

# Olympiades Panafricaines Mathématiques 2023

## Quelques solutions

KouakouSchool

7 juillet 2023

### Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>1</b>
<b>1 Enoncés</b>	<b>2</b>
1.1 Jour 1 . . . . .	2
1.1.1 Problème 1 . . . . .	2
1.1.2 Problème 2 . . . . .	2
1.1.3 Problème 3 . . . . .	2
1.2 Jour 2 . . . . .	3
1.2.1 Problème 4 . . . . .	3
1.2.2 Problème 5 . . . . .	3
1.2.3 Problème 6 . . . . .	3
<b>2 Solutions</b>	<b>4</b>
2.1 Jour 1 . . . . .	4
2.1.1 Problème 1 : (taux de réussite : 22/178) . . . . .	4
2.1.1.1 Solution 1 - Utilisation d'un repère orthonormal . .	4
2.1.2 Problème 2 : (taux de réussite : 20/178) . . . . .	7
2.1.2.1 Solution 1 - Utilisation d'une identité remarquable	7
2.1.3 Problème 3 : (taux de réussite : 13/178) . . . . .	10
2.1.3.1 Solution 1 - Changement de variable $x_n = \cosh(a_n)$	10
2.1.3.2 Solution 2 - Montrer que : $\forall n \geq 2, x_{n+1} = 2cx_n - x_{n-1}$	14
2.2 Jour 2 . . . . .	17
2.2.1 Problème 4 : (taux de réussite : 4/178) . . . . .	17

2.2.1.1	Solution 1 - Utilisation de la fonction partie entière.	17
2.2.2	Problème 5 : (taux de réussite : 17/178)	24
2.2.2.1	Solution 1 - Utilisation de tableau de variation	24
2.2.3	Problème 6 : (taux de réussite : 3/178)	30
<b>Références</b>		<b>30</b>

## Résumé

Ce document présente des solutions aux différents problèmes rencontrés lors des Olympiades Panafricaines de Mathématiques (OPAM) 2023.

# 1 Enoncés

## 1.1 Jour 1

### 1.1.1 Problème 1

Dans un triangle  $ABC$  tel que  $AB < AC$ ,  $D$  est un point du segment  $[AC]$  tel que  $BD = CD$ . Une droite parallèle à  $(BD)$  coupe le segment  $[BC]$  en  $E$  et coupe la droite  $(AB)$  en  $F$ .  $G$  est le point d'intersection des droites  $(AE)$  et  $(BD)$  par  $G$ .

Montrer que  $\widehat{BCG} = \widehat{BCF}$ . (1)

### 1.1.2 Problème 2

Trouver tous les nombres entiers naturels non nuls  $m$  et  $n$  qui n'ont pas de diviseur commun plus grand que 1 tels que :

$$m^3 + n^3 \text{ divise } m^2 + 20mn + n^2. \quad (2)$$

### 1.1.3 Problème 3

On considère la suite de nombres réels définie par :

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_{n+1} = cx_n + \sqrt{c^2 - 1}\sqrt{x_n^2 - 1} \end{cases} \text{ pour tout } n \geq 1. \quad (3)$$

Montrer que si  $c$  est un nombre entier naturel non nul, alors  $x_n$  est un entier pour tout  $n \geq 1$ .

## 1.2 Jour 2

### 1.2.1 Problème 4

Manzi possède  $n$  timbres et un album avec 10 pages. Il distribue les  $n$  timbres dans l'album de sorte que chaque page contienne un nombre distinct de timbres. Il trouve que, peu importe comment il fait cela, il y a toujours un ensemble de 4 pages tels que le nombre total de timbres dans ces 4 pages soit au moins  $\frac{n}{2}$ .

Déterminer la valeur maximale possible de  $n$ . (4)

### 1.2.2 Problème 5

Soient  $a$  et  $b$  des nombres réels avec  $a \neq 0$ . Soit :

$$P(x) = ax^4 - 4ax^3 + (5a + b)x^2 - 4bx + b \quad (5)$$

Montrer que toutes les racines de  $P(x)$  sont réelles et strictement positives si et seulement si  $a = b$ .

### 1.2.3 Problème 6

Soit  $ABC$  un triangle dont tous les angles sont aigus avec  $AB < AC$ . Soient  $D, E$  et  $F$  les pieds des perpendiculaires issues de  $A, B$  et  $C$  aux côtés opposés, respectivement. Soit  $P$  le pied de la perpendiculaire issue de  $F$  sur la droite  $(DE)$ . La droite  $(FP)$  et le cercle circonscrit au triangle  $BDF$  se rencontrent encore en  $Q$ .

Montrer que  $\widehat{PBQ} = \widehat{PAD}$ . (6)

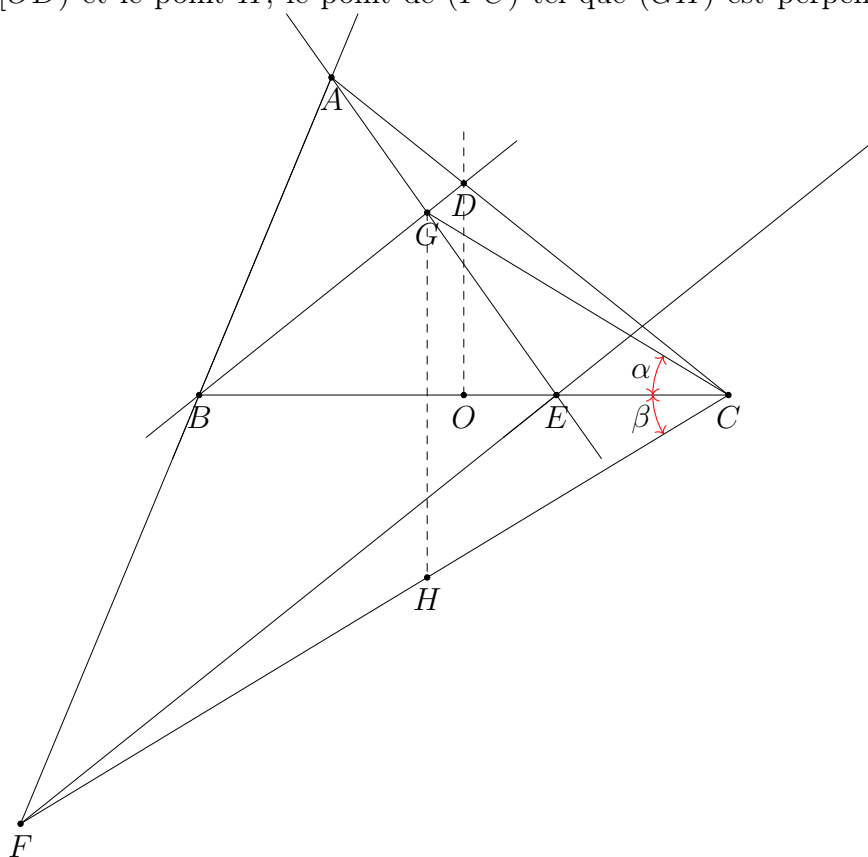
## 2 Solutions

### 2.1 Jour 1

#### 2.1.1 Problème 1 : (taux de réussite : 22/178)

##### 2.1.1.1 Solution 1 - Utilisation d'un repère orthonormal

Ci-dessous se trouve la construction géométrique de la figure résultant du problème posé. Nous avons rajouté le milieu du segment  $[BC]$  qu'on appellera  $O$ , le point  $D'$  tel que la distance  $OC$  égale à la distance  $OD'$  et  $D'$  appartient à  $[OD)$  et le point  $H$ , le point de  $(FC)$  tel que  $(GH)$  est perpendiculaire à  $(BC)$ .



Montrons que  $\widehat{BCG} = \widehat{BCF}$  c'est-à-dire que  $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ . (7)

Pour cela, nous allons considérer le repère orthonormal formé par les points  $O$ ,  $C$  et  $D'$ . Il s'agit bien d'un repère orthonormal car la droite  $(OD)$  est perpendiculaire à la droite  $(OC)$  puisque  $(OD)$  est la médiatrice du segment  $[BC]$  ( $O$  est milieu de  $[BC]$  et  $BD = CD$ ) et la distance  $OD'$  est égale à la distance  $OC$ .

Les coordonnées des différents points  $A, B, C, D, E$  et  $O$  sont les suivants.

$$O = (0, 0) \quad (8)$$

$$C = (1, 0) \quad (9)$$

$$D = (0, d), \quad \text{où } d \text{ est une variable.} \quad (10)$$

$$B = (-1, 0) \quad (11)$$

$$A = (-\alpha, \beta), \quad \text{où } 0 < \alpha < 1 \text{ et } \beta > 1 \text{ sont des variables.} \quad (12)$$

$$E = (\gamma, 0), \quad \text{où } -1 < \gamma < 1 \text{ où } \gamma \text{ est une variable.} \quad (13)$$

La variable  $\gamma$  est indépendante des autres variables d'après l'énoncé car le point  $E$  est un point quelconque du segment  $[BC]$ . La relation entre  $\beta$ ,  $\alpha$  et  $d$  peut être déterminée d'après la position de  $D$  par rapport aux points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

**Déterminons la relation entre  $\beta$ ,  $\alpha$  et  $d$  :**

La droite  $(CD)$  a pour équation du type :  $ax + by + c = 0$ . En remplaçant les coordonnées de  $C$  et  $D$  dans cette équation, l'on obtient :

$$(DC) : \quad x + \frac{1}{d}y - 1 = 0 \quad (14)$$

Le point  $A$  appartient à la droite  $(DC)$ , donc :  $-\alpha + \frac{1}{d}\beta - 1 = 0$ . Cela implique que :

$$\beta = d(1 + \alpha) \quad (15)$$

**Déterminons les valeurs des coordonnées de  $F$  et  $G$**

Concernant le point  $F$ ,  $F(e, f)$  appartient à la droite  $(AB)$  et  $(FE)$  est perpendiculaire à la normale  $\vec{u}$  à la droite  $(BD)$ .

$$(BD) : \quad x - \frac{1}{d}y + 1 = 0 \quad (16)$$

$$\vec{u}\left(1, -\frac{1}{d}\right) \quad (17)$$

$$(AB) : \quad x - \frac{1-\alpha}{d(1+\alpha)}y + 1 = 0 \quad (18)$$

donc :

$$\overrightarrow{FE} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{et} \quad F \in (AB)$$

$$\begin{cases} e - \frac{1-\alpha}{d(1+\alpha)}f + 1 = 0 \\ (\gamma - e) \cdot 1 + \frac{1}{d} \cdot f = 0 \end{cases}$$

ainsi :

$$\begin{cases} e = \frac{\alpha\gamma - \gamma - \alpha - 1}{2\alpha} \\ f = -\frac{d(\gamma+1)(\alpha+1)}{2\alpha} \end{cases}$$

$$F\left(\frac{\alpha\gamma - \gamma - \alpha - 1}{2\alpha}, -\frac{d(\gamma+1)(\alpha+1)}{2\alpha}\right) \quad (19)$$

Concernant le point  $G$ , on a :

$$G(g, h) \in (BD) \cap (AE)$$

$$(AE) : \quad x + \frac{\alpha + \gamma}{d(1 + \alpha)}y - \gamma = 0 \quad (20)$$

L'équation de la droite  $(BD)$  est donnée par la relation (16). Donc :

$$\begin{cases} g - \frac{1}{d}h + 1 = 0 \\ g + \frac{\alpha + \gamma}{d(1 + \alpha)}h - \gamma = 0 \end{cases}$$

ainsi :

$$\begin{cases} g = \frac{\alpha(\gamma-1)}{1+2\alpha+\gamma} \\ h = \frac{d(1+\gamma)(1+\alpha)}{1+2\alpha+\gamma} \end{cases}$$

$$G\left(\frac{\alpha(\gamma-1)}{1+2\alpha+\gamma}, \frac{d(1+\gamma)(1+\alpha)}{1+2\alpha+\gamma}\right) \quad (21)$$

Pour le point  $H$ , on a  $H \in (FC)$  tel que  $(GH) \perp (BC)$ . L'abscisse de  $H$  est égal à  $g$  c'est-à-dire l'abscisse de  $G$  car  $(GH) \perp (BC)$  et  $(BC)$  est l'axe des abscisses, on note donc  $H(g, i)$ .

$$(FC) : \quad x + \frac{1-e}{f}y - 1 = 0 \quad (22)$$

Donc :

$$g + \frac{1-e}{f}i - 1 = 0$$

$1 - e \neq 0$ , sinon  $g = 1$ . Il s'agit d'un cas limite impossible car  $G \in [BC]$ . De ce fait, nous pouvons écrire que :

$$i = \frac{1-g}{1-e}f$$

D'où, d'après (19) et par la suite (21), on a :

$$i = -\frac{d(\gamma+1)(\alpha+1)}{1+2\alpha+\gamma} = -h$$

Donc  $G(g, h)$  et  $H(g, -h)$ , ainsi  $CG = CH$  et  $(HG) \perp (CB)$ . D'où :

$$\widehat{BCG} = \widehat{OCG} = \widehat{HCO} = \widehat{HCB} = \widehat{FCB}$$

Par conséquent, nous avons montré que :

$$\widehat{BCG} = \widehat{BCF} \quad \text{c'est-à-dire que} \quad \hat{\alpha} = \hat{\beta}$$

## 2.1.2 Problème 2 : (taux de réussite : 20/178)

### 2.1.2.1 Solution 1 - Utilisation d'une identité remarquable

Trouvons tous les nombres entiers naturels non nuls  $m$  et  $n$  qui n'ont pas de diviseur commun plus grand que 1 tels que :

$$m^3 + n^3 \quad \text{divise} \quad m^2 + 20mn + n^2. \quad (23)$$

On a l'identité suivante pour tous entiers naturels  $m$  et  $n$  :

$$m^3 + n^3 = (m+n)(m^2 - mn + n^2) \quad (24)$$

Nous allons noter le symbole  $|$  comme représentant la division, c'est-à-dire  $a|b$  veut dire  $a$  divise  $b$ . Ainsi,  $m^3 + n^3$  divise  $m^2 + 20mn + n^2$  implique que  $m+n$  divise  $m^2 + 20mn + n^2$  et  $m^2 - mn + n^2$  divise  $m^2 + 20mn + n^2$ . D'où l'équation :

$$\begin{cases} m+n|m^2 + 20mn + n^2 \\ m^2 - mn + n^2|m^2 + 20mn + n^2 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} m+n|(m+n)^2+18mn \\ m^2-mn+n^2|m^2+20mn+n^2 \end{cases}$$

Comme  $m^2 + 20mn + n^2 - (m^2 - mn + n^2) = 21mn$ , en utilisant la deuxième relation, on a :

$$m^2 - mn + n^2 | 21mn \quad (25)$$

En utilisant la première relation et sachant que  $m+n|(m+n)^2$ , nous obtenons  $m+n|((m+n)^2+18mn)-(m+n)^2$ . Cela implique :

$$m+n|18mn \quad (26)$$

Nous notons le symbole  $\wedge$  comme étant la notation du plus grand diviseur commun, c'est-à-dire  $a \wedge b$  est le plus grand diviseur commun de  $a$  et  $b$ . Tout diviseur de  $mn$  et  $m+n$  est diviseur de toute combinaison linéaire. Ainsi, le plus grand diviseur commun de deux entiers naturels divise toute combinaison linéaire de ces deux entiers naturels. En l'occurrence :

$$mn \wedge (m+n) | mn \wedge mn - m * (m+n) \implies mn \wedge (m+n) | mn \wedge -m * m$$

Or,  $mn \wedge -m * m = m(n \wedge -m)$  donc :

$$mn \wedge (m+n) | m(n \wedge -m)$$

Donc :

$$mn \wedge (m+n) | m(n \wedge m) \quad (27)$$

D'après l'énoncé,  $m$  et  $n$  n'ont pas de diviseur commun plus grand que 1. Cela est équivalent à  $m \wedge n = 1$ .

$$m \wedge n = 1 \quad (28)$$

Les équations (27) et (28) impliquent que :

$$mn \wedge (m+n) | m \quad (29)$$

On a :

$$mn \wedge (m+n) | m+n$$

Donc :

$$mn \wedge (m+n) | (m+n) \wedge m$$



$$(m+n) \wedge m | ((m+n) - m) \wedge m \implies (m+n) \wedge m | n \wedge m$$

Ainsi,

$$mn \wedge (m+n) = 1 \quad (30)$$

Les équations (26) et (30) impliquent que :

$$m+n | 18 \quad (31)$$

D'où  $m+n \in \{2, 3, 6, 9, 18\}$  car  $m$  et  $n$  étant des entiers naturels non nuls,  $m+n \geq 2$ . Afin de déterminer  $m$  et  $n$ , nous considérons le cas où  $m \geq n$  car  $m$  et  $n$  sont interchangeables. Ainsi, pour chaque valeur de  $m+n$ , nous déterminons les valeurs de  $m$  et  $n$  tels que  $m \wedge n = 1$ . Cela donne :

$$m+n=2 \implies (m,n) = (1,1)$$

$$m+n=3 \implies (m,n) = (2,1)$$

$$m+n=6 \implies (m,n) = (5,1)$$

$$m+n=9 \implies (m,n) \in \{(8,1), (7,2), (5,4)\}$$

$$m+n=18 \implies (m,n) \in \{(17,1), (13,5), (11,7)\}$$

Donc, avec  $m \geq n$ , on a :

$$(m,n) \in \{(1,1), (2,1), (5,1), (8,1), (7,2), (5,4), (17,1), (13,5), (11,7)\}$$

Pour chaque valeur de  $(m,n)$  nous vérifions si l'équation (25) est vraie. Ainsi, le tableau suivant permet de voir les résultats.

$m+n$	$m$	$n$	$m^2 - mn + n^2$	$21mn$	$m^2 - mn + n^2   21mn$
2	1	1	1	21	vrai
3	2	1	3	$21 * 2$	vrai
6	5	1	21	$21 * 5$	vrai
9	8	1	$57 = 3 * 19$	$21 * 8 * 1$	faux
9	7	2	$39 = 3 * 13$	$21 * 7 * 2$	faux
9	5	4	$21 = 7 * 3$	$21 * 5 * 4$	vrai
18	17	1	$273 = 3 * 7 * 13$	$21 * 17$	faux
18	13	5	$129 = 3 * 43$	$21 * 13 * 5$	faux
18	11	7	$93 = 3 * 31$	$21 * 11 * 7$	faux

Donc :

$$(m, n) \in \{(1, 1), (2, 1), (1, 2), (5, 1), (1, 5), (5, 4), (4, 5)\} \quad (32)$$

Réciproquement,  $(m, n) \in \{(1, 1), (2, 1), (1, 2), (5, 1), (1, 5)\}$  est tel que  $m^3 + n^3$  divise  $m^2 + 20mn + n^2$ . Cependant, si  $(m, n) \in \{(5, 4), (4, 5)\}$  alors  $m^3 + n^3$  ne divise pas  $m^2 + 20mn + n^2$ . Cela se voit d'après le tableau suivant :

$m$	$n$	$m^3 + n^3$	$m^2 + 20mn + n^2$	$m^3 + n^3 \mid m^2 + 20mn + n^2$
1	1	2	22	vrai
2	1	9	45	vrai
5	1	126	126	vrai
5	4	$189 = 9 * 3 * 7$	$441 = 9 * 7 * 7$	faux

Ainsi, nous pouvons conclure que les valeurs des entiers naturels non nuls  $m$  et  $n$  qui n'ont pas de diviseur commun plus grand que 1 tels que :  $m^3 + n^3$  divise  $m^2 + 20mn + n^2$  sont :

$$(1, 1), (2, 1), (1, 2), (5, 1), (1, 5) \quad (33)$$

### 2.1.3 Problème 3 : (taux de réussite : 13/178)

Pour la suite de nombres réels suivante :

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_{n+1} = cx_n + \sqrt{c^2 - 1} \sqrt{x_n^2 - 1} \end{cases} \text{ pour tout } n \geq 1. \quad (34)$$

Montrons que si  $c$  est un nombre entier naturel non nul, alors  $x_n$  est un entier pour tout  $n \geq 1$ .

#### 2.1.3.1 Solution 1 - Changement de variable $x_n = \cosh(a_n)$

Définissons la suite numérique  $a_n$  telle que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$x_n = \cosh(a_n)$$

Cette suite est bien définie car la fonction  $\cosh$  est bijective sur  $\mathbb{R}^+$ . En effet, la fonction cosinus hyperbolique est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$  (car sa dérivée est la fonction sinus hyperbolique qui est strictement positive sur  $\mathbb{R}^+$ ), elle est donc bijective sur  $\mathbb{R}^+$ .

Ainsi, l'équation (34) devient :

$$\begin{cases} x_n = \cosh(a_n) & \text{pour tout } n \geq 1 \\ \cosh(a_{n+1}) = \cosh(a_1)\cosh(a_n) + \sqrt{\cosh(a_1)^2 - 1}\sqrt{\cosh(a_n)^2 - 1} & \text{pour tout } n \geq 1. \end{cases} \quad (35)$$

Nous avons les identités remarquables suivantes pour les fonctions  $\cosh$  (cosinus hyperbolique) et  $\sinh$  (sinus hyperbolique) :

$$\begin{cases} \cosh(x)^2 + \sinh(x)^2 = 1 & \text{pour tout } x \text{ et } y \text{ nombres réels} \\ \cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) & \text{pour tout } x \text{ et } y \text{ nombres réels} \\ \cosh(x) > 0 \text{ et } \sinh(x) > 0 & \text{pour tout } x \text{ et } y \text{ nombres réels strictement positifs} \end{cases} \quad (36)$$

La seconde relation de l'équation (35) permet de dire :

$$\cosh(a_{n+1}) = \cosh(a_1)\cosh(a_n) + \sinh(a_1)\sinh(a_n)$$

Cela implique d'après (36) que :

$$\cosh(a_{n+1}) = \cosh(a_1 + a_n) \quad (37)$$

La fonction cosinus hyperbolique est bijective. Ainsi l'équation (37) implique que :

$$a_{n+1} = a_1 + a_n \quad (38)$$

Par récurrence sur  $n$ , nous montrons que  $a_n = n * a_1$  pour tout  $n \geq 1$ . En effet, pour  $n = 1$ , cela est vrai car  $a_1 = 1 * a_1$ . Supposons que pour un certain  $n \geq 1$ ,  $\forall k \leq n$ ,  $a_k = k * a_1$ . Alors, on a :

$$a_{n+1} = a_n + a_1 \implies a_{n+1} = n * a_1 + a_1$$

Donc :

$$a_{n+1} = (n+1)a_1$$

Ainsi, par récurrence :

$$a_n = n * a_1 \quad \text{pour tout } n \geq 1 \text{ entier naturel.} \quad (39)$$

Donc :

$$\begin{cases} \cosh(a_1) = c \\ x_n = \cosh(na_1) & \text{pour tout } n \geq 1 \text{ entier naturel.} \end{cases} \quad (40)$$

**Montrons que si  $\cosh(x)$  est un entier alors pour tout entier naturel  $n$ ,  $\cosh(nx)$  est un entier naturel.**

Pour tous nombres réels  $a$  et  $b$  et tout entier naturels  $n$ , on a :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n c_k^n a^k b^{n-k}$$

Car lorsqu'on choisit  $a$  dans  $k$  termes  $a + b$ , l'on choisira automatiquement  $b$ ,  $n - k$  fois pour former un terme de  $(a + b)^n$ . De plus, nous pouvons calculer la valeur de  $c_k^n$  comme étant le nombre de manière de choisir  $k$  éléments parmi  $n$  éléments sans tenir compte de l'ordre, c'est à dire :

$$c_k^n = \binom{n}{k}$$

Or

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \implies c_k^n = c_{n-k}^n$$

D'où :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_k^n (a^k b^{n-k} + a^{n-k} b^k) - \delta_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \frac{n}{2}} c_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^n a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \quad (41)$$

Où la notation  $\lfloor x \rfloor$  signifie, la partie entière de  $x$  et  $\delta_{a,b}$  est telle que :

$$\delta_{a,b} = \begin{cases} 1 & \text{si } a = b \\ 0 & \text{si } a \neq b \end{cases}$$

Ainsi, pour  $a = e^x$  et  $b = e^{-x}$ , on a :  $2^n \cosh(x)^n = (a + b)^n$ . Ce qui donne donc :

$$2^n \cosh(x)^n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_k^n (e^{(n-2k)x} + e^{-(n-2k)x}) - \delta_{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \frac{n}{2})} c_{\frac{n}{2}}^n$$

Donc :

$$2^n \cosh(x)^n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_k^n 2 \cosh((n-2k)x) - \delta_{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \frac{n}{2})} c_{\frac{n}{2}}^n$$

$$2c_0^n \cosh(nx) = 2^n \cosh(x)^n - \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 2c_k^n \cosh((n-2k)x) + \delta_{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \frac{n}{2})} c_{\frac{n}{2}}^n$$

Or  $c_0^n = \binom{n}{0} = 1$ , donc :

$$\cosh(nx) = 2^{n-1} \cosh(x)^n - \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_k^n \cosh((n-2k)x) + \delta_{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \frac{n}{2})} \frac{c_{\frac{n}{2}}^n}{2} \quad (42)$$

Soit  $x$  tel que  $\cosh(x)$  est un entier naturel. Par récurrence, montrons que pour tout entier naturel  $n$ ,  $\cosh(nx)$  est un entier naturel. Pour  $n = 1$ , on a  $\cosh(nx) = \cosh(x)$  est un entier naturel.

Soit  $n$ , tel que pour tout  $k \leq n$ ,  $\cosh(kx)$  est un entier naturel. (43)

Donc :

$$\forall k \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor, \quad c_k^{n+1} \cosh((n+1-2k)x) \text{ est un entier naturel} \quad (44)$$

Car  $\forall k$  tel que,  $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ ,  $0 \leq n+1-2k \leq n$ , l'hypothèse (43) est applicable pour  $l = n+1-2k$  et  $c_k^{n+1} = \binom{n+1}{k}$  est un entier.

Aussi,

$$\delta_{(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor, \frac{n+1}{2})} \frac{c_{\frac{n+1}{2}}^{n+1}}{2} = \begin{cases} \frac{c_{\frac{n+1}{2}}^{n+1}}{2} & \text{si } n+1 \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n+1 \text{ est impair} \end{cases}$$

Si  $n+1$  est pair,

$$c_{\frac{n+1}{2}}^{n+1} = \binom{n+1}{\frac{n+1}{2}} \implies c_{\frac{n+1}{2}}^{n+1} = \frac{(n+1)!}{(\frac{n+1}{2})! (\frac{n+1}{2})!} \implies c_{\frac{n+1}{2}}^{n+1} = 2 \frac{n!}{(\frac{n-1}{2})! (\frac{n+1}{2})!}$$

$$c_{\frac{n+1}{2}}^{n+1} = 2 \binom{n}{\frac{n+1}{2}} \implies c_{\frac{n+1}{2}}^{n+1} = 2 c_{\frac{n+1}{2}}^n \implies \frac{c_{\frac{n+1}{2}}^{n+1}}{2} = c_{\frac{n+1}{2}}^n$$

Donc :

$$\delta_{(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor, \frac{n+1}{2})} \frac{c_{\frac{n+1}{2}}^{n+1}}{2} = \begin{cases} c_{\frac{n+1}{2}}^n & \text{si } n+1 \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n+1 \text{ est impair} \end{cases} \quad (45)$$

D'après (42),

$$\cosh((n+1)x) = 2^n \cosh(x)^{n+1} - \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} c_k^{n+1} \cosh((n+1-2k)x) + \delta_{(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor, \frac{n+1}{2})} \frac{c_{\frac{n+1}{2}}^{n+1}}{2}$$

et

$$\cosh((n+1)x) > 0 \quad \text{pour tout } x \text{ nombres réel strictement positifs}$$

En utilisant les remarques (44), (45) et le fait que  $\cosh(x)$  est un entier naturel alors  $\cosh((n+1)x)$  est un entier.

Ainsi, si  $x$  est un nombre réel tel que  $\cosh(x)$  est un entier naturel alors pour tout entier naturel  $n$ ,  $\cosh(nx)$  est un entier naturel.

Pour conclure, en utilisant l'expression de  $x_n$  en fonction de  $a_1$ , (40) et l'implication précédente, nous pouvons déduire que :

Si  $c$  est un nombre entier naturel non nul, alors  $x_n$  est un entier pour tout  $n \geq 1$ .

### 2.1.3.2 Solution 2 - Montrer que : $\forall n \geq 2, x_{n+1} = 2cx_n - x_{n-1}$

**Montrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n \geq 2$ ,  $x_{n+1} = 2cx_n - x_{n-1}$**

Pour  $n = 1, 2$  et  $3$ , on a :

$$\begin{aligned} x_1 &= c \\ x_2 &= c^2 + \sqrt{c^2 - 1}\sqrt{c^2 - 1} \implies x_2 = 2c^2 - 1 \\ x_3 &= c(2c^2 - 1) + \sqrt{c^2 - 1}\sqrt{(2c^2 - 1)^2 - 1} \implies x_3 = 2c^3 - c + \sqrt{c^2 - 1}\sqrt{4c^2(c^2 - 1)} \\ x_3 &= 2c^3 - c + (c^2 - 1)(2c) \implies x_3 = 4c^3 - 3c \implies x_3 = 2c(2c^2 - 1) - c \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = 2c^2 - 1 \\ x_3 = 2c(2c^2 - 1) - c \end{cases} \quad (46)$$

D'où :

$$x_3 = 2cx_2 - x_1 \quad (47)$$

Donc pour  $n = 2$ , on a :  $x_{n+1} = 2cx_n - x_{n-1}$ .

Supposons que pour un certain  $n \geq 2$ , on a :  $\forall k, 2 \leq k \leq n, x_{k+1} = 2cx_k - x_{k-1}$ . Alors, on a d'après la définition de la suite  $x_n$ ,

$$x_{n+2} = cx_{n+1} + \sqrt{c^2 - 1} \sqrt{x_{n+1}^2 - 1} \quad (48)$$

D'après l'hypothèse, on a :

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 &= (2cx_n - x_{n-1})^2 \implies x_{n+1}^2 = 4c^2x_n^2 - 4cx_nx_{n-1} + x_{n-1}^2 \\ x_{n+1}^2 - 1 &= (4c^2x_n^2 - 4cx_nx_{n-1}) + (x_{n-1}^2 - 1) \\ (c^2 - 1)(x_{n+1}^2 - 1) &= (c^2 - 1)(4c^2x_n^2 - 4cx_nx_{n-1}) + (c^2 - 1)(x_{n-1}^2 - 1) \end{aligned}$$

Or, d'après la définition de la suite  $x_n$  selon l'équation (34) :

$$(c^2 - 1)(x_{n-1}^2 - 1) = (x_n - cx_{n-1})^2$$

Donc :

$$\begin{aligned} (c^2 - 1)(x_{n+1}^2 - 1) &= (c^2 - 1)(4c^2x_n^2 - 4cx_nx_{n-1}) + (x_n^2 - 2cx_nx_{n-1} + c^2x_{n-1}^2) \\ (c^2 - 1)(x_{n+1}^2 - 1) &= (4c^4 - 4c^2 + 1)x_n^2 - 2c(2c^2 - 1)x_{n-1}x_n + c^2x_{n-1}^2 \end{aligned}$$

Aussi :

$$(cx_{n+1} - x_n)^2 = c^2x_{n+1}^2 - 2cx_{n+1}x_n + x_n^2$$

D'après l'hypothèse de la récurrence, pour  $k = n$  :

$$x_{n+1} = 2cx_n - x_{n-1} \quad \text{et} \quad x_{n+1}^2 = 4c^2x_n^2 - 4cx_nx_{n-1} + x_{n-1}^2$$

Donc :

$$\begin{aligned} (cx_{n+1} - x_n)^2 &= c^2(4c^2x_n^2 - 4cx_nx_{n-1} + x_{n-1}^2) - 2c(2cx_n - x_{n-1})x_n + x_n^2 \\ (cx_{n+1} - x_n)^2 &= (4c^4 - 4c^2 + 1)x_n^2 - 2c(2c^2 - 1)x_{n-1}x_n + c^2x_{n-1}^2 \end{aligned}$$

D'où :

$$(c^2 - 1)(x_{n+1}^2 - 1) = (cx_{n+1} - x_n)^2$$

L'équation (48) donne :

$$x_{n+2} = cx_{n+1} + (cx_{n+1} - x_n) \quad \text{car} \quad cx_{n+1} \geq c^2x_n \geq x_n \quad (\text{car} \quad c \geq 1)$$

$$x_{n+2} = 2cx_{n+1} - x_n$$

Ainsi, par récurrence, pour tout  $n \geq 2$  :

$$x_{n+1} = 2cx_n - x_{n-1} \quad (49)$$

**Montrons par récurrence sur  $n$  que si  $c$  est un entier naturel alors pour tout  $n \geq 1$ ,  $x_n$  est un entier naturel**

Supposons que  $c$  est un entier naturel non nul.

Pour  $n = 1$ ,  $x_1 = c$  est un entier naturel non nul. Pour  $n = 2$ , l'expression de  $x_2$  donnée par l'équation (46) est :  $x_2 = 2c^2 - 1$ . Donc  $x_2$  est un entier naturel non nul.

Supposons que pour un certain  $n \geq 2$ ,  $\forall k, 1 \leq k \leq n$ ,  $x_k$  est un entier naturel non nul.

L'équation (49) implique que  $x_{n+1} = 2cx_n - x_{n-1}$ . Or d'après l'hypothèse de récurrence  $x_n$  et  $x_{n-1}$  sont des entiers naturels non nuls. Donc,  $x_{n+1}$  est un entier relatif. Aussi,  $x_{n+1} \geq 1$  car les termes de l'expression de  $x_{n+1} = cx_n + \sqrt{c^2 - 1}\sqrt{x_n^2 - 1}$  selon (34) sont tels que  $cx_n \geq 1$  et  $\sqrt{c^2 - 1}\sqrt{x_n^2 - 1} \geq 0$  car  $c \geq 1$  et  $x_n \geq 1$ . D'où,  $x_{n+1}$  est un entier naturel non nul.

Ainsi par récurrence,  $\forall n \geq 1$ ,  $x_n$  est un entier naturel non nul.

Pour conclure, si  $c$  est un nombre entier naturel non nul, alors  $x_n$  est un entier naturel pour tout  $n \geq 1$ .

### Remarque 1: Polynôme de Chebyshev

Le problème posé est équivalent à une suite de polynômes de Chebyshev de premier type noté  $T_n$ , tel que :

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

Pour démontrer que nous sommes face à un polynôme de Chebyshev, nous pouvons calculer les premiers termes de la suite et vérifier qu'ils sont égaux à la suite de polynômes de Chebyshev.

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_2(x) = 2x^2 - 1 \\ T_3(x) = 4x^3 - 3x \\ T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x \\ T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 \end{array} \right. \quad (50)$$



La relation de la solution 2, découle de la propriété suivante de la suite du polynôme de Chebyshev.

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad \forall n \geq 1 \end{cases} \quad (51)$$

Pour plus de détails sur les propriétés du polynôme de Chebychev, se référer à la page wikipédia suivante ([1]).

## 2.2 Jour 2

### 2.2.1 Problème 4 : (taux de réussite : 4/178)

Déterminons la valeur maximale possible de  $n$ .

#### 2.2.1.1 Solution 1 - Utilisation de la fonction partie entière.

**Remarque 2: Numérotation des pages suivant le nombre de timbres.**

Pour une distribution donnée de timbres effectuée par Manzi, nous numérotions les pages en les rangeant par ordre croissant du nombre de timbres. Notons par  $a_k$ , le nombre de timbres dans la page  $k$ . Puisque la distribution de timbres dans les pages est telle que deux pages distinctes ont un nombre distinct de pages. La numérotation des pages est donc telle que pour tout  $k$  tel que :  $2 \leq k \leq 10$ , on a :

$$0 \leq a_{k-1} < a_k$$

Cela implique que :

$$a_k \geq a_{k-1} + 1 \geq 1 \quad (52)$$

**Montrons que la valeur minimale de  $n$  est 45**

Manzi dispose de  $n$  timbres et comme chaque page contient un nombre distinct de timbres, considérons une distribution de timbres effectuée par Manzi. Alors, nous considérons la numérotation telle que :

$$\forall k, \quad 2 \leq k \leq 10, \quad 0 \leq a_{k-1} < a_k$$

Montrons par récurrence sur  $n$  que pour tout  $n \in \{1, 2, \dots, 10\}$ ,  $a_n \geq a_1 + (n - 1)$

Pour  $n = 1$ , on a :  $a_n = a_1 + (n - 1)$ .

Supposons que pour un certain  $n$ , tel que :  $n \in \{1, 2, \dots, 9\}$ ,  $a_n \geq a_1 + (n - 1)$ . Alors, l'équation (52) permet de déduire que :

$$a_{n+1} \geq a_n + 1 \implies a_{n+1} \geq (a_1 + (n - 1)) + 1$$

D'où :

$$a_{n+1} \geq a_1 + n$$

Ainsi, nous avons montré par récurrence sur  $n$ , que :

$$\forall n \in \{1, 2, \dots, 10\}, \quad a_n \geq a_1 + (n - 1) \quad (53)$$

On a :

$$\begin{aligned} n = \sum_{k=1}^{10} a_k &\implies n \geq \sum_{k=1}^{10} (k - 1) + \sum_{k=1}^{10} a_1 \\ n &\geq \frac{9 \times 10}{2} + 10a_1 \implies n \geq 45 + 10a_1 \end{aligned} \quad (54)$$

Or,  $a_1 \geq 0$ , donc :

$$n \geq 45 \quad (55)$$

Aussi, pour  $n = 45$ , il existe bien toujours quatre pages pour toute distribution de timbres  $(a_1, \dots, a_{10})$  entre les dix pages telles que le nombre total de timbres est supérieur à  $\frac{n}{2}$ . En effet, les équations (53) et (54) permettent de dire que :

$$n = 45 \implies a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \{1, 2, \dots, 10\}, \quad a_n = a_1 + (n - 1) \quad (56)$$

Sinon, si nous supposons qu'il existe  $l \in \{1, 2, \dots, 10\}$ , tel que :  $a_l > a_1 + (l - 1)$ . Alors :

$$\begin{aligned} n = \sum_{k=1, k \neq l}^{10} a_k + a_l &\implies n > \sum_{k=1, k \neq l}^{10} (k - 1) + \sum_{k=1, k \neq l}^{10} a_1 + (l - 1) + a_1 \\ n &> \sum_{k=1}^{10} (k - 1) + \sum_{k=1}^{10} a_1 \implies n > 45 + 10a_1 > 45 \end{aligned}$$

Ce qui est absurde. De même si nous supposons que  $a_1 > 0$ , alors :

$$n = \sum_{k=1}^{10} a_k + (k-1) \implies n = 45 + 10a_1 > 45$$

Cela aussi est absurde.

Ainsi, pour  $n = 45$ , on a :  $\forall k \in \{1, 2, \dots, 10\}$ ,  $a_k = k - 1$ . Donc :

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 6 + 7 + 8 + 9 \implies a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 30 > \frac{45}{2}$$

Donc pour  $n = 45$ , il existe bien toujours quatre pages pour toute distribution de timbres  $(a_1, \dots, a_{10})$  entre les dix pages telle que le nombre total de timbres est supérieur à  $\frac{n}{2}$ .

**Montrons que si pour  $n$  entier naturel, l'assertion : pour tout arrangement  $(a_1, \dots, a_{10})$ , il existe toujours quatre éléments tels que le total est supérieur à  $\frac{n}{2}$  est vraie alors  $n$  admet une valeur maximale.**

Soit  $n$  fixé un entier naturel, tel que pour toute distribution de timbres parmi les dix pages  $(a_1, \dots, a_{10})$  (suivant l'encadré remarque (2)), il existe toujours quatre éléments tels que le total est supérieur à  $\frac{n}{2}$ . Prenons la distribution de timbres  $(a_1, \dots, a_{10})$  telle que :

$$\begin{cases} a_{i+1} = a_i + 1 & \text{pour tout } i \in \{1, \dots, 8\} \\ a_1 = \lfloor \frac{n-45}{10} \rfloor & \text{et } a_{10} = n - 9a_1 - 36 \end{cases} \quad (57)$$

$$a_{10} = a_1 + 9 + (n - 45 - 10a_1)$$

Or :

$$a_1 \leq \frac{n-45}{10} \implies n - 45 - 10a_1 \geq n - 45 - 10 \frac{n-45}{10} = 0$$

Donc :

$$a_{10} \geq a_1 + 9 = (a_1 + 8) + 1 = a_9 + 1$$

Ainsi, cette distribution est une distribution telle que deux pages distinctes ont un nombre distinct de timbres et on a :

$$a_{i+1} > a_i \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, 9\}$$

S'il existe quatre pages telles que le nombre total de timbres est supérieur à  $\frac{n}{2}$ , en notant les quatre indices des pages comme  $i, j, k$  et  $l$  avec  $i < j < k < l$  alors :

$$i < j < k < l \leq 10 \implies i \leq 7, \quad j \leq 8, \quad k \leq 9 \quad \text{et} \quad l \leq 10$$

Donc :

$$\begin{aligned} a_i &\leq a_7, \quad a_j \leq a_8, \quad a_k \leq a_9 \quad \text{et} \quad a_l \leq a_{10} \\ a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} &\geq a_i + a_j + a_k + a_l \geq \frac{n}{2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} \geq \frac{n}{2} \tag{58}$$

En utilisant l'équation (57) et la définition de  $a_1$ , on a :

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = (a_1 + 6) + (a_1 + 7) + (a_1 + 8) + (n - 9a_1 - 36) = n - 6a_1 - 15$$

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} \leq n - 6\left(\frac{n - 45}{10} - 1\right) - 15 \implies a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} \leq \frac{4n + 6 \cdot 55 - 150}{10}$$

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} \leq \frac{4n + 180}{10}$$

D'où, en utilisant l'équation (58), on obtient :

$$\frac{4n + 180}{10} \geq a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} \geq \frac{n}{2} \implies \frac{4n + 180}{10} \geq \frac{n}{2}$$

Donc :

$$\frac{n - 180}{10} \leq 0 \implies n \leq 180$$

**Montrons que pour  $n$  entier naturel, l'assertion : pour tout arrangement  $(a_1, \dots, a_{10})$ , il existe toujours quatre éléments tels que le total est supérieur à  $\frac{n}{2}$  est vraie alors la valeur maximale de  $n$  est 140.**

Pour tout  $n$  entier naturel, nous considérons la distribution de timbres  $(a_1, a_2, \dots, a_{10})$  selon la remarque (2). Pour démontrer le résultat ci-dessus, nous allons effectuer un raisonnement basé sur quelques valeurs possibles de  $a_6$ .

Soit  $n \geq 140$ ,

Si  $n = 140$ ,

Si  $a_6 < 15$ , alors :

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \leq a_6 + (a_6 - 1) + (a_6 - 2) + (a_6 - 3) + (a_6 - 4) + (a_6 - 5)$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \leq 6a_6 - (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \leq 6 * 14 - 15$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \leq 69$$

Donc :

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = n - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) \implies a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} \geq 140 - 69$$

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} \geq 71 > \frac{140}{2} = \frac{n}{2}$$

Si  $a_6 \geq 15$ , alors :

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} \geq (a_6 + 1) + (a_6 + 2) + (a_6 + 3) + (a_6 + 4) = 4a_6 + 10$$

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} \geq 70 = \frac{140}{2} = \frac{n}{2}$$

Donc, pour  $n = 140$ , pour toute distribution de timbres parmi les dix pages, il existe toujours quatre pages telles que le total de timbres est supérieur à  $\frac{n}{2}$ .

Si  $n > 140$ ,

Nous raisonnons avec les distributions de timbres sur les 10 pages suivant la numérotation de la remarque (2). Et nous considérons le cas où  $a_6 = \lfloor \frac{n}{10} \rfloor + 1$ . Cette distribution est possible en posant :

$$\begin{cases} a_k = k, & \text{pour tout } k \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ a_6 = \lfloor \frac{n}{10} \rfloor + 1 \\ a_k = a_6 + (k - 6), & \text{pour tout } k \in \{7, 8, 9\} \\ a_{10} = n - \sum_{k=1}^9 a_k = n - (1 + 2 + 3 + 4 + 5) - (4a_6 + (1 + 2 + 3)) \end{cases} \quad (59)$$

En effet :

$$a_{10} \geq n - 21 - 4 * (\frac{n}{10} + 1) \implies a_{10} \geq 6 * (\frac{n}{10}) - 25$$

$$a_{10} - (a_9 + 1) \geq 6 * (\frac{n}{10}) - 25 - (a_9 + 1) \geq 6 * (\frac{n}{10}) - 25 - (\lfloor \frac{n}{10} \rfloor + 4 + 1)$$

Or,

$$-\lfloor \frac{n}{10} \rfloor \geq -\frac{n}{10}$$

Et vu que  $n > 140$ ,

$$a_{10} - (a_9 + 1) \geq 5 * (\frac{n}{10} - 6) > 5 * (14 - 6) > 0 \implies a_{10} > a_9$$

On obtient une distribution de timbres  $\{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}$  sur les 10 pages suivant la numérotation de la remarque (2).

En écrivant :

$$n = 10.(14 + a) + b \quad \text{avec} \quad a > 0 \quad \text{et} \quad 0 < b \leq 9 \quad (60)$$

On obtient :

$$a_6 = 14 + a + 1 = 15 + a \quad \text{avec} \quad a > 0 \quad (61)$$

$$n = 10a_6 + b - 10 \quad \text{avec} \quad b > 0 \quad (62)$$

Si  $b \leq 5$ , on prend :

$$\begin{cases} a_6 = \lfloor \frac{n}{10} \rfloor + 1 \\ a_1 = a_6 + b - 10 \\ a_k = a_6 + (k - 6), \quad \text{pour tout} \quad k \in \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\} \end{cases} \quad (63)$$

On a :

$$a_1 + \dots + a_{10} = 6a_6 + (b - 10) - (1 + 2 + 3 + 4) + 4a_6 + (1 + 2 + 3 + 4)$$

$$a_1 + \dots + a_{10} = 10a_6 + b - 10 = n$$

Et :

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 4a_6 + 10 = 4(15 + a) + 10$$

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 4a + 70$$

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} - \frac{n}{2} = 4a + 70 - 5(14 + a) - \frac{b}{2}$$

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} - \frac{n}{2} = -a - \frac{b}{2} < 0 \quad \text{car} \quad a > 0 \quad \text{et} \quad b > 0$$

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} < \frac{n}{2}$$

Donc :

$$a_i + a_j + a_k + a_l < \frac{n}{2} \quad \forall i, j, k, l \in \{1, \dots, 10\} \quad (64)$$

Si  $b > 5$ , on pose :

$$\begin{cases} a_6 = \lfloor \frac{n}{10} \rfloor + 1 \\ a_k = a_6 + (k - 6), \quad \text{pour tout } k \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ a_k = a_6 + (k - 6) + \delta_{b-5 > 10-l}, \quad \text{pour tout } k \in \{7, 8, 9, 10\} \end{cases} \quad (65)$$

On a :

$$a_1 + \dots + a_{10} = 6a_6 - (1 + 2 + 3 + 4 + 5) + 4a_6 + (1 + 2 + 3 + 4) + (b - 5)$$

$$a_1 + \dots + a_{10} = 10a_6 + b - 10 = n$$

Et :

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 4a_6 + 10 + (b - 5) = 4(15 + a) + 10 + (b - 5)$$

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 4a + 65 + b$$

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} - \frac{n}{2} = 4a + 65 + b - 5(14 + a) - \frac{b}{2} = \frac{b}{2} - 5 - a$$

Donc :

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} - \frac{n}{2} \leq \frac{9}{2} - 5 - a = -\frac{1}{2} - a < 0 \quad \text{car } a > 0 \quad \text{et } b \leq 9$$

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} < \frac{n}{2}$$

$$a_i + a_j + a_k + a_l < \frac{n}{2} \quad \forall i, j, k, l \in \{1, \dots, 10\} \quad (66)$$

Ainsi, à l'aide des équations (64) et (66), on a :

$$\text{Pour } n > 140, \quad \forall i, j, k, l \in \{1, \dots, 10\} \quad a_i + a_j + a_k + a_l < \frac{n}{2} \quad (67)$$

L'équation (67) et le fait que pour  $n = 140$  et pour toute distribution de timbres parmi les dix pages, il existe toujours quatre pages telles que le total de timbres est supérieur à  $\frac{n}{2}$ , nous permet de déduire que si l'assertion : pour tout arrangement  $(a_1, \dots, a_{10})$ , il existe toujours quatre éléments tels que le total est supérieur à  $\frac{n}{2}$  est vraie alors la valeur maximale de  $n$  est 140.

### Remarque 3: Comment trouver la valeur maximale de $n$

Dans les conditions de ce problème, pour déterminer la valeur maximale de  $n$ , l'on peut se baser sur les deux premiers résultats démontrés ci-dessus, à savoir montrer que :

$$45 \leq n \leq 180$$

Puis, en descendant de proche en proche la borne supérieure de la valeur de  $n$  et essayant de trouver le cas échéant une distribution des timbres telle que tout ensemble de quatre pages a une somme totale de timbres inférieure strictement à  $\frac{n}{2}$ .

Enfin, si l'on connaît la valeur maximale de  $n$  d'avance, l'on pourrait se contenter de le démontrer.

## 2.2.2 Problème 5 : (taux de réussite : 17/178)

Pour  $a$  et  $b$  des nombres réels avec  $a \neq 0$ . Montrons que les racines du polynôme

$$P(x) = ax^4 - 4ax^3 + (5a + b)x^2 - 4bx + b \quad (68)$$

sont réelles et strictement positives si et seulement si  $a = b$ .

### 2.2.2.1 Solution 1 - Utilisation de tableau de variation

**Montrons que si  $a$  est négatif cela revient au même que de supposer que  $a$  est positif.**

En effet, si  $a$  est négatif, posons  $a' = -a$  et  $b' = -b$ , on a :  $a'$  est positif, alors d'après l'équation (68) :

$$P(x) = -a'x^4 + 4a'x^3 - (5a' + b')x^2 + 4b'x - b'$$

$$P(x) = -(a'x^4 - 4a'x^3 + (5a' + b')x^2 - 4b'x + b')$$

Les racines de  $P(x)$  sont les mêmes que les racines de  $-P(x)$ . Aussi, l'expression du polynôme  $P$  en fonction de  $a$  et  $b$  est la même que l'expression du polynôme  $-P$  en fonction de  $a'$  et  $b'$ . D'où, l'assertion

*les racines du polynôme  $P(x)$  sont réelles et strictement positives si et seulement si  $a = b \iff$  les racines du polynôme  $P(x)$  sont réelles et strictement positives si et seulement si  $a' = b'$*



Puisque  $a \neq 0$ , nous pouvons donc montrer l'équivalence :

Les racines du polynôme  $P(x)$  sont réelles et strictement positives si et seulement si  $a = b$  avec la condition  $a > 0$ .

**Montrons que les racines du polynôme  $P(x)$  sont réelles strictement positives alors  $a = b$ .**

Soient  $a$  et  $b$  des nombres réels avec  $a \neq 0$ . Supposons que les racines du polynôme  $P(x)$  de l'équation (68) sont réelles strictement positives.

*Montrons que  $a$  et  $b$  ont le même signe.*

D'après l'hypothèse, nous pouvons écrire le polynôme  $P(x)$  sous la forme :

$$P(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \mu), \quad \text{avec } \alpha, \beta, \gamma, \mu \in \mathbb{R}_+^*$$

Donc :

$$P(x) = a[x^4 - (\alpha + \beta + \gamma + \mu)x^3 + (\alpha\beta + (\alpha + \beta)(\gamma + \mu) + \gamma\mu)x^2 - ((\alpha + \beta)\mu\gamma + (\gamma + \mu)\alpha\beta)x + \alpha\beta\gamma\mu]$$

D'où, en utilisant l'équation (68), nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \alpha\beta\gamma\mu \\ 4\frac{b}{a} = (\alpha + \beta)\mu\gamma + (\gamma + \mu)\alpha\beta \\ 5 + \frac{b}{a} = \alpha\beta + (\alpha + \beta)(\gamma + \mu) + \gamma\mu \\ 4 = \alpha + \beta + \gamma + \mu \end{cases} \quad (69)$$

Puisque  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$  et  $\mu > 0$  alors :

$$\alpha\beta\gamma\mu > 0 \implies \text{d'après la première ligne de (69), on obtient : } \frac{b}{a} > 0$$

Ainsi,  $a$  et  $b$  ont le même signe.

La dérivée première et la dérivée seconde du polynôme  $P$  sont données par les relations :

$$P'(x) = 2[2ax^3 - 6ax^2 + (5a + b)x - 2b] \quad (70)$$

$$P''(x) = 12a \left[ (x - 1)^2 - \frac{a - b}{6a} \right] \quad (71)$$

Supposons que  $a \neq b$ , alors il y a deux possibilités :

$$a > b \quad \text{ou} \quad a < b$$

*Possibilité 1 - supposons que  $a > b$  avec  $a > 0$ .*

Comme  $a$  et  $b$  ont le même signe d'après la démonstration précédente, alors  $a > 0$ ,  $b > 0$  et  $a > b$ . Ainsi le polynôme  $P''$  admet des racines réelles qui sont :

$$r_1 = 1 - r \quad , \quad r_2 = 1 + r \quad \text{avec} \quad r = \sqrt{\frac{a-b}{6a}}$$

$$P''(r_1) = 0 \quad \text{et} \quad P''(r_2) = 0$$

$$P'(1+r) = 2[2a(1+r)^3 - 6a(1+r)^2 + (5a+b)(1+r) - 2b]$$

$$P'(1+r) = 2[2ar^3 + (b-a)r + (a-b)]$$

$$\text{Or, } r^2 = \frac{a-b}{6a} \implies P'(1+r) = 2(a-b)\frac{3-2r}{3}$$

De même, en remplaçant  $r$  par  $-r$ , on a :

$$P'(1-r) = 2(a-b)\frac{3+2r}{3}$$

Donc :

$$P'(r_1) = 2(a-b)\frac{3+2r}{3} \quad \text{et} \quad P'(r_2) = 2(a-b)\frac{3-2r}{3}$$

De plus,

$$0 < r^2 = \frac{a-b}{6a} < \frac{a}{6a} = \frac{1}{6} \implies 4r^2 < \frac{4}{6} = \frac{2}{3} < 1 \implies 2r < 1$$

Donc :

$$a-b > 0 \quad \text{et} \quad r > 0 \implies 2(a-b)\frac{3+2r}{3} > 0 \implies P'(r_1) > 0$$

$$\frac{3-2r}{3} > 0 \implies 2(a-b)\frac{3-2r}{3} > 0 \implies P'(r_2) > 0$$

Aussi,

$$P'(0) = -4b \quad \text{et} \quad P'(1) = 2(a-b) \tag{72}$$

$$P(0) = b \quad \text{et} \quad P(1) = 2(a-b) \tag{73}$$

Nous obtenons ainsi le tableau de variation de la fonction polynômiale  $P(x)$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$r'$	$r_1$	$1$	$r_2$	$+\infty$
$P''(x)$		$+$		$0$	$-$	$-$	$+$
$P'(x)$	$-\infty$	$-4b$	$0$	$2(a-b)^{\frac{3+2r}{3}}$	$2(a-b)$	$2(a-b)^{\frac{3-2r}{3}}$	$+\infty$
$P'(x)$	$-$		$0$			$+$	
$P(x)$	$+\infty$	$b$	$P(r')$		$2(a-b)$		$+\infty$

D'après le tableau de variation de la fonction polynômiale  $P(x)$ , il existe  $r' \in ]0, 1[$ , tel que  $P'(r') = 0$ . Aussi, selon le signe de  $P(r')$ , le polynôme  $P$  admet soit deux racines réelles distinctes, une racine réelle ou aucune racine réelle. En effet,

Si  $P(r') > 0 \implies P(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$  alors  $P$  n'admet aucune racine réelle  
(74)

Si  $P(r') = 0 \implies$  le polynôme  $P$  admet une seule racine réelle  $r' \in ]0, 1[$   
(75)

Si  $P(r') < 0 \implies$  le polynôme  $P$  admet deux racines réelles  $r_{(1)}$  et  $r_{(2)} \in ]0, 1[$   
(76)

Rappelons l'hypothèse de départ, qui stipule que  $P$  admet des racines réelles strictement positives.

La dernière implication de la relation (74) est absurde par rapport à l'hypothèse de départ.

D'après l'hypothèse, les racines de  $P$  sont réelles et strictement positives. D'après la relation (75),  $P$  admet une seule racine réelle  $r' \in ]0, 1[$ . Ainsi, il s'agit d'une racine de multiplicité 4. La dernière équation des relations (69) implique donc que :  $4r' = 4 \implies r' = 1$ . Ce qui est absurde car  $0 < r' < 1$ .

Enfin, selon la relation (76),  $P$  admet deux racines réelles  $r_{(1)} \in ]0, 1[$  et  $r_{(2)} \in ]0, 1[$ . Ainsi, il s'agit de racines de multiplicités combinées  $m_{(1)}$  et  $m_{(2)}$  égale à 4, c'est-à-dire  $m_{(1)} + m_{(2)} = 4$ . La dernière équation des relations (69) implique donc que :  $m_{(1)}r_{(1)} + m_{(2)}r_{(2)} = 4$ . Or :

$$0 < r_{(1)} < 1 \quad \text{et} \quad 0 < r_{(2)} < 1 \implies 0 < m_{(1)}r_{(1)} + m_{(2)}r_{(2)} < m_{(1)} + m_{(2)} = 4$$

Ce qui contredit  $m_{(1)}r_{(1)} + m_{(2)}r_{(2)} = 4$ . C'est donc absurde.

Ainsi, nous avons montré par absurde que  $a$  n'est pas strictement supérieur à  $b$  si les racines de  $P$  sont réelles strictement positives.

*Possibilité 2 - supposons que  $a < b$  avec  $a > 0$*

Comme  $a$  et  $b$  ont le même signe, alors  $a > 0$ ,  $b > 0$  et  $a < b$ . Cela implique que  $-\frac{a-b}{6a} > 0$ . Ainsi le polynôme  $P''$  est strictement positif. Nous avons ainsi le tableau de variation suivant pour la fonction polynômiale  $P(x)$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$r''$	$+\infty$
$P''(x)$	+				
$P'(x)$	$-\infty$	$-4b$	$2(a-b)$	$0$	$+\infty$
$P'(x)$	$-$ <div style="display: inline-block; width: 100px; border-left: 1px dotted black; height: 10px; margin: 0 auto;"></div> $0$ $+$				
$P(x)$	$+\infty$	$b$	$2(a-b)$	$P(r'')$	$+\infty$

Le tableau de variation ci-dessus est celui de la fonction polynômiale  $P(x)$  lorsque  $a < b$ . Puisque  $b > 0$ ,  $2(a - b) < 0$  alors à l'aide du tableau de variation de  $P(x)$ , nous pouvons dire que la fonction polynômiale  $P(x)$  a exactement deux racines réelles  $r_{(1')}$  et  $r_{(2')}$  avec  $0 < r_{(1')} < 1$  et  $1 < r_{(2')}$ . D'après l'hypothèse, ce sont donc des racines de multiplicités combinées  $m_{(1')}$  et  $m_{(2')}$  égale à 4, c'est-à-dire  $m_{(1')} + m_{(2')} = 4$ . La dernière équation des relations (69) implique donc que :  $m_{(1')}r_{(1')} + m_{(2')}r_{(2')} = 4$ . D'où :

$$\begin{cases} 0 < r_{(1')} < 1 \\ 1 < r_{(2')} \\ m_{(1')} + m_{(2')} = 4 \\ m_{(1')}r_{(1')} + m_{(2')}r_{(2')} = 4 \\ r_{(1')}^{m_{(1')}} r_{(2')}^{m_{(2')}} = \frac{b}{a} \end{cases} \quad (77)$$

Ainsi, nous avons :

$$r_{(2')} = \frac{4 - m_{(1')}r_{(1')}}{4 - m_{(1')}} \implies \text{d'après (77)} \quad r_{(1')}^{m_{(1')}} \left( \frac{4 - m_{(1')}r_{(1')}}{4 - m_{(1')}} \right)^{4 - m_{(1')}} = \frac{b}{a}$$

Donc :

$$r_{(1')}^{m_{(1')}} (4 - m_{(1')}r_{(1')})^{4 - m_{(1')}} - \frac{b}{a} (4 - m_{(1')})^{4 - m_{(1')}} = 0 \quad (78)$$

Posons :

$$\begin{aligned} f(r) &= r^{m_{(1')}} (4 - m_{(1')}r)^{4 - m_{(1')}} - \frac{b}{a} (4 - m_{(1')})^{4 - m_{(1')}} \\ f'(r) &= 4m_{(1')} (1 - r) r^{m_{(1')} - 1} (4 - m_{(1')}r)^{3 - m_{(1')}} \end{aligned}$$

Puisque  $1 \leq m_{(1')} \leq 3$ , on a :

$$\forall r, \quad 0 < r < 1, \quad f'(r) > 0$$

Ainsi, la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $[0, 1]$ , or :

$$\begin{cases} f(0) = -\left(\frac{b}{a}\right) (4 - m_{(1')})^{4 - m_{(1')}} < 0, \\ f(1) = \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)\right) (4 - m_{(1')})^{4 - m_{(1')}} < 0 \quad \text{car} \quad \frac{b}{a} > 1 \end{cases}$$

Donc  $f$  est strictement négative sur  $[0, 1]$ , donc :

$$\forall r \in [0, 1], \quad f(r) < 0 \iff \forall r \in [0, 1], \quad r^{m_{(1')}} (4 - m_{(1')}r)^{4 - m_{(1')}} < \frac{b}{a} (4 - m_{(1')})^{4 - m_{(1')}}$$

Ce qui contredit (78), absurde.

Ainsi, nous avons montré par absurde que l'assertion  $a < b$  n'est pas vraie.

Par conséquent, si  $a$  et  $b$  sont des nombres réels avec  $a \neq 0$ , tels que les racines du polynôme  $P(x)$  de l'équation (68) sont réelles strictement positives alors  $a = b$ .

**Montrons que si  $a = b$  alors les racines du polynôme  $P(x)$  de l'équation (68) sont réelles strictement positives.**

Supposons que  $a = b$ , alors :

$$P(x) = a(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) \implies P(x) = a(x - 1)^4$$

Ainsi, 1 est la seule racine du polynôme  $P$  de multiplicité 4. D'où les racines du polynôme  $P$  sont réelles strictement positives.

Pour conclure :

Les racines du polynôme  $P$  définit dans l'équation (68) sont réelles et strictement positives si et seulement si  $a = b$ .

### 2.2.3 Problème 6 : (taux de réussite : 3/178)

## Références

- [1] Juin 2023. URL : [https://en.wikipedia.org/wiki/Chebyshev\\_polynomials](https://en.wikipedia.org/wiki/Chebyshev_polynomials).