MAC0329 – Álgebra booleana e aplicações

DCC / IME-USP — Primeiro semestre de 2021

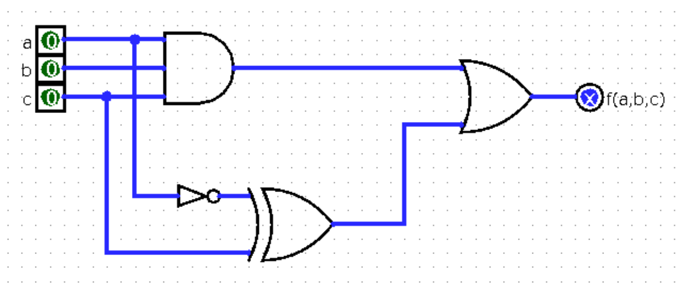
Lista de exercícios 2

Prazo para entrega: 31/maio/2021 (no moodle)

Entregar no moodle (e-disciplinas) um arquivo pdf ou uma foto com as soluções
A lista de exercícios é individual.
Em caso de dúvidas, poste suas dúvidas no Fórum de discussões/dúvidas no moodle.

1. (1 ponto) Sejam três variáveis lógicas (binárias) a, b e c.
   (a) Escreva uma expressão que toma valor 1 se e somente quando "$a = 1$, $b = 0$ e $c = 1$".
   (b) Escreva uma expressão que toma valor 0 se e somente quando "$a = 0$, $b = 1$ e $c = 1$".
   (c) Escreva uma expressão que toma valor 1 se e somente quando "$a = 1$, $b = 0$ e $c = 1$" ou quando "$a = 1$, $b = 0$ e $c = 0$".

2. (2 pontos) Escreva a expressão lógica diretamente correspondente ao circuito abaixo.



3. (2 pontos) Desenhe o circuito lógico que corresponde à implementação direta (sem simplificação) da expressão lógica $(a + \overline{b})\, c(\overline{b \oplus c})$. O circuito deve ter apenas três entradas (a, b e c).

4. (3 pontos) No primeiro exemplo da seção 4.2 das notas de aula mostramos que $\langle B, +, \cdot, {}^{-}, 0, 1 \rangle$ é uma álgebra booleana. No outro exemplo, consideramos o conjunto $B^n = B \times B \times \ldots \times B$, com as operações $+$, $\cdot$ e ${}^{-}$ herdadas de B e definidas, para quaisquer $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in B^n$, da seguinte forma

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \ldots, x_n \cdot y_n)$$

$$\overline{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$$

e com

$$\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$$

$$\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$$

Mostre que o conjunto B^n, com as operações mais os elementos $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ como definidos acima, é uma álgebra booleana.

(Note que a cor magenta é apenas para deixar claro a qual conjunto se referem as operações e os elementos identidade 0 e 1)

5. (2 pontos) Prove, algebricamente, a segunda igualdade do Teorema de DeMorgan, isto é, que

$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$$

(Faça a demonstração da validade da igualdade acima explicitamente, usando as propriedades vistas em aula. Neste exercício o princípio da dualidade não pode ser invocado :-)