Mục lục

Chú thích các ký hiệu số học

Dưới đây là danh sách các ký hiệu số học thường được sử dụng cùng với ý nghĩa của chúng:

Fib_n : Số Fibonacci thứ n.

$\binom{N}{K}$: Số tổ hợp chập K của N.

$\sum_{i=1}^{n} i$: Tổng các số từ 1 đến n.

$\prod_{i=1}^{n} i$: Tích các số từ 1 đến n.

$\gcd(a, b)$: Ước chung lớn nhất của a và b.

$\operatorname{lcm}(a, b)$: Bội chung nhỏ nhất của a và b.

$\lfloor x \rfloor$: Phần nguyên của x.

$\lceil x \rceil$: Phần nguyên của x (làm tròn lên).

$\log_a b$: Logarit cơ số a của b.

$n!$: Giai thừa của n.

$d|n$: d là ước của n.

$a \equiv b \pmod{m}$: a đồng dư với b khi chia cho m.

$\phi(n)$: Hàm phi số Euler.

$\mu(n)$: Hàm Möbius.

GCD and LCM

Định nghĩa

Ước chung lớn nhất (GCD) của hai số nguyên a và b là số nguyên dương lớn nhất đều là ước của a và b. Bạn có thể tìm GCD của hai số bằng cách sử dụng thuật toán Euclid. Lưu ý rằng GCD của hai số a và b có thể được biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính của a và b (tức là có thể tìm được hai số nguyên x và y sao cho $a \cdot x + b \cdot y = \gcd(a, b)$).

Bội chung nhỏ nhất (LCM) của hai số nguyên a và b là số nguyên dương nhỏ nhất mà a và b đều chia hết. Bạn có thể tìm LCM của hai số bằng cách sử dụng GCD của chúng.

Thuật toán Euclid

```cpp
int gcd(int a, int b) {
    return b == 0 ? a : gcd(b, a % b);
}
```

Các tính chất

1. $\gcd(a, 0) = a$.
2. Tính giao hoán:
$$\gcd(a, b) = \gcd(b, a)$$
$$\text{lcm}(a, b) = \text{lcm}(b, a)$$
3. a và b được gọi là nguyên tố cùng nhau nếu $\gcd(a, b) = 1$.
4. Nếu $b > a$ thì $\gcd(a, b) = \gcd(a, b - a) \leq b - a$.
5. Thuật toán Euclid:
$$\gcd(a, b) = \gcd(b, a \pmod b)$$
6. Mọi ước chung của a và b đều là ước của $\gcd(a, b)$.
7. Nếu m là một số nguyên thì:
$$\gcd(a + m \cdot b, b) = \gcd(a, b)$$
8. gcd là hàm nhân tính, tức là nếu a_1 và a_2 nguyên tố cùng nhau thì:
$$\gcd(a_1 \cdot a_2, b) = \gcd(a_1, b) \cdot \gcd(a_2, b)$$
9. Mối quan hệ giữa gcd và lcm:
$$\gcd(a, b) \cdot \text{lcm}(a, b) = |a \cdot b|$$
10. Tính phân phối:
$$\gcd(a, \text{lcm}(b, c)) = \text{lcm}(\gcd(a, b), \gcd(a, c))$$
$$\text{lcm}(a, \gcd(b, c)) = \gcd(\text{lcm}(a, b), \text{lcm}(a, c))$$
11. Với hai số nguyên không âm a và b, đồng thời a và b không đồng thời bằng không, ta có:
$$\gcd(n^a - 1, n^b - 1) = n^{\gcd(a,b)} - 1$$
12. $\gcd(A_L, A_{L+1}, \ldots, A_R) = \gcd(A_L, A_{L+1} - A_L, \ldots, A_R - A_{R-1})$.

Euler's totient function

Định nghĩa

Hàm số Euler $\phi(n)$ là số lượng số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng n và nguyên tố cùng nhau với n.

$$\phi(n) = |\{k \in \mathbb{N} | 1 \leq k \leq n, \gcd(k, n) = 1\}|$$

Ví dụ: $\phi(8) = 4$ vì có 4 số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng 8 và nguyên tố cùng nhau với 8 là 1, 3, 5, 7.

Dưới đây là một số giá trị của hàm số Euler $\phi(n)$ của một số số đầu tiên:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$\phi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18	8	12	10

Công thức tính

Nếu n có dạng phân tích thừa số nguyên tố là $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ thì hàm số Euler $\phi(n)$ có thể tính bằng công thức sau:

$$\phi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

Thuật toán tính

```
int phi(int n) {
    int result = n;
    for (int i = 2; i * i <= n; i++) {
        if (n % i == 0) {
            while (n % i == 0) {
                n /= i;
            }
            result -= result / i;
        }
    }
    if (n > 1) {
        result -= result / n;
    }
    return result;
}
```

Tính chất

1. Hàm nhân tính: $\phi(mn) = \phi(m) \cdot \phi(n)$ nếu $\gcd(m, n) = 1$.
2. Trường hợp m và n không nguyên tố cùng nhau:

$$\phi(mn) = \phi(m) \cdot \phi(n) \cdot \frac{d}{\phi(d)}$$

   với $d = \gcd(m, n)$.

   Trường hợp đặc biệt:

$$\phi(2m) = \begin{cases} \phi(m) & \text{nếu } m \text{ lẻ} \\ 2 \cdot \phi(m) & \text{nếu } m \text{ chẵn} \end{cases} \tag{1}$$

$$\phi(n^m) = n^{m-1} \cdot \phi(n) \tag{2}$$

3. Nếu p là số nguyên tố và k là số nguyên dương, thì:

$$\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$$

4. Mối quan hệ với các ước của n:

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n$$

Mở rộng với gcd:

$$\sum_{d|a \text{ and } d|b} \phi(d) = \gcd(a, b)$$

5. Nếu a là ước của b thì $\phi(a)$ cũng là ước của $\phi(b)$.
6. Số lượng các số nguyên k thoả mãn $\gcd(k, n) = d$ là:

$$\sum_{k=1}^{n} [\gcd(k, n) = d] = \phi\left(\frac{n}{d}\right)$$

Ứng dụng:

$$\sum_{k=1}^{n} \gcd(k, n) = \sum_{d|n} d \cdot \phi\left(\frac{n}{d}\right) \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} x^{\gcd(k,n)} = \sum_{d|n} x^d \cdot \phi\left(\frac{n}{d}\right) \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\gcd(k, n)} = \sum_{d|n} \frac{1}{d} \cdot \phi\left(\frac{n}{d}\right) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} d \cdot \phi(d) \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\gcd(k, n)} = \frac{n}{2} \sum_{d|n} \frac{1}{d} \cdot \phi(\frac{n}{d}) = \frac{1}{2} \sum_{d|n} d \cdot \phi(d) \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \gcd(i, j) = \sum_{d=1}^{n} \phi(d) \cdot \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2 \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{lcm}(i, n) = \frac{n}{2} \left(\sum_{d|n} (\phi(d) \cdot d) + 1 \right) \tag{8}$$