Curvas elípticas en criptografía

Yabir García Benchakhtir
David Cabezas Berrido
Patricia Córdoba Hidalgo

Contenido

Conceptos previos

El **espacio proyectivo** sobre un cuerpo K, $\mathbb{P}_n(K)$, es el conjunto de puntos en $K^{n+1} - \{0\}$ con la relación de equivalencia $\sim$ que relaciona dos elementos de la siguiente forma

$$(a_0, \ldots, a_n) \sim (a'_0, \ldots, a'_n) \iff \exists \lambda \in K^* \text{ tal que } (a_0, \ldots, a_n) = \lambda(a'_0, \ldots, a'_n)$$

En el caso $K = \mathbb{R}$, $\mathbb{P}_2$ tiene como elementos a las rectas vectoriales de $\mathbb{R}^3$. Intuitivamente, este espacio se puede interpretar como un plano y una recta "en el infinito".

En $\mathbb{P}_n(K)$ dos rectas siempre se cortan, ya que las rectas paralelas se cortan "en el infinito".

Definición

Se define una curva elíptica como un par (E, O), donde E es una curva proyectiva no singular de genus uno y $O \in E$.

Al punto O se le denomina "punto en el infinito".

Denotaremos la curva como E, sobreentendiendo cual es el punto O.

El **genus** de una curva algebraica proyectiva no singular corresponde al número de agujeros de la superficie orientable compacta obtenida al considerar la curva como una variedad real.

Caracterización

Hay un isomorfismo Φ entre una curva elíptica E y la curva que cumple la ecuación de Weierstrass:

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

con $a_1, \ldots, a_6 \in K$ y satisfaciendo $\Phi(O) = [0, 1, 0]$ y
$\Phi(P) \in \{[x, y, 1]\} \quad \forall P \in E \backslash \{O\}$.

Si la característica de K es distinta de 2 y 3, podemos simplificar la ecuación así:

$$y^2 = x^3 + Ax + B$$

con $A, B \in K$.

La curva quedaría entonces:

$$E = \{(x, y) \in K \times K : y^2 = x^3 + Ax + B\} \cup \{O\}$$

Ejemplos de curvas elípticas

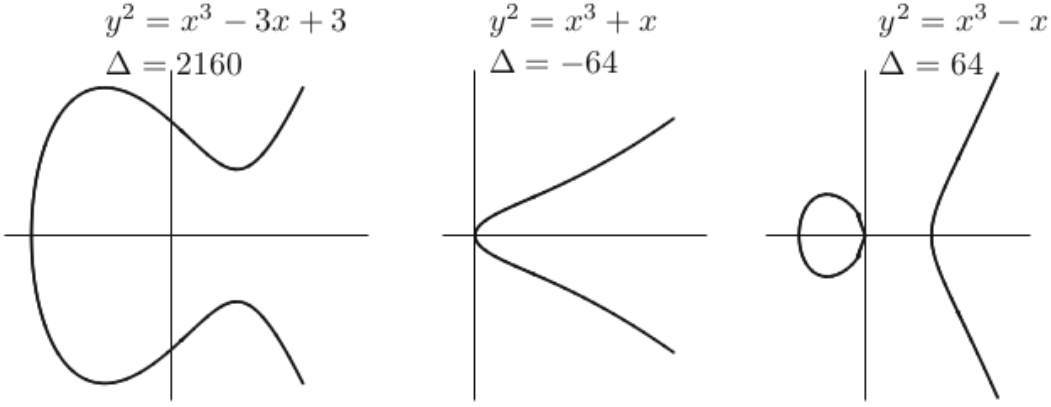


Figure 3.1: Three elliptic curves

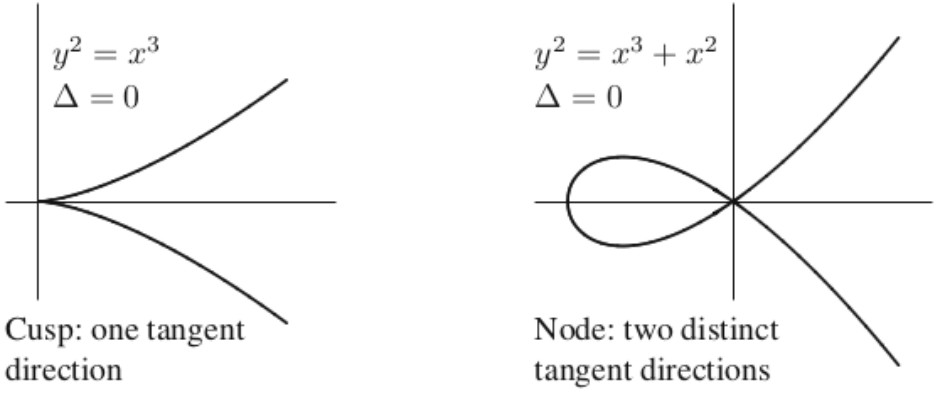
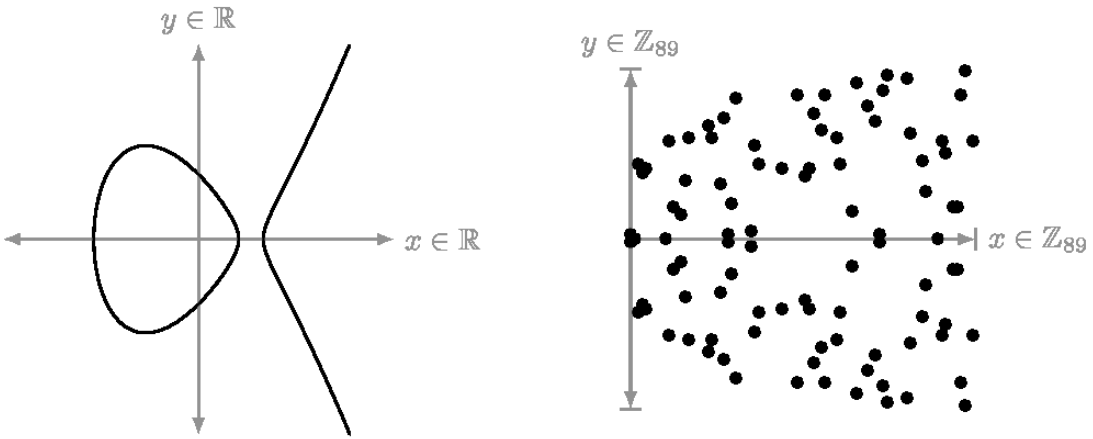


Figure 3.2: Two singular cubic curves.

Ejemplos de curvas elípticas ($\Delta = -16(4A^3 + 27B^2)$)

Ejemplos de curvas elípticas

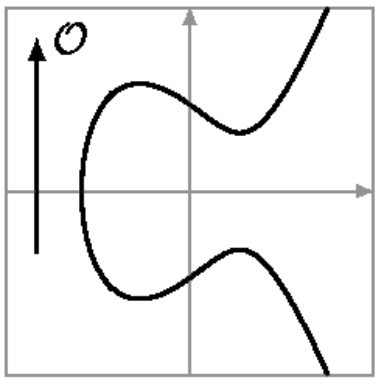
Consideraremos las curvas elípticas sobre grupos finitos, pero ayuda visualizarlas sobre $\mathbb{R}$ para entender las operaciones de grupo sobre ellas. Mostramos un ejemplo de curva elíptica sobre $\mathbb{R}$ y sobre un grupo finito.



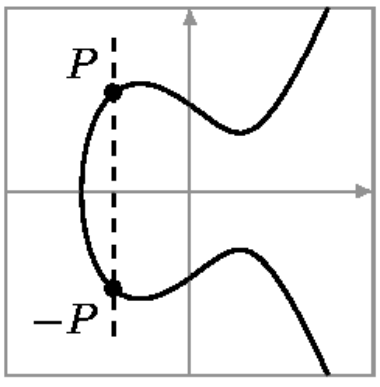
Curva elíptica sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{Z}_{89}$

Contenido

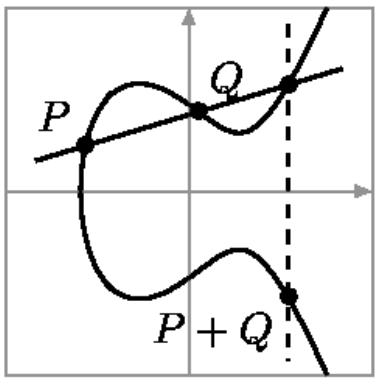
Estructura de grupo de la curva E



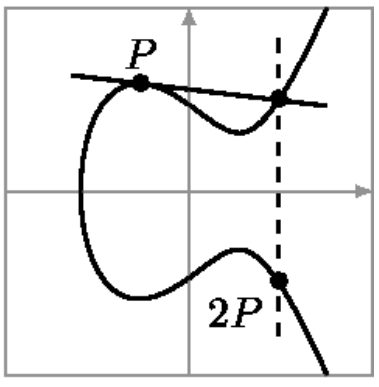
Neutral element $\mathcal{O}$



Inverse element $-P$



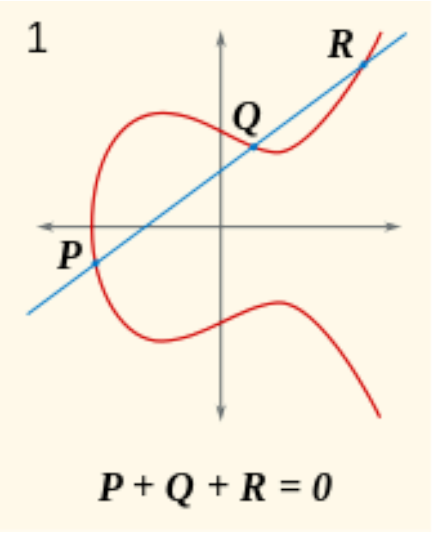
Addition $P+Q$
"Chord rule"

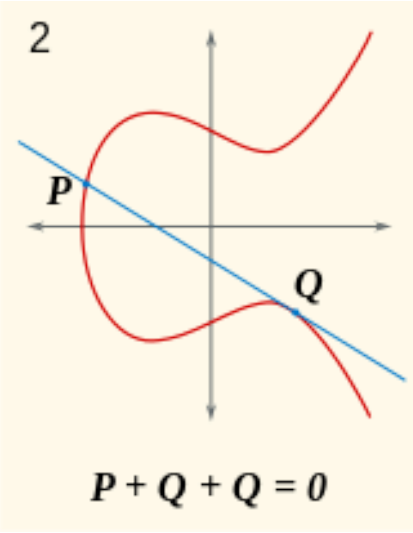


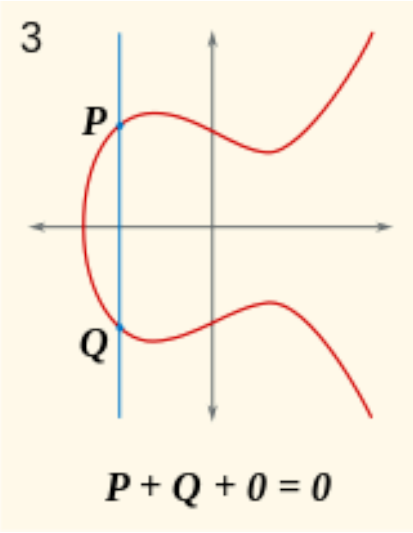
Doubling $P+P$
"Tangent rule"

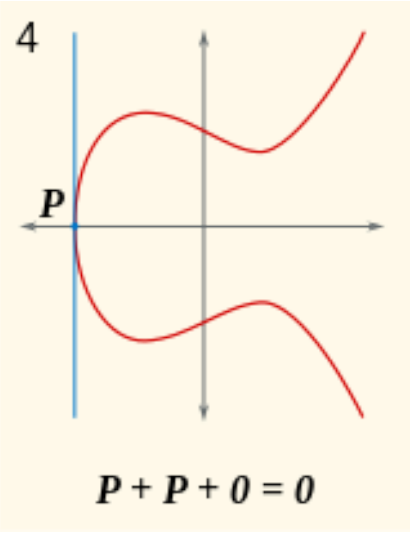
Definimos también $O + O = O$.

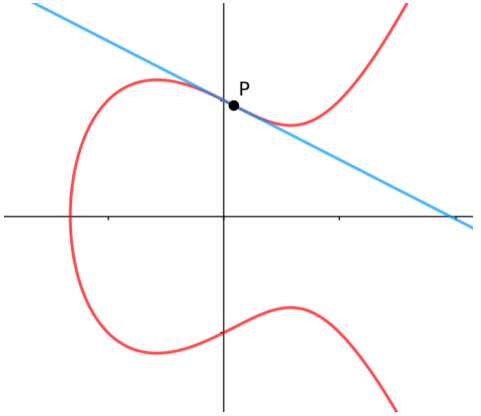
Estructura de grupo de la curva E











$$P + P + P = O$$

Producto por escalares

A partir de la suma de puntos definimos el producto de un punto P por un escalar n como:

$$nP = \underbrace{P + P + \ldots + P}_{n}$$

Esta operación puede calcularse con eficiencia $O(\log n)$ escribiendo n en base 2 y realizando duplicaciones sucesivas.

Encontrar subgrupo cíclico $< G > \subset E(\mathbb{F}_p)$

1. Calculamos el número de puntos de la curva elíptica, $N = \#E(\mathbb{F}_p)$. Esto se puede lograr mediante el algoritmo de Schoof.
2. Elegimos el factor primo mayor de N, al que llamaremos n.
3. Tomamos $h = N/n$. Para que una curva sea segura, el cofactor ha de ser pequeño.
4. Escogemos un punto cualquiera de la curva $P \in E(\mathbb{F}_p)$ y sea $G = hP$.
5. Si G es el punto en el infinito, cogemos otro punto P. De esta manera, el orden de G es n.

Podemos utilizar una curva de la lista de curvas seguras ya conocidas con cofactor pequeño.

Contenido

Problema del logaritmo discreto

Sea $< G >$ un subgrupo aditivo de $E(K)$, **el problema del logaritmo discreto** para curvas elípticas es el problema de encontrar k de manera que $kG = P$, para un punto dado $P \in < G >$.

La seguridad de las curvas elípticas en criptografía, descansa en la dificultad de resolver este problema.

Contenido

Parámetros compartidos

Alice y Bob intercambian los siguientes parámetros por un canal potencialmente inseguro:

- Una curva $E(\mathbb{F}_p)$ segura.
- G un punto de la curva de orden primo.
- Ambos deben conocer el valor n que es el orden del grupo $< G > \subset E(\mathbb{F}_p)$.

Claves pública y privada

Las claves son:

- Clave privada: Un entero $d_X \in [1, n-1]$ elegido de manera aleatoria.
- Clave pública: $Q_X = d_X G$.

Con $X = A$ para las clavas de Alice y $X = B$ para las de Bob.

El cálculo de Q_X se puede realizar en tiempo $O(\log d_X)$.

Algoritmo de firma digital en curvas elípticas (ECDSA)

Para firmar un mensaje, Alice sigue los siguientes pasos:

1. Calcula $e = HASH(m)$.
2. Si definimos L_n como el número de bits de n, toma z los L_n bits menos significativos de e.
3. Elige de manera aleatoria un entero secreto $k \in [1, n-1]$.
4. Calcula el punto de la curva $(x_1, y_1) = kG$.
5. Toma $r = x_1 \bmod n$. En el caso de que r sea 0, vuelve al paso 3.
6. Calcula $s = k^{-1}(z + rd_A) \bmod n$. Si s es 0, vuelve al paso 3.

La firma es el par (r, s).

Verificación de la firma

Para verificar que el emisor es Alice, Bob seguirÃ¡ los pasos siguentes:

1. Comprueba que $Q_A \neq O$.
2. Se debe cumplir que $nQ_A = O$

Si las comprobaciones anteriores son satisfactorias, Bob deberá entonces proceder de la siguiente manera:

1. Comprueba que $r, s \in [1, n-1]$, en otro caso, la firma es inválida.
2. Calcula e usando la misma función de hashing que uso Alice.
3. Toma de nuevo z los L_n bits menos significativos de e.
4. Obtiene $u_1 = zs^{-1} \bmod n$ y $u_2 = rs^{-1} \bmod n$.
5. Calcula el punto $C = (x_1, y_1) = u_1 G + u_2 Q_A$. Si $(x_1, y_1) = O$ entonces la firma no es válida.

Finalmente la firma será válida si $r = x_1 \bmod n$. En caso contrario, no lo será.

Comprobación de los pasos de Bob

Veremos por qué con $C = u_1 G + u_2 Q_A$ obtenemos el resultado que queremos. Para ello notamos en primer lugar que $Q_A = d_A G$ por lo que

$$C = u_1 G + u_2 d_A G$$

Ahora usamos la propiedad asociativa:

$$C = (u_1 + u_2 d_A) G$$

desarrollamos las expresiones de u_1 y u_2

$$C = (z s^{-1} + r d_A s^{-1}) G$$

y aplicamos la propiedad asociativa de nuevo con lo que

$$C = (z + r d_A) s^{-1} G$$

Sustituimos s por su expresión tal y como se calculó en el algoritmo:

$$C = (z + r d_A)(z + r d_A)^{-1} (k^{-1})^{-1} G$$

con lo que obtenemos $C = kG$

Problema

Bajo ningún concepto debemos elegir el mismo número k para calcular dos firmas (r, s), (r, s') de dos mensajes distintos, m y m', ya que si eso ocurre podría averiguarse el valor de d_A.

Este fallo de implementación fue usado para extraer la clave de usada en los sistemas PlayStation 3

Problema

El receptor podría seguir los siguientes pasos para averiguar la clave privada d_A:

1. Calcular z y z', dado que la función *HASH* es pública.
2. Puesto que $s - s' = k^{-1}(z - z')$ (por el paso 6 de la creación de la firma) podría averiguar $k = \frac{z-z'}{s-s'}$.
3. Como $s = k^{-1}(z + d_A)$, podría conseguir la clave privada $d_A = \frac{sk-z}{r}$.

Algoritmo de cifrado en curvas elípticas

Sea Φ una función pública invertible que transforme el mensaje un punto de la curva $E(\mathbb{F}_p)$. Para cifrar un mensaje m, Alice sigue los siguientes pasos:

1. Alice elige un número $k \in [1, n-1]$.
2. El texto cifrado será $(kG, kQ_B + P_m)$, donde $P_m = \Phi(m)$.

Algoritmo de cifrado en curvas elípticas

Bob recibe la tupla (C, D) y realiza los siguientes pasos para descifrar el mensaje:

1. Bob obtiene P_m así: $P_m = D - d_B C = kQ_B + P_m - d_B kG$, puesto que $kQ_B = kd_B G = d_B kG$.

El mensaje m es $\Phi^{-1}(P_m)$.

Algoritmo de cifrado en curvas elípticas

Se puede usar cifrado simétrico, dado que ambos comparten el secreto

$$d_A Q_B = d_A d_B G = d_B d_A G = d_B Q_A$$

En lugar de un número k, Alice puede utilizar d_A en el cifrado. En este caso, C sería Q_A, por lo que no es necesario transmitirla junto al mensaje.

Contenido

RSA vs. ECC

En esta tabla mostramos los tamaños de las claves de estos dos algoritmos, denotados k y f, al mismo nivel de securidad.

Security Strength	**RSA**	**ECDSA**
≤ 80	k = 1024	f = 160 - 223
112	k = 2048	f = 224 - 255
128	k = 3072	f = 256 - 383
192	k = 7680	f = 384 - 511
256	k = 15360	f = 512+