Lema 1

Tópicos em controle

IME USP

24 de agosto de 2020

Lema 1

O lema 1 é muito interessante pois associa propriedades de um operador linear num espaço de dimensão infinita às propriedades de uma matriz!
Se $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times m}$ é contínua e $\mathcal{C}([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$ é o nosso espaço vetorial de funções, então operador:

$$\mathcal{L}(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} G(s)u(s)ds$$

é um operador linear de $\mathcal{C}([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$ em $\mathbb{R}^n$

Lema 1: Se $W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} G(t)G^T(t)dt$, então $\text{Im}\mathcal{L} = \text{Im}W(t_0, t_1)$.
Prova: 1. $\text{Im}W(t_0, t_1) \subseteq \text{Im}\mathcal{L}$, se $\mathbf{x} \in \text{Im}W(t_0, t_1)$ então temos um $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ com $W(t_0, t_1)\mathbf{y} = \mathbf{x}$ e da definição de W temos

$$W(t_0, t_1)\mathbf{y} = \int_{t_0}^{t_1} G(t)G^T(t)\mathbf{y}dt = \mathbf{x}$$
$$= \mathcal{L}(u(\cdot)) \text{ para } u(t) = G^T(t)\mathbf{y}$$

2. $\mathrm{Im}\mathcal{L} \subseteq \mathrm{Im}W(t_0, t_1)$
Se $\mathbf{x} \notin \mathrm{Im}W(t_0, t_1)$, usando o fato de que W é simétrica, podemos encontrar um $\mathbf{y} \neq 0$ tal que $W(t_0, t_1)\mathbf{y} = 0$ e $\mathbf{y}^T\mathbf{x} \neq 0$.
Notemos então que:

$$0 = \mathbf{y}^T W(t_0, t_1)\mathbf{y} = \int_{t_0}^{t_1} (G^T(t)\mathbf{y})^T (G^T(t)\mathbf{y}) dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \|G(t)^T\mathbf{y}\|^2 \implies$$

$$G(t)^T\mathbf{y} = 0 \forall t \in [t_0, t_1]$$

Se $\mathbf{x}$ estivesse em Im$\mathcal{L}$ então:

$$\mathbf{x} = \int_{t_0}^{t_1} G(t)u(t)dt \implies$$

$$\mathbf{y}^T\mathbf{x} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{y}^T G(t)u(t)dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} [G^T(t)\mathbf{y}]^T u(t)dt = 0$$

Que contraria como foi escolhido o $\mathbf{y}$ assim fica demosntrado o lema $\square$

Vamos considerar uma aplicação deste Lema. considere a equação:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = B(t)u(t)$$

então

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}_0 + \int_{t_0}^{t} B(s)u(s)ds \implies \mathbf{z}(t) - \mathbf{z}_0 = \int_{t_0}^{t} B(s)u(s)ds$$

De forma que pelo Lema 1 existe $u(t)$ tal que $\mathbf{z}(t_1) = \mathbf{z}_1$ se e somente se $\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_0 \in \mathrm{Im}(W(t_0, t_1)) = \mathrm{Im}(\int_{t_0}^{t_1} B(s)B^T(s)ds)$

De fato, se $w \in \mathbb{R}^n$ é tal que $W(t_0, t_1) = \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2$ então podemos tomar

$$u(t) = B^T(t)w \text{ poi neste caso}$$
$$\int_{t_0}^{t_1} B(s)u(s)ds = \int_{t_0}^{t_1} B(s)B^T(s)wds = W(t_0, t_1)w.$$