Problema Análisis Matemático II

Patricia Córdoba Hidalgo

20 de febrero de 2018

Estudiad la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones f_n definidas en $[0,1]$ mediante

$$f_n(x) = x - x^n$$

para todo $x \in [0,1]$.

Convergencia puntual:

Sea $f_n(x) = x - x^n \ \forall x \in [0,1]$, la función f a la que converge puntualmente f_n es:

$$f = \begin{cases} \text{x si } x \in [0,1) \\ 0 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

Demostración:

$x = 0 \Rightarrow 0 - 0^n = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$x = 1 \Rightarrow 1 - 1^n = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$x \in (0,1) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x - x^n = \lim\limits_{n\to\infty} x - \lim\limits_{n\to\infty} x^n$

Como $x \in (0,1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, luego $\lim\limits_{n\to\infty} x - x^n = x \ \forall x \in (0,1)$

Convergencia uniforme:

Como converge puntualmente, y que converja uniformemente implica que converja puntualmente, el único candidato a límite de f_n es f. Sin embargo, por un teorema, sabemos que f_n converge uniformemente y f_n es continua $\Rightarrow f$ es continua. Como f no es continua y f_n es continua, entonces f_n no puede converger uniformemente.