Análise multivariada

Patrícia de Siqueira Ramos

UNIFAL-MG, *campus* Varginha

11 de Setembro de 2018

Autovalores e autovetores

Dada uma matriz $\mathbf{A}$ $(p \times p)$, podemos obter um escalar λ e um vetor $\mathbf{v}$ $(p \times 1)$ de modo que

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \tag{1}$$

seja satisfeita?

Autovalores e autovetores

Dada uma matriz $\mathbf{A}$ $(p \times p)$, podemos obter um escalar λ e um vetor $\mathbf{v}$ $(p \times 1)$ de modo que

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \tag{1}$$

seja satisfeita?

Se for possível,

- λ é um autovalor (raiz característica) da matriz $\mathbf{A}$ e
- $\mathbf{v}$ é um autovetor (vetor característico) associado a λ

Autovalores e autovetores

Reescrevendo a equação (1):

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}, \tag{2}$$

Autovalores e autovetores

Reescrevendo a equação (1):

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}, \tag{2}$$

o que representa um sistema de p equações homogêneas.

Autovalores e autovetores

Reescrevendo a equação (1):

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}, \tag{2}$$

o que representa um sistema de p equações homogêneas.

Como queremos uma solução não trivial ($\neq 0$), a matriz de coeficientes $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ deve ser singular:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0, \tag{3}$$

que é a equação característica de $\mathbf{A}$.

Autovalores e autovetores

Assim, haverá p raízes $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p)$ e cada uma será um autovalor.

Autovalores e autovetores

Assim, haverá p raízes $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p)$ e cada uma será um autovalor.

- $\text{Posto}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) < p$
- Substituir cada λ_i em $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$ produzirá um $\mathbf{v}$ correspondente
- $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ dará um número infinito de soluções que correspondem a λ_i
  - Normalizaremos e selecionaremos um elemento como o autovetor correspondente a λ_i impondo uma restrição
  - Esse vetor será $\mathbf{e}_i$

Teorema da decomposição espectral

Para uma matriz simétrica $\mathbf{A}$ $(p \times p)$ existe uma matriz ortogonal $\mathbf{P}$ $(p \times p)$ com colunas $\mathbf{e}_i$ tal que

$$\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}, \qquad \mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda},$$

$$\mathbf{P}\mathbf{P}^T = \mathbf{I} = \sum_i \mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T \qquad \mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^T = \sum_i \lambda_i \mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T,$$

Teorema da decomposição espectral

Para uma matriz simétrica $\mathbf{A}$ $(p \times p)$ existe uma matriz ortogonal $\mathbf{P}$ $(p \times p)$ com colunas $\mathbf{e}_i$ tal que

$$\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \boldsymbol{\Lambda}, \qquad \mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda},$$

$$\mathbf{P}\mathbf{P}^T = \mathbf{I} = \sum_i \mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T \qquad \mathbf{A} = \mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}^T = \sum_i \lambda_i \mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T,$$

em que $\boldsymbol{\Lambda}$ é matriz diagonal com $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_p$:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_p \end{bmatrix}.$$

Teorema da decomposição espectral

Exercício: Seja

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Obter os autovalores e autovetores resolvendo a equação característica

Teorema da decomposição espectral

Se posto($\mathbf{A}$) $= r \leq p$, há r elementos não nulos na diagonal de $\mathbf{\Lambda}$

- Uma matriz simétrica com todos $\lambda_i > 0$: POSITIVA DEFINIDA (P.D.)
- Se alguns $\lambda_i > 0$ e pelo menos um $\lambda_i = 0$: POSITIVA SEMI DEFINIDA (P.S.D.)
- A classe de matrizes P.D. e P.S.D. é NÃO NEGATIVA DEFINIDA (N.N.D.)
- Se pelo menos um $\lambda_i = 0$, $\mathbf{A}$ é singular
- Se há autovalores positivos e negativos, a matriz é chamada INDEFINIDA

Teorema da decomposição espectral

Se posto($\mathbf{A}$) $= r \leq p$, há r elementos não nulos na diagonal de $\boldsymbol{\Lambda}$

- Uma matriz simétrica com todos $\lambda_i > 0$: POSITIVA DEFINIDA (P.D.)
- Se alguns $\lambda_i > 0$ e pelo menos um $\lambda_i = 0$: POSITIVA SEMI DEFINIDA (P.S.D.)
- A classe de matrizes P.D. e P.S.D. é NÃO NEGATIVA DEFINIDA (N.N.D.)
- Se pelo menos um $\lambda_i = 0$, $\mathbf{A}$ é singular
- Se há autovalores positivos e negativos, a matriz é chamada INDEFINIDA

Exercício: Classifique a matriz $\mathbf{A}$ *do exemplo*

Teorema da decomposição espectral

Resultados para $\mathbf{A}$ $(p \times p)$ simétrica:

1. $\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum^{p} \lambda_i$
2. $|\mathbf{A}| = \prod^{p} \lambda_i$
3. $\text{posto}(\mathbf{A}) =$ número de λ_i's $\neq 0$
4. autovalores de $\mathbf{A}^{-1}$ são $\dfrac{1}{\lambda_i}$ se $\text{posto}(\mathbf{A}) = p$
5. $\mathbf{A}$ é idempotente sse todos $\lambda_i = 0$ ou 1
6. $\mathbf{A}$ é singular sse um $\lambda_i = 0$
7. se $\mathbf{A}$ é ortogonal, $\lambda_i = \pm 1$

Teorema da decomposição espectral

Na análise multivariada, esse teorema é útil para relacionar a matriz de covariâncias com seus autovalores e autovetores

Seja $\mathbf{\Sigma}$ $(p \times p)$ uma matriz de covariâncias, então há uma matriz ortogonal $\mathbf{P}$ $(p \times p)$ tal que

$$\mathbf{P}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^T = \mathbf{\Sigma},$$

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_p$.

Teorema da decomposição espectral

Na análise multivariada, esse teorema é útil para relacionar a matriz de covariâncias com seus autovalores e autovetores

Seja $\mathbf{\Sigma}$ $(p \times p)$ uma matriz de covariâncias, então há uma matriz ortogonal $\mathbf{P}$ $(p \times p)$ tal que

$$\mathbf{P}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^T = \mathbf{\Sigma},$$

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_p$.

Dizemos que $\mathbf{\Sigma}$ é similar a $\mathbf{\Lambda}$:

- $|\mathbf{\Sigma}| = |\mathbf{\Lambda}| = \prod^{p} \lambda_i$
- $tr(\mathbf{\Sigma}) = tr(\mathbf{\Lambda}) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_p$

Teorema da decomposição espectral

A i-ésima coluna da matriz $\mathbf{P}$ é o vetor normalizado $\mathbf{e}_i$. Então a matriz $\mathbf{P}$ é

$$\mathbf{P} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \dots \quad \mathbf{e}_p]$$

Teorema da decomposição espectral

A i-ésima coluna da matriz $\mathbf{P}$ é o vetor normalizado $\mathbf{e}_i$. Então a matriz $\mathbf{P}$ é

$$\mathbf{P} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{e}_p]$$

e, pelo teorema,

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}^T = \sum^{p} \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T,$$

sendo $\mathbf{e}_i$ um vetor de comprimento 1, ou seja,

- $\mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i = 1$
- $\mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_j = 0 \quad \forall i \neq j$ (vetores ortogonais)

Assim, $\mathbf{e}_i$ forma um conjunto de vetores ortonormais

Teorema da decomposição espectral

Exercício: Realize todas as verificações para a matriz do exercício

Observações:

- Resolver a equação característica não é a melhor estratégia para obter $\mathbf{\Lambda}$ e $\mathbf{P}$
- Há outros métodos mais eficientes: método da potência, da deflação, de Jacobi, Givens, LU e QR, entre outros