1º mostrar que os polinômios são linearmente independentes

$$\alpha_1 x^3 + \alpha_2(1-x)x^2 + \alpha_3(1-x)^2 x + \alpha_4(1-x)^3$$

$$0.x^3 + 0(1-x)x^2 + 0(1-x)^2 x + 0(1-x)^3$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

O conjunto gera todo o espaço de polinômios de grau menor ou igual a 4, uma vez que qualquer polinômio $p(x) \in P_4(\mathbb{R})$ pode ser escrito como:

$$\beta_1 x^3 + \beta_2(1-x)x^2 + \beta_3(1-x)^2 x + \beta_4(1-x)^3$$

Se $\alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \alpha_3 \vec{v_3} + \alpha_4 \vec{v_4} = 0$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

$$\begin{array}{c} \beta_4 \rightarrow \\ \beta_3 \rightarrow \\ \beta_2 \rightarrow \\ \beta_1 \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0 \Rightarrow$$

L.I.

Portanto, é uma base de P_4.

Ex1: v_1 v_2 v_3 v_4 (1)

$B = \{x^3, (1-x)x^2, (1-x)^2x, (1-x)^3\}$

$v_1 = x^3$
$v_2 = (1-x)x^2$
$v_3 = (1-x)^2x$
$v_4 = (1-x)^3$

Sabemos que o polinômio de Bernstein:

$P(x) = c_0B_0^3(x) + c_1B_1^3(x) + c_2B_2^3(x) + c_3B_3^3(x)$

$v_1 = (1-x)^0 x^3$
$v_2 = (1-x)^1 x^2$
$v_3 = (1-x)^2 x^1$
$v_4 = (1-x)^3 x^0$

$B_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{3-i}$

$v_1 = 0B_0^3(x) + 0B_1^3(x) + 0B_2^3(x) + 1B_3^3(x)$
$v_2 = 0B_0^3(x) + 0B_1^3(x) + 1B_2^3(x) + 0B_3^3(x)$
$v_3 = 0B_0^3(x) + 1B_1^3(x) + 0B_2^3(x) + 0B_3^3(x)$
$v_4 = 1B_0^3(x) + 0B_1^3(x) + 0B_2^3(x) + 0B_2^3(x)$

$v_1 = (0, 0, 0, 1) \rightarrow (1-x)^0x^3$
$v_2 = (0, 0, 1, 0) \rightarrow (1-x)x^2$
$v_3 = (0, 1, 0, 0) \rightarrow (1-x)^2x$
$v_4 = (1, 0, 0, 0) \rightarrow (1-x)^3x^0$

(2)

Para determinar a matriz de mudança de base A {1, x, x², x³} para a base de Bernstein como combinação linear dos elementos da base B:

$$x^3 = a_{11} 1 + a_{21} x + a_{31} x^2 + a_{41} x^3 \quad (1)$$

$$(1-x)x^2 = a_{12} + a_{22} x + a_{32} x^2 + a_{42} x^3 \quad (2)$$

$$(1-x)^2 x = a_{13} + a_{23} x + a_{33} x^2 + a_{43} x^3 \quad (3)$$

$$(1-x)^3 = a_{14} + a_{24} x + a_{34} x^2 + a_{44} x^3 \quad (4)$$

(1) $x^3 = (0,0,0,1)^t (a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41})$

$(1-x)x^2 = (0,0,1,0)^t (a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42})$

$(1-x)^2 x = (0,1,0,0)^t (a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{43})$

$(1-x)^3 = (1,0,0,1)^t (a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44})$

$$M_A^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ a base canônica para Bernstein.

$A = (1, x, x^2, x^3)$

(2) $B = \{(x^3, (1-x)x^2, (1-x)^2 x, (1-x)^3\}$

$1 = a_{11}(1-x)^0 x^3 + a_{21}(1-x)x^2 + a_{31}(1-x)^2 x + a_{41}(1-x)^3$

$x = a_{12}(1-x)^0 x^3 + a_{22}(1-x)x^2 + a_{32}(1-x)^2 x + a_{42}(1-x)^3$

$x^2 = a_{13}(1-x)^0 x^3 + a_{23}(1-x)x^2 + a_{33}(1-x)^2 x + a_{43}(1-x)^3$

$x^3 = a_{14}(1-x)^0 x^3 + a_{24}(1-x)x^2 + a_{34}(1-x)^2 x + a_{44}(1-x)^3$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(1-x)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1-x)^2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{(1-x)^3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M_B^A$$

$\frac{1}{(1-x)^0} = \frac{1}{1} = 1$

A base canonica para A

Para per linear:

I $\int ((a f(x) + b g(x)) \, dx =$

$= a \int f(x) \, dx + b \int g(x) dx =$

e $\int (a f(x)) = a \int f(x) \, dx$ II

I $\int ((a f(x) + b g(x)) \, dx =$

$= \int a f(x) dx + \int b g(x) dx =$

$= a \int f(x) dx + b \int g(x) \, dx$.

II $\int ((a f(x)) = \int a f(x) dx =$

$= a \int f(x) dx$.

③

$$\int a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \cdots + a_{n+1}$$

$$\int a x^n + b x^{n-1} + \cdots +$$

$$\int a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \cdots + a_{n+1}$$

$$\hookrightarrow \int a_1 x^n + \int a_2 x^{n-1} + \cdots + \int a_{n+1} \cdot 1$$

$$\hookrightarrow a_1 \int x^n + a_2 \int x^{n-1} + \cdots + a_n \int 1$$

$$a_1 \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_2 \frac{x^n}{n} + \cdots + K$$

$\uparrow$

O maior grau é $n+1$. Portanto, a transformação linear é de P_n para P_{n+1}.

5) Para a derivada ser linear:

I) $(c\,f(x))' = c\,f'(x)$
II) $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

I
$(c\,f(x))' = \dfrac{d}{dx} c\,f(x) = c\dfrac{d}{dx} f(x) = c\,f'(x)$

II) $(f(x)+g(x))' =$

$\dfrac{d}{dx}(f(x)+g(x)) =$
$= \dfrac{d}{dx} f(x) + \dfrac{d}{dx} g(x) = f'(x) + g'(x)$

$\therefore$ É linear.

$f'(c) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$

$f(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \dots + a_{n+1}$

$a_1 \dfrac{\cancel{(x-c)}(x^{n-1} + x^{n-2}c + x^{n-3}c^2 + \dots + xc^{n-1} + c^n)}{\cancel{(x-c)}}$
$+ a_2 \dfrac{\cancel{(x-c)}(x^{n-2} + x^{n-3}c + \dots + xc^{n-2} + c^{n-1})}{\cancel{(x-c)}}$
$+ \dots + a_n \dfrac{\cancel{(x-c)}(x^{n-n})}{\cancel{(x-c)}}$

=> O maior grau é $n-1$, portanto é uma transformação de P_n para P_{n-1}.

(5)

$T(p)(x) = p \cdot (x+1)$

Para ser uma transformação, tem que atender aos seguintes:

(I) $T(p_1+p_2)(x) = T(p_1)(x) + T(p_2)(x)$

(II) $T(\lambda p)(x) = \lambda T(p)(x)$

$P_1 = e_1 + d_1 x + c_1 x^2 + b_1 x^3 + a_1 x^4$
$P_2 = e_2 + d_2 x + c_2 x^2 + b_2 x^3 + a_2 x^4$

$(P_1+P_2) = (e_1+e_2) + (d_1+d_2)x + (c_1+c_2)x^2 + (b_1+b_2)x^3 + (a_1+a_2)x^4$

(I) $T(p_1+p_2)(x) = \underbrace{T(p_1)(x) + T(P_2)(x)}_{(*)}$

(*) $T(p_1) + T(P_2)$
$= (a_1(x+1)^4 + b_1(x+1)^3 + c_1(x+1)^2 + d_1(x+1) + e_1) +$
$(a_2(x+1)^4 + b_2(x+1)^3 + c_2(x+1)^2 + d_2(x+1) + e_2)$
$= (a_1+a_2(x+1)^4 + b_1+b_2(x+1)^3 + c_1+c_2(x+1)^2 +$
$+ d_1+d_2(x+1) + e_1+e_2 =$
$= (P_1+P_2)(x+1) \Rightarrow T(p_1+P_2)(x).$

(5)

II $T(\lambda p)(x) = \lambda \cdot p(x+1) \Rightarrow \lambda T((p)x)$
$\Rightarrow \lambda T(p(x))$.

Logo, é uma transformação linear

Para ~~p(~~ $x = (-1) \Rightarrow$

$p(-1) = p(-1+1) = 0 \Rightarrow x$ é uma raiz ($x = -1$ é raiz).

Autovalores:

$$A = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(A - \lambda I) = 0$ e $\boxed{p(x) = x + 1}$.

$$\lambda I = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I \Rightarrow \begin{pmatrix} x-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Para $x = -1$

$(-1-\lambda)(1-\lambda)+1$

$-1+\lambda-\lambda+\lambda^2+1$

$\lambda^2+0\lambda+0$

$\lambda = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\lambda = \dfrac{-0 \pm 0}{2} = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 0^2 - 4.1.0 = 0$

$\lambda = 0 : (A - \underbrace{0 I}_{*})x =$

$0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$-x - y = 0 \rightarrow -x = y \Rightarrow x = -y$

$x + y = 0 \rightarrow (-y + y = 0)$ ✓

$\therefore$

$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ← autovetor