Dário Souza Rocha
Disney Douglas de Lima Oliveira
Domingos Anselmo Moura da Silva

Álgebra Linear II

Licenciatura em Matemática

4.º Período

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

GOVERNO DO ESTADO DO AMAZONAS

Manaus 2007

FICHA TÉCNICA

Rocha, Dário Souza.

R672a Álgebra linear II / Dário Souza Rocha, Disney Douglas de Lima Oliveira, Domingos Anselmo Moura da Silva. - Manaus/AM: UEA, 2007. - (Licenciatura em Matemática. 4. Período)

101 p.: il. ; 29 cm.

Inclui bibliografia.

1. Álgebra linear - Estudo e ensino. I. Oliveira, Disney Douglas de Lima. II. Silva, Domingos Anselmo Moura da. III. Série. IV. Título.

CDU (1997): 512.64
CDD (19.ed.): 512.5

SUMÁRIO

PERFIL DOS AUTORES

Dário Souza Rocha

Licenciado e Bacharel em Matemática - UFAM

Especialista em Matemática - UFAM

Disney Douglas de Lima Oliveira

Licenciado e Bacharel em Matemática - UFAM

Mestre em Matemática - UFAM

Doutorando em Computação Gráfica - UFRJ

Domingos Anselmo Moura da Silva

Licenciado e Bacharel em Matemática - UFAM

Mestre em Matemática - UFAM

UNIDADE I

Espaço e Subespaço Vetorial

TEMA 01

ESPAÇO VETORIAL

1. 1 Introdução

O que é Álgebra Linear?

Álgebra linear é um ramo da Matemática que estuda vetores, espaços vetoriais, transformações lineares, sistemas de equações lineares e matrizes. Todos esses itens servem para um estudo detalhado de sistemas de equações lineares. A invenção da Álgebra Linear tem origem nos estudos de sistemas de equações lineares. Não obstante o fato de a Álgebra Linear ser um campo abstrato da Matemática, ela tem um grande número de aplicações dentro e fora da Matemática.

Um dos conceitos básicos em Álgebra Linear é o de **espaço vetorial** ou **espaço linear**.

A noção comum de vetores como objetos com tamanho, direção e sentido, juntamente com as operações de adição e multiplicação por número reais forma a idéia básica de um espaço vetorial. Desse ponto de partida então, para definirmos um espaço vetorial, precisamos de um conjunto de elementos e duas operações definidas sobre os elementos deste conjunto, adição e multiplicação por números reais ou complexos.

Não é necessário que os vetores tenham interpretação geométrica, mas podem ser quaisquer objetos que satisfaçam os axiomas abaixo. Polinômios de grau menor que n formam um espaço vetorial, por exemplo, assim como grupos de m x n e o espaço de todas as funções de um conjunto em outro (com algumas condições adicionais).

Dessa forma, vamos à definição formal de Espaço Vetorial.

1.2 Definição de Espaço Vetorial

Seja V um conjunto não-vazio munido com duas operações: adição, que denotamos por + e multiplicação por um escalar, que denotaremos por $\bullet$, isto é:

$$\begin{array}{l} +: V \times V \to V \\ (u,v) \mapsto u+v \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{l} \bullet: IR \times V \to V \\ (\lambda, v) \mapsto \lambda.v \end{array}.$$

Sendo assim, diremos que o conjunto V acima com as duas operações é dito um espaço vetorial real ou um espaço vetorial sobre IR, se as seguintes propriedades listadas abaixo forem verificadas, para quaisquer u,v e w$\in$V e $\lambda,\beta \in$ IR.

i) $u + (v + w) = (u + v) + w$

ii) $u + v = v + u$

iii) $\exists \theta \in V$ tal que $u + \theta = u$ (θ é chamado de vetor nulo)

iv) para cada $u \in V$ existe $-u \in V$ tal que $u + (-u) = \theta$

v) $(\lambda + \beta).u = \lambda.u + \beta.u$

vi) $\lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v$

vii) $(\lambda . \beta).u = \lambda.(\beta.u)$

viii $\exists 1 \in IR$ tal que $1 . u = u$

Se, na definição acima, em vez de termos como escalares números reais, tivermos números complexos, V será um espaço vetorial complexo.

Observações:

1. Os elementos do espaço vetorial V serão chamados vetores, independente de sua natureza. Vejamos alguns exemplos:

a) V é conjunto de matrizes reais m por n

$$V = M_{m\times n}(IR) = \left\{ \begin{array}{l} A = (a_{ij})_{m\times n}; a_{ij} \in IR, 1 \le i \le m \text{ e} \\ 1 \le j \le n \end{array} \right\}$$

b) V é conjunto de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$

V= f(IR, IR) = $\{f: IR \to IR$, funções reais$\}$

c) V é conjunto dos números complexos

$$V = \mathbb{C} = \left\{ z = a + b.i \; a,b \in IR \text{ e } i = \sqrt{-1} \right\}$$

d) V é o conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$)

$V = \mathbb{Q} = \left\{ x = \dfrac{a}{b} \; a,b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \ne 0 \right\}$, onde representa $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros.

e) V é conjunto de matrizes complexas m por n

$$V = M_{m\times n}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{array}{l} A = (a_{ij})_{m\times n}; a_{ij} \in \mathbb{C}, 1 \le i \le m \text{ e} \\ 1 \le j \le n \end{array} \right\},$$

onde $\mathbb{C}$ representa o conjunto dos números complexos.

2. Daqui por diante, salvo referência expressa em contrário, serão considerados somente espa-

ços vetoriais reais. Assim, quando dissermos que V é um espaço vetorial, deve ficar bem claro que V é um espaço vetorial sobre o conjunto IR dos números reais.

Vamos agora, como exemplo, mostrar que o conjunto

$$V = M_{m \times n}(IR) = \left\{ \begin{array}{l} A = (a_{ij})_{m \times n}; a_{ij} \in IR, 1 \le i \le m \text{ e} \\ 1 \le j \le n \end{array} \right\},$$

Munidos das operações adição de matrizes e produto de um escalar por uma matriz respectivamente definidos por:

$+ : M_{m \times n}(IR) \times M_{m \times n}(IR) \to M_{m \times n}(IR)$

$(A,B) \to A + B$

$\bullet : IR \times M_{m \times n}(IR) \to M_{m \times n}(IR)$

$(\lambda, B) \to \lambda.B$

Sendo $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}(IR)$ e $\lambda \in IR$ temos que:

i) $A + B = C = (c_{ij})_{m \times n}$, onde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$ com $m,n \in \mathbb{N}^*$.

ii) $\lambda.B = C = (c_{ij})_{m \times n}$, onde $c_{ij} = \lambda b_{ij}$ para todo $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$ com $m,n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplo 1

Mostre que o conjunto $M_{m \times n}(IR)$ definido acima, com as operações de adição de matrizes e produto de um escalar por uma matriz, é um espaço vetorial real.

Solução:

Como foi definido acima, para todo par de matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}(IR)$ e $\lambda \in IR$ temos que:

i) $A + B = C = (c_{ij})_{m \times n}$, onde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo $1 \le j \le m$ e $1 \le j \le n$ com $m,n \in \mathbb{N}^*$.

ii) $\lambda.B = C = (c_{ij})_{m \times n}$, onde $c_{ij} = \lambda b_{ij}$ para todo $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$ com $m,n \in \mathbb{N}^*$.

Basta mostrar que a terna $(M_{mxn}(IR), +, \bullet)$ satifaz as seguintes propriedades, para todos $u = (u_{ij})_{m \times n}$, $v = (v_{ij})_{m \times n}$, $w = (w_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}(IR)$ e $\lambda, \beta \in IR$.

i) $u + (v + w) = (u + v) + w$

ii) $u + v = v + u$

iii) $\exists \theta \in V$ tal que $u + \theta = u$ (θ é chamado de vetor nulo).

iv) para cada $u \in V$ existe $-u \in V$ tal que $u + (-u) = \theta$

v) $(\lambda + \beta).u = \lambda.u + \beta.u$

vi) $\lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v$

vii) $(\lambda.\beta).u = \lambda(\beta.u)$

viii) $\exists 1 \in IR$ tal que $1.u = u$

i) $u + (v + w) = (u + v) + w$

$u + (v + w) = (u_{ij})_{mxn} + ((v_{ij})_{mxn} + (w_{ij})_{mxn}) =$

$= (u_{ij})_{mxn} + (v_{ij} + w_{ij})_{mxn} = (u_{ij} + (v_{ij} + w_{ij}))_{mxn}$

$(u + v) + w = ((u_{ij})_{mxn} + (v_{ij})_{mxn}) + (w_{ij})_{mxn} =$

$= (u_{ij} + v_{ij})_{mxn} + (w_{ij})_{mxn} = ((u_{ij} + v_{ij}) + w_{ij})_{mxn} =$

onde $u_{ij} + (v_{ij} + w_{ij}) = (u_{ij} + v_{ij}) + w_{ij}$ $\forall\, u_{ij}, v_{ij}, w_{ij} \in IR$

portanto

$u + (v + w) = (u + v) + w \quad \forall u, v, w \in M_{m \times n}(IR)$

ii) $u + v = v + u$

$u + v = (u_{ij})_{m \times n} + (v_{ij})_{m \times n} = (u_{ij} + v_{ij})_{m \times n}$

$v + u = (v_{ij})_{m \times n} + (u_{ij})_{m \times n} = (v_{ij} + u_{ij})_{m \times n}$

onde

$u_{ij} + v_{ij} = v_{ij} + u_{ij} \quad \forall\, u_{ij}, v_{ij} \in IR$

portanto

$u + v = v + u$

iii) $\exists \theta \in V$ tal que $u + \theta = u$ (θ é chamado de vetor nulo)

Seja $\theta = (\theta_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}(IR)$ tal que $\theta_{ij} = 0 \forall 1 \le i \le m$ e $\forall 1 \le j \le n$, esta matriz é denominada de matriz nula .Sendo assim temos:

$u + \theta = (u_{ij})_{m \times n} + (\theta_{ij})_{m \times n} = (u_{ij} + \theta_{ij})_{m \times n}$

Sendo $\theta_{ij} = 0 \forall 1 \le i \le m$ e $\forall 1 \le j \le n$, temos que $u_{ij} + \theta_{ij} = u_{ij}$. De onde concluímos que $u + \theta = u \;\; \forall u \in M_{m \times n}(IR)$

iv) para cada $u \in M_{m \times n}(IR)$ existe $-u \in M_{m \times n}(IR)$, tal que $u + (-u) = \theta$

Dada a matriz $u = (u_{ij})_{m \times n} \in V$, podemos definir a matriz $-1.u = -u \in M_{m \times n}(IR)$ pondo $-u = (-u_{ij})_{m \times n}$.

Dessa forma, temos:

$u + (-u) = (u_{ij})_{m \times n} + (-u_{ij})_{m \times n} =$

$= (u_{ij} + (-u_{ij}))_{m \times n} = \theta$

Pois $u_{ij} + (-u_{ij}) = 0 \;\; \forall 1 \le i \le m$ e $\forall 1 \le j \le m$

v) $(\lambda + \beta).u = \lambda.u + \beta.u$

$(\lambda + \beta).u = (\lambda + \beta).(u_{ij})_{m \times n} = ((\lambda + \beta).u_{ij})_{m \times n}$

$\lambda.u + \beta.u = \lambda(u_{ij})_{m \times n} + \beta(u_{ij})_{m \times n} = (\lambda u_{ij})_{m \times n} +$

$+ (\beta u_{ij})_{m \times n} = (\lambda u_{ij} + \beta u_{ij})_{m \times n}$

onde

$(\lambda + \beta).u_{ij} = \lambda u_{ij} + \beta u_{ij} \ \ \forall 1 \leq i \leq m$ e $\forall 1 \leq j \leq n$

portanto $(\lambda + \beta).u = \lambda . u + \beta . u$

vi) $\lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v$

$\lambda.(u+v) = \lambda.((u_{ij})_{m \times n} + (v_{ij})_{m \times n}) = \lambda.(u_{ij} + v_{ij})_{m \times n}$

$\lambda.(u+v) = \lambda.(u_{ij} + v_{ij})_{m \times n} = (\lambda.(u_{ij} + v_{ij}))_{m \times n}$

$\lambda.u + \lambda.v = \lambda.(u_{ij})_{m \times n} + \lambda.(v_{ij})_{m \times n} =$

$= (\lambda u_{ij})_{m \times n} + (\lambda v_{ij})_{m \times n} = (\lambda u_{ij} + \lambda v_{ij})_{m \times n}$

onde $\lambda(u_{ij} + v_{ij}) = \lambda u_{ij} + \lambda v_{ij} \ \ \forall 1 \leq i \leq m$ e $\forall 1 \leq j \leq n$

portanto $\lambda(u + v) = \lambda.u + \lambda.v$.

vii) $(\lambda.\beta).u = \lambda(\beta.u)$

$(\lambda.\beta).u = (\lambda.\beta).(u_{ij})_{m \times n} = ((\lambda.\beta).u_{ij})_{m \times n} =$

$= (\lambda.(\beta.u_{ij}))_{m \times n} = \lambda.(\beta.u_{ij})_{m \times n} =$

$= \lambda.(\beta.(u_{ij})_{m \times n}) = \lambda.(\beta.u)$

viii) $\exists 1 \in$ IR tal que $1 . u = u$

$1.u = 1.(u_{ij})_{m \times n} = (1.u_{ij})_{m \times n} = (u_{ij})_{m \times n} = u$

Exemplo 2

Mostre que o conjunto de todas as funções $F = F(IR, IR) = \{f : IR \to IR$, funções reais$\}$, com as operações de adição de funções e produto de um escalar por uma função definidas abaixo, é um espaço vetorial real.

$+ : F \times F \to F$

$(f, g) \to f + g : IR \to IR$

$x \to (f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$\forall x \in IR$

e

$\bullet : IR \times F \to F$

$(\lambda, g) \to \lambda.g : IR \to IR$

$x \to (\lambda.g)(x) .=. \lambda.g(x)$

$\forall x \in IR$

Solução:

De fato, vamos mostrar que a terna $(F, +, \bullet)$ satifaz as seguintes propriedades a seguir para todos $u,v,w \in F$ e $\lambda, \beta \in IR$.

i) $u + (v + w) = (u + v) + w$

ii) $u + v = v + u$

iii) $\exists \theta \in F$ tal que $u + \theta = u$ (θ é chamado de vetor nulo)

iv) para cada $u \in F$ existe $-u \in F$ tal que $u + (-u) = \theta$

v) $(\lambda + \beta).u = \lambda.u + \beta.u$

vi) $\lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v$

vii) $(\lambda . \beta).u = \lambda.(\beta.u)$

viii) $\exists 1 \in$ IR tal que $1. u = u$

i) $u + (v + w) = (u + v) + w$

Aplicando $u + (v + w)$ em $x \in$ IR temos que:

$(u + (v + w))(x) = u(x) + (v + w)(x) =$

$= u(x) + (v(x) + w(x)) = (u(x) + v(x)) + w(x) =$

$= (u + v)(x) + w(x) = ((u + v) + w)(x)$

sendo

$(u + (v + w))(x) = ((u + v) + w)(x) \ \forall x \in IR$

temos que é válida a propriedade

$u + (v + w) = (u + v) + w \quad \forall u, v, w \in F$

ii) $u + v = v + u$

Aplicando $u + v$ em $x \in$ IR, temos que:

$(u+v)(x) = u(x) + v(x) = v(x) + u(x) = (v+u)(x)$

Sendo

$(u + v)(x) = (v + u)(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}$, temos

$u + v = v + u \quad \forall u, v \in F$.

iii) $\exists \theta \in F$ tal que $u + \theta = u$ (θ é chamado de vetor nulo)

Tome $\theta \in F$ como sendo a aplicação nula , ou seja $\theta : IR \to IR$; $\theta(x) = 0 \quad \forall x \in IR$. Logo, para toda função $u \in F$ tem-se

$(u + \theta)(x) = u(x) + \theta(x) = u(x) + 0 = u(x) \ \forall x \in IR$, sendo assim temos que $u + \theta = u$.

iv) para cada $u \in F$ existe $-u \in F$ tal que $u + (-u) = \theta$

Para cada $\begin{array}{l} u : IR \to IR \\ \quad x \to u(x) \end{array}$ vamos definir

$\begin{array}{l} -u : IR \to IR \\ \quad x \to (-u)(x) = -u(x) \end{array}$. Destas forma temos que:

$(u + (-u))(x) = u(x) + (-u)(x) = u(x) + (-u(x)) = 0 \ \forall x \in IR$

Logo $u + (-u) = \theta$ para cada $u \in F$.

v) $(\lambda + \beta).u = \lambda.u + \beta.u$

Aplicando $(\lambda + \beta).u$ em $x \in IR$ temos que:

$((\lambda+\beta).u)(x) = (\lambda + \beta)u(x) = \lambda u(x) + \beta u(x) =$

$= (\lambda u)(x) + (\beta u)(x) = (\lambda u + \beta u)(x) \quad \forall x \in IR$

Sendo assim

$(\lambda + \beta).u = \lambda.u + \beta.u \quad \forall \lambda, \beta \in IR$ e $\forall u \in F$.

vi) $\lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v$

Aplicando $\lambda.(u+v)$ em $x \in IR$ temos que:

$(\lambda.(u+v))(x) = \lambda.(u(x)+v(x)) = \lambda.u(x)+\lambda.v(x) =$

$= (\lambda.u)(x) + (\lambda v)(x) = (\lambda.u + \lambda x)(x) \ \forall x \in IR$

Sendo assim $\lambda(u + v) = \lambda.u + \lambda.v \quad \forall \lambda \in IR$ e $\forall u,v \in F$.

vii) $(\lambda.\beta).u = \lambda(\beta.u)$

Aplicando $(\lambda.\beta).u$ em $x \in IR$ temos que:

$((\lambda.\beta).u)(x) = (\lambda.\beta).u(x) = \lambda.(\beta u(x)) =$

$= \lambda.(\beta u)(x) = (\lambda.(\beta u)(x) \ \ \forall x \in IR$

Sendo assim $(\lambda.\beta).u = \lambda.(\beta.u) \ \ \forall \lambda, \beta \in IR$ e $\forall u \in F$.

viii) $\exists 1 \in IR$ tal que $1 . u = u$

De fato tome $u \in F$, logo teremos que 1. u aplicado em $x \in IR$ será $(1.u)(x) = 1.u(x) = u(x)$

Exemplo 3

O conjunto $IR^3 = \{(x, y, z);\ x,y,z \in IR\}$ é um espaço vetorial com as operações de adição e multiplicação por um escalar assim definida:

$\forall u, v \in IR^3$ e $\forall \lambda \in IR$ temos que $u + v \in IR^3$ e $\lambda u \in IR^3$. Sendo $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ conhecidos, temos que:

$u + v = (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) =$
$\quad = (u_1, v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

e $\lambda u = \lambda(u_1, u_2, u_3) = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$

Vamos deixar a verificação para o leitor como exercício.

1.3 Propriedades dos Espaços Vetoriais

Como conseqüência da definição de espaço vetorial V, decorrem as seguintes propriedades:

i) O vetor nulo (elemento neutro da adição) em V é único .

Demonstração:

Temos que $\exists \theta \in V$ tal que $u + \theta = u$. Vamos mostrar que tal vetor é único.

Suponha que exista um outro vetor neutro, digamos $\tilde{\theta} \in V$ tal que $u + \tilde{\theta} = u \quad \forall u \in V$. Dessa forma, temos que:

$\theta + \tilde{\theta} = \theta$ e $\theta + \tilde{\theta} = \tilde{\theta} \Rightarrow \theta = \tilde{\theta}$

ii) Para cada $u \in V$, existe apenas um e único simétrico $-u \in V$, tal que $u + (-u) = \theta$.

Demonstração:

Suponha que para este $u \in V$, exista um outro simétrico, digamos $b \in V$ tal que $u + b = \theta$. Sendo assim, temos:

$-u = -u + \theta = -u + (u + b) = (-u + u) + b$
$= \theta + b = b$

iii) Se $u + v = u + w \Rightarrow v = w \quad \forall u, v, w \in V$

Demonstração:

Por hipótese, $u + v = u + w$, como $u \in V$ temos que existe $-u \in V$ tal que $u + (-u) = \theta$. Logo,

$-u + (u + v) = -u + (u + w) \Rightarrow$

$\Rightarrow (-u + u) + v\ (-u + u) + w \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta + v = \theta + w \Rightarrow v = w$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Sendo V um espaço vetorial, mostre que $-(-u) = u \ \forall u \in V$.

2. Sendo V um espaço vetorial, mostre que $0 . u = \theta \ \ \forall u \in V$.

3. Sendo V um espaço vetorial, mostre que $\lambda.\theta = \theta \ \ \forall \lambda \in IR$.

4. Sendo V um espaço vetorial, mostre que $\lambda.u = \theta \Rightarrow \lambda = \theta$ ou $u = \theta$.

5. Para todo $u \in V$ temos $(-1)u = -u$.

6. Verifique se o IR^3, munido das operações adição $(a,b,c) + (x,y,z) = (a + x, b + y, c + z)$ e mutiplicação por um escalar $\lambda(x,y,z) = (0,0,0)$, $\forall(a,b,c), (x,y,z) \in IR^3$ e $\forall \lambda \in IR$ é um espaço vetorial real.

7. Verifique se o IR^2, munido das operações

adição $(a,b) + (x,y) = (a - x, b + y)$ e mutiplicação por um escalar $\lambda(x,y) = (\lambda x,y)$, $\forall(a,b), (x,y) \in IR^2$ e $\forall\lambda \in IR$ é um espaço vetorial real.

8. Verifique se o conjunto $M_{2 \times 2}(IR)$ das matrizes de ordem 2, munido das operações adição $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.x & b.y \\ c.z & d.t \end{pmatrix}$ e mutiplicação por um escalar $\lambda.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$, $\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(IR)$ e $\forall\lambda \in IR$ é um espaço vetorial real.

TEMA 02

SUBESPAÇOS VETORIAIS

2.1 Subespaço vetorial

Definição – Seja V um espaço vetorial, e S um subconjunto não vazio de V. Diremos que S é um subespaço vetorial de V se forem satisfeitas as seguintes condições:

i) $\forall u, v \in S$ tem-se $u + v \in S$.

ii) $\forall u \in S$ e $\forall \lambda \in IR$ tem-se $\lambda u \in S$.

Exemplo 1

Seja $V = IR^2$ e $S = \{(x,2x); x \in IR\} \subset IR^2$ uma reta que passa pela origem dos espaços. Mostre que S é um subespaço vetorial de IR^2.

Solução:

Vamos verificar as condições (i) e (ii) da definição de subespaço vetorial.

i) $\forall u, v \in S$ tem-se $u + v \in S$.

ii) $\forall u \in S$ e $\forall \lambda \in IR$ tem-se $\lambda u \in S$.

i) Se $u = (a, 2a)$ e $v = (b,2b)$, temos que:

$u+v = (a,2a) + (b,2b) = (a + b, 2a + 2b) =$

$= (a + b, 2(a + b)) \in S$

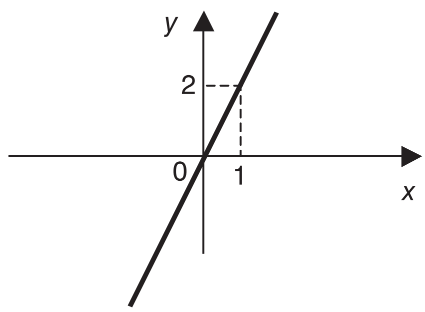
ii) Se $u = (a, 2a)$ e $\lambda \in IR$, temos que:

$\lambda u = \lambda(a, 2a) = (\lambda a, \lambda(2a)) = (\lambda a,(\lambda.2)a) =$

$= (\lambda a,(2.\lambda)a) = (\lambda a, 2(\lambda a)) \in S$

Sendo satisfeitas as condições (i) e (ii), temos que o conjunto S é um subespaço vetorial do espaço vetorial IR^2.

Esse subespaço vetorial representa geometricamente uma reta que passa pela origem .



Exemplo 2

Mostre que o conjunto $S = \{(t, t + 1); t \in IR\} \subset IR^2$ não é um subespaço de IR^2.

Solução:

Basta mostrar que uma das condições dadas na definição não é satisfeita.

Por exemplo:

i) $\forall u,v \in S$ tem-se $u + v \in S$.

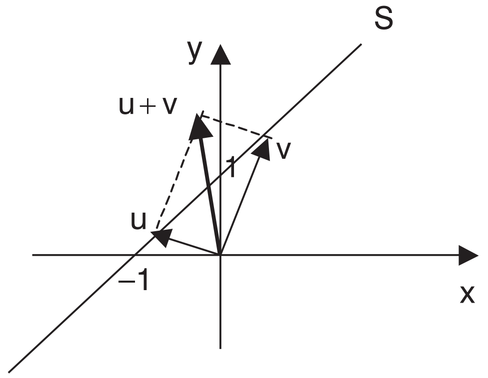
Sendo $u = (a, a + 1)$ e $v = (b, b + 1)$, temos que

$u + v = (a, a + 1) + (b, b + 1) =$

$= (a + b, (a + b) + 2) \notin S$

Logo, S não é um subespaço vetorial de IR^2.

Geometricamente, temos:



Exemplo 3

Seja S um subespaço vetorial do espaço vetorial V. Sendo θ é o vetor nulo de V, então $\theta \in S$.

Solução:

Sendo S subespaço vetorial de V, vamos fazer uso da condição (ii) da definição de subespaço, que nos diz que $\forall u \in S$ e $\forall \lambda \in IR$ tem-se $\lambda u \in S$.

Fazendo $\lambda = \theta$, teremos $0.u = \theta \in S$.

Observação:

O exemplo 2 diz-nos que, se o subconjunto S não possui o vetor nulo do espaço vetorial, então tal subconjunto não pode ser um subespaço vetorial.

Exemplo 4

Verifique se o subconjunto

$S = \{(a^2 + 1, b, 0);\ a, b \in IR\}$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial $V = IR^3$.

Solução:

Uma condição necessária para que tal subconjunto seja um subespaço é que ele possua o vetor nulo do IR^3. Sendo assim, suponha que o vetor nulo pertença a S, logo teríamos:

$$(a^2 + 1, b, 0) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 1 = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

O que gera um absurdo, pois $a^2 + 1 \neq 0\ \forall a \notin IR$. Donde concluímos que osubconjunto $S = \{(a^2 + 1, b, 0);\ a, b \in IR\}$, não pode ser um subespaço vetorial do espaço vetorial IR^3.

Exemplo 5

Seja $V = IR^4$ um espaço vetorial, e $S \subset V$, dada por $S = \{(a,b,c,d) \in IR^4;\ a = b + d \text{ e } c = 0\}$.

Mostre que tal conjunto, munido das operações de adição e produto por um escalar definidas em V, é subespaço vetorial .

Solução:

Observe que podemos reescrever o subconjunto S, como sendo

$S = \{(b + d, b, 0, d); b, d \in IR\}$

Vamos verificar as condições (i) e (ii) da definição de subespaço vetorial.

i) $\forall u = (b_1 + d_1, b_1, 0, d_1)$, $v = (b_2 + d_2, b_2, 0, d_2) \in S$

temos que:

$u + v = (b_1 + d_1, b_1, 0, d_1) + (b_2 + d_2, b_2, 0, d_2)$

$u + v = (b_1 + d_1) + (b_2 + d_2), b_1 + b_2, 0, d_1 + d_2)$

$u + v = ((b_1 + b_2) + (d_1 + d_2), b_1 + b_2, 0, d_1 + d_2) \in S$

ii) $\forall u = (b + d, b, 0, d_1) \in S$ e $\forall \lambda \in IR$, temos que: $\lambda u = \lambda(b + d, b, 0, d) = (\lambda(b + d), \lambda b, \lambda 0, \lambda d) =$

$= (\lambda b + \lambda d, \lambda b, 0, \lambda d) \in S$

Portanto S é um subespaço vetorial de IR^4.

Exemplo 6

Seja $V = M_{nxn}(IR)$ o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem n, e seja $B \in M_{nxn}(IR)$ fixa. Mostre que o subconjunto $S = \{A \in M_{nxn}(IR);\ A.B = 0\}$ das matrizes que ao multiplicar à esquerda de B é um subespaço vetorial.

Solução:

Vamos verificar as condições (i) e (ii) da definição de subespaço vetorial, as quais são:

i) $\forall u, v \in S$ tem-se $u + v \in S$.

ii) $\forall u \in S$ e $\forall \lambda \in IR$ tem-se $\lambda u \in S$.

i) $\forall A_1, A_2 \in S$ temos que $A_1 . B = 0$ e $A_2 . B = 0$, dessa forma temos:

$(A_1 + A_2)B = A_1.B + A_2.B = 0 + 0 = 0 \Rightarrow$

$A_1 + A_2 \in S$

ii) $\forall A \in S$ e $\forall \lambda \in S$ tem-se que $\lambda A \in S$

De fato, $\forall A \in S$ temos que $A.B = 0$. Sendo assim, $\forall \lambda \in S$ e $\forall A \in S$ tem-se que $\lambda A \in S$, já que $(\lambda A).B = \lambda\,(A.B) = \lambda.0 = 0$.
Portanto S é um subespaço vetorial de $M_{nxn}(IR)$.

Exemplo 7

Seja $V = M_{2x2}(IR)$ o espaço vetorial das matrizes de ordem 2 e

$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & 0 \end{pmatrix}; a,b,c \in IR \right\}$ um subconjunto de $M_{2x2}(IR)$. Mostre que tal subconjunto é um subespaço vetorial.

Solução:

Vamos verificar as condições (i) e (ii) da definição de subespaço vetorial, as quais são:

i) $\forall u, v \in S$ tem-se $u + v \in S$.

ii) $\forall u \in S$ e $\forall \lambda \in IR$ tem-se $\lambda u \in S$.

i) Se $u = \begin{pmatrix} a & c \\ b & 0 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} x & z \\ y & 0 \end{pmatrix}$ elementos quaisquer de S, podemos concluir que:

$$u + v = \begin{pmatrix} a & c \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & z \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & c+z \\ b+y & 0 \end{pmatrix} \in S$$

ii) Seja $u = \begin{pmatrix} a & c \\ b & 0 \end{pmatrix} \in S$ e $\lambda \in IR$, dessa forma termos $\lambda u = \lambda \begin{pmatrix} a & c \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda c \\ \lambda b & 0 \end{pmatrix} \in S$

Portanto S é um subespaço vetorial de $M_{2X2}(IR)$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Mostre que os subconjuntos do espaço vetorial IR^3 são subespaços vetoriais.
   a) $S = \{(x,y,z) \in IR^3 ; x + y = z\}$
   b) $S = \{(x,y,z) \in IR^3 ; x - y + z = 0\}$
   c) $S = \{(x,y,z) \in IR^3 ; x = 0\}$

2. Seja $V = M_{n\ x\ n}(IR)$ o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem n, e seja $S = \{A \in M_{nxn}(IR); A^t = A\}$ um subconjunto de V. Mostre que S é um subespaço vetorial de V.

3. Seja $V = M_{n\ x\ n}(IR)$ o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem n, e seja $S = \{A \in M_{nxn}(IR); A^t = -A\}$ um subconjunto de V. Mostre que S é um subespaço vetorial de V.

4. Seja $V = IR^3$ um espaço vetorial munido com um produto interno, e seja $w \in IR^3$ fixo. Mostre que o subconjunto $S = \{u \in IR^3; u \bullet w = 0\}$ é um subespaço vetorial de IR^3.

5. Sejam S,W subespaços vetoriais do espaço vetorial V e λ um valor real fixo. Mostre que:
   a) $S \cap W = \{u;\ u \in S \text{ e } u \in W\}$
   b) $S + W = \{u = s + w;\ s \in S \text{ e } w \in W\}$
   c) $\lambda S = \{\lambda s;\ s \in S\}$

   são subespaços vetoriais do espaço vetorial V.

6. Sejam $V = M_{1x3}(IR)$ e S o conjunto solução do sistema linear homogêneo a três variáveis definido abaixo. Dessa forma, mostre que S é um subespaço vetorial de $M_{1x3}(IR)$.

7. Sejam $V = \left\{ f: IR \to IR; f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k \right\}$ o espaço vetorial das funções polinomiais de grau $\leq$ n, com $a_i \in IR$ $\forall i = 1,2,...,n$ e S um subconjunto das funções pares de V definido por $S = \{f \in V;\ f(x) = f(-x)\ \forall x \in IR\}$. Mostre que S é um subespaço vetorial .

8. Sejam $V = \left\{ f: IR \to IR; f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{v} a_k x^k \right\}$ o espaço vetorial das funções polinomiais de grau $\leq$ n, com $a_i \in IR$ $\forall i = 1,2,...,n$ e S um subconjunto das funções ímpares de V definido por $S = \{f \in V;\ f(-x) = -f(x)\ \forall x \in IR\}$. Mostre que S é um subespaço vetorial .

2.3 Interseção e soma de subespaços vetoriais

2.3.1 Teorema da interseção de subespaços

Seja S a interseção dos n subespaços vetoriais

$S_1, S_2, S_3, ..., S_n$ do espaço vetorial V, ou seja, $S = \bigcap_{k=1}^{n} S_k$. Sendo assim, temos que S é um subespaço vetorial de V.

Demonstração:

i) Se u,v são elementos quaisquer de S, então $u, v \in S_k$ $\forall k = 1,2,3,...,n$. Logo teríamos que $u + v \in S_k$ $\forall k$, emplicando que
$u + v \in \bigcap_{k=1}^{n} S_k = S$.

Satisfaz-se, assim, a primeira condição.

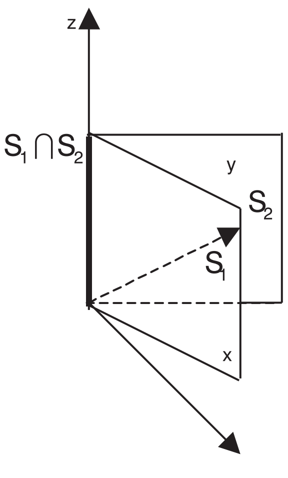
ii) Para qualquer $\lambda \in IR$: se u é elemento quaisquer de S, então $u \in S_k$ $\forall k = 1,2,3,...,n$. Logo teríamos que $\lambda u \in S_k$ $\forall k$, emplicando que $\lambda u \in \bigcap_{k=1}^{n} S_k = S$.

Satisfaz-se, assim, a segunda condição.

Sendo assim, temos que $S = \bigcap_{k=1}^{n} S_k$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial V.

Exemplo 8

$V = IR^3$ e $S_1 \cap S_2$ é a reta de interseção dos planos S_1 e S_2, onde S_1 e S_2 são subespaço vetoriais do IR^3.



Exemplo 9

Seja o espaço vetorial IR^4 e os subespaços $S_1 = \{(x,y,z,0);\ x,y,z \in IR\}$ e $S_2 = \{(0,b,c,d);\ b,c,d \in IR\}$. Determine a interseção de S_1 com S_2.

Solução:

Seja $(x,x_2,x_3,x_4) \in S_1 \cap S_2$ qualquer. Dessa forma, teríamos:

$(x,x_2,x_3,x_4) \in S_1$ e $(x,x_2,x_3,x_4) \in S_2$

$\Rightarrow x_1 = 0$ e $x_4 = 0$

De onde concluímos que interseção de S_1 com S_2, é dada por

$S_1 \cap S_2 = \{(0,x_2,x_3,0);\ x_2,x_3 \in IR\}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Sejam $S = \{(a,b,c,d);\ a + b = 0 \text{ e } c - d = 0\}$ e $W = \{(a,b,c,d);\ a - b - c + d = 0\}$ subespaços vetoriais do espaço vetorial IR^4; determine $S \cap W$.

2. Sendo $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ tais que } a - d = 0 \text{ e } b - c = 0 \right\}$ e $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ tais que } a = c \text{ e } b = d \right\}$ subespaços vetoriais do espaço vetorial das matrizes $M_{2x2}(IR)$, determine $S \cap W$.

2.5 Teorema da soma de subespaços

A soma dos n subespaços vetoriais S_1, S_2, $S_3, ..., S_n$ do espaço vetorial V é um subespaço vetorial do espaço vetorial V. Seja, $S = \sum_{k=1}^{n} S_k = \left\{ v \in V; v = \sum_{k=1}^{n} s_k \right\}$ onde $s_k \in S_k$. Temos que S é um subespaço vetorial de V.

Demonstração:

Seja $S = \sum_{k=1}^{n} S_k = \left\{ v \in V; v = \sum_{k=1}^{n} s_k \right\}$ onde $s_k \in S_k$ para cada $k = 1,2,3,...,n$.

Se u e v são elementos quaisquer de S, onde $u = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $u_k \in S_k$ e $v = \sum_{k=1}^{n} v_k$, $v_k \in S_k$ $\forall k = 1,2,...n$. Dessa forma, temos:

$$u + v = (\sum_{k=1}^{n} u_k) + (\sum_{k=1}^{n} v_k) = \sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k) \in S.$$

Se $\forall u_k, v_k \in S_k$, temos que $u_k + v_k \in S_k$, pois, por hipótese, S_k é subespaço vetorial $\forall k = 1,2,...n$.

Satisfaz-se, assim, a condição (i) da definição de subespaço vetorial.

Para qualquer $\lambda \in IR$ e para todo $u = \sum_{k=1}^{n} u_k$ com $u \in S_k$ $\forall k$ = 1,2,3,...,n, temos:

$\lambda u = \lambda(\sum_{k=1}^{n} u_k) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda u_k) \in S$.

Satisfaz-se, assim, a condição (ii) da definição de subespaço veetorial.

Exemplo 10

Sejam w_1 e w_2 dois subespaços do espaço vetorial IR^3, sendo W_1 e W_2 duas retas concorrentes. Esboçe, geometricamente, a soma de W_1 com W_2.

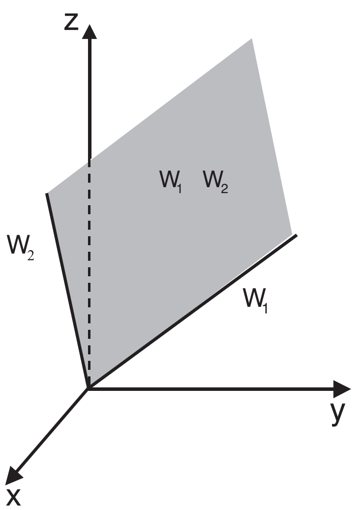
Solução:

Sabemos, da geometria espacial, que duas retas concorrentes determinam um único plano, e esde plano pode ser determinado fazendo uso da Álgebra Linear da seguinte forma:

Os vetores diretores das retas são linearmente independentes, pois as retas são, por hipótese, concorrentes. Dessa forma, podemos determinar o vetor normal a esse plano fazendo uso do produto vetorial entre os vetores diretores da retas, determinando, assim, a equação normal do plano que passa pela origem.

Sendo assim, temos que a soma dos dois subespaços é um plano que passa pela origem e que contém as retas.

Geometricamente, temos:



Exemplo 11

Sejam S_1 e S_2 subespaços vetoriais do espaço vetorial das matrizis reais de dimensão 2, definidas por:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}; a,b,c \in IR \right\} \text{ e}$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}; x,y,z \in IR \right\}.$$

Mostre que $S_1 + S_2 = M_{2x2}(IR)$

Solução:

Temos que $S_1 + S_2 = \{u + v \mid u \in S_1 \text{ e } v \in S_2\}$. Logo

$$S_1 + S_2 = \left\{ u + v = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}; u \in S_1 \text{ e } v \in S_2 \right\}$$

$$S_1 + S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a+x & b \\ y & c+z \end{pmatrix}; a+x,b,y,c+z \in IR \right\}$$

$$S_1 + S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} k & b \\ y & w \end{pmatrix}; k,b,y,w \in IR \right\} = M_{2\times 2}(IR)$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Sejam S = {(a,b,c,d); a + b = 0 e c – d = 0} e W = {(a,b,c,d); a – b – c + d = 0} subesapaços vetoriais do espaço vetorial IR^4; determine S + W.

2. Sendo $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ tais que } a-d=0 \text{ e } b-c=0 \right\}$ e $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ tais que } a=c \text{ e } b=d \right\}$ subespaços vetoriais do espaço vetorial das matrizes $M_{2x2}(IR)$, determine S + W.

3. Sejam $F(IR,IR) = \left\{ f:IR \to IR; f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{v} a_k x^k \right\}$ o espaço vetorial das funções polinomiais de grau ≤ n, munido das operações usuais de adição e produto por um escalar, S e W definidos abaixo são subespaços vetoriais de F(IR, IR).

   S = {f∈V; f(x) = f(–x) ∀x∈IR}

   W = {f∈V; f(–x) = –f(x) ∀x∈IR}

   Mostre que F(IR,IR) = S + W, ou seja, toda função *f* de F(IR, IR) pode ser escrita como a soma de uma função g∈S com uma função h∈W, isto é, *f* = g + h.

2.7 Soma direta de dois ou mais subespaços vetoriais.

2.7.1 Definição de soma direta.

Sejam U,W subespaçoes de um espaço vetorial V. Diremos que o espaço vetorial V é a soma direta dos subespaço U,W, a qual será representada por, $V = U \oplus W$ se as seguintes condiçoes forem satisfeitas:

i) $U \cap W = \{\theta\}$, onde θ é o vetor nulo de V.

ii) $V = U + W$, ou seja, para todo $v \in V$ temos que $v = u + w$ onde $u \in U$ e $w \in W$.

Exemplo 12

Se $S_1 = \{(x,0);\ x \in IR\}$ e

$S_2 = \{(0,y);\ y \in IR\}$ são subespaços vetoriais de IR^2, então $IR^2 = S_1 \oplus S_2$.

Solução:

Diremos que igualdade dada $IR^2 = S_1 \oplus S_2$ é verdadeira se as seguintes condiçoes forem satisfeitas:

i) $S_1 \cap S_2 = \{(0,0)\}$.

ii) $IR^2 = S_1 + S_2$, ou seja, para todo $v \in V$, temos que $v = u + w$ onde $u \in S_1$ e $w \in S_2$.

i) Tome $s = (a,b) \in S_1 \cap S_2$ qualquer. Logo

$(a,b) \in S_2 \Rightarrow b = 0$ e $(a,b) \in S_1 \Rightarrow a = 0$.

Sendo assim, $\forall s(a,b) \in S_1 \cap S_2$ tem-se que $s = (0,0)$, logo $S_1 \cap S_2 = \{(0,0)\}$.

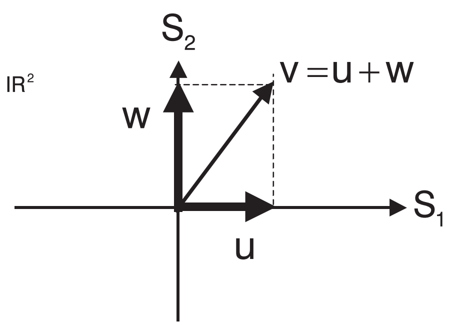
Satisfaz-se, dessa forma, a condição (i).

ii) $\forall v = (x,y) \in IR^2$ temos que $v = (x, y) = (x,0) + (0,y) = u + w$, onde $u = (x,0) \in S_1$ e $w = (0,y) \in S_2$.

Dessa forma, temos que $IR^2 = S_1 + S_2$, satisfazendo, assim, a condição (ii).

Sendo satisfeias as condições (i) e (ii), temos que $IR^2 = S_1 \oplus S_2$.

Geometricamente, temos que:



Exemplo 13 (Teorema)

Se V é a soma direta dos subespaços vetoriais V_1 e V_2, mostre que todo elemento de V se escreve de modo único como a soma de um elemento de V_1 com um elemento de V_2.

Solução:

Temos, por hipótese, que $V = V_1 \oplus V_2$;

logo, para todo $v \in V$ existem $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$, tais que $v = v_1 + v_2$.

Suponha, então, que pudessem existir a e b vetores tais que $v = a + b$, com $a \in V_1$ e $b \in V_2$. Dessa forma, teríamos $v_1 + v_2 = a + b$, implicando que $v_1 - a = v_2 - b$.

Sendo $V_1 \cap V_2 = \{(0)\}$ e $v_1 - a = b - v_2$, temos que $v_1 - a = \theta$ e $b - v_2 = \theta$, implicando $v_1 = a$ e $b = v_2$, pois $v_1 - a \in V_1 \cap V_2 = \{(0)\}$ e $b - v_2 \in V_1 \cap V_2 = \{(0)\}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Sejam $F(IR,IR) = \left\{ f: IR \to IR; f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k \right\}$

   o espaço vetorial das funções polinomiais de grau $\leq n$, munido das operações usuais de adição e produto por um escalar, S e W definidos abaixo são subespaços vetoriais de F(IR, IR).

   $S = \{f \in V;\ f(x) = f(-x)\ \ \forall x \in IR\}$

   $W = \{f \in V;\ f(-x) = -f(x)\ \ \forall x \in IR\}$

   Mostre que $F(IR, IR) = S \oplus W$.

2. Sejam S_1 e S_2 subespaços vetoriais do espaço vetorial das matrizis reais de dimensão 2, definidas por $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}; a,b,c \in IR \right\}$ e

   $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}; x,y,z \in IR \right\}$.

   Mostre que $M_{2x2}(IR) = S_1 \oplus S_2$.

3. Sejam $S = \{(a,b,c,d);\ a + b = 0\}$ e $W = \{(a,b,c,d)\};\ c - 2d = 0\}$ subespaços vetoriais do espaço vetorial IR^4. Verifique se $S \oplus W = \mathbb{R}^4$.

4. Sendo

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ tais que } a - c = 0 \text{ e } b - c = 0 \right. \text{ e}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ tais que } a = c \text{ e } b = d \right\}$$

subespa-ços vetoriais do espaço vetorial das matrizes $M_{2x2}(IR)$. Verifique se $S \oplus W = M_{2x2}(\mathbb{R})$.

5. Sejam $S = \{(0,y,z);\ z,y \in \mathbb{R}\}$ e $S^{\perp} = \{(x,0,0);\ x \in \mathbb{R}\}$ dois subconjunto do $\mathbb{R}^3$. Mostre que S e $S^{\perp}$ são subespaços vetoriais. Verifique ainda que $S \oplus S^{\perp} = \mathbb{R}^3$.

6. Sejam $f : V \to W$ uma função entre os espaços vetoriais reais V e W, tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ e $f(\beta x) = \beta f(x)$ $\forall x, y \in V$ e $\forall \beta \in \mathbb{R}$. Sendo f uma função bijetiva, S_1 e S_2 subespaços vetoriais de V com $S_1 \oplus S_2 = V$, verifique se $f(S_1) \oplus f(S_2) = W$.

UNIDADE II

Combinação Linear, Vetores LI e LD.
Base de um Espaço vetoriaL

TEMA 03

COMBINAÇÃO LINEAR

3.1 Definição de combinaçào linear

Sejam $v_1, v_2, ..., v_n$ vetores do espaço vetorial V e $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ escalares reais ou complexos.

Qualquer vetor $v \in V$ da forma $v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k . v_k$ é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, ..., v_n$.

Exemplo 1: Sendo $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (0,0,1)$ vetores do espaço vetorial IR^3. Mostre que o vetor $v = (2, -1, 1)$ de IR^3, pode ser escrito como combinação linear dos vetores v_1, v_2 e v_3.

Solução:

Para verificar se o vetor $v = (2, -1,1) \in IR^3$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores v_1, v_2 e v_3, temos que encontrar escalares reais λ_1, λ_2, λ_3 tais que $v = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k v_k$.

$(2,-1,1) = \lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(1,1,0) + \lambda_3(0,0,1)$

$(2,-1,1) = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_3)$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$$

Exemplo 2: Sendo $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ vetores do espaço vetorial $M_{2x2}(IR)$.

Verifique se o vetor $v = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{22}$ (IR), pode ser escrito como combinação linear dos vetores v_1, v_2 e v_3.

Solução:

Para verificar se o vetor $v = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{22}$ (IR) pode ser escrito como combinação linear dos vetores v_1, v_2 e v_3, temos que encontrar escalares reais a, b e c tais que $v = av_1 + bv_2 + cv_3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ c & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & -c \\ c & a+c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+b+c = 1 \\ -b = 3 \\ c = -1 \\ a+c = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 5, b = -3 \text{ e } c = -1$$

Exemplo 3: Seja

$V = \left\{ f : IR \to IR ; f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k \right\}$ o espaço vetorial das funções polinomiais de grau $\leq$ n, com $a_i \in IR$ $\forall i = 1,2,...,n$.

Se f, g, h e p são funções de V definidas por $f(x) = 1$, $g(x) = 2 - x$, $h(x) = x + x^2$ e $p(x) = 2x^2 + 3x - 6$. Verifique se p pode ser escrito como combinação linear dos vetores f, g e h.

Solução:

Para verificar que o vetor p pode ser escrito como combinação linear dos vetores f, g e h, temos que encontrar escalares a, b e c reais tais que $p = af + bg + ch$.

Como p e af + bg + ch possuem mesmo domínio e mesmo contra-domínio, verificar que

$p(x) = af(x) + bg(x) + ch(x)$ $\forall x \in IR$

$2x^2 + 3x - 6 = a.1 + b(2 - x) + c(x + x^2)$

$2x^2 + 3x - 6 = a + 2b - bx + cx + cx^2$

$-6 + 3x + 2x^2 = (a + 2b) + (-b + c)x + cx^2$

$$\begin{cases} a + 2b = -6 \\ -b + c = 3 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow a = -4, b = -1 \text{ e } c = 2$$

3.2 Subespaço Vetorial Gerado

Fixado $v_1, v_2, ..., v_n$ vetores do espaço vetorial V. Seja W o conjunto de todas os vetores de V tais que esses vetores se escrevem com combinaçào linear dos vetores $v_1, v_2, ..., v_n$.

Vamos denotar tal conjunto por $W = [v_1, v_2, ..., v_n]$ ou $W = G(A)$ onde $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ou $W = \left\{ v \in V \mid v = \sum_{k=1}^{n} a_k v_k, \ \ a_k \in IR \ \ \forall k = 1,2,...,n \right\}$.

Mostraremos que tal conjunto é um subespaço vetorial de V.

De fato se :

$u = \sum_{k=1}^{n} a_k v_k$ e $v = \sum_{k=1}^{n} b_k v_k$ são elementos de W quaisquer podemos ter

$$u + v = \sum_{k=1}^{n} a_k v_k + \sum_{k=1}^{n} b_k v_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k v_k + b_k v_k)$$

$$u + v = \sum_{k=1}^{n} (a_k v_k + b_k v_k) = \sum_{k=1}^{n} (a_{kk} + b_k) v_k \in W$$

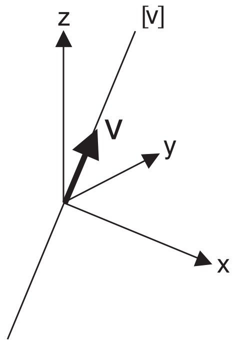
e

$$\lambda u = \lambda(\sum_{k=1}^{n} a_k v_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(a_k v_k) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k) v_k = \sum_{k=1}^{n} \beta_k v_k$$

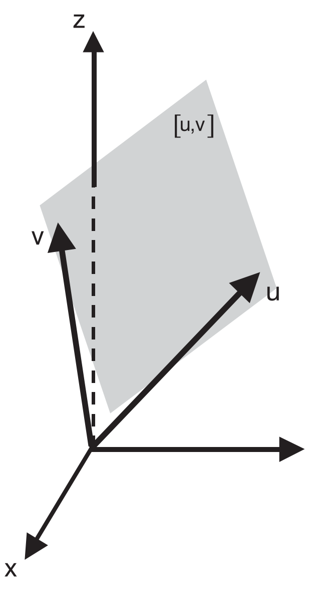
$$\lambda u = \sum_{k=1}^{n} \beta_k v_k \text{ onde } \beta_k = \lambda a_k \quad \forall k = 1,2,...,n$$

Sendo u + v$\in$W e $\lambda u \in$W $\forall$u,v$\in$W e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que W é um subespaço espaço vetorial de V.

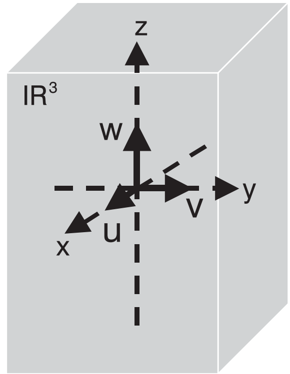
Exemplo 4: Seja V = $\mathbb{R}^3$, v$\in$V e v $\neq \theta$. Desta forma , temos que [v] = {x = λv|$\lambda \in \mathbb{R}$} é uma equação da reta que passa pela origem.



Exemplo 5: Seja V = IR^3, u, v$\in$V e u $\neq \lambda$v $\forall$ $\lambda \in$IR. Desta forma , temos que [u,v] = {X = λu + βv | λ, $\beta \in$IR} é uma equação de um plano que passa pela origem.



Exemplo 6: Seja V = $\mathbb{R}^3$, u,v w$\in$V e u $\neq \lambda$v + βw $\forall\lambda$, $\beta \in$IR. Desta forma, temos que [u,v,w] = {X = λu + βv + φw|λ, β, $\varphi \in$IR} é o próprio IR^3.



Exemplo 7: Determine o subespaço gerado pelos vetores u = (–1,0) e v = (0,2) pertencente ao $\mathbb{R}^2$.

Solução:

Temos que o subespaço gerado pelos vetores u = (–1,0) e v = (0,2) é dado por:

[u,v] = {w$\in \mathbb{R}^2$|w = au + bv, onde a e b$\in$IR}.

Sendo temos que:

w = au + bv = a(–1,0) + b(0,2) = (–a,2b), de onde concluimos que todo vetor de $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores u e v. Sendo assim temos que [u,v] = $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 8: Sejam u = (1,0,1) e v = (0,–1,1) vetores do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.Determine o subespaço gerado pelos vetores u e v.

Solução:

Observe que u $\neq \lambda$v $\forall$ $\lambda \in \mathbb{R}$, e fazendo uso do exemplo 2 temos que [u,v] = {X = λu + βv | λ, $\beta \in$IR} é a equação de um plano.

Sendo X = (x,y,z)$\in$[u,v] temos que:

(x,y,z) = λ(1,0,1) + β(0,–1,1)

(x,y,z) = (λ,0,λ) + (0,–β,β) = (λ, – β, λ + β)

$x = \lambda, y = -\beta, z = \lambda + \beta \Rightarrow z = x - y \Rightarrow x - y - z = 0$

[u,v] = {(x,y,z)$\in$IR^3|x – y – z = 0}

Exemplo 9: Mostre que o conjunto A = {u,v,w} gera o $\mathbb{R}^3$, sendo u = (1,1,0), v = (0,–1,1) e w = (2,0,–1).

Solução:

Dizer que o $\mathbb{R}^3$ é gerado pelo conjunto A, seguinifica que todo vetor z = (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ se escrevem como combinação linear dos vetores u = (1,1,0), v = (0,–1,1) e w = (2,0,–1), isto é, existem escalares $a,b,c \in \mathbb{R}$ tais que z = au + bv + cw.

(x,y,z) = a(1,1,0) + b(0,–1,1) + c(2,0,–1)

(x,y,z) = (a,a,0) + (0,–b,b) + (2c,0,–c)

(x,y,z) = (a + 2c, a – b, b – c)

$$\begin{cases} a+2c=x & \text{(i)} \\ a-b=y & \text{(ii)} \\ b-c=z & \text{(iii)} \end{cases}$$

Tomando a equação (i) temos que a + 2c = x $\Rightarrow$ a = x –2c(iv).

Substituindo a equação (iv) em (ii) temos:

x – 2c – b = y $\Rightarrow$ –b – 2c = y – x

$$\begin{cases} b-c=z \\ -b-2c=y-x \end{cases} \Rightarrow c=\frac{1}{3}(x-y-z) \text{ e}$$

$$b=\frac{1}{3}(2z+x-y) .$$

Substituindo o valor de c em (i), temos $a=\frac{1}{3}(x+2y+2z)$. Desta forma podemos escrever qualquer (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ como combinação linear dos vetores u = (1,1,0), v = (0,–1,1) e w = (2,0,–1).

Observação: Sendo V um espaço vetorial e A = $\{v_1,v_2,v_3,v_4,...,v_n\}$ um subconjunto finito de ‘V. Diremos que V é um espaço vetorial finitamente gerado se, e somente se, V = G(A), isto é, o espaço vetorial V é gerado pelo subconjunto A.

Exemplo 10: Temos que o $\mathbb{R}^3$ é um espaço vetorial finitamente gerado, pois existe um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^3$ tal que G(A) = $\mathbb{R}^3$.

Solução:

De fato , para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tem-se que:

(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)}, logo tomando A = {(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)} temos que G(A) = $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 11: Temos que o espaço vetorial $M_{2x2}(\mathbb{R}^3)$ é finitamente gerado, pois existe um subconjunto $A \subset M_{2x2}(\mathbb{R}^3)$ tal que $M_{2x2}(\mathbb{R}^3)$ = G(A).

De fato , para toda matriz $A \in M_{2x2}(\mathbb{R}^3)$ com $A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tem-se:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

logo tomando

$$A=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$ teremos

que $M_{2x2}(\mathbb{R}^3)$ = G(A).

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Sejam V = $M_{2x3}(\mathbb{R})$ e
$$A=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$
Determine G(A).

2. Seja V = $\mathbb{R}^3$ um espaço vetorial. Verifique se o vetor $(3,-4,1) \in$ [(1,–2,0),(0,1,1),(–1,3,0),(0,0,1)].

3. Verifique se o conjunto A = {u,v,w} gera o $\mathbb{R}^3$, sendo u = (1,–2,0), v = (0,–1,1).

4. Mostre que o $\mathbb{R}^3$ é um espaço vetorial finitamente gerado.

5. Seja W um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ definido por w = {(1,0,0),(0,0,–1),(1,0,1),(0,–2,0),(1,–1,2)}.
   a) Verifique se um dos vetores, digamos (1,–1,2)é a combinação linear dos demais vetores.
   b) Verifique se o subconjunto W gera o $\mathbb{R}^3$.
   c) Encontre um subconjunto A em W, tal que $\mathbb{R}^3$ = G(A).

TEMA 04

INDEPENDÊNCIA E DEPENDÊNCIA LINEAR DE VETORES.

4.1 Definição

Seja V é um espaço vetorial e A = $\{v_1,v_2,v_3,v_4,...,v_n\}$ um subconjunto de V. Diremos que o conjunto A é Linearmente Independente (L.I) se a equação $\sum_{k=1}^{n} a_k v_k = \theta$ admite apenas a soloução trivial, ou seja, $a_k = 0\ \forall k = 1,2,3,...,n$. Caso exista algum $a_k \neq 0$ na soluçào da equação $\sum_{k=1}^{n} a_k v_k = \theta$, diremos que tal conjunto é linearmente dependente (L.D).

Exemplo 1: Mostre que o conjunto A $\{(1,1,0), (0,1,1)\} \subset IR^3$ é linearmente independente.

Solução:

Basta mostrar que a equação a(1,1,0) + b(0,1,1) = (0,0,0) com $a,b \in IR$ admite solução trivial, ou seja, a = b = 0.

a(1,1,0) + b(0,1,1) = (0,0,0) $\Rightarrow$ (a, a + b, b) = (0,0,0) $\Rightarrow$ a = b = 0

Exemplo 2: Verifique se o subconjunto $A \subset IR^3$ dado por A = {(1,0,1),(0,0,1),(0,–1,0)} é L.I, e se o mesmo gera o IR^3.

Solução:

Vamos verificar em primeiro lugar se A é L.I.

Sabemos que um subconjunto $A \subset IR^3$ é L.I se, e somente se, a equação a(1,0,1) + b(0,0,1) + c(0,–1,0) = (0,0,0) admite apenas a solução trivial, ou seja a = b = c = 0.

Sendo (a,0,a) + (0,0,b) + (0,–c,0) = (0,0,0) temos:

(a,–c, a + b) = (0,0,0)

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ -c = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow\ a = b = c = 0$$

onde concluimos que A é L.I.

Vamos agora verificar se tal conjunto gera o IR^3. Isto é, todo vetor $(x,y,z) \in IR^3$ se escreve como combinação linear dos vetores (1,0,1), (0,0,1) e (0,–1,0).

Faça

(x,y,z) = a(1,0,1) + b(0,0,1) + c(0,–1,0)

(x,y,z) = (a,0,a) + (0,0,b) + (0,–c,0)

(x,y,z) = (a, –c, a + b)

$$\begin{cases} a = x \\ -c = y \\ a + b = z \end{cases} \Rightarrow\ a = x,\ c = -y,\ b = z - x$$

Sendo assim concluimos que o conjunto A gera IR^3

Exemplo 3: Sejam $M_{2\times 2}(IR)$ o espaço vetorial das matrizes reais de ordem 2 e $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ um subconjunto de $M_{2\times 2}(IR)$. Verifique se A é L.I. Verifique ainda se A gera $M_{2\times 2}(IR)$ = G(A).

Solução:

Sabemos que o conjunto A é L.I se, se somente se, a equação abaixo admite apenas a solução trivial, ou seja a = b = c = d = 0.

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sendo assim, temos:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ a & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & c \\ 0 & -c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+b+c & c \\ a & -a-c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ c = 0 \\ a = 0 \\ -a - c - d = 0 \end{cases} \Rightarrow\ a = b = c = d = 0$$

Vamos verificar se $M_{2\times 2}(IR)$ = G(A).

Tome $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(IR)$ qualquer, logo:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & c \\ 0 & -c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & c \\ a & -a-b-c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+b+c=x \\ c=y \\ a=z \\ -a-c-d=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=z \\ b=x-y-z \\ c=y \\ d=-y-z-t \end{cases}$$

Onde concluimos que o conjunto A gera $M_{2x2}(IR)$, isto é $M_{2x2}(IR) = G(A)$.

Exemplo 4: Se

$$\mathfrak{F}(IR,IR) = \left\{ f: IR \to IR, f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{3} a_k x^k \right\}$$ é o

espaço das funções polinomiais reais de grau ≤ 3 e A = $\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$ um subconjunto de $\mathfrak{F}$ (IR,IR), onde cada f_i com i = 1,2,3,4 é definida por $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x + 1$, $f_3(x) = 2 - x^2$ e $f_4(x) = 1 + x + x^3$. Verifique se A é L.I ou L.D. Verifique ainda se $\mathfrak{F}$ (IR,IR) = G(A).

Solução:

Seja $\tilde{f} \in \mathfrak{F}$ (IR,IR) a função polinomial nula, ou seja $\tilde{f}(x) = 0\ \forall x \in IR$. Sendo assim temos que mostrar que $af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 = \tilde{f} \Rightarrow a = b = c = d = 0$.

De fato, tome:

$(af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4)(x) = \tilde{f}(x)$

$(af_1)(x) + (bf_2)(x) + (cf_3)(x) + (df_4)(x) = \tilde{f}(x) = 0$

$af_1(x) + bf_2(x) + cf_3(x) + df_4(x) = \tilde{f}(x) = 0$

$a.1 + b(x + 1) + c(2 - x^2) + d(1 + x + x^3) = 0$

$a + bx + b + 2c - cx^2 + d + dx + dx^3 = 0$

$(a + b + 2c + d) + (b + d)\,x - cx^2 + dx^3 = 0$

$$\begin{cases} a+b+2c+d=0 \\ b+d=0 \\ -c=0 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=c=d=0$$

Onde concluimos que A é L.I.Vamos agora verificar se $\mathfrak{F}$ (IR,IR) = G(A), isto é , se o conjunto A gera o espaço vetorial $\mathfrak{F}$ (IR,IR).

Sendo assim, tome a equação $af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 = f\ \ \forall f \in \mathfrak{F}$ (IR,IR) e mostre que existem $a,b,c,d \in IR$ tais que satisfazem a igualdade, onde f é dada por $f(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2 + d_1x^3$.

$(af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4)(x) = \tilde{f}(x)$

$(af_1)(x) + (bf_2)(x) + (cf_3)(x) + (df_4)(x) = f(x)$

$af_1(x) + bf_2(x) + cf_3(x) + df_4(x) = f(x)$

$a\,.\,1 + b(x + 1) + c(2 - x^2) + d(1 + x + x^3) =$

$a_1 + b_1x + c_1x^2 + d_1x^3$

$a + bx + b + 2c - cx^2 + d + dx + x + x^3) = a_1 + b_1x + c_1x^2 + d_1x^3$

$(a + b + 2c + d) + (b + d)x - cx^2 + dx^3 =$

$$\begin{cases} a+b+2c+d=a_1 \\ b+d=b_1 \\ -c=c_1 \\ d=d_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=a_1-b_1+2c_1 \\ b=b_1-d_1 \\ c=-c_1 \\ d=d_1 \end{cases}$$

Onde concluimos que $\mathfrak{F}$ (IR,IR) = G(A)

Exemplo 5: Sejam $M_{2\times 2}(IR)$ o espaço vetorial das matrizes reais de ordem 2 e A = $\{X,X^t\}$ um subconjunto de A onde $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Mostre que A é L.I.

Solução:

De fato, basta mostra que $aX + bX^t = \theta \Rightarrow a = b = 0$, sedo θ a matriz nula de ordem 2.

$$aX + bX^t = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 3a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ b & 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+b & a \\ b & 3a+3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a=0 \\ b=0 \\ 3a+3b=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=0$$

Sendo assim temos que o conjunto A é L.I.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Seja W um subconjunto de IR^3 definido por W = {(1,0,0),(0,0,–1),(1,1,0),(0,–2,0)}.
   a) Verifique se o subconjunto W é L.I ou L.D.
   b) Verifique se o subconjunto W gera o IR^3.
   c) Caso o subconjunto W seja L.D, encontre um subconjunto S de W tal que S seja L.I.
   d) Mostre ainda que o subconjunto S de W gera o IR^3.

2. Se $\mathfrak{F}(IR,IR) = \left\{ f : IR \to IR, f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{3} a_k x^k \right\}$ é o espaço das funções polinômiais reais de grau ≤ 3 e A = $\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$ um subconjunto de $\mathfrak{F}$ (IR,IR), onde cada f_i com i = 1,2,3,4é definida por $f_1(x) = -2$, $f_2(x) = -x + 2$, $f_3(x) = 1 + x + x^2$ e $f_4(x) = 2 + x - x^3$. Verifique se A é L.I ou L.D.

3. Sejam $M_{2 \times 2}$(IR) o espaço vetorial das matrizes reais de ordem 2 e A = $\{X,-X^t,Y,Y^t\}$ um subconjunto de A onde $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Verifique se A é L.I.

4. Mostre que o conjunto A = {(–1,1,2,0), (0,0,–2,1), (0,1,0,0),(0,0,1,0)} é L.I e gera o IR^4.

4.3 Teorema

Dado um espaço vetorial V e um subconjunto finito A de V, diremos que tal conjunto ou é L.I ou é L.D.

Uma forma elegaante de se verificar se tal conjunto A é L.I ou L.D, pode ser verificado fazendo uso do teorema o qual vamos enunciar abaixo.

Teorema: Seja V um espaço vetorial e A um subconjunto de V dada por A = $\{v_1,v_2,v_3,...,v_n\}$. Diremos que A é L.D se, e somente se, um desses vetores é a combinação linear dos demais vetores.

Demonstração:

Sendo A linearrmente dependente, temos que um dos coificientes da equação $\sum_{k=1}^{n} a_k v_k = \theta$ é diferente de zero. Suponha então que a_j seja tal coeficiente, desta forma teremos que $a_j v_j = \sum_{k=1}^{j-1} (-a_k v_k) + \sum_{r=j-1}^{n} (-a_r v_r)$ emplicando que

$$v_j = \sum_{k=1}^{j-1} (-\frac{a_k}{a_j} v_k) + \sum_{r=j-1}^{n} (-\frac{a_r}{a_j} v_r)$$

. Onde concluimos que v_j é uma combinação dos vetores v_1, $v_2,v_3,...,v_{j-1}$, $v_{j+1},...,v_n$.

Por outro lado , se tivermos $\{v_1,v_2,v_3,...,v_{j-1},v_{j+1},...,v_n\}$ tal que para algum j,

$$v_j = \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k v_k + \sum_{r=j-1}^{n} \lambda_r v_r$$

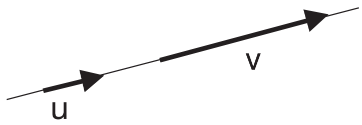
temos que

$$\sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k v_k + (-1)v_j \sum_{r=j-1}^{n} \lambda_r v_r = \theta$$

com $\lambda_1 = -1 \neq 0$ e, portanto, $\{v_1,v_2,v_3,...,v_{j-1},v_j,v_{j+1},...,v_n\}$ é L.D.

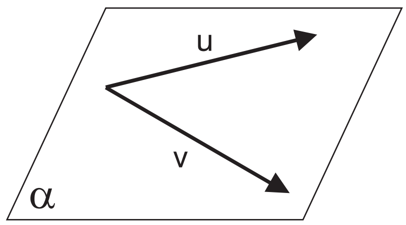
Uma proposição equivalente ao teorema é a seguinte:

Um conjunto de vetores A é L.I se, e somente se nenhum deles for a combinação linear dos outros.

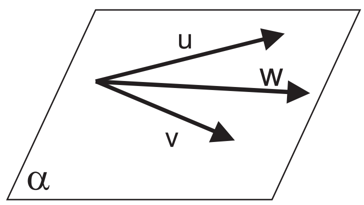


Exemplo 6: Se dois vetores u e v são colineares , então eles são L.D, isto é existe um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que u = λv.

Exemplo 7: Dois vetores u e v coplanares e nào colineares sào sempre L.I, pois não existe um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que u = λv.



Exemplo 8: Três vetores u, v e w coplanares e não colineares são sempre L.D, pois não existe escalares λ, $\beta \in \mathbb{R}$ tal que w = λu + βv.



Exemplo 9: Sejam $M_{2 \times 2}$(IR) o espaço vetorial das matrizes reais de ordem 2 e $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -12 & -9 \end{pmatrix} \right\}$ um subconjunto de $M_{2 \times 2}$(IR). Verifique se A é L.I ou L.D.

Solução:

Afirmo que o conjunto é L.D..Pois ao observar o conjunto A que tem apenas dois elementos, temos que um deles é o múltiplo escalar do outro. Ou seja , existe um número real, neste caso $\frac{1}{3}$ tal que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -12 & -9 \end{pmatrix}$

4.4 Propriedades de Dependência e da Independência linear

Seja V um espaço vetorial real (ou complexo)

1) Seja A = {u} um subconjunto de V, com u $\neq$ 0 então A é L.I.

   Sendo u $\neq$ 0, temos que a combinação linear au = θ emplica que a = 0. Logo o conjunto A é L.I.

2. Todo conjunto A $\subset$ V não vazio no qual $\theta \in$ A é L.D.

   Sendo A = $\{v_1,v_2,v_3,...,v_{j-1},\theta\ ,v_{j+1},...,v_n\}$ tal conjunto, temos que a equação $a_1v_1+a_2v_2+...+a_{j-i}v_{j-i}+a_j\theta+a_{j+i}v_{j+i}+...+a_nv_n = \theta$ é verdadeira para todo

   $a_j \neq 0$ e $a_1 = a_2 = ... = a_{j-i} = a_{j+i} = a_n = 0$.

   Onde concluimos que o conjunto A é L.D.

3. Seja B $\subset$ V um subconjunto não vazio,se B contém um subconjunto L.D então B é L.D.

   Seja B = $\{v_1,v_2,v_3,...,v_{j-1}, v_j, v_{j+1},...,v_n\}$ tal subconjunto de V e A = $\{v_1,v_2,v_3,...,v_{j-1}\}$ um subconjunto de B L.D.

   Sendo A = $\{v_1,v_2,v_3,...,v_{j-1}\}$ L.D temos que a equação $a_1v_1 + a_2v_2 +...+ a_kv_k + ... + a_{j-1}v_{j-1} = \theta$ se verifica para algum $a_k \neq 0$ com k = 1,2,...,j – 1. E para esse mesmo $a_k \neq 0$ teremos $a_1v_1 + a_kv_k +...+ a_{j-1}v_{j-1} + 0a_j0v_{j+1} + 0v_n = \theta$ onde concluimos que B é L.D.

4. Se um conjunto A $\subset$ V é L.I, então qualquer qualquer parte própria de A não vazia é também L.I.

   Fica como exercício para o leitor

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Seja W um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dafinido por W = {(1,0,0),(0,0,–1),(1,0,1),(0,–2,0),(1,–1,2)}.

   a) Verifique se o subconjunto W é L.I ou L.D.

   b) Verifique se o subconjunto W gera o $\mathbb{R}^3$.

   c) Caso o subconjunto W seja L.D, encontre um subconjunto S de S tal que S seja L.I.

   d) Mostre ainda que o subconjunto S de W gera o $\mathbb{R}^3$.

2. Mostre que o conjunto A = {u,v,w} $\subset \mathbb{R}^3$, sendo u = (1,1,0), v = (0,–1,1) e w = (2,0,–1) é L.I.

3. Mostrar que se u, v e w são L.I, então u + v, u + w e v – w são também L.I.

4. Determine o valor de k para que o conjunto

   $A = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2k & 0 \end{pmatrix}\right\}$ seja L.D.

5. Determine o valor de k para que o conjunto A = {(1,–2,k),(0,3k,–2),(3,4,–2)} seja L.I.

6. Seja $M_{2x3}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes 2 x 3, verificar de {u,v,w} é L.I ou L.D, sendo

   $u = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e

   $w = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

7. Considere dois vetores u e v do plano. Mostre que:

   a) Se ad – bc = 0 então u e v são L.D.

   b) Se ad – bc $\neq$ 0 então u e v são L.I.

TEMA 05

BASE E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

5.1 Definição

Sejam V um espaço vetorial real (ou complexo) e $\beta = \{v_1,v_2,...,v_n\}$ um subconjunto de V não vazio. Diremos que é uma base de V se:

i) β é L.I

ii) β gera V

Exemplo 1: Sejam $M_{2x2}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes reais de ordem 2 e $A = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ um subconjunto de $M_{2x2}(\mathbb{R})$. Mostre que o conjunto A é uma base para $M_{2x2}(\mathbb{R})$.

Solução:

Fazendo uso da resolução do exemplo **3 (4.1 Exemplos)**, afirmo que tal conjunto é uma base para o espaço vetorial $M_{2x2}(\mathbb{R})$.

Exemplo 2: Se

$\mathfrak{F}(IR,IR) = \left\{ f : IR \to IR, f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{3} a_k x^k \right\}$ é o espaço das funções polinomiais reais de grau ≤ 3 e $A = \{f_1,f_2,f_3,f_4\}$ um subconjunto de $\mathfrak{F}$ (IR,IR), onde cada f_i com i = 1,2,3,4 é definida por $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x + 1$, $f_3(x) = 2 - x^2$ e $f_4(x) = 1 + x + x^3$. Mostre que o conjunto A é uma base para $\mathfrak{F}$ (IR,IR).

Solução:

Fazendo uso da resolução do exemplo 4 (4.1 Exemplos), afirmo que tal conjunto é uma base para o espaço vetorial $\mathfrak{F}$ (IR,IR).

Exemplo 3: Mostre que o conjunto A = {(1,0,1),(0,0,1),(0,–1,0)} é uma base para o $\mathbb{R}^3$.

Solução:

Vamos verificar em primeiro lugar que A é L.I.

Sabemos que o subconjunto $A \subset IR^3$ é L.I se, e somente se, a equação a(1,0,1) + b(0,0,1) + c(0,–1,0) = (0,0,0) admite apenas a solução trivial, ou seja a = b = c = 0.

Desta forma temos: (a,0,a) + (0,0,b) + (0,–c,0) = (0,0,0) temos:

(a, –c, a + b) = (0,0,0)

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ -c = 0 \quad \Rightarrow a = b = c = 0 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

onde concluimos que A É L.I.

Vamos mostrar que o conjunto A GERA O IR^3. Isto é , todo vetor $(x,y,z) \in IR^3$ se escreve como combinação linear dos vetores (1,0,1), (0,0,1), (0,–1,0).

Faça

(x,y,z) = a(1,0,1) + b(0,0,1) + c(0,–1,0)

(x,y,z) = (a,0,a) + (0,0,b) + (0,–c,0)

(x,y,z) = (a,–c, a + b)

$$\begin{cases} a = x \\ -c = y \quad \Rightarrow a = x,\ c = -y,\ b = z - x \\ a + b = z \end{cases}$$

Sendo assim concluimos que o conjunto A gera IR^3. Onde concluimos que A é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Observasões:

1. Quando um espaço vetorial V admite uma base finita, dizemos que V é um espaço vetorial de dimensão finita.
2. Seja $\beta = \{v_1,v_2,...,v_n\}$ uma base para o espaço vetorial V. Pela observação (1) temos que V é um espaço vetorial de dimenção finita, e neste caso diremos que dimV = n, no qual é a quantidade de vetores existente na base neste espaço.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Verifique quais dos seguintes conjuntos de vetores formam base do $\mathbb{R}^2$:

a) {(1,1),(0,–1)}

b) {(1,–2),(3,–1)}

c) $\left\{(-4,1),(2,-\frac{1}{2})\right\}$

2. Mostre que o conjunto

$A = \left\{\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ é uma base do espaço vetorial $M_{2x2}(\mathbb{R})$.

3. Se $\mathfrak{F}$(IR,IR) é o espaço das funções polinomiais reais de grau ≤ 3 e A = $\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$ um subconjunto de $\mathfrak{F}$(IR,IR), onde cada f_i com i = 1,2,3,4 é definida por $f_1(x) = -1$, $f_2(x) = 2 - x$, $f_3(x) = 1 + x + x^2$ e $f_4(x) = x - x^3$. Mostre que o conjunto A é uma base para $\mathfrak{F}$(IR,IR).

4. Seja A = {(1,0,1),(0,1,1),(0,0,–1),(2,–1,2),(1,–3,1)} um subconjunto do $\mathbb{R}^3$. Determine uma base para o $\mathbb{R}^3$, com os elementos do conjunto A.

5. Complete o conjunto $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ de modo que o conjunto A, venha a ser uma base para o espaço vetorial $M_{2x2}(\mathbb{R})$.

5.3 Teoremas

5.3.1 Teorema: Sejam $v_1,v_2,...,v_n$ vetores não nulos que geram um espaço vetorial V. Então, entre esses vetores podemos extrair uma base de V.

Demonstração:

Se $v_1,v_2,...,v_n$ são linearmente independentes, então eles cumprem as condições para um base, logo o teorema estaria demonstrado. Agora se $v_1,v_2,...,v_n$ são linearmente dependentes, então existe uma combinação linear deles, com algum coeficientes não zero, dando o vetor nulo $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k = \theta$.

Seja, por exemplo $\lambda_n \neq 0$. Então podemos escrever $v_n = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k v_k$ ou seja v_n é a combinação linear dos vetores $v_1,v_2,...,v_{n-1}$ e, portanto geram V, ou seja $G(\{v_1,v_2,...,v_{n-1}\}) = V$. Se $v_1,v_2,...,v_{n-1}$ são linearmente independentes, então eles cumprem as condições para um base, logo o teorema estaria demonstrado. Agora se $v_1,v_2,...,v_{n-1}$ são linearmente dependentes, então existe uma combinação linear deles, com algum coeficientes não zero, dando o vetor nulo $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k v_k = \theta$.

Seja, por exemplo $\lambda_{n-1} \neq 0$. Então podemos escrever $v_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-2} \lambda_k v_k$ ou seja v_{n-1} é a combinação linear dos vetores $v_1,v_2,...,v_{n-2}$ e, portanto geram V, ou seja $G\{(v_1,v_2,...,v_{n-2})\} = V$. Se $v_1,v_2,...,v_{n-2}$ são linearmente independentes, então eles cumprem as condições para um base, logo o teorema estaria demonstrado. Agora se $v_1,v_2,...,v_{n-2}$ são linearmente dependentes, então existe uma combinação linear deles, com algum coeficientes não zero, dando o vetor nulo $\sum_{k=1}^{n-2} \lambda_k v_k = \theta$.

Seguindo desta forma, após uma quantidade finitas de estágios, chegaremos a um subconjunto de $\{v_1,v_2,...,v_n\}$, formado por r(r ≤ n) vetores L.I $v_{i1},v_{i2},...,v_{ir}$ que ainda geram V, ou seja, formaremos uma base.

5.3.2 Teorema: Seja um espaço vetorial V gerado por um conjunto finito de vetores $v_1,v_2,...,v_n$. Então, qualquer conjunto com mais de n vetores é necessariamente L.D (e, portanto, qualquer conjunto L.I).

Demonstração:

Como $G\{(v_1,v_2,...,v_n)\} = V$, pelo toreoma anterior, podemos extrair uma base para V de $v_1,v_2,...,v_n$. Seja $\{v_1,v_2,...,v_r\}$ com r ≤ n, esta base . Consideremos agora $w_1,w_2,...,w_m$, m vetores de V, com m > n. Então existem, constantes a_{ij}, tais que $w_i = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} v_k$ (I) para cada i = 1,2,...,m. Consideremos agora uma combinação dos vetores $w_1,w_2,...,w_m$ dando zero $\sum_{j=1}^{m} x_j w_j = \theta$ (II).

Substituindo as relações (I) em (II) e cocoletando os termos, obtemos

$$\left(\sum_{k_1=1}^{m} a_{(k_1)1} x_{k_1}\right) v_1 + \left(\sum_{k_2=1}^{m} a_{(k_2)2} x_{k_2}\right) v_2 + \ldots + \left(\sum_{k_r=1}^{m} a_{(k_r)r} x_{k_r}\right) v_r = \theta$$

Como $v_1,v_2,...,v_r$ são L.I, então

$$\begin{cases} \sum_{k_1=1}^{m} a_{(k_1)1} x_{k_1}) = 0 \\ \sum_{k_2=1}^{m} a_{(k_2)2} x_{k_2} = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{k_r=1}^{m} a_{(k_r)r} x_{k_r}) v_r = 0 \end{cases}$$

Temos então um sistema linear homogêneo com r equações e m incógnitas $x_1,x_2,...,x_m$ e, como r ≤ n < m, ele admite uma solução não trivial. Portanto $w_1,w_2,...,w_m$ são L.D.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Se dimV = n, qualquer conjunto de n vetores L.I formará uma base de V.

2. Dada uma base $\beta = \{v_1,v_2,...,v_n\}$ de V, cada vetor de V é escrito de modo único como combinação linear dos vetores $v_1,v_2,...,v_n$.

3. Se U e W são subespaços vetoriais do espaço vetorial V que tem dimisão dimensão finita, então $\dim U \le \dim V$ e $\dim W \le \dim V$. Além disso $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

4. Qualquer conjunto de vetores L.I de um espaço vetorial V de dimensão finita pode ser completado de modo a formar uma base de V.

5.5 Coordenadas de vetor

5.5.1 Definição

Sejam $\beta = \{v_1,v_2,...,v_n\}$ base de V e $v\in V$ onde $v = \sum_{k=1}^{n} a_k v_k$. Chamamos estes números $a_1,a_2,...,a_n$ de coeficientes de v em relação à base β e denotaremos por

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_n \end{bmatrix}$$

Exemplo 4: Determine os coeficientes do vetor $v = (2,-1,3) \in \mathbb{R}^3$ em relação a base $\beta = \{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,-2)\}$.

Solução:

Faça

$(2,-1,3) = a(1,1,0) + b(0,1,1) + c(0,0,-2)$

$(2,-1,3) = (a,a,0) + (0,b,b) + (0,0,-c)$

$(2,-1,3) = (a, a + b, b - 2c)$

$$\begin{cases} a = 2 \\ a + b = -1 \Rightarrow a = 2, b = -3, c = -3 \\ b - 2c = 2 \end{cases}$$

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 5: Determine os coeficientes do vetor $v = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{22}(\mathbb{R})$ em relação a base

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Solução:

Tome

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 2c \\ 0 & -c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d & -d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & 2c \\ d & -a-c-d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 2c = -2 \\ d = -1 \\ -a - c - d = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2,\ b = 0,\ c = -1,\ d = -1$$

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Determine os coeficientes do vetor $v = (1,-1,2) \in \mathbb{R}^3$ em relação as bases:

   a) $\alpha = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

   b) $\beta = \{(-1,2,0),(1,1,-1),(0,-2,1)\}$

   c) $\psi = \{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,-1)\}$

2. Determine os coeficientes do vetor $h \in \mathfrak{F}$ (IR,IR), definido por $h(x) = 2 + x - x^2 + 3x^3$ em relação as bases:

   a) $\lambda = \{f_1,f_2,f_3,f_4\}$ onde cada f_i com $i = 1,2,3,4$ é definida por $f_1(x) = -2$, $f_2(x) = -x + 2$, $f_3(x) = 1 + x + x^2$ e $f_4(x) = 2 + x - x^3$.

   b) $\beta = \{f_1,f_2,f_3,f_4\}$ onde cada f_i com $i = 1,2,3,4$ é definida por $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$ e $f_4(x) = x^3$.

   c) $\psi = \{f_1,f_2,f_3,f_4\}$ onde cada f_i com $i = 1,2,3,4$ é definida por $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x + 1$, $f_3(x) = 1 + x + x^2$ e $f_4(x) = 1 + x + x^3$.

3. Sejam $\alpha = \{(1,0,-1),(0,2,1),(0,0,-1)\}$ e $\beta = \left\{(-\frac{1}{2},2,-1),(0,1,2),(3,-2,\frac{3}{2})\right\}$ bases do $\mathbb{R}^3$.

   Determine $[v]_\beta$, sendo $[v]_\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

4. Determine os coeficientes do vetor $v \in M_{2x2}(\mathbb{R})$ em relação a base $\beta = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$. Sendo

   que $[v]_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ onde

   $\alpha = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

5. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{M}_{3x1}(\mathbb{R})$ uma função definida por

   $T(a,b,c) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ a+b+c \end{bmatrix}$.

   a) Sendo $\{(-1,0,0),(0,2,0),(0,0,1)\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$, determine $[(3,4,-2)]_\beta$.

   b) Verifique se $\alpha = \{T(1,0,0),T(0,1,0),T(0,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{M}_{3x1}(\mathbb{R})$.

   c) Sendo $\alpha = \{T(1,0,0),T(0,1,0),T(0,0,1)\}$ uma base de $\mathbb{M}_{3x1}(\mathbb{R})$, determine $[T(-1,2,3)]_\alpha$.

UNIDADE III

Transformações Lineares e Matriz mudança de base

TEMA 06

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

6.1 Introdução

Vamos estudar um tipo especial de aplicação (função), onde o domínio e o contradomínio são espaços vetoriais sobre o mesmo corpo (real ou complexo). Tais aplicações satisfazendo determinadas condições, são determinadas, transformações lineares.

Tais funções descrevem um tipo de dependência entre variáveis. Por exemplo:

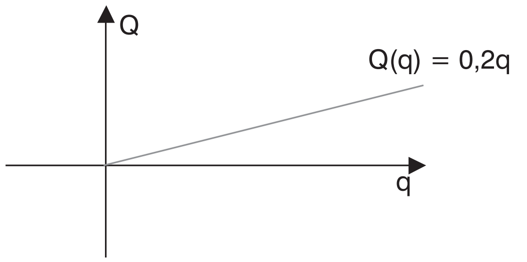
Se de um kilograma de soja, são extraídos 0,2 litros de de óleo, de uma produção de qkg de soja seriam extraídos 0,2q litros de óleo. A aplicação matemática que pode descrever tal problema é o seguinte:

$Q(q) = 0{,}2q$

onde Q simboliza a quandidade em litros de óleo e q simboliza kg a quandidade de soja.Estes dodos podem ser representado graficamente por:

$Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$q \mapsto Q(q) = 0{,}2q$



Vamos estender a aplicação Q para todo q real, ou seja:

Vamos analizar neste exemplo simples duas propriedades importante:

i) Para calcular a produção de óleo fornecida por $(q_1 + q_2)$kg de soja, podemos tanto multiplicar $q_1 + q_2$ pelo fator de rendimento 0,2, como calcular as produções de óleo de cada uma das quantidades q_1 e q_2 e somá–los, isto é,

$Q(q_1 + q_2) = 0{,}2(q_1 + q_2) = 0{,}2q_1 + 0{,}2q_2 = Q(q_1) + Q(q_2)$

ii) Se a quantidade de soja for multiplicada por um fator β (digamos real), a prdução de óleo será multiplicado por este mesmo fator, isto é,

$Q(\beta q) = 0{,}2(\beta q) = \beta(0{,}2q) = \beta Q(q)$.

Essas duas propriedades, aqui apresentadas servirão para caracterizar as transformações lineares.

6.2 Transformações lineares

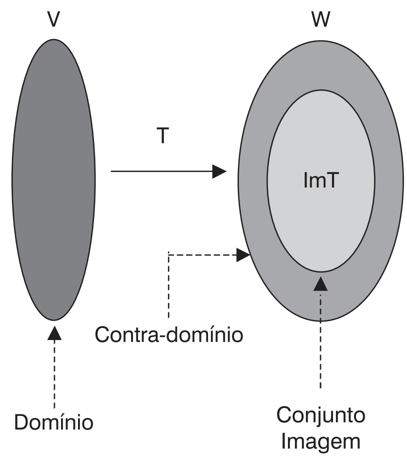
6.2.1 Definição de Função

Sejam V e W espaços vetoriais reais(ou compleços) Diremos que $T : V \to W$ é uma aplicação entre os espaços vetoriais V e W, se para todo vetor $v \in V$ podemos associar de modo único um vetor $w \in W$.

Notação:

$Q : V \to W$

$v \mapsto T(v)$



.2.2 Definição de Transformação Linear

Sejam V e W espaços vetoriais reais(ou compleços). Diremos que a aplicação $T : V \to W$ é uma transformação linear entre os espaços vetoriais V e W, se as seguintes condições abaixo são satisfeitas:

i) $T(u + v) = T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in V$

ii) $T(\beta u) = \beta T(u) \quad \forall u \in V$ e $\forall \beta \in \mathbb{R}$

Exemplo 1: Seja $T : V \to \mathbb{R}$ é uma aplicação do espaço vetorial V em $\mathbb{R}$, definida por $T(v) = 0$ $\forall v \in V$. Verifique que a plicação é linear.

Solução:

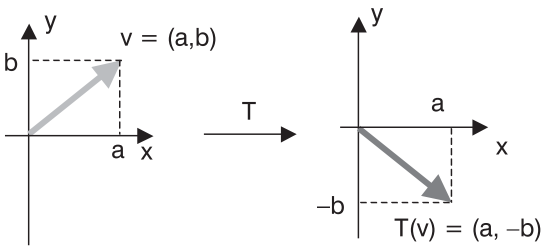
De fato, basta verificar que T satisfaz as condições (i) e (ii) da definição 6.2.2

i) Para todo $u, v \in V$ temos que $T(u) = 0$ e $T(v) = 0$, logo $T(u + v) = 0 = 0 + 0 = T(u) + T(v)$.

ii) Para todo $u \in V$ temos que $T(u) = 0$, logo $T(\beta u) = 0 = \beta 0 = \beta T(u)$ para todo $\beta \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2: Mostre que a aplicação T : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por T(x,y) = (x,–y) é uma transformação linear.

Solução: Basta verificar, se T satisfaz as condições (i) e (ii) da definição 6.2.2.



Para todo u = (x,y) e v = (a,b)$\in \mathbb{R}^2$ e para todo β real, temos que u + v = (x + a, y + b) e βu = (βx,βy).

Logo:

i) T(u+v) = T(x + a, y + b) = (x + a, –(y + b))

T(u+v) = (x + a, –y – b) = (x, –y) + (a – b)

T(u+v) = T(x, y) + T(a, b) = T(u) + T(v)

Satisfazendo assim a condição (i)

ii) T(βu) = T(βx, βy) = (βx, –(βy)) = β(x, – y)

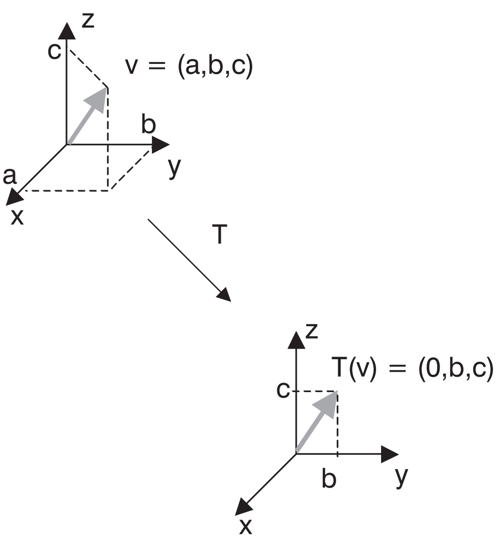
T(βu) = T(βx, βy) = βT(x,y) = βT(u)

Satisfazendo assim a condição (ii)

Exemplo 3: Mostre que a aplicação T : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por T(x,y,z) = (0,y,z) é uma transformação linear.

Solução:

Geometricamente temos:



Vamos verificar, se T satisfaz às condições (i) e (ii) da definição 6.2.2.

Sejam u = (x,y,z) e v = (a,b,c) vetores quaisquer do $\mathbb{R}^3$ e β um valor real.

i) T(u + v) = T(x + a, y + b, z + c)

T(u + v) = (0, y + z, z + c)
T(u + v) = (0,y,z) + (0,b,c)
T(u + v) = T(u) = T(v)

ii) T(βu) = T(βx,βy,βz)

T(βu) = (0,βy,βz)

T(βu) = (β0,βy,βz)

T(βu) = β(0,y,z)

T(βu) = βT(u)

Sendo satisfeitas as condições as condições (i) e (ii) da definição 6.2.2. Temos que T é linear.

Exemplo 4: Mostre que a aplicação T : $M_{2x2}(\mathbb{R}) \to M_{2x2}(\mathbb{R})$ definida por T(A) = –A é uma transformação linear.

Solução:

i) T(A + B) = –(A + B) = –A – A = T(A) + T(B)

ii) T(βA) = –(βA) = β(–A) = βT(A)

$\forall$A,B $\in M_{2x2}(\mathbb{R})$ e $\forall\beta \in \mathbb{R}$

Sendo satisfeitas as condições as condições (i) e (ii) da definição 6.2.2. Temos que T é linear.

Exemplo 5: Mostre que a aplicação T : $M_{2x2}(\mathbb{R}) \to M_{2x2}(\mathbb{R})$ definida por T(A) = A^t é uma transformação linear.

Solução:

i) T(A + B) = $(A + B)^t = A^t + B^t$ = T(A) + T(B)

ii) T(βA) = $(\beta A)^t = \beta A^t$ = βT(A)

$\forall$A,B $\in M_{2x2}(\mathbb{R})$ e $\forall\beta \in \mathbb{R}$

Sendo satisfeitas as condições as condições (i) e (ii) da definição 6.2.2. Temos que T é linear.

Exemplo 6: Mostre que a aplicação T : $\mathbb{R}^4 \to M_{2x2}(\mathbb{R})$ definida por T(x,y,z,t) $= \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ é uma transformação linear.

Solução:

Sejam u(x,y,z,t) e v = (a,b,c,d) vetores quaisquer do $\mathbb{R}^4$ e β um valor real.

i) $T(u + v) = T(x + a, y + b, z + c, t + d)$

$$T(u+v)=\begin{bmatrix} x+a & y+b \\ z+c & t+d \end{bmatrix}$$

$$T(u+v)=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$T(u + v) = T(u) + T(v)$

ii) $T(\beta u) = T(\beta x,\beta y,\beta z,\beta t)$

$$T(\beta u)=\begin{bmatrix} bx & by \\ bz & bt \end{bmatrix}$$

$$T(\beta u)=\beta\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

$T(\beta u) = \beta T(x,y,z,t)$

$T(\beta u) = \beta T(u)$

Sendo satisfeitas as condições as condições (ii) e (ii) da definição 6.2.2. Temos que T é linear.

Observação: Se uma das duas condições da definição 6.2.2. não for satisfeita diremos que a aplicação $T : V \to W$ não é a uma transformação linear.

Exemplo 7: Verifique se a aplicação $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = |x|$ é uma transformação linear.

Solução:

i) Vamos verificar se $\forall x,y \in \mathbb{R}$ tem-se $T(x + y = T(x) + T(y)$. Sendo assim:

$T(x + y) = |x + y|$

$T(x) + T(y) = |x|+|y|$

$T(x + y) = |x + y| \neq |x|+|y| = T(x) + T(y)$

Basta tomar $x = 2$ e $y = -2$, logo teremos:

$0 = |2 + (-2)| \neq |2|+|-2|4$

6.3 Soma de duas ou mais transformação lineares

Sejam T e S duas transformações lineares de V em W. Definimos a soma de T e S, como sendo:

$T + S : V \to W$ onde $(T + S)(x) = T(x) + S(x)$ $\forall x \in V$

Sendo assim, vamos mostrar que a soma de transformações lineares ainda é uma trnasformação linear.

Para isto temos que mostrarn que T + S satisfaz as condições (i) e (ii) da definição 6.2.2. Ou seja, temos que mostrar que ,para todo $x,y \in V$ e para todo $\beta \in \mathbb{R}$ tem-se:

i) $(T + S)(x + y) = (T + S)(x) + (T + S)(y)$

ii) $(T + S)(\beta x) = \beta(T + S)(x)$

Demonstração:

i) $(T + S)(x + y) = T(x + y) + S(x + y)$

$(T + S)(x + y) = T(x) + T(y) + S(x) + S(y)$

$(T + S)(x + y) = T(x) + S(x) + T(y) + S(y)$

$(T + S)(x + y) = (T + S)(x) + (T + S)(y)$

Satisfazendo a condição (i) da definição 6.2.2

ii) $(T + S)(\beta x) = T(\beta x) + S(\beta x)$

$(T + S)(\beta x) = \beta T(x) + \beta S(x)$

$(T + S)(\beta x) = \beta(T(x) + \beta S(x)$

$(T + S)(\beta x) = \beta(T(x) + S(x))$

$(T + S)(\beta x) = \beta(T + S(x))$

Satisfazendo a condiçào (ii) da definição 6.2.2

Onde concluimos que T + S é uma transformação linear.

Exemplo 8: Sejam $T,S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transformações lineares definidas por $T(x,y) = (x + y, x - y)$ e $S(x,y) = (y - x, x + y)$. Determine a soma de T com S.

Solução:

Sabemos que a soma de vtransformação lineares é linear e que a soma é dada por:

$(T + S)(u) = T(u) + S(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}^2$

$(T + S)(x,y) = T(x,y) + S(x,y)$

$(T + S)(x,y) = (x + y, x - y) + (y - x, x + y)$

$(T + S)(x,y) = ((x + y)+(y - x),(x - y) + (x + y))$

$(T + S)(x,y) = (2y,2x)$

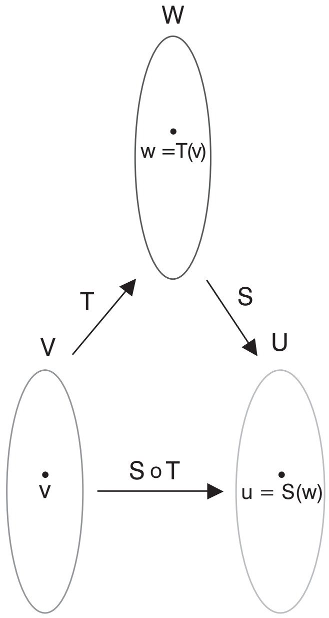
π EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Produto de um escalar por uma transformação linear) Sejam T uma transformação linear de V em W e $\beta \in \mathbb{R}$. Definimos o produto de β por T, como sendo:

   $\beta T : V \to W$ onde $(\beta T)(x) = \beta T(x) \quad \forall x \in V$

   Mostre que a aplicação $\beta T : V \to W$ definida acima é uma transformação linear.

2. **(Composição de transformaões lineares)** Sejam $T : V \to W$ e $S : W \to U$ transformações lineares.Definimos a composição de T com S como sendo $S \circ T : V \to U$ dada por $S \circ T(u) = S(T(u))$.



$u = S(w) = S(T(v)) = (S \circ T)(v)$

Mostre que a aplicação $S \circ T : V \to U$ acima é uma transformação linear.

3. Sejam $T, S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplicações lineares, definidas por $T(x,y,z) = (x,y,x + y + z)$ e $S(x,y,z) = (x,y - z,z)$. Determine:

a) $T + S$

b) $5T$

c) $T \circ S$

d) $S \circ T$

6.5 Tipos Especiais de Transformações Lineares

6.5.1 Transformação linear nula

A transformação linear nula entre os espaços vetoriais V e W, é a aplicação

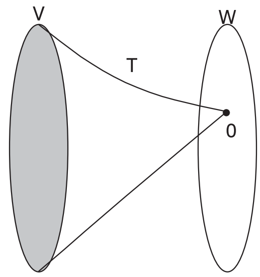
$Q : V \to W$

$u \mapsto T(u) = 0.$

De fato:

i) $T(u + v) = 0 = 0 + 0 = T(u) + T(v)$

ii) $T(\beta u) = 0 = \beta.0 = \beta T(u)$

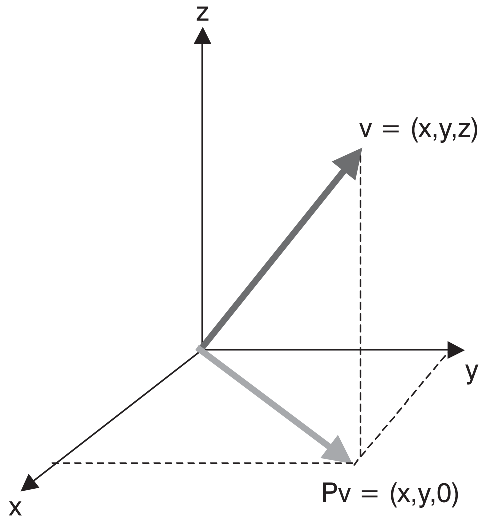


6.5.2 A projeção ortogonal

A projeção ortogonal do $\mathbb{R}^3$ sobre o plano xy, ou seja,

$P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $P(x,y,z) = (x,y.0)$ é uma transformação linear.

Vejamos a figura abaixo



De fato temos que P é uma transformaçãao linear, pois para todo $u = (x,y,z)$ e $v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ e para todo $\beta \in \mathbb{R}$ são satisfeitas as condições (i) e (ii) da definição 6.2.2 , isto é:

i) $P(u + v) = P((x,y,z) + (a,b,c))$

$P(u + v) = P(x + a, y + b, z + c)$

$P(u + v) = (x + a, y + b, 0) = (x,y,0) + (a,b,0)$

$P(u + v) = P(u) + P(v)$

ii) $P(\beta u) = P(\beta(x,y,z)) = P(\beta x,\beta y,\beta z)$

$P(\beta u) = (\beta x,\beta y,0) = (\beta x,\beta y,\beta 0)$

$P(\beta u) = \beta(x,y,0) = \beta P(u)$

6.6 Propriedades da transformação Linear

6.6.1 Propriedade 1

Sendo $T : V \to W$ uma transformação linear , então $T(0_V) = O_W$, ou seja, a transformação linear leva o vetor nulo de V no vetor nulo de W.

Demonstração:

Faça $\beta = 0$ na condição (ii) da definição 6.2.2, logo teremos que:

$T(0,u) = 0.T(u) \rightarrow T(0_V) = 0_W$

Observações:

1. A propriedade nós diz que se uma determinada aplicação entre espaços vetoriais não leva o vetor nulo no vetor nulo, então ela não é uma transformação linear.
2. A recíproca dessa propriedade não é verdadeira, isto é, se uma determinada aplicação entre espaços vetoriais leva o vetor nulo no vetor nulo não emplica que a mesma seja uma transformação linear.

Contra-exemplo para a observação 2.

Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação definida por $T(x,y,z) = (x^2,y,z)$. Observe que $T(0,0,0) = (0^2,0,0) = (0,0,0)$, ou seja , leva o vetor nulo no vetor nulo.

Porém

$T(u + v) = T((x,y,z) + (a,b,c)) = T(x + a, y + b, z + c)$

$T(u + v) = ((x + a)^2, y + b, z + c)$

$T(u + v) = (x^2 + 2xa + a^2, y + b, z + c)$

e

$T(u) + T(v) = T(x,y,z) + T(a,b,c)$

$T(u) + T(v) = (x^2,y,z) + T(a^2,b,c)$

$T(u) + T(v) = (x^2 + a^2, y + b, z + c)$

Onde concluimos que $T(u + v) \neq T(u) + T(v)$, logo a aplicação não é uma transformação linear.

6.6.2 Propriedade 2

Sendo $T : V \rightarrow W$ for uma transformação linear, então $T(au + bv) = aT(u) + bT(v)$, $\forall u,v \in V$ e $\forall a,b \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Sendo T uma transformação linear , temos que as condições (i) e (ii) da definição 6.2.2 são satisfeitas, isto é:

i) $T(u + v) = T(u) + T(v)$

ii) $T(\beta u) = \beta T(u)$

$\forall u, v \in V$ e $\forall \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall \beta \in \mathbb{R}$

sendo assim temos:

$T(au + bv) = T(au) + T(bv) = aT(u) + bT(v)$

Um fato muito importante, que decorre dessa propriedade: Uma transformação linear fica completamente determinada se conhecemos as imagens dos vetores de uma base do espaço vetorial domínio.

Assim, se $T : V \rightarrow W$ é uma transformação linear, então nós só precisamos saber como T atua nos vetores de uma base de V para determinarmos a imagem de qualquer outro vetor de V. Para ver esse fato tomemos,

$\beta = \{v_1,v_2,...,v_n\}$, uma base de V e qualquer outro vetor $v \in V$. Como β é uma base de V, existem únicos escalares $a_1,a_2,...,a_n$ tais que:

$v = \sum_{k=1}^{n} a_k v_k$, então $T(v) = T(\sum_{k=1}^{n} a_k u_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k T(u_k)$

Exemplo 9: Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear e $\beta = \{(1,1),(0,1)\}$ uma base do $\mathbb{R}^2$. Se $T(1,1) = (1,0)$ e $T(0,1) = (0,1)$, determine $T(x,y)$.

Soluçãao:

Vamos expressar

$(x,y) = a(1,1) + b(0,1) = (a, a + b)$

$$\begin{cases} a = x \\ a + b = y \end{cases} \Rightarrow a = x, b = y - x$$

$(x,y) = x(1,1) + (y - x)(0,1)$

$T(x,y) = T(x(1,1) + (y - x)(0,1))$

$T(x,y) = xT(1,1) + (y - x)T(0,1)$

$T(x,y) = x(1,0) + (y - x)(0,1)$

$T(x,y) = (x,0) + (0, y - x)$

$T(x,y) = (x, y - x)$

Exemplo 10: Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear e $\beta = \{v_1,v_2,v_3\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$, sendo $v_1 = (0,1,0)$, $v_2 = (1,0,1)$ e $v_3 = (1,1,0)$. Determine $T(5,3,-2)$, sabendo que $T(v_1) = (1,-3)$, $T(v_2) = (3,1)$ e $T(v_3) = (0,2)$.

Solução:

Expressamos o vetor $v = (5,3,-2)$ como combinação linear dos vetores da base:

$(5,3,-2) = a(0,1,0) + b(1,01) + c(1,1,0)$

$$\begin{cases} b + c = 5 \\ a + c = 3 \Rightarrow a = -4, b = -2, c = 7 \\ b = -2 \end{cases}$$

Então:

$(5,3,-2) = -4(0,1,0) - 2(1,01) + 7(1,1,0)$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nos exercícios de 1 a 10 são dadas as aplicações. Verifique quais são transformações lineares.

1. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $T(x) = (x,x,x + 3)$
2. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = (x – y, x + y, x^2)$
3. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x – y, x + y, \text{cox } z)$
4. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x – y, x + y, |z|)$
5. $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y,z,t) = (x – y, z + t)$
6. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $T(x,y,z) = |x + y + z|$
7. $L : M_{2x2}(\mathbb{R}) \to M_{2x2}(\mathbb{R})$, $L(A) = A^t$
8. $L : M_{2x2}(\mathbb{R}) \to M_{2x2}(\mathbb{R})$, $L_X(A) = A.X + X.A$ onde X é uma matriz fixa.
9. $T : M_{2x2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $T(A) = \det A$
10. $I : P_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, I(f) = \int_a^b f(x)dx$, $P_n(\mathbb{R})$ é o espaço vetorial dos polinômis de grau $\leq n$.
11. Consideremos o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x,y,z) = (x + 2y + 2z, x + 2y – z, –x + y + 4z)$.
    a) Determine o vetor $u \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(u) = (–1,8,–11)$.
    b) Determine, caso exista o vetor $u \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(u) = u$.
12. Um operador linear $T,S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é tal que: $T(1,1,0) = (0,0,0)$, $T(0,1,0) = (0,–2,0)$ e $T(0,–1,1) = (2,0,–1)$.
    Sendo assim determine:
    a) $T(x,y,z)$
    b) Os vetores do $\mathbb{R}^3$ tais que $T(x,y,z) = (0,0,0)$
13. Seja $L : M_{2x2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ uma transformação linear, definida por $T(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}) = (x - y, y - z, z + t, 0)$.
    Determine o conjunto
    $$\left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid T(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}) = (0,0,0,0) \right\}$$
14. Seja $T : M_{2x2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ uma transformação linear, definida por $T(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}) = (x + y, y - z, z + t, t)$. Se $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \right\}$ é uma base do espaço vetorial $M_{2x2}(\mathbb{R})$, então $\beta = \left\{ T(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}), T(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}), T(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}), T(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}), \right\}$ é uma base para $\mathbb{R}^4$.
15. Sejam $T,S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares. Determine:
    a) A aplicação T tal que $T(1,1,0) = (0,1,0)$, $T(0,1,–1) = (0,0,2)$ e $T(0,0,1) = (0,0,0)$
    b) A aplicação S tal que $S(1,1,0) = (0,1,–1)$, $S(0,1,–1) = (1,0,1)$ e $S(0,0,1) = (0,0,1)$
    c) A aplicação h, tal que $h = S \circ T$

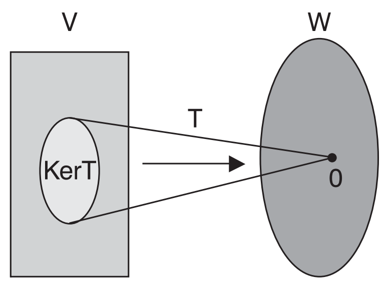
6.8 Núcleo de uma transformação linear

6.8.1 Definição

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear, o conjunto de todos os vetores $v \in V$ tal que $T(v) = 0$ é chamado de **núcleo** , isto é,

$\{v \in V | T(v) = 0\}$

Vamos denotar tal conjunto por KerT ou N(T), sendo assim temos $\text{KerT} = \{v \in V | T(v) = 0\}$ ou $N(T) = \{v \in V | T(v) = 0\}$.



Observações Importantes:

1. O núcleo de uma transformação linear $T : V \to W$,

dado por KerT = {v$\in$V|T(v) = 0} é diferente do conjunto vazio, pois T(0) = 0. Onde concluimos que o vetor nulo de V pertence ao núcleo da aplicação.

2. O núcleo de uma transformação linear $T: V \to W$, dado por KerT = {v$\in$V|T(v) = 0} é um subespaço vetorial de V.

   De fato, para todo u e v pertencente ao conjunto KerT e para todo $\beta \in \mathbb{R}$ tem-se:

   i) T(u + v) = T(u) + T(v) = 0 + 0 = 0, emplicando que u + v$\in$KerT.

   ii) T(βu) = βT(u) = β . 0 = 0, emplicando que βu$\in$KerT.

3. Sendo KerT um subespaço vetorial, temos que dimKerT $\leq$ dimV.

Exemplo 11: Determine o núcleo da transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por T(x,y) = (x + y, x – y).

Solução:

Neste caso temos que o núcleo da aplicação é dado por KerT = {(x,y)$\in \mathbb{R}^2$ |T(x,y) = (0,0)}. Sendo assim temos:

T(x,y) = (x + y, x – y) = (0,0)

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$$

Onde concluimos que o núcleo é dado por KerT = {(0,0)}

Exemplo 12: Determine o núcleo da transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por T(x,y) = (x – y, 0).

Solução:

Neste caso temos que o núcleo da aplicação é dado por KerT = {(x,y)$\in \mathbb{R}^2$|T(x,y) = (0,0)}.

Sendo assim, temos que:

T(x,y) = (x–y,0) = (0,0), emplicando que x – y = 0. Logo x = y, onde concluimos que o núcleo é dado por KerT = {(x,x,x); x$\in \mathbb{R}$.

Exemplo 13: Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma transformação linear definida por T(x,y,z) = x + y + z.

a) Determine N(T)

b) Determine A$\subset \mathbb{R}^3$, tal que G(A) = N(T)

Solução:

a) Neste caso temos que o núcleo da aplicação é dado por KerT = {(x,y)$\in \mathbb{R}^3$ |T(x,y,z) = 0}. Sendo assim temos:

   T(x,y,z) = x + y + z = 0, emplicando x + y + z = 0. Logo z = –x – y, onde concluimos que o núcleo é dado por KerT = {(x,y, – x – y); x$\in \mathbb{R}$}.

b) Dado um vetor qualquer u$\in$KerT, temos que u(x,y, –x – y) = (x,0,–x) + (0,y,–y)

   u = x(1,0, –1) + y(0,1,–1)

   Onde concluimos que o conjunto A é dado por A = {(1,0,–1),(0,1,–1)}.

Exemplo 14: Seja $T: M_{2x2}(\mathbb{R}) \to M_{2x2}(\mathbb{R})$ uma transformação linear definida por $T(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x-z & y+z \\ t & t \end{bmatrix}$.

a) Determine o KerT.

b) Determine uma base para o núcleo.

   Solução:

a) Neste caso temos que o núcleo da aplicação é dado por

   $$\ker T = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,|\, T(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

   Sendo assim, temos:

   $$T(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x-z & y+z \\ t & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   $$\begin{cases} x-z=0 \\ y+z=0 \Rightarrow x=z, \ y=-z \ \text{ e } \ t=0 \\ t=0 \end{cases}$$

   Onde concluimos que o núcleo, do tipo:

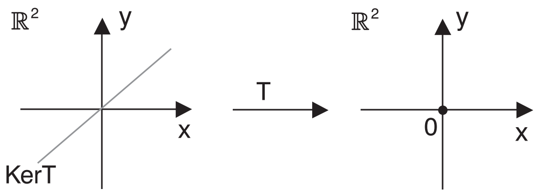
   $$\ker T = \left\{ \begin{pmatrix} z & -z \\ z & 0 \end{pmatrix}; z \in \mathbb{R} \right\}$$

b) Vamos determinar uma base para o núcleo, já que o núcleo é um subespaço vetorial.Sendo assim, tome um elemento $u = \begin{pmatrix} x & -x \\ x & 0 \end{pmatrix}$ qualquer do núcleo KerT, logo teremos:

   $$u = \begin{pmatrix} x & -x \\ x & 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Onde concluimos que o núcleo é gerado apenas por $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. E como um só vetor não nulo é sempre L.I, temos que $\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ é uma base para o KerT.

Exemplo 15: Seja T : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear definida por T(x,y) = (x – y,0) e KerT o núcleo da T.L dado por KerT = {(x,x); x∈ $\mathbb{R}$ }.



Observe que todo vetor do tipo (x,x)∈KerT e portanto T(x,x) = (x – x,0) = (0,0).

Exemplo 16:

A transformação linear nula entre os espaços vetoriais V e W, é a aplicação

T : V → W

u ↦ T(u) = 0 ∀u∈V

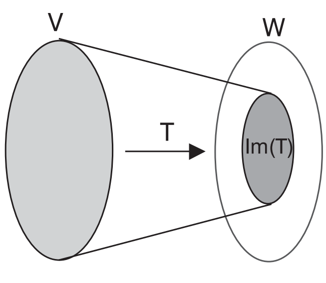
Onde concluimos que o núcleo da aplicação KerT = V.

6.9 Imagem de uma transformação linear

6.9.1 Definição

Seja T : V → W uma transformação linear. A coleção de todos os vetores de W tais que esses vetores estão relacionados com algum vetor de V é chamado da imagem da aplicação T, ou seja,

Im(T) = {w∈W|T(v) = w para algum v∈V



Observações Importantes:

1. O conjunto imagem de uma transformação linear T : V → W, dado por Im(T) = {w∈W|T(v) = w para algum v∈V} é diferente do conjunto vazio, pois T(0) = 0. Onde concluimos que o vetor nulo W peretence ao conjunto imagem de T.
2. O conjunto imagem de uma transformação linear T : V → W, dado por Im(T) = {w∈W|T(v) = w para algum v∈V} é um subespaço vetorial de W.

   De fato, para todo a,b∈W existem u,v∈V tais que T(u) = a e T(v) = b.

   i) a + b = T(u) + T(v), como T é uma transformação linear temos que :

      a + b = T(u) + T(v) = T(u + v)

      Logo para todo a + ,b∈W, existe pelo menos u + v∈V tal que T(u + v) = a + b. Onde concluimos que a + b∈Im(T).

   ii) Temos a = T(u) para todo a∈W. .Desta forma ∀β∈ $\mathbb{R}$ e ∀a∈W tem-se:

      βa = βT(u) = T(βu)

      Logo para todo βa∈W,existe pelo menos βu∈V tal que T(βu) = βa. Onde concluimos que βa∈Im(T).
3. Sendo Im(T) um subespaço vetorial, temos que dim(T) ≤ dimV.

Exemplo 17: Seja a transformação linear T : $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por T(x,y,z) = (x,2y,z). Determine a imagem de T.

Solução:

Temos que T(x,y,z) = (x,2y,z), sendo assim :

T(x,y,z) = (x,2y,z) = (x,0,0) + (0,2y,0) +

+(0,0,z) = x(1,0,0) + y(0,2,0) + z(0,0,1)

Onde concluimos que o conjunto imagem Im(T) é gerado pelos vetores (1,0,0),(0,2,0) e (0,0,1). Sendo tais vetores são L.I, temos que {(1,0,0),(0,2,0),(0,0,1)} uma base para Im(T). Onde concluimos que a dim(T) = 3, logo Im(T) = $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 18 : Seja a transformação linear T : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por T(x,y) = (x,y,0). Determine a imagem de T.

Solução:

Temos que T(x,y) = (x,y,0), sendo assim:

T(x,y) = (x,y,0) = (x,0,0) + (0,y,0)

T(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0)

Onde concluimos que o conjunto imagem Im(T) é gerado pelos vetores (1,0,0) e (0,1,0). Sendo tais vetores são L.I, temos que {(1,0,0),(0,1,0)} uma base para Im(T). Onde concluimos que a dimIm(T) = 2, o que seguinifica que o conjunto imagem é um plano que passa pela origem.

π EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nos exercícios de 1 a 10 são dadas as transformações lineares. Em cada caso determine o núcleo e a imagem das aplicações.

1. $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $T(x) = (x,x,x)$
2. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = (x - y,\ x + y, x)$
3. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x - y,\ x + z, 0)$
4. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x - y,\ x + y, x)$
5. $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y,z,t) = (x - y,\ z + t)$
6. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $T(x,y,z) = x + y + z$
7. $L: M_{2x2}(\mathbb{R}) \to M_{2x2}(\mathbb{R})$, $L(A) = A^t$
8. $L: M_{2x3}(\mathbb{R}) \to P_4(\mathbb{R})$,

   $$L(\begin{bmatrix} x & y & z \\ w & v & k \end{bmatrix}) = x + (y - z)t + wi^2 + vt^3 + (k + v)t^4$$

9. $T: M_{2x2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $T(A) = A$
10. $\dfrac{d}{dx}: P_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) \mapsto \dfrac{df(x)}{dx}$, $P_n(\mathbb{R})$ é o espaço vetorial dos polinômis de grau n.
11. Consideremos o operador linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x,y,z) = (x + 2y + 2z,\ x + 2y - z,\ -x + y + 4z)$.
    a) Determine o vetor $u \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(u) = (-1,-8,-11)$.
    b) Determine, caso exista o vetor $u \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(u) = u$.
12. Um operador linear $T, S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é tal que: $T(1,1,0) = (0,0,0)$, $T(0,1,0) = (0,-2,0)$ e $T(0,-1,1) = (2,0,-1)$.
    Sendo assim determine:
    a) $T(x,y,z)$
    b) Os vetores do $\mathbb{R}^3$ tais que $T(x,y,z) = (0,0,0)$
13. Seja $M_{2x2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ uma transformação linear, definida por $T(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}) = (x - y, y - z, z + t, 0)$.
    Determine o conjunto
    $$\left\{\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid T(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}) = (0,0,0,0)\right\}.$$
14. Seja $T: M_{2x2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ uma transformação linear, definida por $T(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}) = (x + y, y - z, z + t, t)$.
    Se $\alpha = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\right\}$ é uma base do espaço vetorial $M_{2x2}(\mathbb{R})$, então
    $$\beta = \left\{T(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}), T(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}), T(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}), T(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}),\right\}$$
    é uma base para $\mathbb{R}^4$.
15. Sejam $T, S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares. Determine:
    a) A aplicação T tal que $T(1,1,0) = (0,1,0)$, $T(0,1,-1) = (0,0,2)$ e $T(0,0,1) = (0,0,0)$
    b) A aplicação S tal que $S(1,1,0) = (0,1,-1)$, $S(0,1,-1) = (1,0,1)$ e $S(0,0,1) = (0,0,1)$
    c) A aplicação h, tal que $h = S \circ T$

TEMA 07

DEFINIÇÕES E PROPOSIÇÕES SOBRE TRANSFORMAÇÕES LINEARES

7.1 Definição

Dada uma aplicação $T : V \to W$, diremos que T é injetora(injetiva) se, e somente se, para todo $u,v \in V$ como $T(u) = T(v)$ tivermos que $u = v$.

Simbolicamente temos:

T é injetora $\Leftrightarrow \forall u, v \in V$ com $T(u) = T(v) \Rightarrow u = v$

Uma forma equivalente de escrever esta definição, é a seguinte:

Dada uma aplicação $T : V \to W$, diremos que T é injetora se, e somente se, para todo $u,v \in V$ como $u \neq v$ tivermos que $T(u) \neq T(v)$.

Simbolicamente temos:

T é injetora $\Leftrightarrow \forall u, v \in V$ com $u \neq v \Rightarrow T(u) \neq T(v)$

Exemplo 1: Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear, definido por $T(x,y) = (x + y, x - y)$. Mostre que T é injetiva.

Solução:

T é injetiva $\Leftrightarrow \forall u, v \in \mathbb{R}^2$ com $T(u) = T(v) \Rightarrow u = v$. Logo sendo $u = (x,y)$ e $v = (a,b)$ vetores do $\mathbb{R}^2$ temos que:

$T(u) = T(v) \Rightarrow T(x,y) = T(a,b)$

$T(u) = T(v) \Rightarrow (x + y, x - y) = (a + b, a - b)$

$$\begin{cases} x+y=a+b \\ x-y=a-b \end{cases} \Rightarrow 2x = 2a \Rightarrow x = a$$

$$\begin{cases} x+y=a+b \\ x-y=a-b\ .(-1) \end{cases} \sim \begin{cases} x+y=a+b \\ -x+y=-a+b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=\ \ a+b \\ -x+y=-a+b \end{cases} \Rightarrow 2y = 2b \Rightarrow y = b$$

$x = a$ e $y = b \Rightarrow (x,y) = (a,b) \Rightarrow u = v$

Onde concluimos que T é injetiva.

Exemplo 2: Seja $T : M_{2x2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ uma transformação linear, definido por

$T(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}) = (x+y, y+z, z+t, t)$. Mostre que T é injetiva.

Solução:

T é injetiva $\Leftrightarrow \forall u, v \in M_{2x2}(\mathbb{R})$ com $T(u) = T(v) \Rightarrow u = v$.

Logo sendo $u = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ vetores de $M_{2x2}(\mathbb{R})$ temos que:

$$T(u) = T(v) \Rightarrow T(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}) = T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x + y, y + z, z + t, t) = (a + b, b + c, c + d, d) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+y=a+b \\ y+z=b+c \\ z+t=c+d \\ t=d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=a \\ y=b \\ z=c \\ t=d \end{cases}$$

onde concluimos $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow u = v$.

Onde concluimos que T é injetiva.

Observação:

Dada uma transformação linear $T : V \to W$, nem sempre é fácil verificar pela definição que a mesma é injetiva. Para isto, vamos enunciar uma proposição que vai caracterizar as funções lineares injetiva.

7.2 Proposição

Uma transformação linear $T : V \to W$ é injetora se, e somente se, $KerT = \{\theta\}$.

Demonstração:

Lembremos que a demonstração do tipo se, e somente se, se da em duas partes.

Primeira parte:

Uma transformação linear $T : V \to W$ é injetora, então $kerT = \{\theta\}$.

Para todo $v \in KerT$ temos que $T(v) = \theta_W$. Sendo T uma transformação linear , temos que T leva o vetor nulo V no vetor nulo de W, isto é, $T(\theta) = \theta_W$. Desta forma temos que $T(v) = \theta_W = T(\theta)$, emp[licando que $v = \theta$, pois T é injetiva.

Segunda parte:

Uma transformação linear $T : V \to W$ é injetora se, e somente se, $KerT = \{\theta\}$.

Se o núcleo de uma transformação linear $T : V \to W$ é formado só pelo vetor nulo, isto é, $KerT = \{\theta\}$ então T é injetiva.

Vamos mostrar que $\forall u,v \in V$ com $T(u) = T(v)$ tem-se $u = v$. Sendo assim temos:

$T(u) = T(v) \Rightarrow T(u) - T(v) = \theta_W \Rightarrow T(u - v) = \theta_W$

$T(u-v) = \theta_W \Rightarrow u - v \in KerT = \{\theta\} \Rightarrow u - v = \theta \Rightarrow$

$\Rightarrow u = v$. Onde concuimos que T é injetiva.

Exemplo 3: Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear, definido por $T(x,y) = (x + y, x - y)$. Mostre que T é injetiva.

Solução:

Vamos fazer uso da Proposição:

$T(x,y) = (x + y, x - y) = (0,0)$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$$

Onde concluimos que $KerT = \{(0,0)\}$. Sendo assim temos que T é injetiva.

Exemplo 4: Seja $T : M_{2x2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ uma transformação linear, definido por

$T(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}) = (x + y, y + z, z + t, t)$. Mostre que T é injetiva.

Solução:

Vamos fazer uso da Proposição:

$$T(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}) = (x + y, y + z, z + t, t) = (0,0,0,0)$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ z + t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = t = 0$$

Onde concluimos que $KerT = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$. Sendo assim temos que T é injetiva.

7.3 Teorema(Teorema da dimensão)

Seja $T : V \to W$ é uma transformação linear, definida num espaço vetorial V de dimensão finita e W um espaço vetorial qualquer. Então , $\dim KerT + \dim(T) = \dim V$.

Demonstração:

Digamos que $\dim V = m$ e seja $\beta_1 = \{v_1,v_2,v_3,...,v_n\}$ uma base de KerT. Como KerT é um suespaço vetorial do espaço vetorial V, podemos completar β até obtermos uma base para V.

Seja $\beta_1 = \{v_1,v_2,v_3,...,v_n,v_{n+1},v_{n+2},...,v_m\}$ a base de V. Vamos mostrar que $\beta_2 = T(v_{n+1}), T(v_{n+2}),...,T(v_m)$ é uma base para Im(T), ou seja $Im(T) = [T(v_{n+1}), T(v_{n+2}),...,T(v_m)]$ e $\{T(v_{n+1}), T(v_{n+2}),...,T(v_m)\}$ é L.I.

Vamos mostrar que $Im(T) = [T(v_{n+1}), T(v_{n+2}),...,T(v_m)]$.

Dado um $w \in Im(T)$ qualquer, temos que existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$, então:

$v = \sum_{k=1}^{m} \beta_k v_k$, para $\beta_k \in \mathbb{R} \quad \forall k = 1,2,...,m$

$$T(v) = T(\sum_{k=1}^{m} \beta_k v_k) = \sum_{k=1}^{m} T(\beta_k v_k) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k T(v_k)$$

$$T(v) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k T(v_k) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k T(v_k) + \sum_{j=n+1}^{m} \beta_j T(v_j)$$

como $T(v_k) = 0 \quad \forall k = 1,2,...,n$ pois $v_k \in KerT$ temos $T(v) = \sum_{j=n+1}^{m} \beta_j T(v_j)$, logo

$$T(v) = \sum_{j=n+1}^{m} \beta_j T(v_j) = w.$$

Onde concluimos que

$Im(T) = [T(v_{n+1}),T(v_{n+2}),...,T(v_m)]$

Afirmo que $\{T(v_{n+1}),T(v_{n+2}),...,T(v_m)\}$ é L.I.

De fato,

$a_{n+1}T(v_{n+1}) + a_{n+2}T(v_{n+2}) + ... + a_n T(v_m) = 0$

$T(a_{n+1}v_{n+1}) + T(a_{n+2} + v_{n+2}) + ... + T(a_n v_m) = 0$

$T(a_{n+1}v_{n+1} + a_{n+2} + v_{n+2} + ... + a_n v_m) = 0$

logo

$a_{n+1}v_{n+1} + a_{n+2}v_{n+2} + ... + a_n v_m \in KerT$.

Sendo $\beta_1 = \{v_1,v_2,v_3,...,v_n\}$ uma base para o KerT, temos que

$$a_{n+1}v_{n+1} + a_{n+2}v_{n+2} + ... + a_n v_m = \sum_{k=1}^{n} a_k v_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k v_k - \sum_{j=n+1}^{m} a_j v_j = 0 \Rightarrow a_1 = ... = a_m = 0$$

pois $\beta = \{v_1,v_2,v_3,...,v_n,v_{n+1},v_{n+2},...,v_m\}$ a base de V.

Sendo assim, temos que $\dim KerT + \dim Im(T) = \dim V$ pois $m = n + (m - n)$.

Exemplo 5: Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z) = (x, z - y, -x)$.

a) Determine uma base para o núcleo de T.

b) Dê a dimensão da imagem de T.

c) Verifique o teorema da dimensão.

Solução:

a) Sendo KerT = $\{(x,y,z);\in \mathbb{R}^3 | T(x,y,z)=(0,0,0)\}$ o núcleo da aplicação , temos que T(x,y,z) = (x, z – y, –x) = (0,0,0).

Sendo assim teremos:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = z$$

E portanto o núcleo é dado por

KerT = $\{(0,y,y);y\in \mathbb{R}\}$

Tomando um vetor qualquer de KerT, teremos: (0,y,y) = y(0,1,1). Onde concluimos que o vetor (0,1,1) gera o núcleo, isto é, KerT = [(0,1,1)]. E sendo tal vetor L.I, temos que {(0,1,1)} é a base do KerT. Observe que dimKerT = 1.

b) Temos que T(x,y,z) = (x, z – y, –x), logo:

(x, z – y, x) = (x,0,–x) + (0,–y,0) + (0,z,0)

(x, z – y, –x) = x(1,0,–1) + y(0,–1,0) + z(0,1,0)

Im(T) = [(1,0,–1),(0,–1,0),(0,1,0)]

Observe que os vetores (1,0,–1),(0,–1,0) e (0,1,0) são L.D, pois (0,–1,0) e (0,1,0)são colineares.

Observe também que os vetores (1,0,–1) e (0,1,0) são L.I. E portanto o conjunto formado pelos dois geram a imagem da aplicação e são L.I, o que define uma base para Im(T), isto é, {(1,0,–1),(0,1,0)} é uma base de Im(T). Observe que dimIm(t) = 2.

c) dimKerT + dimIm(T) = dim$\mathbb{R}^3$

Dos itens (a) e (b) temos dimKerT = 1 e dimIm(T) = 2.

Sendo dim$\mathbb{R}^3$ = 3 temos que o teorema da dimensão é satisfeita, pois

3 = dim$\mathbb{R}^3$ = 1 + 2 = dimKerT + dimIm(T)

Exemplo 6: Seja T : $\mathbb{R}^4 \to M_{2x2}(\mathbb{R})$ uma transformação linear, dada por $T(x,y,z,t) = \begin{bmatrix} x+y & z \\ -z & t \end{bmatrix}$.

Determine dimIm(T).

Solução:

Vamos primeiramente calcular a dimenção do núcleo.

$$KerT = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid T(x,y,z,t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$T(x,y,z,t) = \begin{bmatrix} x+y & z \\ -z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \\ t=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \\ t=0 \end{cases} \Rightarrow -x = y, z = t = 0$$

KerT = $\{(x,-x,0,0);x\in \mathbb{R}\}$, onde concluimos que {(1,–1,0,0)} é uma base para o núcleo, logo a dim KerT = 1. Sendo a dim$\mathbb{R}^4$= 4 , temos que:

dimKert + dimIm(T) = dim$\mathbb{R}^4$

dimIm(T) = dim$\mathbb{R}^4$– dimKert = 4 – 1 = 3

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Seja T : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear, dada por T(x,y) = (x + y, x – y).

   a) Mostre que T é injetiva.

   b) Determine a dimIm(T).

   c) Se {(1,1),(0,1)} é uma base de $\mathbb{R}^2$, então {T(1,1),T(0,1)} é uma base de $\mathbb{R}^2$.

2. Seja T : $M_{2x2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ uma aplicação definida por $T(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}) = (x-y, y-z, t)$.

   a) Mostre que T é uma aplicação linear.

   b) Determine o núcleo da aplicação.

   c) Determine a dimIm(T).

   d) Verifique o teorema da dimenção.

3. Seja L : $M_{2x2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ uma aplicação linear, definida por $T(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}) = (x+y, y+z, z+t, z-t)$.

   a) Mostre que T é injetiva.

   b) Se $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ é base de $M_{2x2}(\mathbb{R})$. Determine uma base para o $\mathbb{R}^4$.

4. Seja T : V → W uma transformação linear. Se dimV = dimW, então T é injetiva se, e somente se T é sobrejetiva.

5. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear injetiva. Se dimV = dimW, então T leva base em base.

6. Determine o núcleo e a imagem do operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por $T(x,y,z) = (x + 2y - z, y - 3z, y + z)$.

7. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $T(\varepsilon_1) = (1,2)$, $T(\varepsilon_2) = (0,1)$, $T(\varepsilon_3) = (-2,3)$, sendo $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$.
   a) Determine o KerT e uma de suas bases. T é injetiva?
   b) Determine a Im(T)e uma de suas bases. T é sobrejetiva?

8. Chama-se **isomorfismo** do espaço vetorial V no espaço vetorial W a uma transformação linear $T : V \to W$, que é bijetora. Neste caso, os espaços vetoriais V e W são ditos isomorfos.Além disso, se $T : V \to W$ é um isomorfismo então T possui uma aplicação inversa a qual vamos denotar por $T^{-1} : W \to V$.

   Mostre mostre que a inversa de um isomorfismo é uma transformação linear.

9. Mostre que a aplicação $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $L(x,y,z) = (y - x, z + y, 2x)$ é um isomorfismo. Determine ainda uma a inversa de L.

TEMA 08

MUDANÇA DE BASE

Sejam $\beta = \{u_1,u_2,...,u_n\}$ e $\alpha = \{v_1,v_2,...,v_n\}$ duas bases ordenadas de um espaço vetorial V. Dado um vetor $v \in V$, podemos escreve-lo como:

$$v = \sum_{k=1}^{n} x_k u_k \quad \text{e} \quad v = \sum_{k=1}^{n} y_k v_k$$

Como podemos relacianar as coordenadas de v em relação à base β.

$$[v]_\beta = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ : \\ x_n \end{pmatrix}$$

Com as coordenadas do mesmo vetor v em relação à base α.

$$[v]_\alpha = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ : \\ y_n \end{pmatrix}$$

Escrevendo cada v_k na base β, temos:

$$\begin{cases} v_1 = \sum_{k=1}^{n} a_{k1} u_k \\ v_2 = \sum_{k=1}^{n} a_{k2} u_k \\ : \\ v_n = \sum_{k=1}^{n} a_{kn} u_k \end{cases}$$

Sendo assim, temos:

$v = y_1v_1 + y_2v_2 + ... + y_nv_n$

$$v = y_1(\sum_{k=1}^{n} a_{k1}u_k) + y_2(\sum_{k=1}^{n} a_{k2}u_k) + ... + y_n(\sum_{k=1}^{n} a_{kn}u_k)$$

$$v = (\sum_{k=1}^{n} a_{1k}y_k)u_1 + (\sum_{k=1}^{n} a_{2k}y_k)u_2 + ... + (\sum_{k=1}^{n} a_{nk}y_k)u_n$$

Como $v = x_1u_1 + x_2u_2 + ... + x_nu_n$ teremos :

$$\begin{cases} x_1 = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} y_k \\ x_2 = \sum_{k=1}^{n} a_{2k} y_k \\ \vdots \\ x_n = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} y_k \end{cases}$$

Em forma matricial teremos:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Isto é, denotando

$$[I]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$[v]_\beta = [I]_\beta^\alpha . [v]_\alpha$ temos

Exemplo 1: Sejam $\alpha = \{(2,0),(0,1)\}$ e $\beta = \{(0,-1),(2,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$. Determine $[I]_\beta^\alpha$ e $[I]_\alpha^\beta$

Solução:

Vamos determinar $[I]_\beta^\alpha$.

$(2,0) = a(0,-1) + b(2,1)$

$(2,0) = (0,-a) + (2b,b)$

$(2,0) = (2b, b - a)$

$$\begin{cases} 2b = 2 \\ b - a = 0 \end{cases} \Rightarrow b = a = 1$$

$(2,0) = 1(0,-1) + 1(2,1)$

$(0,1) = a(0,-1) + b(2,1)$

$(0,1) = (0,-a) + (2b,b)$

$(0,1) = (2b, b - a)$

$$\begin{cases} 2b = 0 \\ b - a = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = 0$$

$(0,1) = -1(0,-1) + 0,(2,1)$

Sendo

$$\begin{cases} (2,0)1 = (0,-1)1 + (2,1) \\ (0,1) = -1(0,-1) + 0(2,1) \end{cases}$$

temos que

$$[I]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vamos determinar $[I]_\alpha^\beta$.

$(0,-1) = x(2,0) + y(0,1)$

$(0,-1) = (2x,0) + (0,y)$

$(0,-1) = (2x,y) \Rightarrow x = 0, y = -1$

$(0,-1) = 0(2,0) + (-1)(0,1)$

$(2,1) = a(2,0) + b(0,1)$

$(2,1) = (2a,0) + (0,b)$

$(2,1) = (2a,b) \Rightarrow a = 1, b = 0$

$(2,1) = 1(2,0) + 0(0,1)$

Sendo

$$\begin{cases} (0,-1) = 0(2,0) + (-1)(0,1) \\ (2,1) = 1(2,0) + 0(0,1) \end{cases}$$

temos que

$$[I]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2: Sendo

$$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \right\} \text{ e}$$

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ bases de}$$

$M_{2x2}(\mathbb{R})$. Determine $[I]_\beta^\alpha$ e $[I]_\alpha^\beta$.

Solução:

Vamos determinar em primeiro lugar a matriz $[I]_\beta^\alpha$. Para isto vamos escrever cada elemento da base α como a combinação dos vetores na base β.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sendo assim temos:

$$[T]_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vamos determinar em segundo lugar a matriz $[I]_{\alpha}^{\beta}$. Para isto vamos escrever cada elemento da base β como a combinação dos vetores na base α.

Exemplo 3: Sejam

$$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \right\} \text{ e}$$

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right\} \text{ bases do}$$

espaço vetorial $M_{2x2}(\mathbb{R})$. Sendo

$$[I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } [v]_{\alpha} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ determine}$$

v em relação a base β de $M_{2x2}(\mathbb{R})$.

Solução: Sabemos que $[v]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\alpha} \cdot [v]_{\alpha}$, desta forma temos:

$$[v]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\alpha}.[v]_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$[v]_{\beta} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$v = -3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Sejam $\beta = \{(1,1,0,0),(0,0,0,-1),(0,1,0,1),(0,-2,1,0)\}$ e $\varphi = \{(1,1,0,0),(0,-2,1,0),(0,0,0,3),(0,0,-3,0)\}$ bases do $\mathbb{R}^4$. Determine $[I]_{\beta}^{\varphi}$ e $[I]_{\varphi}^{\beta}$.

2. Seja $[I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $[v]_{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determine $[v]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\alpha} \cdot [v]_{\alpha}$.

3. Determine $[(0,1,-1,2)]_{\beta}$, sabendo-se que $[I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $[(0,1,-1,2]_{\alpha} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. Determine $\left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right]_{\beta}$, sabendo-se que $[I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ é uma base de $M_{2x2}(\mathbb{R})$.

5. Se $[I]_{B}^{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, determine $([I]_{B}^{A})^{-1}$.

6. Sejam A = {(–1,1),(0,2)}, B = {(3,0),(0,–1)} e C = {(1,1),(0,–1)} bases do $\mathbb{R}^2$. Determine $[I]_{C}^{B}$ e $[I]_{B}^{A}$. Verifique ainda que $[I]_{C}^{B} \cdot [I]_{B}^{A} = [I]_{C}^{A}$.

8.2 Matriz de uma aplicação linear

Sejam $T : V \to W$ uma transformação linear, α uma base de V e β uma base de W. Sem perda de generalização, consideremos o caso em que dimV = 2 e dimW = 3.

Sejam $\alpha = \{v_1,v_2\}$ e $\beta = \{w_1,w_2,w_3\}$ bases de V e W respectivamente.

Um vetor $v \in V$ pode ser espresso por:

$v = x_1v_1 + x_2v_2$ e sua imagem

$T(v) = y_1w_1 + y_2w_2 + y_3w_3$ (I)

Por outro lado temos que

$T(v) = T(x_1v_1 + x_2v_2) = x_1T(v_1) + x_2T(v_2)$ (II)

Sendo $_{1}T(v_1),T(v_2)$ vetores de W, temos que eles podem ser escrito como combinação linear dos vetores de β:

$$\begin{cases} T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + a_{31}w_3 \\ T(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + a_{32}w_3 \end{cases} \quad \text{(III)}$$

Substituindo (III) em (II), temos:

$T(v) = x_1T(v_1) + x_2T(v_2) =$

$= x_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + a_{31}w_3) +$

$x_2(a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + a_{32}w_3)$

$= (x_1a_{11} + x_2a_{12})w_1 + (x_1a_{21} + x_2a_{22})w_2 +$

$(x_1a_{31} + x_2a_{32})w_3$

comparando a última igualdade com (I) temos:

$$\begin{cases} y_1 = x_1a_{11} + x_2a_{12} \\ y_2 = x_1a_{21} + x_2a_{22} \\ y_3 = x_1a_{31} + x_2a_{32} \end{cases}$$

ou em formatricial:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ou, simbolicamente:

$[T(v)]_\beta = [T]^\alpha_\beta \,.\, [v]_\alpha$ sendo a matriz $[T]^\alpha_\beta$ denominada de matriz de T em relação as bases α e β.

Observações:

1. A ordem da matriz $[T]^\alpha_\beta$ é 3 x 2 quando dimV = 2 e dim = W = 3
2. as colunas da matriz $[T]^\alpha_\beta$ são as componentes das imagens dos vetores das bases α em relação à base β.

$$\begin{array}{cc} [T]^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ T(v_1)_\beta & T(v_2)_\beta \end{array} \end{array}$$

De modo geral, para $T : V \to W$linear, se dimV = n e dimW = m, $\alpha = \{v_1,v_2,...,v_n\}$ e $\beta = \{w_1,w_2,...,w_m\}$ são bases de V e W, resppectivamente, logo teremos que

$$[T]^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ : & : & : & : \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemplo 4: Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear dada por T(x,y) = (x + y, x – y) e α,β bases de $\mathbb{R}^2$. Sendo $\alpha = \{(1,1),(0,1)\}$ e $\beta = \{(0,1),(-1,0)\}$, determine $[T]^\alpha_\beta$ e $[T]^\beta_\alpha$.

Solução:

Vamos determinar $[T]^\alpha_\beta$, sendo $\alpha = \{(1,1),(0,1)$ e $\beta = \{(0,1),(-1,0)\}$.

Logo

$T(1,1) = (2,0) = a_{11}(0,1) + a_{21}(-1,0)$ (i)

$T(0,1) = (1,-1) = a_{12}(0,1) + a_{22}(-1,0)$ (ii)

$$\begin{cases} a_{11}(0,1) + a_{21}(-1,0) = (2,0) \\ a_{12}(0,1) + a_{22}(-1,0) = (1,-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-a_{21}, a_{11}) = (2,0) \\ (-a_{22}, a_{12}) = (1,-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-a_{21}, a_{11}) = (2,0) \\ (-a_{22}, a_{12}) = (1,-1) \end{cases} \Rightarrow a_{11} = 0, a_{12} = a_{22} = -1, a_{21} = -2$$

Sendo $[T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e $a_{11} = 0$, $a_{12} = a_{22} = -1$,

$a_{21} = -2$ teremos que $[T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Vamos determinar $[T]^\beta_\alpha$, sendo $\alpha = \{(1,1),(0,1)\}$ e $\beta = \{(0,1),(-1,0)\}$.

Logo

$T(0,1) = (1, -1) = a_{11}(1,1) + a_{21}(0,1)$ (i)

$T(-1,0) = (-1, -1) = a_{12}(1,1) + a_{22}(0,1)$ (ii)

De (i) e (ii) temos:

$$\begin{cases} a_{11}(1,1) + a_{21}(0,1) = (1,-1) \\ a_{12}(1,1) + a_{22}(0,1) = (-1,-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_{11}, a_{11} + a_{21}) = (1,-1) \\ (a_{12}, a_{12} + a_{22}) = (-1,-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_{11}, a_{11} + a_{21}) = (1,-1) \\ (a_{12}, a_{12} + a_{22}) = (-1,-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 1 \\ a_{12} = -1 \\ a_{21} = -2 \\ a_{22} = 0 \end{cases}$$

Sendo $[T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e $a_{11} = 1$, $a_{12} = -1$,

$a_{21} = -2$, $a_{22} = 0$ teremos que $[T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Exemplo 5: Sejam $T : \mathbb{R}^4 \to M_{2x2}(\mathbb{R})$ uma transformação linear definida por $T(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & x+y+z+t \end{pmatrix}$, α e β bases canônicas de $\mathbb{R}^4$ e $M_{2x2}(\mathbb{R})$. Determine $[T]^\alpha_\beta$.

Solução:

Sendo $T(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & x+y+z+t \end{pmatrix}$ a lei da transformação linear, $\alpha = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e $\beta = \{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4\}$ as bases canônicas do $\mathbb{R}^4$ e $M_{2x2}(\mathbb{R})$ respectivamentes, onde

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vamos agora determinar $[T]^{\alpha}_{\beta}$, e para isto vamos determinar $T(1,0,0,0)$, $T(0,1,0,0)$, $T(0,0,1,0)$ e $T(0,0,0,1)$ na base β. Desta forma temos:

$$T(1,0,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ T(0,1,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T(0,0,1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } T(0,0,0,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos tomar uma matriz $A \in M_{2x2}(\mathbb{R})$ qualquer e escrever como combinação linear na base β.

Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal matriz, logo teremos:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3 + x_4\varepsilon_4$$

Onde concluimos que $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$, $x_4 = d$

Portanto

$$T(1,0,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2 + 0\varepsilon_3 + 1\varepsilon_4$$

$$T(0,1,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0\varepsilon_1 + 1\varepsilon_2 + 0\varepsilon_3 + 1\varepsilon_4$$

$$T(0,0,1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2 + 1\varepsilon_3 + 1\varepsilon_4$$

$$T(0,0,0,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2 + 0\varepsilon_3 + 1\varepsilon_4$$

Onde concluimos que $[T]^{\alpha}_{\beta}$ é dada por:

$$[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Observação: Como α e β são as bases canônicas do $\mathbb{R}^4$ e do espaços das matrizes $M_{2x2}(\mathbb{R})$ respectivamente, temos que a matriz da transformação linear $[T]^{\alpha}_{\beta}$ é dada de modo imediato, isto é, só de olhar a lei da transformação.

$$T(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & x+y+z+t \end{pmatrix}$$

$$T(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} 1x+0y+0z+0t & 0x+1y+0z+0t \\ 0x+0y+1z+0t & 1x+1y+1z+1t \end{pmatrix}$$

$$[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Coeficiente de t

Coeficiente de z

Coeficiente de y

Coeficiente de x

Exemplo 6: Seja $T : P_{\leq 3} \to \mathbb{C}$ uma transformação linear definida por $T(a + bt + ct^2 + dt^3) = (a + b) + (c + d)i$. Se α e β bases canônicas de $P_{\leq 3}$ e $\mathbb{C}$ respectivamente.Sendo assim determine $[T]^{\alpha}_{\beta}$.

Solução:

Sendo $T(a + bt + ct^2 + dt^3) = (a + b) + (c + d)i$ a lei da transformação linear, e α e β bases canônicas de $P_{\leq 3}$ e $\mathbb{C}$ respectivamente.

Logo

$T(p(t) = (1a + 1b + 0c + 0d) + (0a + 0b + 1c + 1d)i$

onde $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$.

Desta forma a matriz da transformação $[T]^{\alpha}_{\beta}$, será dada por:

$$[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 7: Sejam $T : \mathbb{R}^4 \to M_{2x2}(\mathbb{R})$ uma transformação linear definida por

$$T(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & x+y+z+t \end{pmatrix},$$

$\alpha = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ base canônicas do $\mathbb{R}^4$ e $\beta = \{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ uma base do espaço $M_{2x2}(\mathbb{R})$, onde $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } u_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determine $[T]^{\alpha}_{\beta}$.

Solução:

Para isto, temos:

$$T(1,0,0,0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ T(0,1,0,0)=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},$$

$$T(0,0,1,0)=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\ \text{e}\ T(0,0,0,1)=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Vamos tomar uma matriz $A\in M_{2x2}(\mathbb{R})$ qualquer e escrever como combinação linear na base β.

Seja $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ tal matriz, logo teremos:

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3+x_4u_4$$

Onde concluimos que

$$x_1=a, x_2=-c, x_3=-d, x_4=\frac{b}{2}$$

Portanto

$$T(1,0,0,0)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=1u_1+0\varepsilon_2+(-1)u_3+0u_4$$

$$T(0,1,0,0)=\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}=0u_1+0u_2+(-1)u_3+\frac{1}{2}u_4$$

$$T(0,0,1,0)=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}=0u_1+(-1)u_2+(-1)u_3+0u_4$$

$$T(0,0,0,1)=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=0u_1+0u_2+(-1)u_3+0u_4$$

Onde concluimos que $[T]_\beta^\alpha=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&-1&0\\-1&-1&-1&-1\\0&\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}$

Exemplo 8: Sejam $T:\mathbb{R}^4\rightarrow M_{2x2}(\mathbb{R})$ uma trans- ida por $T(x,y,z,t)=\begin{pmatrix}x&y\\z&x+y+z+t\end{pmatrix}$, α e β bases do $\mathbb{R}^4$ e do espaço das matrizes $M_{2x2}(\mathbb{R})$ respectivamentes.

Determine $[T]_\beta^\alpha$, sendo α = {(1,0,0,0), (0,–1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,–2)} e β a base canônica .

Solução:

Sendo $T(x,y,z,t)=\begin{pmatrix}x&y\\z&x+y+z+t\end{pmatrix}$ e

α = {(1,0,0,0), (0,–1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,–2)}, temos que:

$$T(1,0,0,0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ T(0,-1,0,0)=\begin{pmatrix}0&-1\\0&-1\end{pmatrix},$$

$$T(0,0,1,0)=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\ \text{e}\ T(0,0,0,-2)=\begin{pmatrix}0&0\\0&-2\end{pmatrix}$$

Como $\beta=\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4\}$ é a base canônica de $M_{2x2}(\mathbb{R})$ onde

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\varepsilon_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Sendo assim, temos que toda matriz $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_{22}(\mathbb{R})$ é expresso na base β da forma:

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Logo

$$T(1,0,0,0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=1\varepsilon_1+0\varepsilon_2+0\varepsilon_3+1\varepsilon_4$$

$$T(0,-1,0,0)=\begin{pmatrix}0&-1\\0&-1\end{pmatrix}=0\varepsilon_1+(-1)\varepsilon_2+0\varepsilon_3+(-1)\varepsilon_4$$

$$T(0,0,1,0)=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=0\varepsilon_1+0\varepsilon_2+1\varepsilon_3+1\varepsilon_4$$

$$T(0,0,0,-2)=\begin{pmatrix}0&0\\0&-2\end{pmatrix}=0\varepsilon_1+0\varepsilon_2+0\varepsilon_3+(-2)\varepsilon_4$$

Onde concluimos que $[T]_\beta^\alpha=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\1&-1&1&-2\end{pmatrix}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Sejam $T:\mathbb{R}^4\rightarrow M_{2x2}(\mathbb{R})$ uma transformação linear definida por $T(x,y,z,t)=\begin{pmatrix}x-y&y\\z&x+t\end{pmatrix}$, α e β bases do $\mathbb{R}^4$ e do espaço das matrizes $M_{2x2}(\mathbb{R})$ respectivamentes.
Determine $[T]_\beta^\alpha$, sendo α = {(1,0,1,0), (0,–1,0,1), (0,1,1,0), (0,0,0,–2)} e β a base canônica .

2. Seja $T:P_{\leq 3}\rightarrow \mathbb{M}_{2x2}(\mathbb{R})$ uma transformação lin-

ear definida por

$T(a+bt+ct^2+dt^3)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & a+b+c+d \end{pmatrix}$. Se α e β bases canônicas de $P_{\leq 3}$ e $\mathbb{M}_{2x2}(\mathbb{R})$ respectivamente.Sendo assim determine $[T]_{\beta}^{\alpha}$.

3. Consideremos a transformaçào linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por T(x,y,z) = (x – y, y – z, 2z) e as bases A = {(–1,1,0),(0,2,–1),(0,0,1)} e B = {(1,0,0),(0,–1,0),(0,1,–2)} do $\mathbb{R}^3$. Determine $[T]_B^A$. Qual a matriz $[T]_C^A$, onde C é a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

4. Seja $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $[T]_B^A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ sendo A = {(1,1,0),(0,1,0),(0,0,–1)} e B = {(0,–1),(1,0)} bases do $\mathbb{R}^3$ e do $\mathbb{R}^2$ respectivamente.
   a) Encontre a expressão T(x,y,z).
   b) Dertermine Im(T) e uma base para esse subespaço.
   c) Determine Ker(T) e uma base para esse subespaço.
   d) T é injetora? T é sobrejetora? Justificar.

8.4 Operacões com transformações lineares

8.4.1 Adição

Sejam $T:V \to W$ e $L:V \to W$ transformações lineares. Chama-se soma das transformações lineares T e L à transformação linear

$T + L : V \to W$

$\mapsto (T + L)(v) = T(v) + L(v) \quad \forall v \in V$

Se A e B são bases de V e W, respectivamente temos que $[T + L]_B^A = [T]_B^A + [L]_B^A$

Exemplo 9 : Sejam $T, L:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transformações lineares definidas por T(x,y) = (x + y, x – y) e L(x,y) = (y – x, x + y). Sendo A = {(1,0),(0,–1)} e B = {(–1,1),(0,2)} são bases do $\mathbb{R}^2$.

a) Determine $[T + L]_B^A$

b) Determine $[T]_B^A$

c) Determine $[L]_B^A$

d) Verifique se $[T + L]_B^A = [T]_B^A + [L]_B^A$

Solução:

a) Vamos determinar $[T + L]_B^A$

(T + L)(x,y) = T(x,y) + L(x,y)

(T + L)(x,y) = (x + y, x – y) + (y – x, x + y) = (2y,2x)

(T + L)(x,y) = (2y,2x)

(T + L)(1,0) = (0,2) = 0(–1,1) +(–1)(0,2)

(T + L)(0,–1) = (–2,0) = 2(–1,1) +(–1)(0,2)

$$[T+L]_B^A=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

b) Vamos determinar $[T]_B^A$

T(1,0) = (1,1) = (–1)(–1,1) + 1(0,2)

T(0,–1) = (–1,1) = 1(–1,1) + 0(0,2)

$$[T]_B^A=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Vamos determinar $[L]_B^A$

L(1,0) = (–1,1) = 1(–1,1) + 0(0,2)

L(1,–1) = (–1,–1) = 1(–1,1) + (–1)(0,2)

$$[L]_B^A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

d) Vamos verificar se $[T + L]_B^A = [T]_B^A + [L]_B^A$

$$[T]_B^A+[L]_B^A=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}=$$

$$=[T+L]_B^A$$

Exemplo 10: Sejam $T, J:\mathbb{M}_{2x2} \to \mathbb{R}^4$ duas aplicações lineares definidas por $T(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix})=(x,y,z,t)$, A e B bases de $\mathbb{M}_{2x2}$ e do $\mathbb{R}^4$ respectivamente. Sendo $[T]_B^A=\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $[J]_B^A=\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$, determine $[T + J]_B^A$.

Solução:

Sabemos que $[T + J]_B^A = [T]_B^A + [J]_B^A$, desta forma temos que:

$$[T+J]_B^A=[T]_B^A+[J]_B^A=\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$[T+J]_B^A=\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

8.4.2 Multiplicação por um escalar

Seja $T : V \to W$ uma tansformação linear. Definimos o produto de um escalar βpela tansformação T, como sendo a tansformação linear

$\beta T : V \to W$

$\mapsto W(\beta T)(v) = \beta T(v)$

Sendo A e B bases de V e W, respectivamente temos que $[\beta T]_B^A = \beta[T]_B^A$.

Exemplo 11: Determine $[3T]_B^A$, sendo $T : \mathbb{M}_{2x2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ uma transformação linear definida por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b, b-c, c, d)$, A e B as bases canônicas de $\mathbb{M}_{2x2}(\mathbb{R})$ e do $\mathbb{R}^4$ respectivamente.

Solução:

Em primeiro lugar vamos determinar a aplicação linear 3T.

$$(3T)\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (3a+3b, 3b-3c, 3c, 3d)$$

Sendo A e B as bases canônicas de $\mathbb{M}_{2x2}(\mathbb{R})$ e do $\mathbb{R}^4$ respectivamente, ou seja,

$$A = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \text{ e}$$

$B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, onde $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$.

Logo

$$(3T)\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = (2,0,0,0) = 2e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4$$

$$(3T)\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = (3,3,0,0) = 3e_1 + 3e_2 + 0e_3 + 0e_4$$

$$(3T)\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = (0,-3,3,0) = 0e_1 + (-3)e_2 + 3e_3 + 0e_4$$

$$(3T)\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = (0,0,0,3) = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 3e_4$$

sendo assim, temos:

$$[3T]_B^A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 12: Determine $3[T]_B^A$, sendo $T : \mathbb{M}_{2x2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ uma transformação linear definida por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b, b-c, c, d)$, A e B as bases canônicas de $\mathbb{M}_{2x2}(\mathbb{R})$ e do $\mathbb{R}^4$ respectivamente.

Solução:

Sendo A e B as bases canônicas de $\mathbb{M}_{2x2}(\mathbb{R})$ e do $\mathbb{R}^4$ respectivamente, ou seja,

$$A = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \text{ e}$$

$B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, onde $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$.

Logo

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = (1,0,0,0) = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = (1,1,0,0) = 1e_1 + 1e_2 + 0e_3 + 0e_4$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = (0,-1,1,0) = 0e_1 + (-1)e_2 + 1e_3 + 0e_4$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = (0,0,0,1) = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 1e_4$$

sendo assim, temos:

$$[T]_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E portanto

$$3[T]_B^A = 3\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

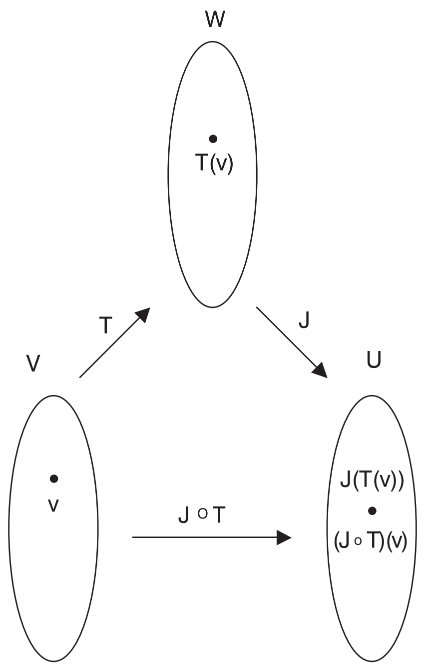
Observe que dos exemplos 11e 12 temos $[3T]_B^A = [3T]_B^A$

8.4.3 Composição

Sejam $T : V \to W$ e $J : W \to U$ transformações lineares. Chama-se aplicação composta de T e J, e se representa por $J \circ T$, à transformação linear

$J \circ T : V \to U$

$\mapsto (J \circ T)(v) = J(T(V)) \ \forall v \in V$



Se A, B e C são bases de V, W e U respectivamentes, temos que $[J \circ T]^A_C = [J]^B_C \cdot [T]^A_B$.

Exemplo 13: Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ transformação lineares definidas por $T(x,y) = (x,y,x + y)$ e $L(x,y,z) = (x,y,y,z)$.

Se $A = \{(1,0),(0,–1)\}$, $B = \{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,–1)\}$ e C $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ são as bases do $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ respectivamente , determine:

a) $L \circ T$

b) $[T]^A_B$ e $[L]^B_C$

c) $[L \circ T]^A_C$

Observação: C $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^4$.

Solução :

a) Vamos determinar $L \circ T$

$(L \circ T)(x,y) = L(T(x,y)) = L(x,y,x + y)$

$(L \circ T)(x,y) = (x,y,y,x + y)$

b) Vamos determinar $[T]^A_B$

Faça

$u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (0,–1,–1)$, $u_3 = 0(0,0,–1)$

$T(1,0) = (1,0,1) = 1u_1 + 0u_2 + 0u_3$

$T(0,–1) = (0,–1,–1) = 0u_1 + (–1)u_2 + 0u_3$

$$[T]^A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos determinar $[L]^B_C$

$L(1,0,1) = (1,0,0,1) = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 1e_4$

$L(0,1,1) = (0,1,1,1) = 0e_1 + 1e_2 + 1e_3 + 1e_4$

$L(0,0,–1) = (0,0,0,–1) = 0e_1 + 1e_2 + 1e_3 + (–1)e_4$

$$[L]^B_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

c) $(L \circ T)(x,y) = (x,y,y,x + y)$

$(L \circ T)(1,0) = (1,0,0,1) = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 1e_4$

$(L \circ T)(0,–1) = (0,–1,–1,–1)$

$(L \circ T)(0,–1) = 0e_1 + (–1)e_2 + (–1)e_3 + (–1)e_4$

$$[L \circ T]^A_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Observe que:

$$[L]^B_C \cdot [T]^A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = [L \circ T]^A_C$$

Exemplo 14: Sejam $T : \mathbb{M}_{2x2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ transformação lineares definidas por

$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + b + c + d$ e $L(t) = (t,t,0)$.

Se $A = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$B = \{1\}$ e $C = \{u_1 = (1,0,0),\ u_2 = (0,1,0),\ u_2 = (0,0,1)\}$ são as bases canônicas de $\mathbb{M}_{2x2}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente , determine $[L \circ T]^A_C$.

Solução:

Para determinar $[L \circ T]^A_C$, basta determinar $[L]^B_C \cdot [T]^A_B$ pois $[L \circ T]^A_C = [L]^B_C \cdot [T]^A_B$. Desta forma vamos calcular $[L]^B_C$ e $[T]^A_B$.

$[T]^A_B = ?$

Se $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + b + c + d$, A e B bases canônicas temos:

$[T]^A_B = (1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1)$.

$[L]_C^B = ?$

Se L(t) = (t,t,0), B e C bases canônicas temos:

$$[L]_C^B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$[L \circ T]_C^A = [L]_C^B . [T]_B^A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$$

$$[L \circ T]_C^A = [L]_C^B . [T]_B^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sejam $T_1 : V_1 \to V_2$, $T_2 : V_2 \to V_3$,..., $T_n : V_n \to W$ transformação lineares. Se $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_n$ e β são bases de V_1,V_2V_3W

$$[L \circ T]_C^A = [L]_C^B . [T]_B^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sejam $T_1 : V_1 \to V_2$, $T_2 : V_2 \to V_3$,..., $T_n : V_n \to W$ transformação lineares . Se $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_n$ e β são bases de $V_1,V_2,V_3,..,V_n$ e W respectivamente. Desta forma temos

$$[T_n \circ T_{n-1} \circ ... \circ T_2 \circ T_1]_\beta^{\alpha_1} = [T_n]_\beta^{\alpha_n} . [T_{n-1}]_{\alpha_n}^{n-1} . ... . [T_2]_{\alpha_3}^{\alpha_2} . [T_1]_{\alpha_2}^{\alpha_1}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Sejam T_1,T_2 e T_3 operadores lineares de $\mathbb{R}^3$, definidos por $T_1(x,y,z) = (x,y,–z)$, $T_2(x,y,z) = (–x,y,z)$ e $T_3(x,y,z) = (z,x,y)$. Determine:

a) $T_1 + T_2$

b) $T_1 – T_2$

c) $T_1 \circ T_2$

d) $T_2 \circ T_1$

e) $T_1 + T_3$

f) $T_1 \circ T_1$

g) $T_2 \circ T_2$

h) $T_3 \circ T_2$

i) $T_1 \circ T_2 \circ T_3$

j) $T_1 \circ T_3 \circ T_2$

2. Sendo C a base canônica do $\mathbb{R}^3$ e T_1,T_2 eT_3 operadores lineares de $\mathbb{R}^3$, definidos por $T_1(x,y,z) = (x,x – y,z)$, $T_2(x,y,z) = (x,y,y + z)$ e $T_3(x,y,z) = (x + z,x,y)$. Determine:

a) $[T_1 + T_2]_C^C$

b) $[T_1 + T_3]_C^C$

c) $[T_1 + T_2 + T_3]_C^C$

d) $[T_1 \circ T_2]_C^C$

e) $[T_1 \circ T_3]_C^C$

f) $[T_2 \circ T_3]_C^C$

g) $[T_1 \circ T_2 \circ T_3]_C^C$

3. As transformações lineares $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ e $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ são tais que T(x,y,z,t) = (x + y, z + t) e L(x,y) = (x,y,x – y).

a) Sendo A a base canônica do $\mathbb{R}^4$ e B a base canônica do $\mathbb{R}^2$, determine a matriz $[T]_B^A$.

b) Sendo B a base canônica do $\mathbb{R}^2$ e C a base canônica do $\mathbb{R}^3$, determine a matriz $[L]_C^B$.

c) Sendo A, B e C as bases canônicas do $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, determine a matriz $[L \circ T]_C^A$.

4. Seja $T : \mathbb{M}_{2x2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ uma transformação linear definido por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b, b-c, c+d, d)$.

a) Mostre que T é um isomorfismo

b) Determine sua inveersa

c) Mostre que $T \circ T^{-1} = id$, onde T^{-1} é a inversa de T e que id é a identidade.

d) Determine $[T \circ T^{-1}]_B^A$, onde A e B são as bases canônicas de $\mathbb{M}_{2x2}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^4$ respectivamente.

e) Mostre que $[T^{-1}]_A^B = ([T]_B^A)^{-1}$

5. Sejam T e S dois oparadores lineares definidos em $P_{\le 3}$ tais que $T(a + bt + ct^2 + dt^3) = b + 2c + 3dt^2$ e $S(a + bt + ct^2 + dt^3) = d + ct + bt^2 + at^3$.

a) Determine $[T \circ S]_B^A$, sendo A a base canônica de $P_{\le 3}$ e B uma base $P_{\le 3}$ de definida por $B = \{1,2 – t, t^2, t – t^3\}$.

8.5 OPERADORES LINEARES

8.5.1 Definição

As transfprmações lineares T de um espaço vetorial V em si mesmo, isto é, $T : V \to V$ são ditas operadores lineares.

Como exemplos temos:

a) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por
$T(a,b,c,d) = (0,0,a + b,c - d)$

b) $D : P_{\leq 3} \to P_{\leq 3}$ definida por
$D(a + bx + cx^2 + dx^3) = b + 2cx + 3dx^2$

c) $J : \mathbb{M}_{2x2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_{2x2}(\mathbb{R})$ definida por $J(A) = A^T$, onde A^T é a matriz transposta da matriz A.

d) $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $T(z) = \overline{z}$.

8.5.2 Operadores Inversives

Diremos que o operador linear $T : V \to V$ é inversível se, e somente se, existe um operador $S : V \to V$ tal que $T \circ S = S \circ T = id$

Equivalentimente temos que:

Diremos que o operador linear $T : V \to V$ é inversível se, e somente se, T é um operador linear bijetivo.

Observações:

1- Sendo $T : V \to V$ inversível, denotaremos o operador inverso por $T^{-1} : V \to V$.

2- Quando o operador T admite a inversa T^{-1}, diz-se que T é inversível, invertível, regular ou não-singular.

8.5.3 Propriedades dos operadores Inversives

Seja T um operador linear.

1 - Diremos que o operador linear $T : V \to V$ é inversível se, e somente se, $\ker T = \{\theta\}$.

De fato T é invetível se, e somente se, T é bijetivo. Logo T é injetivo, onde concluimos que $\ker T = \{\theta\}$.

Sendo $\ker T = \{\theta\}$, temos o operador T é injetivo e como consequêcia $\dim \operatorname{Ker} T = 0$. Logo, fazendo uso da expressão $\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im}(T) = \dim V$, concluimos que T é sobrejetivo pois $\dim \operatorname{Im}(T) = \dim V$.

2 - Se T é não-singular e β é base qualquer de V, então T^{-1} é linear e:

$[T^{-1}]^{\beta}_{\beta} = ([T]^{\beta}_{\beta})^{-1}$

Fica como exercício para o leitor.

Sendo assim, temos que $[T^{-1}]^{\beta}_{\beta} . ([T]^{\beta}_{\beta}) = [I]$, e como consequência o operador T é invertível se, e somente se, $\det[T]^{\beta}_{\beta} \neq 0$.

Observação:

Se a base β for a base canônica do espaço vertorial V, denotaremos $[T^{-1}] = [T]^{-1}$.

3 - T é regular se, e somente se, T leva a base em base.

Fica como exercício para o leitor.

Exemplo 15: Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador definido por $T(x,y) = (x + y, x - y)$.

a) Mostre que T é não-singular.

b) Encontre uma regra para T^{-1} como a que define T.

c) Se $\beta = \{(1,0),(0,-1)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$, verifique que $[T^{-1}]^{\beta}_{\beta} . ([T]^{\beta}_{\beta})^{-1}$.

Solução a :

Basta mostrar que o $\operatorname{Ker} T = \{(0,0)\}$.

De fato:

$\operatorname{Ker} T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | T(x,y) = (0,0)\}$

O núcleo do operador é dado por , deste modo teremos que:

$T(x,y) = (x + y, x - y) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$, onde

concluimos que $x = y = 0$.

Logo o $\operatorname{Ker} T = \{(0,0)\}$, e portanto T é não-singular.

Solução b:

Seja $\varepsilon = \{(1,0),(0,1)\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^2$, temos que:

$T(1,0) = (1,1) \Rightarrow T^{-1}(1,1) = (1,0)$

$T(0,1) = (1,-1) \Rightarrow T^{-1}(1,-1) = (0,1)$

Sendo T invertível temos que , T leva a base ε numa base $\beta = \{(1,1),(1,-1)\}$. Sendo assim temos que:

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) = a(1,1) + b(1,-1)$ emplicado

que $a = \dfrac{x+y}{2}$ e $b = \dfrac{x-y}{2}$.

$$(x,y) = \frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{x-y}{2}(1,-1)$$

$$T^{-1}(x,y) = \frac{x+y}{2}T^{-1}(1,1) + \frac{x-y}{2}T^{-1}(1,-1)$$

$$T^{-1}(x,y) = \frac{x+y}{2}(1,0) + \frac{x-y}{2}(0,1)$$

$$T^{-1}(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}, 0\right) + \left(0, \frac{x-y}{2}\right)$$

$$T^{-1}(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$$

c) Vamos determinar $[T]_\beta^\beta$.

$T(1,0) = (1,1) = 1(1,0) + (-1)(0,-1)$

$T(0,-1) = (-1,-1) = (-1)(1,0) + (-1)(0,-1)$

$$[T]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sendo assim temos $\left([T]_\beta^\beta\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Vamos determinar $[T^{-1}]_\beta^\beta$.

$$T^{-1}(1,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(1,0) + \left(-\frac{1}{2}\right)(0,-1)$$

$$T^{-1}(0,-1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}(1,0) + \left(-\frac{1}{2}\right)(0,-1)$$

$$\left[T^{-1}\right]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Donde concluimos que $[T^{-1}]_\beta^\beta = ([T_\beta^\beta])^{-1}$.

Exemplo 16: Seja $T : \mathbb{M}_{1x3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_{1x3}(\mathbb{R})$ um operador definido por $T([-1\ \ 0\ \ 0]) = [0\ \ 1\ \ 0]$, $T([0\ \ 1\ \ 0]) = [1\ \ 1\ \ 0]$

e $T([0\ \ 0\ \ 1]) = [0\ \ 0\ \ 1]$.

a) Verifique se T é não-singular.

b) Caso T seja não-singular, determine T^{-1}.

c) Se ε é base canônica de $M_{1x3}(\mathbb{R})$, verifique que $[T^{-1}] = [T]^{-1}$

Solução a:

Basta mostrar que T leva base em base por exemplo.

Afirmo que $\alpha = \{[-1\ \ 0\ \ 0],[0\ \ 1\ \ 0],[0\ \ 0\ \ 1]\}$ e $\beta = \{[0\ \ 1\ \ 0],[1\ \ 1\ \ 0],[0\ \ 0\ \ 1]\}$ são bases de $M_{1x3}(\mathbb{R})$.

De fato:

$a = [-1\ \ 0\ \ 0] + b[0\ \ 1\ \ 0] + c[0\ \ 0\ \ 1] = [0\ \ 0\ \ 0]$

$[-a\ \ 0\ \ 0] + [0\ \ b\ \ 0] + [0\ \ 0\ \ c] = [0\ \ 0\ \ 0]$

$[-a\ \ b\ \ c] + [0\ \ 0\ \ 0] \Rightarrow a = b = c = 0$

Portanto o conjunto $\alpha = \{[-1\ 0\ 0],[0\ 1\ 0],[0\ 0\ 1]\}$ é L.I. Sendo $\dim M_{1x3}(\mathbb{R}) = 3$, temos 0 conjunto α é uma base de $M_{1x3}(\mathbb{R})$.

Mostraremos agora que β é uma base de $M_{1x3}(\mathbb{R})$.

$a[0\ \ 1\ \ 0] + b[1\ \ 1\ \ 0] + c[0\ \ 0\ \ 1] = [0\ \ 0\ \ 0]$

$[0\ \ a\ \ 0] + [b\ \ b\ \ 0] + [0\ \ 0\ \ c] = [0\ \ 0\ \ 0]$

$[b\ \ a+b\ \ c] = [0\ \ 0\ \ 0] \Rightarrow a = b = c = 0$

Portanto o conjunto $\beta = \{[0\,1\,0],[1\ 1\ 0],[0\ 0\ 1]\}$ é L.I. Sendo $\dim M_{1x3}(\mathbb{R}) = 3$, temos 0 conjunto β é uma base de $M_{1x3}(\mathbb{R})$.5r

Como T é definido por $T([-1\ \ 0\ \ 0]) = [0\ \ 1\ \ 0]$, $T([0\ \ 1\ \ 0]) = [1\ \ 1\ \ 0]$ e $T([0\ \ 0\ \ 1]) = [0\ \ 0\ \ 1]$, temos T leva a base α na base β. Onde concluimos que T é não-singular.

b) Vamos determinar T^{-1}.

Tomando

$v_1 = [-1\ \ 0\ \ 0]$, $v_2 = [0\ \ 1\ \ 0]$, $v_3 = [0\ \ 0\ \ 1]$,

$u_1 = [0\ \ 1\ \ 0]$, $u_2 = [1\ \ 1\ \ 0]$ e $u_3 = [0\ \ 0\ \ 1]$

temos

$T(v_1) = u_1 \Leftrightarrow T^{-1}(u_1) = v_1$

$T(v_2) = u_2 \Leftrightarrow T^{-1}(u_2) = v_2$

$T(v_3) = u_3 \Leftrightarrow T^{-1}(u_3) = v_3$

$[x\ \ y\ \ z] = a[0\ \ 1\ \ 0] + b[1\ \ 1\ \ 0] + c[0\ \ 0\ \ 1]$

$[x\ \ y\ \ z] = [0\ \ a\ \ 0] + [b\ \ b\ \ 0] + [0\ \ 0\ \ c]$

$$[x \quad y \quad z] = [b \quad a+b \quad c] \Rightarrow \begin{cases} b = x \\ a+b = y \\ c = z \end{cases}$$

Logo teremos que $a = y - x$, $b = x$ e $c = z$.

$[x\ \ y\ \ z] = (y-x)u_1 + xu_2 + zu_3$

$T^{-1}[x\ \ y\ \ z] = (y-x)T^{-1}(u_1) + xT^{-1}(u_2) + zT^{-1}(u_3)$

$T^{-1}([x\ \ y\ \ z]) = (y-x)v_1 + xv_2 + zv_3)$

Sendo

$(y-x)v_1 = (y-x)[-1\ \ 0\ \ 0] = [x-y\ \ 0\ \ 0]$

$zv_2 = x[0\ \ 1\ \ 0] = [0\ \ x\ \ 0]$

$zv_3 = z[0\ \ 0\ \ 1] = [0\ \ 0\ \ z]$

Temos

$T-1\ ([x\ \ y\ \ z]) = [x-y\ \ x\ \ z]$

Solução c:

Diremos que $[T^{-1}] = [T]^{-1} \Leftrightarrow [T^{-1}]\,.[T] = [I]$

Em primeiro lugar vamos determinar a lei do operador T.

Temos que:

$[x\ \ y\ \ z] = a[-1\ \ 0\ \ 0] + b[0\ \ 1\ \ 0] + c[0\ \ 0\ \ 1]$

$[x\ \ y\ \ z] = [-a\ \ 0\ \ 0] + [0\ \ b\ \ 0] + [0\ \ 0\ \ c]$

$[x\ \ y\ \ z] = [-a\ \ b\ \ c] \Rightarrow a = -x,\ b = y,\ c = z$

$[x\ \ y\ \ z] = -x[-1\ \ 0\ \ 0] + y[0\ \ 1\ \ 0] + z[0\ \ 0\ \ 1]$

$t[(x\ \ y\ \ z)] = -xT(v_1) + yT(v_2) + zT(v_3)$

$t[(x\ \ y\ \ z)] = -xu_1 + yu_2 + zu_3$

Onde concluimos que

$T([x\ \ y\ \ z]) = [y\ \ y-x\ \ z]$.

Sendo assim vamos determinar $[T]_\varepsilon^\varepsilon = [T]$.

Para isto, vamos calcular a imagem de cada vetor da base canônica ε, pela aplicação T.

$T([1\ \ 0\ \ 0]) = [0\ \ -1\ \ 0]$

$T([0\ \ 1\ \ 0]) = [1\ \ 1\ \ 0]$

$T([0\ \ 0\ \ 1]) = [0\ \ 0\ \ 1]$

Logo teremos:

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(I)}$$

Vamos determinar $[T^{-1}]_\varepsilon^\varepsilon = [T^{-1}]$.

Sabemos que $T^{-1}([x\ \ y\ \ z]) = [x-y\ \ x\ \ z]$. Desta forma, vamos calcular a imagem de cada vetor da base canônica ε, pela aplicação T^{-1}.

$T^{-1}([1\ \ 0\ \ 0]) = [1\ \ 1\ \ 0]$

$T^{-1}([0\ \ 1\ \ 0]) = [1\ \ 1\ \ 0]$

$T^{-1}([0\ \ 0\ \ 1]) = [0\ \ 0\ \ 1]$

Logo teremos:

$$[T^{-1}] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(II)}$$

De (I) e (II)temos:

$$[T^{-1}].[T] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ondde concluimos que $[T^{-1}] = [T]^{-1}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Em cada caso abaixo, verifique quais dos operadores lineares são inversíveis, e nos casos afirmativos determine uma fórmula para T^{-1}, $[T]$ e $[T^{-1}]$.

   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (y,x)$

   b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (y-x,x)$

   c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (y,x+y)$

   d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (0,x-y)$

   e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (2x-y,0)$

   f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (y,-x)$

   g) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (-y+x,x)$

   h) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (y,x,z)$

   i) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x+y,x,z)$

   j) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (y,x,z-y)$

   l) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x-y,0,z-x)$

   m) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x+y+z,x,y)$

   n) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (0,x,x-z)$

8.7 Matrizes Semelhantes

Dado um operador linear $T : V \to V$e uma base qualquer β de V, vamos denotar $[T]_\beta^\beta$ por $[t]_\beta$, isto é, $[T]_\beta^\beta = [T]_\beta$.

Sejam $T : V \to V$ um operador linear, α e β bases de V, $[t]_\alpha$ e $[t]_\beta$ as matrizes que representam o operador T nas bases α e β, respectivamente. Sendo assim temos que

$[t]_\beta = ([I]_\alpha^\beta)^{-1} . [t]_\alpha . [I]_\alpha^\beta$, sendo $[T]_\alpha^\beta$ a matriz mudança de base β para a base α.

De fato: Dadas asa bases α e β bases de V, temos que $[T(v)]_\beta = [T]_\beta . [v]_\beta$ e $[T(v)]_\alpha = [T]_\alpha . [v]_\alpha$. Sendo $[I]_\alpha^\beta$ a matriz mudança de base β para a base α, tem-se que:

$[v]_\alpha = [I]_\alpha^\beta . [v]_\beta$ e $[T(v)]_\alpha = [I]_\alpha^\beta . [T(v)]_\beta$ desta forma ao substituir $[v]_\alpha = [I]_\alpha^\beta . [v]_\beta$ e $[T(v)]_\alpha = [I]_\alpha^\beta . [T(v)]_\beta$ em $[T(v)]_\alpha = [T]_\alpha . [v]_\alpha$, obtemos :

$[I]_\alpha^\beta . [T(v)]_\beta = [T]_\alpha . [I]_\alpha^\beta . [v]_\beta$

Sendo $[I]_\alpha^\beta$ inversível, logo teremos:

$[T(v)]_\beta = ([I^\beta_\alpha])^{-1}.[T]_\alpha \,.\, [I^\beta_\alpha] \,.\, [v]_\beta$

Sendo $[T(v)]_\beta = ([I]^\beta_\alpha)^{-1}.[T]_\alpha \,.\, [I]^\beta_\alpha \,.\, [v]_\beta$ e $[T(v)]_\beta = [T]_\beta \,.\, [v]_\beta$, teremos que:

$[T]_\beta \,.\, [v]_\beta = ([I]^\beta_\alpha)^{-1}.[T]_\alpha \,.\, [I]^\beta_\alpha \,.\, [v]_\beta$, onde concluimos que $[T]_\beta = ([I]^\beta_\alpha)^{-1}.[T]_\alpha \,.\, [I]^\beta_\alpha$.

Denotando $[I]^\beta_\alpha = M$, teremos

$[T]_\beta = M^{-1}.[T]_\alpha.M$.

Desta forma diremos que as matrizes $[T]_\beta$ e $[T]_\alpha$, são ditas **semelhantes**.

Exemplo 17: Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear. Se $\alpha = \{(1,-1),(0,-2)\}$ e $\beta = \{(-1,1),(1,-2)\}$

são bases do $\mathbb{R}^2$ e $[T]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Determine

$[t]_\beta$, fazendo uso da relação

$[T]_\beta = M^{-1}.[T]_\alpha.M$.

Solução:

Vamos em primeiro lugar determinar a matriz $M = [I]^\beta_\alpha$.

De modo geral, temos que todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se escreve na base α do seguinte modo:

$$(x,y) = x(1,-1) + (-\frac{x+y}{2})(0,-2)$$

Sendo assim temos:

$(-1,1) = -1(1,-1) + 0(0,-2)$

$$(1,-2) = 1(1,-1) + \frac{1}{2}(0,-2)$$

Logo $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

e:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

logo:

$[T]_\beta = M^{-1}.[T]_\alpha.M$

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Uma forma prática de determinar $M = [I]^\beta_\alpha$ é a seguinte:

Vamos chamar $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, a matriz das coordenadas da base $\alpha = \{(1,-1),(0,-2)\}$ e $\beta = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, a matriz das coordenadas da base $\beta = \{(-1,1),(1,-2)\}$.

Desta forma vamos determinar $M = \alpha^{-1} \,.\, \beta$, onde α^{-1} é a matriz inversa da matriz α.

Logo:

$$M = \alpha^{-1}.\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Uma propriedade entre duas matrizes semelhantes $[T]_\alpha$ e $[T]_\beta$ é a seguinte:

8.7.1 Propriedade entre matrizes semelhantes

Dadas duasa matrizes semelhantes $[T]_\alpha$ e $[T]_\beta$, temos que $\det[T]_\alpha = \det[T]_\beta$.

Demonstração:

Sendo $[t]_\alpha$ e $[t]_\beta$ semelhantes, temos que existe uma matriz $M = [I]^\beta_\alpha$ tal que $[T]_\beta = M^{-1}.[T]_\alpha M$. Destab forma calculando o determinante de $[t]_\beta$ teremos:

$\det[T]_\beta = \det(M^{-1}.[T]_\alpha M) = \det M^{-1} \,.\, \det[T]_\alpha \,.\, \det M$

$\det[T]_\beta = 1 \,.\, \det[T]_\alpha \,.\, 1 = \det[T]_\alpha$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Sejam $\alpha = \{(2,0),(0,2)\}$, $\beta = \{(-1,2),(0,1)\}$ e $\varphi = \{(0,-1),(2,0)\}$ bases do $\mathbb{R}^2$. Determine:

   a) $[I]^\alpha_\beta$

   b) $[I]^\alpha_\varphi$

   c) $[I]^\varphi_\beta$

   d) $[I]^\varphi_\alpha$

2- Sabendo que $[I]^\beta_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e a= $\{(1,0),(0,-1)\}$ detrermine a base β.

3. Sejam $\alpha = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,-1)\}$ e $\beta = \{(-1,0,1),(0,1,0),(0,1,-1)\}$ bases do $\mathbb{R}^3$.

   a) Determine $[I]^\alpha_\beta$.

b) Utilizar a matriz obtida no item a) para calcular $[v]_\beta$, sendo $[v]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Determime a matriz $[I]_\alpha^\beta$.

4. Sejam $\alpha = \{(1,-1),(0,1)\}$ e $\beta = \{(0,-1),(-2,0)\}$ bases do $\mathbb{R}^2$. Determine em cada caso abaixo a matriz M, tal que $[T]_\beta = M^{-1}.[T]_\alpha M$.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to (\mathbb{R})$, $T(x,y) = (y,x)$

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (y-x,x)$

c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (y,x+y)$

d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (2x+y, x-y)$

e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (2x-y,y)$

f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (y, -x)$

g) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (-y+x,x)$

5. Sejam $\alpha = \{(1,-1,0),(0,1,0),(0,0,2)\}$ e $\beta = \{(0,-1,0),(-2,0,0),(0,-1,1)\}$ bases do $\mathbb{R}^3$. Determine em cada caso abaixo a matriz M, tal que $[T]_\beta = M^{-1}.[T]_\alpha M$.

a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (y,x,z)$

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x+y,x,z)$

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (y,x,z-y)$

d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x-y,x,z-x)$

e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x+y,z,x,z)$

f) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (y,x,x-z)$

UNIDADE IV

Polinômio característico e Diagonalização

TEMA 09

Polinômios sobre matrizes

Seja A uma matriz quadrada definida sobre um corpo K· Definimos as potências de A por:

$A^2 = A \,.\, A;$

$A^3 = A^2 \,.\, A;$

$A^4 = A^3 \,.\, A;$

$\vdots$

$A^{n+1} = A^n \,.\, A;$ e

$A^0 = I$

Assim para qualquer polinômio

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

onde $a_i \in K$ Podemos definir o polinômio f sobre matriz A, como sendo a matriz:

$f(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \ldots + a_nA^n$

Observe que f(A) é obtido de f(x) substituindo a variável x pela matriz A e substituindo o escalar a_0 pela matriz escalar a_0I.

Se f(A) é a matriz nula então A é chamado de *zero* ou raiz de f(x)·

Exemplo 1: Dada a matriz A calcule o valor do polinômio dado em A:

a) $f(t) = t^2 - 3t - 18;\ A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$

b) $g(x) = x^2 - 5x + 1;\ A = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

c) $h(t) = t^2 + 9;\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Solução:

$$A^2 = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 15 \\ 12 & 21 \end{bmatrix}$$

$f(t) = t^2 - 3t - 18$

$f(A) = A^2 - 3A - 18I$

$$f(A) = \begin{bmatrix} 24 & 15 \\ 12 & 21 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} - 18\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = \begin{bmatrix} 24 & 15 \\ 12 & 21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 12 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -18 & 0 \\ 0 & -18 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = \begin{bmatrix} 12 & 30 \\ 24 & 6 \end{bmatrix}$$

b) $$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & -15 \\ 25 & -11 \end{bmatrix}$$

$g(x) = x^2 - 5x + 1$

$g(A) = A^2 - 5A + I$

$$g(A) = \begin{bmatrix} 34 & -15 \\ 25 & -11 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g(A) = \begin{bmatrix} 34 & -15 \\ 25 & -11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -35 & 15 \\ -25 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) $$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$h(t) = t^2 + 9$

$h(A) = A^2 + 9I$

$$h(A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$h(A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$h(A) = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2: Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$. Verifique se A é raiz dos polinômios $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ e $g(x) = x^2 - 3x + 7$·

Solução:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix}$$

$f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

$f(A) = 2A^2 - 3A + 5I$

$$f(A) = 2\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = \begin{bmatrix} 16 & -18 \\ -27 & 61 \end{bmatrix}$$

$g(A) = A^2 + 3A - 10I$

$$g(A) = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} - 10\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g(A)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Assim A não é raiz do polinômio f(x), mas é raiz do polinômio g(x).

Teorema 9.1: Sejam f e g polinômios quaisquer. Para qualquer matriz quadrada A e qualquer escalar k temos:

(i) (f + g)(A) = f(A) + g(A)

(ii) (f . g)(A) = f(A) . g(A)

(iii) (K.f(A) = k . f(A)

(iv) (f)(A) . g(A) = g(A) . f(A)

Observe que o produto de dois polinômios em A comuta como vemos no item (iv).

Demonstração:

Suponha que

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_mx^m$

e

$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n$.

Então, por definição

$f(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + ... + a_nA^n$

e

$g(A) = b_0I + b_1A + b_2A^2 + ... + b_mA^m$.

(i) Suponha que $m \le n$, assim $b_i = 0$ para $i > m$. Então

$(f + g)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x +$

$+ (a_2 + b_2)x^2 + ... + (a_n + b_n)x^n$

$(f + g)(A) = (a_0 + b_0)I + (a_1 + b_1)A +$

$+ (a_2 + b_2)A^2 + ... + (a_n + b_n)A^n$

$(f + g) = a_0\,I + b_0I + a_1A + b_1A$

$+ a_2A^2 + b_2A^2 + ... + a_nA^n + b_nA^n$

$(f + g)(A) = f(A) + g(A)$

(ii) Por definição

$(f.g)(x) = c_{n+m}x^{n+m} + ... + c_2x^2 + c_1x + c_0$

$$(f\cdot g)(x)=\sum_{k=0}^{n+m}c_kx^k,$$

onde $c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + ... + a_kb_0 = \sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}$

Portanto $(f\cdot g)(A)=\sum_{k=0}^{n+m}c_kA^k$ e

$$f(A)\cdot g(A)=\left(\sum_{i=0}^{n}a_iA^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m}b_jA^j\right)$$

$$f(A)\cdot g(A)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_ib_jA^{i+j}$$

$$f(A)\cdot g(A)=\sum_{k=0}^{n+m}c_kA^k$$

f(A).g(A) = (f.g)(A)

Deixamos como exercícios a demonstração de (iii) e (iv).

Os exemplos a seguir são para ilustrar as propriedades e para relembrar como devemos proceder para operar polinômios.

Exemplo 3: Dada a matriz $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, e os polinômios $f(t) = t^2 - 3t - 18$ e $g(t) = t^2 - 5t + 1$, calcule:

a) (f + g)(A) e f(A) + g(A);

b) (f . g)(A) e f(A) . g(A);

c) (2 . f)(A) e 2 . f(A);

d) g(A) . f(A).

Solução:

Vamos inicialmente calcular A^2 que será utilizado em todos os itens deste exemplo:

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

a) Agora sabendo que $f(t) = t^2 - 3t - 18$ e $g(t) = t^2 - 5t + 1$, temos:

$(f + g)(t) = f(t) + g(t)$

$(f + g)(t) = 2t^2 - 8t - 17$

$(f + g)(A) = 2A^2 - 8A - 17I$

$$(f+g)(A)=2\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}-8\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}-17\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$(f+g)(A)=\begin{bmatrix}-23 & 4\\ 0 & -23\end{bmatrix}$$

$f(A) = A^2 - 3A - 18I$

$$f(A)=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}-18\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$f(A)=\begin{bmatrix}-20 & 1\\ 0 & -20\end{bmatrix}$$

$g(A) = A^2 - 5A + I$

$$g(A)=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$g(A) = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$f(A) + g(A) = \begin{bmatrix} -20 & 1 \\ 0 & -20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$f(A) + g(A) = \begin{bmatrix} -23 & 4 \\ 0 & -23 \end{bmatrix}$$

Assim observamos o item (i) do teorema 9.1

(f + g)(A) = f(A) + g(A).

b) Vamos obter agora (f . g)(A)

(f . g)(t) = f(t) . g(t)

(f . g)(t) = $(t^2 - 3t - 18)(t^2 - 5t + 1)$

(f . g)(t) = $(t^2 - 3t - 18)(t^2 - 5t + 1)$

(f . g)(t) = $t^4 - 8t^3 - 2t^2 + 87t - 18$

(f . g)(A) = $A^4 - 8A^3 - 2A^2 + 87A - 18I$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(f \cdot g)(A) = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 8\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$+87\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 18\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(f \cdot g)(A) = \begin{bmatrix} 60 & -63 \\ 0 & 60 \end{bmatrix}$$

Calculando f(A).g(A), temos:

$$f(A) \cdot g(A) = \begin{bmatrix} -20 & 1 \\ 0 & -20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$f(A) \cdot g(A) = \begin{bmatrix} 60 & -63 \\ 0 & 60 \end{bmatrix}$$

Assim observamos o item (ii) do teorema 9.1 (f . g)(A) = f(A) . g(A).

c) Obteremos agora (2 . f)(A):

(2 . f)(t) = 2 . f(t) = $2(t^2 - 3t - 18)$

(2 . f)(t) = $2t^2 - 6t - 36$

(2 . f)(A) = $2A^2 - 6A - 36I$)

$$(2 \cdot f)(A) = 2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 36\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2 \cdot f(A)) = \begin{bmatrix} -40 & 2 \\ 0 & -40 \end{bmatrix}$$

Calculando 2 . f(A), obtemos:

$$2 \cdot f(A) = 2\begin{bmatrix} -20 & 1 \\ 0 & -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 2 \\ 0 & -40 \end{bmatrix}$$

Assim observamos o item (i) do teorema 9.1

(kf)(A) = k . f (A).

d) Finalmente vamos calcular g(A) . f(A) :

$$g(A) \cdot f(A) = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -20 & 1 \\ 0 & -20 \end{bmatrix}$$

$$g(A) \cdot f(A) = \begin{bmatrix} 60 & -63 \\ 0 & 60 \end{bmatrix}$$

Aqui podemos concluir dois fatos interessantes:

1º Exemplificamos o item (iv) f(A) . f(A) = g(A) . f(A), do teorema 9.1;

2º Apesar do produto de matrizes não ser comutativo, temos aqui, pelo teorema 9.1, um grupo de matrizes que comutam: Se duas matrizes são imagens de duas matrizes quaisquer, por funções polinomiais, então essas matrizes comutam no produto de matrizes.

9.1 Matrizes e operadores lineares

Seja $T : V \to V$ um operador linear no espaço vetorial V. Podemos definir potências de T através da operação de composição de operadores, isto é,

$T^2 = T \circ T$;

$T^3 = T^2 \circ T$;

$T^4 = T^3 \circ T$;

$\vdots$

$T^{n+1} = T^n \circ T$;

e

$T^0 = I$.

Da mesma forma que fizemos com as matrizes, podemos definir também para qualquer polinômio

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$,

o operador f(T):

$f(T) = a_0I + a_1T + a_2T^2 + ... + a_nT^n$

onde I é agora o operador identidade. Também dizemos que T é um zero ou raiz de f(x), se f(T) é igual ao operador nulo, ou seja, f(T) = 0.

As relações do **Teorema 9.1** são válidas para operadores lineares, assim como eram para matrizes.

Seja A a representação matricial do operador linear T. Então f(A) é a representação matricial de f(T) e, em particular, f(T) = 0 se e somente se f(A) = 0.

Exemplo 4: Seja T : $IR^2 \rightarrow IR^2$, a transformação linear definida por T(x,y) = (x – 2y, 4x + 5y). Verifique se T é raiz dos polinômios abaixo.

a) $f(t) = t^2 - 3t + 7$

b) $g(t) = t^2 - 6t + 13$

Solução:

Em primeiro lugar calcular vamos obter a matriz [T]:

T(1,0) = (1 – 2 . 0,4 . 1 + 5 . 0) = (1,4) =

1 . (1,0) + 4 . (0,1)

T(0,1) = (0 – 2 . 1,4 . 0 + 5 . 1) = (–2,5) =

–2 . (1,0) + 5 . (0,1)

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$[T]^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 24 & 17 \end{bmatrix}.$$

Assim

a) $f(t) = t^2 - 3t + 7$

$f([t]) = [t]^2 - 3[t] + 7I$

$$f([T]) = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 24 & 17 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f[(T)] = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$$

b) $g(t) = t^2 - 6t + 13$

$g([T]) = [T]^2 - 6[T] + 13I$

$$g([T]) = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 24 & 17 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + 13\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g[(T)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como f(A) ≠ 0 e g(A) = 0, concluímos que *A* é raiz apenas do polinômio *g*(*x*), e portanto *T* também o é.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Calcule f(A), g(A), f(B), g(B) onde $f(x) = 2x^2 - 5x + 6$ e $g(x) = t^3 - 2t^2 + t + 3$.

2. Seja $B = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 0 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$. Calcule a matriz real *A* tal que $B = A^3$.

3. Verifique a validade do teorema 9.1 para os polinômios f e g, e para a matriz A do exercício 1.(Para a propriedade (iii) tome k = –3)

4. Verifique a validade do teorema 9.1 para os polinômios f e g, e para a matriz B do exercício 1.(Para a propriedade (iii) tome k = 5)

5. Sabendo que as propriedades demonstrada para o teorema 9.1 são válidas também para operadores lineares, verifique-as para o operador T ; $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por T(x,y,z) = (2x,y,z), e os polinômios $f(t) = t^3 - 2t^2 + t + 3$ e $g(t) = t^3 - 4t^2 + 5t - 2$.

9.3 Polinômio Característico

9.3.1 Polinômio característico de uma matriz

Seja A = $[a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n. A matriz

$M = A - tI_n$,

onde I_n é a matriz identidade de ordem n e t é uma incógnita, pode ser obtida subtraindo-se t de cada elemento da diagonal de A.

Definimos o polinômio característico p(t) da matriz A por

$p(t) = \det(M) = \det(A - tI_n)$

Teorema 9.2: Toda matriz A é raiz de seu polinômio característico.

Demonstração:

De fato, para $p(t) = \det(A - tI_n)$ basta substituirmos *t* por *A*, então obtemos

$p(A) = \det(A - AI_n) = \det(A - A)$

$p(A) = 0$, como queríamos.

Exemplo 5: Determine o polinômio característico da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Solução:

$p(t) = \det(A - tI_2)$

$$p(t) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$p(t) = \det\begin{bmatrix} 1-t & 3 \\ 2 & 5-t \end{bmatrix}$$

$p(t) = (1 - t)(5 - t) - 6$

$p(t) = t^2 - 6t - 1$

Exemplo 6. Determine o polinômio característico da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$.

Solução

$p(t) = \det(A - tI_3)$:

$$p(t) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} - t\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$p(t) = \det\begin{bmatrix} 1-t & 1 & 2 \\ 0 & 3-t & 2 \\ 1 & 3 & 9-t \end{bmatrix}$$

$p(t) = t^3 - 13t^2 + 31t - 17$

Exemplo 7. Determine o polinômio característico da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solução:

$p(t) = \det(A - tI_4)$

$$p(t) = \det\left(\begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - t\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$p(t) = \det\begin{pmatrix} 5-t & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3-t & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5-t & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix}$$

$p(t) = (5 - 3)(3 - t)(5 - t)(1 - t)$

$p(t) = t^4 - 14t^3 + 68t^2 - 130t + 75$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Determine o polinômio característico de cada uma das matrizes abaixo:

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

Teorema 9.3: Matrizes semelhantes possuem o mesmo polinômio característico.

Demonstração:

Sejam A e V matrizes semelhantes, digamos que $B = PAP^{-1}$, onde P é inversível.

Sabemos que $tI = PtIP^{-1}$, assim temos

$P_B(t) = \det(B - tI) = \det(PAP^{-1} - tI)$

$P_B(t) = \det(PAP^{-1} - PtIP^{-1})$

$P_B(t) = \det[P((A - tI)P^{-1}]$

$P_B(t) = \det(P).\det(A - tI).\det(P^{-1})$

$P_B(t) = \det(A - tI)$

$P_B(t) = P_A(t)$

9.5 Polinômio característico de um operador linear

Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear sobre um espaço vetorial V de dimensão finita. Definimos o polinômio característico p(t) de T como sendo o polinômio característico de qualquer representação matricial de T.

Exemplo 8: Determine o polinômio característico de cada um dos operadores abaixo:

a) $F : IR^2 \to IR^2$, definida por F(x,y) = (3x + 5y, 2x – 7y).

b) $D : V \to V$, definida por $D(f) = \frac{df}{dt}$, onde V é o espaço das funções de base B = {sent, cost}.

Solução:

a) Vamos determinar inicialmente a matriz A que define *F*, na base canônica de IR^2.

$$\left.\begin{array}{l} F(1,\ 0) = (3,\ 2) \\ F(0,\ 1) = (5,\ -7) \end{array}\right\} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$$

$p(t) = \det(A - tI_2)$

$$p(t) = \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} - t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$p(t) = \det\begin{bmatrix} 3-t & 5 \\ 2 & -7-t \end{bmatrix}$$

$p(t) = (3 - t)(-7 - t) - 10$

$p(t) = t^2 + 4t - 31$

b) Novamente determinaremos inicialmente a matriz A que define D, na base B = {sen t, cos t}.

D(sent) = cost = 0 . sent + 1 . cost

D(cost) = sent = –1 . sent + 0 . cost

Assim obtemos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$p(t) = \det(A - tI_2)$

$$p(t) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$p(t) = \det\begin{bmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{bmatrix}$$

$p(t) = (-t)(-t) - 1$

$p(t) = t^2 + 1$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Mostre que uma matriz A e sua transposta A^t possuem o mesmo polinômio característico.

2. Seja A uma matriz quadrada qualquer e f(t) um polinômio. Mostre que:

   a) $f(PAP^{-1})^n = PA^nP^{-1}$

   b) $f(PAP^{-1}) = Pf(A)P^{-1}$

   c) $f(A^T) = [f(A)]^T$

   d) Se A é simétrica então f(A) é simétrica.

3. Calcule o polinômio característicos dos operadores abaixo:

   a) T(x,y,z) = (x + 2y + 3z, 3x + 4z, 6x + 4y + 5z)

   b) T(x,y,z,w) = (x + y + 2z + 2w, 3y + 3z + 4w, 5z + 5w, 6w)

   c) T(x,y) = (x – 2y, 4x + 5y)

4. Determine o polinômio característico para o operador linear $D : V \to V$, definida por $D(f) = \frac{df}{dt}$, onde V é o espaço das funções contínuas de uma variável real de base B = {cost, sent}.

9.7 Autovalores e autovetores

9.7.1 Autovalores e autovetores de matrizes

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Um escalar é chamado de autovalor de A se existe um vetor (coluna) v não nulo tal que

$Av = \lambda v$.

Qualquer vetor Satisfazendo esta relação é chamado de autovetor de A associado ao autovalor .

Observe que qualquer múltiplo escalar kv de um autovetor v associado a é também um autovetor, com efeito:

$A(kv) = k(Av) = k(\lambda v) = \lambda(kv)$

Os termos valor característico ou valor próprio e vetor característico ou vetor próprio são também usados no lugar de autovalores e autovetores.

9.7.2 Propriedades dos autovalores e autovetores de matrizes

Propriedade 1: Seja A uma matriz quadrada. São equivalentes:

(i) O escalar é um autovalor de A.

(ii) A matriz M = A – λI é singular.

(iii) O escalar é uma raiz do polinômio característico p(t) de A.

Propriedade 2: Seja A uma matriz quadrada sobre o corpo dos complexos. Então a matriz A possui ao menos um autovalor.

Propriedade 3: Os autovalores de uma matriz diagonal são os elementos de sua diagonal principal.

Propriedade 4: Sejam v_1, v_2,...,v_n são autovetores de uma matriz A associados aos autovalores distintos λ_1, λ_2, ... ,λ_n. Então v_1, v_2,...,v_n são linearmente independentes.

Propriedade 5: (Teorema da matriz inversível)

Seja A é uma matriz quadrada. Então A é inversível se, e somente se, o escalar zero não é autovalor para A.

Observação:

É muito simples determinar se um vetor é autovetor de uma matriz, como também é simples decidir se um escalar é um autovalor, como mostram os exemplos abaixo.

Exemplo 9: Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ será que u e v são autovetores de A?

Solução:

$$Au = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 20 \end{bmatrix} = -4 \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Au = –4 . u

$$Av = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 11 \end{bmatrix} \neq \lambda \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix},$$

Concluímos então que u é autovetor de A associado ao autovalor – 4, ao passo que v não é autovetor de A, pois Av não é múltiplo escalar de v.

Exemplo 10: Mostre que 7 é um autovalor da matriz A do exemplo anterior e determine os autovetores associados.

Solução:

Como o 7 é autovalor de A, então satisfaz a equação

Au = 7u

onde $u = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é autovetor associado ao auto valor 7. Assim temos

Au – 7u = 0

(A – 7I)u = 0

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} - 7 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -6x + 6y \\ 5x - 5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Temos então um sistema possível, mas indeterminado, pois uma equação é múltipla escalar da outra, portanto pelo escalonamento obtemos

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = x$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim temos que todo vetor da forma $x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, com x ≠ 0, é um autovetor de *A* associado ao autovalor = 7.

9.7.3 Autovalores e autovetores de operadores lineares.

Seja T um operador linear. Um escalar é chamado de *autovalor* de T se existe um vetor v não nulo tal que T(v) = λv.

Qualquer vetor Satisfazendo esta relação é chamado de autovetor de T associado ao autovalor .

O conjunto W_λ de todos os autovetores de V associados a , formam um subespaço de V chamado de *auto-espaço*. Com efeito, $0 \in W_\lambda$ pois T(0) = 0 = λ0, para v_1, $v_2 \in W_\lambda$ temos

$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$

$T(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$

$T(v_1 + v_2) = \lambda(v_1 + v_2)$

portanto $v_1 + v_2 \in W_\lambda$, e

$T(kv) = kT(v) = k(\lambda v) = \lambda(kv)$, para todo *k* no corpo.

De maneira análoga podemos demonstrar que cada autovetor associado ao respectivo autovalor de uma matriz quadrada gera um subespaço.

9.7.4 Propriedades dos autovalores e autovetores de operadores lineares

Seja T um operador linear sobre um espaço de dimensão finita V:

Propriedade 1: T pode ser representado por uma matriz diagonal D se e somente se existe uma base B de V formada apenas por autovetores de T. Neste caso, os elementos diagonais de D são os autovalores correspondentes.

Propriedade 2: Seja T um operador linear. São equivalentes:

(i) O escalar é um autovalor de T.

(ii) O operador linear $T - \lambda I$ é singular.

(iii) O escalar é uma raiz do polinômio característico p(t) de T.

Propriedade 3: Seja V um espaço vetorial complexo. Então T possui ao menos um autovalor.

Propriedade 4: Sejam $v_1, v_2,...,v_n$ são autovetores não nulos de um operador linear T associados aos autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2,...,\lambda_n$. Então $v_1, v_2,...,v_n$ são linearmente independentes.

Propriedade 5: Seja $p(t) = (t - a_1)(t - a_2)...(t - a_n)$ o polinômio característico de T. Então T é semelhante a matriz diagonal $D = \text{diag}(a_1, a_2,...,a_n)$.

Propriedade 6: Seja A uma representação matricial de T. Então T é diagonalizável se, e somente se, A é diagonalizável.

Exemplo 11: Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$.

a) Determine todos os autovalores e autovetrores correspondentes.

b) Determine matrizes P e D tais que P é não singular e $D = P^{-1}AP$ é diagonal.

Solução:

Nesse exemplo, mostraremos os passos necessários para obtermos o polinômio característico de matrizes de ordem 2 de uma maneira bem simples.

a) Para qualquer matriz A de ordem dois seu polinômio característico é dado por:

$p(t) = t^2 - \text{tr}(A)t + \det(A)$, onde tr(A) é o traço de A (somatório dos elementos da diagonal principal de A) e det(A) o determinante de A.

Assim

$p(t) = t^2 + 3t - 10$

cujas raízes são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -5$ e são também autovalores de A.

Vamos agora determinar os autovetores associados a cada auto valor:

Seja $v_1(x,y)$ o auto vetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 2$. Assim

$Av_1 = \lambda_1 v$

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3x - 4y \\ 2x - 6y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x - 4y \\ 2x - 8y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x - 4y = 0 \\ 2x - 8y = 0 \end{cases}$$

$\{x - 4y = 0$

$\{x = 4y$

A solução do sistema é então $(4y,y) = y(4,1)$. Assim $v_1 = (4,1)$ é o auto vetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 2$.

Procedendo da mesma maneira para $\lambda_1 = -5$, temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -5\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3x - 4y \\ 2x - 6y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5x \\ 5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8x - 4y \\ 2x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 8x - 4y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

$\{2x - y = 0$

$\{y = 2x$

A solução do sistema é então (x,2x) = x(1,2). Assim v_2 = (1,2) é o auto vetor associado ao autovalor $\lambda_2 = -5$.

b) Seja P a matriz cujas colunas são v_1 e v_2.

Então $P = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, obtendo a matriz inversa

de P, $P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$,

temos $D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. É verdade que = 2 é autovalor para $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$?

2. É verdade que $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ é autovetor para $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$?

3. É verdade que $\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ é autovetor para $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$?

4. É verdade que = lor para $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$?

5. Determine uma base para o auto-espaço associado a cada autovalor.

   a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\lambda = 1$, $\lambda = 5$

   b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$, $\lambda = 10$

   c) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, $\lambda = 3$

   d) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$, $\lambda = 3$

6. Para $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ determine um autovalor sem fazer qualquer cálculo e justifique sua resposta.

7. Explique por que uma matriz quadrada de ordem 2 pode ter no máximo dois autovalores distintos. Explique por que uma matriz quadrada de ordem *n* pode ter no máximo *n* autovalores distintos.

8. Seja um autovalor para a matriz inversível A. mostre que $^{-1}$ é um autovalor para A^{-1}.

9. Mostre que A e A^t têm os mesmos autovalores.

10. Considere uma matriz quadrada A de ordem n com a propriedade de que a soma de cada linha tem o mesmo valor s. Mostre que s é um autovalor para A.

11. Determinar autovalores, em IR, e autovetores de

    a) T(x,y) = (y,x)

    b) T(x,y) = (–y,x)

    c) T(x,y,z) = (x,y,0)

    d) T(x,y) = (x + y, x – y)

TEMA 10

DIAGONALIZAÇÃO

Agora temos as ferramentas matemáticas necessárias para determinar quando uma matriz quadrada A ou uma matriz associada a um operador T sobre um espaço de dimensão finita V é diagonalizável. Antes começarmos a falar de diagonalização propriamente, veremos um método para calcular A^k, onde A é uma matriz quadrada.

10.1 Determinação de A^k

A informação sobre autovalores e autovetores contida numa matriz A pode ser apresentada através de uma fatoração útil do tipo

$A = PDP^{-1}$.

A fatoração acima nos permite calcular A^k rapidamente para valores grandes de k, uma idéia fundamental em muitas aplicações de *álgebra linear*.

Exemplo1: Se $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, então :

$$D^2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix}$$

$$D^3 = \begin{bmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{bmatrix}$$

Em geral $D^k = \begin{bmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix}$, para $k \geq 1$.

Agora vejamos para uma matriz qualquer $A = PDP^{-1}$, com P uma matriz inversível e D uma matriz diagonal:

Exemplo 2:. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine uma fórmula para A^k, dado que $A = PDP^{-1}$, onde

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solução:

O aplicando o método para obter a inversa de P temos:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim

$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1})$

$$A^2 = PD\underbrace{(P^{-1}P)}_{I}DP^{-1}$$

$A^2 = PD^2P^{-1}$

$A^3 = A^2A = (PD^2P^{-1})(PDP^{-1})$

$$A^3 = PD^2\underbrace{(P^{-1}P)}_{I}DP^{-1}$$

$A^3 = PD^3P^{-1}$

Em geral para $k \geq 1$,

$A^K = PD^KP^{-1}$

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^k = \begin{bmatrix} 2\cdot 5^k - 3^k & 5^k - 3^k \\ 2\cdot 3^k - 2\cdot 5^k & 2\cdot 3^k - 5^k \end{bmatrix}$$

Teorema 10.1 (Teorema da diagonalização): Uma matriz quadrada A de ordem n é diagonalizável se, e somente se, A tem n autovetores linearmente independentes.

De fato, $A = PDP^{-1}$, onde D é uma matriz diagonal se, e somente se, as colunas de P são os n autovetores de A *linearmente independentes. Nesse caso, os elementos da diagonal principal de D* são os autovalores de A *associados, respectivamente, aos autovalores em P*.

Em outras palavras se *A é a matriz de um operador linear* $T : V \rightarrow V$, com V espaço vetorial de dimensão finita, *A é diagonalizável se e somente se existem autovetores suficientes para formar uma base para* V. Chamamos tal base de *base de autovetores*.

Demonstração:

Primeiro, observe que se P for qualquer matriz quadrada de ordem n com colunas v $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ e se D é qualquer matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$, então

$AP = A[v_1, v_2, \ldots, v_n]$

$AP = [Av_1, Av_2, \ldots, Av_n]$ (1)

Enquanto $PD = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$

$PD = [\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, ..., \lambda_N v_n]$ (2)

Suponha, agora, que A *seja diagonalizável e que $A = PDP^{-1}$.* Então multiplicando essa relação à direita por P, obtemos AP = PD. Nesse caso (1) e (2) implicam que

$[v_1, v_2, ..., v_n] = [\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, ..., \lambda_N v_n]$ (3)

Igualando as colunas, obtemos

$Av_1 = \lambda_1 v_1$

$Av_2 = \lambda_2 v_2$

$\vdots$

$Av_n = \lambda_n v_n$ (4)

Como P é inversível suas coluna são linearmente independentes. Mais ainda, como essas colunas são não nulas, (4) mostra que λ_1, $\lambda_2, ..., \lambda_n$ são autovalores e v_1, $v_2, ..., v_n$ são os autovetores associados. Essa argumentação prova as primeiras duas afirmações do teorema.

Finalmente dados quais quer n autovetores v_1, $v_2, ..., v_n$, use-os para montar as colunas de P e use os autovalores associados λ_1, $\lambda_2, ..., \lambda_n$ para montar D. Por (1) – (3), AP = PD. E se P é inversível concluímos que

$A = PDP^{-1}$.

Exemplo 3: Diagonalize a seguinte matriz, se possível,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução:

Diagonalizar uma matriz é determinar uma matriz inversível P e uma matriz diagonal D tal que

$A = PDP^{-1}$.

Vamos fornecer, ao resolver este exemplo, um algoritmo para determinar os autovalores e autovetores da matriz A e se existe ou não uma matriz P inversível tal que $D = P^{-1}AP$ é diagonal.

Passo 1: Determinar os autovalores de *A***.**

O polinômio característico de A é

$p(t) = \det(A - tI)$

$$p(t) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} - t\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$p(t) = -t^3 - 3t^2 + 4$

$p(t) = -(t - 1)(t + 2)^2$

Assim os autovalores são 1 = 1 e 2 = –2.

Passo 2: Determinar os autovetores de *A*.

Não esqueça que para termos *A* diagonalizável é necessário que encontremos 3 vetores linearmente independentes, pois *A* é de ordem 3. O método estudado na seção **9.7** fornece uma base para cada auto-espaço:

Para $\lambda_1 = 1$, a base é $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Para $\lambda_2 = -2$, a base são $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Você pode verificar que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é um conjunto linearmente independente.

Passo 3: Monte *P* a partir dos vetores do passo 2.

Não importa a ordem dos vetores, mas usando a ordem escolhida no passo 2 temos

$P = [v_1\ v_2\ v_3]$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Passo 4: Monte *D* a partir dos autovalores associados.

Neste passo temos que tomar o cuidado de escolher os autovalores na mesma ordem escolhida para as colunas de P. use o autovalor 2 = - 2 duas vezes, uma para cada autovetor que a ele está associado.

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

É sempre bom verificar se *P* e *D* realmente funcionam. Para evitar calcular P^{-1}, verifique simplesmente que AP = PD. Isso é equivalente a A = PDP^{-1} quando P é inversível.

Exemplo 4: Diagonalize a seguinte matriz, se possível,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -3 & -6 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução:

O polinômio característico é o mesmo do exemplo 1.

$p(t) = -t^3 - 3t^2 + 4$

$p(t) = -(t-1)(t+2)^2$

Assim os autovalores são 1 = 1 e 2 = –2.

Mas ao calcularmos os autovetores vemos que cada auto-espaço é de dimensão 1.

Para $\lambda_1 = 1$, a base é $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Para $\lambda_2 = -2$, a base é $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Portanto A é impossível obter uma base para o IR^3. Pelo teorema da diagonalização A não é diagonalizável.

Teorema 10.2: Uma matriz quadrada de ordem n com n autovalores distintos é diagonalizável.

Demonstração:

Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n$ autovetores associados aos n autovalores distintos da matriz *A*, então $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente, pela propriedade 4 de autovalores e autovetores de uma matriz *A*. portanto pelo **Teorema 10.1** é diagonalizável.

Observação:

Não é necessário que uma matriz de ordem *n* tenha *n* autovalores distintos para ser diagonalizável. A matriz do exemplo 1, de ordem 3, desta seção é diagonalizável e possui apenas dois autovalores distintos.

Teorema 10.3: Seja *A* uma matriz quadrada de ordem *n* cujos autovalores distintos são $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$.

(i) para $1 \leq k \leq p$, a dimensão do auto-espaço para *k* é menor ou igual a multiplicidade do autovalor *k*.

(ii) A matriz *A* é diagonalizável se e somente se a soma das dimensões dos auto-espaços distintos é igual a *n*, e isso acontece se e somente se a dimensão do auto-espaço para cada *k* for igual à multiplicidade de *k*.

(iii) Se *A* é diagonalizável e B_k é uma base para o auto-espaço associado a *k* para cada *k*, então a coleção total dos vetores de B_1, $B_2, \ldots, B_p$ forma uma base de autovetores para o IR^n.

Exemplo 5: Seja $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Determine todos os autovalores de *A*.

b) Determine um conjunto maximal *S* de auto vetores linearmente independentes de *A*.

c) *A* é diagonalizável? Se for , determine *P* tal que $D = P^{-1}AP$ é diagonal.

Solução:

a) Vamos calcular o polinômio característico de *A*. Para isso veremos um método prático para determiná-lo sempre que a matriz for de ordem 3:

$p(t) = t^3 - tr(A)t^2 + (A_{11} + A_{22} + A_{33})t - det(A)$, onde tr(*A*) é o traço de *A*, A_{ii} é a matriz do cofator a_{ii} de *A* e det(*A*) é o determinante de *A*.

$tr(A) = 4 + 5 + 2 = 11$

$det(A) = 40 - 2 - 2 + 5 + 8 - 4 = 45$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 12$, $A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 9$,

$A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 18$

$p(t) = t^3 - 11t^2 + 39t - 45$

Considerando que p(t) possui uma raiz racional ela é um dos seguintes números:

$\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5,\ \pm 9,\ \pm 15,\ \pm 45.$

Testando cada raiz e utilizando o método de Briott-Ruffini temos

3	1	–11	39	–45
	1	–8	15	0

Assim t = 3 ´3 raiz de $p(t)$ e t – 3 é um de seus fatores, portanto

$p(t) = (t - 3)(t - 5)(t - 3) = (t - 3)^2(t - 5)$

Assim = 3 e = 5 são os autovalores de A.

b) Utilizando os métodos dos exemplos anteriores:

i) Para = 3, fazendo Av = v obtemos a equação

$x + y - z = 0$

$x + y = z$

cujo conjunto solução é dado por

$(x,y,x + y) = x(1,0,1) + y(0,1,1)$

Assim obtemos os vetores u = (1, 0, 1) e v = (0, 1, 1) linearmente independentes.

ii) = 5, fazendo Aw = w obtemos o sistema

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 2z \end{cases}$$

cujo conjunto oulução é (z,2z,z) = z(1,2,1)

Assim w = (1, 2, 1) é uma solução.

Desta forma

S = {u,v,w} = {1,0,1},(0,1,1),(1,2,1)} é um conjunto maximal de autovetores de linearmente independentes de A, pela propriedade 4 de autovalores e autovetores.

c) A é diagonalizável pois possui três vetores linearmente independentes.

Para obtermos P basta tomarmos os autovetores como colunas de P.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Note que se A é diagonalizável, a diagonal principal da matriz D é formada pelos autovalores de A, na ordem que foram tomados alores.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Calcule A^8 onde $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

2. Diagonalize as matrizes abaixo, se possível. Os autovalores dos exercícios: (c) {1, 2, 3}, (d) {5, 1}.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

3. A é uma matriz quadrada de ordem 5 com dois autovalores. Um auto-espaço é tridimensional e o outro é bidimensional. A é diagonalizável? Por quê?

4. A é uma matriz quadrada de ordem 4 com três autovalores. Um auto-espaço é unidimensional e um dos outros é bidimensional. É possível que A não seja diagonalizável? Justifique sua resposta.

5. Se B = PAP^{-1} e x é um autovetor para A associado a um autovalor , então Px é um autovetor para B associado também a .

6. Demonstre o **Teorema 10.3.**

10.3 Diagonalização de matrizes simétricas

Há muitas matrizes reais A quadradas que não são diagonalizáveis. Na verdade, algumas matrizes reais não possuem autovalor (real). Contudo, se A é uma matriz real simétrica, então esses problemas não ocorrem. Especificamente, temos os seguintes teoremas:

Teorema 10.4: Seja A uma matriz real simétrica. Então toda raiz λ de seu polinômio característico é real.

Teorema 10.5: Seja A uma matriz real simétrica. Suponha que u e v são vetores de A pertencentes a autovalores distintos λ_1 e λ_2 .

Então u e v são ortogonais, isto é, (u,v) = 0.

Os dois teoremas acima nos dão o seguinte resultado fundamental.

Teorema 10.6: Seja A uma matriz real simétrica. Então existe uma matriz ortogonal P tal que $A = PDP^{-1}$, onde D é uma matriz diagonal.

Neste caso *A* é dita ortogonalmente diagonalizável.

Exemplo 6: Diagonalize ortogonalmente a matriz simétrica $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$.

Solução:

$p(t) = \det(A - tI)$

$$p(t) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} - t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$p(t) = \det\left(\begin{bmatrix} 2-t & -2 \\ -2 & 5-t \end{bmatrix}\right)$$

$p(t) = t^2 - 7t + 6$

$p(t) = (t - 6)(t - 1)$

Assim os autovetores são 1 = 6 e 2 = 1.

Para $\lambda_1 = 6$, a base é $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

Para $\lambda_2 = 1$, a base é $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Normalizando os autovetores temos $u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ e $u_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$.

$$P = [u_1 \quad u_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Diagonalize a matriz simétrica $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

2. Determine a matriz ortogonal *P* tal que $D = PAP^{-1}$ é diagonal:

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

10.5 Polinômio Minimal

Seja *A* uma matriz quadrada qualquer. Seja *J*(*A*) o conjunto de todos os polinômios *f*(*t*) que possuem *A* com raiz, isto é, para os quais *f*(*A*) = 0. O conjunto *J*(*A*) é não vazio uma vez que o **Teorema 9.2** nos diz que o polinômio característico $p_A(t)$ de *A* pertence a *J*(*A*). Seja *m*(*t*) o *polinômio mônico* de menor grau em *J*(*A*). (tal polinômio existe e é único.) Chamamos *m*(*t*) de polinômio minimal da matriz *A*.

Um polinômio f(t) é dito ***mônico*** *quando o coeficiente de seu termo de maior grau é um.*

O polinômio mínimo *m*(*t*) de um operador linear *T* é definido da mesma forma que é definido para uma matriz quadrada, claro tendo o operador *T* como raiz. Contudo, para qualquer polinômio *f*(*t*), temos

$f(T) = 0$ se e só se $f(A) = 0$

onde *A* é qualquer representação matricial de *T*. Desta forma *T* e *A* possuem o mesmo polinômio minimal. Assim os teoremas a seguir se aplicam para os operadores lineares e para as matrizes.

Teorema 10.7: O polinômio mínimo m(t) de uma matriz A (operador linear) divide qualquer polinômio que possui A como raiz. Em particular m(t) divide o polinômio característico p(t) de A.

Demonstração:

Seja *f*(*t*) um polinômio tal que *f*(*A*) = 0 e *m*(*t*) o polinômio minimal de *A*. Pelo algoritmo da divisão, existem polinômios *q*(*t*) e *r*(*t*) tais que

$f(t) = m(t) \;\; q(t) + r(t)$.

Temos então que *r*(*t*) = 0 ou *r*(*t*) tem grau menor que *m*(*t*). Substituindo *t* por *A*, temos

$f(A) = m(A) \;\; q(A) + r(A)$

$0 = 0 \;\; q(A) + r(A)$

$r(A) = 0$.

Se $r(t)$ 0, então o grau de $r(t)$ é menor que o grau de $m(t)$ e possui A como raiz, o que contraria a definição de polinômio mínimo. Assim concluímos que $r(t) = 0$ e dessa forma

$f(t) = m(t)q(t)$,

isto é, $m(t)$ é um divisor de $f(t)$.

Teorema 10.8: O polinômio característico p(t) e o polinômio mínimo m(t) de uma matriz A possuem os mesmos fatores irredutíveis.

Teorema 10.9: Um escalar é um autovalor da matriz A se e só se é uma raiz do polinômio mínimo de A.

Exemplo 7: Determine o polinômio mínimo da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Solução:

$p(t) = \det(A - tI)$

$$p(t) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} - t\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$p(t) = \det\left(\begin{bmatrix} 2-t & 2 & -5 \\ 3 & 7-t & -15 \\ 1 & 2 & -4-t \end{bmatrix}\right)$$

$p(t) = t^3 - 5t^2 + 7t - 3$

$p(t) = (t-1)^2(t-3)$

O polinômio minimal $m(t)$ deve ser um divisor de $p(t)$. Além disso, qualquer fator irredutível de $p(t)$, isto é, $t - 1$ e $t - 3$, devem ser fatores de $m(t)$. Assim $m(t)$ pode ser:

$f(t) = (t-3)(t-1)$

ou

$g(t) = (t-3)(t-1)^2$

Sabemos pelo **Teorema 9.2** que g(A) = f(A) = p(A) = 0. Então devemos verificar se A é raiz f(t):

$f(t) = (t-3)(t-1)$

$f(A) = (A - I)(A - 3I)$

$$f(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 6 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & -15 \\ 1 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 4 & -4 & 6 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico dessas duas matrizes é $p(t) = (t-2)(t-1)^2$. Determine o polinômio mínimo $m(t)$ de cada uma dessas matrizes.

2. Determine o polinômio mínimo de cada uma das matrizes abaixo:

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

3. Para cada uma das matrizes B simétricas dadas, determine seus autovalores, um conjunto maximal S de autovetores ortogonais e uma matriz ortogonal P tal que $D = P^{-1}AP$ é diagonal.

a) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 17 \end{bmatrix}$

UNIDADE V

Produtos Internos, Operadores Lineares e Auto-Adjuntos

TEMA 11

Tema 11: Produto interno

O produto interno, que já foi mencionado antes na disciplina Álgebra Linear I, será apresentado de modo mais geral nesta seção e adotado sistematicamente a partir daqui. Trata-se de uma noção que completa e enriquece a estrutura de um espaço vetorial, permitindo a utilização de uma linguagem geométrica altamente sugestiva e o destaque de tipos especiais de operadores, os quais admitem uma análise mais profunda de suas propriedades, como veremos a seguir.

Os axiomas de espaço vetorial não são suficientes para abordar certas noções geométricas como ângulo, perpendicularismo, comprimento, distância, etc. Isso se torna possível com a introdução de um produto interno.

Um produto interno num espaço vetorial tg E é um funcional bilinear simétrico e positivo em E. Mais precisamente, um produto interno é uma função E x E $\to \mathbb{R}$, que ssocia a cada par de vetores u,v$\in$E um número real $\langle u,v\rangle$ chamado “produto interno de u por v”, de modo que sejam válidas as seguintes propriedades, para quaisquer u, u’, v, v’$\in$E e $\alpha\in\mathbb{R}$.

i) Bilinearidade:

$\langle u - u', v\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u',v\rangle$,

$\langle \alpha u,v\rangle = \alpha\langle u,v\rangle$,

$\langle u, v + v'\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,v'\rangle$,

$\langle u, \alpha v\rangle = \alpha\langle u,v\rangle$

ii) Comutatividade (simetria): $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$**;**

iii) Positividade: $\langle u,u\rangle > 0$ se u $\neq$ 0.

Como $\langle 0,v\rangle = \langle 0 + 0,v\rangle = \langle 0,v\rangle + \langle 0,v\rangle$, segue-se que $\langle 0,v\rangle = \langle v,0\rangle = 0$ para todo v$\in$E.

Resulta da positividade que se $\langle u.v\rangle = 0$ para todo v$\in$E então u = 0. Com efeito, se fosse u $\neq$ 0, teríamos $\langle u,v\rangle \neq 0$ pelo menos quando v = u.

Segue-se dessa observação que se u,u’$\in$E são vetores tais que $\langle u,v\rangle = \langle u',v\rangle$ para todo v$\in$E então u = u’. Com efeito, isso implica que $\langle u - u',v\rangle$ para todo v$\in$E, logo u = u’ = 0 e u = u’. O número não-negativo $|u| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$ chama-se a **norma** ou o **comprimento** do vetor u.

Com essa notação, tem-se $|u|^2 = \langle u,u\rangle$ e a igualdade $\langle u + v, u + v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle$ lê-se:

$|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2\langle u,v\rangle$.

Quando $|u| = 1$ diz-se que u$\in$E é um vetor unitário. Todo vetor u $\neq$ 0 se escreve como $u = |u|.u'$, em que u’ é um vetor unitário. Basta pôr $u' = |u|^{-1}.u$.

Exemplo 1

No espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, o produto interno canônico os vetores $u = (\alpha_1,...,\alpha_n)$ e $v = (\beta_1,...,\beta_n)$ e é definido por $\langle u,v\rangle = \alpha_1\beta_1 + ... + \alpha_n\beta_n$. Esse é o produto interno que consideraremos em $\mathbb{R}^n$, salvo aviso em contrário.

Exemplo 2

Consideremos $\mathbb{R}^2$ como o modelo aritmético do plano euclidiano, no qual se introduziu um sistema de coordenadas cartesianas. Dados $u = (\alpha_1\alpha_2)$ e $v = (\beta_1\beta_2)$, os números

$$|u| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$$

$$|v| = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}$$

medem realmente os comprimentos das flechas que representam esses vetores.

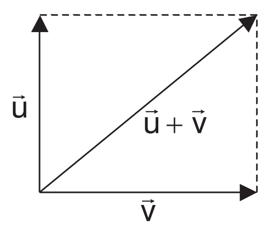
Suponhamos u $\neq$ 0, v $\neq$ 0 e chamemos de θ o ângulo formado por essas flechas. Afirmamos que o produto interno $\langle u,v\rangle = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_2$ acima definido é igual a $|u||v|\cos\theta$. Isso será provado em três passos:

1. Se os vetores u e v são perpendiculares, então

   $\langle u,v\rangle = 0 = |u||v|\cos 90^o$.

   Com efeito, por um lado,

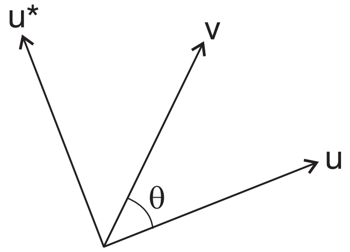
   $|u + v|^2 = \langle u + v, u + v\rangle = |u|^2 + |v|^2 + 2\langle u,v\rangle$ e por outro lado, pelo Teorema de Pitágoras, $|u + v|^2 = |u|^2 + |u|^2$



   Logo $\langle u.v\rangle = 0$.

2. Se $|u| = |v| = 1$ então $\langle u,v\rangle = \cos\theta$.

   Com efeito, tomando o vetor unitário u* perpendicular a u, temos, pela definição de seno e cosseno, $v = \cos\theta.\ u + \operatorname{sen}\theta.\ u^*$. Veja figura abaixo.



   Tomando o produto interno de ambos os membros desta igualdade por u vem

   $\langle u,v\rangle = \cos\theta.\ \langle u,u\rangle + \operatorname{sen}\theta\ .\ \langle u,u^*\rangle$. Como $\langle u,u\rangle = 1$ e $\langle u,u^*\rangle = 0$ pelo primeiro passo, temos $\langle u,v\rangle = \cos\theta$.

3. **Caso geral** – Pomos $u = |u|.u'$ e $v = |v|.v'$ onde $u' = \left(\frac{1}{|u|}\right)u$ e $v' = \left(\frac{1}{|v|}\right)v$ são vetores unitários.

   Então, $\langle u,v\rangle = |u||v|\langle u',v'\rangle = |u||v|\cos\theta$.

   Vemos, em particular, que os vetores u,v formam um ângulo agudo quando $\langle u,u\rangle > 0$, um ângulo obtuso quando $\langle u,v\rangle < 0$ e um ângulo reto quando $\langle u,u\rangle = 0$.

Exemplo 3

Sejam V = M(2,2) as matrizes quadradas de ordem 2 reais e o produto interno dado pela expressão (comprove que realmente é um produto interno, testando as propriedades):

$$\left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right\rangle = ae + 2bf + 3cg + dh$$

Vamos calcular o ângulo entre as matrizes

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, segundo esse produto interno.

Então,

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 1$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\| = 2 \text{ e } \left\| \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{10}$$

Portanto $\cos\theta = \dfrac{1}{2\sqrt{10}}$ e assim,

$\theta = \arccos\dfrac{1}{2\sqrt{10}}$.

Exemplo 4

Se V é o espaço de funções contínuas no intervalo [0,1] dadas f_1 e $f_2 \in V$, definimos

$$\langle f_1, f_2\rangle = \int_0^1 f_1(t) f_2(t)\,dt$$

Poderemos verificar que as quatro condições da definição são satisfeitas em cada exemplo e, portanto, $\langle , \rangle$ é um produto interno.

Nesse caso, a norma da função f_1 é

$$|f_1| = \sqrt{\int_a^b f_1(x)^2\,dx}$$

Esse produto interno é utilizado no estudo das séries de Fourier.

Observação – Seja E um espaço vetorial de dimensão finita arbitrário. Dada uma base $\{u_1,...u_n\} \subset E$, podemos definir um produto interno em E pondo, para

$u = \Sigma\beta_i u_i$, $\langle u,v\rangle = \Sigma\alpha_i\beta_i$, por definição.

Isso mostra que todo espaço vetorial de dimensão finita pode ser munido de um produto interno (fato verdadeiro em geral, pois qualquer espaço vetorial possui base, mas não entraremos nesse terreno). Assim, quando nos referirmos a um espaço munido de um produto interno, não estaremos com isso atribuindo uma propriedade especial a esse espaço, mas apenas dizendo que, entre os possíveis produtos internos que nele podem ser introduzidos, um particular foi escolhido e fixado.

Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$. Diz-se que dois vetores v e w de V são ortogonais (em relação a esse produto interno) se $\langle v,w\rangle = 0$. No caso em que v e w são ortogonais, escrevemos

$v \perp w$.

Propriedades:

i) $0 \perp v$ para todo $v \in V$.

ii) $v \perp w$ implica que $w \perp v$.

iii) Se $v \perp w$ para todo $w \in V$, então $v = 0$.

iv) Se $v_1 \perp w$ e $v_2 \perp w$, então $v_1 + v_2 \perp w$.

v) Se $v \perp w$ e λ é um escalar, $\lambda v \perp w$.

Vamos demonstrar a primeira delas, e você poderá provar facilmente as outras, usando as propriedades do produto interno.

i) Para mostrar que 0 é ortogonal a todo vetor v, lembremos que 0 = 0. v e, portanto, $\langle 0,v\rangle = \langle 0.v,v\rangle = 0\langle v,v\rangle = 0$.

Um conjunto $X \subset E$ diz-se ortogonal quando dois vetores distintos quaisquer em X são ortogonais. Se, além disso, todos os vetores de X são unitários, então X chama-se um conjunto ortonormal. Portanto o conjunto $X \subset E$ é ortonormal se, e somente se, dados $u,v \in X$ tem-se $\langle u,v\rangle = 0$ se $u \neq v$ e $\langle u,v\rangle = 1$ se $v = u$.

Uma base ortonormal é uma base de E que é um conjunto ortonormal.

Teorema 1

Num espaço vetorial E com produto interno, todo conjunto ortogonal X de vetores não-nulos é L.I.

Demonstração – Sejam $v_1,...,v_n \in X$. Temos $\langle v_i,v_j\rangle = 0$ se $i \neq j$. Se $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0$ é uma combinação linear nula desses vetores, então, para cada i = 1,2,...,n, tomamos o produto interno de ambos os membros dessa igualdade por v_i e temos $\alpha_1\langle v_1,v_1\rangle + ... + \alpha_n\langle v_n,v_i\rangle + = 0$. Logo $\alpha_i\langle v_i,v_i\rangle = \alpha_i|v_i|^2$, pois todos os produtos internos $\langle v_j,v_i\rangle$, com $j \neq i$, são nulos em virtude da ortogonalidade de X. Além disso, como os vetores pertencentes ao conjunto X são todos não-nulos, resulta de $\alpha_i|v_i|^2 = 0$ que $\alpha_i = 0$. Assim, os coeficientes da combinação linear $\sum\alpha_i v_i = 0$ são todos iguais a zero, e os vetores do conjunto X são, portanto, linearmente independentes.

Exemplo 5

A base canônica $\{e_1,...e_n\} \subset \mathbb{R}^n$ é ortonormal: tem-se $\langle e_i,e_j\rangle = \delta_{ij}$, onde $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 1$ se i = j. No plano $\mathbb{R}^2$, os vetores u = (1,1) e v = (–1,1) são ortogonais.

Pondo

$$u' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ e } v' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

o conjunto $\{u',v'\} \subset \mathbb{R}^2$ é uma base ortonormal.
$|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2\langle u,v\rangle$

Quando u e v são ortogonais, a igualdade se torna

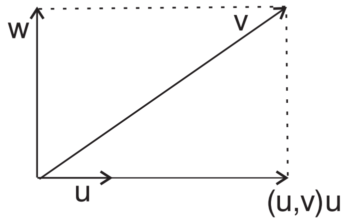
$|u+v|^2 = |u|^2 + |u|^2$. Esta é a versão do *Teorema de Pitágoras* para um espaço vetorial com produto interno.

Num espaço vetorial E com produto interno, seja u um vetor unitário. Dado qualquer $v \in E$, o vetor $\langle u,v\rangle$. u chama-se a **projeção ortogonal** de v sobre o eixo que contém u. A justificativa para esta denominação está no fato de que, escrevendo $w = v - \langle u,v\rangle u$, tem-se $v = \langle u,v\rangle u + w$, onde w é perpendicular a u. Com efeito, tomando o produto interno de u por ambos os membros da igualdade $w = v - \langle u,v\rangle u$, tem-se

$\langle u,w\rangle = \langle u,v\rangle - \langle u,v\rangle\langle u,u\rangle = \langle u,v\rangle - \langle u,v\rangle = 0$,

pois $\langle u,u\rangle = 1$.

Como na figura abaixo:



Quando se tem apenas $u \neq 0$, o eixo que contém u é o mesmo que contém o vetor unitário

$$u' = \frac{u}{|u|}\left(= |u|^{-1} \cdot u\right)$$

A projeção ortogonal de v sobre este eixo é, portanto, igual a $\langle u',v\rangle u'$, ou

seja, $\left(\frac{\langle u,v\rangle}{u,u}\right) \cdot u$. Usaremos a notação

$$pr_u(v) = \frac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle} \cdot u$$

para indicar a projeção ortogonal do vetor v sobre o eixo que contém vetor não-nulo u.

Se $z = pr_u(v)$, tem-se $v = z + w$, com $w \perp z$. Pelo Teorema Pitágoras, $|v|^2 = |z|^2 + |w|^2$. Em particular, vemos que $|z| \leq |v|$, isto é, o comprimento da projeção $pr_u(v)$ é menor do que ou igual ao primento de v.

Ora, a norma do vetor $pr_u(v)$ é igual a $\left|\frac{\langle u,v\rangle}{|u|}\right|$.

Segue-se, então, que, para quaisquer $u,v \in E$, tem-se $\left|\frac{\langle u,v\rangle}{|u| \leq |v|}\right|$, ou seja $|\langle u,v\rangle| \leq |u|.|v|$ (*desigualdade de Schwarz*).

A rigor, o argumento acima prova a desigualdade de Schwarz apenas no caso em que $u \neq 0$. Mas ela é óbvia no caso em que u = 0. Logo vale em geral.

Um importante complemento da desigualdade de Schwarz é que e a igualdade $|\langle u,v\rangle| = |u|\,|v|$ se, e somente se, um dos vetores u,v é múltiplo do outro. Isso resulta do raciocínio acima, pois, no Teorema Pitágoras $|v|^2 = |z|^2 + |w|^2$, dizer $|v| = |z|$ significa que $w = 0$, isto é, que v é múltiplo de u.

Resulta da desigualdade de Schwarz que num espaço vetorial com produto interno a norma satisfaz a desigualdade triangular:

$|u + v| \leq |u| + |v|$

Como se trata de números não-negativos, para provar essa desigualdade basta mostrar que

$|u + v| \leq |u| + |v|$

$|u + v|^2 \leq (|u| + |v|)^2$

Ora,

$|u + v|^2 = \langle u + v, u + v\rangle$

$= |u|^2 + |v|^2 + 2\langle u,v\rangle$

$\leq |u|^2 + |v|^2 + 2|u|\,|v|$

$= (|u| + |v|)^2$

pois $\langle u,v\rangle \leq |u|\,|v|$ pela desigualdade de Schwarz.

Vale a igualdade $|u + v| = |u| + |v|$ somente quando um dos vetores u,v é um múltiplo não-negativo do outro. Com efeito, pelo argumento acima, $|u + v| = |u| + |v|$ ocorre quando $\langle u,v\rangle = |u|\,|v|$, o que é óbvio quando $u = 0$ e implica $v = \alpha u$ quando $u \neq 0$. Nesse caso,

$|u|\,|v| = \langle u,v\rangle = \alpha|u|^2$, logo $\alpha \geq 0$.

Além da desigualdade triangular, a norma goza ainda das seguintes propriedades, de imediata verificação:

$|u| > 0$ se $u \neq 0$ e $|\alpha.u| = |\alpha|u|$

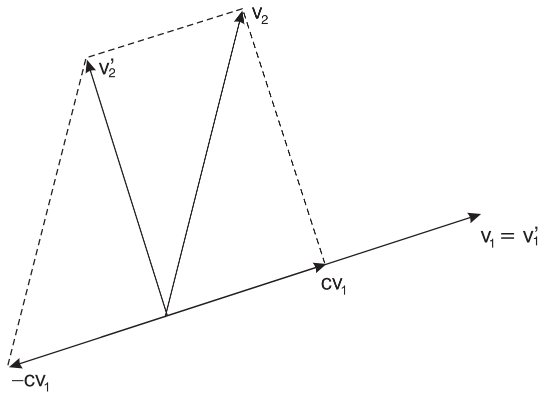
Em particular, $|-u| = |u|$.

11.2 PROCESSO DE ORTOGONALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT

A partir de uma base qualquer de um espaço vetorial, existe um processo para se obter uma base ortonormal. Inicialmente, vamos dar uma descrição desse processo de ortonormalização para uma base $\beta = \{v_1,v_2\}$.

Seja $v_1' = v_1$ Precisamos encontrar, a partir de v_2, um novo vetor v_2 ortogonal a v_1', isto é, $\langle v_2', v_1'\rangle = 0$. Para isso, tomamos $v_2' = v_2 - cv_1'$, onde c é um número escolhido de modo que $\langle v_2', v_1'\rangle = 0$, isto é, $\langle v_2 - cv_1', cv_1'\rangle = 0$.

Isso significa que $c = \dfrac{\langle v_2, v_1'\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle}$



Ficamos, então, com

$v_1' = v_1$

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1'\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle} v_1'$$

Observe que v'_2 foi obtido de v_2, subtraindo-se deste a projeção do vetor v_2 na direção de v_1', e que v_1' e v_2 são vetores ortogonais não-nulos. Podemos, então, normalizá-los,

$$u_1 = \frac{v_1'}{||v_1'||} \text{ e } u_2 = \frac{v_2'}{||v_2'||}$$

obtendo uma base $\beta = \{u_1,u_2\}$ que é ortonormal. Como você pode afirmar que u_1 e u_2 são L.I.? (Veja o Teorema 1).

Exemplo 6

Seja $\beta = \{(2,1),(1,1)\}$ uma base do R^2. Vamos obter, a partir de β, uma base ortonormal em relação ao produto interno usual.

Sejam $v_1 = (2,1)$ e $v_2 = (1,1)$.

$v_1' = v_1 = (2,1)$

$v_2' = v_2 - cv_1'$

Como já vimos, a condição de que v'_2 seja ortogonal a v'_1 implica que

$$c = \frac{\langle v_2, v_1'\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle}$$

e, portanto

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1'\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle} v_1' =$$

$$= (1,1) - \frac{\langle (1,1),(2,1)\rangle}{\langle (2,1),(2,1)\rangle}(2,1) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

Normalizando esses vetores, obtemos:

$$u_1 = \frac{v_1'}{||v_1'||} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

e

$$u_2 = \frac{v_2'}{||v_2'||} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Então, $\beta' = \{u_1, u_2\}$ é uma base ortonormal.

O procedimento de ortogonalização de dois vetores pode ser generalizado para uma base

$\beta' = \{v_1,...,v_n\}$. Tomemos, como no caso anterior, $v_1' = v_1$

$$v_2' = v_2 - cv_1' \text{ onde } c = \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle}$$

Então, v_1' é ortogonal a v_2'.

Vamos procurar agora um vetor v_3' que seja ortogonal ao mesmo tempo a v_1' e v_2'. Por analogia ao caso anterior, vamos estabelecer que $v_3' = v_3 - mv_2' - kv_1'$ e determinar os valores de m e k tais que $\langle v_3', v_2' \rangle = 0$ e $\langle v_3', v_2' \rangle = 0$. Desenvolvendo estas duas condições, obtemos:

$\langle v_3', v_1' \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle v_3 - mv_2' - kv_1', v_1' \rangle = 0$

Assim, como $\langle v_2', v_1' \rangle = 0$, temos $\langle v_3', v_2' \rangle = 0$ se,

e somente se, $k = \dfrac{\langle v_3, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle}$

Da mesma forma, $\langle v_3', v_2' \rangle = 0$ se, e somente se,

$$m = \frac{\langle v_3, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle}.$$

E, portanto, $v_3' = v_3 - \dfrac{\langle v_3, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2' - \dfrac{\langle v_3, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1'$

Procedendo de maneira análoga, obtemos os vetores $v_4', \dots, v_n'$.

Assim, a partir de uma base $\beta' = \{v_1,...,v_n\}$ de um espaço vetorial V, construímos a base ortogonal $\{v_1', \dots, v_n'\}$ dada por:

$v_1' = v_1$

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle v_1'}$$

$$v_3' = v_3 - \frac{\langle v_3, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2' - \frac{\langle v_3, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1'$$

$\vdots$

$$v_n' = v_n - \frac{\langle v_n, v_{n-1}' \rangle}{\langle v_{n-1}', v_{n-1}' \rangle} v_{n-1}' - \dots - \frac{\langle v_n, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1'$$

Este procedimento é conhecido como **processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.**

Se quisermos agora obter uma base ortonormal, basta normalizarmos os vetores v'_1. Isto é,

tomando $u_i = \dfrac{v_1'}{||v_1'||}$, obtemos a base

$\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ de vetores ortonormais.

Observamos que se os primeiros m vetores da base $\{v_1,...v_n\} \subset E$ já formarem uma base ortonormal do subespaço por eles gerado, então o processo de Gram-Schmidt transforma essa base numa base normal $\{u_1,...u_n\} \subset E$ na qual $u_1 = v_1, ..., u_m = v_m$

Segue-se daí que, dado um subespaço vetorial $F \subset E$, toda base normal de F estende-se a uma base ortonormal de E: basta estendê-la a uma base qualquer de E e depois ortonormalizar esta última por Gram-Schmidt.

Exemplo 7

Seja $\beta = \{(1,1,1),(0,2,1),(0,0,1)\}$ uma base de R^3. Vamos obter, a partir de β, uma base ortonormal em relação ao produto usual. Sejam

$v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (0,2,1)$, $v_3 = (0,0,1)$.

$v_1' = v_1 = (1,1,1)$

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' = (0,2,1) - \frac{\langle (0,2,1),(1,1,1) \rangle}{\langle (1,1,1),(1,1,1) \rangle}(1,1,1) =$$

$$(0,2,1) - \frac{3}{3}(1,1,1) = (-1,1,0).$$

$$v_3' = v_3 - \frac{\langle v_3, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2' - \frac{\langle v_3, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1'$$

$$= (0,0,1) - \frac{\langle (0,0,1),(-1,1,0) \rangle}{\langle (-1,1,0),(-1,1,0) \rangle}(-1,1,0) -$$

$$-\frac{\langle (0,0,1),(1,1,1) \rangle}{\langle (1,1,1),(1,1,1) \rangle}(1,1,1) = (0,0,1) - 0 - \frac{1}{3}(1,1,1) =$$

$$\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Normalizando esses vetores, obteremos a base ortonormal; temos:

$$u_1 = \frac{v_1'}{||v_1'||} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$u_2 = \frac{v_2'}{||v_2'||} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$u_3 = \frac{v_3'}{||v_3'||} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 2\right).$$

Portanto a base $\beta' = \{u_1,u_2,u_3\}$ é ortonormal.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Seja $\beta = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,2,0)\}$. Ache uma base ortonormal β' de $\mathbb{R}^3$, em relação ao produto interno usual.

2. Seja $V = \mathbb{R}^2$. Sejam $v_1(x_1,y_1)$ e $v_2(x_2,y_2)$. Se

   $f(v_1,v_2) = 2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2$.

   a) Mostre que f é um produto interno.

   b) Seja $\beta = \{(-1,1),(1,1)\}$. Ache uma base ortogonal β' de $\mathbb{R}^2$ em relação ao produto interno definido por f.

3. Considere o subespaço W de $\mathbb{R}^3$ gerado por $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,1)$ e $v_3 = (1,-1,-1)$. Sendo $<,>$ o produto interno canônico:

   a) Ache $W^\perp$.

   b) Exiba uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $Im(T) = W$ e $\ker(T) = W^\perp$.

4. Seja $V = \mathbb{R}^3$ e $S = \{(1,0,1),(1,1,0),(2,1,1)\}$.

   a) Encontre $S^\perp$.

   b) Encontre uma base ortogonal para S e $S^\perp$.

   c) Se S fosse $[(1,0,1),(1,1,0),(2,1,1)]$, qual seria $S^\perp$? Nesse caso, encontre uma base ortogonal para S e $S^\perp$.

5. Seja $A = (a_{ij})_{n \times n}$. Definimos o traço de

   $A, Tr(A)$ por $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

   a) Calcule $Tr\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

   b) $Tr(A.B) = Tr(B.A)$?

   c) $Tr(A) = Tr(A^t)$?

   d) $Tr(A) = (Tr(A^{-1}))^{-1}$?

   e) $Tr(A.B) = Tr(A).Tr(B)$?

6. Sejam A e B matrizes de M(2,2).

   Define-se $<A,B> = Tr(B^t . A)$.

   a) Verifique que $<A,B>$ é um produto interno.

   b) Exiba uma base ortonormal segundo este produto interno, a partir da base $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

TEMA 12

OPERADORES LINEARES ESPECIAIS

Mostraremos, nesta seção, como o produto interno permite-nos associar a cada transformação linear $A : E \to F$ uma nova transformação $A^* : E \to F$, chamada a adjunta de A. (Em espaços sem produto interno, também existe uma noção de adjunta, mas aí se trata de uma transformação linear $F^* \to E^*$ no dual de F no dual de E. O produto interno dá-nos condição de permanecer com E e F. Isso é particularmente interessante no caso de um operador linear $A : E \to E$).

Teorema 1

Sejam V um espaço vetorial real com produto interno $\langle , \rangle$, e $\alpha = \{u_1,...,u_n\}$ base ortonormal de V.

Então, se v e w são vetores de V com

$$[v]_\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } [w]_\alpha = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \text{ temos}$$

$\langle v,w \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$

Em outras palavras, ao trabalharmos com uma base ortonormal, para efetuar o produto interno de dois vetores basta multiplicar as coordenadas correspondentes e somar.

Prova: $v = x_1u_1 + x_2u_2 + ... + x_nu_n$

e $w = y_1u_1 + y_2u_2 + ... + y_nu_n$

$\langle u,w \rangle = \langle x_1u_1 + ... + x_nu_n, y_1u_1 + ... + y_nu_n \rangle$

$= \langle x_1u_1 + ... + x_nu_n, y_1u_1 \rangle + \langle x_1u_1 + ... + x_nu_n, y_2u_2 \rangle +$

$+ ... + \langle x_1u_1 + ... + x_nu_n, y_nu_n \rangle$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_iy_1 \langle u_i,u_1 \rangle + \sum_{i=1}^{n} x_iy_2 \langle u_i,u_2 \rangle + ... + \sum_{i=1}^{n} x_1y_n \langle u_i,u_n \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_iy_j \langle u_i,u_j \rangle$$

Mas como $\langle u_i,u_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i \neq j \end{cases}$, os únicos termos não-nulos são aqueles onde $i = j$. Logo, $\langle u,w \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$

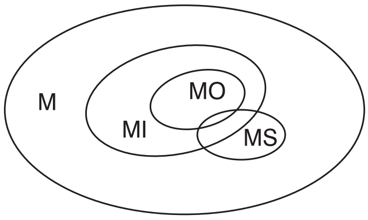
A adjunta dá-nos, por assim dizer, uma visão da transformação A sob um novo ângulo. Essa mudança de ponto de vista é reveladora, especialmente quando ocorre a existência de relações entre A e A^*.

Definição – Seja A uma matriz n x n real e A^t sua transposta.

a) Se $A = A^t$, dizemos que A é uma matriz simétrica.

b) Se $A . A^t = A^t . A = I$ (ou seja, a inversa de A é A^t), dizemos que A é uma matriz ortogonal.

Em Álgebra Linear I, já vimos exemplos de matrizes simétricas. Quanto à segunda definição, as matrizes ortogonais determinam um subconjunto das matrizes inversíveis. Efetivamente a relação entre matrizes simétricas, inversíveis e ortogonais é indicada pela figura abaixo.



M: matrizes

MI: matrizes inversíveis

MO: matrizes ortogonais

MS : matrizes simétricas

Como exemplos de matrizes ortogonais temos:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para verificar isso, basta multiplicar cada uma pela sua transposta, obtendo, assim, a matriz identidade. Calculando, temos, no primeiro caso:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta & 0 \\ 0 & \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que a transformação associada à primeira matriz é uma rotação.

Consideremos agora três propriedades das matrizes ortogonais.

Teorema 2

Seja A uma matriz ortogonal. Então, detA = ±1

Prova: Como A é ortogonal, A. A^t = I.

Então, det(A . A^t) = det I e

det(A).(detA^t) = 1.

Mas det(A) = det(A^t).

Assim, $(\det(A))^2$ = 1, ou seja, det(A) = ±1.

Teorema 3

Uma matriz é ortogonal se, e somente se, as colunas (ou as linhas) são vetores ortonormais.

Prova: Seja

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Na primeira parte da prova, queremos mostrar que, se A é ortogonal, isso implica que

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11}w_1 + \cdots + a_{n1}w_n \\ &\vdots \qquad\quad \cdots \\ v_n &= a_{1n}w_1 + \cdots + a_{nn}w_n \end{aligned}$$

são ortonormais (o mesmo vale para as linhas). Para isso, façamos o produto de A pela sua transposta.

pois A’A = I.

$$A^t \cdot A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a^2_{11} + \ldots + a^2_{1n} & \cdots & a_{11}a_{1n} + \ldots + a_{n1}a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n}a_{11} + \ldots + a_{nn}a_{n1} & \cdots & a^2_{1n} + \ldots + a^2_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \text{ pois } A^tA = I.$$

Observamos que $a_{11}^2 + \ldots + a_{n1}^2 = 1$. Mas isso quer dizer que $\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$ é unitário. Da mesma forma, percorrendo a diagonal principal, vemos que cada vetor-coluna da matriz A é unitário. O que encontramos saindo dessa diagonal? O elemento na posição i, j(i ≠ j) é $a_{1i}a_{1j} + \ldots + a_{ni}a_{nj}$, e seu valor deve ser zero.

Mas isso diz que o produto interno $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$ por $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$ é nulo, ou seja, vetores-coluna são dois a dois ortogonais quando i ≠ j.

Está terminada, então, a primeira parte da prova. Ainda falta provar que se os vetores-coluna (linha) de uma matriz forem ortonormais, a matriz será ortogonal. Vamos deixar esta prova para você, já que ela é apenas uma adaptação da prova dada acima.

Apresentaremos agora uma situação em que as matrizes ortogonais ocorrem naturalmente.

Exemplo 1

Seja V = R^2 e α = {(1,0),(0,1)} e β {(cosθ, –senθ),(senθ . cosθ)} bases ortonormais. Calculemos a matriz de mudança de base $[I]^{\alpha}_{\beta}$. Como β é uma base ortonormal, podemos encontrar as coordenadas dos elementos da base α em relação a β por meio dos coeficientes de Fourier.

$$(1{,}0) = \frac{\langle (1{,}0),(\cos\theta,-\text{sen}\theta)\rangle}{\langle (\cos\theta,-\text{ sen}\theta),(\cos\theta,-\text{ sen}\theta)\rangle}(\cos\theta,-\text{sen}\theta) +$$

$$+ \frac{\langle (1{,}0)(\text{sen}\,q,\cos\theta)\rangle}{\langle (\text{sen}\,\theta,\cos\theta),(\text{sen}\,\theta,\cos\theta)\rangle}(\text{sen}\,\theta,\cos\theta) =$$

= cosθ(cosθ, –senθ) + senθ(senθ,cosθ)

(0,1) = senθ(cosθ, –senθ) + cosθ(senθ, cosθ)

Assim,

$$[I]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Observe que esta matriz é ortogonal. Tal resultado vale em geral.

Teorema 4 – Se V é um espaço vetorial com produto interno, e α e β são bases ortonormais de V, então a matriz de mudança de base $[I]_\beta^\alpha$ é uma matriz ortogonal.

Prova: Sejam $\alpha = \{v_1,...,v_n\}$ e $\beta = \{w_1,...,w_n\}$

$$[I]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Como β é base, existem números a_{ij} tais que

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11}w_1 + \cdots + a_{n_1 w_n} \\ &\vdots \\ v_n &= a_{1n}w_1 + \cdots + a_{nn}w_n \end{aligned}$$

Mas α é ortonormal e por isso cada v_i é unitário. Isto é, $1 = \langle v_i,v_i\rangle$. Além disso, β é ortonormal e, assim, podemos encontrar $\langle v_i,v_i\rangle$ multiplicando as coordenadas. **(Veja Teorema 1)**

Portanto $1 = a_{it}^2 + ... + a_{ni}^2$. Em outras palavras, cada vetor-coluna de $[I]_\beta^\alpha$ é unitário. Mostraremos agora que esses vetores são ortogonais e portanto $[I]_\beta^\alpha$ é ortogonal. **(Teorema 3)**

Como v_i e v_j são ortogonais quando $i \neq j$, $0 = \langle v_i , v_j\rangle = a_{1i},a_{1j} + ... + a_{ni}a_{nj}$ ou seja, $\begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$ são ortogonais sempre que $i \neq j$.

Assim, a afirmação de que $[I]_\beta^\alpha$ é ortogonal é verdadeira.

Observamos, então, que nessa situação $[I]_\alpha^\beta([I]_\alpha^\beta)' = I$ ou seja, $([I]_\alpha^\beta)' = ([I]_\alpha^\beta)^{-1}$, e ainda mais $([I]_\alpha^\beta)' = [I]_\beta^\alpha$

Isso facilita o processo seguido para se encontrar $[I]_\alpha^\beta$ conhecendo $[I]_\beta^\alpha$ onde α e β são bases ortonormais. $[I]_\alpha^\beta$ é nada mais que a transposta de $[I]_\beta^\alpha$. Estamos agora em condições de introduzir os conceitos de operador ortogonal e auto-adjunto.

12.2 OPERADORES AUTO-ADJUNTOS E ORTOGONAIS

Agora definiremos os operadores associados às matrizes estudadas na secção anterior, e estabeleceremos relações entre estes e o produto interno, e descobriremos as particularidades de seus autovalores. Isso nos permitirá chegar a importantes resultados sobre diagonalização na próxima secção.

Definição – Seja V um espaço vetorial com produto interno, α uma base ortonormal e $T : V \to V$ um operador linear. Então:

a) T é chamado um **operador auto-adjunto** se $[T]_\alpha^\alpha$ é uma matriz simétrica.

b) T é chamado um **operador ortogonal** se $[T]_\alpha^\alpha$ é uma matriz ortogonal.

Os operadores auto-adjuntos (ou ortogonais) estão bem definidos no sentido de que o fato de um operador ser auto-adjunto (ou ortogonal) não depende da base ortonormal escolhida, isto é, se $[T]_\alpha^\alpha$ for simétrica (ou ortogonal) numa determinada base ortonormal α, então $[T]_\beta^\beta$ também será simétrica (ou ortogonal) para qualquer outra base ortonormal β. Mostremos esse fato no caso do operador ser auto-adjunto. (O caso ortogonal é demonstrado de maneira similar).

Sejam α e β bases ortonormais e suponhamos que $[T]_\alpha^\alpha$ seja simétrica.

Queremos mostrar que $[T]_\beta^\beta$ também é simétrica, isto é, $([T]_\beta^\beta)' = [T]_\beta^\beta$.

Observamos que

$([T]_\beta^\beta) = ([I]_\alpha^\beta)^{-1} \cdot [T]_\alpha^\alpha \cdot [I]_\alpha^\beta$

Também

$([T]_\alpha^\beta)^{-1} = ([T]_\alpha^\beta)$,

pois α e β são ortonormais **(Teorema 4)**. Então,

$[T]_\beta^\beta = ([I]_\alpha^\beta)' \cdot [T]_\alpha^\alpha \cdot [I]_\beta^\beta$

Tomando a transposta, temos:

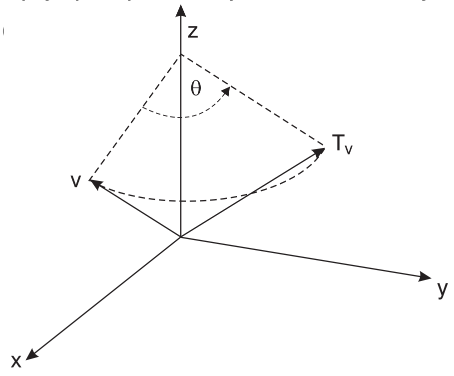
$([T]_\beta^\beta)' = ([I]_\alpha^\beta)' \cdot ([T]_\alpha^\alpha)' \cdot [I]_\alpha^\beta$, pois

$(([I]_\alpha^\beta))'' = [I]_\alpha^\beta$ e $[T]_\alpha^\alpha$ é simétrica.

Exemplo 2

Consideremos $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, a rotação de um ângulo θ em torno do eixo-z. Podemos expressar T por:

$T(x,y,z) = (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta,\ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta,\ z)$



Tomando a base canônica α e calculando a matriz de T nessa base, temos

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Já vimos que esta matriz é ortogonal e, portanto, T é um operador ortogonal.

Exemplo 3

Seja T : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, onde

$T(x,y) = (2x - 2y, -2x + 5y)$.

Se α é a base canônica de $\mathbb{R}^2$, a matriz de T é

$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, uma matriz simétrica e, portanto, T é operador auto-adjunto.

Estudemos agora as propriedades desses operadores.

Teorema 5 – Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle,\rangle$ e T : V $\to$ V linear. Então, T auto-adjunto implica que $\langle Tv,w\rangle = \langle v,Tw\rangle$ para todo $v,w \in V$.

Prova – (caso n = 2)

Sejam $\alpha = \{v_1,v_2\}$ uma base ortonormal,
$v = x_1v_1 + y_1v_2$ e $w = x_2v_1 + y_2v_2$

ou $[v]_\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ e $[w]_\alpha = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$

Como T é auto-adjunto, $[T]_\alpha^\alpha$ é simétrica.

Seja $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

Então, $[Tv]_\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 \\ bx_1 + cy_1 \end{bmatrix}$

e $[Tw]_\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_2 + by_2 \\ bx_2 + cy_2 \end{bmatrix}$

Assim, $\langle Tv,w\rangle = (ax_1 + by_1)x_2 + (bx_1 + cy_1)y_2$ e $\langle v,Tw\rangle = x_1(ax_2 + by_2) + y_1(bx_2 + cy_2)$ e, portanto, $\langle Tv,w\rangle = \langle v,Tw\rangle$

Teorema 6 – Seja T : V $\to$ V auto-adjunto e λ_1,λ_2 autovalores distintos de T e v_1 e v_2 os autovetores associados λ_1 e λ_2 respectivamente. Então, $v_1 \perp v_2$.

Prova:

$\lambda_1\langle v_1,v_2\rangle = \langle \lambda_1 v_1,v_2\rangle = \langle Tv_1,v_2\rangle = \langle v_1,Tv_2\rangle$

$= \langle v_1,\lambda_2 v_2\rangle = \lambda_2\langle v_1,v_2\rangle$

Então, $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle v_1,v_2\rangle = 0$

Como $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, vem que $\langle v_1,v_2\rangle = 0$ ou $v_1 \perp v_2$.

As propriedades dadas a seguir são conseqüências dos resultados anteriores, mas são tão importantes que as destacaremos numa secção especial.

π EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Seja $\alpha = \{w_1,w_2,w_3\}$ uma base de V, um espaço vetorial real com produto interno $<,>$.

   $[u]_\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $[v]_\alpha = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$.

   Se $<u,v> = 2$, a base α é ortonormal?

2. Sejam $\alpha = \{(1,1),(2,0)\}$ e $\beta = \{(-1,0),(2,1)\}$. A Partir das bases α e β, construa bases ortonormais usando o Gram-Schmidt. Denotando estas bases respectivamente por α' e β', mostre que $[I]_{\beta'}^{\alpha'}$

3. Seja $T(x,y,z) = (2x + y, x + y, y - 3z)$ de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ com produto interno canônico.

   a) Mostre que T é umoperador auto-adjunto mas não ortogonal.

   b) Se $v = (2, -1, 5)$ e $w = (3,0,1)$, verifique que $<Tv,w> = <v,Tw>$.

   c) Exiba uma base de autovalores de T e verifique que é uma base ortogonal.

   d) A partir da base obtida no item c) obtenha uma base ortonormal.

4. Seja o operador linear T : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação à base canônica é $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$.

   Exiba uma base uma base ortonormal de vetores.

TEMA 13

OPERADORES AUTO-ADJUNTOS

13.1 Introdução

O Teorema Espectral para operadores auto-adjuntos, a ser provado nesta seção, é um dos resultados mais relevantes da Álgebra Linear. Serão também demonstradas algumas de suas conseqüências, entre as quais se destaca o Teorema dos Valores Singulares.

Um operador linear $A : E \to E$, num espaço vetorial munido de produto interno, chama-se auto-adjunto quando $A = A^*$, ou seja, quando

$\langle Au,v \rangle = \langle u,Av \rangle$ para quaisquer $u,v \in E$.

Se $A, B : E \to E$ são operadores auto-adjuntos e $\alpha \in \mathbb{R}$ então $(A + B)^* = A^* + B^* = A + B$ e $(\alpha A)^* = \alpha A^* = \alpha A$, logo $A + B$ e αA são auto-adjuntos.
O produto AB dos operadores auto-adjuntos A,B é auto-adjunto se, e somente se, A e B comutam, isto é, $AB = BA$. Com efeito, sendo A e B auto-adjuntos, temos $(AB)^* = B^*A^* = BA$.

Logo, AB é auto-adjunto se, e somente se, $BA = AB$.

Exemplo 1

Sejam $A,B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ os operadores lineares definidos por $A(x,y) = (x,2y)$ e $B(x,y) = (y,x)$. Para todo $v = (x,y)$ tem-se:

$\langle e_1,A^*v \rangle = \langle Ae_1 \rangle = \langle e_1,v \rangle = x$

$\langle e_2,A^*v \rangle = \langle Ae_2,v \rangle = \langle 2e_2,v \rangle = 2y$,

Portanto $A^*v = (x,2y) = Av$ e $A^* = A$.

Analogamente se mostra que $B^* = B$. Entretanto, como $AB(x,y) = (y,2x)$, vê-se que, para $v = (x,y)$,$\langle e_1,(AB)^*v \rangle = \langle ABe_1,v \rangle = 2y$, enquanto $\langle e_1,AB_v \rangle = y$ logo $(AB)^* \neq AB$, ou seja, o produto AB dos operadores auto-adjuntos A,B não é auto-adjunto. Isto se dá porque $AB \neq BA$. Com efeito, $AB(x,y) = (y = 2x)$ e $BA(x,y) = (2y,x)$.

Exemplo 2

A projeção ortogonal $P : E \to E$ sobre um subespaço $F \subset E$ é um operador auto-adjunto. Com efeito, dados $v = z + w$, $v' = z' + w'$ com $z, z' \in F$ e $w, w' \in F^\perp$ temos:

$\langle Pv,v' \rangle = \langle z,v' \rangle = \langle z,z' \rangle = \langle v,z' \rangle = \langle v,Pv' \rangle$

Reciprocamente, se a projeção $P : E \to E$ sobre o subespaço F_1 paralelamente a F_2, onde $E = F_1 \oplus F_2$, for um operador auto-adjunto, então para quaisquer $v_1 \in F_1$, $v_2 \in F_2$ vale:

$\langle v_1,v_2 \rangle = \langle Pv_1,v_2 \rangle = \langle v_1,Pv_2 \rangle = \langle v_1,0 \rangle = 0$.

Logo, $F_2 = F_1^\perp$. Assim, a projeção $P : E \to E$ é um operador auto-adjunto se, e somente se, é uma projeção ortogonal.

Uma matriz quadrada $a = [a_{ij}]$ diz-se simétrica quando é igual à sua transposta $a^\perp$, isto é, quando $a_{ij} = a_{ij}$ para todo i e todo j.

No **teorema 1**, é dado um operador linear $A : E \to E$, espaço vetorial de dimensão finita, dotado de produto interno.

13.2 Teoremas

Teorema 1 – $A : E \to E$ é auto-adjunto se, e somente se, sua matriz $a = [a_{ij}]$ relativamente a uma (e portanto a qualquer) base ortonormal $u = \{u_1,...,u_n\} \subset E$ é uma matriz simétrica.

Demonstração – $\langle u_i,au_j \rangle$ = [i-ésima coordenada do vetor Au_j na base u] = [i-ésimo elemento da j-ésima coluna de a] = a_{ij}. Portanto a matriz a é simétrica se, e somente se, $\langle u_i,Au_j \rangle = \langle Au_i,u_j \rangle$ para quaisquer $i,j = 1,...,n$.

Devido à linearidade de A e à bilinearidade do produto interno, isso equivale a dizer que $\langle u,Av \rangle = \langle Au,v \rangle$ para quaisquer $u,v \in E$, ou seja, que A é auto-adjunto.

Exemplo 3

As matrizes dos operadores A e B do **Exemplo 1** na base canônica de $\mathbb{R}^2$ são, respectivamente,

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ambas simétricas. Quanto ao **Exemplo 2**, se tomarmos em E uma base ortonormal cujos primeiros m elementos formem uma base de F e os últimos uma base de $F^\perp$, a matriz da projeção P nessa base terá os m primeiros termos da diagonal iguais a 1 e todos os demais elementos iguais a zero. Seu formato será

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

em que os termos fora da diagonal, não indicados acima, são todos zeros.

Essas matrizes são simétricas, refletindo o fato de que representam operadores auto-adjuntos em bases ortonormais.

Teorema 2 – Seja $A : E \to E$ um operador auto-adjunto. Se o subespaço $F \subset E$ é invariante por A, seu complemento ortogonal $F^{\perp}$ também é.

Teorema 3 – Se o subespaço $F \subset E$ é invariante pelo operador linear $A : E \to E$, então seu complemento ortogonal $F^{\perp}$ é invariante pelo operador adjunto $A^* : E \to E$.

Demonstração:

$[u \in F,\ v \in F^{\perp}] \Rightarrow Au \in F \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle u, A^*v\rangle = \langle Au, v\rangle = \Rightarrow A^*v \in F^{\perp}$

logo $F^{\perp}$ é invariante por A^*.

Exemplo 4 – No cisalhamento $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, em que $A(x,y) = (x - \alpha y, y)$, com $\alpha \neq 0$, o eixo x, das abcissas, é invariante, mas seu complemento ortogonal, o eixo y, das ordenadas, não é, pois $Ae_2 = (\alpha,1)$ não é vertical.

Teorema 4 – Se $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ são autovalores dois a dois diferentes do operador auto-adjunto $A : E \to E$ os autovetores correspondentes $v_1,\ldots,v_m$ são dois a dois ortogonais.

Demonstração – Para $i \neq j$ quaisquer:

$(\lambda_1 - \lambda_j)\langle v_i,v_j\rangle = \langle \lambda_j v_i, v_j\rangle - \langle v_i, \lambda_j v_j\rangle = \langle Av_i, v_j\rangle - \langle v_i, Av_j\rangle$

$\langle Av_i, v_j\rangle - \langle Av_i, vl_j\rangle = 0$ pois A é auto-adjunto.

Como $\lambda_1 - \lambda_j \neq 0$ de $(\lambda_1 - \lambda_j)\langle v_i,v_j\rangle = 0$ resulta $\langle v_i, v_j = 0\rangle$.

Observação – Se $Av = \lambda v$, então, para todo múltiplo $w = \alpha v$, tem-se ainda $Aw = \lambda w$. Logo, na situação do **Teorema 4,** os vetores $v_1, \ldots, v_m$ podem ser tomados unitários, caso haja conveniência.

Um problema importante sobre operadores num espaço vetorial de dimensão finita é o de encontrar uma base em relação à qual a matriz desse operador seja a mais simples possível. Mostraremos, nesta seção, que, se $A : E \to E$ é um operador auto-adjunto num espaço vetorial de dimensão finita com produto interno, existe uma base ortonormal em E, relativamente à qual a matriz de A é uma matriz diagonal $a = [a_{ij}]$, isto é, $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Esse é o conteúdo do Teorema Espectral.

Existe um tipo de operador auto-adjunto para o qual o **Teorema Espectral** é imediato: se $P : E \to E$ é a projeção ortogonal sobre o subespaço F, tomando uma base ortonormal $\{u_i,\ldots,u_n\} \subset E$ cujos primeiros vetores $u_i,\ldots,u_m$ formem uma base de F (portanto os $n - m$ últimos formam uma base de $F^{\perp}$), a matriz de P nessa base tem a forma diagonal vista no **Exemplo 3.**

Quando se diz que a matriz do operador $A : E \to E$ na base $\{u_i,\ldots,u_n\} \subset E$ é uma matriz diagonal, isso significa que, para todo $j = 1,\ldots,n$, tem-se $Au_j = \lambda_j u_j$, ou seja, que os vetores da base dada são todos eles autovetores de A.

No caso da projeção ortogonal sobre o subespaço F, tem-se $Pu_j = u_j$ para $j = 1,\ldots,m$ e $Pu_j = 0$ se $j = m + 1,\ldots,n$. Assim, a base ortonormal acima fixada é de fato formada por autovetores de P. Os autovalores são 1 e 0.

Comecemos com o caso particular do **Teorema Espectral** em que o espaço tem dimensão 2.

Teorema 5 – Seja $A : E \to E$ um operador auto-adjunto num espaço vetorial de dimensão 2, munido de produto interno. Existe uma base ortonormal $\{u_1,u_2\} \subset E$ formada por autovetores de A.

Demonstração – Seja $\{v,w\} \subset E$ uma base ortonormal arbitrária. Em virtude do **Teorema 1**, temos $Av = av + bw + Aw = bv + cw$. Como já vimos antes**,** os autovalores de A são as raízes reais do polinômio característico $P(\lambda) = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2$. O discriminante deste trinômio é

$\Delta = (a + c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0.$

Se $\Delta = 0$, então $b = 0$, $a = c$ e $A = aI$, logo todo vetor não-nulo em E é um autovetor.
Se $\Delta > 0$, então o trinômio $P(\lambda)$ possui 2 raízes reais distintas λ_1,λ_2. Isso, como sabemos, quer dizer que os operadores $A - \lambda_1 I$ e $A - \lambda_2 I$ são ambos não-invertíveis, logo existem vetores não-nulos (que podemos supor unitários) $u_1,u_2 \in E$ tais que $(A - \lambda_1 I)u_1 = 0$ e $(A - \lambda_2 I)u_2 = 0$, ou seja, $Au_1 = \lambda_1 u$ e $Au_2 = \lambda_2 u_2$. Pelo **Teorema 4**, $\{u_1,u_2\} \subset E$ é uma base ortonormal de autovetores de A.

Corolário – Todo operador auto-adjunto $A : E \to E$, num espaço vetorial de dimensão finita com produto interno, possui um autovetor.

Com efeito, existe um subespaço $F \subset E$, de dimensão 1 ou 2, invariante por A. Se $\dim F = 1$, todo vetor não-nulo $v \in F$ é um autovetor de A. Se $\dim F = 2$, então, aplicando o **Teorema 5** à restrição $A : F \to F$ de A ao subespaço invariante F, obtemos um autovetor $v \in F$.

Teorema 6 (Teorema Espectral) – Para todo operador auto-adjunto $A : E \to E$, num espaço vetorial de dimensão finita munido de produto interno, existe uma base ortonormal $\{u_1,...,u_n\} \subset E$, formada por autovetores de A.

Demonstração – Usaremos indução na dimensão de E. O teorema é evidente se $\dim E = 1$. Supondo-o verdadeiro em dimensão $n - 1$, seja $E = n$. Pelo Corolário do **Teorema 5**, existe um autovetor unitário u_n, portanto um subespaço $F \subset E$, de dimensão 1, invarian por A. Pelo **Teorema 2**, o complemento ortogonal $F^\perp$ também é invariante por A. Como $\dim F^\perp = n - 1$, a hipótese de indução assegura a existência de uma base ortonormal

$\{u_1,...,u_{n-1}\} \subset F^\perp$ formada por autovetores da restrição $A : F^\perp \to F^\perp$. Segue-se que $\{u_1,...,u_{n-1},u_n\} \subset E$ é uma base ortonormal formada por autovetores de A.

Exemplo 5 – Seja $T : R^3 \to R^3$ o operador linear cuja matriz em relação à base canônica é

$$[T] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Podemos exibir uma base ortonormal de autovetores para este operador? Inicialmente, observamos que T é um operador auto-adjunto, pois a base canônica é ortonormal (em relação ao produto interno canônico), e a matriz é simétrica. O teorema espectral garante, então, a existência de uma base ortonormal de autovetores. Calculando os autovalores e autovetores associados, temos:

Para $\lambda_1 = -2$, $v_1 = (1,0,0)$; para $\lambda_2 = 7$, $v_2 = (0,1,1)$ e para $\lambda_3 = 5$, $v_3 = (0,1,-1)$.

Como esses autovetores provêm de autovalores distintos e T é auto-adjunto, o teorema 4 garante que eles são ortogonais. Então, $\{(1,0,0),(0,1,1),(0,1,-1)\}$ é uma base ortogonal de autovetores. Basta agora normalizá-los para obtermos a base procurada:

$$\left\{(1,0,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)\right\}$$

Observação – Vale a recíproca do **Teorema Espectral:** se existe uma base ortonormal $\{u_1,...,u_n\} \subset E$ formada por autovetores do operador $A : E \to E$, então este operador é auto-adjunto. Com efeito, para quaisquer $i,j = 1,...,n$ tem-se $\langle Au_i,v_j\rangle = \langle \lambda_i u_i,v_j\rangle = \lambda_i \delta_{ij} = \langle u_i \lambda_j v_j\rangle = \langle u_i A u_j\rangle$ e daí resulta que $\langle Au,v\rangle = \langle u,Av\rangle$ para quaisquer $u, v \in E$.

Exemplo 6

Seja o operador linear $T : R^3 \to R^3$ cuja matriz em relação à base canônica é

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exibamos uma base ortonormal de autovetores para este operador. Procedendo de modo análogo ao anterior, vemos que T é auto-adjunto e, portanto, tal base existe. Calculando os autovalores e autovetores associados, temos: Para $\lambda_1 = 0$; os autovetores são do tipo $(-y,y,y)$, e o subespaço desses autovetores tem dimensão 1. Para $\lambda_2 = 3$, os autovetores são do tipo $(y + z,y,z)$, e o subespaço associado tem dimensão 2.

Vamos construir uma base de autovetores escolhendo um autovetor do subespaço associado a $\lambda_1 = 0$ e dois autovetores L.I. do subespaço associado a $\lambda_2 = 3$. Suponhamos que $v_1 =$ (-1, 1, 1) tenha sido tomado no primeiro subespaço. Como todos os autovetores no segundo são da forma (y + z, y, z), observamos que o produto interno de (–1,1,1) com qualquer da forma (y + z,y,z) é 0. Mas não é garantido que quaisquer dois vetores de (y + z,y,z) são ortogonais, mesmo que sejam L.I. Por exemplo, (1,1,0)e (1,0,1) são L.I., mas não ortogonais. Contudo, podemos usar o vetor (1,1,0) e procurar outro vetor do tipo (y + z, y, z) que seja ortogonal a (1,1,0), isto é, o produto interno destes deve ser nulo. Ou seja, y + z + y = 2y + z = 0 ou z = –2y

Um vetor que satisfaça essas relações deve ser do tipo (–y,y,–2y). Por exemplo, (–1,1,–2).

Ficamos, assim, com a base {(–1,1,1),(1,1,0),(–1,1,–2)}, que é formada de autovetores dois a dois ortogonais. Normalizando esses vetores, temos a base procurada:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,-2)\right\}.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Seja $\alpha = \{w_1,w_2,w_3\}$ uma base de V, um espaço vetorial real com produto interno $\langle,\rangle$.

   $[u]_\alpha = \begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}$ e $[v]_\alpha = \begin{bmatrix}5\\2\\-3\end{bmatrix}$. Se $\langle u,v\rangle = 2$, a base a é ortonormal?

2. Ache valores para x e y tais que $\begin{bmatrix}x & y\\-1 & 0\end{bmatrix}$ seja uma matriz ortogonal.

3. Sejam $\alpha = \{(1,1),(2,0)\}$ e $\beta = \{(-1,0),(2,1)\}$. A partir das bases α e β, construa bases ortonormais, usando o método de Gram-Schmidt. Se essas novas bases forem α' e β' respectivamente, mostre que a matriz de mudança de base $[I]_{\beta'}^{\alpha'}$ é ortogonal.

4. Dada uma matriz A cujas colunas são vetores ortonormais, prove que A é ortogonal.

5. Seja T(x,y,z) = (2x + y, x + y + z, y – 3z) de R^3 em R^3 com produto interno canônico.

   a) Mostre que T é um operador auto-adjunto, mas não ortogonal.

   b) Se v = (2,–1,5) e w = (3,0,1), verifique que $\langle Tv,w\rangle = \langle v,Tw\rangle$.

   c) Exiba uma base de autovetores de T e verifique que é uma base ortogonal. A partir dessa base, escreva uma base ortonormal.

6. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix}a & 0 & 0\\0 & b & c\\0 & c & b\end{bmatrix}$.

   a) Mostre que os autovalores são: a,b + c e b – c.

   b) Ache uma base de autovetores.

7. Seja o operador linear $T : R^3 \to R^3$ cuja matriz em relação à base canônica é $\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\4 & -5 & -4\\2 & -4 & 1\end{bmatrix}$.

   Exiba uma base ortonormal de autovetores.

8.

a) Mostre que se T é uma transformação ortogonal do plano no plano, sua matriz em relação à base canônica só pode ser da forma:

$A = \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$ ou da forma

$B = \begin{bmatrix}\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha\end{bmatrix}$

(Sugestão: 9.3.3 (d)).

b) Observe que se a matriz de T for da forma dada por A. T será uma rotação de um ângulo a.

Mostre que B = A . J onde $J = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$. (J é a matriz em relação à base canônica de reflexão no eixo-x). Conclua, finalmente, usando composição de funções, que se a transformação T for dada por B,T, será uma reflexão por meio de uma reta do plano que passa pela origem.

9. Seja V um espaço vetorial real de dimensão n,T : V $\to$ V um operador linear auto-adjunto e

$v \in V$ um autovetor de T.

a) Mostre que [v], o espaço gerado por v, é invariante por aplicação do operador T, isto é, se $w \in [v]$, então $Tw \in [v]$.

b) Mostre que $[v]^{\perp}$. o complemento ortogonal de [v] **(veja 8.5)** é invariante por aplicação do operador T, isto é, se $w \in [v]^{\perp}$, então $Tw \in [v]^{\perp}$ e, portanto, T induz um operador linear

   $T_1 : [v]^{\perp} \rightarrow [v]^{\perp}$

   $w \rightarrow Tw$

c) Mostre que o operador T_1 definido no item (b) é auto-adjunto.

d) Mostre que todo autovetor w de T_1 com autovalor o também é autovetor de T com o mesmo autovalor δ.

10. a) Dê a transformação linear que descreve o movimento rígido que leva o segmento de extremos (–6,2) e (–1,2) no segmento de extremos (–2,6) e (1,2) respectivamente.

b) Mostre que esta transformação é uma rotação e encontre seu ângulo.

REFERÊNCIAS

Ayres Jr, F. - **Geometria analítica plana e sólida** - S. Paulo - Mc Graw Hill do Brasil - 1983.

Iezzi,G - **Geometria analítica** - S. Paulo - Atual - 1996.

Oliva, W.M. - **Vetores e geometria** - S. Paulo - Edgard Blucher - 1990.

Carvalho, J.P. - **Introdução à álgebra linear** - Rio de Janeiro- livros técnicos e científicos - 2002.

Lang,S. - **Álgebra linear** - S. Paulo - Edgard Blucher - 1983.

Machado, Antônio dos Santos - **Álgebra linear e geometria analítica** - S. Paulo- Atual editora - 1991.