Análise multivariada

Patrícia de Siqueira Ramos

UNIFAL-MG, *campus* Varginha

4 de Setembro de 2018

Definições

- Matriz:
  - coleção de números ordenados por linhas e colunas
  - é comum organizá-los usando ( ), [ ] ou { }
  - na forma digital usamos a notação de negrito e letra maiúscula para uma matriz. Por exemplo, uma matriz pode ser representada como

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

  Obs.: Na forma escrita manualmente, devido à dificuldade de representar o negrito, usaremos um til embaixo da letra maiúscula

Definições

- Dimensão: número de linhas e colunas de uma matriz (n é o número de linhas e p é o número de colunas).
  Assim, uma matriz tem dimensão $n \times p$.
  A matriz $\mathbf{Y}$ do exemplo tem dimensão 2×3.

Definições

- Dimensão: número de linhas e colunas de uma matriz (n é o número de linhas e p é o número de colunas).
  Assim, uma matriz tem dimensão $n \times p$.
  A matriz $\mathbf{Y}$ do exemplo tem dimensão 2×3.
- Os elementos de uma matriz são numerados como

$$\mathbf{X} = [x_{ij}] = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}.$$

  Assim, x_{ij} é o elemento correspondete à i-ésima linha e j-ésima coluna.
  - No exemplo da matriz $\mathbf{Y}$, $y_{11} = 5, \ldots, y_{23} = 7$.

Definições

- Vetor: matriz com uma linha (vetor linha) ou uma coluna (vetor coluna).
  - Ex.: **a** é um vetor coluna e **b** é um vetor linha:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Definições

- Vetor: matriz com uma linha (vetor linha) ou uma coluna (vetor coluna).
  - Ex.: **a** é um vetor coluna e **b** é um vetor linha:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

- Escalar: matriz com uma linha e uma coluna.
  - Ex.: $x = 3$, $a = 0$, $w = -7$.

Operações elementares

- Soma e subtração de duas (ou mais) matrizes:
  - ambas devem ter mesma dimensão $n \times p$
  - a soma é feita elemento a elemento:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} \pm b_{ij}]$$

  - Ex.:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 4 & -3 \\ -7 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 13 & -5 \\ -4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Operações elementares

- Multiplicação de uma matriz por um escalar c:

$$c\mathbf{A} = [c \cdot a_{ij}]$$

- Ex.: $4\mathbf{A}$

Operações elementares

- Multiplicação de uma matriz por um escalar c:

$$c\mathbf{A} = [c \cdot a_{ij}]$$

- Ex.: $4\mathbf{A}$

$$4\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 & 4 \cdot 9 & 4 \cdot (-2) \\ 4 \cdot 3 & 4 \cdot 6 & 4 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 36 & -8 \\ 12 & 24 & 0 \end{bmatrix}$$

Operações elementares

- Multiplicação de matrizes:
  - o número de colunas da primeira matriz ($n \times p$) deve ser igual ao número de linhas da segunda matriz ($p \times m$).
  - a matriz resultante será $n \times m$:

$$\mathbf{A}_{n \times p} \cdot \mathbf{B}_{p \times m} = \mathbf{C}_{n \times m}$$

$$\text{Ex.:} \begin{bmatrix} 2 & 8 & -1 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 9 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 2} =$$

Operações elementares

- Multiplicação de matrizes:
  - o número de colunas da primeira matriz $(n \times p)$ deve ser igual ao número de linhas da segunda matriz $(p \times m)$.
  - a matriz resultante será $n \times m$:

$$\mathbf{A}_{n\times p} \cdot \mathbf{B}_{p\times m} = \mathbf{C}_{n\times m}$$

$$\text{Ex.: } \begin{bmatrix} 2 & 8 & -1 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 9 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2} =$$

$$\begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 8\cdot 9 + (-1)\cdot 6 & 2\cdot 7 + 8\cdot(-2) + (-1)\cdot 3 \\ 3\cdot 1 + 6\cdot 9 + 4\cdot 6 & 3\cdot 7 + 6\cdot(-2) + 4\cdot 3 \end{bmatrix}_{2\times 2} =$$

$$\begin{bmatrix} 68 & -5 \\ 81 & 21 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Operações elementares

Ex.: Se multiplicarmos um vetor linha por um vetor coluna teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}_{1\times 3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times 1} = 1\cdot 2 + 7\cdot 4 + 5\cdot 1 = 35 \text{ (escalar)}$$

Porém, se multiplicarmos um vetor coluna por um vetor linha teremos:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times 1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}_{1\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 14 & 10 \\ 4 & 28 & 20 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Obs. a) Diferenças entre escalares e matrizes

	escalares	matrizes
a.1)	$ab = ba$	$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$
a.2)	Se $ab = ac$ e $a \neq 0$, então $b = c$	Se $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ e $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, então não necessariamente $\mathbf{B} = \mathbf{C}$
a.3)	Se $ab = 0$, então $a = 0$, ou $b = 0$ ou ambos são 0	Se $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, não necessariamente $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ ou ambos são $\mathbf{0}$
a.4)	Se $ab = 0$, então $ba = 0$	Se $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, não necessariamente $\mathbf{BA} = \mathbf{0}$.

Obs. a) Diferenças entre escalares e matrizes - exemplos

$$\text{a.1)}\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \neq \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Obs. a) Diferenças entre escalares e matrizes - exemplos

a.1) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \neq \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

a.2) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$

$$\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{BC}, \text{ mas } \mathbf{A} \neq \mathbf{B}$$

Obs. a) Diferenças entre escalares e matrizes - exemplos

a.1) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \neq \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

a.2) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$

$\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{BC}, \text{ mas } \mathbf{A} \neq \mathbf{B}$

a.3) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{BA}, \text{ mas } \mathbf{A} \neq \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{B} \neq \mathbf{0}$

Obs. b)

$$\mathbf{A}^p = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \cdots \cdot \mathbf{A} \quad (p \text{ fatores}).$$
$$\mathbf{A}^p \mathbf{A}^q = \mathbf{A}^{p+q},$$
$$(\mathbf{A}^p)^q = \mathbf{A}^{pq}$$

$$(\mathbf{AB})^p \text{ não é necessariamente igual a } \mathbf{A}^p \mathbf{B}^p.$$

Para escalares tal regra vale, por exemplo:

$$(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36 \qquad \text{e} \qquad 2^2 \cdot 3^2 = 36.$$

Obs. c)

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T.$$

(^{T} representa a transposta de uma matriz, tal definição será vista adiante).

Ex.) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 8 & 13 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$

$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 13 & 3 \end{bmatrix}.$

$(\mathbf{AB})^T = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 13 & 3 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T.$

Produto de Hadamard

$$\mathbf{A}_{p\times q} \bigodot \mathbf{B}_{p\times q} = \mathbf{C}_{p\times q}.$$

- Menos comum do que a multiplicação de matrizes
- A multiplicação é feita elemento a elemento (a_{11} com b_{11}, a_{12} com b_{12} e assim por diante)
- As duas matrizes devem ter mesma dimensão

Matriz quadrada

- Matriz em que o número de linhas é igual ao número de colunas

$$\text{Ex.: } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & -2 \\ 4 & 11 & 2 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$$

são quadradas com dimensões 2×2 e 3×3, respectivamente.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 3 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$$

não é quadrada e tem dimensão 3×2.

Matriz simétrica

- Matriz quadrada em que $x_{ij} = x_{ji} \; \forall \; i, j$, ou seja, inverter linhas e colunas não afeta a matriz
- Assim, $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$
- Exemplos:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 2 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

é simétrica.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 5 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

não é simétrica.

Matriz diagonal

- Matriz simétrica em que todos os elementos fora da diagonal são zero

$$\mathbf{D}_{p\times p} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{pp} \end{bmatrix}$$

Matriz identidade

- Matriz diagonal de 1s

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz unitária

- Matriz composta de 1s:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriz unitária

- Matriz composta de 1s:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

- A matriz $\mathbf{J}$ pode ser obtida a partir da multiplicação de um vetor de 1s pela transposta dele

$$\mathbf{J} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriz nula

- Matriz composta de 0s:

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriz ortogonal **Q**

- Matriz em que as seguintes relações valem:

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}.$$

Exemplo:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

Matriz ortogonal $\mathbf{Q}$

- Matriz em que as seguintes relações valem:

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}.$$

Exemplo:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriz idempotente

- Matriz em que

$$\mathbf{AA} = \mathbf{A}.$$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

- Qualquer matriz pré ou pós multiplicada por $\mathbf{I}$ resulta na própria matriz

$$\mathbf{AI} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{IA} = \mathbf{A}$$

- Qualquer matriz pré ou pós multiplicada por **I** resulta na própria matriz

$$\mathbf{AI} = \mathbf{A}$$
$$\mathbf{IA} = \mathbf{A}$$

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

- A pré ou pós multiplicação pela matriz nula $\mathbf{0}$ resulta na matriz nula $\mathbf{0}$:

$$\mathbf{A0} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{0A} = \mathbf{0}$$

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tópicos a serem vistos

- Posteriormente, veremos que o vetor **1** é usado para obter o vetor de médias amostrais $\bar{\mathbf{X}}$ e a matriz de covariâncias amostrais **S**
- O vetor de médias amostrais é dado por

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{X}_{i.} = \frac{1}{n}\mathbf{X}^T\mathbf{1}$$

Tópicos a serem vistos

Exemplo: Seja a matriz de dados $\mathbf{X}$ que contém 4 observações medidas em 3 variáveis:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 9 \\ 4 & 6 & 11 \\ 4 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 7 \end{bmatrix}_{4\times 3}.$$

Vamos obter o vetor de médias amostrais usando a fórmula vista:

Tópicos a serem vistos

Exemplo: Seja a matriz de dados **X** que contém 4 observações medidas em 3 variáveis:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 9 \\ 4 & 6 & 11 \\ 4 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 7 \end{bmatrix}_{4\times 3} .$$

Vamos obter o vetor de médias amostrais usando a fórmula vista:

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 2 & 5 \\ 9 & 11 & 5 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{4\times 1} =$$

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 7+4+4+5 \\ 3+6+2+5 \\ 9+11+5+7 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

Traço

- Para uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ de dimensão $n \times n$, o traço é a soma dos elementos da diagonal principal

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Transposta

- Seja a matriz $\mathbf{A}$ de dimensão $n \times m$, representamos sua transposta por $\mathbf{A}^T$ ou $\mathbf{A}'$ e ela tem dimensão $m \times n$
- O elemento a_{ij} em $\mathbf{A}$ será o elemento a_{ji} em $\mathbf{A}^T$
- Propriedades:
  - Para $\mathbf{A}$ quadrada $n \times n$, $tr(\mathbf{A}^T) = tr(\mathbf{A})$
  - Para $\mathbf{A}$ simétrica, $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$
  - Para $\mathbf{A}$ diagonal, $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$
  - $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ e $\mathbf{A}^T + \mathbf{A}$ são simétricas:

Transposta

- Seja a matriz $\mathbf{A}$ de dimensão $n \times m$, representamos sua transposta por $\mathbf{A}^T$ ou $\mathbf{A}'$ e ela tem dimensão $m \times n$
- O elemento a_{ij} em $\mathbf{A}$ será o elemento a_{ji} em $\mathbf{A}^T$
- Propriedades:
  - Para $\mathbf{A}$ quadrada $n \times n$, $tr(\mathbf{A}^T) = tr(\mathbf{A})$
  - Para $\mathbf{A}$ simétrica, $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$
  - Para $\mathbf{A}$ diagonal, $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$
  - $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ e $\mathbf{A}^T + \mathbf{A}$ são simétricas:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 10 \end{bmatrix} . \mathbf{A} + \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 8 & 12 & 16 \\ 12 & 16 & 20 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T + \mathbf{A}.$$

Determinante

- Para uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ $n \times n$ há dois métodos muito utilizados para obter o determinante de $\mathbf{A}$:
  1 - método direto: é o produto da diagonal principal menos o produto dos outros elementos.
  Ex.: matriz 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= 2 \cdot (-1) - (3 \cdot 1) \\ &= -2 - 3 \\ |\mathbf{A}| &= -5 \end{aligned}$$

Determinante

Ex.: matriz 3×3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 4 & -1 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$|\mathbf{A}| = 4 \cdot 5 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 \cdot 0 - [1 \cdot 5 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 \cdot 0]$$

$$|\mathbf{A}| = 0 + 6 + 0 - (-10 + 0 - 0)$$

$$|\mathbf{A}| = 16.$$

Determinante

2 - fórmula (pode ser utilizada para matrizes quadradas de quaisquer dimensões)

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |\mathbf{A}_{ij}|,$$

em que $\mathbf{A}_{ij}$ é denominado menor e é a matriz quadrada $(n-1) \times (n-1)$ obtida com a eliminação da i-ésima linha e j-ésima coluna de $\mathbf{A}$

Determinante

Ex.: matriz 3×3 (usando a fórmula):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Temos que fixar uma linha ou coluna. Vamos escolher a linha 1 ($i = 1$). Assim, variamos o valor da coluna ($j = 1, 2, 3$):

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \text{i=1,j=1} & \text{i=1,j=2} & \text{i=1,j=3} \end{array} \end{array}.$$

Determinante

Ex.: Continuação

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{A}| &= (-1)^{1+1} a_{11} |\mathbf{A}_{11}| + (-1)^{1+2} a_{12} |\mathbf{A}_{12}| + (-1)^{1+3} a_{13} |\mathbf{A}_{13}| \\
&= 1 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 4 \cdot 0 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 10 = 16.
\end{aligned}
$$

Propriedades do determinante

1. $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$
2. $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$
3. $|c\mathbf{A}| = c^n|\mathbf{A}|$
4. matriz ortogonal: $|\mathbf{A}| = \pm 1$
5. se duas linhas (ou colunas) de $\mathbf{A}$ são iguais, $|\mathbf{A}| = 0$

Propriedades do determinante - exemplos

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 15 & 11 \\ 20 & 24 \end{bmatrix},$

$$|\mathbf{AB}| = 14 \cdot 24 - 20 \cdot 11 = 140.$$

$$|\mathbf{A}| = 10 \ , \ |\mathbf{B}| = 14 \ , \ |\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| = 10 \cdot 14 = 140.$$

3. $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{E} = 3\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}, |\mathbf{E}| = 9 \cdot 12 - 3 \cdot 6 = 90.$

$$|\mathbf{D}| = 12 - 2 = 10 \ , \ |\mathbf{E}| = |3\mathbf{D}| = 3^2|\mathbf{D}| = 9 \cdot 10 = 90.$$