18) $\log_{10} n$ é $O(\lg n)$

Para $c = 1$ e $n_0 = 1$ e $n \geq n_0$, temos $\log_{10}(n) \leq 1 \cdot \log_2(n)$.

2b) $n = O(2^n)$ Para provar que $n = O(2^n)$ precisamos mostrar que $n \leq c.2^n$

para $c=1$ e $n_0=1$, temos $1 < 2^1$. Logo, para $n > n_0$ é verdade

Supondo que é verdade para algum $k \geq 1$ ou seja, $k \leq 2^k$

também é verdadeira para $n = k+1 \rightarrow k+1 \leq 2^{k+1}$

2/4 Page

38) Se $f(n) = \Theta(g(n))$ e $g(n) = \Theta(h(n))$ então $f(n) = \Theta(h(n))$

$f(n) = \Theta(g(n))$ e $g(n) \Rightarrow f(n) = O(n)$ e $f(n) = \Omega(g(n))$

logo $f(n) = \Theta(g(n)) \rightarrow \exists c_1$ e $c_2 \mid c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$

para um n suficientemente grande

Se $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ e $c_3 h(n) \leq g(n) \leq c_4 h(n)$

logo $c_3 h(n) \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \leq c_4 . h(n)$

Portanto $c_3 h(n) \leq f(n) \leq c_4 h(n) \Rightarrow f(n) = \Theta(h(n))$ ■

4a Prove que $\sum_{i=1}^{n} i^{10}$ é $\Theta(n^{11})$

Para que $\sum_{1}^{n} i^{10} = \Theta(n^{11})$, precisamos mostrar que $\sum_{1}^{n} i^{10}$ é $\Omega(n^{11})$ e que $\sum_{1}^{n} i^{10}$ é $O(n^{11})$

Mostrando que $\sum_{i=1}^{n}$ é $O(n^{11})$

$\sum_{1}^{n} i^{10} \leq n.n^{10} = n^{11}$. Portanto, para $c=1$, $\sum_{1}^{n} i^{10}$ é $O(n^{11})$ para um n suficientemente grande

Mostrando que $\sum_{1}^{n} i^{10}$ é $\Omega(n^{11}) \Rightarrow$ Mostrar que, para um c_2 e um n suficientemente grande, $\sum_{i} i^{10} \geq c_2 . n^{11}$.

$$\sum_{i=1}^{n} i^{10} \geq c_2 (n.n^{10})$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} i^{10}}{n.n^{10}} \geq c_2 \text{ (limitado inferiormente)}$$

$\exists N \in \mathbb{R} \mid a_n \geq N$ para $\forall n \geq 1$

$$\frac{1^{10} + 2^{10} + \dots + n^{10}}{n.n^{10}} \geq c_2$$

$\Rightarrow c_2 \leq 1$

para $c_2 = 1/2$

$\sum_{i=1}^{n} i^{10} \geq \frac{1}{2} . n^{11} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^{10} \leq n.n^{10} \geq \frac{1}{2} . n.n^{10}$