Segunda lista de exercícios de MAT0122

Walter F. Mascarenhas

16 de Dezembro de 2021

Resumo

Esse arquivo contem a segunda lista de exercícios. Eles devem ser entregues via email para walterfm@ime.usp.br até o dia 15/01/2022.

Em algumas aulas do curso falei sobre funções como vetores, e considerei subespaços gerados por splines. Splines têm muitas vantagens, mas há outros subespaços interessantes nos espaços de funções. Nessa lista, estudaremos os subespaços formados por polinômios. Ou seja, consideraremos os espaços vetoriais $\mathcal{P}_n$ com escalares reais e vetores

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

e

$$q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1} x^{n-1}$$

com as operações usuais:

$$(p+q)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1}.$$

e

$$(\alpha p)(x) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)\, x + \ldots + (\alpha a_{n-1})\, x^{n-1}.$$

Ou seja, $\mathcal{P}_n$ é o conjunto de polinômios com coeficientes reais e grau no máximo $n-1$, com as operações usuais de soma de polinômios e produto de polinômio por escalar.

As questões da lista são as seguintes:

1. (1,0 ponto) Mostre que a família de polinômios x^3, $(1-x)\,x^2$, $(1-x)^2\,x$ e $(1-x)^3$ é um base de $\mathcal{P}_4$ (essa é a Base de Bernstein, usada para curvas de Bezier.)

2. (1,0 ponto) A base C mais popular para $\mathcal{P}_4$ é $\left\{1, x, x^2, x^3\right\}$ (chamada Base Canônica). Encontre a matriz de mudança de base da Base Canônica para a base de Bernstein e a matriz de mudança de base da Base de Bernstein para a base canônica.

3. (1,0 ponto) Mostre que a transformação T que leva o polinômio p em sua integral

$$(Tp)(x) = \int_0^x p(s)\, ds$$

é uma transformação linear de $\mathcal{P}_n$ para $\mathcal{P}_{n+1}$.

4. (1,0 ponto) Mostre que a transformação T que leva o polinômio p em sua derivada

$$(Tp)(x) = p'(x)$$

é uma transformação linear de $\mathcal{P}_n$ para $\mathcal{P}_{n-1}$.

5. (2,0 pontos) Mostre que a translação, que transforma o polinômio p no no polinômio Tp tal que

$$(Tp)(x) = p(x+1)$$

é uma transformação linear de $\mathcal{P}_4$ para $\mathcal{P}_4$ e calcule seu autovalores e autovetores.

6. (4,0 pontos) Implemente um algoritmo que encontra o polinômio $p(x)$ de grau n que melhor se ajusta a um conjunto de k pontos $\{(x_i, y_i), i = 1, \ldots, k\}$ segundo o critério de quadrados mínimos, ou seja, o polinômio de grau n para o qual a soma

$$\sum_{i=1}^{k} (p(x_i) - y_i)^2$$

é a menor possível.