Olympiades Panafricaines Mathématiques 2023
Quelques solutions

KouakouSchool

12 juin 2023

Table des matières

Résumé

Ce document présente des solutions aux différents problèmes rencontrés lors des Olympiades Panafricaines de Mathématiques (OPAM) 2023.

1 Enoncés

1.1 Jour 1

Problème 1 : (taux de réussite : 22/178)

Dans un triangle ABC tel que $AB < AC, D$ est un point du segment $[AC]$ tel que $BD = CD$. Une droite parallèle à (BD) coupe le segment $[BC]$ en E et coupe la droite (AB) en F. G est le point d'intersection des droites (AE) et (BD) par G.

$$\text{Montrer que} \quad BCG = BCF. \tag{1}$$

Problème 2 : (taux de réussite : 20/178)

Trouver tous les nombres entiers naturels non nuls m et n qui n'ont pas de diviseur commun plus grand que 1 tels que :

$$m^3 + n^3 \quad \text{divise} \quad m^2 + 20mn + n^2. \tag{2}$$

Problème 3 : (taux de réussite : 13/178)

On considère la suite de nombres réels définie par :

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_{n+1} = cx_n + \sqrt{c^2-1}\sqrt{x_n^2-1} \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1. \end{cases} \tag{3}$$

Montrer que si c est un nombre entier naturel non nul, alors x_n est un entier pour tout $n \geq 1$.

1.2 Jour 2

Problème 4 : (taux de réussite : 4/178)

Manzi possède n timbres et un album avec 10 pages. Il distribue les n timbres dans l'album de sorte que chaque page contienne un nombre distinct de timbres. Il trouve que, peu importe comment il fait cela, il y a toujours un ensemble de 4 pages tels que le nombre total de timbres dans ces 4 pages soit au moins $\frac{n}{2}$.

$$\text{Déterminer la valeur maximale possible de} \quad n. \tag{4}$$

Problème 5 : (taux de réussite : 17/178)

Soient a et b des nombres réels avec $a \neq 0$. Soit :

$$P(x) = ax^4 - 4ax^3 + (5a+b)x^2 - 4bx + b \tag{5}$$

Montrer que toutes les racines de $P(x)$ sont réelles et strictement positives si et seulement si $a = b$.

Problème 6 : (taux de réussite : 3/178)

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus avec $AB < AC$. Soient D, E et F les pieds des perpendiculaires issues de A, B et C aux côtés opposés, respectivement. Soit P le pied de la perpendiculaire issue de F sur la droite (DE). La droite (FP) et le cercle circonscrit au triangle BDF se rencontrent encore en Q.

$$\text{Montrer que} \quad \widehat{PBQ} = \widehat{PAD}. \tag{6}$$

2 Solutions

2.1 Jour 1

Probleme 1

Probleme 2

Probleme 3

2.2 Jour 2

Probleme 4

Probleme 5

Probleme 6