MAC0210 - 3ª Lista de Exercícios - Data de entrega: 14/06/2024

Instruções: as questões em papel devem ser resolvidas à mão e escaneadas; as demais questões devem ser implementadas em Octave. Use os nomes `questaoX[itemY]` para facilitar a identificação e entregue um único arquivo (tgz/zip) no edisciplinas até as 23:55 do dia 14/06/2024.

$\boxed{\text{Questão 1}}$ (papel) Dadas as quatro observações $(x_i, y_i) = (-1, 1), (0, 1), (1, 2)$ e $(2, 0)$, determine os coeficientes $c_j,\ j = 0, 1, 2, 3$ dos polinômios interpoladores cúbicos $p(x) = \sum_{j=0}^{3} c_j \phi_j(x)$ que satisfazem $p(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, 2, 3$, usando as seguintes bases (substitua os valores numéricos de x_i nas expressões dos polinômios $\phi_j(x)$ abaixo):

(a) $\{1, x, x^2, x^3\}$;

(b) $\left\{\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}, \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}, \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}, \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right\}$.

(c) $\{1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\}$.

(d) Verifique algebricamente que as expressões dos 3 polinômios são idênticas (o teorema da pg. 301 garante que são, mas aqui você deve reconfirmar isso fazendo as contas).

$\boxed{\text{Questão 2}}$ Na modelagem de um problema aparece a seguinte função

$$u(x) = \gamma_0 e^{\gamma_1 x + \gamma_2 x^2},$$

onde $\gamma_i,\ i = 0, 1, 2$ são coeficientes desconhecidos. Considere dados três pares $(x_i, y_i),\ i = 0, 1, 2$ satisfazendo $y_i = u(x_i)$. Observe que a função $v(x) = \ln(u(x))$ é um polinômio em x.

(a) (papel) Encontre um polinômio interpolador quadrático $v(x)$ que garanta que $u(x) = e^{v(x)}$ interpole os pontos dados, e escreva uma fórmula para $u(x)$ em função de $(x_i, y_i),\ i = 0, 1, 2$; (**dica:** os pares $(x_i, z_i),\ i = 0, 1, 2$ para a interpolação de $v(x)$ não são os mesmos (x_i, y_i) dados).

(b) (código) Escreva um código que encontra $u(x)$ a partir dos pares $(x_i, y_i) = (0, 1), (1, .9), (3, .5)$. Imprima os coeficientes γ_i e plote a função interpoladora $u(x)$ no intervalo $[0, 6]$. Indique uma característica do gráfico dessa curva que seja qualitativamente diferente do gráfico de uma função quadrática.

$\boxed{\text{Questão 3}}$ (papel) Considere dados uma função $f(x)$ e $n+1$ observações $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$. Considere agora a função $g(x)$ baseada nas diferenças divididas

$$g(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x].$$

Suponha adicionalmente que $f(x)$ é um polinômio de grau m. Mostre formalmente as afirmações a seguir:

(a) se $m \leq n$, então $g(x) = 0,\ \forall x$;

(b) se $m > n$, então $g(x)$ é um polinômio de grau $m - n - 1$.

[Dica: considere o polinômio $p(x)$ que interpola as observações $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ e a forma de Newton para acrescentar uma nova observação $(x, f(x))$.]

$\boxed{\text{Questão 4}}$ Suponha que queiramos aproximar a função e^x no intervalo $[0,1]$ usando uma interpolação polinomial com $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$ e $x_2 = 1$. Seja $p(x)$ o polinômio interpolador obtido.

(a) (papel) Encontre um limitante superior teórico para a magnitude do erro

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |e^x - p(x)|.$$

[Dica: para encontrar o máximo de $\psi(x)$, considere os zeros de $\psi'(x)$ que ocorrem em $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$.]

(b) (código) Construa o polinômio interpolador $p(x)$ com o seu método preferido, e plote em um mesmo gráfico a função original e sua aproximação.

(c) (código) plote a magnitude do erro $|e^x - p(x)|$ no intervalo $[0,1]$ em escala logarítmica (use `semilogy`), e verifique que esse erro está sempre abaixo do limitante obtido no item (a).