Ejercicio

Patricia Córdoba Hidalgo

6 de abril de 2018

Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, (X, τ) un espacio topológico con $\mathcal{B}$ su σ-álgebra de Borel, entonces

$$f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (X, \tau) \text{ es medible} \Leftrightarrow f^{-1}(G) \in \mathcal{A} \quad \forall G \in \tau$$

$\Rightarrow$
f es medible $\Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B}$. Sea $G \subset \mathcal{B}$, tal que $G \in \tau$. Vamos a ver que $G \in \mathcal{B}$.
Dado que $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra más pequeña que contiene a τ, se da que si $G \in \tau \Rightarrow G \in \mathcal{B}$, luego si f es medible $\Rightarrow f^{-1}(G) \in \mathcal{A} \quad \forall G \in \tau$
$\Leftarrow$
$f^{-1}(G) \in \mathcal{A} \quad \forall G \in \tau$, ¿ $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B}$?
Sea $B \in \mathcal{B}$. Si $B \in \tau \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.
Si $B \notin \tau$:
$B \notin \tau$ y $B \in \bigcap \{\mathcal{B}$: σ-algebra en X y $\mathcal{B} \supset \tau\}$, por lo tanto se cumple una de estas dos opciones:

- $X - B \in \tau$
- $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, tal que $B_n \in \tau$

La segunda opción no es factible, ya que la unión infinita de abiertos es un abierto, luego $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \tau$ y partíamos de que $B \notin \tau$, y llegamos a una contradicción.
Por lo tanto, $X - B \in \tau$. Como $X - B \in \tau$, por hipótesis, $f^{-1}(X - B) \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega - f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Dado que el complementario de un elemento de la σ-álgebra también pertenece a la σ-álgebra $\Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$