

Universidade de São Paulo  
Instituto de Matemática e Estatística  
IME

**Relatório do EP - MAC0209 2022.1**

Integrantes do grupo:

Aya Esther Prado Meira (nº USP 9353081),  
Be Zilberman (nº USP 7585660),  
Luísa Menezes da Costa (nº USP 12676491),  
Patrícia da Silva Rodrigues (nº USP 11315590),  
Sabrina Araújo da Silva (nº USP 12566182),  
Samantha Miyahira (nº USP 11797261).

Julho  
2022

### **Resumo**

O objetivo do EP foi estudar a modelagem de um sistema físico computacionalmente. Dentro deste escopo, o foco foi a implementação e análise de métodos de estimar a distância entre dois pontos no globo e a modelagem de movimentos. Utilizaram-se dados reais, colhidos a partir do Kartaview e de experimentos registrados no site do Laboratório de Mecânica do Instituto de Física da USP. Por fim, propõe-se uma aplicação concreta da modelagem de movimentos.

# Conteúdo

<b>1 Kartaview</b>	<b>3</b>
1.1 Introdução . . . . .	3
1.2 Objetivos . . . . .	3
1.3 Dados e métodos . . . . .	3
1.4 Resultados experimentais . . . . .	3
1.4.1 Análise dos pontos fiduciais . . . . .	3
1.4.2 Análise dos resultados de cada método . . . . .	4
1.5 Discussão . . . . .	6
<b>2 Modelos de movimentos diversos</b>	<b>7</b>
2.1 Introdução . . . . .	7
2.2 Objetivos . . . . .	7
2.3 Dados e métodos . . . . .	7
2.4 Resultados experimentais . . . . .	8
2.4.1 Gráficos e tabelas da Queda Livre . . . . .	8
2.4.2 Gráficos e tabelas do Movimento Circular . . . . .	10
2.5 Discussão . . . . .	12
<b>3 Aplicação</b>	<b>13</b>
3.1 Introdução . . . . .	13
3.2 Objetivos . . . . .	13
3.3 Dados e métodos . . . . .	13
3.3.1 Elevador . . . . .	13
3.3.2 Roda Gigante . . . . .	13
3.4 Resultados experimentais . . . . .	14
3.4.1 Gráficos Elevador . . . . .	14
3.4.2 Gráficos Roda Gigante . . . . .	14
3.5 Discussão . . . . .	15

# 1 Kartaview

## 1.1 Introdução

O Movimento Retilíneo Uniforme (MRU) é caracterizado pela velocidade constante em uma trajetória reta. Para analisar este tipo de movimento, utilizaram-se dados de veículos em uma rodovia.

## 1.2 Objetivos

O objetivo desta parte do EP é dar um contexto concreto à modelagem do Movimento Retilíneo Uniforme (MRU). Isto é, foram utilizados dados reais para analisar e comparar métodos de estimar o deslocamento e a velocidade de um MRU.

## 1.3 Dados e métodos

Utilizamos o Kartaview para coletar dados do movimento de veículos em rodovias. Para a nossa análise, selecionamos um trecho da rodovia SP-55, no município de Cubatão no litoral paulista (id 3604093 no Kartaview), e um trecho da auto-estrada A9, em Meineweh, na Alemanha (id 3998065 no Kartaview). Os trechos são retílineos e sem obstáculos, como pedágios ou faróis, de tal sorte que podemos esperar que os veículos consigam se deslocar em MRU.

Utilizamos as imagens disponíveis no Kartaview para obter pontos fiduciais e comparar os resultados obtidos pela modelagem. Além disso, comparamos os resultados de cada método de modelagem do movimento.

Os métodos utilizados foram o método de Haversine, o método de trigonometria esférica e o método de projeção de Mercator. Criamos funções auxiliares no Jupyter Notebook utilizando funções prontas das bibliotecas [haversine](#) e [pyproj](#) para realizar os cálculos.

## 1.4 Resultados experimentais

### 1.4.1 Análise dos pontos fiduciais

Em relação à rodovia SP-55, encontramos nas imagens do Kartaview os pontos em que o veículo passa pela placa do KM 1 e do KM 2:



Figura 1: Quilômetro 1



Figura 2: Quilômetro 2

Encontramos os índices de cada imagem (1308 e 1376, respectivamente) e utilizamos as funções de cada método para estimar a distância entre os pontos. Os resultados obtidos foram relativamente próximos do esperado, isto é, aproximadamente um quilômetro:

Método	Haversine	Trig. Esf.	Mercator
Distância em m	1000.84	1021.66	1096.18

Em relação à estrada alemã, encontramos nas imagens do Kartaview os pontos em que o veículo passa pela placa do KM 221 (imagem de índice 1634) e do KM 222 (imagem de índice 1661):



Figura 3: Quilômetro 221



Figura 4: Quilômetro 222

Os resultados obtidos pelo cálculo com as funções foram:

Método	Haversine	Trig. Esf.	Mercator
Distância em m	1005.31	1129.65	1585.49

Em ambos os casos, o método de Haversine apresentou um resultado mais próximo da realidade. No caso da rodovia alemã, o método de Mercator apresentou um erro considerável. Este erro é esperado, pois a projeção de Mercator superestima as distâncias calculadas em relação a pontos mais distantes da Linha do Equador. A latitude das medidas relativas a Cubatão é da ordem de  $-24^{\circ}$ , enquanto na rodovia alemã é de  $51^{\circ}$ .

#### 1.4.2 Análise dos resultados de cada método

Método	Haversine	Trig. Esf.	Mercator	Kartaview
Distância Total em km (SP-55)	45.6	36.0	49.9	45.6
Distância Total em km (A9)	88.4	78.5	124.3	76.8

Para visualizar melhor os resultados obtidos com cada método, plotamos um gráfico referente à totalidade de cada percurso:

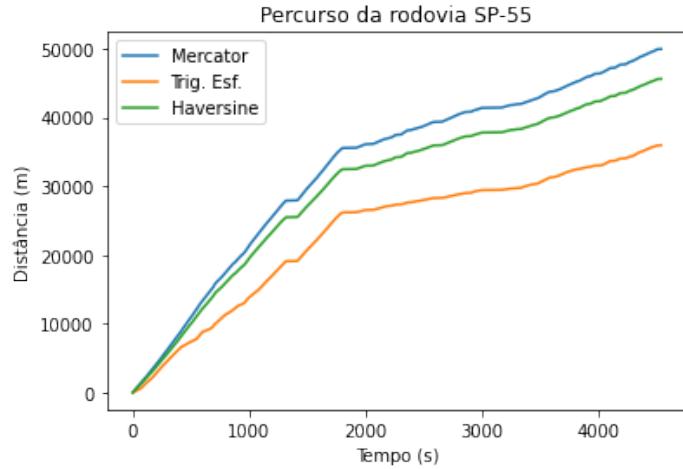


Figura 5: Percorso da SP-55, em metros por segundo

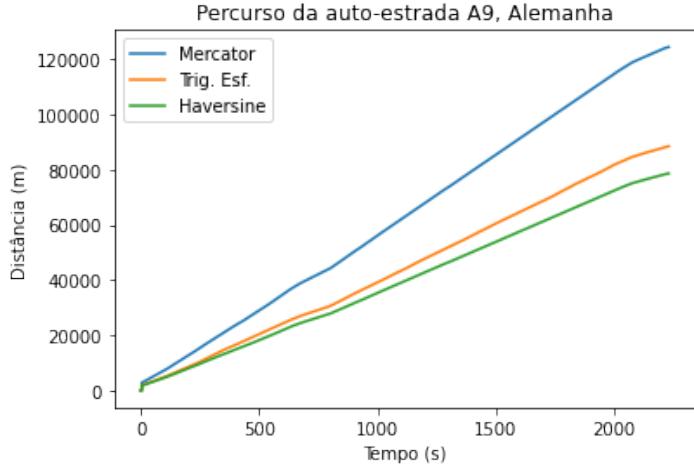


Figura 6: Percurso da A9, em metros por segundo

Com o auxílio destes gráficos, selecionamos subtrechos em que a velocidade do veículo foi aproximadamente constante.

Para o percurso da rodovia SP-55, escolhemos o subtrecho correspondente às imagens de índice 50 a 400. Utilizamos um passo de 15 imagens para selecionar amostras dentro deste intervalo e calcular as velocidades médias entre cada amostra. Os resultados podem ser observados nos gráficos a seguir:

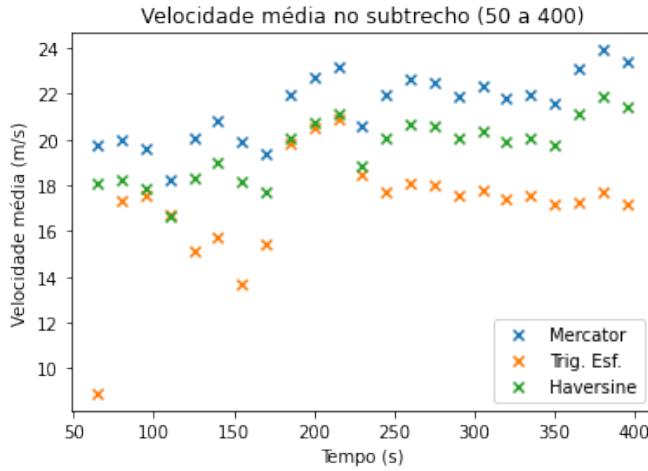


Figura 7: Análise da velocidade média (SP-55)

Método	Haversine	Trig. Esf.	Mercator
Distância em m	6867.18	5985.33	7518.12
Vel. média em m/s	19.90	17.34	21.79

Para o caso da auto-estrada A9, utilizamos os pontos entre 1594 a 1809, pois a velocidade é aproximadamente constante e nós encontramos pontos fiduciais para este intervalo. Os pontos fiduciais foram as placas de 219.5km e 227.5km, totalizando 8km de percurso e velocidade média de 38.05 m/s para este subtrecho.

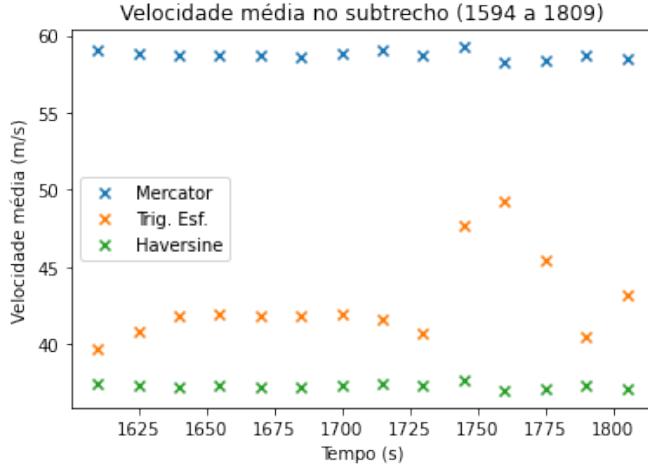


Figura 8: Análise da velocidade média (A9, Alemanha)

Método	Haversine	Trig. Esf.	Mercator
Distância em m	8010.16	9217.79	12628.45
Vel. média em m/s	38.14	43.89	60.13

## 1.5 Discussão

De maneira geral, foi possível observar que o método de Haversine é mais preciso para estimar a distância entre dois pontos. Os métodos de Trigonometria esférica e Projeção de Mercator, por sua vez, apresentam mais inconsistências em relação à realidade.

O método de projeção de Mercator, quando utilizado em locais distantes da Linha do Equador, apresenta uma margem de erro grande em comparação aos demais métodos.

Concluímos que, dentre as estratégias estudadas neste EP, o método de Haversine é a melhor solução para modelar o MRU.

## 2 Modelos de movimentos diversos

### 2.1 Introdução

Os movimentos escolhidos para a modelagem foram queda livre (movimento uniformemente acelerado (MUV)) e movimento circular (uniforme (MCU) e uniformemente variado (MCUV)). Escolhemos esses movimentos, pois eles ocorrem em diferentes situações, algo que faz com que possamos assim ver como a simulação funciona em diferentes casos. Esses movimentos foram modelados em Python, usando ferramentas vistas em aula, como por exemplo o vetor de estados (uma forma aprazível, eficaz e muito útil de registrar dados) e suas utilidades para cálculos e geração de gráficos de diferentes grandezas físicas em relação ao tempo. Além disso, também coletaremos os dados dos experimentos feitos que estão no laboratório virtual do instituto de física para podermos comparar com a simulação feita por nós e ver o quanto diferente pode ser um experimento real em relação a uma simulação que representa um ambiente praticamente ideal.

### 2.2 Objetivos

Os objetivos principais são ver como os gráficos dos movimentos se comportam usando os vetores de estados que registrarão as grandezas físicas de maneira instantânea conforme a passagem do tempo e também comparar os resultados da nossa simulação com o experimento do laboratório virtual.

### 2.3 Dados e métodos

Na segunda parte do EP, utilizamos dados de queda livre e movimento circular coletados na aba "Quadros" do Laboratório Virtual de Mecânica. Para a queda livre, utilizamos dados do conjunto C (unidade de tempo em segundos e escala da fita de referência em 0.5 cm), particularmente as filmagens C1, C5, C6, C8 e C9. Para o movimento circular, utilizamos dados da filmagem A, especificamente as filmagens BVA1, BVA4, BVA7, BVA11 e BVA12.

O método utilizado para coleta dos dados consistiu na observação minuciosa de cada um dos quadros das 10 filmagens escolhidas. Os dados observados foram salvos em uma planilha, com a qual foram gerados os valores para velocidade  $v_e$  e aceleração  $a_e$ , calculados pela forma:

$$v_e(t_i) = \frac{x_e(t_{i+1}) - x_e(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \quad a_e(t_i) = \frac{v_e(t_{i+1}) - v_e(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

Após isso, os gráficos e tabelas expostos na próxima seção do relatório foram gerados usando a biblioteca *Matplotlib* do Python e as ferramentas de criação de tabelas do LateX.

O método utilizado para simular os movimentos foi o algoritmo de Euler, em que foi definido um vetor de estados inicializado com as informações iniciais (velocidade inicial  $v_0$ , instante inicial  $t_0$ , instante final  $t_f$  e intervalo de tempo entre dois instantes consecutivos  $dt$ ). Os gráficos com os movimentos simulados estão presentes na próxima seção deste relatório.

Na simulação do movimento circular, a velocidade inicial com que a bolinha entra no loop foi calculada por meio da expressão da conservação da energia mecânica, isto é:

$$EM_i = EM_f$$

$$mgh_i + \frac{mv_i^2}{2} = mgh_f + \frac{mv_f^2}{2}$$

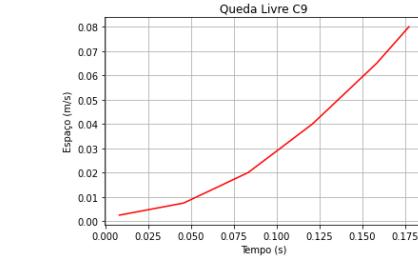
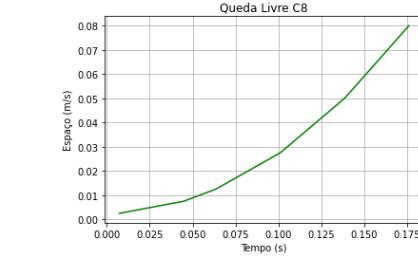
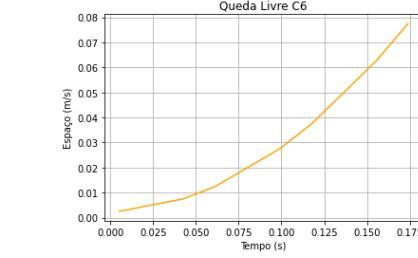
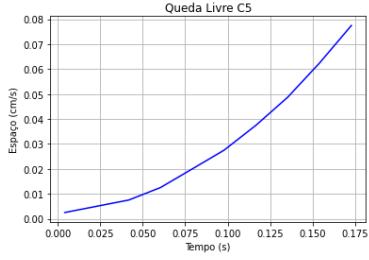
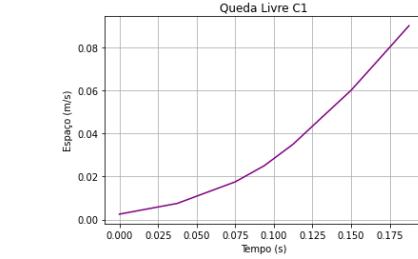
em que EM é a energia mecânica, EC a energia cinética e EP a energia potencial. Tanto a energia cinética inicial quanto a energia potencial final são nulas. Assim, temos que:

$$mgh_i = \frac{mv^2}{2}$$

Considerando  $h_i = 0.565\text{ m}$  (conforme indicado nos dados do Laboratório) e após os devidos cálculos, verificamos que a velocidade com que a bolinha entra no loop é  $v = 3.3277\text{ m/s}$ .

## 2.4 Resultados experimentais

### 2.4.1 Gráficos e tabelas da Queda Livre



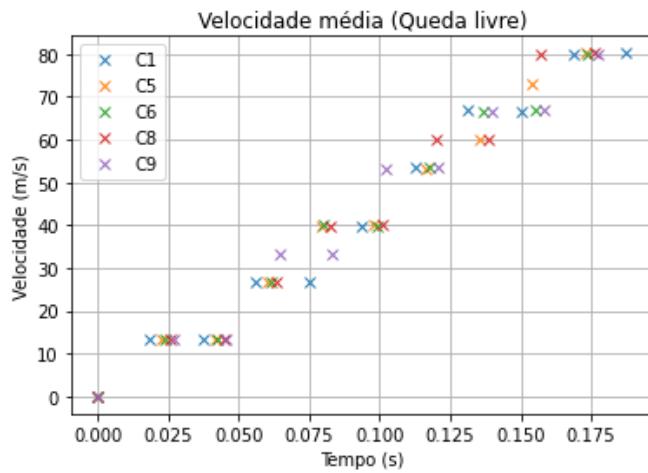


Figura 9: Velocidades médias para as 5 filmagens de Queda Livre escolhidas

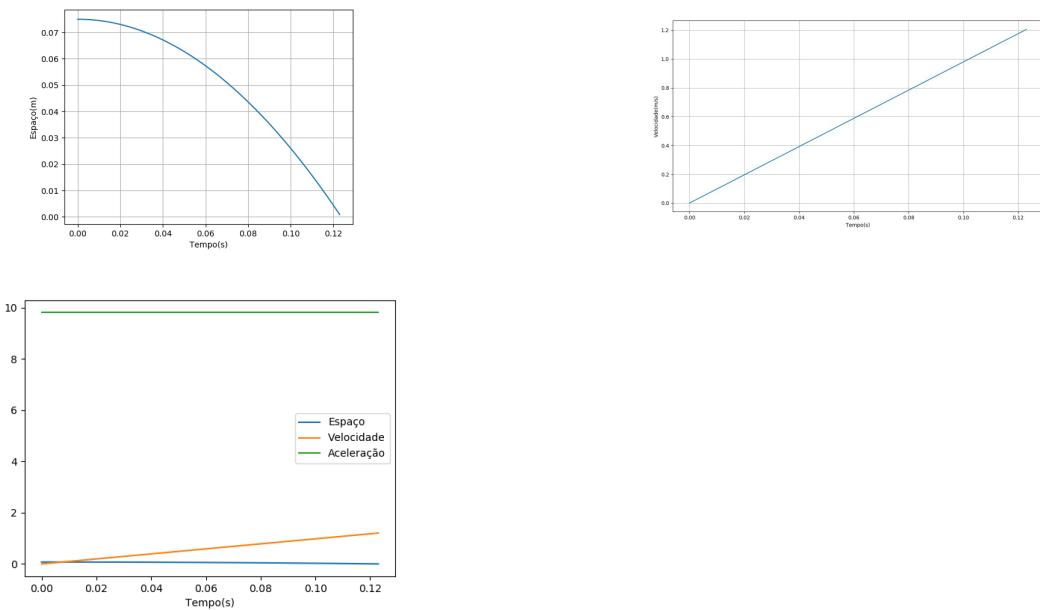
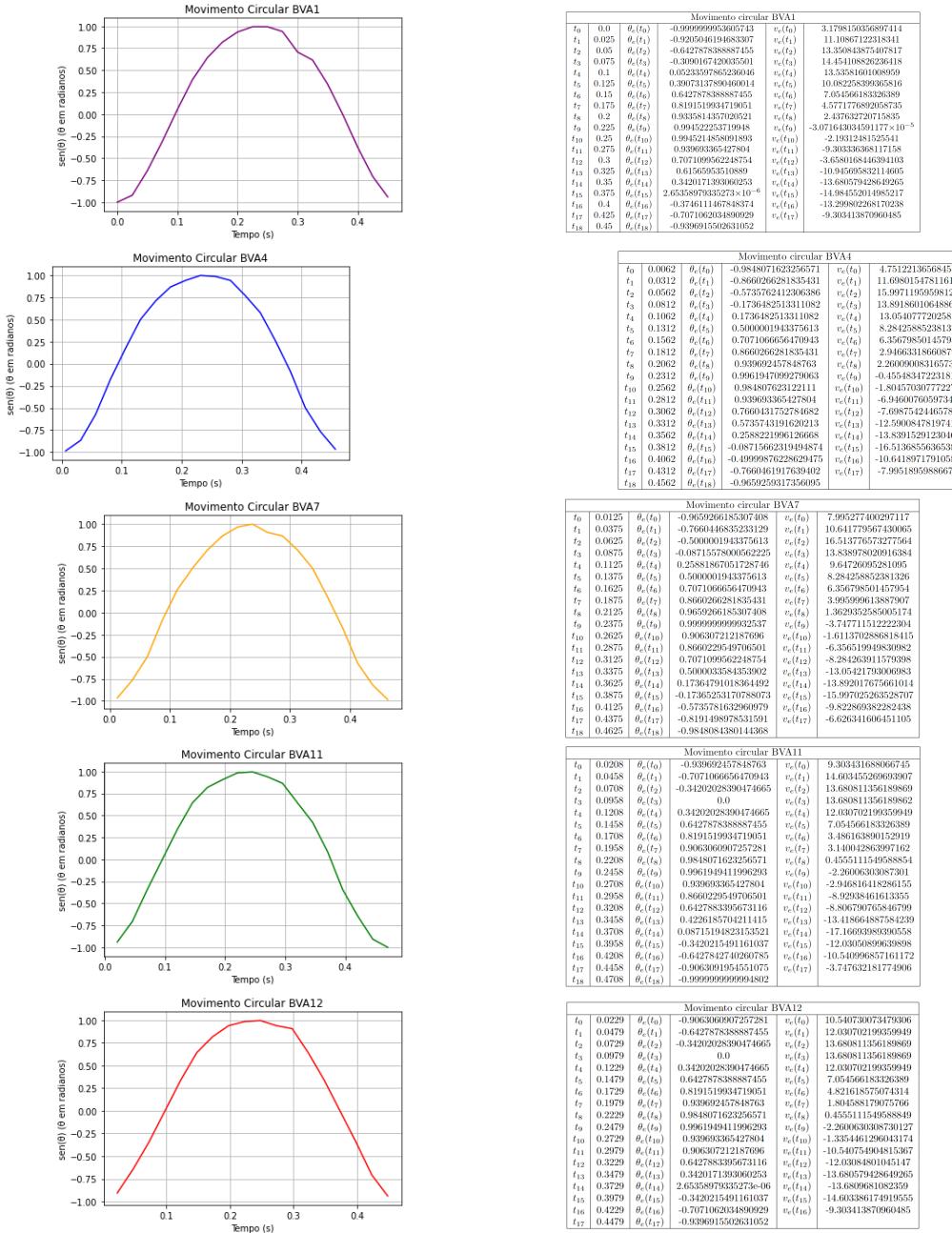


Figura 10: Queda livre: gráficos gerados pelo movimento simulado

## 2.4.2 Gráficos e tabelas do Movimento Circular



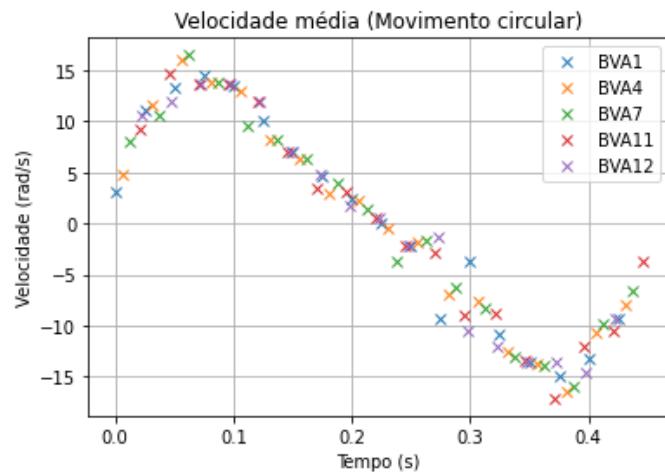


Figura 11: Velocidades médias para as 5 filmagens de Movimento Circular escolhidas

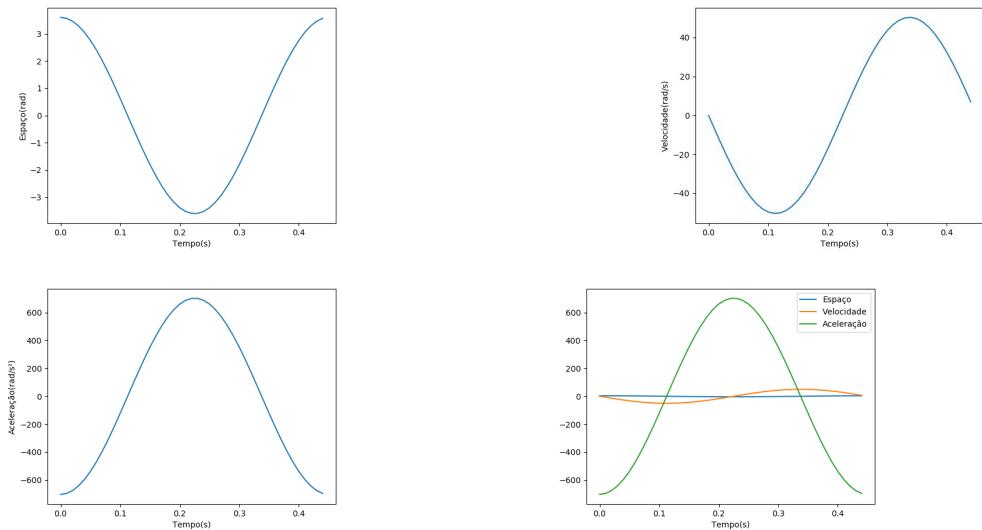


Figura 12: Movimento circular: gráficos gerados pelo movimento simulado

## 2.5 Discussão

Ao gerarmos os gráficos e tabelas com os dados observados no laboratório, temos que eles possuem grande similaridade, bem como correspondem ao gráficos esperados dos movimentos de queda livre e circular. Verificamos também que, apesar dos valores apresentados na tabela diferirem entre si, os gráficos da posição pelo tempo apresentam comportamentos quase idênticos.

Em especial, nas tabelas do movimento circular, verifica-se uma peculiaridade entre as velocidades nos instantes  $v_e(t_8)$  e  $v_e(t_9)$ : entre esses instantes, o sinal da velocidade muda, indicando que o corpo mudou de direção — ou, no caso do movimento circular, que o corpo passou pelo ponto mais alto do *loop* e agora está descendo.

Após a análise dos gráficos e das tabelas, verificamos que, tanto para a queda livre quanto para o movimento circular (MCU), os dados simulados superestimam as posições e velocidades do corpo quando comparados aos dados observados.

É possível constatar isso ao analisarmos a Figura 12 (gráfico do espaço, em radianos, pelo tempo, em segundos, do experimento 12 do Movimento Circular). O gráfico do movimento observado (em laranja) indica que o corpo deu apenas uma volta em um período T, conforme visto no Laboratório. Entretanto, o gráfico do movimento simulado por Euler (em azul) indica que o corpo deu aproximadamente duas voltas no mesmo período T.

Além disso, ao analisarmos as velocidades médias  $V_m$  de ambos os movimentos, verificamos que  $V_m$  assume valores similares em instantes similares para todas as 5 filmagens observadas, tanto no MCU quanto na queda livre.

Em relação ao amortecimento do movimento circular uniforme, decidimos não considerá-lo, visto que a força de arrasto e de atrito envolvidos no sistema são desprezíveis, isto é, os valores com amortecimento não são muito diferentes comparados ao sem amortecimento. Além disso, para calcular a força de atrito precisaríamos do coeficiente cinético de atrito do material que está sendo utilizado no experimento.

### **3 Aplicação**

#### **3.1 Introdução**

A aplicação que escolhemos para os modelos desenvolvidos neste trabalho foi a de um simulador de parque de diversões em realidade virtual. Escolhemos esta aplicação por ser uma ideia divertida e inovadora que aproveita fortes elementos dos movimentos que escolhemos para modelar.

Nesta aplicação, os resultados do Movimento Uniformemente Variado (queda livre) seriam usados para modelagem da simulação do brinquedo "elevador", que geraria a sensação de queda livre no usuário.

Os resultados da modelagem do MCU e MCV seriam usados para modelagem da simulação da roda gigante.

#### **3.2 Objetivos**

O objetivo desta parte é entender quais partes da modelagem feita nas outras partes seria utilizada para a implementação da aplicação proposta. Para isso, iremos descrever as aplicações e apresentar justificativas através da análise e comparação dos gráficos criados.

#### **3.3 Dados e métodos**

##### **3.3.1 Elevador**

Nos baseamos no brinquedo do parque Hopi Hari, que possui 69,5 metros de altura.

A partir destes dados, criamos os gráficos do movimento da roda gigante a partir do código gerado na parte 2.

$$h = 69,5 \text{ m}$$

##### **3.3.2 Roda Gigante**

Nos baseamos em uma roda gigante chamada "Electric Rim Drive Wheel", da companhia Eli Bridge Company, por ter informações bastante precisas disponíveis sobre suas medidas.

O raio da roda gigante é de 10,2 metros, a velocidade média é de 2,4 km/h e a massa do brinquedo inteiro vazio é de 9979 kg.

A partir destes dados, criamos os gráficos do movimento da roda gigante a partir do código gerado na parte 2.

$$r = 10,2 \text{ m}$$

$$v = 2,4 \text{ km/h}$$

$$m \text{ roda vazia} = 9979 \text{ kg}$$

### 3.4 Resultados experimentais

#### 3.4.1 Gráficos Elevador

Gráficos relativos ao movimento de um brinquedo Elevador em queda livre real.

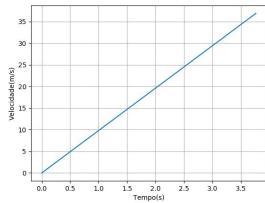


Figura 13: Gráfico velocidade x tempo

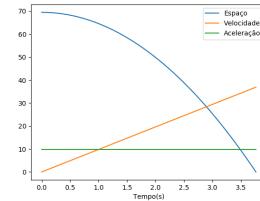


Figura 14: Gráfico espaço, velocidade e aceleração x tempo

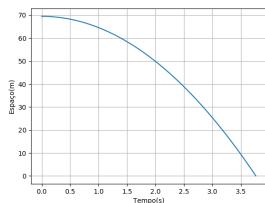


Figura 15: Gráfico espaço x tempo

#### 3.4.2 Gráficos Roda Gigante

Gráficos relativos ao movimento de uma roda gigante real.

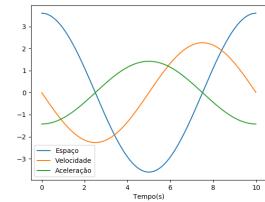


Figura 16: Gráfico espaço, velocidade e aceleração x tempo

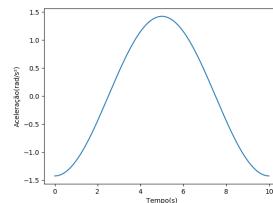


Figura 17: Gráfico aceleração x tempo

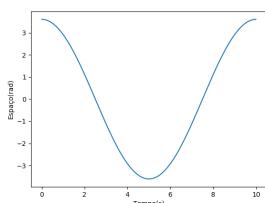


Figura 18: Gráfico espaço x tempo

### 3.5 Discussão

Os resultados gerados pelos gráficos nos permitem ter informações aproximadas sobre os movimentos de um parque de diversões real. Poderíamos usar estes dados como base para a construção de um simulador em realidade virtual destes mesmos brinquedos. Para isso, deveríamos construir um sistema que simulasse a aceleração e deslocamento de cada um dos brinquedos.

Em relação ao elevador, a construção da simulação de queda livre deveria levar em consideração principalmente a aceleração constante e sensação de queda vertiginosa.

Já para a roda gigante, o principal seria simular a mudança de sentido da velocidade e aceleração ao passar pelos picos do movimento.

Os gráficos são versões simplificadas das condições reais, pois não levam em conta atrito, resistência do ar ou variação de peso dependendo do número de pessoas utilizando o brinquedo. Ainda assim, seriam úteis para uma primeira simulação, podendo acrescentar variáveis em um momento posterior.