

Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG - *campus* Varginha  
 Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Economia  
 Disciplina: Análise multivariada - Profa. Patrícia de Siqueira Ramos  
 Lista 1 - Álgebra matricial

Instruções:

- Resolva a lista manualmente (a parte escrita será entregue durante a aula), exceto os exercícios onde há indicação “computacional” (usar o **Python**).
- Resolva também no **Python** as questões 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12 e 13. O notebook deverá ser enviado no formato **.html** para o meu e-mail até 23:59h da mesma data. Todas as respostas devem estar em apenas um notebook, que deverá se chamar “lista1\_nomealuno”, por exemplo, “lista1\_joao”. Não é necessário imprimir a parte do **Python** e nem passar para outro editor de texto.

1. Obtenha  $\mathbf{E}\mathbf{v}$  em cada caso e forneça a dimensão de cada matriz/vetor obtido:

a)  $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$     b)  $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$     c)  $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

2 Para  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ , calcule:

a)  $\mathbf{v}\mathbf{z}$     b)  $\mathbf{z}\mathbf{v}$     c)  $\mathbf{v}^T\mathbf{z}^T$     d)  $\mathbf{z}^T\mathbf{v}^T$

Qual a relação entre os resultados de a) e d)? Qual propriedade é verificada?

3 Em cada caso indique se é possível efetuar a multiplicação (se não for, indique o que deveria ser feito para tornar possível o produto) e qual a dimensão do produto obtido:

- a) Um vetor coluna  $\mathbf{a}$  ( $n \times 1$ ) pode pré multiplicar uma matriz  $\mathbf{B}$  ( $n \times m$ )?  
 b) Um vetor coluna  $\mathbf{a}$  ( $n \times 1$ ) pode pós multiplicar uma matriz  $\mathbf{B}$  ( $m \times n$ )?  
 c) O produto de  $\mathbf{a}$  ( $n \times 1$ ) por ele mesmo?  
 d) O produto de  $\mathbf{B}$  ( $n \times m$ ) por ela mesma?

4 Informe se as operações a seguir são definidas (se sim, forneça o resultado e a dimensão):

a)  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ .  $\mathbf{CA}=?$     b)  $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ .  $\mathbf{D} + \mathbf{A}=?$   
 c)  $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ .  $\mathbf{ED}=?$     d)  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ .  $\mathbf{CA}=?$

5 Dados  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ,

I. Calcule: a)  $\mathbf{AI}$     b)  $\mathbf{IA}$     c)  $\mathbf{Ix}$     d)  $\mathbf{x}^T\mathbf{I}$ .

Indique a dimensão da matriz identidade usada em cada caso.

II. Calcule: a)  $\mathbf{Ab}$     b)  $\mathbf{A}\mathbf{Ib}$     c)  $\mathbf{x}^T\mathbf{IA}$     d)  $\mathbf{x}^T\mathbf{A}$ .

A inserção de  $\mathbf{I}$  em b) afetou o resultado em a)? A exclusão de  $\mathbf{I}$  em d) afetou o resultado em c)?

III. Qual é a dimensão da matriz nula resultante de:

- a) Pré-multiplicação de  $\mathbf{A}$  por uma matriz nula ( $5 \times 2$ ).    b) Pós-multiplicação de  $\mathbf{A}$  por uma matriz

nula ( $3 \times 6$ ).

6 Qual é o resultado de  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ ?

7 Calcule os determinantes das seguintes matrizes (utilize os dois métodos vistos):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 8 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

O que podemos afirmar sobre a existência das inversas das matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ ?

8 Em cada letra, diga qual das duas matrizes é invertível, calcule a inversa quando possível e informe o posto de todas as matrizes.

a)  $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$   $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}$       b)  $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$   $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

9 Sejam  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$   $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ .

a) Determine as inversas de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , se existirem.

b) Determine  $\mathbf{AB}$  e sua inversa  $(\mathbf{AB})^{-1}$ .

c) Verifique que  $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ .

10 Seja  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ .

a) Obtenha os autovalores e autovetores associados a  $\mathbf{A}$ .

b) Obtenha a matriz  $\mathbf{P}$ .

c) Verifique se  $\mathbf{P}$  é ortogonal.

d) Construa  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_i)$  e verifique se as seguintes igualdades valem:  $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^T$  e  $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}$ .

e) Qual o valor de  $\text{posto}(\mathbf{A})$ ? Com base nesse valor, podemos afirmar que  $\mathbf{A}$  é singular?

f) Classifique a matriz  $\mathbf{A}$  (P.D., P.S.D., N.D., N.S.D.)

g) Verifique que  $|\mathbf{A}| = |\mathbf{\Lambda}|$  e  $\text{tr}(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{\Lambda})$ .

11  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4,6 & 7,2 \\ 7,2 & 0,4 \end{bmatrix}$ .

a) Calcule  $|\mathbf{A}|$ .

b) É possível afirmar, com base no resultado de a), se  $\mathbf{A}$  é positiva definida? Por quê?

c) Obtenha a decomposição espectral de  $\mathbf{A}$ .

d) Calcule  $\mathbf{A}^{-1}$ .

e) (computacional) Obtenha os autovalores de  $\mathbf{A}^{-1}$ . Qual sua relação com os autovalores de  $\mathbf{A}$ ?

f) Como você classifica a matriz  $\mathbf{A}$ ?

12 Considere a seguinte matriz de dados

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 38 \\ 12 & 4 & 34 \\ 20 & 10 & 74 \\ 10 & 1 & 40 \\ 8 & 7 & 64 \end{bmatrix}.$$

a) Quais os valores de  $n$  e  $p$ ?

b) Obtenha o vetor de médias amostral por meio de  $\bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{n} \mathbf{X}^T \mathbf{1}$ .

c) Obtenha a matriz de covariâncias amostral por meio de  $\mathbf{S} = \frac{1}{n-1} \left( \mathbf{X}^T \mathbf{X} - \frac{1}{n} \mathbf{X}^T \mathbf{1} \mathbf{1}^T \mathbf{X} \right)$  (confira com o resultado obtido usando o `Python`).

d) (computacional) Como a matriz  $\mathbf{S}$  pode ser classificada?

13 (computacional) Obtenha as inversas generalizadas das matrizes singulares das questões 7 e 8.