Ικανές συνθήκες δεύτερης τάξης για προβλήματα με μία και δύο ισοτικές δεσμεύσεις

Ονοματεπώνυμο: Γεώργιος Πατιώς
ΑΕΜ: 4186

Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία θα μελετηθούν οι ικανές συνθήκες δεύτερης τάξης για προβλήματα με μία και δύο ισοτικές δεσμεύσεις. Αρχικά, θα εξεταστεί η περίπτωση μίας ισοτικής δεσμεύσεις και στη συνέχεια η περίπτωση δύο ισοτικών δεσμεύσεων. Στην περίπτωση των δύο ισοτικών δεσμεύσεων εξετάζεται μόνο η περίπτωση όπου η συνάρτηση f που βελτιστοποιείται έχει 3 μεταβλητές εισόδου. Τέλος, θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα των προβλημάτων όπως υπολογίστηκαν προγραμματιστικά στη γλώσσα προγραμματισμού Python.

Προαπαιτούμενες βιβλιοθήκες Python

Για την εκτέλεση του κώδικα που παρουσιάζεται στην παρούσα εργασία απαιτείται η χρήση των παρακάτω βιβλιοθηκών:

- numpy για αριθμητικές πράξεις – https://www.sympy.org
- sympy για συμβολικούς και αναλυτικούς υπολογισμούς – https://numpy.org

Στοιχεία Θεωρίας

Μία ισοτική δέσμευση

Έστω το πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{subject to} \quad & g(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

όπου $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, C^1 πραγματικές συναρτήσεις.

Δεσμευμένο κρίσιμο σημείο

Ένα σημείο $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι δεσμευμένο κρίσιμο της f υπο τη δέσμευση $g(\mathbf{x}) = 0$ όταν υπάρχει $\lambda^* \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) - \lambda^* \nabla g(\mathbf{x}^*) = 0 \tag{2}$$

και

$$g(\mathbf{x}^*) = 0 \tag{3}$$

Συνάρτηση Lagrange

Η συνάρτηση Lagrange ορίζεται ως εξής:

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \lambda g(\mathbf{x}) \tag{4}$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι η πολλαπλασιαστής Lagrange.

Με βάση αυτόν τον ορισμό ένα σημείο $x^* \in \mathcal{X}$ είναι δεσμευμένο κρίσιμο σημείο ανν υπάρχει λ^* τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\nabla L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = 0 \tag{5}$$

δηλαδή

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = 0 \tag{6}$$

και

$$g(\mathbf{x}^*) = 0 \tag{7}$$

δηλαδή το σημείο $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ είναι κρίσιμο σημείο της Λανγκρασιανής L.

Εσσιανός πίνακας Λανγκρασιανής

Ο εσσιανός πίνακας της Λανγκρασιανής ορίζεται ως εξής:

$$\nabla^2 L(\mathbf{x}, \lambda) = \begin{bmatrix} L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & \dots & L_{x_1x_n} & L_{x_1\lambda} \\ L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & \dots & L_{x_2x_n} & L_{x_2\lambda} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ L_{x_nx_1} & L_{x_nx_2} & \dots & L_{x_nx_n} & L_{x_n\lambda} \\ L_{\lambda x_1} & L_{\lambda x_2} & \dots & L_{\lambda x_n} & L_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Πρωτεύουσες Ελάσσονες Ορίζουσες

Οι πρωτεύουσες ελάσσονες ορίζουσες της Λανγκρασιανής ορίζονται ως εξής:

$$
\begin{aligned}
&\Delta_1(\mathbf{x},\lambda) = L_{x_1x_1} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} \\
&\Delta_2(\mathbf{x},\lambda) = \begin{vmatrix} L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} \\ L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\
&\vdots \\
&\Delta_{n+1}(\mathbf{x},\lambda) = \begin{vmatrix} L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & \dots & L_{x_1x_n} \\ L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & \dots & L_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{x_nx_1} & L_{x_nx_2} & \dots & L_{x_nx_n} \end{vmatrix} = |\nabla^2 L(\mathbf{x},\lambda)|
\end{aligned} \tag{9}
$$

Ικανή συνθήκη δεύτερης τάξης

Έστω $f = f(\mathbf{x})$ και $g = g(\mathbf{x}) : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, C^2$ συναρτήσεις στο ανοικτό $X, \mathbf{x}^*$ ένα δεσμευμένο κρίσιμο σημείο της f υπό τη δέσμευση $g(\mathbf{x}) = 0$, L η Λανγκρασιανή των f και g και $\nabla^2 L(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ ο εσσιανός πίνακας της Λανγκρασιανής στο $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$. Υποθέτουμε ότι $|\nabla^2 L(\mathbf{x}^*, \lambda^*)| \neq 0$.
Τότε ισχύουν οι ισχυριμσοί:

- Αν $\Delta_3 < 0, \Delta_4 < 0, \dots, \Delta_{n+1} < 0$ τότε η f έχει στο $\mathbf{x}^*$ τοπικό ελάχιστο υπό τη δέσμευση $g(\mathbf{x}) = 0$.
- Αν $\Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0, \dots, \Delta_{n+1} > 0$ τότε η f έχει στο $\mathbf{x}^*$ τοπικό μέγιστο υπό τη δέσμευση $g(\mathbf{x}) = 0$.
- Διαφορετικά, το $\mathbf{x}^*$ δεν είναι δεσμευμένος τοπικός βελτιστοποιητής της f.

Δύο ισοτικές δεσμεύσεις

Έστω το πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$
\begin{aligned}
\underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \quad & f(\mathbf{x}) \\
\text{subject to} \quad & g_1(\mathbf{x}) = 0 \\
& g_2(\mathbf{x}) = 0
\end{aligned} \tag{10}
$$

όπου $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $g_1, g_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, C^1 πραγματικές συναρτήσεις.

Δεσμευμένο κρίσιμο σημείο

Ένα σημείο $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι δεσμευμένο κρίσιμο της f υπο τη δέσμευση $g_1(\mathbf{x}) = 0$ και $g_2(\mathbf{x}) = 0$ όταν υπάρχουν $\lambda_1^*, \lambda_2^* \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) - \lambda_1^* \nabla g_1(\mathbf{x}^*) - \lambda_2^* \nabla g_2(\mathbf{x}^*) = 0 \tag{11}$$

και

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{x}^*) &= 0 \\ g_2(\mathbf{x}^*) &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Συνάρτηση Lagrange

Η συνάρτηση Lagrange ορίζεται ως εξής:

$$L(\mathbf{x}, \lambda_1, \lambda_2) = f(\mathbf{x}) - \lambda_1 g_1(\mathbf{x}) - \lambda_2 g_2(\mathbf{x}) \tag{13}$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ είναι οι πολλαπλασιαστές Lagrange.

Με βάση αυτόν τον ορισμό ένα σημείο $x^* \in \mathcal{X}$ είναι δεσμευμένο κρίσιμο σημείο ανν υπάρχουν λ_1^*, λ_2^* τέτοια ώστε να ισχύει:

$$\nabla L(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = 0 \tag{14}$$

δηλαδή

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = 0 \tag{15}$$

και

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{x}^*) &= 0 \\ g_2(\mathbf{x}^*) &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

δηλαδή το σημείο $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)$ είναι κρίσιμο σημείο της Λανγκρασιανής L.

Εσσιανός πίνακας Λανγκρασιανής

Ο εσσιανός πίνακας της Λανγκρασιανής ορίζεται ως εξής:

$$\nabla^2 L(\mathbf{x}, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & \dots & L_{x_1x_n} & L_{x_1\lambda_1} & L_{x_1\lambda_2} \\ L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & \dots & L_{x_2x_n} & L_{x_2\lambda_1} & L_{x_2\lambda_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{x_nx_1} & L_{x_nx_2} & \dots & L_{x_nx_n} & L_{x_n\lambda_1} & L_{x_n\lambda_2} \\ L_{\lambda_1x_1} & L_{\lambda_1x_2} & \dots & L_{\lambda_1x_n} & L_{\lambda_1\lambda_1} & L_{\lambda_1\lambda_2} \\ L_{\lambda_2x_1} & L_{\lambda_2x_2} & \dots & L_{\lambda_2x_n} & L_{\lambda_2\lambda_1} & L_{\lambda_2\lambda_2} \end{bmatrix} \tag{17}$$

Ικανή συνθήκη δεύτερης τάξης για $n = 3$

Ορίζω $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Έστω $f = f(\mathbf{x})$ και $g_1 = g_1(\mathbf{x}), g_2 = g_2(\mathbf{x}) : X \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, C^2$ συναρτήσεις στο ανοικτό $X, \mathbf{x}^*$ ένα δεσμευμένο κρίσιμο σημείο της f υπό τη δέσμευση $g_1(\mathbf{x}) = 0$ και $g_2(\mathbf{x}) = 0$, $\nabla g_1(\mathbf{x})$ και $\nabla g_2(\mathbf{x})$ γραμμικά ανεξάρτητα, L η Λανγκρασιανή των f και g_1, g_2 και $\nabla^2 L(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)$ ο εσσιανός πίνακας της Λανγκρασιανής στο $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)$ και $|\nabla^2 L(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)| \neq 0$ ο Εσσιανός της L στο κρίσιμο σημείο $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)$ Τότε ισχύουν οι ισχυριμσοί:

- Αν $|\nabla^2 L(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)| > 0$ τότε η f έχει στο x^* τοπικό ελάχιστο υπό τις δεσμεύσεις $g_1(\mathbf{x}) = 0$ και $g_2(\mathbf{x}) = 0$.

- Αν $|\nabla^2 L(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)| < 0$ τότε η f έχει στο x^* τοπικό μέγιστο υπό τη δεσμεύσεις $g_1(\mathbf{x}) = 0$ και $g_2(\mathbf{x}) = 0$.

- Διαφορετικά, το x^* δεν είναι δεσμευμένος τοπικός βελτιστοποιητής της f.

Προγραμματιστική Υλοποίηση σε Python

Στην παρούσα εργασία υλοποιήθηκαν οι παραπάνω θεωρητικές έννοιες στη γλώσσα προγραμματισμού Python. Παρακάτω επεξηγούνται εν συντομία η δομή του κώδικα και τα σημαντικότερα σημεία της υλοποίησης.

Δομή του κώδικα

Ο κώδικας υλοποίησης των παραπάνω θεωρητικών εννοιών χωρίζεται σε τέσσερα αρχεία:

- lagrangian_func.py : Υλοποιεί την κλάση lagrangian_func , η οποία αρχικοποιείται με τις συναρτήσεις $f, g_1, g_2, \ldots, g_m$ και τις μεταβλητές που αξιοποιούν οι συναρτήσεις. Στη συνέχεια, υπολογίζονται οι m πολλαπλασιαστές Lagrange, η συνάρτηση Lagrange, το ανάδελτα και ο Εσσιανός πίνακας της Λανγκρασιανής και αποθηκεύονται ως πεδία του εκάστοτε αντικειμένου.

- system_solve.py: Υλοποιεί τη συνάρτηση system_solve, η οποία δέχεται ως ορίσματα μία λίστα απο συναρτήσεις τις οποίες εξισώνει με το μηδέν και επιστρέφει όλες τις λύσεις του συστήματος σε μορφή λίστας λεξικών.

- helper_funcs.py: Περιέχει τις βοηθητικές συναρτήσεις όπως:
  - calc_partial_derivative: Υπολογίζει τη μερική παράγωγο της συνάρτησης όρισμα με βάση τη μεταβλητή όρισμα.
  - calc_gradient: Υπολογίζει το ανάδελτα της συνάρτησης όρισμα.
  - calc_hessian_matrix: Υπολογίζει τον εσσιανό πίνακα της συνάρτησης όρισμα.
  - leading_principal_minor: Υπολογίζει την i-οστή πρωτεύουσα ελάσσα ορίζουσα του πίνακα όρισμα.
  - find_critical_points: Υπολογίζει τα δεσμευμένα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f.
  - sufficient_condition_second_grade_one_constraint: Κατηγοριοποιεί τα δεσμευμένα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f με μία ισοτική δέσμευση.
  - sufficient_condition_second_grade_two_constraints: Κατηγοριοποιεί τα δεσμευμένα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f με δύο ισοτικές δεσμεύσεις. Σημειώνεται ότι τα $\nabla g_1(\mathbf{x})$ και $\nabla g_2(\mathbf{x})$ θεωρούνται γραμμικώς ανεξάρτητα.

- main_solver.py: Περιέχει δυο συγκεντρωτικές συναρτήσεις (μία για μια ισοτική δέσμευση και μία για δύο) που υλοποιούν την επίλυση των προβλημάτων βελτιστοποίησης. Αρχικά, ορίζει το αντικείμενο της συνάρτησης Lagrange , καλεί τη συνάρτηση για την εύρεση των δεσμευμένων κρίσιμων σημείων και, τέλος, καλεί την αντίστοιχη συνάρτηση που υλοποιεί την εκάστοτε ικανή συνθήκη δεύτερης τάξης για την κατηγοριοποίηση των κρίσιμων σημείων.
- Τέλος, το εκάστοτε αρχείο exampleX_i.py περιέχει το i-οστό παράδειγμα προβλήματος βελτιστοποίησης με X ισοτικές δεσμεύσεις.

Αποτελέσματα

Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των προβλημάτων βελτιστοποίησης εξετάστηκαν στην παρούσα εργασία.

Μία ισοτική δέσμευση

Πρόβλημα 0

Πρόβλημα βελτιστοποίησης με μία ισοτική δέσμευση:

$$\begin{aligned} \underset{x_1,x_2}{\text{minimize}} \quad & f(x_1,x_2) = x_1 + x_2 \\ \text{subject to} \quad & g(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

Η έξοδος του προγράμματος είναι:

```
Lagrange function:  -lambda*(x1**2 + x2**2 - 2) + x1 + x2
Hessian matrix:  [[-2*lambda, 0, -2*x1],
                  [0, -2*lambda, -2*x2],
                  [-2*x1, -2*x2, 0]]

Classification of critical points:
Critical point: x1 = -1, x2 = -1, Classification: local minimum
Critical point: x1 = 1, x2 = 1, Classification: local maximum
```

Πρόβλημα 1

Πρόβλημα βελτιστοποίησης με μία ισοτική δέσμευση:

$$\begin{aligned} \underset{x_1,x_2,x_3}{\text{minimize}} \quad & f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ \text{subject to} \quad & g(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

Η έξοδος του προγράμματος είναι:

```
Lagrange function:  -lambda*(x1 + x2 + x3 - 1) + x1**2 + x2**2 + x3**2
Hessian matrix:  [[2, 0, 0, -1],
                  [0, 2, 0, -1],
                  [0, 0, 2, -1],
                  [-1, -1, -1, 0]]

Classification of critical points:
Critical point: x1 = 1/3, x2 = 1/3, x3 = 1/3, Classification: local maximum
```

Πρόβλημα 2

Πρόβλημα βελτιστοποίησης με μία ισοτική δέσμευση:

$$\begin{aligned} \underset{x_1, x_2}{\text{minimize}} \quad & f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 \\ \text{subject to} \quad & g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

Η έξοδος του προγράμματος είναι:

```
Lagrange function:  -lambda*(x1**2 + x2**2 - 4) + x1**3 + x2**3
Hessian matrix:  [[-2*lambda + 6*x1, 0, -2*x1],
                  [0, -2*lambda + 6*x2, -2*x2],
                  [-2*x1, -2*x2, 0]]

Classification of critical points:
Critical point: x1 = -2, x2 = 0, Classification: local minimum
Critical point: x1 = 0, x2 = -2, Classification: local minimum
Critical point: x1 = 0, x2 = 2, Classification: local maximum
Critical point: x1 = 2, x2 = 0, Classification: local maximum
Critical point: x1 = -sqrt(2), x2 = -sqrt(2), Classification: local maximum
Critical point: x1 = sqrt(2), x2 = sqrt(2), Classification: local minimum
```

Πρόβλημα 3

Πρόβλημα βελτιστοποίησης με μία ισοτική δέσμευση:

$$\begin{aligned} \underset{x_1, x_2, x_3}{\text{minimize}} \quad & f(x_1, x_2, x_3) = x_1 * x_2 * x_3 \\ \text{subject to} \quad & g(x_1, x_2) = x_1 * x_2 + x_1 * x_3 + x_2 * x_3 - 6 = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Η έξοδος του προγράμματος είναι:

```
Lagrange function:  -lambda*(x1*x2 + x1*x3 + x2*x3 - 6) + x1*x2*x3
Hessian matrix:  [[0, -lambda + x3, -lambda + x2, -x2 - x3],
                  [-lambda + x3, 0, -lambda + x1, -x1 - x3],
                  [-lambda + x2, -lambda + x1, 0, -x1 - x2],
                  [-x2 - x3, -x1 - x3, -x1 - x2, 0]]

Classification of critical points:
```

```
Critical point: x1 = -sqrt(2), x2 = -sqrt(2), x3 = -sqrt(2),
                Classification: local minimum
Critical point: x1 = sqrt(2), x2 = sqrt(2), x3 = sqrt(2),
                Classification: local maximum
```

Πρόβλημα 4

Πρόβλημα βελτιστοποίησης με μία ισοτική δέσμευση:

$$\begin{aligned} \underset{x_1,x_2,x_3}{\text{minimize}} \quad & f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \\ \text{subject to} \quad & g(x_1,x_2) = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

Η έξοδος του προγράμματος είναι:

```
Lagrange function:  -lambda*(x1 + x2 + x3 - 1) + x1**2 + x2**2 - x3**2
Hessian matrix:  [[2, 0, 0, -1],
                  [0, 2, 0, -1],
                  [0, 0, -2, -1],
                  [-1, -1, -1, 0]]

Classification of critical points:
Critical point: x1 = 1, x2 = 1, x3 = -1,
                Classification: not a local optimizer
```

Δύο ισοτικές δέσμευσεις

Πρόβλημα 0

Πρόβλημα βελτιστοποίησης με δύο ισοτικές δέσμευσεις:

$$\begin{aligned} \underset{x_1,x_2,x_3}{\text{minimize}} \quad & f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ \text{subject to} \quad & g_1(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \\ & g_2(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 - x_3 + 2 = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

Η έξοδος του προγράμματος είναι:

```
Lagrange function:  -lambda1*(x1**2 + x2**2 - x3**2)
                    - lambda2*(x1 + x2 - x3 + 2)
                    + x1**2 + x2**2 + x3**2
Hessian matrix:  [[2 - 2*lambda1, 0, 0, -2*x1, -1],
                  [0, 2 - 2*lambda1, 0, -2*x2, -1],
                  [0, 0, 2*lambda1 + 2, 2*x3, 1],
                  [-2*x1, -2*x2, 2*x3, 0, 0],
                  [-1, -1, 1, 0, 0]]

Classification of critical points:
Critical point: x1 = -2 - sqrt(2), x2 = -2 - sqrt(2), x3 = -2*sqrt(2) - 2,
```

```
                Classification: local minimum
Critical point: x1 = -2 + sqrt(2), x2 = -2 + sqrt(2), x3 = -2 + 2*sqrt(2),
                Classification: local minimum
```

Πρόβλημα 1

Πρόβλημα βελτιστοποίησης με δύο ισοτικές δέσμευσεις:

$$\begin{aligned} \underset{x_1,x_2,x_3}{\text{minimize}} \quad & f(x_1,x_2,x_3) = 2*x_1 + x_2^2 - x_3^2 \\ \text{subject to} \quad & g_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 - 2*x_2 = 0 \\ & g_2(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_3 = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

Η έξοδος του προγράμματος είναι:

```
Lagrange function:  -lambda1*(x1 - 2*x2)
                    - lambda2*(x1 + x3) + 2*x1 + x2**2 - x3**2
Hessian matrix:  [[0, 0, 0, -1, -1],
                  [0, 2, 0, 2, 0],
                  [0, 0, -2, 0, -1],
                  [-1, 2, 0, 0, 0],
                  [-1, 0, -1, 0, 0]]

Classification of critical points:
Critical point: x1 = 4/3, x2 = 2/3, x3 = -4/3,
                Classification: local maximum
```

Πρόβλημα 2

Πρόβλημα βελτιστοποίησης με δύο ισοτικές δέσμευσεις:

$$\begin{aligned} \underset{x_1,x_2,x_3}{\text{minimize}} \quad & f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ \text{subject to} \quad & g_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \\ & g_2(x_1,x_2,x_3) = x_2 - x_1 = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

Η έξοδος του προγράμματος είναι:

```
Lagrange function:  -lambda1*(x1 + x2 + x3 - 1)
                    - lambda2*(-x1 + x2)
                    + x1**2 + x2**2 + x3**2
Hessian matrix:  [[2, 0, 0, -1, 1],
                  [0, 2, 0, -1, -1],
                  [0, 0, 2, -1, 0],
                  [-1, -1, -1, 0, 0],
                  [1, -1, 0, 0, 0]]

Classification of critical points:
Critical point: x1 = 1/3, x2 = 1/3, x3 = 1/3,
                Classification: local minimum
```

Πρόβλημα 3

Πρόβλημα βελτιστοποίησης με δύο ισοτικές δέσμευσεις:

$$\begin{aligned}
\underset{x_1,x_2,x_3}{\text{minimize}} \quad & f(x_1,x_2,x_3) = 400 * x_1^2 + 800 * x_2^2 + 200 * x_1 * x_2 + 1600 * x_3^2 + 400 * x_2 * x_3 \\
\text{subject to} \quad & g_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + 1.5 * x_3 - 1.2 = 0 \\
& g_2(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0
\end{aligned} \tag{26}$$

Η έξοδος του προγράμματος είναι:

```
Lagrange function:  -lambda1*(x1 + x2 + 1.5*x3 - 1.2)
                    - lambda2*(x1 + x2 + x3 - 1)
                    + 400*x1**2 + 200*x1*x2 + 800*x2**2
                    + 400*x2*x3 + 1600*x3**2
Hessian matrix:  [[800, 200, 0, -1, -1],
                  [200, 1600, 400, -1, -1],
                  [0, 400, 3200, -1.5, -1],
                  [-1, -1, -1.5, 0, 0], [-1, -1, -1, 0, 0]]

Classification of critical points:
Critical point: x1 = 0.5, x2 = 0.1, x3 = 0.4, Classification: local minimum
```