Ικανές συνθήκες δεύτερης τάξης για προβλήματα με μία και δύο ισοτικές δεσμεύσεις

Όνοματεπώνυμο: Γεώργιος Πατιώς
AEM: 4186

1 Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία θα μελετηθούν οι ικανές συνθήκες δεύτερης τάξης για προβλήματα με μία και δύο ισοτικές δεσμεύσεις. Αρχικά, θα εξεταστεί η περίπτωση μίας ισοτικής δεσμεύσεις και στη συνέχεια η περίπτωση δύο ισοτικών δεσμεύσεων. Στην περίπτωση των δύο ισοτικών δεσμεύσεων εξετάζεται μόνο η περίπτωση όπου η συνάρτηση f που βελτιστοποιείται έχει 3 μεταβλητές εισόδου. Τέλος, θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα των προβλημάτων όπως υπολογίστηκαν προγραμματιστικά στη γλώσσα προγραμματισμού Python.

2 Προαπαιτούμενες βιβλιοθήκες Python

Για την εκτέλεση του κώδικα που παρουσιάζεται στην παρούσα εργασία απαιτείται η χρήση των παρακάτω βιβλιοθηκών:

- numpy για αριθμητικές πράξεις – https://www.sympy.org
- sympy για συμβολικούς και αναλυτικούς υπολογισμούς – https://numpy.org
- matplotlib για την απεικόνιση γραφημάτων – https://matplotlib.org

3 Στοιχεία Θεωρίας

Μία ισοτική δέσμευση

Έστω το πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{subject to} \quad & g(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

όπου $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, C^1 πραγματικές συναρτήσεις.

Δεσμευμένο κρίσιμο σημείο

Ένα σημείο $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι δεσμευμένο κρίσιμο της f υπο τη δέσμευση $g(\mathbf{x}) = 0$ όταν υπάρχει $\lambda^* \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) - \lambda^* \nabla g(\mathbf{x}^*) = 0 \tag{2}$$

και

$$g(\mathbf{x}^*) = 0 \tag{3}$$

Συνάρτηση Lagrange

Η συνάρτηση Lagrange ορίζεται ως εξής:

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \lambda g(\mathbf{x}) \tag{4}$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι η πολλαπλασιαστής Lagrange.

Με βάση αυτόν τον ορισμό ένα σημείο $x^* \in \mathcal{X}$ είναι δεσμευμένο κρίσιμο σημείο ανν υπάρχει λ^* τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\nabla L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = 0 \tag{5}$$

δηλαδή

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = 0 \tag{6}$$

και

$$g(\mathbf{x}^*) = 0 \tag{7}$$

δηλαδή το σημείο $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ είναι κρίσιμο σημείο της Λανγκρασιανής L.

Εσσιανός πίνακας Λανγκρασιανής

Ο εσσιανός πίνακας της Λανγκρασιανής ορίζεται ως εξής:

$$\nabla^2 L(\mathbf{x}, \lambda) = \begin{bmatrix} L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & \dots & L_{x_1x_n} & L_{x_1\lambda} \\ L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & \dots & L_{x_2x_n} & L_{x_2\lambda} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ L_{x_nx_1} & L_{x_nx_2} & \dots & L_{x_nx_n} & L_{x_n\lambda} \\ L_{\lambda x_1} & L_{\lambda x_2} & \dots & L_{\lambda x_n} & L_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Πρωτεύουσες Ελάσσονες Ορίζουσες

Οι πρωτεύουσες ελάσσονες ορίζουσες της Λανγκρασιανής ορίζονται ως εξής:

$$
\begin{aligned}
&\Delta_1(\mathbf{x},\lambda) = L_{x_1x_1} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}\\
&\Delta_2(\mathbf{x},\lambda) = \begin{vmatrix} L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} \\ L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}\\
&\vdots\\
&\Delta_{n+1}(\mathbf{x},\lambda) = \begin{vmatrix} L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & \dots & L_{x_1x_n} \\ L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & \dots & L_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{x_nx_1} & L_{x_nx_2} & \dots & L_{x_nx_n} \end{vmatrix} = |\nabla^2 L(\mathbf{x},\lambda)|
\end{aligned} \tag{9}
$$

Ικανή συνθήκη δεύτερης τάξης

Έστω $f = f(\mathbf{x})$ και $g = g(\mathbf{x}) : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, C^2$ συναρτήσεις στο ανοικτό $X, \mathbf{x}^*$ ένα δεσμευμένο κρίσιμο σημείο της f υπό τη δέσμευση $g(\mathbf{x}) = 0$, L η Λανγκρασιανή των f και g και $\nabla^2 L(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ ο εσσιανός πίνακας της Λανγκρασιανής στο $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$. Υποθέτουμε ότι $|\nabla^2 L(\mathbf{x}^*, \lambda^*)| \neq 0$.
Τότε ισχύουν οι ισχυριμσοί:

- Αν $\Delta_3 < 0, \Delta_4 < 0, \dots, \Delta_{n+1} < 0$ τότε η f έχει στο $\mathbf{x}^*$ τοπικό ελάχιστο υπό τη δέσμευση $g(\mathbf{x}) = 0$.
- Αν $\Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0, \dots, \Delta_{n+1} > 0$ τότε η f έχει στο $\mathbf{x}^*$ τοπικό μέγιστο υπό τη δέσμευση $g(\mathbf{x}) = 0$.
- Διαφορετικά, το $\mathbf{x}^*$ δεν είναι δεσμευμένος τοπικός βελτιστοποιητής της f.

Δύο ισοτικές δεσμεύσεις

Έστω το πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$
\begin{aligned}
\underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \quad & f(\mathbf{x}) \\
\text{subject to} \quad & g_1(\mathbf{x}) = 0 \\
& g_2(\mathbf{x}) = 0
\end{aligned} \tag{10}
$$

όπου $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $g_1, g_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, C^1 πραγματικές συναρτήσεις.

Δεσμευμένο κρίσιμο σημείο

Ένα σημείο $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι δεσμευμένο κρίσιμο της f υπο τη δέσμευση $g_1(\mathbf{x}) = 0$ και $g_2(\mathbf{x}) = 0$ όταν υπάρχουν $\lambda_1^*, \lambda_2^* \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$
\nabla f(\mathbf{x}^*) - \lambda_1^* \nabla g_1(\mathbf{x}^*) - \lambda_2^* \nabla g_2(\mathbf{x}^*) = 0 \tag{11}
$$

και
$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{x}^*) &= 0 \\ g_2(\mathbf{x}^*) &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Συνάρτηση Lagrange

Η συνάρτηση Lagrange ορίζεται ως εξής:

$$L(\mathbf{x}, \lambda_1, \lambda_2) = f(\mathbf{x}) - \lambda_1 g_1(\mathbf{x}) - \lambda_2 g_2(\mathbf{x}) \tag{13}$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ είναι οι πολλαπλασιαστές Lagrange.

Με βάση αυτόν τον ορισμό ένα σημείο $x^* \in \mathcal{X}$ είναι δεσμευμένο κρίσιμο σημείο ανν υπάρχουν λ_1^*, λ_2^* τέτοια ώστε να ισχύει:

$$\nabla L(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = 0 \tag{14}$$

δηλαδή

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = 0 \tag{15}$$

και
$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{x}^*) &= 0 \\ g_2(\mathbf{x}^*) &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

δηλαδή το σημείο $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)$ είναι κρίσιμο σημείο της Λανγκρασιανής L.

Εσσιανός πίνακας Λανγκρασιανής

Ο εσσιανός πίνακας της Λανγκρασιανής ορίζεται ως εξής:

$$\nabla^2 L(\mathbf{x}, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & \dots & L_{x_1x_n} & L_{x_1\lambda_1} & L_{x_1\lambda_2} \\ L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & \dots & L_{x_2x_n} & L_{x_2\lambda_1} & L_{x_2\lambda_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{x_nx_1} & L_{x_nx_2} & \dots & L_{x_nx_n} & L_{x_n\lambda_1} & L_{x_n\lambda_2} \\ L_{\lambda_1x_1} & L_{\lambda_1x_2} & \dots & L_{\lambda_1x_n} & L_{\lambda_1\lambda_1} & L_{\lambda_1\lambda_2} \\ L_{\lambda_2x_1} & L_{\lambda_2x_2} & \dots & L_{\lambda_2x_n} & L_{\lambda_2\lambda_1} & L_{\lambda_2\lambda_2} \end{bmatrix} \tag{17}$$

Ικανή συνθήκη δεύτερης τάξης για $n = 3$

Ορίζω $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Έστω $f = f(\mathbf{x})$ και $g_1 = g_1(\mathbf{x}), g_2 = g_2(\mathbf{x}) : X \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, C^2$ συναρτήσεις στο ανοικτό $X, \mathbf{x}^*$ ένα δεσμευμένο κρίσιμο σημείο της f υπό τη δέσμευση $g_1(\mathbf{x}) = 0$ και $g_2(\mathbf{x}) = 0$, $\nabla g_1(\mathbf{x})$ και $\nabla g_2(\mathbf{x})$ γραμμικά ανεξάρτητα, L η Λανγκρασιανή των f και g_1, g_2 και $\nabla^2 L(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)$ ο εσσιανός πίνακας της Λανγκρασιανής στο $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)$ και $|\nabla^2 L(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)| \neq 0$ ο Εσσιανός της L στο κρίσιμο σημείο $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)$ Τότε ισχύουν οι ισχυριμσοί:

- Αν $|\nabla^2 L(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)| > 0$ τότε η f έχει στο x^* τοπικό ελάχιστο υπό τις δεσμεύσεις $g_1(\mathbf{x}) = 0$ και $g_2(\mathbf{x}) = 0$.

- Αν $|\nabla^2 L(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)| < 0$ τότε η f έχει στο x^* τοπικό μέγιστο υπό τη δεσμεύσεις $g_1(\mathbf{x}) = 0$ και $g_2(\mathbf{x}) = 0$.

- Διαφορετικά, το x^* δεν είναι δεσμευμένος τοπικός βελτιστοποιητής της f.

4 Προγραμματιστική Υλοποίηση σε Python

Στην παρούσα εργασία υλοποιήθηκαν οι παραπάνω θεωρητικές έννοιες στη γλώσσα προγραμματισμού Python. Παρακάτω επεξηγούνται εν συντομία η δομή του κώδικα και τα σημαντικότερα σημεία της υλοποίησης.

Δομή του κώδικα

Ο κώδικας υλοποίησης των παραπάνω θεωρητικών εννοιών χωρίζεται σε τέσσερα αρχεία:

- lagrangian_func.py : Υλοποιεί την κλάση lagrangian_func , η οποία αρχικοποιείται με τις συναρτήσεις $f, g_1, g_2, \ldots, g_m$ και τις μεταβλητές που αξιοποιούν οι συναρτήσεις. Στη συνέχεια, υπολογίζονται οι m πολλαπλασιαστές Lagrange, η συνάρτηση Lagrange, το ανάδελτα και ο Εσσιανός πίνακας της Λανγκρασιανής και αποθηκεύονται ως πεδία του εκάστοτε αντικειμένου.

- system_solve.py: Υλοποιεί τη συνάρτηση system_solve, η οποία δέχεται ως ορίσματα μία λίστα απο συναρτήσεις τις οποίες εξισώνει με το μηδέν και επιστρέφει όλες τις λύσεις του συστήματος σε μορφή λίστας λεξικών.

- helper_funcs.py: Περιέχει τις βοηθητικές συναρτήσεις όπως:
  - calc_partial_derivative: Υπολογίζει τη μερική παράγωγο της συνάρτησης όρισμα με βάση τη μεταβλητή όρισμα.
  - calc_gradient: Υπολογίζει το ανάδελτα της συνάρτησης όρισμα.
  - calc_hessian_matrix: Υπολογίζει τον εσσιανό πίνακα της συνάρτησης όρισμα.
  - leading_principal_minor: Υπολογίζει την i-οστή πρωτεύουσα ελάσσα ορίζουσα του πίνακα όρισμα.
  - find_critical_points: Υπολογίζει τα δεσμευμένα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f.
  - sufficient_condition_second_grade_one_constraint: Κατηγοριοποιεί τα δεσμευμένα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f με μία ισοτική δέσμευση.
  - sufficient_condition_second_grade_two_constraints: Κατηγοριοποιεί τα δεσμευμένα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f με δύο ισοτικές δεσμεύσεις. Σημειώνεται ότι τα $\nabla g_1(\mathbf{x})$ και $\nabla g_2(\mathbf{x})$ θεωρούνται γραμμικώς ανεξάρτητα.

- main_solver.py: Περιέχει δυο συγκεντρωτικές συναρτήσεις (μία για μια ισοτική δέσμευση και μία για δύο) που υλοποιούν την επίλυση των προβλημάτων βελτιστοποίησης. Αρχικά, ορίζει το αντικείμενο της συνάρτησης Lagrange , καλεί τη συνάρτηση για την εύρεση των δεσμευμένων κρίσιμων σημείων και, τέλος, καλεί την αντίστοιχη συνάρτηση που υλοποιεί την εκάστοτε ικανή συνθήκη δεύτερης τάξης για την κατηγοριοποίηση των κρίσιμων σημείων.
- visualizations.py: Τρέχοντας το αναπαριστούνται τα διαγράμματα των συναρτήσεων που εξετάστηκαν στα προβλήματα 0 και 2 με μία ισοτική δέσμευση.
- Τέλος, το εκάστοτε αρχείο exampleX_i.py περιέχει το i-οστό παράδειγμα προβλήματος βελτιστοποίησης με X ισοτικές δεσμεύσεις.

5 Αποτελέσματα

Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των προβλημάτων βελτιστοποίησης που εξετάστηκαν στην παρούσα εργασία. Σημειώνεται ότι τα τοπικά ακρότατα που προκύπτουν είναι επαληθευμένα απο λυμμένες ασκήσεις που περιλαμβάνονται στις ηλεκτρονικές σημειώσεις του μαθήματος και σε διαδικτυακές πηγές.
Επίσης, παρουσιάζονται τα γραφήματα όπως υπολογίστηκαν απο το visualizations.ρυγια τα προβλήματα 0 και 2 με μία ισοτική δέσμευση.

Μία ισοτική δέσμευση

Πρόβλημα 0

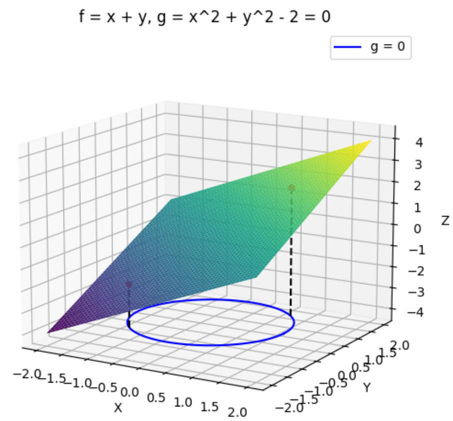
Πρόβλημα βελτιστοποίησης με μία ισοτική δέσμευση:

$$\begin{aligned} \underset{x_1,x_2}{\text{minimize}} \quad & f(x_1,x_2) = x_1 + x_2 \\ \text{subject to} \quad & g(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

Η έξοδος του προγράμματος είναι:

```
Lagrange function:  -lambda*(x1**2 + x2**2 - 2) + x1 + x2
Hessian matrix:  [[-2*lambda, 0, -2*x1],
                  [0, -2*lambda, -2*x2],
                  [-2*x1, -2*x2, 0]]

Classification of critical points:
Critical point: x1 = -1, x2 = -1, Classification: local minimum
Critical point: x1 = 1, x2 = 1, Classification: local maximum
```



Πρόβλημα 1

Πρόβλημα βελτιστοποίησης με μία ισοτική δέσμευση:

$$\begin{aligned} \underset{x_1,x_2,x_3}{\text{minimize}} \quad & f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ \text{subject to} \quad & g(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

Η έξοδος του προγράμματος είναι:

```
Lagrange function:  -lambda*(x1 + x2 + x3 - 1) + x1**2 + x2**2 + x3**2
Hessian matrix:  [[2, 0, 0, -1],
                  [0, 2, 0, -1],
                  [0, 0, 2, -1],
                  [-1, -1, -1, 0]]

Classification of critical points:
Critical point: x1 = 1/3, x2 = 1/3, x3 = 1/3, Classification: local maximum
```

Πρόβλημα 2

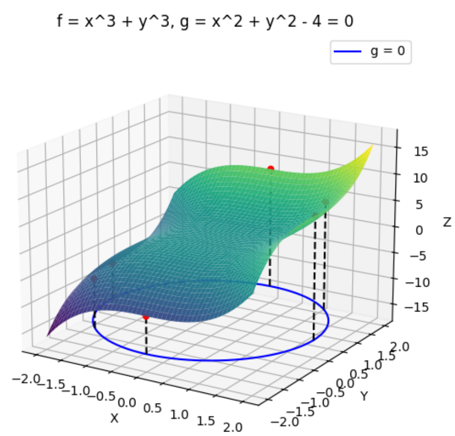
Πρόβλημα βελτιστοποίησης με μία ισοτική δέσμευση:

$$\begin{aligned} \underset{x_1,x_2}{\text{minimize}} \quad & f(x_1,x_2) = x_1^3 + x_2^3 \\ \text{subject to} \quad & g(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

Η έξοδος του προγράμματος είναι:

```
Lagrange function:  -lambda*(x1**2 + x2**2 - 4) + x1**3 + x2**3
Hessian matrix:  [[-2*lambda + 6*x1, 0, -2*x1],
                  [0, -2*lambda + 6*x2, -2*x2],
                  [-2*x1, -2*x2, 0]]

Classification of critical points:
Critical point: x1 = -2, x2 = 0, Classification: local minimum
Critical point: x1 = 0, x2 = -2, Classification: local minimum
Critical point: x1 = 0, x2 = 2, Classification: local maximum
Critical point: x1 = 2, x2 = 0, Classification: local maximum
Critical point: x1 = -sqrt(2), x2 = -sqrt(2), Classification: local maximum
Critical point: x1 = sqrt(2), x2 = sqrt(2), Classification: local minimum
```



Πρόβλημα 3

Πρόβλημα βελτιστοποίησης με μία ισοτική δέσμευση:

$$\begin{aligned} \underset{x_1,x_2,x_3}{\text{minimize}} \quad & f(x_1,x_2,x_3) = x_1 * x_2 * x_3 \\ \text{subject to} \quad & g(x_1,x_2) = x_1 * x_2 + x_1 * x_3 + x_2 * x_3 - 6 = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Η έξοδος του προγράμματος είναι:

```
Lagrange function:  -lambda*(x1*x2 + x1*x3 + x2*x3 - 6) + x1*x2*x3
Hessian matrix:  [[0, -lambda + x3, -lambda + x2, -x2 - x3],
                  [-lambda + x3, 0, -lambda + x1, -x1 - x3],
                  [-lambda + x2, -lambda + x1, 0, -x1 - x2],
                  [-x2 - x3, -x1 - x3, -x1 - x2, 0]]
```

```
Classification of critical points:
Critical point: x1 = -sqrt(2), x2 = -sqrt(2), x3 = -sqrt(2),
                Classification: local minimum
Critical point: x1 = sqrt(2), x2 = sqrt(2), x3 = sqrt(2),
                Classification: local maximum
```

Πρόβλημα 4

Πρόβλημα βελτιστοποίησης με μία ισοτική δέσμευση:

$$\begin{aligned} \underset{x_1,x_2,x_3}{\text{minimize}} \quad & f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \\ \text{subject to} \quad & g(x_1,x_2) = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

Η έξοδος του προγράμματος είναι:

```
Lagrange function:  -lambda*(x1 + x2 + x3 - 1) + x1**2 + x2**2 - x3**2
Hessian matrix:  [[2, 0, 0, -1],
                  [0, 2, 0, -1],
                  [0, 0, -2, -1],
                  [-1, -1, -1, 0]]

Classification of critical points:
Critical point: x1 = 1, x2 = 1, x3 = -1,
                Classification: not a local optimizer
```

Δύο ισοτικές δέσμευσεις

Πρόβλημα 0

Πρόβλημα βελτιστοποίησης με δύο ισοτικές δέσμευσεις:

$$\begin{aligned} \underset{x_1,x_2,x_3}{\text{minimize}} \quad & f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ \text{subject to} \quad & g_1(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \\ & g_2(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 - x_3 + 2 = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

Η έξοδος του προγράμματος είναι:

```
Lagrange function:  -lambda1*(x1**2 + x2**2 - x3**2)
                    - lambda2*(x1 + x2 - x3 + 2)
                    + x1**2 + x2**2 + x3**2
Hessian matrix:  [[2 - 2*lambda1, 0, 0, -2*x1, -1],
                  [0, 2 - 2*lambda1, 0, -2*x2, -1],
                  [0, 0, 2*lambda1 + 2, 2*x3, 1],
                  [-2*x1, -2*x2, 2*x3, 0, 0],
                  [-1, -1, 1, 0, 0]]

Classification of critical points:
```

```
Critical point: x1 = -2 - sqrt(2), x2 = -2 - sqrt(2), x3 = -2*sqrt(2) - 2,
                Classification: local minimum
Critical point: x1 = -2 + sqrt(2), x2 = -2 + sqrt(2), x3 = -2 + 2*sqrt(2),
                Classification: local minimum
```

Πρόβλημα 1

Πρόβλημα βελτιστοποίησης με δύο ισοτικές δέσμευσεις:

$$\begin{aligned} \underset{x_1,x_2,x_3}{\text{minimize}} \quad & f(x_1,x_2,x_3) = 2*x_1 + x_2^2 - x_3^2 \\ \text{subject to} \quad & g_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 - 2*x_2 = 0 \\ & g_2(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_3 = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

Η έξοδος του προγράμματος είναι:

```
Lagrange function:  -lambda1*(x1 - 2*x2)
                    - lambda2*(x1 + x3) + 2*x1 + x2**2 - x3**2
Hessian matrix:  [[0, 0, 0, -1, -1],
                  [0, 2, 0, 2, 0],
                  [0, 0, -2, 0, -1],
                  [-1, 2, 0, 0, 0],
                  [-1, 0, -1, 0, 0]]

Classification of critical points:
Critical point: x1 = 4/3, x2 = 2/3, x3 = -4/3,
                Classification: local maximum
```

Πρόβλημα 2

Πρόβλημα βελτιστοποίησης με δύο ισοτικές δέσμευσεις:

$$\begin{aligned} \underset{x_1,x_2,x_3}{\text{minimize}} \quad & f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ \text{subject to} \quad & g_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \\ & g_2(x_1,x_2,x_3) = x_2 - x_1 = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

Η έξοδος του προγράμματος είναι:

```
Lagrange function:  -lambda1*(x1 + x2 + x3 - 1)
                    - lambda2*(-x1 + x2)
                    + x1**2 + x2**2 + x3**2
Hessian matrix:  [[2, 0, 0, -1, 1],
                  [0, 2, 0, -1, -1],
                  [0, 0, 2, -1, 0],
                  [-1, -1, -1, 0, 0],
                  [1, -1, 0, 0, 0]]
```

```
Classification of critical points:
Critical point: x1 = 1/3, x2 = 1/3, x3 = 1/3,
                Classification: local minimum
```

Πρόβλημα 3

Πρόβλημα βελτιστοποίησης με δύο ισοτικές δέσμευσεις:

$$
\begin{aligned}
\underset{x_1,x_2,x_3}{\text{minimize}} \quad & f(x_1,x_2,x_3) = 400 * x_1^2 + 800 * x_2^2 + 200 * x_1 * x_2 + 1600 * x_3^2 + 400 * x_2 * x_3 \\
\text{subject to} \quad & g_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + 1.5 * x_3 - 1.2 = 0 \\
& g_2(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Η έξοδος του προγράμματος είναι:

```
Lagrange function:  -lambda1*(x1 + x2 + 1.5*x3 - 1.2)
                    - lambda2*(x1 + x2 + x3 - 1)
                    + 400*x1**2 + 200*x1*x2 + 800*x2**2
                    + 400*x2*x3 + 1600*x3**2
Hessian matrix:  [[800, 200, 0, -1, -1],
                  [200, 1600, 400, -1, -1],
                  [0, 400, 3200, -1.5, -1],
                  [-1, -1, -1.5, 0, 0], [-1, -1, -1, 0, 0]]

Classification of critical points:
Critical point: x1 = 0.5, x2 = 0.1, x3 = 0.4, Classification: local minimum
```

Πηγές

Τα στοιχεία θεωρίας βασίστηκαν στις ηλεκτρονικές σημειώσεις του μαθήματος, όπως, επίσης και τα προβλήματα βελτιστοποίησης που εξετάστηκαν με εξαίρεση τα προβληματα 2 και 3 με δύο ισοτικές δεσμεύσεος των οποίων οι πηγές παραθέτονται παρακάτω:

- Πρόβλημα 2: 1.2.5 Several Equality Constraints / Example 6 (Σελίδα 10-11) link1
- Πρόβλημα 3: Example 4.1.4 (Σελίδα 5) link2