LISTA 3: Álgebra booleana, Expressão, Função

(2) Sejam $a, b, c \in A$. A seguinte implicação está correta? Explique

$$a+b = a+c \Rightarrow b = c$$

A_3 $(1)\, a+b = (1)\, a+c$

A_4 $(a+\bar{a})\, a+b = (a+\bar{a})\, a+c$

A_2 $a + \bar{a}b = a + \bar{a}c$

A_3 $1.a + \bar{a}b = 1\, a + \bar{a}c$

A_4 $(a+\bar{a})\, a + \bar{a}b = (a+\bar{a})\, a + \bar{a}c$

A_2 $aa + a\bar{a} + \bar{a}b = aa + a\bar{a} + \bar{a}c$

A_2 $a + a\bar{a} + \bar{a}.\, a\bar{a} + b = a + a\bar{a} + \bar{a}.\, a\bar{a} + c$

$a + 0 + \bar{a}.\, a\bar{a} + b = a + \bar{a}.\, a\bar{a} + c$

$\underbrace{a+\bar{a}}_{1}.\, a\bar{a} + b = a+\bar{a}.\, a\bar{a} + c$

$a\bar{a} + b = 1 .\, a\bar{a} + c$

$a\bar{a} + b = a\bar{a} + c$

$b = c$

$\therefore$ $\boxed{a+b = a+c \Rightarrow b = c}$ //.

(3) 4 (Teorema do consenso) Prove algebricamente que $\forall\, x, y, z \in A$

$$xy + yz + \bar{x}z = xy + \bar{x}z$$

$$\rightarrow \boxed{\underbrace{xy + yz}_{} + \bar{x}z}$$

A_2: $y(x+z) + \bar{x}z$

A_4: $(y+\bar{y})\, y(x+z) + \bar{x}z$

A_2: $yy + y\bar{y}.(x+z) + \bar{x}z$

Idemp: $y + y\bar{y}\,(x+z) + \bar{x}z$

A_2: $y + xy\bar{y} + zy\bar{y} + \bar{x}z$

A_4, A_1: $xyy + 0 + zy\bar{y} + \bar{x}z$

A_3: $xyy + zy\bar{y} + \bar{x}z$

A_4: $xyy + z0 + \bar{x}z$

A_3: $xyy + \bar{x}z$

A_1: $yxy + \bar{x}z$

A_4: $(x+\bar{x}).\, yxy + \bar{x}z$

A_1: $(x+\bar{x}).\, xyy + \bar{x}z$

A_2, A_1: $x\,xyy + x\bar{x}yy + \bar{x}z$

A_4: $xy + 0y + \bar{x}z$

A_3: $\boxed{xy + \bar{x}z}$

(5) Prove que, $\forall x, y \in A$, $x.y = x \iff x+y = y$

$$x.y = x \iff x+y=y$$

Para $x \leq y \Rightarrow x+y=y$ e $x.y=x$

Para que a relação binária $x \leq y$ seja uma relação de ordem parcial, deve atender as seguintes propriedades:

1ª: reflexiva: a relação é reflexiva sse $\forall x \in A;\ xRx$

Para $xx \geq 0 \Rightarrow$ o valor do quadrado de x sempre será ~~igual~~ maior que zero.

$\therefore (x,x) \in A$

Se $\begin{matrix} xy = x \\ x+y=y \end{matrix} \Rightarrow (x,x) \in A$ e $0 < x \leq y$

$\therefore \forall x \in A,\ xRx$

Logo a propriedade reflexiva é atendida

2ª: antissimétrica:

$\forall (x,y) \in A \Rightarrow x = y$

$\left\{ \begin{matrix} x \leq y \text{ e } y \leq x \Rightarrow x = y \\ \text{Se } x=y \Rightarrow x.x = x \\ x+x = x \end{matrix} \right.$ (pela propriedade da idempotência)

$\therefore \forall (x,y) \in A,\ xRy$

Logo a propriedade reflexiva é atendida

3ª: Transitiva:

a relação R é transitiva sse:

$$xRy \text{ e } yRz \Rightarrow xRz$$

se $y \leq z$: $z = y+z$

se $y \leq x$: $z = (x+y)+z$

$z = x+(y+z)$ associatividade da soma

$z = x+z \Rightarrow x \leq z$

Logo, todas as propriedades foram atendidas ☒

9) Escreva a expressão a seguir na forma soma de produtos (SOP) e soma canônica de produtos (SOP canônica), usando apenas manipulações algébricas:

1º SOP: $f(a,b,c) = (a + b\bar{c})\,\overline{(bc)}$

$$f(a,b,c) = (a + b\bar{c})\,\overline{(bc)}$$

$$\boxed{f(a,b,c) = \underbrace{a\,\overline{(bc)}}_{\text{prod}} \underset{\text{soma}}{+} \underbrace{b\bar{c}\cdot\overline{(bc)}}_{\text{prod}}}$$

2º SOP canônica

Usando o ~~...~~ teorema da expansão de Boole, temos:

a	b	c	bc	$\overline{(bc)}$	$\bar{c}$	$b\bar{c}$	$a+b\bar{c}$	$(a+b\bar{c})\cdot\overline{(bc)}$
0	0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0	1	0

$$\therefore\ \boxed{f(a,b,c) = f(0,1,0)\,\bar{a}b\bar{c} + f(1,0,0)\,a\bar{b}\bar{c} + f(1,0,1)\,a\bar{b}c + f(1,1,0)\,ab\bar{c}}$$

11) Usando o mapa de Karnaugh, minimize a expressão $f(a,b,c,d) = \sum m(0,1,4,5,6,9,11,13,15)$. Escreva explicitamente em forma algébrica a expressão minimal obtida:

	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1		1
11		1	1	
10		1	1	

* 1101
1111
1001
1011
$\underbrace{1XX1}_{ad}$

* 0000
0001
$\underbrace{000X}_{\bar a \bar b \bar c}$

* 0110
0100
0101
$\underbrace{01XX}_{\bar a b}$

* 0001
1001
$\underbrace{X001}_{\bar b \bar c d}$

$\rightsquigarrow \boxed{f(a,b,c) = ad + \bar b \bar c d + \bar a \bar b \bar c + \bar a b}$

16) O estado de um flip-flop JK passou de 1 para 0. Quais valores nas entradas J e K podem ter provocado essa transição?

R: Quando J = 0 e K = 0 ou J = 0 e K = 1

J K
00 → Q = 0
01 → Q = 0
10 → Q = 1
11 → OSCILAÇÃO

Para J = 1 e K = 0 o valor de Q será 1 e ficará estável. Para J = 0 e K = 0 o valor de Q será 0. Para J = 0 e K = 0 o valor de Q será 0. Para J = 1 e K = 1, o flip-flop JK oscila.

Resposta: Os valores que manterão Q = 0 é J = 0 e K = 0 ou J = 0 e K = 1. Porém Q pode ir a zero em caso de oscilação, mas não ficará estável no zero, ficará oscilando. Nessa situação específica J = 1 e K = 1.

18) Preencha o diagrama temporal: