# Olympiades Panafricaines Mathématiques 2023
# Quelques solutions

KouakouSchool

14 juin 2023

## Table des matières



**Résumé**

Ce document présente des solutions aux différents problèmes rencontrés lors des Olympiades Panafricaines de Mathématiques (OPAM) 2023.

# 1 Enoncés

## 1.1 Jour 1

### Problème 1

Dans un triangle $ABC$ tel que $AB < AC, D$ est un point du segment $[AC]$ tel que $BD = CD$. Une droite parallèle à $(BD)$ coupe le segment $[BC]$ en $E$ et coupe la droite $(AB)$ en $F$. $G$ est le point d'intersection des droites $(AE)$ et $(BD)$ par $G$.

$$\text{Montrer que} \quad \widehat{BCG} = \widehat{BCF}. \tag{1}$$

### Problème 2

Trouver tous les nombres entiers naturels non nuls $m$ et $n$ qui n'ont pas de diviseur commun plus grand que 1 tels que :

$$m^3 + n^3 \quad \text{divise} \quad m^2 + 20mn + n^2. \tag{2}$$

### Problème 3

On considère la suite de nombres réels définie par :

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_{n+1} = cx_n + \sqrt{c^2 - 1}\sqrt{x_n^2 - 1} \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1. \end{cases} \tag{3}$$

Montrer que si $c$ est un nombre entier naturel non nul, alors $x_n$ est un entier pour tout $n \geq 1$.

## 1.2 Jour 2

### Problème 4

Manzi possède $n$ timbres et un album avec 10 pages. Il distribue les $n$ timbres dans l'album de sorte que chaque page contienne un nombre distinct de timbres. Il trouve que, peu importe comment il fait cela, il y a toujours un ensemble de 4 pages tels que le nombre total de timbres dans ces 4 pages soit au moins $\frac{n}{2}$.

$$\text{Déterminer la valeur maximale possible de} \quad n. \tag{4}$$

## Problème 5

Soient $a$ et $b$ des nombres réels avec $a \neq 0$. Soit :

$$P(x) = ax^4 - 4ax^3 + (5a+b)x^2 - 4bx + b \tag{5}$$

Montrer que toutes les racines de $P(x)$ sont réelles et strictement positives si et seulement si $a = b$.

## Problème 6

Soit $ABC$ un triangle dont tous les angles sont aigus avec $AB < AC$. Soient $D, E$ et $F$ les pieds des perpendiculaires issues de $A, B$ et $C$ aux côtés opposés, respectivement. Soit $P$ le pied de la perpendiculaire issue de $F$ sur la droite $(DE)$. La droite $(FP)$ et le cercle circonscrit au triangle $BDF$ se rencontrent encore en $Q$.

$$\text{Montrer que} \quad \widehat{PBQ} = \widehat{PAD}. \tag{6}$$

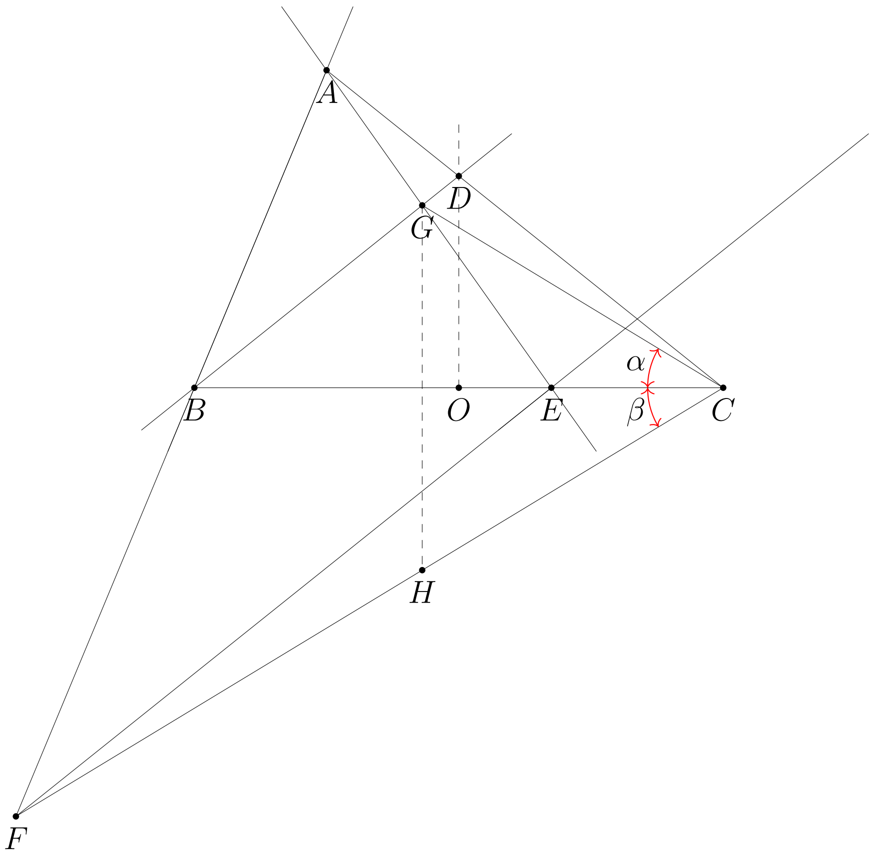
# 2 Solutions

## 2.1 Jour 1

## Problème 1 : (taux de réussite : 22/178)

### Solution 1 - Utilisation d'un repère orthonormal

Ci-dessous se trouvent la construction géométrique de la figure résultant du problème posé. Nous avons rajouté le milieu du segment $[BC]$ qu'on appellera $O$, le point $D'$ tel que la distance $OC$ égale à la distance $OD'$ et $D'$ appartient à $[OD)$ et le point $H$, le point de $(FC)$ tel que $(GH)$ est perpendiculaire à $(BC)$.




$$\text{Montrons que} \quad \widehat{BCG} = \widehat{BCF} \quad \text{c'est-à-dire que} \quad \hat{\alpha} = \hat{\beta}. \tag{7}$$

Pour cela, nous allons considérer le repère orthonormal formé par les points $O$, $C$ et $D'$. Il s'agit bien d'un repère orthonormal car la droite $(OD)$ est perpendiculaire à la droite $(OC)$ puisque $(OD)$ est la médiatrice du segment $[BC]$ ($O$ est milieu de $[BC]$ et $BD = CD$) et la distance $OD'$ est égale à la distance $OC$.

Les coordonnées des différents points $A, B, C, D, E$ et $O$ sont les suivants.

$$O = \Big(0, 0\Big) \tag{8}$$

$$C = \Big(1, 0\Big) \tag{9}$$

$$D = \Big(0, d\Big), \quad \text{où} \quad d \quad \text{est une variable.} \tag{10}$$

$$B = \Big(-1, 0\Big) \tag{11}$$

$$A = \Big(-\alpha, \beta\Big), \quad \text{où} \quad 0 < \alpha < 1 \quad \text{et} \quad \beta > 1 \quad \text{sont des variables.} \tag{12}$$

$$E = \Big(\gamma, 0\Big), \quad \text{où} \quad -1 < \gamma < 1 \quad \text{où} \quad \gamma \quad \text{est une variable.} \tag{13}$$

La variable $\gamma$ est indépendante des autres variables d'après l'énoncé car le point $E$ est un point quelconque du segment $[BC]$. La relation entre $\beta$, $\alpha$ et $d$ peut être déterminée d'après la position de $D$ par rapport aux points $A$, $B$ et $C$.

*Déterminons la relation entre $\beta$, $\alpha$ et $d$ :*

La droite $(CD)$ a pour équation du type : $ax + by + c = 0$. En remplaçant les coordonnées de $C$ et $D$ dans cette équation, l'on obtient :

$$(DC): \quad x + \frac{1}{d}y - 1 = 0 \tag{14}$$

Le point $A$ appartient à la droite $(DC)$, donc : $-\alpha + \frac{1}{d}\beta - 1 = 0$. Cela implique que :

$$\beta = d(1 + \alpha) \tag{15}$$

*Déterminons les valeurs des coordonnées de $F$ et $G$*

Concernant le point $F$, $F\Big(e, f\Big)$ appartient à la droite $(AB)$ et $(FE)$ est perpendiculaire à la normale $\vec{u}$ à la droite $(BD)$.

$$(BD): \quad x - \frac{1}{d}y + 1 = 0 \tag{16}$$

$$\vec{u}\Big(1, -\frac{1}{d}\Big) \tag{17}$$

$$(AB): \quad x - \frac{1-\alpha}{d(1+\alpha)}y + 1 = 0 \tag{18}$$

donc :

$$\overrightarrow{FE}.\vec{u} = 0 \quad et \quad F \in (AB)$$

$$\begin{cases} e - \frac{1-\alpha}{d(1+\alpha)}f + 1 = 0 \\ (\gamma - e).1 + \frac{1}{d}.f = 0 \end{cases}$$

ainsi :

$$\begin{cases} e = \frac{\alpha\gamma - \gamma - \alpha - 1}{2\alpha} \\ f = -\frac{d(\gamma+1)(\alpha+1)}{2\alpha} \end{cases}$$

$$F\Big(\frac{\alpha\gamma-\gamma-\alpha-1}{2\alpha},-\frac{d(\gamma+1)(\alpha+1)}{2\alpha}\Big) \tag{19}$$

Concernant le point $G$, on a :

$$G\Big(g,h\Big)\in(BD)\cap(AE)$$

$$(AE):\quad x+\frac{\alpha+\gamma}{d(1+\alpha)}y-\gamma=0 \tag{20}$$

L'équation de la droite $(BD)$ est donnée par la relation (16). Donc :

$$\begin{cases} g-\frac{1}{d}h+1=0 \\ g+\frac{\alpha+\gamma}{d(1+\alpha)}h-\gamma=0 \end{cases}$$

ainsi :

$$\begin{cases} g=\frac{\alpha(\gamma-1)}{1+2\alpha+\gamma} \\ h=\frac{d(1+\gamma)(1+\alpha)}{1+2\alpha+\gamma} \end{cases}$$

$$G\Big(\frac{\alpha(\gamma-1)}{1+2\alpha+\gamma},\frac{d(1+\gamma)(1+\alpha)}{1+2\alpha+\gamma}\Big) \tag{21}$$

Pour le point $H$, on a $H\in(FC)$ tel que $(GH)\perp(BC)$. L'abscisse de $H$ est égal à $g$ c'est-à-dire l'abscisse de $G$ car $(GH)\perp(BC)$ et $(BC)$ est l'axe des abscisses, on note donc $H\Big(g,i\Big)$.

$$(FC):\quad x+\frac{1-e}{f}y-1=0 \tag{22}$$

Donc :

$$g+\frac{1-e}{f}i-1=0$$

$1-e\neq0$, sinon $g=1$. Il s'agit d'un cas limite impossible car $G\in[BC]$. De ce fait, nous pouvons écrire que :

$$i=\frac{1-g}{1-e}f$$

D'où, d'après (19) et par la suite (21), on a :

$$i=-\frac{d(\gamma+1)(\alpha+1)}{1+2\alpha+\gamma}=-h$$

Donc $G\Big(g,h\Big)$ et $H\Big(g,-h\Big)$, ainsi $CG = CH$ et $(HG) \perp (CB)$. D'où :

$$\widehat{BCG} = \widehat{OCG} = \widehat{HCO} = \widehat{HCB} = \widehat{FCB}$$

Par conséquent, nous avons montré que :

$$\widehat{BCG} = \widehat{BCF} \quad \text{c'est-à-dire que} \quad \hat{\alpha} = \hat{\beta}$$

### Problème 2 : (taux de réussite : 20/178)

### Problème 3 : (taux de réussite : 13/178)

## 2.2 Jour 2

### Problème 4 : (taux de réussite : 4/178)

### Problème 5 : (taux de réussite : 17/178)

### Problème 6 : (taux de réussite : 3/178)