

# Estimación Matemática y Simulación del Número de Personas Parecidas a un Individuo Patrón (El Fedelobo)

Alexander Eduardo Rojas Garay

April 26, 2025

## Abstract

Este trabajo desarrolla un modelo matemático para estimar cuántas personas en una población se parecen a un individuo específico ("Fedelobo") basándose en características faciales cuantificables. Se utiliza la distancia de Mahalanobis en un espacio multivariado de atributos faciales y la distribución chi-cuadrada para calcular la probabilidad de parecido. Se realiza una simulación computacional para validar el modelo teórico, discutiendo resultados, limitaciones y potenciales aplicaciones futuras en biometría, análisis poblacional y reconocimiento facial.

## 1 Introducción

El análisis de similitud facial es crucial en campos como la biometría, la genética poblacional y el reconocimiento automatizado de rostros. Definir y medir "parecido" de manera cuantitativa permite establecer estimaciones dentro de poblaciones grandes. En este estudio, se propone un modelo basado en distancias multivariadas que calcula la cantidad esperada de individuos que cumplen un umbral de similitud respecto a un patrón dado, ejemplificado aquí por "Fedelobo".

## 2 Modelado Matemático

### 2.1 Espacio de Características

Cada individuo se representa mediante un vector de características normalizadas:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$$

correspondientes a atributos faciales como proporción rostro, tamaño de ojos, grosor de cejas, entre otros.

El patrón de referencia, "Fedelobo", está definido por un vector:

$$\vec{x}_{fedelobo}$$

### 2.2 Medida de Similitud

La distancia de Mahalanobis cuantifica la similitud considerando correlaciones entre atributos:

$$d_M(\vec{x}, \vec{x}_{fedelobo}) = \sqrt{(\vec{x} - \vec{x}_{fedelobo})^T \Sigma^{-1} (\vec{x} - \vec{x}_{fedelobo})}$$

Esta medida es preferida frente a la distancia euclídeana al capturar la estructura interna de la varianza de los datos.

### 2.3 Definición de Parecido

Un individuo se considera parecido si:

$$d_M(\vec{x}, \vec{x}_{fedelobo}) < \epsilon$$

donde  $\epsilon$  es el umbral de tolerancia de similitud, ajustado según necesidades específicas del estudio.

### 2.4 Probabilidad de Parecido

Assumiendo una distribución normal multivariada:

$$\vec{x} \sim \mathcal{N}(\vec{\mu}, \Sigma)$$

se deduce que:

$$d_M^2(\vec{x}, \vec{x}_{fedelobo}) \sim \chi_n^2$$

La probabilidad de parecido se obtiene mediante la función de distribución acumulativa:

$$P(\text{parecido}) = F_{\chi_n^2}(\epsilon^2)$$

### 2.5 Número Esperado de Parecidos

El número esperado en una población de tamaño  $N$  es:

$$E[\text{número de parecidos}] = N \times P(\text{parecido})$$

### 3 Simulación Computacional

Se simuló una población de 10,000 individuos bajo parámetros realistas de características faciales latinoamericanas. Cada individuo se evaluó contra el patrón "Fedelobo" mediante distancia de Mahalanobis. Se clasificaron como "parecidos" aquellos cuya distancia fue inferior a  $\epsilon = 1.5$ .

### 4 Resultados

- Personas simuladas: 10,000
- Parecidos simulados: 750
- Parecidos esperados teóricamente: 1,046

El porcentaje de parecidos observados fue:

$$\frac{750}{10000} \times 100 = 7.5\%$$

lo cual implica que, en promedio, 7 a 8 personas de cada 100 se parecen al patrón de referencia.

### 5 Discusión

La variabilidad observada respecto a la predicción teórica puede atribuirse a:

- La aleatoriedad inherente en muestreo de poblaciones finitas.
- Variaciones no modeladas en la matriz de covarianza  $\Sigma$ .
- Imperfecciones en la normalización de características.

Este modelo es un primer paso hacia métodos más avanzados que podrían considerar distribuciones no gaussianas, dependencias espaciales, o algoritmos de aprendizaje profundo.

### 6 Conclusiones

El uso de la distancia de Mahalanobis combinada con distribuciones chi-cuadradas ofrece una metodología potente para estimar la cantidad de individuos similares a un patrón facial en poblaciones grandes. Los resultados obtenidos validan la aplicabilidad del modelo teórico propuesto, allanando el camino para futuras extensiones en biometría y análisis de diversidad facial.