Trabajo 1: Programación

Patricia Córdoba Hidalgo

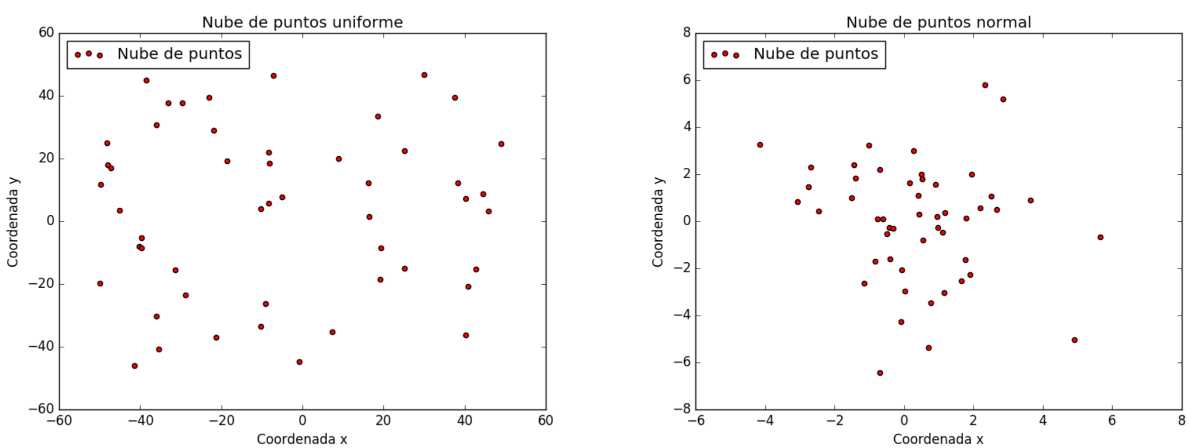
Índice

1. EJERCICIO SOBRE LA COMPLEJIDAD DE H Y EL RUIDO

Este ejercicio está implementado en el fichero `ejercicio1.py`.

1.1. Apartado 1

Se generaron las dos siguientes nubes de puntos diferentes a partir de una muestra de tamaño 50.



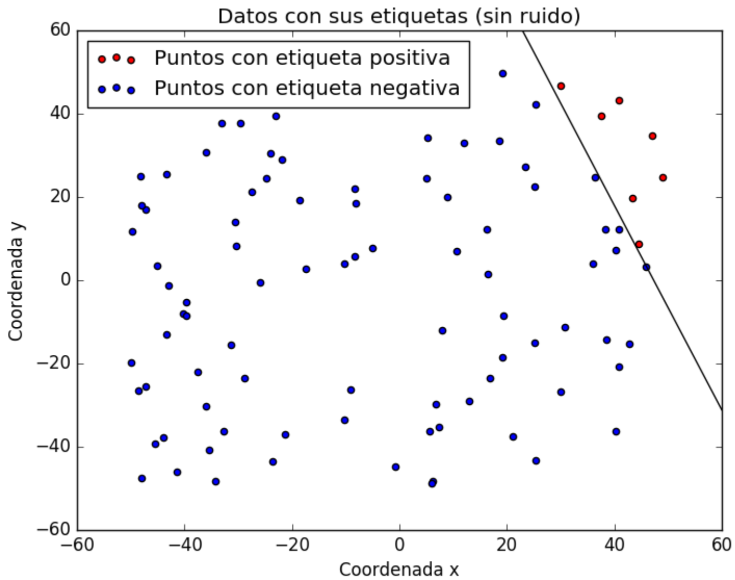
(a) Nube generada uniformemente

(b) Nube generada con una distribución Gaussiana

La primera se generó usando la función `simula_unif` y la segunda con la función `simula_gaus`, ambas nos las daban ya implementadas. Tras esto, se usa la función `muestra_datos` que representa los puntos de ambas nubes.

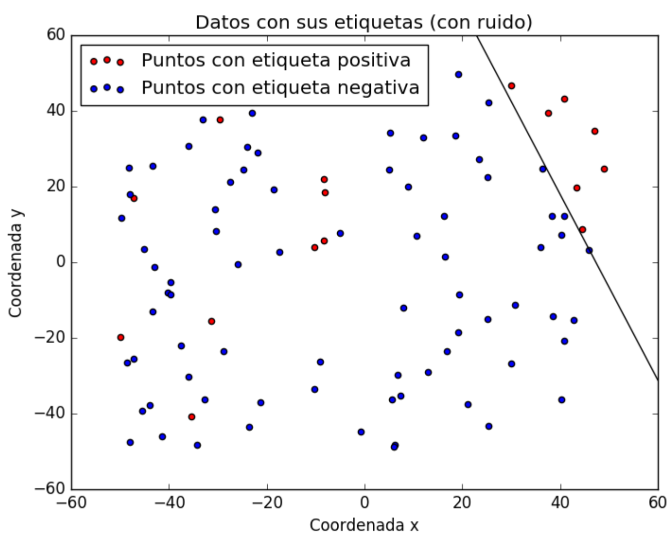
1.2. Apartado 2

Etiquetamos una muestra de 100 puntos escogidos uniformemente en el cuadrado $[-50, 50] \times [-50, 50]$ según el signo de la función $f(x, y) = y+2{,}45627963467703x-116{,}24116219196964$, usando `simula_recta` para generar la recta y `asigno_etiquetas` para etiquetar los datos. La gráfica de los puntos con su etiqueta correspondiente es:



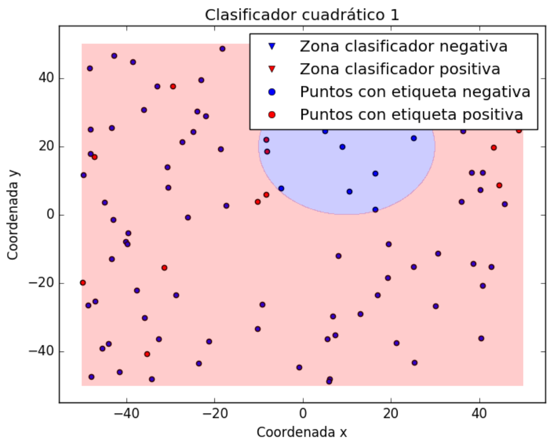
(c) Datos sin ruido

Modifiqué el 10 % (aproximadamente, ya que trunco a la baja) de las etiquetas de los datos con la función `asigna_etiquetas_ruido`. La gráfica con los datos nuevamente etiquetados es:

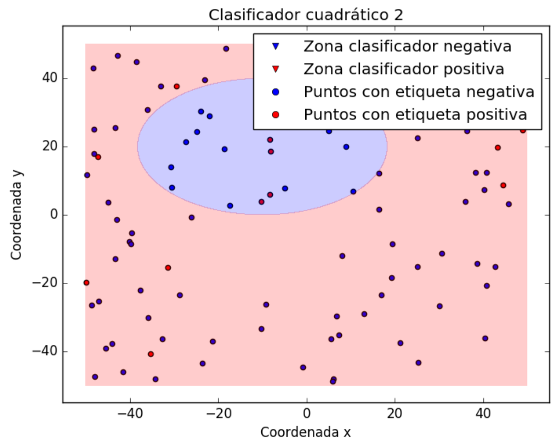


(d) Datos con ruido

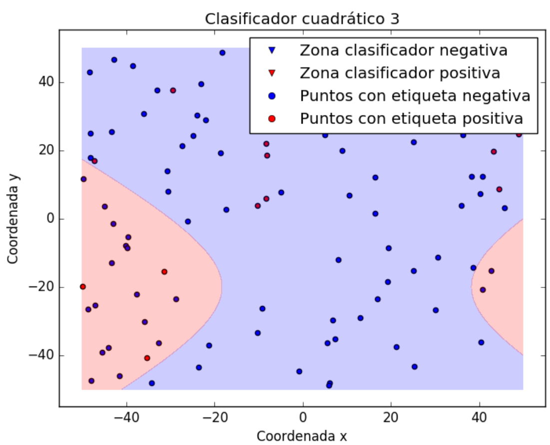
Tras esto, se usaron cuatro clasificadores diferentes sobre los datos etiquetados, ya que, al añadir ruido, pudiera ser que alguno de estos clasificadores de orden cuadrático cometiese un menor error que la recta que se usó para asignar las etiquetas originalmente, que ahora produce un error del 10 %. Las gráficas con esos clasificadores son:



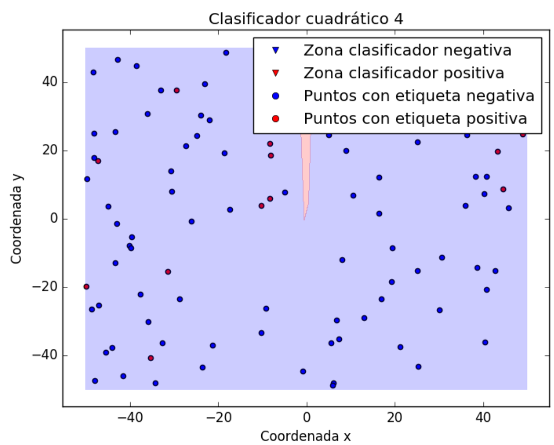
(e) $f1(x, y) = (x - 10)^2 + (y - 20)^2 - 400$



(f) $f2(x, y) = 0{,}5(x + 10)^2 + (y - 20)^2 - 400$



(g) $f3(x, y) = 0{,}5(x - 10)^2 - (y + 20)^2 - 400$



(h) $f4(x, y) = y - 20x^2 - 5x + 3$

Estas graficas se representaron con la función `graficaf`. Usando como función de error el porcentaje de datos mal clasificados, implementada en la función `Err`, el error de cada clasificador es:

Función	**Error**
a) $(x - 10)^2 + (y - 20)^2 - 400$	75 %
b) $0{,}5(x + 10)^2 + (y - 20)^2 - 400$	75 %
c) $0{,}5(x - 10)^2 - (y + 20)^2 - 400$	32 %
d) $y - 20x^2 - 5x + 3$	16 %

Por tanto todos estos clasificadores tienen mayor error que la recta original, luego son peores que la función lineal.

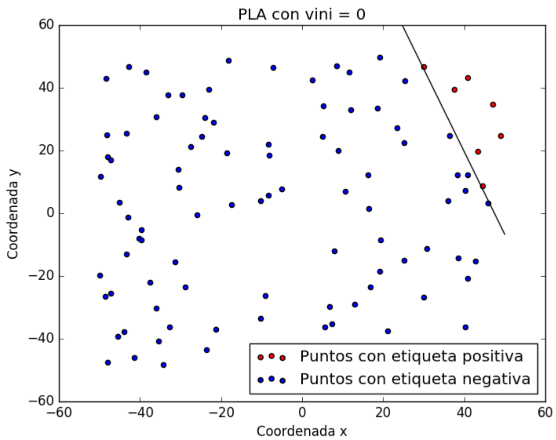
En el proceso de aprendizaje, al extraer datos con sus etiquetas siempre estamos expuestos a que las etiquetas tengan un error respecto a la función real que las etiquetó. Es por esto que a veces, aunque la función real que etiqueta es una función lineal, por el comportamiento de los datos de la muestra, podríamos encontrar una función más compleja con menor error muestral. Con esto podemos producir sobreajuste, ya que intentar buscar funciones complejas que minimicen el error en la muestra puede acarrear un aumento del error E_{out}, ya que las clases de funciones complejas tienen una mayor varianza y con muestras muy pequeñas el error E_{out} varía mucho del E_{in}.
En nuestro caso específico, podemos ver que las funciones más complejas elegidas tienen mayor E_{in} que la original, luego no hay duda de que ésta es la mejor función encontrada para clasificar esta muestra.

2. MODELOS LINEALES

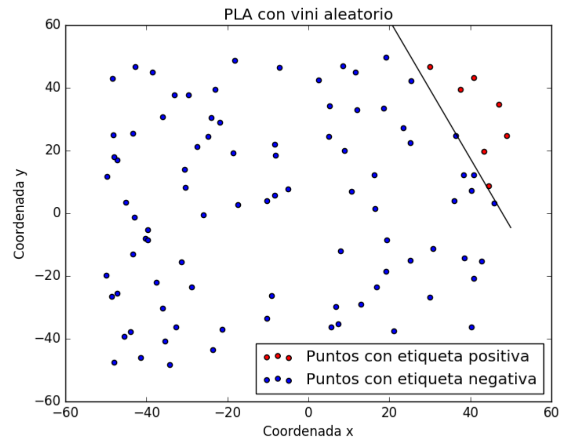
2.1. Algoritmo Perceptron

Programé la función `ajusta_PLA` para calcular el hiperplano solución al problema de clasificación. En mi caso, la entrada *datos* es una matriz donde cada fila es un item de la forma $x = [1 \quad coordenada\ X \quad coordenada\ Y]$, ya que meter las etiquetas en la matriz era redundante e innecesario al tener el vector de etiquetas *label*.

Ejecutamos el *Algoritmo del PLA* con la muestra del apartado 2 usando etiquetas sin ruido. Las gráficas obtenidas (en el caso del vector aleatorio con el último de los 10 usados) son:



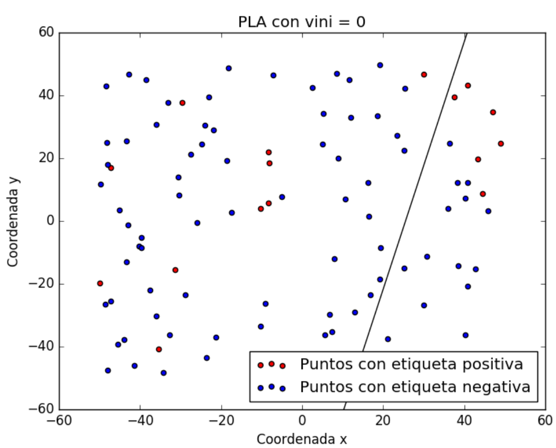
(i) Vector inicial cero



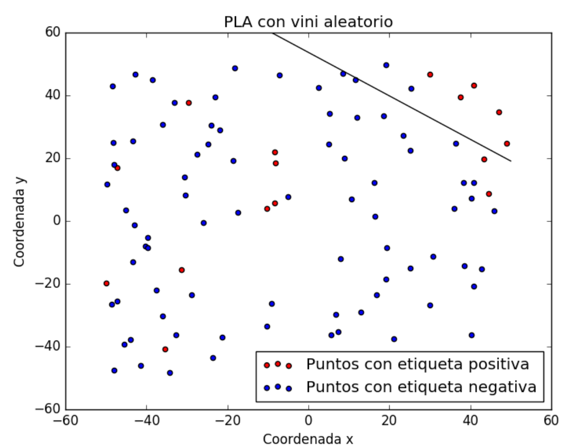
(j) Vector inicial aleatorio

Usando como vector inicial el vector cero, el algoritmo converge en 444 iteraciones, obteniendo los pesos $w = [-2129 \quad 44{,}85508745 \quad 17{,}01070298]$. Usando 10 vectores iniciales aleatorios, la media es de 17 iteraciones, y en la última iteración los pesos obtenidos son $w = [-412{,}45365318 \quad 8{,}60651887 \quad 3{,}90172468]$. Como podemos observar, en mi caso el punto inicial influye bastante en el número de iteraciones.

Ejecutando el *Algoritmo del PLA* con la muestra del apartado 2 usando etiquetas con ruido obtenemos las siguientes gráficas:



(k) Vector inicial cero

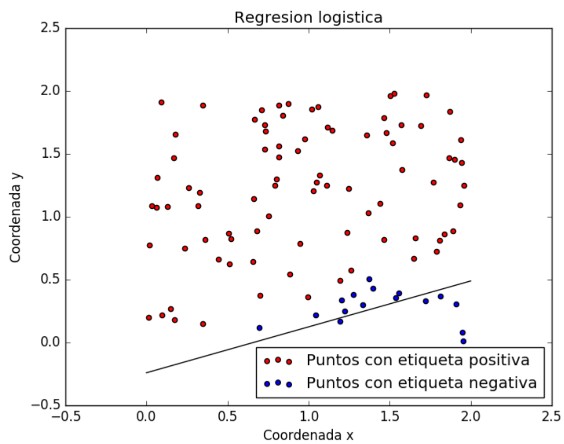


(l) Vector inicial aleatorio

En este caso los conjuntos no son separables, por lo que el *Algoritmo del PLA* no converge nunca. Por tanto, éste ciclará indefinidamente y devolverá el resultado de la última ejecución realizada, que no tiene por qué ser el resultado con menor error de todos los obtenidos en las diferentes iteraciones.

2.2. Regresión Logística

Usando la función `simula_unif` creamos una muestra de 100 puntos uniformemente distribuidos en el cuadrado $[0, 2] \times [0, 2]$ ycon la función `simula_recta` seleccionamos la línea del plano que será la frontera de la función $f(x)$. Se asignan etiquetas a los puntos del cuadrado con `asigno_etiquetas`, dandole a los puntos por encima de la recta, que son aquellos con $f(x) = 1$ la etiqueta $y = 1$ y a los de debajo de la recta, que son aquellos con $f(x) = 0$, etiqueta $y = -1$.
Se implementó el algoritmo de *Regresión Logística* en la función `rl_sgd` obteniendo el siguiente resultado:



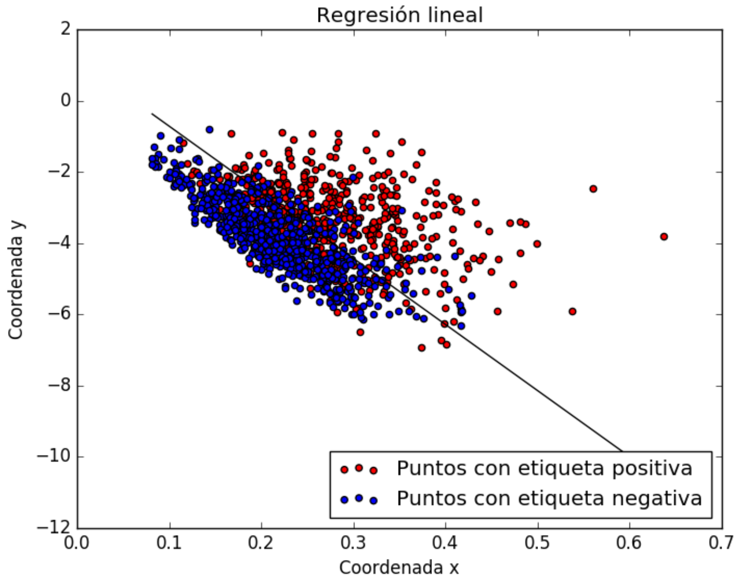
(m) Regresión Logística

La función obtenida con el algoritmo es $g(x) = \frac{e^{w^T x}}{1+e^{w^T x}}$, donde $w = [0{,}6206406 \quad -0{,}94098291 \quad 2{,}57813861]$.
El error $E_{in} = 0{,}20481405394280924$. Se creó otra muestra de 1000 datos uniformemente distribuidos en el cuadrado con la función `simula_unif` cuyo error es $E_{out} = 0{,}22651876695632325$. Como podemos ver el error E_{out} difiere poco del error E_{in}, luego el ajuste es bueno.

3. BONUS

El problema es clasificar un conjunto de dígitos en dos clases diferentes, los cuatros y los ochos. El modelo usado es el siguiente:
Los datos son de la forma $x_i = (1, x1, x2)$, donde $x1$ es la intensidad promedio y $x2$ es la simetría. Las etiquetas correspondientes son $y_i \in \{1, -1\}$. Inicialmente $y_i = 1$ si $x_i = 8$ y $y_i = -1$ si $x_i = 4$. Usando el algoritmo de *Regresion Lineal* y *PLA-Pocket* se obtiene w, que son los pesos de la función g que separa los datos de los dos conjuntos. Tenemos pues que $g(x1, x2) = w_0 + w_1 x1 + w_2 x2$, con $w = (w_0, w_1, w_2)$.

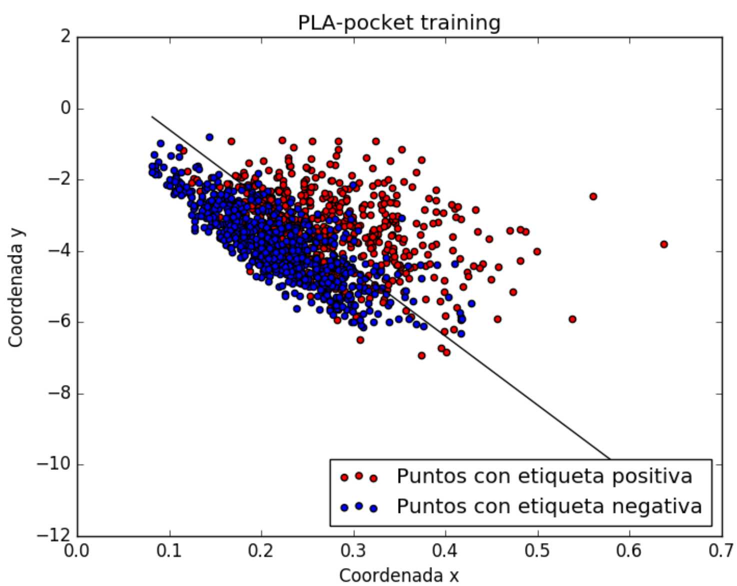
Con el algoritmo de *Regresion Lineal*, usando la matriz pseudoinversa, se consiguió $w = [-0{,}50676351 \quad 8{,}25119739 \quad 0{,}44464113]$.
El resultado obtenido es:



(n) Regresión Lineal

El error E_{in} obtenido con esta recta es 0,22780569514237856.

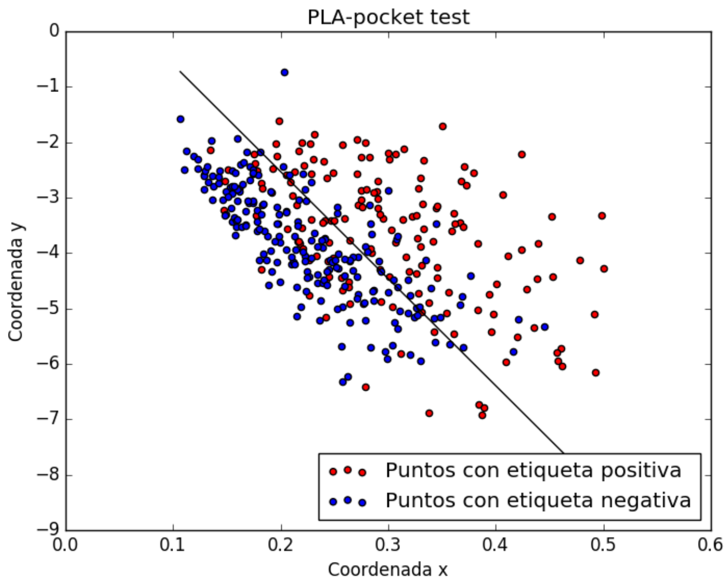
Usando este resultado como vector inicial del algoritmo de *PLA-Pocket* se consiguió $w = [-6{,}50676351 \quad 94{,}33278003 \quad 4{,}88432863]$. El resultado obtenido es:



(ñ) PLA-Pocket con datos de entrenamiento

El error E_{in} obtenido con esta recta es 0,22529313232830822, ligeramente menor que el obtenido con la recta de la regresión lineal.

Usando esta recta para clasificar los datos test, el resultado es:



(o) PLA-Pocket con datos test

El error E_{test} obtenido es 0,2540983606557377.

Para calcular la cota sobre E_{out} usamos la fórmula:

$$E_{out}(h) \leq E_{in}(h) + \sqrt{\frac{1}{2N} log(\frac{2}{\delta})}$$

donde N es el número de datos de la muestra y δ es la tolerancia, es decir, esta cota se cumple con, al menos, probabilidad $1 - \delta$.
En nuestro caso, usando $\delta = 0{,}05$, $N = 1194$, tenemos que $E_{out}(h) \leq 0{,}22529313232830822 + \sqrt{\frac{1}{2*1194} log(\frac{2}{0{,}05})} =$ 0,2645965277