NOME: Patricia S. Rodrigues **Nº USP:** 11815590

Prove que:

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{2n}{n}$

Resposta: Para a igualdade $(1+x)(1+x)$, temos $(1+x)^2$ (repete 2 vezes)

Para a igualdade $(1+x)\cdot(1+x)(1+x)$, temos $(1+x)^3$ (repete 3 vezes)

Para a igualdade $(1+x)+(1+x)+\ldots+(1+x)+(1+x)$, temos $(1+x)^n$ (repete n vezes)

Deste modo, aplicando o teorema do binômio em cada $(1+x)$, temos

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{k}\cdot 1^{n-k}\cdot x^k + \binom{n}{k+1} 1^{n-(k+1)}\cdot x^{k+1} + \ldots + \binom{n}{n-1}\cdot 1^{n-(n-1)}\cdot x^{n-1} + \binom{n}{n}\cdot 1^{n-n}\cdot x^n$$

A partir desta somatória, pode-se concluir que os coeficientes dos termos equidistantes são equivalentes de modo que

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n}$, $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{n-1}$ e a mesma lógica se segue para todos os termos equidistantes da somatória. Deste modo, devido a esta equivalência, a soma dos coeficientes equidistantes nessa ordem, sendo estes as combinações da somatória

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \cdot 1^{n-k}\cdot x^k + \binom{n}{k+1}^2 \cdot 1^{n-(k+1)} + \ldots + \binom{n}{n-1}^2 \cdot 1^{n-(n-1)}\cdot x^{n-1} + \binom{n}{n}^2 \cdot 1^{n-n}\cdot x^n$$

são congruentes. Portanto a soma

$$\binom{n}{n}^2 + \binom{n}{n-1}^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2 \text{ equivale a:}$$

$$2\cdot\binom{n}{n}^2 + 2\cdot\binom{n}{n-1}^2 + \ldots + 2\binom{n}{n/2}^2 \text{ que equivale a } \binom{2n}{n}$$