LỜI GIẢI ĐỀ LUYỆN 02

(Dành cho đội tuyển quốc gia)

Bài 1. Thứ tự từ điển lớn nhất

Nhận xét: Vì $\gcd(B_1, B_2, \ldots, B_i)$ luôn là bội của $\gcd(B_1, B_2, \ldots, B_{i+1})$, nên để tồn tại mảng B, dãy A phải thỏa mãn điều kiện

$$A_i \text{ là ước của } A_{i-1} \quad \forall i > 1.$$

Bước đầu: Ta có duy nhất một lựa chọn cho B_1:

$$B_1 = A_1,$$

vì đây là cách duy nhất để $\gcd(B_1) = A_1$.

Bước xây dựng tham lam: Giả sử đã biết $B_1, B_2, \ldots, B_{i-1}$ sao cho $\gcd(B_1, B_2, \ldots, B_{i-1}) = A_{i-1}$. Khi đó, ta cần chọn B_i sao cho:

$$\gcd(B_1, B_2, \ldots, B_i) = A_i.$$

Do $\gcd(B_1, \ldots, B_{i-1}) = A_{i-1}$, điều này tương đương với:

$$\gcd(A_{i-1}, B_i) = A_i.$$

Vì A_i là ước của A_{i-1}, đặt $P = \dfrac{A_{i-1}}{A_i}$. Ta cần B_i thỏa mãn:

$$B_i \text{ là bội của } A_i \quad \text{và} \quad \gcd\left(\frac{B_i}{A_i},\, P\right) = 1.$$

Cách chọn B_i: Để mảng B có thứ tự từ điển lớn nhất, ta chọn B_i càng lớn càng tốt, tức là:

$$B_i = A_i \cdot \left\lfloor \frac{M}{A_i} \right\rfloor,$$

nghĩa là bội lớn nhất của A_i không vượt quá M.

Tuy nhiên, giá trị này có thể không thỏa điều kiện $\gcd(B_i, A_{i-1}) = A_i$. Khi đó, ta giảm B_i theo bước A_i cho đến khi đạt được:

$$\text{Trong khi } \gcd(B_i, A_{i-1}) \neq A_i, \text{ thì } B_i \leftarrow B_i - A_i.$$

Khi vòng lặp dừng, ta thu được B_i lớn nhất có thể thỏa mãn điều kiện, tức là giá trị tối ưu về mặt thứ tự từ điển.

Tính đúng đắn:

- Nếu $\gcd(A_{i-1}, B_i) \neq A_i$, khi đó $\gcd(B_1, \ldots, B_i)$ không thể bằng A_i, nên không hợp lệ.

- Nếu $\gcd(A_{i-1}, B_i) = A_i$, thì $\gcd(B_1, \ldots, B_i) = A_i$ đúng như yêu cầu.
- Quá trình chọn bội lớn nhất rồi giảm dần đảm bảo B có giá trị lớn nhất theo thứ tự từ điển.

Độ phức tạp: Mỗi bước chỉ cần vài phép tính gcd, và số lần giảm thường rất nhỏ (vì xác suất hai số ngẫu nhiên không chia hết nhau cao). Do đó, thuật toán chạy rất nhanh và hoàn toàn đáp ứng được giới hạn của bài toán.

Bài 2. Đèn chùm

Phân tích lại vấn đề: Ta cần xác định xem có tồn tại *xác suất dương* (nghĩa là chỉ cần một kịch bản khả thi) sao cho **tất cả các giá đỡ đều sụp đổ**. Khi một giá đỡ i sụp, trọng lượng W_i của nó được phân bố ngẫu nhiên thành x và y sang hai bên $(i-1)$ và $(i+1)$. Tuy nhiên, vì ta chỉ cần biết có tồn tại *một cách phân bố* khả thi hay không, nên yếu tố ngẫu nhiên này có thể được loại bỏ. Nói cách khác, ta hoàn toàn được phép chọn x và y tùy ý miễn sao tổng $x + y = W_i$.

Quan sát quan trọng: Khi giá đỡ i sụp đổ, hai phía của nó (phía trái và phía phải) trở nên độc lập với nhau:

- Phía trái gồm các giá đỡ $(1, 2, \ldots, i-1)$;
- Phía phải gồm $(i+1, i+2, \ldots, N)$.

Sau khi i bị phá hủy, trọng lượng từ phía trái chỉ có thể lan dần về 1, và tương tự, phía phải lan về N. Như vậy, việc phá hủy toàn bộ hệ thống có thể tách thành hai bài toán con: phá hủy toàn bộ dãy bên trái và bên phải của một điểm trung tâm.

Định nghĩa: Ký hiệu:

- $\text{pref}[i]$ là lượng trọng lượng **nhỏ nhất cần thêm** vào giá đỡ thứ i để tất cả các giá đỡ từ 1 đến i đều sụp đổ (giả sử $i+1$ không tồn tại).
- Tương tự, $\text{suf}[i]$ là lượng trọng lượng nhỏ nhất cần thêm vào giá đỡ thứ i để tất cả các giá đỡ từ i đến N đều sụp đổ (giả sử $i-1$ không tồn tại).

Công thức quy hoạch động cho tiền tố: Đầu tiên, để giá đỡ i sụp, ta cần ít nhất:

$$\text{pref}[i] \geq A_i - W_i,$$

vì W_i ban đầu chưa đủ để phá hủy nó.

Ngoài ra, sau khi i sụp, ta phải đảm bảo toàn bộ phần trước $(1, \ldots, i-1)$ cũng sụp. Theo định nghĩa, điều này cần ít nhất $\text{pref}[i-1]$ trọng lượng bổ sung. Trọng lượng này được truyền từ i sang, nên tại i ta cần có ít nhất $\text{pref}[i-1] - W_i$ bổ sung.

Từ hai điều kiện trên, ta có công thức gộp:

$$\boxed{\text{pref}[i] = \max(A_i,\, \text{pref}[i-1]) - W_i.}$$

Tương tự cho hậu tố:

$$\boxed{\text{suf}[i] = \max(A_i,\, \text{suf}[i+1]) - W_i.}$$

Tính đáp án cho mỗi vị trí i: Khi ta chọn thêm trọng lượng vào giá đỡ i, ta cần đảm bảo:

- Giá đỡ i đủ để nó sụp;
- Phần bên trái $(1, \ldots, i-1)$ đủ để sụp hoàn toàn;
- Phần bên phải $(i+1, \ldots, N)$ đủ để sụp hoàn toàn.

Tổng yêu cầu tối thiểu là:

$$\max(A_i,\, \text{pref}[i-1] + \text{suf}[i+1]).$$

Vì giá đỡ i đã có sẵn W_i, lượng trọng lượng cần thêm vào nó sẽ là:

$$\boxed{\text{ans}[i] = \max(A_i,\, \text{pref}[i-1] + \text{suf}[i+1]) - W_i.}$$

Tóm tắt quy trình:

1. Tính mảng $\text{pref}[i]$ từ trái sang phải bằng công thức: $\text{pref}[i] = \max(A_i,\, \text{pref}[i-1]) - W_i$, với $\text{pref}[0] = 0$.
2. Tính mảng $\text{suf}[i]$ từ phải sang trái: $\text{suf}[i] = \max(A_i,\, \text{suf}[i+1]) - W_i$, với $\text{suf}[N+1] = 0$.
3. Cuối cùng, với mỗi i, tính: $\text{ans}[i] = \max(A_i,\, \text{pref}[i-1] + \text{suf}[i+1]) - W_i$.

Diễn giải ý nghĩa: Giá trị $\text{ans}[i]$ chính là lượng trọng lượng nhỏ nhất cần thêm vào giá đỡ thứ i để *tồn tại một chuỗi sụp đổ toàn bộ hệ thống* — nghĩa là có ít nhất một kịch bản khả thi khiến toàn bộ các giá đỡ đều bị phá hủy.

Bài 3. Dãy chuẩn bình phương

Trước hết, hãy phân tích cấu trúc của một dãy B hợp lệ:

- Điều kiện "độ dài lẻ" yêu cầu *mọi* dãy con độ dài lẻ của B đều **không** có tích là số chính phương; từ đó suy ra *mỗi phần tử* của B đều **không** là số chính phương.
- Điều kiện "độ dài chẵn" yêu cầu *mọi cặp* phần tử trong B phải có tích là số chính phương.

Hơn nữa, hai điều kiện này là **đủ** để đảm bảo rằng toàn bộ dãy con đều hợp lệ, bởi vì:

- Mọi dãy con độ dài chẵn đều có thể chia thành các cặp; tích của mỗi cặp là chính phương, nên tích toàn bộ cũng là chính phương.
- Tích của một số chính phương với một số *không* chính phương luôn *không* là chính phương; vì vậy mọi dãy con độ dài lẻ (gồm một số lẻ cặp chính phương và dư ra một phần tử đơn lẻ không chính phương) đều thỏa yêu cầu.

Giảm bài toán. Trước hết, loại bỏ mọi số *chính phương* khỏi A (vì chúng không thể nằm trong B). Vấn đề còn lại: với hai số nguyên dương x, y, khi nào $x \cdot y$ là số chính phương?

Trả lời. Viết phân tích thừa số nguyên tố:

$$x = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i}, \qquad y = \prod_{i=1}^{k} p_i^{b_i}.$$

Khi đó

$$x \cdot y = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i+b_i}$$

là **chính phương** khi và chỉ khi $\forall i$, $a_i + b_i$ *chẵn*, tức là a_i và b_i có *cùng* tính chẵn lẻ. Nói cách khác, x và y phải có **cùng tập các thừa số nguyên tố xuất hiện với số mũ lẻ**. Gọi x_s (tương ứng y_s) là *phần squarefree* của x (tức là tích các thừa số nguyên tố của x có mũ lẻ), điều kiện tương đương với

$$x_s = y_s.$$

Hệ quả. Hai phần tử có thể cùng xuất hiện trong dãy con B khi và chỉ khi *phần squarefree* của chúng *giống nhau*. Do đó, *mọi* phần tử của dãy con B phải có *cùng* squarefree part. Bài toán trở thành: *thay* mỗi phần tử A_i bởi squarefree part của nó rồi **đếm bội số xuất hiện lớn nhất** của một giá trị — đó chính là độ dài dãy B dài nhất.

Tính squarefree part nhanh. Ta cần phân tích thừa số nhanh đến $M = 10^7$:

1. Tiền xử lý bằng sàng: với mọi $x \le M$, lưu một thừa số nguyên tố nhỏ nhất $\text{prm}[x]$.
2. Để phân tích x: lặp
   - Nếu $x = 1$ thì dừng.
   - Lấy $p = \text{prm}[x]$, đếm bội số mũ của p trong x bằng cách chia nhiều lần.
   - Nếu số mũ của p là **lẻ**, nhân p vào squarefree part.

Thuật toán tổng quát.

1. Loại các phần tử là *chính phương* khỏi A.
2. Với mỗi phần tử còn lại, tính squarefree part (theo sàng ở trên).
3. Tần suất—đếm số lần xuất hiện của từng squarefree part; đáp án là **giá trị tần suất lớn nhất**.

Độ phức tạp. Tiền xử lý sàng: $\mathcal{O}(M \log \log M)$ với $M = 10^7$. Mỗi test: $\mathcal{O}(N \log M)$ (do mỗi lần "tuột" theo thừa số nhỏ nhất chia được).