QUESTÃO 4

limite superior teórico para o erro:

$$E(x) = f(x) - p(x) = \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}_{\psi(x)}$$ e ξ está entre x_0 e x_n

para $f(x) = e^x$

$f(x_0) = e^0 = 1$, $f(x_1) = e^{1/2} = \sqrt{e}$ $f(x_2) = e^1 = e$

então teremos

$\boxed{(0,1)(1/2, \sqrt{e})(1,e)}$ $\boxed{n=2}$

a) dado $f(x) = e^x$ e $x_0 = 0, x_1 = 1/2, x_2 = 1$

determinar o erro máximo:

$$e_{MAX} = \frac{1}{(n+1)!}\max|f^{(n+1)}(\xi)| \cdot \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

Como $f(x) = e^x$, então $f^{(n+1)}(x) = f^3(x) = e^x$, para $\forall n$

$\max|f^{(3)}(\xi)| = e$ → valor máximo no intervalo entre 0 e 1, temos e^1 como máx

Para $x_0 = 0, x_1 = 1/2, x_2 = 1$

$$\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) = (x-0)(x-1/2)(x-1)$$

$$x(x-1/2)(x-1)$$

$$x\left(x^2 - x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2}$

Calcular a primeira derivada

$\pi'(x-x_i) = 3x^2 - 2\cdot\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 3x^2 - 3x + \frac{1}{2}$

igualar a zero

$3x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-3)^2 - 4\cdot 3\cdot \frac{1}{2}$

$\Delta = 9 - 6$

$\Delta = 3$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2\cdot 3} \longrightarrow \boxed{x_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{6}} \; ; \; \boxed{x_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}}$

Calcular a segunda derivada:

$\pi''(x_i - x_i) = 6x - 3$

aplicar as raízes x_1 e x_2 para achar os mínimos e máximos locais

para $x = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$

$6\cdot\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right) - 3 = \cancel{3} + \sqrt{3} - \cancel{3} = \sqrt{3} > 0 \rightarrow$ mín. local

para $x = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$

$6\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) = -\sqrt{3} < 0 \Rightarrow$ máx local

Conclusão do erro máximo:
Considerando que o maior valor de π é o máximo local, $n=2$

$$e_{max} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}^{max} \max \prod_{i=0}^{n} (x-x_i) \to \psi(x)$$

min local: $\sqrt{3}$ — O que fazer aqui para achar o max?

máx local: $-\sqrt{3}$

$$e_{max} = e \cdot \overbrace{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}^{\psi(x)}$$

aplicando $x = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$

$$\psi(x) = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}-1\right)$$

$$\psi(x) = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)\cdot\left(\frac{-\sqrt{3}}{6}\right)\cdot\left(\frac{-3-\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$\psi(x) = \frac{(3-\sqrt{3})(-\sqrt{3})(-3-\sqrt{3})}{216} =$$

$$\psi(x) = \frac{(-\sqrt{3})(-9-3\sqrt{3}+3\sqrt{3}+3)}{216}$$

$$\psi(x) = \frac{(-\sqrt{3})(-6)}{216} = \frac{6\sqrt{3}}{216} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{36}} \longrightarrow$$

$$\boxed{e_{max} = \frac{\max\left(f^{(n+1)}\right)}{(n+1)!} \cdot \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) = \frac{e}{3!} \cdot \frac{\sqrt{3}}{36} = \frac{e\sqrt{3}}{216}}$$