MAC0338 - Análise de Algoritmos

Departamento de Ciência da Computação

Segundo semestre de 2023

Lista 8

Entregar: Exercícios 3, 6 e 9.
Instruções: Leia as instruções postadas no e-disciplinas.

1. Defina *algoritmo eficiente*. Defina *problema de decisão*. Defina *verificador polinomial para* SIM. Defina *verificador polinomial para* NÃO. Defina as classes P, NP e coNP. Dê um exemplo de um problema em cada uma dessas classes, justificando a sua pertinência à classe.

2. Mostre que SAT está em NP. (Essa é a parte fácil do teorema de Cook.)

3. Uma fórmula booleana $\mathcal{C}$ sobre um conjunto X de variáveis booleanas (não necessariamente em CNF) é uma *tautologia* se toda atribuição a X satisfaz $\mathcal{C}$. O problema TAUTOLOGIA consiste em, dado X e $\mathcal{C}$, decidir se $\mathcal{C}$ é ou não uma tautologia. Prove que o problema TAUTOLOGIA está em coNP.

4. O problema 2-SAT consiste na restrição de SAT a instâncias X e $\mathcal{C}$ em que toda cláusula de $\mathcal{C}$ tem exatamente dois literais. Mostre que o 2-SAT está em P, ou seja, descreva um algoritmo polinomial que resolva o 2-SAT.

5. Mostre que 2-COLORAÇÃO está em P.

6. Seja $G = (V, E)$ um grafo. Um conjunto $S \subseteq V$ é *independente* se quaisquer dois vértices de S não são adjacentes. Ou seja, não há nenhuma aresta do grafo com as duas pontas em S. O problema IS consiste no seguinte: dado um grafo G e um inteiro $k \geq 0$, existe um conjunto independente em G com k vértices? Mostre que o problema IS é NP-completo. **Não** pode usar o fato que o problema CLIQUE é NP-completo, mas pode se inspirar na prova deste teorema.

7. Seja $G = (V, E)$ um grafo. Uma *3-coloração* de G é uma função $c : V \to \{1, 2, 3\}$ tal que $c(u) \neq c(v)$, para toda aresta $uv \in E$.

   Considere o seguinte problema.

   Problema 3-COLORAÇÃO**:** Dado um grafo, determinar se ele tem ou não uma 3-coloração.

   Mostre que o 3-COLORAÇÃO está em NP.

8. Mostre que o problema abaixo é NP-completo.

   Problema PARTIÇÃO**:** Dada uma coleção S de números não negativos, decidir se existe uma subcoleção S' de S cuja soma é igual a soma dos números em $S \setminus S'$, ou seja,

   $$\sum_{x \in S, x \in S'} x = \sum_{x \in S, x \notin S'} x.$$

9. Mostre que o problema abaixo é NP-completo.

   Problema MOCHILA**:** Dado um número $W \geq 0$, um número $V \geq 0$, um número inteiro não negativo n, uma coleção de números não negativos $w_1, \ldots, w_n$, e uma coleção de números não negativos $v_1, \ldots, v_n$, decidir se existe um subconjunto S de $\{1, \ldots, n\}$ tal que

   $$\sum_{i \in S} w_i \leq W \quad \text{e} \quad \sum_{i \in S} v_i \geq V.$$

   Pode assumir que o problema PARTIÇÃO (Exercício 8) é NP-completo.