

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

PATRICIA TONON

*Combinação de discretizações isogeométrica  
e por elementos finitos na análise de  
interação fluido-estrutura*

SÃO CARLOS/SP  
2021



PATRICIA TONON

*Combinação de discretizações isogeométrica  
e por elementos finitos na análise de  
interação fluido-estrutura*

Texto apresentado para o exame de qualificação ao doutorado no Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências, Programa: Engenharia Civil (Estruturas).

Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo André Kuche Sanches

SÃO CARLOS/SP  
2021

**RESUMO**

**TONON, P. Combinação de discretizações isogeométrica e por elementos finitos na análise de interação fluido-estrutura.** 2021. 88 p. Qualificação da Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

O presente trabalho tem como principal intuito a construção de uma ferramenta computacional robusta para análise de problemas de interação fluido-estrutura onde o domínio fluido é discretizado combinando-se aproximações baseadas em análise isogeométrica e método dos elementos finitos tradicional. São considerados escoamentos incompressíveis, sendo que o domínio fluido possui uma discretização global, em descrição Euleriana, à qual é sobreposta uma discretização local, mais refinada. As discretizações local e global são diferentes, sendo uma isogeométrica e outra por elementos finitos. Os dois modelos são acoplados por uma técnica de partição de domínio com sobreposição de malhas, a qual baseia-se na modificação das funções de forma de ambas as discretizações em uma região de sobreposição e posterior união dos espaços de funções local e global de modo a formar um espaço enriquecido que garanta a partição da unidade. A malha local é adaptada à estrutura e deforma-se dinamicamente para acomodar a movimentação da estrutura, enquanto a malha global permanece fixa. Com isso o método proposto compartilha vantagens dos métodos de rastreamento de interface (malhas móveis) e de captura de interface (contornos imersos), visto que o fluido próximo à estrutura é adequadamente discretizado garantindo a captura de efeitos localizados, ao mesmo tempo em que a malha local, por ser menor, tolera maiores deformações, e em caso de necessidade de remalhamento, apenas essa malha precisa ser reconstruída. Adota-se uma formulação estabilizada para o escoamento incompressível, permitindo aproximação de mesma ordem para velocidades e pressão, e a integração temporal é feita através do método  $\alpha$ -generalizado. A estrutura é modelada empregando-se uma abordagem do método dos elementos finitos baseada em posições aplicada a elementos de casca com grandes deslocamentos. O acoplamento fluido-estrutura é particionado do tipo bloco-iterativo.

**Palavras-chave:** *Interação Fluido-Estrutura. Análise Isogeométrica. Método dos Elementos Finitos. Técnica de sobreposição de malhas.*

# ABSTRACT

TONON, P. **Combination of isogeometric and finite element discretizations for fluid-structure interaction analysis.** 2021. 88 p. Thesis qualification (Doctorate in Structural Engineering) – Department of Structural Engineering, São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, São Carlos, 2021.

This work aims the construction of a robust computational tool for fluid-structure interaction analysis where the fluid domain is discretized combining isogeometric and traditional finite elements approximations. The flow is considered to be incompressible and the fluid domain has a global discretization, under Eulerian description, with an overlapping of a local one more refined. Local and global discretizations are different, being one isogeometric and the other a traditional finite element discretization, coupled by a domain partitioning technique that relies on the modification of both, local and global, shape functions over and overlapping region and subsequent union of local and global spaces of functions generating an enriched space that fulfills unity partition. The local mesh is adapted to the structure and deforms dynamically to accommodate structural movements while the global one remains fixed. Therefore, the proposed method shares advantages of both, interface tracking (moving mesh) and interface capturing (immersed boundary) methods, once the fluid/structure interface is adequately discretized for local effects, at the same time that the local mesh, being smaller, tolerates larger deformations, and, in case of need for re-meshing, only the local mesh needs to be rebuilt. The incompressible flow is modeled by a stabilized formulation, allowing equal order pressure-velocity interpolation, with time integration by the  $\alpha$ -generalized method. The structure is modeled in a position-based large-displacement shell finite element formulation. The fluid-structure coupling is a block iterative type partitioned scheme.

**Keywords:** *Fluid-structure interaction. Isogeometric analysis. Finite Element Method. Overlap technique.*



# LISTA DE FIGURAS

---

---

Figura 2.1 – Volume de controle infinitesimal: Fluxo de massa . . . . .	28
Figura 2.2 – Volume de controle infinitesimal: Componentes de força na direção $y_1$ .	29
Figura 2.3 – Volume de controle infinitesimal: Fluxo de quantidade de Movimento .	30
Figura 2.4 – Domínio para o problema da dinâmica dos fluidos computacional . . . .	31
Figura 2.5 – Domínios utilizados para a descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária .	33
Figura 2.6 – Elementos Finitos: representação espacial e paramétrica . . . . .	37
Figura 2.7 – Cilindro: Geometria, condições de contorno e malha de elementos finitos.	46
Figura 2.8 – Cilindro: Coeficientes aerodinâmicos. . . . .	48
Figura 2.9 – Cilindro: Campos de velocidade . . . . .	49
Figura 2.10–Cilindro: Campos de pressão . . . . .	50
Figura 2.11–Cavidade quadrada: Geometria, condições de contorno e malha de elementos finitos . . . . .	51
Figura 2.12–Cavidade quadrada: Perfis de velocidade adimensionalizados nas direções $y_1$ e $y_2$ . . . . .	52
Figura 2.13–Cavidade quadrada: Campos de velocidade. . . . .	53
Figura 2.14–Cavidade quadrada: Campos de pressão. . . . .	54
Figura 3.1 – Domínio local e global. . . . .	56
Figura 3.2 – Função Ponderadora . . . . .	58
Figura 3.3 – Domínio Arlequin móvel . . . . .	68
Figura 3.4 – Aerofólio: Geometria . . . . .	71
Figura 3.5 – Aerofólio 2D: Malha Monomodelo (MEF) . . . . .	71
Figura 3.6 – Aerofólio: Discretização das malhas global e local . . . . .	72
Figura 3.7 – Aerofólio: Coeficiente de Arrasto . . . . .	73
Figura 3.8 – Aerofólio: Coeficiente de Sustentação . . . . .	73
Figura 3.9 – Aerofólio: Campo de velocidade . . . . .	74
Figura 3.10–Aerofólio: Campo de pressão . . . . .	74
Figura 3.11–Aerofólio Mov.: Geometria . . . . .	75
Figura 3.12–Aerofólio Mov.: Coeficiente de Arrasto . . . . .	76
Figura 3.13–Aerofólio Mov.: Coeficiente de Sustentação . . . . .	76
Figura 3.14–Aerofólio Mov.: Campos de velocidade . . . . .	77
Figura 3.15–Aerofólio Mov.: Campos de pressão . . . . .	78



---

## **LISTA DE TABELAS**

---

---



# SUMÁRIO

---

---

1	INTRODUÇÃO . . . . .	11
1.1	Apresentação do texto . . . . .	13
1.2	Estado da Arte . . . . .	14
1.2.1	<i>Dinâmica dos fluidos computacional</i> . . . . .	14
1.2.2	<i>Dinâmica de estruturas computacional considerando grandes deslocamentos</i> . . . . .	17
1.2.3	<i>Acoplamento fluido-estrutura</i> . . . . .	18
1.2.4	<i>Métodos Multiescala e Técnicas de partição de domínios</i> . . . . .	21
1.3	Objetivos . . . . .	23
1.4	Metodologia . . . . .	23
1.5	Justificativa . . . . .	25
2	DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL . . . . .	27
2.1	Equações governantes na descrição Euleriana . . . . .	28
2.1.1	<i>Equação da conservação da massa</i> . . . . .	28
2.1.2	<i>Equação da quantidade de movimento</i> . . . . .	29
2.1.3	<i>Formulação forte da mecânica dos fluidos</i> . . . . .	31
2.2	Descrição Euleriana-Lagrangiana arbitrária (ALE) . . . . .	32
2.3	Forma fraca e discretização espacial das equações governantes . . . . .	35
2.3.1	<i>Método dos elementos finitos</i> . . . . .	36
2.3.2	<i>Discretização Espacial</i> . . . . .	38
2.3.3	<i>Parâmetros de estabilização</i> . . . . .	40
2.4	Integração Temporal . . . . .	42
2.5	Implementação Computacional . . . . .	44
2.6	Verificação e Aplicações . . . . .	45
2.6.1	<i>Escoamento sobre um cilindro</i> . . . . .	45
2.6.2	<i>Cavidade quadrada</i> . . . . .	47
3	MÉTODO DE ARLEQUIN ESTABILIZADO . . . . .	55
3.1	Método Arlequin . . . . .	55
3.2	Método Arlequin clássico aplicado à problemas de escoamentos incompressíveis . . . . .	58
3.3	Método Arlequin estabilizado aplicado à problemas de escoamentos incompressíveis . . . . .	61
3.3.1	<i>Integração Temporal</i> . . . . .	64
3.3.2	<i>Parâmetro de estabilização para técnica RBSAM</i> . . . . .	65
3.4	Superposição de modelos móveis . . . . .	67
3.5	Implementação Computacional . . . . .	68
3.6	Exemplos . . . . .	69
3.6.1	<i>Escoamento sobre um aerofólio NACA 0012</i> . . . . .	70
3.6.2	<i>Aerofólio com movimento de arfagem prescrito</i> . . . . .	73



CAPÍTULO

---

1

# INTRODUÇÃO

---

A interação fluido-estrutura caracteriza-se por ser uma classe de problemas em que existe uma interdependência nos comportamentos do fluido e da estrutura. O comportamento do fluido depende do formato da estrutura e sua movimentação, assim como, o movimento e a deformação da estrutura dependem das forças que provém do fluido.

A modelagem numérica dos problemas da engenharia estrutural é um ramo vastamente desenvolvido, sendo a análise de estruturas por elementos finitos em softwares comerciais uma prática corrente entre os engenheiros. Entretanto, quando fala-se de interação fluido-estrutura (IFE), esses softwares encontram-se muito longe de atender à demanda dos engenheiros. Problemas que envolvem a interação entre fluido e estrutura estão presentes em diversas áreas da engenharia, pode-se citar, por exemplo, a ação do vento sobre edifícios, aerodinâmica de modelos automotivos, problemas de *flutter* em estruturas aeronáuticas e de pontes, ou ainda problemas de escoamento de sangue sobre vasos sanguíneos e órgãos, entre muitos outros. A análise experimental de tais problemas, em geral, é muito custosa e envolve muito tempo, desta forma, é de interesse o desenvolvimento de métodos numéricos que representem adequadamente tais análises e que possibilitem que sejam realizadas dentro de um tempo razoável. O crescimento da informática tem auxiliado nesse processo, embora, ainda muitas análises somente sejam possíveis de serem realizadas em grandes *clusters*, e algumas, devido à complexidade dos problemas, não possam ser simuladas sem grandes simplificações.

A análise computacional dos problemas de IFE envolvem basicamente três partes: dinâmica dos fluidos computacional, mecânica dos sólidos computacional e acoplamento entre os meios fluido e sólido. Uma das maiores dificuldades encontrada nessa área diz respeito ao acoplamento entre fluido e sólido visto que para fluidos aplica-se, em geral, uma descrição matemática Euleriana, e para sólidos, Lagrangiana. O processo de acoplamento é realizado basicamente utilizando-se duas possíveis técnicas: métodos de rastreamento de

interface (*interface tracking*) ou método de malhas adaptadas e os métodos de captura de interface (*interface capturing*) ou método de malhas não-adaptadas.

Nos métodos de rastreamento de interface, a malha do fluido é adaptada à forma da interface sólido-fluido e acompanha seu movimento, requerendo, dessa forma, procedimentos de atualização da malha do fluido ao longo da análise. Nesse tipo de metodologia uma descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária pode ser aplicada ao fluido, permitindo a movimentação do domínio computacional de maneira independente do movimento do fluido. Essa técnica é adequada para problemas em que a estrutura sofre deslocamentos em pequenas escalas comparados à configuração inicial da estrutura, sem que haja mudança topológica do domínio do fluido, visto que grandes distorções do domínio fluido, em geral, acarretam na necessidade de técnicas de remalhamento, que apresentam um custo computacional muito elevado.

No método de captura de interface se utiliza uma malha fixa para o fluido, na qual o sólido se encontra imerso. Um dos aspectos importantes desse método diz respeito à localização do contorno da estrutura dentro da malha do fluido, podendo ser resolvido por exemplo com o uso de uma função *level-set* baseada na distância assinalada ao contorno. Essa técnica, embora possa ser aplicada para grandes deslocamentos, em geral não é adequada para levar em consideração efeitos localizados que precisem de uma maior precisão da malha, como por exemplo, em regiões de camada limite na vizinhança da estrutura.

Neste trabalho de doutorado, para análise de problemas de IFE tridimensionais, utilizou-se uma técnica para a partição do domínio do fluido, com malhas superpostas, no intuito de unir as vantagens das metodologias de rastreamento de interface e de captura de interface e ao mesmo tempo proporcionar a combinação de diferentes técnicas de discretizações para as malhas. Nesse contexto, duas discretizações espaciais para o fluido são utilizadas, uma malha global maior, menos refinada e fixa no espaço, e uma malha local menor, mais refinada, em contato com a estrutura e que se move para acomodar as deformações da estrutura. Uma das discretizações pode ser isogeométrica, enquanto a outra em elementos finitos tradicional. Como consequência, caso seja necessária a realização de remalhamento, o mesmo pode ser realizado apenas na malha local, diminuindo o custo computacional.

A proposta inicial da tese de doutorado era a realização do acoplamento entre as malhas através de uma técnica de modificação do espaço das funções base em uma zona de sobreposição, de maneira a preservar à independência linear das funções e a partição da unidade. Tal formulação, se mostrou eficiente para alguns problemas estudados, entretanto, em simulações mais complexas, a metodologia não apresentou o comportamento esperado. Dessa forma, em alinhamento com os objetivos desse trabalho, utilizou-se para o acoplamento o método Arlequin em sua forma estabilizada, conforme será retratado ao longo do texto.

Neste capítulo são apresentados o estado da arte dos principais assuntos envolvidos no desenvolvimento deste projeto, os objetivos, a metodologia aplicada e a justificativa para esta pesquisa.

## 1.1 Apresentação do texto

Este texto está dividido em 8 capítulos os quais serão descritos sucintamente na continuação.

No *Capítulo 1* introduz-se e contextualiza-se o tema de pesquisa. Na sequência, no estado da arte, faz-se uma breve apresentação de algumas das formulações mais utilizadas para a solução dos problemas que envolvem a interação fluido-estrutura e métodos de partição de domínios. Por fim, apresentam-se os objetivos, a metodologia e justificava desta pesquisa.

**ALTERAR** O *Capítulo 2* comprehende a descrição da solução numérica para o problema de dinâmica dos fluidos computacional. Apresentam-se inicialmente as equações governantes em sua forma forte na descrição Euleriana, posteriormente, é apresentada a obtenção da descrição Euleriana-Lagrangiana arbitrária. Na sequência, a formulação fraca é obtida através da aplicação do método dos resíduos ponderados utilizando a técnica clássica de Galerkin. Após isso, descrevem-se as estabilizações utilizadas para contornar as instabilidades que ocorrem nesse tipo de discretização, seguida da técnica de integração temporal do conjunto de equações. Ao final, o algoritmo da implementação computacional é apresentado e alguns exemplos são avaliados para a verificação do programa.

**ALTERAR** No *Capítulo 3*, apresenta-se a análise isogeométrica. Descrevem-se as funções NURBS e sua aplicação na discretização das geometrias e variáveis em substituição às tradicionais funções polinomiais de Lagrange empregadas no método dos elementos finitos clássico. Por fim, verifica-se o código computacional da DFC com análise isogeométrica por meio de exemplos numéricos.

**ALTERAR** O *Capítulo 4* apresenta uma breve revisão sobre a mecânica dos sólidos voltada ao equilíbrio de corpos deformáveis em descrição Lagrangiana. Na sequência, apresentam-se os conceitos do método dos elementos finitos posicional e o elemento finito de casca a ser utilizado nesse projeto. Por fim, um exemplo de problema dinâmico é apresentado.

**ALTERAR** No *Capítulo 5* a técnica de decomposição de domínios é apresentada. Descreve-se a obtenção do novo espaço de funções na zona de sobreposição entre malhas global e local, e apresenta-se por fim um exemplo de verificação voltado à dinâmica dos fluidos computacional.

No *Capítulo 6* apresenta-se a técnica de decomposição de domínios através do método Arlequin estabilizado (RBSAM). A primeira parte do capítulo foi dedicada a descrever o método clássico de Arlequin, para na sequência, introduzir a metodologia

estabilizada para a solução de escoamentos incompressíveis. Apresenta-se na sucessão do capítulo a extensão da metodologia para problemas de contorno móveis. Ao final, o algoritmo de implementação é apresentado, bem como, exemplos de validação são avaliados.

No *Capítulo 7* discorre-se sobre a formulação utilizada para análise de problemas de Interação Fluido-Estrutura. No texto, apresentam-se as condições de acoplamento necessárias a solução de um problema de IFE, a técnica de movimentação de malha utilizada, e a metodologia de transferência de condições de contorno em uma interface entre fluido e sólido com malhas não coincidentes. Descreve-se na continuação do texto a teoria envolvida no esquema de acoplamento particionado forte adotado. Por fim, o algoritmo de implementação computacional e exemplos de validação são apresentados.

**ALTERAR** No *Capítulo 8* são apresentadas conclusões parciais acerca do que foi desenvolvido até momento, bem como considerações sobre o plano de trabalho e resultados esperados ao final do Doutorado.

## 1.2 Estado da Arte

Nesta seção apresenta-se uma breve contextualização das formulações mais importantes relacionadas à metodologia aplicada neste projeto para a resolução dos problemas de interação fluido-estrutura. Assim, aborda-se brevemente o estado da arte da mecânica dos fluidos computacional aplicada a problemas de contornos móveis, mecânica dos sólidos computacional aplicada a problemas dinâmicos com grandes deslocamentos, técnicas de acoplamento numérico fluido-estrutura e métodos de decomposição de domínios e multiescala.

### 1.2.1 Dinâmica dos fluidos computacional

Na dinâmica dos fluidos computacional (DFC) técnicas numéricas são aplicadas para obtenção de uma solução aproximada para o conjunto de equações que descrevem o comportamento dos fluidos no espaço e no tempo, visto que a solução analítica para esses problemas é conhecida para poucos e simples casos. Os principais tópicos abordados aqui são referentes às diferentes metodologias aplicadas no que diz respeito a: discretização espacial, métodos de estabilização e modelagem de escoamentos turbulentos.

No que diz respeito à discretização espacial a DFC desenvolveu-se inicialmente no âmbito do método das diferenças finitas e do método dos volumes finitos (ver, por exemplo, Chung (2002) e Anderson (1995)). O método dos elementos finitos (MEF), por sua vez, popularizou-se inicialmente em análises de estruturas na década de 50, com problemas baseados em princípios variacionais. Alguns anos depois, passou a ser usado também em problemas da DFC, visto que o mesmo apresenta algumas propriedades vantajosas, como por exemplo, a capacidade de discretizar geometrias complexas com o uso de malhas não

estruturadas arbitrárias e a facilidade de aplicação de condições de contorno em geometrias complexas e de alta ordem (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; NITHIARASU, 2005; REDDY; GARTLING, 2010).

Umas das dificuldades encontradas na aplicação do MEF à dinâmica dos fluidos computacional é o fato de que, ao adotar-se o método clássico de Galerkin na discretização espacial das equações que descrevem o comportamento dos fluidos em descrição Euleriana, obtém-se matrizes assimétricas, e, em escoamentos com convecção dominante, surgem variações espúrias nas variáveis transportadas. Esse problema pode ser amenizado à medida que a malha de elementos finitos é refinada, entretanto, é desejável que o método escolhido apresente resultados estáveis mesmo em malhas mais grosseiras.

Para resolver tal dificuldade, algumas técnicas de estabilização foram propostas, a exemplo da metodologia *Stream-Upwind/Petrov-Galerkin* - SUPG (BROOKS; HUGHES, 1982), *Galerkin Least-Squares-GLS* (HUGHES; FRANCA; HULBERT, 1989) e *Sub-Grid Scale-SGS* (HUGHES, 1995). Todas essas formulações baseiam-se na introdução de termos estabilizantes ao problema, contendo as variações espúrias que ocorrem em problemas com convecção dominante. Outra possibilidade, diz respeito ao uso do método Taylor-Galerkin (T-G), introduzido por Donea (1984) onde a estabilização é obtida pela introdução de termos de mais alta ordem para a expansão em série de Taylor no processo de discretização temporal.

Uma das metodologias mais difundidas para estabilização dos termos convectivos, é a técnica SUPG, aplicada nesse estudo, que consiste em adicionar à forma fraca da equação da quantidade de movimento, o resíduo da equação da quantidade de movimento ponderado por uma função especialmente escolhida para adicionar difusão na direção das linhas de corrente. Diversos autores contribuíram para consolidação dessa técnica, dentre os quais pode-se citar, Hughes e Tezduyar (1984), Tezduyar (1992), Catabriga e Coutinho (2002). O parâmetro adimensional estabilizador cuja função é aplicar uma escala na parcela adicionada, possui sua obtenção discutida em diversos trabalhos, tais como os Takizawa, Tezduyar e Otoguro (2018) e Otoguro, Takizawa e Tezduyar (2020).

Outra dificuldade da DFC diz respeito aos escoamentos incompressíveis. Ao levar-se em conta a incompressibilidade do escoamento, obtém-se a chamada equação da continuidade, onde tem-se apenas o termo do divergente do vetor velocidade. Do ponto de vista computacional, esse aspecto traz problemas na obtenção do campo de pressão. Nesses casos, a utilização da pressão e da velocidade como variáveis primárias aproximadas por funções de forma de mesmo grau pode conduzir instabilidades na resolução do sistema. Essas instabilidades podem ser contornadas utilizando elementos que respeitem a restrição de *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi* ou LBB, onde a pressão é interpolada por funções de forma de ordem menor, sendo tais elementos conhecidos como Taylor-Hood (BREZZI; FORTIN, 1991; ZIENKIEWICZ; TAYLOR; NITHIARASU, 2005; STRANG; FIX, 2008).

Uma metodologia de estabilização semelhante à técnica SUPG foi também desenvol-

vida para contornar esse problema (HUGHES; FRANCA; BALESTRA, 1986; TEZDUYAR et al., 1992a). Essa metodologia é conhecida como PSPG (*Pressure stabilized Petrov-Galerkin*), adotada nesse estudo, e consiste em adicionar à forma fraca da equação da continuidade o resíduo da equação da quantidade de movimento ponderado pelo gradiente da equação da continuidade multiplicado por uma constante estabilizadora.

Outra consideração importante nas simulações numéricas diz respeito à reprodução de escoamentos turbulentos. As equações de Navier-Stokes descrevem tanto escoamentos laminares como turbulentos, entretanto, a utilização da chamada Simulação Direta de Turbulência leva a custos computacionais elevados, visto que requer uma malha refinada de maneira a representar adequadamente todas as escalas de turbulência. Para contornar esse problema, diferentes técnicas podem ser empregadas, destacando-se os métodos *Reynolds-Averaged Navier-Stokes* (RANS) (SPEZIALE, 1991; ALFONSI, 2009) e Simulações de grandes Vórtices (LES) (LAUNDER; SPALDING, 1972; GERMANO et al., 1991; WILCOX, 1993; PIOMELLI, 1999).

Os métodos RANS baseiam-se na decomposição das variáveis de fluxo em uma média temporal e uma componente de flutuação. Essa abordagem permite que as equações governantes sejam manipuladas de forma a representar as médias de longo prazo do fluxo, enquanto as flutuações turbulentas são tratadas como termos adicionais, muitas vezes modelados por equações de fechamento. A definição da média pode variar conforme as características do problema. Nas simulações de grandes vórtices o objetivo principal é capturar as estruturas turbulentas de grande escala, que são responsáveis pela maior parte da transferência de momento e energia, e aplicar um modelo para os vórtices de pequena escala.

O método Variacional Multiescala (VMS) (HUGHES, 1995; HUGHES et al., 1998; HUGHES; OBERAI; MAZZEI, 2001; BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013) tem intuito de garantir concomitantemente a estabilização para os efeitos de convecção, para o campo de pressão e para problemas de vorticidade. O método, a partir de princípios variacionais, propõem a representação do problema físico por meio de sua decomposição em grandes e pequenas escalas, resolvendo-as separadamente. A modelagem do espaço de pequenas escalas é realizado em termos de resíduos das equações de conservação de massa e de conservação da quantidade de movimento. Essa metodologia tem se mostrado adequada para tratamento de problemas de camada limite ou turbulência, os quais apresentam um intervalo de escalas muito amplos.

A Análise Isogeométrica (IGA - *Isogeometric Analysis*) é uma metodologia para análise numérica de problemas descritos por equações diferenciais e foi introduzida primeiramente por Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005). Pode-se dizer que se trata de uma generalização do método dos elementos finitos clássico, a partir do uso de funções base especiais. Na análise isogeométrica, as funções base utilizadas são aquelas aplicadas nos sistemas CAD (*Computed Aided Design*), ou seja, nas tecnologias aplicadas na engenharia

de *design*, animação, artes gráficas e visualização. Dentro das possibilidades de funções, as mais conhecidas são as funções NURBS (PIEGL; TILLER, 1996), fazendo que esse seja um ponto de partida para os estudos sobre IGA. Um dos principais objetivos do desenvolvimento dessa ferramenta é a integração entre os sistemas CAD e as técnicas numéricas baseadas em elementos finitos, as quais requerem a geração de malhas baseadas nos dados obtidos em programas CAD.

Uma das principais vantagens do uso dessa metodologia é representação exata de geometrias mesmo em malhas pouco refinadas, visto que essas funções são capazes de representar exatamente seções cônicas, círculos, cilindros, esferas e elipsoides. Além disso, as funções NURBS são continuas  $p - 1$  vezes entre os elementos, sendo  $p$  o grau da função base. A descrição exata das geometrias é uma característica desejável em problemas que envolvem fenômenos de camada limite, os quais dependem fortemente da precisão geométrica da superfície do corpo imerso no escoamento. Alguns problemas envolvendo escoamentos turbulentos e interação fluido-estrutura, podem ser consultados em: Bazilevs et al. (2007), Zhang et al. (2007), Bazilevs et al. (2008), Bazilevs et al. (2010), Bazilevs e Akkerman (2010).

Outras metodologias aplicando diretamente funções *B-Splines* também tem se mostrado eficiente para a análise de problemas da dinâmica dos fluidos computacional, como pode ser visto nos trabalhos de Höllig, Reif e Wipper (2001), Bazilevs, Takizawa e Tezduyar (2013), Bazilevs et al. (2014).

### **1.2.2 Dinâmica de estruturas computacional considerando grandes deslocamentos**

A análise de interação fluido estrutura recai muitas vezes em problemas onde é necessário a consideração da não linearidade geométrica da estrutura devido aos grandes deslocamentos ou a efeitos acoplados de membrana e flexão. Dentro desse grupo de problemas pode-se citar *flutter* de grande amplitude, sistemas de desaceleração (paraquedas), aplicações biomédicas, entre outros.

A solução numérica de problemas estruturais é realizada tradicionalmente aplicando-se o método dos elementos finitos. Dentro do contexto da análise não-linear de estruturas utilizando MEF, a formulação corrotacional proposta por Truesdell (1955) é muito popular e descreve a mudança de configuração da estrutura decompondo os movimentos do sólido em rígido e de deformação, e descrevendo-os em termos dos deslocamentos e rotações nodais. Essa formulação, aplicada para pórticos, treliças e cascas, pode ser vista nos trabalhos de Hughes e Liu (1981a), Hughes e Liu (1981b), Argyris (1982), Simo e Fox (1989), Ibrahimbegovic e Taylor (2002), Battini e Pacoste (2006).

A formulação corrotacional, ao descrever rotações como parâmetros nodais, apresenta uma limitação para grandes deslocamentos, visto que não se pode aplicar a proprie-

dade comutativa a essa grandeza. Para resolver este problema, utilizam-se formulações linearizadas de Euler-Rodrigues para aproximação das rotações, conforme pode ser visto, por exemplo, em Gruttmann, Sauer e Wagner (2000), Coda e Paccola (2010).

A conservação da energia nessa formulação é um assunto muito controverso em problemas de dinâmica não-linear de cascas e barras. Isso porque no uso da formulação corrotacional, as rotações finitas, que são parâmetros nodais, apresentam objetividade apenas para pequenos incrementos, além disso, a aplicação da formulação resulta em matriz de massa variável, proibindo o uso de algumas processos de integração temporal bem estabelecidos (SANCHES; CODA, 2013).

Motivado por Bonet et al. (2000), Coda (2003) introduz uma formulação baseada em posições, sem rotações como parâmetros nodais. Essa formulação tem sido aplicada com sucesso para problemas de pórticos e cascas (GRECO; CODA, 2004; CODA; PACCOLA, 2010; CARRAZEDO; CODA, 2010; CODA; PACCOLA, 2011; SANCHES; CODA, 2016), incluindo problemas de interação fluido-estrutura (SANCHES; CODA, 2013; SANCHES; CODA, 2014; FERNANDES; CODA; SANCHES, 2019; AVANCINI; SANCHES, 2020).

Em Sanches e Coda (2013), os autores utilizam o integrador temporal de Newmark para análise de problemas dinâmicos não-lineares de estruturas de cascas no contexto da IFE com grandes deslocamentos e rotações de corpo rígido. Nesse trabalho, os autores apresentam a prova da conservação da quantidade de movimento linear e angular no uso dessa metodologia, e testam a estabilidade e conservação de energia para problemas com pequenas deformações.

Baseado no último trabalho citado, neste projeto, aplica-se a formulação Lagrangiana total para elementos de cascas baseada em posições e vetores generalizados, o que evita o uso de aproximações para grandes rotações e permite o uso do integrador de Newmark nos problemas dinâmicos da IFE que apresentam grandes deslocamentos e rotações.

### 1.2.3 Acoplamento fluido-estrutura

O problema de interação fluido-estrutura pode ser descrito como um conjunto de equações diferenciais e condições de contornos associadas ao fluido e a estrutura que precisam ser satisfeitas ao mesmo tempo. Como sólidos e fluidos geralmente apresentam descrições matemáticas diferentes, sendo os sólidos tradicionalmente analisados por descrições Lagrangianas e os fluidos por descrições Eulerianas, um dos desafios da análise computacional de IFE é o acoplamento entre os dois meios. A solução de acoplamento a ser aplicada pode ser classificada em dois tipos de metodologias: métodos de rastreamento de interface (*interface tracking*) ou método de malhas adaptadas e métodos de captura de interface (*interface capturing*) ou método de malhas não-adaptadas (HOU; WANG; LAYTON, 2012; BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013b).

Nos métodos de rastreamento de interface, à medida em que a interface fluido-estrutura move, o domínio espacial do fluido muda seu formato, e a malha do fluido é

movimentada para acomodar a mudança da interface. Nesse tipo de metodologia duas possíveis técnicas podem ser aplicadas na modelagem do domínio fluido: a descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária (HUGHES; LIU; ZIMMERMAN, 1981; DONEA; GIULIANI; HALLEUX, 1982; KANCHI; MASUD, 2007) ou a formulação Espaço-Tempo (*Space-Time - ST*) (TEZDUYAR; BEHR; LIOU, 1992b; TEZDUYAR et al., 1992c; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2012), sendo que ambas permitem a movimentação arbitrária da discretização espacial. A principal vantagem do método de malhas adaptadas é a capacidade de controlar a dimensão da malha próxima a interface, bem como a conformidade dos domínios, e como consequência, garantir a precisão dos resultados nessa região.

A técnica empregada para movimentação de malhas é muito importante nesse tipo de problemas, pois deve ser eficiente de maneira a resultar em elementos que possuam uma mínima distorção e alteração de volume, e de forma a evitar que a malha necessite ser reconstruída. Diversas técnicas têm sido desenvolvidas para essa finalidade e podem ser divididas em três categorias. Na primeira os deslocamentos são impostos na interface entre estrutura e fluido e o campo de deslocamentos é obtido através da resolução de um problema de valor de contorno, formulando-se o problema através de analogia de molas (BOTTASSO; DETOMI; SERRA, 2005), sólido (JOHNSON; TEZDUYAR, 1994; STEIN; TEZDUYAR; BENNEY, 2004), suavização Laplaciana (KANCHI; MASUD, 2007), entre outras.

O segundo grupo são esquemas ponto-a-ponto, nos quais os deslocamentos da malha são diretamente interpolados a partir dos deslocamentos impostos na interface (DONEA; GIULIANI; HALLEUX, 1982; TEZDUYAR et al., 1993; SANCHES; CODA, 2014). Existem ainda métodos híbridos, que combinam vantagens de diferentes técnicas de movimentação de malhas (LEFRANÇOIS, 2008; FERNANDES; CODA; SANCHES, 2019).

Nos métodos rastreamento de interface, no entanto, em alguns casos o remalhamento torna-se inevitável, como em problemas com grandes distorções do domínio ou em problemas com mudanças topológicas, fazendo com que o custo computacional se torne muito elevado.

Por sua vez, os métodos de captura de interface são capazes de lidar com mudanças topológicas e grandes deslocamentos. Para isso, utilizam-se os chamados métodos de contornos imersos, introduzido por Peskin (1972), nos quais mantém-se a malha do fluido fixa e permite-se que a estrutura move-se dentro dessa malha. Nesses métodos é necessário que as posições da estrutura sejam identificadas dentro da malha do fluido a cada passo de tempo (MITTAL; IACCARINO, 2005; WANG et al., 2011). Uma das formas de identificação é realizada através de uma função distância assinalada do contorno da estrutura (método *level-set*). Nesse contexto, pode-se citar os trabalhos de Cirak e Radovitzky (2005) aplicados no âmbito dos volumes finitos e de Sanches e Coda (2014) e Akkerman et al. (2012) em elementos finitos. A principal desvantagem desse tipo de metodologia é que a resolução da discretização na camada limite fica limitada a discretização da malha de elementos finitos

onde a interface estiver posicionada no instante de análise.

A resolução dos problemas da IFE pode ser realizada através de duas variações principais: Métodos particionados (ROUX; GARAUD, 2009; BAZILEVS et al., 2011; SANCHES; CODA, 2013; SANCHES; CODA, 2014; FERNANDES; CODA; SANCHES, 2019) e métodos monolíticos (BLOM, 1998; HÜBNER; WALHORN; DINKLER, 2004; HRON; MADLIK, 2007; AVANCINI, 2023). No primeiro grupo, as equações para fluido e estrutura são resolvidas separadamente, sendo as condições de acoplamento transmitidas de um meio para o outro na interface, em geral, em termos de condições de Dirichlet-Neumann. No segundo grupo, de métodos monolíticos, fluido e estrutura são tratados como entidade única, com um único sistema de equações gerado para fluido e estrutura, sendo as condições de contorno de interface atendidas de maneira implícita durante o processo.

As técnicas de acoplamento particionado do tipo Dirichlet-Neumann caracterizam-se pela aplicação na interface de condições de contorno de Dirichlet no fluido (velocidades provenientes da movimentação da estrutura) e de Neumann no sólido (forças provenientes da variação dos campos de pressão e das tensões viscosas no fluido). Essas formulações podem ainda ser classificadas em fracas (explícitas), ou fortes (implícitas). No acoplamento particionado fraco, as equações são resolvidas de uma maneira desacoplada e só no passo de tempo seguinte são aplicadas as condições de contorno na interface. Para o acoplamento particionado forte usa-se de processos iterativos de acoplamento dentro de um passo de tempo. Esse tipo de resolução, aplicada nesse trabalho, também é conhecida como bloco-iterativa (BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013), na qual ocorre uma modificação da matriz tangente com relação ao método monolítico, sendo os sistemas do fluido, da estrutura e da malha tratados em blocos separados. Esse tipo de metodologia particionada facilita a solução dos problemas de IFE devido ao total desacoplamento entre os *solvers* de estrutura e de fluido.

Os esquemas particionados podem apresentar, entretanto, algumas desvantagens, como a defasagem que pode ocorrer entre as integrações temporais do fluido e da estrutura quando as condições de contorno na interface entre fluido e estrutura são aplicadas de maneira explícita, e, ainda, instabilidades numéricas como o efeito de massa adicionada (FELIPPA; PARK; FARHAT, 2001). Em escoamentos governados pelo campo de pressão, a ação do fluido sobre a estrutura funciona como uma massa adicional, alterando sua inércia (TALLEC; MOURO, 2001). Em escoamentos incompressíveis, nos quais a densidade do sólido e do fluido são muito próximas ou quando a estrutura é muito esbelta esse fenômeno pode ocasionar instabilidades numéricas em técnicas de acoplamento particionado fraco ou dificuldades de convergência no caso da esquema particionado forte.

Uma das formas de contornar esse problema é a alteração do esquema de acoplamento do tipo Dirichlet-Neumann para condições de contorno de Robin, que consiste em uma combinação linear das condições de Dirichlet e Neumann, ver por exemplo, Badia,

Nobile e Vergara (2008). Outra possibilidade é a metodologia introduzida por Tezduyar, Behr e Liou (1992b), chamada de *augmented mass* que consiste em multiplicar a massa da matriz tangente respectiva à estrutura por um fator que dependerá do tipo de problema em análise. Cabe ressaltar ainda, para os casos de acoplamento do tipo bloco-iterativo, o uso da relaxação de Aitken, proposto por Irons e Tuck (1969), e que demonstra-se muito eficiente em trabalhos sequentes (KÜTTLER; WALL, 2008; FERNANDES; CODA; SANCHES, 2019).

### **1.2.4 Métodos Multiescala e Técnicas de partição de domínios**

Em diversas áreas da engenharia se faz necessário levar em consideração efeitos localizados, geralmente de menor escala, em um modelo global. Dentro da análise estrutural pode-se citar problemas de fissuras, orifícios, imperfeições; na mecânica dos fluidos, problemas de camada limite, a interface entre dois fluidos; e na interação fluido-estrutura a interface entre estrutura-fluido, entre outros.

Para uma solução precisa desse tipo de problemas, faz-se necessário a aplicação de técnicas que levem em consideração os efeitos locais, mas ao mesmo tempo não tornem a simulação inviável devido ao seu custo computacional.

O método dos elementos finitos, tradicionalmente aplicado para as análises numéricas de equações diferenciais, foi desenvolvido a partir de um modelo mecânico de meio contínuo, apresentando pouca flexibilidade para a consideração desses efeitos. Os refinamentos  $p$  e  $h$  são metodologias eficientes, entretanto, para alguns problemas dinâmicos, demandam técnicas de remalhamento, e podem ser muito caros computacionalmente.

Em busca de aprimorar o Método dos Elementos Finitos (MEF), diversas propostas têm sido apresentadas para aumentar a flexibilidade na resolução de problemas multiescala, como pode-se citar, por exemplo, o caso dos elementos finitos difusos (NAYROLES; TOUZOT; VILLON, 1992) onde o conceito de partículas foi introduzido, resultando em uma generalização do método dos elementos finitos sem a necessidade de malha. Ou ainda, o método de Galerkin livre de elementos que é uma combinação entre métodos sem malha e o MEF (ver Belytschko et al. (1995)). Com esse mesmo intuito pode-se citar o método de partição da unidade (MELENK; BABUSKA, 1996), o método dos elementos finitos generalizado (G-FEM) (STROUBOULIS; COPPS; BABUSKA, 2001) e o método dos elementos finitos estendido (X-FEM) (MOËS et al., 2003), os quais introduzem o enriquecimento à base aproximadora por meio de funções capazes de capturar efeitos localizados. Os métodos G-FEM e X-FEM são, entretanto, fortemente dependentes do conhecimento local da solução, ou de pelo menos, seu aspecto espacial.

Pesquisas como as de Farhat, Harari e Franca (2001) propõem enriquecimentos descontínuos nos espaços funcionais, incorporando modos regulares por meio de formulações discretas de Galerkin e multiplicadores de Lagrange. Além disso, métodos de discretização que não dependem diretamente da interface, fundamentados na técnica de Nitsche, foram

desenvolvidos para lidar com problemas envolvendo descontinuidades materiais, como demonstrado no estudo de Hansbo e Hansbo (2002).

Dentro do contexto da mecânica dos fluidos, Tezduyar, Aliabadi e Behr (1998), Tezduyar e Aliabadi (2000) introduziram a técnica *EDICT (Enhanced-Discretization Interface-Capturing Technique)* para captura de interface com aprimoramento da discretização para problemas bifásicos ou com superfície livre. Para isso, nessa região de interface definem-se um subconjunto de elementos (sub-malhas), que posteriormente são refinados sucessivamente, de modo a melhorar a precisão da solução. Como resultado obtém-se uma discretização melhorada para capturar a interface, entretanto, as sub-malhas provenientes, não representam com exatidão descontinuidades na interface. Uma versão mais eficiente dessa técnica foi proposta em Tezduyar e Sathe (2005), na qual um método iterativo multinível é projetado para a captura de efeitos do escoamento em pequenas escalas, permitindo a simulação de problemas mais complexos.

No âmbito da DFC pode-se citar ainda o método Variacional Multiescala (VMS) (HUGHES et al., 1998) que utiliza o conceito de micromodelos e macromodelos, sendo que os micromodelos capturam efeitos em pequenas escalas de maneira a corrigir os macromodelos.

Outro grupo de métodos proposto para flexibilizar o MEF em problemas com efeitos locais são os baseados em superposição de um domínio local a um domínio global. A técnica Chimera definida por Benek et al. (1986) traz a introdução de orifícios na região de superposição dos modelos, definindo um contorno artificial para o modelo global, e a transmissão de dados ocorre através desses contornos artificiais gerados. O método S (FISH, 1992) trata o modelo local como um enriquecimento ao global, e a solução é obtida através da soma dos campos de interesse de cada domínio.

O método Arlequin (BEN DHIA, 1998; BEN DHIA; RATEAU, 2001), por sua vez também baseia-se na superposição de modelos de modo a combinar um modelo local mais refinado a um global, no entanto, esse processo é realizado através do cruzamento e colagem entre os modelos em uma zona de superposição e fazendo-se o uso para tal de multiplicadores de Lagrange. O método Arlequin vem sendo utilizado amplamente em diversas áreas da mecânica dos sólidos (ver, por exemplo, Dhia e Jamond (2010), Caleyron et al. (2013), Dhia e Torkhani (2011), Bauman et al. (2008), Biscani et al. (2016), Jamond e Ben Dhia (2013)), na DFC e IFE, entretanto, ainda é pouco explorado. Fernier, Faucher e Jamond (2020) aplica a metodologia para análise de escoamentos compressíveis, e Fernandes et al. (2020) para análise de escoamentos incompressíveis e de IFE para problemas bidimensionais. Nesse trabalho será feita uma extensão do trabalho de Fernandes (2020) para problemas tridimensionais de IFE e levando em consideração diferentes discretizações matemáticas para as malhas global e local.

## 1.3 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho é o desenvolvimento e implementação computacional de uma formulação para análise de problemas tridimensionais de interação fluido-estrutura. A formulação deve permitir a consideração de efeitos localizados por meio de uma técnica de partição de domínios, além de viabilizar o uso combinado de aproximações por elementos finitos clássicos e análise isogeométrica.

Para tal finalidade, enumeram-se os seguintes objetivos específicos:

- Expansão de um código computacional para análise de escoamentos incompressíveis baseado em método dos elementos finitos tradicional para um código que contemple análise de problemas da DFC tridimensionais e que inclua a possibilidade de discretização através de análise isogeométrica;
- Estudo de técnicas de partição de domínios para levar em conta efeitos localizados no âmbito da DFC;
- Implementação da técnica de partição de domínios no código de dinâmica dos fluidos computacional contemplando problemas da DFC com contornos móveis;
- Estudo aprofundado de um código pré-desenvolvido de análise não-linear geométrica de estruturas de cascas utilizando o MEF posicional;
- Acoplamento entre os códigos computacionais da DFC e de sólido através do emprego de uma técnica particionada do tipo bloco-iterativa;
- Validação dos códigos computacionais através da simulação de problemas da dinâmica dos fluidos, dinâmica das estruturas e problemas IFE.

## 1.4 Metodologia

Em função da complexidade envolvida na implementação computacional dos códigos desenvolvidos optou-se pelo uso da linguagem de programação C++ orientada a objetos, visto que esta linguagem já vem sendo utilizada com sucesso no grupo de trabalho da presente estudante de doutorado. Além disso, a programação orientada a objetos proporciona uma maior modularidade dos códigos desenvolvidos e uma maior facilidade para o acoplamento entre módulos distintos. Todas as implementações são realizadas utilizando bibliotecas, compiladores e softwares livres ou de código aberto, em ambiente Linux.

O projeto de pesquisa iniciou-se pela dinâmica dos fluidos computacional tendo como base os desenvolvimentos realizados em Tonon (2016) e um código computacional de dinâmica dos fluidos para análises de escoamentos incompressíveis bidimensionais

desenvolvido por Fernandes (2016) e Fernandes (2020) em seus trabalhos de mestrado e doutorado respectivamente. Primeiramente, ampliou-se o código pré-existente de maneira que o mesmo contemplasse análises de problemas tridimensionais. Na sequência, incluiu-se a este código baseado em método dos elementos finitos clássico a possibilidade do uso de análise isogeométrica.

A partir desse ponto, iniciou-se o processo de estudo da metodologia de decomposição de domínios e sua implementação para problemas bidimensionais da DFC foi realizada, conforme a formulação apresentada no Cap. ???. Devido a dificuldades encontradas para simulação de problemas mais complexos, o método Arlequin (BEN DHIA, 1998), em sua versão estabilizada conforme o trabalho de Fernandes (2020), foi estudado e implementado computacionalmente para problemas bidimensionais e tridimensionais da DFC.

Para a análise dos problemas não-lineares geométricos de estruturas de cascas baseado no MEF posicional, estudaram-se os textos apresentados em Sanches e Coda (2010a), Sanches e Coda (2010b) e Coda (2018), e empregou-se um código computacional cedido pelo pesquisador Rosicley Júnior Rodrigues Rosa desenvolvido em seu trabalho de mestrado (ROSA, 2021) com linguagem de programação em C++ orientada a objeto e Phyton.

Na sequência deste projeto, realizou-se o acoplamento entre os códigos de fluidos e de estrutura, utilizando-se a metodologia de acoplamento particionado forte através da técnica bloco-iterativa.

Para maior eficiência na resolução dos problemas, os códigos da DFC, de estruturas e de IFE apresentam paralelização em protocolo MPI (*Message passing interface*). O processamento paralelo acontece a partir da divisão do domínio de elementos finitos entre os processos, o qual é realizado através da biblioteca METIS<sup>1</sup>. O METIS proporciona divisão do domínio de elementos finitos em número semelhantes de elementos entre os processos e agrupando-os por proximidade geométrica.

É importante ressaltar que os códigos contam com a interface e implementações do pacote PETSc<sup>2</sup>. Essa biblioteca é desenvolvida em código aberto e possui uma grande quantidade de método iterativos e diretos para solução de sistemas algébricos e também pré-condicionadores. Além do mais, o PETSc possui uma interface bem desenvolvida com outras bibliotecas, como por exemplo, com o METIS citado anteriormente.

As malhas de elementos finitos utilizadas nas análises são obtidas através do software GMSH<sup>3</sup> e a etapa de pós-processamento e visualização é realizada no Kitware Paraview<sup>4</sup> e Gnuplot<sup>5</sup>. Para problemas aplicando a análise isogeométrica, a etapa de pré-processamento é realizada com um código desenvolvido pela autora e seu orientador

<sup>1</sup> Disponível em: <<http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/metis/metis/overview>>

<sup>2</sup> Disponível em: <<http://https://www.mcs.anl.gov/petsc/>>

<sup>3</sup> Disponível em:<<https://gmsh.info/>>

<sup>4</sup> Disponível em:<<http://https://www.paraview.org/>>

<sup>5</sup> Disponível em:<<https://gnuplot.info/>>

durante seu trabalho de mestrado (TONON, 2016).

No que diz respeito à infraestrutura, utiliza-se o *cluster* disponível no Laboratório de Informática e de Mecânica Computacional (LIMC) do SET para a simulação de problemas mais complexos, e um computador pessoal para a simulação de problemas mais simples.

## 1.5 Justificativa

Os problemas de interação fluido-estrutura estão presentes em todas as partes, na engenharia, nas ciências, na medicina e também no dia-a-dia das pessoas. O projeto de estruturas cada vez mais esbeltas, a necessidade de obtenção de energia elétrica a partir de fontes de energia limpa, como as usinas eólicas, o estudo de *airbags*, o bombeamento do sangue pelos ventrículos do coração humano e o abrir e fechar das válvulas do coração, são apenas alguns dos exemplos que demonstram a necessidade de se aprofundar nos estudos da interação fluido-estrutura computacional.

Enquanto que no campo engenharia estrutural os pacotes comerciais baseados em MEF estão em constante evolução, e podem resolver uma grande gama de problemas, os softwares que tratam de problemas da dinâmica dos fluidos computacional e de problemas multifísicos, como os problemas da IFE, ainda precisam evoluir muito para suprirem a demanda dos pesquisadores. A simulação numérica de problemas reais de IFE é ainda muito difícil de ser realizada em função do elevado custo computacional, e muitas vezes, devido a grande complexidade dos problemas, ainda é impossível simulá-los sem que sejam realizadas grandes simplificações. Dessa forma, os ensaios experimentais, ainda são em grande parte das vezes, a melhor forma de se estudar o comportamento de IFE, embora, sejam muito custosos e demorados.

Dentro desse contexto, muitos pesquisadores tem se esforçado para que a análise de problemas da IFE computacionalmente seja possível e eficiente. Com essa mesma proposta, nesse projeto pretende-se desenvolver uma ferramenta computacional eficiente para análise tridimensional de problemas de interação fluido-estrutura utilizando uma combinação entre método dos elementos finitos e análise isogeométrica. Nesse trabalho, será aplicado o método Arlequin para a superposição de malhas no modelo do fluido, com uma malha local mais refinada e deformável em contato com a superfície da estrutura sobreposta a uma malha global fixa e com discretização mais grosseira. Dessa forma, ainda que a estrutura mude drasticamente, não se faz necessário o remalhamento de toda a malha que compõe o fluido, diminuindo assim o custo computacional. Esta proposta compartilha as vantagens dos métodos de malhas adaptadas e de malhas não adaptadas, possuindo a possibilidade de alcançar uma ótima convergência.



CAPÍTULO

---

**2**

# DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL

---



---

O escoamento isotérmico de um fluido newtoniano é descrito pelas equações advindas da conservação da quantidade de movimento, ou de Navier-Stokes, e da conservação de massa. Nos casos em que ocorram variações significativas no campo de temperatura, ou em escoamentos compressíveis, a equação da conservação de energia deve ser adicionada ao sistema. Essas equações governantes, juntamente com as relações constitutivas, resultam em um sistema de equações diferenciais não lineares que descrevem o comportamento do escoamento no tempo e no espaço.

Neste trabalho, são investigados escoamentos incompressíveis, isotérmicos e com contornos móveis. As seções seguintes apresentam a abordagem adotada para a resolução desse tipo de problema, bem como sua implementação computacional. Utiliza-se uma formulação Arbitrária Euleriana-Lagrangiana (ALE) para representar as equações, e a discretização espacial é realizada por meio do método dos elementos finitos (FEM) ou da análise isogeométrica (IGA).

Para tratar questões numéricas recorrentes nesse sistema de equações, como as oscilações espúrias em casos de convecção dominante, típicas da aplicação do método dos resíduos ponderados baseado na formulação clássica de Galerkin, emprega-se a metodologia SUPG. Adicionalmente, a estabilização PSPG é aplicada com o objetivo de contornar a condição imposta pelo critério de *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi* (LBB). A integração no tempo é conduzida por meio do método  $\alpha$ -generalizado.

Ao final deste capítulo, é apresentado um algoritmo que detalha o esquema computacional de solução dos problemas da DFC, seguido pela resolução de alguns casos clássicos, utilizados como verificação da metodologia proposta.

## 2.1 Equações governantes na descrição Euleriana

### 2.1.1 Equação da conservação da massa

Considere um volume de controle infinitesimal fixo no espaço, permeável a matéria e submetido a uma escoamento de velocidade  $\mathbf{u}$ , com componentes  $u_1$ ,  $u_2$ , e  $u_3$  (conforme Fig. 2.1). Para um intervalo de tempo infinitesimal  $dt$ , a lei da conservação da massa impõe que a variação de massa dentro do volume de controle seja igual ao fluxo líquido de massa que atravessa suas fronteiras, que pode ser expresso matematicamente da seguinte forma:

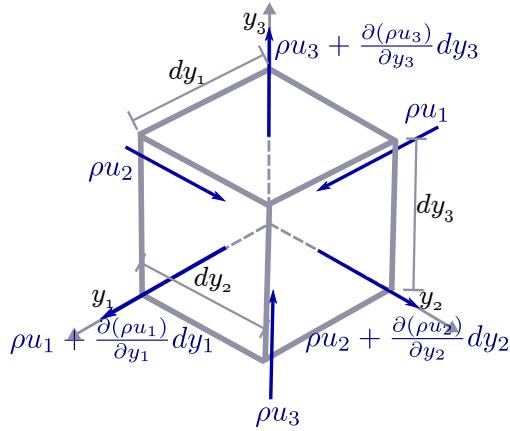


Figura 2.1 – Volume de controle infinitesimal: Fluxo de massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dV = (\rho u_1 dA_1 + \rho u_2 dA_2 + \rho u_3 dA_3) - \left( \left( \rho u_1 + \frac{\partial \rho u_1}{\partial y_1} dy_1 \right) dA_1 + \left( \rho u_2 + \frac{\partial \rho u_2}{\partial y_2} dy_2 \right) dA_2 + \left( \rho u_3 + \frac{\partial \rho u_3}{\partial y_3} dy_3 \right) dA_3 \right), \quad (2.1)$$

com  $\rho$  a massa específica do fluido e  $dA_i$  a área referente à face ortogonal ao eixo  $y_i$ . Considerando que  $dV = dy_1 dy_2 dy_3 = dy_1 dA_1 = dy_2 dA_2 = dy_3 dA_3$  e manipulando-se algebraicamente a Eq. 2.1 chega-se a seguinte expressão:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial \rho u_1}{\partial y_1} - \frac{\partial \rho u_2}{\partial y_2} - \frac{\partial \rho u_3}{\partial y_3}. \quad (2.2)$$

Para escoamentos incompressíveis, quando  $\rho$  é constante ao longo do tempo, a equação fica reduzida a:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \frac{\partial u_2}{\partial y_2} + \frac{\partial u_3}{\partial y_3} = 0, \quad (2.3)$$

ou ainda:

$$\nabla_y \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.4)$$

### 2.1.2 Equação da quantidade de movimento

Para um volume de controle infinitesimal, a lei da conservação da quantidade de movimento afirma que a variação temporal da quantidade de movimento no interior do volume é determinada pela diferença entre o fluxo de quantidade de movimento que entra e o que sai pelas suas fronteiras, somada à resultante das forças aplicadas sobre o volume de controle.

Para chegar-se à equação da quantidade de movimento em sua forma conservativa partindo desse princípio, inicia-se com a avaliação das forças que atuam sobre um volume de controle infinitesimal no instante atual. Considerando o equilíbrio das forças externas e internas na direção  $y_1$ , de acordo o volume apresentado na Fig. 2.2, chega-se na seguinte relação:

$$\begin{aligned} F_1 = & -(\sigma_{11}dy_2dy_3 + \sigma_{12}dy_1dy_3 + \sigma_{13}dy_1dy_2) + \\ & \left( \left( \sigma_{11} + \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial y_1}dy_1 \right) dy_2dy_3 + \left( \sigma_{12} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y_2}dy_2 \right) dy_1dy_3 + \left( \sigma_{13} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial y_3}dy_3 \right) dy_1dy_2 \right) + \\ & b_1dy_1dy_2dy_3, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde  $F_1$  representa a resultante das forças externas na direção  $y_1$ ;  $\sigma_{ij}$  são as componentes  $ij$  do tensor de tensões Cauchy ( $\boldsymbol{\sigma}$ ); e  $b_1$  representa a componente na direção  $y_1$  do vetor força de campo por unidade de volume  $\mathbf{b}$ . Dividindo-se Eq. 2.5 por  $dV$  e efetuando as subtrações, têm-se a força resultante por unidade de volume ( $q_1$ ) dada por:

$$q_1 = \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y_2} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial y_3} + b_1. \quad (2.6)$$

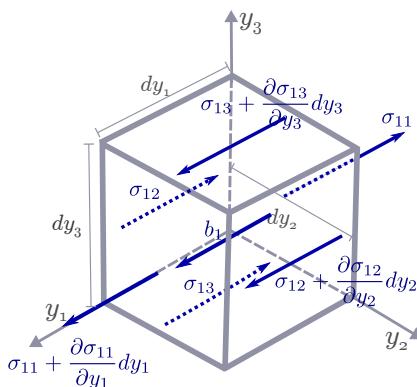


Figura 2.2 – Volume de controle infinitesimal: Componentes de força na direção  $y_1$

Considerando-se o equilíbrio das forças nas direções  $y_2$  e  $y_3$ , pode-se escrever

também:

$$q_2 = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y_3} + b_2, \quad (2.7)$$

$$q_3 = \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial y_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial y_3} + b_3, \quad (2.8)$$

ou ainda:

$$\mathbf{q} = \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}. \quad (2.9)$$

Realizando-se o balanço da quantidade de movimento no volume de controle infinitesimal da Fig. 2.3, e aplicando-se a lei da conservação da quantidade de movimento, pode-se chegar a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} dV = & u_1 \rho \mathbf{u} dA_1 + u_2 \rho \mathbf{u} dA_2 + u_3 \rho \mathbf{u} dA_3 - \\ & \left( \left( u_1 \rho \mathbf{u} + \frac{\partial u_1 \rho \mathbf{u}}{\partial y_1} dy_1 \right) dA_1 + \left( u_2 \rho \mathbf{u} + \frac{\partial u_2 \rho \mathbf{u}}{\partial y_2} dy_2 \right) dA_2 + \right. \\ & \left. \left( u_3 \rho \mathbf{u} + \frac{\partial u_3 \rho \mathbf{u}}{\partial y_3} dy_3 \right) dA_3 \right) + \mathbf{q} dV, \end{aligned} \quad (2.10)$$

dividindo-se a Eq. 2.10 por  $dV$  e efetuando-se as subtrações, chega-se a:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\partial u_1 \rho \mathbf{u}}{\partial y_1} - \frac{\partial u_2 \rho \mathbf{u}}{\partial y_2} - \frac{\partial u_3 \rho \mathbf{u}}{\partial y_3} + \mathbf{q}, \quad (2.11)$$

ou ainda:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla_y \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mathbf{f} \right) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (2.12)$$

com  $\mathbf{f} = \rho \mathbf{b}$  que representa a força de campo por unidade de massa.

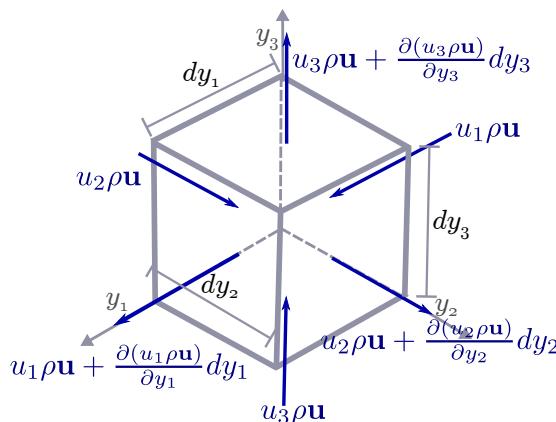


Figura 2.3 – Volume de controle infinitesimal: Fluxo de quantidade de Movimento

Da consideração da equação da continuidade, a Eq. 2.12 pode ser rescrita ainda em sua forma convectiva como:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla_y) \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (2.13)$$

O tensor de tensões de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  é definido para fluidos newtonianos incompressíveis pela seguinte relação constitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\varepsilon(\mathbf{u}), \quad (2.14)$$

onde  $p$  representa a pressão,  $\mu$  a viscosidade dinâmica do fluido e  $\varepsilon(\bullet)$  é o tensor taxa de deformação infinitesimal, definido como:

$$\varepsilon(\bullet) = \frac{1}{2} \left( \nabla_y(\bullet) + \nabla_y(\bullet)^T \right). \quad (2.15)$$

### 2.1.3 Formulação forte da mecânica dos fluidos

Seja  $\Omega \in \mathbb{R}^{n_{sd}}$ , com  $n_{sd} = 2, 3$ , o domínio espacial que define o escoamento do fluido com contorno  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ , no instante  $t \in (0, T)$  (ver Fig. 2.4).

Para escoamentos incompressíveis isotérmicos o fluido possui movimento descrito pela equação da quantidade de movimento, ou equações de Navier-Stokes (Eq. 2.13) e da conservação de massa (Eq. 2.4). Para completar a formulação da mecânica dos fluidos, condições de contorno devem ser especificadas. Em geral, em uma dada parte do contorno espacial, condições de contorno essenciais (Dirichlet) ou naturais (Neumann) são aplicadas. Dessa forma, o escoamento é governado pelo seguinte conjunto de equações:

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_y \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ em } \Omega \\ \nabla_y \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ em } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_D \text{ em } \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{h} \text{ em } \Gamma_N, \end{cases} \quad (2.16)$$

sendo  $\Gamma_D$  a porção do contorno com condições de contorno de Dirichlet, representadas pelo campo de velocidades  $\mathbf{u}_D$ , e  $\Gamma_N$  aquela com condições de contorno de Neumann, descritas pelas forças de superfície  $\mathbf{h}$ . A variável  $\mathbf{n}$  representa o vetor unitário normal ao contorno  $\Gamma_N$ .

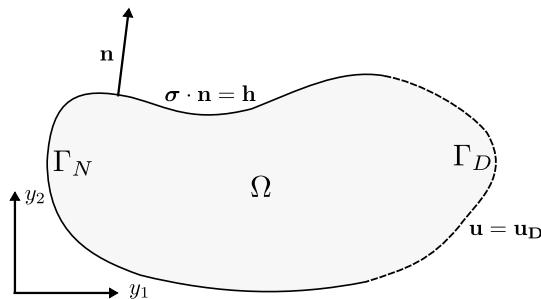


Figura 2.4 – Domínio para o problema da dinâmica dos fluidos computacional

## 2.2 Descrição Euleriana-Lagrangiana arbitrária (ALE)

A descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária (DONEA; GIULIANI; HALLEUX, 1982) representa uma generalização da descrição puramente Lagrangiana e da descrição puramente Euleriana do movimento do contínuo. A descrição Lagrangiana fixa a atenção em pontos materiais do contínuo, enquanto que na descrição Euleriana considera-se uma porção fixa do espaço ocupada pelo contínuo, e analisam-se os pontos materiais que passam por essa porção ao longo do tempo. Como consequência, na descrição puramente Lagrangiana a malha computacional move-se com o contínuo, enquanto que na Euleriana a malha computacional mantém-se fixa. Por sua vez, na descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária, trabalha-se com pontos de referência que podem movimentar-se, mas de maneira independente do movimento dos pontos materiais do contínuo analisado.

Para a aplicação dessa metodologia às equações governantes da mecânica dos fluidos é importante a definição de três domínios, de acordo com a Fig. 2.5. O domínio inicial, chamado de **domínio material** ( $\Omega_0$ ), que é definido pelas coordenadas dos pontos materiais  $\mathbf{x}$ ; O domínio atual, chamado de **domínio espacial** ( $\Omega$ ), definido pelas coordenadas  $\mathbf{y}$ ; e por fim, o **domínio de referência** ( $\Omega_{\bar{x}}$ ) com coordenadas dos pontos de referência  $\bar{\mathbf{x}}$ .

Considera-se nesse texto, o domínio de referência,  $\Omega_{\bar{x}}$ , como sendo a configuração inicial da malha, enquanto que a configuração atual da malha e do contínuo consistem ambas na referência espacial  $\Omega$ .

As coordenadas no domínio atual do contínuo,  $\Omega$ , podem ser mapeadas a partir do domínio inicial ( $\Omega_0$ ) ou a partir do domínio de referência ( $\Omega_{\bar{x}}$ ) utilizando as seguintes funções de mapeamento:

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, t). \quad (2.17)$$

Da mesma forma, o domínio de referência, pode ser mapeado a partir do domínio inicial por:

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t). \quad (2.18)$$

A velocidade dos pontos da malha é calcula por:

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}}, \quad (2.19)$$

e a velocidade dos pontos materiais no instante  $t$  é obtida pela derivada do vetor posição  $\mathbf{y}$  mantendo  $\mathbf{x}$  fixo:

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}. \quad (2.20)$$

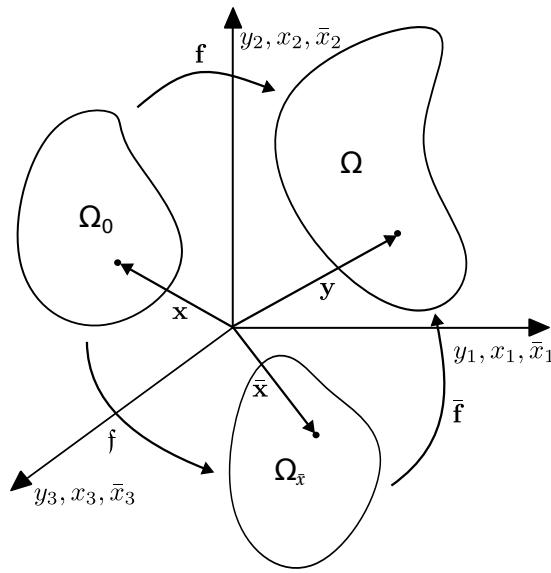


Figura 2.5 – Domínios utilizados para a descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária

As matrizes jacobianas dos mapeamentos considerando a dependência do espaço e do tempo são dadas por:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial(\mathbf{x}, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{\partial(\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, t), t)}{\partial(\bar{\mathbf{x}}, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} & \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

e

$$\mathfrak{F} = \frac{\partial(\mathfrak{f}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial(\mathbf{x}, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{w} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

sendo  $\mathbf{w} = \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}}$ .

Considerando que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{f}} \circ \mathfrak{f}$ , pode-se escrever:

$$\frac{\partial(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial(\mathbf{x}, t)} = \frac{\partial(\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, t), t)}{\partial(\bar{\mathbf{x}}, t)} \cdot \frac{\partial(\mathfrak{f}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial(\mathbf{x}, t)}, \quad (2.24)$$

que pode ser rescrita como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} & \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{w} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Dessa forma, pode-se estabelecer uma relação entre a velocidade da malha e a velocidade do ponto material:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{w} \quad (2.26)$$

Supondo agora uma grandeza física escalar, denominada de  $g(\mathbf{y}, t)$  na configuração espacial, de  $g^*(\bar{\mathbf{x}}, t)$  na configuração de referência, e  $g^{**}(\mathbf{x}, t)$  na configuração material. Pode-se escrever então:

$$g^{**}(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), t), \quad (2.27)$$

ou:

$$g^{**} = g \circ \mathbf{f}, \quad (2.28)$$

o que permite escrever o seguinte gradiente:

$$\frac{\partial g^{**}(\mathbf{x}, t)}{\partial(\mathbf{x}, t)} = \frac{\partial g(\mathbf{y}, t)}{\partial(\mathbf{y}, t)} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial(\mathbf{x}, t)}, \quad (2.29)$$

que em forma matricial é apresentado como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g^{**}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial g^{**}}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial g}{\partial t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Essa expressão nos permite escrever a derivada temporal da variável na configuração material:

$$\frac{\partial g^{**}}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}} \cdot \mathbf{u}, \quad (2.31)$$

que é justamente a derivada material de  $g$ . Para facilitar a visualização pode tirar os sobrescritos  $**$ , e então:

$$\frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial g}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} g. \quad (2.32)$$

Usando essa mesma metodologia pode-se escrever a transformação de  $g^*(\bar{\mathbf{x}}, t)$  para a referência material da seguinte forma:

$$g^{**} = g^* \circ \mathfrak{f}, \quad (2.33)$$

que resulta no seguinte gradiente

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g^{**}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial g^{**}}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g^*}{\partial \bar{\mathbf{x}}} & \frac{\partial g^*}{\partial t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{w} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

com a segunda coluna resultando em:

$$\frac{\partial g^{**}}{\partial t} = \frac{\partial g^*}{\partial t} + \frac{\partial g^*}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{w}. \quad (2.35)$$

Utilizando-se a expressão apresenta na Eq. 2.26 e substituindo-a em 2.35, resulta em:

$$\frac{\partial g^{**}}{\partial t} = \frac{\partial g^*}{\partial t} + \frac{\partial g^*}{\partial \mathbf{y}} \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}). \quad (2.36)$$

Removendo-se os sobrescritos  $(**)$  e  $(*)$ , chega-se a equação fundamental para os desenvolvimentos utilizando a metodologia ALE:

$$\frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial t}\Big|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial g}{\partial t}\Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_y g. \quad (2.37)$$

Utilizando-se a definição de derivada material da Eq. 2.32 e comparando com a Eq. 2.13, pode-se rescrever a equação da quantidade de movimento da seguinte forma:

$$\rho \left( \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \mathbf{f} \right) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (2.38)$$

Para expressar então a equação da quantidade de movimento em uma descrição Euleriana-Lagrangeana, basta substituir na Eq. 2.38 a definição de derivada material apresentada na Eq. 2.37, e têm-se finalmente:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_y \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (2.39)$$

A equação da continuidade independe da movimentação da malha. Dessa forma a Eq. 2.4 se mantém a mesma para as análises usando uma descrição ALE. Assim, reescrevendo o conjunto de equações da DFC apresenta na Eq. 2.16 para um descrição ALE, têm-se:

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_y \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ em } \Omega \\ \nabla_y \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ em } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_D \text{ em } \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{h} \text{ em } \Gamma_N, \end{cases} \quad (2.40)$$

## 2.3 Forma fraca e discretização espacial das equações governantes

Tomando-se a forma forte das equações governantes da DFC em descrição ALE, aplica-se o método de resíduos ponderados para se chegar à forma fraca e proceder com a discretização espacial. Os espaços de dimensão finita das funções tentativa que descrevem a velocidade e a pressão são chamados de  $\mathcal{S}_u$  e  $\mathcal{S}_p$  respectivamente, e definidos como:

$$\mathcal{S}_u = \left\{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u}(\cdot, t) \in \left( H^1(\Omega) \right)^{n_{sd}}, \mathbf{u} = \mathbf{u}_D \text{ em } \Gamma_D \right\} \quad (2.41)$$

e

$$\mathcal{S}_p = \left\{ p \mid p(\cdot) \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} p \, d\Omega = 0 \text{ se } \Gamma = \Gamma_N \right\}, \quad (2.42)$$

sendo  $(H^1(\Omega))^{n_{sd}}$  o espaço de funções vetoriais com derivadas de quadrado integrável sobre  $\Omega$  e  $L^2(\Omega)$  o espaço de funções escalares que são de quadrado integrável sobre  $\Omega$ .

O espaço das funções teste ou funções peso das equações da quantidade de

movimento e da continuidade são definidos respectivamente por:

$$\mathcal{V}_u = \left\{ \mathbf{w} \mid \mathbf{w}(\cdot) \in \left( H^1(\Omega) \right)^{n_{sd}}, \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_D \right\}, \quad (2.43)$$

$$\mathcal{V}_p = \mathcal{S}_p. \quad (2.44)$$

Aplicando-se o método dos resíduos ponderados sobre as equações Eq. (2.39) e Eq.(2.4), integrando-se por partes o termo referente ao tensor de tensões de Cauchy, empregando-se o teorema da divergência e levando-se em consideração a condição de homogeneidade da função  $\mathbf{w}$  sobre o contorno  $\Gamma_D$ , obtém-se a forma fraca. A solução do problema consiste então em encontrar  $\mathbf{u} \in \mathcal{S}_u$  e  $p \in \mathcal{S}_p$ , de tal modo que  $\forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}_u$  e  $q \in \mathcal{V}_p$ , as seguintes expressões sejam verdadeiras:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\bar{x}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_y \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) : \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} d\Gamma_N = 0, \quad (2.45)$$

$$\int_{\Omega} q (\nabla_y \cdot \mathbf{u}) d\Omega = 0. \quad (2.46)$$

### 2.3.1 Método dos elementos finitos

Antes de prosseguir com a discretização espacial da forma fraca do conjunto de equações da Mecânica dos Fluidos, é fundamental compreender os princípios básicos do Método dos Elementos Finitos. A discretização espacial tanto pelo método dos elementos finitos, como pela técnica de análise isogeométrica (Cap. ??), consiste em, dado um problema com domínio  $\Omega$ , dividi-lo em subdomínios  $\Omega^e$ , também chamados de elementos ou células, de forma que:

$$\Omega \approx \Omega^h = \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \Omega^e, \quad (2.47)$$

onde  $\Omega^h$  é o domínio discretizado por subdomínios, com o índice  $h$  se referindo ao tamanho representativo dos elementos, e  $n_{el}$  representando o número total de elementos.

Da mesma forma o contorno do domínio também é discretizado da seguinte forma:

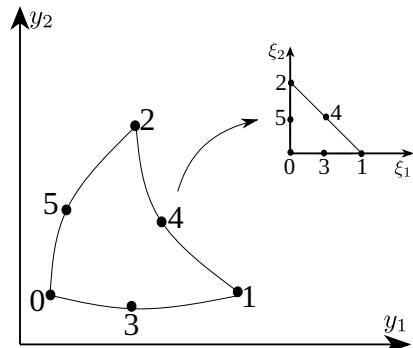
$$\Gamma \approx \Gamma^h = \bigcup_{b=1}^{n_{eb}} \Gamma^b, \quad (2.48)$$

onde  $n_{eb}$  representa o número de elementos que formam o contorno.

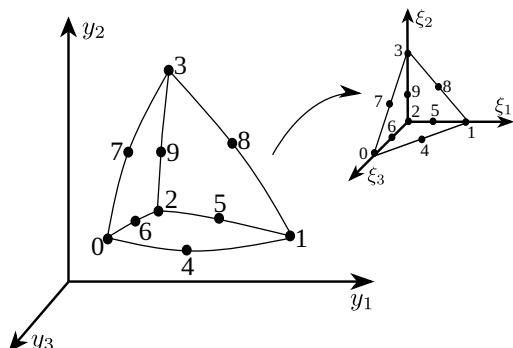
No Método dos Elementos Finitos, cada subdomínio, denominado elemento, é composto por um conjunto de pontos, chamados nós. As variáveis de interesse do problema, que incluem a geometria na abordagem isoparamétrica, são aproximadas pela combinação linear de um número finito de funções associadas aos nós, chamadas funções de forma, multiplicadas por variáveis chamadas parâmetros nodais. As funções de forma utilizadas no Método dos Elementos Finitos satisfazem, em geral, a propriedade de partição da

unidade, ou seja, a soma das funções de forma associadas a todos os nós de um elemento resulta em 1 para qualquer ponto dentro do domínio paramétrico do elemento. A técnica de elementos finitos pode ser estudada nos diversos livros disponíveis sobre o assunto, tais como Zienkiewicz, Taylor e Nithiarasu (2005a), Reddy (2006).

Nesse trabalho são utilizadas funções de forma quadráticas do tipo polinômios de Lagrange, sendo empregados elementos isoparamétricos triangulares para o caso 2D e tetraédricos para o caso 3D. Na Fig. 2.6a e Fig. 2.6b, pode-se observar os elementos finitos 2D e 3D respectivamente bem como os espaços paramétricos adimensionais adotados para definir as funções de forma.



(a) Elemento Finito 2d



(b) Elemento Finito 3d

Figura 2.6 – Elementos Finitos: representação espacial e paramétrica

Adotar a abordagem isoparamétrica implica que a geometria do problema é descrita também pela combinação entre funções de forma e as coordenadas nodais da malha, conforme equação abaixo:

$$\mathbf{y}^h = \sum_{A=1}^{n_{\text{nos}}} \mathbf{y}_A N_A(\mathbf{y}), \quad (2.49)$$

sendo que para uma geometria tridimensional o vetor  $\mathbf{y}$  possui coordenadas  $y_1, y_2$  e  $y_3$ , as quais representam as posições físicas do domínio; O subíndice "A" representa o índice dos nós da malha,  $n_{\text{nos}}$  o número total de nós e  $N$  as funções de forma da discretização.

A discretização das variáveis de interesse para DFC no contexto do método dos elementos finitos serão apresentados no seguinte capítulo (Cap. 2.3.2).

### 2.3.2 Discretização Espacial

Os espaços de função tentativa para velocidade e pressão, bem como as funções teste, no contexto dos métodos dos elementos finitos, são dados pela combinação linear de parâmetros nodais com funções de forma definidas sobre cada subdomínio, atendendo à partição da unidade, de forma que o problema da dinâmica dos fluidos fica definido como: encontrar  $\mathbf{u}^h \in \mathcal{S}_u^h$  e  $p^h \in \mathcal{S}_p^h$ , de tal modo que  $\forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_u^h$  e  $q^h \in \mathcal{V}_p^h$  a seguinte expressão seja verdadeira:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{w}^h \cdot \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_N} \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{h}^h d\Gamma_N + \int_{\Omega} q^h (\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u}^h) d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (2.50)$$

onde:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{y}, t) = \sum_{A=1}^{n_{\text{nos}}} \mathbf{u}_A(t) N_A(\mathbf{y}), \quad (2.51)$$

$$p^h(\mathbf{y}, t) = \sum_{A=1}^{n_{\text{nos}}} p_A(t) N_A(\mathbf{y}), \quad (2.52)$$

$$\mathbf{w}^h(\mathbf{y}) = \sum_{A=1}^{n_{\text{nos}}} \mathbf{w}_A N_A(\mathbf{y}), \quad (2.53)$$

$$q^h(\mathbf{y}) = \sum_{A=1}^{n_{\text{nos}}} q_A N_A(\mathbf{y}), \quad (2.54)$$

sendo as variáveis  $\mathbf{w}_A$  e  $q_A$  arbitrárias nas aproximações.

No entanto, as formulações obtidas pelo método de Galerkin são conhecidas por apresentarem oscilações espúrias em escoamentos dominados pela convecção. Uma das formas de se lidar com esse problema é a utilização de métodos estabilizados, como *Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin* (SUPG) (BROOKS; HUGHES, 1982; HUGHES; TEZDUYAR, 1984), aplicado nesse trabalho. Essa metodologia consiste em adicionar à equação da quantidade de movimento, o seu resíduo ponderado por  $\tau_{\text{SUPG}} ((\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{w}^h)$ , onde  $\tau_{\text{SUPG}}$  é um parâmetro de estabilização. Do ponto de vista numérico a aplicação de sobre o termo convectivo da equação da quantidade de movimento dá origem a um termo difusivo adicional, cuja viscosidade tem magnitude  $\tau_{\text{SUPG}}$ , e é responsável por garantir a estabilidade numérica em problemas com convecção dominante.

Para os problemas de escoamentos incompressíveis aqui analisados, deve-se levar em conta que os campos de velocidade e pressão não podem ser aproximados arbitrariamente, podendo levar à ocorrência de oscilações espúrias no campo de pressão. Para evitar isso, podem ser escolhidos elementos Taylor-Hood que obedeçam, à condição de *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi* (LBB) (BREZZI; FORTIN, 1991; ZIENKIEWICZ; TAYLOR; NITHIARASU, 2005; STRANG; FIX, 2008), ou pode-se recorrer a um método estabilizado.

Neste trabalho, para estabilização da pressão, emprega-se a técnica *Pressure Stabi-*

*lization Petrov Galerkin* (PSPG) (HUGHES; FRANCA; BALESTRA, 1986; TEZDUYAR et al., 1992a). Essa técnica consiste em adicionar à equação da continuidade, o resíduo da equação da quantidade de movimento ponderada pela função  $\tau_{\text{PSPG}} \left( \frac{\nabla_y q^h}{\rho} \right)$ , onde  $\tau_{\text{PSPG}}$  é um parâmetro de estabilização. Essa estabilização cria termos dependentes da pressão na equação da continuidade, responsáveis pela flexibilização do campo de pressão e por contornar a condição LBB.

Por fim, para prover maior estabilização em problemas com formação de vórtices, adiciona-se à equação da quantidade de movimento o resíduo da equação da continuidade ponderado por  $\nu_{\text{LSIC}} \rho \left( \nabla_y \cdot \mathbf{w}^h \right)$  (TEZDUYAR; OSAWA, 2000), sendo  $\nu_{\text{LSIC}}$  um parâmetro de estabilização. A estabilização  $\nu_{\text{LSIC}}$  dá origem a um termo do tipo mínimos quadrados, e que também introduz na formulação uma difusão artificial.

Nota-se que a consistência da formulação estabilizada é garantida, uma vez que são adicionados às equações seus resíduos ponderados. Os parâmetros de estabilização  $\tau_{\text{SUPG}}$ ,  $\tau_{\text{PSPG}}$  e  $\nu_{\text{LSIC}}$  têm função de proporcionar uma solução estável e otimizar a convergência durante o refinamento de malha. A obtenção dos parâmetros estabilizadores será discutida na Subseção 2.3.3.

Por fim, o problema da dinâmica dos fluidos passa a ser a determinação de  $\mathbf{u}^h \in \mathcal{S}_u^h$  e  $p^h \in \mathcal{S}_p^h$ , de tal modo que  $\forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_u^h$  e  $q^h \in \mathcal{V}_p^h$  as seguintes expressões sejam verdadeiras:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{w}^h \cdot \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_y \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_N} \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{h}^h d\Gamma_N + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_e} \tau_{\text{SUPG}} ((\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_y \mathbf{w}^h) \cdot \mathbf{r}_M(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_e} \rho \nu_{\text{LSIC}} \nabla_y \cdot \mathbf{w}^h r_C(\mathbf{u}^h) d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (2.55)$$

e

$$\int_{\Omega} q^h \nabla_y \cdot \mathbf{u}^h d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_e} \tau_{\text{PSPG}} \left( \frac{\nabla_y q^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_M(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega = 0, \quad (2.56)$$

onde  $\mathbf{r}_M$  e  $r_C$  são os resíduos da equação da quantidade de movimento e da equação da continuidade, respectivamente, dados por:

$$\mathbf{r}_M(\mathbf{u}^h, p^h) = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_y \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h, p^h), \quad (2.57)$$

$$r_C(\mathbf{u}^h) = \nabla_y \cdot \mathbf{u}^h. \quad (2.58)$$

A solução de modelos móveis requer a utilização de uma técnica adequada para movimentação da malha local. A técnica utilizada nesse trabalho é conhecida como MJBS (Mesh-Jacobian Based Stiffening) introduzida por Tezduyar et al. (1992f) e será abordada na Subseção ??.

Visto que existem funções teste separadas para a velocidade e pressão, pode-se

definir dois vetores residuais correspondentes a equação da quantidade de movimento ( $\mathbf{R}_M$ ) e a equação da continuidade ( $\mathbf{R}_C$ ). Considerando a arbitrariedade de  $\mathbf{w}_A$  e  $q_A$ , têm-se:

$$\mathbf{R}_M = [(\mathbf{R}_M)_{A,i}], \quad (2.59)$$

$$\mathbf{R}_C = [(\mathbf{R}_C)_A], \quad (2.60)$$

com:

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_M)_{A,i} = & \int_{\Omega} N_A \mathbf{e}_i \cdot \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_y \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(N_A \mathbf{e}_i) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_N} N_A \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{h}^h d\Gamma_N + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{SUPG} ((\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_y N_A \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{r}_M(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \rho \nu_{LSIC} (\nabla_y \cdot N_A \mathbf{e}_i) r_C(\mathbf{u}^h) d\Omega, \end{aligned} \quad (2.61)$$

e:

$$(\mathbf{R}_C)_A = \int_{\Omega} N_A \nabla_y \cdot \mathbf{u}^h d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{PSPG} \left( \frac{\nabla_y N_A}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_M(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega, \quad (2.62)$$

com  $i = 1, 2$  para problemas 2D e  $i = 1, 3$  para problemas 3D.

Considerando  $\dot{\mathbf{U}}$ ,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{p}$  os vetores nodais dos graus de liberdade respectivos a velocidade, aceleração e pressão, pode-se escrever a forma semidiscreta do problema da DFC como: Encontrar  $\dot{\mathbf{U}}$ ,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{p}$  de maneira que

$$\mathbf{R}_M(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}, \quad (2.63)$$

e

$$\mathbf{R}_C(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}. \quad (2.64)$$

### 2.3.3 Parâmetros de estabilização

Considerando que nesse trabalho dois tipos de aproximações espaciais são utilizadas, uma baseada no FEM e outra baseada em IGA, adotam-se os parâmetros propostos por Takizawa, Tezduyar e Otoguro (2018) e Otoguro, Takizawa e Tezduyar (2020), que são adequados para ambas aproximações.

Para essa opção é necessário definir-se o tensor métrico do elemento no espaço. Para isso, inicia-se com a definição da matriz Jacobiana  $\mathbf{Q}$ , dada por:

$$\mathbf{Q} = \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi} \right), \quad (2.65)$$

com  $\xi$  representando as coordenadas do espaço paramétrico, com componentes  $\xi_1, \xi_2$  e  $\xi_3$ .

Para que a ordem polinomial seja levada em consideração na determinação dos parâmetros de estabilização, aplica-se uma mudança de escala na matriz  $\mathbf{Q}$ , através da matriz  $\mathbf{D}$ , conforme a seguinte expressão:

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}\mathbf{D}^{-1}. \quad (2.66)$$

Para elementos finitos com funções de forma polinomiais de Lagrange de ordem  $p_i$ , na direções  $\xi_i$  do espaço paramétrico, com  $-1 \leq \xi_i \leq 1$ , a matriz  $\mathbf{D}$  é definida como:

e se a variação for de 0,1 ? tem alguma diferença

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} p_{\xi_1} & 0 & 0 \\ 0 & p_{\xi_2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{\xi_3} \end{bmatrix}. \quad (2.67)$$

A definição da matriz  $\mathbf{D}$  para elementos isogeométricos será descrita na Subseção ??.

O comprimento direcional do elemento é definido como:

$$h_{RQD} = 2(\mathbf{r}\mathbf{r} : \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.68)$$

sendo  $\mathbf{r}$  o vetor unitário na direção do gradiente da intensidade da velocidade e  $\mathbf{G}$  o tensor métrico do elemento, os quais são representados respectivamente como:

$$\mathbf{r} = \frac{\nabla_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|}{\|\nabla_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\|}, \quad (2.69)$$

e

$$\mathbf{G} = \hat{\mathbf{Q}}^{-T} \cdot \hat{\mathbf{Q}}^{-1}. \quad (2.70)$$

O comprimento do elemento é limitado pelos mínimos e máximos valores representados abaixo:

$$h_{min} \equiv 2 \min_r \left( (\mathbf{r}\mathbf{r} : \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}} \right), \quad (2.71)$$

$$h_{max} \equiv 2 \max_r \left( (\mathbf{r}\mathbf{r} : \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}} \right), \quad (2.72)$$

que podem ser reescritos como:

$$h_{min} = 2(\lambda_{max} \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.73)$$

$$h_{max} = 2(\lambda_{min} \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.74)$$

onde  $\lambda_{max}$  e  $\lambda_{min}$  representam os máximos e mínimos autovalores da matriz  $\mathbf{G}$ .

Os parâmetros de estabilização são dados por:

$$\tau_{SUPG} = \tau_{PSPG} = \left( \frac{1}{\tau_{SUGN1}^2} + \frac{1}{\tau_{SUGN2}^2} + \frac{1}{\tau_{SUGN3}^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.75)$$

$$\nu_{\text{LSIC}} = \frac{h_{\text{RQD}}^2}{\tau_{\text{SUPG}}}, \quad (2.76)$$

onde:

$$\tau_{\text{SUGN1}}^{-2} = (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) : \mathbf{G}, \quad (2.77)$$

$$\tau_{\text{SUGN2}} = \frac{\Delta t}{2}, \quad (2.78)$$

e

$$\tau_{\text{SUGN3}}^{-1} = \nu \left( \mathbf{r}_{\text{reg}} \mathbf{r}_{\text{reg}} : \mathbf{G} + (1 - \mathbf{r}_{\text{reg}}^2) 4 h_{\min}^{-2} \right), \quad (2.79)$$

sendo  $\mathbf{r}_{\text{reg}}$  definido como:

$$\mathbf{r}_{\text{reg}} = \frac{\nabla_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|}{\|\nabla_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\| + \varepsilon (\|\nabla_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\|)_0}, \quad (2.80)$$

com  $\varepsilon$  uma constante pequena e  $(\|\nabla_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\|)_0$  um valor de referência. Os termos  $\tau_{\text{SUGN1}}$ ,  $\tau_{\text{SUGN2}}$  e  $\tau_{\text{SUGN3}}$  são parâmetros correspondentes aos termos convectivos, iniciais e viscosos, respectivamente.

## 2.4 Integração Temporal

Para a integração temporal das equações governantes, utiliza-se o método  $\alpha$ -generalizado. Esse método foi proposto inicialmente por Chung e Hulbert (1993) no contexto da mecânica das estruturas, e foi estendido para o contexto da dinâmica dos fluidos computacional por Jansen, Whiting e Hulbert (2000).

Considerando que o tempo da análise do problema é definido por um intervalo de  $[0, T]$ , o qual é particionado em subintervalos  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ , com  $t_n$  e  $t_{n+1}$  os instantes anterior e atual, respectivamente. A solução do problema consiste em: conhecida a solução nos graus de liberdade nodais ( $\dot{\mathbf{U}}$ ,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{p}$ ) no passo de tempo  $n$ , encontrar a solução no passo de tempo  $n + 1$  de forma que:

$$\mathbf{R}_M(\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}, \mathbf{U}_{n+\alpha_f}, \mathbf{p}_{n+1}) = \mathbf{0}, \quad (2.81)$$

$$\mathbf{R}_C(\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}, \mathbf{U}_{n+\alpha_f}, \mathbf{p}_{n+1}) = \mathbf{0}, \quad (2.82)$$

com:

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m} = \dot{\mathbf{U}}_n + \alpha_m (\dot{\mathbf{U}}_{n+1} - \dot{\mathbf{U}}_n), \quad (2.83)$$

$$\mathbf{U}_{n+\alpha_f} = \mathbf{U}_n + \alpha_f (\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n), \quad (2.84)$$

sendo  $\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}$  e  $\mathbf{U}_{n+\alpha_f}$  valores intermediários entre  $t_n$  e  $t_{n+1}$  do vetor aceleração e velocidade. A relação entre os valores nodais de aceleração e velocidade são calculados de acordo com

fórmula discreta de Newmark (ver, por exemplo, (HUGHES, 1976)):

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta t \left( (1 - \gamma) \dot{\mathbf{U}}_n + \gamma \dot{\mathbf{U}}_{n+1} \right). \quad (2.85)$$

Os parâmetros que definem o instante intermediário, no qual as variáveis serão calculadas, são determinados de forma a proporcionarem estabilidade e precisão ao método. Seguindo a metodologia proposta por Jansen, Whiting e Hulbert (2000), uma precisão de segunda ordem é obtida, para casos lineares, desde que:

$$\gamma = 1/2 + \alpha_m - \alpha_f, \quad (2.86)$$

enquanto que a estabilidade do problema é incondicional com:

$$\alpha_m \geq \alpha_f \geq 1/2. \quad (2.87)$$

Para proporcionar a precisão de segunda-ordem de convergência e estabilidade da solução, pode-se calcular o parâmetro  $\gamma$  de acordo com Eq. 2.86 e  $\alpha_m$ ,  $\alpha_f$ , através de (HUGHES, 2000):

$$\alpha_m = \frac{1}{2} \left( \frac{3 - \rho_\infty}{1 + \rho_\infty} \right) \quad (2.88)$$

$$(2.89)$$

e

$$\alpha_f = \frac{1}{1 + \rho_\infty}. \quad (2.90)$$

O parâmetro  $\rho_\infty$  é conhecido como raio espectral da matriz de amplificação quando  $\Delta t_n \rightarrow \infty$ . Esse parâmetro controla a dissipação numérica em altas frequências realizada pelo processo de integração e está contido no intervalo de  $[0, 1]$ . Para  $\rho_\infty = 0$  a dissipação é máxima e para  $\rho_\infty = 1$  não há introdução de difusão numérica ao método.

Para a solução do sistema de equações não lineares compostas por Eq. (2.81) e Eq. (2.82) utiliza-se o método de Newton-Raphson. O método pode ser separado em duas etapas, uma etapa preditiva e outra iterativa corretiva (BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013).

Na etapa preditiva, conhecida a solução em um passo de tempo  $n$ , prediz-se a solução em  $n + 1$  com as seguintes equações:

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \dot{\mathbf{U}}_n, \quad (2.91)$$

$$\mathbf{U}_{n+1}^0 = \mathbf{U}_n, \quad (2.92)$$

$$\mathbf{p}_{n+1}^0 = \mathbf{p}_n, \quad (2.93)$$

onde o índice 0 representa a iteração de número zero.

Na etapa iterativa corretiva, itera-se sobre a Eq. (2.81) e Eq. (2.82) até que elas sejam satisfeitas, considerando uma tolerância prescrita, ou até que se alcance uma quantidade máxima de iterações pré-estabelecida. Essa etapa é composta por três fases. A fase 1 consiste em determinar os valores no instante intermediário para as variáveis nodais na iteração  $i$ :

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}^i = \dot{\mathbf{U}}_n + \alpha_m (\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i - \dot{\mathbf{U}}_n), \quad (2.94)$$

$$\mathbf{U}_{n+\alpha_f}^i = \mathbf{U}_n + \alpha_f (\mathbf{U}_{n+1}^i - \mathbf{U}_n), \quad (2.95)$$

$$\mathbf{p}_{n+1}^i = \mathbf{p}_{n+1}^i. \quad (2.96)$$

Na fase 2, com os valores intermediários das variáveis nodais resolve-se o sistema linear resultante da linearização das equações Eq. (2.81) e Eq. (2.82) com respeito às variáveis de interesse  $\mathbf{p}_{n+1}$  e  $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{R}_M}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{n+1}} \Big|_i \Delta \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i + \frac{\partial \mathbf{R}_M}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} \Big|_i \Delta \mathbf{p}_{n+1}^i = -\mathbf{R}_M^i, \quad (2.97)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_C}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{n+1}} \Big|_i \Delta \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i + \frac{\partial \mathbf{R}_C}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} \Big|_i \Delta \mathbf{p}_{n+1}^i = -\mathbf{R}_C^i. \quad (2.98)$$

Por fim, na fase 3 atualiza-se a solução através das seguintes relações:

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^{i+1} = \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i + \Delta \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i, \quad (2.99)$$

$$\mathbf{U}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{U}_{n+1}^i + \gamma \Delta t \Delta \mathbf{U}_{n+1}^i, \quad (2.100)$$

$$\mathbf{p}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{p}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{p}_{n+1}^i. \quad (2.101)$$

Na utilização do método  $\alpha$ -generalizado as integrais das equações Eq. (2.81) e Eq. (2.82) são avaliadas no instante  $t = t_{n+\alpha_f}$ , de forma que:

$$\int_{\Omega} (.) d\Omega = \int_{\Omega_{t_{n+\alpha_f}}} (.) d\Omega, \quad (2.102)$$

e, por consequência:

$$\Omega_{t_{n+\alpha_f}} = \left\{ \mathbf{y}^h \mid \mathbf{y}^h(\bar{\mathbf{x}}^h, t_{(n+\alpha_f)}) = \alpha_f \mathbf{y}^h(\bar{\mathbf{x}}^h, t_{n+1}) + (1 - \alpha_f) \mathbf{y}^h(\bar{\mathbf{x}}^h, t_n) \right\}. \quad (2.103)$$

## 2.5 Implementação Computacional

O Algoritmo que descreve a implementação computacional tanto de problemas utilizando o método dos elementos finitos, quanto para problemas utilizando a análise Isogeométrica, é apresentado no Alg. 1.

---

**Algoritmo 1** Algoritmo para problemas de dinâmica dos fluidos computacional

---

```

1: para o passo de tempo 0 até  $T$  faça
2:    $i = 0$ ;
3:   Predição da solução: aplicação das Eq. (2.91), Eq. (2.92) e Eq. (2.93);
4:   enquanto ( $\epsilon <$  tolerância) faça
5:      $i++$ ;
6:     Interpolação das variáveis do problema: aplicação da Eq. (2.94), Eq. (2.95) e
    Eq. (2.96);
7:     Cálculo do incremento nas variáveis do problema:  $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$  e  $\mathbf{p}_{n+1}$  de acordo com
    as Eq. (2.97) e Eq. (2.98);
8:     Atualização da solução: calculadas de acordo com Eq. (2.99), Eq. (2.100) e Eq.
    (2.101).
9:     Cálculo do erro:

$$\epsilon = \|\mathbf{R}_M^i\|_{L^2} \quad (2.104)$$

10:    fim enquanto
11: fim para

```

---

## 2.6 Verificação e Aplicações

Para a verificação dos códigos baseados no método dos elementos finitos, adotam-se 2 exemplos muito populares nas bibliografias: Escoamento sobre um cilindro e o problema da cavidade quadrada, os quais são apresentados na subseções sequentes.

### 2.6.1 *Escoamento sobre um cilindro*

O estudo do problema de um escoamento sobre um cilindro 2D teve como principal intuito a análise dos coeficientes aerodinâmicos medidos ao longo do tempo e verificar consequentemente se o modelo é capaz de reproduzir os fenômenos relacionados à formação e desprendimento de vórtices característicos desse problema. Para isso, diferentes números de Reynolds (Re) foram estudados,  $Re = 40, 100$  e  $1000$ , os quais são calculados de acordo com a seguinte equação:

$$Re = \frac{\rho L \| \mathbf{u}_\infty \|}{\mu} = \frac{L \| \mathbf{u}_\infty \|}{\nu}, \quad (2.105)$$

com  $L$  a dimensão característica do problema, sendo nesse caso o diâmetro do cilindro, e  $\nu$  a viscosidade cinemática do fluido.

A geometria e condições de contorno são apresentadas na Fig. 2.7a. Como pode-se observar trata-se de um domínio retangular, parametrizado em função do diâmetro do cilindro, com um perfil constante de velocidade na entrada e condição de parede lisa nas paredes superior e inferior. No contorno denominado como *saída*, não se conhece o comportamento do escoamento, desta forma, determina-se sua posição no domínio computacional a uma distância grande o suficiente de maneira a não interferir no comportamento do

escoamento.

Na Fig. 2.7b pode-se observar a malha não-estruturada de elementos finitos utilizada para esse problema, composta por 9122 elementos triangulares quadráticos e 18508 nós. O problema foi simulado para um velocidade de entrada  $u_\infty = 1,0$ ,  $\rho = 1,0$ ,  $\Delta t = 0,05$ , e  $\rho_\infty = 0,5$ .

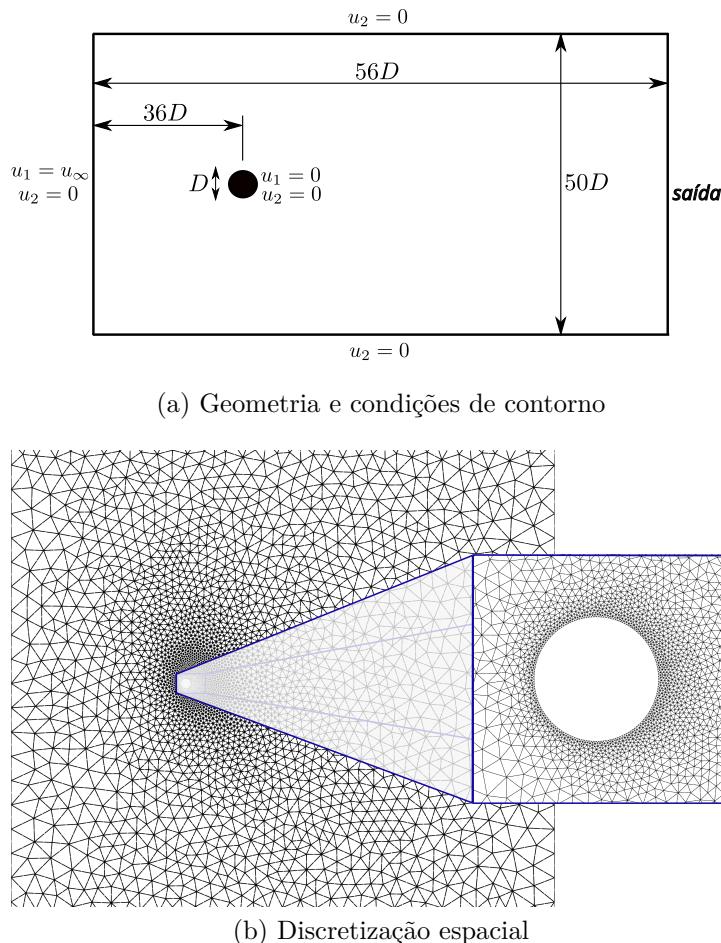


Figura 2.7 – Cilindro: Geometria, condições de contorno e malha de elementos finitos.

Para o cálculo dos coeficientes aerodinâmicos é necessário definir-se primeiramente as forças de arrasto - horizontal ( $F_D$ ) e de sustentação - vertical ( $F_L$ ), que são induzidas por tensões desviadoras e hidrostáticas e são calculadas pelas seguintes equações:

$$F_D = \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\sigma}_{1j} n_j d\Gamma_c, \quad (2.106)$$

$$F_L = \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\sigma}_{2j} n_j d\Gamma_c, \quad (2.107)$$

nas quais o símbolo  $\Gamma_c$  representa o contorno do cilindro e  $n_j$  é o vetor normal à essa superfície na direção  $j$ , com  $j = 1, 2$ . Os coeficientes de arrasto e sustentação são definidos respectivamente por:

$$C_D = \frac{F_D}{0,5\rho\|\mathbf{u}_\infty\|^2 L}, \quad (2.108)$$

$$C_L = \frac{F_L}{0,5\rho\|\mathbf{u}_\infty\|^2 L}, \quad (2.109)$$

Devido ao fenômeno de desprendimento de vórtices que ocorre a partir de determinado número de Reynolds do escoamento, é usual determinar-se a frequência deste fenômeno através do número adimensional de Strouhal (St), dado por:

$$St = \frac{f_v L}{\|\mathbf{u}_\infty\|}, \quad (2.110)$$

com  $f_v$  sendo a frequência de desprendimento dos vórtices.

Como pode-se observar na Fig. 2.8 para  $Re = 40$ , os coeficientes de arrasto e de sustentação, após o escoamento entrar em fase estacionária, se mantém constantes ao longo de todo o tempo de análise. Isso ocorre, visto que para Reynolds entre 5 à 50, aproximadamente, formam-se dois vórtices simétricos e estacionários na região logo após o cilindro. Posteriormente, o par de vórtices se quebra e passa existir a chamada esteira de Von Karmán, que ocorre devido à formação de vórtices de maneira alternada entre as regiões superior e inferior do cilindro, o que pode ser notado também na Fig. 2.8 para  $Re = 100$  e  $Re = 1000$ . Os valores do coeficiente de Strouhal, para  $Re = 100$  e  $Re = 1000$ , foram de 0,1665 e 0,2381 respectivamente. Os valores obtidos para os coeficientes aerodinâmicos foram os esperados para o problema em questão (ver, por exemplo, Tonon (2016), Henderson (1997)).

Nas Fig. 2.9 e Fig. 2.10 podem ser observados os campos de velocidade e pressão ao longo de um ciclo de desprendimento de vórtices para  $Re = 100$ . Pode-se notar nessas imagens, a formação e o desprendimento de vórtices na esteira de Von Karmán.

## 2.6.2 Cavidade quadrada

Para a verificação do código 3D utilizando elementos finitos o problema de uma cavidade quadrada com velocidade prescrita  $u_\infty$  em sua parede superior foi estudado. A geometria do problema em questão e o conjunto de suas condições de contorno são apresentadas na Fig. 2.11a. As paredes da cavidade são rígidas, com paredes laterais e do fundo com condição de aderência, e adicionalmente, condição de simetria na direção  $y_3$ . A cavidade possui na direção  $y_3$  uma espessura de 0,03. A discretização espacial em elementos finitos utilizada é apresentada na Fig. 2.11b, a qual consiste em 7252 elementos tetraédricos quadráticos e 14727 nós.

O problema é estudado para os números de Reynolds: 100, 400 e 1000. O número de Reynolds foi calculado de acordo com Eq. (2.105), com  $L$  equivalente ao comprimento

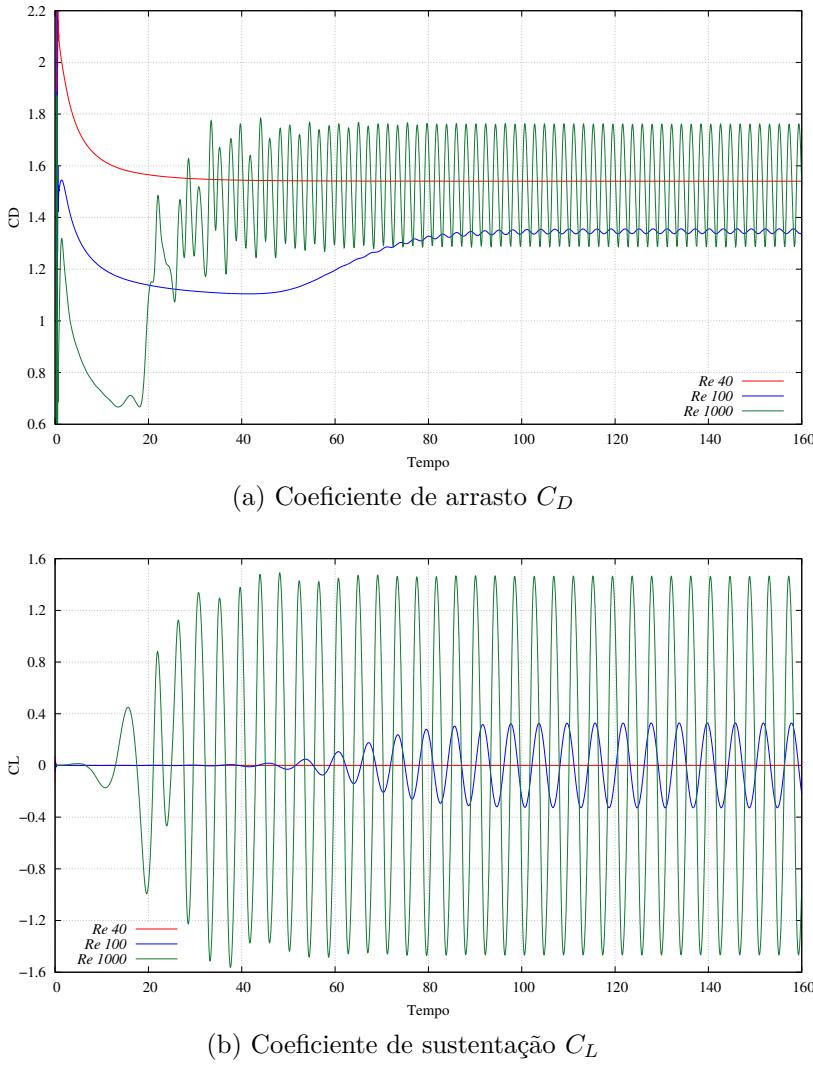


Figura 2.8 – Cilindro: Coeficientes aerodinâmicos.

do lado da cavidade. O problema foi simulado para uma velocidade na parede superior de  $u_\infty = 1,0$ ,  $\rho = 1,0$ ,  $\Delta t = 0,05$ , e  $\rho_\infty = 0$ , sendo a viscosidade do fluido variada de modo a alterar o número de Reynolds. A simulação foi mantida até que se atingiu o estado estacionário de escoamento.

Os perfis de velocidade adimensionaisizados ( $\mathbf{u}/u_\infty$ ) ao longo de duas linhas centrais nas direções  $y_1$  e  $y_2$  posicionadas no centro da espessura da direção  $y_3$  da cavidade são apresentados na Fig. 2.12 e comparados com a referência de Ghia, Ghia e Shin (1982).

Os campos de velocidade e de pressão são apresentados nas figuras Fig 2.13 e 2.14 respectivamente. Ressalta-se que para a solução do problema, por se tratar de um problema com todos os contornos com condição de Dirichlet impostas, a pressão torna-se indefinida. Por esse motivo, prescreveu-se uma pressão  $p = p_{ref} = 0.0$  no canto superior direito da cavidade.

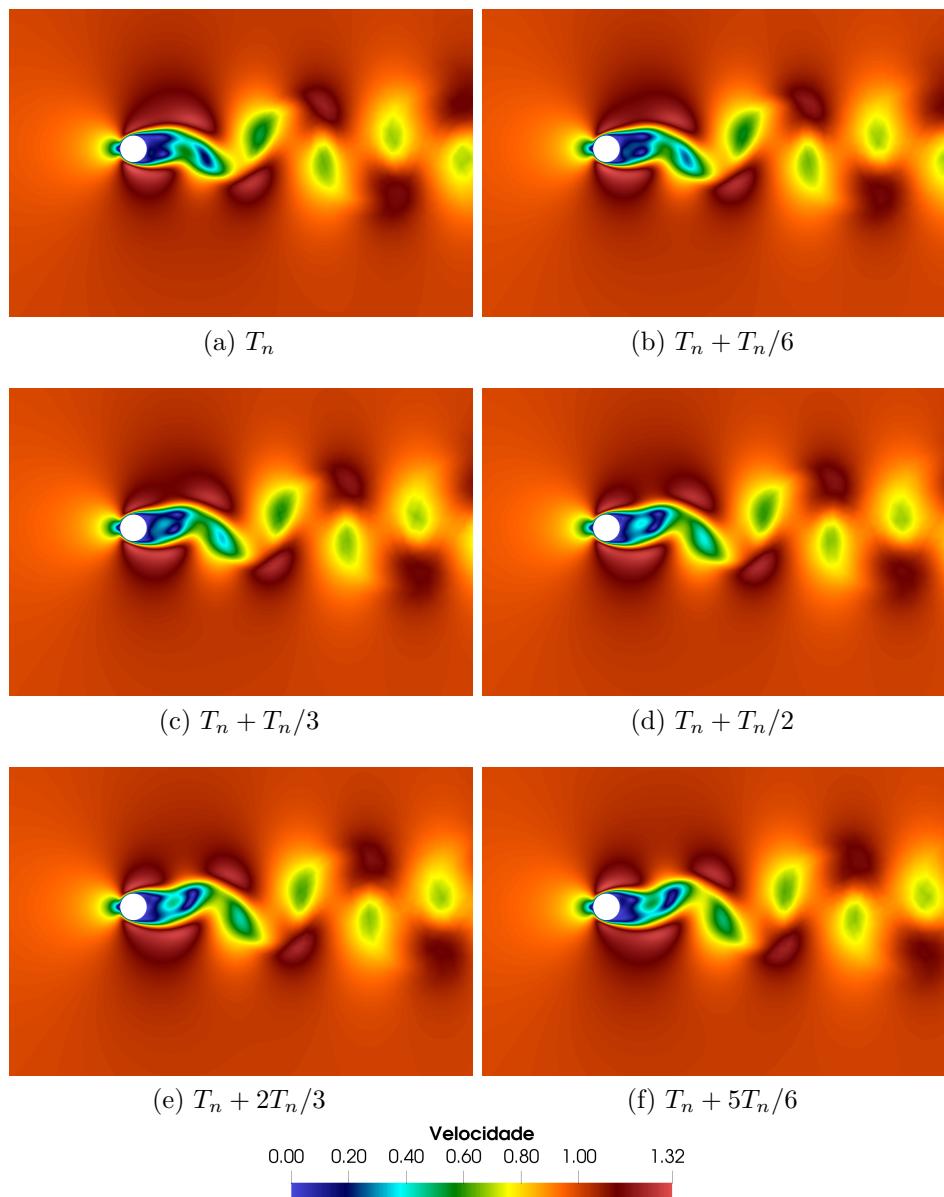


Figura 2.9 – Cilindro: Campos de velocidade

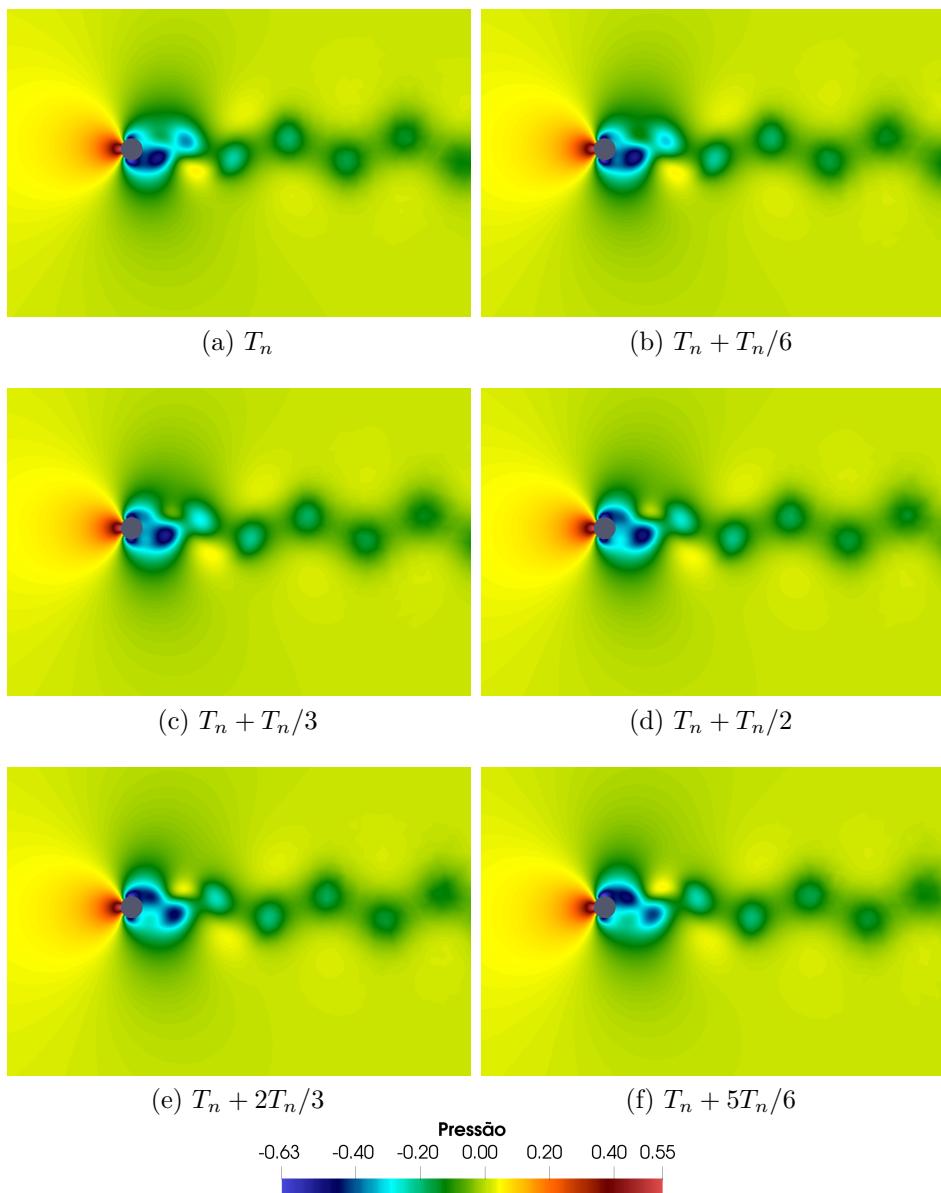
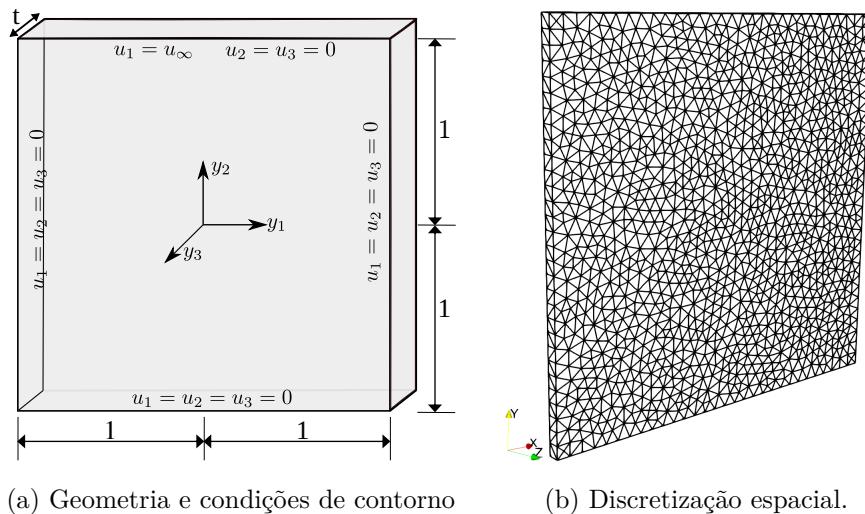


Figura 2.10 – Cilindro: Campos de pressão



(a) Geometria e condições de contorno

(b) Discretização espacial.

Figura 2.11 – Cavidade quadrada: Geometria, condições de contorno e malha de elementos finitos

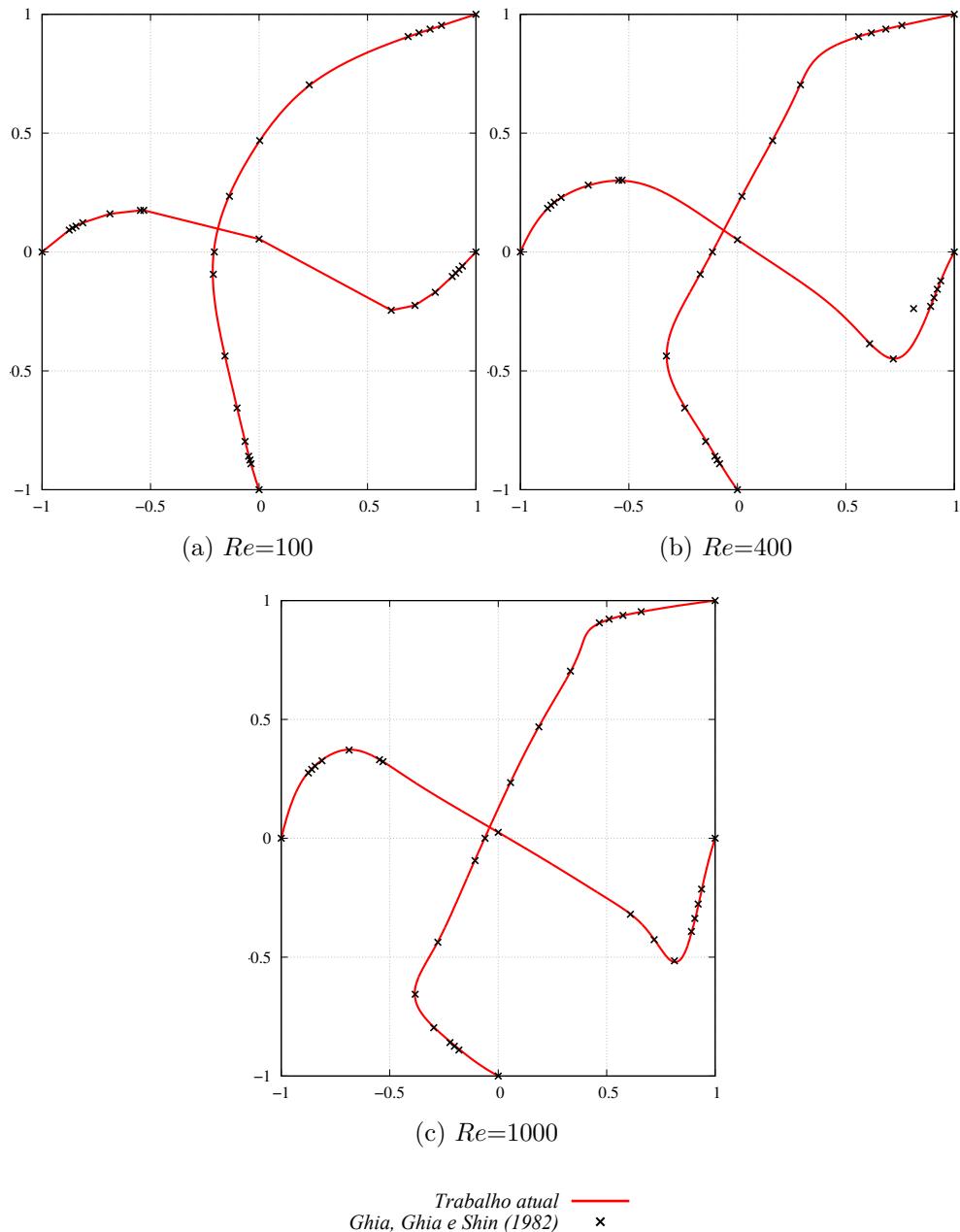


Figura 2.12 – Cavidade quadrada: Perfis de velocidade adimensionais nas direções  $y_1$  e  $y_2$

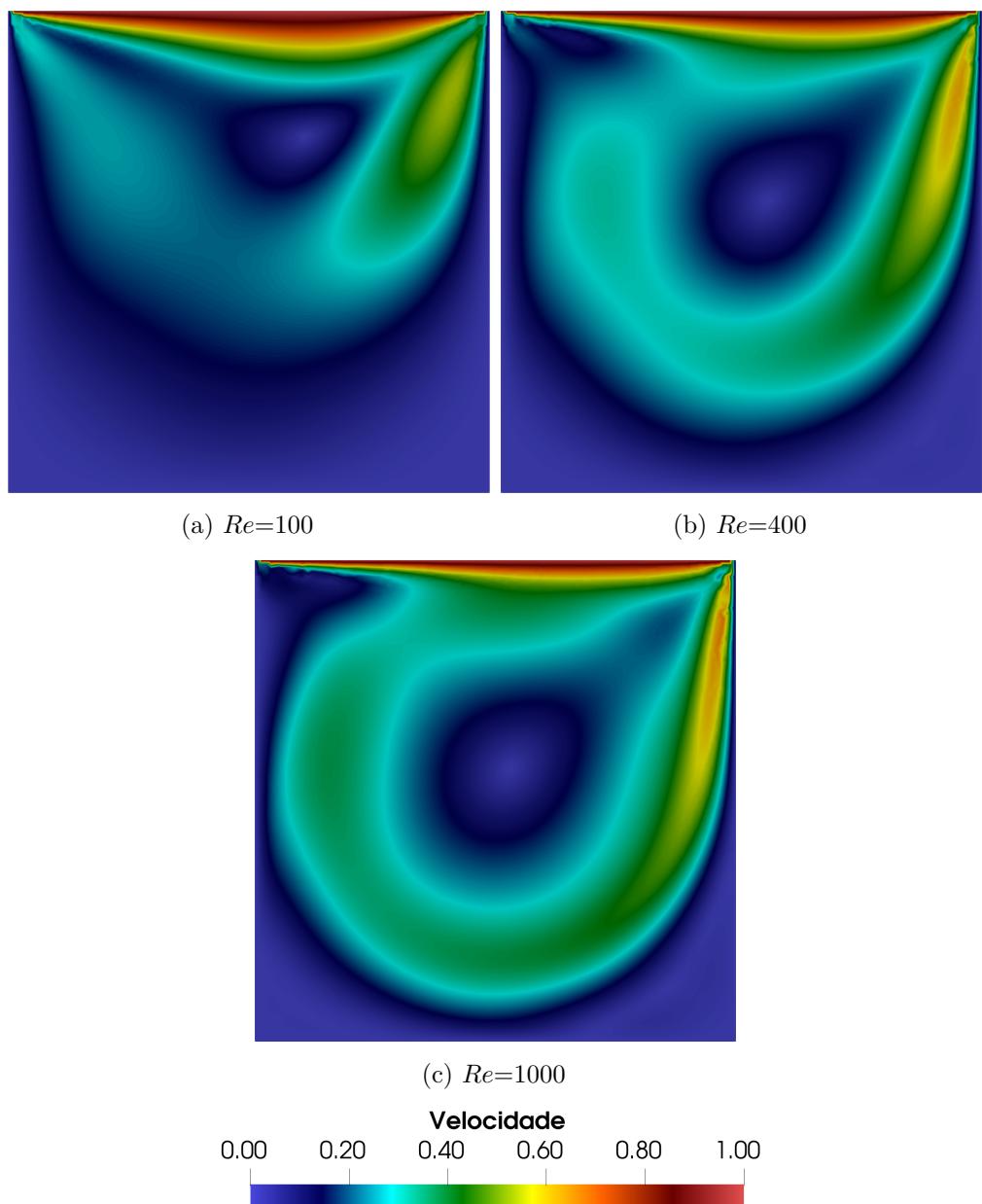


Figura 2.13 – Cavidade quadrada: Campos de velocidade.

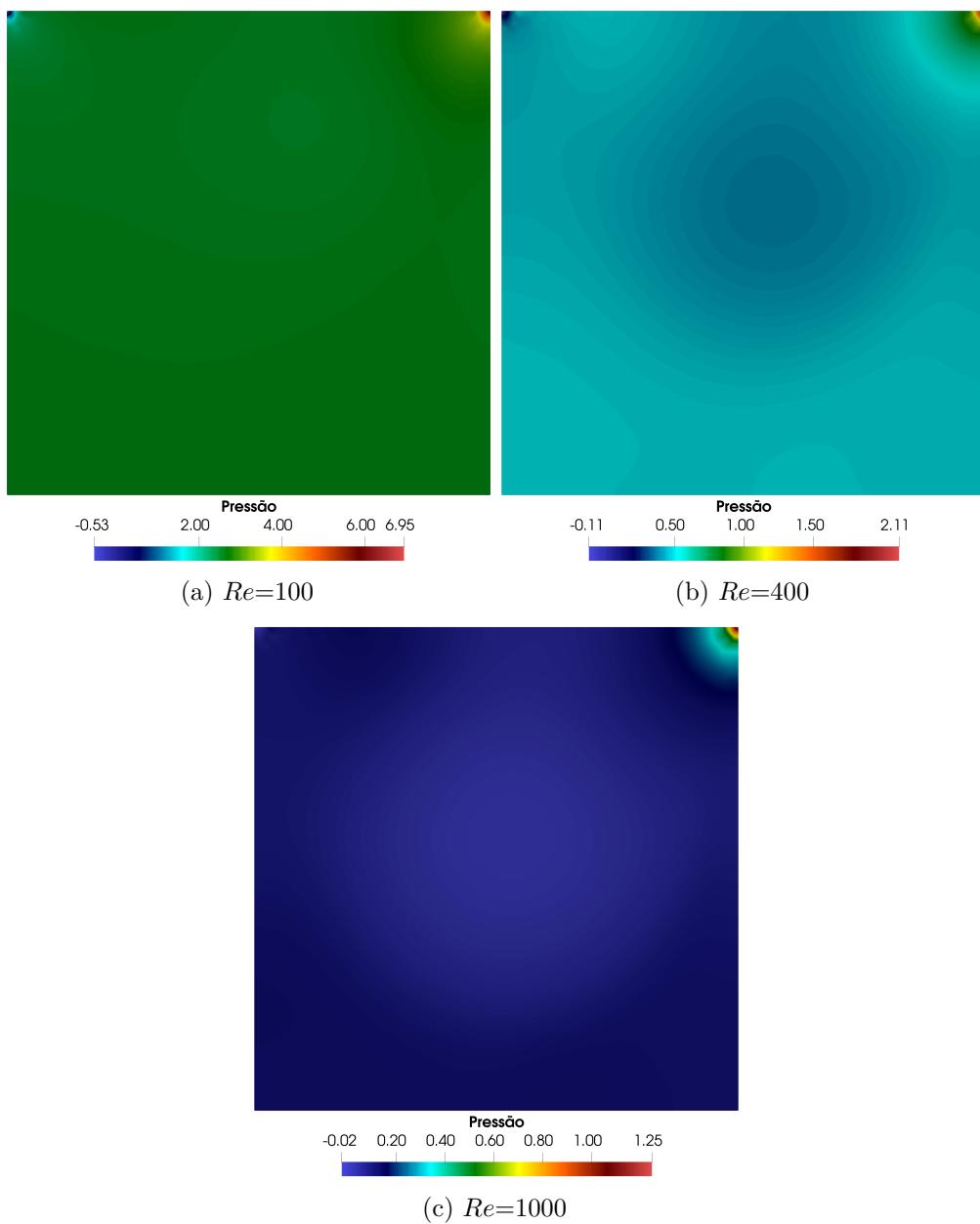


Figura 2.14 – Cavidade quadrada: Campos de pressão.

CAPÍTULO

---

# 3

# TÉCNICA DE DECOMPOSIÇÃO DE DOMÍNIOS ATRAVÉS DO MÉTODO DE ARLEQUIN ESTABILIZADO - RBSAM

---



---

Com intuito de superar as dificuldades encontrados com a técnica de decomposição de domínios apresentada no Cap. ??, neste capítulo será apresentado o método multiescala Arlequin que permite também levar em conta efeitos localizados através do uso de um modelo local mais refinado superposto a um modelo global com discretização mais grosseira. No método Arlequin, o processo é realizado através do cruzamento e colagem entre os modelos em uma zona de colagem através da utilização de um operador de acoplamento.

A primeira parte deste capítulo descreve o método clássico de Arlequin, introduzido por Ben Dhia (1998). Em seguida, será apresentada a técnica de estabilização (RBSAM) proposta por Fernandes et al. (2020) para o método de Arlequin no contexto de escoamentos incompressíveis. Na sequência, será discutida a extensão dessa metodologia para problemas com contornos móveis. Por fim, serão apresentados o algoritmo da implementação computacional e exemplos de validação

## 3.1 Método Arlequin

O método Arlequin, introduzido por Ben Dhia (1998), consiste na superposição de um domínio local a um domínio global em uma região de efeitos localizados. Os modelos, local e global, são acoplados em uma zona de colagem através de um operador

de acoplamento conveniente.

O método de Arlequin, de acordo com Dhia e Rateau (2005), é baseado em três principais ideias (ver Fig. 3.1):

- Um domínio local  $\Omega_1$  é sobreposto em um domínio global  $\Omega_0$  em uma zona de interesse de modo a representar efeitos locais;
- Os modelos são colados um ao outro em uma subzona da zona de superposição ( $\Omega_s$ ), chamada de zona de colagem ( $\Omega_c$ ), através de um operador de acoplamento conveniente;
- Garante-se a distribuição da energia entre os modelos através do emprego de uma função ponderadora, definida a partir da partição da unidade;

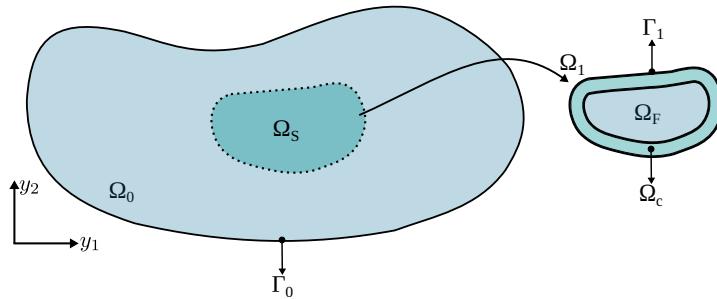


Figura 3.1 – Domínio local e global.

Dessa forma, o domínio computacional do problema é definido por:

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_1, \quad (3.1)$$

a zona de superposição,  $\Omega_s$ , pode ser definida matematicamente da seguinte forma:

$$\Omega_s = \Omega_0 \cap \Omega_1, \quad (3.2)$$

$$\Omega_s = \Omega_c \cup \Omega_{fr}, \quad (3.3)$$

$$\Omega_s > 0, \quad (3.4)$$

sendo  $\Omega_{fr}$  a chamada zona livre.

Umas das formas mais comuns de se realizar o acoplamento entre os modelos na zona de colagem  $\Omega_c$  é através da aplicação de campos de multiplicadores de Lagrange. Uma forma generalizada de representar os operadores de acoplamento é apresentada em Dhia e Rateau (2002), da maneira que se segue:

$$(\boldsymbol{\lambda}, \Delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega_c} k_0 [\boldsymbol{\lambda} \cdot \Delta \mathbf{u}] + k_1 [\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u})] \, d\Omega_c, \quad (3.5)$$

onde  $\lambda$  é o campo de multiplicadores de Lagrange,  $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u}_0|_{\Omega_c} - \mathbf{u}_1|_{\Omega_c}$  é a diferença entre os campos acoplados na zona de colagem.  $k_0$  e  $k_1$  são constantes estritamente positivas.

Quando  $k_0 > 0$  e  $k_1 = 0$  têm-se o operador de acoplamento  $L^2$ . Esse acoplador estabelece a continuidade de ordem 0 do campo compatibilizado, que significada que ele garante no sentido de forma fraca, a continuidade das variáveis ao longo da zona de colagem. Para valores  $k_0 > 0$  e  $k_1 > 0$  obtém-se o operador de acoplamento  $H^1$ , estabelecendo continuidade de ordem 1 do campo compatibilizado, garantindo no sentido de forma fraca, a continuidade de uma combinação de variáveis e seu Laplaciano (GUIDAULT; BELYTSCHKO, 2007).

O sucesso do método, indiferente do tipo de operador adotado, depende da escolha apropriada dos parâmetros  $k_0$  e  $k_1$ . Para o acoplamento utilizando  $L^2$ , devido a simplicidade da aplicação da restrição dos campos compatibilizados na zona de colagem, o condicionamento do sistema depende fortemente da adoção do parâmetro  $k_0$ , sendo esta uma das razões pela qual a maioria dos trabalhos realizados utilizando o método Arlequin aplica o operador  $H^1$ . A obtenção de parâmetros ótimos para o método pode ser uma tarefa difícil, sendo esse um dos fatores que levaram Fernandes et al. (2020) ao desenvolvimento da técnica RBSAM que será discutida na próxima seção.

A definição do espaço de funções para os operadores de Lagrange é muito importante. O método apresenta flexibilidade para usar uma discretização diferente da zona de colagem, entretanto, usualmente se adota um subconjunto do espaço de funções de um dos modelos sobrepostos. A escolha por um modelo ou outro pode conduzir a um maior ou menor acoplamento, sendo a escolha definida em função da aplicação desejada.

Por fim, para que o método não adicione energia ao sistema, é necessário que seja definida uma função ponderadora, denominada ( $\alpha$ ), que garanta a distribuição da energia do sistema ao longo dos modelos sobrepostos. Em geral, essa função é definida da seguinte forma:

$$\begin{cases} \alpha_0 \in [ka; 1] \text{ em } \Omega, \\ \alpha_0 = 1 \text{ em } \Omega_0 \setminus \Omega_1, \\ \alpha_0 = k_a > 0 \text{ em } \Omega_{fr}, \\ \alpha_0 + \alpha_1 = 1 \text{ em } \Omega, \end{cases} \quad (3.6)$$

com  $k_a$  uma constante arbitrariamente pequena para o método de Arlequin ser relevante (BEN DHIA, 2008), conforme pode ser observado na Fig. 3.2.

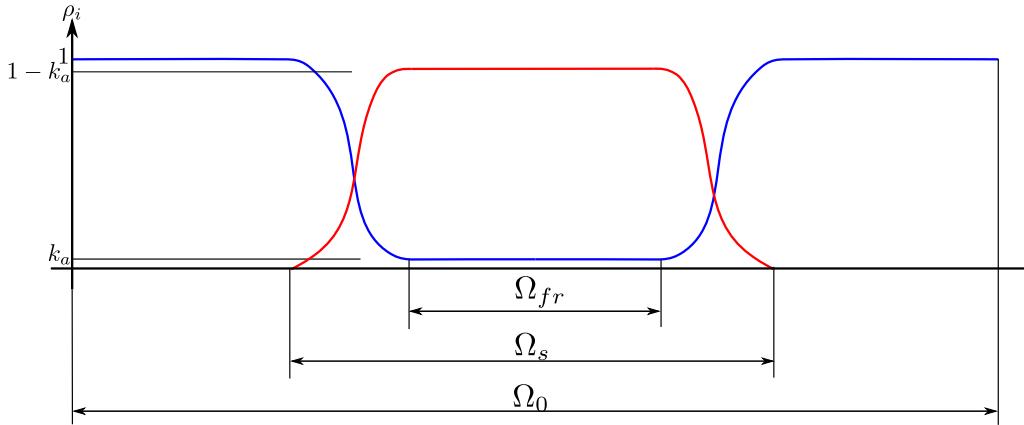


Figura 3.2 – Função Ponderadora

## 3.2 Método Arlequin clássico aplicado à problemas de escoamentos incompressíveis

O método Arlequin vem sendo aplicado amplamente em diversos trabalhos da mecânica dos sólidos nas últimas décadas. Entretanto, no que diz respeito a materiais incompressíveis, pode-se citar mais recentemente o trabalho de Jamond e Ben Dhia (2013), no qual os autores desenvolvem uma técnica para análise empregando elementos do tipo Taylor-Hood, que satisfazem a condição LBB. Essa metodologia é testada também para problemas descritos pelas equações de Stokes.

De acordo com os autores Jamond e Ben Dhia (2013) a principal dificuldade encontrada para aplicação do método Arlequin no contexto de materiais incompressíveis é que duas restrições devem ser aplicadas concomitantemente: a compatibilização dos campos de interesse na zona de colagem e a condição de incompressibilidade do material nessa mesma região. Os autores apontaram que a imposição da condição de incompressibilidade em ambos os modelos pode gerar problema de redundância, acarretando em um sistema algébrico associado singular.

A solução proposta pelos autores nesse trabalho foi a aplicação da condição de incompressibilidade em cada ponto do domínio computacional apenas uma vez. A metodologia consiste então da remoção da condição de incompressibilidade dos elementos total ou parcialmente encontrados na zona de colagem ( $\Omega_c$ ) em um dos modelos. Indiferente do modelo eleito para a remoção da condição de incompressibilidade na zona de colagem, na zona livre, a condição de incompressibilidade é removida do modelo global. Deve-se destacar que no trabalho citado existem algumas recomendações com relação a estabilidade da metodologia, como, por exemplo, a necessidade de existir pelo menos um elemento global na zona livre. Tal trabalho não explora as possíveis mudanças que acarretariam na estabilidade numérica em caso de sucessivas remoções e inclusões de condição de

incompressibilidade no caso de um modelo local móvel.

Por esse motivo, e pelas pesquisas anteriores já realizadas pela presente autora e seu grupo de pesquisa, optou-se pela adoção de elementos estabilizados, os quais já foram retratados no Cap. 2.

Para a construção do método de Arlequin clássico precisamos retomar às equações para um monomodelo apresentadas no Cap. 2 que representam a forma fraca discretizada espacialmente e estabilizada das equações da quantidade de movimento e da continuidade. Entretanto, será usada inicialmente uma descrição Euleriana dessas equações nesse capítulo.

Considerando os espaços de dimensão finita das funções tentativa que descrevem a velocidade ( $\mathcal{S}_{ui}^h$ ) e a pressão ( $\mathcal{S}_{pi}^h$ ) e seus respectivos espaços de funções testes  $\mathcal{V}_{ui}^h$  e  $\mathcal{V}_{pi}^h$ , com  $i = 0, 1$  indicando o índice do modelo, definidos como:

$$\mathcal{S}_{ui}^h = \left\{ \mathbf{u}_i^h \mid \mathbf{u}_i^h(\cdot, t) \in (H^{1h}(\Omega_i), \mathbf{u}_i^h = \mathbf{u}_{Di}^h \text{ em } \Gamma_{Di}) \right\} \quad (3.7)$$

$$\mathcal{S}_{pi}^h = \left\{ p_i^h \mid p_i^h(\cdot) \in L^{2h}(\Omega_i) \right\}, \quad (3.8)$$

$$\mathcal{V}_{ui}^h = \left\{ \mathbf{w}_i^h \mid \mathbf{w}_i^h(\cdot) \in H^{1h}(\Omega_i), \mathbf{w}_i^h = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_{Di} \right\}, \quad (3.9)$$

e,

$$\mathcal{V}_{pi}^h = \mathcal{S}_{pi}^h. \quad (3.10)$$

Analogamente, os espaços das funções tentativas ( $\mathcal{M}^h$ ) e teste ( $\mathcal{Q}^h$ ) para o campo dos multiplicadores de Lagrange ( $\boldsymbol{\lambda}$ ) são definidos como:

$$\mathcal{M}^h = \left\{ \boldsymbol{\lambda}^h \mid \boldsymbol{\lambda}^h(\cdot) \in H^{1h}(\Omega_c) \right\} \quad (3.11)$$

$$\mathcal{Q}^h = \mathcal{M}^h. \quad (3.12)$$

A aplicação do operador de acoplamento  $L^2$  à formulação clássica Arlequin consiste em dado os espaços tentativa e teste apresentados nas equações anteriores: Encontrar  $(\mathbf{u}_0^h, p_0^h, \mathbf{u}_1^h, p_1^h, \boldsymbol{\lambda}^h) \in \mathcal{S}_{u0}^h \times \mathcal{S}_{p0}^h \times \mathcal{S}_{u1}^h \times \mathcal{S}_{p1}^h \times \mathcal{M}^h$  de maneira que  $\forall \mathbf{w}_0^h \in \mathcal{V}_{u0}^h, q_0^h \in \mathcal{V}_{p0}^h, \mathbf{w}_1^h \in \mathcal{V}_{u1}^h, q_1^h \in \mathcal{V}_{p1}^h$ , e  $\forall \boldsymbol{\zeta}^h \in \mathcal{Q}^h$ :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_0^h}{\partial t} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot (\mathbf{u}_0^h \cdot \nabla_y) \mathbf{u}_0^h d\Omega_0 \\ & + \int_{\Omega_0} \alpha_0 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_0^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_0 \\ & + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_e} \tau_{\text{SUPG}} ((\mathbf{u}_0^h \cdot \nabla_y) \mathbf{w}_0^h) \cdot \mathbf{r}_{\text{M0}}^h (\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_e} \nu_{\text{LSIC}} \nabla_y \cdot \mathbf{w}_0^h r_{\text{C0}}^h (\mathbf{u}_0^h) d\Omega_0 + \chi_0 \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_0^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h d\Omega_c \\ & = \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot \mathbf{f}_0^h d\Omega_0 + \int_{\Gamma_0} \alpha_0 \mathbf{w}_0^h \cdot \mathbf{h}_0^h d\Gamma_0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_1^h}{\partial t} d\Omega_1 + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot (\mathbf{u}_1^h \cdot \nabla_y) \mathbf{u}_1^h d\Omega_1 \\ & + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_1^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 \\ & + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_e} \tau_{\text{SUPG}} ((\mathbf{u}_1^h \cdot \nabla_y) \mathbf{w}_1^h) \cdot \mathbf{r}_{\text{M1}}^h (\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_e} \nu_{\text{LSIC}} \nabla_y \cdot \mathbf{w}_1^h r_{\text{C1}}^h (\mathbf{u}_1^h) d\Omega_1 + \chi_1 \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_1^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h d\Omega_c \\ & = \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{f}_1^h d\Omega_1 + \int_{\Gamma_1} \alpha_1 \mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{h}_1^h d\Gamma_1, \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_1} \alpha_1 q_1^h \nabla_y \cdot \mathbf{u}_1^h d\Omega_1 + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_e} \tau_{\text{PSPG}} \left( \frac{\nabla_y q_1^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_{\text{M1}}^h (\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 = 0, \quad (3.16)$$

$$\int_{\Omega_c} \boldsymbol{\zeta}^h \cdot (\mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_1^h) d\Omega_c = 0, \quad (3.17)$$

onde  $\mathbf{r}_{\text{Mi}}^h$  e  $r_{\text{Ci}}^h$  são os resíduos da equação da quantidade de movimento e da equação da continuidade, com  $i = 0, 1$ , respectivamente, dados por:

$$\mathbf{r}_{\text{Mi}}^h (\mathbf{u}_i^h, p_i^h, \boldsymbol{\lambda}^h) = \alpha_i \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}_i^h}{\partial t} + (\mathbf{u}_i^h \cdot \nabla_y) \mathbf{u}_i^h - \mathbf{f}_i^h \right) - \alpha_i \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_i^h, p_i^h) + \chi_i \boldsymbol{\lambda}^h, \quad (3.18)$$

$$r_{\text{Ci}}^h (\mathbf{u}_i^h) = \alpha_i \nabla_y \cdot \mathbf{u}_i^h, \quad (3.19)$$

com  $\chi_i$  descrito da maneira que se segue:

$$\chi_i = \begin{cases} (-1)^i & \text{se } \mathbf{y} \in \Omega_c \\ 0 & \text{se } \mathbf{y} \notin \Omega_c. \end{cases} \quad (3.20)$$

O problema descrito pelas equações 3.13 à 3.17 descreve à versão clássica do método de Arlequin para o problema de Navier-Stokes estabilizado pela técnica PSPG/SUPG. Matematicamente trata-se de um problema de ponto de sela decorrente de uma formulação mista. Entretanto, desde que a condição LBB seja satisfeita, existe solução para o problema

e ela é única.

Em Guidault e Belytschko (2007) pode-se encontrar uma vasta análise matemática a cerca das questões relacionadas com estabilidade, convergência e relevância do método. Nesta pesquisa, os autores relatam, por exemplo, a necessidade de emprego de funções ponderadoras contínuas quando utilizado o operador de acoplamento  $L^2$ , tal caso não ocorre com o operador de acoplamento  $H^1$ . Além disso, os autores destacam que espaços muito refinados para os acopladores de Lagrange podem levar a uma solução não convergente, independente do tipo de operador de acoplamento. Este problema ocorre devido a forte dependência da discretização do modelo global na solução.

O problema descrito no método Arlequin clássico é análogo a formulação mista em elementos finitos para escoamentos incompressíveis, que limita a escolha das funções aproximadoras para o campo de velocidade e pressão. No caso da mecânica dos fluidos, conforme apresentado no Cap. 2, uma forma de superar esta restrição LBB é o uso de métodos estabilizados como o PSPG. Seguindo essa mesma filosofia, Fernandes et al. (2020) introduzem uma técnica de estabilização consistente que será apresentada na seguinte seção.

### 3.3 Método Arlequin estabilizado aplicado à problemas de escoamentos incompressíveis

Com intuito de superar a condição LBB para o problema de Arlequin, Fernandes et al. (2020) desenvolvem uma técnica de estabilização consistente baseada em resíduo. Para isso, introduz-se uma parcela adicional à equação dos campos de multiplicadores de Lagrange, que leva em conta o gradiente de  $\zeta^h$  e o resíduo da equação da quantidade de movimento:

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_c^e} \frac{\tau_{ARLQ0}}{\rho} \nabla_y \zeta^h : \nabla_y \mathbf{r}_{M0}^h (\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_c - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_c^e} \frac{\tau_{ARLQ1}}{\rho} \nabla_y \zeta^h : \nabla_y \mathbf{r}_{M1}^h (\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_c, \quad (3.21)$$

sendo  $\tau_{ARLQ0}$  e  $\tau_{ARLQ1}$  parâmetros de estabilização, respectivamente da malha global e local. A obtenção destes parâmetros será abordada na subseção seguinte.

Dessa forma, pode-se definir a solução do problema de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis utilizando a técnica de Arlequin estabilizada da seguinte forma: Encontrar  $(\mathbf{u}_0^h, p_0^h, \mathbf{u}_1^h, p_1^h, \boldsymbol{\lambda}^h) \in \mathcal{S}_{u0}^h \times \mathcal{S}_{p0}^h \times \mathcal{S}_{u1}^h \times \mathcal{S}_{p1}^h \times \mathcal{M}^h$  de maneira que  $\forall \mathbf{w}_0^h \in \mathcal{V}_{u0}^h$ ,  $q_0^h \in \mathcal{V}_{p0}^h$ ,  $\mathbf{w}_1^h \in \mathcal{V}_{u1}^h$ ,  $q_1^h \in \mathcal{V}_{p1}^h$ , e  $\forall \zeta^h \in \mathcal{Q}^h$ :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_0^h}{\partial t} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot (\mathbf{u}_0^h \cdot \nabla_y) \mathbf{u}_0^h d\Omega_0 \\
& + \int_{\Omega_0} \alpha_0 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_0^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_0 \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{SUPG} ((\mathbf{u}_0^h \cdot \nabla_y) \mathbf{w}_0^h) \cdot \mathbf{r}_{M0}^h (\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_0
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \nu_{LSIC} \nabla_y \cdot \mathbf{w}_0^h r_{C0}^h (\mathbf{u}_0^h) d\Omega_0 + \chi_0 \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_0^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h d\Omega_c \\
& = \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot \mathbf{f}_0^h d\Omega_0 + \int_{\Gamma_0} \alpha_0 \mathbf{w}_0^h \cdot \mathbf{h}_0^h d\Gamma_0,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_1^h}{\partial t} d\Omega_1 + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot (\mathbf{u}_1^h \cdot \nabla_y) \mathbf{u}_1^h d\Omega_1 \\
& + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_1^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{SUPG} ((\mathbf{u}_1^h \cdot \nabla_y) \mathbf{w}_1^h) \cdot \mathbf{r}_{M1}^h (\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \nu_{LSIC} \nabla_y \cdot \mathbf{w}_1^h r_{C1}^h (\mathbf{u}_1^h) d\Omega_1 + \chi_1 \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_1^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h d\Omega_c \\
& = \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{f}_1^h d\Omega_1 + \int_{\Gamma_1} \alpha_1 \mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{h}_1^h d\Gamma_1,
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\zeta}^h \cdot (\mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_1^h) d\Omega_c + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{PSPG} \left( \frac{\nabla_y q_1^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_{M1}^h (\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 = 0, \\
& - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \frac{\tau_{ARLQ1}}{\rho} \nabla_y \boldsymbol{\zeta}^h : \nabla_y \mathbf{r}_{M1}^h d\Omega_c = 0,
\end{aligned} \tag{3.26}$$

com os resíduos  $\mathbf{r}_{Mi}^h$  e  $r_{Ci}^h$  escritos conforme as Eq. 3.18 e Eq .3.19.

O sistema resultante pode ser reescrito em notação matricial como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{L}}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_1 & -\hat{\mathbf{L}}_1 \\ \mathbf{L}_0^T & -\mathbf{L}_1^T & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{U}}_0 \\ \bar{\mathbf{U}}_1 \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_{\Lambda} \end{bmatrix}. \tag{3.27}$$

Considerando  $i = 0, 1$  designando os modelos global e local respectivamente têm-se a definição dos termos da Eq. 3.27 como:  $\mathbf{K}_i$  é uma matriz que representa os termos provenientes das matrizes referentes as equações da quantidade de movimento e da continuidade para o modelo  $i$ ;  $\hat{\mathbf{L}}_i$  matriz que representa os termos de acoplamento do modelo  $i$ ;  $\mathbf{L}_i^T$  matriz procedente dos termos da equação de restrição e de componentes da estabilização RBSAM do modelo  $i$ ;  $\mathbf{E}$  apresenta termos oriundos da estabilização RBSAM;  $\bar{\mathbf{U}}_i$  representa os vetores nodais dos graus de liberdade respectivos a velocidade e pressão do

modelo  $i$ ;  $\Lambda$  representa os graus de liberdade respectivos aos multiplicadores de Lagrange;  $\mathbf{F}_i$  representa os vetores provenientes das equações da quantidade de movimento e da continuidade para o modelo  $i$ ;  $\mathbf{F}_\Lambda$  representa os termos vetoriais advindos da estabilização RBSAM.

Note que na estabilização Arlequin baseada no resíduo (RBSAM) não existem elementos zeros na diagonal da matriz, diferente do mesmo problema na formulação clássica Arlequin. No trabalho de Fernandes et al. (2020) pode-se encontrar a análise de estabilidade dessa técnica e testes numéricos que avaliam o condicionamento do sistema algébrico e a convergência do método.

O problema de Arlequin não linear apresentado nas equações: Eq. 3.22 à 3.26 pode ser reescrito em sua forma semi-discreta residual para  $i = 0, 1$ , da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} R_{M,i} &= \int_{\Omega_i} \alpha_i \rho \mathbf{w}_i^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i^h}{\partial t} d\Omega_i + \int_{\Omega_i} \alpha_i \rho \mathbf{w}_i^h \cdot (\mathbf{u}_i^h \cdot \nabla_y) \mathbf{u}_i^h d\Omega_i \\ &\quad + \int_{\Omega_i} \alpha_i \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_i^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_i^h, p_i^h) d\Omega_i \\ &\quad + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{SUPG} ((\mathbf{u}_i^h \cdot \nabla_y) \mathbf{w}_i^h) \cdot \mathbf{r}_{Mi}^h (\mathbf{u}_i^h, p_i^h) d\Omega_i \\ &\quad + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \nu_{LSIC} \nabla_y \cdot \mathbf{w}_i^h r_{Ci}^h (\mathbf{u}_i^h) d\Omega_i + \chi_i \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_i^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h d\Omega_c \\ &\quad - \int_{\Omega_i} \alpha_i \rho \mathbf{w}_i^h \cdot \mathbf{f}_i^h d\Omega_i - \int_{\Gamma_i} \alpha_i \mathbf{w}_i^h \cdot \mathbf{h}_i^h d\Gamma_i \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$R_{C,i} = \int_{\Omega_i} \alpha_i q_i^h \nabla_y \cdot \mathbf{u}_i^h d\Omega_i + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{PSPG} \left( \frac{\nabla_y q_i^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_{Mi}^h (\mathbf{u}_i^h, p_i^h) d\Omega_i, \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} R_L &= \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\zeta}^h \cdot (\mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_1^h) d\Omega_c + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \frac{\tau_{ARLQ0}}{\rho} \nabla_y \boldsymbol{\zeta}^h : \nabla_y \mathbf{r}_{M0}^h (\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_c \\ &\quad - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \frac{\tau_{ARLQ1}}{\rho} \nabla_y \boldsymbol{\zeta}^h : \nabla_y \mathbf{r}_{M1}^h (\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_c. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Considerando  $\dot{\mathbf{U}}_i$ ,  $\mathbf{U}_i$ ,  $\mathbf{p}_i$  e  $\Lambda$  os vetores nodais dos graus de liberdade respectivos a aceleração, velocidade, pressão e multiplicadores de Lagrange, pode-se escrever o problema semidiscreto da DFC como: Determinar  $\dot{\mathbf{U}}_0$ ,  $\mathbf{U}_0$ ,  $\mathbf{p}_0$ ,  $\dot{\mathbf{U}}_1$ ,  $\mathbf{U}_1$ ,  $\mathbf{p}_1$  e  $\Lambda$  de maneira que:

$$R_{M0}(\dot{\mathbf{U}}_0, \mathbf{U}_0, \mathbf{p}_0, \Lambda) = \mathbf{0}, \quad (3.31)$$

$$R_{C0}(\dot{\mathbf{U}}_0, \mathbf{U}_0, \mathbf{p}_0, \Lambda) = \mathbf{0}, \quad (3.32)$$

$$R_{M1}(\dot{\mathbf{U}}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{p}_1, \Lambda) = \mathbf{0}, \quad (3.33)$$

$$R_{C1}(\dot{\mathbf{U}}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{p}_1, \Lambda) = \mathbf{0}, \quad (3.34)$$

$$R_L(\dot{\mathbf{U}}_0, \mathbf{U}_0, \mathbf{p}_0, \dot{\mathbf{U}}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{p}_1, \boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{0}. \quad (3.35)$$

### 3.3.1 Integração Temporal

Quanto ao procedimento de integração temporal, utilizou-se o método  $\alpha$ -generalizado. Conforme a metodologia apresentado na Seção 2.4, para a solução do sistema de equações não lineares compostas por Eq. (3.31) à Eq. (3.35) utiliza-se o método de Newton-Raphson. A solução resulta em uma etapa preditiva e outra iterativa corretiva.

Na etapa preditiva, conhecida a solução em um passo de tempo  $n$ , prediz-se a solução no passo seguinte ( $n + 1$ ) através das seguintes relações:

$$\dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \dot{\mathbf{U}}_{0(n)}, \quad (3.36)$$

$$\mathbf{U}_{0(n+1)}^0 = \mathbf{U}_{0(n)}, \quad (3.37)$$

$$\mathbf{p}_{0(n+1)}^0 = \mathbf{p}_{0(n)}, \quad (3.38)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \dot{\mathbf{U}}_{1(n)}, \quad (3.39)$$

$$\mathbf{U}_{1(n+1)}^0 = \mathbf{U}_{1(n)}, \quad (3.40)$$

$$\mathbf{p}_{1(n+1)}^0 = \mathbf{p}_{1(n)}, \quad (3.41)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^0 = \boldsymbol{\Lambda}_{(n)}, \quad (3.42)$$

onde o superíndice 0 representa a iteração de número zero, enquanto que os subíndices 0 e 1 representam as variáveis do modelo global e local respectivamente.

Na etapa iterativa corretiva, itera-se sobre a Eq. (3.31) à Eq. (3.35) até que elas sejam satisfeitas, seja através de uma tolerância prescrita, ou até que se alcance uma quantidade máxima de iterações pré-estabelecida. A etapa iterativa corretiva é constituída por três fases. A fase 1 consiste em determinar os valores no instante intermediário para as variáveis nodais na iteração  $i$ :

$$\dot{\mathbf{U}}_{0(n+\alpha_m)}^i = \dot{\mathbf{U}}_{0(n)} + \alpha_m (\dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^i - \dot{\mathbf{U}}_{0(n)}), \quad (3.43)$$

$$\mathbf{U}_{0(n+\alpha_f)}^i = \mathbf{U}_{0(n)} + \alpha_f (\mathbf{U}_{0(n+1)}^i - \mathbf{U}_{0(n)}), \quad (3.44)$$

$$\mathbf{p}_{0(n+1)}^i = \mathbf{p}_{0(n+1)}^i, \quad (3.45)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{1(n+\alpha_m)}^i = \dot{\mathbf{U}}_{1(n)} + \alpha_m (\dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^i - \dot{\mathbf{U}}_{1(n)}), \quad (3.46)$$

$$\mathbf{U}_{1(n+\alpha_f)}^i = \mathbf{U}_{1(n)} + \alpha_f (\mathbf{U}_{1(n+1)}^i - \mathbf{U}_{1(n)}), \quad (3.47)$$

$$\mathbf{p}_{1(n+1)}^i = \mathbf{p}_{1(n+1)}^i, \quad (3.48)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^i = \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^i. \quad (3.49)$$

Na fase 2, com os valores intermediários das variáveis nodais resolve-se o sistema linear resultante da linearização das equações Eq. (3.31) à Eq. (3.35) com respeito às variáveis de interesse  $\dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}$ ,  $\mathbf{p}_{0(n+1)}$ ,  $\dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}$ ,  $\mathbf{p}_{1(n+1)}$  e  $\boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{M0}}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^i} & \frac{\partial R_{M0}}{\partial \mathbf{p}_{0(n+1)}^i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial R_{M0}}{\partial \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^i} \\ \frac{\partial R_{C0}}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^i} & \frac{\partial R_{C0}}{\partial \mathbf{p}_{0(n+1)}^i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial R_{C0}}{\partial \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial R_{M1}}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^i} & \frac{\partial R_{M1}}{\partial \mathbf{p}_{1(n+1)}^i} & \frac{\partial R_{M1}}{\partial \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial R_{C1}}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^i} & \frac{\partial R_{C1}}{\partial \mathbf{p}_{1(n+1)}^i} & \frac{\partial R_{C1}}{\partial \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^i} \\ \frac{\partial R_L}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^i} & \frac{\partial R_L}{\partial \mathbf{p}_{0(n+1)}^i} & \frac{\partial R_L}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^i} & \frac{\partial R_L}{\partial \mathbf{p}_{1(n+1)}^i} & \frac{\partial R_L}{\partial \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^i \\ \Delta \mathbf{p}_{0(n+1)}^i \\ \Delta \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^i \\ \Delta \mathbf{p}_{1(n+1)}^i \\ \Delta \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_{M0} \\ -R_{C0} \\ -R_{M1} \\ -R_{C1} \\ -R_L \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Atualiza-se então na fase 3 a solução através das seguintes relações:

$$\dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^{i+1} = \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^i + \Delta \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^i, \quad (3.51)$$

$$\mathbf{U}_{0(n+1)}^{i+1} = \mathbf{U}_{0(n+1)}^i + \gamma \Delta t \Delta \mathbf{U}_{0(n+1)}^i, \quad (3.52)$$

$$\mathbf{p}_{0(n+1)}^{i+1} = \mathbf{p}_{0(n+1)}^i + \Delta \mathbf{p}_{0(n+1)}^i, \quad (3.53)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^{i+1} = \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^i + \Delta \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^i, \quad (3.54)$$

$$\mathbf{U}_{1(n+1)}^{i+1} = \mathbf{U}_{1(n+1)}^i + \gamma \Delta t \Delta \mathbf{U}_{1(n+1)}^i, \quad (3.55)$$

$$\mathbf{p}_{1(n+1)}^{i+1} = \mathbf{p}_{1(n+1)}^i + \Delta \mathbf{p}_{1(n+1)}^i, \quad (3.56)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{1(n+1)}^{i+1} = \boldsymbol{\Lambda}_{1(n+1)}^i + \Delta \boldsymbol{\Lambda}_{1(n+1)}^i. \quad (3.57)$$

Na utilização do método  $\alpha$ -generalizado as integrais das equações são avaliadas no instante  $t = t_{n+\alpha_f}$ . As relações entre velocidade e aceleração, e os parâmetros utilizados pelo método podem ser consultados na Seção 2.4.

### 3.3.2 Parâmetro de estabilização para técnica RBSAM

No método Arlequin existe a necessidade de definição do parâmetro de estabilização  $\tau_{ARLQ}$ , o qual deve possuir valor suficiente para estabilizar os campos de multiplicadores de Lagrange, sem, no entanto, comprometer a convergência do método.

Para a definição de  $\tau_{ARLQ}$  tomou-se como referência os trabalhos de Tezduyar e Osawa (2000) e Tezduyar e Sathe (2003) nos quais se apresenta uma vasta quantidade de informação a cerca da obtenção dos parâmetros de estabilização das equações da DFC ( $\tau_{SUPG}$ ,  $\tau_{PSPG}$ ,  $\nu_{LSIC}$ ).

Propõe-se como critério a obtenção de termos de estabilização com magnitude próxima aos termos da equação de acoplamento, através da utilização de normas vetoriais. Este parâmetro será definido para cada um dos modelos como:

$$\tau_{ARLQi} = \left( \frac{1}{(\tau_{A_i})^2} + \frac{1}{(\tau_{B_i})^2} + \frac{1}{(\tau_{C_i})^2} + \frac{1}{(\tau_{D_i})^2} + \frac{1}{(\tau_{E_i})^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.58)$$

com  $i = 0, 1$  definindo o modelo global e local respectivamente e:

$$\tau_{A_i} = \left( \frac{1}{(\tau_{A_i^0})^2 + (\tau_{A_i^1})^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.59)$$

$$\tau_{B_i} = \left( \frac{1}{(\tau_{B_i^0})^2 + (\tau_{B_i^1})^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.60)$$

$$\tau_{C_i} = \left( \frac{1}{(\tau_{C_i^0})^2 + (\tau_{C_i^1})^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.61)$$

$$\tau_{D_i} = \left( \frac{1}{(\tau_{D_i^0})^2 + (\tau_{D_i^1})^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.62)$$

$$\tau_{E_i} = \left( \frac{1}{(\tau_{E_i^0})^2 + (\tau_{E_i^1})^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.63)$$

sendo as variáveis das equações 3.59 à 3.63 as seguintes normas vetoriais:

$$\tau_{A_i^0} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_0}\|}{\|\mathbf{t}_i\|}; \quad \tau_{A_i^1} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_1}\|}{\|\mathbf{t}_i\|}; \quad (3.64)$$

$$\tau_{B_i^0} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_0}\|}{\|\mathbf{j}_i\|}; \quad \tau_{B_i^1} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_1}\|}{\|\mathbf{j}_i\|}; \quad (3.65)$$

$$\tau_{C_i^0} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_0}\|}{\|\mathbf{k}_i\|}; \quad \tau_{C_i^1} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_1}\|}{\|\mathbf{k}_i\|}; \quad (3.66)$$

$$\tau_{D_i^0} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_0}\|}{\|\mathbf{p}_i\|}; \quad \tau_{D_i^1} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_1}\|}{\|\mathbf{p}_i\|}; \quad (3.67)$$

$$\tau_{E_i^0} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_0}\|}{\|\boldsymbol{\Gamma}_i\|}; \quad \tau_{E_i^1} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_1}\|}{\|\boldsymbol{\Gamma}_i\|}; \quad (3.68)$$

Por fim, os vetores em questão, são definidos através das seguintes relações:

$$\mathbf{M}_{\lambda_0} = \int_{\Omega_c} N_k \cdot \mathbf{u}_0^h d\Omega_c, \quad (3.69)$$

$$\mathbf{M}_{\lambda_1} = - \int_{\Omega_c} N_k \cdot \mathbf{u}_1^h d\Omega_c, \quad (3.70)$$

$$\mathbf{t}_i = \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}} N_k : \alpha_i \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}} \left( (\mathbf{u}_i^h \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}}) \mathbf{u}_i^h \right) d\Omega_c, \quad (3.71)$$

$$\mathbf{j}_i = \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}} N_k : \alpha_i \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_i^h}{\partial t} \right) d\Omega_c, \quad (3.72)$$

$$\mathbf{k}_i = \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}}^2 N_k : \alpha_i 2\mu \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_i^h) d\Omega_c, \quad (3.73)$$

$$\mathbf{p}_i = \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}} N_k : \alpha_i \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}} (-\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}} p_i^h) d\Omega_c, \quad (3.74)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_i = \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}} N_k : \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}} (\chi(i) \boldsymbol{\lambda}^h) d\Omega_c, \quad (3.75)$$

com  $k$  representando o índice dos graus de liberdade do campo de multiplicadores de Lagrange.

## 3.4 Superposição de modelos móveis

As equações Eq. (3.22) à Eq. (3.26) resolvem problemas de escoamentos incompressíveis em uma discretização Euleriana. Entretanto, como têm-se como alvo à movimentação do domínio local do fluido (ver Fig. 3.3) para acomodar a movimentação da estrutura em problemas de IFE ou representar o deslocamento de um objeto imerso na DFC, faz-se o uso de uma descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária (ALE) no modelo local ( $\Omega_1$ ) enquanto que o domínio global ( $\Omega_0$ ) mantém-se fixo e com descrição Euleriana.

Para o entendimento da metodologia de superposição de modelos móveis em um esquema Euleriano-ALE, pode-se analisar a Fig. 3.3. Nela, pode-se observar a mudança de configuração dos modelos de fluido do passo  $t_n$  para o passo  $t_{n+1}$ . Nota-se que o modelo global mantém sua geometria inalterada na mudança de passo de tempo, enquanto que o modelo local é movimentado para representar uma nova localização de um objeto imerso. Vale ressaltar que o contorno do domínio do modelo local ( $\Gamma_1$ ) é conhecido em  $t_n$  e em  $t_{n+1}$ , e que a zona de superposição  $\Omega_s$  é definida em diferentes posições em cada instante.

Para análise de domínios móveis do tipo Euleriano-ALE, a Eq. 3.24 será reescrita, levando-se em consideração as definições apresentadas na Seção 2.2, como:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_1^h}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} d\Omega_1 + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot ((\mathbf{u}_1^h - \bar{\mathbf{u}}_1^h) \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}} \mathbf{u}_1^h) d\Omega_1 \\ & + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_1^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{SUPG} ((\mathbf{u}_1^h - \bar{\mathbf{u}}_1^h) \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}} \mathbf{w}_1^h) \cdot \mathbf{r}_{M1}^h(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \nu_{LSIC} \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{w}_1^h r_{C1}^h(\mathbf{u}_1^h) d\Omega_1 \\ & + \chi_1 \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_1^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h d\Omega_c = \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{f}_1^h d\Omega_1 + \int_{\Gamma_1} \alpha_1 \mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{h}_1^h d\Gamma_1, \end{aligned} \quad (3.76)$$

e o resíduo apresentado na Eq. 3.18 ficará reescrito para  $i = 1$ , como:

$$\mathbf{r}_{M1}^h(\mathbf{u}_1^h, p_1^h, \boldsymbol{\lambda}^h) = \alpha_1 \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}_1^h}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u}_1^h - \bar{\mathbf{u}}_1^h) \cdot \nabla_y \mathbf{u}_1^h - \mathbf{f}_1^h \right) - \alpha_1 \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1^h, p_1^h, \boldsymbol{\lambda}^h) + \chi_1 \boldsymbol{\lambda}^h. \quad (3.77)$$

Além da consideração da descrição ALE para o modelo local, deve-se ressaltar que a função ponderadora  $\alpha_i$  passa a ser uma variável temporal, ou seja,  $\alpha_i(t)$ , visto que a zona de superposição  $\Omega_s$  é definida em diferentes posições em cada instante de tempo. Dessa forma, a integração temporal utilizando o método  $\alpha$ -generalizado deve considerar essa variação através da seguinte interpolação no tempo intermediário:

$$\alpha_{i(n+\alpha_f)} = \alpha_{i(n)} + \alpha_f (\alpha_{i(n+1)} - \alpha_{i(n)}). \quad (3.78)$$

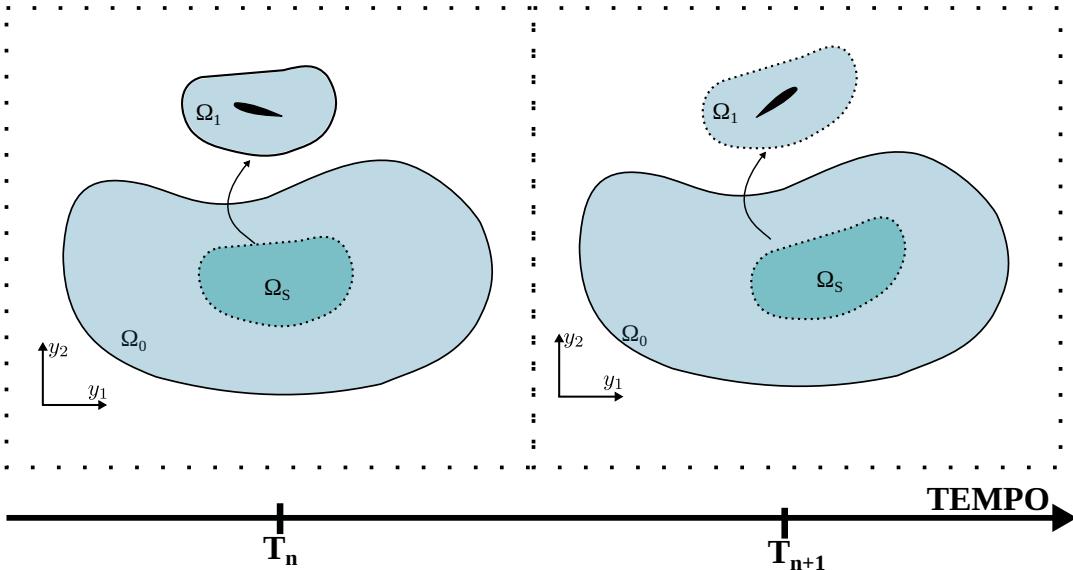


Figura 3.3 – Domínio Arlequin móvel

A solução de modelos móveis requer a utilização de uma técnica adequada para movimentação da malha local. A técnica utilizada nesse trabalho é conhecida como MJBS (Mesh-Jacobian Based Stiffening) introduzida por Tezduyar et al. (1992f) e será abordada na Subseção ??.

## 3.5 Implementação Computacional

Previamente à explicação a cerca da implementação computacional, é importante indicar que o campo dos multiplicadores de Lagrange é definido neste estudo na malha local. Tal escolha ocorre pelo fato de que mesmo em problemas em que se tenham grandes deslocamentos, a quantidade de elementos locais da zona de superposição permanece inalterada, fazendo com que o sistema algébrico mantenha-se com dimensão constante ao longo do tempo, diminuindo assim, o custo computacional.

O uso da técnica Arlequin envolve a realização de algumas etapas de pré-processamento como parte de sua implementação computacional, que podem ser divididas em 4 etapas: 1. Determinação de distâncias assinaladas; 2. Determinação da zona de colagem; 3. Determinação da função ponderadora; 4. Encontro de correspondência entre pontos dos modelos global e local.

A etapa 1 consiste em determinar a distância assinalada com relação ao contorno  $\Gamma_1$  de todos os pontos (nós para malha de elementos finitos ou pontos de controle para malha isogeométrica) que compõe cada um dos modelos.

Na etapa 2, a partir da distância assinalada, são definidos os elementos locais que fazem parte da zona de colagem em função da espessura dessa região que foi previamente indicada pelo usuário do código.

A função ponderadora para os modelos (etapa 3) é determinada conforme Eq. 3.6. Além disso, a função ponderadora ( $\alpha$ ), para os modelos local e global, foi definida como uma função linear nesse trabalho.

Uma das maiores dificuldades da técnica de Arlequin diz respeito à integração numérica do operador de acoplamento quando se tem na composição da integral funções definidas em modelos distintos. Neste estudo, as integrais são definidas sobre a malha local, desta forma, durante o pré-processamento realiza-se um processo de busca de correspondência (etapa 4) na malha global para cada ponto de integração da malha local. O processo de busca consiste em encontrar a coordenada paramétrica e elemento da malha global correspondente a cada ponto de integração da malha local na zona de colagem.

Para contemplar a solução de problemas com contornos móveis utilizando a técnica Arlequin, a cada passo de tempo, algumas tarefas adicionais devem ser realizadas: atualização da configuração da malha; atualização da distância assinalada com relação ao contorno  $\Gamma_1$  de todos os pontos (nós para malha de elementos finitos ou pontos de controle para malha isogeométrica) que compõe cada um dos modelos; Alteração da função ponderadora; e atualização das correspondências entre pontos de integração da malha local na malha global.

O Algoritmo que descreve a implementação computacional é apresentado no Alg. 2. A implementação computacional e resolução do sistema de equações resultantes ocorreu de forma análoga ao monomodelo descrito na Seção 2.5. O índice  $i$  apresentado diz respeito à iteração de Newton-Raphson.

## 3.6 Exemplos

Para a validação da método Arlequin estabilizado, dois exemplos amplamente explorados nas bibliografias, serão avaliados. O primeiro exemplo, trata-se de um problema de escoamento sobre um aerofólio NACA 0012, e o segundo, com intuito de validação da técnica de movimentação de domínios, consistirá no aerofólio NACA 0012 com um

---

**Algoritmo 2** Algoritmo para problemas móveis da DFC utilizando técnica ARLEQUIN RBSAM
 

---

- 1: Cálculo da distância assinalada dos nós e pontos de controle ao contorno  $\Gamma_1$ ;
- 2: Determinação da zona de colagem  $\Omega_c$ ;
- 3: Definição da função de ponderadora de acordo com Eq. 3.6;
- 4: Busca pela correspondência entre os pontos de integração da malha local na malha global;
- 5: **para** o passo de tempo 0 até T **faça**
- 6:    Movimentação da Malha;
- 7:     $i = 0$ ;
- 8:    Predição da solução: aplicação da Eq. (3.36), Eq. (3.37), Eq. (3.38), Eq. (3.39), Eq. (3.40), Eq. (3.41) e Eq. (3.42);
- 9:    **enquanto** ( $\epsilon < \text{tolerância}$ ) **faça**
- 10:       $i++$ ;
- 11:      Atualização da distância assinalada;
- 12:      Atualização da função ponderadora;
- 13:      Atualização das correspondências entre os pontos de integração da malha local na malha global;
- 14:      Interpolação das variáveis do problema: aplicação da Eq. (3.43), Eq. (3.44), Eq. (3.45), Eq. (3.46), Eq. (3.47), Eq. (3.48) e Eq. (3.49);
- 15:      Cálculo do incremento nas variáveis do problema: Resolução do sistema apresentado na Eq. (3.50);
- 16:      Atualização da solução: cálculo de acordo com (3.51), Eq. (3.52), Eq. (3.53), Eq. (3.54), Eq. (3.55), Eq. (3.56) e Eq. (3.57);
- 17:      Cálculo do erro:

$$\epsilon = \|R_{M0}^i + R_{M1}^i\|_{L^2} \quad (3.79)$$

- 18:    **fim enquanto**
  - 19: **fim para**
- 

movimento de arfagem prescrito.

### 3.6.1 Escoamento sobre um aerofólio NACA 0012

Para simulação do problema de escoamento sobre um aerofólio NACA 0012, com 1 unidade de corda de dimensão e ângulo de ataque de  $10^\circ$ , utilizou-se o domínio apresentado na Fig. 3.4. O contorno da entrada de fluxo está localizado a 6 cordas (C) do bordo de ataque do aerofólio, com velocidade de entrada  $u_\infty$ . Os contornos superior e inferior da geometria, com condições de contorno de parede lisa, também estão afastados do aerofólio em 6 unidades de corda. O contorno direito do domínio é localizado a 20 unidades de corda a jusante do bordo de fuga do aerofólio.

A análise é realizada para um número de Reynolds (Re) 1000 calculado a partir da dimensão do aerofólio e da velocidade de entrada do escoamento. Foram utilizados ainda como parâmetros de análise:  $u_\infty = 1,0$ ,  $\rho = 1,0$ ,  $\Delta t = 0,02$ , e  $\rho_\infty = 0,75$ .

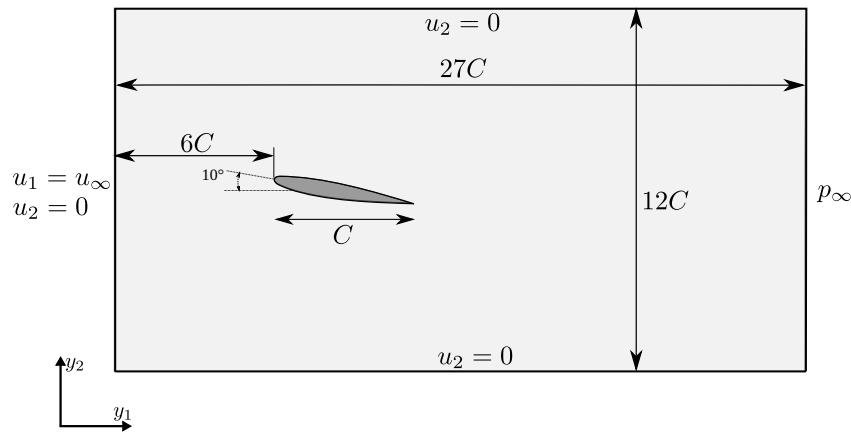


Figura 3.4 – Aerofólio: Geometria

Para validação da teoria apresentada nesse capítulo, compararam-se os resultados de coeficientes de arrasto e sustentação ao longo do tempo para duas discretizações distintas: 1. Monomodelo; 2. Combinação de duas malhas através do método Arlequin estabilizado.

O monomodelo foi discretizado através de elementos finitos (Fig. 3.5), com malha constituída de 9240 elementos triangulares quadráticos e 18792 nós.

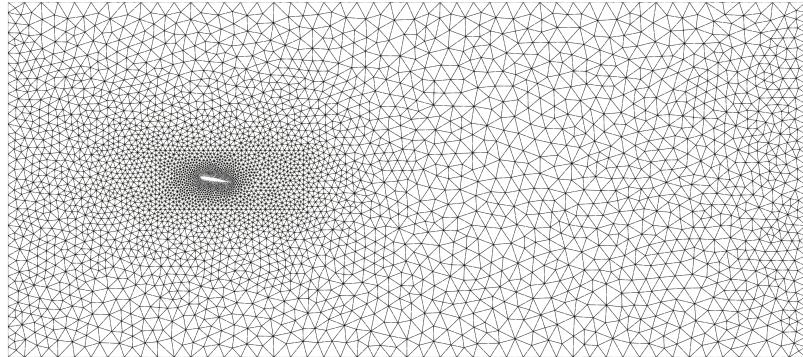
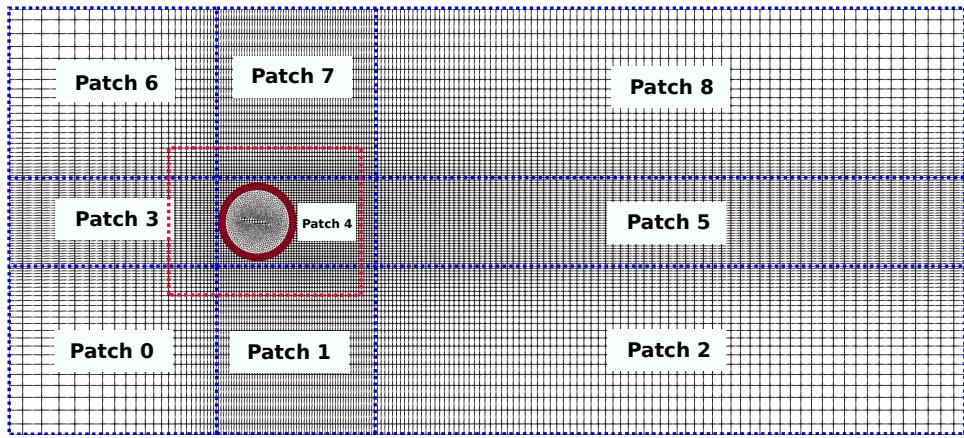


Figura 3.5 – Aerofólio 2D: Malha Monomodelo (MEF)

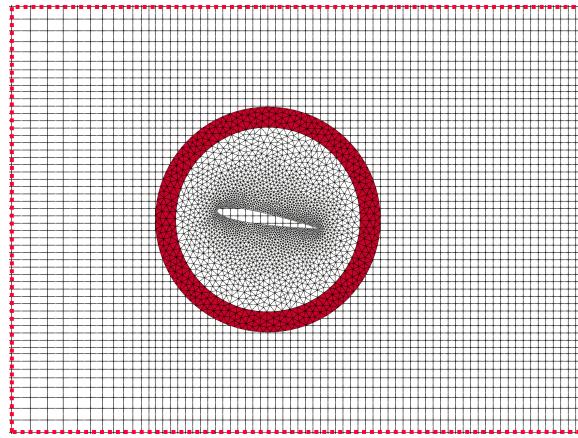
Para o método Arlequin, duas malhas foram utilizadas, uma malha global em elementos isogeométricos (IGA) e uma malha local, mais refinada, em elementos finitos (MEF). Uma visão global da composição do domínio é apresentada na Fig. 3.6a. Uma vista aproximada do aeroporto e da malha local pode ser visualizada na Fig. 3.6b.

A malha global em elementos isogeométricos quadráticos foi obtida através da utilização de 9 *patches*, que totalizaram 15561 pontos de controle e 14025 elementos. A malha local por sua vez é composta por 5214 elementos triangulares quadráticos e 10670 nós.

Na Fig. 3.6b pode observar em vermelho os elementos que fazem parte da zona de colagem. A espessura da zona de colagem foi definida como 0,2, totalizando 628 elementos



(a) Discretização da malha global (IGA) e local (MEF)



(b) Discretização da malha local

Figura 3.6 – Aerofólio: Discretização das malhas global e local

triangulares quadráticos e 1428 nós nessa região. A constante do operador de acoplamento  $L^2$  foi definida como  $k_0 = 10$ .

Nesse problema observa-se o surgimento de uma esteira de vórtices a jusante do aerofólio, que resulta em um número de Strouhal (St) equivalente a 0,877. Esse valor encontra-se em concordância com o obtido por Mittal e Tezduyar (1994) de 0,862.

Nas Fig. 3.7 e Fig. 3.8 apresentam-se os resultados de coeficiente de arrasto e sustentação obtidos para as análises realizadas. Pode-se observar que os resultados obtidos com o modelo baseado no método Arlequin estabilizados estão de acordo com os obtidos para o modelo usando monomodelo.

Nas Fig. 3.9 e Fig. 3.10 estão apresentados os campos de velocidade e pressão respectivamente para um período de um ciclo das curvas referentes aos coeficientes de arrasto e sustentação.

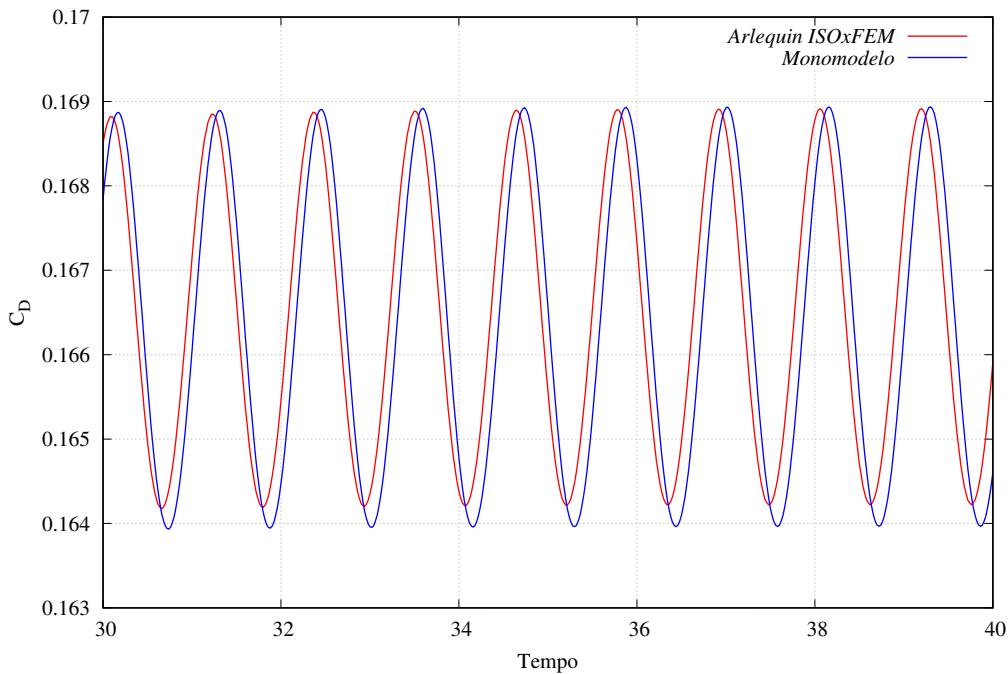


Figura 3.7 – Aerofólio: Coeficiente de Arrasto

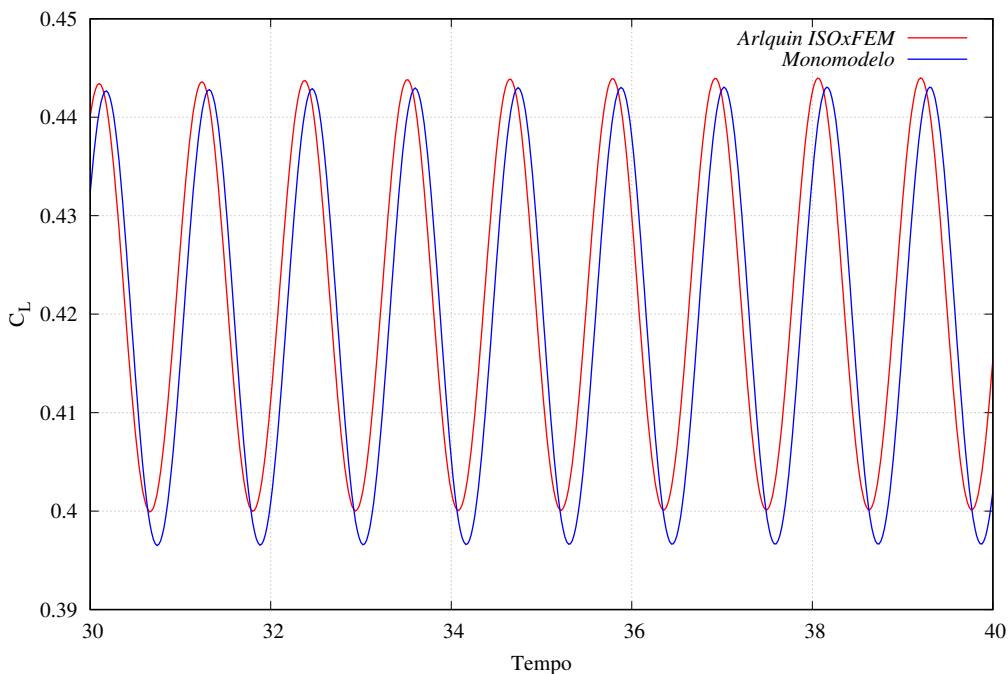


Figura 3.8 – Aerofólio: Coeficiente de Sustentação

### 3.6.2 Aerofólio com movimento de arfagem prescrito

Para a validação computacional da técnica Arlequin estabilizada em domínios móveis utilizou-se um problema envolvendo um aeroporto NACA 0012, semelhante ao apresentado na Subseção 3.6.1, aplicando-se, entretanto, um movimento de arfagem ao mesmo. O aeroporto apresenta variação do ângulo de ataque em 20°, iniciando o movimento

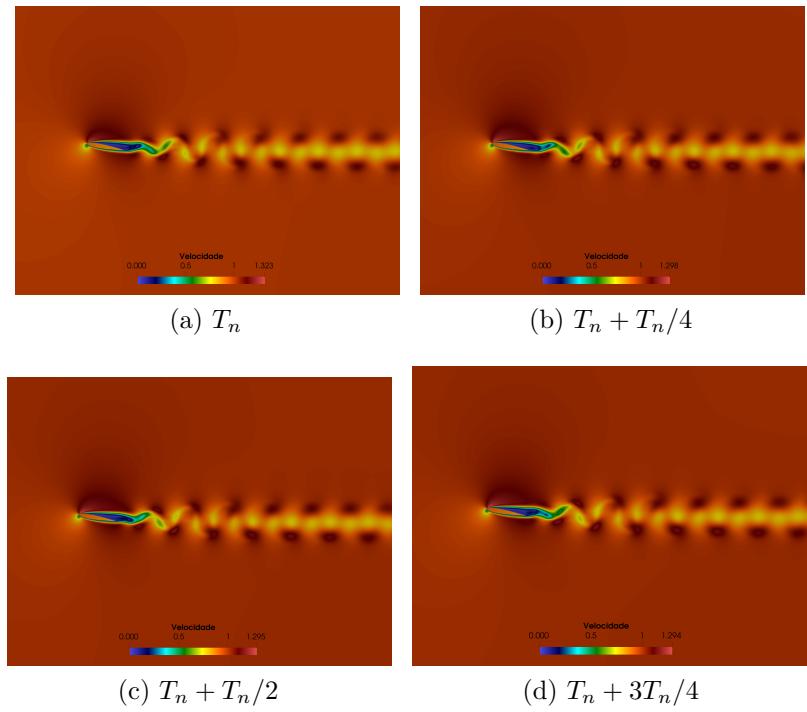


Figura 3.9 – Aerofólio: Campo de velocidade

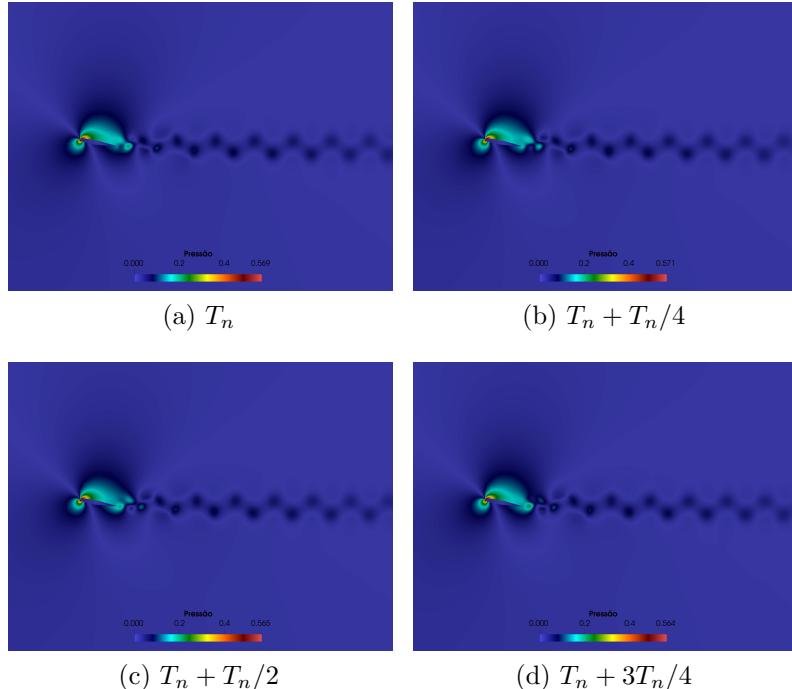


Figura 3.10 – Aerofólio: Campo de pressão

em 10° e finalizando-o em 30°.

Para descrever-se tal movimento aplica-se, tendo como centro a corda média do aerofólio, o movimento de rotação de corpo rígido através da seguinte relação:

$$\theta = \frac{\theta_{max} + \theta_{min}}{2} - \frac{\theta_{max} - \theta_{min}}{2} \cos \omega_f t, \quad (3.80)$$

com  $\omega_f = 2\pi f_o$ , sendo  $f_o$  a frequência de oscilação, adotada nesse estudo como 1.0,  $\theta_{max} = 30^\circ$  e  $\theta_{min} = 10^\circ$ .

As dimensões da geometria do domínio computacional são alteradas (ver Fig. 3.11) para capturar os efeitos dos desprendimentos de vórtices, que para esse problema, se desprendem em uma faixa mais ampla. Os demais parâmetros de análise foram mantidos iguais aos apresentados no exemplo da Subseção ??.

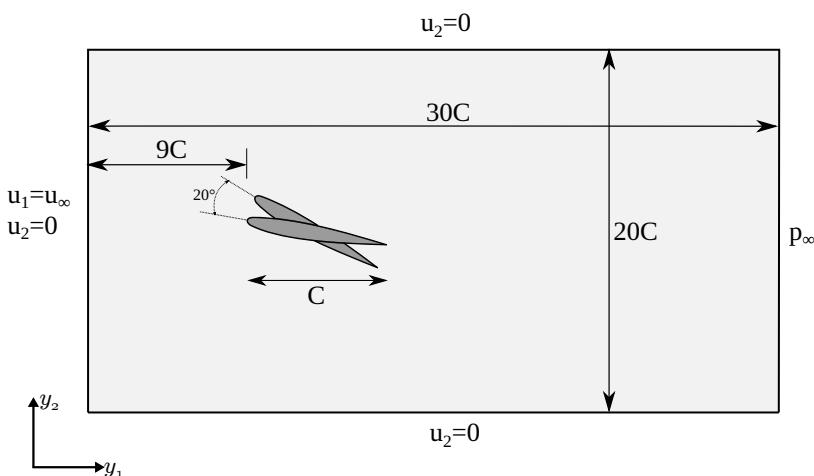


Figura 3.11 – Aerofólio Mov.: Geometria

Novamente são analisadas 2 discretizações: 1. Monomodelo; 2. Combinação de duas malhas através do método Arlequin estabilizado. O monomodelo consiste em uma malha com 12438 elementos triangulares quadráticos e 25188 elementos. As malhas global e local do método Arlequin mantiveram-se com a mesma discretização do problema da Subseção 3.6.1, incluindo a quantidade de elementos na zona de colagem.

É importante ressaltar que para a simulação desse exemplo, utilizou-se como campo inicial de velocidade e pressão, valores obtidos em uma solução de longo termo do aerofólio na condição de repouso.

A variação dos coeficientes de arrasto e sustentação ao longo do tempo são apresentados nas Fig. 3.12 e Fig. 3.13. Nota-se nas imagens que o monomodelo e o modelo Arlequin estão consistentes em suas respostas. Soluções semelhantes podem ser observados no trabalho de Fernandes (2020).

Nas figuras Fig. 3.14 e Fig. 3.15 são apresentados os campos de velocidade e pressão em alguns instantes para um ciclo do movimento oscilatório preescrito.

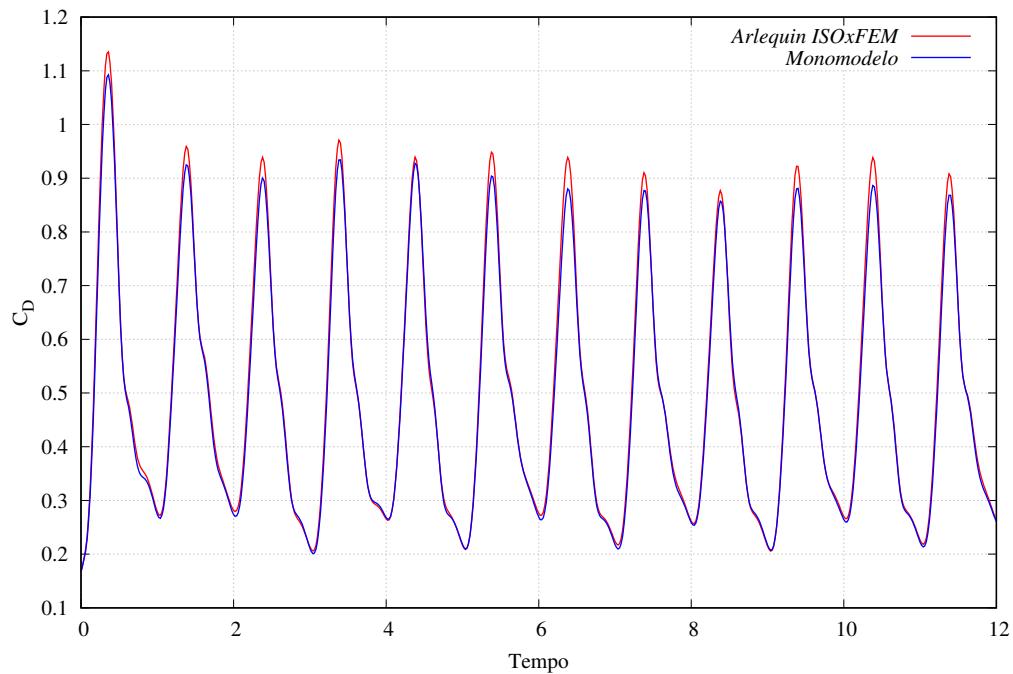


Figura 3.12 – Aerofólio Mov.: Coeficiente de Arrasto

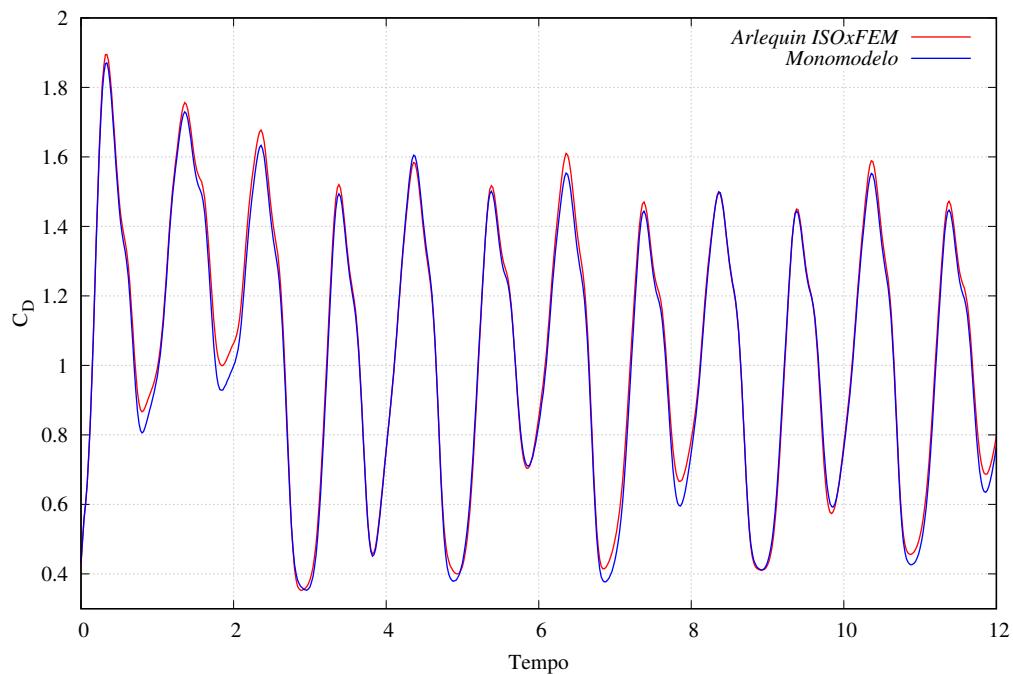


Figura 3.13 – Aerofólio Mov.: Coeficiente de Sustentação

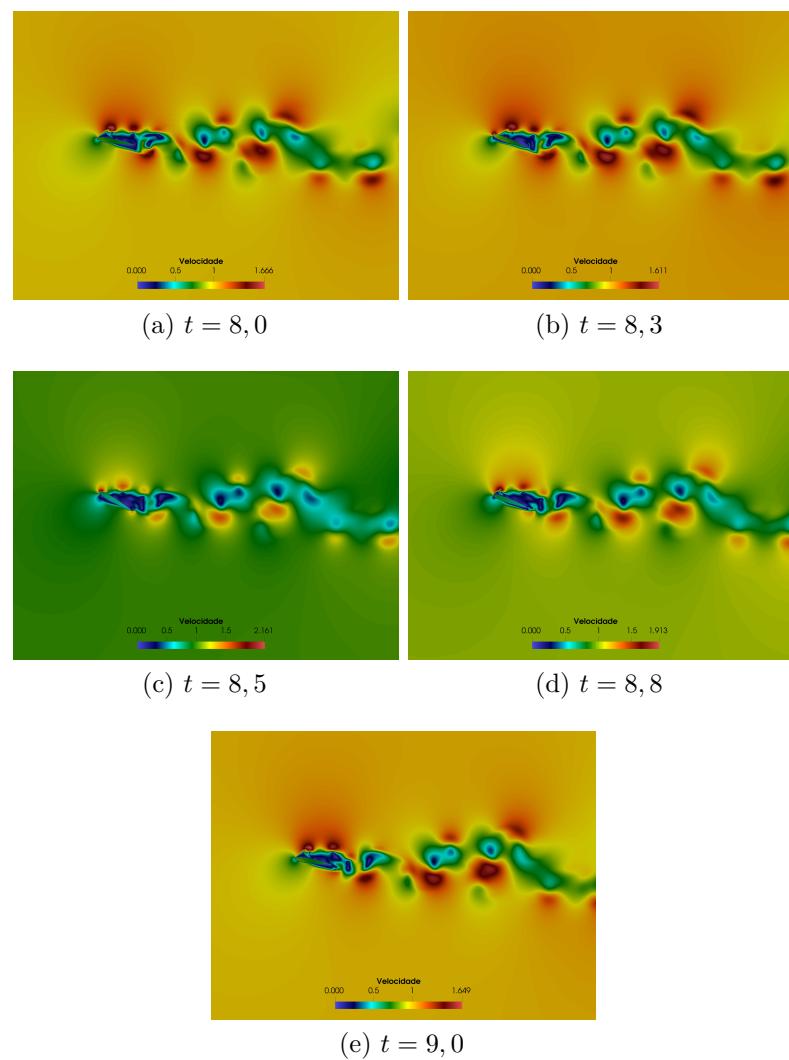


Figura 3.14 – Aerofólio Mov.: Campos de velocidade

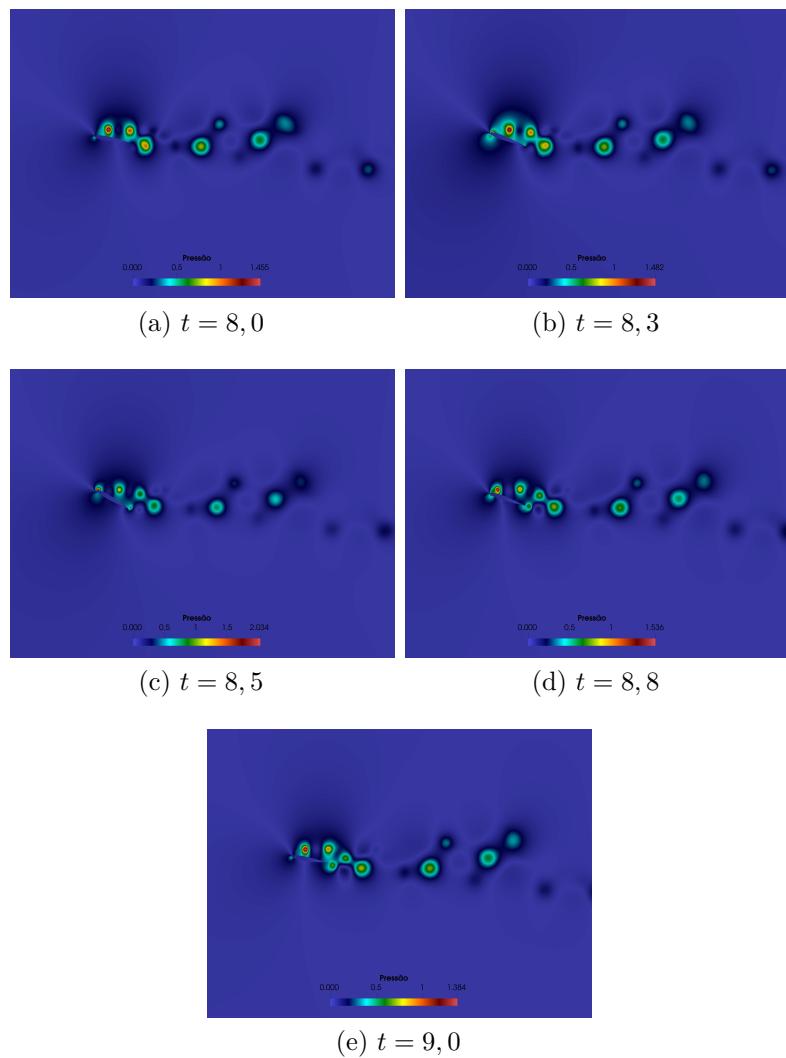


Figura 3.15 – Aerofólio Mov.: Campos de pressão

# REFERÊNCIAS

---



---

- AKKERMAN, I.; BAZILEVS, Y.; BENSON, D.; FARTHING, M.; KEES, C. Free-surface flow and fluid-object interaction modeling with emphasis on ship hydrodynamics. *Journal of Applied Mechanics*, v. 79, p. doi:10.1115/1.4005072, 01 2012.
- ALFONSI, G. Reynolds-averaged navier–stokes equations for turbulence modeling. *Applied Mechanics Reviews*, v. 62, n. 4, p. 040802, 06 2009. ISSN 0003-6900. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3124648>>.
- ANDERSON, J. D. *Computational fluid dynamic - the basics with applications*. 1. ed. New York, USA: McGraw-Hill Book Company, 1995.
- ARGYRIS, J. An excursion into large rotations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 32, p. 85–155, 1982.
- AVANCINI, G. *Formulação unificada para análise tridimensional de interação fluido-estrutura com escoamento de superfície livre: Uma abordagem Lagrangiana baseada em posições*. Tese (Doutorado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2023.
- AVANCINI, G.; SANCHES, R. A. A total lagrangian position-based finite element formulation for free-surface incompressible flows. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 169, p. 103348, 2020.
- BADIA, S.; NOBILE, F.; VERGARA, C. Fluid-structure partitioned procedures based on robin transmission conditions. *Journal of Computational Physics*, v. 227, p. 7027–7051, 2008.
- BATTINI, J. M.; PACOSTE, C. On the choice of the linear element for corotational triangular shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, n. 44-47, p. 6362–6377, 2006. ISSN 0045-7825.
- BAUMAN, P. T.; BEN DHIA, H.; ELKHODJA, N.; ODEN, J. T.; PRUDHOMME, S. On the application of the Arlequin method to the coupling of particle and continuum models. *Comput. Mech.*, v. 42, p. 511–530, 2008.
- BAZILEVS, Y.; AKKERMAN, I. Large eddy simulation of turbulent taylor–couette flow using isogeometric analysis and the residual-based variational multiscale method. *Journal of Computational Physics*, v. 229, n. 9, p. 3402 – 3414, 2010. ISSN 0021-9991.
- BAZILEVS, Y.; CALO, V. M.; COTTRELL, J. A.; HUGHES, T. J. R.; REALI, A.; SCOVazzi, G. Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 197, p. 173–201, 2007.
- BAZILEVS, Y.; CALO, V. M.; HUGHES, T. J. R.; ZHANG, Y. Isogeometric fluid-structure interaction: theory, algorithms, and computations. *Computational Mechanics*, v. 43, p. 3–37, 2008.

BAZILEVS, Y.; HSU, M.-C.; KIENDL, J.; WÜCHNER, R.; BLETZINGER, K.-U. 3d simulation of wind turbine rotors at full scale. part ii: Fluid-structure interaction modeling with composite blades. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 65, p. 236 – 253, 01 2011.

BAZILEVS, Y.; MICHLER, C.; CALO, V.; HUGHES, T. Isogeometric variational multiscale modeling of wall-bounded turbulent flows with weakly enforced boundary conditions on unstretched meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 199, n. 13, p. 780 – 790, 2010. ISSN 0045-7825.

BAZILEVS, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. Challenges and directions in computational fluid-structure interaction. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, v. 23, p. 215–221, 02 2013b.

BAZILEVS, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E. *Computational Fluid-Structure Interaction: Methods and Applications*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2013.

BAZILEVS, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E.; HSU, M.-C.; KOSTOV, N.; MCINTYRE, S. Aerodynamic and FSI analysis of wind turbines with the ALE-VMS and ST-VMS methods. *Archives of Computational Methods in Engineering*, v. 21, p. 359–398, 2014.

BELYTSCHKO, T.; LU, Y. Y.; GU, L.; TABBARA, M. Element-free Galerkin methods for static and dynamic fracture. *International Journal of Solids and Structures*, v. 32, n. 17–18, p. 2547–2570, 1995.

BEN DHIA, H. Multiscale mechanical problems: The Arlequin method. *Comptes Rendus Acad. Sci. Sér. I*, v. 326, p. 899–904, 1998.

BEN DHIA, H. Further insights by theoretical investigations of the multiscale Arlequin method. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, v. 6, n. 3, p. 215–232, 2008.

BEN DHIA, H.; RATEAU, G. Mathematical analysis of the mixed Arlequin method. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris Série I*, v. 332, p. 649–654, 2001.

BENEK, J.; STEGER, J.; DOUGHERTY, F.; BUNING, P. *Chimera. A grid-embedding technique*. [S.l.], 1986.

BISCANI, F.; GIUNTA, G.; BELOUETTAR, S.; HU, H.; CARRERA, E. Mixed-dimensional modeling by means of solid and higher-order multi-layered plate finite elements. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, v. 23, n. 9, p. 960–970, 2016.

BLOM, F. J. A monolithical fluid-structure interaction algorithm applied to the piston problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 167, n. 3-4, p. 369–391, 1998. ISSN 0045-7825.

BONET, J.; WOOD, R. D.; MAHANEY, J.; HEYWOOD, P. Finite element analysis of air supported membrane structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 5-7, p. 579–595, 2000. ISSN 0045-7828.

BOTTASSO, C. L.; DETOMI, D.; SERRA, R. The ball-vertex method: a new simple spring analogy method for unstructured dynamic meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 194, n. 39, p. 4244–4264, 2005.

- BREZZI, F.; FORTIN, M. Mixed and hybrid finite element methods. In: *Vol. 15 of Springer Series in Computational Mathematics*. New York: Springer, 1991.
- BROOKS, A. N.; HUGHES, T. J. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 32, n. 1-3, p. 199–259, 1982.
- CALEYRON, F.; COMBESCURE, A.; FAUCHER, V.; POTAPOV, S. SPH modeling of fluid-solid interaction for dynamic failure analysis of fluid-filled thin shells. *Journal of Fluids and Structures*, v. 39, p. 126–153, 2013.
- CARRAZEDO, R.; CODA, H. B. Alternative positional FEM applied to thermomechanical impact of truss structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 46, n. 11, p. 1008–1016, 2010.
- CATABRIGA, L.; COUTINHO, A. L. G. Implicit SUPG solution of euler equations using edge-based data structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 191, n. 32, p. 3477–3490, 2002. ISSN 0045-7825.
- CHUNG, J.; HULBERT, G. M. A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics With Improved Numerical Dissipation: The Generalized- $\alpha$  Method. *Journal of Applied Mechanics*, v. 60, n. 2, p. 371–375, 06 1993. ISSN 0021-8936.
- CHUNG, T. J. *Computational fluid dynamics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002.
- CIRAK, F.; RADOVITZKY, R. A Lagrangian-Eulerian shell-fluid coupling algorithm based on level sets. *Computers & Structures*, v. 83, p. 491–498, 2005.
- CODA, H. B. *Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: Uma formulação posicional baseada no MEF*. Tese (Tese para concurso de professor titular) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2003.
- CODA, H. B. *O Método dos Elementos Finitos posicional: Sólidos e Estruturas - Não linearidade Geométrica e Dinâmica*. 1. ed. São Carlos: EESC-USP, 2018. 284 p.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Improved finite element for 3D laminate frame analysis including warping for any cross-section. *Applied Mathematical Modelling*, v. 34, n. 4, p. 1107–1137, 2010.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A FEM procedure based on positions and unconstrained vectors applied to non-linear dynamic of 3D frames. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 47, n. 4, p. 319–333, 2011.
- DHIA, H.; JAMOND, O. On the use of XFEM within the Arlequin framework for the simulation of crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 199, n. 21-22, p. 1403–1414, 2010.
- DHIA, H.; RATEAU, G. The Arlequin method as a flexible engineering design tool. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 62, n. 11, p. 1442–1462, 2005.

DHIA, H.; TORKHANI, M. Modeling and computation of fretting wear of structures under sharp contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 85, p. 61–83, 2011.

DHIA, H. B.; RATEAU, G. Application of the Arlequin method to some structures with defects. *Revue Européenne des Éléments Finis*, Taylor & Francis, v. 11, n. 2-4, p. 291–304, 2002.

DONEA, J. A taylor-galerkin method for convective transport problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 20, p. 101–119, 1984.

DONEA, J.; GIULIANI, S.; HALLEUX, J. P. An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 33, n. 1-3, p. 689–723, 1982.

FARHAT, C.; HARARI, I.; FRANCA, L. P. The discontinuous enrichment method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 48, p. 6455–6479, 2001.

FELIPPA, C. A.; PARK, K. C.; FARHAT, C. Partitioned analysis of coupled mechanical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 24-25, p. 3247–3270, 2001.

FERNANDES, J. W. D. *Interação fluido-estrutura com escoamentos incompressíveis utilizando o método dos elementos finitos*. Dissertação (Mestrado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2016.

FERNANDES, J. W. D. *Técnica de superposição de modelos estabilizada para análise de interação fluido-estrutura*. Tese (Doutorado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2020.

FERNANDES, J. W. D.; BARBARULO, A.; Ben Dhia, H.; SANCHES, R. A. K. A residual-based stabilized finite element formulation for incompressible flow problems in the arlequin framework. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 370, p. 113073, 2020. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782520302577>>.

FERNANDES, J. W. D.; CODA, H. B.; SANCHES, R. A. K. ALE incompressible fluid–shell coupling based on a higher-order auxiliary mesh and positional shell finite element. *Computational Mechanics*, v. 63, n. 3, p. 555–569, 2019.

FERNIER, A.; FAUCHER, V.; JAMOND, O. Multi-model Arlequin approaches for fast transient, FSI-oriented, fluid dynamics with explicit time integration. *Computers and Fluids*, Elsevier, v. 199, p. 104428, mar. 2020. Disponível em: <<https://hal.science/hal-03991421>>.

FISH, J. The s-version of the finite element method. *Computers & Structures*, v. 43, n. 3, p. 539–547, 1992.

GERMANO, M.; PIOMELLI, U.; MOIN, P.; CABOT, W. H. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, v. 3, n. 7, p. 1760–1765, 07 1991. ISSN 0899-8213. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.857955>>.

- GHIA, U.; GHIA, K. N.; SHIN, C. T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, v. 48, p. 387–441, 1982.
- GRECO, M.; CODA, H. B. A simple and precise FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 193, p. 3541–3557, 2004.
- GRUTTMANN, F.; SAUER, R.; WAGNER, W. Theory and numerics of three-dimensional beams with elastoplastic material behaviour. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 48, n. 12, p. 1675–1702, 2000.
- GUIDAULT, P.-A.; BELYTSCHKO, T. On the l2 and the h1 couplings for an overlapping domain decomposition method using lagrange multipliers. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 70, n. 3, p. 322–350, 2007. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1882>>.
- HANSBO, A.; HANSBO, P. An unfitted finite element method, based on Nitsche's method, for elliptic interface problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 191, n. 47–48, p. 5537–5552, 2002.
- HENDERSON, R. D. Nonlinear dynamics and pattern formation in turbulent wake transition. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 352, p. 65–112, 1997. ISSN 0022-1120.
- HÖLLIG, K.; REIF, U.; WIPPER, J. Weighted extended b-spline approximation of dirichlet problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, Society for Industrial and Applied Mathematics, USA, v. 39, n. 2, p. 442–462, 2001. ISSN 0036-1429.
- HOU, G.; WANG, J.; LAYTON, A. Numerical methods for fluid-structure interaction - a review. *Commun. Comput. Phys.*, v. 12, p. 337–377, 2012.
- HRON, J.; MADLIK, M. Fluid-structure interaction with applications in biomechanics. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, v. 8, n. 5, p. 1431–1458, 2007.
- HÜBNER, B.; WALHORN, E.; DINKLER, D. A monolithic approach to fluid-structure interaction using space-time finite elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 193, p. 2087–2104, 2004.
- HUGHES, T. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. [S.l.]: Dover Publications, 2000. (Dover Civil and Mechanical Engineering). ISBN 9780486411811.
- HUGHES, T. J.; FRANCA, L. P.; BALESTRA, M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuška-Brezzi condition: a stable Petrov-Galerkin formulation of the stokes problem accommodating equal-order interpolations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 59, n. 1, p. 85 – 99, 1986.
- HUGHES, T. J.; FRANCA, L. P.; HULBERT, G. M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 73, n. 2, p. 173 – 189, 1989. ISSN 0045-7825.

HUGHES, T. J.; LIU, W. K.; ZIMMERMAN, T. K. Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 29, p. 329–349, 1981.

HUGHES, T. J. R. Stability, convergence and growth and decay of energy of the average acceleration method in nonlinear structural dynamics. *Computers & Structures*, v. 6, p. 313–324, 1976.

HUGHES, T. J. R. Multiscale phenomena: Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale methods, bubbles and the origins of stabilized methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 127, p. 387–401, 1995.

HUGHES, T. J. R.; COTTRELL, J. A.; BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement . *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 194, p. 4135–4195, 2005.

HUGHES, T. J. R.; FEIJÓO, G. R.; MAZZEI, L.; QUINCY, J. B. The variational multiscale method - a paradigm for computational mechanics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 166, p. 3–24, 1998.

HUGHES, T. J. R.; LIU, W. K. Nonlinear finite element analysis of shells: Part I. three-dimensional shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 26, n. 3, p. 331–362, 1981. A. ISSN 0045-7825.

HUGHES, T. J. R.; LIU, W. K. Nonlinear finite element analysis of shells: Part II. two-dimensional shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 27, n. 2, p. 167–181, 1981. A. ISSN 0045-7825.

HUGHES, T. J. R.; OBERAI, A. A.; MAZZEI, L. Large Eddy Simulation of turbulent channel flows by the variational multiscale method. *Physics of Fluids*, v. 13, p. 1874–1799, 2001.

HUGHES, T. J. R.; TEZDUYAR, T. E. Finite element methods for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible Euler equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 45, p. 217–284, 1984.

IBRAHIMBEGOVIC, A.; TAYLOR, R. L. On the role of frame-invariance in structural mechanics models at finite rotations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 191, p. 5159–5176, 2002.

IRONS, B. M.; TUCK, R. C. A version of the Aitken accelerator for computer iteration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 1, n. 3, p. 275–277, 1969.

JAMOND, O.; BEN DHIA, H. Incompressibility in the multimodel Arlequin framework. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, v. 94, p. 374–399, 2013.

JANSEN, K. E.; WHITING, C. H.; HULBERT, G. M. A generalized- $\alpha$  method for integrating the filtered Navier–Stokes equations with a stabilized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 3, p. 305 – 319, 2000. ISSN 0045-7825.

JOHNSON, A. A.; TEZDUYAR, T. E. Mesh update strategies in parallel finite element computations of flow problems with moving boundaries and interfaces. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 119, p. 73–94, 1994.

- KANCHI, H.; MASUD, A. A 3D adaptative mesh moving scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 54, p. 923–944, 2007.
- KÜTTLER, U.; WALL, W. A. Fixed-point fluid–structure interaction solvers with dynamic relaxation. *Computational mechanics*, Springer, v. 43, n. 1, p. 61–72, 2008.
- LAUNDER, B. E.; SPALDING, D. B. *Lectures in mathematical models of turbulence*. New York: Academic Press, 1972.
- LEFRANÇOIS, E. A simple mesh deformation technique for fluid-structure interaction based on a submesh approach. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, v. 75, p. 1085–1101, 2008.
- MELENK, J. M.; BABUSKA, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, n. 1, p. 289–314, 1996.
- MITTAL, R.; IACCARINO, G. Immersed boundary methods. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 37, p. 237–261, 2005.
- MITTAL, S.; TEZDUYAR, T. Massively parallel finite element computation of incompressible flows involving fluid-body interactions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 112, n. 1, p. 253 – 282, 1994. ISSN 0045-7825.
- MOËS, N.; CLOIREC, M.; CARTRAUD, P.; REMACLE, J.-F. A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 192, n. 28–30, p. 3163–3177, 2003.
- NAYROLES, B.; TOUZOT, G.; VILLON, P. Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, v. 10, n. 5, p. 307–318, 1992.
- OTOGURO, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E. Element length calculation in B-spline meshes for complex geometries. *Computational Mechanics*, v. 65, p. 1085–1103, 2020.
- PESKIN, C. S. Flow patterns around heart valves: A numerical method. *Journal of Computational Physics*, v. 10, n. 2, p. 252–271, 1972.
- PIEGL, L.; TILLER, W. *The NURBS Book*. second. New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1996.
- PIOMELLI, U. Large-eddy simulation: achievements and challenges. *Progress in Aerospace Sciences*, v. 35, n. 4, p. 335–362, 1999. ISSN 0376-0421. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0376042198000141>>.
- REDDY, J. N. *An Introduction to the Finite Element Method*. 3. ed. [S.l.]: McGraw Hill, 2006.
- REDDY, J. N.; GARTLING, D. K. *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*. 3. ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 2010.
- ROSA, R. J. R. *Técnica de partição de domínio para análise numérica de sólidos bidimensionais fraturados combinando análise isogeométrica e elementos finitos*. Dissertação (Mestrado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2021.

- ROUX, F. X.; GARAUD, J. D. Domain decomposition methodology with robin interface matching conditions for solving strongly coupled fluid-structure problems. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, v. 7, p. 29–38, 2009.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. An embedded domain technique based on level-sets for finite element method (FEM) fluid-shell coupling. *Mecánica Computacional*, XXIX, p. 4801–4818, 2010a.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Fluid-structure interaction using an arbitrary Lagrangian-Eulerian Fluid solver coupled to a positional Lagrangian shell solver. *Mecánica Computacional*, XXIX, p. 1627–1647, 2010b.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Unconstrained vector nonlinear shell formulation applied to fluid-structure interaction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engeneering*, v. 259, p. 177–196, 2013.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. On fluid-shell coupling using an arbitrary Lagrangian-Eulerian fluid solver coupled to a positional Lagrangian shell solver. *Applied Mathematical Modelling*, v. 38, p. 3401–3418, 2014.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Flexible multibody dynamics finite element formulation applied to structural progressive collapse analysis. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 13, n. 16, p. 52–71, 2016.
- SIMO, J. C.; FOX, D. D. On a stress resultant geometrically exact shell model. Part I: formulation and optimal parametrization. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 72, p. 267–304, 1989.
- SPEZIALE, C. G. Analytical methods for the development of reynolds-stress closures in turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, Annual Reviews, v. 23, n. Volume 23, 1991, p. 107–157, 1991. ISSN 1545-4479. Disponível em: <<https://www.annualreviews.org/content/journals/10.1146/annurev.fl.23.010191.000543>>.
- STEIN, K.; TEZDUYAR, T. E.; BENNEY, R. Automatic mesh update with the solid-extension mesh moving technique. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 193, p. 2019–2032, 2004.
- STRANG, G.; FIX, G. *An analysis of the Finite Element Method*. 2. ed. [S.l.]: Wesley-Cambridge Press, 2008.
- STROUBOULIS, T.; COPPS, K.; BABUSKA, I. The generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 32–33, p. 4081–4193, 2001.
- TAKIZAWA, K. .; TEZDUYAR, T. Space-time fluid-structure interaction methods. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, v. 22, p. 1230001, 08 2012.
- TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E.; OTOGURO, Y. Stabilization and discontinuity-capturing parameters for space-time flow computations with finite element and isogeometric discretizations. *Computational Mechanics*, v. 62, n. 5, p. 1169–1186, 2018.
- TALLEC, P. L.; MOURO, J. Fluid structure interaction with large structural displacements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 190, p. 3039–3067, 2001.

- TEZDUYAR, T. Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations. In: HUTCHINSON, J. W.; WU, T. Y. (Ed.). [S.l.]: Elsevier, 1992, (Advances in Applied Mechanics, v. 28). p. 1 – 44.
- TEZDUYAR, T.; ALIABADI, S.; BEHR, M. Enhanced-Discretization Interface-Capturing Technique (EDICT) for computation of unsteady flows with interfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 155, p. 235–248, 1998.
- TEZDUYAR, T.; ALIABADI, S.; BEHR, M.; JOHNSON, A.; MITTAL, S. Parallel finite-element computation of 3D flows. *Computer*, v. 26, n. 10, p. 27–36, 1993.
- TEZDUYAR, T.; SATHE, S. Stabilization parameters in supg and pspg formulations. *Journal of Computational and Applied Mechanics*, v. 4, n. 1, p. 71–88, 2003.
- TEZDUYAR, T. E.; ALIABADI, S. EDICT for 3D computation of two-fluid interfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, p. 403–410, 2000.
- TEZDUYAR, T. E.; BEHR, M.; LIOU, J. A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces - the deforming-spatial-domain/space-time procedure: I. The concept and the preliminary numerical tests. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 94, p. 339–351, 1992b.
- TEZDUYAR, T. E.; BEHR, M.; MITTAL, S.; LIOU, J. A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces - the deforming-spatial-domain/space-time procedure: II. Computation of free-surface flows, two-liquid flows, and flows with drifting cylinders. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 94, p. 353–371, 1992c.
- TEZDUYAR, T. E.; BEHR, M.; MITTAL, S.; JOHNSON, A. A. Computation of unsteady incompressible flows with the finite element methods: Space–time formulations, iterative strategies and massively parallel implementations. In: *New Methods in Transient Analysis*. New York: ASME, 1992f. (PVP-Vol.246/AMD-Vol.143), p. 7–24.
- TEZDUYAR, T. E.; MITTAL, S.; RAY, S. E.; SHIH, R. Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 95, p. 221–242, 1992a.
- TEZDUYAR, T. E.; OSAWA, Y. Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 3, p. 411–430, 2000.
- TEZDUYAR, T. E.; SATHE, S. Enhanced-discretization successive update method (EDSUM). *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 47, p. 633–654, 2005.
- TONON, P. *Simulação numérica de escoamentos incompressíveis através da análise isogemétrica*. Dissertação (Mestrado) — PPGEC-UFRGS, Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil, 2016.
- TRUESELL, C. A. Hypo-elasticity. *J. Rational Mech. Anal.*, v. 4, p. 83–133, 1955.
- WANG, K.; RALLU, A.; GERBEAU, J.-F.; FARHAT, C. Algorithms for interface treatment and load computation in embedded boundary methods for fluid and fluid–structure interaction problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, John Wiley & Sons, Ltd., v. 67, n. 9, p. 1175–1206, 2011.

WILCOX, D. C. *Turbulence modeling for CFD*. La Cañada, CA: DCW Industries Inc., 1993.

ZHANG, Y.; BAZILEVS, Y.; GOSWAMI, S.; BAJAJ, C. L.; HUGHES, T. J. Patient-specific vascular nurbs modeling for isogeometric analysis of blood flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 196, n. 29, p. 2943 – 2959, 2007. ISSN 0045-7825.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; NITHIARASU, P. *The Finite Element Method: Fluid Dynamics*. 6. ed. [S.l.]: Butterworth Heinemann Linacre house, 2005. v. 3. 334 p.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; NITHIARASU, P. *The Finite Element Method: The Basis*. 6. ed. [S.l.]: Butterworth Heinemann Linacre house, 2005a. v. 1. 689 p.