Análise multivariada

Patrícia de Siqueira Ramos

UNIFAL-MG, *campus* Varginha

6 de Setembro de 2018

Matriz inversa

- Já discutimos adição, subtração e multiplicação de matrizes
- A divisão, da forma como conhecemos em aritmética escalar, não é definida para álgebra de matrizes
- Em álgebra, $\frac{a}{b} = \frac{1}{b}a = b^{-1}a$ (assumindo $b \neq 0$)
- A operação análoga é a inversão de matrizes
- Uma matriz deve ser quadrada para ter inversa, mas nem todas as matrizes quadradas possuem inversa
- Assim, denominamos
  - matriz não singular: admite inversa
  - matriz singular: não admite inversa

Matriz inversa

- Para matrizes quadradas,

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$$

(pré ou pós multiplicar a matriz $\mathbf{A}$ *pela sua inversa* $\mathbf{A}^{-1}$ *resulta na matriz identidade* $\mathbf{I}$*)*

Propriedades da inversa

1. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
2. $|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1} = \dfrac{1}{|\mathbf{A}|}$
3. $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$

Propriedades da inversa

1. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
2. $|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1} = \dfrac{1}{|\mathbf{A}|}$
3. $(\mathbf{A}^{T})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{T}$

- Há varios métodos para obter a inversa de uma matriz, veremos dois:
  a) pela eliminação de Gauss Jordan (pode se tornar difícil dependendo da matriz a ser invertida)
  b) pela definição de inversa (mais fácil de ser aplicado, pois vale para qualquer dimensão de matriz, mas pode ficar mais complicado se a dimensão da matriz for grande)

Métodos para se obter a inversa

a) Eliminação de Gauss Jordan: o objetivo é chegar à matriz identidade $\mathbf{I}$ do lado esquerdo (forma escalonada reduzida por linha)

Ex.: Seja a matriz $\mathbf{A}$ de dimensão 3×3. Obtenha sua inversa usando o método da eliminação de Gauss Jordan.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Eliminação de Gauss Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

linha3' = linha3 - linha1 inverter linhas 2 e 3

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right] =$$

linha3' = linha3 - 2*linha2 linha1' = linha1 - linha3

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

$\mathbf{I}$ $\mathbf{A}^{-1}$

a) Eliminação de Gauss Jordan

A inversa de **A** pelo método da eliminação de Gauss Jordan é

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Métodos para se obter a inversa

b) Definição:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} adj(\mathbf{A}),$$

em que $|\mathbf{A}|$ é o determinante de $\mathbf{A}$ e $adj(\mathbf{A})$ é a matriz adjunta, que é a transposta da matriz de cofatores.

b) Definição

Ex.: Seja a matriz $\mathbf{A}$ de dimensão 3×3. Obtenha sua inversa usando a definição.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Definição

Ex.: Seja a matriz $\mathbf{A}$ de dimensão 3×3. Obtenha sua inversa usando a definição.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

O determinante de $\mathbf{A}$ (usando a fórmula e fixando a primeira linha) é

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-8) + 3 \cdot (-7) = -3 + 16 - 21 = -8.$$

b) Definição

Em seguida, é preciso obter a matriz dos menores complementares, ou seja, a matriz com os determinantes das matrizes obtidas retirando-se a linha e a coluna correspondentes a cada elemento da matriz (ver Khan Academy):

$$\begin{bmatrix} -3 & -8 & -7 \\ -4 & -8 & -4 \\ -7 & -8 & -3 \end{bmatrix}.$$

A matriz de cofatores é obtida multiplicando-se a matriz dos menores complementares pelos sinais, que são dados por:

$$(-1)^{i+j},$$

em que i corresponde à linha e j à coluna. Assim, para uma matriz 3×3,

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}.$$

b) Definição

A matriz de cofatores será, então:

$$\begin{bmatrix} -3 & 8 & -7 \\ 4 & -8 & 4 \\ -7 & 8 & -3 \end{bmatrix}.$$

A inversa será dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= \frac{1}{|\mathbf{A}|} adj(\mathbf{A}) = \\ &= \frac{1}{-8} \begin{bmatrix} -3 & 4 & -7 \\ 8 & -8 & 8 \\ -7 & 4 & -3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3/8 & -4/8 & 7/8 \\ -1 & 1 & -1 \\ 7/8 & -4/8 & 3/8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matrizes singulares

- Quando a inversa de $\mathbf{A}$ não é definida, ela é chamada matriz singular
- Isso ocorre quando o $|\mathbf{A}| = 0$, que é quando uma ou mais linhas (ou colunas) da matriz são redundantes
- Assim, nem toda a informação da matriz é única

Matrizes singulares

- Quando a inversa de $\mathbf{A}$ não é definida, ela é chamada matriz singular
- Isso ocorre quando o $|\mathbf{A}| = 0$, que é quando uma ou mais linhas (ou colunas) da matriz são redundantes
- Assim, nem toda a informação da matriz é única

Ex.:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}_{2.} = \mathbf{a}_{3.}$$

Matrizes singulares

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1,5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_{3\cdot} = 0,5\mathbf{b}_{2\cdot}$$

Matrizes singulares

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1,5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_{3.} = 0,5\mathbf{b}_{2.}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_{3.} = \mathbf{c}_{1.} + \mathbf{c}_{2.}$$

Matrizes singulares

Então, uma matriz $\mathbf{A}$ *é singular quando uma ou mais linhas (ou colunas) são combinações lineares de outras linhas (ou colunas), o que leva a:*

- $|\mathbf{A}| = 0$
- $\mathbf{A}^{-1}$ *não ser definida*

Posto de uma matriz (*rank*)

O posto avalia a quantidade de informação não redundante de uma matriz **A**, ou seja, o número de vetores linearmente independentes de **A**

- O posto é único, seja focando em linhas ou colunas
- O posto nunca é maior do que o menor valor da dimensão
  - matriz $m \times n$, $m < n$, o posto é $\leq m$ (se o posto for igual a m, a matriz é posto linha completo)
  - matriz $m \times n$, $m > n$, o posto é $\leq n$ (se o posto for igual a n, a matriz é posto coluna completo)
- Sempre que posto(**A**) ($n \times n$) é menor do que n, a matriz é singular e a inversa não existe

Matrizes inversas e solução de sistemas de equações lineares

Um sistema como, por exemplo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = y_2 \end{cases}$$

pode ser escrito em notação matricial:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y}.$$

Matrizes inversas e solução de sistemas de equações lineares

- Se existir $\mathbf{A}^{-1}$, pré-multiplicar

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}, \end{aligned}$$

  em que ambos os lados da igualdade serão vetores coluna.

- Se $\mathbf{A}^{-1}$ existir, ela é única e $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$ é o vetor solução.

Matrizes inversas e solução de sistemas de equações lineares

- Um sistema homogêneo

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

tem solução não trivial ($\neq \mathbf{0}$) sse $\mathbf{A}$ for singular.

Matrizes inversas e solução de sistemas de equações lineares

- Um sistema homogêneo

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

  tem solução não trivial ($\neq \mathbf{0}$) sse $\mathbf{A}$ for singular.
- Todo sistema tem, pelo menos, a solução trivial e ela será a única sse $\mathbf{A}$ tiver inversa.
- Supor $\mathbf{A}$ não singular,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{0} && \text{(pré-multiplicar ambos os lados pela inversa)} \\ \mathbf{I}\mathbf{x} &= \mathbf{0} && \text{(usar definição de inversa)} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{0} && . \end{aligned}$$

Matrizes inversas e solução de sistemas de equações lineares

Exemplo: Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Obter a solução do sistema.