LISTA 5

Patrícia da Silva Rodrigues NUSP - 11315590

Julho 2024

1 Resolução do Exercício 1

a. Identificação e Separação de Componentes de um Sinal: A análise do espectro de frequência através da Transformada de Fourier permite decompor um sinal no domínio do espaço para o domínio da frequência. Isso facilita identificar diferentes componentes de frequências presentes no sinal. Por exemplo, em uma imagem, frequências baixas correspondem a variações suaves de intensidade, como fundos e áreas homogêneas, enquanto frequências altas representam transições abruptas de intensidade, como bordas de objetos. Ao modificar o espectro de frequência (por exemplo, aplicando filtros), é possível enfatizar ou suavizar certos aspectos da imagem, como bordas ou ruídos.

b. Característica Periódica da Transformada de Fourier em Imagens: A Transformada de Fourier de uma imagem é periódica devido à natureza discreta das imagens digitais. Isso significa que as características da imagem se repetem periodicamente na transformada, o que pode introduzir artefatos se não forem tomados cuidados adequados durante o processamento no domínio das frequências. Por exemplo, ao aplicar filtros sem o devido acolchoamento (padding), podem ocorrer erros de envolvimento (wraparound) que distorcem a filtragem.

c. Interpretação das Frequências em uma Imagem:

Frequências Baixas: Correspondem a variações suaves de intensidade, como gradientes suaves em superfícies uniformes. Frequências Altas: Representam mudanças rápidas na intensidade, como bordas nítidas entre objetos ou ruídos.

2 Resolução do Exercício 2

Intuição por trás da Complexidade Computacional na FFT

A complexidade computacional da Transformada Rápida de Fourier (FFT) é significativamente menor do que a da Transformada de Fourier direta ($O(n^2 \cdot m^2)$ para $O(n \cdot m \cdot \log(n \cdot m))$). Assim como o MergeSort, que divide e conquista, a FFT explora a decomposição do problema em subproblemas menores que são resolvidos de forma recursiva. Isso reduz drasticamente o número de operações necessárias, tornando-a mais eficiente para grandes conjuntos de dados, como imagens de alta resolução.

Transformada de Fourier Direta

A Transformada de Fourier direta de uma imagem de tamanho $n \times m$ envolve calcular a soma de $n \times m$ produtos complexos, onde cada termo da transformada é definido como:

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{n-1} \sum_{y=0}^{m-1} f(x,y) e^{-i2\pi\left(\frac{ux}{n} + \frac{vy}{m}\right)}$$

A complexidade computacional dessa operação é $O(n^2 \cdot m^2)$, pois são necessárias $n \times m$ operações para cada par de frequências (u,v).

Transformada Rápida de Fourier (FFT)

A FFT explora a propriedade de que a Transformada de Fourier pode ser decomposta em subproblemas menores, que são resolvidos de forma recursiva. Vamos considerar uma abordagem simplificada usando uma imagem de tamanho $n = m = 2^k$ para simplificar o exemplo.

1. **Divisão em subproblemas:** A FFT divide a imagem em subimagens menores, aplicando transformações em tempo reduzido.
2. **Combinação das soluções parciais:** Após resolver os subproblemas, as soluções parciais são combinadas para formar a transformada completa.

A complexidade da FFT para uma imagem $n \times m$ é aproximadamente $O(n \cdot m \log(n \cdot m))$, devido à redução no número de operações necessárias pela decomposição e combinação eficientes.

3 Resolução do Exercício 3

Dado os gradientes:

kernel_x = $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

kernel_y = $\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$

e a matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 90 & 90 & 90 & 10 & 5 \\ 5 & 90 & 20 & 90 & 5 & 5 \\ 5 & 90 & 20 & 90 & 15 & 5 \\ 5 & 90 & 90 & 90 & 15 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Conseguimos encontrar o $gradiente_x$ e $gradiente_y$:

Para calcular o $gradiente_y$, podemos fazer a correlação na imagem f sem o padding. Após aplicarmos o $kernel_x$ por toda imagem obteremos esse resultado:

Gradiente x:

$$\begin{bmatrix} 3 & 88 & 88 & 88 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & -70 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -87 & -87 & -87 & -12 & -2 \end{bmatrix}$$

Para calcular o $gradiente_y$, podemos fazer a correlação na imagem f sem o padding. Após aplicarmos o $kernel_y$ por toda imagem obteremos esse resultado:

Gradiente y:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 85 & 0 & 0 & -80 & -5 \\ 85 & -70 & 70 & -85 & 0 \\ 85 & -70 & 70 & -75 & -10 \\ 85 & 0 & 0 & -75 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4 Resolução do Exercício 4

Para a detecção de arestas em uma imagem, utilizamos as derivadas da intensidade dos pixels para identificar mudanças abruptas (arestas). A seguir, explico detalhadamente os passos utilizando a primeira e a segunda derivada.

Detecção de Arestas com a Primeira Derivada

1. **Primeira Derivada**: - A primeira derivada de uma função descreve a taxa de variação da função. - Em termos de intensidade de pixel, a primeira derivada destaca onde ocorrem mudanças rápidas na intensidade (alta variação), que normalmente correspondem às arestas na imagem.

2. **Identificação de Arestas**: - Um valor alto na primeira derivada indica uma mudança abrupta na intensidade, sugerindo a presença de uma aresta. - A figura mostra que a intensidade varia rapidamente em uma aresta, resultando em picos ou vales na primeira derivada.

Detecção de Arestas com a Segunda Derivada

1. **Segunda Derivada**: - A segunda derivada de uma função descreve a concavidade da função. - Em termos de intensidade de pixel, a segunda derivada destaca onde a taxa de variação da intensidade está mudando mais rapidamente.

2. **Identificação de Arestas**: - Zeros cruzando na segunda derivada indicam a localização exata das arestas. - Isso é porque na posição da aresta, a variação da intensidade muda de aumento para diminuição ou vice-versa, resultando em um ponto de inflexão.

Analisando a imagem

Derivadas de primeira ordem mostram-se não nulas desde o início até o final de uma rampa de intensidade, enquanto derivadas de segunda ordem são não nulas apenas nos extremos dessa rampa. Isso sugere que derivadas de primeira ordem tendem a produzir bordas mais espessas, enquanto derivadas de segunda ordem resultam em bordas mais finas, o que é relevante para a detecção de bordas em imagens digitais.

Em seguida, observando o ponto isolado de ruído, as derivadas de segunda ordem respondem com maior intensidade do que derivadas de primeira ordem, devido à sua capacidade mais agressiva em realçar mudanças abruptas. Isso implica que derivadas de segunda ordem são mais eficazes em realçar detalhes finos, incluindo ruído, comparado às derivadas de primeira ordem.

Na imagem podemos ver que derivadas de segunda ordem apresentam um efeito de "borda dupla" ao transitar entre pixels de intensidade, mudando de sinais opostos ao cruzar bordas de claro para escuro ou escuro para claro. Esse fenômeno é importante para localizar precisamente as bordas em imagens.

resumindo:

- Derivadas de primeira ordem geralmente produzem bordas mais grossas. - Derivadas de segunda ordem têm uma resposta mais forte a detalhes finos, como linhas finas, pontos isolados e ruído. - Derivadas de segunda ordem produzem uma resposta de borda dupla em transições de rampa e degrau na intensidade. - O sinal da segunda derivada pode ser usado para determinar se uma transição para uma borda é de claro para escuro ou de escuro para claro.

As derivadas são fundamentais na detecção de bordas porque capturam variações significativas na intensidade dos pixels, permitindo identificar e destacar as transições de borda na imagem.