Olympiades Panafricaines Mathématiques 2023
Quelques solutions

KouakouSchool

20 juin 2023

Table des matières

Résumé

Ce document présente des solutions aux différents problèmes rencontrés lors des Olympiades Panafricaines de Mathématiques (OPAM) 2023.

1 Enoncés

1.1 Jour 1

Problème 1

Dans un triangle ABC tel que $AB < AC, D$ est un point du segment $[AC]$ tel que $BD = CD$. Une droite parallèle à (BD) coupe le segment $[BC]$ en E et coupe la droite (AB) en F. G est le point d'intersection des droites (AE) et (BD) par G.

$$\text{Montrer que} \quad \widehat{BCG} = \widehat{BCF}. \tag{1}$$

Problème 2

Trouver tous les nombres entiers naturels non nuls m et n qui n'ont pas de diviseur commun plus grand que 1 tels que :

$$m^3 + n^3 \quad \text{divise} \quad m^2 + 20mn + n^2. \tag{2}$$

Problème 3

On considère la suite de nombres réels définie par :

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_{n+1} = cx_n + \sqrt{c^2 - 1}\sqrt{x_n^2 - 1} \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1. \end{cases} \tag{3}$$

Montrer que si c est un nombre entier naturel non nul, alors x_n est un entier pour tout $n \geq 1$.

1.2 Jour 2

Problème 4

Manzi possède n timbres et un album avec 10 pages. Il distribue les n timbres dans l'album de sorte que chaque page contienne un nombre distinct de timbres. Il trouve que, peu importe comment il fait cela, il y a toujours un ensemble de 4 pages tels que le nombre total de timbres dans ces 4 pages soit au moins $\frac{n}{2}$.

$$\text{Déterminer la valeur maximale possible de} \quad n. \tag{4}$$

Problème 5

Soient a et b des nombres réels avec $a \neq 0$. Soit :

$$P(x) = ax^4 - 4ax^3 + (5a+b)x^2 - 4bx + b \tag{5}$$

Montrer que toutes les racines de $P(x)$ sont réelles et strictement positives si et seulement si $a = b$.

Problème 6

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus avec $AB < AC$. Soient D, E et F les pieds des perpendiculaires issues de A, B et C aux côtés opposés, respectivement. Soit P le pied de la perpendiculaire issue de F sur la droite (DE). La droite (FP) et le cercle circonscrit au triangle BDF se rencontrent encore en Q.

$$\text{Montrer que} \quad \widehat{PBQ} = \widehat{PAD}. \tag{6}$$

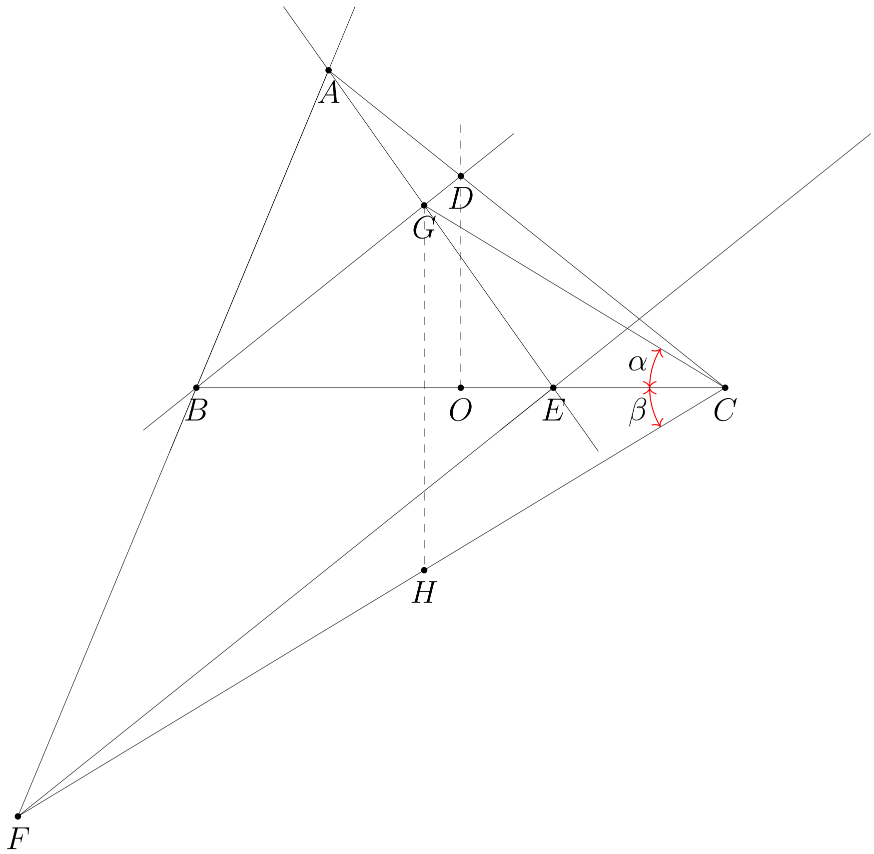
2 Solutions

2.1 Jour 1

Problème 1 : (taux de réussite : 22/178)

Solution 1 - Utilisation d'un repère orthonormal

Ci-dessous se trouve la construction géométrique de la figure résultant du problème posé. Nous avons rajouté le milieu du segment $[BC]$ qu'on appellera O, le point D' tel que la distance OC égale à la distance OD' et D' appartient à $[OD)$ et le point H, le point de (FC) tel que (GH) est perpendiculaire à (BC).



$$\text{Montrons que} \quad \widehat{BCG} = \widehat{BCF} \quad \text{c'est-à-dire que} \quad \hat{\alpha} = \hat{\beta}. \tag{7}$$

Pour cela, nous allons considérer le repère orthonormal formé par les points O, C et D'. Il s'agit bien d'un repère orthonormal car la droite (OD) est perpendiculaire à la droite (OC) puisque (OD) est la médiatrice du segment $[BC]$ (O est milieu de $[BC]$ et $BD = CD$) et la distance OD' est égale à la distance OC.

Les coordonnées des différents points A, B, C, D, E et O sont les suivants.

$$O = \Big(0, 0\Big) \tag{8}$$

$$C = \Big(1, 0\Big) \tag{9}$$

$$D = \Big(0, d\Big), \quad \text{où} \quad d \quad \text{est une variable.} \tag{10}$$

$$B = \Big(-1, 0\Big) \tag{11}$$

$$A = \Big(-\alpha, \beta\Big), \quad \text{où} \quad 0 < \alpha < 1 \quad \text{et} \quad \beta > 1 \quad \text{sont des variables.} \tag{12}$$

$$E = \Big(\gamma, 0\Big), \quad \text{où} \quad -1 < \gamma < 1 \quad \text{où} \quad \gamma \quad \text{est une variable.} \tag{13}$$

La variable γ est indépendante des autres variables d'après l'énoncé car le point E est un point quelconque du segment $[BC]$. La relation entre β, α et d peut être déterminée d'après la position de D par rapport aux points A, B et C.

Déterminons la relation entre β, α et d :

La droite (CD) a pour équation du type : $ax + by + c = 0$. En remplaçant les coordonnées de C et D dans cette équation, l'on obtient :

$$(DC): \quad x + \frac{1}{d}y - 1 = 0 \tag{14}$$

Le point A appartient à la droite (DC), donc : $-\alpha + \frac{1}{d}\beta - 1 = 0$. Cela implique que :

$$\beta = d(1 + \alpha) \tag{15}$$

Déterminons les valeurs des coordonnées de F et G

Concernant le point F, $F\Big(e, f\Big)$ appartient à la droite (AB) et (FE) est perpendiculaire à la normale $\vec{u}$ à la droite (BD).

$$(BD): \quad x - \frac{1}{d}y + 1 = 0 \tag{16}$$

$$\vec{u}\Big(1, -\frac{1}{d}\Big) \tag{17}$$

$$(AB): \quad x - \frac{1-\alpha}{d(1+\alpha)}y + 1 = 0 \tag{18}$$

donc :

$$\overrightarrow{FE}.\vec{u} = 0 \quad et \quad F \in (AB)$$

$$\begin{cases} e - \frac{1-\alpha}{d(1+\alpha)}f + 1 = 0 \\ (\gamma - e).1 + \frac{1}{d}.f = 0 \end{cases}$$

ainsi :

$$\begin{cases} e = \frac{\alpha\gamma - \gamma - \alpha - 1}{2\alpha} \\ f = -\frac{d(\gamma+1)(\alpha+1)}{2\alpha} \end{cases}$$

$$F\Big(\frac{\alpha\gamma-\gamma-\alpha-1}{2\alpha},-\frac{d(\gamma+1)(\alpha+1)}{2\alpha}\Big) \tag{19}$$

Concernant le point G, on a :

$$G\Big(g,h\Big)\in(BD)\cap(AE)$$

$$(AE):\quad x+\frac{\alpha+\gamma}{d(1+\alpha)}y-\gamma=0 \tag{20}$$

L'équation de la droite (BD) est donnée par la relation (16). Donc :

$$\begin{cases} g-\frac{1}{d}h+1=0 \\ g+\frac{\alpha+\gamma}{d(1+\alpha)}h-\gamma=0 \end{cases}$$

ainsi :

$$\begin{cases} g=\frac{\alpha(\gamma-1)}{1+2\alpha+\gamma} \\ h=\frac{d(1+\gamma)(1+\alpha)}{1+2\alpha+\gamma} \end{cases}$$

$$G\Big(\frac{\alpha(\gamma-1)}{1+2\alpha+\gamma},\frac{d(1+\gamma)(1+\alpha)}{1+2\alpha+\gamma}\Big) \tag{21}$$

Pour le point H, on a $H\in(FC)$ tel que $(GH)\perp(BC)$. L'abscisse de H est égal à g c'est-à-dire l'abscisse de G car $(GH)\perp(BC)$ et (BC) est l'axe des abscisses, on note donc $H\Big(g,i\Big)$.

$$(FC):\quad x+\frac{1-e}{f}y-1=0 \tag{22}$$

Donc :

$$g+\frac{1-e}{f}i-1=0$$

$1-e\neq 0$, sinon $g=1$. Il s'agit d'un cas limite impossible car $G\in[BC]$. De ce fait, nous pouvons écrire que :

$$i=\frac{1-g}{1-e}f$$

D'où, d'après (19) et par la suite (21), on a :

$$i=-\frac{d(\gamma+1)(\alpha+1)}{1+2\alpha+\gamma}=-h$$

Donc $G\Big(g,h\Big)$ et $H\Big(g,-h\Big)$, ainsi $CG = CH$ et $(HG) \perp (CB)$. D'où :

$$\widehat{BCG} = \widehat{OCG} = \widehat{HCO} = \widehat{HCB} = \widehat{FCB}$$

Par conséquent, nous avons montré que :

$$\widehat{BCG} = \widehat{BCF} \quad \text{c'est-à-dire que} \quad \hat{\alpha} = \hat{\beta}$$

Problème 2 : (taux de réussite : 20/178)

Solution 1 - Utilisation d'une identité remarquable de factorisation

Trouvons tous les nombres entiers naturels non nuls m et n qui n'ont pas de diviseur commun plus grand que 1 tels que :

$$m^3 + n^3 \quad \text{divise} \quad m^2 + 20mn + n^2. \tag{23}$$

On a l'identité suivante pour tous entiers naturels m et n :

$$m^3 + n^3 = (m+n)(m^2 - mn + n^2) \tag{24}$$

Nous allons noté le symbole | comme représentant la division, c'est-à-dire $a|b$ veut dire a divise b. Ainsi, $m^3 + n^3$ divise $m^2 + 20mn + n^2$ implique que $m + n$ divise $m^2 + 20mn + n^2$ et $m^2 - mn + n^2$ divise $m^2 + 20mn + n^2$. D'où l'équation :

$$\begin{cases} m+n|m^2+20mn+n^2 \\ m^2-mn+n^2|m^2+20mn+n^2 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} m+n|(m+n)^2+18mn \\ m^2-mn+n^2|m^2+20mn+n^2 \end{cases}$$

Comme $m^2 + 20mn + n^2 - (m^2 - mn + n^2) = 21mn$, en utilisant la deuxième relation, on a :

$$m^2 - mn + n^2|21mn \tag{25}$$

En utilisant la première relation et sachant que $m+n|(m+n)^2$, nous obtenons $m + n|((m+n)^2 + 18mn) - (m+n)^2$. Cela implique :

$$m + n|18mn \tag{26}$$

Nous notons le symbole $\wedge$ comme étant la notation du plus grand diviseur commun, c'est-à-dire $a \wedge b$ est le plus grand diviseur commun de a et b. Tout diviseur de mn et $m + n$ est diviseur de toute combinaison linéaire. Ainsi, le plus grand diviseur commun de deux entiers naturels divise toute combinaison linéaire de ces deux entiers naturels. En l'occurence :

$$mn \wedge (m+n) | mn \wedge mn - m * (m+n) \implies mn \wedge (m+n) | mn \wedge -m * m$$

Or, $mn \wedge -m * m = m(n \wedge -m)$ donc :

$$mn \wedge (m+n) | m(n \wedge -m)$$

Donc :

$$mn \wedge (m+n) | m(n \wedge m) \tag{27}$$

D'après l'énoncé, m et n n'ont pas de diviseur commun plus grand que 1. Cela est équivalent à $m \wedge n = 1$.

$$m \wedge n = 1 \tag{28}$$

Les équations (27) et (28) impliquent que :

$$mn \wedge (m+n) | m \tag{29}$$

On a :

$$mn \wedge (m+n) | m+n$$

Donc :

$$mn \wedge (m+n) | (m+n) \wedge m$$

$$(m+n) \wedge m | ((m+n) - m) \wedge m \implies (m+n) \wedge m | n \wedge m$$

Ainsi,

$$mn \wedge (m+n) = 1 \tag{30}$$

Les équations (26) et (30) impliquent que :

$$m+n | 18 \tag{31}$$

D'où $m+n \in \{2, 3, 6, 9, 18\}$ car m et n étant des entiers naturels non nuls, $m+n \geq 2$. Afin de déterminer m et n, nous considérons le cas où $m \geq n$ car m et n sont interchangeables. Ainsi, pour chaque valeur de $m+n$, nous déterminons les valeurs de m et n tels que $m \wedge n = 1$. Cela donne :

$$m+n=2 \implies (m,n)=(1,1)$$

$$m+n=3 \implies (m,n)=(2,1)$$

$$m+n=6 \implies (m,n)=(5,1)$$

$$m+n=9 \implies (m,n)\in\{(8,1),(7,2),(5,4)\}$$

$$m+n=18 \implies (m,n)\in\{(17,1),(13,5),(11,7)\}$$

Donc, avec $m \geq n$, on a :

$$(m,n)\in\{(1,1),(2,1),(5,1),(8,1),(7,2),(5,4),(17,1),(13,5),(11,7)\}$$

Pour chaque valeur de (m,n) nous vérifions si l'équation (25) est vraie. Ainsi, le tableau suivant permet de voir les résultats.

$m+n$	m	n	m^2-mn+n^2	$21mn$	$m^2-mn+n^2 \mid 21mn$
2	1	1	1	21	vrai
3	2	1	3	$21*2$	vrai
6	5	1	21	$21*5$	vrai
9	8	1	$57=3*19$	$21*8*1$	faux
9	7	2	$39=3*13$	$21*7*2$	faux
9	5	4	$21=7*3$	$21*5*4$	vrai
18	17	1	$273=3*7*13$	$21*17$	faux
18	13	5	$129=3*43$	$21*13*5$	faux
18	11	7	$93=3*31$	$21*11*7$	faux

Donc :

$$(m,n)\in\{(1,1),(2,1),(1,2),(5,1),(1,5),(5,4),(4,5)\} \tag{32}$$

Réciproquement, $(m,n)\in\{(1,1),(2,1),(1,2),(5,1),(1,5)\}$ est tel que m^3+n^3 divise $m^2+20mn+n^2$. Cependant, si $(m,n)\in\{(5,4),(4,5)\}$ alors m^3+n^3 ne divise pas $m^2+20mn+n^2$. Cela se voit d'après le tableau suivant :

m	n	m^3+n^3	$m^2+20mn+n^2$	$m^3+n^3 \mid m^2+20mn+n^2$
1	1	2	22	vrai
2	1	9	45	vrai
5	1	126	126	vrai
5	4	$189=9*3*7$	$441=9*7*7$	faux

Ainsi, nous pouvons conclure que les valeurs des entiers naturels non nuls m et n qui n'ont pas de diviseur commun plus grand que 1 tels que : $m^3 + n^3$ divise $m^2 + 20mn + n^2$ sont :

$$(1,1), (2,1), (1,2), (5,1), (1,5) \tag{33}$$

Problème 3 : (taux de réussite : 13/178)

Pour la suite de nombres réels suivante :

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_{n+1} = cx_n + \sqrt{c^2-1}\sqrt{x_n^2-1} \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1. \end{cases} \tag{34}$$

Montrons que si c est un nombre entier naturel non nul, alors x_n est un entier pour tout $n \geq 1$.

Solution 1 - Changement de variable $x_n = cosh(a_n)$

Définissons la suite numérique a_n telle que pour tout entier naturel n,

$$x_n = cosh(a_n)$$

Cette suite est bien définie car la fonction $cosh$ est bijective sur $\mathbb{R}^+$. En effet, la fonction cosinus hyperbolique est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ (car sa dérivée est la fonction sinus hyperbolique qui est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$), elle est donc bijective sur $\mathbb{R}^+$.

Ainsi, l'équation (34) devient :

$$\begin{cases} x_n = cosh(a_n) \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1 \\ cosh(a_{n+1}) = cosh(a_1)cosh(a_n) + \sqrt{cosh(a_1)^2-1}\sqrt{cosh(a_n)^2-1} \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1. \end{cases} \tag{35}$$

Nous avons les identités remarquables suivantes pour les fonctions $cosh$ (cosinus hyperbolique) et $sinh$ (sinus hyperbolique) :

$$\begin{cases} cosh(x)^2 + sinh(x)^2 = 1 \quad \text{pour tout} \quad x \quad \text{et} \quad y \quad \text{nombres réels} \\ cosh(x+y) = cosh(x)cosh(y) + sinh(x)sinh(y) \quad \text{pour tout} \quad x \quad \text{et} \quad y \quad \text{nombres réels} \\ cosh(x) > 0 \quad \text{et} \quad sinh(x) > 0 \quad \text{pour tout} \quad x \quad \text{et} \quad y \quad \text{nombres réels strictement positifs} \end{cases} \tag{36}$$

La seconde relation de l'équation (35) permet de dire :

$$cosh(a_{n+1}) = cosh(a_1)cosh(a_n) + sinh(a_1)sinh(a_n)$$

Cela implique d'après (36) que :

$$cosh(a_{n+1}) = cosh(a_1 + a_n) \tag{37}$$

La fonction cosinus hyperbolique est bijective. Ainsi l'équation (37) implique que :

$$a_{n+1} = a_1 + a_n \tag{38}$$

Par récurrence sur n, nous montrons que $a_n = n * a_1$ pour tout $n \geq 1$. En effet, pour $n = 1$, cela est vrai car $a_1 = 1 * a_1$. Supposons que pour un certain $n \geq 1$, $\forall k \leq n$, $a_k = k * a_1$. Alors, on a :

$$a_{n+1} = a_n + a_1 \implies a_{n+1} = n * a_1 + a_1$$

Donc :

$$a_{n+1} = (n+1)a_1$$

Ainsi, par récurrence :

$$a_n = n * a_1 \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1 \quad \text{entier naturel.} \tag{39}$$

Donc :

$$\begin{cases} cosh(a_1) = c \\ x_n = cosh(na_1) \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1 \quad \text{entier naturel.} \end{cases} \tag{40}$$

Montrons que si $cosh(x)$ est un entier alors pour tout entier naturel n, $cosh(nx)$ est un entier naturel.

Pour tous nombres réels a et b et tout entier naturels n, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} c_k^n a^k b^{n-k}$$

Car lorsqu'on choisit a dans k termes $a + b$, l'on choisira automatiquement b, $n - k$ fois pour former un terme de $(a + b)^n$. De plus, nous pouvons calculer la valeur de c_k^n comme étant le nombre de manière de choisir k éléments parmi n éléments sans tenir compte de l'ordre, c'est à dire :

$$c_k^n = \binom{n}{k}$$

Or

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \implies c_k^n = c_{n-k}^n$$

D'où :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_k^n (a^k b^{n-k} + a^{n-k} b^k) - \delta_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \frac{n}{2}} c^n_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \tag{41}$$

Où la notation $\lfloor x \rfloor$ signifie, la partie entière de x et $\delta_{a,b}$ est telle que :

$$\delta_{a,b} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a = b \\ 0 & \text{si} \quad a \neq b \end{cases}$$

Ainsi, pour $a = e^x$ et $b = e^{-x}$, on a : $2^n cosh(x)^n = (a+b)^n$. Ce qui donne donc :

$$2^n cosh(x)^n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_k^n (e^{(n-2k)x} + e^{-(n-2k)x}) - \delta_{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \frac{n}{2})} c^n_{\frac{n}{2}}$$

Donc :

$$2^n cosh(x)^n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_k^n 2cosh((n-2k)x) - \delta_{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \frac{n}{2})} c^n_{\frac{n}{2}}$$

$$2c_0^n cosh(nx) = 2^n cosh(x)^n - \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 2c_k^n cosh((n-2k)x) + \delta_{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \frac{n}{2})} c^n_{\frac{n}{2}}$$

Or $c_0^n = \binom{n}{0} = 1$, donc :

$$cosh(nx) = 2^{n-1} cosh(x)^n - \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_k^n cosh((n-2k)x) + \delta_{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \frac{n}{2})} \frac{c_{\frac{n}{2}}}{2} \tag{42}$$

Soit x tel que $cosh(x)$ est un entier naturel. Par récurrence, montrons que pour tout entier naturel n, $cosh(nx)$ est un entier naturel. Pour $n = 1$, on a $cosh(nx) = cosh(x)$ est un entier naturel.

$$\text{Soit} \quad n, \quad \text{tel que pour tout} \quad k \leq n, \quad cosh(kx) \quad \text{est un entier naturel.} \tag{43}$$

Donc :

$$\forall k \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor, \quad c_k^{n+1} cosh((n+1-2k)x) \quad \text{est un entier naturel} \tag{44}$$

Car $\forall k$ tel que, $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$, $0 \leq n+1-2k \leq n$, l'hypothèse (43) est applicable pour $l = n+1-2k$ et $c_k^{n+1} = \binom{n+1}{k}$ est un entier.

Aussi,

$$\delta_{(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor, \frac{n+1}{2})} \frac{c^{n+1}_{\frac{n+1}{2}}}{2} = \begin{cases} \frac{c^{n+1}_{\frac{n+1}{2}}}{2} & \text{si} \quad n+1 \quad \text{est pair} \\ 0 \quad \text{si} \quad n+1 \quad \text{est impair} \end{cases}$$

Si $n+1$ est pair,

$$c^{n+1}_{\frac{n+1}{2}} = \binom{n+1}{\frac{n+1}{2}} \implies c^{n+1}_{\frac{n+1}{2}} = \frac{(n+1)!}{(\frac{n+1}{2})!(\frac{n+1}{2})!} \implies c^{n+1}_{\frac{n+1}{2}} = 2\frac{n!}{(\frac{n-1}{2})!(\frac{n+1}{2})!}$$

$$c^{n+1}_{\frac{n+1}{2}} = 2\binom{n}{\frac{n+1}{2}} \implies c^{n+1}_{\frac{n+1}{2}} = 2c^{n}_{\frac{n+1}{2}} \implies \frac{c^{n+1}_{\frac{n+1}{2}}}{2} = c^{n}_{\frac{n+1}{2}}$$

Donc :

$$\delta_{(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor, \frac{n+1}{2})} \frac{c^{n+1}_{\frac{n+1}{2}}}{2} = \begin{cases} c^{n}_{\frac{n+1}{2}} & \text{si} \quad n+1 \quad \text{est pair} \\ 0 \quad \text{si} \quad n+1 \quad \text{est impair} \end{cases} \tag{45}$$

D'après (42),

$$cosh((n+1)x) = 2^n cosh(x)^{n+1} - \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} c_k^{n+1} cosh((n+1-2k)x) + \delta_{(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor, \frac{n+1}{2})} \frac{c_{\frac{n+1}{2}}}{2}$$

et

$$cosh((n+1)x) > 0 \quad \text{pour tout} \quad x \quad \text{nombres réel strictement positifs}$$

En utilisant les remarques (44), (45) et le fait que $cosh(x)$ est un entier naturel alors $cosh((n+1)x)$ est un entier.

Ainsi, si x est un nombre réel tel que $cosh(x)$ est un entier naturel alors pour tout entier naturel n, $cosh(nx)$ est un entier naturel.

Pour conclure, en utilisant l'expression de x_n en fonction de a_1, (40) et l'implication précédente, nous pouvons déduire que :

Si c est un nombre entier naturel non nul, alors x_n est un entier pour tout $n \geq 1$.

2.2 Jour 2

Problème 4 : (taux de réussite : 4/178)

Problème 5 : (taux de réussite : 17/178)

Problème 6 : (taux de réussite : 3/178)