Lista 4

Patrícia da Silva Rodrigues (NUSP: 11315590

Maio 2024

EXERCICIO 1 Definição e Propriedade:
- Transformada de Fourier de um sinal $f(t)$:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

- Convolução de dois sinais $f(t)$ e $g(t)$:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

A Transformada de Fourier da convolução $(f * g)(t)$ é o produto das transformadas $F(\omega) \cdot G(\omega)$:

1. Substituindo a convolução na Transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right) e^{-i\omega t}dt$$

2. Mudança de variável: Muudança de variável $u = t - \tau$, o que implica $du = dt$:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{-i\omega(\tau+u)}du \right) d\tau$$

3. Separando as integrais:

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{-i\omega u}du \right)$$

4. Transformadas de Fourier:

$$= F(\omega) \cdot G(\omega)$$

A Transformada de Fourier da convolução de $f(t)$ e $g(t)$ é o produto das transformadas individuais $F(\omega)$ e $G(\omega)$.

EXERCÍCIO 2

a. Frequência de amostragem mínima:

Para evitar perda de informações ao digitalizar um sinal, devemos amostrar o sinal de acordo com o teorema de Nyquist-Shannon. Este teorema diz que a frequência de amostragem f_s deve ser pelo menos duas vezes a maior frequência presente no sinal f_n).

$fs > 2.f_n$

Dado que o sinal de áudio possui frequências entre 20 Hz e 9 kHz, a maior frequência é 9 kHz (9 kHz = 9 * 1.000 Hz = 9.000 Hz). Portanto, a frequência de amostragem mínima é:

$$f_s = 2 \times 9000Hz = 18000Hz = 18kHz$$

b. Consequências da subamostragem:

Se um sinal é subamostrado, ou seja, se a frequência de amostragem f_s é menor que duas vezes a maior frequência do sinal, ocorre um fenômeno conhecido como Alising

alising: Quando há uma frequencia de amostragem tal que a replicacao dos espectros vai resultar na sobreposicao (por exemplo ela é pequena demais e isso gera a sobreposicao) de espectros consecutivos. Isso pode causar distorcoes bem grandes no sinal, pois as sobreposicoes se somam e é gerado uma frequencia que nao estava no sinal. Isso é, componentes de alta frequência do sinal sejam incorretamente mapeadas como componentes de baixa frequência, resultando em distorções. Em sinais de imagem, aliasing pode aparecer como padrões indesejados (interferência visíveis na imagaem).

Exemplo:

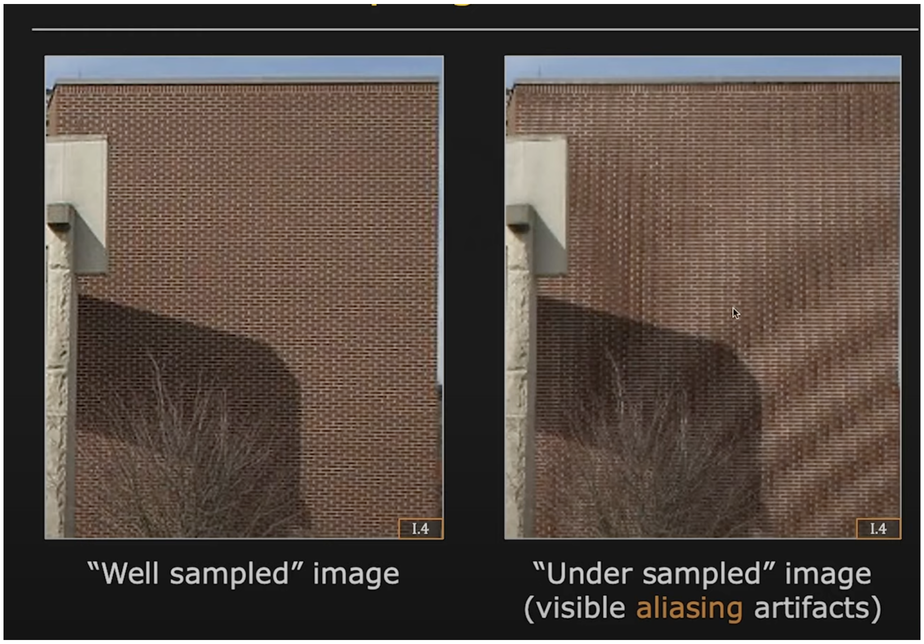

Figure 1: Descrição da imagem

3. Multiplicação por $(-1)^x$ ou $(-1)^{(x+y)}$ antes da Transformada Discreta de Fourier (DFT)

Multiplicar um sinal $f(x)$ ou $f(x,y)$ por $(-1)^x$ ou $(-1)^{(x+y)}$ respectivamente, antes de calcular sua Transformada Discreta de Fourier, tem o efeito de centrar o espectro da transformada.

- Transformada de Fourier Deslocada: A Transformada Discreta de Fourier (DFT) assume que os dados de entrada são periodicamente repetidos. Normalmente, o zero de frequência (componente DC) é localizado no canto superior esquerdo da matriz resultante da DFT. Ao multiplicar por $(-1)^x$ ou $(-1)^{(x+y)}$, isso é essencialmente aplicar um deslocamento de frequência que move o zero de frequência para o centro da matriz.

3. Multiplicação por $(-1)^x$ ou $(-1)^{(x+y)}$ antes da DFT

Multiplicação por $(-1)^x$ ou $(-1)^{(x+y)}$:

A multiplicação de um sinal $f(x)$ ou $f(x,y)$ por $(-1)^x$ ou $(-1)^{(x+y)}$ é uma modulação que desloca o espectro de frequência.

Multiplicação por $(-1)^x$

A multiplicacao $f(x)$ por $(-1)^x$, efetivamente multiplica $e^{i\pi x}$ (visto que $(-1)^x = e^{i\pi x}$):

$$f'(x) = f(x) \cdot (-1)^x = f(x) \cdot e^{i\pi x}$$

A transformada de Fourier de $f'(x)$ será:

$$\mathcal{F}\{f'(x)\}(k) = \mathcal{F}\{f(x) \cdot e^{i\pi x}\}(k) = F\left(k - \frac{1}{2}\right)$$

Na prática, como a DFT trabalha com índices inteiros, a multiplicação por $(-1)^x$ desloca o espectro de Fourier de modo que o componente de baixa frequência (DC) seja movido do início do vetor (frequência zero) para o centro do vetor.

Multiplicação por $(-1)^{x+y}$

No caso bidimensional, multiplicar $f(x, y)$ por $(-1)^{x+y}$ significa multiplicar por $e^{i\pi(x+y)}$:

$$f'(x, y) = f(x, y) \cdot (-1)^{x+y} = f(x, y) \cdot e^{i\pi(x+y)}$$

A transformada de Fourier de $f'(x, y)$ será:

$$\mathcal{F}\{f'(x, y)\}(k_x, k_y) = \mathcal{F}\{f(x, y) \cdot e^{i\pi(x+y)}\}(k_x, k_y) = F\left(k_x - \frac{1}{2}, k_y - \frac{1}{2}\right)$$

Isso desloca o espectro de Fourier para que fique centralizado na matriz resultante.