Olympiades Panafricaines Mathématiques 2023
Quelques solutions

KouakouSchool

9 juillet 2023

Table des matières

Résumé

Ce document présente des solutions aux différents problèmes rencontrés lors des Olympiades Panafricaines de Mathématiques (OPAM) 2023.

1 Enoncés

1.1 Jour 1

1.1.1 Problème 1

Dans un triangle ABC tel que $AB < AC, D$ est un point du segment $[AC]$ tel que $BD = CD$. Une droite parallèle à (BD) coupe le segment $[BC]$ en E et coupe la droite (AB) en F. G est le point d'intersection des droites (AE) et (BD) par G.

$$\text{Montrer que} \quad \widehat{BCG} = \widehat{BCF}. \tag{1}$$

1.1.2 Problème 2

Trouver tous les nombres entiers naturels non nuls m et n qui n'ont pas de diviseur commun plus grand que 1 tels que :

$$m^3 + n^3 \quad \text{divise} \quad m^2 + 20mn + n^2. \tag{2}$$

1.1.3 Problème 3

On considère la suite de nombres réels définie par :

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_{n+1} = cx_n + \sqrt{c^2-1}\sqrt{x_n^2-1} \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1. \end{cases} \tag{3}$$

Montrer que si c est un nombre entier naturel non nul, alors x_n est un entier pour tout $n \geq 1$.

1.2 Jour 2

1.2.1 Problème 4

Manzi possède n timbres et un album avec 10 pages. Il distribue les n timbres dans l'album de sorte que chaque page contienne un nombre distinct de timbres. Il trouve que, peu importe comment il fait cela, il y a toujours un ensemble de 4 pages tels que le nombre total de timbres dans ces 4 pages soit au moins $\frac{n}{2}$.

$$\text{Déterminer la valeur maximale possible de} \quad n. \tag{4}$$

1.2.2 Problème 5

Soient a et b des nombres réels avec $a \neq 0$. Soit :

$$P(x) = ax^4 - 4ax^3 + (5a+b)x^2 - 4bx + b \tag{5}$$

Montrer que toutes les racines de $P(x)$ sont réelles et strictement positives si et seulement si $a = b$.

1.2.3 Problème 6

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus avec $AB < AC$. Soient D, E et F les pieds des perpendiculaires issues de A, B et C aux côtés opposés, respectivement. Soit P le pied de la perpendiculaire issue de F sur la droite (DE). La droite (FP) et le cercle circonscrit au triangle BDF se rencontrent encore en Q.

$$\text{Montrer que} \quad \widehat{PBQ} = \widehat{PAD}. \tag{6}$$

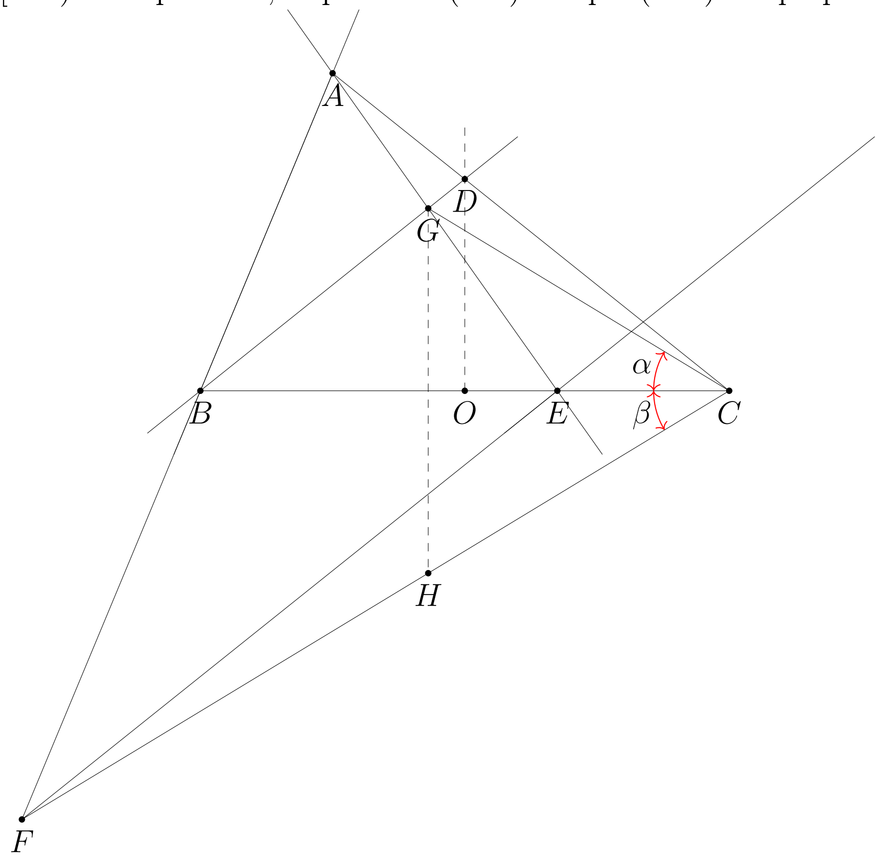
2 Solutions

2.1 Jour 1

2.1.1 Problème 1 : (taux de réussite : 22/178)

2.1.1.1 Solution 1 - Utilisation d'un repère orthonormal

Ci-dessous se trouve la construction géométrique de la figure résultant du problème posé. Nous avons rajouté le milieu du segment $[BC]$ qu'on appellera O, le point D' tel que la distance OC égale à la distance OD' et D' appartient à $[OD)$ et le point H, le point de (FC) tel que (GH) est perpendiculaire à (BC).



$$\text{Montrons que} \quad \widehat{BCG} = \widehat{BCF} \quad \text{c'est-à-dire que} \quad \hat{\alpha} = \hat{\beta}. \tag{7}$$

Pour cela, nous allons considérer le repère orthonormal formé par les points O, C et D'. Il s'agit bien d'un repère orthonormal car la droite (OD) est perpendiculaire à la droite (OC) puisque (OD) est la médiatrice du segment $[BC]$ (O est milieu de $[BC]$ et $BD = CD$) et la distance OD' est égale à la distance OC.

Les coordonnées des différents points A, B, C, D, E et O sont les suivants.

$$O = \Big(0, 0\Big) \tag{8}$$

$$C = \Big(1, 0\Big) \tag{9}$$

$$D = \Big(0, d\Big), \quad \text{où} \quad d \quad \text{est une variable.} \tag{10}$$

$$B = \Big(-1, 0\Big) \tag{11}$$

$$A = \Big(-\alpha, \beta\Big), \quad \text{où} \quad 0 < \alpha < 1 \quad \text{et} \quad \beta > 1 \quad \text{sont des variables.} \tag{12}$$

$$E = \Big(\gamma, 0\Big), \quad \text{où} \quad -1 < \gamma < 1 \quad \text{où} \quad \gamma \quad \text{est une variable.} \tag{13}$$

La variable γ est indépendante des autres variables d'après l'énoncé car le point E est un point quelconque du segment $[BC]$. La relation entre β, α et d peut être déterminée d'après la position de D par rapport aux points A, B et C.

Déterminons la relation entre β, α et d :

La droite (CD) a pour équation du type : $ax + by + c = 0$. En remplaçant les coordonnées de C et D dans cette équation, l'on obtient :

$$(DC): \quad x + \frac{1}{d}y - 1 = 0 \tag{14}$$

Le point A appartient à la droite (DC), donc : $-\alpha + \frac{1}{d}\beta - 1 = 0$. Cela implique que :

$$\beta = d(1 + \alpha) \tag{15}$$

Déterminons les valeurs des coordonnées de F et G

Concernant le point F, $F\Big(e, f\Big)$ appartient à la droite (AB) et (FE) est perpendiculaire à la normale $\vec{u}$ à la droite (BD).

$$(BD): \quad x - \frac{1}{d}y + 1 = 0 \tag{16}$$

$$\vec{u}\Big(1, -\frac{1}{d}\Big) \tag{17}$$

$$(AB): \quad x - \frac{1-\alpha}{d(1+\alpha)}y + 1 = 0 \tag{18}$$

donc :

$$\overrightarrow{FE}.\vec{u} = 0 \quad et \quad F \in (AB)$$

$$\begin{cases} e - \frac{1-\alpha}{d(1+\alpha)}f + 1 = 0 \\ (\gamma - e).1 + \frac{1}{d}.f = 0 \end{cases}$$

ainsi :

$$\begin{cases} e = \frac{\alpha\gamma-\gamma-\alpha-1}{2\alpha} \\ f = -\frac{d(\gamma+1)(\alpha+1)}{2\alpha} \end{cases}$$

$$F\Big(\frac{\alpha\gamma - \gamma - \alpha - 1}{2\alpha}, -\frac{d(\gamma+1)(\alpha+1)}{2\alpha}\Big) \tag{19}$$

Concernant le point G, on a :

$$G\Big(g, h\Big) \in (BD) \cap (AE)$$

$$(AE): \quad x + \frac{\alpha+\gamma}{d(1+\alpha)}y - \gamma = 0 \tag{20}$$

L'équation de la droite (BD) est donnée par la relation (16). Donc :

$$\begin{cases} g - \frac{1}{d}h + 1 = 0 \\ g + \frac{\alpha+\gamma}{d(1+\alpha)}h - \gamma = 0 \end{cases}$$

ainsi :

$$\begin{cases} g = \frac{\alpha(\gamma-1)}{1+2\alpha+\gamma} \\ h = \frac{d(1+\gamma)(1+\alpha)}{1+2\alpha+\gamma} \end{cases}$$

$$G\Big(\frac{\alpha(\gamma-1)}{1+2\alpha+\gamma}, \frac{d(1+\gamma)(1+\alpha)}{1+2\alpha+\gamma}\Big) \tag{21}$$

Pour le point H, on a $H \in (FC)$ tel que $(GH) \perp (BC)$. L'abscisse de H est égal à g c'est-à-dire l'abscisse de G car $(GH) \perp (BC)$ et (BC) est l'axe des abscisses, on note donc $H\Big(g, i\Big)$.

$$(FC): \quad x + \frac{1-e}{f}y - 1 = 0 \tag{22}$$

Donc :

$$g + \frac{1-e}{f} i - 1 = 0$$

$1 - e \neq 0$, sinon $g = 1$. Il s'agit d'un cas limite impossible car $G \in [BC]$. De ce fait, nous pouvons écrire que :

$$i = \frac{1-g}{1-e} f$$

D'où, d'après (19) et par la suite (21), on a :

$$i = -\frac{d(\gamma+1)(\alpha+1)}{1+2\alpha+\gamma} = -h$$

Donc $G\Big(g, h\Big)$ et $H\Big(g, -h\Big)$, ainsi $CG = CH$ et $(HG) \perp (CB)$. D'où :

$$\widehat{BCG} = \widehat{OCG} = \widehat{HCO} = \widehat{HCB} = \widehat{FCB}$$

Par conséquent, nous avons montré que :

$$\widehat{BCG} = \widehat{BCF} \quad \text{c'est-à-dire que} \quad \hat{\alpha} = \hat{\beta}$$

2.1.2 Problème 2 : (taux de réussite : 20/178)

2.1.2.1 Solution 1 - Utilisation d'une identité remarquable

Trouvons tous les nombres entiers naturels non nuls m et n qui n'ont pas de diviseur commun plus grand que 1 tels que :

$$m^3 + n^3 \quad \text{divise} \quad m^2 + 20mn + n^2. \tag{23}$$

On a l'identité suivante pour tous entiers naturels m et n :

$$m^3 + n^3 = (m+n)(m^2 - mn + n^2) \tag{24}$$

Nous allons noté le symbole | comme représentant la division, c'est-à-dire $a|b$ veut dire a divise b. Ainsi, $m^3 + n^3$ divise $m^2 + 20mn + n^2$ implique que $m + n$ divise $m^2 + 20mn + n^2$ et $m^2 - mn + n^2$ divise $m^2 + 20mn + n^2$. D'où l'équation :

$$\begin{cases} m + n | m^2 + 20mn + n^2 \\ m^2 - mn + n^2 | m^2 + 20mn + n^2 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} m+n|(m+n)^2+18mn \\ m^2-mn+n^2|m^2+20mn+n^2 \end{cases}$$

Comme $m^2+20mn+n^2-(m^2-mn+n^2)=21mn$, en utilisant la deuxième relation, on a :

$$m^2-mn+n^2|21mn \tag{25}$$

En utilisant la première relation et sachant que $m+n|(m+n)^2$, nous obtenons $m+n|((m+n)^2+18mn)-(m+n)^2$. Cela implique :

$$m+n|18mn \tag{26}$$

Nous notons le symbole $\wedge$ comme étant la notation du plus grand diviseur commun, c'est-à-dire $a \wedge b$ est le plus grand diviseur commun de a et b. Tout diviseur de mn et $m+n$ est diviseur de toute combinaison linéaire. Ainsi, le plus grand diviseur commun de deux entiers naturels divise toute combinaison linéaire de ces deux entiers naturels. En l'occurence :

$$mn \wedge (m+n)|mn \wedge mn - m*(m+n) \implies mn \wedge (m+n)|mn \wedge -m*m$$

Or, $mn \wedge -m*m = m(n \wedge -m)$ donc :

$$mn \wedge (m+n)|m(n \wedge -m)$$

Donc :

$$mn \wedge (m+n)|m(n \wedge m) \tag{27}$$

D'après l'énoncé, m et n n'ont pas de diviseur commun plus grand que 1. Cela est équivalent à $m \wedge n = 1$.

$$m \wedge n = 1 \tag{28}$$

Les équations (27) et (28) impliquent que :

$$mn \wedge (m+n)|m \tag{29}$$

On a :

$$mn \wedge (m+n)|m+n$$

Donc :

$$mn \wedge (m+n)|(m+n) \wedge m$$

$$(m+n) \wedge m | ((m+n)-m) \wedge m \implies (m+n) \wedge m | n \wedge m$$

Ainsi,

$$mn \wedge (m+n) = 1 \tag{30}$$

Les équations (26) et (30) impliquent que :

$$m+n | 18 \tag{31}$$

D'où $m+n \in \{2,3,6,9,18\}$ car m et n étant des entiers naturels non nuls, $m+n \geq 2$. Afin de déterminer m et n, nous considérons le cas où $m \geq n$ car m et n sont interchangeables. Ainsi, pour chaque valeur de $m+n$, nous déterminons les valeurs de m et n tels que $m \wedge n = 1$. Cela donne :

$$m+n = 2 \implies (m,n) = (1,1)$$
$$m+n = 3 \implies (m,n) = (2,1)$$
$$m+n = 6 \implies (m,n) = (5,1)$$
$$m+n = 9 \implies (m,n) \in \{(8,1),(7,2),(5,4)\}$$
$$m+n = 18 \implies (m,n) \in \{(17,1),(13,5),(11,7)\}$$

Donc, avec $m \geq n$, on a :

$$(m,n) \in \{(1,1),(2,1),(5,1),(8,1),(7,2),(5,4),(17,1),(13,5),(11,7)\}$$

Pour chaque valeur de (m,n) nous vérifions si l'équation (25) est vraie. Ainsi, le tableau suivant permet de voir les résultats.

$m+n$	m	n	m^2-mn+n^2	$21mn$	$m^2-mn+n^2 \| 21mn$
2	1	1	1	21	vrai
3	2	1	3	$21*2$	vrai
6	5	1	21	$21*5$	vrai
9	8	1	$57 = 3*19$	$21*8*1$	faux
9	7	2	$39 = 3*13$	$21*7*2$	faux
9	5	4	$21 = 7*3$	$21*5*4$	vrai
18	17	1	$273 = 3*7*13$	$21*17$	faux
18	13	5	$129 = 3*43$	$21*13*5$	faux
18	11	7	$93 = 3*31$	$21*11*7$	faux

Donc :

$$(m, n) \in \{(1,1),(2,1),(1,2),(5,1),(1,5),(5,4),(4,5)\} \tag{32}$$

Réciproquement, $(m, n) \in \{(1,1),(2,1),(1,2),(5,1),(1,5)\}$ est tel que m^3+n^3 divise $m^2+20mn+n^2$. Cependant, si $(m, n) \in \{(5,4),(4,5)\}$ alors m^3+n^3 ne divise pas $m^2+20mn+n^2$. Cela se voit d'après le tableau suivant :

m	n	m^3+n^3	$m^2+20mn+n^2$	$m^3+n^3 \mid m^2+20mn+n^2$
1	1	2	22	vrai
2	1	9	45	vrai
5	1	126	126	vrai
5	4	$189 = 9*3*7$	$441 = 9*7*7$	faux

Ainsi, nous pouvons conclure que les valeurs des entiers naturels non nuls m et n qui n'ont pas de diviseur commun plus grand que 1 tels que : m^3+n^3 divise $m^2+20mn+n^2$ sont :

$$(1,1),(2,1),(1,2),(5,1),(1,5) \tag{33}$$

2.1.3 Problème 3 : (taux de réussite : 13/178)

Pour la suite de nombres réels suivante :

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_{n+1} = cx_n + \sqrt{c^2-1}\sqrt{x_n^2-1} \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1. \end{cases} \tag{34}$$

Montrons que si c est un nombre entier naturel non nul, alors x_n est un entier pour tout $n \geq 1$.

2.1.3.1 Solution 1 - Changement de variable $x_n = cosh(a_n)$

Définissons la suite numérique a_n telle que pour tout entier naturel n,

$$x_n = cosh(a_n)$$

Cette suite est bien définie car la fonction $cosh$ est bijective sur $\mathbb{R}^+$. En effet, la fonction cosinus hyperbolique est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ (car sa dérivée est la fonction sinus hyperbolique qui est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$), elle est donc bijective sur $\mathbb{R}^+$.

Ainsi, l'équation (34) devient :

$$\begin{cases} x_n = cosh(a_n) \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1 \\ cosh(a_{n+1}) = cosh(a_1)cosh(a_n) + \sqrt{cosh(a_1)^2 - 1}\sqrt{cosh(a_n)^2 - 1} \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1. \end{cases} \tag{35}$$

Nous avons les identités remarquables suivantes pour les fonctions $cosh$ (cosinus hyperbolique) et $sinh$ (sinus hyperbolique) :

$$\begin{cases} cosh(x)^2 + sinh(x)^2 = 1 \quad \text{pour tout} \quad x \quad \text{et} \quad y \quad \text{nombres réels} \\ cosh(x+y) = cosh(x)cosh(y) + sinh(x)sinh(y) \quad \text{pour tout} \quad x \quad \text{et} \quad y \quad \text{nombres réels} \\ cosh(x) > 0 \quad \text{et} \quad sinh(x) > 0 \quad \text{pour tout} \quad x \quad \text{et} \quad y \quad \text{nombres réels strictement positifs} \end{cases} \tag{36}$$

La seconde relation de l'équation (35) permet de dire :

$$cosh(a_{n+1}) = cosh(a_1)cosh(a_n) + sinh(a_1)sinh(a_n)$$

Cela implique d'après (36) que :

$$cosh(a_{n+1}) = cosh(a_1 + a_n) \tag{37}$$

La fonction cosinus hyperbolique est bijective. Ainsi l'équation (37) implique que :

$$a_{n+1} = a_1 + a_n \tag{38}$$

Par récurrence sur n, nous montrons que $a_n = n * a_1$ pour tout $n \geq 1$. En effet, pour $n = 1$, cela est vrai car $a_1 = 1 * a_1$. Supposons que pour un certain $n \geq 1$, $\forall k \leq n$, $a_k = k * a_1$. Alors, on a :

$$a_{n+1} = a_n + a_1 \implies a_{n+1} = n * a_1 + a_1$$

Donc :

$$a_{n+1} = (n+1)a_1$$

Ainsi, par récurrence :

$$a_n = n * a_1 \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1 \quad \text{entier naturel.} \tag{39}$$

Donc :

$$\begin{cases} cosh(a_1) = c \\ x_n = cosh(na_1) \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1 \quad \text{entier naturel.} \end{cases} \tag{40}$$

Montrons que si $cosh(x)$ est un entier alors pour tout entier naturel n, $cosh(nx)$ est un entier naturel.

Pour tous nombres réels a et b et tout entier naturels n, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} c_k^n a^k b^{n-k}$$

Car lorsqu'on choisit a dans k termes $a+b$, l'on choisira automatiquement b, $n-k$ fois pour former un terme de $(a+b)^n$. De plus, nous pouvons calculer la valeur de c_k^n comme étant le nombre de manière de choisir k éléments parmi n éléments sans tenir compte de l'ordre, c'est à dire :

$$c_k^n = \binom{n}{k}$$

Or

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \implies c_k^n = c_{n-k}^n$$

D'où :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_k^n (a^k b^{n-k} + a^{n-k} b^k) - \delta_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \frac{n}{2}} c_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^n a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \tag{41}$$

Où la notation $\lfloor x \rfloor$ signifie, la partie entière de x et $\delta_{a,b}$ est telle que :

$$\delta_{a,b} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a = b \\ 0 & \text{si} \quad a \neq b \end{cases}$$

Ainsi, pour $a = e^x$ et $b = e^{-x}$, on a : $2^n cosh(x)^n = (a+b)^n$. Ce qui donne donc :

$$2^n cosh(x)^n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_k^n (e^{(n-2k)x} + e^{-(n-2k)x}) - \delta_{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \frac{n}{2})} c_{\frac{n}{2}}^n$$

Donc :

$$2^n cosh(x)^n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_k^n 2cosh((n-2k)x) - \delta_{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \frac{n}{2})} c_{\frac{n}{2}}^n$$

$$2c_0^n cosh(nx) = 2^n cosh(x)^n - \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 2c_k^n cosh((n-2k)x) + \delta_{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \frac{n}{2})} c_{\frac{n}{2}}^n$$

Or $c_0^n = \binom{n}{0} = 1$, donc :

$$cosh(nx) = 2^{n-1}cosh(x)^n - \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_k^n cosh((n-2k)x) + \delta_{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \frac{n}{2})} \frac{c_{\frac{n}{2}}}{2} \qquad (42)$$

Soit x tel que $cosh(x)$ est un entier naturel. Par récurrence, montrons que pour tout entier naturel n, $cosh(nx)$ est un entier naturel. Pour $n = 1$, on a $cosh(nx) = cosh(x)$ est un entier naturel.

$$\text{Soit} \quad n, \quad \text{tel que pour tout} \quad k \leq n, \quad cosh(kx) \quad \text{est un entier naturel.} \qquad (43)$$

Donc :

$$\forall k \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor, \quad c_k^{n+1} cosh((n+1-2k)x) \quad \text{est un entier naturel} \qquad (44)$$

Car $\forall k$ tel que, $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$, $0 \leq n+1-2k \leq n$, l'hypothèse (43) est applicable pour $l = n+1-2k$ et $c_k^{n+1} = \binom{n+1}{k}$ est un entier.

Aussi,

$$\delta_{(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor, \frac{n+1}{2})} \frac{c^{n+1}_{\frac{n+1}{2}}}{2} = \begin{cases} \frac{c^{n+1}_{\frac{n+1}{2}}}{2} & \text{si} \quad n+1 \quad \text{est pair} \\ 0 \quad \text{si} \quad n+1 & \text{est impair} \end{cases}$$

Si $n+1$ est pair,

$$c^{n+1}_{\frac{n+1}{2}} = \binom{n+1}{\frac{n+1}{2}} \implies c^{n+1}_{\frac{n+1}{2}} = \frac{(n+1)!}{(\frac{n+1}{2})!(\frac{n+1}{2})!} \implies c^{n+1}_{\frac{n+1}{2}} = 2\frac{n!}{(\frac{n-1}{2})!(\frac{n+1}{2})!}$$

$$c^{n+1}_{\frac{n+1}{2}} = 2\binom{n}{\frac{n+1}{2}} \implies c^{n+1}_{\frac{n+1}{2}} = 2c^n_{\frac{n+1}{2}} \implies \frac{c^{n+1}_{\frac{n+1}{2}}}{2} = c^n_{\frac{n+1}{2}}$$

Donc :

$$\delta_{(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor, \frac{n+1}{2})} \frac{c^{n+1}_{\frac{n+1}{2}}}{2} = \begin{cases} c^n_{\frac{n+1}{2}} & \text{si} \quad n+1 \quad \text{est pair} \\ 0 \quad \text{si} \quad n+1 & \text{est impair} \end{cases} \qquad (45)$$

D'après (42),

$$cosh((n+1)x) = 2^n cosh(x)^{n+1} - \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} c_k^{n+1} cosh((n+1-2k)x) + \delta_{(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor, \frac{n+1}{2})} \frac{c_{\frac{n+1}{2}}}{2}$$

et

$$cosh((n+1)x) > 0 \quad \text{pour tout} \quad x \quad \text{nombres réel strictement positifs}$$

En utilisant les remarques (44), (45) et le fait que $cosh(x)$ est un entier naturel alors $cosh((n+1)x)$ est un entier.

Ainsi, si x est un nombre réel tel que $cosh(x)$ est un entier naturel alors pour tout entier naturel n, $cosh(nx)$ est un entier naturel.

Pour conclure, en utilisant l'expression de x_n en fonction de a_1, (40) et l'implication précédente, nous pouvons déduire que :

Si c est un nombre entier naturel non nul, alors x_n est un entier pour tout $n \geq 1$.

2.1.3.2 Solution 2 - Montrer que : $\forall n \geq 2$, $x_{n+1} = 2cx_n - x_{n-1}$

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $x_{n+1} = 2cx_n - x_{n-1}$

Pour $n = 1, 2$ et 3, on a :

$$x_1 = c$$

$$x_2 = c^2 + \sqrt{c^2-1}\sqrt{c^2-1} \implies x_2 = 2c^2 - 1$$

$$x_3 = c(2c^2-1) + \sqrt{c^2-1}\sqrt{(2c^2-1)^2-1} \implies x_3 = 2c^3 - c + \sqrt{c^2-1}\sqrt{4c^2(c^2-1)}$$

$$x_3 = 2c^3 - c + (c^2-1)(2c) \implies x_3 = 4c^3 - 3c \implies x_3 = 2c(2c^2-1) - c$$

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = 2c^2 - 1 \\ x_3 = 2c(2c^2-1) - c \end{cases} \tag{46}$$

D'où :

$$x_3 = 2cx_2 - x_1 \tag{47}$$

Donc pour $n = 2$, on a : $x_{n+1} = 2cx_n - x_{n-1}$.

Supposons que pour un certain $n \geq 2$, on a : $\forall k, 2 \leq k \leq n, x_{k+1} = 2cx_k - x_{k-1}$. Alors, on a d'après la définition de la suite x_n,

$$x_{n+2} = cx_{n+1} + \sqrt{c^2 - 1}\sqrt{x_{n+1}^2 - 1} \tag{48}$$

D'après l'hypothèse, on a :

$$x_{n+1}^2 = (2cx_n - x_{n-1})^2 \implies x_{n+1}^2 = 4c^2x_n^2 - 4cx_nx_{n-1} + x_{n-1}^2$$
$$x_{n+1}^2 - 1 = (4c^2x_n^2 - 4cx_nx_{n-1}) + (x_{n-1}^2 - 1)$$
$$(c^2 - 1)(x_{n+1}^2 - 1) = (c^2 - 1)(4c^2x_n^2 - 4cx_nx_{n-1}) + (c^2 - 1)(x_{n-1}^2 - 1)$$

Or, d'après la définition de la suite x_n selon l'équation (34) :

$$(c^2 - 1)(x_{n-1}^2 - 1) = (x_n - cx_{n-1})^2$$

Donc :

$$(c^2 - 1)(x_{n+1}^2 - 1) = (c^2 - 1)(4c^2x_n^2 - 4cx_nx_{n-1}) + (x_n^2 - 2cx_nx_{n-1} + c^2x_{n-1}^2)$$
$$(c^2 - 1)(x_{n+1}^2 - 1) = (4c^4 - 4c^2 + 1)x_n^2 - 2c(2c^2 - 1)x_{n-1}x_n + c^2x_{n-1}^2$$

Aussi :

$$(cx_{n+1} - x_n)^2 = c^2x_{n+1}^2 - 2cx_{n+1}x_n + x_n^2$$

D'après l'hypothèse de la récurrence, pour $k = n$:

$$x_{n+1} = 2cx_n - x_{n-1} \quad \text{et} \quad x_{n+1}^2 = 4c^2x_n^2 - 4cx_nx_{n-1} + x_{n-1}^2$$

Donc :

$$(cx_{n+1} - x_n)^2 = c^2(4c^2x_n^2 - 4cx_nx_{n-1} + x_{n-1}^2) - 2c(2cx_n - x_{n-1})x_n + x_n^2$$
$$(cx_{n+1} - x_n)^2 = (4c^4 - 4c^2 + 1)x_n^2 - 2c(2c^2 - 1)x_{n-1}x_n + c^2x_{n-1}^2$$

D'où :

$$(c^2 - 1)(x_{n+1}^2 - 1) = (cx_{n+1} - x_n)^2$$

L'équation (48) donne :

$$x_{n+2} = cx_{n+1} + (cx_{n+1} - x_n) \quad \text{car} \quad cx_{n+1} \geq c^2x_n \geq x_n \quad (\text{car} \quad c \geq 1)$$

$$x_{n+2} = 2cx_{n+1} - x_n$$

Ainsi, par récurrence, pour tout $n \geq 2$:

$$x_{n+1} = 2cx_n - x_{n-1} \tag{49}$$

Montrons par récurrence sur n que si c est un entier naturel alors pour tout $n \geq 1, x_n$ est un entier naturel

Supposons que c est un entier naturel non nul.

Pour $n = 1$, $x_1 = c$ est un entier naturel non nul. Pour $n = 2$, l'expression de x_2 donnée par l'équation (46) est : $x_2 = 2c^2 - 1$. Donc x_2 est un entier naturel non nul.

Supposons que pour un certain $n \geq 2$, $\forall k, 1 \leq k \leq n, x_k$ est un entier naturel non nul.

L'équation (49) implique que $x_{n+1} = 2cx_n - x_{n-1}$. Or d'après l'hypothèse de récurrence x_n et x_{n-1} sont des entiers naturels non nuls. Donc, x_{n+1} est un entier relatif. Aussi, $x_{n+1} \geq 1$ car les termes de l'expression de $x_{n+1} = cx_n + \sqrt{c^2-1}\sqrt{x_n^2-1}$ selon (34) sont tels que $cx_n \geq 1$ et $\sqrt{c^2-1}\sqrt{x_n^2-1} \geq 0$ car $c \geq 1$ et $x_n \geq 1$. D'où, x_{n+1} est un entier naturel non nul.

Ainsi par récurrence, $\forall n \geq 1$, x_n est un entier naturel non nul.

Pour conclure, si c est un nombre entier naturel non nul, alors x_n est un entier naturel pour tout $n \geq 1$.

Remarque 1: Polynôme de Chebyshev

Le problème posé est équivalent à une suite de polynômes de Chebyshev de premier type noté T_n, tel que :

$$T_n(cos\theta) = cos(n\theta)$$

Pour démontrer que nous sommes face à un polynôme de Chebyshev, nous pouvons calculer les premiers termes de la suite et vérifier qu'ils sont égaux à la suite de polynômes de Chebyshev.

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_2(x) = 2x^2 - 1 \\ T_3(x) = 4x^3 - 3x \\ T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x \\ T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 \end{cases} \tag{50}$$

La relation de la solution 2, découle de la propriété suivante de la suite du polynôme de Chebyshev.

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad \forall n \geq 1 \end{cases} \tag{51}$$

Pour plus de détails sur les propriétés du polynôme de Chebychev, se reférer à la page wikipédia suivante ([1]).

2.2 Jour 2

2.2.1 Problème 4 : (taux de réussite : 4/178)

Déterminons la valeur maximale possible de n.

2.2.1.1 Solution 1 - Utilisation de la fonction partie entière.

Remarque 2: Numérotation des pages suivant le nombre de timbres.

Pour une distribution donnée de timbres effectuée par Manzi, nous numérotons les pages en les rangeant par ordre croissant du nombre de timbres. Notons par a_k, le nombre de timbres dans la page k. Puisque la distribution de timbres dans les pages est telle que deux pages distinctes ont un nombre distinct de pages. La numérotation des pages est donc telle que pour tout k tel que : $2 \leq k \leq 10$, on a :

$$0 \leq a_{k-1} < a_k$$

Cela implique que :

$$a_k \geq a_{k-1} + 1 \geq 1 \tag{52}$$

Montrons que la valeur minimale de n est 45

Manzi dispose de n timbres et comme chaque page contient un nombre distinct de timbres, considérons une distribution de timbres effectuée par Manzi. Alors, nous considérons la numérotation telle que :

$$\forall k, \quad 2 \leq k \leq 10, \quad 0 \leq a_{k-1} < a_k$$

Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \{1, 2, ..., 10\}$, $a_n \geq a_1 + (n-1)$

Pour $n = 1$, on a : $a_n = a_1 + (n-1)$.

Supposons que pour un certain n, tel que : $n \in \{1, 2, ..., 9\}$, $a_n \geq a_1 + (n-1)$. Alors, l'équation (52) permet de déduire que :

$$a_{n+1} \geq a_n + 1 \implies a_{n+1} \geq (a_1 + (n-1)) + 1$$

D'où :

$$a_{n+1} \geq a_1 + n$$

Ainsi, nous avons montré par récurrence sur n, que :

$$\forall n \in \{1, 2, ..., 10\}, \quad a_n \geq a_1 + (n-1) \tag{53}$$

On a :

$$n = \sum_{k=1}^{10} a_k \implies n \geq \sum_{k=1}^{10} (k-1) + \sum_{k=1}^{10} a_1$$

$$n \geq \frac{9 \times 10}{2} + 10a_1 \implies n \geq 45 + 10a_1 \tag{54}$$

Or, $a_1 \geq 0$, donc :

$$n \geq 45 \tag{55}$$

Aussi, pour $n = 45$, il existe bien toujours quatre pages pour toute distribution de timbres $(a_1, ..., a_{10})$ entre les dix pages telles que le nombre total de timbres est supérieur à $\frac{n}{2}$. En effet, les équations (53) et (54) permettent de dire que :

$$n = 45 \implies a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \{1, 2, ..., 10\}, \quad a_n = a_1 + (n-1) \tag{56}$$

Sinon, si nous supposons qu'il existe $l \in \{1, 2, ..., 10\}$, tel que : $a_l > a_1 + (l-1)$. Alors :

$$n = \sum_{k=1, k \neq l}^{10} a_k + a_l \implies n > \sum_{k=1, k \neq l}^{10} (k-1) + \sum_{k=1, k \neq l}^{10} a_1 + (l-1) + a_1$$

$$n > \sum_{k=1}^{10} (k-1) + \sum_{k=1}^{10} a_1 \implies n > 45 + 10a_1 > 45$$

Ce qui est absurde. De même si nous supposons que $a_1 > 0$, alors :

$$n = \sum_{k=1}^{10} a_1 + (k-1) \implies n = 45 + 10a_1 > 45$$

Cela aussi est absurde.

Ainsi, pour $n = 45$, on a : $\forall k \in \{1, 2, ..., 10\}$, $a_k = k - 1$. Donc :

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 6 + 7 + 8 + 9 \implies a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 30 > \frac{45}{2}$$

Donc pour $n = 45$, il existe bien toujours quatre pages pour toute distribution de timbres $(a_1, ..., a_{10})$ entre les dix pages telle que le nombre total de timbres est supérieur à $\frac{n}{2}$.

Montrons que si pour n entier naturel, l'assertion : pour tout arrangement $(a_1, ..., a_{10})$, il existe toujours quatre éléments tels que le total est supérieur à $\frac{n}{2}$ est vraie alors n admet une valeur maximale.

Soit n fixé un entier naturel, tel que pour toute distribution de timbres parmi les dix pages $(a_1, ..., a_{10})$ (suivant l'encadré remarque (2)), il existe toujours quatre éléments tels que le total est supérieur à $\frac{n}{2}$. Prenons la distribution de timbres $(a_1, ..., a_{10})$ telle que :

$$\begin{cases} a_{i+1} = a_i + 1 \quad \text{pour tout} \quad i \in \{1, ..., 8\} \\ a_1 = \lfloor \frac{n-45}{10} \rfloor \quad \text{et} \quad a_{10} = n - 9a_1 - 36 \end{cases} \tag{57}$$

$$a_{10} = a_1 + 9 + (n - 45 - 10a_1)$$

Or :

$$a_1 \leq \frac{n-45}{10} \implies n - 45 - 10a_1 \geq n - 45 - 10\frac{n-45}{10} = 0$$

Donc :

$$a_{10} \geq a_1 + 9 = (a_1 + 8) + 1 = a_9 + 1$$

Ainsi, cette distribution est une distribution telle que deux pages distinctes ont un nombre distinct de timbres et on a :

$$a_{i+1} > a_i \quad \text{pour tout} \quad i \in \{1, ..., 9\}$$

S'il existe quatre pages telles que le nombre total de timbres est supérieur à $\frac{n}{2}$, en notant les quatre indices des pages comme i, j, k et l avec $i < j < k < l$ alors :

$$i < j < k < l \leq 10 \implies i \leq 7, \quad j \leq 8, \quad k \leq 9 \quad \text{et} \quad l \leq 10$$

Donc :

$$a_i \leq a_7, \quad a_j \leq a_8, \quad a_k \leq a_9 \quad \text{et} \quad a_l \leq a_{10}$$

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} \geq a_i + a_j + a_k + a_l \geq \frac{n}{2}$$

Ainsi :

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} \geq \frac{n}{2} \tag{58}$$

En utilisant l'équation (57) et la définition de a_1, on a :

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = (a_1 + 6) + (a_1 + 7) + (a_1 + 8) + (n - 9a_1 - 36) = n - 6a_1 - 15$$

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} \leq n - 6(\frac{n - 45}{10} - 1) - 15 \implies a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} \leq \frac{4n + 6 * 55 - 150}{10}$$

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} \leq \frac{4n + 180}{10}$$

D'où, en utilisant l'équation (58), on obtient :

$$\frac{4n + 180}{10} \geq a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} \geq \frac{n}{2} \implies \frac{4n + 180}{10} \geq \frac{n}{2}$$

Donc :

$$\frac{n - 180}{10} \leq 0 \implies n \leq 180$$

Montrons que pour n entier naturel, l'assertion : pour tout arrangement $(a_1, ..., a_{10})$, il existe toujours quatre éléments tels que le total est supérieur à $\frac{n}{2}$ est vraie alors la valeur maximale de n est 140.

Pour tout n entier naturel, nous considérons la distribution de timbres $(a_1, a_2, ..., a_{10})$ selon la remarque (2). Pour démontrer le résultat ci-dessus, nous allons effectuer un raisonnement basé sur quelques valeurs possibles de a_6.

Soit $n \geq 140$,

Si $n = 140$,

Si $a_6 < 15$, alors :

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \leq a_6 + (a_6 - 1) + (a_6 - 2) + (a_6 - 3) + (a_6 - 4) + (a_6 - 5)$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \leq 6a_6 - (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \leq 6 * 14 - 15$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \leq 69$$

Donc :

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = n - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) \implies a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} \geq 140 - 69$$

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} \geq 71 > \frac{140}{2} = \frac{n}{2}$$

Si $a_6 \geq 15$, alors :

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} \geq (a_6 + 1) + (a_6 + 2) + (a_6 + 3) + (a_6 + 4) = 4a_6 + 10$$

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} \geq 70 = \frac{140}{2} = \frac{n}{2}$$

Donc, pour $n = 140$, pour toute distribution de timbres parmi les dix pages, il existe toujours quatre pages telles que le total de timbres est supérieur à $\frac{n}{2}$.

Si $n > 140$,

Nous raisonnons avec les distributions de timbres sur les 10 pages suivant la numérotation de la remarque (2). Et nous considérons le cas où $a_6 = \lfloor \frac{n}{10} \rfloor + 1$. Cette distribution est possible en posant :

$$\begin{cases} a_k = k, \quad \text{pour tout} \quad k \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ a_6 = \lfloor \frac{n}{10} \rfloor + 1 \\ a_k = a_6 + (k - 6), \quad \text{pour tout} \quad k \in \{7, 8, 9\} \\ a_{10} = n - \sum_{k=1}^{9} a_k = n - (1 + 2 + 3 + 4 + 5) - (4a_6 + (1 + 2 + 3)) \end{cases} \tag{59}$$

En effet :

$$a_{10} \geq n - 21 - 4 * (\frac{n}{10} + 1) \implies a_{10} \geq 6 * (\frac{n}{10}) - 25$$

$$a_{10} - (a_9 + 1) \geq 6 * (\frac{n}{10}) - 25 - (a_9 + 1) \geq 6 * (\frac{n}{10}) - 25 - (\lfloor \frac{n}{10} \rfloor + 4 + 1)$$

Or,

$$-\lfloor\frac{n}{10}\rfloor \geq -\frac{n}{10}$$

Et vu que $n > 140$,

$$a_{10} - (a_9 + 1) \geq 5 * (\frac{n}{10} - 6) > 5 * (14 - 6) > 0 \implies a_{10} > a_9$$

On obtient une distribution de timbres $\{a_1, a_2, ..., a_{10}\}$ sur les 10 pages suivant la numérotation de la remarque (2).

En écrivant :

$$n = 10.(14 + a) + b \quad \text{avec} \quad a > 0 \quad \text{et} \quad 0 < b \leq 9 \tag{60}$$

On obtient :

$$a_6 = 14 + a + 1 = 15 + a \quad \text{avec} \quad a > 0 \tag{61}$$

$$n = 10a_6 + b - 10 \quad \text{avec} \quad b > 0 \tag{62}$$

Si $b \leq 5$, on prend :

$$\begin{cases} a_6 = \lfloor\frac{n}{10}\rfloor + 1 \\ a_1 = a_6 + b - 10 \\ a_k = a_6 + (k - 6), \quad \text{pour tout} \quad k \in \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\} \end{cases} \tag{63}$$

On a :

$$a_1 + ... + a_{10} = 6a_6 + (b - 10) - (1 + 2 + 3 + 4) + 4a_6 + (1 + 2 + 3 + 4)$$

$$a_1 + ... + a_{10} = 10a_6 + b - 10 = n$$

Et :

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 4a_6 + 10 = 4(15 + a) + 10$$

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 4a + 70$$

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} - \frac{n}{2} = 4a + 70 - 5(14 + a) - \frac{b}{2}$$

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} - \frac{n}{2} = -a - \frac{b}{2} < 0 \quad \text{car} \quad a > 0 \quad \text{et} \quad b > 0$$

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} < \frac{n}{2}$$

Donc :

$$a_i + a_j + a_k + a_l < \frac{n}{2} \quad \forall i, j, k, l \in \{1, ..., 10\} \tag{64}$$

Si $b > 5$, on pose :

$$\begin{cases} a_6 = \lfloor \frac{n}{10} \rfloor + 1 \\ a_k = a_6 + (k-6), \quad \text{pour tout} \quad k \in \{1,2,3,4,5\} \\ a_k = a_6 + (k-6) + \delta_{b-5>10-l}, \quad \text{pour tout} \quad k \in \{7,8,9,10\} \end{cases} \tag{65}$$

On a :

$$a_1 + ... + a_{10} = 6a_6 - (1+2+3+4+5) + 4a_6 + (1+2+3+4) + (b-5)$$

$$a_1 + ... + a_{10} = 10a_6 + b - 10 = n$$

Et :

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 4a_6 + 10 + (b-5) = 4(15+a) + 10 + (b-5)$$

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 4a + 65 + b$$

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} - \frac{n}{2} = 4a + 65 + b - 5(14+a) - \frac{b}{2} = \frac{b}{2} - 5 - a$$

Donc :

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} - \frac{n}{2} \leq \frac{9}{2} - 5 - a = -\frac{1}{2} - a < 0 \quad \text{car} \quad a > 0 \quad \text{et} \quad b \leq 9$$

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} < \frac{n}{2}$$

$$a_i + a_j + a_k + a_l < \frac{n}{2} \quad \forall i, j, k, l \in \{1, ..., 10\} \tag{66}$$

Ainsi, à l'aide des équations (64) et (66), on a :

$$\text{Pour} \quad n > 140, \quad \forall i, j, k, l \in \{1, ..., 10\} \quad a_i + a_j + a_k + a_l < \frac{n}{2} \tag{67}$$

L'équation (67) et le fait que pour $n = 140$ et pour toute distribution de timbres parmi les dix pages, il existe toujours quatre pages telles que le total de timbres est supérieur à $\frac{n}{2}$, nous permet de déduire que si l'assertion : pour tout arrangement $(a_1, ..., a_{10})$, il existe toujours quatre éléments tels que le total est supérieur à $\frac{n}{2}$ est vraie alors la valeur maximale de n est 140.

Remarque 3: Comment trouver la valeur maximale de n

Dans les conditions de ce problème, pour déterminer la valeur maximale de n, l'on peut se baser sur les deux premiers résultats démontrés ci-dessus, à savoir montrer que :

$$45 \leq n \leq 180$$

Puis, en descendant de proche en proche la borne supérieure de la valeur de n et essayant de trouver le cas échéant une distribution des timbres telle que tout ensemble de quatre pages a une somme totale de timbres inférieure strictement à $\frac{n}{2}$.

Enfin, si l'on connaît la valeur maximale de n d'avance, l'on pourrait se contenter de le démontrer.

2.2.2 Problème 5 : (taux de réussite : 17/178)

Pour a et b des nombres réels avec $a \neq 0$. Montrons que les racines du polynôme

$$P(x) = ax^4 - 4ax^3 + (5a + b)x^2 - 4bx + b \tag{68}$$

sont réelles et strictement positives si et seulement si $a = b$.

2.2.2.1 Solution 1 - Utilisation de tableau de variation

Montrons que si a est négatif cela revient au même que de supposer que a est positif.

En effet, si a est négatif, posons $a' = -a$ et $b' = -b$, on a : a' est positif, alors d'après l'équation (68) :

$$P(x) = -a'x^4 + 4a'x^3 - (5a' + b')x^2 + 4b'x - b'$$
$$P(x) = -(a'x^4 - 4a'x^3 + (5a' + b')x^2 - 4b'x + b')$$

Les racines de $P(x)$ sont les mêmes que les racines de $-P(x)$. Aussi, l'expression du polynôme P en fonction de a et b est la même que l'expression du polynôme $-P$ en fonction de a' et b'. D'où, l'assertion

les racines du polynôme $P(x)$ sont réelles et strictement positives si et seulement si $a = b \Longleftrightarrow$ les racines du polynôme $P(x)$ sont réelles et strictement positives si et seulement si $a' = b'$

Puisque $a \neq 0$, nous pouvons donc montrer l'équivalence :

Les racines du polynôme $P(x)$ sont réelles et strictement positives si et seulement si $a = b$ avec la condition $a > 0$.

Montrons que les racines du polynôme $P(x)$ sont réelles strictement positives alors $a = b$.

Soient a et b des nombres réels avec $a \neq 0$. Supposons que les racines du polynôme $P(x)$ de l'équation (68) sont réelles strictement positives.

Montrons que a et b ont le même signe.

D'après l'hypothèse, nous pouvons écrire le polynôme $P(x)$ sous la forme :

$$P(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\mu), \quad \text{avec} \quad \alpha, \beta, \gamma, \mu \in \mathbb{R}_+^*$$

Donc :

$$P(x) = a[x^4 - (\alpha+\beta+\gamma+\mu)x^3 + (\alpha\beta + (\alpha+\beta)(\gamma+\mu) + \gamma\mu)x^2 - ((\alpha+\beta)\mu\gamma + (\gamma+\mu)\alpha\beta)x + \alpha\beta\gamma\mu]$$

D'où, en utilisant l'équation (68), nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \alpha\beta\gamma\mu \\ 4\frac{b}{a} = (\alpha+\beta)\mu\gamma + (\gamma+\mu)\alpha\beta \\ 5 + \frac{b}{a} = \alpha\beta + (\alpha+\beta)(\gamma+\mu) + \gamma\mu \\ 4 = \alpha+\beta+\gamma+\mu \end{cases} \tag{69}$$

Puisque $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ et $\mu > 0$ alors :

$$\alpha\beta\gamma\mu > 0 \implies \quad \text{d'après la première ligne de (69), on obtient :} \quad \frac{b}{a} > 0$$

Ainsi, a et b ont le même signe.

La dérivée première et la dérivée seconde du polynôme P sont données par les relations :

$$P'(x) = 2[2ax^3 - 6ax^2 + (5a+b)x - 2b] \tag{70}$$

$$P"(x) = 12a\left[(x-1)^2 - \frac{a-b}{6a}\right] \tag{71}$$

Supposons que $a \neq b$, alors il y a deux possibilités :

$$a > b \quad \text{ou} \quad a < b$$

Possibilité 1 - supposons que $a > b$ avec $a > 0$.

Comme a et b ont le même signe d'après la démonstration précédente, alors $a > 0$, $b > 0$ et $a > b$. Ainsi le polynôme P" admet des racines réelles qui sont :

$$r_1 = 1 - r \quad , \quad r_2 = 1 + r \quad \text{avec} \quad r = \sqrt{\frac{a-b}{6a}}$$

$$P\text{"}(r_1) = 0 \quad \text{et} \quad P\text{"}(r_2) = 0$$

$$P'(1+r) = 2[2a(1+r)^3 - 6a(1+r)^2 + (5a+b)(1+r) - 2b]$$
$$P'(1+r) = 2[2ar^3 + (b-a)r + (a-b)]$$
$$\text{Or,} \quad r^2 = \frac{a-b}{6a} \implies P'(1+r) = 2(a-b)\frac{3-2r}{3}$$

De même, en remplaçant r par $-r$, on a :

$$P'(1-r) = 2(a-b)\frac{3+2r}{3}$$

Donc :

$$P'(r_1) = 2(a-b)\frac{3+2r}{3} \quad \text{et} \quad P'(r_2) = 2(a-b)\frac{3-2r}{3}$$

De plus,

$$0 < r^2 = \frac{a-b}{6a} < \frac{a}{6a} = \frac{1}{6} \implies 4r^2 < \frac{4}{6} = \frac{2}{3} < 1 \implies 2r < 1$$

Donc :

$$a - b > 0 \quad \text{et} \quad r > 0 \implies 2(a-b)\frac{3+2r}{3} > 0 \implies P'(r_1) > 0$$
$$\frac{3-2r}{3} > 0 \implies 2(a-b)\frac{3-2r}{3} > 0 \implies P'(r_2) > 0$$

Aussi,

$$P'(0) = -4b \quad \text{et} \quad P'(1) = 2(a-b) \tag{72}$$

$$P(0) = b \quad \text{et} \quad P(1) = 2(a-b) \tag{73}$$

Nous obtenons ainsi le tableau de variation de la fonction polynômiale $P(x)$:

x	$-\infty$	0	r'	r_1	1	r_2	$+\infty$
$P''(x)$		$+$		0	$-$	$-$ 0	$+$
$P'(x)$	$-\infty$	$-4b$	0	$2(a-b)\frac{3+2r}{3}$	$2(a-b)$	$2(a-b)\frac{3-2r}{3}$	$+\infty$
$P'(x)$		$-$	0		$+$		
$P(x)$	$+\infty$	b	$P(r')$		$2(a-b)$		$+\infty$

D'après le tableau de variation de la fonction polynômiale $P(x)$, il existe $r' \in]0,1[$, tel que $P'(r') = 0$. Aussi, selon le signe de $P(r')$, le polynôme P admet soit deux racines réelles distinctes, une racine réelle ou aucune racine réelle. En effet,

$$\text{Si} \quad P(r') > 0 \implies P(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{alors} \quad P \quad \text{n'admet aucune racine réelle} \tag{74}$$

$$\text{Si} \quad P(r') = 0 \implies \text{le polynôme} \quad P \quad \text{admet une seule racine réelle} \quad r' \in]0,1[\tag{75}$$

$$\text{Si} \quad P(r') < 0 \implies \text{le polynôme} \quad P \quad \text{admet deux racines réelles} \quad r_{(1)} \quad \text{et} \quad r_{(2)} \in]0,1[\tag{76}$$

Rappelons l'hypothèse de départ, qui spitule que P admet des racines réelles strictement positives.

La dernière implication de la relation (74) est absurde par rapport à l'hypothèse de départ.

D'après l'hypothèse, les racines de P sont réelles et strictement positives. D'après la relation (75), P admet une seule racine réelle $r' \in]0, 1[$. Ainsi, il s'agit d'une racine de multiplicité 4. La dernière équation des relations (69) implique donc que : $4r' = 4 \implies r' = 1$. Ce qui est absurde car $0 < r' < 1$.

Enfin, selon la relation (76), P admet deux racines réelles $r_{(1)} \in]0, 1[$ et $r_{(2)} \in]0, 1[$. Ainsi, il s'agit de racines de multiplicités combinées $m_{(1)}$ et $m_{(2)}$ égale à 4, c'est-à-dire $m_{(1)} + m_{(2)} = 4$. La dernière équation des relations (69) implique donc que : $m_{(1)}r_{(1)} + m_{(2)}r_{(2)} = 4$. Or :

$$0 < r_{(1)} < 1 \quad \text{et} \quad 0 < r_{(2)} < 1 \implies 0 < m_{(1)}r_{(1)} + m_{(2)}r_{(2)} < m_{(1)} + m_{(2)} = 4$$

Ce qui contredit $m_{(1)}r_{(1)} + m_{(2)}r_{(2)} = 4$. C'est donc absurde.

Ainsi, nous avons montré par absurde que a n'est pas strictement supérieur à b si les racines de P sont réelles strictement positives.

Possibilité 2 - supposons que $a < b$ avec $a > 0$

Comme a et b ont le même signe, alors $a > 0$, $b > 0$ et $a < b$. Cela implique que $-\frac{a-b}{6a} > 0$. Ainsi le polynôme P" est strictement positif. Nous avons ainsi le tableau de variation suivant pour la fonction polynômiale $P(x)$.

x	$-\infty$	0	1	r"	$+\infty$
$P''(x)$			$+$		
$P'(x)$	$-\infty$	$-4b$	$2(a-b)$	0	$+\infty$
$P'(x)$		$-$		0	$+$
$P(x)$	$+\infty$	b	$2(a-b)$	$P(r")$	$+\infty$

Le tableau de variation ci-dessus est celui de la fonction polynômiale $P(x)$ lorsque $a < b$. Puisque $b > 0$, $2(a-b) < 0$ alors à l'aide du tableau de variation de $P(x)$, nous pouvons dire que la fonction polynômiale $P(x)$ a exactement deux racines réelles $r_{(1')}$ et $r_{(2')}$ avec $0 < r_{(1')} < 1$ et $1 < r_{(2')}$. D'après l'hypothèse, ce sont donc des racines de multiplicités combinées $m_{(1')}$ et $m_{(2')}$ égale à 4, c'est-à-dire $m_{(1')} + m_{(2')} = 4$. La dernière équation des relations (69) implique donc que : $m_{(1')}r_{(1')} + m_{(2')}r_{(2')} = 4$. D'où :

$$\begin{cases} 0 < r_{(1')} < 1 \\ 1 < r_{(2')} \\ m_{(1')} + m_{(2')} = 4 \\ m_{(1')}r_{(1')} + m_{(2')}r_{(2')} = 4 \\ r_{(1')}^{m_{(1')}} r_{(2')}^{m_{(2')}} = \frac{b}{a} \end{cases} \tag{77}$$

Ainsi, nous avons :

$$r_{(2')} = \frac{4 - m_{(1')}r_{(1')}}{4 - m_{(1')}} \quad \Longrightarrow^{\text{d'après (77)}} \quad r_{(1')}^{m_{(1')}} \left(\frac{4 - m_{(1')}r_{(1')}}{4 - m_{(1')}} \right)^{4 - m_{(1')}} = \frac{b}{a}$$

Donc :

$$r_{(1')}^{m_{(1')}} (4 - m_{(1')}r_{(1')})^{4 - m_{(1')}} - \frac{b}{a}(4 - m_{(1')})^{4 - m_{(1')}} = 0 \tag{78}$$

Posons :

$$f(r) = r^{m_{(1')}} (4 - m_{(1')}r)^{4 - m_{(1')}} - \frac{b}{a}(4 - m_{(1')})^{4 - m_{(1')}}$$

$$f'(r) = 4m_{(1')}(1-r)r^{m_{(1')}-1}(4 - m_{(1')}r)^{3 - m_{(1')}}$$

Puisque $1 \leq m_{(1')} \leq 3$, on a :

$$\forall r, \quad 0 < r < 1, \quad f'(r) > 0$$

Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur $[0, 1]$, or :

$$\begin{cases} f(0) = -\left(\frac{b}{a}\right)(4 - m_{(1')})^{4 - m_{(1')}} < 0, \\ f(1) = (1 - \left(\frac{b}{a}\right))(4 - m_{(1')})^{4 - m_{(1')}} < 0 \quad \text{car} \quad \frac{b}{a} > 1 \end{cases}$$

Donc f est strictement négative sur $[0, 1]$, donc :

$$\forall r \in [0, 1], \quad f(r) < 0 \Longleftrightarrow \forall r \in [0, 1], \quad r^{m_{(1')}}(4 - m_{(1')}r)^{4 - m_{(1')}} < \frac{b}{a}(4 - m_{(1')})^{4 - m_{(1')}}$$

Ce qui contredit (78), absurde.

Ainsi, nous avons montré par absurde que l'assertion $a < b$ n'est pas vraie.

Par conséquent, si a et b sont des nombres réels avec $a \neq 0$, tels que les racines du polynôme $P(x)$ de l'équation (68) sont réelles strictement positives alors $a = b$.

Montrons que si $a = b$ alors les racines du polynôme $P(x)$ de l'équation (68) sont réelles strictement positives.

Supposons que $a = b$, alors :

$$P(x) = a(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) \implies P(x) = a(x-1)^4$$

Ainsi, 1 est la seule racine du polynôme P de multiplicité 4. D'où les racines du polynôme P sont réelles strictement positives.

Pour conclure :

Les racines du polynôme P définit dans l'équation (68) sont réelles et strictement positives si et seulement si $a = b$.

2.2.2.2 Solution 2 - Utilisation de l'inégalité AGH et/ou de Muirhead

Dans cette solution, nous allons montrer que si les racines de $P(x)$ sont réelles strictement positives alors $a = b$. La réciproque étant démontrée par la dernière partie de la solution précédente dans laquelle la résolution utilisée est simple et indépendante de l'intitulé de la méthode de la solution 1.

Montrons que si les racines du polynôme $P(x)$ de l'équation (68) sont réelles strictement positives alors $a = b$.

Soient a et b des nombres réels avec $a \neq 0$. Supposons que les racines du polynôme $P(x)$ de l'équation (68) sont réelles strictement positives. Ainsi, d'après la relation (69), on obtient ces relations :

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \alpha\beta\gamma\mu \\ 4\frac{b}{a} = (\alpha+\beta)\mu\gamma + (\gamma+\mu)\alpha\beta \\ 5 + \frac{b}{a} = \alpha\beta + (\alpha+\beta)(\gamma+\mu) + \gamma\mu \\ 4 = \alpha+\beta+\gamma+\mu \end{cases}$$

Montrons que $a \leq b$.

Puisque les racines du polynôme P (α, β, γ et μ) sont strictement positives alors, leur moyenne harmonique est plus petite que leur moyenne géométrique. D'où :

$$\frac{4}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\mu}} \leq (\alpha\beta\gamma\mu)^{\frac{1}{4}} \tag{79}$$

Aussi, en divisant la deuxième équation de la relation (69) par la première équation, on obtient :

$$4=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\mu} \implies \frac{4}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\mu}}=1$$

La moyenne harmonique est égale à 1 et en utilisant la première équation de la relation (69), la moyenne géométrique est égale à $\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{4}}$. Ainsi :

$$1 \leq \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{4}} \implies a \leq b$$

Montrons que $a \geq b$.

Première approche - l'inégalité arithmétique géométrique (IAG)

Comme α, β, γ et μ sont strictement positives alors, leur moyenne géométrique est plus petite que leur moyenne arithmétique. D'où :

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma+\mu}{4} \geq (\alpha\beta\gamma\mu)^{\frac{1}{4}} \tag{80}$$

Aussi, d'après la dernière équation de la relation (69), la moyenne arithmétique est égale à 1. Or, la moyenne géométrique est égale à $\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{4}}$. Ainsi :

$$1 \geq \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{4}} \implies a \geq b$$

Deuxième approche - Inégalités de Muirhead

Notons :

$$c=(2,0,0,0) \quad , \quad d=(1,1,0,0)$$

Et avec, Ω l'ensemble des permutations de $\{1,2,3,4\}$ et x_1, x_2, x_3 et x_4 des nombres réels positifs,

$$\lfloor c \rfloor = \frac{1}{4!}\sum_{\sigma\in\Omega} x_{\sigma_1}^2 x_{\sigma_2}^0 x_{\sigma_3}^0 x_{\sigma_4}^0 \quad , \quad \lfloor d \rfloor = \frac{1}{4!}\sum_{\sigma\in\Omega} x_{\sigma_1}^1 x_{\sigma_2}^1 x_{\sigma_3}^0 x_{\sigma_4}^0$$

Donc :

$$\lfloor c \rfloor = \frac{3!}{4!}\sum_{\sigma\in\Omega} x_{\sigma_1}^2 = \frac{1}{4}\sum_{\sigma\in\Omega} x_{\sigma_1}^2 \quad , \quad \lfloor d \rfloor = \frac{2! * 2!}{4!}\sum_{\sigma\in\Omega} x_{\sigma_1}^1 x_{\sigma_2}^1 = \frac{1}{6}\sum_{\sigma\in\Omega} x_{\sigma_1} x_{\sigma_2}$$

On a :

$$c \geq d$$

Car, si nous écrivons $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ et $d = (d_1, d_2, d_3, d_4)$, alors :

$$\forall k \in \{1,2,3,4\}, c_1 + ... + c_k \geq d_1 + ... + d_k \quad \text{et} \quad c_1 + ... + c_4 = d_1 + ... + d_4$$

D'après l'inégalité de Muirhead (voir la remarque (4)), on obtient :

$$\lfloor c \rfloor \geq \lfloor d \rfloor$$

Ce qui implique en posant :

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \beta, \quad x_3 = \gamma \quad \text{et} \quad x_4 = \mu \quad \text{où, } \alpha, \beta, \gamma, \mu \quad \text{sont les racines de } P$$

$$\frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \mu^2) \geq \frac{1}{6}(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\mu + \beta\mu + \gamma\mu)$$

Or

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \mu^2 = (\alpha + \beta + \gamma + \mu)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\mu + \beta\mu + \gamma\mu)$$

Et d'après les deux dernières équations de la relation (69) :

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\mu + \beta\mu + \gamma\mu = 5 + \frac{b}{a}$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \mu = 4$$

Ainsi :

$$\frac{1}{4}(16 - 2(5 + \frac{b}{a})) \geq \frac{1}{6}(5 + \frac{b}{a}) \implies 3(6 - 2\frac{b}{a}) \geq 2(5 + \frac{b}{a})$$

$$18-6\frac{b}{a}\geq 10+2\frac{b}{a} \implies -8\frac{b}{a}\geq -8 \implies \frac{b}{a}\leq 1$$

D'où :

$$a\geq b$$

Pour conclure, si les racines du polynôme $P(x)$ de l'équation (68) sont réelles strictement positives alors $a=b$.

Cette dernière implication ainsi que la démonstration de la réciproque effectuée à la fin de la solution 2 de ce problème, nous permet de dire que les racines du polynôme $P(x)$ de l'équation (68) sont réelles strictement positives si et seulement si $a=b$.

Remarque 4: Inégalité de Muirhead et des moyennes arithmétique géométrique

Soit $c=(c_1,...,c_n)$ une suite de nombres réels. Pour toute suite $x_1,...,x_n$ de nombres réels positifs, on définit la c-moyenne, notée $\lfloor c \rfloor$, de $x_1,...,x_n$ par :

$$\lfloor c \rfloor = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma} x_{\sigma_1}^{c_1}...x_{\sigma_n}^{c_n}$$

où la somme est étendue à toutes les permutations σ de $\{1,...,n\}$.

En notant $d=(d_1,...,d_n)$, une autre suite de nombres réels, alors :

Si les suites c et d sont décroissantes, on a $\lfloor c \rfloor \leq \lfloor d \rfloor$ pour toute suite $x_1,...,x_n$ si et seulement si $\forall k\in\{1,...,n\}, c_1+...+c_k\leq d_1+...+d_k$ et $c_1+...+c_n=d_1+...+d_n$

L'IAG (inégalité de la moyenne arithmétique géométrique) peut être déduite de l'inégalité de Muirhead. En effet, l'on peut prendre

$$c=\left(\frac{1}{n},...,\frac{1}{n}\right) \qquad d=(1,0,0,...,0)$$

Pour plus de détails sur l'inégalité de Muirhead, se reférer à la page wikipédia suivante ([2]).

Remarque 5: Relation entre les coefficients et les racines d'un polynôme dite "de Viète"

Les formules de Viète permettent d'écrire une relation entre les racines d'un polynôme et ses coefficients. Un énoncé est le suivant :

Soit P, un polynôme de dégré n s'écrivant sous la forme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

avec les coefficients a_k pouvant être des nombres réels ou des nombres complexes et $a_n \neq 0$. Le polynôme P a n racines complexes non nécéssairement distinctes $r_1, r_2, ..., r_n$ d'après le théorème fondamental de l'algèbre. Les formules de Viète s'écrivent :

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + ... + r_{n-1} + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ (r_1 r_2 + r_1 r_3 + ... + r_1 r_n) + ... + (r_2 r_3 + ... + r_2 r_n) + ... + r_{n-1} r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ . \\ . \\ . \\ r_1 r_2 ... r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{cases} \tag{81}$$

Ou de manière synthétique :

$$\forall k \in \{1, 2, ..., n\}, \qquad \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} \left(\prod_{j=1}^{k} r_{i_j} \right) = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n} \tag{82}$$

Les indices i_k sont ordonnés dans un ordre croissant pour s'assurer que chaque produit de k racines est utilisé exactement une fois.

Pour plus de détails sur les relations entre les racines de polynôme et les coefficients de celui-ci, se reférer à la page wikipédia suivante ([3]).

Pour plus de détails sur le théorème fondamental de l'algèbre, se reférer à la page wikipédia suivante ([4]).

2.2.3 Problème 6 : (taux de réussite : 3/178)

Références

[1] Juin 2023. URL : https://en.wikipedia.org/wiki/Chebyshev_polynomials.

[2] Juill. 2023. URL : https://fr.wikipedia.org/wiki/In%C3%A9galit%C3%A9_de_Muirhead.

[3] Juill. 2023. URL : https://en.wikipedia.org/wiki/Vieta%27s_formulas.

[4] Juill. 2023. URL : https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_theorem_of_algebra.