Análise multivariada

Patrícia de Siqueira Ramos

UNIFAL-MG, *campus* Varginha

26 de Fevereiro de 2016

Matrizes singulares

- Quando a inversa de $\mathbf{A}$ não é definida, ela é chamada matriz singular
- Isso ocorre quando o $|\mathbf{A}| = 0$, que é quando uma ou mais linhas (ou colunas) da matriz são redundantes
- Assim, nem toda a informação da matriz é única

Matrizes singulares

- Quando a inversa de **A** não é definida, ela é chamada matriz singular
- Isso ocorre quando o $|\mathbf{A}| = 0$, que é quando uma ou mais linhas (ou colunas) da matriz são redundantes
- Assim, nem toda a informação da matriz é única

Ex.:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}_{2.} = \mathbf{a}_{3.}$$

Matrizes singulares

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1,5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_{3.} = 0,5\mathbf{b}_{2.}$$

Matrizes singulares

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1,5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_{3\cdot} = 0,5\mathbf{b}_{2\cdot}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_{3\cdot} = \mathbf{c}_{1\cdot} + \mathbf{c}_{2\cdot}$$

Matrizes singulares

Então, uma matriz $\mathbf{A}$ *é singular quando uma ou mais linhas (ou colunas) são combinações lineares de outras linhas (ou colunas), o que leva a:*

- $|\mathbf{A}| = 0$
- $\mathbf{A}^{-1}$ *não ser definida*

Posto de uma matriz (*rank*)

O posto avalia a quantidade de informação não redundante de uma matriz **A**, ou seja, o número de vetores linearmente independentes de **A**

- O posto é único, seja focando em linhas ou colunas
- O posto nunca é maior do que o menor valor da dimensão
  - matriz $m \times n$, $m < n$, o posto é $\leq m$ (se o posto for igual a m, a matriz é posto linha completo)
  - matriz $m \times n$, $m > n$, o posto é $\leq n$ (se o posto for igual a n, a matriz é posto coluna completo)
- Sempre que posto($\mathbf{A}$) $(n \times n)$ é menor do que n, a matriz é singular e a inversa não existe

Matrizes inversas e solução de sistemas de equações lineares

Um sistema como, por exemplo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = y_2 \end{cases}$$

pode ser escrito em notação matricial:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y}.$$

Matrizes inversas e solução de sistemas de equações lineares

- Se existir $\mathbf{A}^{-1}$, pré-multiplicar

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}, \end{aligned}$$

em que ambos os lados da igualdade serão vetores coluna.

- Se $\mathbf{A}^{-1}$ existir, ela é única e $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$ é o vetor solução.

Matrizes inversas e solução de sistemas de equações lineares

- Um sistema homogêneo

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}.$$

tem solução não trivial ($\neq \mathbf{0}$) sse $\mathbf{A}$ for singular.

- Todo sistema tem, pelo menos, a solução trivial e ela será a única sse $\mathbf{A}$ tiver inversa.
- Supor $\mathbf{A}$ não singular,

$$\begin{aligned}
\mathbf{Ax} &= \mathbf{0} \\
\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{0} && \text{(pré-multiplicar ambos os lados pela inversa)} \\
\mathbf{Ix} &= \mathbf{0} && \text{(usar definição de inversa)} \\
\mathbf{x} &= \mathbf{0} && .
\end{aligned}$$

Matrizes inversas e solução de sistemas de equações lineares

Exemplo: Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Obter a solução do sistema.