MAC0210 - 2ª Lista de Exercícios - Data de entrega: 28/04/2024

Instruções: as questões em papel devem ser resolvidas à mão e escaneadas; as demais questões devem ser implementadas em Octave. Use os nomes `questaoX[itemY]` para facilitar a identificação e entregue um único arquivo (tgz/zip) no edisciplinas até as 23:55 do dia 28/04/2024.

$\boxed{\text{Questão 1}}$ Escreva um código em Octave que compute a expressão $\displaystyle\sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{n}$ de 3 formas: (i) implementação direta; (ii) usando arredondamento para 5 casas decimais (use as funções `enc` e `dec` da tarefa prática 1); e (iii) como no item (ii) mas na ordem inversa dos termos. Explique através de comentários no código as diferenças observadas.

$\boxed{\text{Questão 2}}$ Em tratamento estatístico de dados é frequente o uso das expressões

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2,$$

onde $x_1, \dots, x_n$ são valores dados. É fácil ver que σ^2 também pode ser escrito como

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2.$$

(a) (papel) Qual das duas expressões para σ^2 é mais barata computacionalmente em termos de número de operações aritméticas? (considere que $\bar{x}$ já foi computado anteriormente). Qual das duas expressões deve produzir resultados mais acurados para σ^2 em geral?

(b) Escreva um código que produza um exemplo pequeno, usando um sistema decimal com apenas 2 dígitos significativos, para ilustrar sua conclusão do item (a).

$\boxed{\text{Questão 3}}$ Considere a função polinomial

$$f(x) = (x-2)^9 = x^9 - 18x^8 + 144x^7 - 672x^6 + 2016x^5 - 4032x^4 + 5376x^3 - 4608x^2 + 2304x - 512.$$

(a) Escreva um código em Octave que avalie essa função em 161 pontos equidistantes no intervalo $[1.921, 2.08]$ usando dois métodos: (i) regra de Horner (exemplo 1.4) para a forma expandida $x^9 - 18x^8 + \cdots$; e (ii) calculando $(x-2)^9$ diretamente. Plote os resultados em duas figuras diferentes (use o comando `figure(i)` para $i = 1, 2$). Explique, em comentários no código, as diferenças entre os dois gráficos.

(b) Aplique o método da bisecção (função `bisect`, pg 43 do livro) para encontrar a raiz da função acima no intervalo $[1.921, 2.08]$ usando os dois métodos de cálculo de $f(x)$ acima, tendo como tolerância absoluta o valor $\varepsilon = 10^{-6}$. Explique no código as soluções encontradas.

$\boxed{\text{Questão 4}}$ (papel) Considere a função $g(x) = x^2 + \frac{3}{16}$.

(a) Calcule os dois pontos fixos dessa função.

(b) Considere a iteração de ponto fixo $x_{k+1} = g(x_k)$. Qual é o comportamento esperado da sequência gerada a partir de valores x_0 próximos de cada um dos pontos fixos do item (a)? Explique seu argumento.

(c) Qual é o número aproximado de iterações necessárias para que o erro da aproximação produzida pela iteração de ponto fixo (próximo da solução) seja reduzido por um fator de 10?

Questão 5 Considere o problema de obter $x = \sqrt[3]{a}$ a partir de $a > 0$ através da solução da equação $f(x) = x^3 - a = 0$.

(a) Escreva uma função `curt1` em Octave (ou em pseudo-código parecido com Octave) para computar $\sqrt[3]{a}$ com precisão ε pelo método da bisseção a partir do intervalo $[a, 1]$ (se $0 < a \leq 1$) ou $[1, a]$ (se $a > 1$). Escreva uma expressão para o número de iterações do seu método em função de a e ε.

(b) Escreva uma função `curt2` para computar $\sqrt[3]{a}$ com precisão ε pelo método do ponto fixo aplicado à função $g(x) = x - x^3 + a$ (considere nesse caso a precisão em relação à condição $x^3 \approx a$) a partir de um x_0 também dado. Determine um intervalo de valores de a para o qual seu método converge (pode supor que a inicialização esteja "próxima o suficiente" da solução).

(c) Escreva uma função `curt3` para computar $\sqrt[3]{a}$ pelo método de Newton, a partir de $x_0 = (a+2)/3$ (aproximação de Taylor de 1ª ordem), com precisão ε em relação à condição $x^3 \approx a$. Supondo que seu método possua convergência quadrática ($\|x_{k+1} - x^*\| \leq M\|x_k - x^*\|^2$) desde a primeira iteração, expresse (em comentário no código) o número aproximado de iterações em função de a, ε e M.

Questão 6 (papel) Considere o problema de encontrar a raiz de uma função não-linear $f(x)$ dada, dentro de um certo intervalo $[a, b]$ que contém a raiz, usando um dos seguintes três métodos: bissecção, Newton e secante. Para cada um dos casos a seguir, um desses métodos possui vantagens específicas em relação aos outros dois. Aponte o método mais indicado em cada item e explique porque ele é preferível em relação aos demais:

(a) $f(x) = x - 1$ no intervalo $[0,\ 2.5]$;

(b) $f(x)$ dada na figura ao lado, no intervalo $[0, 4]$;

(c) $f \in C^5[0.1, 0.2]$, todas as derivadas de f são limitadas em valor absoluto por 1, e $f'(x)$ é muito difícil de especificar ou computar.