

Análise multivariada

Patrícia de Siqueira Ramos

UNIFAL-MG, *campus* Varginha

3 de Abril de 2018

Autovalores e autovetores

Dada uma matriz \mathbf{A} ($p \times p$), podemos obter um escalar λ e um vetor \mathbf{v} ($p \times 1$) de modo que

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad (1)$$

seja satisfeita?

Autovalores e autovetores

Dada uma matriz \mathbf{A} ($p \times p$), podemos obter um escalar λ e um vetor \mathbf{v} ($p \times 1$) de modo que

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad (1)$$

seja satisfeita?

Se for possível,

- λ é um autovalor (raiz característica) da matriz \mathbf{A} e
- \mathbf{v} é um autovetor (vetor característico) associado a λ

Autovalores e autovetores

Reescrevendo a equação (1):

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

Autovalores e autovetores

Reescrevendo a equação (1):

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

o que representa um sistema de p equações homogêneas.

Autovalores e autovetores

Reescrevendo a equação (1):

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

o que representa um sistema de p equações homogêneas.

Como queremos uma solução não trivial ($\neq 0$), a matriz de coeficientes $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ deve ser singular:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0, \quad (3)$$

que é a equação característica de \mathbf{A} .

Autovalores e autovetores

Assim, haverá p raízes $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ e cada uma será um autovalor.

Autovalores e autovetores

Assim, haverá p raízes $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ e cada uma será um autovalor.

- $\text{Posto}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) < p$
- Substituir cada λ_i em $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ produzirá um \mathbf{v} correspondente
- $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ dará um número infinito de soluções que correspondem a λ_i
 - Normalizaremos e selecionaremos um elemento como o autovetor correspondente a λ_i impondo uma restrição
 - Esse vetor será \mathbf{e}_i

Teorema da decomposição espectral

Para uma matriz simétrica \mathbf{A} ($p \times p$) existe uma matriz ortogonal \mathbf{P} ($p \times p$) com colunas \mathbf{e}_i tal que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} &= \mathbf{\Lambda}, & \mathbf{A} \mathbf{P} &= \mathbf{P} \mathbf{\Lambda}, \\ \mathbf{P} \mathbf{P}^T &= \mathbf{I} = \sum_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T & \mathbf{A} &= \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^T = \sum_i \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T,\end{aligned}$$

Teorema da decomposição espectral

Para uma matriz simétrica \mathbf{A} ($p \times p$) existe uma matriz ortogonal \mathbf{P} ($p \times p$) com colunas \mathbf{e}_i tal que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} &= \mathbf{\Lambda}, & \mathbf{A} \mathbf{P} &= \mathbf{P} \mathbf{\Lambda}, \\ \mathbf{P} \mathbf{P}^T &= \mathbf{I} = \sum_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T & \mathbf{A} &= \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^T = \sum_i \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T,\end{aligned}$$

em que $\mathbf{\Lambda}$ é matriz diagonal com $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_p \end{bmatrix}.$$

Teorema da decomposição espectral

Exercício: Seja

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Obter os autovalores e autovetores resolvendo a equação característica

Teorema da decomposição espectral

Se $\text{posto}(\mathbf{A}) = r \leq p$, há r elementos não nulos na diagonal de $\mathbf{\Lambda}$

- Uma matriz simétrica com todos $\lambda_i > 0$: POSITIVA DEFINIDA (P.D.)
- Se alguns $\lambda_i > 0$ e pelo menos um $\lambda_i = 0$: POSITIVA SEMI DEFINIDA (P.S.D.)
- A classe de matrizes P.D. e P.S.D. é NÃO NEGATIVA DEFINIDA (N.N.D.)
- Se pelo menos um $\lambda_i = 0$, \mathbf{A} é singular
- Se há autovalores positivos e negativos, a matriz é chamada INDEFINIDA

Teorema da decomposição espectral

Se $\text{posto}(\mathbf{A}) = r \leq p$, há r elementos não nulos na diagonal de $\mathbf{\Lambda}$

- Uma matriz simétrica com todos $\lambda_i > 0$: POSITIVA DEFINIDA (P.D.)
- Se alguns $\lambda_i > 0$ e pelo menos um $\lambda_i = 0$: POSITIVA SEMI DEFINIDA (P.S.D.)
- A classe de matrizes P.D. e P.S.D. é NÃO NEGATIVA DEFINIDA (N.N.D.)
- Se pelo menos um $\lambda_i = 0$, \mathbf{A} é singular
- Se há autovalores positivos e negativos, a matriz é chamada INDEFINIDA

Exercício: Classifique a matriz \mathbf{A} do exemplo

Teorema da decomposição espectral

Resultados para \mathbf{A} ($p \times p$) simétrica:

- ① $\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum^p \lambda_i$
- ② $|\mathbf{A}| = \prod^p \lambda_i$
- ③ $\text{posto}(\mathbf{A}) = \text{número de } \lambda_i\text{'s } \neq 0$
- ④ autovalores de \mathbf{A}^{-1} são $\frac{1}{\lambda_i}$ se $\text{posto}(\mathbf{A}) = p$
- ⑤ \mathbf{A} é idempotente sse todos $\lambda_i = 0$ ou 1
- ⑥ \mathbf{A} é singular sse um $\lambda_i = 0$
- ⑦ se \mathbf{A} é ortogonal, $\lambda_i = \pm 1$

Teorema da decomposição espectral

Na análise multivariada, esse teorema é útil para relacionar a matriz de covariâncias com seus autovalores e autovetores

Seja $\mathbf{\Sigma}$ ($p \times p$) uma matriz de covariâncias, então há uma matriz ortogonal \mathbf{P} ($p \times p$) tal que

$$\mathbf{P}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{P} = \mathbf{\Lambda} \quad \text{e} \quad \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^T = \mathbf{\Sigma},$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p.$$

Teorema da decomposição espectral

Na análise multivariada, esse teorema é útil para relacionar a matriz de covariâncias com seus autovalores e autovetores

Seja $\mathbf{\Sigma}$ ($p \times p$) uma matriz de covariâncias, então há uma matriz ortogonal \mathbf{P} ($p \times p$) tal que

$$\mathbf{P}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{P} = \mathbf{\Lambda} \quad \text{e} \quad \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^T = \mathbf{\Sigma},$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p.$$

Dizemos que $\mathbf{\Sigma}$ é similar a $\mathbf{\Lambda}$:

- $|\mathbf{\Sigma}| = |\mathbf{\Lambda}| = \prod_{i=1}^p \lambda_i$
- $tr(\mathbf{\Sigma}) = tr(\mathbf{\Lambda}) = \lambda_1 + \dots + \lambda_p$

Teorema da decomposição espectral

A i -ésima coluna da matriz \mathbf{P} é o vetor normalizado \mathbf{e}_i . Então a matriz \mathbf{P} é

$$\mathbf{P} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \dots \quad \mathbf{e}_p]$$

Teorema da decomposição espectral

A i -ésima coluna da matriz \mathbf{P} é o vetor normalizado \mathbf{e}_i . Então a matriz \mathbf{P} é

$$\mathbf{P} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \dots \quad \mathbf{e}_p]$$

e, pelo teorema,

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^T = \sum_{i=1}^p \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T,$$

sendo \mathbf{e}_i um vetor de comprimento 1, ou seja,

- $\mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i = 1$
- $\mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_j = 0 \quad \forall i \neq j$ (vetores ortogonais)

Assim, \mathbf{e}_i forma um conjunto de vetores ortonormais

Teorema da decomposição espectral

Exercício: Realize todas as verificações para a matriz do exercício

Observações:

- Resolver a equação característica não é a melhor estratégia para obter $\mathbf{\Lambda}$ e \mathbf{P}
- Há outros métodos mais eficientes: método da potência, da deflação, de Jacobi, Givens, LU e QR, entre outros