ESTATÍSTICA BÁSICA

PROBABILIDADE

Volume 1

Este livro é dirigido aos alunos de Ciências Exatas. Pode também ser usado pelos alunos das áreas de Economia, Administração e qualquer curso que tenha abordagem de conteúdo matemático. Com mais de 200 exercícios, auxilia o leitor a assimilar o conteúdo teórico.

Esta edição traz novos exercícios que foram aplicados em avaliações nos cursos ministrados pelo autor, além de novos problemas propostos.

Prof. Luiz Gonzaga Morettin é bacharel e licenciado em Matemática pela USP, pós-graduado em Estatística pelo Instituto de Matemática e Estatística da USP e doutor em Matemática pela Universidade Mackenzie. Trabalha na área didática como professor do Departamento de Matemática da Faculdade de Engenharia Industrial – FEI. É também professor do Departamento de Atuária e Métodos Quantitativos da Faculdade de Economia e Administração da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – FEA/PUC-SP.

MAKRON Books

Visite o nosso site
http://www.makron.com.br

ISBN 85-346-1062-2
9 788534 610629

MORETTIN ESTATÍSTICA BÁSICA PROBABILIDADE 1 MAKRON Books

ESTATÍSTICA BÁSICA

PROBABILIDADE

Volume 1

LUIZ GONZAGA MORETTIN

MAKRON Books

7ª Edição

MAKRON
Books

ESTATÍSTICA BÁSICA — Volume I

Probabilidade

Walter Moraes 23/07/02

Luiz Gonzaga Morettin

PUC-SP — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
FEI — Faculdade de Engenharia Industrial

MAKRON *Books* do Brasil Editora Ltda.
Rua Tabapuã, 1.348, Itaim-Bibi
CEP 04533-004 - São Paulo - SP
(011) 829-8604 e (011) 820-6622

São Paulo • Rio de Janeiro • Ribeirão Preto • Belém • Belo Horizonte • Brasília • Campo Grande • Cuiabá • Curitiba • Florianópolis • Fortaleza • Goiânia • Manaus • Natal • Porto Alegre • Recife • Salvador

Barcelona • Bogotá • Buenos Aires • Caracas • Ciudad de México • Frankfurt • Guadalajara • Lisboa • Londres • Madrid • Montevideo • New York • Paris • Porto • Santiago statistica Básica — Volume I — Probabilidade — 7ª Edição

DITOR: MILTON MIRA DE ASSUMPÇÃO FILHO

erente de Produção
ilas R. Camargo
ditor Assistente
enjamim Peixoto
rodutora Editorial
larileide Gomes
apa
larcelo da S. Françozo

ditoração Eletrônica e Fotolitos: ERJ Informática Ltda.

Dados de Catalogação na Publicação

Moretti, Luiz Gonzaga
Estatística Básica — Volume I — Probabilidade

São Paulo: Makron *Books*, 1999

ISBN: 85.346.1062-2

À minha esposa
DINALVA
e aos meus filhos,
EDUARDO,
ADRIANA e ALEXANDRE

MAKRON
Books

SUMÁRIO

MAKRON
Books

PREFÁCIO DA 7ª EDIÇÃO

Na presente edição foram feitas pequenas alterações na parte teórica e modificações de exercícios.

Há o acréscimo de pelo menos 50 novos exercícios, que foram aplicados em avaliações pelo autor.

O autor agradece as sugestões apresentadas por colegas, principalmente na formulação de alguns problemas novos.

MAKRON
Books

PREFÁCIO DA 6ª EDIÇÃO

Este livro é o resultado de experiências vividas a partir de 1967 no Colégio de Aplicação "Fidelino de Figueiredo" da FFCL, da USP, no IME-USP, Departamento de Estatística, na Faculdade de Economia São Luis, na Escola de Administração de Empresas de São Paulo da FGV e na FEI — Faculdade de Engenharia Industrial.

Foi também testado em cursos de especialização para professores de Matemática, sendo apresentado como um modo didático de se ensinar Estatística.

Essa soma de cursos e experiências mostrou que a melhor maneira de apresentar a matéria, para mim, é expor os assuntos para o caso discreto, onde os conceitos são mais facilmente assimiláveis pelos alunos, passando a seguir para o caso contínuo, onde esses mesmos conceitos ficarão sedimentados.

Procuro, na maioria dos casos, apresentar os conceitos por meio de problemas, para depois defini-los. São apresentados exercícios de aplicação para cada assunto abordado, bem como exercícios propostos, no final de cada capítulo.

No final do livro são apresentadas as tabelas das distribuições Normal, Binomial e de Poisson e um formulário geral, que permitirá ao aluno, devido ao uso constante, gravar as várias fórmulas usadas no livro.

Visto que este livro foi usado em cursos de Economia, Administração, Ciências Contábeis, Biologia, Matemática e Engenharia, penso que poderá ser aplicado em cursos das várias áreas de ensino, bastando ao professor dar uma maior ou menor "dosagem" no conteúdo matemático.

Esta edição vem acrescida de:

a) problemas resolvidos, no final de cada capítulo, que foram aplicados em avaliações nos cursos por mim ministrados;
b) novos problemas propostos, dentro da linha acima;
c) duas tabelas da Distribuição Binomial, uma para $n = 30$ e outra para $p = 1/6$.

Ao colocar pelo menos 220 exercícios (exemplos, problemas resolvidos e propostos) procuro dar ao leitor maiores condições de assimilar o conteúdo teórico do livro.

MAKRON
Books

1

ESPAÇO AMOSTRAL

1.1 INTRODUÇÃO

Encontramos na natureza dois tipos de fenômenos: determinísticos e aleatórios.

Os fenômenos determinísticos são aqueles em que os resultados são sempre os mesmos, qualquer que seja o número de ocorrências verificadas.

Se tomarmos um determinado sólido, sabemos que a uma certa temperatura haverá a passagem para o estado líquido. Este exemplo caracteriza um fenômeno determinístico.

Nos fenômenos aleatórios, os resultados não serão previsíveis, mesmo que haja um grande número de repetições do mesmo fenômeno.

Por exemplo: se considerarmos um pomar com centenas de laranjeiras, as produções de cada planta serão diferentes e não previsíveis, mesmo que as condições de temperatura, pressão, umidade, solo, etc., sejam as mesmas para todas as árvores.

Podemos considerar os *experimentos aleatórios* como fenômenos produzidos pelo homem.

Nos experimentos aleatórios, mesmo que as condições iniciais sejam sempre as mesmas, os resultados finais de cada tentativa do experimento serão diferentes e não previsíveis.

EXEMPLOS

a) lançamento de uma moeda honesta;
b) lançamento de um dado;
c) lançamento de duas moedas;
d) retirada de uma carta de um baralho completo de 52 cartas;
e) determinação da vida útil de um componente eletrônico.

A cada experimento aleatório está associado o resultado obtido, que não é previsível, chamado *evento aleatório*.

No exemplo *a* os eventos associados são cara (c) e coroa (r); no exemplo *b* poderá ocorrer uma das faces 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

ESPAÇO AMOSTRAL

o amostral de um experimento aleatório é o conjunto dos resultados do experimen- elementos do espaço amostral serão chamados também de *pontos amostrais*.

ℜepresentaremos o espaço amostral por Ω.

ᴺos exemplos dados em 1.1, os espaços amostrais são:

ı) $\Omega = \{c, r\}$

ɔ) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

:) $\Omega = \{(c, r), (c, c), (r, c), (r, r)\}$

ɟ) $\Omega = \{A_0 \ldots K_0, A_p \ldots K_p, A_E \ldots K_E, A_c \ldots K_c\}$

ɘ) $\Omega = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$

ↄ evento aleatório pode ser um único ponto amostral ou uma reunião deles, como ıos no exemplo a seguir:

ˍançam-se dois dados. Enumerar os seguintes eventos:

ᴬ: saída de faces iguais;

ʒ: saída de faces cuja soma seja igual a 10;

ᑕ: saída de faces cuja soma seja menor que 2;

ↄ: saída de faces cuja soma seja menor que 15;

ᴇ: saída de faces onde uma face é o dobro da outra.

Determinação do espaço amostral: podemos determiná-lo por uma tabela de dupla la (produto cartesiano).

D_2 / D_1	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Os eventos pedidos são:

$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

$B = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$

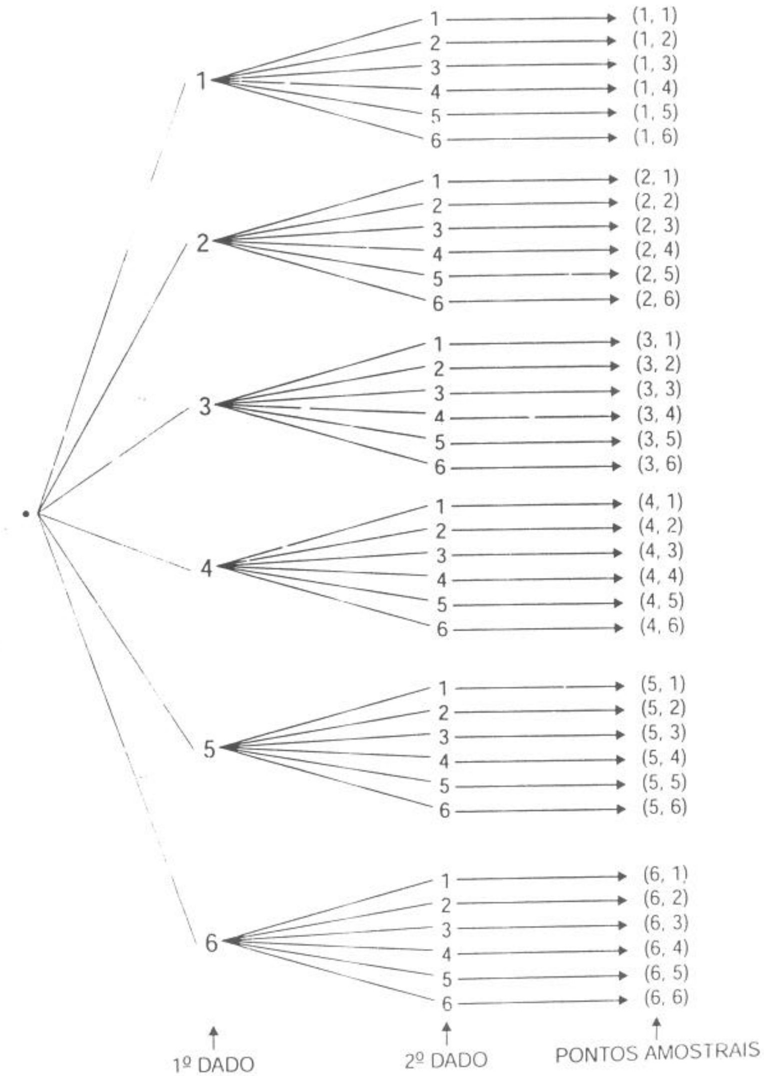
$C = \phi$ (evento impossível)

$D = \Omega$ (evento certo)

$E = \{(1, 2), (2, 1), (2, 4), (3, 6), (4, 2), (6, 3)\}$

Uma outra maneira de determinar o espaço amostral desse experimento é usar o diagrama em árvore, que será útil para a resolução de problemas futuramente.

Eis o processo:



3 CLASSE DOS EVENTOS ALEATÓRIOS

:FINIÇÃO. É o conjunto formado de todos os eventos (subconjuntos) do espaço ıostral.

Para efeito de exemplo, consideremos um espaço amostral finito:

$$\Omega = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

classe dos eventos aleatórios é:

$$F(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} \phi \\ \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_4\} \\ \{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_2, e_3\}, \{e_2, e_4\}, \{e_3, e_4\} \\ \{e_1, e_2, e_3\}, \{e_1, e_2, e_4\}, \{e_1, e_3, e_4\}, \{e_2, e_3, e_4\} \\ \{e_1, e_2, e_3, e_4\} \end{array} \right\}$$

Para determinarmos o número de elementos (eventos) de $F(\Omega)$ observamos que:

ϕ corresponde a $\binom{4}{0}$

$\{e_1\}, \ldots, \{e_4\}$ corresponde a $\binom{4}{1}$

$\{e_1, e_2\}, \ldots, \{e_3, e_4\}$ corresponde a $\binom{4}{2}$

$\{e_1, e_2, e_3\}, \ldots, \{e_2, e_3, e_4\}$ corresponde a $\binom{4}{3}$

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ corresponde a $\binom{4}{4}$

Portanto, $n(F) = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 16$

ıericamente, se o número de pontos amostrais de um espaço amostral finito é n, então ıúmero de eventos de **F** é 2^n, pois

$$n(F) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

4 OPERAÇÕES COM EVENTOS ALEATÓRIOS

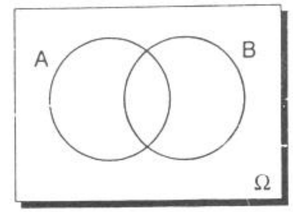
ınsideremos um espaço amostral finito $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$.

Sejam A e B dois eventos de $F(\Omega)$.

As seguintes operações são definidas:

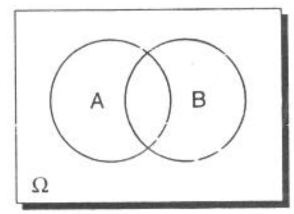
a) *REUNIÃO*

DEFINIÇÃO. $A \cup B = \{e_i (\in) \Omega \mid e_i \in A \text{ ou } e_i \in B\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. O *evento reunião* é formado pelos pontos amostrais que pertencem a pelo menos um dos eventos.



b) *INTERSECÇÃO*

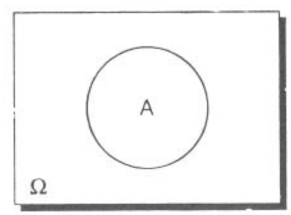
DEFINIÇÃO. $A \cap B = \{e_i \in \Omega \mid e_i \in A \text{ e } e_i \in B\}$, $i = 1, \ldots, n$. O *evento intersecção* é formado pelos pontos amostrais que pertencem simultaneamente aos eventos A e B.



Obs. Se $A \cap B = \emptyset$, A e B são eventos *mutuamente exclusivos*.

c) *COMPLEMENTAÇÃO*

DEFINIÇÃO. $\Omega - A = \bar{A} = \{e_i \in \Omega \mid e_i \notin A\}$.



Exemplo:

Lançam-se duas moedas. Sejam A: saída de faces iguais e B: saída de cara na primeira moeda.

Determinar os eventos:

$A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{(A \cup B)}$, $\overline{(A \cap B)}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$, $B - A$, $A - B$, $\overline{A} \cap B$ e $\overline{B} \cap A$.

Resolução:

$\Omega = \{(c, c), (c, r), (r, c), (r, r)\}$

$A = \{(c, c), (r, r)\}$

$B = \{(c, c), (c, r)\}$

$A \cup B = \{(c, c), (c, r), (r, r)\}$

$A \cap B = \{(c, c)\}$

$\overline{A} = \{(c, r), (r, c)\}$

$\overline{B} = \{(r, c), (r, r)\}$

$\overline{(A \cup B)} = \{(r, c)\}$

$\overline{(A \cap B)} = \{(c, r), (r, c), (r, r)\}$

$\overline{A} \cap \overline{B} = \{(r, c)\}$

$\overline{A} \cup \overline{B} = \{(c, r), (r, c), (r, r)\}$

$B - A = \{(c, r)\}$

$A - B = \{(r, r)\}$

$\overline{A} \cap B = \{(c, r)\}$

$\overline{B} \cap A = \{(r, r)\}$

5 PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES

am A, B e C eventos associados a um espaço amostral Ω. As seguintes propriedades válidas:

a) *IDEMPOTENTES*

$A \cap A = A$

$A \cup A = A$

b) *COMUTATIVAS*

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

c) *ASSOCIATIVAS*

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

d) *DISTRIBUTIVAS*

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

e) *ABSORÇÕES*

$A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$

f) *IDENTIDADES*

$A \cap \Omega = A$

$A \cup \Omega = \Omega$

$A \cap \emptyset = \emptyset$

$A \cup \emptyset = A$

g) *COMPLEMENTARES*

$\overline{\Omega} = \emptyset$

$\overline{\emptyset} = \Omega$

$A \cap \overline{A} = \emptyset$

$A \cup \overline{A} = \Omega$

$\overline{(\overline{A})} = A$

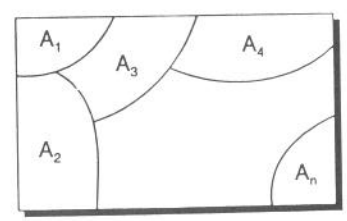
h) "*LEIS DAS DUALIDADES*" ou "*LEIS DE MORGAN*"

$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Essas propriedades são facilmente verificadas.

1.6 PARTIÇÃO DE UM ESPAÇO AMOSTRAL



DEFINIÇÃO. Dizemos que os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formam uma *partição* do espaço amostral Ω se:

a) $A_i \neq \emptyset$, $i = 1, \ldots, n$

b) $A_i \cap A_j = \emptyset$, para $i \neq j$

c) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

1.7 PROBLEMAS

1.7.1 Lançam-se três moedas. Enumerar o espaço amostral e os eventos:

a) faces iguais;

b) cara na 1ª moeda;

c) coroa na 2ª e 3ª moedas.

1.7.2 Considere a experiência que consiste em pesquisar famílias com três crianças, em relação ao sexo das mesmas, segundo a ordem do nascimento. Enumerar os eventos:

a) ocorrência de dois filhos do sexo masculino;

b) ocorrência de pelo menos um filho do sexo masculino;

c) ocorrência de no máximo duas crianças do sexo feminino.

1.7.3 Um lote contém peças de 5, 10, 15, . . ., 30 mm de diâmetro. Suponha que 2 peças sejam selecionadas no lote. Se x e y indicam respectivamente os diâmetros da 1ª e 2ª peças selecionadas, o par (x, y) representa um ponto amostral. Usando o plano cartesiano, indicar os seguintes eventos:

a) $A = \{x = y\}$

b) $B = \{y < x\}$

c) $C = \{x = y - 10\}$

d) $D = \left\{\dfrac{x + y}{2} < 10\right\}$

1.7.4 Sejam A, B e C três eventos de um espaço amostral. Exprimir os eventos abaixo, usando as operações reunião, intersecção e complementação:

a) somente A ocorre;

b) A e C ocorrem, mas B não;

c) A, B e C ocorrem;

d) pelo menos um ocorre;

e) exatamente um ocorre;

f) nenhum ocorre;

g) exatamente dois ocorrem;

h) pelo menos dois ocorrem;

i) no máximo dois ocorrem.

MAKRON Books

2 PROBABILIDADE

2.1 FUNÇÃO DE PROBABILIDADE

DEFINIÇÃO. É a função P que associa a cada evento de F um número real pertencente ao intervalo [0, 1], satisfazendo aos axiomas:

I) $P(\Omega) = 1$

II) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ se A e B forem mutuamente exclusivos.

III) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forem, dois a dois, eventos mutuamente exclusivos.

Observamos pela definição que $\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$ para todo evento A, $A \subset \Omega$.

2.2 TEOREMAS

T.1 "Se os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formam uma partição do espaço amostral, então: $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$"

Demonstração:

Pela definição de partição, os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são mutuamente exclusivos

e $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Logo $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(\Omega)$. Usando os axiomas I e III da definição, temos:

$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$

.2 "Se $\emptyset$ é o evento impossível, então $P(\emptyset) = 0$."

Demonstração. Como $\emptyset \cap \Omega = \emptyset$ e $\emptyset \cup \Omega = \Omega$, temos:

$$\begin{aligned} P(\emptyset \cup \Omega) &= P(\Omega) \\ P(\emptyset) + P(\Omega) &= P(\Omega) \\ P(\emptyset) &= 0 \end{aligned}$$

Obs. A recíproca não é verdadeira, pois o fato de $P(A) = 0$ não implica que A seja impossível.

.3 (TEOREMA DO EVENTO COMPLEMENTAR). "Para todo evento $A \subset \Omega$, $P(A) + P(\overline{A}) = 1$."

Demonstração: Como

$A \cap \overline{A} = \emptyset$

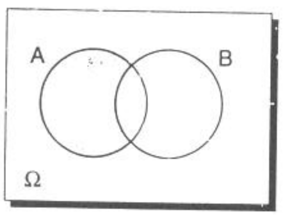
$A \cup \overline{A} = \Omega$

temos:

$P(A) + P(\overline{A}) = P(\Omega)$

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$

4 (TEOREMA DA SOMA) "Sejam $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$. Então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$."



Demonstração: Escreveremos os eventos $(A \cup B)$ e A como reuniões de eventos mutuamente exclusivos, como segue:

$$\begin{cases} A \cup B = (A - B) \cup B \\ A = (A - B) \cup (A \cap B) \end{cases}$$

Usando o axioma, temos:

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B) \quad ①$$

e

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \quad ②$$

De ② tiramos: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Substituindo-se esse resultado em ① chegamos a:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Se $A \cap B = \emptyset$ então $P(A \cap B) = 0 \Rightarrow$ vale o axioma II.

T.5 "Para $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$ temos: $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$."

(A demonstração fica a cargo do leitor)

T.6 "Dado o espaço amostral Ω e os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, então:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq j}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j \neq k}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots +$$

$$+ (-1)^{n-1} \cdot P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)."$$

Demonstração: Por indução finita.

T.7 "Dados os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, então:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)."$$

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

1. Sendo $P(A) = x$, $P(B) = y$ e $P(A \cap B) = z$, calcular:

a) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$;
b) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$;
c) $P(\overline{A} \cap B)$;
d) $P(\overline{A} \cup B)$.

Resolução:

a) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - z$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - x - y + z$

c) $P(\overline{A} \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = y - z$

d) $P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cap B) = (1 - x) + y - (y - z) = 1 - x + z$

2. Demonstrar que $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) -$

$- P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

Demonstração:

$$P(A \cup B \cup C) = P[(A \cup B) \cup C] = P(A \cup B) + P(C) -$$

$$- P[(A \cup B) \cap C] = P(A) + P(B) - P(A \cap B) +$$

$$+ P(C) - P[(A \cap C) \cup (B \cap C)] = P(A) + P(B) +$$

$$+ P(C) - P(A \cap B) - [P(A \cap C) + P(B \cap C) -$$

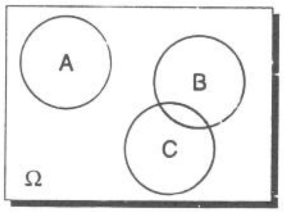
$$- P[(A \cap C) \cap (B \cap C)]] \therefore$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) -$$

$$- P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

3. Sejam A, B e C eventos tais que $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{5}$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ e $P(B \cap C) = \frac{1}{7}$.

Calcule a probabilidade de que pelo menos um dos eventos A, B ou C ocorra.



Resolução: Pelo diagrama vemos que $A \cap B \cap C = \emptyset$, logo $P(A \cap B \cap C) = 0$. Aplicando o resultado do problema anterior temos:

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - 0 - 0 - \frac{1}{7} + 0 = \frac{16}{35}$$

2.3 EVENTOS EQUIPROVÁVEIS

Consideremos o espaço amostral $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ associado a um experimento aleatório.

Chamemos $P(e_i) = p_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Temos $\sum_{i=1}^{n} P(e_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ ①.

DEFINIÇÃO. Os eventos e_i, $i = 1, \ldots, n$, são *equiprováveis* quando $P(e_1) = P(e_2) = \ldots = P(e_n) = p$, isto é, quando todos têm a mesma probabilidade de ocorrer.

① fica: $\sum_{i=1}^{n} p = 1 \Rightarrow np = 1 \therefore$ $\boxed{p = \frac{1}{n}}$

Logo, se os *n* pontos amostrais (eventos) são equiprováveis, a probabilidade de cada um dos pontos amostrais é $\frac{1}{n}$.

Vamos calcular a probabilidade de um evento $A \subset \Omega$. Suponhamos que A tenha K pontos amostrais:

$A = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$, $1 \leq k \leq n \therefore$

$$\therefore P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(e_i) = \sum_{i=1}^{k} p = K \cdot p = K \cdot \frac{1}{n} \therefore$$

$$\therefore \boxed{P(A) = \frac{K}{n}}$$

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

1. Retira-se uma carta de um baralho completo de 52 cartas. Qual a probabilidade de sair um *rei* ou uma *carta de espadas*?

Seja A: saída de um rei e

B: saída de uma carta de espada.

Então:

$A = \{R_o, R_e, R_c, R_p\} \rightarrow P(A) = \frac{4}{52}$

$B = \{A_e, 2_e, \ldots, R_e\} \rightarrow P(B) = \frac{13}{52}$

Observamos que $A \cap B = \{R_e\} \therefore$

$\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{52}$

Logo:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} \therefore$

$\therefore P(A \cup B) = \frac{16}{52}$

2. O seguinte grupo de pessoas está numa sala: 5 rapazes com mais de 21 anos, 4 rapazes com menos de 21 anos, 6 moças com mais de 21 anos e 3 moças com menos de 21 anos. Uma pessoa é escolhida ao acaso dentre as 18. Os seguintes eventos são definidos:

A: a pessoa tem mais de 21 anos;
B: a pessoa tem menos de 21 anos;
C: a pessoa é um rapaz;
D: a pessoa é uma moça.

Calcular:

a) $P(B \cup D)$;
b) $P(\overline{A} \cap \overline{C})$.

Resolução:

$\Omega = \{5R, 4r, 6M, 3m\} \therefore p = \frac{1}{18}$

$A = \{5R, 6M\} \rightarrow P(A) = \frac{11}{18}$

$B = \{4r, 3m\} \rightarrow P(B) = \frac{7}{18}$

$C = \{5R, 4r\} \rightarrow P(C) = \frac{9}{18}$

$D = \{6M, 3m\} \rightarrow P(D) = \frac{9}{18}$

a) $P(B \cup D) = P(B) + P(D) - P(B \cap D)$

Como $B \cap D = \{3m\}$, temos que $P(B \cap D) = \frac{3}{18}$.

Logo:

$P(B \cup D) = \frac{7}{18} + \frac{9}{18} - \frac{3}{18} = \frac{13}{18}$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{C}) = P(\overline{A \cup C}) = 1 - P(A \cup C) = 1 - \{P(A) + P(C) - P(A \cap C)\}$

Como $A \cap C = \{5R\}$ e $P(A \cap C) = \frac{5}{18}$, temos que:

$p(\overline{A} \cap \overline{C}) = 1 - \left\{\frac{11}{18} + \frac{9}{18} - \frac{5}{18}\right\} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$ ou

Como $\overline{A} = B$ e $\overline{C} = D$ temos:

$\overline{A} \cap \overline{C} = B \cap D = \{3m\} \therefore$

$\therefore P(\overline{A} \cap \overline{C}) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$

Nem sempre é possível enumerar o espaço amostral. Nesses casos, deveremos usar a análise combinatória como processo de contagem. Veremos isso nos próximos exemplos.

3. Em um congresso científico existem 15 matemáticos e 12 estatísticos. Qual a probabilidade de se formar uma comissão com 5 membros, na qual figurem 3 matemáticos e 2 estatísticos?

Resolução: A: comissão de 3 matemáticos e 2 estatísticos.

$n = \binom{27}{5}$ comissões

$k = \binom{15}{3} \cdot \binom{12}{2}$ comissões com 3 matemáticos e 2 estatísticos

$$P(A) = \frac{\binom{15}{3} \cdot \binom{12}{2}}{\binom{27}{5}}$$

4. Qual a probabilidade de, num baralho com 52 cartas, ao se retirarem 4 cartas, ao acaso, sem reposição, se obter uma quadra?

Resolução: A: saída de uma quadra.

$n = \binom{52}{4}$ ← número de quádruplas

$K = 13$ ← número de quadras $\therefore$

$\therefore P(A) = \frac{13}{\binom{52}{4}}$

5. Calcular a probabilidade de se obter exatamente 3 caras e 2 coroas em 5 lances de uma moeda.

Resolução: A: saída de 3 caras e 2 coroas.

$n = 2^5 = 32$ (número de quíntuplas)

$k = \binom{5}{3} = 10$ (números de quíntuplas com 3 caras e 2 coroas)

$P(A) = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$

6. Uma urna contém as letras A, A, A, R, R, S. Retira-se letra por letra. Qual a probabilidade de sair a palavra Araras?

Resolução: A: saída de palavra ARARAS.

$n = (PR)^{6}_{3,2,1} = \dfrac{6!}{3!\,2!\,1!} = 60$

$k = 1 \therefore$

$\therefore P(A) = \dfrac{1}{60}$

Obs.:

$$(PR)^{n}_{n_1, n_2, \ldots, n_n} = \frac{n!}{n_1!\,n_2! \ldots n_n!}, \text{ com } n_1 + n_2 + \ldots + n_n = n$$

.4 PROBABILIDADE CONDICIONAL

ıtroduziremos a noção de probabilidade condicional através do seguinte exemplo:

Consideremos 250 alunos que cursam o primeiro ciclo de uma faculdade. Destes .unos 100 são homens (H) e 150 são mulheres (M), 110 cursam física (F) e 140 cursam uímica (Q). A distribuição dos alunos é a seguinte:

Disciplina / Sexo	F	Q	Total
H	40	60	100
M	70	80	150
Total	110	140	250

Um aluno é sorteado ao acaso. Qual a probabilidade de que esteja cursando químia, dado que é mulher?

Pelo quadro vemos que esta probabilidade é de $\frac{80}{150}$ e representamos:

$P(Q/M) = \dfrac{80}{150}$ (probabilidade de que o aluno curse química, condicionado ao fato de ser mulher)

Observamos, porém, que $P(M \cap Q) = \frac{80}{250}$ e $P(M) = \frac{150}{250}$. Para obtermos o resultado o problema basta considerar que:

$$P(Q/M) = \frac{\frac{80}{250}}{\frac{150}{250}} = \frac{80}{150}$$

Logo:

$$P(Q/M) = \frac{P(M \cap Q)}{P(M)}$$

Sejam $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$. Definimos **Probabilidade Condicional de A dado que B ocorre** (A/B) como segue:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ se } P(B) \neq 0$$

Também:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}, \text{ se } P(A) \neq 0$$

EXEMPLO

Sendo $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$ e $P(A \cup B) = \frac{11}{12}$, calcular $P(A/B)$.

Resolução:

Como $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, devemos calcular $P(A \cap B)$.

Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, temos:

$\dfrac{11}{12} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{4} - P(A \cap B) \therefore P(A \cap B) = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$

Logo, $P(A/B) = \dfrac{1/6}{3/4} = \dfrac{2}{9}$

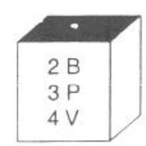
Tiramos da definição da probabilidade condicional o chamado *TEOREMA DO PRODUTO*: Sejam $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$. Então $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$ ou $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$.

EXEMPLO

Duas bolas vão ser retiradas de uma urna que contém 2 bolas brancas, 3 pretas e 4 verdes. Qual a probabilidade de que ambas

a) sejam verdes?
b) sejam da mesma cor?

Resolução:



a) $P(V \cap V) = P(V) \cdot P(V/V) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$

b) $P(MC) = P(B \cap B) + P(P \cap P) + P(V \cap V)$

$P(MC) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}$

$P(MC) = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$

A generalização do teorema do produto é:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n/A_1 \cap \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Resolvendo o Problema 6 de 2.3, usando essa generalização, temos:

$$P(A \cap R \cap A \cap R \cap A \cap S) = P(A) \cdot P(R/A) \cdot P(A/A \cap R) \cdot \cdot P(R/A \cap R \cap A) \cdot P(A/A \cap R \cap A \cap R) \cdot P(S/A \cap R \cap A \cap \cap R \cap A) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{60}$$

; EVENTOS INDEPENDENTES

ım $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$.

Intuitivamente se A e B são independentes, $P(A/B) = P(A)$ e $P(B/A) = P(B)$.

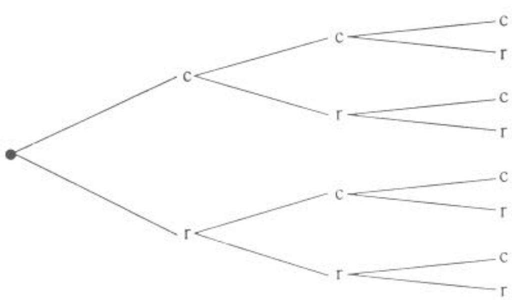
FINIÇÃO: A e B são eventos independentes se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

EMPLO

çam-se 3 moedas. Verificar se são independentes os eventos:

A: saída de cara na 1ª moeda;

B: saída de coroa na 2ª e 3ª moedas.



$\Omega = \{(ccc), (ccr), (crc), (crr), (rcc), (rcr), (rrc), (rrr)\}$

$A = \{(ccc), (ccr), (crc), (crr)\} \therefore P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$B = \{(crr), (rrr)\} \therefore P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Logo:

$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

Como

$A \cap B = \{(crr)\}$ e $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$

temos que A e B são eventos independentes, pois $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Obs. 1. Para verificarmos se 3 eventos A, B e C são independentes, devemos verificar se as 4 proposições são satisfeitas:

1 - $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$
2 - $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
3 - $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
4 - $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$

Se apenas uma não for satisfeita, os eventos não são independentes.

Obs. 2. Se A e B são *mutuamente* exclusivos, então A e B são *dependentes*, pois se A ocorre, B não ocorre, isto é, a ocorrência de um evento condiciona a não-ocorrência do outro.

Resolveremos um problema que mostrará bem a distinção entre eventos mutuamente exclusivos e independentes.

PROBLEMA

Sejam A e B eventos tais que $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = P$, $P(A \cup B) = 0{,}6$. Calcular P considerando A e B:

a) mutuamente exclusivos;
b) independentes.

Resolução:

a) A e B mutuamente exclusivos $\Rightarrow P(A \cap B) = 0$ como
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ vem $0{,}6 = 0{,}2 + P - 0 \therefore$ $\boxed{P = 0{,}4}$

b) A e B independentes $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}2 \cdot P$ como
$P(A \cup B) = P(A \cup B) = = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ vem $0{,}6 = 0{,}2 + P - 0{,}2P \therefore$
$\therefore 0{,}4 = 0{,}8P$ $\boxed{P = 0{,}5}$

Obs. 3. Se os eventos $A_1, A_2, ..., A_n$ são *independentes* então:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

onde $\prod_{i=1}^{n} P(A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2) \dots P(A_n)$.

EXEMPLO

A probabilidade de que um homem esteja vivo daqui a 30 anos é $\frac{2}{5}$; a de sua mulher é de $\frac{2}{3}$. Determinar a probabilidade de que daqui a 30 anos:

a) ambos estejam vivos;
b) somente o homem esteja vivo;
c) somente a mulher esteja viva;
d) nenhum esteja vivo;
e) pelo menos um esteja vivo.

Resolução:

Chamaremos de H: o homem estará vivo daqui a 30 anos;
M: a mulher estará viva daqui a 30 anos.

$$P(H) = \frac{2}{5} \therefore P(\overline{H}) = \frac{3}{5}$$

$$P(M) = \frac{2}{3} \therefore P(\overline{M}) = \frac{1}{3}$$

a) $P(H \cap M) = P(H) \cdot P(M) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$

b) $P(H \cap \overline{M}) = P(H) \cdot P(\overline{M}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$

c) $P(\overline{H} \cap M) = P(\overline{H}) \cdot P(M) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$

d) $P(\overline{H} \cap \overline{M}) = P(\overline{H}) \cdot P(\overline{M}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$

e) $P(H \cup M) = P(H) + P(M) - P(H \cap M) = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} - \frac{4}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

ou X: pelo menos um vivo

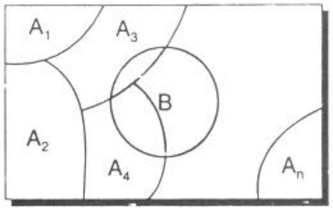
$$P(X) = 1 - P(\overline{X}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

2.6 TEOREMA DE BAYES

Teorema da Probabilidade Total

"Sejam $A_1, A_2, \dots, A_n$ eventos que formam uma partição do espaço amostral. Seja B um evento desse espaço. Então

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)\text{"}$$



Demonstração: Os eventos $(B \cap A_i)$ e $(B \cap A_j)$, para $i \neq j$, $i = 1, 2, ..., n$ e $j = 1, 2, ..., n$ são mutuamente exclusivos, pois:

$$(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = B \cap (A_i \cap A_j) = B \cap \emptyset = \emptyset$$

O evento B ocorre como segue:

$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup \dots \cup (B \cap A_n) \therefore$

$\therefore P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + \dots + P(B \cap A_n)$

e usando o teorema do produto vem:

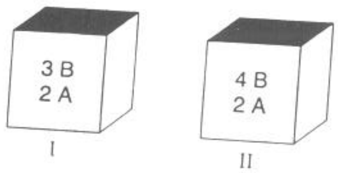
$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

ou $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)$.

EXEMPLO

Uma urna contém 3 bolas brancas e 2 amarelas. Uma segunda urna contém 4 bolas brancas e 2 amarelas. Escolhe-se, ao acaso, uma urna e dela retira-se, também ao acaso, uma bola. Qual a probabilidade de que seja branca?

...solução:



$P(I) = \frac{1}{2}$ $\qquad P(B/I) = \frac{3}{5}$

$P(II) = \frac{1}{2}$ $\qquad P(B/II) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Logo a bola branca pode ocorrer:

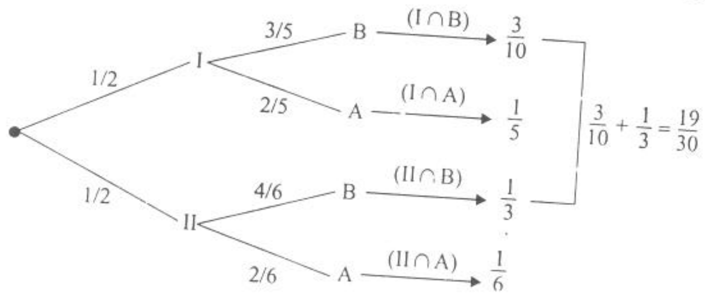
$B = (B \cap I) \cup (B \cap II)$

$P(B) = P(B \cap I) + P(B \cap II)$

$P(B) = P(I) \cdot P(B/I) + P(II) \cdot P(B/II) \therefore$

$\therefore P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{19}{30}$

...problema também pode ser resolvido usando-se o diagrama em árvore:



...a de Bayes

...$_1$, A_2, ..., A_n eventos que formam uma partição do Ω. Seja $B \subset \Omega$. Sejam co... $P(A_i)$ e $P(B/A_i)$, $i = 1, 2, ..., n$. Então:

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j) \cdot P(B/A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)}, \; j = 1, ..., n."$$

Demonstração:

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)}$$

Usando-se o Teorema do Produto e o Teorema da Probabilidade Total temos:

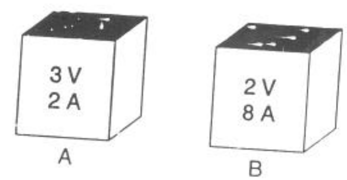
$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j) \cdot P(B/A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)}, \; j = 1, ..., n.$$

O Teorema de Bayes é também chamado de *Teorema da Probabilidade a Posteriori*. Ele relaciona uma das parcelas da probabilidade total com a própria probabilidade total.

EXEMPLO

A urna A contém 3 fichas vermelhas e 2 azuis, e a urna B contém 2 vermelhas e 8 azuis. Joga-se uma moeda "honesta". Se a moeda der cara, extrai-se uma ficha da urna A; se der coroa, extrai-se uma ficha da urna B. Uma ficha vermelha é extraída. Qual a probabilidade de ter saído cara no lançamento?

Resolução:



Queremos: $P(C/V)$

$P(C) = \frac{1}{2}$ $\qquad P(V/C) = \frac{3}{5}$

$P(r) = \frac{1}{2}$ $\qquad P(V/r) = \frac{2}{10}$

Como:

$P(V) = P(C \cap V) + P(r \cap V)$

temos:

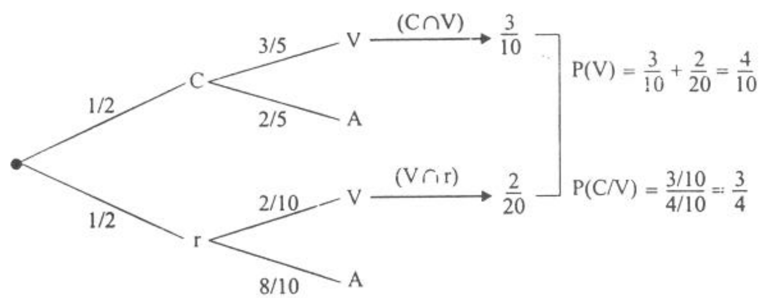
$P(V) = P(C) \cdot P(V/C) + P(r) \cdot P(V/r)$

$P(V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10} = \frac{4}{10}$

Calculamos agora P(C/V):

$$P(C/V) = \frac{P(V \cap C)}{P(V)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{3}{4}$$

O problema também pode ser resolvido pelo diagrama em árvore, como segue:



2.7 PROBLEMAS RESOLVIDOS

2.7.1 Uma urna contém 5 bolas brancas, 4 vermelhas e 3 azuis. Extraem-se simultaneamente 3 bolas. Achar a probabilidade de que:

a) nenhuma seja vermelha;
b) exatamente uma seja vermelha;
c) todas sejam da mesma cor.

a) $P(N.S.V.) = P(\overline{V} \cap \overline{V} \cap \overline{V}) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{14}{55}$

b) $P(E.U.S.V.) = P(V \cap \overline{V} \cap \overline{V}) \cdot (PR)^{3}_{2,1} = \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10} \cdot 3 = \frac{28}{55}$

c) $P(T.S.M.C.) = P(B \cap B \cap B) + P(V \cap V \cap V) + P(A \cap A \cap A) =$

$$= \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} + \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10} + \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{44}$$

2.7.2 As probabilidades de 3 jogadores A, B e C marcarem um gol quando cobram um penalti são $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}$ e $\frac{7}{10}$, respectivamente. Se cada um cobrar uma única vez, qual a probabilidade de que pelo menos um marque um gol?

$P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{4}{5}$ e $P(C) = \frac{7}{10}$

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) =$$

$$= 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{10} = 1 - \frac{1}{50} = \frac{49}{50}$$

2.7.3 Em uma indústria há 10 pessoas que ganham mais de 20 salários mínimos (s.m.), 20 que ganham entre 10 e 20 s.m. e 70 que ganham menos de 10 s.m. Três pessoas desta indústria são selecionadas. Determinar a probabilidade de que pelo menos uma ganhe menos de 10 s.m.

A: a pessoa ganha mais de 20 s.m. → $P(A) = 0{,}10$
B: a pessoa ganha entre 10 e 20 s.m. → $P(B) = 0{,}20$
C: a pessoa ganha menos de 10 s.m. → $P(C) = 0{,}70$

$$P(C \cup C \cup C) = 1 - P(\overline{C \cup C \cup C}) = 1 - P(\overline{C} \cap \overline{C} \cap \overline{C})$$

$$= 1 - P(\overline{C}) \cdot P(\overline{C}) \cdot P(\overline{C}) =$$

$$= 1 - 0{,}30 \cdot 0{,}30 \cdot 0{,}30 =$$

$$= 1 - 0{,}027 = 0{,}973$$

2.7.4 A e B jogam 120 partidas de xadrez, das quais A ganha 60, B ganha 40 e 20 terminam empatadas. A e B concordam em jogar 3 partidas. Determinar a probabilidade de:

a) A ganhar todas as três;
b) duas partidas terminarem empatadas;
c) A e B ganharem alternadamente.

$$P(A) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

$$P(E) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

a) $P(A \cap A \cap A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

b) $P(2E) = P(E \cap E \cap \bar{E}) \cdot (PR)^{3}_{2,1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot 3 = \frac{5}{72}$

c) $P(A \text{ e } B \text{ alternadamente}) = P(A \cap B \cap A) + P(B \cap A \cap B) =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} + \frac{1}{18} = \frac{5}{36}$

7.5 São retiradas uma a uma, aleatoriamente, bolas de uma urna até obter-se a primeira bola branca. Mas a cada tentativa dobra-se a quantidade de bolas azuis colocadas na urna. Sabendo que inicialmente a urna contém 4 bolas azuis e 6 brancas, calcular a probabilidade de obter-se a primeira bola branca no máximo na 3ª tentativa.

1ª tentativa $\begin{cases} 4A \\ 6B \end{cases}$

2ª tentativa $\begin{cases} 8A \\ 6B \end{cases}$

3ª tentativa $\begin{cases} 16A \\ 6B \end{cases}$

P(Primeira Branca no máx. na 3ª tentativa) =

$= P(B1^{a}) + P(A1^{a} \cap B2^{a}) + P(A1^{a} \cap A2^{a} \cap 3^{a}) =$

$= \frac{6}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{14} + \frac{4}{10} \cdot \frac{8}{14} \cdot \frac{6}{22} = 0,8338$

.7.6 Um lote de 120 peças é entregue ao controle de qualidade de uma firma. O responsável pelo setor seleciona 5 peças. O lote será aceito se forem observadas 0 ou 1 defeituosas. Há 20 defeituosas no lote. a) Qual a probabilidade de o lote ser aceito? b) admitindo-se que o lote seja aceito, qual a probabilidade de ter sido observado só um defeito?

$P(d) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$ $\qquad P(\bar{d}) = \frac{5}{6}$

a) $P(A) = P(0d \text{ ou } 1d) = P(5\bar{d}) + P(1d \text{ e } 4\bar{d}) =$

$= P(\bar{d}\,\bar{d}\,\bar{d}\,\bar{d}\,\bar{d}) + P(d\,\bar{d}\,\bar{d}\,\bar{d}\,\bar{d}) \cdot PR^{5}_{1,4} =$

$= \left(\frac{5}{6}\right)^5 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot 5 = 0,4019 + 0,4019$

$P(A) = 0,8038$

b) $P(1d/A) = \frac{P(1d \cap A)}{P(A)} = \frac{0,4019}{0,8038} = 0,5$

2.7.7 A caixa A tem 9 cartas numeradas de 1 a 9. A caixa B tem 5 cartas numeradas de 1 a 5. Uma caixa é escolhida ao acaso e uma carta é retirada. Se o número é par, qual a probabilidade de que a carta sorteada tenha vindo de A?

$P(A) = \frac{1}{2} \rightarrow P(P/A) = \frac{4}{9}$

$P(B) = \frac{1}{2} \rightarrow P(P/B) = \frac{2}{5}$

$P(P) = P(A \cap P) + P(B \cap P)$

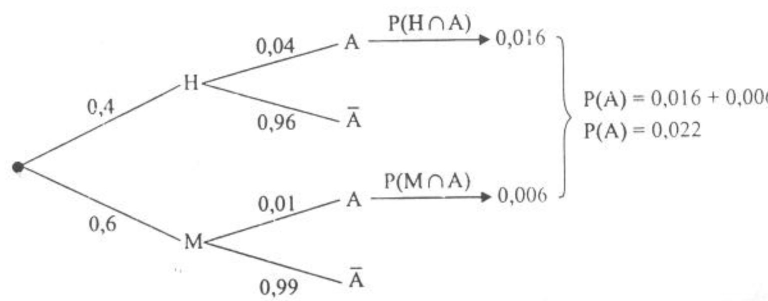
$P(P) = P(A) \cdot P(P/A) + P(B) \cdot P(P/B)$

$P(P) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{19}{45} \;\therefore$

$\therefore\; P(A/P)\ \frac{P(A \cap P)}{P(P)} = \frac{2/9}{19/45} = \frac{10}{19}$

2.7.8 Num certo colégio, 4% dos homens e 1% das mulheres têm mais de 1,75 de altura. 60% dos estudantes são mulheres. Um estudante é escolhido ao acaso e tem mais de 1,75 m. Qual a probabilidade de que seja homem?

A: o estudante tem mais de 1,75 m

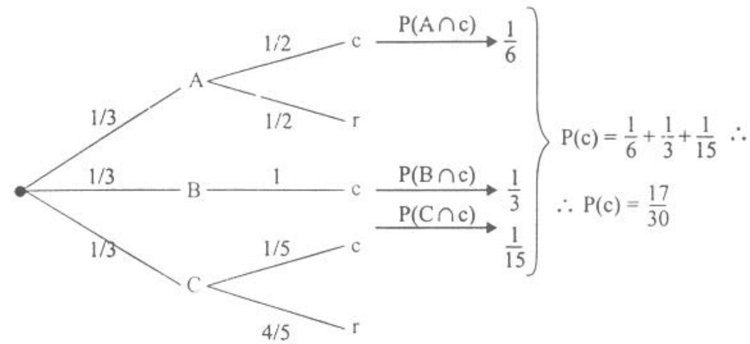


Logo:

$P(H/A) = \frac{P(H \cap A)}{P(A)} = \frac{0,016}{0,022} = \frac{8}{11}$

2.7.9 Uma caixa tem 3 moedas: uma não viciada, outra com 2 caras e uma terceira viciada, de modo que a probabilidade de ocorrer cara nesta moeda é de $\frac{1}{5}$. Uma moeda é selecionada ao acaso na caixa. Saiu cara. Qual a probabilidade de que a 3ª moeda tenha sido a selecionada?

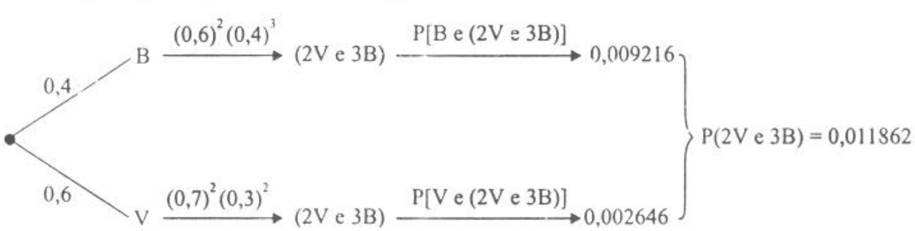
A: primeira moeda
B: segunda moeda
C: terceira moeda



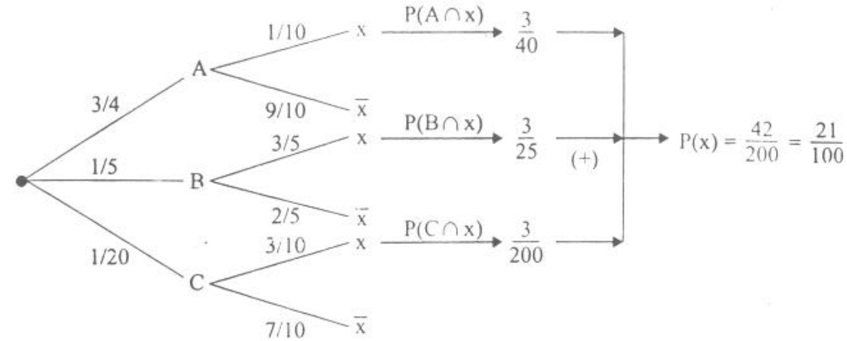
Logo:

$$P(C/c) = \frac{P(C \cap c)}{P(c)} = \frac{1/15}{17/30} = \frac{2}{17}$$

2.7.10 Uma urna contém 4 bolas brancas e 6 bolas vermelhas; outra urna contém 3 bolas brancas e 6 vermelhas. Passa-se uma bola, escolhida ao acaso, da primeira para a segunda urna, e em seguida, retiram-se 5 bolas desta última, com reposição. Qual a probabilidade de que ocorram 2 vermelhas e 3 brancas nessa ordem?



2.7.11 A probabilidade de um indivíduo da classe A comprar um carro é de $\frac{3}{4}$, da B é de $\frac{1}{5}$ e da C é de $\frac{1}{20}$. As probabilidades de os indivíduos comprarem um carro da marca x são $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{10}$, dado que sejam de A, B e C, respectivamente. Certa loja vendeu um carro da marca x. Qual a probabilidade de que o indivíduo que o comprou seja da classe B?



$$\therefore\ P(B/x) = \frac{P(B \cap x)}{P(x)} = \frac{3/25}{21/100} = \frac{4}{7}$$

2.7.12 Um certo programa pode ser usado com uma entre duas sub-rotinas A e B, dependendo do problema. A experiência tem mostrado que a sub-rotina A é usada 40% das vezes e B é usada 60% das vezes. Se A é usada, existe 75% de chance de que o programa chegue a um resultado dentro do limite de tempo. Se B é usada, a chance é de 50%. Se o programa foi realizado dentro do limite de tempo, qual a probabilidade de que a sub-rotina A tenha sido a escolhida?

$$P(A) = 0{,}4 \rightarrow P(R/A) = 0{,}75 \rightarrow P(A \cap R) = 0{,}300$$

$$P(B) = 0{,}6 \rightarrow P(R/B) = 0{,}50 \rightarrow P(B \cap R) = 0{,}300$$

Logo: $P(R) = 0{,}300 + 0{,}300 = 0{,}600$

$$P(A/R) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}3}{0{,}6} = 0{,}5 \text{ ou } 50\%.$$

2.7.13 A urna X contém 2 bolas azuis, 2 brancas e 1 cinza, e a urna Y contém 2 bolas azuis, 1 branca e 1 cinza. Retira-se uma bola de cada urna. Calcule a probabilidade de saírem 2 bolas brancas sabendo que são bolas de mesma cor.

$$P(\text{mesma cor}) = P(A \cap A) + P(B \cap B) + P(C \cap C)$$

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{4} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{7}{20}$$

$$P(\text{mesma cor}) = \frac{7}{20}$$

$$P(B \cap B/\text{mesma cor}) = \frac{P(B \cap B)}{P(\text{mesma cor})} =$$

$$= \frac{2/20}{7/20} = \frac{2}{7}$$

$$P(B \cap B)/\text{mesma cor}) = \frac{2}{7}$$

.7.14 Num período de um mês, 100 pacientes sofrendo de determinada doença foram internados em um hospital. Informações sobre o método de tratamento aplicado em cada paciente e o resultado final obtido estão no quadrado abaixo.

Resultado \ Tratamento	A	B	Soma
Cura total	24	16	40
Cura parcial	24	16	40
Morte	12	8	20
Soma	60	40	100

a) sorteando aleatoriamente um desses pacientes, determinar a probabilidade de o paciente escolhido:

a1) ter sido submetido ao tratamento A;
a2) ter sido totalmente curado;
a3) ter sido submetido ao tratamento A e ter sido parcialmente curado;
a4) ter sido submetido ao tratamento A ou ter sido parcialmente curado.

b) os eventos "morte" e "tratamento A" são independentes? Justificar.

c) sorteando dois dos pacientes, qual a probabilidade de que:

c1) tenham recebido tratamentos diferentes?
c2) pelo menos um deles tenha sido curado totalmente?

a) **a1)** $P(A) = \frac{60}{100} = 0{,}6$

a2) $P(TC) = \frac{40}{100} = 0{,}4$

a3) $P(A \cap PC) = \frac{24}{100} = 0{,}24$

a4) $P(A \cup PC) = P(A) + P(PC) - P(A \cap PC) = 0{,}6 + 0{,}4 - 0{,}24 = 0{,}76$

b) $\left.\begin{array}{l} P(M) = \frac{20}{100} = 0{,}2 \\ P(A) = 0{,}6 \end{array}\right\} P(M) \cdot P(A) = 0{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}12$

Como:

$$P(M \cap A) = \frac{12}{100} = 0{,}12$$

temos:

$$P(M \cap A) = P(M) \cdot P(A)$$

Logo, os eventos "morte" e "tratamento A" são independentes.

c) **c1)** x = tratamentos diferentes

$$P(x) = P(A \cap B) + P(B \cap A) = 2 \times 0{,}6 \times 0{,}4 = 0{,}48$$

c2) z = curado totalmente

$$P(z_1 \cup z_2) = 1 - P(\overline{z_1 \cup z_2}) = 1 - P(\overline{z}_1) \cdot P(\overline{z}_2) =$$

$$= 1 - 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$$

2.7.15 A probabilidade de que um atleta A ultrapasse 17,30 m num único salto triplo é de 0,7. O atleta dá 4 saltos. Qual a probabilidade de que em pelo menos num dos saltos ultrapasse 17,30 m?

$P(u) = 0{,}7$

e $P(\overline{u}) = 0{,}3$

$P(u_1 \cup u_2 \cup u_3 \cup u_4) = 1 - P(\overline{u}_1 \cap \overline{u}_2 \cap \overline{u}_3 \cap \overline{u}_4) =$

$= 1 - P(\overline{u}_1) \cdot P(\overline{u}_2) \cdot P(\overline{u}_3) \cdot P(\overline{u}_4) =$

$= 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 1 - 0{,}0081 = 0{,}9919$

2.7.16 Um dado A tem 3 faces brancas e 3 pretas; um dado B possui 2 faces brancas, 2 pretas e 2 vermelhas; um dado C possui 2 faces brancas e 4 pretas, e um dado D, 3 brancas e 3 pretas. Lançam-se os quatro dados. Qual a probabilidade de que:

a) pelo menos uma face seja branca?
b) três sejam pretas?

$$A\begin{cases}3B\\3P\end{cases}\qquad B\begin{cases}2B\\2P\\2V\end{cases}$$

$$C\begin{cases}2B\\4P\end{cases}\qquad D\begin{cases}3B\\3P\end{cases}$$

Cuidado: as probabilidades das cores não são as mesmas nos quatro dados.

a) $P(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4) = 1 - P(\overline{B}_1)\cdot P(\overline{B}_2)\cdot P(\overline{B}_3)\cdot P(\overline{B}_4) =$

$$= 1 - \frac{3}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

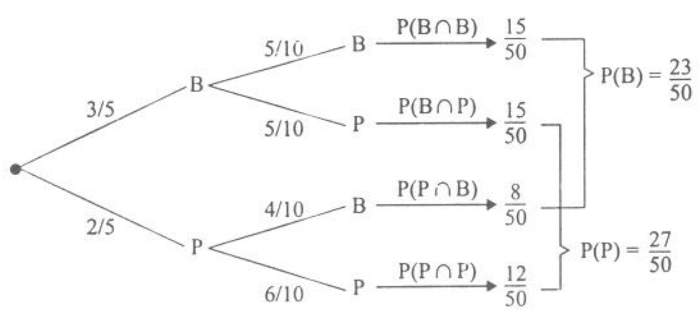
b) $P(3\ \text{Pretas}) = P(P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap \overline{P}_4) + P(P_1 \cap P_2 \cap \overline{P}_3 \cap P_4) +$

$$+ P(P_1 \cap \overline{P}_2 \cap P_3 \cap P_4) + P(\overline{P}_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4) =$$

$$= \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6} + \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6} + \frac{3}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6} +$$

$$+ \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{1}{18} + \frac{1}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

2.7.17 A urna I tem 3 bolas brancas e 2 pretas, a urna II tem 4 bolas brancas e 5 pretas, a urna III tem 3 bolas brancas e 4 pretas. Passa-se uma bola, escolhida aleatoriamente, de I para II. Feito isto, retira-se uma bola de II e retiram-se 2 bolas de III. Qual a probabilidade de saírem 3 bolas da mesma cor?

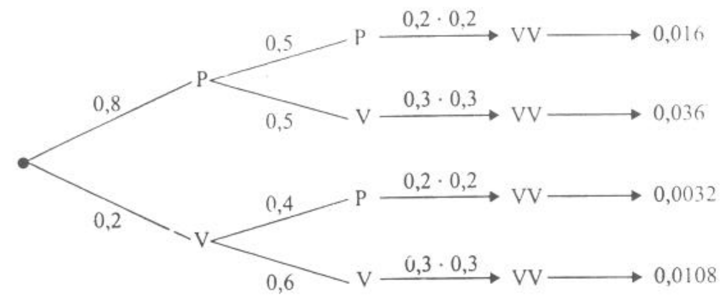


$$\text{III}\begin{cases}P(B \cap B) = \dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{2}{6}\\[2ex] P(P \cap P) = \dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{3}{6}\end{cases}$$

$$P(MC) = P(B\ \text{e}\ 2B) + P(P\ \text{e}\ 2P)$$

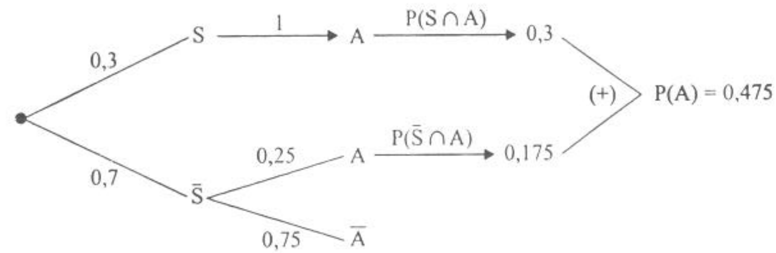
$$P(MC) = \frac{23}{50}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6} + \frac{27}{50}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} = \frac{11}{50}$$

2.7.18 Uma urna x tem 8 bolas pretas e 2 verdes. A urna y tem 4 pretas e 5 verdes e a urna z tem 2 verdes e 7 pretas. Passa-se uma bola de x para y. Feito isto, passa-se uma bola de y para z. A seguir, retiram-se 2 bolas de z, com reposição. Qual a probabilidade de que ocorram duas bolas verdes?



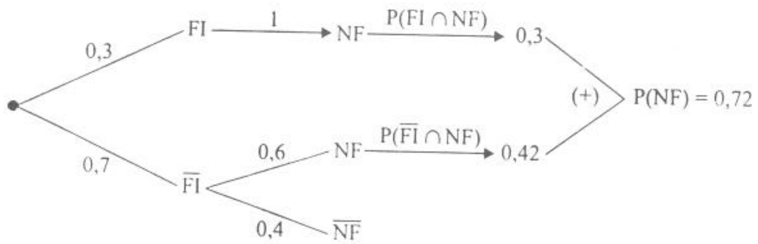
$$P(V \cap V) = 0{,}016 + 0{,}036 + 0{,}0032 + 0{,}0108 = 0{,}066$$

2.7.19 Um aluno responde a um teste de múltipla escolha com 4 alternativas com uma só correta. A probabilidade de que ele saiba a resposta certa de uma questão é de 30%. Se ele não sabe a resposta existe a possibilidade de acertar "no chute". Não existe a possibilidade de ele obter a resposta certa por "cola".
Se ele acertou a questão, qual a probabilidade de ele realmente saber a resposta?



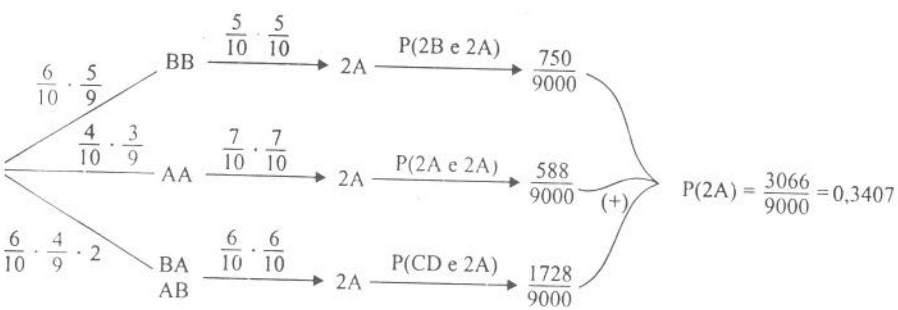
$$P(S/A) = \frac{P(S \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}3}{0{,}475} = 0{,}6316$$

2.7.20 Um analista de uma empresa fotográfica estima que a probabilidade de que uma firma concorrente planeje fabricar equipamentos para fotografias instantâneas dentro dos próximos 3 anos é 0,30. Se a firma concorrente tem tais planos, será certamente construída uma nova fábrica. Se não tem tais planos, há ainda uma probabilidade de 0,60 de que, por outras razões, construa uma nova fábrica. Se iniciou os trabalhos de construção de uma nova fábrica, qual a probabilidade de que tenha decidido entrar para o campo da fotografia instantânea?



$$P(FI/NF) = \frac{P(FI \cap NF)}{P(NF)} = \frac{0,3}{0,72} = \frac{5}{12} = 0,4167$$

.7.21 Uma urna X tem 6 bolas brancas e 4 azuis. A urna Y tem 3 bolas brancas e 5 azuis. Passam-se duas bolas de X para Y e a seguir retiram-se duas bolas de Y com reposição. Sabendo-se que ocorreram duas bolas azuis, qual a probabilidade que duas azuis tenham sido transferidas de X para Y?



$$P(2A/2A) = P\frac{(2Ae2A)}{P(2A)} = \frac{588/9000}{3066/9000} = \frac{588}{3066} = 0,1918$$

3 PROBLEMAS PROPOSTOS

3.1 A seguinte afirmação trata da probabilidade de que *exatamente* um dos eventos A ou B ocorra. Prove que:

$$P\{(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)\} = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

2.8.2 Em uma prova caíram dois problemas. Sabe-se que 132 alunos acertaram o primeiro, 86 erraram o segundo, 120 acertaram os dois e 54 acertaram apenas um problema. Qual a probabilidade de que um aluno, escolhido ao acaso:

a) não tenha acertado nenhum problema?
b) tenha acertado apenas o segundo problema?

2.8.3 Em uma cidade onde se publicam três jornais A, B e C, constatou-se que entre 1000 famílias, assinam:
A: 470, B: 420, C: 315, A e B: 110, A e C: 220, B e C: 140 e 75 assinam os três.
Escolhendo-se ao acaso uma família, qual a probabilidade de que ela:

a) não assine nenhum dos três jornais?
b) assine apenas um dos três jornais?
c) assine pelo menos dois jornais?

2.8.4 A tabela abaixo dá a distribuição das probabilidades dos quatro tipos sangüíneos, numa certa comunidade.

Tipo sangüíneo	A	B	AB	O
Probabilidade de ter o tipo especificado	0,2			
Probabilidade de não ter o tipo especificado		0,9	0,95	

Calcular a probabilidade de que:

a) um indivíduo, sorteado ao acaso nessa comunidade, tenha o tipo O;
b) dois indivíduos, sorteados ao acaso nessa comunidade, tenham tipo A e tipo B, nessa ordem;
c) um indivíduo, sorteado ao acaso nessa comunidade, não tenha o tipo B ou não tenha o tipo AB.

2.8.5 Quinze pessoas em uma sala estão usando insígnias numeradas de 1 a 15. Três pessoas são escolhidas ao acaso e são retiradas da sala. Os números de suas insígnias são anotados. Qual a probabilidade de que:

a) o menor número seja 7?
b) o maior número seja 7?

2.8.6 Uma urna contém bolas numeradas: 1, 2, 3, 4, ..., n. Duas bolas são escolhidas ao acaso. Encontre a probabilidade de que os números das bolas sejam inteiros consecutivos se a extração é feita:

a) sem reposição;
b) com reposição.

2.8.7 Colocam-se 4 números positivos e 6 negativos em 10 memórias de uma máquina de calcular (um em cada memória). Efetua-se o produto dos conteúdos de 4 memórias selecionadas ao acaso. Qual a probabilidade de que seja positivo?

2.8.8 Três cartas vão ser retiradas de um baralho de 52 cartas. Calcular a probabilidade de que:

a) todas as três sejam espadas;
b) as três cartas sejam do mesmo naipe;
c) as três cartas sejam de naipes diferentes.

2.8.9 Uma urna contém 10 bolas verdes e 6 bolas azuis. Tiram-se 2 bolas ao acaso. Qual a probabilidade de que as duas bolas:

a) sejam verdes?
b) sejam da mesma cor?
c) sejam de cores diferentes?

2.8.10 De uma caixa com 10 lâmpadas, das quais 6 estão boas, retiram-se 3 lâmpadas ao acaso e que são testadas a seguir. Qual a probabilidade de que:

a) todas acendam?
b) pelo menos uma lâmpada acenda?

2.8.11 Uma urna contém 5 bolas pretas, 3 vermelhas, 3 azuis e 2 amarelas. Extraem-se simultaneamente 5 bolas. Qual a probabilidade de que saiam 2 bolas pretas, 2 azuis e uma amarela?

2.8.12 Uma urna contém 4 bolas brancas, 4 vermelhas e 2 pretas. Outra urna contém 5 bolas brancas, 3 vermelhas e 3 pretas. Extrai-se uma bola de cada urna. Qual a probabilidade de que sejam da mesma cor?

2.8.13 Uma caixa contém 6 lâmpadas de 40 W, 3 de 60 W e 1 de 100 W. Retiram-se 5 lâmpadas com reposição. Qual a probabilidade de que:

a) saiam 3 de 40 W, 1 de 60 W e 1 de 100 W?
b) saiam 4 de 40 W e 1 de 60 W?
c) não saia nenhuma de 60 W?

2.8.14 Numa sala há 4 casais. De cada casal um dos componentes é escolhido. Qual a probabilidade de serem escolhidos 3 homens ou 4 mulheres?

2.8.15 As probabilidades de um estudante do curso básico de uma faculdade escolher entre matemática, física e estatística são 0,5, 0,3 e 0,2, respectivamente. Selecionam-se ao acaso 3 estudantes do ciclo básico desta faculdade. Qual a probabilidade de que pelo menos um escolha estatística?

2.8.16 Duas pessoas lançam, cada uma, 3 moedas. Qual a probabilidade de que tirem o mesmo número de caras?

2.8.17 De um grupo de 12 homens e 8 mulheres, retiram-se 4 pessoas para formar uma comissão. Qual a probabilidade de:

a) pelo menos uma mulher fazer parte da comissão?
b) uma mulher fazer parte da comissão?
c) haver pessoas dos dois sexos na comissão?

2.8.18 A e B alternadamente e nessa ordem, lançam independentemente 3 moedas. Ganha o primeiro que tirar faces iguais. O jogo termina com a vitória de um deles. Qual a probabilidade de A ganhar? Qual a probabilidade de B ganhar?

2.8.19 Um tabuleiro quadrado contém 9 orifícios dispostos em 3 linhas e 3 colunas. Em cada buraco cabe uma única bola. Jogam-se 3 bolas sobre o tabuleiro. Qual a probabilidade de que os orifícios ocupados não estejam alinhados?

2.8.20 Uma urna contém 1 bola azul e 9 brancas. Uma segunda urna contém x bolas azuis e as restantes brancas, num total de 10 bolas. Realizam-se 2 experimentos, separadamente e independentes entre si:

1º) retirar ao acaso uma bola de cada urna;
2º) reunir as bolas das 2 urnas e em seguida retirar 2 bolas ao acaso.

Calcular o valor mínimo de x, a fim de que a probabilidade de saírem 2 bolas azuis seja maior no 2º que no 1º experimento.

2.8.21 Duas lâmpadas ruins são misturadas com 2 lâmpadas boas. As lâmpadas são testadas uma a uma, até que 2 ruins sejam encontradas. Qual a probabilidade de que a última ruim seja encontrada no:

a) segundo teste;
b) terceiro teste;
c) quarto teste.

2.8.22 Da produção diária de peças de uma determinada máquina, 10% são defeituosas. Retiram-se 5 peças da produção dessa máquina num determinado dia. Qual a probabilidade de que:

a) no máximo duas sejam boas?
b) pelo menos quatro sejam boas?

c) exatamente três sejam boas?
d) pelo menos uma seja defeituosa?

.8.23 Quatro bolsas de estudo serão sorteadas entre 30 estudantes: 12 do primeiro ciclo e 18 do segundo ciclo. Qual a probabilidade de que haja entre os sorteados:

a) um do primeiro ciclo;
b) no máximo um do segundo ciclo;
c) pelo menos um de cada ciclo.

.8.24 A probabilidade de que a porta de uma casa esteja trancada à chave é de $\frac{3}{5}$. Há 10 chaves em um chaveiro. Qual a probabilidade de que um indivíduo entre na casa podendo utilizar, se necessário, apenas uma das chaves, tomada ao acaso do chaveiro?

.8.25 Em uma urna estão colocadas 5 bolas azuis e 10 bolas brancas.

a) Retirando-se 5 bolas, sem reposição, calcular a probabilidade;
  a_1) de as três primeiras serem azuis e as duas últimas brancas;
  a_2) de ocorrer 3 bolas azuis e duas brancas.
b) Retirando-se 2 bolas, sem reposição, calcular a probabilidade:
  b_1) de a segunda ser azul;
  b_2) de ter sido retirada a primeira branca, sabendo-se que a segunda é azul.

2.8.26 Num supermercado há 2000 lâmpadas, provenientes de 3 fábricas distintas X, Y e Z. X produziu 500, das quais 400 boas. Y produziu 700, das quais 600 boas, e Z as restantes, das quais 500 boas. Se sortearmos ao acaso uma das lâmpadas nesse supermercado, qual a probabilidade de que:

a) seja boa?
b) sendo defeituosa, tenha sido fabricada por X?

2.8.27 Uma em cada dez moedas apresenta o defeito de ser viciada, isto é, a probabilidade de obtermos cara nessa moeda é 0,8. Sorteamos ao acaso uma moeda e a lançamos 5 vezes, obtendo-se 3 caras e 2 coroas. Qual a probabilidade de termos escolhido a moeda viciada?

2.8.28 Uma urna contém 3 bolas brancas e 4 azuis. Uma outra contém 4 brancas e 5 azuis. Passa-se uma bola da primeira para a segunda urna, e em seguida, extrai-se uma bola da segunda urna. Qual a probabilidade de ser branca?

2.8.29 Uma pessoa joga um dado. Se sair 6, ganha a partida. Se sair 3, 4 ou 5, perde. Se sair 1 ou 2, tem o direito de jogar novamente. Desta vez, se sair 4, ganha, e se sair outro número, perde. Qual a probabilidade de ganhar?

2.8.30 A urna A tem 3 bolas pretas e 4 brancas. A urna B tem 4 bolas brancas e 5 pretas. Uma bola é retirada ao acaso da urna A e colocada na urna B. Retiram-se ao acaso 2 bolas da urna B. Qual a probabilidade de que:

a) ambas sejam da mesma cor?
b) ambas sejam de cores diferentes?

2.8.31 A fábria A produziu 4000 lâmpadas e a fábrica B 6000 lâmpadas. 80% das lâmpadas de A são boas e 60% das de B são boas também. Escolhe-se uma lâmpada ao acaso das 10000 lâmpadas. Qual a probabilidade que:

a) seja boa sabendo-se que é da marca A?
b) seja boa?
c) seja defeituosa e da marca B?
d) sendo defeituosa, tenha sido fabricada por B?

2.8.32 A porcentagem de carros com defeito entregue no mercado por certa montadora é historicamente estimada em 6%. A produção da montadora vem de três fábricas distintas, da matriz A e das filiais B e C, nas seguintes proporções: 60%, 30% e 10%, respectivamente. Sabe-se que a proporção de defeitos na matriz A é o dobro da filial B e, da filial B é o quádruplo da filial C. Determinar a porcentagem de defeito de cada fábrica.

2.8.33 Uma urna contém 4 bolas brancas e 5 pretas. 2 bolas são retiradas ao acaso dessa urna e substituídas por 2 bolas verdes. Depois disto, retiram-se 2 bolas. Qual a probabilidade de saírem bolas brancas?

2.8.34 A urna I tem 3 bolas brancas e 2 pretas. A urna II tem 4 bolas brancas e 5 pretas, e a urna III tem 3 bolas brancas e 4 pretas. Passa-se uma bola, escolhida aleatoriamente, de I para II. Depois disso, passa-se uma bola da urna II para a urna III e em seguida retiram-se 2 bolas de III. Qual a probabilidade de saírem 2 bolas brancas?

2.8.35 Uma urna tem 5 bolas verdes, 4 azuis e 5 brancas. Retiram-se 3 bolas com reposição. Qual a probabilidade de que no máximo duas sejam brancas?

2.8.36 Num congresso científico, a composição de 4 comissões A, B, C e D é a seguinte: 5 homens (h) e 5 mulheres (m), 3 h e 7 m, 4 h e 6 m e 6 h e 4 m, respectivamente. Uma pessoa é escolhida ao acaso de cada comissão e é formada uma nova comissão E. Qual a probabilidade de que E seja composta por:

a) 2 mulheres;
b) pessoas do mesmo sexo;
c) somente por homens.

2.8.37 A experiência mostra que determinado aluno A tem probabilidade 0,9 de resolver e acertar um exercício novo que lhe é proposto. Seis novos exercícios são apresentados ao aluno A para serem resolvidos. Qual a probabilidade de que resolva e acerte:

a) no máximo 2 exercícios;
b) pelo menos um exercício;
c) os seis exercícios.

2.8.38 A urna I tem 3 bolas brancas e 4 pretas. A urna II tem 4 bolas brancas e 5 pretas. A urna III tem 3 bolas brancas e 2 pretas e a urna IV tem 4 bolas brancas e 3 pretas. Passa-se uma bola, escolhida ao acaso de I para II e também passa-se uma bola, escolhida ao acaso, de III para IV. Feito isto, retira-se uma bola da urna II e uma bola da urna IV. Qual a probabilidade de saírem bolas da mesma cor?

2.8.39 Uma urna tem 3 bolas brancas, 3 pretas e 4 azuis. 2 bolas são retiradas ao acaso dessa urna e substituídas por 5 vermelhas. Depois disso, retira-se 1 bola. Qual a probabilidade de sair bola azul?

2.8.40 Uma caixa A contém 6 bolas azuis e 4 vermelhas, e outra B contém 4 bolas azuis e 6 vermelhas. Uma pessoa extrai ao acaso uma bola de uma das caixas. A probabilidade de que seja azul é 0,44. Qual a preferência (probabilidade) da pessoa pela caixa A?

2.8.41 São dadas as urnas A, B e C. Da urna A é retirada uma bola e colocada na urna B. Da urna B retira-se uma bola que é colocada na urna C. Retira-se então uma bola da urna C. A probabilidade de ocorrer bola de cor vermelha é 0,537. Determinar o valor de x sabendo que as urnas têm as seguintes composições:

$$A\begin{cases}7 \text{ vermelhas}\\ 3 \text{ brancas}\end{cases} \qquad B\begin{cases}3 \text{ vermelhas}\\ 6 \text{ brancas}\end{cases} \qquad C\begin{cases}(9-x) \text{ vermelhas}\\ x \text{ brancas}\end{cases}$$

2.8.42 Uma empresa produz o produto X em 3 fábricas distintas A, B e C, como segue: a produção de A é 2 vezes a de B, e a de C é 2 vezes a de B. O produto X é armazenado em um depósito central. As proporções de produção defeituosa são: 5% de A, 3% de B e 4% de C. Retira-se uma unidade de X do depósito e verifica-se que é defeituoso. Qual a probabilidade de que tenha sido fabricado por B?

2.8.43 Três máquinas A, B e C produzem, respectivamente, 40%, 50% e 10% da produção da empresa X. Historicamente as porcentagens de peças defeituosas produzidas em cada máquina são: 5%, 3% e 3%, respectivamente. A empresa X contratou um engenheiro para fazer uma revisão nas máquinas e no processo de produção. Tal engenheiro conseguiu reduzir pela metade a probabilidade de peças defeituosas da empresa e, ainda, igualou as porcentagens de defeitos das máquinas A e B, e a porcentagem de defeitos em C ficou na metade da conseguida para B. Quais são as novas porcentagens de defeitos de cada máquina?

MAKRON *Books*

3 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

3.1 DEFINIÇÕES

Na prática é, muitas vezes, mais interessante associarmos um número a um evento aleatório e calcularmos a probabilidade da ocorrência desse número do que a probabilidade do evento.

Introduziremos o conceito de variáveis aleatórias discretas com o seguinte problema:

Lançam-se três moedas. Seja X: número de ocorrências da face cara. Determinar a distribuição de probabilidade de X.

O espaço amostral do experimento é:

$\Omega = \{(c, c, c), (c, c, r), (c, r, c), (c, r, r), (r, c, c), (r, c, r), (r, r, c), (r, r, r)\}$

Se X é o número de caras, X assume os valores 0, 1, 2 e 3. Podemos associar a esses números eventos que correspondam à ocorrência de nenhuma, uma, duas ou três caras respectivamente, como segue:

X	Evento correspondente
0	$A_1 = \{(r, r, r)\}$
1	$A_2 = \{(c, r, r), (r, c, r), (r, r, c)\}$
2	$A_3 = \{(c, c, r), (c, r, c), (r, c, c)\}$
3	$A_4 = \{(c, c, c)\}$

①

Podemos também associar às probabilidades de X assumir um dos valores, as probabilidades dos eventos correspondentes:

$$P(X = 0) = P(A_1) = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 1) = P(A_2) = \frac{3}{8} \qquad ②$$

$P(X = 2) = P(A_3) = \frac{3}{8}$

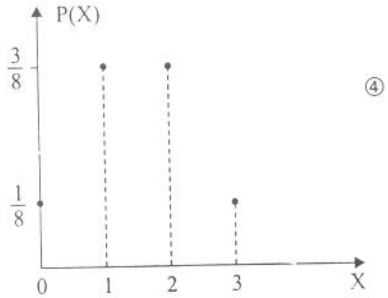
$P(X = 3) = P(A_4) = \frac{1}{8}$

Esquematicamente:

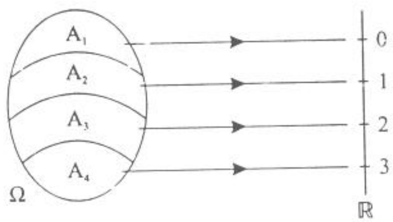
X	P(X)
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8
	1

③

Graficamente:



Observamos que em ① fizemos o seguinte tipo de associação:



Então podemos dar a seguinte *definição*: *variável aleatória* é a função que associa a todo evento pertencente a uma partição do espaço amostral um único número real.

Notamos que a variável aleatória para ser discreta deve assumir valores em um conjunto finito ou em um conjunto infinito, porém enumerável.

Indicaremos, no caso finito:

$$X: x_1, x_2, ..., x_n$$

Por ② podemos definir Função de Probabilidade.

DEFINIÇÃO. *Função de Probabilidade* é a função que associa a cada valor assumido pela variável aleatória a probabilidade do evento correspondente, isto é:

$$P(X = x_i) = P(A_i),\ i = 1, 2, ..., n$$

Ao conjunto $\{(x_i, p(x_i)), i = 1, ..., n\}$ damos o nome de *Distribuição de Probabilidades* da variável aleatória X como no quadro ③ e gráfico ④.

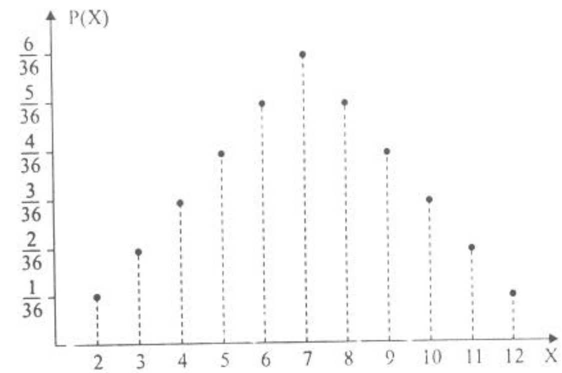
É importante verificar que para que haja uma distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é necessário que:

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$$

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

1. Lançam-se 2 dados. Seja X: soma das faces. Determinar a distribuiçao de probabilidades de X.

X	P(X)
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36
	1



2. Suponhamos que a variável aleatória X tenha função de probabilidade dada por:

$$P(X = j) = \frac{1}{2^j},\ j = 1, 2, 3, ..., n, ...$$

Calcular:

a) P(X ser par);

b) $P(X \geq 3)$;

c) P(X ser múltiplo de 3).

Resolução:

X	1	2	3	4	5	...	
P(X)	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	...	1

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1/2}{1 - 1/2} = \frac{1/2}{1/2} = 1$$

a) $P(X \text{ ser par}) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + \ldots =$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots = \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

b) $P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + \ldots =$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = \frac{1/8}{1 - 1/2} = \frac{1/8}{1/2} = \frac{1}{4} \text{ ou}$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \{P(X = 1) + P(X = 2)\} =$$

$$= 1 - \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right\} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

c) $P(X \text{ ser múltiplo de } 3) = P(X = 3) + P(X = 6) + \ldots =$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \ldots = \frac{1/8}{1 - 1/8} = \frac{1/8}{7/8} = \frac{1}{7}$$

3.2 ESPERANÇA MATEMÁTICA

Existem características numéricas que são muito importantes em uma distribuição de probabilidades de uma variável aleatória discreta. São os parâmetros das distribuições.

Um primeiro parâmetro é a Esperança Matemática (ou simplesmente média) de uma variável aleatória.

Introduzimos o conceito com o seguinte problema:

Uma seguradora paga R\$30.000,00 em caso de acidente de carro e cobra uma taxa de R\$1.000,00. Sabe-se que a probabilidade de que um carro sofra acidente é de 3%. Quanto espera a seguradora ganhar por carro segurado?

Resolução: Suponhamos que entre 100 carros segurados, 97 dão lucro de R\$1.000,00 e 3 dão prejuízo de R\$29.000,00 (R\$30.000,00 – R\$1.000,00).

Lucro total = 97 · R\$ 1 000,00 – 3 · R\$29 000,00 = R\$10 000,00

Lucro médio por carro = R\$10.000,00 : 100 = R\$100,00

Se chamarmos de X: lucro por carro e o lucro médio por carro de E(X), teremos:

$$E(X) = \frac{97 \cdot 1.000{,}00 - 3 \cdot 29.000{,}00}{100} =$$

$$= \frac{97}{100} \cdot 1.000{,}00 - \frac{3}{100} \cdot 29.000{,}00 =$$

$$= 0{,}97 \cdot 1.000{,}00 - 0{,}03 \cdot 29.000{,}00$$

$$\boxed{\therefore\ E(X) = x_1 \cdot p(x_1) + x_2 \cdot p(x_2)}$$

$$\text{onde} \begin{cases} x_1 = 1.000{,}00 \text{ e } p(x_1) = 0{,}97 \\ x_2 = -29.000{,}00 \text{ e } p(x_2) = 0{,}03 \end{cases}$$

Seja X: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $P(X = x_i) = p(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

DEFINIÇÃO

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i)$$

A esperança matemática é um número real. É também uma média aritmética ponderada, como foi visto no exemplo. Notação: $E(X)$, $\mu(x)$, μ_x, μ.

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

1. Resolução do problema pela definição.

X: "Lucro" por carro. Fazendo uma tabela, temos:

X	P(X)	X · P(X)
1 000	0,97	970,00
– 29 000	0,03	– 870,00
	1	100,00

$\therefore$ $\boxed{E(X) = \text{R\$}100{,}00}$

isto é, o lucro médio por carro é de R\$100,00.

2. No problema da pág. 41, calcular E(X).

Resolução:

X	P(X)	X · P(X)
0	1/8	0
1	3/8	3/8
2	3/8	6/8
3	1/8	3/8
	1	12/8 = 1,5

$\therefore$ $\boxed{E(X) = 1{,}5}$

ou o número médio de caras no lançamento de 3 moedas é 1,5 caras.

3. Suponhamos que um número seja sorteado de 1 a 10, inteiros positivos. Seja X: número de divisores do número sorteado. Calcular o número médio de divisores do número sorteado.

Resolução:
X: número de divisores, logo:

Nº	Nº de divisores
1	1
2	2
3	2
4	3
5	2
6	4
7	2
8	4
9	3
10	4

X	P(X)	X · P(X)
1	1/10	1/10
2	4/10	8/10
3	2/10	6/10
4	3/10	12/10
	1	2,7

$\therefore$ $\boxed{E(X) = 2{,}7}$ número médio de divisores do número sorteado.

4. Num jogo de dados, A paga R$20,00 a B e lança 3 dados. Se sair face 1 em um dos dados apenas, A ganha R$20,00. Se sair face 1 em dois dados apenas, A ganha R$50,00, e se sair 1 nos três dados, A ganha R$80,00. Calcular o lucro líquido médio de A em uma jogada.

Resolução:

	RECEBE	PAGA	LUCRO LÍQUIDO
A: apenas uma face 1	20	20	0
B: apenas duas faces 1	50	20	30
C: três faces 1	80	20	60
D: nenhuma face 1	0	20	– 20

$\therefore$ X: – 20, 0, 30, 60

Observamos que:

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot 3 = \frac{75}{216}$$

$$P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot 3 = \frac{15}{216}$$

$$P(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

$$P(D) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$

Fazendo o dispositivo prático:

X	P(X)	X · P(X)
– 20	125/216	– 2.500/216
0	75/216	0
30	15/216	450/216
60	1/216	60/216
	1	– 1.990/216

$\boxed{E(X) = -9{,}21}$

PROPRIEDADES DA ESPERANÇA MATEMÁTICA

1. $E(k) = k$, k: constante.

Demonstração:

$$E(k) = \sum_{i=1}^{n} k \cdot p(x_i) = k \cdot \sum_{i=1}^{n} p(x_i) = k \cdot 1 = k$$

2. $E(k \cdot X) = k \cdot E(X)$

Demonstração

$$E(k \cdot X) = \sum_{i=1}^{n} k \cdot x_i \cdot p(x_i) = k \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i) = k \cdot E(X)$$

3. $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$

Essa propriedade será demonstrada posteriormente (pág. 60).

4. $E\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} \{E(X_i)\}$

5. $E(aX \pm b) = aE(X) \pm b$, a e b constantes.

Demonstração:

$E(aX \pm b) = E(aX) \pm E(b) = aE(X) \pm b$

6. $E(X - \mu_X) = 0$

Demonstração:

$E(X - \mu_x) = E(X) - E(\mu_x) = E(X) - \mu_X = 0$

3.3 VARIÂNCIA

O fato de conhecermos a média de uma distribuição de probabilidades já nos ajuda bastante, porém não temos uma medida que nos dê o grau de dispersão de probabilidade em torno dessa média.

Vimos que o desvio médio, $E\{X - \mu_x\}$ é nulo, logo não serve como medida de dispersão.

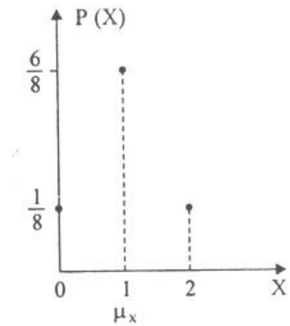
A medida que dá o grau de dispersão (ou de concentração) de probabilidade em torno da média é a Variância.

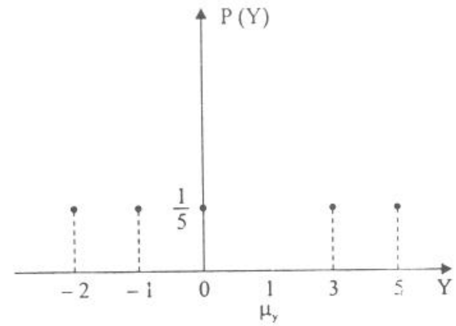
Para efetuarmos o estudo da variância consideraremos as distribuições das variáveis aleatórias X e Y com as suas respectivas médias.

X	P(X)	X · P(X)
0	1/8	0
1	6/8	6/8
2	1/8	2/8
	1	$\mu_X = 1$

Y	P(Y)	Y · P(Y)
− 2	1/5	− 2/5
− 1	1/5	− 1/5
0	1/5	0
3	1/5	3/5
5	1/5	5/5
	1	$\mu_Y = 1$

Faremos os gráficos das duas distribuições, para termos uma melhor idéia da concentração ou dispersão de probabilidades em torno da média, que é 1.





Notamos que há uma *grande concentração* de probabilidades *em X* e uma *grande dispersão em Y*, com relação à média.

Definiremos, agora, variância.

$$\boxed{VAR(X) = E\{[X - E(X)]^2\}}$$

No caso discreto, seja X: $x_1, x_2, ..., x_n$ e $P(X = x_i) = p(x_i)$, $i = 1, 2, ..., n$.

DEFINIÇÃO

$$VAR(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_X)^2 \cdot p(x_i)$$

Notação:

$VAR(X)$, $V(X)$, $\sigma^2(X)$, σ_X^2, σ^2

Calcularemos a VAR (X) do exemplo com essa fórmula:

X	P(X)	X · P(X)	$(X - \mu_x)$	$(X - \mu_x)^2$	$(X - \mu_x)^2 \cdot P(X)$
0	1/8	0	– 1	1	1/8
1	6/8	6/8	0	0	0
2	1/8	2/8	1	1	1/8
	1	$\mu_x = 1$			VAR (X) = 0,25

Deduziremos uma fórmula mais fácil operacionalmente de ser aplicada.

$$\begin{aligned} VAR\ (X) &= E\ \{[X - \mu_x]\}^2 = E\ \{X^2 + \mu_x^2 - 2\mu_x \cdot X\} = \\ &= E\ (X^2) + E\ (\mu_x^2) - E\ (2\mu_x \cdot X) = \\ &= E\ (X^2) + \mu_x^2 - 2\mu_x \cdot E\ (X) = E\ (X^2) + \mu_x^2 - 2\mu_x^2 = \\ &= E\ (X^2) - \mu_x^2 \text{ ou} \end{aligned}$$

$$\boxed{VAR\ (X) = E\ (X^2) - \{E(X)\}^2}$$

onde $E\ (X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p\ (x_i)$.

Calcularemos a VAR (Y) usando essa fórmula.

Y	P(Y)	Y · P(Y)	$Y^2 \cdot P(Y)$
– 2	1/5	– 2/5	4/5
– 1	1/5	– 1/5	1/5
0	1/5	0	0
3	1/5	3/5	9/5
5	1/5	5/5	25/5
	1	$\mu_y = 1$	$E\ (Y^2) = 39/5$

$VAR\ (Y) = E\ (Y^2) - \{E\ (Y)\}^2$

$VAR\ (Y) = \frac{39}{5} - 1^2$

$VAR\ (Y) = \frac{34}{5} = 6{,}8$

$$\boxed{VAR\ (Y) = 6{,}8}$$

Observando novamente os gráficos e os valores de VAR (X) e VAR (Y), concluímos que: *Quanto menor a variância, menor o grau de dispersão de probabilidades em torno da média e vice-versa; quanto maior a variância, maior o grau de dispersão da probabilidade em torno da média.*

A variância é um quadrado, e muitas vezes o resultado torna-se artificial. Por exemplo: a altura média de um grupo de pessoas é 1,70 m e variância 25 cm^2. Fica um tanto quanto esquisito cm^2 em altura.

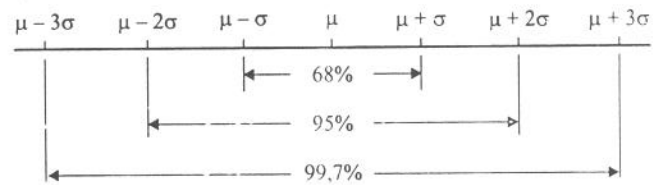
Contornamos esse "problema" definindo *Desvio Padrão.*

DEFINIÇÃO. *Desvio Padrão* da variável X é a raiz quadrada da variância de X, isto é:

$$\sigma_x = \sqrt{VAR\ (X)}.$$

$$\text{Nos exemplos } \begin{cases} \sigma_x = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5 \\ \sigma_y = \sqrt{6{,}8} = 2{,}61 \end{cases}$$

Usando a tabela da distribuição normal (que será estudada posteriormente), vemos que no intervalo de $(\mu - \sigma)$ a $(\mu + \sigma)$ o grau de concentração de probabilidades em torno da média é de 68%; no intervalo de $(\mu - 2\sigma)$ a $(\mu + 2\sigma)$, o grau de concentração de probabilidades em torno da média é de 95% e essa concentração é de 99,7% no intervalo de $(\mu - 3\sigma)$ a $(\mu + 3\sigma)$.



Exemplificando, se dissermos que a altura média (μ) do homem brasileiro adulto é de 1,70 m e desvio padrão (σ) 5 cm, estaremos dizendo que entre:

1,65 m e 1,75 m encontramos 68% da população masculina adulta brasileira
1,60 m e 1,80 m encontramos 95% da população masculina adulta brasileira
1,55 m e 1,85 m encontramos 99,7% da população masculina adulta brasileira

EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Os empregados A, B, C e D ganham 1, 2, 2 e 4 salários mínimos, respectivamente. Retiram-se amostras com reposição de 2 indivíduos e mede-se o salário médio da amostra retirada. Qual a média e desvio padrão do salário médio amostral?

X
1
2

Amostras	Salário médio
A, A	1,0
A, B	1,5
A, C	1,5
A, D	2,5
B, A	1,5
B, B	2,0
B, C	2,0
B, D	3,0

Amostras	Salário médio
C, A	1,5
C, B	2,0
C, C	2,0
C, D	3,0
D, A	2,5
D, B	3,0
D, C	3,0
D, D	4,0

Seja X: salário médio amostral

X	P(X)	X · P(X)	$X^2 \cdot P(X)$
1,0	1/16	1/16	1/16
1,5	4/16	6/16	9/16
2,0	4/16	8/16	16/16
2,5	2/16	5/16	12,5/16
3,0	4/16	12/16	36/16
4,0	1/16	4/16	16/16
	1	$\mu = 9/4$	$E(X^2) = 90{,}5/16$

Logo:

$E(X) = \frac{9}{4} = 2{,}25$, média do salário médio amostral.

$$VAR(X) = \frac{90{,}5}{16} - \left(\frac{9}{4}\right)^2 = 0{,}59375$$

$\boxed{\sigma_x = 0{,}77}$ desvio padrão do salário médio amostral.

PROPRIEDADES DA VARIÂNCIA

1. $VAR(k) = 0$, k: constante

Demonstração:

$VAR(k) = E\{[k - E(k)]^2\} = E\{[k - k]^2\} = 0$

2. $VAR(k \cdot X) = k^2 \cdot VAR(X)$

$$VAR(k \cdot X) = E\{[kX - E(kX)]^2\} = E\{[kX - kE(X)]^2\} =$$
$$= E\{k^2[X - E(X)]^2\} = k^2 \cdot E\{[X - E(X)]^2\} =$$
$$k^2 \cdot VAR(X)$$

3. $VAR(X \pm Y) = VAR(X) + VAR(Y) \pm 2\,cov(X, Y)$

$VAR(X \pm Y) = E\{[(X \pm Y) - E(X \pm Y)]^2\}$

Demonstração:

$$= E\{[(X - E(X)) \pm (Y - E(Y))]^2\} =$$
$$= E\{[X - E(X)]2 \pm [Y - E(Y)]^2 \pm$$
$$\pm 2[X - E(X)] \cdot [Y - E(Y)]\} =$$
$$= E\{[X - E(X)]^2\} + E\{[Y - E(Y)]^2\} +$$
$$\pm 2E\{[X - E(X)] \cdot [Y - E(Y)]\} =$$
$$= VAR(X) + VAR(Y) \pm 2\,cov(X, Y)$$

DEFINIÇÃO. *COVARIÂNCIA ENTRE X e Y.*

$$cov(X, Y) = E\{[X - E(X)] \cdot [Y - E(Y)]\}$$

A *covariância* mede o grau de dependência entre as duas variáveis X e Y.

4. $VAR\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} VAR(X_i) + 2\sum_{i<j}^{n} cov(X_i, X_j)$

5. $VAR(aX \pm b) = a^2\,VAR(X)$, a e b constantes.

Demonstração:

$VAR(aX \pm b) = VAR(aX) + VAR(b) \pm 2\,cov(aX, b)$

como $cov(aX, b) = E\{[aX - E(aX)][b - E(b)]\} = 0$, temos

$VAR(aX \pm b) = a^2\,VAR(X)$

3.4 DISTRIBUIÇÃO CONJUNTA DE DUAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Muitas vezes estaremos interessados em estudar mais de um resultado de um experimento aleatório. Faremos, apenas, o estudo das variáveis aleatórias bidimensionais.

Introduziremos esse assunto com o seguinte problema:

Dado o quadro a seguir, referente ao salário e tempo de serviço de dez operários, determinar a distribuição conjunta de probabilidade da variável X: salário (reais) e da variável Y: tempo de serviço em anos.

Operário	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
X	500	600	600	800	800	800	700	700	700	600
Y	6	5	6	4	6	6	5	6	6	5

Faremos uma tabela de dupla entrada onde, no corpo da mesma, colocaremos a probabilidade conjunta das variáveis X e Y.

Assim, por exemplo: $P(X = 500, Y = 4) = 0$, pois não há nenhum operário que ganhe 500 e tenha 4 anos de serviço.

$P(X = 600, Y = 5) = \frac{2}{10}$, pois temos dois operários que ganham 600 e têm 5 anos de serviço. De modo análogo, calcularemos as demais probabilidades conjuntas, que aparecem no quadro.

X \ Y	4	5	6	Totais das linhas
500	0	0	1/10	1/10
600	0	2/10	1/10	3/10
700	0	1/10	2/10	3/10
800	1/10	0	2/10	3/10
Totais das colunas	1/10	3/10	6/10	1

①

FUNÇÃO DE PROBABILIDADE CONJUNTA

Seja X uma variável aleatória que assume os valores $x_1, x_2, ..., x_m$ e Y uma variável aleatória que assume os valores $y_1, y_2, ..., y_n$.

DEFINIÇÃO. A função de probabilidade conjunta associa a cada par (x_i, y_j), $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$, a probabilidade $P(X = x_i, Y = y_j) = p(x_i; y_j)$.

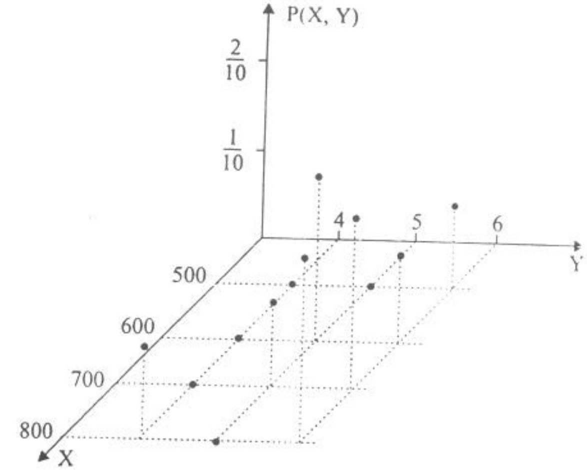
Damos o nome de *distribuição conjunta de probabilidades da variável bidimensional (X, Y)* ao conjunto:

$$\{(x_i, y_j), p(x_i, y_j), i = 1, ..., m \text{ e } j = 1, ..., n\}$$

Observamos que:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} P(X = x_i, Y = y_j) = 1$$

A representação gráfica da variável bidimensional (X, Y) é:



DISTRIBUIÇÕES MARGINAIS DE PROBABILIDADES

Distribuição Marginal de X

Da tabela ① tiramos a tabela:

X	P(X)
500	1/10
600	3/10
700	3/10
800	3/10
	1

A Probabilidade Marginal de $X = 600$ é:

$$P(X = 600, Y = 4) + P(X = 600, Y = 5) + P(X = 600, Y = 6) =$$
$$= 0 + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

Logo podemos definir *Probabilidade Marginal* de $X = x_i$, i = fixo.

DEFINIÇÃO

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{n} P(X = x_i, Y = y_j), \; i = 1, 2, ..., m$$

e

$$\sum_{i=1}^{m} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p(x_i, y_j) = 1$$

DISTRIBUIÇÃO MARGINAL DE Y

Da tabela ① tiramos a tabela:

Y	P(Y)
4	1/10
5	3/10
6	6/10
	1

Observamos que a probabilidade marginal de Y = 6 é:

$$P(X = 500, Y = 6) + P(X = 600, Y = 6) + P(X = 700, Y = 6) +$$

$$+ P(X = 800, Y = 6) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{2}{10} = \frac{6}{10}$$

Logo podemos definir a *Probabilidade Marginal* de $Y = y_j$, j = fixo.

DEFINIÇÃO

$$P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{m} P(X = x_i, Y = y_j), \; j = 1, 2, ..., n$$

e

$$\sum_{j=1}^{n} P(Y = y_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p(x_i, y_j)$$

Podemos, dada a distribuição conjunta de probabilidade mostrada na tabela ①, calcular E(X): salário médio e E(Y): tempo médio de serviço.

X	P(X)	X · P(X)
500	1/10	500/10
600	3/10	1800/10
700	3/10	2100/10
800	3/10	2400/10
	1	680

$\therefore$ $\boxed{E(X) = 680}$

O salário médio dos operários é de R$680,00

Y	P(Y)	Y · P(Y)
4	1/10	4/10
5	3/10	15/10
6	6/10	36/10
	1	5,5

$\therefore$ $\boxed{E(Y) = 5{,}5}$

O tempo médio de serviço dos operários é 5 anos e meio.

DISTRIBUIÇÕES CONDICIONAIS

Poderemos estar interessados em calcular o salário médio dos operários com 5 anos de serviço, por exemplo.

Queremos

$E(X/Y = 5)$

DEFINIÇÃO

$$P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P(X = x_i; Y = y_j)}{P(Y = y_j)}, \quad \begin{array}{l} j = \text{fixo} \\ i = 1, 2, ..., m \end{array}$$

e $P(Y = y_j) \neq 0$

DEFINIÇÃO

$$P(Y = y_j / X = x_i) = \frac{P(X = x_i; Y = y_j)}{P(X = x_i)}, \quad \begin{array}{l} i = \text{fixo} \\ j = 1, 2, ..., n \end{array}$$

e $P(X = x_i) \neq 0$

DEFINIÇÃO

$$E(X/Y = y_j) = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot p(x_i/y_j) = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot \frac{p(x_i; y_j)}{p(y_j)}, \quad \begin{array}{l} j = 1, ..., n \\ j = \text{fixo} \end{array}$$

DEFINIÇÃO

$$E(Y/X = x_i) = \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot p(y_j/x_i) = \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot \frac{p(x_i; y_j)}{p(x_i)}, \quad \begin{matrix} i = \text{fixo} \\ i = 1, 2, \ldots, m \end{matrix}$$

Assim:

$$P(X = 500/Y = 5) = \frac{P(X = 500, Y = 5)}{P(Y = 5)} = \frac{0}{3/10} = 0$$

$$P(X = 600/Y = 5) = \frac{P(X = 600, Y = 5)}{P(Y = 5)} = \frac{2/10}{3/10} = \frac{2}{3}$$

$$P(X = 700/Y = 5) = \frac{P(X = 700, Y = 5)}{P(Y = 5)} = \frac{1/10}{3/10} = \frac{1}{3}$$

e

$$P(X = 800/Y = 5) = \frac{P(X = 800, Y = 5)}{P(Y = 5)} = \frac{0}{3/10} = 0$$

Calculando E(X/Y = 5) temos:

X	P(X/Y = 5)	X · P(X/Y = 5)
500	0	0
600	2/3	1200/3
700	1/3	700/3
800	0	0
	1	1900/3

$\therefore$ E(X/Y = 5) = 633,33

$\therefore$ o salário médio dos operários com 5 anos de serviço é de R$633,33.

Da mesma forma podemos definir:

$$VAR(X/Y = y_j) = \sum_{i=1}^{m} (x_i - \mu)^2 \cdot p(x_i/y_j), \text{ ou}$$

$$VAR(X/Y = y_j) = E\{X^2/Y = y_j\} - \{E(X/Y = y_j)\}^2$$

onde

$$E(X^2/Y = y_j) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \cdot p(x_i/y_j), \quad \begin{matrix} j = 1, 2, \ldots, n \\ j = \text{fixo} \end{matrix}$$

Também

$$VAR(Y/X = x_i) = \sum_{j=1}^{n} (y_j - \mu)^2 \cdot p(y_j/x_i), \text{ ou}$$

$$VAR(Y/X = x_i) = E(Y^2/X = x_i) - \{E(Y/X = x_i)\}^2$$

onde

$$E'(Y^2/X = x_i) = \sum_{j=1}^{n} y_j^2 \cdot p(y_j/x_i), \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ i = \text{fixo} \end{matrix}$$

Como aplicação destas definições podemos calcular o tempo médio de serviço e o desvio padrão dos operários com salários de R$700,00.

Queremos E(Y/X = 700) e VAR(Y/X = 700)

Y	P(Y/X = 700)	Y · P(Y/X = 700)	Y^2 · P(Y/X = 700)
4	0	0	0
5	1/3	5/3	25/3
6	2/3	12/3	72/3
	1	17/3	97/3

$$\therefore E(Y/X = 700) = \frac{17}{3} = 5{,}67$$

$$VAR(Y/X = 700) = \frac{97}{3} - \left(\frac{17}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

$$\therefore \sigma(Y/X = 700) = \sqrt{\frac{2}{9}} = 0{,}47$$

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS INDEPENDENTES

Sejam $\begin{cases} X: x_1, x_2, \ldots, x_m \text{ e } P(X = x_i) = p(x_i), i = 1, \ldots, m \\ Y: y_1, y_2, \ldots, y_n \text{ e } P(Y = y_j) = p(y_j), j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$

DEFINIÇÃO. As variáveis aleatórias X e Y são *independentes* se e somente se $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$, *para todo par* (x_i, y_j), $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, n$.

As variáveis X e Y do problema ① não são independentes pois, por exemplo,

$$P(X = 500, Y = 4) = 0 \text{ e } P(X = 500) \cdot P(Y = 4) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$$

$$\therefore P(X = 500, Y = 4) \neq P(X = 500) \cdot P(Y = 4)$$

FUNÇÕES DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Conhecidas X e Y e P(X, Y), poderemos estar interessados em calcular F(X, Y), isto é, funções de X e Y como X + Y, X − Y, X · Y, 2X + 3Y, 3X − 2Y, etc.

Veremos primeiramente alguns resultados importantes.

$X: x_1, x_2, ..., x_m$ e $P(X = x_i) = p(x_i), i = 1, ..., m$

$Y: y_1, y_2, ..., y_n$ e $P(Y = y_j) = p(y_j), j = 1, ..., n$

Logo

$(X, Y): (x_1, y_1), (x_1, y_2), ..., (x_m, y_n)$ e

$P(X = x_1, Y = y_j) = p(x_i, y_j), \begin{matrix} i = 1, ..., m \\ j = 1, ..., n \end{matrix}$

1. $\boxed{E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)}$

Demonstração:

$$E(X \pm Y) = \sum_{i=j}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_i \pm y_j) \cdot p(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot p(x_i, y_j) \pm$$

$$\pm \sum_{i=j}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot p(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} p(x_i, y_j) \pm \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{m} p(x_i, y_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot p(x_i) \pm \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot p(y_j) = E(X) \pm E(Y)$$

(Demonstramos a propriedade 3 da Esperança).

2. $\boxed{Cov(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E()Y}$

Demonstração:

$$cov(X, Y) = E\{[X - \mu_x][Y - \mu_y]\} = E\{XY - X \cdot \mu_y - \mu_x \cdot Y +$$

$$+ \mu_x \cdot \mu_y\} = E(X \cdot Y) - E(X \cdot \mu_y) - E(\mu_x \cdot Y) +$$

$$+ E(\mu_x \cdot \mu_y) = E(X \cdot Y) - \mu_y \cdot E(X) -$$

$$- \mu_x \cdot E(Y) + \mu_x \cdot \mu_y = E(X \cdot Y) - \mu_y \cdot \mu_x -$$

$$- \mu_x \cdot \mu_y + \mu_x \cdot \mu_y = E(X \cdot Y) - \mu_x \cdot \mu_y$$

3. Se X e Y são independentes, então E (X · Y) = E (X) · E (Y).

Demonstração:

$$E(X \cdot Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p(x_i, y_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p(x_i) \cdot p(y_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot p(x_i) \cdot \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot p(y_j) = E(X) \cdot E(Y)$$

4. Se X e Y são independentes, então cov (X, Y) = 0.
A recíproca não é verdadeira.

5. Se X e Y são independentes, então VAR (X ± Y) = VAR (X) + VAR (Y).

6. Se $X_1, X_2, ..., X_m$ são independentes, então

$$VAR\left(\sum_{i=1}^{m} X_i\right) = \sum_{i=1}^{m} VAR(X_i).$$

APLICAÇÃO

X \ Y	0	1	2	3
0	1/8	2/8	1/8	0
1	0	1/8	2/8	1/8

Dada a distribuição conjunta de probabilidades da variável (X, Y), representada pela tabela acima, calcular:

a) E (2X − 3Y)
b) cov (X, Y)
c) VAR (2X − 3Y)
d) E (Y/X = 1)

esolução:

Y \ X	0	1	2	3	P(X)	X · P(X)	$X^2 \cdot P(X)$
0	1/8	2/8	1/8	0	4/8	0	0
1	0	1/8	2/8	1/8	4/8	4/8	4/8
P(Y)	1/8	3/8	3/8	1/8	1	E(x) = 0,5	$E(x^2) = 0,5$
Y · P(Y)	0	3/8	6/8	3/8	E(Y) = 1,5		
$Y^2 \cdot P(Y)$	0	3/8	12/8	9/8	$E(Y^2) = 3$		

Observamos que $P(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{8}$, $P(X = 0) = \frac{4}{8}$ e $P(Y = 0) = \frac{1}{8}$.

$P(X = 0, Y = 0) \neq P(X = 0) \cdot P(Y = 0)$

$\therefore$ X e Y *não são independentes.*

$\therefore$ $\boxed{E(X) = 0,5}$ e $VAR(X) = 0,5 - 0,5^2 = 0,25$ $\therefore$

$\therefore$ $\boxed{VAR(X) = 0,25}$ e $\boxed{\sigma_x = 0,5}$ $\therefore$

$\therefore$ $\boxed{E(Y) = 1,5}$ e $VAR(Y) = 3 - 1,5^2 = 0,75$ $\therefore$

$\therefore$ $\boxed{VAR(Y) = 0,75}$ e $\boxed{\sigma_y = 0,87}$

Calcularemos agora a cov (X, Y). Definiremos a variável Z = X · Y e faremos a istribuição de Z.

Z	P (Z)	Z · P (Z)
0	4/8	0
1	1/8	1/8
2	2/8	4/8
3	1/8	3/8
	1	E (Z) = 1

$\therefore E(Z) = E(X \cdot Y) = 1$

Como

$$cov(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$$

temos

$$cov(X, Y) = 1 - 0,5 \cdot 1,5 = 0,25$$

a) $E(2X - 3Y) = 2E(X) - 3E(Y) = 2 \cdot 0,5 - 3 \cdot 1,5 = -3,5$

b) $cov(X, Y) = 0,25$

c) $VAR(2X - 3Y) = VAR(2X) + VAR(3 \cdot Y) - 2\,cov(2X, 3Y) =$
$= 4VAR(X) + 9\,VAR(Y) - 12\,cov(X, Y) =$
$= 4 \cdot 0,25 + 9 \cdot 0,75 - 12 \cdot 0,25 = 4,75$

Obs.:

$$cov(2X, 3Y) = E\{[2X - E(2X)]\,[3Y - E(3Y)]\} =$$
$$= E\{[2X - 2E(X)] \cdot [3Y - 3E(Y)]\} =$$
$$= 6E\{[X - E(X)]\,[Y - E(Y)]\} = 6\,cov(X, Y)$$

d) $E(Y/X = 1)$

Y	P (Y/X = 1)	Y · P (Y/X = 1)
0	0	0
1	1/4	1/4
2	2/4	4/4
3	1/4	3/4
	1	2

$\therefore E(Y/X = 1) = 2$

COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO

Se estivermos estudando a dependência entre as variáveis X: altura do pai em cm e Y: altura do 1º filho em cm, ao calcularmos a covariância, teremos uma medida ao quadrado (cm^2). Além disso, o campo de variação da covariância é muito amplo, isto é, $-\infty < cov(X, Y) < +\infty$.

Introduziremos o conceito de coeficiente de correlação, que supera esses problemas.

COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO (ρ) ENTRE X E Y

DEFINIÇÃO:

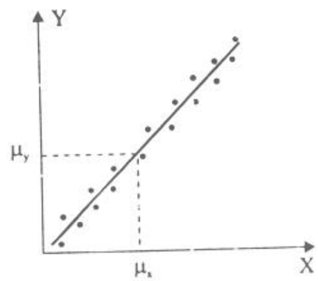
$$\boxed{\rho = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}}$$

também:

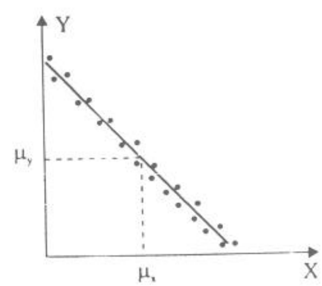
$$\boxed{\rho = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}}$$

e $\boxed{|\rho| \leq 1} \Rightarrow \boxed{-1 \leq \rho \leq +1}$

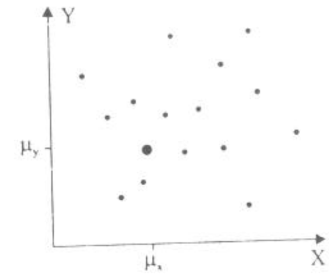
a) Quando $\rho > 0$, cov $(X, Y) > 0$. O diagrama de dispersão é:
($\rho \cong +1$)



b) Quando $\rho < 0$, cov $(X, Y) < 0$. Graficamente,
($\rho \cong -1$)



c) Quando $\rho = 0$, cov $(X, Y) = 0$, o que graficamente é:



Observamos que quando $\rho > 0$ e $\rho < 0$, as "nuvens" de pontos dos diagramas de dispersão (a) e (b) apresentam uma "tendência" linear. Quanto mais próximo for ρ de +1 e ρ de −1, maior o grau de dependência entre as variáveis e maior a confiabilidade de se escrever uma variável em função da outra por meio do processo dos mínimos quadrados, por exemplo.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Dada a distribuição conjunta bidimensional (X, Y) representada pela tabela de dupla entrada, determinar:

a) ρ
b) a representação espacial de P (X, Y);
c) se possível a reta de regressão de Y em função de X.

X \ Y	0	1	2
0	0	0	1/4
1	0	2/4	0
2	1/4	0	0

Resolução:

X \ Y	0	1	2	P (X)	X · P (X)	$X^2 \cdot P(X)$
0	0	0	1/4	1/4	0	0
1	0	2/4	0	2/4	2/4	2/4
2	1/4	0	0	1/4	2/4	4/4
P (Y)	1/4	2/4	1/4	1	E (X) = 1	$E(X^2) = 1,5$
Y · P (Y)	0	2/4	2/4	E (Y) = 1		
$Y^2 \cdot P(Y)$	0	2/4	4/4	$E(Y^2) = 1,5$		

Verificando se X e Y são independentes.

$P(X = 0,\ Y = 0) = 0$

$$\begin{cases} P(X = 0) = \dfrac{1}{4} \\ P(Y = 0) = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$P(X = 0) \cdot P(Y = 0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \therefore$$

$\therefore P(X = 0,\ Y = 0) \neq P(X = 0) \cdot P(Y \neq 0) \therefore$

$\therefore$ X e Y não são independentes.

Seja Z = X · Y. Calcularemos E (X · Y)

Z	P (Z)	Z · P (Z)
0	2/4	0
1	2/4	2/4
2	0	0
4	0	0
	1	0,5

$E(Z) = E(X \cdot Y) = 0,5$

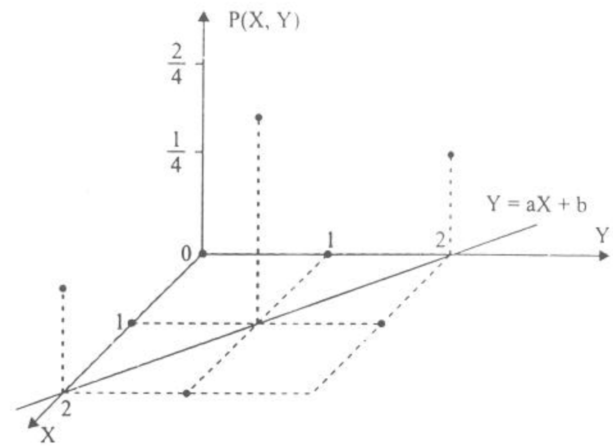
$\text{cov}(X, Y) = 0,5 - 1,1 = -0,5$

$VAR(X) = 1,5 - 1^2 = 0,5 \qquad \sigma_x = \sqrt{0,5}$

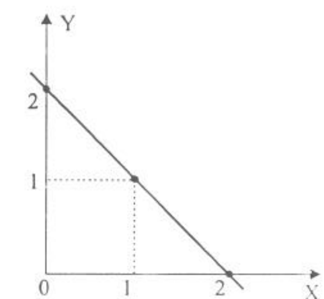
$VAR(Y) = 1,5 - 1^2 = 0,5 \qquad \sigma_y = \sqrt{0,5}$

$$\therefore \rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{-0,5}{\sqrt{0,5} \cdot \sqrt{0,5}} = -1$$

Como $\rho = -1$, existirá uma reta de regressão de Y em função de X, Y = aX + b. Nesse exemplo específico é fácil determinarmos esta equação, sem o uso do processo dos mínimos quadrados, pois, graficamente:



No plano (X, 0, Y) temos:



A equação da reta nesse caso é:

$$\boxed{Y = -X + 2}$$

3.5 FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO

Suponhamos que uma variável aleatória discreta X tenha a seguinte distribuição de probabilidades.

X	P (X)
1	0,1
2	0,2
3	0,4
4	0,2
5	0,1

Definimos: *Função de Distribuição de X:*

$$\boxed{F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} p(x_i)}$$

Temos então:

$F(1) = P(X \le 1) = P(X = 1) = 0{,}1$

$F(2) = P(X \le 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}3$

$F(3) = P(X \le 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$
$= F(2) + P(X = 3) = 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}7$

$F(4) = P(X \le 4) = P(X \le 3) + P(X = 4) = F(3) + P(X = 4) =$
$= 0{,}7 + 0{,}2 = 0{,}9$

$F(5) = P(X \le 4) + P(X = 5) = F(4) + P(X = 5) = 0{,}9 + 0{,}1 = 1$

Podemos calcular também:

$F(1{,}34) = P(X \le 1{,}34) = P(X \le 1) = F(1) = 0{,}1$

$F(3{,}98) = P(X \le 3{,}98) = P(X \le 3) = F(3) = 0{,}7$

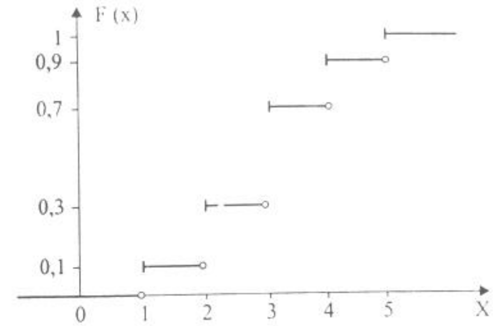
$F(7) = P(X \le 7) = P(X \le 5) = F(5) = 1$

$F(-3) = P(X \le -3) = 0$

Com esses resultados podemos escrever:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } X < 1 \\ 0{,}1 & \text{se } 1 \le X < 2 \\ 0{,}3 & \text{se } 2 \le X < 3 \\ 0{,}7 & \text{se } 3 \le X < 4 \\ 0{,}9 & \text{se } 4 \le X < 5 \\ 1 & \text{se } X \ge 5 \end{cases}$$

Fazendo o gráfico de F (x) temos:



O domínio de F (x) é $\mathbb{R}$ e o contradomínio é o conjunto $\{0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}7;\ 0{,}9;\ 1\}$

PROPRIEDADES DE F (x)

1. $\boxed{0 \le F(x) \le 1}$

Como $F(x) = P(x \le x)$ e $0 \le P(X = x) \le 1 \Rightarrow 0 \le F(X) \le 1$

2. $\boxed{F(-\infty) = 0}$

$F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

(como se pode ver no exercício)

3. $\boxed{F(+\infty) = 1}$

$F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

corresponde ao evento certo.

4. F (x) é descontínua nos pontos $X = x_0$, onde $P(X = x_0) \ne 0$,
$\lim\limits_{x \to x_0^-} F(x) \ne \lim\limits_{x \to x_0^+} F(x) \ne F(x_0)$

5. F (x) é contínua à direita dos pontos $X = x_0$, onde $P(X = x_0) \ne 0$.
Se $p(X = x_0) > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$

6. $\boxed{P(a < X \le b) = F(b) - F(a)}$

Podemos escrever:

$(-\infty, b] = (-\infty, a] \cup (a,b]$
(mutuamente exclusivos).

$\therefore\ P(X \le b) = P(X \le a) + P(a < X \le b)$
$P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a)\ \therefore$
$\therefore\ P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$

7. $\boxed{P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) + P(X = a)}$

Como $(a \le X \le b) \Rightarrow [a, b] = (a, b] \cup \{a\}$ temos:
$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) + P(X = a)$

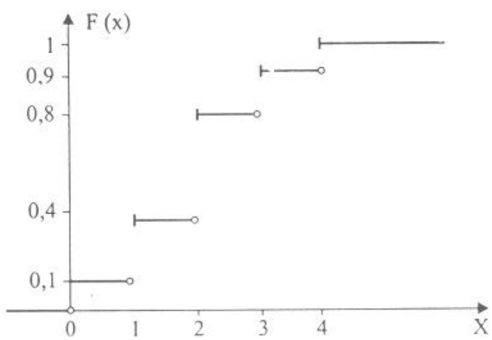
8. $\boxed{P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X = b)}$

Como $(a, b] = (a, b) \cup \{b\}$
$P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X = b)$

9. F (x) é uma função não decrescente.
Como $P(a < X \le b) = F(b) - F(a) \ge 0 \Rightarrow F(b) \ge F(a)$.
Logo F (x) é não decrescente.

XEMPLO DE APLICAÇÃO

ɜja X a variável aleatória discreta com F (x) dada pelo gráfico. Determinar E (X) e AR (X).



Como foi visto no exemplo, o "degrau" em X = a é igual a P (X = a). Logo podeɩos formar a tabela da distribuição de probabilidades de X.

X	P (X)	X · P (X)	$X^2 \cdot P(X)$
0	0,1	0	0
1	0,3	0,3	0,3
2	0,4	0,8	1,6
3	0,1	0,3	0,9
4	0,1	0,4	1,6
	1	1,8	4,4

$\boxed{E(X) = 1{,}8}$

$VAR(X) = 4{,}4 - 1{,}8^2\ \therefore\ \boxed{VAR(X) = 1{,}16}$

3.6 EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

3.6.1 Uma urna contém 4 bolas brancas e 6 pretas. 3 bolas são retiradas com reposição. Seja X o número de bolas brancas. Calcular E (X).

$P(X = 0) = P(3P) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}216$

$P(X = 1) = P(1B \text{ e } 2P) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 3 = 0{,}432$

$P(X = 2) = P(2B \text{ e } 1P) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 3 = 0{,}288$

$P(X = 3) = P(3B) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}064$

X	P (X)	X · P (X)
0	0,216	0
1	0,432	0,432
2	0,288	0,576
3	0,064	0,192
	1	1,2

$\boxed{E(X) = 1{,}2}$

3.6.2 Um caça-níquel tem dois discos que funcionam independentemente um do outro. Cada disco tem 10 figuras: 4 maçãs, 3 bananas, 2 peras e 1 laranja. Uma pessoa paga R$80,00 e aciona a máquina. Se aparecerem 2 maçãs, ganha R$40,00. Se aparecerem 2 bananas, ganha R$80,00; R$140,00 se aparecerem 2 peras e ganha R$180,00 se aparecerem 2 laranjas. Qual a esperança de ganho numa única jogada?

$P(M) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}3$; $P(P) = 0{,}2$ e $P(L) = 0{,}1$

$P(M \cap M) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$

$P(B \cap B) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$

$P(P \cap P) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$

$P(L \cap L) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$

Logo,
$P(\text{2 frutas diferentes}) = 1 - \{0{,}16 + 0{,}09 + 0{,}04 + 0{,}01\} = 0{,}70$

Paga	Recebe	X: lucro	P (X)	X · P (X)
80	40	– 40	0,16	– 6,40
80	80	0	0,09	0,00
80	140	60	0,04	2,40
80	180	100	0,01	1,00
80	0	– 80	0,70	– 56,00
			1	– 59,00

$\therefore \boxed{E(X) = -59{,}00}$

A esperança de a pessoa "lucrar" numa única jogada é *negativa*.

3.6.3 Na produção de uma peça são empregadas duas máquinas. A primeira é utilizada para efetivamente produzir as peças, e o custo de produção é de R$50,00 por unidade. Das peças produzidas nessa máquina, 90% são perfeitas. As peças defeituosas (produzidas na primeira máquina) são colocadas na segunda máquina para a tentativa de recuperação (torná-las perfeitas). Nessa segunda máquina o custo por peça é de R$25,00, mas apenas 60% das peças são de fato recuperadas. Sabendo que cada peça perfeita é vendida por R$90,00, e que cada peça defeituosa é vendida por R$20,00, calcule o lucro por peça esperado pelo fabricante.

Custo	Venda	X (lucro)	P (X)	X · P (X)	
50	90	40	0,9	36,00	(peças perfeitas na 1ª máquina)
50 + 25	90	15	0,06	0,90	(peças perfeitas na 2ª máquina)
50 + 25	20	– 25	0,04	– 2,20	(peças defeituosas)
			1	E (X) = 34,70	

O lucro esperado, por peça, é R$34,70.

3.6.4 Um supermercado faz a seguinte promoção: o cliente, ao passar pelo caixa, lança um dado. Se sair face 6 tem um desconto de 30% sobre o total de sua conta. Se sair 5 o desconto é de 20%. Se ocorrer face 4 é de 10%, e se ocorrerem faces 1, 2 ou 3 o desconto é de 5%.

a) Calcular a probabilidade de que num grupo de 5 clientes, pelo menos um consiga um desconto maior que 10%.

b) Calcular a probabilidade de que o 4º cliente seja o primeiro a conseguir 30%.

c) Calcular o desconto médio concedido.

face 6: 30% $\rightarrow P(6) = \dfrac{1}{6}$

face 5: 20% $\rightarrow P(5) = \dfrac{1}{6}$

face 4: 10% $\rightarrow P(4) = \dfrac{1}{6}$

face (1, 2 ou 3): 5% $\rightarrow P(1 \text{ ou } 2 \text{ ou } 3) = \dfrac{3}{6}$

a) $P(\text{Pelo menos } 1 > 10\%) = 1 - P(\text{Nenhum} > 10\%) = 1 - \left(\dfrac{4}{6}\right)^5 = 0{,}8683$

b) A: conseguir desconto de 30% $\rightarrow P(A) = \dfrac{1}{6}$

$$P(\bar{A}\ \bar{A}\ \bar{A} \text{ e } A) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{125}{216} = 0{,}0965$$

c) X: Desconto

X	P (X)	X · P (X)
30	1/6	30/6
20	1/6	20/6
10	1/6	10/6
5	1/6	5/6
$\sum$	1	75/6

$\therefore$ E (X) = 12,5% Desconto médio

.6.5 Um banco pretende aumentar a eficiência de seus caixas. Oferece um prêmio de R$150,00 para cada cliente atendido além de 42 clientes por dia. O banco tem um ganho operacional de R$100,00 para cada cliente atendido além de 41. As probabilidades de atendimento são:

nº clientes	até 41	42	43	44	45	46
Probabilidade	0,88	0,06	0,04	0,01	0,006	0,004

Qual a esperança de ganho do banco se este novo sistema for implantado?
X: ganho (lucro)

nº clientes	Paga	Ganha	X	P (X)	X · P (X)
até 41	0,00	0,00	0,00	0,88	0,00
42	0,00	100,00	100,00	0,06	6,00
43	150,00	200,00	50,00	0,04	2,00
44	300,00	300,00	0,00	0,01	0,00
45	450,00	400,00	– 50,00	0,006	– 0,30
46	600,00	500,00	– 100,00	0,004	– 0,40
				1	7,30

$\boxed{E(X) = 7{,}30}$

Logo, o sistema é vantajoso para o banco.

3.6.6 Sabe-se que uma moeda mostra a face cara quatro vezes mais do que a face coroa, quando lançada. Esta moeda é lançada 4 vezes. Seja X o número de caras que aparece, determine:

a) E (X)
b) VAR (X)
c) $P(X \geq 2)$
d) $P(1 \leq x < 3)$

Seja P (r) = p e P (c) = 4p com p + 4p = 1 → $p = \frac{1}{5}$, logo

$P(c) = \frac{4}{5} = 0{,}8$

$P(r) = \frac{1}{5} = 0{,}2$

$P(X = 0) = P(4r) = (0{,}2)^4 = 0{,}0016$

$P(X = 1) = P(1c \text{ e } 3r) = (0{,}8) \cdot (0{,}2)^3 \cdot 4 = 0{,}0256$

$P(X = 2) = P(2c \text{ e } 2r) = (0{,}8)^2 \cdot (0{,}2)^2 \cdot 6 = 0{,}1536$

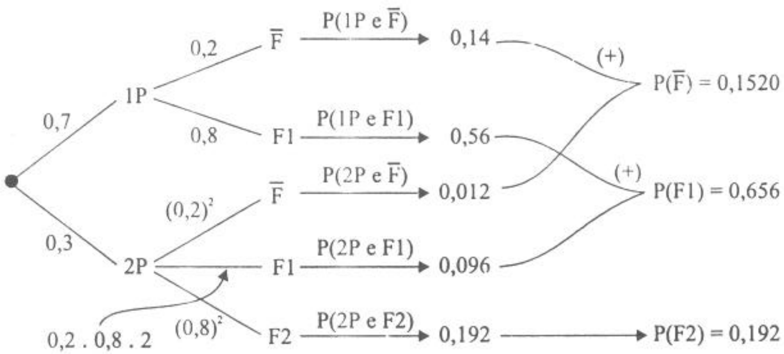
$P(X = 3) = P(3c \text{ e } 1r) = (0{,}8)^3 \cdot (0{,}2) \cdot 4 = 0{,}4096$

$P(X = 4) = P(4c) = (0{,}8)^4 = 0{,}4096$

X	P (X)	X · P (X)	$X^2 \cdot P(X)$
0	0,0016	0	0
1	0,0256	0,0256	0,0256
2	0,1536	0,3072	0,6144
3	0,4096	1,2288	3,6864
4	0,4096	1,6384	6,5536
	1	3,20	10,88

a) E (X) = 3,20
b) $VAR(X) = 10{,}88 - 3{,}20^2 = 0{,}64$
c) $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) =$
$= 0{,}1536 + 0{,}4096 + 0{,}4096 = 0{,}9728$ ou
$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] =$
$= 1 - [0{,}0016 + 0{,}0256] = 1 - 0{,}0272 = 0{,}9728$
d) $P(1 \leq x < 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}0256 + 0{,}1536 = 0{,}1792$

3.6.7 As probabilidades de que um aluno no período das provas tenha uma ou duas provas, no mesmo dia, são 0,70 e 0,30 respectivamente. A probabilidade de que deixe de fazer uma prova, por razões diversas, é 0,20. O tempo de duração de cada prova é de 90 minutos. Faça X o tempo total gasto, por dia, que ele usa fazendo as provas. Achar em média quantas horas gasta, por dia, resolvendo as provas.



X	P (X)	X · P (X)
0	0,152	0
90	0,656	59,04
180	0,192	34,56
Σ	1	93,6

E (X) = 93,6 min ≅ 1h 34 min.

3.6.8 Um jogador A aposta com B R$100,00 e lança 2 dados, nos quais as probabilidades de sair cada face são proporcionais aos valores da face. Se sair soma 7, ganha R$50,00 de B. Se sair soma 11, ganha R$100,00 de B e se sair soma 2, ganha R$200,00 de B. Nos demais casos A perde a aposta. Qual a esperança de lucro (ganho) do jogador A em uma única jogada?

Sejam:

$P(1) = p$, $P(2) = 2p$, $P(3) = 3p$, $P(4) = 4p$, $P(5) = 5p$ e $P(6) = 6p$

Como

$$\sum_{i=1}^{6} P(i) = 1 \Rightarrow 21p = 1 \qquad p = \frac{1}{21}$$

Logo

$$P(1) = \frac{1}{21} \qquad P(2) = \frac{2}{21} \qquad P(3) = \frac{3}{21}$$

$$P(4) = \frac{4}{21} \qquad P(5) = \frac{5}{21} \qquad P(6) = \frac{6}{21}$$

X: soma 7

Y: soma 11

Z: soma 2

T: outra soma

X = {(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)}

Y = {(5, 6), (6, 5)}

Z = {(1, 1)}

Logo

$$P(X) = \frac{56}{441},\ P(Y) = \frac{60}{441},\ P(Z) = \frac{1}{441}$$

e portanto

$$P(T) = 1 - \frac{56}{441} - \frac{60}{441} - \frac{1}{441} = \frac{324}{441}$$

Paga	Recebe	X: "lucro"	P (X)	X · P (X)
100	50	– 50	56/441	– 2.800/441
100	100	0	60/441	0
100	200	100	1/441	100/441
100	0	– 100	324/441	– 32.400/441
				– 35.100/441

Logo $E(X) = -\frac{35.100}{441} \Rightarrow \boxed{E(X) = -\text{R\$}79{,}59}$

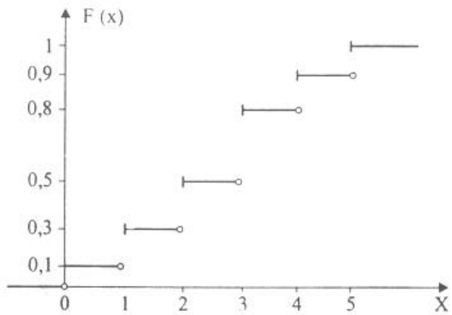
Portanto a esperança de ganho do jogador A em uma única jogada é *negativa*.

.6.9 Seja

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } X < 0 \\ 0{,}1 & \text{para } 0 \leq X < 1 \\ 0{,}3 & \text{para } 1 \leq X < 2 \\ 0{,}5 & \text{para } 2 \leq X < 3 \\ 0{,}8 & \text{para } 3 \leq X < 4 \\ 0{,}9 & \text{para } 4 \leq X < 5 \\ 1 & \text{para } X \geq 5 \end{cases}$$

a) Construir o gráfico de F (x);
b) Determinar a distribuição de X, E (X) e VAR (X);
c) Sendo Y = 3X − 2, calcular E (Y) e VAR (Y).

a)



b)

X	P (X)	X · P (X)	X^2 · P (X)
0	0,1	0	0
1	0,2	0,2	0,2
2	0,2	0,4	0,8
3	0,3	0,9	2,7
4	0,1	0,4	1,6
5	0,1	0,5	2,5
	1	2,4	7,8

E (X) = 2,4

VAR (X) = 7,8 − $2{,}4^2$ = 2,04

c) Y = 3X − 2

E (Y) = E (3X − 2) = 3E (X) − E (2) = 3 · 2,4 − 2 = 5,2

VAR (Y) = VAR (3X − 2) = 9 VAR (X) = 9 · 2,04 = 18,36

3.6.10 Dadas as distribuições das variáveis X e Y, independentes, construir a distribuição conjunta de (X, Y). Sendo Z = 3X + Y, calcular a E (Z) e VAR (Z), usando a distribuição de Z.

X	P (X)
1	0,2
2	0,2
3	0,6
	1

Y	P (Y)
0	0,2
1	0,4
2	0,4
	1

X \ Y	0	1	2	P (X)
1	0,04	0,08	0,08	0,2
2	0,04	0,08	0,08	0,2
3	0,12	0,24	0,24	0,6
P (Y)	0,2	0,4	0,4	1

Z = 3X + Y

Z	0	1	2
3	3	4	5
6	6	7	8
9	9	10	11

Observando-se os valores de Z e as probabilidades respectivas em ambas as tabeias, fazemos:

Z	P (Z)	Z · P (Z)	Z^2 · P (Z)
3	0,04	0,12	0,36
4	0,08	0,32	1,28
5	0,08	0,40	2,00
6	0,04	0,24	1,44
7	0,08	0,56	3,92
8	0,08	0,64	5,12
9	0,12	1,08	9,72
10	0,24	2,40	24,00
11	0,24	2,64	29,04
	1	8,4	76,88

$\boxed{E(Z) = 8{,}4}$

VAR (Z) = 76,88 − $8,4^2$

$\boxed{\text{VAR (Z)} = 6{,}32}$

3.6.11 Sejam X: renda familiar em R$1.000,00

Y: nº de aparelhos de TV em cores

Considere o quadro:

X	1	2	3	1	3	2	3	1	2	3
Y	2	1	3	1	3	3	2	1	2	3

a) Verificar, usando o coeficiente de correlação ρ, se há dependência entre as duas variáveis.

b) Determinar a renda familiar média de quem possui 2 aparelhos de TV (usando distribuição de probabilidade E (X/Y = 2)).

X \ Y	1	2	3	P (X)	X · P (X)	X^2 · P (X)
1	0,2	0,1	0	0,3	0,3	0,3
2	0,1	0,1	0,1	0,3	0,6	1,2
3	0	0,1	0,3	0,4	1,2	3,6
P (Y)	0,3	0,3	0,4	1	2,1	5,1
Y · P (Y)	0,3	0,6	1,2	E (Y) = 2,1		
Y^2 · P (Y)	0,3	1,2	3,6	E (Y^2) = 5,8		

E(X) E$(X)^2$

a) VAR (X) = 5,1 − $(2,1)^2$ = 0,69

$\sigma_x = \sqrt{0,69} = 0,83$

VAR (Y) = 5,1 − $(2,1)^2$ = 0,69

$\sigma_y = \sqrt{0,69} = 0,83$

Seja Z = X · Y

Z	P (Z)	Z · P (Z)
1	0,2	0,2
2	0,2	0,4
3	0	0
4	0,1	0,4
6	0,2	1,2
9	0,3	2,7
$\sum$	1	4,9

E (Z) = E (X.Y) = 4,9

cov (X, Y) = 5,1 − 2,1 · 2,1

cov (X, Y) = 0,49

$$\rho = \frac{0,49}{0,83 \cdot 0,83}$$

ρ = 0,7113

Há dependência linear entre X e Y.

b) E (X/Y = 2) = ?

X	P (X/Y = 2)	X · P (X/Y = 2)
1	1/3	1/3
2	1/3	2/3
3	1/3	2/3
$\sum$	1	2

∴ E (X/Y = 2) = 2

3.6.12 Dada a distribuição conjunta das variáveis X e Y, independentes, seja Z = 2X − 4Y. Calcular E (Z) e VAR (Z), usando a distribuição de Z.

X \ Y	0	1	2	P (X)
1	0,06			0,2
2	0,15		0,05	
3				
P (Y)	0,3			1

X \ Y	0	1	2	P (X)
1	0,06	0,12	0,02	0,2
2	0,15	0,30	0,05	0,5
3	0,09	0,18	0,03	0,3
P (Y)	0,3	0,6	0,1	1

$Z = 2X - 4Y$

Z	0	4	8
2	2	- 2	- 6
4	4	0	- 4
6	6	2	- 2

Logo:

Z	P (Z)	Z · P (Z)	Z^2 · P (Z)
- 6	0,02	- 0,12	0,72
- 4	0,05	- 0,20	0,80
- 2	0,15	- 0,30	0,60
0	0,30	0	0
2	0,24	0,48	0,96
4	0,15	0,60	2,40
6	0,09	0,54	3,24
	1	1,00	8,72

$E(Z) = 1{,}0$

$VAR(Z) = 8{,}72 - 1^2 \Rightarrow \boxed{VAR(Z) = 7{,}72}$

.6.13 Considere a distribuição conjunta das variáveis X e Y. Defina $Z = |X - Y|$ e $W = X + Y$. Construa a distribuição conjunta de probabilidades de Z e W e calcule a cov (Z, W).

X \ Y	1	2	3	P (X)
1	0	0,1	0,2	0,3
2	0,2	0,1	0,1	0,4
3	0,2	0	0,1	0,3
P (Y)	0,4	0,2	0,4	1

X e Y não são independentes.

Z	1	2	3
1	0	1	2
2	1	0	1
3	2	1	0

W	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6

Z \ W	2	3	4	5	6	P (Z)	Z · P (Z)
0	0	0	0,1	0	0,1	0,2	0
1	0	0,3	0	0,1	0	0,4	0,4
2	0	0	0,4	0	0	0,4	0,8
P (W)	0	0,3	0,5	0,1	0,1	1	E (Z) = 1,2
W · P (W)	0	0,9	2,0	0,5	0,6	E (W) = 4,0	

Seja $T = Z \cdot W$

T	P (T)	T · P (T)
0	0,2	0
2	0	0
3	0,3	0,9
4	0	0
5	0,1	0,5
6	0	0
8	0,4	3,2
10	0	0
12	0	0
	1	4,6

$E(T) = E(Z \cdot W) = 4{,}6$

Logo:

$$\text{cov}(Z, W) = 4{,}6 - 1{,}2 \cdot 4{,}0$$

$$\boxed{\text{cov}(Z, W) = -0{,}2}$$

3.6.14 As variáveis aleatórias X e Y são independentes e têm as seguintes distribuições de probabilidades:

X	P (X)
0	0,3
2	0,7
	1

Y	P (Y)
2	0,4
3	0,6
	1

Sejam $\begin{cases} Z = X + 2Y \\ T = |2X - 3Y| \end{cases}$

e $W = Z \cdot T$, calcular E (W).

	3Y	6			9			
	2Y	4			6			P(X)
2X	X \ Y	2			3			
0	0	4	6	24	6	9	54	0,3
		0,12			0,18			
4	2	6	2	12	8	5	40	0,7
		0,28			0,42			
P(Y)		0,4			0,6			1

Obs.: Para cada célula vale:

Z	T	W
P (X) · P (Y)		

Logo:

W	P (W)	W · P (W)
12	0,28	3,36
24	0,12	2,88
40	0,42	16,80
54	0,18	9,72
	1	32,76

Portanto $\boxed{E(W) = 32{,}76}$

3.7 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

3.7.1 Uma urna tem 4 bolas brancas e 3 pretas. Retiram-se 3 bolas sem reposição. Seja X: número de bolas brancas, determinar a distribuição de probabilidades de X.

3.7.2 Fazer o exercício anterior considerando extração com reposição.

3.7.3 Dada a tabela:

X	0	1	2	3	4	5
P (X)	0	p^2	p^2	p	p	p^2

a) Ache p;
b) Calcule $P(X \geq 4)$ e $P(X < 3)$;
c) Calcule $P(|X - 3| < 2)$.

3.7.4 As probabilidades de que haja 1, 2, 3, 4 ou 5 pessoas em cada carro que vá ao litoral num sábado são, respectivamente: 0,05; 0,20; 0,40; 0,25 e 0,10. Qual o número médio de pessoas por carro? Se chegam no litoral 4000 carros por hora, qual o número esperado de pessoas, em 10 horas de contagem?

3.7.5 Uma urna contém 6 bolas numeradas de 1 a 6. Uma pessoa paga R$600,00 e retira aleatoriamente uma bola. Se retirar a bola 6 recebe R$1.500,00, se retirar as bolas 2, 3, 4 ou 5 nada recebe, e se retirar a bola 1 irá escolher outra bola, sem repor a primeira, e se esta segunda for a bola 6, recebe R$3.600,00, caso contrário, nada recebe. Calcular quanto a pessoa que está jogando espera lucrar.

3.7.6 Um produtor de sementes vende pacotes com 15 sementes cada um. Os pacotes que apresentam mais de duas sementes sem germinar são indenizados. A probabilidade de uma semente germinar é de 95%.

a) Qual a probabilidade de um pacote não ser indenizado?
b) Se o produtor vende 2000 pacotes, qual o número esperado de pacotes que serão indenizados?
c) Se um pacote é indenizado o produtor tem um prejuízo de R$24,50, e se o pacote não é indenizado, tem um lucro de R$50,40. Qual o lucro esperado por pacote?

3.7.7 Dois jogadores fazem uma aposta. A paga R$100,00 para B e lança duas moedas viciadas não simultaneamente. A probabilidade de sair cara da 1ª moeda é 0,3, e da 2ª moeda é 0,2. Se sair cara na 1ª moeda tem o direito de lançar a 2ª, se sair cara na 2ª moeda ganha R$200,00, e se sair coroa, ganha R$100,00. Se sair coroa na 1ª moeda, A nada ganha. Qual a esperança de lucro do jogador A em uma única jogada?

3.7.8 Um jogador A paga R$5,00 a B e lança um dado. Se sair face 3 ganha R$20,00. Se sair faces 4, 5 ou 6, perde. Se sair faces 1 ou 2 tem o direito de jogar novamente. Desta vez lança dois dados. Se sair duas faces 6, ganha R$50,00. Se sair uma face 6, recebe o dinheiro pago de volta. Nos demais casos, perde. Seja X o lucro líquido do jogador A nesse jogo.
Determinar:

a) Distribuição de probabilidade de X;
b) E (X);
c) VAR (X).

3.7.9 Calcular a média e a variância da variável X, onde X assume os valores 1, 2, 3, ..., n, equiprovavelmente.

3.7.10 A função de probabilidades da variável aleatória X é: $P(X) = \frac{1}{5}$, para X = 1, 2, 3, 4, 5. Calcular E (X) e E (X^2), e usando esses resultados calcular:

a) $E(X+3)^2$;
b) VAR (3X – 2)

3.7.11 Sendo $P(X = x) = 0{,}5^x$, x = 1, 2, 3, ..., calcular E (X).

3.7.12 Um jogador lança um dado. Se aparecerem os números 1, 2 ou 3, recebe R$10,00. Se, no entanto, aparecer 4 ou 5, recebe R$5,00. Se aparecer 6, ganha R$20,00. Qual o ganho médio do jogador?

3.7.13 Uma pessoa vende colhedeiras de milho. Visita semanalmente uma, duas ou três propriedades rurais com probabilidades 0,2, 0,5 e 0,3, respectivamente. De cada contato pode conseguir a venda de 1 colhedeira por R$120.000,00 com probabilidade 0,3, ou nenhuma venda com probabilidade 0,7. Determinar o valor total esperado (médio) das vendas semanais.

3.7.14 Seja X: número de caras e Y: número de coroas quando são lançadas 2 moedas. Calcular média e variância de Z = 2X + Y.

3.7.15 Um "*sinal*" consiste de uma série de vibrações de magnitude X. Um "*ruído*" consiste de uma série de vibrações de magnitude Y, tendo os valores 2, 0 e – 2 com probabilidades $\frac{1}{6}, \frac{2}{3}$ e $\frac{1}{6}$, respectivamente. Se ruídos e sinais são combinados de vibrações sincronizadas, a soma consiste de vibrações de magnitude Z = X + Y. Construir a função de probabilidade de Z, calcular E (Z) e VAR (Z), admitindo independência entre ruído e sinal. X assume os valores 1, 0 e – 1, cada um com probabilidade $\frac{1}{3}$.

3.7.16 Seja X: renda familiar em R$1.000,00 e Y: número de carros da família. Considere o quadro:

X	2	3	4	2	3	3	4	2	2	3
Y	1	2	2	2	1	3	3	1	2	2

Calcular:

a) E (2X – 3Y);
b) COV (X, Y);
c) VAR (5X – 3Y);
d) ρ.

3.7.17 Num posto de vistoria de carros foram examinados 10 veículos, sendo que o número de irregularidades nos itens de segurança (X) e o número de irregularidades nos documentos (Y) são os dados no quadro a seguir. Calcule o coeficiente de correlação entre as variáveis entre X e Y.

Veículos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	0	1	2	0	1	2	0	2	1	2
Y	0	1	0	1	1	1	0	2	2	2

3.7.18 Dada a distribuição conjunta de probabilidades da variável (X, Y), determinar ρ e tentar escrever Y em função de X.

X \ Y	0	2	4
0	0,5	0	0
1	0	0,2	0,05
2	0	0	0,25

3.7.19 Sejam X: anos de experiência em vendas
Y: unidades diárias vendidas.

X \ Y	1	2	3
2	0,14	0,04	0,02
4	0,04	0,18	0,08
6	0,02	0,26	0,12
8	0	0,02	0,08

Dada a tabela da distribuição conjunta de X e Y, calcular:

a) cov (X, Y);
b) ρ.

3.7.20 Dada a tabela da distribuição conjunta, calcular:

a) E (2X – 3Y);
b) VAR (3X + 2Y);
c) ρ;
d) E (X/Y = 2).

X \ Y	1	2	3	4
0	1/24	1/12	1/12	1/24
1	1/12	1/6	1/6	1/12
2	1/24	1/12	1/12	1/24

3.7.21 Uma urna contém 3 bolas vermelhas e 2 verdes. Dessa urna, retiram-se 2 bolas sem reposição. Sejam:

$$X = \begin{cases} 0 \text{ se a primeira bola for verde;} \\ 1 \text{ se a primeira bola for vermelha.} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 0 \text{ se a segunda bola for verde;} \\ 1 \text{ se a segunda bola for vermelha.} \end{cases}$$

a) Determinar a distribuição conjunta para X e Y;
b) Calcular E (X), E (Y), VAR (X), VAR (Y);
c) E (X + Y) e VAR (X + Y);
d) ρ.

3.7.22 As variáveis aleatórias X e Y são independentes e têm a seguinte distribuição de probabilidades.

X	P (X)
1	0,4
2	0,6

Y	P (Y)
3	0,2
4	0,8

Considerando a variável aleatória Z = X + Y, construir a tabela da distribuição de probabilidades de Z e com ela calcular E (Z) e VAR (Z).

3.7.23 A variável aleatória bidimensional (X, Y) tem a seguinte tabela de distribuição de probabilidades:

X \ Y	1	2	3
2	0,10	0,30	0,20
3	0,06	0,18	0,16

Calcular:

a) E (2X + Y);
b) ρ;
c) VAR (Y/X = 2).

3.7.24 As variáveis aleatórias X e Y são independentes e têm as seguintes distribuições:

X	P (X)
2	0,3
3	0,5
4	0,2

Y	P (Y)
1	0,2
2	0,8

Considerando a variável Z = = X · Y, construir a tabela da distribuição de Z, e usando a tabela, calcular E (Z) e VAR (Z).

3.7.25 Dada a distribuição conjunta de (X, Y), determinar a média e variância de:

a) X + Y
b) X · Y

X \ Y	1	2	3
1	5/27	1/27	3/27
2	4/27	3/27	4/27
3	2/27	3/27	2/27

3.7.26 As variáveis X e Y são independentes e suas distribuições são:

x	2	3	4
P (X)	0,3	0,4	0,3

y	1	2	3
P (Y)	0,5	0,3	0,2

;

Seja Z = |X − 2Y|,
determine E (Z) usando a distribuição de probabilidade de Z.

3.7.27 Suponha que X e Y tenham a seguinte tabela de distribuição conjunta:

X \ Y	1	2	3
1	0,1	0,1	0
2	0,1	0,2	0,3
3	0,1	0,1	0

a) Determinar a função de probabilidade de X + Y e, a partir daí, E (X + Y). De outra maneira pode-se obter a mesma resposta?
b) Determinar a função de probabilidade de (X · Y) e, em seguida, calcular E (XY).
c) Mostrar que, embora E (XY) = E (X) · E (Y) ocorra, X e Y não são independentes.

3.7.28 Suponha que (X, Y) tenha a seguinte distribuição de probabilidade:

X \ Y	1	2	3
1	1/18	1/6	0
2	0	1/9	1/5
3	1/12	1/4	2/15

a) Mostre que a tabela anterior é realmente uma distribuição de probabilidade
b) Calcule E (X/Y = 2);
c) Calcule VAR (Y/X = 1).

3.7.29 As variáveis aleatórias X e Y são independentes.

a) Completar o quadro, determinando os valores de a, b e c;
b) Seja Z = |3X − 4Y| , calcular E (Z) usando a distribuição de probabilidade de Z;
c) Calcular VAR (3X − 2Y).

X \ Y	1	2	3	P (X)
1	0,04		0,08	a
3				b
5				c
P (Y)	a	b	c	1

3.7.30 As variáveis X e Y são independentes e têm média e variância iguais a 5 e 6 para X e 4 e 3 para Y. Calcular a média e variância de:

a) X − Y;
b) 2X + 3Y.

3.7.31 Sendo $Z = 5X + 3Y - 4$, onde X e Y são independentes, E (X) = 3, VAR (X) = 2, E (Y) = 4 e VAR (Y) = 3. Determinar E (Z) e VAR (Z).

3.7.32 Em um pequeno grupo de casais empregados, a renda X do marido e Y da respectiva esposa tem sua distribuição conjunta de probabilidades dada abaixo:

Y \ X	10	15	20
5	p	2p	3p
10	2p	4p	2p
15	3p	2p	p

X e Y em milhares de reais

a) Seja $W = 0{,}6X + 0{,}8Y$ a renda do casal após dedução de impostos, qual sua média e sua variância?

b) X e Y são independentes? Qual é o coeficiente de correlação ρ_{XY}?

3.7.33 A função de probabilidade conjunta de duas variáveis X e Y é dada por $P(X = x; Y = y) = \frac{1}{32} \cdot (x^2 + y^2)$, para X = 0, 1, 2, 3 e Y = 0,1. Verificar que a função de probabilidade de marginal de X é $P(X) = \frac{1}{32}(2x^2 + 1)$, X = 0, 1, 2, 3 e que a função de probabilidade de marginal de Y é $P(Y) = \frac{1}{16}(2y^2 + 7)$, Y = 0,1.

3.7.34 a) Complete o quadro abaixo, supondo que X e Y são *independentes*;

b) Calcule a esperança de Y, dado que X = 2;

c) Seja $Z = 4X - 3Y$, calcule E (Z) e V (Z);

d) Dê a distribuição de Z e obtenha através da mesma os valores de E (Z) e V (Z). (Note que esses são os mesmos obtidos no item c.)

X \ Y	2	3	4	P (X)
1	0,08			
2				
3				0,3
P (Y)	0,2		0,5	1

MAKRON Books

4 DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS DE PROBABILIDADES DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

4.1 DISTRIBUIÇÃO DE BERNOULLI

Consideremos uma única tentativa de um experimento aleatório. Podemos ter *sucesso* ou *fracasso* nessa tentativa.

Seja *p* a probabilidade de sucesso e *q* a probabilidade de fracasso, com $p + q = 1$.

Seja X: *número de sucessos em uma única tentativa do experimento*. X assume o valor *0* que corresponde ao fracasso, com probabilidade *q*, ou o valor *1*, que corresponde ao sucesso, com probabilidade *p*.

$$X = \begin{cases} 0 \text{ fracasso} \\ 1 \text{ sucesso} \end{cases} \quad \text{com} \quad P(X = 0) = q \quad \text{e} \quad P(X = 1) = p.$$

Nessas condições a variável aleatória *X tem distribuição de BERNOULLI*, e sua função de probabilidade é dada por:

$$\boxed{P(X = x) = p^x \cdot q^{1-x}}$$

ESPERANÇA E VARIÂNCIA

Calcularemos a média e a variância da variável com distribuição de BERNOULLI.

X	P (X)	X · P (X)	$X^2 \cdot P(X)$
0	q	0	0
1	p	p	p
	1	p	p

$\therefore$ E (X) = P

VAR (X) = $P - P^2 = P(1 - P) = pq$

Logo $\begin{cases} E(X) = p \\ VAR(X) = pq. \end{cases}$

EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Uma urna tem 30 bolas brancas e 20 verdes. Retira-se uma bola dessa urna. Seja X: número de bolas verdes, calcular E (X) e VAR (X) e determinar P (X).

$$X = \begin{cases} 0 \to q = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} \\ \\ 1 \to p = \frac{20}{50} = \frac{2}{5} \end{cases} \therefore$$

$$\therefore \quad P(X = x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x \left(\frac{3}{5}\right)^{1-x}$$

$$\text{e} \quad E(X) = p = \frac{2}{5}$$

$$VAR(X) = p \cdot q = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$$

Resumo:

X tem distribuição de BERNOULLI.

$$X = \begin{cases} 0 \to q \\ 1 \to p \end{cases} \to \quad \begin{matrix} P(X = x) = p^x \cdot q^{1-x} \\ E(X) = p \text{ e } VAR(X) = pq \end{matrix}$$

4.2 DISTRIBUIÇÃO GEOMÉTRICA

Consideremos tentativas sucessivas e independentes de um mesmo experimento aleatório. Cada tentativa admite *sucesso* com probabilidade p e *fracasso* com probabilidade q; $p + q = 1$.

Seja X: *número de tentativas necessárias ao aparecimento do primeiro sucesso.*

Logo, X assume os valores:

X = 1, que corresponde ao sucesso (S) e $P(X = 1) = p$;

X = 2, que corresponde ao fracasso (F) na 1ª tentativa e sucesso na segunda, (FS) e

$$P(X = 2) = P(F \cap S) = q \cdot p;$$

X = 3, que corresponde a (FFS) e $P(X = 3) = P(F \cap F \cap S) = q \cdot q \cdot p = q^2 \cdot p$;

X = 4, que corresponde a (FFFS) e $P(X = 4) = q^3 \cdot p$;

e assim sucessivamente,

X = x, que corresponde a $\underbrace{FF \ldots FS}_{x}$ com

$$\boxed{P(X = x) = q^{x-1} \cdot p}$$

A variável *X tem então distribuição geométrica.*

Observamos que:

$$\sum_{x=1}^{\infty} P(X = x) = \sum_{x=1}^{\infty} p \cdot q^{x-1} = p \sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1} = p(1 + q + q^2 + \ldots)$$

$$= p \cdot \frac{1}{1-q} = p \cdot \frac{1}{p} = 1$$

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

1. A probabilidade de se encontrar aberto o sinal de trânsito numa esquina é 0,20. Qual a probabilidade de que seja necessário passar pelo local 5 vezes, para encontrar o sinal aberto pela primeira vez?

X: número de vezes necessárias para encontrar o sinal aberto.

$p = 0{,}20$

$q = 0{,}80$

$P(X = 5) = (0{,}80)^4 \cdot (0{,}20) = 0{,}08192$

2. Qual a probabilidade de que um dado deva ser lançado 15 vezes para que na 15ª vez ocorra a face 6 pela primeira vez?

$p = \frac{1}{6}$

$q = \frac{5}{6}$

X: número de lançamentos necessários ao aparecimento da primeira face 6.

$$P(X = 15) = \left(\frac{5}{6}\right)^{14} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = 0{,}01298$$

ESPERANÇA E VARIÂNCIA

Para determinarmos a média e a variância da distribuição geométrica, usaremos os recursos:

1. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

2. $\frac{d}{dx}\left\{\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx} f_i(x)$, nos pontos onde a função é derivável.

MÉDIA

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot P(X = x) = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot p \cdot q^{x-1} = p \sum_{x=1}^{\infty} x q^{x-1} =$$

$$= p \cdot \sum_{x=1}^{\infty} \frac{d}{dq}(q^x) = p \cdot \frac{d}{dq}\left\{\sum_{x=1}^{\infty} q^x\right\} =$$

$$= p \cdot \frac{d}{dq}\left\{\frac{q}{1-q}\right\} = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = p \cdot \frac{1}{p^2} = \boxed{\frac{1}{p}}$$

VARIÂNCIA

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot p \cdot q^{x-1} = p \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot q^{x-1} = p \sum_{x=1}^{\infty} [x(x-1) + x] q^{x-1} =$$

$$= p \sum_{x=1}^{\infty} x(x-1) \cdot q^{x-1} + p \sum_{x=1}^{\infty} x q^{x-1} =$$

$$= pq \sum_{x=1}^{\infty} x(x-1) q^{x-2} + \frac{1}{p} = pq \sum_{x=1}^{\infty} \frac{d^2}{dq^2}\{q^x\} + \frac{1}{p} =$$

$$= p \cdot q \cdot \frac{d^2}{dq^2}\left\{\sum_{x=1}^{\infty} q^x\right\} + \frac{1}{p} = p \cdot q \cdot \frac{d^2}{dq^2}\left\{\frac{q}{1-q}\right\} + \frac{1}{p} =$$

$$= p \cdot q \cdot \frac{2}{(1-q)^3} + \frac{1}{p} = \frac{2pq}{p^3} + \frac{1}{p} = \frac{2q+p}{p^2} \quad \therefore$$

$$VAR(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2q+p}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2$$

o:

$$\boxed{VAR(X) = \frac{q}{p^2}}$$

> Resumo:
> X tem distribuição geométrica => X = 1, 2, ..., n, ... e
>
> $$P(X = x) = q^{x-1} \cdot p \text{ e } \begin{cases} E(X) = \frac{1}{p} \\ VAR(X) = \frac{q}{p^2} \end{cases}$$

4.3 DISTRIBUIÇÃO DE PASCAL

Suponhamos que um experimento aleatório seja repetido independentemente até que um evento A ocorra pela r-ésima vez.

Seja $P(A) = p$ (sucesso)

e $P(\bar{A}) = q$ (fracasso) em cada tentativa do experimento

Seja X: *número de repetições necessárias para que A ocorra pela r-ésima vez.*

Se r = 1, X tem distribuição geométrica.

Se X = x, o evento A ocorre pela r-ésima vez na repetição de número x. Logo A ocorre (r – 1) vezes nas (x – 1) repetições anteriores.

$$\therefore \boxed{P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}}, \ x \geq r$$

A variável X assim definida tem *distribuição de Pascal.*

EXEMPLO DE APLICAÇÃO

A probabilidade de que um sinal de trânsito esteja aberto numa esquina é 0,20. Qual a probabilidade de que seja necessário passar pelo local 10 vezes para encontrá-lo aberto pela 4ª vez?

X: número de passagens pela esquina.

$r = 4$

$p = 0{,}20$

$q = 0{,}80$

$$P(X = 10) = \binom{9}{3} \cdot (0{,}20)^4 \cdot (0{,}80)^6 = 0{,}035232$$

ESPERANÇA E VARIÂNCIA

Usando os resultados de E (X) e VAR (X) da distribuição geométrica, é fácil demonstrar que:

$$E(X) = \frac{r}{p}$$

$$VAR(X) = \frac{rq}{p^2}$$

Resumo:
X: tem distribuição de Pascal $\Rightarrow$

$$\Rightarrow P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r},\ x \geq r$$

e $\quad E(X) = \frac{r}{p},\ VAR(X) = \frac{rq}{p^2}$

.4 DISTRIBUIÇÃO HIPERGEOMÉTRICA

onsideremos uma população com N elementos, dos quais r têm uma determinada carac-rística (a retirada de um desses elementos corresponde ao *sucesso*). Retiramos dessa pulação, sem reposição, uma amostra de tamanho *n*.

Seja X: *número de sucessos na amostra* (*saída do elemento com a característica*).

Qual a P (X = k)?

Podemos tirar $\binom{N}{n}$ amostras sem reposição. Os sucessos na amostra podem ocorrer $\binom{r}{k}$ maneiras e fracassos de $\binom{N-r}{n-k}$ modos.

Logo,

$$P(X = k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}},\quad 0 \leq k \leq n \text{ e } k \leq r$$

A variável X assim definida tem *distribuição hipergeométrica*.

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

1. Pequenos motores são guardados em caixas de 50 unidades. Um inspetor de qualidade examina cada caixa, antes da posterior remessa, testando 5 motores. Se nenhum motor for defeituoso, a caixa é aceita. Se pelo menos um for defeituoso, todos os 50 motores são testados. Há 6 motores defeituosos numa caixa.
Qual a probabilidade de que seja necessário examinar todos os motores dessa caixa?
X: número de motores defeituosos da amostra.

$N = 50$
$r = 6$
$n = 5$
$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) =$

$$= 1 - \frac{\binom{6}{0}\binom{44}{5}}{\binom{50}{5}} = 1 - 0{,}5126 = 0{,}4874$$

2. De um baralho com 52 cartas, retiram-se 8 cartas ao acaso, sem reposição. Qual a probabilidade de que 4 sejam figuras?
X: número de figuras em 8 cartas.

$$P(X = 4) = \frac{\binom{12}{4}\binom{40}{4}}{\binom{52}{8}} = 0{,}0601$$

3. Uma firma compra lâmpadas por centenas. Examina sempre uma amostra de 15 lâmpadas para verificar se estão boas. Se uma centena inclui 12 lâmpadas queimadas, qual a probabilidade de se escolher uma amostra com pelo menos uma lâmpada queimada?
X: número de lâmpadas queimadas na amostra.
$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) =$

$$= 1 - \frac{\binom{12}{0}\binom{88}{15}}{\binom{100}{15}} = 0{,}8747$$

ESPERANÇA E VARIÂNCIA

Demonstra-se que:

$$E(X) = np \quad \text{e} \quad VAR(X) = np(1-p)\frac{(N-n)}{(N-1)}$$

onde $p = \frac{r}{N}$

Demonstra-se que assintoticamente ($n \to \infty$)

$$E(X) = np \quad e \quad VAR(X) = npq.$$

> Resumo:
> X: tem distribuição hipergeométrica $\Rightarrow$ (retiradas sem reposição)
>
> $$P(X = k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$
>
> $$E(X) = np$$
>
> e $$VAR(X) = np(1-p)\frac{(N-n)}{(N-1)}$$
>
> onde $p = \frac{r}{N}$

4.5 DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Consideremos n tentativas independentes de um mesmo experimento aleatório. Cada tentativa admite apenas dois resultados: *fracasso* com probabilidades q e *sucesso* com probabilidade p, $p + q = 1$. As probabilidades de sucesso e fracasso são as mesmas para cada tentativa.

Seja X: *número de sucessos em n tentativas.*

Determinaremos a função de probabilidades da variável X, isto é, $P(X = k)$.

Um resultado particular (RP):

$$\underbrace{SSS \ldots S}_{k}\underbrace{FFF \ldots F}_{n-k},$$

Logo,

$$P(RP) = P(SSS \ldots SFFF \ldots F) =$$

$$= \underbrace{p \cdot p \ldots p}_{k} \cdot \underbrace{q \cdot q \ldots q}_{n-k} = p^k q^{n-k}$$

Considerando todas as n-úplas com k sucessos, temos:

$$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}}$$

A variável X tem distribuição binomial, com parâmetros n e p, e indicaremos pela notação

$$\boxed{X: B(n, p)}$$

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

1. Uma moeda é lançada 20 vezes. Qual a probabilidade de saírem 8 caras?

Resolução:

X: número de sucessos (caras)

$$X = 0, 1, 2, \ldots, 20 \Rightarrow p = P(c) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X: B\left(20, \frac{1}{2}\right)$$

$$P(X = 8) = \binom{20}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^{12} = 0{,}12013 \text{ (tabela: pág. 189)}$$

2. Numa criação de coelhos, 40% são machos. Qual a probabilidade de que nasçam pelo menos 2 coelhos machos num dia em que nasceram 20 coelhos?

X: número de coelhos machos (cm).

$$X = 0, 1, \ldots, 20 \rightarrow P(c.m.) = p = 0{,}40 \Rightarrow X: B(20; 0,40)$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] =$$

$$= 1 - \left\{\binom{20}{0}(0{,}40)^0(0{,}60)^{20} + \binom{20}{1}(0{,}40)^1(0{,}60)^{19}\right\} =$$

$$= 1 - (0{,}00003 + 0{,}00049) = 0{,}99948$$

3. Uma prova tipo teste tem 50 questões independentes. Cada questão tem 5 alternativas. Apenas uma das alternativas é a correta. Se um aluno resolve a prova respondendo a esmo as questões, qual a probabilidade de tirar nota 5?

X: número de acertos

X: 0, 1, ..., 50

$$p = P(\text{acerto}) = \frac{1}{5} \Rightarrow X: B\left(50, \frac{1}{5}\right) \therefore$$

$$\therefore P(X = 25) = \binom{50}{25}\left(\frac{1}{5}\right)^{25}\left(\frac{4}{5}\right)^{25} = 0{,}000002$$

ESPERANÇA E VARIÂNCIA

Se X: B (n, p) → $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

ESPERANÇA

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x p(x) = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x} =$$

$$= \sum_{x=1}^{n} x \cdot \binom{n}{x} \cdot p^x q^{n-x} =$$

$$= \sum_{x=1}^{n} x \cdot \frac{n!}{x!\,(n-x)!} \cdot p^x q^{n-x} =$$

$$= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!\,(n-x)!} \cdot p^x \cdot q^{n-x} =$$

$$= n \cdot p \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!} \cdot p^{x-1} q^{n-x} =$$

$$= np \sum_{x=1}^{n} \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} q^{n-x}$$

Fazendo y = x − 1 temos:

$$E(X) = n \cdot p \cdot \underbrace{\sum_{y=0}^{n-1} \binom{n-1}{y} \cdot p^y \cdot q^{n-y-1}}_{1} = n \cdot p \;\therefore\; \boxed{E(X) = n \cdot p}$$

VARIÂNCIA

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2 \cdot p(x) = \sum_{x=1}^{n} x^2 \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} =$$

$$= \sum_{x=1}^{n} [x(x-1) + x] \cdot \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

$$E(X^2) = \sum_{x=2}^{n} x(x-1) \cdot \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} + \underbrace{\sum_{x=1}^{n} x \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}}_{n \cdot p}$$

$$E(X^2) = \sum_{x=2}^{n} \frac{n!}{(x-2)! \cdot (n-x)!} \cdot p^x \cdot q^{n-x} + n \cdot p$$

$$E(X^2) = n(n-1)^2 \cdot p^2 \cdot \sum_{x=2}^{n} \binom{n-2}{x-2} \cdot p^{x-2} \cdot q^{n-x} + np$$

fazendo y = x − 2 temos:

$$E(X^2) = n(n-1) \cdot p^2 \cdot \underbrace{\sum_{y=0}^{n-2} \binom{n-2}{y} \cdot p^y \cdot q^{n-y-2}}_{1} + np \;\therefore$$

$$\therefore \quad \boxed{E(X^2) = n(n-1) \cdot p^2 + np}$$

Logo: $VAR(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2 \cdot p^2 = -np^2 + np =$
$= np(1-p) = npq \;\therefore$

$$\therefore \quad \boxed{VAR(X) = npq}$$

EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Achar a média e a variância da variável aleatória Y = 3X + 2, sendo X: B (20; 0, 3).

Resolução:

$E(X) = np = 20 \cdot 0{,}3 = 6$

$VAR(X) = npq = 20 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 4{,}2$

Logo: $E(Y) = E(3X + 2) = 3E(X) + 2 = 3 \cdot 6 + 2 = 20$

e

$VAR(Y) = VAR(3X + 2) = 9\, VAR(X) = 9 \cdot 4{,}2 = 37{,}8$

Resumo:

Se X: B (n, p) → $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

$$E(X) = np$$

e

$$VAR(X) = npq$$

4.6 DISTRIBUIÇÃO POLINOMIAL OU MULTINOMIAL

Consideremos um experimento aleatório e k eventos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ que formam uma partição do espaço amostral do experimento.

Sejam $P(A_i) = p_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$ (probabilidades de sucessos).

Consideremos *n* tentativas independentes do mesmo experimento, sendo que os p_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ permanecem constantes durante as repetições, com $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_k$ os números de ocorrências de $A_1, A_2, \ldots, A_k$, respectivamente, com $\sum_{i=1}^{k} X_i = n$.

Nestas condições

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots, X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$$

Com $\sum_{i=1}^{n} n_i = n$.

Esta função de probabilidade caracteriza a *distribuição polinomial* ou *multinomial* de X_i, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Quando k = 2, temos a distribuição binomial, pois

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2) = \frac{n!}{n_1!\, n_2!}\, p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2},$$

$$\text{com} \begin{cases} n_2 = n - n_1 \\ p_2 = 1 - p_1 \end{cases}$$

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

1. Uma urna tem 6 bolas brancas, 4 pretas e 5 azuis. Retiram-se 8 bolas com reposição. Qual a probabilidade de sair 4 bolas brancas, 2 pretas e 2 azuis?

$p_1 = P(B) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ X_1: saída de 4 bolas brancas

$p_2 = P(P) = \frac{4}{15}$ X_2: saída de 2 bolas pretas

$p_3 = P(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \therefore$ X_3: saída de 2 bolas azuis.

$X_1 + X_2 + X_3 = 8$

$$\therefore P(X_1 = 4, X_2 = 2, X_3 = 2) =$$

$$= \frac{8!}{4!\, 2!\, 2!} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 \left(\frac{4}{15}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

2. Lança-se um dado 30 vezes. Qual a probabilidade de que cada face ocorra exatamente 5 vezes?

Resolução:

X_1: ocorrência de 5 faces 1
X_2: ocorrência de 5 faces 2
X_3: ocorrência de 5 faces 3
X_4: ocorrência de 5 faces 4
X_5: ocorrência de 5 faces 5
X_6: ocorrência de 5 faces 6.

$$P(X_1 = 5, X_2 = 5, X_3 = 5, X_4 = 5, X_5 = 5, X_6 = 5) =$$

$$= \frac{30!}{(5!)^6} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5}_{6} = \frac{30!}{(5!)^6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{30}$$

ESPERANÇA E VARIÂNCIA

Se X_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ tem distribuição multinomial, é fácil ver que:

$$E(X_i) = n_i \cdot p_i$$

$$VAR(X_i) = n_i \cdot p_i \cdot q_i,\ i = 1, 2, \ldots, k$$

Resumo:

Xi tem distribuição multinomial, i = 1, 2, ..., k

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots, X_k = n_k) =$$

$$= \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}\, p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_k^{n_k}$$

$E(X_i) = n_i p_i$ e $VAR(X_i) = n_i p_i q_i$

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

ɔXiMAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL PELA DISTRIBUIÇÃO DE SON

; vezes, no uso da binomial, acontece que n é muito grande ($n \to \infty$) e p é muito 10 ($p \to 0$). Nesses casos não encontramos o valor em tabelas, ou então o cálculo e muito difícil, sendo necessário o uso de máquinas de calcular sofisticadíssimas o de computador.

ɔdemos então fazer uma aproximação da binomial pela distribuição de Poisson.

nsideremos
1. $n \to \infty$ (maior que o maior valor tabelado, $n > 30$)
2. $p \to 0$ ($p < 0,1$)
3. $0 < \mu \leq 10$

ındo isso ocorre, a média $\boxed{\mu = np}$ será tomada como $\boxed{np = \lambda}$.

sas condições, se X: B (n, p), queremos calcular $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

raremos que $P(X = k) \cong \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$

$$P(X = k) \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, p^k \cdot q^{n-k} = n(n-1)(n-2) \cdot$$

$$(n-k+1) \cdot \frac{p^k}{k!} \cdot q^{n-k}$$

e $q = 1 - \frac{\lambda}{n}$. Quando $n \to \infty$.

$$P(X = k) \cong \lim_{n \to \infty} \left\{ n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \right.$$

$$\left. \cdot \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \right\} = \lim_{n \to \infty} \left\{ 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \right.$$

$$\cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \lambda^k \cdot \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot$$

$$\left. \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \right\} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \lambda^k \cdot \frac{1}{k!} \cdot e^{-\lambda} \cdot 1 =$$

$$= \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \boxed{P(X = k) \cong \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}}$$

que é a chamada Distribuição de Poisson.

Logo, a binomial tem a distribuição de Poisson como limite, quando $n \to \infty$ e $p \to 0$.

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

1. Seja X: B (200; 0,01). Calcular P (X = 10) usando binomial e aproximação pela Poisson.

Binomial:

$$P(X = 10) = \binom{200}{10} (0,01)^{10} (0,99)^{190} = 0,000033$$

Aproximação pela Poisson:

$$\lambda = np = 200 \cdot 0,01 = 2$$

$$P(X = 10) = \frac{e^{-2} \cdot 2^{10}}{10!} = 0,000038 \quad \text{(Tabela pág. 186)}$$

Logo, a aproximação é bastante boa, pois o erro é de 0,000005 apenas.

2. A probabilidade de uma lâmpada se queimar ao ser ligada é $\frac{1}{100}$. Numa instalação com 100 lâmpadas, qual a probabilidade de 2 lâmpadas se queimarem ao serem ligadas?

X: número de lâmpadas queimadas.

$X: B\left(100, \frac{1}{100}\right)$. Logo,

$$P(X=2) = \binom{100}{2}(0{,}01)^2(0{,}99)^{98}$$

Usando a aproximação pela Poisson

$$\lambda = np = 100 \cdot 0{,}01 = 1$$

$$P(X=2) = \frac{e^{-1} \cdot 1^2}{2!} = 0{,}183940 \quad \therefore$$

$$\therefore \quad P(X=2) = \binom{100}{2}(0{,}01)^2(0{,}99)^{98} \cong 0{,}183940$$

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

Consideremos a probabilidade de ocorrência de sucessos em um determinado intervalo.

A probabilidade da ocorrência de um sucesso no intervalo é proporcional ao intervalo. A probabilidade de mais de um sucesso nesse intervalo é bastante pequena com relação à probabilidade de um sucesso.

Seja *X o número de sucessos no intervalo, então*:

$$\boxed{P(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}}$$

onde λ é a média.

A variável *X assim* definida *tem distribuição de Poisson.*

A distribuição de Poisson é muito usada na distribuição do número de:

1. carros que passam por um cruzamento por minuto, durante uma certa hora do dia;
2. erros tipográficos por página, em um material impresso;
3. defeitos por unidade (m^2, m^3, m, etc.,) por peça fabricada;
4. colônias de bactérias numa dada cultura por 0,01 mm^2, numa plaqueta de microscópio;
5. mortes por ataque de coração por ano, numa cidade. É aplicada também em problemas de filas de espera em geral, e outros.

ESPERANÇA E VARIÂNCIA

Cálculo da média:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{(x-1)!} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

seja $y = x - 1$

$$E(X) = e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots\right) =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \boxed{\lambda}$$

Cálculo da variância:

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} [x(x-1) + x] \frac{\lambda^x}{x!} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} (x-1) \cdot x \cdot \frac{\lambda^x}{x!} + e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-2)!} + \lambda = e^{-\lambda} \cdot \lambda^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda$$

Seja $y = x - 2$

$$\therefore E(X^2) = e^{-\lambda} \cdot \lambda^2 \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} + \lambda = e^{-\lambda} \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda \therefore$$

$$\therefore VAR(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \boxed{\lambda}$$

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

1. Num livro de 800 páginas há 800 erros de impressão. Qual a probabilidade de que uma página contenha pelo menos 3 erros?

X: número de erros por página

$\lambda = 1$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= 1 - \left\{\frac{e^{-1} \cdot 1^0}{0!} + \frac{e^{-1} \cdot 1^1}{1!} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-1} \cdot 1^2}{2!}\right\} = 1 - \{0,367879 + 0,367879 + 0,183940\} =$$

$$= 1 - 0,919698 = 0,080302$$

2. Numa central telefônica chegam 300 telefonemas por hora. Qual a probabilidade de que:

a) num minuto não haja nenhum chamado
b) em 2 minutos haja 2 chamados
c) em *t* minutos não haja chamados

a) X: número de chamadas por minuto $\rightarrow \lambda = 5$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-5} \cdot 5^0}{0!} = 0,006738$$

b) dois minutos $\rightarrow \lambda = 10$

$$P(X = 2) = \frac{e^{-10} \cdot 10^2}{2!} = 0,002270$$

c) *t* minutos $\rightarrow \lambda = 5t$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-5t} \cdot (5t)^0}{0!} = e^{-5t}$$

4.8 EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

4.8.1 Qual a probabilidade de que no 25º lançamento de um dado ocorra a face 4 pela 5ª vez?
X: número de lançamentos necessários para ocorrer a 5ª face 4. (Pascal)

$$P = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 25) = \binom{24}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^{20} = \boxed{0,0356438}$$

4.8.2 Uma urna tem 20 bolas pretas e 30 brancas. Retiram-se 25 bolas com reposição. Qual a probabilidade de que:

a) 2 sejam pretas?
b) pelo menos 3 sejam pretas?

X: número de bolas pretas $\rightarrow P = \frac{20}{50} = 0,4$

Logo X: B (25; 0,4)

a) $P(X = 2) = \binom{25}{2}(0,4)^2(0,6)^{23} = \boxed{0,00038}$

b) $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1) +$

$$+ P(X = 2)\} = 1 - \left\{\binom{25}{0}(0,4)^0(0,6)^{25} + \right.$$

$$\left. + \binom{25}{1}(0,4)^1(0,6)^{24} + \binom{25}{2}(0,4)^2(0,6)^{23}\right\} =$$

$$= 1 - \{0 + 0,00005 + 0,00038\} = 1 - 0,00043 =$$

$$= \boxed{0,99957}$$

4.8.3 Numa estrada há 2 acidentes para cada 100 km. Qual a probabilidade de que em:

a) 250 km ocorram pelo menos 3 acidentes?
b) 300 km ocorram 5 acidentes?

X: número de acidentes por β km (Poisson)

a) $\beta = 250 \rightarrow \lambda = 5$

$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1) +$

$$+ P(X = 2)\} = 1 - \left\{\frac{e^{-5} \cdot 5^0}{0!} + \frac{e^{-5} \cdot 5^1}{1!} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-5} \cdot 5^2}{2!}\right\} = 1 - \{0,006738 + 0,033690 +$$

$$+ 0,084224\} = 1 - 0,124652 = \boxed{0,875348}$$

b) $\beta = 300 \rightarrow \lambda = 6$

$$P(X = 5) = \frac{e^{-6} \cdot 6^5}{5!} = \boxed{0,160623}$$

4.8.4 A probabilidade de um arqueiro acertar um alvo com uma única flecha é de 0,20. Lança 30 flechas no alvo. Qual a probabilidade de que:

a) exatamente 4 acertem o alvo?
b) pelo menos 3 acertem o alvo?

X: número de acertos no alvo → p = 0,20
X: B (30; 0,20)

a) $P(X = 4) = \binom{30}{4}(0,2)^4 (0,8)^{26} = \boxed{0,13252}$

b) $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) +$

$+ P(X = 2)] = 1 - \left\{\binom{30}{0}(0,2)^0 (0,8)^{30} +\right.$

$\left.+\binom{30}{1}(0,2)^1 (0,8)^{29} + \binom{30}{2}(0,2)^2 (0,8)^{28}\right\} =$

$= 1 - [0,00124 + 0,00929 + 0,03366] =$

$= 1 - 0,04419 = \boxed{0,95581}$

4.8.5 Um lote de aparelhos de TV é recebido por uma firma. 20 aparelhos são inspecionados. O lote é rejeitado se pelo menos 4 forem defeituosos. Sabendo-se que 1% dos aparelhos é defeituoso, determinar a probabilidade de a firma rejeitar todo o lote.
X: número de aparelhos defeituosos
X: B (20; 0,01)

$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - \left\{\binom{20}{0}(0,01)^0 (0,99)^{20} +\right.$

$\left.+\binom{20}{1}(0,01)^1 (0,99)^{19} + \binom{20}{2}(0,01)^2 (0,99)^{18} + \binom{20}{3}(0,01)^3 (0,99)^{17}\right\} =$

$= 1 - [0,81791 + 0,16523 + 0,01586 + 0,00096] =$

$= 1 - 0,99996 = \boxed{0,00004}$

4.8.6 Sabe-se que 20% dos animais submetidos a um certo tratamento não sobrevivem. Se esse tratamento foi aplicado em 20 animais e se X é o número de não-sobreviventes:

a) qual a distribuição de X?
b) calcular E (X) e VAR (X)
c) calcular $P(2 < X \leq 4)$
d) calcular $P(X \geq 2)$

a) X: B (20; 0,2)

b) $E(X) = np = 20 \cdot 0,2 = 4$

$VAR(X) = npq = 20 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 3,2$

c) $P(2 < x \leq 4) = P(X = 3) + P(X = 4) =$

$= 0,20536 + 0,21820 = \boxed{0,42356}$

d) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] =$

$= 1 - [0,01153 + 0,05765] = 1 - 0,06918 = \boxed{0,93082}$

4.8.7 A experiência mostra que de cada 400 lâmpadas, 2 se queimam ao serem ligadas. Qual a probabilidade de que numa instalação de:

a) 600 lâmpadas, no mínimo 3 se queimem?
b) 900 lâmpadas, exatamente 8 se queimem?

X: número de lâmpadas que se queimam numa instalação (Poisson)

a) $\lambda = 3$

$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) +$

$+ P(X = 2)] = 1 - [0,049787 + 0,149361 +$

$+ 0,224042] = 1 - 0,42319 = \boxed{0,57681}$

b) $\lambda = 4,5$

$$P(X = 8) = \frac{e^{-4,5} \cdot (4,5)^8}{8!} = \boxed{0,046330}$$

4.8.8 Numa linha adutora de água, de 60 km de extensão, ocorrem 30 vazamentos no período de um mês. Qual a probabilidade de ocorrer, durante o mês, pelo menos 3 vazamentos num certo setor de 3 km de extensão?

X: número de vazamentos por 3 km

$$\left.\begin{array}{l} 60 \text{ km} \to 30 \text{ vazamentos} \\ 3 \text{ km} \to \lambda \end{array}\right\} \lambda = 1,5$$

$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] =$

$$= 1 - \left\{\frac{e^{-1,5}(1,5)^0}{0!} + \frac{e^{-1,5}(1,5)^1}{1!} + \frac{e^{-1,5}(1,5)^2}{2!}\right\} =$$

$$= 1 - \{0{,}223130 + 0{,}334695 + 0{,}251021\} =$$

$$= 1 - 0{,}808846 = \boxed{0{,}191154}$$

3.9 Numa fita de som, há um defeito em cada 200 pés. Qual a probabilidade de que:

a) em 500 pés não aconteça defeito?
b) em 800 pés ocorram pelo menos 3 defeitos?

X: número de defeitos por β pés (Poisson)

a) $\beta = 500 \rightarrow \lambda = 2{,}5$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-2,5} \cdot (2{,}5)^0}{0!} = \boxed{0{,}082085}$$

b) $\beta = 800 \rightarrow \lambda = 4$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \left\{\frac{e^{-4} \cdot 4^0}{0!} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-4} \cdot 4^1}{1!} + \frac{e^{-4} \cdot 4^2}{2!}\right\} =$$

$$= 1 - \{0{,}18316 + 0{,}073263 + 0{,}146525\} =$$

$$= 1 - 0{,}238104 = \boxed{0{,}761896}$$

8.10 O número de mortes por afogamento em fins de semana, numa cidade praiana, é de 2 para cada 50.000 habitantes. Qual a probabilidade de que em:

a) 200.000 habitantes ocorram 5 afogamentos?
b) 112.500 habitantes ocorram pelo menos 3 afogamentos?

X: número de afogamentos por β habitantes (Poisson)

a) $\beta = 200.000 \rightarrow \lambda = 8$

$$P(X = 5) = \frac{e^{-8} \cdot 8^5}{5!} = \boxed{0{,}091603}$$

b) $\beta = 112.500$ ® $\lambda = 4{,}5$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \{0{,}011109 +$$

$$+ 0{,}049990 + 0{,}112479\} = 1 - 0{,}173578 =$$

$$= 0{,}826422$$

4.8.11 Uma firma recebe 720 mensagens em seu fax em 8 horas de funcionamento. Qual a probabilidade de que:

a) em 6 minutos receba pelo menos 4 mensagens?
b) em 4 minutos não receba nenhuma mensagem?

X: número de mensagens por β minutos

a) $\beta = 6$ minutos

$$\left.\begin{array}{lcl} 720 \text{ mensagens} & \rightarrow & 480 \text{ min} \\ \lambda & \rightarrow & 6 \text{ min} \end{array}\right\} \lambda = 9$$

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - \left\{\frac{e^{-9} \cdot 9^0}{0!} + \frac{e^{-9} \cdot 9^1}{1!} + \frac{e^{-9} \cdot 9^2}{2!} + \frac{e^{-9} \cdot 9^3}{3!}\right\} =$$

$$= 1 - \{0{,}000123 + 0{,}001111 + 0{,}004998 + 0{,}014994\} = 1 - 0{,}021226 =$$

$$= 0{,}978774$$

b) $\beta = 4$ minutos $\rightarrow \lambda = 6$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-6} \cdot 6^0}{0!} = 0{,}002479$$

4.8.12 Considere 10 tentativas independentes de um experimento. Cada tentativa admite sucesso com probabilidade 0,05. Seja X: número de sucessos:

a) Calcular $P(1 < x \leq 4)$
b) Considere 100 tentativas independentes. Calcular $P(X \leq 2)$

a) X: B (10; 0,05)

$$P(1 < x \leq 4) = \binom{10}{2}(0{,}05)^2\,(0{,}95)^8 + \binom{10}{3}(0{,}05)^3\,(0{,}95)^7 +$$

$$+ \binom{10}{4}(0{,}05)^4\,(0{,}95)^6 = 0{,}07463 +$$

$$+ 0{,}01048 + 0{,}00096 = \boxed{0{,}08607}$$

b) X: B (100; 0,05). Usaremos a aproximação da binomial pela Poisson.

$$\lambda = 100 \cdot 0{,}05 = 5$$

$$P(X \leq 2) = \frac{e^{-5} \cdot 5^0}{0!} + \frac{e^{-5} \cdot 5^1}{1!} + \frac{e^{-5} \cdot 5^2}{2!} \cong$$

$$\cong 0{,}006738 + 0{,}033690 + 0{,}084224 =$$

$$= \boxed{0{,}124652}$$

4.8.13 Numa urna há 40 bolas brancas e 60 pretas. Retiram-se 20 bolas. Qual a probabilidade de que ocorram no mínimo 2 bolas brancas, considerando as extrações:

a) sem reposição;
b) com reposição.

X: número de bolas brancas

a) Hipergeométrica

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) + P(X = 1) =$$

$$= 1 - \left\{ \frac{\binom{40}{0}\binom{60}{20}}{\binom{100}{20}} + \frac{\binom{40}{1}\binom{60}{19}}{\binom{100}{20}} \right\} =$$

$$= 1 - \{0{,}000008 + 0{,}000153\} =$$

$$= 1 - 0{,}000161 = \boxed{0{,}999839}$$

b) X: B (20; 0,4)

$$P = \frac{40}{100} = 0{,}4$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X > 2) = 1 - \{0{,}00003 + 0{,}00049\} =$$

$$= 1 - 0{,}00052 = \boxed{0{,}99948}$$

4.8.14 Um técnico visita os clientes que compraram assinatura de um canal de TV para verificar o decodificador. Sabe-se, por experiência, que 90% desses aparelhos não apresentam defeitos. a) Determinar a probabilidade de que em 20 aparelhos pelo menos 17 não apresentem defeitos. b) Se a probabilidade de defeito for de 0,0035, qual a probabilidade de que em 2000 visitas ocorra no máximo 1 defeito?

a) X: número de decodificadores sem defeito

X: B (20; 0,90)

$$P(X \geq 17) = \binom{20}{17}(0{,}90)^{17}(0{,}10)^{3} + \ldots + \binom{20}{20}(0{,}90)^{20}(0{,}10)^{0} =$$

$$= 0{,}19012 + 0{,}28518 + 0{,}27017 + 0{,}12158 =$$

$$= 0{,}86705$$

b) X: número de decodificadores defeituosos

Y: B (2000; 0,0035) Fazendo a aproximação pela Poisson temos:

$$\lambda = 2000 \cdot 0{,}0035 \rightarrow \lambda = 7$$

$$P(Y \leq 1) = \frac{e^{-7} \cdot 7^{0}}{0!} + \frac{e^{-7} \cdot 7^{1}}{1!} = 0{,}000912 + 0{,}006383 = 0{,}007295$$

4.8.15 Uma fábrica de motores para máquinas de lavar roupas separa de sua linha de produção diária de 350 peças uma amostra de 30 itens para inspeção. O número de peças defeituosas é de 14 por dia.
Qual a probabilidade de que a amostra contenha pelo menos 3 motores defeituosos?

X: número de motores defeituosos na amostra
X: Hipergeométrica
N = 350 r = 14
n = 30

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)\} =$$

$$= 1 - \left\{ \frac{\binom{14}{0}\binom{336}{30}}{\binom{350}{30}} + \frac{\binom{14}{1}\binom{336}{29}}{\binom{350}{30}} + \frac{\binom{14}{2}\binom{336}{28}}{\binom{350}{30}} \right\} =$$

$$= 1 - \{0{,}278142 + 0{,}380521 + 0{,}232884\} =$$

$$= 1 - 0{,}891547 = 0{,}108453$$

4.8.16 Seja X: B (200; 0,04). Usando aproximação, calcular:

a) $P(X = 6)$
b) $P(X + 2\sigma > \mu)$

Sendo $Z = 4X - 5$, calcular $E(Z)$ e $VAR(Z)$.

$$\mu = E(X) = 200 \cdot 0{,}04 = 8$$

$$\sigma^2 = VAR(X) = 200 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96 = 7{,}68 \rightarrow \sigma = 2{,}77$$

Aproximando pela Poisson temos:

$$\lambda = 200 \cdot 0{,}04 = 8$$

a) $P(X = 6) = \dfrac{e^{-8} \cdot 8^6}{6!} \cong \boxed{0{,}122138}$

b) $P(X + 2\sigma > \mu) = P(X + 2 \cdot 2{,}77 > 8) = P(X > 2{,}46) =$

$= 1 - P(X \leq 2{,}46) = 1 - P(X \leq 2) =$

$= 1 - [0{,}000336 + 0{,}002684 + 0{,}010735] =$

$= 1 - 0{,}013755 = \boxed{0{,}986245}$

$$\text{se } Z = 4X - 5 \begin{cases} E(Z) = 4 \cdot 8 - 5 = \boxed{27} \\ VAR(Z) = 16 \cdot VAR(X) = 16 \cdot 7{,}68 = \boxed{122{,}88} \end{cases}$$

4.8.17 Seja X: B (400; 0,02). Calcular, usando a aproximação pela Poisson:

a) $P(X = 7)$
b) $P(2 \leq X < 6)$
c) $P(X \geq 3)$

$\lambda = np = 400 \cdot 0{,}02 = 8$

a) $P(X = 7) = \dfrac{e^{-8} \cdot 8^7}{7!} = \boxed{0{,}139587}$

b) $P(2 \leq X < 6) = \dfrac{e^{-8} \cdot 8^2}{2!} + \dfrac{e^{-8} \cdot 8^3}{3!} + \dfrac{e^{-8} \cdot 8^4}{4!} +$

$+ \dfrac{e^{-8} \cdot 8^5}{5} = 0{,}010735 + 0{,}028626 + 0{,}057252 + 0{,}091603 =$

$= \boxed{0{,}188216}$

c) $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) +$

$+ P(X = 2)] = 1 - [0{,}000336 + 0{,}002684 + 0{,}010735] =$

$= 1 - 0{,}013755 = \boxed{0{,}986245}$

4.8.18 Uma urna tem 10 bolas e 40 pretas.

a) Qual a probabilidade de que a 6ª bola retirada com reposição seja a 1ª branca?
b) Qual a probabilidade de que de 16 bolas retiradas sem reposição ocorram 3 brancas?
c) Qual a probabilidade de que a 15ª bola extraída com reposição seja a 6ª branca?
d) Qual a probabilidade de que em 30 bolas retiradas com reposição ocorram no máximo 2 brancas?
e) Se o número de bolas na urna fosse 50 brancas e 950 pretas, qual a probabilidade de que retirando-se 200 bolas, com reposição, ocorressem pelo menos 3 brancas?

a) Geométrica:

$$p = \frac{10}{50} = 0{,}2 \rightarrow q = 0{,}8$$

$$P(X = 6) = (0{,}8)^5 \cdot 0{,}2 = \boxed{0{,}065536}$$

b) Hipergeométrica:

$$P(X = 3) = \frac{\binom{10}{3}\binom{40}{13}}{\binom{50}{16}} = \boxed{0{,}293273}$$

c) Pascal:

$$P(X = 15) = \binom{14}{5}(0{,}2)^6\,(0{,}8)^9 = \boxed{0{,}008599}$$

d) Binomial $\rightarrow$ X: B (30; 0,2)

$$P(X \leq 2) = \binom{30}{0}(0{,}2)^0\,(0{,}8)^{30} + \binom{30}{1}(0{,}2)^1\,(0{,}8)^{29} +$$

$$+ \binom{30}{2}(0{,}2)^2\,(0{,}8)^{28} = 0{,}00124 + 0{,}00929 +$$

$$+ 0{,}03366 = \boxed{0{,}04419}$$

e) X: (200; 0,05) → Usaremos a aproximação pela Poisson →

→ $\lambda = 200 \cdot 0,05 = 10$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) =$$

$$= 1 - \left\{ \frac{e^{-10} \cdot 10^0}{0!} + \frac{e^{-10} \cdot 10^1}{1!} + \frac{e^{-10} \cdot 10^2}{2!} \right\} = 1 - \{0,000045 +$$

$$+ 0,000454 + 0,002270\} =$$

$$= 1 - 0,002769 = \boxed{0,997231}$$

3.19 20% dos refrigeradores produzidos por uma empresa são defeituosos. Os aparelhos são vendidos em lotes com 50 unidades. Um comprador adotou o seguinte procedimento: de cada lote ele testa 20 aparelhos e se houver pelo menos 2 defeituosos o lote é rejeitado.
Admitindo-se que o comprador tenha aceitado o lote, qual a probabilidade de ter observado exatamente um aparelho defeituoso?

X: número de defeituosos no lote de 20 aparelhos
X: B (20; 0,2)

$$P(\text{Aceitar}) = P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) =$$

$$= \binom{20}{0}(0,2)^0 (0,8)^{20} + \binom{20}{1}(0,2)^1 (0,8)^{19} =$$

$$= 0,12158 + 0,27017 = 0,39175$$

$$P(X = 1/\text{Aceitou}) = \frac{P(X = 1)}{P(\text{Aceitar})} = \frac{0,27017}{0,39175} = \boxed{0,68965}$$

.20 Um determinado artigo é vendido em caixa a preço de R\$20,00 cada um. É característica de produção que 20% destes artigos sejam defeituosos. Um comprador fez a seguinte proposta: de cada caixa escolhe 25 artigos, ao acaso, e paga por caixa:

R\$25,00 se nenhum artigo for defeituoso dos selecionados;
R\$17,00 se um ou dois artigos forem defeituosos;
R\$10,00 se três ou mais forem defeituosos. O que é melhor para o fabricante: manter o seu preço de R\$20,00 por caixa ou aceitar a proposta do consumidor?

X: número de artigos defeituosos
X: B (25; 0,2)

$$P(X = 0) = 0,00378$$

$$P(1 \leq X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) =$$

$$= 0,02361 + 0,07084 = 0,09445$$

$$P(X \geq 3) = 1 - \{0,00378 + 0,02361 + 0,07084\} =$$

$$= 1 - 0,09823 = 0,90177$$

Y: pagamento por caixa do consumidor.

Y	P (Y)	Y · P (Y)
25,00	0,00378	0,0945
17,00	0,09445	1,60565
10,00	0,90177	9,0177
	1	10,71785

$$\boxed{E(Y) = 10,72}$$

que é o preço médio por caixa da proposta do comprador.
Logo, o fabricante deve manter seu preço de R\$20,00 por caixa.

4.8.21 Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com distribuições de Poisson, X com média 0,2, X = 0, 1, 2, e Y com média 1, Y = 0, 1, 2, 3, 4. Seja $Z = |2X - Y|$. determinar E (Z) **usando a distribuição de probabilidade de Z.**

Os valores de P (X) e P (Y) foram tirados da tabela da distribuição de Poisson, para $\lambda = 0,2$ e $\lambda = 1$, respectivamente, fazendo o arredondamento na 2ª decimal.

X	P (X)
0	0,82
1	0,16
2	0,02
Σ	1

Y	P (Y)
0	0,37
1	0,37
2	0,18
3	0,06
4	0,02
Σ	1

X \ Y	0	1	2	3	4	P (X)
0	0,30	0,30	0,15	0,05	0,02	0,82
1	0,06	0,06	0,03	0,01	0	0,16
2	0,01	0,01	0	0	0	0,02
P (Y)	0,37	0,37	0,18	0,06	0,02	1

$Z = |2X - Y|$

Z	P (Z)	Z · P (Z)
0	0,33	0
1	0,37	0,37
2	0,21	0,42
3	0,06	0,18
4	0,03	0,12
$\sum$	1	1,09

$\therefore E(Z) = 1{,}09$

$E(|2X - Y|) = 1{,}09$

4.9 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

4.9.1 Seja X: $B\left(10, \frac{2}{5}\right)$. Calcular:

a) $P(X = 3)$;
b) $P(X \leq 2)$;
c) $P(X \geq 4)$;
d) $P(X - 2 < 1)$;
e) $P(|X - 2| \leq 1)$;
f) $P(3 < X \leq 5)$;
g) $P(|X - 3| > 1)$;
h) $E(X)$ e $VAR(X)$;
i) $E(Z)$ e $VAR(Z)$ sendo $Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$.

4.9.2 Seja X: B (n, p). Sabendo-se que $E(X) = 12$ e $VAR(X) = 4$, determinar n, p, $E(Z)$ e $VAR(Z)$, sendo $Z = \frac{X - 6}{3}$.

4.9.3 Uma remessa de 800 estabilizadores de tensão é recebida pelo controle de qualidade de uma empresa. São inspecionados 20 aparelhos da remessa, que será aceita se ocorrer no máximo um defeituoso. Há 80 defeituosos no lote. Qual a probabilidade de o lote ser aceito?

4.9.4 Numa cidade, é selecionada uma amostra de 60 adultos e a esses indivíduos é pedido para opinarem se são a favor ou contra determinado projeto. Como resultado obtido, observou-se 40 a favor. Se na realidade as opiniões pró e contra são igualmente divididas, qual é a probabilidade de ter obtido tal resultado?

4.9.5 Um Orgão Governamental credencia a firma A para fazer vistorias em carros recuperados ou construídos particularmente e dar a aprovação ou não para que determinado carro possa ser lacrado no DETRAN. Resolve testar se a firma A está trabalhando de acordo com suas especificações. De um lote de 250 carros vistoriados e aprovados por A, escolhe 50 e faz novas vistorias. Se encontrar no mínimo 2 que não mereçam a aprovação, descredencia A. Sabendo-se que no lote de 250 há 8 carros que foram aprovados irregularmente, qual a probabilidade do descredenciamento?

4.9.6 O número de partículas gama emitidas por segundo, por certa substância radioativa, é uma variável aleatória com distribuição de Poisson com $\lambda = 3{,}0$. Se um instrumento registrador torna-se inoperante quando há mais de 4 partículas por segundo, qual a probabilidade de isto acontecer em qualquer dado segundo?

4.9.7 Um máquina produz determinado artigo; no fim de cada dia de trabalho ela é inspecionada com a finalidade de se verificar a necessidade, ou não, de ser submetida a ajuste ou reparo. Para tal fim, um inspetor toma uma amostra de 10 itens produzidos pela máquina, decidindo por ajuste ao assinalar de um a cinco itens defeituosos, e por reparo, no caso de mais de cinco itens defeituosos. Se a máquina está produzindo, em média, 1% de itens defeituosos, determinar a probabilidade, após uma inspeção: a) de não ser necessário ajuste ou reparo; b) de ser necessário apenas ajuste; c) de ser necessário reparo.

4.9.8 Na fabricação de um tecido ocorrem 2 tipos de defeitos: falha na pigmentação e falha na trama. O quadro abaixo representa a distribuição de probabilidades de ocorrências destes defeitos em uma peça, sendo X a quantidade de falhas de pigmentação e Y a quantidade de falhas de trama.

a) Qual a probabilidade de se encontrar, num lote de 20 peças, no máximo 18 peças sem qualquer defeito?
b) Qual a probabilidade de se encontrar, num lote de 25 peças, no máximo 3 peças com pelo menos 3 defeitos em cada uma?

X \ Y	0	1	2
0	0,7	0,05	0,06
1	0,05	0,02	0,055
2	0,02	0,03	0,015

4.9.9 Em um pronto-socorro o número de atendimentos de emergência segue uma distribuição de Poisson com média de 60 atendimentos por hora.
Calcular:

a) A probabilidade do pronto-socorro não efetuar nenhum atendimento num intervalo de 5 minutos.
b) A probabilidade do pronto-socorro efetuar pelo menos 2 atendimentos num intervalo de 10 minutos.

4.9.10 Uma fábrica de automóveis verificou que ao testar seus carros na pista de prova há, em média, um estouro de pneu em cada 300 km, e que o número de pneus estourados segue razoavelmente uma distribuição de Poisson. Qual a probabilidade de que:

a) num teste de 900 km haja no máximo um pneu estourado?
b) um carro ande 450 km na pista sem estourar nenhum pneu?

4.9.11 Uma fábrica produz isoladores de alta tensão que são classificados como bons e ruins de acordo com um teste padrão. Da produção de um dia retiraram-se 10 isoladores que no laboratório apresentam-se como sendo 8 bons e 2 ruins.
Pede-se calcular a probabilidade deste resultado, admitindo que a máquina produza em média:

a) 95% de bons e 5% de ruins
b) 90% de bons e 10% de ruins

4.9.12 Oito dados são lançados simultaneamente. Seja X o número de vezes que ocorre a face 3, calcule:

a) $P(1 < X \leq 4)$
b) $P(X \geq 3)$
c) $E(X)$
d) $VAR(X)$

4.9.13 Calcular em 9 lances de uma moeda não viciada a probabilidade de que se tenha:
a) Menos de 3 caras
b) Pelo menos 4 caras
c) Exatamente 2 caras

4.9.14 Um caixa de banco atende 150 clientes por hora. Qual a probabilidade de que atenda:

a) Nenhum cliente em 4 minutos
b) No máximo dois clientes em 2 minutos

4.9.15 Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$, n variáveis aleatórias independentes, com distribuição de Bernoulli, com parâmetros p.

Seja $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$, prove que:

a) $E(X) = np$
b) $VAR(X) = npq$

4.9.16 Na fabricação de peças de determinado tecido aparecem defeitos ao acaso, um a cada 250 m. Supondo-se a distribuição de Poisson para os defeitos, qual a probabilidade de que na produção de 1000 m:

a) Não haja defeito
b) Aconteçam pelo menos três defeitos
Num período de 80 dias de trabalho a produção diária é de 625 m. Em quantos dias haverá uma produção sem defeito?

4.9.17 O CRH de uma firma entrevista 150 candidatos a emprego por hora. Qual a probabilidade de entrevistar:

a) No máximo 3 candidatos em 2 minutos?
b) Exatamente 8 candidatos em 4 minutos?

4.9.18 Seja X: B (300; 0,01). Usando aproximação pela Poisson, calcular:

a) $P(X = 4)$
b) $P(X \geq 2)$
c) $P(1 < X \leq 4)$

4.9.19 Um inspetor de qualidade recusa peças defeituosas muma proporção de 10% das peças examinadas. Calcular a probabilidade de que sejam recusadas:

a) Pelo menos 3 peças de um lote com 20 peças examinadas?
b) No máximo 2 peças de um lote de 25 peças examinadas?

4.9.20 Sendo X: B (200; 0,025) e usando aproximação, calcular:

a) $P(X > 4)$
b) $P(X = 5)$
c) $P(X \leq 2)$
d) $P(|X - 2| < 1)$

4.9.21 A probabilidade de um atirador acertar no alvo num único tiro é $\frac{1}{4}$. O atirador atira 20 vezes no alvo. Qual a probabilidade de acertar:

a) Exatamente 5 vezes
b) Pelo menos 3 vezes
c) Nenhuma vez
d) No máximo 4 vezes

4.9.22 De acordo com a Divisão de Estatística Vital do Departamento de Saúde dos EUA, a média anual de afogamentos acidentais neste país é de 3 por 100.000 indivíduos. Determinar a probabilidade de que em uma cidade com 300.000 habitantes se verifiquem:
a) Nenhum afogamento
b) No máximo 2 afogamentos
c) Mais de 4 e menos de 8 afogamentos

4.9.23 Em teste com um motor, há falhas em 2 componentes, a cada 5 horas. Qual a probabilidade de que:

a) Em 10 horas de testes nenhum componente falhe
b) Em 7 1/2 horas de testes ocorram no máximo falhas em 3 componentes

4.9.24 Num lote de 40 peças, 20% são defeituosas. Retiram-se 10 peças do lote. Qual a probabilidade de se encontrar:

a) 3 defeituosas
b) No máximo 2 defeituosas

4.9.25 Uma urna contém 8 bolas brancas e 12 pretas. Retiram-se 10 bolas com reposição. Qual a probabilidade de que:

a) No máximo 2 sejam brancas
b) 3 sejam brancas

4.9.26 A probabilidade de uma máquina produzir uma peça defeituosa, num dia, é de 0,1.

a) Qual a probabilidade de que em 20 peças produzidas pela máquina num dia, ocorram 3 defeituosas?
b) Qual a probabilidade de que a 18ª peça produzida no dia seja a 4ª defeituosa?
c) Qual a probabilidade de que a 10ª peça produzida num dia seja a 1ª defeituosa?
d) Separa-se um lote de 50 peças das 400 produzidas num dia. Qual a probabilidade de que 5 sejam defeituosas, sabendo-se que das 400, 20 são defeituosas?
e) Se a probabilidade da máquina produzir uma peça defeituosa, num dia, fosse de 0,01, qual a probabilidade de se ter no máximo 4 defeituosas em um dia de 500 peças produzidas?

4.9.27 Sabe-se que o número de viajantes por veículos tipo VAN em determinada rodovia segue aproximadamente uma distribuição binomial com parâmetros $n = 10$ e $p = 0,3$ (utilize apenas 2 casas decimais).

a) Calcular o número médio de ocupantes por veículo.
b) Qual a probabilidade de que num determinado dia o quinto veículo que passar por esta rodovia seja o segundo a transportar mais do que 3 pessoas?
c) A taxa de pedágio nesta rodovia é cobrada da seguinte maneira: se o veículo transporta uma pessoa apenas (só o motorista) é cobrado R$ 6,00; se o veículo tem 2 ou 3 ocupantes, R$ 4,00; e se tiver mais do que 3 ocupantes, R$ 2,00. Calcular a arrecadação média diária, sabendo-se que em média passam 300 veículos por dia neste pedágio.

MAKRON
Books

5

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

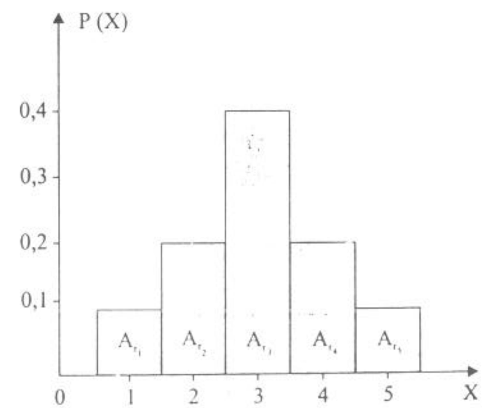
5.1 DEFINIÇÕES

Consideremos a distribuição de probabilidades da variável aleatória discreta X:

X	P (X)
1	0,1
2	0,2
3	0,4
4	0,2
5	0,1

Faremos o histograma da distribuição de probabilidades de X.

O Histograma é um gráfico da distribuição de X. É construído com retângulos de bases unitárias e alturas iguais às probabilidades de $X = x_0$.



As áreas dos retângulos são:

$A_{r_1} = b_1 \cdot h_1 = 1 . 0{,}1 = 0{,}1 \therefore A_{r_1} = P(X = 1)$

$A_{r_2} = b_2 \cdot h_2 = 1 . 0{,}2 = 0{,}2 \therefore A_{r_2} = P(X = 2)$

$A_{r_3} = b_3 \cdot h_3 = 1 . 0{,}4 = 0{,}4 \therefore A_{r_3} = P(X = 3)$

$A_{r_4} = b_4 \cdot h_4 = 1 . 0{,}2 = 0{,}2 \therefore A_{r_4} = P(X = 4)$

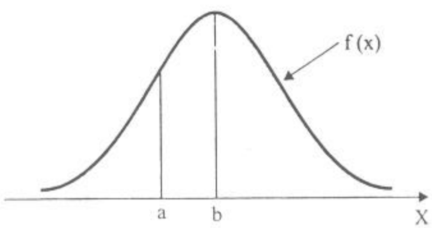
$A_{r_5} = b_5 \cdot h_5 = 1 . 0{,}1 = 0{,}1 \therefore A_{r_5} = P(X = 5)$

Como $\sum_{i=1}^{5} P(X = i) = 1$ temos que:

$$\sum_{i=1}^{5} A_{r_i} = 1$$

Para calcularmos, por exemplo, $P(1 \leq X \leq 3)$, basta calcular a soma das áreas A_{r_1}, A_{r_2} e A_{r_3}, isto é, $P(1 \leq X \leq 3) = \sum_{i=1}^{3} A_{r_i} = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}7$.

Se tomarmos os pontos médios das bases superiores dos retângulos e ligarmos os mesmos por uma curva, teremos, se considerarmos *X uma variável aleatória contínua*, uma função contínua f (X), representada no gráfico:



Podemos então definir

Variável aleatória contínua: uma variável aleatória X é contínua em $\mathbb{R}$ se existir uma função f (x), tal que:

1. $f(x) \geq 0$ (não negativa)
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$.

A função f (x) é chamada *função densidade de probabilidade* (f.d.p.)

Observamos que:

$$\boxed{P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx}$$

(corresponde à área delimitada pela função f (x), eixo dos X e pelas retas X = a e X = b).

Podemos estender todas as definições de variáveis aleatórias discretas para variáveis contínuas.

Se X é uma variável aleatória contínua, então:

DEFINIÇÃO

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

A esperança pode ser entendida como um "centro de distribuição de probabilidades".

DEFINIÇÃO

$$VAR(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 \cdot f(x)\, dx$$

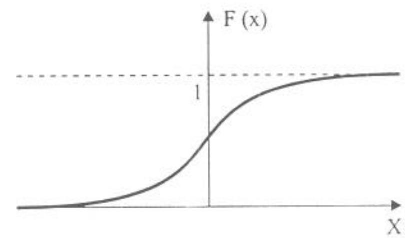
ou $\boxed{VAR(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$ onde

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx$$

Também podemos definir:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\, ds$$

e o gráfico genericamente é:



Podemos encontrar a f.d.p., se existir, a partir de F (x), pois:

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x),$$

nos pontos onde F (x) é derivável.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Verificar se $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \text{ ou } x > 2 \end{cases}$

é uma f.d.p.

Resolução

a) $f(x) \geq 0$ para todo x.

b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^2 (2x+3)\,dx = (x^2 + 3x)\Big|_0^2 = 4 + 6 = 10 \therefore$

$\therefore$ não é uma f.d.p.

Se definirmos: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}(2x+3) & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 2, \end{cases}$

então f (x) é uma função densidade de probabilidade.

2. Seja $f(x) = \begin{cases} kx & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$

Determinar:

a) k a fim de que f (x) seja f.d.p.

b) o gráfico de f (x)

c) $P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right)$

d) E (X)

e) VAR (X)

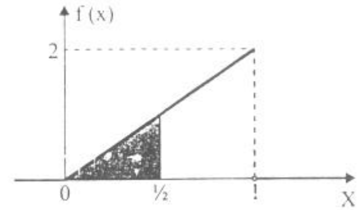
f) F (x)

g) gráfico de F (x).

Resolução

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 kx\,dx = 1 \quad \Rightarrow \quad k\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 1 \therefore \boxed{k = 2}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$



c) $P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right) = \int_0^{1/2} 2x\,dx = (x^2)\Big|_0^{1/2} = \boxed{\frac{1}{4}}$

d) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot 2x\,dx = \int_0^1 2x^2\,dx =$

$= 2\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \boxed{\frac{2}{3}}$

e) $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2 \cdot 2x\,dx = \int_0^1 2x^3\,dx =$

$= \left(\frac{x^4}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \therefore$

$\therefore VAR(X) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \boxed{\frac{1}{18}}$

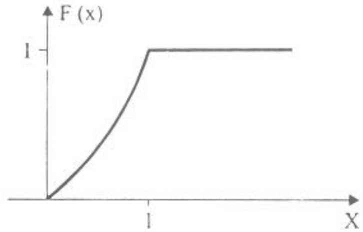
f) $F(x) = \int_0^x f(s)\,ds = \int_0^x 2s\,ds = (s^2)\Big|_0^x = x^2$

Logo:

$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

Obs.: $\frac{d}{dx} F(x) = 2x$ para $0 < x < 1$.

g)



3. Seja X uma variável aleatória contínua com f.d.p. dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$$

Calcular $P\left(X \le \frac{1}{2} \;\middle|\; \frac{1}{3} \le X \le \frac{2}{3}\right)$

Resolução

Como $\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ temos:

$$P\left(X \le \frac{1}{2} \;\middle|\; \frac{1}{3} \le X \le \frac{2}{3}\right) = \frac{P\left(\frac{1}{3} \le X \le \frac{1}{2}\right)}{P\left(\frac{1}{3} \le X \le \frac{2}{3}\right)} =$$

$$= \frac{\int_{1/3}^{1/2} 2x\,dx}{\int_{1/3}^{2/3} 2x\,dx} = \frac{(x^2)\Big|_{1/3}^{1/2}}{(x^2)\Big|_{1/3}^{2/3}} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{9}}{\frac{4}{9} - \frac{1}{9}} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{3}{9}} = \frac{5}{12}$$

4. Seja X: tempo durante o qual um equipamento elétrico é usado em carga máxima, num certo período de tempo, em minutos. A função densidade de probabilidade de X é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1.500^2}\,x, & \text{se } 0 \le x < 1.500 \\ \dfrac{1}{1.500^2}\,(3.000 - x), & \text{se } 1.500 \le x \le 3.000 \end{cases}$$

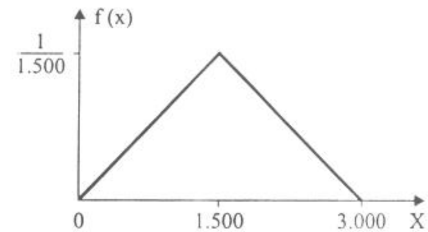
Calcular E (X), ou seja, o tempo médio em que o equipamento será utilizado em carga máxima.

Resolução

$$E(X) = \int_0^{1.500} \frac{1}{1.500^2}\,x \cdot x\,dx + \int_{1.500}^{3.000} \frac{1}{1.500^2}\,(3.000 - x)\,x\,dx =$$

$$= \frac{1}{1.500^2}\left\{\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1.500} + \left(1.500\,x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{1.500}^{3.000}\right\} = 1.500 \text{ min}$$

Graficamente:



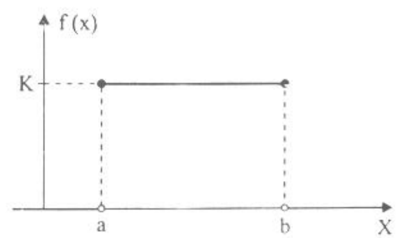
5.2 PRINCIPAIS DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS DE PROBABILIDADES DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

Algumas distribuições de variáveis aleatórias contínuas são importantes. Faremos o estudo de três delas, dando maior destaque à Distribuição Normal.

5.2.1 DISTRIBUIÇÃO UNIFORME

Uma variável aleatória contínua X tem distribuição uniforme de probabilidades no intervalo [a, b] se a sua f.d.p. é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{se } a \le x \le b \\ 0 & \text{se } x < a \text{ ou } x > b \end{cases}$$



O valor de k é:

$$\int_a^b k\,dx = 1$$

$$k\,(x)\Big|_a^b = 1$$

$$\therefore \quad \boxed{k = \frac{1}{b-a}}\ . \text{ Logo:}$$

$$f\,(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } a \le x \le b \\ 0 & \text{se } x < a \text{ ou } x > b \end{cases}$$

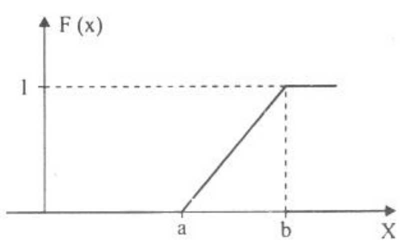
A função de distribuição de X é dada por:

$$F\,(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a}\,ds = \frac{1}{b-a}\,(s)\Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

Logo:

$$F\,(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ se } a < x < b \\ 1 \text{ se } x \ge b \end{cases}$$

e seu gráfico é:



A Esperança de X é:

$$E\,(X) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_a^b \cdot \frac{1}{b-a} = \frac{b^2-a^2}{2\,(b-a)} \therefore$$

$$\therefore \quad \boxed{E\,(X) = \frac{b+a}{2}}$$

A E (X) é o ponto médio do intervalo [a, b]

A variância de X é dada por:

$$E\,(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_a^b \cdot \frac{1}{b-a} =$$

$$= \frac{b^3-a^3}{3\,(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3} \therefore$$

$$\therefore \text{VAR}\,(X) = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} \therefore$$

$$\therefore \quad \boxed{\text{VAR}\,(X) = \frac{(b-a)^2}{12}}$$

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

1. Um ponto é escolhido ao acaso no intervalo [0, 2]. Qual a probabilidade de que esteja entre 1 e 1,5?
Resolução

$$f\,(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \text{ para } 0 \le x \le 2 \\ 0 \text{ se } x < 0 \text{ ou } x > 2 \end{cases} \therefore$$

$$\therefore P\,(1 \le X \le 1{,}5) = \int_1^{1,5} \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\,(x)\Big|_1^{1,5} = \frac{1}{4}$$

2. A dureza H de uma peça de aço pode ser pensada como sendo uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo [50, 70] da escala de Rockwel. Calcular a probabilidade de que uma peça tenha dureza entre 55 e 60.
Resolução

$$f\,(h) = \begin{cases} \dfrac{1}{20} & \text{se } 50 \le h \le 70 \\ 0 & \text{se } h < 50 \text{ ou } h > 70 \end{cases} \therefore$$

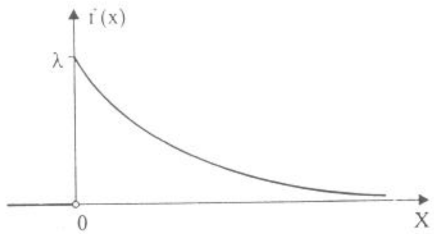
$$\therefore P\,(55 \le h \le 60) = \int_{55}^{60} \frac{1}{20}\,dh = \frac{1}{20}\,(h)\Big|_{55}^{60} = \frac{1}{4}$$

5.2.2 DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL

Uma variável aleatória contínua X tem distribuição exponencial de probabilidade se a sua f.d.p. é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

O gráfico da f.d.p. de X é



$$\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = (-e^{-\lambda x}) \Big|_0^{\infty} = 1$$

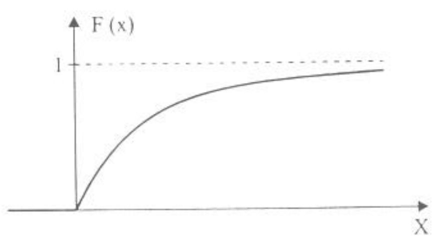
A função de distribuição de X é:

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda s} ds = (-e^{-\lambda s}) \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

Logo:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

e o gráfico é:



A esperança da distribuição de X é dada por:

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \left(-xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right) \Big|_0^{\infty} =$$

$$= (0 - 0) - \left(0 - \frac{1}{\lambda}\right) = \boxed{\frac{1}{\lambda}} \quad \therefore \quad \boxed{E(X) = \frac{1}{\lambda}}$$

Obs.:

$$\lim_{x \to \infty} xe^{-\lambda x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^{\lambda x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda x}} = 0$$

De modo análogo, chegamos a

$$\boxed{VAR(X) = \frac{1}{\lambda^2}}$$

EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Uma variável aleatória contínua X tem f.d.p. dada por:

$$f(x) \begin{cases} \frac{k}{2} e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

a) Calcular o valor de k
b) Determinar F (x)
c) Determinar a *mediana* da distribuição.

Resolução

a) $\int_0^{\infty} \frac{k}{2} e^{-x} dx = 1 \Rightarrow \frac{k}{2} (-e^{-x}) \Big|_0^{\infty} = 1 \Rightarrow k = 2$

ou diretamente

$\lambda = 1$ e $\lambda = \frac{k}{2} \therefore \frac{k}{2} = 1 \Rightarrow k = 2$

b) $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

c) DEFINIÇÃO. *m* é *mediana* da distribuição se $P(X > m) = P(X < m)$.

$$P(X > m) = \int_m^{\infty} e^{-x} dx = (-e^{-x}) \Big|_m^{\infty} = e^{-m}$$

$$P(X < m) = \int_0^m e^{-x}\,dx = (-e^{-x})\Big|_0^m = 1 - e^{-m} \therefore$$

$$\therefore P(X > m) = P(X < m) \Rightarrow e^{-m} = 1 - e^{-m} \therefore$$

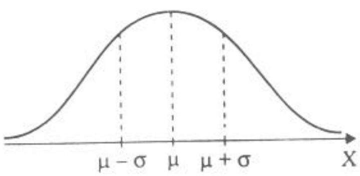
$$\therefore e^{-m} = \frac{1}{2} \rightarrow m = \ln 2 \therefore \quad \boxed{m = 0{,}693147}$$

.2.3 DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Jma variável aleatória contínua X tem Distribuição Normal de probabilidade se a sua .d.p. é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \text{ para } -\infty < x < +\infty$$

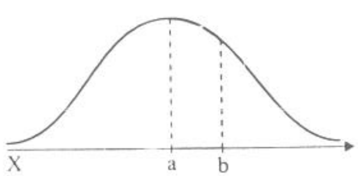
O gráfico de f (x) é:



As principais características dessa função são:

a) o ponto de máximo de f (x) é o ponto $X = \mu$
b) os pontos de inflexão da função são: $X = \mu + \sigma$ e $X = \mu - \sigma$
c) a curva é simétrica com relação a μ
d) $E(X) = \mu$ e $VAR(X) = \sigma^2$

Demonstra-se que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 1.$



Se quisermos calcular a probabilidade indicada na figura, devemos fazer:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx,$$

que apresenta um grau relativo de dificuldade.
Usaremos a seguinte notação:

$$\boxed{X: N(\mu, \sigma^2)}$$

(X tem distribuição normal com média μ e variância σ^2.)

Seja $X: N(\mu, \sigma^2)$, definimos:

$$\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}}$$

Demonstra-se que Z também tem distribuição normal. Z é chamada de *Variável Normal Reduzida, Normal Padronizada* ou *Variável Normalizada.*

Mostraremos que $E(Z) = 0$ e $VAR(Z) = 1$

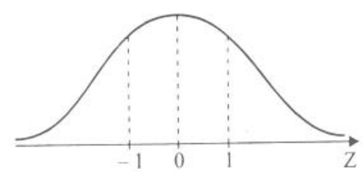
$$E(Z) = E\left\{\frac{(X-\mu)}{\sigma}\right\} = \frac{1}{\sigma} E(X - \mu) = \frac{1}{\sigma}\{E(X) - \mu\} = 0$$

$$VAR(Z) = VAR\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}\right\} = \frac{1}{\sigma^2} VAR(X - \mu) = \frac{1}{\sigma^2} VAR(X) = 1$$

Logo, se:

$$\boxed{X: N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z: N(0, 1)}$$

a f.d.p. de Z é $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$, para $-\infty < z < +\infty$



Essa curva é também simétrica com relação a μ_Z.

Verificaremos agora a correspondência entre X e Z, por meio do exemplo:

Seja X: N (20, 4). Achar os valores reduzidos correspondentes a $X_1 = 14$, $X_2 = 16$, $X_3 = 18$, $X_4 = 20$, $X_5 = 22$, $X_6 = 24$, $X_7 = 26$.

$$\text{Se } X: N(20, 4) \begin{cases} \mu = 20 \\ \sigma = 2 \end{cases} \text{ e } Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 20}{2}$$

a) $X_1 = 14$

$$Z_1 = \frac{14-20}{2} = -3 \therefore Z_1 = -3$$

b) $X_2 = 16$

$$Z_2 = \frac{16-20}{2} = -2 \therefore Z_2 = -2$$

c) $X_3 = 18$

$$Z_3 = \frac{18-20}{2} = -1 \therefore Z_3 = -1$$

d) $X_4 = 20$

$$Z_4 = \frac{20-20}{2} = 0 \therefore Z_4 = \mu_Z = 0$$

e) $X_5 = 22$

$$Z_5 = \frac{22-20}{2} = 1 \therefore Z_5 = 1$$

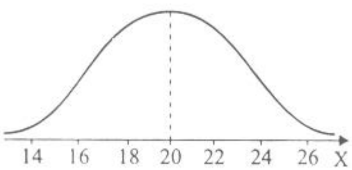
f) $X_6 = 24$

$$Z_6 = \frac{24-20}{2} = 2 \therefore Z_6 = 2$$

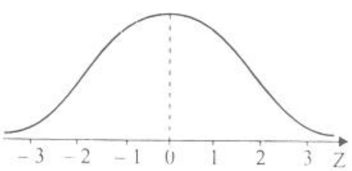
g) $X_7 = 26$

$$Z_7 = \frac{26-20}{2} = 3 \therefore Z_7 = 3$$

Graficamente:

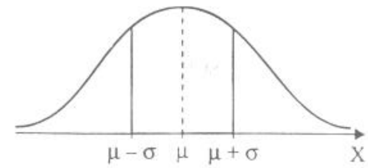


$$\begin{cases} 14 = \mu_X - 3\sigma \\ 16 = \mu_X - 2\sigma \\ 18 = \mu_X - \sigma \\ 20 = \mu_X \\ 22 = \mu_X + \sigma \\ 24 = \mu_X + 2\sigma \\ 26 = \mu_X + 3\sigma \end{cases}$$

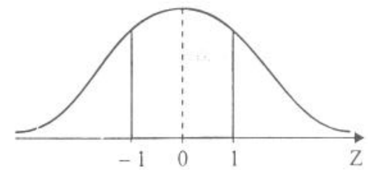


$$\begin{cases} -3 = \mu_Z - 3\sigma \\ -2 = \mu_Z - 2\sigma \\ -1 = \mu_Z - \sigma \\ 0 = \mu_Z \\ 1 = \mu_Z + \sigma \\ 2 = \mu_Z + 2\sigma \\ 3 = \mu_Z + 3\sigma \end{cases}$$

Concluímos que a variável Z indica quantos desvios padrões a variável X está afastada da média. Como as curvas são simétricas em relação às médias,

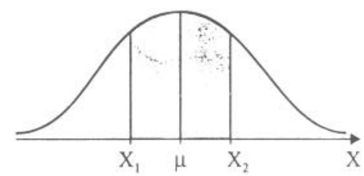


$$\boxed{P(\mu - \sigma \le X \le \mu) = P(\mu \le X \le \mu + \sigma)}$$

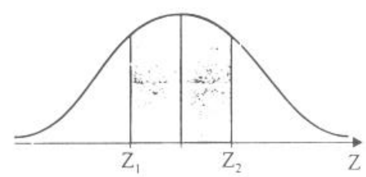


$$\boxed{P(-1 \le Z \le 0) = P(0 \le Z \le 1)}$$

Também concluímos que se X: N (μ, σ^2), então;



$$\boxed{P(X_1 \le X \le X_2) = P(Z_1 \le Z \le Z_2)}$$



Pois

$$P(X_1 \le X \le X_2) = \int_{X_1}^{X_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

e

$$P(Z_1 \le Z \le Z_2) = \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-Z^2/2} dz$$

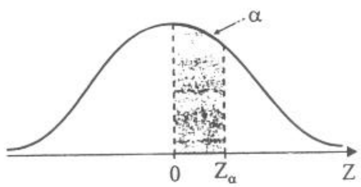
onde

$$Z_1 = \frac{X_1 - \mu}{\sigma} \quad \text{e} \quad Z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\sigma}$$

Uso da tabela:

A vantagem de se usar a variável $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ é que podemos tabelar os valores da área, ou as probabilidades, pois para cada X dado, a área depende de μ e σ^2. Como $\mu_z = 0$ e $\sigma^2 = 1$, uma tabela de Z é suficiente.

A tabela apresentada no final do livro (pág. 185) nos dá



$$P(0 \le Z \le Z_\alpha) = \alpha$$

EXEMPLOS DO USO DA TABELA

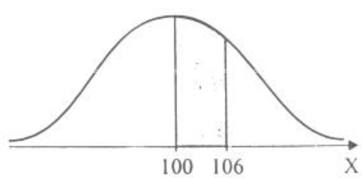
1. Seja X: N (100, 25). Calcular:

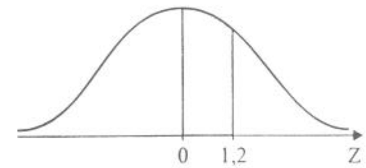
a) $P(100 \le X \le 106)$
b) $P(89 \le X \le 107)$
c) $P(112 \le X \le 116)$
d) $P(X \ge 108)$

Resolução

$\therefore \mu = 100$ e $\sigma = 5$ $\rightarrow$ $\boxed{Z = \dfrac{X - 100}{5}}$

a) $P(100 \le X \le 106) = P(0 \le Z \le 1{,}2) = \boxed{0{,}384930}$





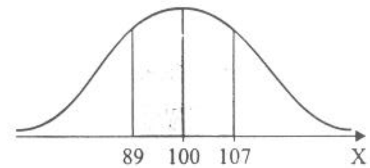
$$Z_1 = \frac{100 - 100}{5} = 0$$

$$Z_2 = \frac{106 - 100}{5} = 1{,}2$$

b) $P(89 \le X \le 107) = P(-2{,}2 \le Z \le 1{,}4) =$

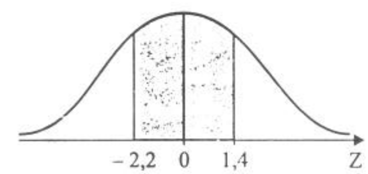
$= P(-2{,}2 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 1{,}4) =$

$= 0{,}486097 + 0{,}419243 = \boxed{0{,}90534}$



$$Z_1 = \frac{89 - 100}{5} = -2{,}2$$

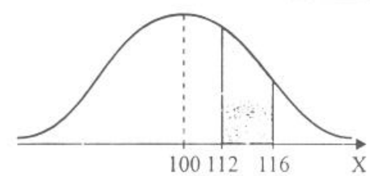
$$Z_2 = \frac{107 - 100}{5} = 1{,}4$$



c) $P(112 \le X \le 116) = P(2{,}4 \le Z \le 3{,}2) =$

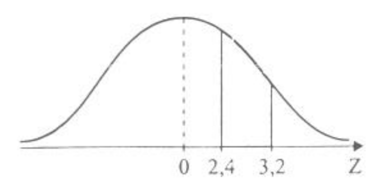
$= P(0 \le Z \le 3{,}2) - P(0 \le Z \le 2{,}4) =$

$= 0{,}499313 - 0{,}491803 = \boxed{0{,}007510}$



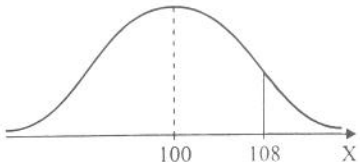
$$Z_1 = \frac{112 - 100}{5} = 2{,}4$$

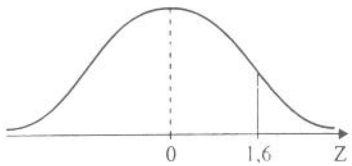
$$Z_2 = \frac{116 - 100}{5} = 3{,}2$$



d) $P(X \geq 108) = P(Z \geq 1{,}6) = 0{,}5 - P(0 \leq Z \leq 1{,}6) =$

$$= 0{,}5 - 0{,}445201 = \boxed{0{,}054799}$$





$$Z_1 = \frac{108 - 100}{5} = 1{,}6$$

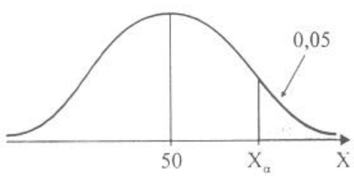
2. Sendo X: N (50, 16), determinar X_α tal que:

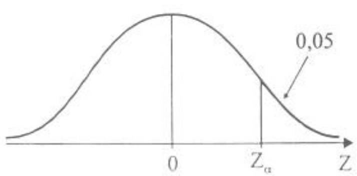
a) $P(X \geq X_\alpha) = 0{,}05$
b) $P(X \leq X_\alpha) = 0{,}99$

Resolução

$\mu = 50, \sigma = 4$

a) $P(X \geq X_\alpha) = 0{,}05$





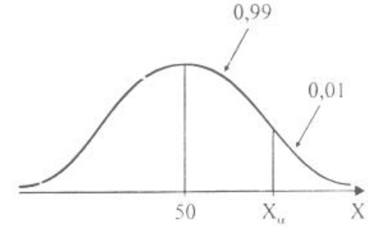
Procurando no corpo da tabela 0,45 (0,5 – 0,05), encontramos:

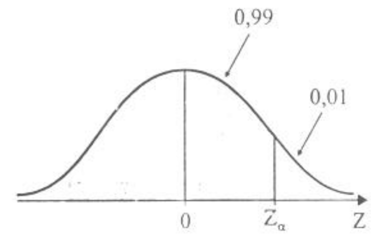
$$Z_\alpha = 1{,}64$$

$\therefore$ como $Z_\alpha = \dfrac{X_\alpha - \mu}{\sigma} \rightarrow 1{,}64 = \dfrac{X_\alpha - 50}{4} \therefore \boxed{X_\alpha = 56{,}56} \therefore$

$\therefore P(X \geq 56{,}56) = 0{,}05$

b) $P(X \leq X_\alpha) = 0{,}99$





Procurando no corpo da tabela 0,49 (0,5 – 0,01) encontramos:

$Z_\alpha = 2{,}32$

$2{,}32 = \dfrac{X_\alpha - 50}{4}$

$\boxed{X_\alpha = 59{,}28} \therefore$

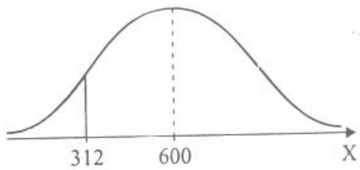
$\therefore P(X \leq 59{,}28) = 0{,}99$

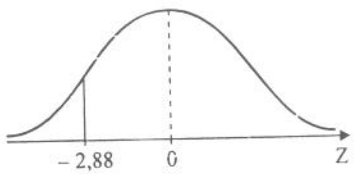
EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

1. Um fabricante de baterias sabe, por experiência passada, que as baterias de sua fabricação têm vida média de 600 dias e desvio-padrão de 100 dias, sendo que a duração tem aproximadamente distribuição normal. Oferece uma garantia de 312 dias, isto é, troca as baterias que apresentarem falhas nesse período. Fabrica 10.000 baterias mensalmente. Quantas deverá trocar pelo uso da garantia, mensalmente?

Resolução

X: duração da bateria $\begin{cases} \mu = 600 \text{ dias} \\ \sigma = 100 \text{ dias} \end{cases} \Rightarrow \boxed{Z = \dfrac{X - 600}{100}}$





$P(X < 312) = P(Z \leq -2{,}88) = 0{,}5 - P(-2{,}88 \leq Z \leq 0) =$

$= 0{,}5 - 0{,}498012 = \boxed{0{,}001988}$

$Z_1 = \dfrac{312 - 600}{100} = -2{,}88$

Deverá substituir mensalmente:

$10.000 \times 0{,}001988 = 19{,}88 = \boxed{\text{20 baterias}}$

2. Uma fábrica de carros sabe que os motores de sua fabricação têm duração normal com média de 150.000 km e desvio-padrão de 5.000 km. Qual a probabilidade de que um carro, escolhido ao acaso, dos fabricados por essa firma, tenha um motor que dure:

a) Menos de 170.000 km?
b) Entre 140.000 km e 165.000 km?
c) Se a fábrica substitui o motor que apresenta duração inferior à garantia, qual deve ser esta garantia para que a porcentagem de motores substituídos seja inferior a 0,2%?

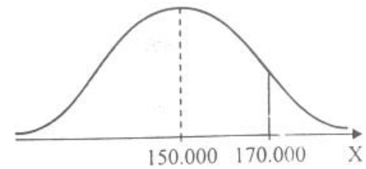
Resolução

X: duração do motor em km $\begin{cases} \mu = 150.000 \text{ km} \\ \sigma = 5.000 \text{ km} \end{cases} \Rightarrow$

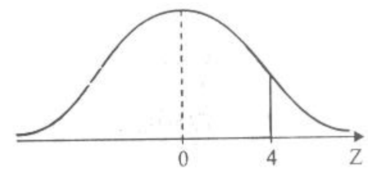
$\Rightarrow \boxed{Z = \dfrac{X - 150.000}{5.000}}$

a) $P(X < 170.000) = P(Z \leq 4) = 0{,}5 + P(0 \leq Z \leq 4) =$

$= 0{,}5 + 0{,}499968 = \boxed{0{,}999968}$



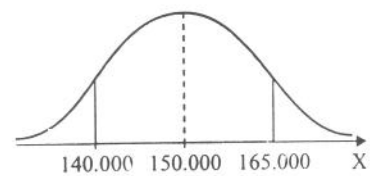
$Z_1 = \dfrac{170.000 - 150.000}{5.000} = 4$



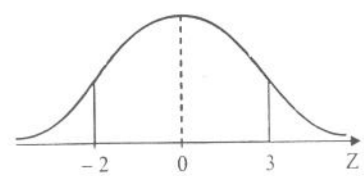
b) $P(140.000 < X < 165.000) = P(-2 \leq Z \leq 3) =$

$= P(-2 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 3) =$

$= 0{,}477250 + 0{,}498650 = \boxed{0{,}97590}$

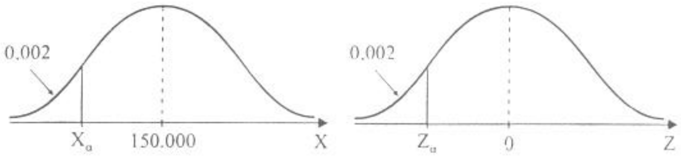


$Z_1 = \dfrac{140.000 - 15.000}{5.000} = -2$



$Z_2 = \dfrac{165.000 - 150.000}{5.000} = 3$

c) $P(X \le X_\alpha) = 0{,}002$



Procurando no corpo da tabela 0,498 (0,5 – 0,002), encontramos:

$$Z\alpha = -2{,}87 \therefore$$

$$\therefore -2{,}87 = \frac{X\alpha - 150\,000}{5\,000} \therefore \boxed{X\alpha = 135\,650}$$

A garantia deve ser de 135.650 km.

5.3 PROBLEMAS RESOLVIDOS

5.3.1 O diâmetro X de um cabo elétrico é uma variável aleatória contínua com f.d.p. dada por:

$$f(x) = \begin{cases} K(2x - x^2) & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$$

a) Determinar K.
b) Calcular E (X) e VAR'(X).
c) Calcular P $(0 \le X \le 1/2)$.

a) $\int_0^1 K(2x - x^2)\,dx = 1 \rightarrow K\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 1 \rightarrow$

$\rightarrow K \cdot \frac{2}{3} = 1 \rightarrow \boxed{K = \frac{3}{2}}$

Logo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(2x - x^2)) & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$$

b) $E(X) = \int_0^1 x \cdot \frac{3}{2}(2x - x^2)\,dx = \int_0^1 \frac{3}{2}(2x^2 - x^3)\,dx =$

$= \frac{3}{2}\left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) = \boxed{\frac{5}{8}}$

$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{3}{2}(2x - x^2)\,dx = \int_0^1 \frac{3}{2}(2x^3 - x^4)\Big|_0^1 =$

$= \frac{3}{2}\left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{9}{20}$

Logo:

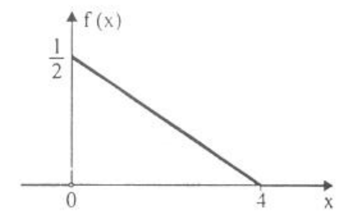
$$\text{VAR}(X) = \frac{9}{20} - \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \boxed{\frac{19}{320}}$$

c) $P\left(0 \le X \le \frac{1}{2}\right) = \int_0^{1/2} \frac{3}{2}(2x - x^2)\,dx = \frac{3}{2}\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{1/2} =$

$= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{24}\right) = \boxed{\frac{5}{16}}$

5.3.2 A variável aleatória X tem f.d.p. dada pelo gráfico abaixo. Determinar:

a) $P(X > 2)$
b) m tal que $P(X > m) = \frac{1}{8}$
c) E (X)
d) VAR (X)
e) F (x) e seu gráfico



$$\begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow f(x) = \frac{1}{8}(4 - x)$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(4 - x) & \text{se } 0 \le x \le 4 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 4 \end{cases}$$

a) $P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - \int_0^2 \frac{1}{8}(4 - x)\,dx =$

$= 1 - \frac{1}{8}\left(4x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = 1 - \frac{1}{8}(8 - 2) =$

$= 1 - \frac{3}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$

b) $\int_m^4 \frac{1}{8}(4-x)\,dx = \frac{1}{8} \rightarrow 1 - \int_0^m \frac{1}{8}(4-x)\,dx = \frac{1}{8}$

$$\frac{1}{8}\left(4x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^m = \frac{7}{8}$$

$$\frac{1}{8}\left(4m - \frac{m^2}{2}\right) = \frac{7}{8} \rightarrow m^2 - 8m + 14 = 0 \begin{cases} m = 5{,}42 \\ m = 2{,}58 \end{cases}$$

Logo:

$$\boxed{m = 2{,}58}$$

c) $E(X) = \int_0^4 \frac{1}{8}(4x - x^2)\,dx = \frac{1}{8}\left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4 =$

$$= \frac{1}{8}\left(32 - \frac{64}{3}\right) = \boxed{\frac{4}{3}}$$

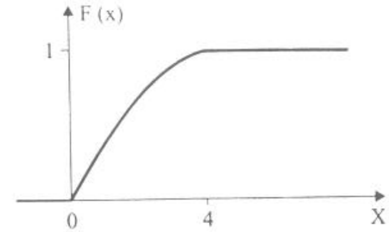
d) $E(X^2) = \int_0^4 \frac{1}{8}(4x^2 - x^3)\,dx = \frac{1}{8}\left(\frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^4 =$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{4 \cdot 64}{3} - 64\right) = \frac{8}{3}$$

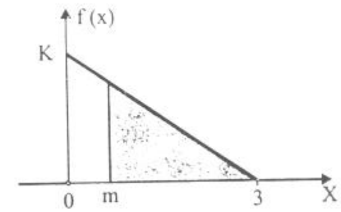
Portanto $VAR(X) = \frac{8}{3} - \frac{16}{9} = \boxed{\frac{8}{9}}$

e) $F(x) = \int_0^x \frac{1}{8}(4 - s)\,ds = \frac{1}{8}\left(4s - \frac{s^2}{2}\right)\Big|_0^x = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{16}$

$$\therefore F(x) \begin{cases} 0 \text{ se } x \le 0 \\ \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{16}\right) \text{ se } 0 < x \le 4 \\ 1 \text{ se } x > 4 \end{cases}$$



5.3.3 A f.d.p. da variável aleatória contínua X é dada pelo gráfico. Determinar *m* tal que $P(X < m) = \frac{3}{4} P(X > m)$.



$$A_\Delta = 1 \rightarrow \frac{K \cdot 3}{2} = 1 \rightarrow K = \frac{2}{3}$$

$$\begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow f(x) = \frac{2}{3} - \frac{2}{9}x$$

Portanto:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{2}{9}x \text{ para } 0 \le x \le 3 \\ 0 \text{ se } x < 0 \text{ ou } x > 3 \end{cases}$$

$$\int_0^m \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{9}x\right)dx = \frac{3}{4}\int_m^3 \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{9}x\right)dx$$

$$4\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{9}x^2\right)\Big|_0^m = 3\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{9}x^2\right)\Big|_m^3$$

$$7m^2 - 42m + 27 = 0 \rightarrow m \cong \begin{cases} 5{,}27 \\ 0{,}73 \end{cases}$$

Logo:

$$\boxed{m \cong 0{,}73}$$

5.3.4 Uma fábrica de tubos de TV determinou que a vida média dos tubos de sua fabricação é de 800 horas de uso contínuo e segue uma distribuição exponencial. Qual a probabilidade de que a fábrica tenha de substituir um tubo gratuitamente, se oferece uma garantia de 300 horas de uso?

X: vida útil dos tubos de TV

$$E(X) = 800$$

Como

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \rightarrow \frac{1}{\lambda} = 800 \rightarrow \lambda = \frac{1}{800}$$

Logo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{800} e^{-1/800\,X} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

$$P(X < 300) = \int_0^{300} \frac{1}{800} e^{-1/800x}\,dx = \left(-e^{-1/800x}\right)\Big|_0^{300} =$$

$$= -e^{-300/800} + 1 = 1 - e^{-3/8} = \boxed{0{,}3127}$$

5.3.5 A variável aleatória contínua X tem f.d.p. dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 6(x - x^2) & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{para } x < 0 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$$

Calcular $P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma)$

$$\mu = E(X) = \int_0^1 6(x^2 - x^3)\,dx = 6\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 6\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 6(x^3 - x^4)\,dx = 6\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \boxed{\frac{3}{10}}$$

$$\text{Logo VAR}(X) = 0{,}3 - 0{,}5^2 = 0{,}05 \rightarrow \boxed{\sigma = 0{,}22}$$

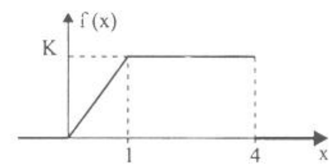
$$P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) = P(0{,}5 - 2 \cdot 0{,}22 < x < 0{,}5 +$$

$$+ 2 \cdot 0{,}22) = P(0{,}06 < x < 0{,}94) = \int_{0,06}^{0,94} 6(x - x^2)\,dx =$$

$$= 6\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{0,06}^{0,94} = 6\left\{\left(\frac{0{,}94^2}{2} - \frac{0{,}94^3}{3}\right) -\right.$$

$$\left. - \left(\frac{0{,}06^2}{2} - \frac{0{,}06^3}{3}\right)\right\} = 6 \cdot 0{,}1632107 = \boxed{0{,}979264}$$

5.3.6 Uma variável aleatória contínua X tem sua f.d.p. dada pelo gráfico:



a) Determinar k

b) Calcular $P(0 \leq X \leq 2)$

c) Calcular $E(X)$

a) Usaremos o fato de que a soma das duas áreas deve ser 1.

$$\frac{1 \cdot K}{2} + 3 \cdot K = 1 \rightarrow K + 6K = 2 \rightarrow K = \frac{2}{7}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{7}x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{2}{7} & \text{se } 1 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 4 \end{cases}$$

b) $P(0 \le X \le 2) = \int_0^1 \frac{2}{7}x\,dx + \int_1^2 \frac{2}{7}\,dx = \frac{2}{14}x^2\Big|_0^1 + \frac{2}{7}x\Big|_1^2 = \frac{3}{7} = 0{,}4286$

c) $E(X) = \int_0^1 x \cdot \frac{2}{7}x\,dx + \int_1^4 x \cdot \frac{2}{7}\,dx = \int_0^1 \frac{2}{7}x^2\,dx + \int_1^4 \frac{2}{7}x\,dx =$

$$= \frac{2}{21}x^3\Big|_0^1 + \frac{1}{7}x^2\Big|_1^4 = \frac{47}{21} = 2{,}2381$$

5.3.7 Sendo $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{K+44}{6}\right)e^{-2Kx} & \text{se } x \ge 0 \\ 0 \text{ se } x < 0, \text{ calcular} \end{cases}$

a) K

b) $P(8\mu - 3\sigma < x < 10\mu + 6\sigma)$

Como $\lambda = \frac{K+44}{6} = 2K \rightarrow \frac{K+44}{6} = 2K \rightarrow K = 4 \rightarrow \lambda = 8$

$$f(x) = \begin{cases} 8\,e^{-8x} & \text{se } x \ge 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\mu = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{8}; \quad \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{64} \rightarrow \sigma = \frac{1}{8}$$

b) $P\left(8 \cdot \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{8} < x < 10 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{8}\right) = P\left(\frac{5}{8} < x < 2\right) =$

$$= \int_{5/8}^{2} 8\,e^{-8x}\,dx = (-e^{-8x})\Big|_{5/8}^{2} = -e^{-16} + e^{-5} = \boxed{0{,}00674}$$

5.3.8 A f.d.p. $f(x) = \begin{cases} 2\,e^{-2x} & \text{se } x \ge 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

representa a distribuição do índice de acidez (X) de um determinado produto alimentício. O produto é consumível se este índice for menor que 2. O setor de fiscalização do I.A.L. apreendeu 30 unidades do mesmo. Qual a probabilidade de que pelo menos 10% da amostra seja imprópria para consumo?

$$P(X < 2) = \int_0^2 2\,e^{-2x}\,dx = (-e^{-2x})\Big|_0^2 = -e^{-4} + 1 =$$

$$= 0{,}98168437$$

Logo:

$P(X < 2) = 0{,}98$: probabilidade de o produto ser consumível

Logo:

probabilidade de não ser consumível = p

$$p = 0{,}02 \quad \text{e} \quad q = 0{,}98$$

X: número de unidades impróprias para o consumo
X: B (30; 0,02)

$$P(X \ge 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \left\{\binom{30}{0}(0{,}02)^0\,(0{,}98)^{30} + \binom{30}{1}(0{,}02)^1\,(0{,}98)^{29} + \binom{30}{2}(0{,}02)^2\,(0{,}98)^{28}\right\} =$$

$$= 1 - \{0{,}54548 + 0{,}33397 + 0{,}09883\} =$$

$$= 1 - 0{,}97828 = \boxed{0{,}02172}$$

5.3.9 O diâmetro X de um cabo para TV é uma variável aleatória contínua com f.d.p. dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\left(2x - x^2\right) & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 0 \text{ se } x < 0 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$$

A probabilidade de um cabo sair com diâmetro defeituoso é dada por $p_1 = 0{,}5125 - P(X \le 0{,}5)$. Se 25 cabos são produzidos, qual a probabilidade de que:

a) Pelo menos 2 sejam defeituosos?

b) Exatamente 6 sejam defeituosos?

$$P(X \le 0{,}5) = \int_0^{1/2} \frac{3}{2}(2x - x^2)\,dx = \frac{3}{2}\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{1/2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{24} = \frac{5}{16}$$

$$\therefore P(X \le 0{,}5) = 0{,}3125 \therefore p_1 = 0{,}5125 - 0{,}3125 \rightarrow p_1 = 0{,}2$$

X: B (25; 0,2)

a) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \left\{\binom{25}{0}(0{,}2)^0\,(0{,}8)^{25} + \binom{25}{1}(0{,}2)^1\,(0{,}8)^{24}\right\} =$

$= 1 - \{0{,}00378 + 0{,}02361\} = 1 - 0{,}02739 = 0{,}97261$

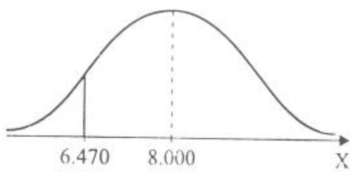
b) $P(X = 6) = \binom{25}{6}(0{,}2)^6\,(0{,}8)^{19} = 0{,}16335$

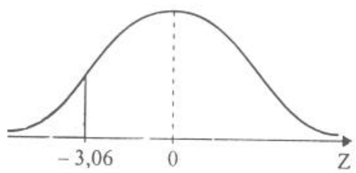
5.3.10 Os salários dos diretores das empresas de São Paulo distribuem-se normalmente com média de R\$8.000,00 e desvio-padrão de R\$500,00. Qual a percentagem de diretores que recebem:

a) Menos de R\$6.470,00?
b) Entre R\$8.920,00 e R\$9.380,00?

X: salário $\begin{cases}\mu = 8000 \\ \sigma = 500\end{cases} \rightarrow Z = \dfrac{X - 8000}{500}$

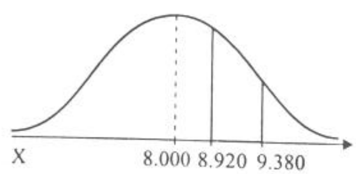
a) $P(X < 6.470) = P(Z \leq 3{,}06) = 0{,}5 - 0{,}498893 = 0{,}001107$

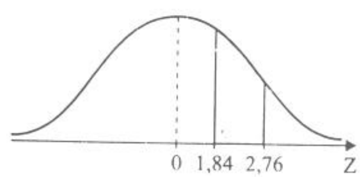




$$Z = \frac{6.470 - 8.000}{500} = -3{,}06$$

b) $P(8.920 < X < 9.380) = P(1{,}84 \leq Z \leq 2{,}76) =$
$= 0{,}497110 - 0{,}467116 =$
$= 0{,}029994$





$$Z_1 = \frac{8.920 - 8.000}{500} = 1{,}84$$

$$Z_2 = \frac{9.380 - 8.000}{500} = 2{,}76$$

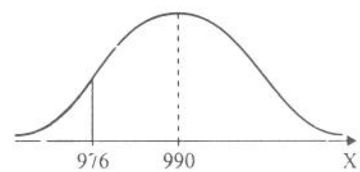
5.3.11 A quantidade de óleo contida em cada lata fabricada por uma indústria tem peso distribuído normalmente, com média de 990 g e desvio-padrão de 10 g. Uma lata é rejeitada no comércio se tiver peso menor que 976 g.

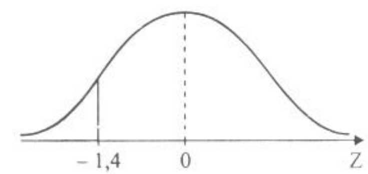
a) Se observarmos uma seqüência casual destas latas em uma linha de produção, qual a probabilidade de que a 10ª lata observada seja a 1ª rejeitada?
b) Nas condições do item a, qual a probabilidade de que em 20 latas observadas, 3 sejam rejeitadas?

X: N (990, 100) $\rightarrow \begin{cases}\mu = 990 \\ \sigma = 10\end{cases} \rightarrow \boxed{Z = \dfrac{X - 990}{10}}$

$P(X < 976) = P(Z \leq -1{,}4) = 0{,}5 - 0{,}419243 = 0{,}080757$
$P = 0{,}080757$
$q = 0{,}919243$

a) $P(X = 10) = (0{,}919243)^9\,(0{,}080757) = 0{,}03785$
b) X: B (20; 0,080757)
$P(X = 3) = \binom{20}{2}(0{,}080757)^3\,(0{,}919243)^{17} = 0{,}14347$

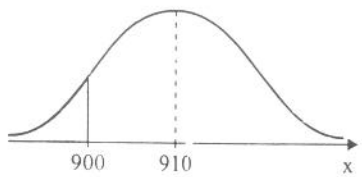




5.3.12 Um fabricante de produtos alimentícios vende um de seus produtos em latas de 900 g de conteúdo líquido. Para embalar o produto adquiriu uma máquina que permite obter o peso desejado, com distribuição normal e desvio-padrão de 10 g. O I.P.M. (Instituto de Pesos e Medidas) exige que no máximo 5% das latas contenham menos do que o peso líquido nominal. Se a máquina for regulada para 910 g, poderá satisfazer esta exigência. Qual deverá ser a regulagem da máquina para que a exigência do I.P.M. seja observada? Feita esta nova regulagem, as latas são remetidas ao comércio. O I.P.M. examina então uma amostra de 20 latas, num supermercado. Qual a probabilidade de encontrar pelo menos 3 com o peso inferior ao especificado na embalagem?

X: peso líquido
X: N (, 100) $\begin{cases}\mu = ? \\ \sigma = 10\end{cases}$

a) X: N (910, 100) $\begin{cases}\mu = 910\\ \sigma = 10\end{cases} \rightarrow \boxed{Z = \dfrac{X - 910}{10}}$

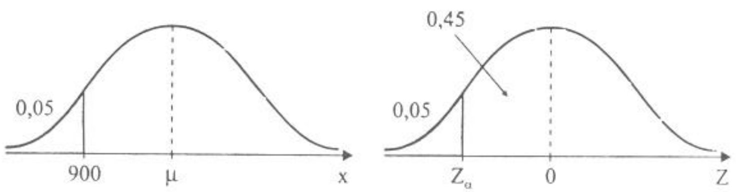


$P(X < 900) = P(Z \leq -1) = 0{,}5 - 0{,}341345 = 0{,}158655 \;\therefore$

$\therefore \;\boxed{15{,}87\%}$

Logo, com a regulagem de 910 g, 15,87% das latas terão peso inferior a 900 g, o que não satisfaz a exigência do I.P.M.

b)



$Z_\alpha = -1{,}64 = \dfrac{900 - \mu}{10} \quad \boxed{\mu = 916{,}4}$

Portanto, para que a exigência do I.P.M. seja observada, a máquina deve ser regulada para 916,4 g. Logo:

$\boxed{X: N(916{,}4;\, 100)}$

c) X: número de latas com peso líquido menor do que 900 g
p = 0,05.

X: B (20; 0,05)

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \left\{\binom{20}{0}(0{,}05)^0(0{,}95)^{20} + \binom{20}{1}(0{,}05)^1(0{,}95)^{19} + \binom{20}{2}(0{,}05)^2(0{,}95)^{18}\right\} =$$

$= 1 - 0{,}35849 + 0{,}37735 + 0{,}18868| = 1 - 0{,}92452 = \boxed{0{,}07548}$

5.4 PROBLEMAS PROPOSTOS

5.4.1 Dadas as funções abaixo, verificar para que valores de K podem ser consideradas f.d.p. Calcular E (X) e VAR (X).

a) $f(x) = \begin{cases} Kx^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 2\\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 2\end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} K(2 - x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1\\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 1\end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} Ke^{-2x} & \text{para } x \geq 0\\ 0 & \text{para } x < 0\end{cases}$

5.4.2 Fazer o gráfico da função de distribuição F (x) das funções do exercício anterior.

5.4.3 Uma variável aleatória contínua X tem a função de distribuição dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0\\ x^5 & \text{se } 0 < x < 1\\ 1 & \text{se } x \geq 1\end{cases}$$

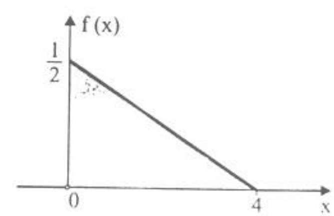
Calcular E (X) e VAR (x).

5.4.4 Uma variável aleatória contínua X tem f.d.p. dada por:

$$f(x) = \begin{cases} K & \text{se } 0 \leq x \leq 2\\ K(x - 1) & \text{se } 2 < x \leq 4\\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 4\end{cases}$$

Determinar K e E (X).

5.4.5 A f.d.p. de uma variável aleatória contínua X é reprsentada pelo gráfico abaixo.



Calcular:

a) K tal que:

$$P(X \geq K) = \frac{1}{4}$$

b) a mediana da distribuição de X, isto é, *m* tal que:

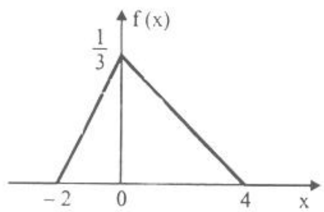
$$P(X > m) = P(X < m)$$

.4.6 Determinar a média e a variância de X, cuja f.d.p. é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2} & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{se } x < 1 \text{ ou } x > 2 \end{cases}$$

.4.7 O gráfico da f.d.p. de uma variável aleatória contínua X é dado a seguir:
Calcular:

a) $P(X \geq 1)$
b) $P(X \leq 1)$
c) $E(X)$



4.8 Dada a f.d.p. de uma variável aleatória X:

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$$

calcular $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$.

4.9 A duração de uma lâmpada é uma variável aleatória T, cuja f.d.p. é:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{1.000} e^{-t/1000}, & \text{para } t \geq 0 \text{ (em horas)} \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Calcular a probabilidade de uma lâmpada:

a) Se queimar antes de 1.000 horas.
b) Durar entre 800 e 1.200 horas.

5.4.10 Na leitura de uma escala, os erros variam de $-\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{4}$, com distribuição *uniforme de probabilidade*. Calcular a média e a variância da distribuição dos erros.

5.4.11 Dada a variável aleatória $Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$, determinar E (Z) e VAR (Z), sendo que X tem f.d.p. dada por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

5.4.12 A duração X de um tubo de televisão tem f.d.p.:

$$f(x) = \begin{cases} Ke^{-kx} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Seja $p_\lambda = P(\lambda \leq X \leq \lambda + 1)$. Então p_λ é da forma $(1 - a)a^\lambda$. Determinar *a*.

5.4.13 A f.d.p. de uma variável aleatória contínua X é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x/2 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 2 \end{cases}$$

Seja $p_1 = P(x \leq 1{,}2)$:

a) Considere experimentos independentes, onde $p = 1{,}24 - p_1$ é a probabilidade de sucesso. Qual a probabilidade de que em 25 tentativas do mesmo experimento ocorram pelo menos 3 sucessos?

b) Se a probabilidade de sucesso for $p = (1{,}24 - p_1)/200$, em 1.000 tentativas independentes do experimento, qual a probabilidade de que ocorram no máximo 2 sucessos?

5.4.14 O diâmetro X de um tubo é uma variável aleatória contínua com f.d.p. dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \left(3x - \frac{3}{2}x^2\right) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$$

A probabilidade de um tubo sair com defeito (diâmetro fora das especificações) é $p = 0{,}5125 - P(x \leq 0{,}5)$. Se 25 tubos são fabricados, qual a probabilidade de que sejam defeituosos:

a) Pelo menos 4 tubos?
b) Exatamente 6 tubos?

5.4.15 Foi feito um estudo sobre a altura dos alunos de uma faculdade, observando-se que ela se distribuía normalmente com média de 1,72 m e desvio-padrão de 5 cm. Qual a porcentagem dos alunos com altura:

a) Entre 1,57 m e 1,87 m?
b) Acima de 1,90 m?

5.4.16 Uma variável aleatória X é normalmente distribuída com média 60 e variância 64. Determinar:

a) $P(X \geq 74)$
b) $P(|X - 60| \leq 8)$
c) $P(|X - 60| \geq 5)$

5.4.17 Um estudo das modificações percentuais dos preços, no atacado, de produtos industrializados, mostrou que há distribuição normal com média de 50% e desvio-padrão de 10%.
Qual a porcentagem dos artigos que:

a) Sofreram aumentos superiores a 75%?
b) Sofreram aumentos entre 30% e 80%?

5.4.18 O volume de correspondência recebido por uma firma quinzenalmente tem distribuição normal com média de 4.000 cartas e desvio-padrão de 200 cartas. Qual a porcentagem de quinzenas em que a firma recebe:

a) Entre 3.600 e 4.250 cartas?
b) Menos de 3.400 cartas?
c) Mais de 4.636 cartas?

5.4.19 Numa fábrica foram instaladas 1.000 lâmpadas novas. Sabe-se que a duração média das lâmpadas é de 800 horas e desvio-padrão de 100 horas, com distribuição normal. Determinar a quantidade de lâmpadas que durarão:

a) Menos de 500 horas
b) Mais de 700 horas
c) Entre 516 e 684 horas

5.4.20 Um fabricante de máquinas de lavar sabe, por longa experiência, que a duração de suas máquinas tem distribuição normal com média de 1.000 dias e desvio-padrão de 200 dias. Oferece uma garantia de 1 ano (365 dias). Produz mensalmente 2.000 máquinas. Quantas espera trocar pelo uso da garantia dada, mensalmente?

5.4.21 O diâmetro X de um cabo de vídeo é uma v.a. com Distribuição Normal, com média de 21mm e desvio-padrão de 1,5 mm. A probabilidade de um cabo sair com diâmetro fora das especificações é $p_1 = 0{,}691759 - P(X > 23)$. Considerando $p = p_1/800$ a probabilidade de um cabo produzido ser rejeitado, determinar a probabilidade de que, na produção de 8.000 cabos, no máximo 3 sejam rejeitados.

MAKRON *Books*

6

APLICAÇÕES DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL

6.1 DISTRIBUIÇÕES DE FUNÇÕES DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS NORMAIS

1. Sejam n variáveis aleatórias independentes, cada uma com distribuição normal, e sejam $E(X_i) = \mu_i$, $VAR(X_i) = \sigma_i^2$, $i = 1, 2, \ldots, n$, isto é, $X_i: N(\mu_i, \sigma_i^2)$. Consideremos a variável $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Então X também é normalmente distribuída,

$$X: N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$$

Demonstração: Não faremos a demonstração de que a variável X tem distribuição normal.
Sejam

$$X_1: N(\mu_1, \sigma_1^2)$$
$$X_2: N(\mu_2, \sigma_2^2)$$
$$\vdots$$
$$X_n: N(\mu_n, \sigma_n^2)$$

independentes e $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, calcularemos $E(X)$ e $VAR(X)$.

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$$

e

$$VAR(X) = VAR\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} VAR(X_i) + 2\sum_{i \neq j}^{n} cov(X_i, X_j).$$

Como as variáveis X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ são independentes, a cov $(X_i, X_j) = 0$, $j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$.
Logo:

$$VAR(X) = \sum_{i=1}^{n} VAR(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

2. Nas condições de ①, se $\mu_i = \mu_2 = \ldots = \mu_n = \mu$ e $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma^2$, então $X: N(n\mu, n\sigma^2)$.
Demonstração: De ① tiramos

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i = \sum_{i=1}^{n} \mu = n\,\mu$$

e

$$VAR(X) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = n\sigma^2$$

3. Sejam $X_i: N(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, \ldots, n$, variáveis independentes. Seja

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Então

$$\overline{X}: N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Demonstração:

$$E(\overline{X}) = E\left\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right\} = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i) =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu$$

e

$$VAR(\overline{X}) = VAR\left\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right\} = \frac{1}{n^2} VAR\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} VAR(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

4. Sejam $X_i: N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ variáveis independentes e seja $Y = a + b_1X_1 + b_2X_2 + \ldots + b_nX_n$. Então:

$$Y: N\left(a + \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \mu_i, \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \cdot \sigma_i^2\right)$$

Demonstração:

$$E(Y) = E(a + b_1X_1 + b_2X_2 + \ldots + b_nX_n) =$$
$$= a + b_1E(X_1) + b_2E(X_2) + \ldots + b_nE(X_n) =$$
$$= a + b_1 \cdot \mu_1 + b_2 \cdot \mu_2 + \ldots + b_n \cdot \mu_n =$$
$$= a + \sum_{i=1}^{n} b_i\, \mu_i$$

$$VAR(Y) = VAR(a + b_1X_1 + b_2X_2 + \ldots + b_nX_n) =$$
$$= b_1^2\, VAR(X_1) + b_2^2\, VAR(X_2) + \ldots + b_n^2\, VAR(X_n) =$$
$$= b_1^2 \cdot \sigma_1^2 + b_2^2\, \sigma_2^2 + \ldots + b_n^2\, \sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \cdot \sigma_i^2.$$

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

1 O peso de um cigarro é a soma dos pesos do papel e do fumo, e vale em média 1,200 g com $\sigma = 0{,}060$ g. O peso médio do papel é 0,040 g com $\sigma = 0{,}020$ g. Esses pesos têm distribuição normal. Os cigarros são feitos em uma máquina automática que pesa o fumo a ser usado, coloca o papel e enrola o cigarro. Determinar o peso médio do fumo em cada cigarro e o desvio-padrão. Qual a probabilidade de que um cigarro tenha menos de 1,130 g de fumo?

Resolução:
Façamos:

X: peso do cigarro
Y: peso do papel
F: peso do fumo
Logo $F = X - Y$ com X e Y independentes.

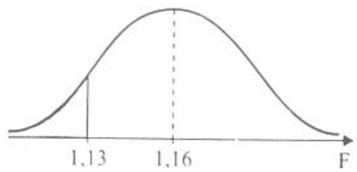
$$\text{Temos} \begin{cases} \mu_x = 1{,}20 \text{ g e } \sigma_x = 0{,}06 \text{ g} \\ \mu_y = 0{,}04 \text{ g e } \sigma_y = 0{,}02 \text{ g} \end{cases}$$

Precisamos determinar μ_F e σ_F^2.
Calculando-se a esperança e a variância de F temos:

$$\mu_F = E(X - Y) = E(X) - E(Y) = 1{,}20 - 0{,}04 = \mathit{1{,}16\ g}$$
$$\sigma_F^2 = VAR(X - Y) = VAR(X) + VAR(Y) =$$
$$= 0{,}06^2 + 0{,}02^2 = 0{,}0036 + 0{,}0004 = \mathit{0{,}0040}$$

Logo:

F: N (1,16; 0,004) e $\sigma_F = 0,063 \Rightarrow \boxed{Z = \dfrac{F - \mu_F}{\sigma_F}}$



Calculando-se a probabilidade temos:

$P(F < 1,13) = P(Z \leq -0,48) = 0,5 - 0,184386 = \boxed{0,315614}$

2. Uma máquina automática enche latas baseada no peso bruto das mesmas. O peso bruto tem distribuição normal com $\mu = 1.000$ g e $\sigma = 20$ g. As latas têm peso distribuído normalmente, com $\mu = 90$ g e $\sigma = 10$ g. Qual a probabilidade de que uma lata tenha, de *peso líquido*,

a) Menos de 830 g?
b) Mais de 870 g?
c) Entre 860 e 920 g?

Sejam X_1: peso bruto
X_2: peso de lata

Seja X: peso líquido

Logo,

$$\boxed{X = X_1 - X_2}$$

Temos:

$$\begin{cases} X_1: N(1.000, 400) \\ X_2: N(90, 100) \end{cases}$$

Calcularemos E (X) e VAR (X).

$E(X) = E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = 1.000 - 90 = 910$

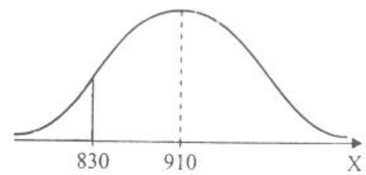
$VAR(X) = VAR(X_1 - X_2) = VAR(X_1) + VAR(X_2) - 2\,cov(X_1, X_2)$

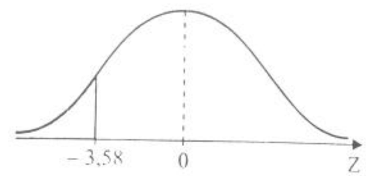
$- 2\,cov(X_1, X_2) = 400 + 100 - 0 = 500 \therefore$

$\therefore \boxed{X: N(910, 500)} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 910 \\ \sigma = 22,36 \end{cases}$

a) $P(X < 830) = P(Z < -3,58) = 0,5 - P(-3,58 < Z < 0) =$

$= 0,5 - 0,499828 = \boxed{0,000172}$

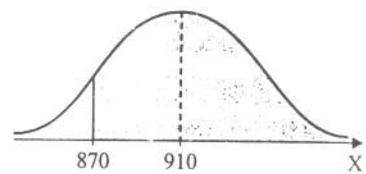


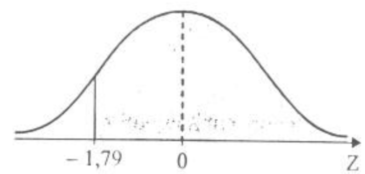


$$Z_1 = \frac{830 - 910}{22,36} = -3,58$$

b) $P(X > 870) = P(Z \geq -1,79) = P(-1,79 \leq Z \leq 0) + 0,5 =$

$= 0,463273 + 0,5 = \boxed{0,963273}$

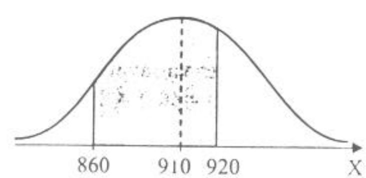


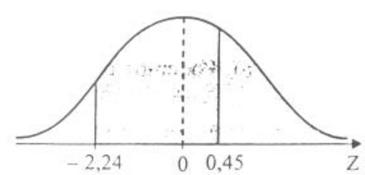


$$Z = \frac{870 - 910}{22,36} = -1,79$$

c) $P(860 < X < 920) = P(-2,24 \leq Z \leq 0,45) = P(-2,24 \leq Z \leq 0) +$

$+ P(0 \leq Z \leq 0,45) = 0,487455 + 0,173645 = \boxed{0,6611}$





$$Z_1 = \frac{860 - 910}{22,36} = -2,24$$

$$Z_2 = \frac{920 - 910}{22,36} = 0,45$$

6.2 APROXIMAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL PELA DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Para efetuarmos a aproximação da distribuição binomial pela distribuição normal, usaremos um resultado bastante importante, o *Teorema do Limite Central*, que será apenas enunciado.

TEOREMA DO LIMITE CENTRAL

Consideremos n variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ independentes com $E(X_i) = \mu_i$ e $VAR(X_i) = \sigma_i^2$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Seja

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Considerando-se condições bastante gerais, a variável

$$Z = \frac{X - \sum_{i=1}^{n} \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}}$$

tem distribuição aproximadamente N (0, 1).

Se $E(X_i) = \mu$ e $VAR(X_i) = \sigma^2$, $i = 1, \ldots, n$ e para n bastante grande $(n \to \infty)$,

$$Z = \frac{X - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$$

tem distribuição normal no limite $(Z \cong N(0, 1))$.

Na prática, quando n é fixo, a aproximação será melhor na medida em que as variáveis X_i, $i = 1, \ldots, n$ forem mais próximas da distribuição normal.

Mostraremos agora como será feita a aproximação da distribuição binomial pela distribuição normal.

Seja X: B (n, p). Podemos escrever $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ onde as variáveis $X_i, X_2, \ldots, X_n$ são independentes, cada uma com distribuição de Bernoulli.

Vimos que

$$\begin{cases} E(X_i) = p \\ VAR(X_i) = pq, \; i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

Então $\quad E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$

e

$$VAR(X) = \sum_{i=1}^{n} VAR(X_i) = npq,$$

que são os mesmos resultados já anteriormente obtidos.

Logo, para *n* suficientemente grande, a variável é:

$$\boxed{Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \cong N(0, 1)}$$

Essa aproximação é chamada de MOIVRE – LAPLACE.

MOIVRE mostrou que para *n* grande $(n \to \infty)$ temos:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{npq}} \, e^{\frac{-(X-np)^2}{2(npq)^2}}$$

Para melhorar ainda mais a aproximação, usaremos o recurso da *correção de continuidade* (cc), como segue:

$$P(X = K) \underset{cc}{\cong} P\left(K - \frac{1}{2} \le X \le K + \frac{1}{2}\right)$$

e

$$P(a \le X \le b) \underset{cc}{\cong} P\left(a - \frac{1}{2} \le X \le b + \frac{1}{2}\right)$$

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

1. Lança-se uma moeda 20 vezes. Qual a probabilidade de se obter de uma a cinco caras, usando:

a) Distribuição binomial

b) Aproximação da binomial pela normal

Resolução

X: Número de caras → X: B $\left(20, \frac{1}{2}\right)$

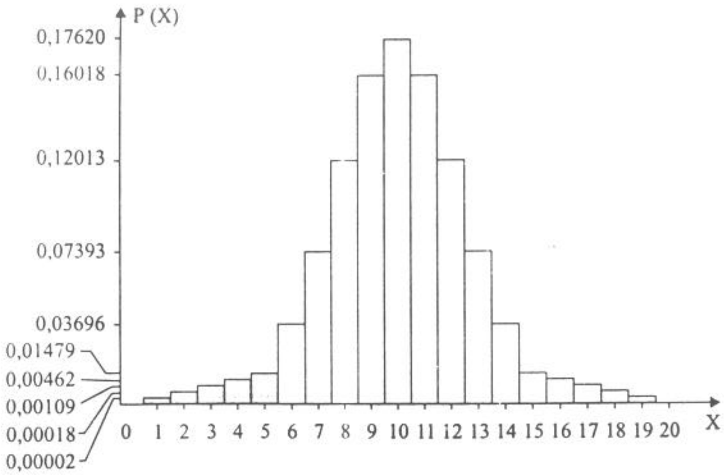
a) $P(1 \le X \le 5) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) +$

$$+ P(X=4) + P(X=5) = \binom{20}{1}(0,5)^1 (0,5)^{19} + \binom{20}{2}(0,5)^2 (0,5)^{18} +$$

$$+ \binom{20}{3}(0,5)^3 (0,5)^{17} + \binom{20}{4}(0,5)^4 (0,5)^{16} + \binom{20}{5}(0,5)^5 (0,5)^{15} =$$

$$= 0,00002 + 0,00018 + 0,00109 + 0,00462 + 0,01479 = \boxed{0,0207}$$

Graficamente:

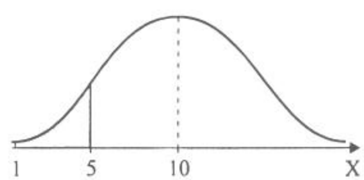


b) Se $X: B\left(20, \frac{1}{2}\right)$ então $\mu = np = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$

$\sigma^2 = npq = 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 5$

e

$\sigma = \sqrt{5} = 2{,}24 \therefore$



Queremos calcular $P(1 \le X \le 5)$.
Usando a correção de continuidade:

$P(1 \le X \le 5) \underset{cc}{\cong} P(0{,}5 \le X \le 5{,}5) = P(-4{,}24 \le Z \le -2{,}01) =$

$= 0{,}5 - 0{,}477784 = \boxed{0{,}022216}$

O erro é de 0,001516, mas no caso, n = 20 (pequeno) e também a probabilidade está tabelada.
Logo, para n grande a aproximação será realmente boa.

2. Um sistema é formado por 100 componentes, cada um dos quais com confiabilidade de 0,95 (probabilidade de funcionamento do componente durante um certo período de tempo).
Se esses componentes funcionam independente um do outro e se o sistema completo funciona adequadamente quando pelo menos 80 componentes funcionam, qual a confiabilidade do sistema?

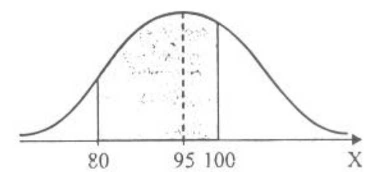
Resolução

Seja X: número de componentes que funcionam
$X: B(100; 0{,}95)$

Usando a aproximação da binomial pela normal, temos:

$\mu = np = 100 \cdot 0{,}95 = 95$

$\sigma^2 = npq = 100 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05 = 4{,}75$ e $\sigma = 2{,}18$



$P(80 \le X \le 100) \underset{cc}{\cong} P(-79{,}5 \le X \le 100{,}5) =$

$= P(-7{,}11 \le Z \le 2{,}52) =$

$= 0{,}5 + 0{,}494132 = 0{,}994132$

Logo, a confiabilidade do sistema é de 99,41%.

6.3 EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

6.3.1 Sejam $X_1: N(150, 30)$, $X_2: N(200, 20)$ e $X_3: N(100, 14)$, independentes.
Seja $X = X_1 - X_2 + X_3$ também com distribuição normal. Calcular:

a) $P(61 \le x \le 70)$

b) $P(47 \le X \le 58)$

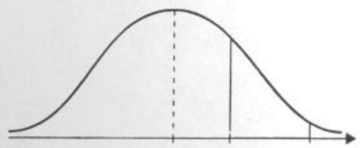
$$X = X_1 - X_2 + X_3 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} E(X) = E(X_1) - E(X_2) + E(X_3) = \\ \quad = 150 - 200 + 100 = 50 \\ VAR(X) = VAR(X_1) + VAR(X_2) + \\ \quad + VAR(X_3) = \\ \quad = 30 + 20 + 14 = 64 \end{cases}$$

Logo,

$$X: N\,(50, 64) \begin{cases} \mu = 50 \\ \sigma = 8 \end{cases} \rightarrow \boxed{Z = \frac{X - 50}{8}}$$

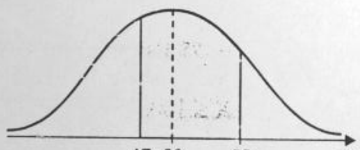
a) $P\,(61 \leq X \leq 70) = P\,(1{,}38 \leq Z \leq 2{,}5) = 0{,}493790 - 0{,}416207 =$

$= \boxed{0{,}077583}$



b) $P\,(47 \leq X \leq 58) = P\,(-0{,}38 \leq Z \leq 1) = 0{,}148027 + 0{,}341345 =$

$= \boxed{0{,}489372}$



.3.2 Sejam X_1: N (180, 40) e X_2: N (160, 50) independentes. Seja $X = 4\,X_1 - 3\,X_2$ também com distribuição normal. Calcular:

a) $P\,(X - 3\,\sigma \geq \mu - 100)$
b) $P\,(|X - 200| \geq 42)$
c) $P\,(|X - 210| \leq 16)$

$$X = 4\,X_1 - 3\,X_2 \begin{cases} E\,(X) = 4 \cdot 180 - 3 \cdot 160 = 240 \\ VAR\,(X) = 16 \cdot 40 + 9 \cdot 50 = 1.090 \end{cases}$$

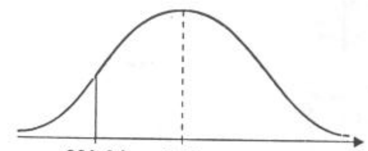
Logo:

$$X: N\,(240, 1.090) \rightarrow \begin{cases} \mu = 240 \\ \sigma = 33{,}02 \end{cases} \rightarrow \boxed{Z = \frac{X - 240}{33{,}02}}$$

a) $P\,(X - 3 \cdot 33{,}02 \geq 240 - 100) = P\,(X \geq 239{,}06) =$

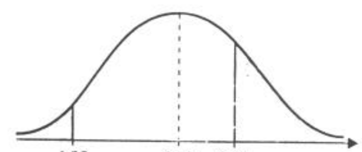
$= P\,(Z \geq -0{,}03) = 0{,}011967 + 0{,}5 =$

$= \boxed{0{,}511967}$



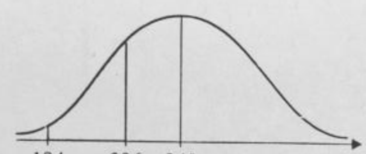
b) $P\,(|X - 200| \geq 42) = P\,(X - 200 \leq -42) + P\,(X - 200 \geq 42) =$
$= P\,(X \leq 158) + P\,(X \geq 242) =$
$= P\,(Z \leq -2{,}48) + P\,(Z \geq 0{,}06) =$
$= (0{,}5 - 0{,}493431) + (0{,}5 - 0{,}023922) =$

$= 0{,}006569 + 0{,}476078 = \boxed{0{,}482647}$



c) $P\,(|X - 210| \leq 16) = P\,(-16 \leq X - 210 \leq 16) =$
$= P\,(194 \leq X \leq 226) = P\,(-1{,}39 \leq Z \leq -0{,}42) =$

$= 0{,}417736 - 0{,}162757 = \boxed{0{,}254979}$



6.3.3 O peso de um saco de café é uma variável aleatória que tem distribuição normal com média de 65 kg e desvio-padrão de 4 kg. Um caminhão é carregado com 120 sacos.

Pergunta-se qual a probabilidade de a carga do caminhão pesar

a) Entre 7.893 kg e 7.910 kg?
b) Mais de 7.722 kg?

(*Obs.* Considerar o peso da carga com distribuição normal.)

X_i: peso de um saco de café $\rightarrow$ X_i: N (65, 16) $\quad i = 1, 2, \ldots, 120$

X: peso da carga $\rightarrow$ $X = \sum_{i=1}^{120} X_i$ $\rightarrow$

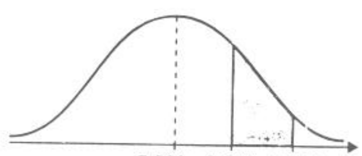
$$\rightarrow \begin{cases} E(X) = \sum_{i=1}^{120} 65 = 120 \cdot 65 = 7.800 \\ VAR(X) = \sum_{i=1}^{120} VAR(X_i) = \sum_{i=1}^{120} 16 = 120 \cdot 16 = 1.920 \end{cases}$$

Logo:

$$X: N(7.800, 1.920) \rightarrow \begin{cases} \mu = 7.800 \\ \sigma = 43,82 \end{cases} \rightarrow \boxed{Z = \frac{X - 7.800}{43,82}}$$

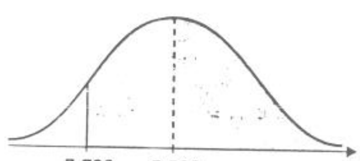
a) $P(7.893 < X < 7.910) = P(2,12 \leq Z \leq 2,51) =$

$= 0,493963 - 0,482997 = \boxed{0,010966}$



b) $P(X > 7.722) = P(Z \geq -1,78) =$
$= P(-1,78 \leq Z \leq 0) + 0,5 = 0,5 + 0,462462 =$

$= \boxed{0,962462}$



6.3.4 Sejam X_i: N (40, 4), $i = 1, 2, \ldots, 20$ independentes. Seja $X = \sum_{i=1}^{20} X_i$, X também com distribuição normal.

a) Determinar X_α, tal que $P(X \geq X_\alpha) = 0,84$
b) Calcular $P(|X - 10| \leq 820)$
c) Calcular $P\left(\frac{3}{5}\mu - 20\sigma \leq X \leq \frac{3}{4}\mu + 20\,\sigma\right)$

Como:

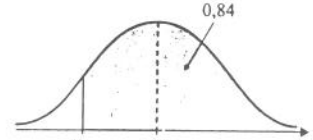
$$X = \sum_{i=1}^{20} X_i \rightarrow \begin{cases} E(X) = E(\sum_{i=1}^{20} X_i) = \sum_{i=1}^{20} 40 = 800 \\ VAR(X) = VAR(\sum_{i=1}^{20} X_i) = \sum_{i=1}^{20} 4 = 20 \cdot 4 = 80 \end{cases}$$

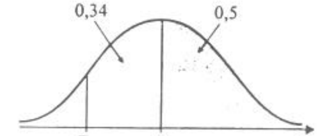
Logo:

$$X: N(800, 80) \rightarrow \begin{cases} \mu = 800 \\ \sigma = 8,94 \end{cases} \rightarrow \boxed{Z = \frac{X - 800}{8,94}}$$

a) $Z_\alpha = 0,99$

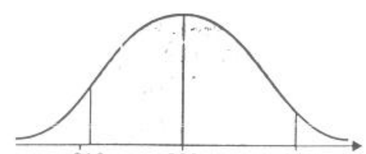
$$-0,99 = \frac{X_\alpha - 800}{8,94} \rightarrow \boxed{X_\alpha = 791,15}$$

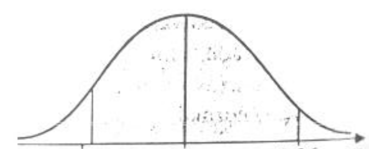




b) $P(|X - 10| \leq 820) = P(-820 \leq X - 10 \leq 820) =$
$= P(-810 \leq X \leq 830) = P(-180,09 \leq Z \leq 3,36) =$

$= 0,5 + 0,499610 = \boxed{0,999610}$

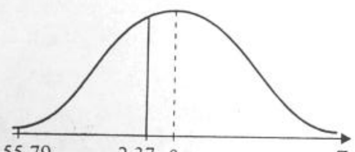




c) $P\left(\frac{3}{5}\mu - 20\,\sigma \le X \le \frac{3}{4}\mu + 20\,\sigma\right) =$

$= P\left(\frac{3}{5}\cdot 800 - 20\cdot 8{,}94 \le X \le \frac{3}{4}\cdot 800 + 20\cdot 8{,}94\right) =$

$= P\,(301{,}20 \le X \le 778{,}8) = P\,(-\,55{,}79 \le Z \le -\,2{,}37) =$
$= 0{,}5 - 0{,}491106 = 0{,}008894$



.5 Um elevador tem seu funcionamento bloqueado se sua carga for superior a 450 kg. Sabendo que o peso de um adulto é uma variável aleatória com distribuição normal, sendo a média igual a 70 kg e o desvio igual a 15 kg, calcule a probabilidade de ocorrer o bloqueio numa tentativa de transportar 6 adultos.

X_i: Peso de um adulto X_i: N (70, 225)

Y: Peso de 6 adultos $\rightarrow$ $Y = \sum_{i=1}^{6} X_i \begin{cases} E\,(Y) = \sum_{i=1}^{6} E\,(X_i) = 6\cdot 70 = 420 \\ VAR\,(Y) = \sum_{i=1}^{6} VAR\,(X_i) = 6\cdot 225 = 1350 \end{cases}$

$\therefore$ Y: N (420, 1350) $\begin{cases} \mu = 420 \\ \sigma = \sqrt{1350} = 36{,}74 \end{cases}$ $\boxed{Z = \frac{Y - 420}{36{,}74}}$

P (Bloqueio) = P (Y > 450) = P (Z > 0,82) =
= 0,5 – P (0 ≤ Z ≤ 0,82) = 0,5 – 0,293892
P (Bloqueio) = 0,206108

6 O peso de uma caixa de peças é uma variável aleatória com distribuição normal de probabilidade, com média de 60 kg e desvio-padrão de 4 kg. Um carregamento de 200 caixas de peças é feito. Seja X o peso do carregamento e X tem distribuição normal,
Determinar:

a) (|X – 12.100| ≤ 32;)
b) X_a tal que $P\,(X \ge X_a) = 0{,}973$

X_i: N (60, 16) Peso da Caixa i

X: Peso da carga $X = \sum_{i=1}^{200} X_i$

$\left.\begin{array}{l} E\,(X) = 60\cdot 200 = 12.000 \\ VAR\,(X) = 200\cdot 16 = 3.200 \end{array}\right\}$ X: N (12.000, 3.200) $\begin{array}{l}\mu = 12.000 \\ \sigma = \sqrt{3.200} = 56{,}57\end{array}$

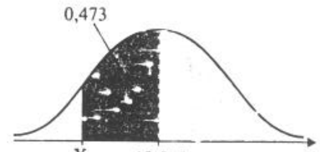
$$Z = \frac{X - 12.000}{56{,}57}$$

a) $P\,(|X - 12.100| \le 32) = P\,(-\,32 \le X - 12.100 \le 32) = P\,(12.068 \le X \le 12.132) =$

$= P\,(1{,}20 \le Z \le 2{,}33) = P\,(0 \le Z \le 2{,}33) - P\,(0 \le Z \le 1{,}20) =$

$= 0{,}490097 - 0{,}384930 = \boxed{0{,}105167}$

b) $P\,(X \ge X_a) = 0{,}973$



$Z_\alpha = Z_{0{,}473} = -\,1{,}92$

$-\,1{,}92 = \frac{X_a - 12.000}{56{,}57}$

$\boxed{X_a = 11.891{,}39}$

6.3.7 O custo de um produto A é determinado por custos fixos, mão-de-obra e matéria-prima. Sabemos que os custos fixos são de R$1.000,00 e desvio-padrão de R$80,00, com distribuição normal, e que o custo da mão-de-obra segue distribuição normal com média de R$5.000,00 e desvio-padrão de R$100,00. O custo da matéria-prima é o dobro do custo da mão-de-obra e também segue uma distribuição normal. Admitindo-se que custo fixo, matéria-prima e mão-de-obra sejam independentes e que o custo do produto A tenha uma distribuição normal, determine:

a) Qual a média e o desvio do custo de A
b) Qual a probabilidade de A custar mais R$16.500,00
c) Qual a probabilidade de que o custo de A esteja entre R$15.800,00 e R$16.900,00.

a) Sejam:
X_1: custo fixo
X_2: custo da mão-de-obra
X_3: custo da matéria-prima
X: custo de A

Como $X_3 = 2\,X_2$ temos:

$$\begin{cases} E(X_3) = 2\,E(X_2) \\ VAR(X_3) = 4\,VAR(X_2) \end{cases}$$

Logo:

X_1: N (1.000, 6.400)
X_2: N (5.000, 10.000)
X_1: N (10.000, 40.000)

E como

$X = X_1 + X_2\,X_3$

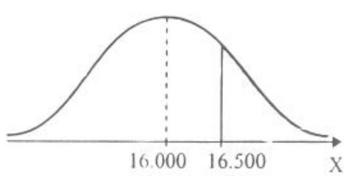
Temos:

$E(X) = 1.000 + 5.000 + 10.000$
$E(X) = 16.000$
$VAR(X) = 6.400 + 10.000 + 40.000$
$VAR(X) = 56.400$

$$X: N(16.000,\ 56.400) \rightarrow \begin{cases} \mu = 16.000 \\ \sigma = 237{,}49 \end{cases} \rightarrow \boxed{Z = \frac{X - 16.000}{237{,}49}}$$

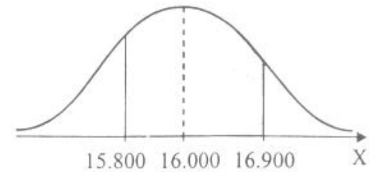
b) $P(X > 16.500) = P(Z \geq 2{,}11) = 0{,}5 - P(0 \leq Z \leq 2{,}11) =$

$= 0{,}5 - 0{,}482571 = \boxed{0{,}017429}$



c) $P(15.800 < X < 16.900) = P(-0{,}84 \leq Z \leq 3{,}79) =$

$= 0{,}299546 + 0{,}499925 = \boxed{0{,}799471}$



6.3.8 Um criador possui 5.000 cabeças de vaca leiteira. Sabendo-se que cada vaca produz em média 3 litros por dia, obedecendo a uma distribuição normal, com desvio-padrão de 0,5 litro, calcular a probabilidade de produzir, diariamente:

a) Mais de 15.110 litros
b) Entre 14.910 e 14.960 litros
X_i: Produção da vaca i X_i: N (3; 0,25)

X: Produção Total $\therefore X = \sum_{i=1}^{5.000} X_i$

$$\left.\begin{array}{l} E(X) = n\,\mu = 5.000 \cdot 3 = 15.000 \\ VAR(X) = n\,\sigma^2 = 5.000 \cdot 0{,}25 = 1.250 \end{array}\right\} X: N(15.000;\ 1.250)$$

$$\therefore \begin{array}{l} \mu = 15.000 \\ \sigma = \sqrt{1.250} = 35{,}36 \end{array} \rightarrow Z = \frac{X - 15.000}{35{,}36}$$

a) $P(X > 15.110) = P(Z \geq 3{,}11) = 0{,}5 - P(0 \leq Z \leq 3{,}11) =$

$= 0{,}5 - 0{,}499065 = \boxed{0{,}000935}$

b) $P(14.910 \leq X \leq 14.960) = P(-2{,}55 \leq Z \leq -1{,}13) =$

$= P(-2{,}55 \leq Z \leq 0) - P(-1{,}13 \leq Z \leq 0) =$

$= 0{,}494614 - 0{,}370762 = \boxed{0{,}123852}$

6.4 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

6.4.1 Sejam X_1: N (200, 60) e X_2: N (100, 20) variáveis independentes. Seja X normalmente distribuída, tal que $X = X_1 - X_2$. Calcular:

a) $P(92 \leq X \leq 106)$
b) $P(110 \leq X \leq 117)$
c) $P(|X - 100| \leq 14)$

.4.2 Sejam as variáveis normalmente distribuídas e independentes,

X_1: N (100, 20)
X_2: N (100, 30)
X_3: N (160, 40)
X_4: N (200, 40)

Seja X também com distribuição normal, sendo que $X = 2X_1 - X_2 + 3X_3 - X_4$. Calcular:

a) $P(X \geq 420)$;
b) $P(X \leq 436)$;
c) $P(300 \leq X \leq 480)$

.4.3 Numa indústria a montagem de um certo item é feita em duas etapas. Os tempos necessários para cada etapa são independentes e têm as seguintes distribuições:

X_1: N (75 seg; 16 seg^2), X_1: tempo da 1ª etapa
X_2: N (125 seg; 100 seg^2), X_2: tempo da 2ª etapa

Qual a probabilidade de que sejam necessários, para montar a peça:

a) Mais de 210 segundos?
b) Menos de 180 segundos?

.4.4 $X: B\left(100; \frac{1}{10}\right)$. Calcular $P(X = 10)$ pela aproximação da normal.

.4.5 X: B (n; p) onde n = 100 e $p = \frac{1}{2}$. Calcular, usando a aproximação pela normal:

a) $P(X \geq 25)$
b) $P(X \leq 70)$
c) $P(X > 57)$
d) $P(X = 52)$
e) $P(25 < X < 57)$

.4.6 Numa binomial em que n = 100 e p = 0,6, calcular a probabilidade de se obter de 70 a 80 sucessos, inclusive os extremos.

.4.7 Um dado é lançado 120 vezes. Determinar a probabilidade de aparecer face 4:

a) 18 vezes ou menos
b) 14 vezes ou menos, admitindo-se que o dado não seja viciado

.4.8 Uma máquina produz parafusos, dos quais 10% são defeituosos. Usando a aproximação da distribuição binomial pela normal, determinar a probabilidade de uma amostra formada ao acaso de 400 parafusos produzidos pela máquina, serem defeituosos:

a) No máximo 30
b) Entre 30 e 50 (inclusive os extremos)

c) Mais de 35 e menos de 45
d) Mais de 55

6.4.9 Determinar a probabilidade de que em 200 lances de uma moeda, resultem:

a) 80 < caras < 120
b) Menos de 90 caras
c) Menos de 85 ou mais de 115 caras
d) Exatamente 100 caras

6.4.10 Sejam X_1: N (150, 30), X_2: N (200, 20) e X_3: N (120, 40) independentes. Seja $X = 3X_1 - X_2 - X_3$ também normal. Calcular:

a) $P(X \leq X_\alpha) = 0{,}83$
b) $P(\mu - 1{,}4\sigma \leq X \leq \mu + 2{,}3\sigma)$

6.4.11 Sejam X_1: N (180, 25) e X_2 : N (95, 36) variáveis independentes. Seja $X = 4X_1 - 5X_2$. Calcular:

a) $P(|X - 200| \leq 180)$
b) $P(|X - 160| \geq 120)$

6.4.12 Sejam X_i: N (200, 40) variáveis normais com distribuições independentes, i = 1, 2, . . . , 100. Seja $X = \sum_{i=1}^{100} X_i$ também normal. Calcular:

a) $P(X \geq 20.247)$
b) $P(X - 0{,}96\,\sigma^2 \geq \mu - 4.000)$

6.4.13 A montagem de uma peça é feita em 3 etapas, independentes entre si. Os tempos de montagem de cada etapa são normalmente distribuídos, como segue:

Etapa	Média	Desvio
1ª	3h	30 minutos
2ª	4h	20 minutos
3ª	6h	50 minutos

O tempo total de montagem também é normalmente distribuído. Qual a probabilidade de que a montagem da peça seja feita:

a) em mais de 660 minutos?
b) entre 896 minutos e 915 minutos?

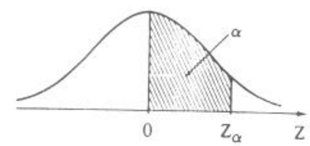
6.4.14 Sacos de feijão são completados automaticamente por uma máquina, com peso médio por saco de 60 kg, desvio-padrão de 1,5 kg e distribuição normal. No processo de armazenagem e transporte a perda média por saco é de 1,2 kg e desvio-padrão de 0,4 kg, também com distribuição normal. Calcular a probabilidade de que numa remessa de 140 sacos de feijão o peso total não ultrapasse 8.230 kg.

MAKRON
Books

TABELAS / FORMULÁRIOS

TABELA I
Distribuição Normal Reduzida $Z: N(0, 1)$

$P(0 < Z < Z_\alpha) = \alpha$



Z_α	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z_α
0,0	000000	003989	007978	011967	015959	019939	023922	027903	031881	035856	0,0
0,1	039828	043795	047758	051717	055670	059618	063595	067495	071424	075345	0,1
0,2	079260	083166	087064	090954	094835	098706	102568	106420	110261	114092	0,2
0,3	117911	121720	125516	129300	133072	136831	140576	144309	148027	151732	0,3
0,4	155422	159097	162757	166402	170031	173645	177242	180823	184386	187933	0,4
0,5	191463	194974	198468	201944	205402	208840	212260	215661	219043	222405	0,5
0,6	225747	229069	232371	235653	238914	242154	245373	248571	251748	254903	0,6
0,7	258036	261148	264238	267305	270350	273373	276373	279350	282305	285236	0,7
0,8	288145	291030	293892	296731	299546	302338	305106	307850	310570	313267	0,8
0,9	315940	318587	321214	323814	326391	328944	331472	333977	336457	338913	0,9
1,0	341345	343752	346136	348495	350831	353141	355428	357690	359929	362143	1,0
1,1	364334	366501	368643	370762	372857	374928	376976	379000	381000	382977	1,1
1,2	384930	386861	388768	390651	392512	394350	396165	397958	399727	401475	1,2
1,3	403200	404902	406582	408241	409878	411492	413085	414657	416207	417736	1,3
1,4	419243	420730	422196	423642	425066	426471	427855	429219	430563	431888	1,4
1,5	433193	434478	435745	436992	438220	439429	440620	441792	442947	444083	1,5
1,6	445201	446301	447384	448449	449497	450529	451543	452540	453521	454486	1,6
1,7	455435	456367	457284	458185	459071	459941	460796	461636	462462	463273	1,7
1,8	464070	464852	465621	466375	467116	467843	468557	469258	469946	470621	1,8
1,9	471283	471933	472571	473197	473810	474412	475002	475581	476148	476705	1,9
2,0	477250	477784	478308	478822	479325	479818	480301	480774	481237	481691	2,0
2,1	482136	482571	482997	483414	483823	484222	484614	484997	485371	485738	2,1
2,2	486097	486447	486791	487126	487455	487776	488089	488396	488696	488989	2,2
2,3	489276	489556	489830	490097	490358	490613	490863	491106	491344	491576	2,3
2,4	491803	492024	492240	492451	492656	492857	493053	493244	493431	493613	2,4
2,5	493790	493963	494132	494297	494457	494614	494766	494915	495060	495201	2,5
2,6	495339	495473	495604	495731	495855	495975	496093	496207	496319	496427	2,6
2,7	496533	496636	496736	496833	496928	497020	497110	497197	497282	497365	2,7
2,8	497445	497523	497599	497673	497744	497814	497882	497948	498012	498074	2,8
2,9	498134	498193	498250	498305	498359	498411	498462	498511	498559	498605	2,9
3,0	498650	498694	498736	498777	498817	498856	498893	498930	498965	499000	3,0
3,1	499032	499065	499096	499126	499155	499184	499211	499238	499264	499289	3,1
3,2	499313	499336	499359	499381	499402	499423	499443	499462	499481	499499	3,2
3,3	499517	499534	499550	499566	499581	499596	499610	499624	499638	499651	3,3
3,4	499663	499675	499687	499698	499709	499720	499730	499740	499749	499758	3,4
3,5	499767	499776	499784	499792	499800	499807	499815	499822	499828	499835	3,5
3,6	499841	499847	499853	499858	499864	499869	499874	499879	499883	499888	3,6
3,7	499892	499896	499900	499904	499908	499912	499915	499918	499922	499925	3,7
3,8	499928	499931	499933	499936	499939	499941	499943	499946	499948	499950	3,8
3,9	499952	499954	499956	499958	499959	499961	499963	499964	499966	499967	3,9
4,0	499968	499970	499971	499972	499973	499974	499975	499976	499977	499978	4,0

Distribuição de Poisson

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}$$

X \ λ	0,1	0,2	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	λ / X
0	904837	818731	606531	367879	223130	135335	082085	049787	030197	018316	011109	006738	002479	000912	000336	000123	000045	0
1	090484	163746	303265	367879	334695	270671	205212	149361	105691	073263	049990	033690	014873	006383	002684	001111	000454	1
2	004524	016375	075816	183940	251021	270671	256516	224042	184959	146525	112479	084224	044618	022341	010735	004998	002270	2
3	000151	001091	012636	061313	125511	180447	213763	224042	215786	195367	168718	140374	089235	052129	028626	014994	007567	3
4	000004	000055	001580	015329	047067	090224	133602	168031	188812	195357	189808	175467	133853	091226	057252	033737	018917	4
5	000000	000002	000158	003066	014120	036089	066801	100819	132169	156293	170827	175467	160623	127718	091603	060727	037833	5
6	000000	000000	000013	000511	003530	012030	027834	050409	077098	104196	128120	146223	160623	149003	122138	091090	063055	6
7	000000	000000	000001	000073	000756	003437	009941	021604	038549	059540	082363	104445	137677	149003	139587	117116	090079	7
8	000000	000000	000000	000009	000142	000859	003106	008102	016865	029770	046330	065278	103258	130377	139587	131756	112599	8
9	000000	000000	000000	000001	000024	000191	000863	002701	006559	013231	023165	036266	068838	101405	124077	131756	125110	9
10	000000	000000	000000	000000	000004	000038	000216	000810	002296	005292	010424	018133	041303	070983	099261	118580	125110	10
11	000000	000000	000000	000000	000001	000007	000049	000221	000731	001925	004264	008242	022529	045171	072190	097020	113736	11
12	000000	000000	000000	000000	000000	000001	000010	000055	000213	000642	001599	003434	011265	026350	048127	072765	094780	12
13	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000002	000013	000057	000197	000553	001321	005199	014188	029616	050376	072908	13
14	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000003	000014	000056	000178	000472	002228	007094	016924	032384	052077	14
15	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000001	000003	000015	000053	000157	000891	003311	009026	019431	034718	15
16	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000001	000004	000015	000049	000334	001448	004513	010930	021699	16
17	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000001	000004	000015	000118	000596	002124	005786	012764	17
18	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000001	000004	000039	000232	000944	002893	007091	18
19	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000001	000012	000086	000397	001371	003732	19
20	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000004	000030	000159	000617	001866	20
21	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000001	000010	000061	000264	000889	21
22	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000003	000022	000108	000404	22
23	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000001	000008	000042	000176	23
24	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000002	000016	000073	24
25	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000001	000006	000029	25
26	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000002	000012	26
27	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000001	000004	27
28	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000002	28
29	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000001	29
30	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	30

TABELA III
Distribuição Binomial

$$P(X = K) = \binom{n}{k} p^{k} q^{n-k}$$

5
6
10

X \ P	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	N = 5
0	95099	77378	59049	32768	23730	16807	07776	03125	05
1	04803	20363	32805	40960	39551	36015	25920	15625	04
2	00097	02143	07290	20480	26367	30870	34560	31250	03
3	00001	00113	00810	05120	08789	13230	23040	31250	02
4	00000	00003	00045	00640	01465	02835	07680	15625	01
5	00000	00000	00001	00032	00098	00243	01024	03125	00
N = 5	0,99	0,95	0,90	0,80	0,75	0,70	0,60	0,50	X / p

X \ P	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	N = 6
0	94148	73509	53144	26214	17798	11765	04666	01563	06
1	05706	23213	35429	39322	35596	30253	18662	09375	05
2	00144	03055	09842	24576	29663	32413	31104	23437	04
3	00002	00214	01458	08192	13184	18522	27648	31250	03
4	00000	00009	00122	01536	03296	05953	13824	23437	02
5	00000	00000	00005	00154	00439	01021	03686	09375	01
6	00000	00000	00000	00006	00024	00073	00410	01563	00
N = 6	0,99	0,95	0,90	0,80	0,75	0,70	0,60	0,50	X / p

X \ P	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	N = 10
0	90438	59874	34868	10737	05631	02825	00605	00098	10
1	09135	31513	38742	26844	18771	12106	04031	00977	09
2	00415	07463	19371	30199	28157	23347	12093	04394	08
3	00011	01048	05739	20133	25028	26683	21499	11719	07
4	00001	00096	01116	08808	14600	20012	25082	20508	06
5	00000	00006	00149	02642	05840	10292	20066	24608	05
6	00000	00000	00014	00551	01622	03676	11148	20508	04
7	00000	00000	00001	00079	00309	00900	04247	11719	03
8	00000	00000	00000	00007	00039	00144	01062	04394	02
9	00000	00000	00000	00000	00003	00014	00157	00977	01
10	00000	00000	00000	00000	00000	00001	00010	00098	00
N = 10	0,99	0,95	0,90	0,80	0,75	0,70	0,60	0,50	X / p

TABELA III
Distribuição Binomial

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

9
15

X \ P	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	N = 9
0	91352	63025	38742	13422	07509	04035	01008	00196	09
1	08305	29854	38742	30199	22525	15565	06047	01758	08
2	00335	06285	17219	30199	30034	26683	16124	07031	07
3	00008	00772	04464	17616	23360	26683	25082	16406	06
4	00000	00061	00744	06606	11680	17153	25082	24609	05
5	00000	00003	00083	01652	03893	07351	16722	24609	04
6	00000	00000	00006	00275	00865	02101	07432	16406	03
7	00000	00000	00000	00029	00124	00386	02123	07031	02
8	00000	00000	00000	00002	00010	00041	00354	01758	01
9	00000	00000	00000	00000	00000	00002	00026	00196	00
N = 9	0,99	0,95	0,90	0,80	0,75	0,70	0,60	0,50	p \ X

X \ P	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	N = 15
0	86006	46329	20589	03519	01336	00475	00047	00003	15
1	13031	36576	34315	13194	06682	03052	00470	00046	14
2	00922	13476	26690	23090	15591	09156	02194	00320	13
3	00040	03073	12851	25014	22520	17004	06339	01389	12
4	00001	00485	04283	18760	22520	21862	12678	04166	11
5	00000	00056	01047	10318	16514	20613	18594	09164	10
6	00000	00005	00194	04299	09175	14724	20660	15274	09
7	00000	00000	00028	01382	03932	08113	17708	19638	08
8	00000	00000	00003	00346	01311	03477	11806	19638	07
9	00000	00000	00000	00067	00340	01159	06121	15274	06
10	00000	00000	00000	00010	00068	00298	02449	09164	05
11	00000	00000	00000	00001	00010	00058	00742	04166	04
12	00000	00000	00000	00000	00001	00008	00165	01389	03
13	00000	00000	00000	00000	00000	00001	00025	00320	02
14	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00002	00046	01
15	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00003	00
N = 15	0,99	0,95	0,90	0,80	0,75	0,70	0,60	0,50	p \ X

TABELA III
Distribuição Binomial

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

7
20

X \ P	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	N = 7
0	93207	69834	47830	20972	13348	08235	02800	00781	7
1	06590	25728	37201	36700	31146	24706	13064	05469	6
2	00200	04062	12400	27525	31146	31765	26127	16406	5
3	00003	00356	02296	11469	17304	22690	29030	27344	4
4	00000	00019	00255	02867	05768	09724	19354	27344	3
5	00000	00001	00017	00430	01154	02501	07741	16406	2
6	00000	00000	00001	00036	00128	00357	01720	05469	1
7	00000	00000	00000	00001	00006	00022	00164	00781	0
N = 7	0,99	0,95	0,90	0,80	0,75	0,70	0,60	0,50	p \ X

X \ P	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	N = 20
0	81791	35849	12158	01153	00317	00079	00003	00000	20
1	16523	37735	27017	05765	02114	00684	00049	00002	19
2	01586	18868	28518	13691	06695	02785	00309	00018	18
3	00096	05958	19012	20536	13390	07160	01235	00109	17
4	00004	01333	08978	21820	18969	13042	03499	00462	16
5	00000	00224	03192	17456	20233	17886	07465	01479	15
6	00000	00030	00887	10910	16861	19164	12441	03696	14
7	00000	00003	00197	05455	11241	16426	16588	07393	13
8	00000	00000	00035	02216	06089	11440	17970	12013	12
9	00000	00000	00005	00739	02706	06537	15974	16018	11
10	00000	00000	00001	00203	00992	03082	11714	17620	10
11	00000	00000	00000	00046	00301	01201	07100	16018	09
12	00000	00000	00000	00009	00075	00386	03550	12013	08
13	00000	00000	00000	00001	00015	00102	01456	07393	07
14	00000	00000	00000	00000	00002	00022	00485	03696	06
15	00000	00000	00000	00000	00000	00003	00130	01479	05
16	00000	00000	00000	00000	00000	00001	00027	00462	04
17	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00004	00109	03
18	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00001	00018	02
19	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00002	01
20	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00
N = 20	0,99	0,95	0,90	0,80	0,75	0,70	0,60	0,50	p \ X

TABELA III
Distribuição Binomial

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

8

X \ P	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	N = 8
0	92274	66342	43047	16777	10011	05765	01680	00390	8
1	07457	27933	38264	33554	26697	19765	08958	03125	7
2	00264	05146	14880	29360	31146	29648	20902	10938	6
3	00005	00542	03307	14680	20764	25412	27869	21875	5
4	00000	00036	00459	04587	08652	13614	23224	27344	4
5	00000	00001	00041	00917	02307	04667	12386	21875	3
6	00000	00000	00002	00115	00385	01000	04129	10938	2
7	00000	00000	00000	00008	00037	00122	00786	03125	1
8	00000	00000	00000	00002	00001	00007	00066	00390	0
N = 8	0,99	0,95	0,90	0,80	0,75	0,70	0,60	0,50	p \ X

TABELA III
Distribuição Binomial

$$P(X = K) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

25

X \ P	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	N = 25
0	77782	27739	07179	00378	00075	00013	00000	00000	25
1	19642	36499	19942	02361	00627	00144	00005	00000	24
2	02381	23052	26589	07084	02508	00739	00038	00001	23
3	00184	09302	22650	13577	06410	02428	00194	00007	22
4	00010	02692	13841	18668	11753	05723	00710	00038	21
5	00001	00595	06459	19602	16454	10302	01989	00158	20
6	00000	00104	02392	16335	18282	14717	04420	00528	19
7	00000	00015	00722	11084	16541	17119	07999	01433	18
8	00000	00002	00180	06235	12406	16508	11998	03223	17
9	00000	00000	00038	02944	07811	13364	15109	06088	16
10	00000	00000	00007	01178	04166	09164	16116	09742	15
11	00000	00000	00001	00401	01894	05355	14651	13284	14
12	00000	00000	00000	00117	00736	02678	11395	15498	13
13	00000	00000	00000	00029	00245	01148	07597	15498	12
14	00000	00000	00000	00006	00070	00421	04341	13284	11
15	00000	00000	00000	00001	00017	00133	02122	09742	10
16	00000	00000	00000	00000	00004	00035	00884	06088	09
17	00000	00000	00000	00000	00001	00008	00312	03223	08
18	00000	00000	00000	00000	00000	00001	00091	01433	07
19	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00023	00528	06
20	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00005	00158	05
21	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00001	00038	04
22	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00007	03
23	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00001	02
24	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	01
25	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00
N = 25	0,99	0,95	0,90	0,80	0,75	0,70	0,60	0,50	p \ X

TABELA III
Distribuição Binomial

$$P(X = K) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

30

X \ P	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	N = 30
0	73970	21464	04239	00124	00018	00002	00000	00000	30
1	22415	33890	14130	00929	00179	00029	00000	00000	29
2	03283	25864	22766	03366	00863	00180	00004	00000	28
3	00310	12705	23609	07853	02685	00720	00027	00000	27
4	00021	04514	17707	13252	06042	02084	00120	00002	26
5	00001	01235	10231	17228	10473	04644	00415	00013	25
6	00000	00271	04736	17946	14546	08293	01152	00055	24
7	00000	00049	01804	15382	16624	12185	02634	00190	23
8	00000	00007	00576	11056	15931	15014	05049	00545	22
9	00000	00001	00157	06756	12981	15729	08227	01333	21
10	00000	00000	00037	03547	09086	14156	11519	02798	20
11	00000	00000	00007	01612	05507	11031	13962	05088	19
12	00000	00000	00001	00638	02906	07485	14738	08055	18
13	00000	00000	00000	00221	01341	04442	13604	11154	17
14	00000	00000	00000	00067	00543	02312	11013	13544	16
15	00000	00000	00000	00018	00193	01057	07831	14446	15
16	00000	00000	00000	00004	00060	00425	04894	13544	14
17	00000	00000	00000	00001	00017	00150	02687	11154	13
18	00000	00000	00000	00000	00004	00046	01294	08055	12
19	00000	00000	00000	00000	00001	00012	00545	05088	11
20	00000	00000	00000	00000	00000	00003	00200	02798	10
21	00000	00000	00000	00000	00000	00001	00063	01333	09
22	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00017	00545	08
23	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00004	00190	07
24	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00001	00055	06
25	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00013	05
26	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00002	04
27	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	03
28	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	02
29	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	01
30	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00
N = 30	0,99	0,95	0,90	0,80	0,75	0,70	0,60	0,50	X / P

TABELA III
Distribuição Binomial

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$p = \frac{1}{6}$

X \ N	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30	N / X
0	40188	33490	27908	23257	19381	16150	06491	02609	01048	00421	0
1	40188	40188	39071	37211	34885	32301	19472	10434	05241	02528	1
2	16075	20094	23443	26048	27908	29071	27260	19824	12579	07330	2
3	03215	05358	07814	10419	13024	15505	23626	23789	19288	13683	3
4	00322	00804	01563	02605	03907	05427	14175	20220	21217	18472	4
5	00012	00064	00188	00417	00781	01302	06237	12941	17822	19211	5
6		00002	00013	00041	00104	00217	02079	06471	11881	15009	6
7			00000	00002	00009	00025	00535	02588	06450	10978	7
8				00000	00001	00002	00107	00841	02903	06312	8
9					00000	00000	00016	00224	01097	03086	9
10						00000	00002	00049	00351	01296	10
11							00000	00009	00096	00471	11
12							00000	00001	00022	00149	12
13							00000	00000	00004	00041	13
14							00000	00000	00001	00010	14
15							00000	00000	00000	00002	15
16								00000	00000	00001	16
17								00000	00000	00000	17
18								00000	00000	00000	18
19								00000	00000	00000	19
20								00000	00000	00000	20
21									00000	00000	21
22									00000	00000	22
23									00000	00000	23
24									00000	00000	24
25									00000	00000	25
26										00000	26
27										00000	27
28										00000	28
29										00000	29
30										00000	30

FORMULÁRIO

1. Probabilidade

A e B m · e → $A \cap B = \emptyset$	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
$P(A/B) = P(A \cap B)/P(B)$	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ A e B independentes
$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$ A_i independentes	$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)$ Prob. Total	$P(A_i/B) = \dfrac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \cdot P(B/A_j)}$ T. Bayes

2. Variáveis Discretas

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x_i)$	$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot P(x_i)$	
$VAR(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(x_i)$	$VAR(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$	$\sigma_X = \sqrt{VAR(X)}$
$E(K) = K$	$E(K \cdot X) = K \cdot E(X)$	$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$
$E(aX \pm b) = aE(X) \pm b$		
$VAR(K) = 0$	$VAR(K \cdot X) = K^2 \cdot VAR(X)$	$VAR(X \pm Y) = VAR(X) + VAR(Y) \pm 2\,COV(X, Y)$
$VAR(aX \pm b) = a^2 \cdot VAR(X)$	$VAR(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} VAR(X_i) + 2 \sum_{i<j}^{n} COV(X_i, X_j)$	
$COV(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$	X e Y indep. $\Longrightarrow P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$	
X e Y indep. $\longrightarrow COV(X, Y) = 0$	$E(X/Y = y_j) = \sum_{i=1}^{m} X_i \cdot P(X_i/Y = y_j)$	$\rho = \dfrac{COV(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$

3. Distribuições Discretas

BERNOULLI $P(X = k) = q^{1-k} p^k$ $E(X) = p$ e $VAR(X) = pq$	*BINOMIAL* X: B (n, p) $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ $E(X) = np$ e $VAR(X) = npq$	*POISSON* $P(X = k) = \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$ $E(X) = \lambda$ e $VAR(X) = \lambda$
GEOMÉTRICA $P(X = k) = q^{k-1} \cdot p$ $E(X) = \dfrac{1}{p}$ e $VAR(X) = \dfrac{q}{p^2}$	*PASCAL* $P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$ $E(X) = \dfrac{r}{p}$ e $VAR(X) = \dfrac{rq}{p^2}$	*HIPERGEOMÉTRICA* $P(X = k) = \dfrac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ $E(X) = np,\ p = \dfrac{r}{N}$ $VAR(X) = np(1-p)\dfrac{(N-n)}{N-1}$

FORMULÁRIO

MULTINOMIAL

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots, X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!} p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$$

com

$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$

$E(x_i) = n_i \cdot p_i$ e $VAR(x_i) = n_i \cdot p_i \cdot q_i$

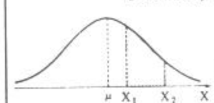
FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

$$F(X) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

4. Variáveis Aleatórias Contínuas

f (x) é f.d.p. se $\begin{cases} 1.\ f(x) \geq 0 \\ 2.\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \end{cases}$	$P(a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$	
$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx$	$VAR(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x)\,dx$	$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx$ $VAR(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$
$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\,ds$	*DISTRIBUIÇÃO UNIFORME* $f(x) = \begin{cases} k \text{ se } a \leq x \leq b \\ 0 \text{ se } x < a \text{ e } x > b \end{cases}$ onde: $k = \dfrac{1}{b-a}$ $E(X) = \dfrac{b+a}{2}$ $VAR(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$	*DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL* $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \text{ se } x \geq 0 \\ 0 \text{ se } x < 0 \end{cases}$ $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ $VAR(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

DISTRIBUIÇÃO NORMAL

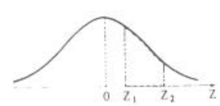


$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2}$$

$X: N(\mu, \sigma^2) \begin{cases} E(X) = \mu \\ VAR(X) = \sigma^2 \end{cases}$

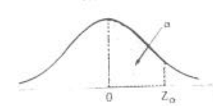
$Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$

$Z: N(0, 1)$



$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(z_1 \leq Z \leq z_2)$

TABELA



$P(0 \leq z \leq z_\alpha) = \alpha$

MAKRON
Books

RESPOSTAS

CAPÍTULO 1

1.7.1 $\Omega = \{(ccc), (ccr), (crc), (crr), (rcc), (rcr), (rrc), (rrr)\}$

a) $A = \{(ccc), (rrr)\}$
b) $B = \{(ccc), (ccr), (crc), (crr)\}$
c) $C = \{(crr), (rrr)\}$

1.7.2 $\Omega = \{(hhh), (hhm), (hmh), (hmm), (mhh), (mhm), (mmh), (mmm)\}$

a) $A = \{(hhm), (hmh), (mhh)\}$
b) $B = \Omega - \{(mmm)\}$
c) $C = \Omega - \{(mmm)\}$

1.7.3 **a)** $A = \{x = y\} = \{(5, 5), (10, 10), (15, 15), (20, 20), (25, 25), (30,30)\}$

b) $B = \{y < x\} = \{(10, 5), (15, 5), (20, 5), (25, 5), (30, 5), (15, 10), (20, 10), (25, 10), (30, 10), (20, 15), (25, 15), (30, 15), (25, 20), (30, 20), (30, 25)\}$

c) $C = \{x = y - 10\} = \{(5, 15), (10, 20), (15, 25), (20, 30)\}$

d) $D = \left\{\dfrac{x + y}{2} < 10\right\} = \{(5, 5), (5, 10), (10, 5)\}$

1.7.4 **a)** $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

b) $A \cap C \cap \overline{B}$

c) $A \cap B \cap C$

d) $A \cup B \cup C$

e) $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$

f) $A \cap B \cap C$

g) $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$

h) $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$

i) $\overline{(A \cap B \cap C)}$

CAPÍTULO 2

2.1 Demonstrar que $(A \cap \bar{B})$ e $(\bar{A} \cap B)$ são mutuamente exclusivos e depois aplicar o T4 (pág. 10).

2.2 a) $\frac{37}{124}$ b) $\frac{21}{124}$

2.3 a) 0,19 b) 0,49 c) 0,32

2.4 a) 0,65 b) 0,02 c) 1

2.5 a) $\frac{4}{65}$ b) $\frac{3}{91}$

2.6 a) $\frac{2}{n}$ b) $\frac{2(n-1)}{n^2}$

2.7 $\frac{53}{105}$

2.8 a) $\frac{11}{850}$ b) $\frac{22}{425}$ c) $\frac{169}{425}$

2.9 a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$

2.8.10 a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{29}{30}$

2.8.11 $\frac{20}{429}$

2.8.12 $\frac{19}{55}$

2.8.13 a) 0,1296 b) 0,1944 c) 0,1681

2.8.14 $\frac{5}{16}$

2.8.15 0,488

2.8.16 $\frac{5}{16}$

2.8.17 a) 0,89783 b) 0,36326 c) 0,88338

2.8.18 $\frac{4}{7}$ e $\frac{3}{7}$

2.8.19 $\frac{19}{21}$

2.8.20 $x = 3$

2.8.21 a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$

2.8.22 a) 0,07336 b) 0,91854 c) 0,0729 d) 0,40951

2.8.23 a) 0,357307 b) 0,162562 c) 0,870279

2.8.24 $\frac{23}{50}$

.8.25 a1) 0,01498 a2) 0,14985
b1) 0,33333 b2) 0,71429

.8.26 a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{5}$

.8.27 0,06788

8.28 $\frac{31}{70}$

8.29 $\frac{2}{9}$

8.30 a) $\frac{143}{315}$ b) $\frac{172}{315}$

8.31 a) 0,80 c) 0,24
b) 0,68 d) 0,75

8.32 A: 7,84%, B: 3,92% e C: 0,98%

8.33 $\frac{7}{72}$

8.34 $\frac{219}{1.400}$

8.35 0,954

8.36 a) 0,380 c) 0,036
b) 0,120

8.37 a) 0,00127 c) 0.531441
b) 0,999999

8.38 $\frac{86}{175}$

8.39 $\frac{16}{65}$

8.40 20%

2.8.41 x = 4

2.8.42 0,14286

2.8.43 2%, 2% e 1%

CAPÍTULO 3

3.7.1

X	P (X)
0	1/35
1	12/35
2	18/35
3	4/35

3.7.2

X	P (X)
0	27/343
1	108/343
2	144/343
3	64/343

3.7.3 a) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{7}{9}$
b) $\frac{4}{9}$ e $\frac{2}{9}$

3.7.4 3,15 pessoas; 126.000 pessoas

3.7.5 – 230,00

3.7.6 a) 0,003619 b) 73 pacotes
c) 50,13

3.7.7 – 64,00

3.7.8 b) – 0,74 c) 73,99

9 $\frac{n+1}{2}$ e $\frac{n^2-1}{12}$

10 a) 38 b) 18

11 2

12 R$10,00

13 R$75.600,00

14 3 e 0,5

15 0 e 2

16 a) 0,1 b) 0,28
c) 10,01 d) 0,533

17 0,4694

18 0,97 e Y = 2X

19 a) 0,68 b) 0,53

20 a) – 5,5 c) 0
b) 8,18 d) 1

21 b) 0,6; 0,6; 0,24 e 0,24 d) – 0,25
c) 1,2 e 0,36

22 5,4 e 0,4

23 a) 7,0 c) $\frac{17}{36}$
b) 0,059

.24 5,22 e 3,012

.25 a) 3,85 e 1,48 b) 3,78 e 5,41

.26 1,40

.27 a) 4 Usar E (X + Y) = E (X) + E (Y)
b) 4

3.7.28 b) $\frac{41}{19}$ c) $\frac{3}{16}$

3.7.29 a) 0,2; 0,4 e 0,4 c) 22,40
b) 4,68

3.7.30 a) 1 e 9 b) 22 e 51

3.7.31 23 e 77

3.7.32 a) 17 e 10,2 b) não são independentes
$\rho = -0{,}3333$

3.7.34 a) Usar: $P(x_i, y_j) = P(x_i) \cdot P(y_j)$, para todo par (x_i, y_j), i = 1, 2, 3 e j = 2, 3, 4
b) 3,3
c) – 2,3 e 16,53

CAPÍTULO 4

4.9.1 a) 0,21499
b) 0,16729
c) 0,61772
d) 0,16729
e) 0,37623
f) 0,45148
g) 0,41326
h) 4 e 2,4
i) 0 e 1

4.9.2 18, $\frac{2}{3}$, 2 e $\frac{4}{9}$

4.9.3 0,39175

4.9.4 0,00364

4.9.5 0,499071

4.9.6 0,184737

4.9.7 a) 0,90438 c) 0
b) 0,09562

4.9.8 a) 0,99237 b) 0,76360

4.9.9 a) 0,006738 b) 0,999501

9.10 a) 0,199148 b) 0,223130

9.11 a) 0,07463 b) 0,19371

9.12 a) 0,39072 c) $\frac{4}{3}$
b) 0,13484 d) $\frac{10}{9}$

9.13 a) 0,08984 c) 0,07031
b) 0,7461

9.14 a) 0,000045 b) 0,124652

9.15 Aplicar as propriedades da esperança e da variância.

9.16 a) 0,018316 b) 0,761896
6,6 dias

9.17 a) 0,265026 b) 0,112599

9.18 a) 0,168031 c) 0,616115
b) 0,800852

9.19 a) 0,32307 b) 0,53710

9.20 a) 0,559507 c) 0,124652
b) 0,175467 d) 0,084224

9.21 a) 0,20233 c) 0,00317
b) 0,90874 d) 0,41485

9.22 a) 0,000123 b) 0,006232
c) 0,268933

9.23 a) 0,018316 b) 0,647232

9.24 a) 0,222363 b) 0,688265

9.25 a) 0,16729 b) 0,21499

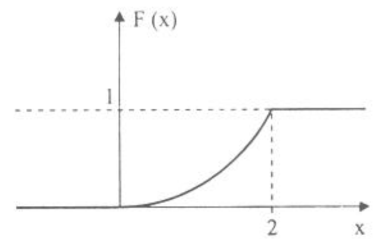
9.26 a) 0,190120 d) 0,062105
b) 0,015562 e) 0,440493
c) 0,038742

4.9.27 a) 3 c) R$1.026,00
b) 0,072459

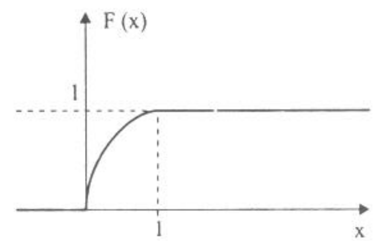
CAPÍTULO 5

5.4.1 a) $\frac{3}{8}, \frac{3}{2}, \frac{3}{20}$ c) $2, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$
b) $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{13}{162}$

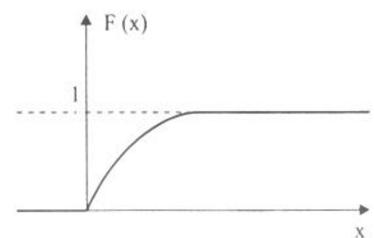
5.4.2 a)



b)



c)



5.4.3 $\frac{5}{6}, \frac{5}{252}$

.4.4 $\frac{1}{6}$ e $\frac{22}{9}$

.4.5 k = 2, m = 1,17

.4.6 1,38629; 0,0782

.4.7 a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{5}{8}$ c) $\frac{2}{3}$

.4.8 0,6174

.4.9 a) 0,632 b) 0,148

.4.10 0 e $\frac{1}{48}$

.4.11 0 e 1

.4.12 $a = e^{-k}$

.4.13 a) 0,999570 b) 0,676677

.4.14 a) 0,76600 b) 0,16335

.4.15 a) 99,73% b) 0,02%

.4.16 a) 0,040059 b) 0,68269 c) 0,52869

.4.17 a) 0,62% b) 97,59%

.4.18 a) 87,16% b) 0,14% c) 0,07%

.4.19 a) 1,4 b) 841,3 c) 120,8

.4.20 1,5

.4.21 0,151205

CAPÍTULO 6

6.4.1 a) 0,561838 b) 0,102640 c) 0,883584

6.4.2 a) 0,038364 b) 0,993431 c) 0,999800

6.4.3 a) 0,176186 b) 0,031443

6.4.4 0,134990

6.4.5 a) 1 b) 1 c) 0,066807 d) 0,073552 e) 0,903200

6.4.6 0,026190

6.4.7 a) 0,355691 b) 0,088508

6.4.8 a) 0,057053 b) 0,919882 c) 0,546746 d) 0,004940

6.4.9 a) 0,994220 b) 0,068112 c) 0,028524 d) 0,055806

6.4.10 a) 147,26 b) 0,908519

6.4.11 a) 0,999908 b) 0,166023

6.4.12 a) 0,000046 b) 0,994915

6.4.13 a) 0,974412 b) 0,015792

6.4.14 0,456205

MAKRON
Books

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1 MEYER, Paul L. *Probabilidade: Aplicações à Estatística*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, Rio de Janeiro, 1983.

2 SPIEGEL, Murray R. *Estatística*. Makron *Books* do Brasil Editora Ltda, São Paulo, 1994.

3 SPIEGEL, Murray R. *Probabilidade e Estatística*. Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda, São Paulo, 1978.

4 BROWKER, Albert H. & LIEBERMAN, Gerald J. *Engineering Statistics*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1959.

5 LIPSCHUTZ, Seymour. *Probabilidade*. Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda, São Paulo, 1971.

6 BLACKWELL, David. *Estatística Básica*. Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda, São Paulo, 1973.

7 LINDGREN, B. W & MCELRATH, G. W. *Introdução à Estatística*. Ao Livro Técnico Científico Ltda, Rio de Janeiro, 1972.

8 LINDGREN, B. W. *Statistical Theory*. The McMillan Company, London, 1968.

9 HOEL, Paul G. *Estatística Elementar*. Editora Atlas S.A, São Paulo, 1977.

10 KARMEL, P. H. & POLASEK, M. *Estatística Geral e Aplicada para Economistas*. Editora Atlas S.A, São Paulo, 1974.

11 MATHER, Kennet. *Elementos de Biometria*. Editora Polígono-Edusp, São Paulo, 1969.

12 SANDERS, Donald H. & MURPH, A. F. & ENG, Robert J. *Statistics - A Fresh Approach*. McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., Tokyo, 1976.

13 WOLF, Frank L. *Elements of Probability and Statistics*. McGraw-Hill Kogakusha Ltd., Tokyo, 1974.

4 KAZMIER, Leonard J. *Estatística Aplicada à Economia e à Administração.* Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda, São Paulo, 1982.

5 NOETHER, Gottfried, E. *Introdução à Estatística: Uma Abordagem não-Paramétrica*, Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1983.

6 WONNACOTT, Thomas H. & WONNACOTT, Ronald J. *Introdução à Estatística.* Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, Rio de Janeiro, 1980.

DOBRE AQUI E COLE

CADASTRO PARA MALA DIRETA

-Favor preencher todos os campos

* Devolvendo-nos este cadastro preenchido, você passará a receber informações dos nossos lançamentos, nas áreas que determinar. **INVISTA EM SEU FUTURO PROFISSIONAL**

NOME (não abreviar):

END. PARA CORRESPONDÊNCIA:

CIDADE: UF: CEP: FONE:

EMPRESA Nascimento: Dia Mês

1. Estou interessado em livros das seguintes áreas

1. Informática
2. Marketing
3. Vendas
4. Administração
5. Economia
6. Recursos Humanos
7. Qualidade/Produtividade
8. Psicologia/Sociologia
9. Ensino Inglês
10. Engenharia Civil
11. Engenharia Mecânica
12. Eng. Elétrica/Eletrônica
13. Engenharia Química
14. Ecologia
15. Outras (especificar):

Obra: Estatística Básica — Volume I — Probabilidade

Autoria: Luiz Gonzaga Morettin

2. Cargo

1. Presidente
2. Diretor
3. Gerente
4. Supervisor
5. Analista
6. Consultor
7. Programador
8. Digitador
9. Outros (especificar)

MAKRON Books

MAKRON *Books* do Brasil Editora Ltda.