Curvas elípticas en criptografía

Yabir García Benchakhtir
David Cabezas Berrido
Patricia Córdoba Hidalgo

Índice

1. Definición de curva elíptica

Definimos el espacio proyectivo de dimensión n sobre un cuerpo K al que notamos $\mathbb{P}_n(K)$ como el conjunto de puntos en $K^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$ con la relación de equivalencia $\sim$ que relaciona dos elementos de la siguiente forma

$$(a_0, \ldots, a_n) \sim (a'_0, \ldots, a'_n) \iff \exists \lambda \in K^* \text{ tal que } (a_0, \ldots, a_n) = \lambda(a'_0, \ldots, a'_n)$$

En el caso $K = \mathbb{R}$, $\mathbb{P}_2$ tiene como elementos a las rectas vectoriales de $\mathbb{R}^3$. Intuitivamente, este espacio se puede interpretar como un plano y una recta "en el infinito". Este espacio tiene diversas propiedades, como que dos rectas proyectivas no coincidentes siempre se se cortan en un único punto, se podría decir que no existen rectas paralelas, sino rectas que se cortan en el infinito. Al igual que en $\mathbb{R}^2$, por dos puntos pasa una única recta.

Los puntos del proyectivo se pueden representar utilizando coordenadas homogéneas, para P_2 se necesitan 3 coordenadas.

Se define una curva elíptica como un par (E, O), donde E es una curva proyectiva no singular de genus uno y $O \in E$. Al punto O se le denomina "punto en el infinito". Denotaremos la curva como E, sobreentendiendo cual es el punto O.

El genus (género), de una curva algebraica proyectiva no singular corresponde al género (el número de agujeros) de la superficie orientable compacta obtenida al considerar la curva como una variedad real: la dimensión compleja de la curva es uno, por lo que la dimensión topológica es 2. Esta correspondencia puede ser compleja de entender, pero la siguiente identificación nos permite identificar curvas elípticas y trabajar con ellas con más facilidad.

Hay un isomorfismo Φ entre una curva elíptica E y la curva que cumple la ecuación de Weierstrass:

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

con $a_1, \ldots, a_6 \in K$ y satisfaciendo $\Phi(O) = [0, 1, 0]$ y $\Phi(P) \in \{[x, y, 1]\} \quad \forall P \in E \backslash \{O\}$.

Si la característica de K es distinta de 2 y 3, podemos simplificar la ecuación así:

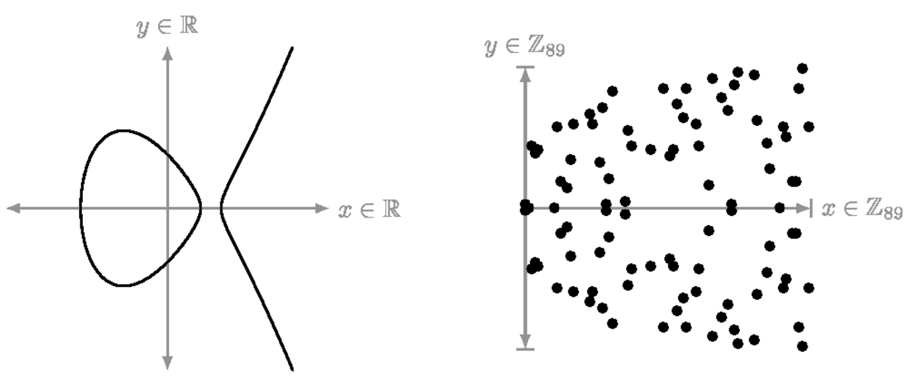
$$y^2 = x^3 + Ax + B$$

con $A, B \in K$.

Trabajamos por tanto con

$$E = \{(x, y) \in K \times K : y^2 = x^3 + Ax + B\} \cup \{O\}$$

Consideraremos las curvas elípticas sobre grupos finitos, pero ayuda visualizarlas sobre $\mathbb{R}$ para entender las operaciones de grupo sobre ellas. Mostramos un ejemplo de curva elíptica sobre $\mathbb{R}$ y sobre un grupo finito.



$y^2 = x^3 - 2x + 1$ over $\mathbb{R}$ $\qquad$ $y^2 = x^3 - 2x + 1$ over $\mathbb{Z}_{89}$

Curva sobre $\mathbb{R}$ y sobre un cuerpo finito

Cada ecuación $y^2 = x^3 + Ax + B$ tiene asociado un discriminante $\Delta = -16(4A^3 + 27B^2)$. Una curva es singular si y sólo si su discriminante es 0, en cuyo caso no sería considerada una curva elíptica.

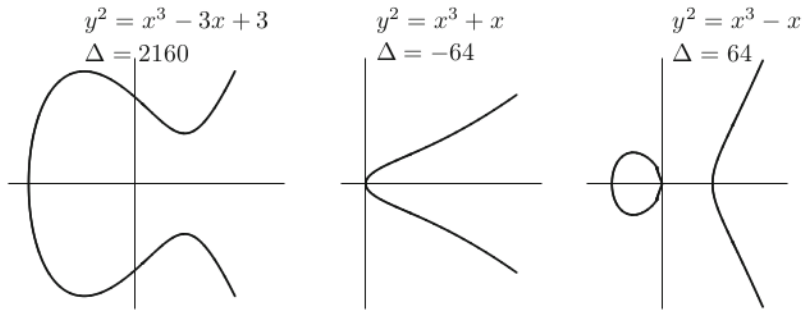


Figure 3.1: Three elliptic curves

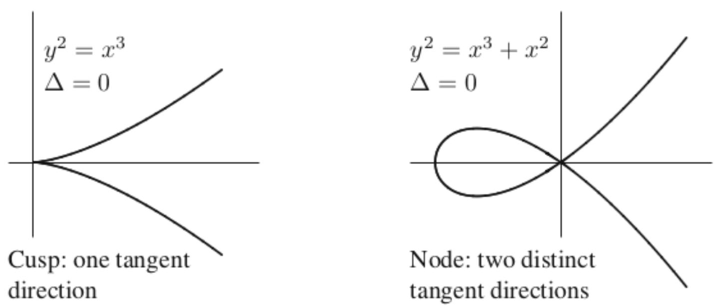


Figure 3.2: Two singular cubic curves.

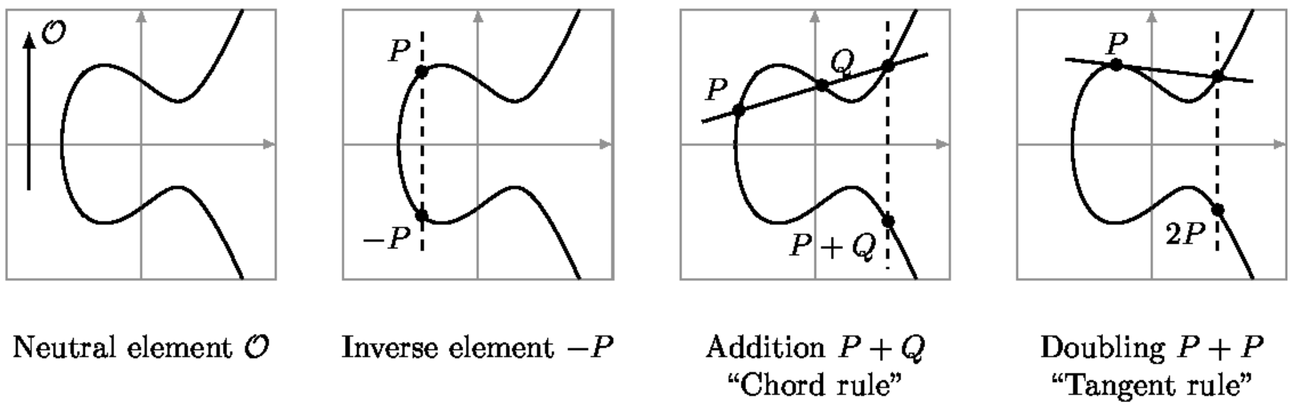
Ejemplo de curvas elípticas

2. Operaciones en el grupo de la curva

En la curva elíptica podemos definir una estructura de grupo con la operación + de forma que $(E, +)$ sea un grupo abeliano. El elemento neutro para la operación será el punto en el infinito O. Para definir las operaciones en la curva vamos a recurrir a descripciones geométricas. Estas serán fáciles de visualizar en el caso de trabajar sobre el cuerpo de los reales, será ahí donde las ilustremos.

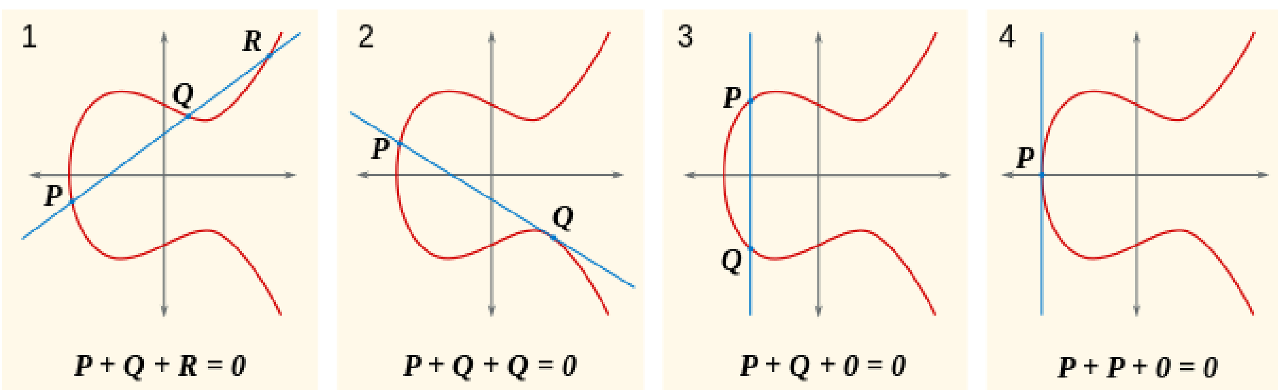
En primer lugar hacemos una observación: dado que la curva E es simétrica respecto del eje de abscisas podemos definir el punto opuesto de un punto dado P, al que notaremos como $-P$, como el reflejado respecto al eje de abscisas. Si $P = (x, y)$, entonces $-P = (x, -y)$. Definimos también $-O = O$.

Consideremos dos puntos de la curva $P, Q \in E$ y la recta que las une. Esta recta interseca a la curva E en un tercer punto al que llamamos R. Entonces definimos el punto $P + Q$ como el punto reflejado respecto al eje de abcisas del punto R, es decir $-R = P + Q$. Si P y Q coinciden, entonces consideramos la recta tangente a la curva en P, que sería el límite de las rectas cuando P y Q están infinitamente cerca. Si uno de los dos puntos es O, trazamos una recta vertical, consideramos el infinito "arriba". Definimos también $O + O = O$.



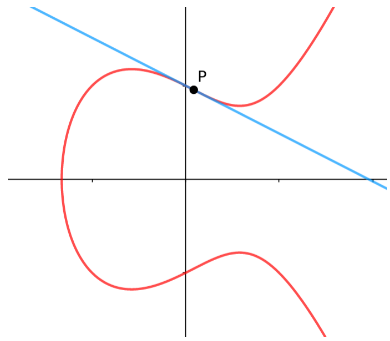
Estructura de grupo de curvas elípticas

Contanto las multiplicidades, la recta siempre toca a la curva en tres puntos ($P, Q, R \in E$), y podríamos expresar esto como $P + Q + R = O$. Examinemos los siguientes casos:



Casos de la suma en curvas elípticas

1. Los tres puntos son distintos y tenemos $P + Q = -R$.
2. El punto Q tiene multiplicidad 2: además de coincidir la curva y la recta, coinciden sus tangentes, es decir, las derivadas de ambos polinomios en Q. Por lo que $R = Q$ y obtenemos $P + Q = -Q$. Este caso también ejemplifica que $Q + Q = -P$. Este es el procedimiento cuando los puntos coinciden.
3. $Q = -P$ y la recta es vertical. El tercer punto de corte es el infinito, por lo que $P + Q = P + (-P) = O$. Este caso también ejemplifica que $P + O = -(-P) = P$.
4. Tenemos $P = Q$, que tiene multiplicidad dos, y el tercer punto de corte es el infinito. También ejemplifica que $P + O = P$.
5. Falta el caso en el que en el punto P coinciden la recta con E, sus tangentes, y además su curvatura, P es un punto de inflexión. Por tanto la multiplicidad de P es 3 y obtenemos $P + P = -P$.



Caso $P + P + P = O$

Se puede comprobar que esta suma define un grupo aditivo con elemento neutro O. La propiedad conmutativa es fácil de comprobar porque la recta que une P y Q es la misma que la que une Q y P, pero demostrar la asociatividad es muy complejo.

A partir de la suma de puntos definimos el producto de un punto P por un escalar n como:

$$nP = \underbrace{P + P + \ldots + P}_{n}$$

Esta operación puede calcularse con eficiencia $O(\log n)$ escribiendo n en base 2 y realizando duplicaciones sucesivas.

Vamos a encontrar un subgrupo cíclico $< G > \subset E(\mathbb{F}_p)$ de una curva elíptica definida sobre un cuerpo finito $\mathbb{F}_p$. Para ello seguimos el siguiente procedimiento:

1. Calculamos el número de puntos de la curva elíptica, $N = \#E(\mathbb{F}_p)$. Esto se puede lograr mediante el algoritmo de Schoof.
2. Elegimos el factor primo mayor de N, al que llamaremos n.
3. Tomamos $h = N/n$. Para que una curva sea segura, el cofactor ha de ser pequeño.
4. Escogemos un punto cualquiera de la curva $P \in E(\mathbb{F}_p)$ y sea $G = hP$.
5. Si G es el punto en el infinito, cogemos otro punto P. De esta manera, el orden de G es n.

Si en el paso 2, obtenemos algunos divisores de N cuyo producto sea grande, sabemos que h va a ser múltiplo de ese producto y podemos desechar la curva por insegura. Por ejemplo, si probando primos en orden obtenemos que 11 divide N, y $N/11$ no es primo, el mínimo cofactor que podemos esperar sería 11^2. Este paso puede ser computacionalmente muy costoso, pero podemos utilizar una lista de curvas seguras ya conocidas con cofactor pequeño.

3. ¿Por qué las curvas elípticas son interesantes para la criptografía?

En 1986 fue propuesto por Koblitz y Miller un criptosistema como el de Diffie y Hellman utilizando el grupo aditivo de las curvas elípticas en lugar del grupo multiplicativo de los cuerpos finitos. El enunciado del problema es el siguiente:

Problema del logaritmo discreto:

Sea G un grupo multiplicativo y $x, y \in G$ elementos tales que y está en el subgrupo generado por x, $y \in < x >$. El problema del logaritmo discreto (DLP de sus siglas en inglés) es el problema de determinar un entero $m \geq 1$ tal que

$$x^m = y$$

Sea $< G >$ un subgrupo aditivo de $E(K)$, el problema del logaritmo discreto para curvas elípticas es el problema de encontrar k de manera que $kG = P$, para un punto dado $P \in< G >$.

La seguridad de las curvas elípticas en criptografía, descansa en la dificultad de resolver este problema.

4. Cifrado y firma con curvas elípticas

Vamos a describir a continuación los pasos que seguirá Alice para mandar un mensaje firmado y cifrado a Bob. Ambos se deberán poner de acuerdo en tres parámetros, que pueden acordar por un canal de comunicación potencialmente no seguro:

- Una curva $E(\mathbb{F}_p)$ segura.
- G un punto de la curva de orden primo.
- Conocer el valor n que es el orden del grupo $< G >\subset E(\mathbb{F}_p)$.

Necesitamos que n sea primo para que cualquier elemento de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sea invertible.

4.1. Claves pública y privada

Alice crea una clave privada consistente en un entero d_A elegido de manera aleatoria en el intervalo $[1, n-1]$ y calcula un punto de la curva $Q_A = d_AG$, donde estamos usando la multiplicación de un escalar por un punto de la curva, que se puede realizar en tiempo $O(logd_A)$. La clave pública de Alice será Q_A. Del mismo modo, la clave privada de Bob será d_B y su clave pública será Q_B .

4.2. Algoritmo de firma digital en curvas elípticas (ECDSA)

Para firmar un mensaje, Alice sigue los siguientes pasos:

1. Se calcula $e = HASH(m)$ el resultado de aplicar una función de hash conocida al mensaje m, que lo convierte en un entero.
2. Definimos L_n como el número de bits del orden del grupo, n. Y tomamos como z el número formado por los L_n bits menos significativos de e.
3. Elegimos de manera aleatoria un entero secreto k en el intervalo $[1, n - 1]$.
4. Calculamos el punto de la curva $(x_1, y_1) = kG$.
5. Tomamos $r = x_1 \bmod n$. En el caso de que r sea 0, volvemos al paso 3.
6. Calculamos ahora $s = k^{-1}(z + rd_A) \bmod n$. Si s es 0, volvemos al paso 3.
7. La firma es el par (r, s)

Para verificar la firma Bob necesitará conocer el mensaje y la clave pública de Alice, el punto de la curva Q_A, y deberá realizar los siguientes pasos:

En primer lugar tenemos que hacer comprobaciones básicas acerca de la información que recibimos:

1. Comprobamos que el punto Q_A es un punto de la curva distinto de O.
2. Se debe cumplir que $nQ_A = O$

Si las comprobaciones anteriores son satisfactorias, Bob deberá entonces proceder de la siguiente manera:

1. Comprobamos que $r, s \in [1, n - 1]$, en otro caso, la firma es inválida.
2. Calculamos, al igual que hacía Alice, e usando la misma función de hashing que uso Alice.
3. Tomamos de nuevo z los L_n bits menos significativos de e.
4. Obtenemos $u_1 = zs^{-1} \bmod n$ y $u_2 = rs^{-1} \bmod n$.
5. Calculamos el punto $C = (x_1, y_1) = u_1G + u_2Q_A$. Si $(x_1, y_1) = O$ entonces la firma no es válida.
6. Finalmente la firma será válida si $r \mod x_1(\bmod n$. En caso contrario, no lo será.

Queda ver por qué con la operación $C = u_1G + u_2Q_A$ obtenemos el resultado que queremos. Para ello notamos en primer lugar que $Q_A = d_AG$ por lo que

$$C = u_1G + u_2d_AG$$

Ahora usamos la propiedad asociativa:

$$C = (u_1 + u_2d_A)G$$

desarrollamos las expresiones de u_1 y u_2

$$C = (zs^{-1} + rd_As^{-1})G$$

y aplicamos la propiedad asociativa de nuevo con lo que

$$C = (z + rd_A)s^{-1}G$$

Sustituimos s por su expresión tal y como se calculó en el algoritmo:

$$C = (z + rd_A)(z + rd_A)^{-1}(k^{-1})^{-1}G$$

con lo que obtenemos $C = kG$

Bajo ningún concepto debemos elegir el mismo número k para cifrar dos mensajes distintos, ya que si eso ocurre podría averiguarse el valor de d_A. Supongamos que tenemos dos firmas (r, s), (r, s') que han sido calculadas con el mismo valor de k para firmar los mensajes m y m'. El receptor de los mensajes podría calcular z y z', dado que la función $HASH$ es pública. Puesto que $s - s' = k^{-1}(z - z')$ (por el paso 6 de la creación de la firma) podría averiguar $k = \frac{z-z'}{s-s'}$. Como $s = k^{-1}(z + d_A)$, el receptor podría conseguir la clave privada $d_A = \frac{sk-z}{r}$.

Este fallo de implementación fue usado para extraer la clave de usada en los sistemas PlayStation 3. También se explotaron vulnerabilidades relacionadas con esto en la clase SecureRandom de Java para obtener claves en aplicaciones Android que utilizaban esta implementación. Un método para elegir valores diferentes de k podría ser utilizar el propio mensaje y la clave privada como semilla en el algoritmo aleatorio.

4.3. Algoritmo de cifrado en curvas elípticas

Sea Φ una función pública invertible que transforme el mensaje un punto de la curva $E(\mathbb{F}_p)$. Para cifrar un mensaje, Alice sigue los siguientes pasos:

1. Alice elige un número $k \in [1, n-1]$.
2. El texto cifrado será $(kG, kQ_B + P_m)$, donde $P_m = \Phi(m)$.

Para descifrarlo, Bob realiza los siguientes pasos sobre la tupla (C, D) recibida:

1. Bob obtiene P_m así: $P_m = D - d_BC = kQ_B + P_m - d_BkG$, puesto que $kQ_B = kd_BG = d_BkG$.

El mensaje m es $\Phi^{-1}(P_m)$.

Como $d_AQ_B = d_Ad_BG = d_Bd_AG = d_BQ_A$, Alice y Bob disponen de un secreto compartido que pueden utilizar para cifrado simétrico. En lugar de un número k, Alice puede utilizar su propia clave privada. En este caso, C sería la clave pública de Alice, por lo que no es necesario transmitirla junto al mensaje (habiéndola intercambiado previamente).

5. RSA y ECC

El algoritmo de RSA basa su fortaleza en el problema de la factorización de números. Este algoritmo aparece al final de la década de los 70. Durante los años 80, Koblitz y Miller desarrollaron la criptografía en curvas elípticas.

Inicialmente se criticó a la criptografía de curva elípticas (ECC) por estar basada en una matemática sobre la que no se había profundizado de manera importante y por lo tanto podía suponer un problema de seguridad. Se argumentaba que el problema de factorización era un problema que se había estudiado durante siglos mientras que el problema del logaritmo discreto era un problema que apenas tenía un siglo de estudio.

Se usaron distintos algoritmos para intentar atacar ECC, desde los más *brutos* hasta el ataque *rho de Pollard* que ya existía y se adaptó a las curvas elípticas. Este algoritmo junto al de *baby-step/giant-step* tienen una complejidad de $O(\sqrt{N})$. El algoritmo que hizo temer por el futuro de ECC fue *xedni* (descrito en Silverman). Se dudaba de la eficacia del algoritmo pero los defensores del RSA, que se veían en un momento de apogeo, vieron un punto de debilidad y quisieron proclamar que la ECC era insegura. Se demostró que con pequeñas modificaciones este algoritmo también se podía usar para la factorización de números y por lo tanto ser un problema para el RSA también. Finalmente se demostró que este algoritmo era ineficiente.

La evolución en la tecnología hizo que cada vez los números que se usaban para el algoritmo RSA crecieran más y con ello la longitud en bits que se necesitaba para codificarlos. Esto frente a la ECC era un inconveniente ya que el tamaño en bits de las claves que se usaban eran mucho menores y crecían de manera más comedida.

En esta tabla mostramos los tamaños de las claves de estos dos algoritmos, denotados k y f, al mismo nivel de securidad.

Security Strength	**RSA**	**ECDSA**
≤ 80	k = 1024	f = 160 - 223
112	k = 2048	f = 224 - 255
128	k = 3072	f = 256 - 383
192	k = 7680	f = 384 - 511
256	k = 15360	f = 512+

Finalmente, acercándonos al año 2000, la NSA sorprendió a la comunidad anunciando su apoyo a las ECC, considerándolo un sistema seguro y proponiendo mejoras a los algoritmos. En 2005 publicó también un artículo en su web incitando al uso de ECC en lugar de RSA por considerarla mucho más segura. Este hecho balancea mucho más la discusión entre los defensores de RSA y ECC.

6. Simulación con Openssl