

El Argumento Diagonal de Lawvere, el Teorema de Cantor y el Teorema de Incompletitud de Gödel

Lina María Orozco Izquierdo

Director del Trabajo Schweitzer Rocuts Pabón
Matemático Universidad Nacional de Colombia
M. Sc. de la Universidad Nacional

Fundación Universitaria Konrad Lorenz
Facultad de Matemáticas

Trabajo Presentado como Requisito para Optar
por el Título de Matemático

9 de julio de 2003

Resumen

A través del teorema Diagonal de F William Lawvere se muestra una brillante versión sintética, en el lenguaje de la teoría de categorías, del teorema de George Cantor y del teorema de Incompletitud de Gödel.

Through the F William Lawvere Diagonal theorem a brilliant synthetic version, using the language of category theory is used to show George Cantor theorem and Gödel Incompleteness theorem.

Índice General

Introducción	4
1 Capítulo 1	
Preliminares	5
1.1 El Teorema de Cantor	5
1.2 El Teorema de Incompletitud de Gödel	6
1.2.1 Generalidades Acerca del Trabajo de Gödel	6
1.2.2 Pasos de la Demostración de Gödel del Teorema de Incompletitud	8
2 Capítulo 2	
Introducción a las Categorías	11
2.1 Definición y Ejemplos de Categorías	11
2.2 Algunos Objetos Especiales	13
3 Capítulo 3	
Argumentos Diagonales	22
3.1 El Teorema Diagonal de Lawvere	22
3.2 Demostración del Teorema de Cantor Utilizando el Argumento Diagonal	23
3.3 Demostración del Teorema de Incompletitud de Gödel Utilizando el Argumento Diagonal	23

Introducción

La teoría de categorías surge en medio de la escuela estructuralista francesa alrededor de 1945 como resultado de los trabajos de Eilenberg y Mac Lane en topología algebraica, pero rápidamente se expande a distintas partes de la matemática, la lógica y sus aplicaciones, donde en primera instancia, se intuye y consolida como un ambiente matemático adecuado para generalizar, unificar y simplificar conceptos en muy variados tópicos, en los cuales los diagramas de flechas y sus propiedades, extraen sintéticamente las relaciones entre algunos objetos internos de una teoría o la relación entre objetos de distintas teorías; pero en segunda instancia, es un objeto central de estudio y una rama genuina de la matemática, que ha motivado la aparición de teoremas en algunas partes de la matemática, cuya prueba se desconoce por otros métodos en estos contextos.

En este trabajo se explican algunas nociones básicas de teoría de categorías y se muestra un ejemplo de su enorme poder de síntesis: el teorema diagonal de Lawvere, con el que se logra extraer parte de la esencia de algunas demostraciones clásicas en las que se ve involucrado un argumento diagonal, a decir, el teorema de Cantor en teoría de conjuntos y el teorema de incompletitud de Gödel en teoría de la demostración.

El trabajo contiene tres capítulos, en el primer capítulo, como preliminares, se prueban las demostraciones clásicas del teorema de Cantor y el teorema de incompletitud de Gödel, las generalidades del trabajo que realizó Gödel y los pasos de la demostración de este teorema; en el segundo capítulo, se hace una introducción a la teoría de las categorías, se dan ejemplos y se estudian algunos objetos especiales de las mismas y en el último capítulo, se explican las demostraciones del teorema diagonal de George Cantor y el teorema de incompletitud de Gödel, utilizando el argumento diagonal el cual es una generalización obtenida mediante la teoría de categorías y permite una demostración clara, como ya se dijo, de teoremas clásicos como lo son el teorema de Cantor y el teorema de Gödel, sobre los cuales se desarrolló el presente trabajo.

Se trató de seguir al máximo las normas AMS, pero, en algunos casos, fue necesario desviarse de la norma, por la importancia que tienen las gráficas para la representación y demostración de los teoremas.

1 Capítulo 1

Preliminares

1.1 El Teorema de Cantor

El desarrollo de la teoría de conjuntos ha girado en gran medida alrededor de la noción de cardinal y su aritmética, el cuál, en sus principios, se debe en su intuición, presentación y ampliación a los trabajos de Bolzano y Cantor. En estos trabajos se caracteriza el cardinal de un conjunto y su comportamiento respecto de los demás, en términos de los conceptos de equipotencia \simeq y dominación \preceq , los cuales se fundamentan en la noción de función biyectiva, inyectiva o sobreyectiva.

Definición 1.1 *Para T y S conjuntos, se dice que S domina a T o que T es dominado por S , si existe una función inyectiva de T en S , o de forma equivalente, si existe una función sobreyectiva de S en T , lo cual se escribe $T \preceq S$. Se dice que T es equipotente con S y se escribe $T \simeq S$, si existe una función biyectiva de T en S , o lo que es lo mismo, si $T \preceq S$ y $S \preceq T$ (teorema de Cantor - Bernstein). En particular, si T es equipotente con el conjunto N de números naturales, se dice que T es enumerable.*

Observe que por composición de funciones inyectivas y el teorema de Cantor - Bernstein se sigue que $T \simeq S$ y $T \preceq X \preceq S$ implican $T \simeq X \simeq S$, o de manera equivalente, si $T \preceq X \preceq S$ y no es cierto $T \simeq X$ o no es cierto $X \simeq S$ entonces no es cierto $T \simeq S$.

El teorema de Cantor afirma que un conjunto T es dominado estrictamente por $P(T)$, su conjunto de partes o conjunto potencia, es decir, que existen funciones inyectivas de T en $P(T)$ pero que ninguna de ellas resulta biyectiva, lo cual se escribe $T \prec P(T)$. La prueba clásica recurre al método de reducción al absurdo (con lo cual se supone la consistencia de la teoría) y a un argumento diagonal, idea que fue explotada en la demostración de otros teoremas como la no enumerabilidad de los números reales.

Teorema 1 (Cantor) *Sea T un conjunto. Entonces $T \prec P(T)$.*

Demostración La función f de T en $P(T)$ definida por $f(t) = \{t\}$ es una función inyectiva, con lo cuál $T \preceq P(T)$. Suponga que existe una función h de T en $P(T)$ sobreyectiva, con lo cual $P(T)$ sería dominado por T , y tome $X = \{x \in T/x \notin h(x)\}$. Como h es sobreyectiva existe $t \in T$ tal que $h(t) = X$, y por la definición de X , $t \in h(t)$ si y solo si $t \notin h(t)$. Por tanto, no existe ninguna función sobreyectiva de T en $P(T)$.

Para dos conjuntos T y S , si $T \subset S$ entonces $T \preceq S$ pues la función de inmersión de T en S , $i(x) = x$, es inyectiva. Se sigue en particular que los números naturales son dominados por los números reales.

Teorema 2 *El conjunto R de los números reales no es enumerable.*

Demostración El conjunto N de los números naturales es dominado por el intervalo $(0, 1) \subset R$ pues la función $f(n) = 1/(n + 1)$ es una función inyectiva de N en $(0, 1)$. Suponga que tal intervalo es un conjunto enumerable, con lo cual existe una lista exhaustiva de sus elementos, a decir, $(0, 1) = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ y sea $a_i = 0, a_{1i}a_{2i}a_{3i}\dots$ la escritura decimal más corta del i -ésimo número de la lista, en donde a_{ki} es la k -ésima cifra decimal de a_i . Defina el número $x = 0, x_1x_2x_3\dots x_n\dots$ donde $x_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ y $x_i \neq a_{ii}$. Entonces $x \in (0, 1)$ y para cada $i \in N$ se tiene que $x \neq a_i$, pues difieren en la cifra i -ésima. Por tanto, $x \in (0, 1)$ pero $x \notin \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ con lo cual la lista no es exhaustiva, contradicción. Entonces $(0, 1)$ no es enumerable, con lo cual no es cierto que $N \simeq (0, 1)$, pero $N \preceq (0, 1) \preceq R$, de donde R no es enumerable.

1.2 El Teorema de Incompletitud de Gödel

1.2.1 Generalidades Acerca del Trabajo de Gödel

El intentar entender y explicar el contexto en el que se está inmerso (fenómenos sociales, físicos, económicos), ha llevado al ser humano por muy variadas rutas en las que se deposita esperanza de encontrar respuestas, las cuales en muchos casos han sido consideradas definitivas a lo largo de espacios temporales muy largos. Una de tales rutas de aproximación es la matematización del fenómeno, con lo cual el fenómeno se “libera” de ambigüedades pero se restringe a cierto tipo de combinatoria simbólica y a un instrumental que funciona como versión local del mismo. Este proceso ha llevado a aplicaciones muy concretas de la matemática, tales como algunos apartes de la geometría y el cálculo, con lo que surge de manera natural la esperanza de que un instrumental con tan amplia gama de modelos, contextualizado adecuadamente, fuera capaz de descifrar todas las verdades del objeto de estudio o, por lo menos, del modelo que se propone para aproximarlo, y de hacer evidente al investigador la veracidad o no de sus afirmaciones, lo cual llevaría el proceso de generación de conocimiento a la consecución del modelo preciso para el fenómeno y, con algún método efectivo, decidir acerca de las verdades del fenómeno o del modelo.

El teorema de incompletitud de Gödel es uno de los teoremas cruciales en el desarrollo de la lógica moderna, pues rompe con la esperanza de que bajo el marco de una cierta combinatoria finita de enumerables símbolos, se logren atrapar todas las verdades de cualquier estructura en la que se pueda formalizar la aritmética. De esto se sigue que, en los modelos que contengan la aritmética formalizada, existen verdades que dentro de tal modelo son indecidibles, es decir, no se pueden probar ni refutar, lo que indica la inexistencia de modelos totales y la imposibilidad de decidir en todos los casos acerca de las verdades de un modelo dado.

Este teorema tiene profundas repercusiones en la matemática y la lógica, y en particular en teoría de la demostración. Este teorema implica la imposibilidad de pruebas internas de consistencia para una teoría formalizada capaz de soportar la aritmética, con lo cual, es imposible en este tipo de marco, probar la consistencia de gran parte de la matemática. Además se puede probar que la noción de verdad del sistema es externa al sistema, o sea, que un sistema de este tipo no puede dar cuenta de la verdad o no de afirmaciones internas a él.

Debido a la aparición de paradojas en varias regiones de la matemática, surgieron distintas propuestas para su manejo o erradicación (Paraconsistencia, Intuicionismo, Formalismo y Logicismo). La idea que tomó más fuerza fue la tarea de conseguir versiones depuradas de estos apartes de la matemática para después probar de forma directa la consistencia de los mismos. Se pretendía alcanzar versiones que fueran consistentes (libres de contradicciones) y completas (deduzcan todas las verdades).

El teorema de incompletitud surge en medio del contexto formalista propuesto por David Hilbert, en el cual se recurre a la noción de sistema formal, donde se gravita alrededor del concepto de pruebas finitarias. Un sistema formal que contiene la aritmética es una extensión consistente del cálculo de predicados formalizado que contiene símbolos, axiomas y reglas para describir la aritmética. El camino de la demostración del teorema de Gödel recorre la aritmetización del sistema formal, para luego, en el lenguaje de las funciones y predicados recursivos, conseguir una afirmación aritmética cierta que no puede ser demostrada dentro del sistema.

Teorema 3 (Incompletitud de Gödel) *En cualquier sistema formal que abarque toda la aritmética, existen proposiciones que se saben que son verdaderas, pero no se pueden demostrar.*

$$\text{Es decir : } \models \alpha, \text{ pero no } \vdash \alpha \quad (1)$$

1.2.2 Pasos de la Demostración de Gödel del Teorema de Incompletitud

El proceso de enumeración de Gödel consiste en asignar un número único a cada signo elemental, fórmula (secuencia de signos) y cada prueba (secuencia finita de fórmulas en la que cada renglón es un teorema, un axioma o viene de aplicarse alguna regla deductiva entre renglones anteriores). Este número sirve como rótulo distintivo, se llama “**Número de Gödel**”. Con esto se consigue que el sistema formal que describe por lo menos la aritmética sea descrito por la misma aritmética. Para obtener estos números, primero dividió los signos elementales del vocabulario en dos clases: constantes y variables.

- Las constantes son:

Signos constantes	Número de Gödel
\sim	1
\vee	2
\supset	3
\exists	4
$=$	5
0	6
s	7
(8
)	9
,	10

- Las variables a su vez pueden ser:

1. **Numéricas:** Numerales y expresiones numerales. Se asocian a ellas, números primos sucesivos mayores que 10.

Variables numéricas	Número de Gödel
x	11
y	13
z	17

2. **Proposicionales:** Fórmulas, proposiciones, frases. Se asocian a ellas los cuadrados de números primos sucesivos mayores que 10.

Variables proposicionales	Número de Gödel
p	11^2
q	13^2
r	17^2

3. **Predicativas:** Predicados. Se asocian a ellas los cubos de números primos sucesivos mayores que 10.

Variables predicativas	Número de Gödel
P	11^3
Q	13^3
R	17^3

Ejemplo 1.1 (Numeración de Gödel) *A la fórmula $(p \wedge p) \supset p$ se le calcula en número único de Gödel tomando los valores de las tablas anteriores, así:*

$$\begin{array}{ccccccc}
 (& p & \wedge & p &) & \supset & p \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 8 & 11^2 & 2 & 11^2 & 9 & 3 & 11^2
 \end{array}$$

Como se desea asignar un único número a la fórmula, se asocian números primos sucesivos a cada signo que aparece en ella, elevando este número a la potencia igual al número de Gödel de los signos elementales correspondientes. Por tanto, el número de Gödel asociado a la fórmula es:

$$2^8 \times 3^{11^2} \times 5^2 \times 7^{11^2} \times 11^9 \times 13^3 \times 17^{11^2} = 2.474 \times 10^{325}$$

Después de definir funciones y predicados recursivos y recursivos primitivos, los pasos que siguió Gödel para la demostración de este teorema son:

1. Construir una fórmula aritmética G que representa el enunciado “ G no es demostrable”. A esta frase le calculó el número de Gödel h , y enunció aritméticamente la frase “La fórmula con número de Gödel h no es demostrable”.
2. Probar que si G es demostrable, $\sim G$ también es demostrable y entonces la aritmética es inconsistente. Pero aritmética es consistente: no se puede deducir G y $\sim G$.

3. Luego se concluye que la fórmula aritmética G es indecidible: G no es demostrable formalmente, pero al mismo tiempo G es verdadera, con lo cual se concluye que en un sistema formal consistente que contenga la aritmética, **ningún conjunto consistente recursivo de axiomas para la aritmética es completo**. Este argumento muestra que la aritmética es esencialmente incompleta, ya que aún si se adicionaran nuevos axiomas de tal manera que la fórmula G pudiera ser demostrada, siempre será posible construir otra fórmula verdadera, pero formalmente indecidible.
4. Adicionalmente, Gödel describió como construir otra fórmula A , que representa el enunciado: “La aritmética es consistente”, y probó que la fórmula $A \supset G$ es demostrable, probando finalmente que la fórmula A no es demostrable.

Los detalles de este procedimiento seguido por Gödel se puede encontrar en [NAGEL] y [CAICEDO].

2 Capítulo 2

Introducción a las Categorías

2.1 Definición y Ejemplos de Categorías

Una categoría es una colección de objetos y morfismos entre dichos objetos para los que está definida una composición asociativa con módulo a izquierda y a derecha. Formalmente:

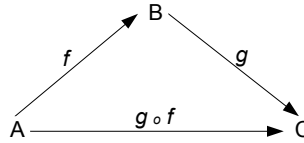
Definición 2.1 (Categoría) Una categoría \mathcal{C} es un par $(Ob(\mathcal{C}), Hom(\mathcal{C}))$ donde:

1. $Ob(\mathcal{C})$ es una clase cuyos elementos X, Y, \dots son llamados **objetos** de \mathcal{C} o \mathcal{C} -objetos.
2. $Hom(\mathcal{C})$ es una clase cuyos elementos f, g, \dots llamados **flechas** o **morfismos** de \mathcal{C} o \mathcal{C} -flechas, donde:
 - a. A cada flecha f de $Hom(\mathcal{C})$ le corresponde un par de \mathcal{C} -objetos llamados el **dominio** y **codominio** de f , $Dom(f)$ y $Cod(f)$. Si $A = Dom(f)$ y $B = Cod(f)$ entonces se dice que f es una flecha que va de A a B y se escribe $f : A \longrightarrow B$ o $A \xrightarrow{f} B$.

$$A \xrightarrow{f} B$$

Dominio y codominio

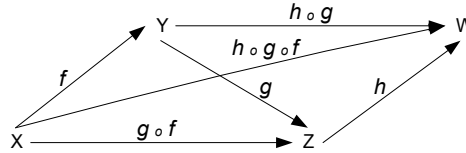
- b. A cada par de flechas $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ de \mathcal{C} , donde $Cod(f) = Dom(g)$, se le asigna otra flecha $g \circ f : A \longrightarrow C$ llamada la **composición** o **compuesta** de f y g , lo cual también se puede escribir gf .



Composición

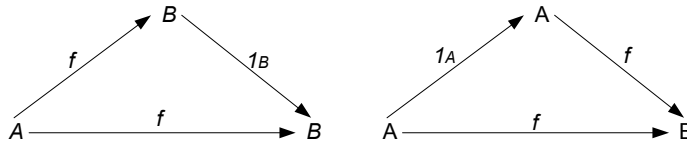
$$Dom(g \circ f) = Dom(f) \text{ y } Cod(g \circ f) = Cod(g) \quad (2)$$

- c. **Asociatividad de la composición.** Si $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$, $h : Z \longrightarrow W$, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Esto permite omitir los paréntesis y solo escribir $h \circ g \circ f$ o $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow W$.



Ley asociativa

- d. **Ley de identidad.** Si $f : A \longrightarrow B$, entonces $1_B \circ f = f$ y $f \circ 1_A = f$.



Ley de identidad

- e. Para cada objeto A de $Ob(\mathcal{C})$ existe una única flecha $1_A : A \longrightarrow A$, llamada la **flecha identidad** de A , donde $g \circ 1_A = g$ y $1_A \circ f = f$ para cualesquiera morfismos f y g , donde $Cod(f) = A = Dom(g)$. Entonces, si $f : A \longrightarrow B$, tenemos $1_B \circ f = f$ y $f \circ 1_A = f$.

$$A \xrightarrow{1_A} A$$

Flecha identidad

Las identidades son un tipo especial de flecha, las cuales dicen que un objeto se relaciona con el mismo y tienen la propiedad de ser módulo para la composición. Se puede demostrar fácilmente que para cada objeto A , la flecha identidad es única.

Una categoría es pequeña si para cualquier par de objetos X, Y de \mathcal{C} , la colección $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ de flechas de X a Y es un conjunto. Esto quiere decir que su clase de objetos y por lo tanto su clase de flechas, es un conjunto.

Algunos ejemplos importantes de categorías (pequeñas) son: **Set**, **Vect**, **Top**, **Cat**.

Ejemplo 2.1 (Set) Es la categoría de los conjuntos, donde la clase de “objetos” es la clase V de todos los conjuntos y la clase de “flechas” para $X, Y \in V$, $\mathbf{Set}(X, Y)$ es el conjunto de todas las funciones de X en Y . Entonces los objetos en \mathbf{Set} son todos los conjuntos y los morfismos son todas las funciones entre esos conjuntos.

Ejemplo 2.2 (Vect) Es la categoría con espacios vectoriales como objetos y funciones lineales como morfismos.

Ejemplo 2.3 (Top) Es la categoría de los espacios topológicos como objetos y las funciones continuas como morfismos.

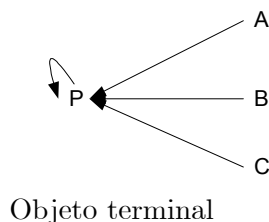
Ejemplo 2.4 (Cat) Es la categoría de todas las categorías, con categorías como objetos y funtores como morfismos.

Para una categoría \mathcal{C} , la categoría opuesta o dual \mathcal{C}_{op} , es la que se obtiene devolviendo todas las flechas de la categoría \mathcal{C} , intercambiando el dominio y codominio, es decir, $Ob(\mathcal{C}) = Ob(\mathcal{C}_{op})$, $f \in Hom(\mathcal{C})$ con $A \xrightarrow{f} B$ si y solo si $f_{op} \in Hom(\mathcal{C}_{op})$ con $B \xrightarrow{f_{op}} A$, y $(g \circ f)_{op} = f_{op} \circ g_{op}$ para $f, g \in Hom(\mathcal{C})$. Algunas nociones en categorías son mutuamente duales, como por ejemplo la noción de objeto inicial y terminal, monomorfismo y epimorfismo, como se verá más adelante.

2.2 Algunos Objetos Especiales

Algunas de las siguientes definiciones son simétricas o duales, como se había advertido anteriormente.

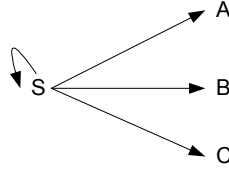
Definición 2.2 (Objeto Terminal) Un objeto terminal, es un objeto P , tal que cada objeto X de \mathcal{C} tiene exactamente una única flecha hacia P . Esto es, existe un único morfismo $X \longrightarrow P$, para todo X de \mathcal{C} .



Esta definición dice que un objeto terminal es aquel que recibe solo una flecha de cada objeto de la categoría y como el propio objeto terminal es un objeto de la categoría, debe recibir una flecha de sí mismo, la cual es la flecha identidad.

En la mayor parte de las categorías es útil ver el objeto terminal como un punto.

Definición 2.3 (Objeto Inicial) *Un objeto inicial es un objeto S , tal que cada objeto X de \mathcal{C} tiene exactamente una única flecha desde S . Esto es, existe un único morfismo $S \longrightarrow X$, para todo X de \mathcal{C} .*



Objeto inicial

Esto quiere decir que un objeto inicial es aquel que manda una y solo una flecha a cada objeto de la categoría y como el propio objeto inicial es un objeto de la categoría, debe enviarse una flecha a sí mismo, la cual es la flecha identidad.

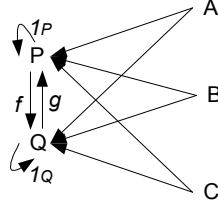
Usualmente se usa el “1” para nombrar un objeto terminal y “0” para nombrar un objeto inicial. Una categoría puede tener cualquier número de objetos terminales e iniciales o ninguno. Sin importar cuantos tenga estos son determinados por un único isomorfismo.

Teorema 4 *Si P es un objeto terminal y hay un isomorfismo $f : Q \longrightarrow P$ entonces Q es también un objeto terminal [MC].*

Demostración Cualquier objeto T tiene una única $u : T \longrightarrow P$, así hay por lo menos $f^{-1} \circ u : T \longrightarrow Q$. Dado cualquier $v : T \longrightarrow Q$ tenemos $f \circ v : T \longrightarrow P$. Debido a la unicidad, $u = f \circ v$ y así $v = f^{-1} \circ u$. Por lo tanto $f^{-1} \circ u$ tiene una única flecha de T a Q .

Teorema 5 *Si P y Q son ambos objetos terminales en la categoría \mathcal{C} , entonces hay exactamente una única flecha de P a Q y esa flecha es un isomorfismo de \mathcal{C} (con una única flecha de Q a P como inverso) [MC].*

Demostración Suponga que P y Q son ambos objetos terminales, con las únicas flechas $f : P \longrightarrow Q$ y $g : Q \longrightarrow P$. Entonces $g \circ f$ va de P a P , pero 1_P es la única flecha de P a P . Así que $g \circ f = 1_P$. Similarmente, $f \circ g = 1_Q$.



Para los objetos iniciales se pueden repetir las pruebas de estos dos teoremas pero leyendo “flecha desde S” cada vez que se diga “flecha hacia P”.

Un objeto cero es un objeto que es a la vez objeto terminal e inicial. Igualmente una categoría puede no tener objeto cero o cualquier cantidad de ellos. Si una categoría tiene objeto cero entonces todos los objetos iniciales o terminales en la categoría son objeto cero.

Ejemplo 2.5 En la categoría **Vect**, el punto en el espacio $\{0\}$ es a la vez objeto terminal e inicial, porque para cualquier vector en el espacio las siguientes funciones son lineales: $V \longrightarrow \{0\}$, $\{0\} \longrightarrow V$, las cuales son las únicas funciones lineales desde o hacia $\{0\}$. Entonces en la categoría **Vect** los objetos inicial y terminal coinciden, y por lo tanto **Vect** tiene objeto cero.

En la categoría **Set**, el conjunto vacío es el único objeto inicial, mientras que cualquier conjunto unitario es un objeto terminal. Esto quiere decir que **Set** tiene objetos terminales e iniciales distintos.

Definición 2.4 (Producto) Dados dos objetos A_1 y A_2 de la categoría \mathcal{C} , entonces un “producto de A_1 y A_2 ” en \mathcal{C} , es:

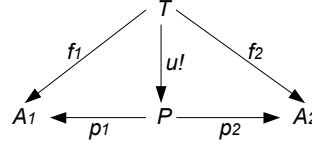
- Un objeto P en \mathcal{C} .
- Un par de flechas p_1 y p_2 hacia objetos A_1 y A_2 en la categoría, llamadas proyecciones canónicas, así:

$$A_1 \longleftarrow P \longrightarrow A_2 \quad (3)$$

y cumplen que para cada objeto T y cada par de flechas f_1 y f_2 de T hacia A_1 y A_2

$$A_1 \longleftarrow T \longrightarrow A_2 \quad (4)$$

existe exactamente una única flecha $u! : T \longrightarrow P$ que hace que el diagrama commute, es decir que $f_1 = p_1 \circ u$ y $f_2 = p_2 \circ u$.



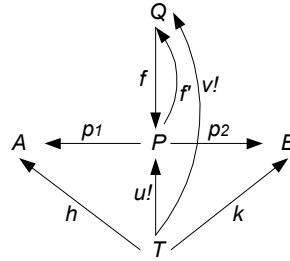
Producto

Se escribe $A_1 \times A_2$ para el producto de A_1 y A_2 , cuando existe y (f_1, f_2) para la flecha u . Por lo tanto el producto no solamente es un objeto, sino un objeto con dos morfismos.

En una categoría cualquier par de objetos en ella pueden no tener producto o cualquier cantidad de ellos, pero son únicos salvo isomorfismo.

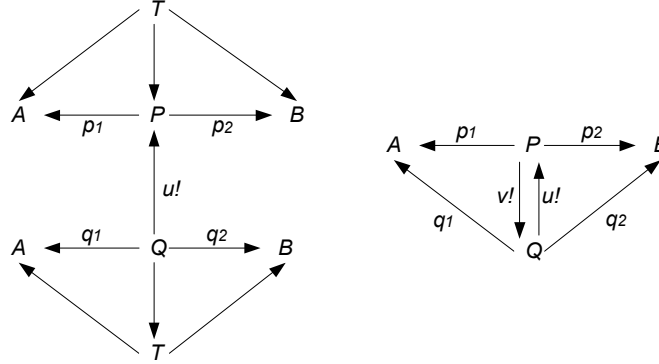
Teorema 6 Si P, p_1 y p_2 es un diagrama producto para A y B . Y existe un isomorfismo $f : Q \longrightarrow P$ entonces, $Q, p_1 \circ f, p_2 \circ f$ es también un diagrama producto para A y B [MC].

Demostración Para cualquier objeto T y flechas $T \xrightarrow{h} A, T \xrightarrow{k} B$ existe una única $u : T \longrightarrow P$ con $p_1 \circ u = h$ y $p_2 \circ u = k$, así que existe al menos $f^{-1} \circ u : T \longrightarrow Q$ con $p_1 \circ f \circ (f^{-1} \circ u) = h$, y $p_2 \circ f \circ (f^{-1} \circ u) = k$. Dada cualquier $v : T \longrightarrow Q$ con $p_1 \circ f \circ v = h$ y $p_2 \circ f \circ v = k$, uno puede ver que $f \circ v : T \longrightarrow P$ es la composición con p_1 para h y con p_2 para k , así que por unisidad $f \circ v = u$. Por lo tanto $v = f^{-1} \circ u$ es la única flecha desde T hacia Q componiendo con $p_1 \circ f$ para h , y con $p_2 \circ f$ para k .



Teorema 7 Si P, p_1 y p_2 es un diagrama producto para A y B . Y si Q, q_1 y q_2 es otro, entonces la única flecha $u : Q \longrightarrow P$ con $p_1 \circ u = q_1$ y $p_2 \circ u = q_2$ es un isomorfismo [MC].

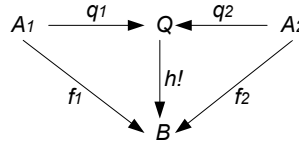
Demostración Se toman los dos diagramas producto, $u : Q \longrightarrow P$ y el morfismo $v : P \longrightarrow Q$. Entonces $p_1 \circ u \circ v = q_1 \circ v = p_1$. Similarmente, $p_2 \circ u \circ v = q_2 \circ v = p_2$. Pero 1_p es la única flecha de P a P con esa composición para p_1 y p_2 , así que $u \circ v = 1_p$. Por el mismo razonamiento se tiene que, $v \circ u = 1_q$.



Definición 2.5 (Producto Binario) Una categoría \mathcal{C} tiene producto binario, o simplemente es una categoría con productos, si para cada par de objetos en \mathcal{C} , digamos A_1 y A_2 , existe $A_1 \times A_2$.

Definición 2.6 (Suma) Dualmente, la suma o “coproducto” de A_1 y A_2 en una categoría \mathcal{C} , es:

- Un objeto Q .
- Un par de flechas q_1 y q_2 desde A_1 y A_2 , llamadas inyecciones, tales que para cada objeto B y cada par de flechas desde A_1 y A_2 en B , existe exactamente una única flecha $h!: Q \rightarrow B$ que hace que el diagrama conmute.



Coproducto

Se escribe $A_1 + A_2$ para el coproducto de A_1 y A_2 , cuando existe y $(f_1, f_2)!$ para la flecha h .

Definición 2.7 (Coproducto Binario) Una categoría \mathcal{C} tiene coproducto binario, o simplemente es una categoría con coproductos, si para cada par de objetos en \mathcal{C} , digamos A_1 y A_2 , existe $A_1 + A_2$.

En **Set** y **Top** el producto es el producto cartesiano y el coproducto es la unión disyunta, respectivamente, de conjuntos y de espacios topológicos.

Algunos morfismos especiales.

Un endomorfismo f es un morfismo en el cual el dominio y el codominio son el mismo objeto. Esto es, $f : A \longrightarrow A$. Un caso particular de endomorfismo, es la flecha identidad en el cual, para todo a del dominio, $a = f(a)$.

Definición 2.8 (Monomorfismo) Una flecha $f : A \longrightarrow B$ es un monomorfismo, si para cualquier par de flechas $g_1, g_2 : C \longrightarrow A$, en las cuales se cumple que el dominio de f es igual al codominio de g_1 y g_2 , la igualdad $f \circ g_1 = f \circ g_2$ implica que $g_1 = g_2$. Se puede decir que f es cancelable por la izquierda.

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{g_1} & A & \xrightarrow{f} & B \\ & \xrightarrow{g_2} & & & \end{array}$$

Monomorfismo

Definición 2.9 (Epimorfismo) Una flecha $f : A \longrightarrow B$ es un epimorfismo, si para cualquier par de flechas $g_1, g_2 : B \longrightarrow C$, en las cuales se cumple que el codominio de f es igual al dominio de g_1 y g_2 , la igualdad $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ implica que $g_1 = g_2$. Se puede decir que f es cancelable por la derecha.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g_1} & C \\ & & & \xrightarrow{g_2} & \end{array}$$

Epimorfismo

Definición 2.10 (Isomorfismo) Una flecha $f : A \longrightarrow B$ es isomorfismo o flecha invertible, si existe otra flecha $g : B \longrightarrow A$ tal que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$. Entonces g es llamada el inverso de f y denotada por g^{-1} .

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ f \nearrow & & \searrow g \\ A & \xrightarrow{1_A} & A \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{1_B} & B \\ \searrow g & & \nearrow f \\ & A & \end{array}$$

Isomorfismo

En la categoría **Set** los isomorfismos son las biyecciones uno a uno y sobre, los monomorfismos son las funciones uno a uno y los epimorfismos

son las funciones sobre. Pero no todo monomorfismo es inyectivo y no todo epimorfismo es sobreyectivo. Observe que las nociones de monomorfismo y epimorfismo son duales, mientras que la noción de isomorfismo es ella misma su dual.

Un diagrama D es un arreglo de objetos y flechas, donde los objetos ocupan los vértices y las flechas los bordes. Un camino en un diagrama D es una sucesión finita de flechas de D tales que $Cod(f_i) = Dom(f_{i+1})$ para $i = 1, \dots, n - 1$, donde el n es la longitud del camino. Por tanto, un camino es una sucesión finita de flechas que cumplen que el codominio de la flecha anterior es igual al dominio de la siguiente.

Definición 2.11 (Diagrama Conmutativo) *Un diagrama D se dice conmutativo o que conmuta si cumple que tomando cualquier par de vértices, la composición de las flechas a lo largo de cualquier camino de longitud ≥ 2 , desde el primer vértice hasta el segundo, es igual a la composición a lo largo de cualquier otro camino desde el primer vértice hasta el segundo.*

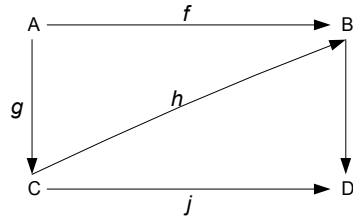
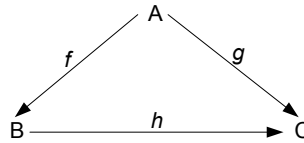
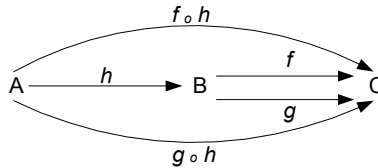


Diagrama conmutativo

- a. Conmuta si y solo si $g = h \circ f$ y se llama triángulo conmutativo y la flecha f y la flecha h son una factorización de g .



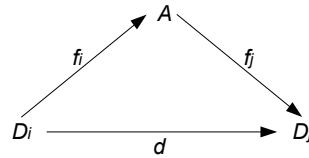
- b. Es conmutativo si y solo si $f \circ h = g \circ h$.



Un diagrama con un solo vértice conmuta si y solo si todas las flechas en él son 1_A .

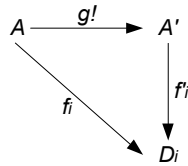
Para verificar que un diagrama conmuta, es suficiente con probar que cada una de sus partes conmutan, esto quiere decir que el diagrama se descompone geoméricamente.

Definición 2.12 (Cono sobre un Diagrama) Sea D un diagrama en una categoría \mathcal{C} con vértices $\{D_i\}$. Entonces un cono sobre D es una familia de flechas desde un objeto A hacia los objetos en D , es decir los $\{D_i\}$, tales que para cualquier flecha entre dos objetos de D , el diagrama conmuta. El objeto A se llama el vértice del cono.



Cono sobre un diagrama

Definición 2.13 (Límite) Un límite para un diagrama D es un cono terminal. Luego un límite para D es un cono $\{A' \longrightarrow D_i\}$ tal que para todos los conos $\{A \longrightarrow D_i\}$ existe una única flecha de A a A' que hacen que el diagrama conmute.



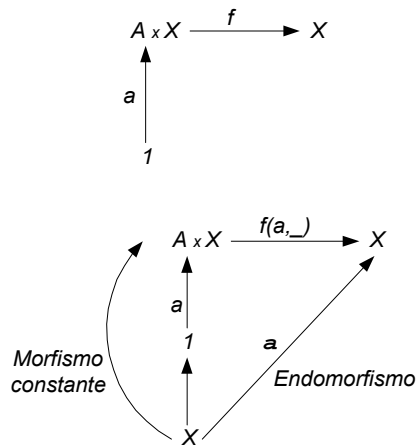
Límite

Por dualidad, se puede definir un cono bajo un diagrama.

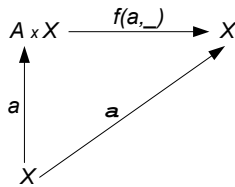
Definición 2.14 (Colímite) Un colímite para un diagrama D es un cono inicial en la categoría de los conos.

Observe que los productos y coproductos son casos especiales de las nociones más generales de límites y colímites.

Una acción de un objeto A en un objeto X es un morfismo $A \times X \xrightarrow{f} X$. Gráficamente una acción es:



Dibujando el gráfico anterior de manera simplificada:



Donde $f(a, _)$ es la familia de morfismos parametrizados por A .

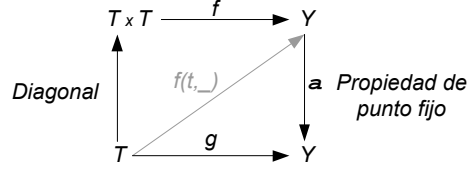
Una operación binaria en un objeto A es un morfismo $A \times A \rightarrow A$.
Entonces las operaciones binarias son acciones de un objeto sobre si mismo.

3 Capítulo 3

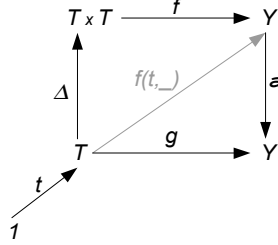
Argumentos Diagonales

3.1 El Teorema Diagonal de Lawvere

Teorema 8 Si Y es un objeto tal que existe un objeto T con suficientes puntos para parametrizar todos los morfismos de $T \longrightarrow Y$ por medio de un morfismo $f : T \times T \longrightarrow Y$, entonces Y tiene la “**propiedad de punto fijo**”: cada endomorfismo $\alpha : Y \longrightarrow Y$ de Y tiene al menos un punto $y : 1 \longrightarrow Y$ para el cual $\alpha y = y$ [LAW].



Demostración Como se llama argumento diagonal, se debe involucrar una diagonal definida como el morfismo $\Delta : T \longrightarrow T \times T$ tal que $\Delta(t) = (t, t)$, entonces:



Luego g se definió de tal manera que hiciera conmutar el diagrama, es decir:

$$g = \alpha(f(\Delta)) = \alpha \circ f \circ \Delta$$

$$g \circ t = \alpha \circ f \circ \Delta \circ t$$

$$g(t) = \alpha(f(\Delta(t)))$$

$$\text{Se tiene para: } \alpha(f(t, t))$$

$$g(t_0) = f(t_0, _) = f(t_0, t) = f(t_0, t_0) = \alpha(f(t_0, t_0)) = f(t_0, t_0)$$

Entonces $f(t_0, t_0)$ es un punto fijo.

Argumento Diagonal de Cantor.

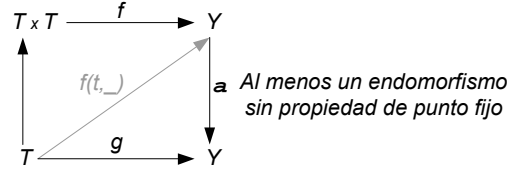
Sea $f : T \times X \longrightarrow Y$ un morfismo en el cual los tres objetos son diferentes, se puede pensar en X como el objeto con el cual se va a parametrizar la familia de morfismos $T \longrightarrow Y$.

Esta familia de morfismos tiene tamaño: $|Y|^{|T|}$.

Para que X pueda parametrizar todos los morfismos de $T \longrightarrow Y$ el tamaño mínimo de X debe ser $|Y|^{|T|}$.

Cada punto de $x : 1 \longrightarrow X$ nos genera uno de los morfismos: $T \xrightarrow{f(_,x)} Y$.

Corolario 3.1 (Contrapositivo de Cantor) *Si Y es un objeto conocido que tiene al menos un endomorfismo α que no tiene puntos fijos, entonces para cada objeto T y para cada intento $f : T \times T \longrightarrow Y$ de parametrizar morfismos de $T \longrightarrow Y$ por puntos de T , debe existir al menos un morfismo $T \longrightarrow Y$ el cual queda fuera de la familia parametrizada.*



En g hay más morfismos que en $f(t, _)$.

3.2 Demostración del Teorema de Cantor Utilizando el Argumento Diagonal

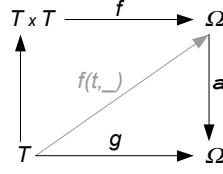
Si tenemos en **Set** un conjunto Ω de dos puntos, llamados V y F , el endomorfismo **Negación Lógica** no tiene propiedad de punto fijo:

$$NOT(V) = F, NOT(F) = V. \quad (5)$$

Luego para una familia de morfismos $T \times T \longrightarrow \Omega$, por el Corolario Contrapositivo de Cantor se tiene que no existe parametrización alguna de todos los morfismos de $T \longrightarrow \Omega$, los cuales son $2^{|T|}$ morfismos con $|T|$ elementos. Es decir, vale el teorema de Cantor.

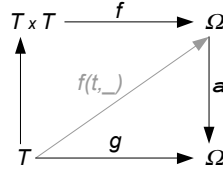
3.3 Demostración del Teorema de Incompletitud de Gödel Utilizando el Argumento Diagonal

La demostración del teorema de incompletitud de Gödel mediante la teoría de categorías se reduce a la **existencia de un punto fijo**. Si se tiene el objeto T que contiene todas las proposiciones del sistema. Sea $g : T \longrightarrow \Omega$ el morfismo que asigna a cada proposición un valor de verdad, V o F . Si existe una parametrización $T \times T \longrightarrow \Omega$ de todos los morfismos $T \longrightarrow \Omega$, así:



tendríamos que $g = f(t, _)$ y esto implicaría que α tiene la propiedad de punto fijo. Pero sabemos que existe un endomorfismo α que no tiene propiedad de punto fijo, el cual es *NOT*. Luego se llega a una contradicción, ya que por el Corolario Contrapositivo de Cantor, como existe un endomorfismo que no tiene propiedad de punto fijo, entonces existe al menos un morfismo $T \rightarrow \Omega$ que no puede expresarse como $f(t, _)$. En otras palabras, existe al menos una proposición en T que no es demostrable.

Para analizar cómo $T \times T \rightarrow \Omega$ es una demostración.



Se debe tener claro que una demostración es una sucesión finita de fórmulas $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tal que cada α_i es un axioma, una premisa o fórmula que resulta de las anteriores por aplicación de alguna regla deductiva, por ejemplo Modus Ponens, y a cada una de las fórmulas le corresponde un único número de Gödel, es entonces posible asignarle un único número de Gödel a la demostración:

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k \text{ tiene número de Gödel } Z \quad (6)$$

A la última línea de una demostración, que es α_k , se le llama teorema, y sea Y el número de Gödel que le corresponde.

Por tanto $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_{k-1}$ es la sucesión de pasos que permiten concluir α_k , a esta sucesión de pasos se le asigna el número de Gödel X .

El número de Gödel Z de la demostración tiene a X como parte inicial o factor, y se escribe $Z = Dem(X, Y)$ indicando que la sucesión de fórmulas con número de Gödel X es una prueba de la fórmula con número de Gödel Y .

$$\begin{array}{ccc}
T \times T & \xrightarrow{f} & \Omega \\
\uparrow \scriptstyle \#Z \times \#Y & \nearrow \scriptstyle f(t, _) & \downarrow \scriptstyle a \\
T & \xrightarrow{g} & \Omega
\end{array}$$

Luego si se tiene una expresión con número de Gödel Y que se desea demostrar, se debe aplicar el morfismo $T \longrightarrow T \times T$ que seleccione un número Z de T el cual contenga a X como parte inicial, y a Y como factor restante.

Si tal Z existe, entonces se puede tener el morfismo $T \times T \longrightarrow \Omega$ que le asigna el valor de verdad correspondiente a T y que en particular es $f(Z, Y) \longrightarrow \Omega$. También se expresa diciendo que Y tiene la propiedad Z y que el morfismo de $T \times T \longrightarrow \Omega$ describe las propiedades de $T \longrightarrow \Omega$. Retomando el argumento diagonal, existe al menos una proposición en T que no es demostrable.

La teoría de las categorías es un desarrollo nuevo en matemáticas que proporciona una visión sintética de muchos campos de la matemática. Con ella, no solo se aporta su fundamentación sino que también ofrece un lenguaje adecuado para expresar resultados en áreas tan variadas como la teoría de conjuntos, el álgebra abstracta, la geometría algebraica, la topología, la lógica y sus aplicaciones, como ya se había mencionado antes. Además, la teoría de las categorías provee herramientas para la unificación y simplificación de las matemáticas, suministrando un lenguaje a partir del cual se presentan y obtienen resultados de una manera general. Su enorme poder de síntesis se muestra a través del teorema diagonal de F William Lawvere, el cual es una generalización obtenida mediante el lenguaje de la teoría de las categorías y con el que se muestra una brillante visión de algunas demostraciones clásicas como lo son las del teorema de George Cantor y el teorema de incompletitud de Gödel, en los que se ve involucrado un argumento diagonal, como se muestra en este trabajo.

Referencias

- [LAW] F. W. Lawvere & S. H. Schanuel, *Conceptual Mathematics: A first introduction to categories*, Cambridge: Cambridge University Press (1997).
- [BELL] J. Bell, *Toposes and Local Set Theories: An Introduction*, Oxford: Oxford University Press (1988).
- [MAC] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, New York: Springer Verlag (1971).
- [MC] C. McLarty, *Elementary Categories, Elementary Toposes*, Oxford: Oxford University Press (1992).
- [ARBIB] M. A. Arbib & E. G. Manes, *Arrows, Structuresm, and Functors: The Categorical Imperative*, New York: San Francisco Academic Press (1975).
- [NAGEL] E. Nagel & J. R. Newman, *La Prueba de Gödel*, Mexico: Universidad Nacional Autónoma de Mexico. (1959).
- [GOLD] R. Goldblatt, *Topoi: The Categorical Analysis of Logic*, Amsterdam: Elsevier Science Publishers. B. V. (1984).
- [MUÑOZ] J. M. Muñoz, *Introducción a la Teoría de Conjuntos*, Bogotá: Universidad Nacional de Colombia. (2002).
- [CAICEDO] X. Caicedo, *La Paradoja de Berry Revisitada, o la Indefinibilidad de la Definibilidad y las Limitaciones de los Formalismos*, Bogotá: Universidad de los Andes y Universidad Nacional de Colombia.