$ — różniczkowanie w dziedzinie s
- $x(t) * y(t) \rightleftharpoons X(s)Y(s)$ — splot w dziedzinie czasu
- $x(t)\,y(t) \rightleftharpoons \dfrac{1}{2\pi \mathrm{j}} X(s) * Y(s)$ — splot w dziedzinie s

Uwagi

1. Jeżeli $x(t)$ jest funkcją (nie zawiera składników dystrybucyjnych), to

$$X(s) = \int_{0-}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_{0+}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

2. Jeżeli $x(t) \in L^2(0,\infty)$ to odcięta zbieżności $\sigma_0 < 0$, czyli oś $\mathrm{j}\omega$ należy do obszaru zbieżności transformaty

3. Jeżeli $x(t) \in L^2(t_1,t_2)$ to obszarem zbieżności jest cała płaszczyzna zmiennej zespolonej s (transformata jest *funkcją całkowitą*)

4. Jeżeli $x(t)$ jest rzeczywistą funkcją czasu, to jej transformata $X(s)$ jest rzeczywistą funkcją zmiennej zespolonej s, tzn.

$$X^*(s) = X(s^*)$$

lub inaczej $\quad \mathrm{Im}\{s\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Im}\{X(s)\} = 0$

Transformaty Laplace'a wybranych sygnałów

$x(t)$	$\rightleftharpoons$ $X(s)$
$\delta(t)$	1
$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s}$
$\mathrm{e}^{-at}\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$\sin\omega_0 t\mathbf{1}(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
$\cos\omega_0 t\mathbf{1}(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$

Przekształcenie Fouriera

$$X(s)=\int_{\Omega} x(t)\varphi(t,s)\,\mathrm{d}t, \quad t\in\Omega \qquad\qquad x(t)=\int_{\Gamma} X(s)\psi(s,t)\,\mathrm{d}s, \quad s\in\Gamma$$

$$s=\mathrm{j}\omega$$

$$\varphi(t,\mathrm{j}\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \qquad\qquad \psi(\mathrm{j}\omega,t)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{2\pi}$$

$$\Omega: \quad t\in(-\infty,\infty) \qquad\qquad \Gamma: \quad \omega\in(-\infty,\infty)$$

$$\boxed{X(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t \qquad\qquad x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}}$$

Para transformat Fouriera

Będziemy stosować oznaczenia:

$$X(\mathrm{j}\omega)=\mathcal{F}\{x(t)\} \qquad x(t)=\mathcal{F}^{-1}\{X(\mathrm{j}\omega)\} \qquad \text{lub} \quad x(t)\rightleftharpoons X(\mathrm{j}\omega)$$

Istnienie i jednoznaczność przekształcenia Fouriera

Twierdzenie 1.

Jeżeli $x(t)$ jest funkcją bezwzględnie całkowalną w przedziale (–∞, ∞), tzn.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \mathrm{d}t < \infty,$$

to całka

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}t$$

jest zbieżna dla wszystkich wartości ω. Transformata Fouriera funkcji $x(t)$

$$X(\mathrm{j}\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\},$$

jest ciągłą funkcją ω, oraz

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} X(\mathrm{j}\omega) = 0.$$

Bezwzględna całkowalność $x(t)$ jest warunkiem **dostatecznym** istnienia transformaty Fouriera.

Twierdzenie 2.

Jeżeli $x_1(t)$ i $x_2(t)$ są funkcjami bezwzględnie całkowalnymi, to

$$\mathcal{F}\{x_1(t)\}=\mathcal{F}\{x_2(t)\} \iff x_1(t)=x_2(t)$$

Wnioski:

1. Ponieważ

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|\mathrm{d}t<\infty \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty}x^2(t)\mathrm{d}t<\infty$$

   więc wszystkie sygnały z przestrzeni $L^2(-\infty,\infty)$, $L^2(0,\infty)$, $L^2(t_1,t_2)$ (sygnały o skończonej energii) spełniają warunki dostateczne istnienia transformaty Fouriera.

2. **Nie są transformowalne** funkcje stałe i okresowe. Będzie jednak dla nich istnieć **dystrybucyjne przekształcenie Fouriera**.

Własności przekształcenia Fouriera

$$x(t) \rightleftharpoons X(\mathrm{j}\omega), \quad y(t) \rightleftharpoons Y(\mathrm{j}\omega)$$

1. Liniowość

$$a_1 x(t) + a_2 y(t) \rightleftharpoons a_1 X(\mathrm{j}\omega) + a_2 Y(\mathrm{j}\omega)$$

2. Przesunięcie w dziedzinie czasu

$$x(t - t_0) \rightleftharpoons X(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$$

3. Przesunięcie w dziedzinie ω

$$x(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} \rightleftharpoons X\left[\mathrm{j}(\omega - \omega_0)\right], \quad \omega_0 \in \mathbb{R}$$

4. Różniczkowanie (dystrybucyjne) w dziedzinie czasu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) \rightleftharpoons \mathrm{j}\omega X(\mathrm{j}\omega)$$

5. Splot w dziedzinie czasu

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau \rightleftharpoons X(\mathrm{j}\omega) Y(\mathrm{j}\omega)$$

6. Mnożenie w dziedzinie czasu

$$x(t)\, y(t) \rightleftharpoons \frac{1}{2\pi} X(\mathrm{j}\omega) * Y(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\lambda)\, Y\left[\mathrm{j}(\omega - \lambda)\right] \mathrm{d}\lambda$$

7. Symetria

$$X(\mathrm{j}t) \rightleftharpoons 2\pi\, x(-\omega)$$

8. Zmiana skali czasu

$$x\left(\frac{t}{a}\right) \rightleftharpoons |a|\, X(\mathrm{j}a\omega), \quad a \neq 0$$

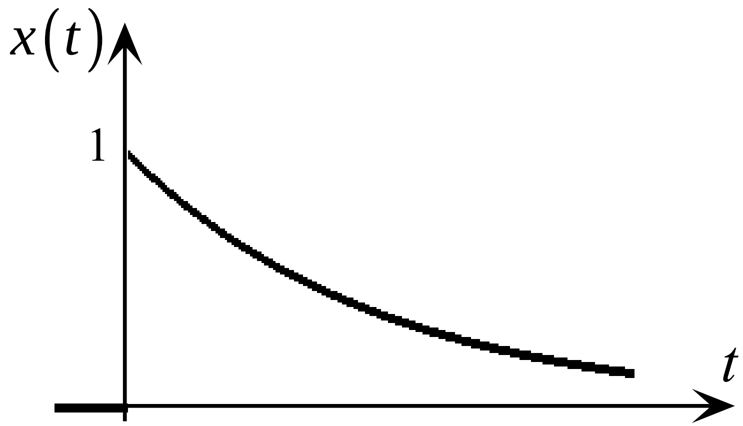
Przykład 1.

$$x(t)=\delta(t)$$

$$X(\mathrm{j}\omega)=\Delta(\mathrm{j}\omega)=\mathcal{F}\{\delta(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=1$$

Przykład 2.

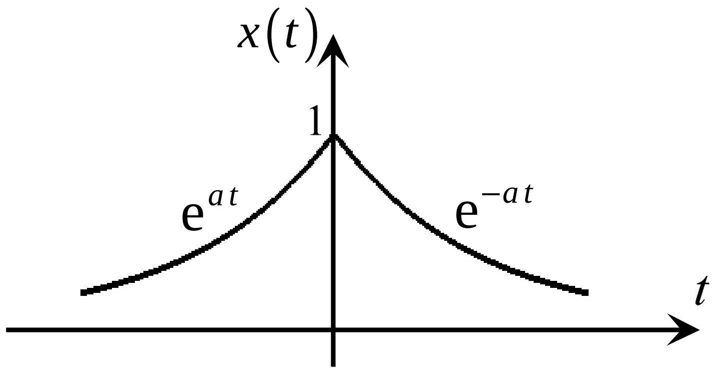
$$x(t)=\mathrm{e}^{-at}\mathbf{1}(t), \quad a>0$$



$$X(\mathrm{j}\omega)=\mathcal{F}\{x(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-at}\mathbf{1}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-(a+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t=\frac{1}{a+\mathrm{j}\omega}$$

Przykład 3.

$$x(t)=\mathrm{e}^{-a|t|}=\begin{cases}\mathrm{e}^{-at} & t\geq 0\\ \mathrm{e}^{at} & t<0\end{cases},\quad a>0$$

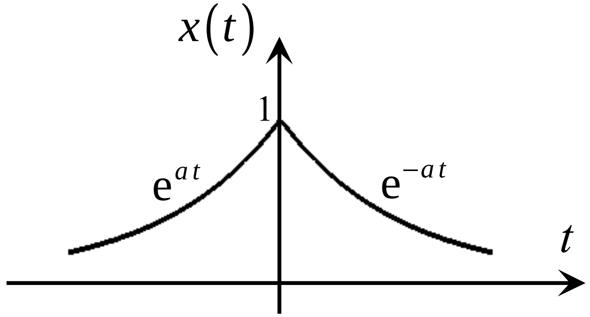


$$X(\mathrm{j}\omega)=\mathcal{F}\{x(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-a|t|}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{(a-\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t+\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-(a+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t=$$

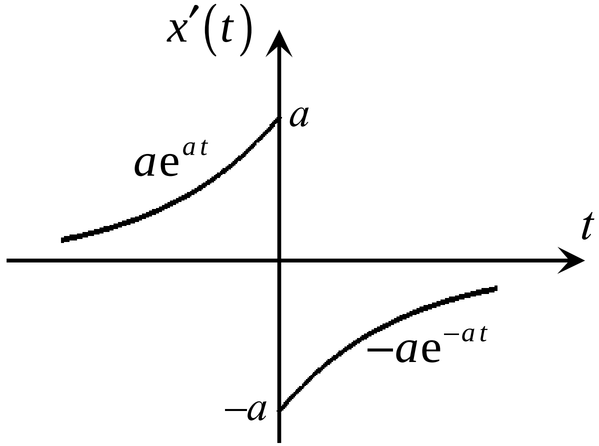
$$=\frac{1}{a-\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{(a-\mathrm{j}\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0}+\frac{-1}{a+\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-(a+\mathrm{j}\omega)t}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{1}{a-\mathrm{j}\omega}+\frac{1}{a+\mathrm{j}\omega}=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

Można inaczej

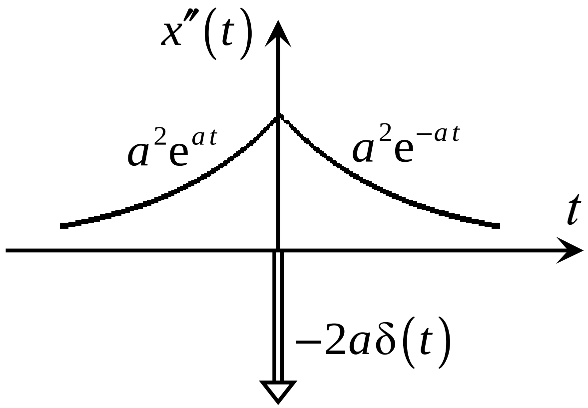
$$x(t) = \mathrm{e}^{-a|t|}$$



$$\rightleftharpoons \quad X(\mathrm{j}\omega)$$



$$\rightleftharpoons \quad \mathrm{j}\omega X(\mathrm{j}\omega)$$

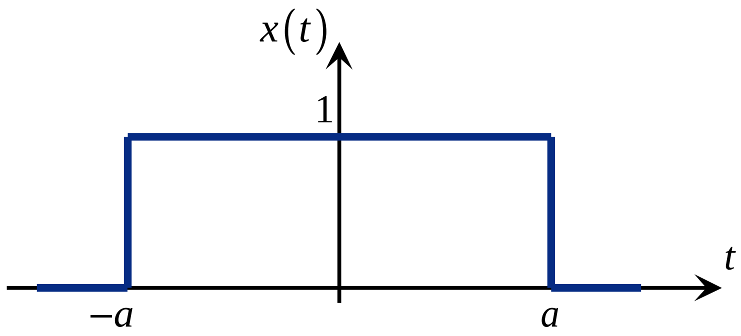


$$\rightleftharpoons \quad -\omega^2 X(\mathrm{j}\omega) = -2a + a^2 X(\mathrm{j}\omega)$$

$$X(\mathrm{j}\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

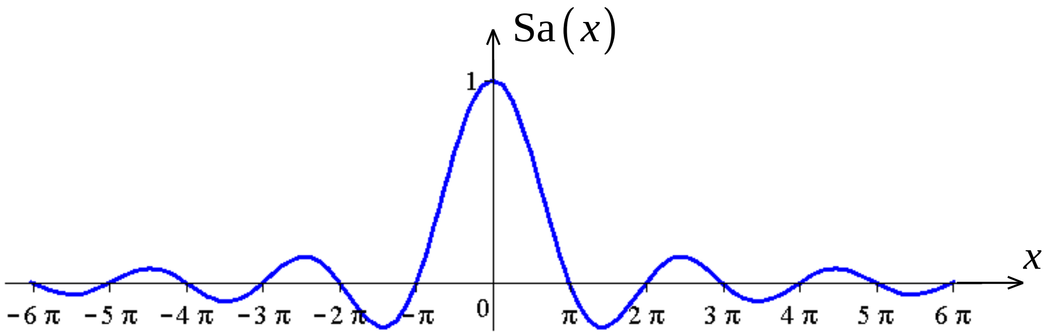
Przykład 4.

$$x(t)=\mathbf{1}(t+a)-\mathbf{1}(t-a)$$



$$X(\mathrm{j}\omega)=\mathcal{F}\{x(t)\}=\int_{-a}^{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{-1}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\Big|_{-a}^{a}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega a}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega a}}{\mathrm{j}\omega}=\frac{2\sin\omega a}{\omega}=2a\,\mathrm{Sa}(\omega a)$$

$$\mathrm{Sa}(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$



Związek z transformatą Laplace'a

$$\mathcal{L}\left\{x(t)\right\} = \int_{0-}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = X(s)$$

$$\mathcal{F}\left\{x(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = X(\mathrm{j}\omega)$$

Jeżeli $x(t) \equiv 0$ dla $t < 0$

to $\mathcal{F}\left\{x(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{x(t)\right\}\Big|_{s=\mathrm{j}\omega} = X(s)\Big|_{s=\mathrm{j}\omega}$

pod warunkiem, że **oś** $\mathrm{j}\omega$ **należy do obszaru zbieżności transformaty Laplace'a**. Warunek ten jest spełniony gdy

$$\int_{0-}^{\infty} \left|x(t)\right|\mathrm{d}t < \infty,$$

co jest warunkiem **istnienia** transformaty Fouriera.

W szczególności, gdy $x \in L^2(0,\infty)$

$$\mathcal{F}\left\{x(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{x(t)\right\}\Big|_{s=\mathrm{j}\omega}$$

$$x^*(t)=\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}$$

$$\omega \to -\omega$$

$$x^*(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X^*(-\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} = \mathcal{F}^{-1}\left\{X^*(-\mathrm{j}\omega)\right\}$$

Jeżeli $x(t)=x^*(t)$ (rzeczywista funkcja czasu), to

$$X^*(-\mathrm{j}\omega)=X(\mathrm{j}\omega) \quad \text{czyli} \quad X^*(\mathrm{j}\omega)=X(-\mathrm{j}\omega)$$

Funkcja taka nazywa się **funkcją hermitowską** zmiennej rzeczywistej ω

$$X(\mathrm{j}\omega)=\left|X(\mathrm{j}\omega)\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}, \qquad \varphi(\omega)=\arg X(\mathrm{j}\omega)$$

$\left|X(\mathrm{j}\omega)\right|=\left|X(-\mathrm{j}\omega)\right|$ — funkcja parzysta

$\varphi(\omega)=-\varphi(-\omega)$ — funkcja nieparzysta

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{0}\left|X(\mathrm{j}\omega)\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}+\int_{0}^{\infty}\left|X(\mathrm{j}\omega)\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}=$$

$$\overset{\omega\to-\omega}{=}\int_{\infty}^{0}\left|X(-\mathrm{j}\omega)\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(-\omega)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\frac{\mathrm{d}(-\omega)}{2\pi}+\int_{0}^{\infty}\left|X(\mathrm{j}\omega)\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}=$$

$$=\int_{0}^{\infty}\left|X(\mathrm{j}\omega)\right|\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi(\omega))}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega+\varphi(\omega))}\right]\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}=\int_{0}^{\infty}2\left|X(\mathrm{j}\omega)\right|\cos\left[\omega t+\varphi(\omega)\right]\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}$$

$$x(t)=\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{\pi}\left|X(\mathrm{j}\omega)\right|\cos\left[\omega t+\varphi(\omega)\right]$$

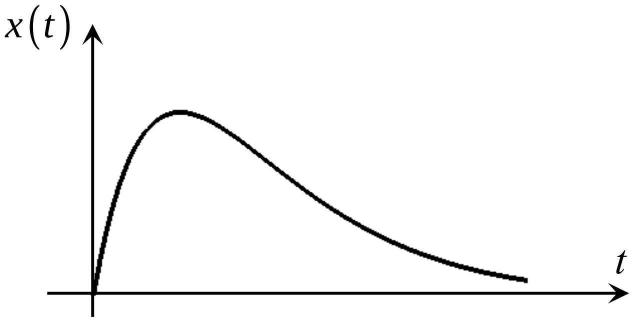
Sygnał $x(t)$ można przedstawić jako nieskończoną, **nieprzeliczalną** sumę przebiegów sinusoidalnych o ,,amplitudach” $\frac{\mathrm{d}\omega}{\pi}\left|X(\mathrm{j}\omega)\right|$, i zmieniających się w sposób **ciągły** pulsacjach ω i fazach początkowych $\varphi(\omega)$.

$X(\mathrm{j}\omega)$ — zespolone widmo sygnału $x(t)$

$|X(\mathrm{j}\omega)|$ — widmo amplitudowe (widmowa gęstość amplitudy)

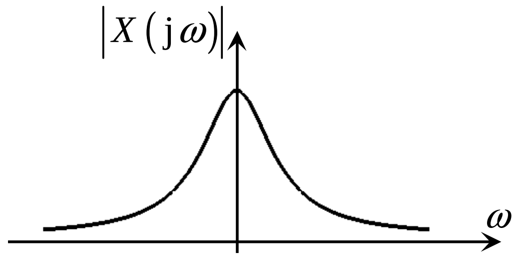
$\varphi(\omega)$ — widmo fazowe

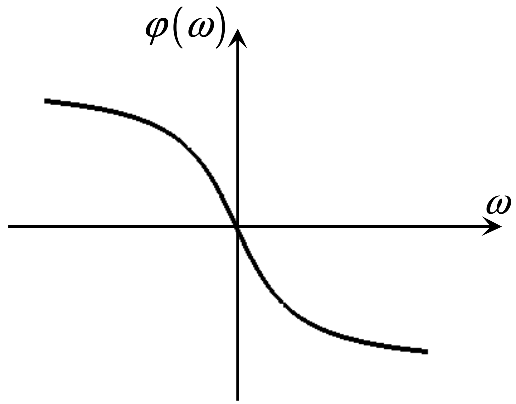
Reprezentacja dziedzinie czasu



$$\rightleftharpoons$$

Reprezentacja w dziedzinie częstotliwości





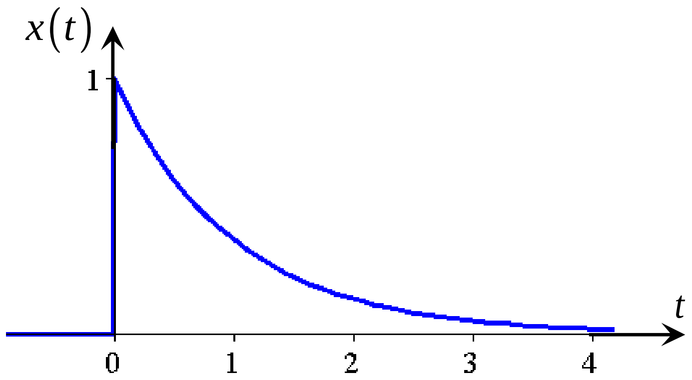
Przykład 1.

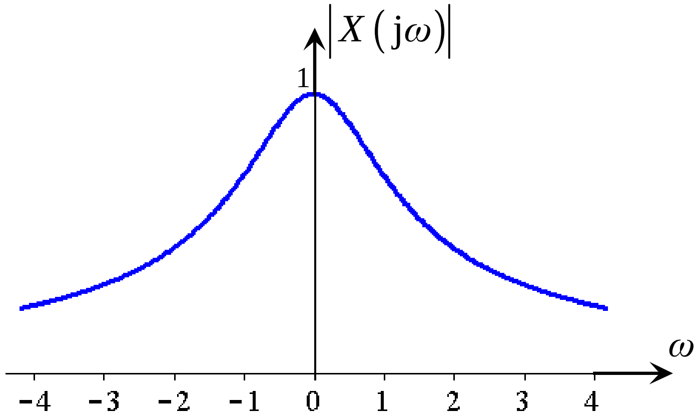
$$x(t) = \mathrm{e}^{-at}\mathbf{1}(t), \quad a > 0 \qquad X(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{a + \mathrm{j}\omega}, \qquad \left|X(\mathrm{j}\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}, \qquad \varphi(\omega) = -\mathrm{arctg}\frac{\omega}{a}$$

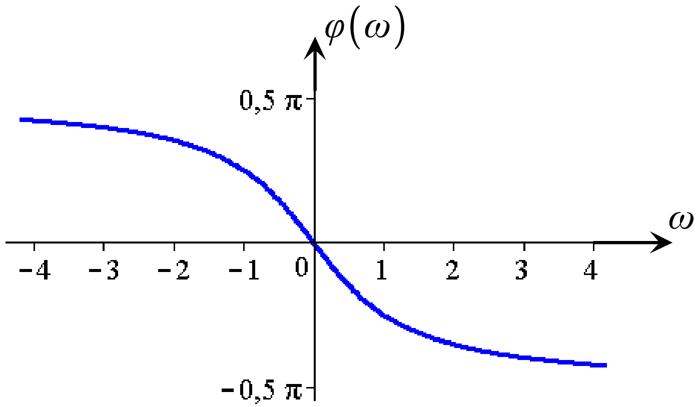
Reprezentacja dziedzinie czasu

Reprezentacja w dziedzinie częstotliwości

$$a = 1$$







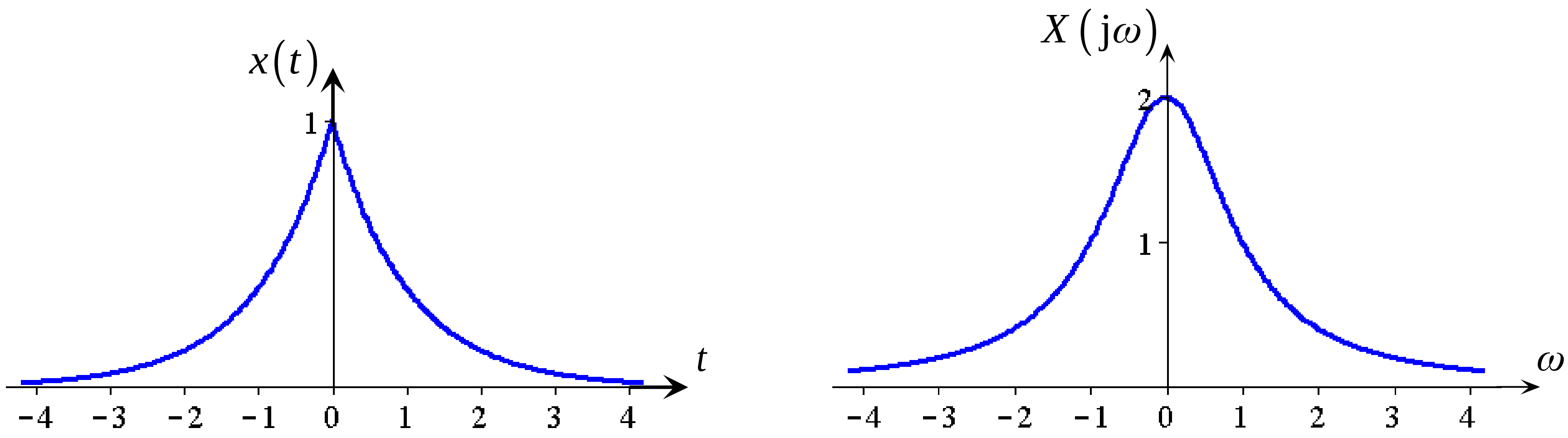
Przykład 2.

$$x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0 \qquad X(j\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}, \qquad |X(j\omega)| = X(j\omega), \qquad \varphi(\omega) = 0$$

Reprezentacja dziedzinie czasu

Reprezentacja w dziedzinie częstotliwości

$$a = 1$$



Jeżeli $x(t)$ jest funkcją parzystą $\left(x(-t) = x(t)\right)$ to widmo $X(j\omega)$ przyjmuje wartości rzeczywiste

Przykład 3.

$$x(t) = \mathbf{1}(t+a) - \mathbf{1}(t-a) = \Pi\left(\frac{t}{2a}\right)$$

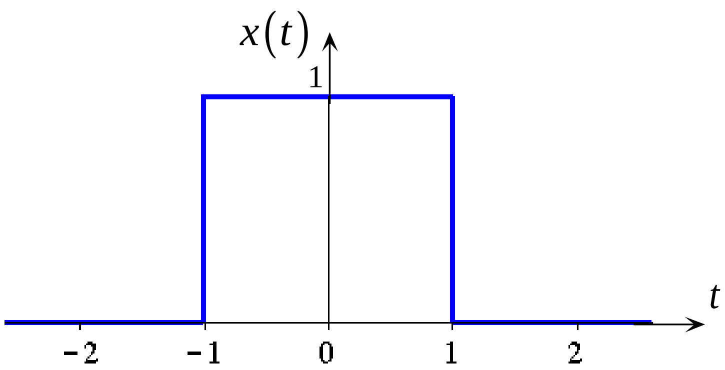
$$X(\mathrm{j}\omega) = 2a\,\mathrm{Sa}(a\omega)$$

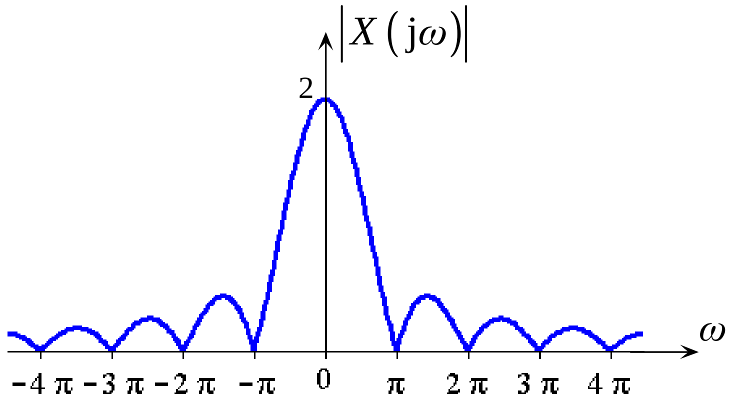
$$\varphi(\omega) = \arccos\frac{\mathrm{Sa}(a\omega)}{\left|\mathrm{Sa}(a\omega)\right|}$$

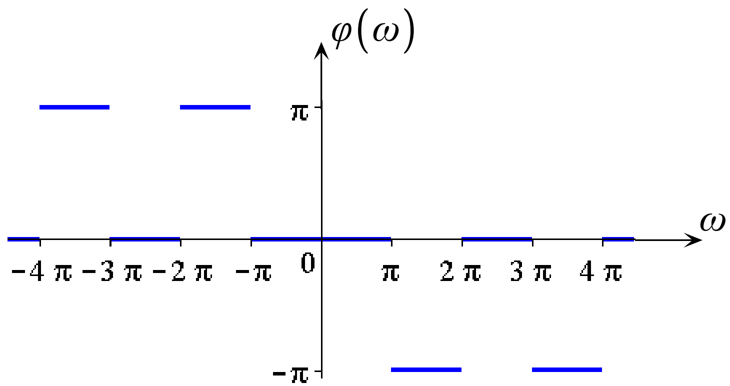
Reprezentacja dziedzinie czasu

Reprezentacja w dziedzinie częstotliwości

$a = 1$

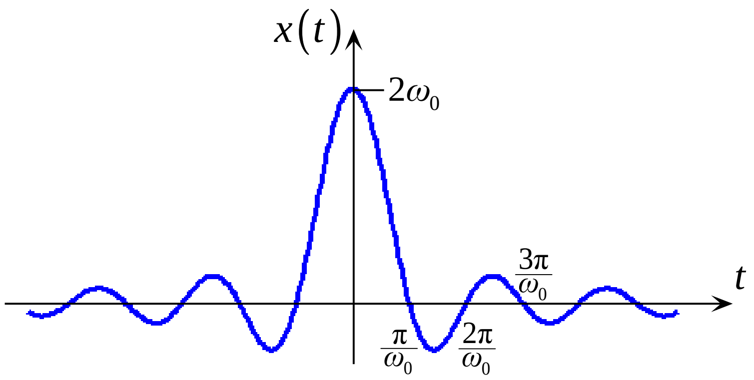




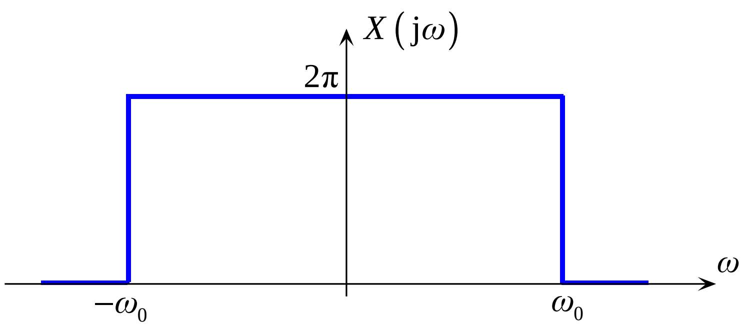


Przykład 4.

$$x(t) = \frac{2\sin\omega_0 t}{t} = 2\omega_0 \,\mathrm{Sa}(\omega_0 t)$$



$$X(\mathrm{j}\omega) = 2\pi\left[\mathbf{1}(\omega+\omega_0) - \mathbf{1}(\omega-\omega_0)\right]$$



Symetria:

$$x(t) \rightleftharpoons X(\mathrm{j}\omega)$$

$$X(\mathrm{j}t) \rightleftharpoons 2\pi\, x(-\omega)$$

$$\mathbf{1}(t+a) - \mathbf{1}(t-a) \rightleftharpoons 2a\,\mathrm{Sa}(a\omega)$$

$$2a\,\mathrm{Sa}(at) \rightleftharpoons 2\pi\left[\mathbf{1}(-\omega+a) - \mathbf{1}(-\omega-a)\right] =$$

$$= 2\pi\left[\mathbf{1}(\omega+a) - \mathbf{1}(\omega-a)\right]$$

$$2\omega_0\,\mathrm{Sa}(\omega_0 t) \rightleftharpoons 2\pi\left[\mathbf{1}(\omega+\omega_0) - \mathbf{1}(\omega-\omega_0)\right]$$

Sygnał $x(t)$ jest przykładem *sygnału o ograniczonym widmie*, przyjmującym niezerowe wartości tylko dla pulsacji $|\omega| < \omega_0$

$$x(t), y(t) \in L^2(-\infty, \infty)$$

$$x(t) \rightleftharpoons X(\mathrm{j}\omega), \quad y(t) \rightleftharpoons Y(\mathrm{j}\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} Y(\mathrm{j}\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \right]^* \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \int_{-\infty}^{\infty} Y^*(\mathrm{j}\omega) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}t \right] Y^*(\mathrm{j}\omega) \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\omega) Y^*(\mathrm{j}\omega) \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}$$

Twierdzenie Rayleigha

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\omega) Y^*(\mathrm{j}\omega) \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}}$$

$$y(t) = x(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, x^{*}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\omega)\, X^{*}(\mathrm{j}\omega) \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}$$

Twierdzenie Parsevala

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \left| x(t) \right|^{2} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \left| X(\mathrm{j}\omega) \right|^{2} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}}$$

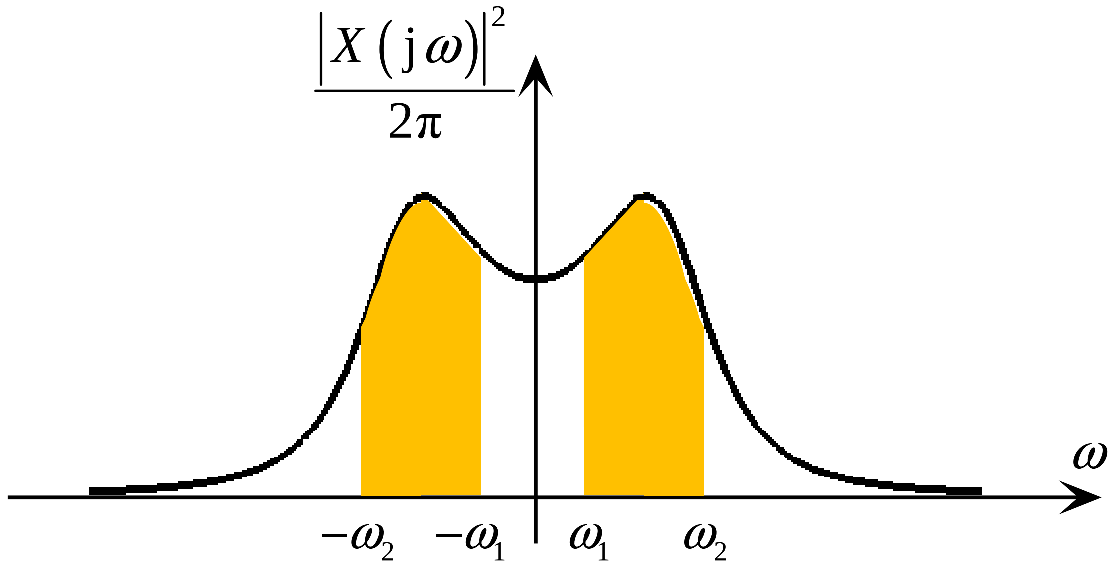
$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \left| x(t) \right|^{2} \mathrm{d}t < \infty \qquad \Rightarrow \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \left| X(\mathrm{j}\omega) \right|^{2} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} < \infty$$

$$x(t) \in L_t^2(-\infty,\infty) \qquad \Rightarrow \qquad X(\mathrm{j}\omega) \in L_\omega^2(-\infty,\infty)$$

$$\left\langle x(t), y(t) \right\rangle_t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y^{*}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \left\langle X(\mathrm{j}\omega), Y(\mathrm{j}\omega) \right\rangle_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\omega)\, Y^{*}(\mathrm{j}\omega) \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}$$

$$\mathcal{F}: \quad L_t^2(-\infty,\infty) \mapsto L_\omega^2(-\infty,\infty)$$

$$\frac{\left|X(\mathrm{j}\omega)\right|^2}{2\pi} \quad \text{— widmowa gęstość energii}$$



Energia sygnału — powierzchnia pod krzywą

Energia zawarta w paśmie $(\omega_1,\ \omega_2)$

$$\Delta E = 2\int_{\omega_1}^{\omega_2} \left|X(\mathrm{j}\omega)\right|^2 \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}$$

Energetyczną szerokością pasma sygnału nazywa się przedział pulsacji, w którym zawarta jest założona część całkowitej energii sygnału, czyli ω_{g} tak wybrane, aby

$$\int_{-\omega_{\mathrm{g}}}^{\omega_{\mathrm{g}}} \left|X(\mathrm{j}\omega)\right|^2 \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} = 2\int_{0}^{\omega_{\mathrm{g}}} \left|X(\mathrm{j}\omega)\right|^2 \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \geq \kappa E_x$$

Zwykle przyjmuje się $\kappa = (0{,}9 \div 0{,}99)$

Przykład

$$x(t) = \mathrm{e}^{-at}\mathbf{1}(t), \quad a > 0, \qquad E_x = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2at}\mathrm{d}t = \frac{1}{2a}$$

$$X(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{a+\mathrm{j}\omega}, \qquad \left|X(\mathrm{j}\omega)\right|^2 = \frac{1}{a^2+\omega^2},$$

$$\int \frac{\mathrm{d}\omega}{a^2+\omega^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega}{a}$$

$$2\int_0^{\omega_{\mathrm{g}}} \frac{1}{a^2+\omega^2}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \geq \kappa\frac{1}{2a}$$

$$\frac{1}{a\pi}\operatorname{arctg}\frac{\omega_g}{a} \geq \kappa\frac{1}{2a} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_{\mathrm{g}} \geq a\,\operatorname{tg}\left(\kappa\frac{\pi}{2}\right)$$

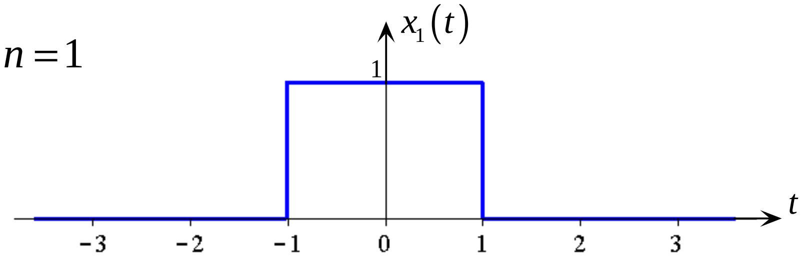
$$\kappa = 0{,}95 \Rightarrow \omega_{\mathrm{g}} \geq 12{,}7a$$

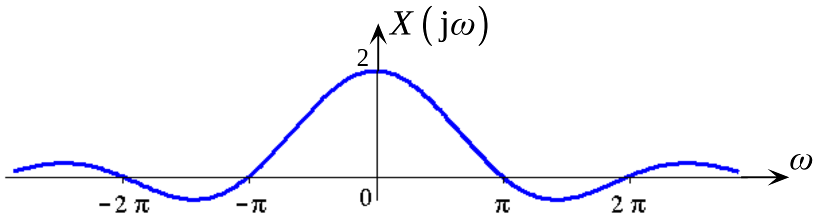
$$\kappa = 0{,}99 \Rightarrow \omega_{\mathrm{g}} \geq 63{,}7a$$

Dystrybucyjna transformata Fouriera

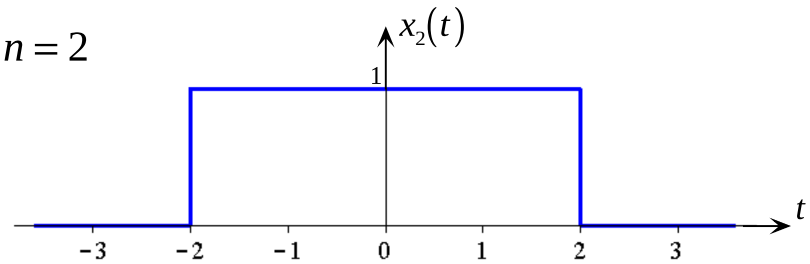
$$x_n(t) = \mathbf{1}(t+n) - \mathbf{1}(t-n) \qquad X_n(\mathrm{j}\omega) = 2n\,\mathrm{Sa}(n\omega)$$

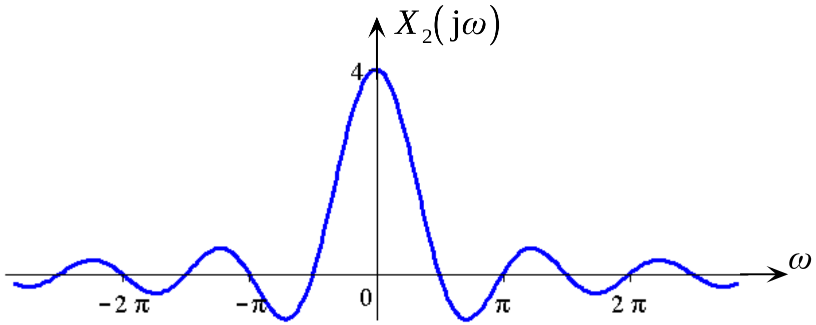
$n = 1$



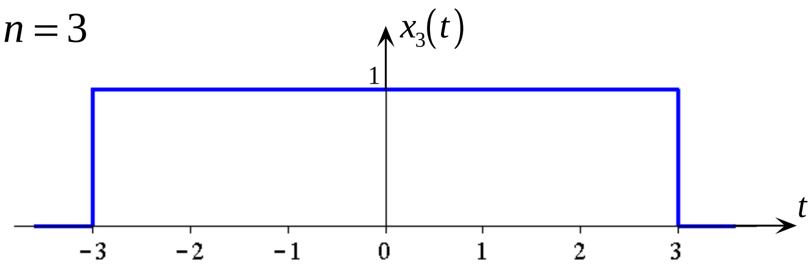


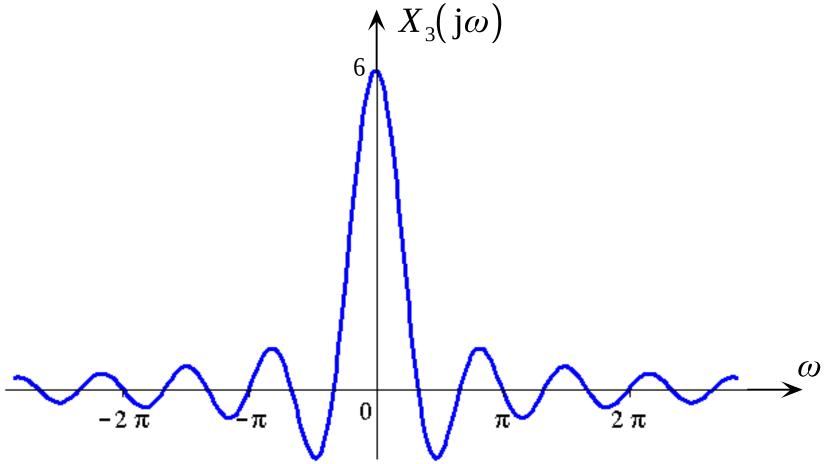
$n = 2$





$n = 3$





$$\int_{-\infty}^{\infty} 2n\,\mathrm{Sa}(n\omega)\,\mathrm{d}\omega = 2\pi$$ dla dowolnego n!

$$x_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \qquad X_n(\mathrm{j}\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{?} 2\pi\delta(\omega)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{2\pi\delta(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} = 1$$

$$\boxed{1 \rightleftharpoons 2\pi\delta(\omega)}$$

Symetria:

$x(t) \rightleftharpoons X(\mathrm{j}\omega)$

$X(\mathrm{j}t) \rightleftharpoons 2\pi x(-\omega)$

$$2\pi\delta(t) \rightleftharpoons 2\pi\cdot 1$$

$$\delta(t) \rightleftharpoons 1$$

Przesunięcie w dziedzinie ω

$$x(t) \rightleftharpoons X(\mathrm{j}\omega)$$

$$x(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} \rightleftharpoons X\left[\mathrm{j}(\omega-\omega_0)\right]$$

$$1 \rightleftharpoons 2\pi\delta(\omega)$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} \rightleftharpoons 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

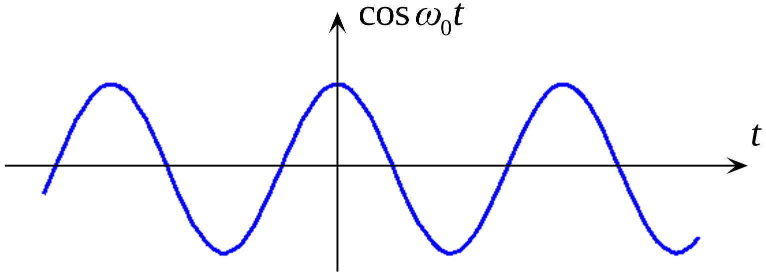
$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t} \rightleftharpoons 2\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

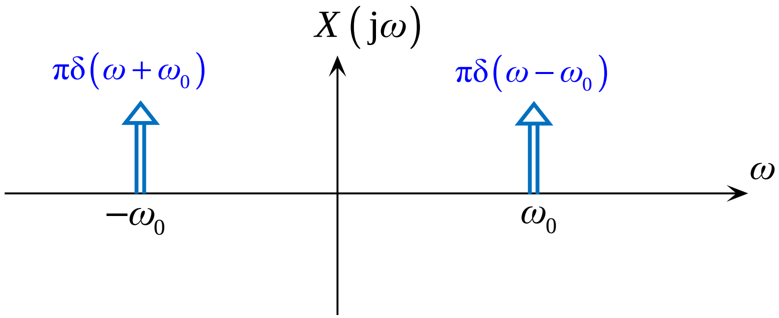
$$\cos\omega_0 t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}}{2}$$

$$\sin\omega_0 t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}}{2\mathrm{j}}$$

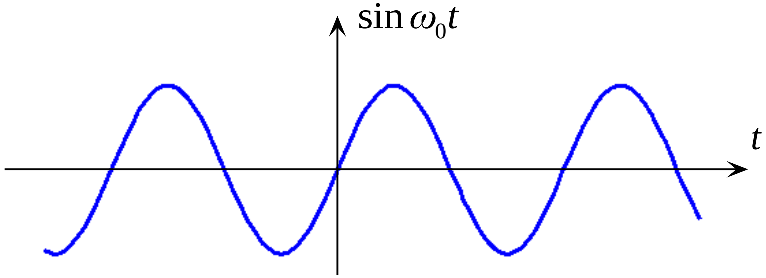
$$\boxed{\begin{aligned}\cos\omega_0 t &\rightleftharpoons \pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]\\ \sin\omega_0 t &\rightleftharpoons \frac{\pi}{\mathrm{j}}\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]\end{aligned}}$$

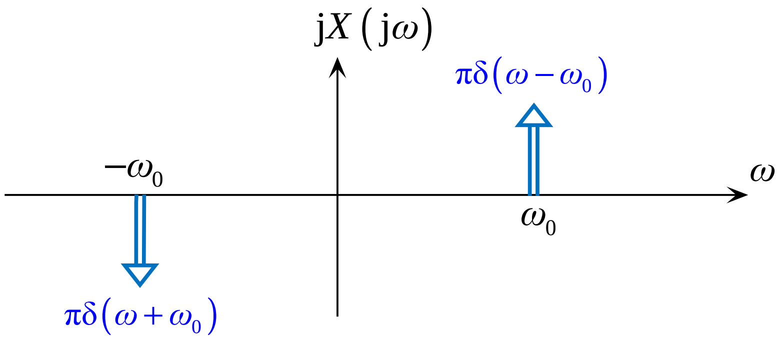
$$\cos\omega_0 t \rightleftharpoons \pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$$





$$\sin\omega_0 t \rightleftharpoons \frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]$$





Dystrybucyjna transformata Fouriera funkcji okresowej

$$x(t) = x(t - kT), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \mathcal{F}\{e^{jk\omega_0 t}\} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

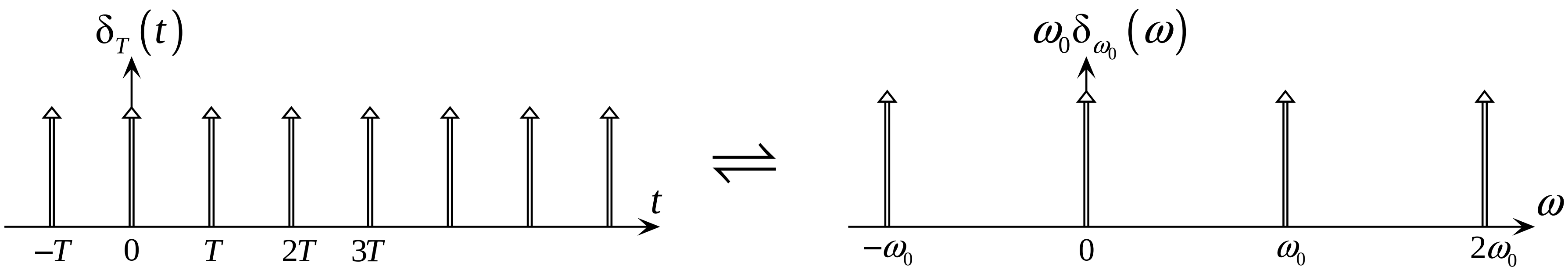
$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} \quad \rightleftharpoons \quad X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(\omega - k\omega_0)}$$

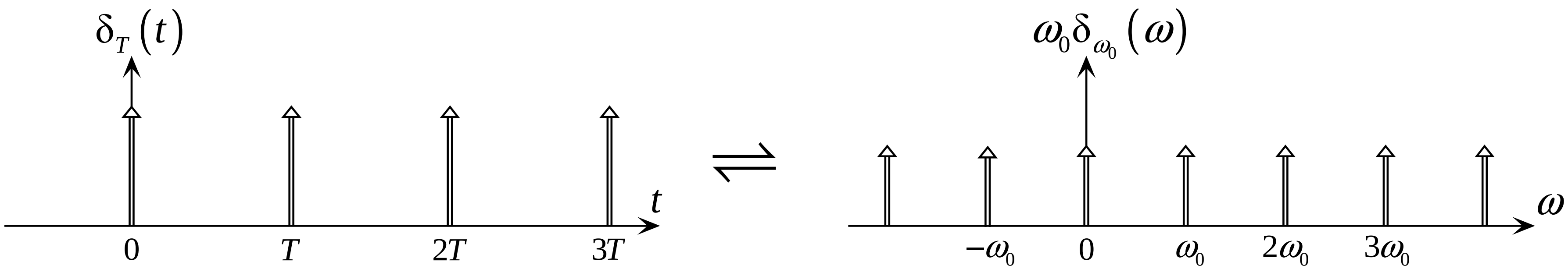
$$x(t) = \delta_T(t) \quad \Rightarrow \quad X_k = \frac{1}{T}$$

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{F}\{\delta_T(t)\} = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT) \rightleftharpoons \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)=\omega_0\delta_{\omega_0}(\omega)$$

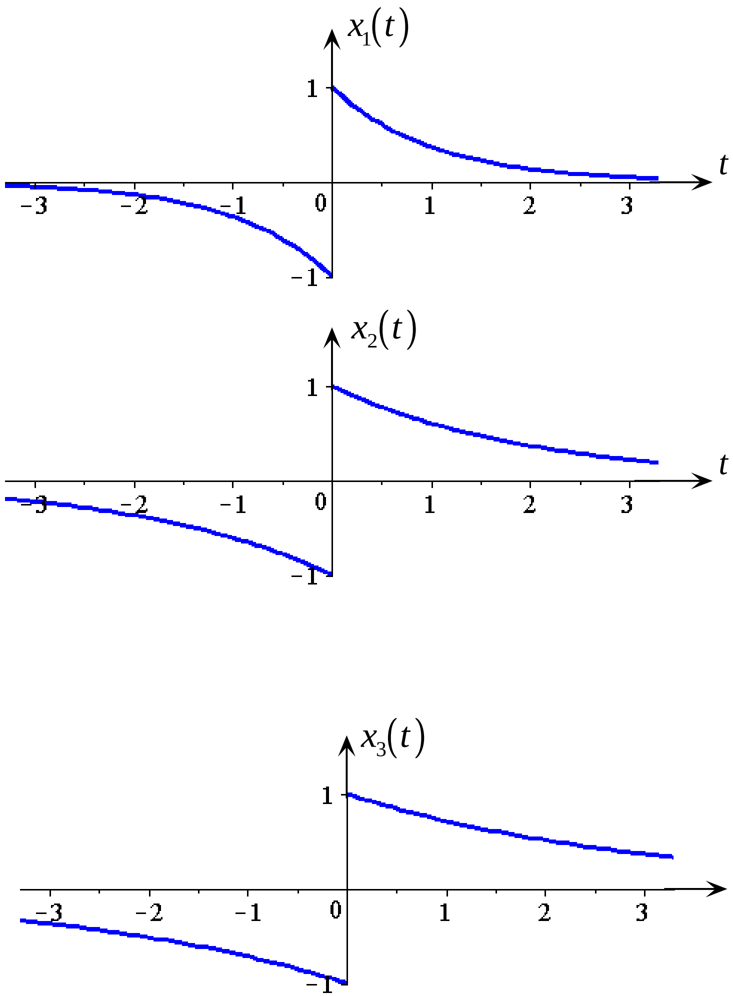
$$\delta_T(t)\rightleftharpoons\omega_0\delta_{\omega_0}(\omega) \qquad \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

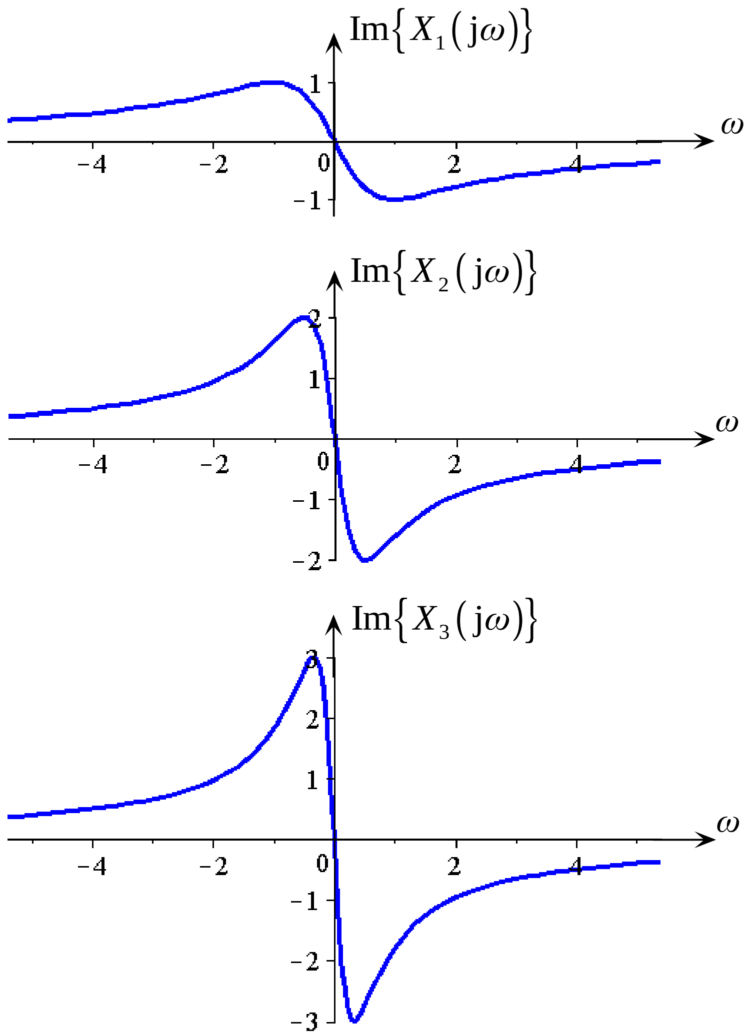




$$x_n(t)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{t}{n}} & t\ge 0 \\ -\mathrm{e}^{\frac{t}{n}} & t<0 \end{cases}=\mathrm{e}^{-\frac{|t|}{n}}\cdot \operatorname{sgn} t$$

$$X_n(\mathrm{j}\omega)=\frac{-2\mathrm{j}\omega}{\omega^2+\frac{1}{n^2}}$$





$$x_n(t) = \mathrm{e}^{-\frac{|t|}{n}} \cdot \operatorname{sgn} t \xrightarrow[n \to \infty]{} \operatorname{sgn} t = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

$$X_n(\mathrm{j}\omega) = \frac{-2\mathrm{j}\omega}{\omega^2 + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \begin{cases} \frac{2}{\mathrm{j}\omega}, & \omega \neq 0 \\ 0, & \omega = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\operatorname{sgn} t \rightleftharpoons \frac{2}{\mathrm{j}\omega}}$$

Symetria:

$x(t) \rightleftharpoons X(\mathrm{j}\omega)$

$X(\mathrm{j}t) \rightleftharpoons 2\pi x(-\omega)$

$$\frac{2}{\mathrm{j}t} \rightleftharpoons 2\pi \operatorname{sgn}(-\omega)$$

$$\boxed{\frac{1}{\pi t} \rightleftharpoons -\mathrm{j} \operatorname{sgn} \omega}$$

$$\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{sgn} t\right) = \mathbf{1}(t)$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{sgn} t\right)\right\} = \frac{1}{2}\left[2\pi\delta(\omega)+\frac{2}{\mathrm{j}\omega}\right] = \pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$$

$$\boxed{\mathbf{1}(t) \rightleftharpoons \pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}}$$

$$x_n(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{n}}\mathbf{1}(t), \qquad x_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{1}(t)$$

$$X_n(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{\frac{1}{n}+\mathrm{j}\omega}$$

$$X_n(\mathrm{j}\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} \frac{1}{\mathrm{j}\omega}, & \omega \neq 0 \\ ? & \omega = 0 \end{cases}$$

Dla $\omega = 0$ granica w zwykłym sensie nie istnieje!

$$\mathbf{1}(t) \rightleftharpoons \pi\delta(\omega) + \frac{1}{\mathrm{j}\omega}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\mathbf{1}(t) \rightleftharpoons \pi\delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{\mathrm{j}(\omega - \omega_0)}$$

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\mathbf{1}(t) \rightleftharpoons \pi\delta(\omega + \omega_0) + \frac{1}{\mathrm{j}(\omega + \omega_0)}$$

$$\cos\omega_0 t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}}{2}$$

$$\sin\omega_0 t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}}{2\mathrm{j}}$$

$$\cos\omega_0 t \cdot \mathbf{1}(t) \rightleftharpoons \frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right] + \frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\sin\omega_0 t \cdot \mathbf{1}(t) \rightleftharpoons \frac{\pi}{2\mathrm{j}}\left[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)\right] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Przesuwanie widma — modulacja

$$x(t) \rightleftharpoons X(\mathrm{j}\omega)$$

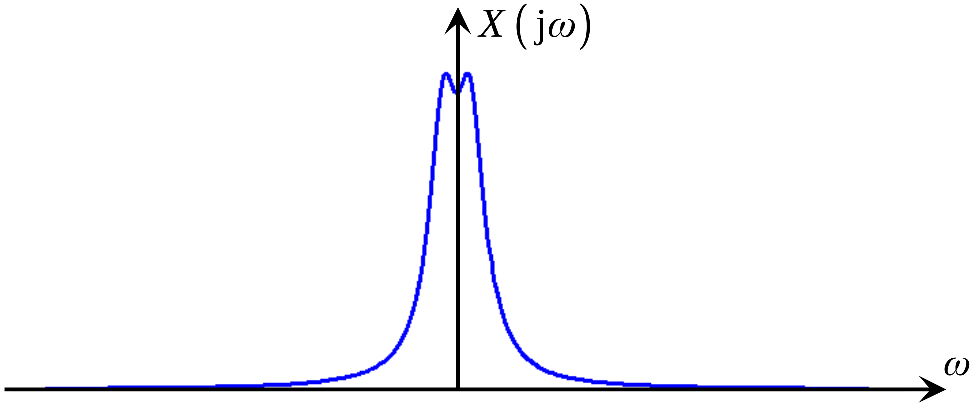
$$y(t) = x(t) \cdot \cos\omega_0 t$$

Mnożenie w dziedzinie czasu

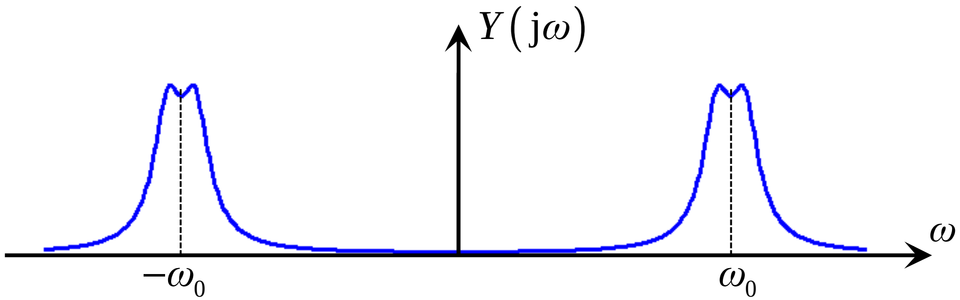
$$x(t)\,y(t) \rightleftharpoons \frac{1}{2\pi} X(\mathrm{j}\omega) * Y(\mathrm{j}\omega)$$

$$x(t) \cdot \cos\omega_0 t \rightleftharpoons \frac{1}{2\pi}\left\{X(\mathrm{j}\omega) * \pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} X\left[\mathrm{j}(\omega-\omega_0)\right] + \frac{1}{2} X\left[\mathrm{j}(\omega+\omega_0)\right]$$



$X\left(\mathrm{j}\omega\right)$



$$Y\left(\mathrm{j}\omega\right)=\frac{1}{2}X\left[\mathrm{j}\left(\omega-\omega_0\right)\right]+\frac{1}{2}X\left[\mathrm{j}\left(\omega+\omega_0\right)\right]$$

Jeżeli $X\left(\mathrm{j}\omega\right)\equiv 0$ dla $\left|\omega\right|>\omega_{\mathrm{g}}$ (sygnał $x\left(t\right)$ jest sygnałem o ograniczonym widmie), to widmo sygnału $y\left(t\right)$ jest niezerowe tylko w przedziale $\omega_0-\omega_{\mathrm{g}}\le\left|\omega\right|\le\omega_0+\omega_{\mathrm{g}}$

Jeżeli $\omega_0\gg 2\omega_{\mathrm{g}}$ to sygnał $y\left(t\right)$ nazywa się *sygnałem wąskopasmowym*

Funkcja autokorelacji sygnału

Sygnały o skończonej energii

$x(t) \in L^2$ — sygnał rzeczywisty lub zespolony

Rozważmy sygnał

$$x_\tau(t) \triangleq x(t-\tau)$$

który jest przesuniętą w czasie kopią $x(t)$

Miarą „podobieństwa" sygnału i jego kopii może być iloczyn skalarny

$$\langle x, x_\tau \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x_\tau^*(t) \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t-\tau) \mathrm{d}t$$

Miara ta, dla ustalonej wartości τ, jest liczbą zespoloną lub rzeczywistą, zależną od przesunięcia τ.

Definicja

Funkcją autokorelacji sygnału $x(t)$ o skończonej energii nazywa się zależność iloczynu skalarnego $\langle x, x_\tau \rangle$ od przesunięcia τ

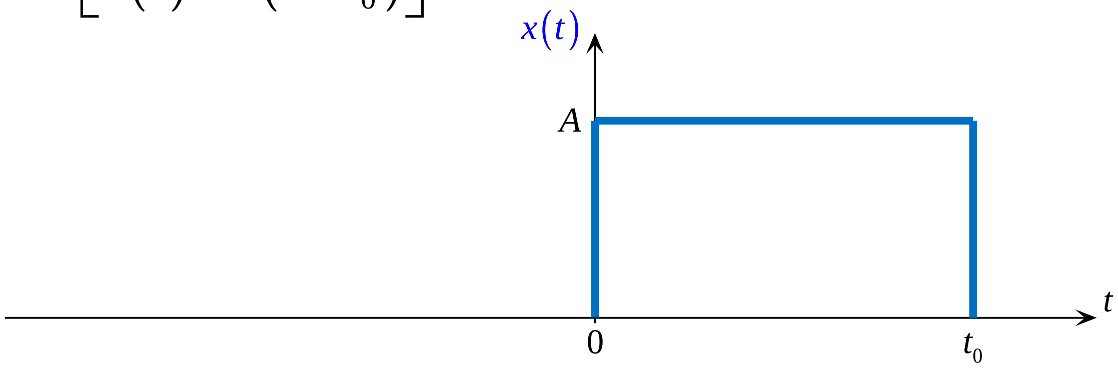
$$\boxed{\varphi_x(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, x^*(t-\tau)\, \mathrm{d}t}$$

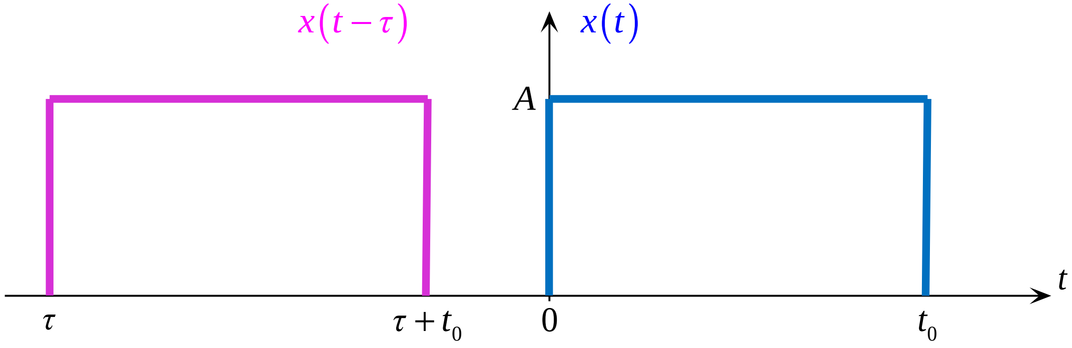
Funkcja autokorelacji jest miarą podobieństwa sygnału i jego przesuniętej kopii, jest więc miarą *szybkości zmian* sygnału.

Jeżeli sygnał $x(t)$ jest rzeczywistą funkcją czasu, to funkcja autokorelacji jest rzeczywistą funkcją przesunięcia τ.

Przykład 1.

$$x(t) = A\left[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - t_0)\right]$$



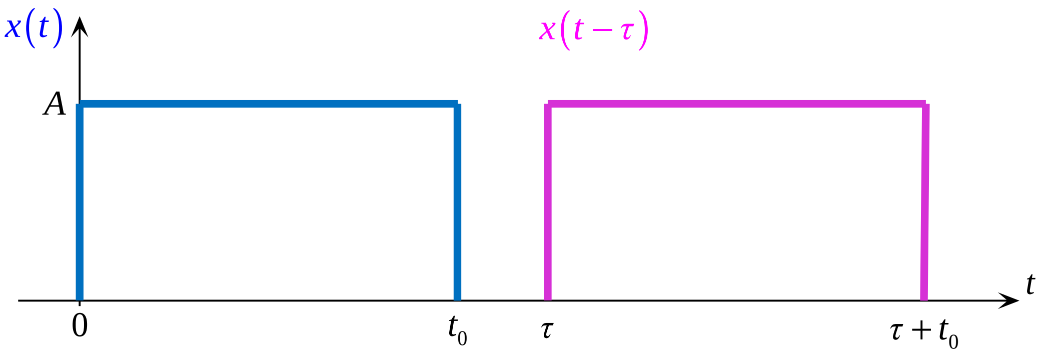


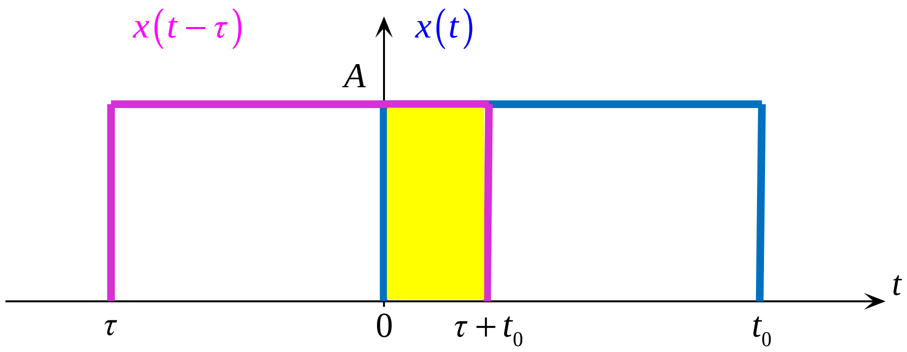
$\tau < -t_0$

$\varphi_x(\tau) = 0$

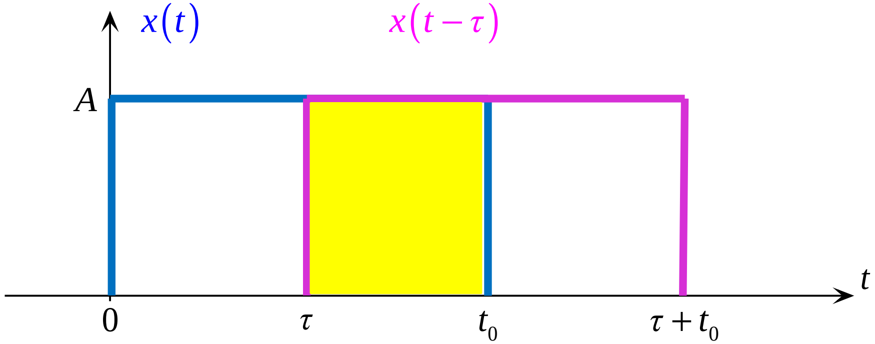
$\tau > t_0$

$\varphi_x(\tau) = 0$



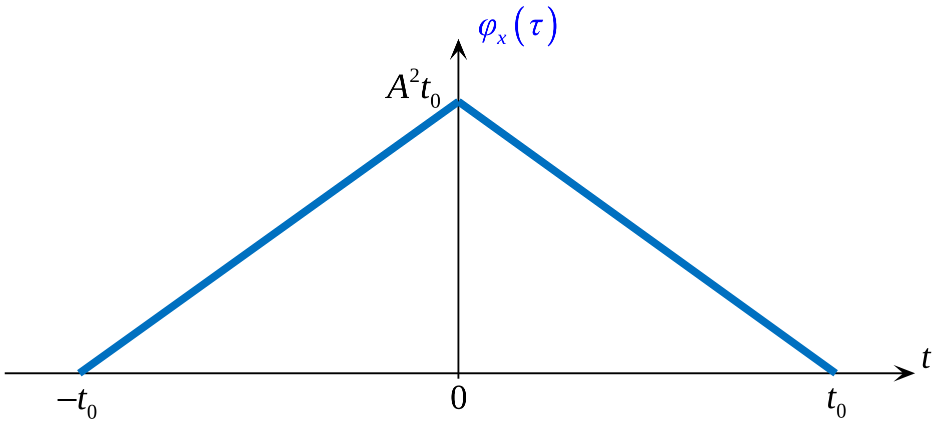


$$-t_0 < \tau < 0$$
$$\varphi_x(\tau) = (\tau + t_0)\cdot A^2$$



$$0 < \tau < t_0$$
$$\varphi_x(\tau) = (t_0 - \tau)\cdot A^2$$

$$\varphi_x(\tau) = \begin{cases} A^2(\tau + t_0) & -t_0 < \tau < 0 \\ A^2(-\tau + t_0) & 0 < \tau < t_0 \\ 0 & \tau < -t_0, \quad \tau > t_0 \end{cases}$$



Własności funkcji autokorelacji

$$\varphi_x(-\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,x^*(t+\tau)\,\mathrm{d}t \overset{t+\tau=u}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(u-\tau)\,x^*(u)\,\mathrm{d}u=\varphi_x^*(\tau)$$

$$\boxed{\varphi_x(\tau)=\varphi_x^*(-\tau)}$$

Funkcja autokorelacji jest hermitowską funkcją zmiennej rzeczywistej τ

Jeżeli sygnał $x(t)$ jest rzeczywistą funkcją czasu, to funkcja autokorelacji jest **parzystą** funkcją przesunięcia τ.

$$\varphi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, x^*(t-\tau)\,\mathrm{d}t$$

$$\varphi_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, x^*(t)\,\mathrm{d}t \;\; = \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right|^2 \mathrm{d}t = E_x$$

$$\boxed{\varphi_x(0) = E_x}$$

$$\left|\left\langle x, x_\tau \right\rangle\right| \le \sqrt{\left\langle x, x\right\rangle \left\langle x_\tau, x_\tau \right\rangle}$$

Nierówność Buniakowskiego-Schwarza

$$\left|\left\langle x, y\right\rangle\right| \le \sqrt{\left\langle x, x\right\rangle \left\langle y, y\right\rangle}$$

$$\left\langle x, x\right\rangle = \left\langle x_\tau, x_\tau \right\rangle = E_x$$

$$\left\langle x, x_\tau \right\rangle = \varphi_x(\tau), \qquad E_x = \varphi_x(0)$$

$$\boxed{\left|\varphi_x(\tau)\right| \le \varphi_x(0)}$$

$$x(t) \quad \to \quad \varphi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$y(t) = x(t-t_0)$$

$$\varphi_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)y^*(t-\tau)\mathrm{d}t \ = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)x(t-t_0-\tau)\mathrm{d}t$$

$$t - t_0 = u \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = \mathrm{d}u$$

$$\varphi_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)x^*(u-\tau)\mathrm{d}u = \varphi_x(\tau)$$

$$\boxed{y(t) = x(t-t_0) \quad \Rightarrow \quad \varphi_y(\tau) = \varphi_x(\tau)}$$

Funkcja autokorelacji jest niezmiennicza względem przesunięcia sygnału na osi czasu

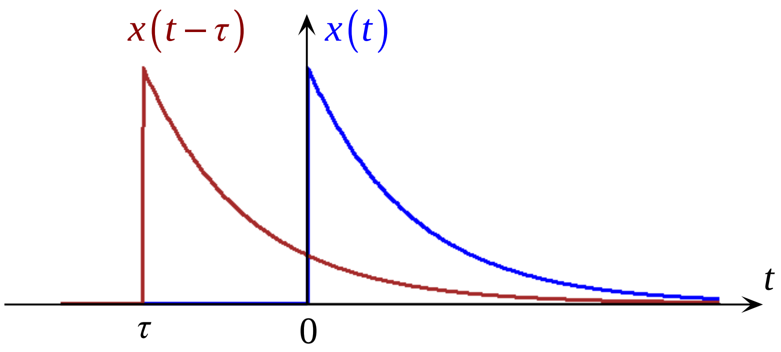
Przykład 1.

$$x(t) = Ae^{-at}\mathbf{1}(t), \quad a \in \mathbb{R}^{+}$$

$$E_x = \frac{A^2}{2a}$$

$$\varphi_x(\tau) = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}\mathbf{1}(t)e^{-a(t-\tau)}\mathbf{1}(t-\tau)\mathrm{d}t$$

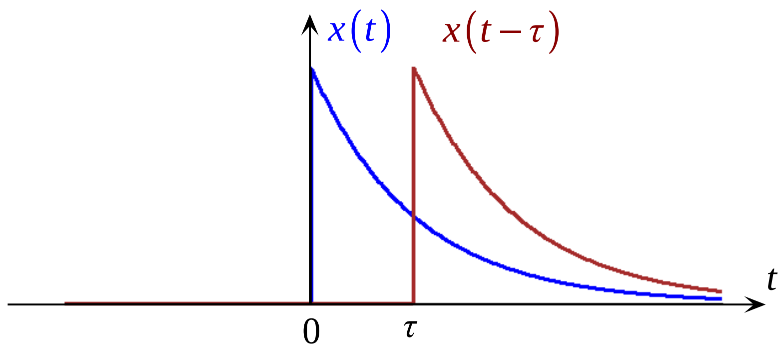
$\tau < 0$



$$\varphi_x(\tau) = A^2 \int_{0}^{\infty} e^{-a(2t-\tau)}\mathrm{d}t =$$

$$= A^2 e^{a\tau} \int_{0}^{\infty} e^{-2at}\mathrm{d}t = \frac{A^2}{2a}e^{a\tau}$$

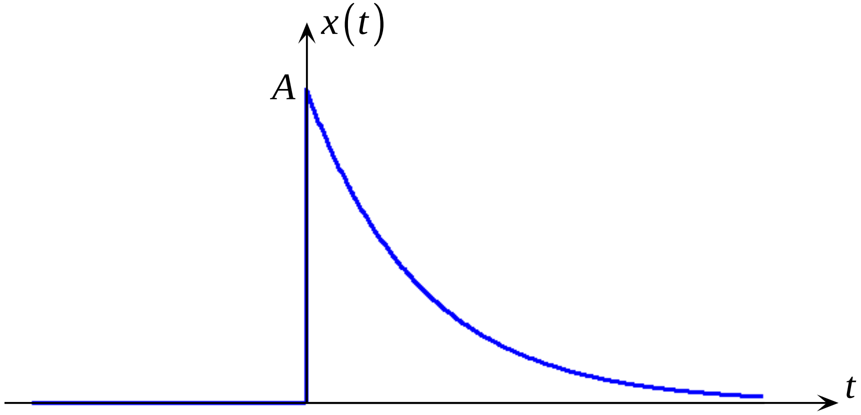
$\tau > 0$

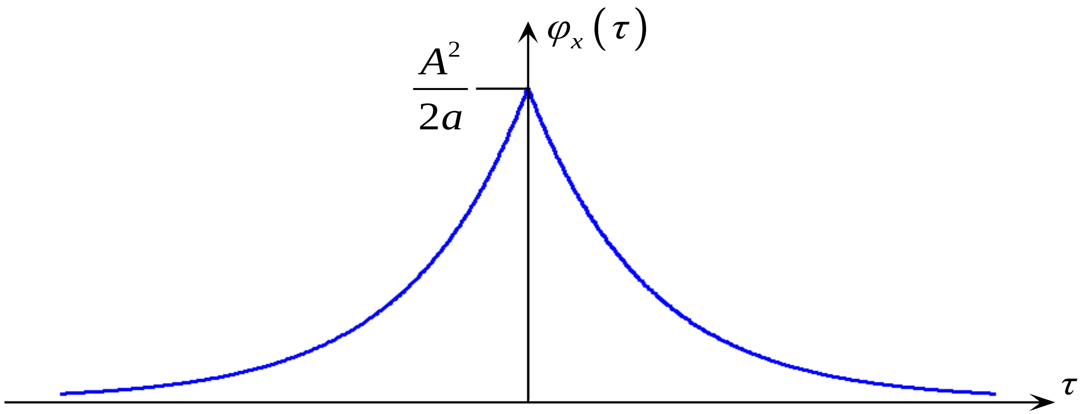


$$\varphi_x(\tau) = A^2 \int_{\tau}^{\infty} e^{-a(2t-\tau)}\mathrm{d}t =$$

$$= A^2 e^{a\tau} \int_{\tau}^{\infty} e^{-2at}\mathrm{d}t = \frac{A^2}{2a}e^{-a\tau}$$

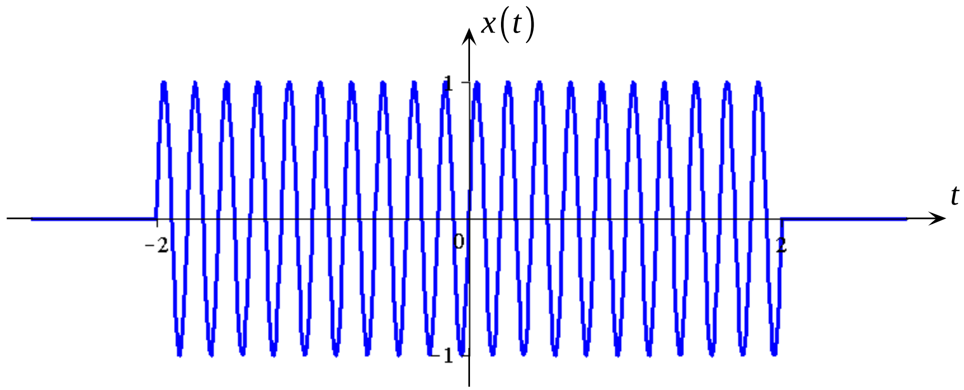
$$\varphi_x(\tau) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{A^2}{2a} e^{a\tau} & \text{gdy} \;\; \tau < 0 \\ \dfrac{A^2}{2a} e^{-a\tau} & \text{gdy} \;\; \tau > 0 \end{array} \right\} = \frac{A^2}{2a} e^{-a|\tau|}$$

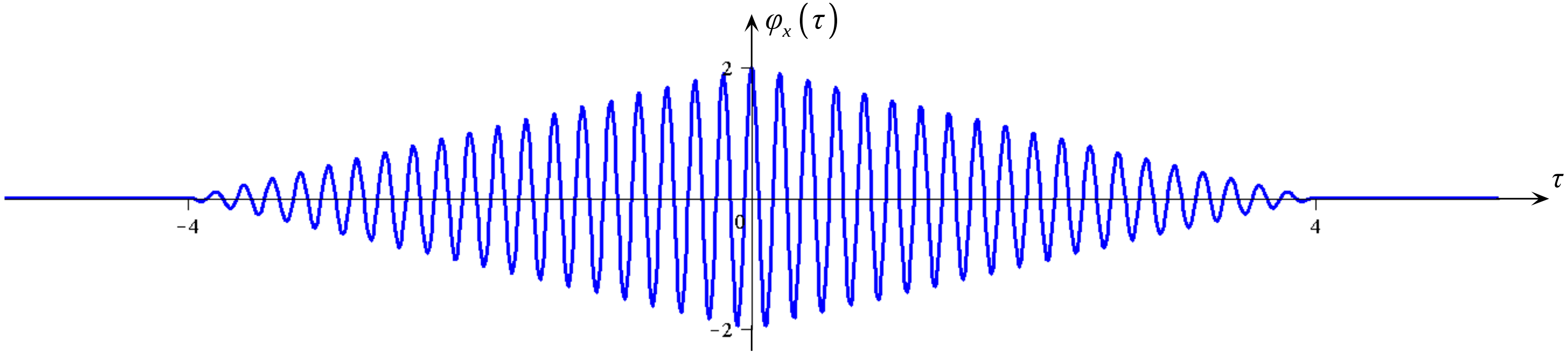




Przykład 2.

$$x(t) = \left[\mathbf{1}(t+2) - \mathbf{1}(t-2)\right]\sin 10\pi t$$





Twierdzenie Rayleigha: $$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,y^*(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\omega)\,Y^*(\mathrm{j}\omega)\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}$$

Przesunięcie w dziedzinie czasu: $$x(t) \rightleftharpoons X(\mathrm{j}\omega) \;\Rightarrow\; x(t-t_0) \rightleftharpoons X(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$$

$$x(t) \rightleftharpoons X(\mathrm{j}\omega)$$

$$y(t) = x(t-\tau) \quad\Rightarrow\quad y(t) \rightleftharpoons X(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}$$

$$\varphi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,x^*(t-\tau)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\omega)\left[X(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\right]^*\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \left|X(\mathrm{j}\omega)\right|^2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}$$

$$\Phi_x(\mathrm{j}\omega) = \mathcal{F}\{\varphi_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x(\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau$$

$$\varphi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(\mathrm{j}\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}$$

$$\boxed{\Phi_x(\mathrm{j}\omega) = \left|X(\mathrm{j}\omega)\right|^2}$$

$$\frac{\Phi_x(\mathrm{j}\omega)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{\varphi_x(\tau)\}$$ jest widmową gęstością energii sygnału $x(t)$

$$\boxed{E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,\mathrm{d}t = \varphi_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(\mathrm{j}\omega)\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}}$$

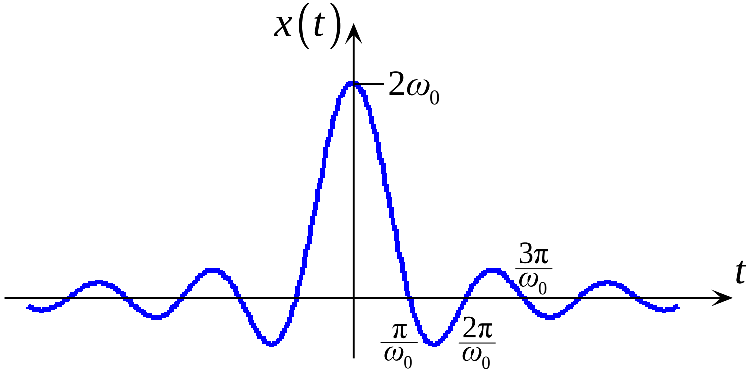
Równość Parsevala

$$\begin{tikzcd}
 & X(\mathrm{j}\omega) \arrow[dl, bend left, "\mathcal{F}^{-1}"] \arrow[dr, bend left] & \\
x(t) \arrow[ur, bend left, "\mathcal{F}"] \arrow[dr, bend right, "\langle x, x_\tau \rangle"'] & & \Phi_x(\mathrm{j}\omega) = |X(\mathrm{j}\omega)|^2 \arrow[dl, bend right, "\mathcal{F}^{-1}"'] \\
 & \varphi_x(\tau) \arrow[ur, bend right, "\mathcal{F}"'] &
\end{tikzcd}$$

Przykład

$$x(t) = \frac{2\sin\omega_0 t}{t} = 2\omega_0\,\mathrm{Sa}(\omega_0 t)$$

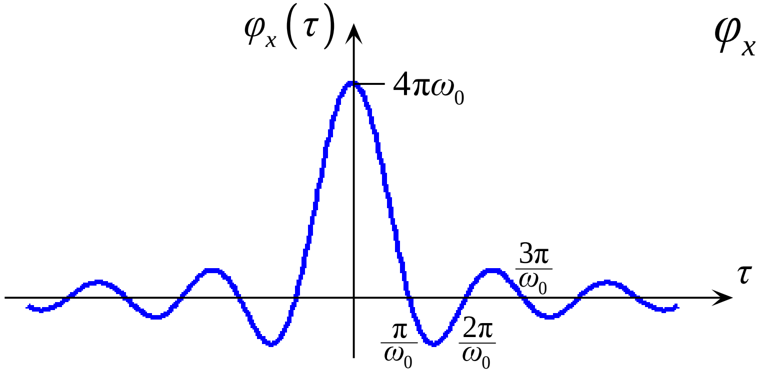
$$\varphi_x(\tau) = 4\omega_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Sa}(\omega_0 t)\mathrm{Sa}\left[\omega_0(t-\tau)\right]\mathrm{d}t = \mathbf{?}$$



$$X(\mathrm{j}\omega) = 2\pi\left[\mathbf{1}(\omega+\omega_0) - \mathbf{1}(\omega-\omega_0)\right]$$

$$\left|X(\mathrm{j}\omega)\right|^2 = 4\pi^2\left[\mathbf{1}(\omega+\omega_0) - \mathbf{1}(\omega-\omega_0)\right] = \Phi_x(\mathrm{j}\omega)$$

$$\varphi_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\Phi_x(\mathrm{j}\omega)\right\} = 4\pi\omega_0\,\mathrm{Sa}(\omega_0\tau)$$



Sygnały o skończonej mocy

Definicja

Funkcją autokorelacji $\psi_x(\tau)$ sygnału $x(t)$ o skończonej mocy nazywamy

$$\boxed{\psi_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, x^*(t-\tau)\,\mathrm{d}t}$$

Jeżeli $x(t) \in L_T^2$ czyli

$$x(t) = x(t-kT), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2\,\mathrm{d}t < \infty$$

$$\boxed{\psi_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\, x^*(t-\tau)\,\mathrm{d}t}$$

Własności:

W1 Funkcja autokorelacji $\psi_x(\tau)$ jest funkcją hermitowską, tzn.

$$\psi_x(\tau) = \psi_x^*(-\tau)$$

Jeżeli $x(t)$ jest sygnałem rzeczywistym, to

$$\psi_x(\tau) = \psi_x(-\tau) \qquad \text{(funkcja parzysta)}$$

W2

$$\psi_x(0) = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)x^*(t)\,\mathrm{d}t = P_x$$

W3

$$\left|\psi_x(\tau)\right| \le \psi_x(0)$$

W4

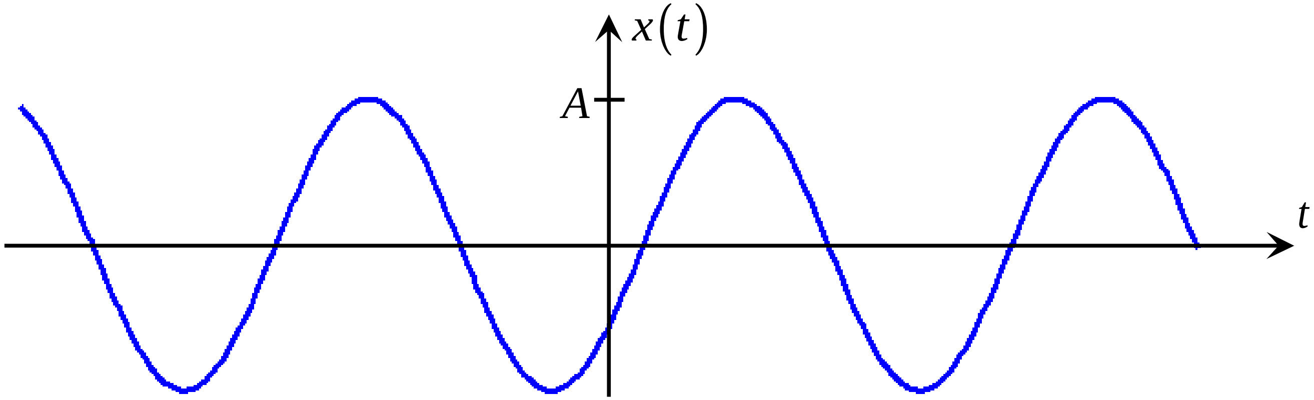
$$y(t) = x(t-t_0) \quad \Rightarrow \quad \psi_y(\tau) = \psi_x(\tau)$$

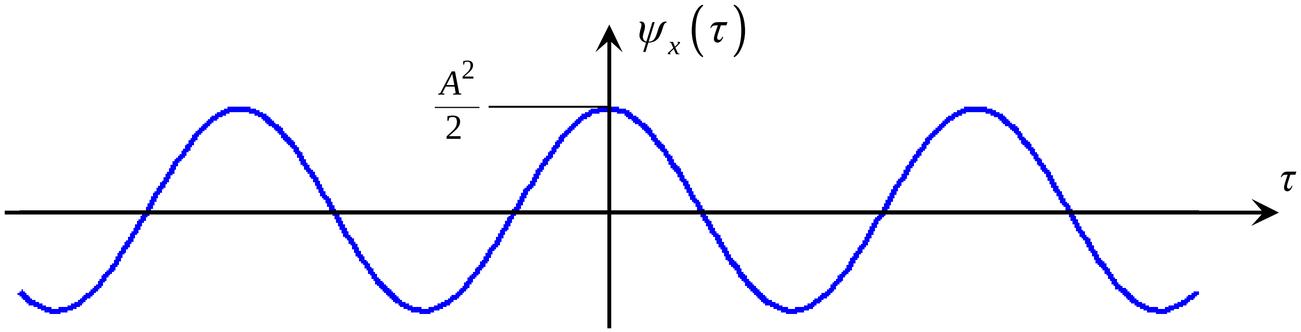
W5 Funkcja autokorelacji sygnału okresowego o okresie T jest również funkcją okresową o okresie T

Przykład 1.

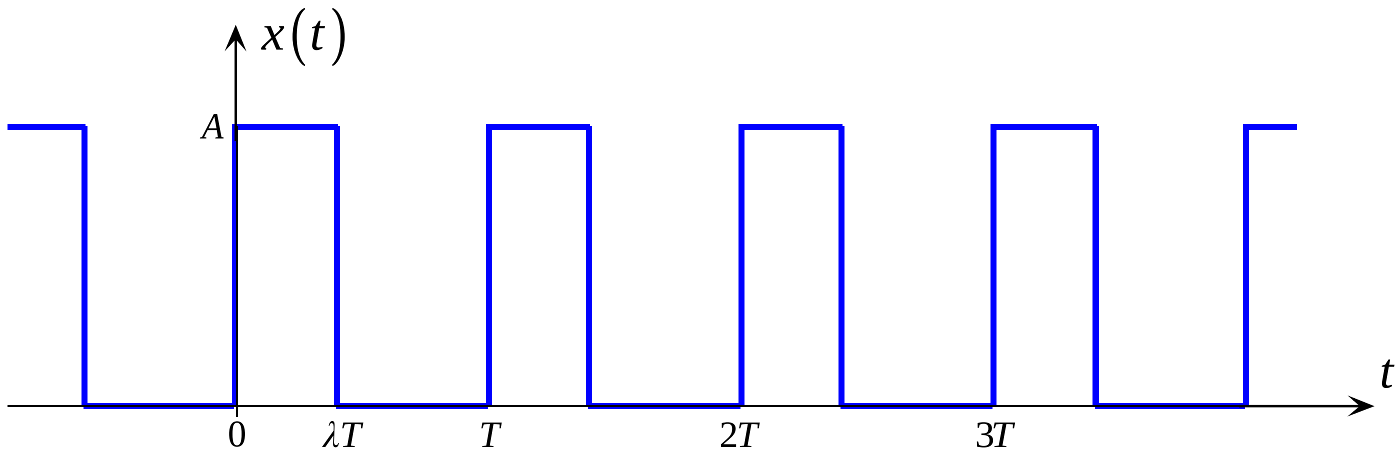
$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \theta)$$

$$\psi_x(\tau) = A^2 \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{\frac{\omega_0}{2\pi}} \sin(\omega_0 t + \theta)\sin\left[\omega_0 (t-\tau) + \theta\right]\mathrm{d}t = \frac{A^2}{2}\cos\omega_0 \tau$$

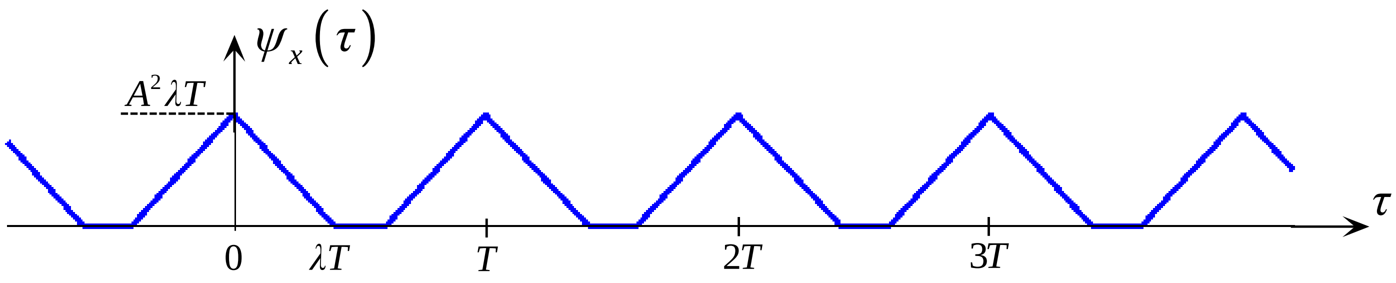


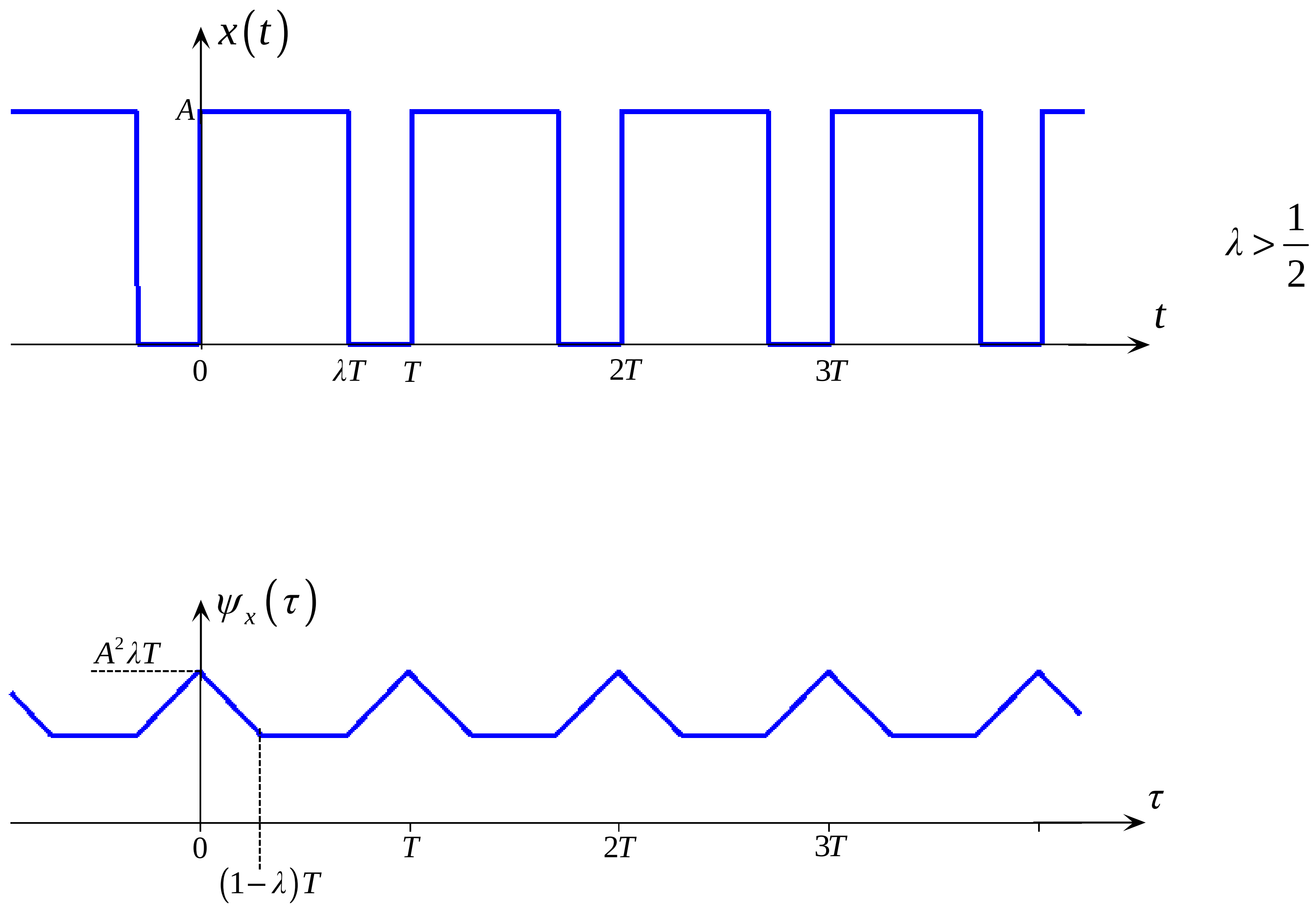


Przykład 2.



$\lambda < \frac{1}{2}$





$x(t)$
A
t
0
λT
T
$2T$
$3T$
$\lambda > \frac{1}{2}$
$\psi_x(\tau)$
$A^2\lambda T$
τ
0
T
$2T$
$3T$
$(1-\lambda)T$

Widmo mocy sygnałów okresowych

$$x(t), y(t) \in L_T^2$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t} \qquad y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t}$$

$$\langle x, y \rangle_{L_T^2} = \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle_{l^2}$$

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) y^*(t) \mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k Y_k^*$$

$$x(t) \rightleftharpoons X_k$$

$$y(t) \rightleftharpoons Y_k \qquad y(t) = x(t-\tau) \rightleftharpoons Y_k = X_k \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_0 \tau} \quad \Rightarrow \quad Y_k^* = X_k^* \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 \tau}$$

$$\psi_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) x^*(t-\tau) \mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k X_k^* \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 \tau}$$

$$\psi_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| X_k \right|^2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0\tau}$$

$$\psi_x(\tau) \rightleftharpoons \left| X_k \right|^2$$

$$\Psi_x(\mathrm{j}\omega) = \mathcal{F}\left\{\psi_x(\tau)\right\} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| X_k \right|^2 \delta(\omega - k\omega_0)$$

Przykład

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \theta)$$

$$\psi_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau$$

$$\Psi_x(\mathrm{j}\omega) = \frac{A^2}{2}\pi\left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right]$$

Funkcje korelacji wzajemnej

Sygnały o skończonej energii

$x(t), y(t) \in L^2$

Funkcja korelacji wzajemnej między sygnałem $x(t)$ a sygnałem $y(t)$

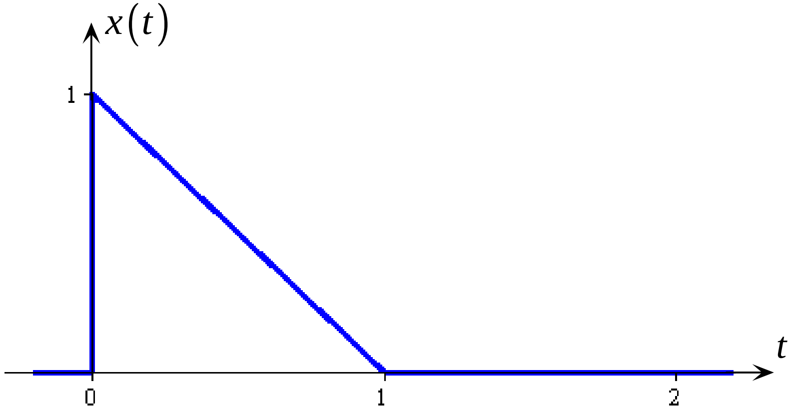
$$\varphi_{xy}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y^*(t-\tau)\,\mathrm{d}t$$

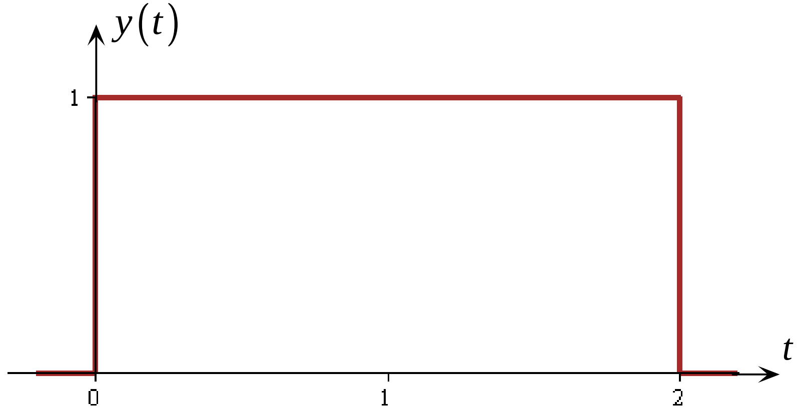
Funkcja korelacji wzajemnej między sygnałem $y(t)$ a sygnałem $x(t)$

$$\varphi_{yx}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, x^*(t-\tau)\,\mathrm{d}t$$

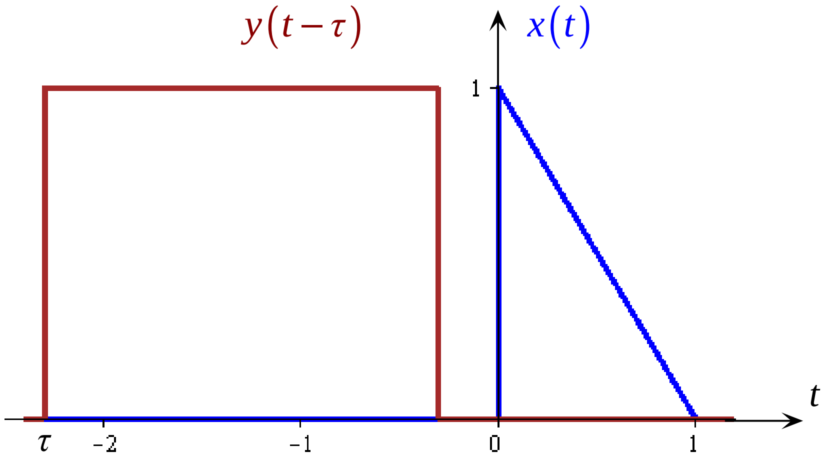
Przykład 1.

$$x(t) = (1-t)\mathbf{1}(t) + (t-1)\mathbf{1}(t-1) \qquad y(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-2)$$

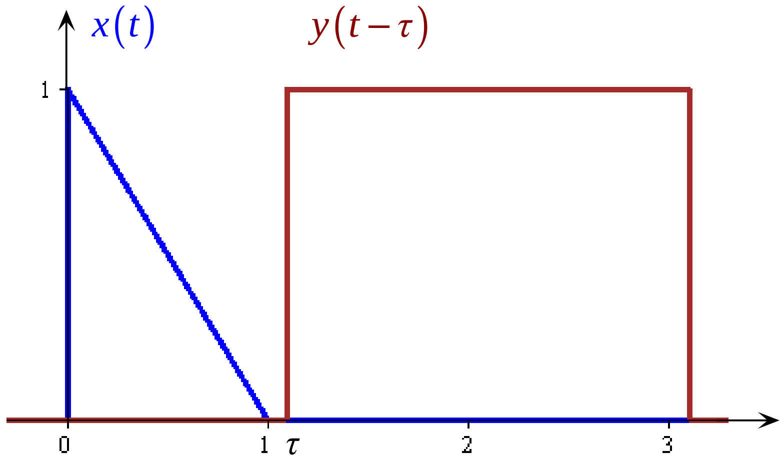


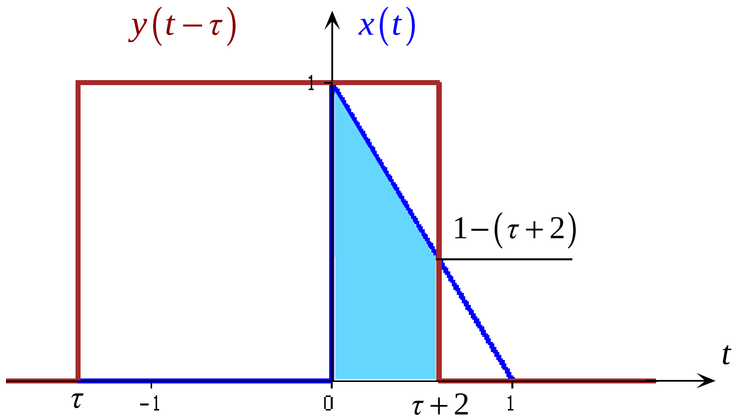


$\tau < -2$



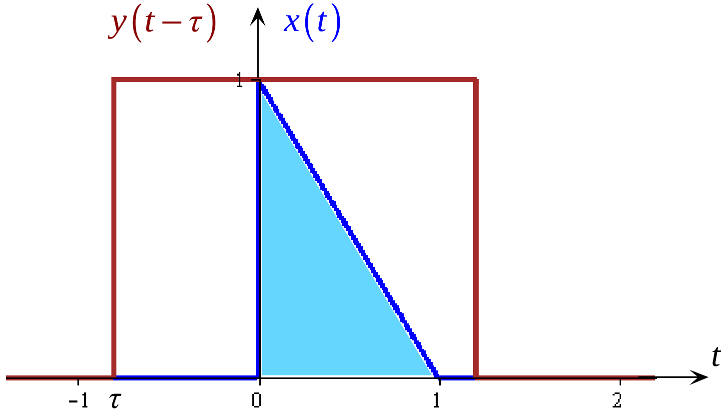
$\tau > 1$





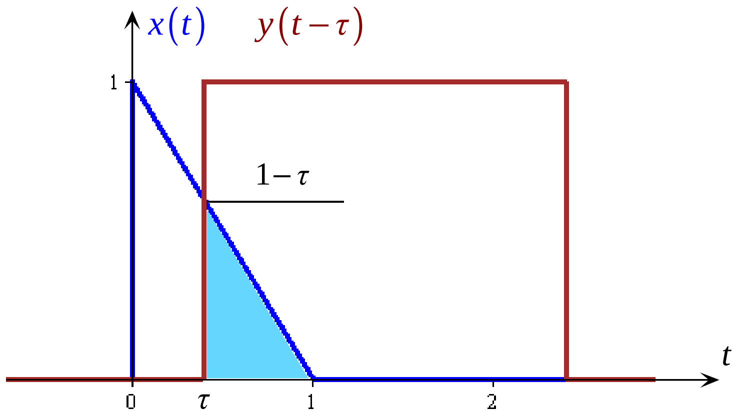
$$-2<\tau<-1$$

$$\varphi_{xy}(\tau)=\frac{1+1-(\tau+2)}{2}(\tau+2)\ =-\frac{\tau^2}{2}-\tau$$



$$-1<\tau<0$$

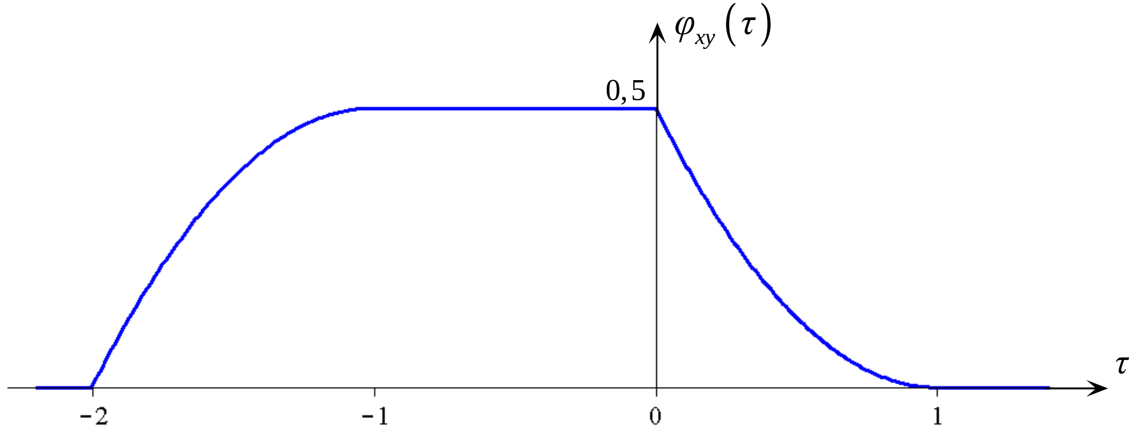
$$\varphi_{xy}(\tau)=\frac{1}{2}$$



$$0<\tau<1$$

$$\varphi_{xy}(\tau)=\frac{(1-\tau)^2}{2}$$

$$\varphi_{xy}(\tau)=\begin{cases}0 & \tau<-2,\ \ \tau>1\\ -\dfrac{\tau^2}{2}-\tau & -2<\tau<-1\\ \dfrac{1}{2} & -1<\tau<0\\ \dfrac{(1-\tau)^2}{2} & 0<\tau<1\end{cases}$$



Własności funkcji korelacji

$$\varphi_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y^{*}(t-\tau)\,\mathrm{d}t$$

$$t-\tau=u \quad \Rightarrow \quad t=u+\tau, \quad \mathrm{d}t=\mathrm{d}u$$

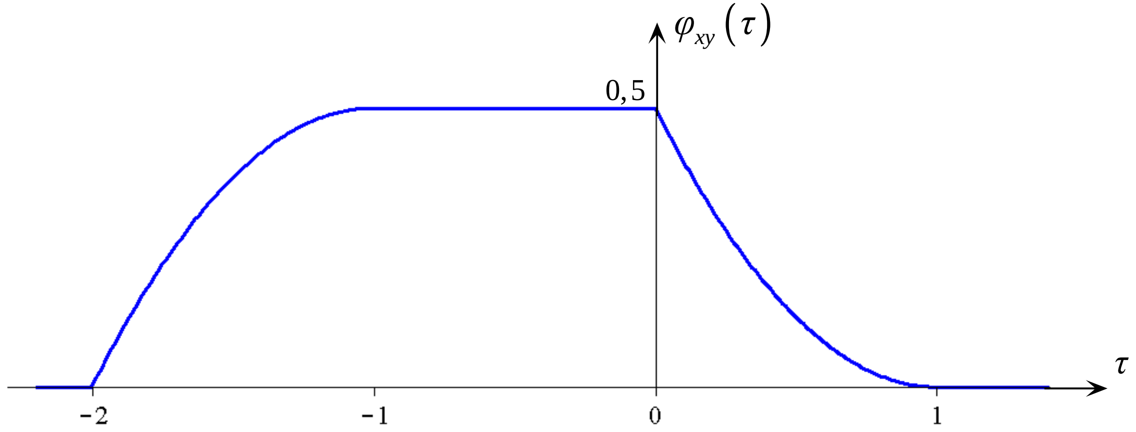
$$\varphi_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} x(u+\tau)\, y^{*}(u)\,\mathrm{d}u=\left[\int_{-\infty}^{\infty} y(u)\, x^{*}(u+\tau)\,\mathrm{d}u\right]^{*}=\varphi_{yx}^{*}(-\tau)$$

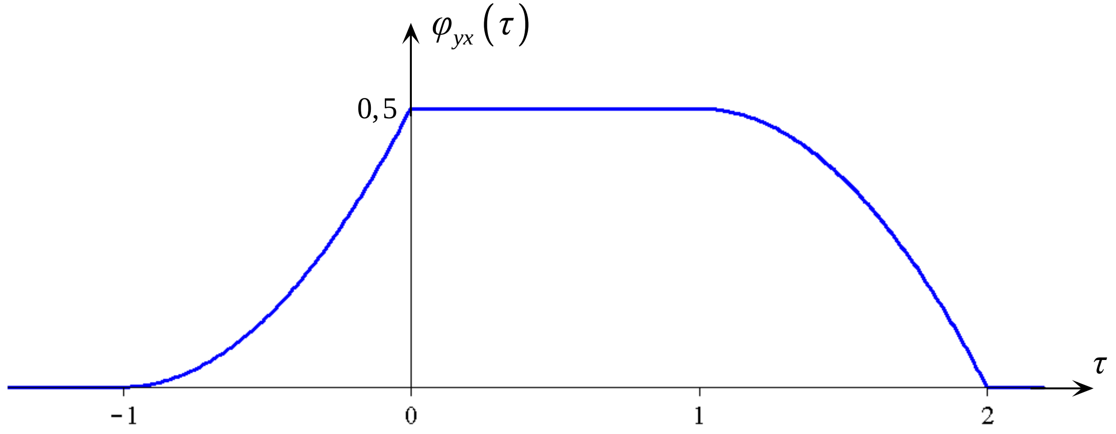
W1

$$\boxed{\varphi_{xy}(\tau)=\varphi_{yx}^{*}(-\tau)}$$

Jeżeli x i y są sygnałami rzeczywistymi, to

$$\varphi_{xy}(\tau)=\varphi_{yx}(-\tau)$$


$\varphi_{xy}(\tau)$
0,5
τ
-2
-1
0
1


$\varphi_{yx}(\tau)$
0,5
τ
-1
0
1
2

$$E_x = \langle x, x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t \qquad E_y = \langle y, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 \, \mathrm{d}t$$

$$y_\tau \triangleq y(t-\tau) \qquad \langle y, y \rangle = \langle y_\tau, y_\tau \rangle = E_y$$

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t-\tau) \mathrm{d}t = \langle x, y_\tau \rangle$$

Nierówność Buniakowskiego-Schwarza

$$|\langle x, y \rangle| \le \sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}$$

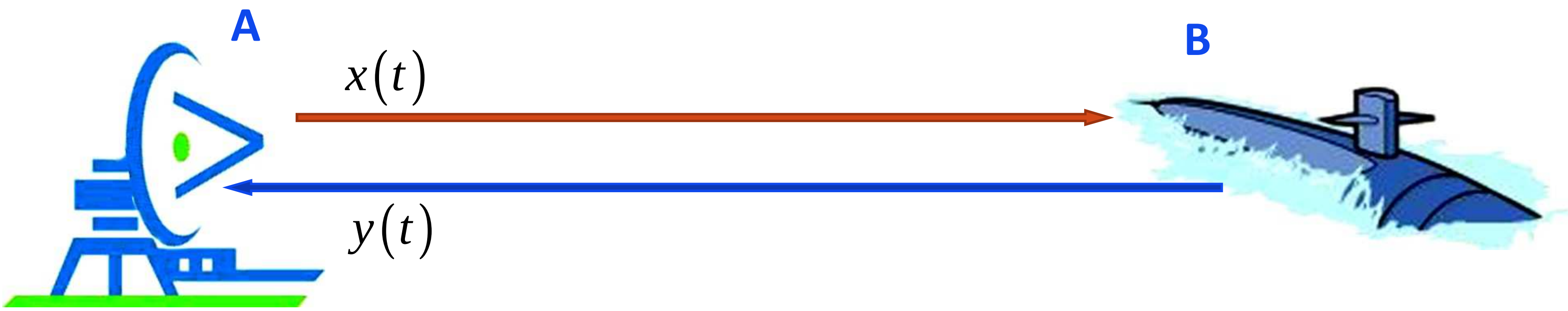
W2

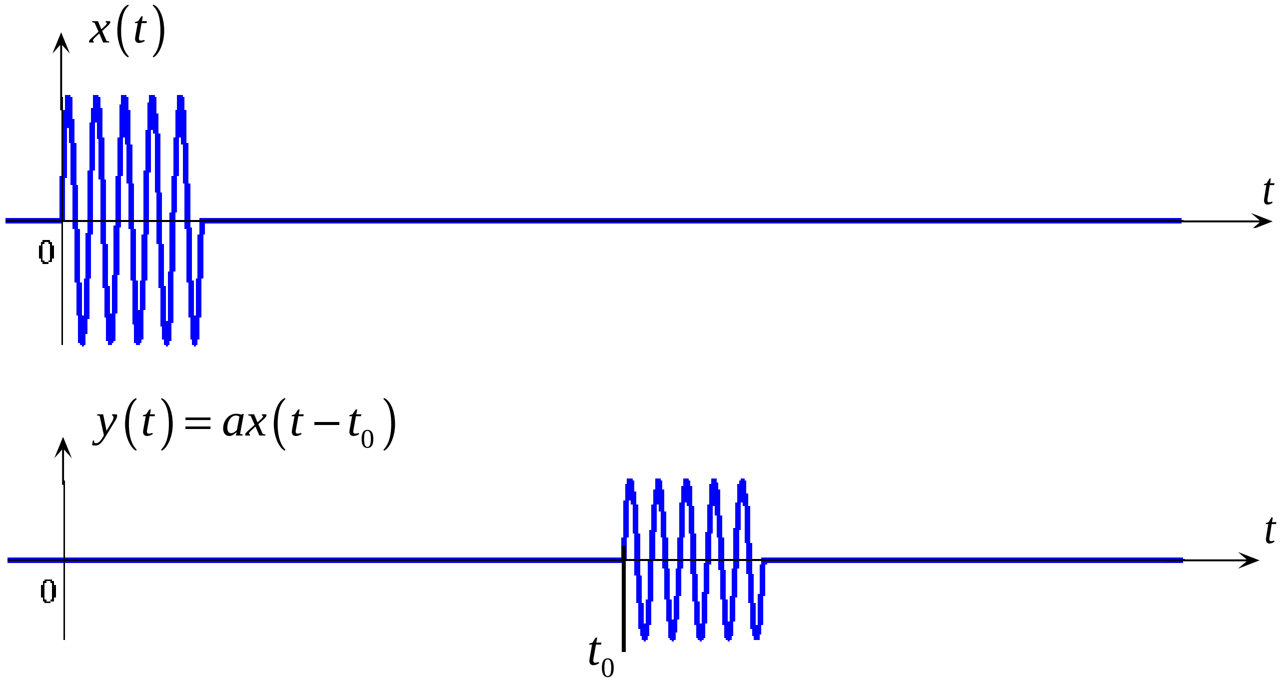
$$\boxed{\begin{aligned} |\varphi_{xy}(\tau)| &\le \sqrt{E_x E_y} \\ |\varphi_{yx}(\tau)| &\le \sqrt{E_x E_y} \end{aligned}}$$

W3

Jeżeli istnieje τ_0 takie, że $\varphi_{xy}(\tau_0) = 0$ to sygnały $x(t)$ i $y(t-\tau_0)$ są ortogonalne

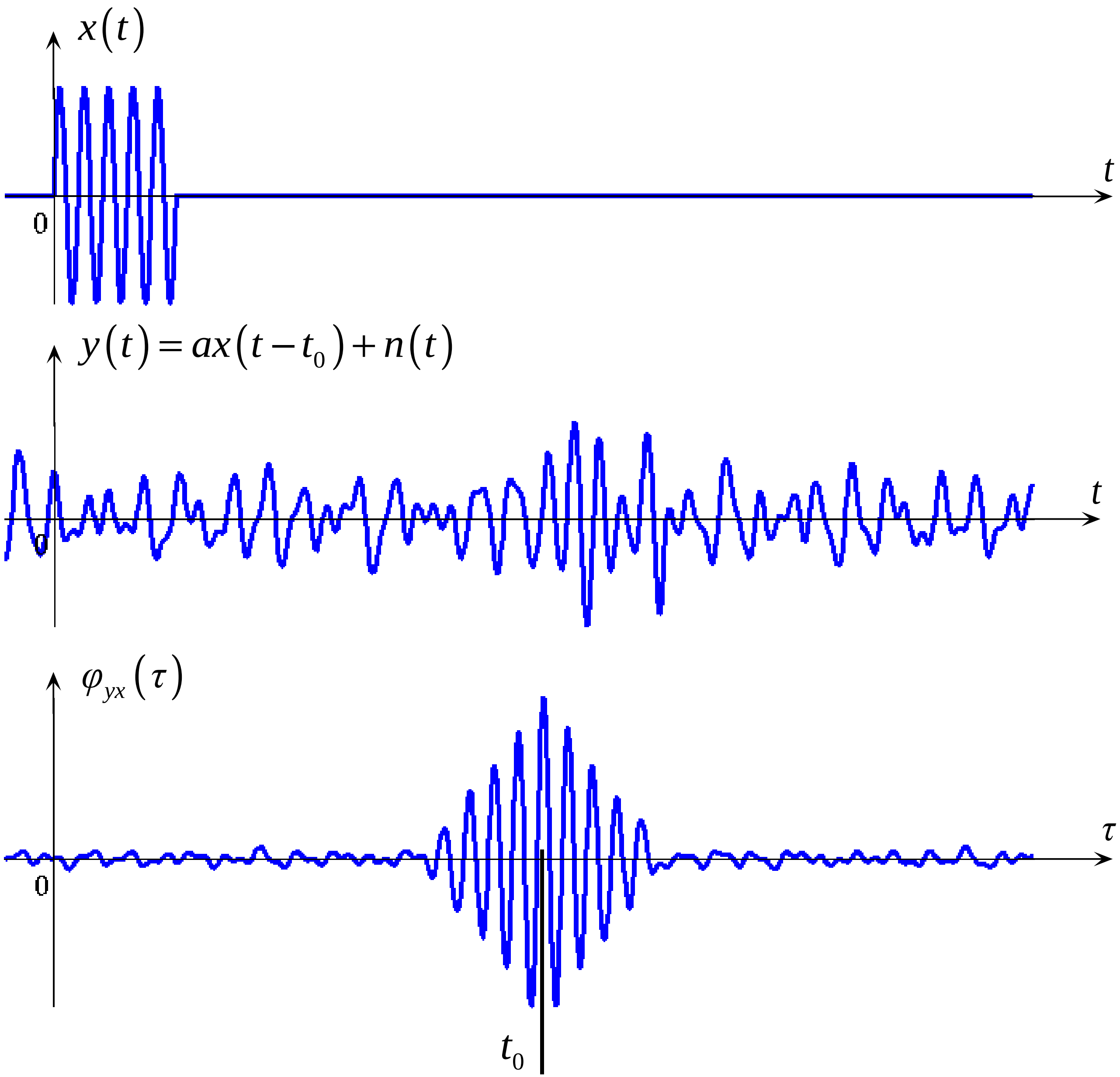
Przykład 2.





$$\text{Odległość AB} = \frac{1}{2} t_0 c$$

Na odebrany sygnał nakłada się losowy sygnał szumów i zakłóceń $n(t)$



Sygnały o skończonej mocy

Definicja

Funkcjami korelacji wzajemnej $\psi_{xy}(\tau)$ i $\psi_{yx}(\tau)$ sygnałów $x(t)$ i $y(t)$ o skończonej mocy nazywamy

$$\boxed{\begin{gathered}\psi_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, y^*(t-\tau)\,\mathrm{d}t \\[2em] \psi_{yx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} y(t)\, x^*(t-\tau)\,\mathrm{d}t\end{gathered}}$$

Sygnały okresowe o skończonej mocy

Jeżeli $x(t), y(t) \in L_T^2$ czyli

$$x(t) = x(t-kT), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 \,\mathrm{d}t < \infty$$

$$y(t) = y(t-kT), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$P_y = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} |y(t)|^2 \,\mathrm{d}t < \infty$$

(sygnały mają taki sam okres!)

$$\boxed{\begin{aligned} \psi_{xy}(\tau) &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\, y^*(t-\tau)\,\mathrm{d}t \\ \psi_{yx}(\tau) &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} y(t)\, x^*(t-\tau)\,\mathrm{d}t \end{aligned}}$$

Przykład