

Ejercicio Corrección

Patricia Córdoba Hidalgo

14 de abril de 2018

Sea $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $f(w) = (u(w), v(w))$, se cumple que: f medible $\Leftrightarrow u, v$ medibles

\Rightarrow

f medible, $\Pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Pi_1(x, y) = x$ continua y $\Pi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Pi_2(x, y) = y$ continua. Entonces: $u = \Pi_1 \circ f$ y $v = \Pi_2 \circ f$. Como la composición de una función continua y una función medible es medible $\Rightarrow u$ y v son medibles.

\Leftarrow

u y v medibles, $J_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $J_1(x) = (x, 0)$ continua y $J_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $J_2(y) = (0, y)$ continua. Entonces: $(u(w), 0) = J_1 \circ u$ y $(0, v(w)) = J_2 \circ v$. Como la composición de una función continua y una función medible es medible $\Rightarrow (u(w), 0)$ y $(0, v(w))$ son medibles. Además, la suma de funciones medibles es medible, luego $f = J_1 \circ u + J_2 \circ v$ es medible.