Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG - *campus* Varginha
Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Economia
Disciplina: Análise multivariada - Profa. Patrícia de Siqueira Ramos
Lista 1 - Álgebra matricial

Instruções:

- Resolva a lista manualmente (a parte escrita será entregue durante a aula), exceto os exercícios onde há indicação "computacional" (usar o `Python`).
- Resolva também no `Python` as questões 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12 e 13.

1. Obtenha $\boldsymbol{Ev}$ em cada caso e forneça a dimensão de cada matriz/vetor obtido:

a) $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ b) $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ c) $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

2 Para $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -2 \end{bmatrix}$, calcule:

a) $\boldsymbol{vz}$ b) $\boldsymbol{zv}$ c)$\boldsymbol{v^T z^T}$ d) $\boldsymbol{z^T v^T}$
Qual a relação entre os resultados de a) e d)? Qual propriedade é verificada?

3 Em cada caso indique se é possível efetuar a multiplicação (se não for, indique o que deveria ser feito para tornar possível o produto) e qual a dimensão do produto obtido:
a) Um vetor coluna $\boldsymbol{a}$ $(n \times 1)$ pode pré multiplicar uma matriz $\boldsymbol{B}$ $(n \times m)$?
b) Um vetor coluna $\boldsymbol{a}$ $(n \times 1)$ pode pós multiplicar uma matriz $\boldsymbol{B}$ $(m \times n)$?
c) O produto de $\boldsymbol{a}$ $(n \times 1)$ por ele mesmo?
d) O produto de $\boldsymbol{B}$ $(n \times m)$ por ela mesma?

4 Informe se as operações a seguir são definidas (se sim, forneça o resultado e a dimensão):

a) $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. $\boldsymbol{CA}$ =? b) $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. $\boldsymbol{D} + \boldsymbol{A}$ =?

c) $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. $\boldsymbol{ED}$ =? d) $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. $\boldsymbol{CA}$ =?

5 Dados $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$,

I. Calcule: a) $\boldsymbol{AI}$ b) $\boldsymbol{IA}$ c) $\boldsymbol{Ix}$ d) $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{I}$.
Indique a dimensão da matriz identidade usada em cada caso.

II. Calcule: a) $\boldsymbol{Ab}$ b) $\boldsymbol{AIb}$ c) $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{IA}$ d) $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}$.
A inserção de $\boldsymbol{I}$ em b) afetou o resultado em a)? A exclusão de $\boldsymbol{I}$ em d) afetou o resultado em c)?

III. Qual é a dimensão da matriz nula resultante de:
a) Pré-multiplicação de $\boldsymbol{A}$ por uma matriz nula (5×2). b) Pós-multiplicação de $\boldsymbol{A}$ por uma matriz nula (3×6).

6 Qual é o resultado de $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$?

7 Calcule os determinantes das seguintes matrizes (utilize os dois métodos vistos):

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 8 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

O que podemos afirmar sobre a existência das inversas das matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$?

8 Em cada letra, diga qual das duas matrizes é invertível, calcule a inversa quando possível e informe o posto de todas as matrizes.

a) $\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}$ b) $\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

9 Sejam $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

a) Determine as inversas de $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, se existirem.
b) Determine $\boldsymbol{AB}$ e sua inversa $(\boldsymbol{AB})^{-1}$.
c) Verifique que $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

10 Seja $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

a) Obtenha os autovalores e autovetores associados a $\boldsymbol{A}$.
b) Obtenha a matriz $\boldsymbol{P}$.
c) Verifique se $\boldsymbol{P}$ é ortogonal.
d) Construa $\boldsymbol{\Lambda} = diag(\lambda_i)$ e verifique se as seguintes igualdades valem: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda P}^T$ e $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{AP}$.
e) Qual o valor de posto($\boldsymbol{A}$)? Com base nesse valor, podemos afirmar que $\boldsymbol{A}$ é singular?
f) Classifique a matriz $\boldsymbol{A}$ (P.D., P.S.D., N.D., N.S.D.)
g) Verifique que $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{\Lambda}|$ e $tr(\boldsymbol{A}) = tr(\boldsymbol{\Lambda})$.

11 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4,6 & 7,2 \\ 7,2 & 0,4 \end{bmatrix}$.
a) Calcule $|\boldsymbol{A}|$.
b) É possível afirmar, com base no resultado de a), se $\boldsymbol{A}$ é positiva definida? Por quê?
c) Obtenha a decomposição espectral de $\boldsymbol{A}$.
d) Calcule $\boldsymbol{A}^{-1}$.
e) (computacional) Obtenha os autovalores de $\boldsymbol{A}^{-1}$. Qual sua relação com os autovalores de $\boldsymbol{A}$?
f) Como você classifica a matriz $\boldsymbol{A}$?

12 Considere a seguinte matriz de dados

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 38 \\ 12 & 4 & 34 \\ 20 & 10 & 74 \\ 10 & 1 & 40 \\ 8 & 7 & 64 \end{bmatrix}.$$

a) Quais os valores de n e p?

b) Obtenha o vetor de médias amostral por meio de $\bar{\boldsymbol{X}} = \dfrac{1}{n}\boldsymbol{X}^T\mathbf{1}$.

c) Obtenha a matriz de covariâncias amostral por meio de $\boldsymbol{S} = \dfrac{1}{n-1}\left(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X} - \dfrac{1}{n}\boldsymbol{X}^T\mathbf{1}\mathbf{1}^T\boldsymbol{X}\right)$ (confira com o resultado obtido usando o `Python`).

d) (computacional) Como a matriz $\boldsymbol{S}$ pode ser classificada?

13 (computacional) Obtenha as inversas generalizadas das matrizes singulares das questões 7 e 8.