

MAC0338 - Análise de Algoritmos

Departamento de Ciência da Computação

Segundo semestre de 2023

Lista 3

Entregar: Exercícios 1 e 3.

Bônus: Exercício 9.

Instruções: Leia as instruções postadas no e-disciplinas. Além disso, para os exercícios que requerem um algoritmo você deve: escrever um pseudocódigo, descrever seu funcionamento, provar corretude e fazer uma análise formal do consumo de tempo.

1. Considere o seguinte algoritmo que calcula o maior e o menor elemento de um vetor $v[1..n]$ com elementos distintos.

Algoritmo MaiorMenor (v, n)

1. $maior \leftarrow v[1]$
2. $menor \leftarrow v[1]$
3. **para** $i \leftarrow 2$ **até** n **faça**
4. **se** $v[i] > maior$
5. **então** $maior \leftarrow v[i]$
6. **senão se** $v[i] < menor$
7. **então** $menor \leftarrow v[i]$
8. **devolva** $maior, menor$

Suponha que a entrada do algoritmo é uma permutação de 1 a n escolhida uniformemente dentre todas as permutações de 1 a n .

Qual é o número esperado de comparações executadas na linha 6 do algoritmo?
Qual é o número esperado de atribuições efetuadas na linha 7 do algoritmo?

2. Seja $M(n)$ definida pela recorrência

$$\begin{aligned} M(0) &= 1 \\ M(1) &= 1 \\ M(n) &= \min_{0 \leq k \leq n-1} \{M(k) + M(n-k-1)\} + n \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

Mostre que $M(n) \geq \frac{1}{2}(n+1) \lg(n+1)$ para todo $n \geq 0$.

3. Para esta questão, vamos dizer que a mediana de um vetor $A[p..r]$ com número inteiros é o valor que ficaria na posição $A[\lfloor (p+r)/2 \rfloor]$ depois que o vetor $A[p..r]$ fosse ordenado.

Dado um algoritmo linear “caixa-preta” que devolve a mediana de um vetor, descreva um algoritmo, linear, que, dado um vetor $A[p..r]$ de inteiros distintos e um inteiro k , devolve o k -ésimo menor do vetor. (O k -ésimo menor de um vetor de inteiros distintos é o elemento que estaria na k -ésima posição do vetor se ele fosse ordenado). Você pode assumir que o vetor tem tamanho igual uma potência de 2.

4. Considere o seguinte algoritmo que determina o segundo maior elemento de um vetor $v[1..n]$ com $n \geq 2$ números positivos distintos.

Algoritmo Máximo (v, n)

1. $maior \leftarrow 0$
2. $segundo_maior \leftarrow 0$
3. **para** $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
4. **se** $v[i] > maior$
5. **então** $segundo_maior \leftarrow maior$
6. $maior \leftarrow v[i]$
7. **senão se** $v[i] > segundo_maior$
8. **então** $segundo_maior \leftarrow v[i]$
9. **devolva** $segundo_maior$

Suponha que v é uma permutação de 1 a n escolhida ao acaso dentre todas as permutações de 1 a n , de acordo com a distribuição uniforme de probabilidade. Seja X o número de vezes que a variável $segundo_maior$ é alterada (ou seja, o número de execuções das linhas 5 e 8 do algoritmo) numa chamada de Máximo(v, n). Note que X é uma variável aleatória. Calcule o valor esperado de X .

5. (**CLRS 8.4-3**) Seja X uma variável aleatória que é igual ao número de caras em duas jogadas de uma moeda justa. Quanto vale $E[X^2]$? Quanto vale $E[X]^2$?
6. Qual é o consumo de espaço do QUICKSORT no pior caso?
7. Escreva uma função que recebe um vetor com n letras A's e B's e, sem usar um vetor auxiliar, move todos os A's para o início do vetor. Sua função deve consumir tempo $O(n)$.
8. Escreva uma função que rearranje um vetor $v[p..r]$ de inteiros de modo que tenhamos $v[p..j-1] \leq 0$ e $v[j..r] > 0$ para algum j em $p..r+1$. Faz sentido exigir que j esteja em $p..r$? Procure fazer uma função rápida que não use vetor auxiliar. Repita o exercício depois de trocar $v[j..r] > 0$ por $v[j..r] \geq 0$. Faz sentido exigir que $v[j]$ seja 0?
9. Sejam $X[1..n]$ e $Y[1..n]$ dois vetores, cada um contendo n números ordenados. Escreva um algoritmo $O(\lg n)$ para encontrar a mediana de todos os $2n$ elementos nos vetores X e Y . Pode-se assumir que todos os $2n$ elementos são distintos e que n é uma potência de 2. Assim como no Exercício 3, a mediana de um vetor $A[p..r]$ é o elemento que estaria na posição $\lfloor (p+r)/2 \rfloor$ depois que o vetor $A[p..r]$ fosse ordenado.
10. Qual a diferença de consumo de tempo entre uma busca binária em um vetor com n elementos e uma busca binária em um vetor com n^2 elementos?