

# DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL

---

---

O escoamento isotérmico de um fluido newtoniano é descrito pelas equações advindas da conservação da quantidade de movimento, ou de Navier-Stokes, e da conservação de massa. Nos casos em que ocorram variações significativas no campo de temperatura, ou em escoamentos compressíveis, a equação da conservação de energia deve ser adicionada ao sistema. Essas equações governantes, juntamente com as relações constitutivas, resultam em um sistema de equações diferenciais não lineares que descrevem o comportamento do escoamento no tempo e no espaço.

Neste trabalho, são investigados escoamentos incompressíveis, isotérmicos e com contornos móveis. As seções seguintes apresentam a abordagem adotada para a resolução desse tipo de problema, bem como sua implementação computacional. Utiliza-se uma formulação Arbitrária Euleriana-Lagrangiana (ALE) para representar as equações, e a discretização espacial é realizada por meio do método dos elementos finitos (FEM) ou da análise isogeométrica (IGA).

Para tratar questões numéricas recorrentes nesse sistema de equações, como as oscilações espúrias em casos de convecção dominante, típicas da aplicação do método dos resíduos ponderados baseado na formulação clássica de Galerkin, emprega-se a metodologia SUPG. Adicionalmente, a estabilização PSPG é aplicada com o objetivo de contornar a condição imposta pelo critério de *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi* (LBB). A integração no tempo é conduzida por meio do método  $\alpha$ -generalizado.

Ao final deste capítulo, é apresentado um algoritmo que detalha o esquema computacional de solução dos problemas da DFC, seguido pela resolução de alguns casos clássicos, utilizados como verificação da metodologia proposta.

# 1.1 Equações governantes na descrição Euleriana

## 1.1.1 Equação da conservação da massa

Considere um volume de controle infinitesimal fixo no espaço, permeável a matéria e submetido a uma escoamento de velocidade  $\mathbf{u}$ , com componentes  $u_1$ ,  $u_2$ , e  $u_3$  (conforme Fig. 1.1). Para um intervalo de tempo infinitesimal  $dt$ , a lei da conservação da massa impõe que a variação de massa dentro do volume de controle seja igual ao fluxo líquido de massa que atravessa suas fronteiras, que pode ser expresso matematicamente da seguinte forma:

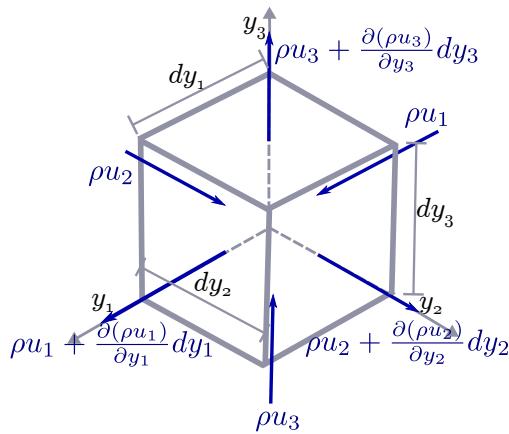


Figura 1.1 – Volume de controle infinitesimal: Fluxo de massa

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = & (\rho u_1 dA_1 + \rho u_2 dA_2 + \rho u_3 dA_3) - \\ & \left( \left( \rho u_1 + \frac{\partial \rho u_1}{\partial y_1} dy_1 \right) dA_1 + \left( \rho u_2 + \frac{\partial \rho u_2}{\partial y_2} dy_2 \right) dA_2 + \left( \rho u_3 + \frac{\partial \rho u_3}{\partial y_3} dy_3 \right) dA_3 \right), \end{aligned} \quad (1.1)$$

com  $\rho$  a massa específica do fluido e  $dA_i$  a área referente à face ortogonal ao eixo  $y_i$ . Considerando que  $dV = dy_1 dy_2 dy_3 = dy_1 dA_1 = dy_2 dA_2 = dy_3 dA_3$  e manipulando-se algebraicamente a Eq. 1.1 chega-se a seguinte expressão:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial \rho u_1}{\partial y_1} - \frac{\partial \rho u_2}{\partial y_2} - \frac{\partial \rho u_3}{\partial y_3}. \quad (1.2)$$

Para escoamentos incompressíveis, quando  $\rho$  é constante ao longo do tempo, a equação fica reduzida a:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \frac{\partial u_2}{\partial y_2} + \frac{\partial u_3}{\partial y_3} = 0, \quad (1.3)$$

ou ainda:

$$\nabla_y \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.4)$$

### 1.1.2 Equação da quantidade de movimento

Para um volume de controle infinitesimal, a lei da conservação da quantidade de movimento afirma que a variação temporal da quantidade de movimento no interior do volume é determinada pela diferença entre o fluxo de quantidade de movimento que entra e o que sai pelas suas fronteiras, somada à resultante das forças aplicadas sobre o volume de controle.

Para chegar-se à equação da quantidade de movimento em sua forma conservativa partindo desse princípio, inicia-se com a avaliação das forças que atuam sobre um volume de controle infinitesimal no instante atual. Considerando o equilíbrio das forças externas e internas na direção  $y_1$ , de acordo o volume apresentado na Fig. 1.2, chega-se na seguinte relação:

$$F_1 = -(\sigma_{11}dy_2dy_3 + \sigma_{12}dy_1dy_3 + \sigma_{13}dy_1dy_2) + \\ \left( \left( \sigma_{11} + \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial y_1}dy_1 \right) dy_2dy_3 + \left( \sigma_{12} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y_2}dy_2 \right) dy_1dy_3 + \left( \sigma_{13} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial y_3}dy_3 \right) dy_1dy_2 \right) + \\ b_1dy_1dy_2dy_3, \quad (1.5)$$

onde  $F_1$  representa a resultante das forças externas na direção  $y_1$ ;  $\sigma_{ij}$  são as componentes  $ij$  do tensor de tensões Cauchy ( $\boldsymbol{\sigma}$ ); e  $b_1$  representa a componente na direção  $y_1$  do vetor força de campo por unidade de volume  $\mathbf{b}$ . Dividindo-se Eq. 1.5 por  $dV$  e efetuando as subtrações, têm-se a força resultante por unidade de volume ( $q_1$ ) dada por:

$$q_1 = \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y_2} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial y_3} + b_1. \quad (1.6)$$

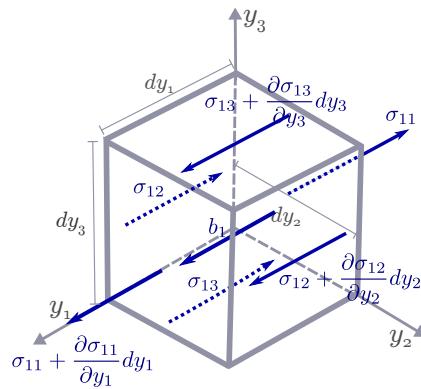


Figura 1.2 – Volume de controle infinitesimal: Componentes de força na direção  $y_1$

Considerando-se o equilíbrio das forças nas direções  $y_2$  e  $y_3$ , pode-se escrever também:

$$q_2 = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y_3} + b_2, \quad (1.7)$$

$$q_3 = \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial y_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial y_3} + b_3, \quad (1.8)$$

ou ainda:

$$\mathbf{q} = \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}. \quad (1.9)$$

Realizando-se o balanço da quantidade de movimento no volume de controle infinitesimal da Fig. 1.3, e aplicando-se a lei da conservação da quantidade de movimento, pode-se chegar a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} dV = & u_1 \rho \mathbf{u} dA_1 + u_2 \rho \mathbf{u} dA_2 + u_3 \rho \mathbf{u} dA_3 - \\ & \left( \left( u_1 \rho \mathbf{u} + \frac{\partial u_1 \rho \mathbf{u}}{\partial y_1} dy_1 \right) dA_1 + \left( u_2 \rho \mathbf{u} + \frac{\partial u_2 \rho \mathbf{u}}{\partial y_2} dy_2 \right) dA_2 + \right. \\ & \left. \left( u_3 \rho \mathbf{u} + \frac{\partial u_3 \rho \mathbf{u}}{\partial y_3} dy_3 \right) dA_3 \right) + \mathbf{q} dV, \end{aligned} \quad (1.10)$$

dividindo-se a Eq. 1.10 por  $dV$  e efetuando-se as subtrações, chega-se a:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} = - \frac{\partial u_1 \rho \mathbf{u}}{\partial y_1} - \frac{\partial u_2 \rho \mathbf{u}}{\partial y_2} - \frac{\partial u_3 \rho \mathbf{u}}{\partial y_3} + \mathbf{q}, \quad (1.11)$$

ou ainda:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla_y \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mathbf{f} \right) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (1.12)$$

com  $\mathbf{f} = \rho \mathbf{b}$  que representa a força de campo por unidade de massa.

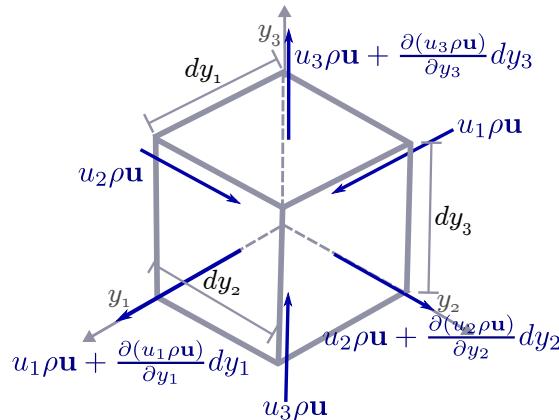


Figura 1.3 – Volume de controle infinitesimal: Fluxo de quantidade de Movimento

Da consideração da equação da continuidade, a Eq. 1.12 pode ser rescrita ainda em sua forma convectiva como:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla_y) \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (1.13)$$

O tensor de tensões de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  é definido para fluidos newtonianos incompressíveis pela seguinte relação constitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\varepsilon(\mathbf{u}), \quad (1.14)$$

onde  $p$  representa a pressão,  $\mu$  a viscosidade dinâmica do fluido e  $\varepsilon(\bullet)$  é o tensor taxa de deformação infinitesimal, definido como:

$$\varepsilon(\bullet) = \frac{1}{2} \left( \nabla_y(\bullet) + \nabla_y(\bullet)^T \right). \quad (1.15)$$

### 1.1.3 Formulação forte da mecânica dos fluidos

Seja  $\Omega \in \mathbb{R}^{n_{sd}}$ , com  $n_{sd} = 1, 2, 3$  definindo a dimensão do domínio espacial do escoamento com contorno  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ , no instante  $t \in (0, T)$  (ver Fig. 1.4).

Para escoamentos incompressíveis isotérmicos o fluido possui movimento descrito pela equação da quantidade de movimento, ou equações de Navier-Stokes (Eq. 1.13) e da conservação de massa (Eq. 1.4). Para completar a formulação da mecânica dos fluidos, condições de contorno devem ser especificadas. Em geral, em uma dada parte do contorno espacial, condições de contorno essenciais (Dirichlet) ou naturais (Neumann) são aplicadas. Dessa forma, o escoamento é governado pelo seguinte conjunto de equações:

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_y \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ em } \Omega \\ \nabla_y \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ em } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_D \text{ em } \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{h} \text{ em } \Gamma_N, \end{cases} \quad (1.16)$$

sendo  $\Gamma_D$  a porção do contorno com condições de contorno de Dirichlet, representadas pelo campo de velocidades  $\mathbf{u}_D$ , e  $\Gamma_N$  aquela com condições de contorno de Neumann, descritas pelas forças de superfície  $\mathbf{h}$ . A variável  $\mathbf{n}$  representa o vetor unitário normal ao contorno  $\Gamma_N$ .

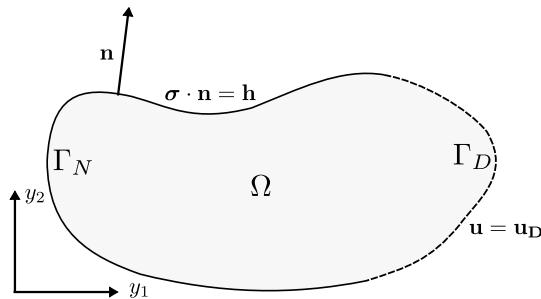


Figura 1.4 – Domínio para o problema da dinâmica dos fluidos computacional

## 1.2 Descrição Euleriana-Lagrangiana arbitrária (ALE)

A descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária (??) representa uma generalização da descrição puramente Lagrangiana e da descrição puramente Euleriana do movimento do contínuo. A descrição Lagrangiana fixa a atenção em pontos materiais do contínuo, enquanto que na descrição Euleriana considera-se uma porção fixa do espaço ocupada pelo contínuo, e analisam-se os pontos materiais que passam por essa porção ao longo do tempo. Como consequência, na descrição puramente Lagrangiana a malha computacional move-se com o contínuo, enquanto que na Euleriana a malha computacional mantém-se fixa. Por sua vez, na descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária, trabalha-se com pontos de referência que podem movimentar-se, mas de maneira independente do movimento dos pontos materiais do contínuo analisado.

Para a aplicação dessa metodologia às equações governantes da mecânica dos fluidos é importante a definição de três domínios, de acordo com a Fig. 1.5. O domínio inicial, chamado de **domínio material** ( $\Omega_0$ ), que é definido pelas coordenadas dos pontos materiais  $\mathbf{x}$ ; O domínio atual, chamado de **domínio espacial** ( $\Omega$ ), definido pelas coordenadas  $\mathbf{y}$ ; e por fim, o **domínio de referência** ( $\Omega_{\bar{x}}$ ) com coordenadas dos pontos de referência  $\bar{\mathbf{x}}$ .

Considera-se nesse texto, o domínio de referência,  $\Omega_{\bar{x}}$ , como sendo a configuração inicial da malha, enquanto que a configuração atual da malha e do contínuo consistem ambas na referência espacial  $\Omega$ .

As coordenadas no domínio atual do contínuo,  $\Omega$ , podem ser mapeadas a partir do domínio inicial ( $\Omega_0$ ) ou a partir do domínio de referência ( $\Omega_{\bar{x}}$ ) utilizando as seguintes funções de mapeamento:

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, t). \quad (1.17)$$

Da mesma forma, o domínio de referência, pode ser mapeado a partir do domínio inicial por:

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t). \quad (1.18)$$

A velocidade dos pontos da malha é calcula por:

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}}, \quad (1.19)$$

e a velocidade dos pontos materiais no instante  $t$  é obtida pela derivada do vetor posição  $\mathbf{y}$  mantendo  $\mathbf{x}$  fixo:

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}. \quad (1.20)$$

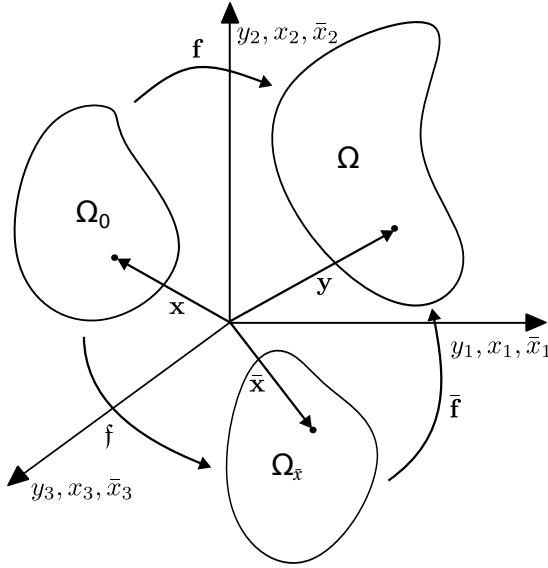


Figura 1.5 – Domínios utilizados para a descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária

As matrizes jacobianas dos mapeamentos considerando a dependência do espaço e do tempo são dadas por:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial(\mathbf{x}, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.21)$$

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{\partial(\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, t), t)}{\partial(\bar{\mathbf{x}}, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} & \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.22)$$

e

$$\mathfrak{F} = \frac{\partial(\mathfrak{f}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial(\mathbf{x}, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{w} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.23)$$

sendo  $\mathbf{w} = \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}}$ .

Considerando que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{f}} \circ \mathfrak{f}$ , pode-se escrever:

$$\frac{\partial(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial(\mathbf{x}, t)} = \frac{\partial(\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, t), t)}{\partial(\bar{\mathbf{x}}, t)} \cdot \frac{\partial(\mathfrak{f}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial(\mathbf{x}, t)}, \quad (1.24)$$

que pode ser rescrita como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} & \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{w} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.25)$$

Dessa forma, pode-se estabelecer uma relação entre a velocidade da malha e a velocidade do ponto material:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{w} \quad (1.26)$$

Supondo agora uma grandeza física escalar, denominada de  $g(\mathbf{y}, t)$  na configuração espacial, de  $g^*(\bar{\mathbf{x}}, t)$  na configuração de referência, e  $g^{**}(\mathbf{x}, t)$  na configuração material. Pode-se escrever então:

$$g^{**}(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), t), \quad (1.27)$$

ou:

$$g^{**} = g \circ \mathbf{f}, \quad (1.28)$$

o que permite escrever o seguinte gradiente:

$$\frac{\partial g^{**}(\mathbf{x}, t)}{\partial(\mathbf{x}, t)} = \frac{\partial g(\mathbf{y}, t)}{\partial(\mathbf{y}, t)} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial(\mathbf{x}, t)}, \quad (1.29)$$

que em forma matricial é apresentado como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g^{**}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial g^{**}}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial g}{\partial t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.30)$$

Essa expressão nos permite escrever a derivada temporal da variável na configuração material:

$$\frac{\partial g^{**}}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}} \cdot \mathbf{u}, \quad (1.31)$$

que é justamente a derivada material de  $g$ . Para facilitar a visualização pode tirar os sobrescritos  $**$ , e então:

$$\frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial g}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} g. \quad (1.32)$$

Usando essa mesma metodologia pode-se escrever a transformação de  $g^*(\bar{\mathbf{x}}, t)$  para a referência material da seguinte forma:

$$g^{**} = g^* \circ \mathfrak{f}, \quad (1.33)$$

que resulta no seguinte gradiente

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g^{**}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial g^{**}}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g^*}{\partial \bar{\mathbf{x}}} & \frac{\partial g^*}{\partial t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{w} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.34)$$

com a segunda coluna resultando em:

$$\frac{\partial g^{**}}{\partial t} = \frac{\partial g^*}{\partial t} + \frac{\partial g^*}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{w}. \quad (1.35)$$

Utilizando-se a expressão apresenta na Eq. 1.26 e substituindo-a em 1.35, resulta em:

$$\frac{\partial g^{**}}{\partial t} = \frac{\partial g^*}{\partial t} + \frac{\partial g^*}{\partial \mathbf{y}} \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}). \quad (1.36)$$

Removendo-se os sobrescritos (\*\* e (\*), chega-se a equação fundamental para os desenvolvimentos utilizando a metodologia ALE:

$$\frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial g}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} g. \quad (1.37)$$

Utilizando-se a definição de derivada material da Eq. 1.32 e comparando com a Eq. 1.13, pode-se rescrever a equação da quantidade de movimento da seguinte forma:

$$\rho \left( \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \mathbf{f} \right) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (1.38)$$

Para expressar então a equação da quantidade de movimento em uma descrição Euleriana-Lagrangeana, basta substituir na Eq. 1.38 a definição de derivada material apresentada na Eq. 1.37, e têm-se finalmente:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (1.39)$$

A equação da continuidade independe da movimentação da malha. Dessa forma a Eq. 1.4 se mantém a mesma para as análises usando uma descrição ALE. Assim, reescrevendo o conjunto de equações da DFC apresenta na Eq. 1.16 para um descrição ALE, têm-se:

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} & \text{em } \Omega \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{em } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_D & \text{em } \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{h} & \text{em } \Gamma_N, \end{cases} \quad (1.40)$$

## 1.3 Forma fraca e discretização espacial das equações governantes

Tomando-se a forma forte das equações governantes da DFC em descrição ALE, aplica-se o método de resíduos ponderados para se chegar à forma fraca e proceder com a discretização espacial. Os espaços de dimensão finita das funções tentativa que descrevem a velocidade e a pressão são chamados de  $\mathcal{S}_u$  e  $\mathcal{S}_p$  respectivamente, e definidos como:

$$\mathcal{S}_u = \left\{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u}(\cdot, t) \in \left( H^1(\Omega) \right)^{n_{sd}}, \mathbf{u} = \mathbf{u}_D \text{ em } \Gamma_D \right\} \quad (1.41)$$

e

$$\mathcal{S}_p = \left\{ p \mid p(\cdot) \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} p \, d\Omega = 0 \text{ se } \Gamma = \Gamma_N \right\}, \quad (1.42)$$

sendo  $(H^1(\Omega))^{n_{sd}}$  o espaço de funções vetoriais com derivadas de quadrado integrável sobre  $\Omega$  e  $L^2(\Omega)$  o espaço de funções escalares que são de quadrado integrável sobre  $\Omega$ .

O espaço das funções teste ou funções peso das equações da quantidade de movimento e da continuidade são definidos respectivamente por:

$$\mathcal{V}_u = \left\{ \mathbf{w} \mid \mathbf{w}(\cdot) \in \left(H^1(\Omega)\right)^{n_{sd}}, \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_D \right\}, \quad (1.43)$$

$$\mathcal{V}_p = \mathcal{S}_p. \quad (1.44)$$

Aplicando-se o método dos resíduos ponderados sobre as equações Eq. (1.39) e Eq.(1.4), integrando-se por partes o termo referente ao tensor de tensões de Cauchy, empregando-se o teorema da divergência e levando-se em consideração a condição de homogeneidade da função  $\mathbf{w}$  sobre o contorno  $\Gamma_D$ , obtém-se a forma fraca. A solução do problema consiste então em encontrar  $\mathbf{u} \in \mathcal{S}_u$  e  $p \in \mathcal{S}_p$ , de tal modo que  $\forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}_u$  e  $q \in \mathcal{V}_p$ , as seguintes expressões sejam verdadeiras:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_y \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) : \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} d\Gamma_N = 0, \quad (1.45)$$

$$\int_{\Omega} q (\nabla_y \cdot \mathbf{u}) d\Omega = 0. \quad (1.46)$$

### 1.3.1 Método dos elementos finitos

Antes de prosseguir com a discretização espacial da forma fraca do conjunto de equações da Mecânica dos Fluidos, é fundamental compreender os princípios básicos do Método dos Elementos Finitos. A discretização espacial tanto pelo método dos elementos finitos, como pela técnica de análise isogeométrica (Cap. ??), consiste em, dado um problema com domínio  $\Omega$ , dividi-lo em subdomínios  $\Omega^e$ , também chamados de elementos ou células, de forma que:

$$\Omega \approx \Omega^h = \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \Omega^e, \quad (1.47)$$

onde  $\Omega^h$  é o domínio discretizado por subdomínios, com o índice  $h$  se referindo ao tamanho representativo dos elementos, e  $n_{el}$  representando o número total de elementos.

Da mesma forma o contorno do domínio também é discretizado da seguinte forma:

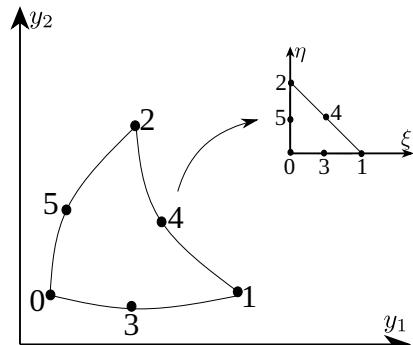
$$\Gamma \approx \Gamma^h = \bigcup_{b=1}^{n_{eb}} \Gamma^b, \quad (1.48)$$

onde  $n_{eb}$  representa o número de elementos que formam o contorno.

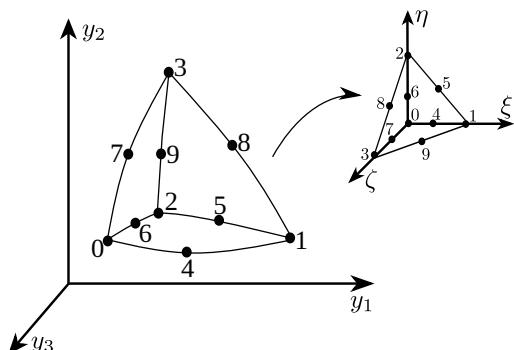
No Método dos Elementos Finitos, cada subdomínio, denominado elemento, é composto por um conjunto de pontos, chamados nós. As variáveis de interesse do problema, que incluem a geometria na abordagem isoparamétrica, são aproximadas pela combinação linear de um número finito de funções associadas aos nós, chamadas funções de forma, multiplicadas por variáveis chamadas parâmetros nodais. As funções de forma utilizadas no Método dos Elementos Finitos satisfazem, em geral, a propriedade de partição da

unidade, ou seja, a soma das funções de forma associadas a todos os nós de um elemento resulta em 1 para qualquer ponto dentro do domínio paramétrico do elemento. A técnica de elementos finitos pode ser estudada nos diversos livros disponíveis sobre o assunto, tais como ???).

Nesse trabalho são utilizadas funções de forma quadráticas do tipo polinômios de Lagrange, sendo empregados elementos isoparamétricos triangulares para o caso 2D e tetraédricos para o caso 3D. Na Fig. 1.6a e Fig. 1.6b, pode-se observar os elementos finitos 2D e 3D respectivamente bem como os espaços paramétricos adimensionais adotados para definir as funções de forma.



(a) Elemento Finito 2d



(b) Elemento Finito 3d

Figura 1.6 – Elementos Finitos: representação espacial e paramétrica

Adotar a abordagem isoparamétrica implica que a geometria do problema é descrita também pela combinação entre funções de forma e as coordenadas nodais da malha, conforme equação abaixo:

$$\mathbf{y}^h = \sum_{A=1}^{n_{\text{nos}}} \mathbf{y}_A N_A(\mathbf{y}), \quad (1.49)$$

sendo que para uma geometria tridimensional o vetor  $\mathbf{y}$  possui coordenadas  $y_1, y_2$  e  $y_3$ , as quais representam as posições físicas do domínio; O subíndice "A" representa o índice dos nós da malha,  $n_{\text{nos}}$  o número total de nós e  $N$  as funções de forma da discretização.

A discretização das variáveis de interesse para DFC no contexto do método dos elementos finitos serão apresentados no seguinte capítulo (Cap. 1.3.2).

### 1.3.2 Discretização Espacial

Os espaços de função tentativa para velocidade e pressão, bem como as funções teste, no contexto dos métodos dos elementos finitos, são dados pela combinação linear de parâmetros nodais com funções de forma definidas sobre cada subdomínio, atendendo à partição da unidade, de forma que o problema da dinâmica dos fluidos fica definido como: encontrar  $\mathbf{u}^h \in \mathcal{S}_u^h$  e  $p^h \in \mathcal{S}_p^h$ , de tal modo que  $\forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_u^h$  e  $q^h \in \mathcal{V}_p^h$  a seguinte expressão seja verdadeira:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{w}^h \cdot \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_N} \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{h}^h d\Gamma_N + \int_{\Omega} q^h (\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u}^h) d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (1.50)$$

onde:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{y}, t) = \sum_{A=1}^{n_{\text{nos}}} \mathbf{u}_A(t) N_A(\mathbf{y}), \quad (1.51)$$

$$p^h(\mathbf{y}, t) = \sum_{A=1}^{n_{\text{nos}}} p_A(t) N_A(\mathbf{y}), \quad (1.52)$$

$$\mathbf{w}^h(\mathbf{y}) = \sum_{A=1}^{n_{\text{nos}}} \mathbf{w}_A N_A(\mathbf{y}), \quad (1.53)$$

$$q^h(\mathbf{y}) = \sum_{A=1}^{n_{\text{nos}}} q_A N_A(\mathbf{y}), \quad (1.54)$$

sendo as variáveis  $\mathbf{w}_A$  e  $q_A$  arbitrárias nas aproximações.

No entanto, as formulações obtidas pelo método de Galerkin são conhecidas por apresentarem oscilações espúrias em escoamentos dominados pela convecção. Uma das formas de se lidar com esse problema é a utilização de métodos estabilizados, como *Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin* (SUPG) (????), aplicado nesse trabalho. Essa metodologia consiste em adicionar à equação da quantidade de movimento, o seu resíduo ponderado por  $\tau_{\text{SUPG}} ((\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{w}^h)$ , onde  $\tau_{\text{SUPG}}$  é um parâmetro de estabilização. Do ponto de vista numérico a aplicação de sobre o termo convectivo da equação da quantidade de movimento dá origem a um termo difusivo adicional, cuja viscosidade tem magnitude  $\tau_{\text{SUPG}}$ , e é responsável por garantir a estabilidade numérica em problemas com convecção dominante.

Para os problemas de escoamentos incompressíveis aqui analisados, deve-se levar em conta que os campos de velocidade e pressão não podem ser aproximados arbitrariamente, podendo levar à ocorrência de oscilações espúrias no campo de pressão. Para evitar isso, podem ser escolhidos elementos Taylor-Hood que obedeçam, à condição de *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi* (LBB) (??????), ou pode-se recorrer a um método estabilizado.

Neste trabalho, para estabilização da pressão, emprega-se a técnica *Pressure Stabilization Petrov Galerkin* (PSPG) (????). Essa técnica consiste em adicionar à equação

da continuidade, o resíduo da equação da quantidade de movimento ponderada pela função  $\tau_{\text{PSPG}} \left( \frac{\nabla_y q^h}{\rho} \right)$ , onde  $\tau_{\text{PSPG}}$  é um parâmetro de estabilização. Essa estabilização cria termos dependentes da pressão na equação da continuidade, responsáveis pela flexibilização do campo de pressão e por contornar a condição LBB.

Por fim, para prover maior estabilização em problemas com formação de vórtices, adiciona-se à equação da quantidade de movimento o resíduo da equação da continuidade ponderado por  $\nu_{\text{LSIC}} \rho (\nabla_y \cdot \mathbf{w}^h)$  (??), sendo  $\nu_{\text{LSIC}}$  um parâmetro de estabilização. A estabilização  $\nu_{\text{LSIC}}$  dá origem a um termo do tipo mínimos quadrados, e que também introduz na formulação uma difusão artificial.

Nota-se que a consistência da formulação estabilizada é garantida, uma vez que são adicionados às equações seus resíduos ponderados. Os parâmetros de estabilização  $\tau_{\text{SUPG}}$ ,  $\tau_{\text{PSPG}}$  e  $\nu_{\text{LSIC}}$  têm função de proporcionar uma solução estável e otimizar a convergência durante o refinamento de malha. A obtenção dos parâmetros estabilizadores será discutida na Subseção 1.3.3.

Por fim, o problema da dinâmica dos fluidos passa a ser a determinação de  $\mathbf{u}^h \in \mathcal{S}_u^h$  e  $p^h \in \mathcal{S}_p^h$ , de tal modo que  $\forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_u^h$  e  $q^h \in \mathcal{V}_p^h$  as seguintes expressões sejam verdadeiras:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{w}^h \cdot \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_y \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_N} \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{h}^h d\Gamma_N + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_e} \tau_{\text{SUPG}} ((\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_y \mathbf{w}^h) \cdot \mathbf{r}_M(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_e} \rho \nu_{\text{LSIC}} \nabla_y \cdot \mathbf{w}^h r_C(\mathbf{u}^h) d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (1.55)$$

e

$$\int_{\Omega} q^h \nabla_y \cdot \mathbf{u}^h d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_e} \tau_{\text{PSPG}} \left( \frac{\nabla_y q^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_M(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega = 0, \quad (1.56)$$

onde  $\mathbf{r}_M$  e  $r_C$  são os resíduos da equação da quantidade de movimento e da equação da continuidade, respectivamente, dados por:

$$\mathbf{r}_M(\mathbf{u}^h, p^h) = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_y \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h, p^h), \quad (1.57)$$

$$r_C(\mathbf{u}^h) = \nabla_y \cdot \mathbf{u}^h. \quad (1.58)$$

A solução de modelos móveis requer a utilização de uma técnica adequada para movimentação da malha local. A técnica utilizada nesse trabalho é conhecida como MJBS (Mesh-Jacobian Based Stiffening) introduzida por ??) e será abordada na Subseção ??.

Visto que existem funções teste separadas para a velocidade e pressão, pode-se definir dois vetores residuais correspondentes a equação da quantidade de movimento ( $\mathbf{R}_M$ ) e a equação da continuidade ( $\mathbf{R}_C$ ). Considerando a arbitrariedade de  $\mathbf{w}_A$  e  $q_A$ , têm-se:

$$\mathbf{R}_M = [(\mathbf{R}_M)_{A,i}], \quad (1.59)$$

$$\mathbf{R}_C = [(\mathbf{R}_C)_A], \quad (1.60)$$

com:

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_M)_{A,i} = & \int_{\Omega} N_A \mathbf{e}_i \cdot \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \Big|_{\bar{x}} + (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_y \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(N_A \mathbf{e}_i) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_N} N_A \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{h}^h d\Gamma_N + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{SUPG} ((\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_y N_A \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{r}_M(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \rho \nu_{LSIC} (\nabla_y \cdot N_A \mathbf{e}_i) r_C(\mathbf{u}^h) d\Omega, \end{aligned} \quad (1.61)$$

e:

$$(\mathbf{R}_C)_A = \int_{\Omega} N_A \nabla_y \cdot \mathbf{u}^h d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{PSPG} \left( \frac{\nabla_y N_A}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_M(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega, \quad (1.62)$$

com  $i = 1, 2$  para problemas 2D e  $i = 1, 3$  para problemas 3D.

Considerando  $\dot{\mathbf{U}}$ ,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{p}$  os vetores nodais dos graus de liberdade respectivos a velocidade, aceleração e pressão, pode-se escrever a forma semidiscreta do problema da DFC como: Encontrar  $\dot{\mathbf{U}}$ ,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{p}$  de maneira que

$$\mathbf{R}_M(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}, \quad (1.63)$$

e

$$\mathbf{R}_C(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}. \quad (1.64)$$

### 1.3.3 Parâmetros de estabilização

Para a utilização da metologia estabilizada da DFC, descrita nesse capítulo, a definição adequada dos parâmetros de estabilização desempenha papel fundamental na precisão e estabilidade numérica.

Desde os primeiros desenvolvimentos relacionados aos métodos estabilizados houve um amadurecimento das expressões de definição dos parâmetros  $\tau$ , as quais passam a levar em consideração formulações mais robustas, sendo adaptadas tanto para elementos de ordem elevadas, quanto para malhas mais complexas, como as usadas em análise isogeométrica.

Considerando que nesse trabalho dois tipos de aproximações espaciais são utilizadas, uma baseada no FEM e outra baseada em IGA, adotam-se os parâmetros propostos mais recentemente por ??), ??), ??), que são adequados para ambas aproximações.

Para essa opção é necessário definir-se o tensor métrico do elemento no espaço.

Com essa finalidade, descreve-se inicialmente a matriz Jacobiana  $\mathbf{Q}$ , como:

$$\mathbf{Q} = \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi} \right), \quad (1.65)$$

com  $\xi$  representando as coordenadas do espaço paramétrico, com componentes  $\xi, \eta$  e  $\zeta$ .

Para que a ordem polinomial seja levada em consideração, ou, outros fatores como a dimensão do elemento no espaço paramétrico, aplica-se à  $\mathbf{Q}$ , uma matriz de transformação ( $\mathbf{D}$ ), conforme a seguinte expressão:

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}\mathbf{D}^{-1}. \quad (1.66)$$

O comprimento direcional do elemento fica definido como:

$$h_{RQD} = 2(\mathbf{r}\mathbf{r} : \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}}, \quad (1.67)$$

o fator 2 vem de um típico espaço paramétrico, que é um quadrado ou um cubo com lado de comprimento 2.  $\mathbf{r}$  é o vetor unitário na direção do gradiente da intensidade da velocidade e  $\mathbf{G}$  o tensor métrico do elemento, os quais são representados respectivamente como:

$$\mathbf{r} = \frac{\nabla_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|}{\|\nabla_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\|} \quad (1.68)$$

e

$$\mathbf{G} = \hat{\mathbf{Q}}^{-T} \cdot \hat{\mathbf{Q}}^{-1}. \quad (1.69)$$

Para elementos finitos com funções de forma polinomiais de Lagrange de ordens  $p_\xi$ ,  $p_\eta$  e  $p_\zeta$  nas direções paramétricas  $\xi, \eta$  e  $\zeta$ , respectivamente, com  $\xi, \eta, \zeta \in [-1, 1]$ , a matriz  $\mathbf{D}$  é definida por:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} p_\xi & 0 & 0 \\ 0 & p_\eta & 0 \\ 0 & 0 & p_\zeta \end{bmatrix}. \quad (1.70)$$

Em geral, se escolhe o espaço paramétrico baseado em razões como eficiência da integração numérica ou conveniência de implementação. A maioria das metodologias utilizadas para definir o comprimento do elemento não levam este fator em consideração. Para essa finalidade, em ??), apresenta-se a matriz de transformação ( $\mathbf{D}$ ) como:

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial \xi}, \quad (1.71)$$

com  $\hat{\xi}$  chamado de espaço paramétrico de preferência.

Para elementos simplex, buscando encontrar uma expressão que leve a um comprimento de elemento que não possua variação em função da ordenação dos nós, os autores introduziram um espaço paramétrico preferido que consiste em um elemento simplex

regular com distância entre vértices de 2, e chegaram a seguinte expressão para  $\mathbf{D}$  quando  $n_{sd} = 2$ :

$$\mathbf{D} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} + 1 & \sqrt{3} - 1 \\ \sqrt{3} - 1 & \sqrt{3} + 1 \end{bmatrix}, \quad (1.72)$$

e para  $n_{sd} = 3$ :

$$\mathbf{D} = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}. \quad (1.73)$$

A definição da matriz  $\mathbf{D}$  para elementos isogeométricos será descrita na Subseção ??.

Além disso, nessa metodologia, o comprimento do elemento é limitado pelos mínimos e máximos valores representados abaixo:

$$h_{min} \equiv 2 \min_r ((\mathbf{r}\mathbf{r} : \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}}), \quad (1.74)$$

$$h_{max} \equiv 2 \max_r ((\mathbf{r}\mathbf{r} : \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}}), \quad (1.75)$$

que podem ser reescritos como:

$$h_{min} = 2 (\lambda_{max} \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}}, \quad (1.76)$$

$$h_{max} = 2 (\lambda_{min} \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}}, \quad (1.77)$$

onde  $\lambda_{max}$  e  $\lambda_{min}$  representam os máximos e mínimos autovalores da matriz  $\mathbf{G}$ .

Por fim, os parâmetros de estabilização são escritos como:

$$\tau_{SUPG} = \tau_{PSPG} = \left( \frac{1}{\tau_{SUGN1}^2} + \frac{1}{\tau_{SUGN2}^2} + \frac{1}{\tau_{SUGN3}^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (1.78)$$

$$\nu_{LSIC} = \tau_{SUPG} \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|^2, \quad (1.79)$$

onde:

$$\tau_{SUGN1}^{-2} = (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) : \mathbf{G}, \quad (1.80)$$

$$\tau_{SUGN2} = \frac{\Delta t}{2}, \quad (1.81)$$

e

$$\tau_{SUGN3}^{-1} = \nu (\mathbf{r}_{reg} \mathbf{r}_{reg} : \mathbf{G} + (1 - \mathbf{r}_{reg}^2) 4 h_{min}^{-2}), \quad (1.82)$$

sendo  $\mathbf{r}_{reg}$  definido como:

$$\mathbf{r}_{reg} = \frac{\nabla_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|}{\|\nabla_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\| + \varepsilon (\|\nabla_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\|)_0}, \quad (1.83)$$

com  $\varepsilon$  uma constante pequena e  $(\|\nabla_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\|)_0$  um valor de referência. Os termos  $\tau_{SUGN1}$ ,  $\tau_{SUGN2}$  e  $\tau_{SUGN3}$  são parâmetros correspondentes aos termos convectivos, inerciais e viscosos, respectivamente.

## 1.4 Integração Temporal

Para a integração temporal das equações governantes, utiliza-se o método  $\alpha$ -generalizado. Esse método foi proposto inicialmente por ??) no contexto da mecânica das estruturas, e foi estendido para o contexto da dinâmica dos fluidos computacional por ??).

Considerando que o tempo da análise do problema é definido por um intervalo de  $[0, T]$ , o qual é particionado em subintervalos  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ , com  $t_n$  e  $t_{n+1}$  os instantes anterior e atual, respectivamente. A solução do problema consiste em: conhecida a solução nos graus de liberdade nodais ( $\dot{\mathbf{U}}$ ,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{p}$ ) no passo de tempo  $n$ , encontrar a solução no passo de tempo  $n + 1$  de forma que:

$$\mathbf{R}_M(\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}, \mathbf{U}_{n+\alpha_f}, \mathbf{p}_{n+1}) = \mathbf{0}, \quad (1.84)$$

$$\mathbf{R}_C(\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}, \mathbf{U}_{n+\alpha_f}, \mathbf{p}_{n+1}) = \mathbf{0}, \quad (1.85)$$

com:

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m} = \dot{\mathbf{U}}_n + \alpha_m (\dot{\mathbf{U}}_{n+1} - \dot{\mathbf{U}}_n), \quad (1.86)$$

$$\mathbf{U}_{n+\alpha_f} = \mathbf{U}_n + \alpha_f (\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n), \quad (1.87)$$

sendo  $\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}$  e  $\mathbf{U}_{n+\alpha_f}$  valores intermediários entre  $t_n$  e  $t_{n+1}$  do vetor aceleração e velocidade. A relação entre os valores nodais de aceleração e velocidade são calculados de acordo com fórmula discreta de Newmark (ver, por exemplo, ??)):

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta t ((1 - \gamma) \dot{\mathbf{U}}_n + \gamma \dot{\mathbf{U}}_{n+1}). \quad (1.88)$$

Os parâmetros que definem o instante intermediário, no qual as variáveis serão calculadas, são determinados de forma a proporcionarem estabilidade e precisão ao método. Segundo a metodologia proposta por ??), uma precisão de segunda ordem é obtida, para casos lineares, desde que:

$$\gamma = 1/2 + \alpha_m - \alpha_f, \quad (1.89)$$

enquanto que a estabilidade do problema é incondicional com:

$$\alpha_m \geq \alpha_f \geq 1/2. \quad (1.90)$$

Para proporcionar a precisão de segunda-ordem de convergência e estabilidade da solução, pode-se calcular o parâmetro  $\gamma$  de acordo com Eq. 1.89 e  $\alpha_m$ ,  $\alpha_f$ , através de (??):

$$\alpha_m = \frac{1}{2} \left( \frac{3 - \rho_\infty}{1 + \rho_\infty} \right) \quad (1.91)$$

$$(1.92)$$

e

$$\alpha_f = \frac{1}{1 + \rho_\infty}. \quad (1.93)$$

O parâmetro  $\rho_\infty$  é conhecido como raio espectral da matriz de amplificação quando  $\Delta t_n \rightarrow \infty$ . Esse parâmetro controla a dissipação numérica em altas frequências realizada pelo processo de integração e está contido no intervalo de  $[0, 1]$ . Para  $\rho_\infty = 0$  a dissipação é máxima e para  $\rho_\infty = 1$  não há introdução de difusão numérica ao método.

Para a solução do sistema de equações não lineares compostas por Eq. (1.84) e Eq. (1.85) utiliza-se o método de Newton-Raphson. O método pode ser separado em duas etapas, uma etapa preditiva e outra iterativa corretiva (??).

Na etapa preditiva, conhecida a solução em um passo de tempo  $n$ , prediz-se a solução em  $n + 1$  com as seguintes equações:

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \dot{\mathbf{U}}_n, \quad (1.94)$$

$$\mathbf{U}_{n+1}^0 = \mathbf{U}_n, \quad (1.95)$$

$$\mathbf{p}_{n+1}^0 = \mathbf{p}_n, \quad (1.96)$$

onde o índice 0 representa a iteração de número zero.

Na etapa iterativa corretiva, itera-se sobre a Eq. (1.84) e Eq. (1.85) até que elas sejam satisfeitas, considerando uma tolerância prescrita, ou até que se alcance uma quantidade máxima de iterações pré-estabelecida. Essa etapa é composta por três fases. A fase 1 consiste em determinar os valores no instante intermediário para as variáveis nodais na iteração  $i$ :

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}^i = \dot{\mathbf{U}}_n + \alpha_m (\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i - \dot{\mathbf{U}}_n), \quad (1.97)$$

$$\mathbf{U}_{n+\alpha_f}^i = \mathbf{U}_n + \alpha_f (\mathbf{U}_{n+1}^i - \mathbf{U}_n), \quad (1.98)$$

$$\mathbf{p}_{n+1}^i = \mathbf{p}_{n+1}^i. \quad (1.99)$$

Na fase 2, com os valores intermediários das variáveis nodais resolve-se o sistema linear resultante da linearização das equações Eq. (1.84) e Eq. (1.85) com respeito às variáveis de interesse  $\mathbf{p}_{n+1}$  e  $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{R}_M}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{n+1}} \Big|_i \Delta \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i + \frac{\partial \mathbf{R}_M}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} \Big|_i \Delta \mathbf{p}_{n+1}^i = -\mathbf{R}_M^i, \quad (1.100)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_C}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{n+1}} \Big|_i \Delta \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i + \frac{\partial \mathbf{R}_C}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} \Big|_i \Delta \mathbf{p}_{n+1}^i = -\mathbf{R}_C^i. \quad (1.101)$$

Por fim, na fase 3 atualiza-se a solução através das seguintes relações:

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^{i+1} = \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i + \Delta \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i, \quad (1.102)$$

$$\mathbf{U}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{U}_{n+1}^i + \gamma \Delta t \Delta \mathbf{U}_{n+1}^i, \quad (1.103)$$

$$\mathbf{p}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{p}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{p}_{n+1}^i. \quad (1.104)$$

Na utilização do método  $\alpha$ -generalizado as integrais das equações Eq. (1.84) e Eq. (1.85) são avaliadas no instante  $t = t_{n+\alpha_f}$ , de forma que:

$$\int_{\Omega} (\cdot) d\Omega = \int_{\Omega_{t_{n+\alpha_f}}} (\cdot) d\Omega, \quad (1.105)$$

e, por consequência:

$$\Omega_{t_{n+\alpha_f}} = \left\{ \mathbf{y}^h \mid \mathbf{y}^h(\bar{\mathbf{x}}^h, t_{(n+\alpha_f)}) = \alpha_f \mathbf{y}^h(\bar{\mathbf{x}}^h, t_{n+1}) + (1 - \alpha_f) \mathbf{y}^h(\bar{\mathbf{x}}^h, t_n) \right\}. \quad (1.106)$$

## 1.5 Implementação Computacional

O Algoritmo que descreve a implementação computacional tanto de problemas utilizando o método dos elementos finitos, quanto para problemas utilizando a análise Isogeométrica, é apresentado no Alg. 1.

---

### Algoritmo 1 Algoritmo para problemas de dinâmica dos fluidos computacional

---

- 1: **para** o passo de tempo 0 até  $T$  **faça**
- 2:     *i* = 0;
- 3:     Predição da solução: aplicação das Eq. (1.94), Eq. (1.95) e Eq. (1.96);
- 4:     **enquanto** ( $\epsilon < \text{tolerância}$ ) **faça**
- 5:         *i*++;
- 6:         Interpolação das variáveis do problema: aplicação da Eq. (1.97), Eq. (1.98) e Eq. (1.99);
- 7:         Cálculo do incremento nas variáveis do problema:  $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$  e  $\mathbf{p}_{n+1}$  de acordo com as Eq. (1.100) e Eq. (1.101);
- 8:         Atualização da solução: calculadas de acordo com Eq. (1.102), Eq. (1.103) e Eq. (1.104).
- 9:         Cálculo do erro:

$$\epsilon = \|\mathbf{R}_M^i\|_{L^2} \quad (1.107)$$

- 10:         **fim enquanto**

- 11:         **fim para**

---

# 1.6 Verificação e Aplicações

Para a verificação dos códigos baseados no método dos elementos finitos, adotam-se 2 exemplos muito populares nas bibliografias: Escoamento sobre um cilindro e o problema da cavidade quadrada, os quais são apresentados na subseções sequentes.

## 1.6.1 *Escoamento sobre um cilindro*

O estudo do problema de um escoamento sobre um cilindro 2D teve como principal intuito a análise dos coeficientes aerodinâmicos medidos ao longo do tempo e verificar consequentemente se o modelo é capaz de reproduzir os fenômenos relacionados à formação e desprendimento de vórtices característicos desse problema. Para isso, diferentes números de Reynolds (Re) foram estudados,  $Re = 40, 100$  e  $1000$ , os quais são calculados de acordo com a seguinte equação:

$$Re = \frac{\rho L \| \mathbf{u}_\infty \|}{\mu} = \frac{L \| \mathbf{u}_\infty \|}{\nu}, \quad (1.108)$$

com  $L$  a dimensão característica do problema, sendo nesse caso o diâmetro do cilindro, e  $\nu$  a viscosidade cinemática do fluido.

A geometria e condições de contorno são apresentadas na Fig. 1.7a. Como pode-se observar trata-se de um domínio retangular, parametrizado em função do diâmetro do cilindro, com um perfil constante de velocidade na entrada e condição de parede lisa nas paredes superior e inferior. No contorno denominado como *saída*, não se conhece o comportamento do escoamento, desta forma, determina-se sua posição no domínio computacional a uma distância grande o suficiente de maneira a não interferir no comportamento do escoamento.

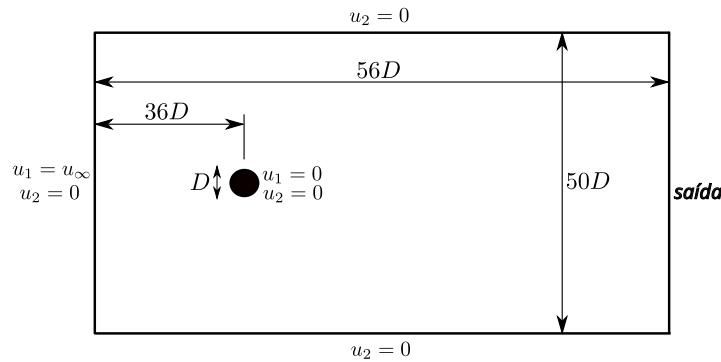
Na Fig. 1.7b pode-se observar a malha não-estruturada de elementos finitos utilizada para esse problema, composta por 9122 elementos triangulares quadráticos e 18508 nós. O problema foi simulado para um velocidade de entrada  $u_\infty = 1,0$ ,  $\rho = 1,0$ ,  $\Delta t = 0,05$ , e  $\rho_\infty = 0,5$ .

Para o cálculo dos coeficientes aerodinâmicos é necessário definir-se primeiramente as forças de arrasto - horizontal ( $F_D$ ) e de sustentação - vertical ( $F_L$ ), que são induzidas por tensões desviadoras e hidrostáticas e são calculadas pelas seguintes equações:

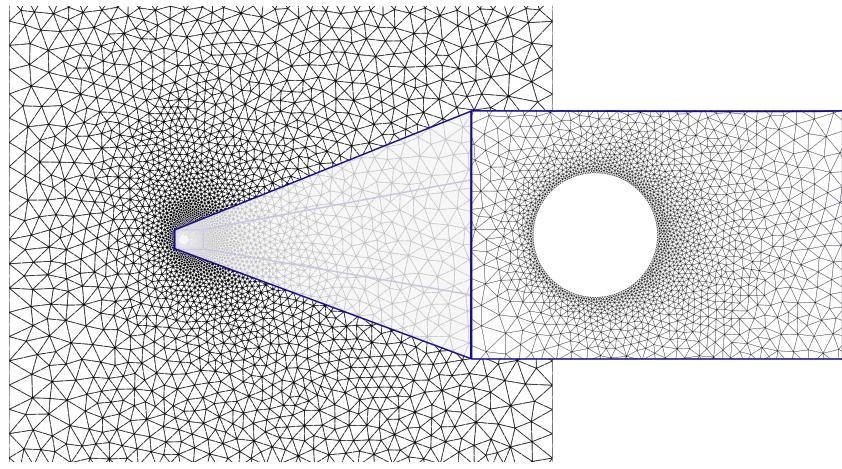
$$F_D = \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\sigma}_{1j} n_j d\Gamma_c, \quad (1.109)$$

$$F_L = \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\sigma}_{2j} n_j d\Gamma_c, \quad (1.110)$$

nas quais o símbolo  $\Gamma_c$  representa o contorno do cilindro e  $n_j$  é o vetor normal à essa superfície na direção  $j$ , com  $j = 1, 2$ . Os coeficientes de arrasto e sustentação são definidos respectivamente por:



(a) Geometria e condições de contorno



(b) Discretização espacial

Figura 1.7 – Cilindro: Geometria, condições de contorno e malha de elementos finitos.

$$C_D = \frac{F_D}{0,5\rho\|\mathbf{u}_\infty\|^2 L}, \quad (1.111)$$

$$C_L = \frac{F_L}{0,5\rho\|\mathbf{u}_\infty\|^2 L}, \quad (1.112)$$

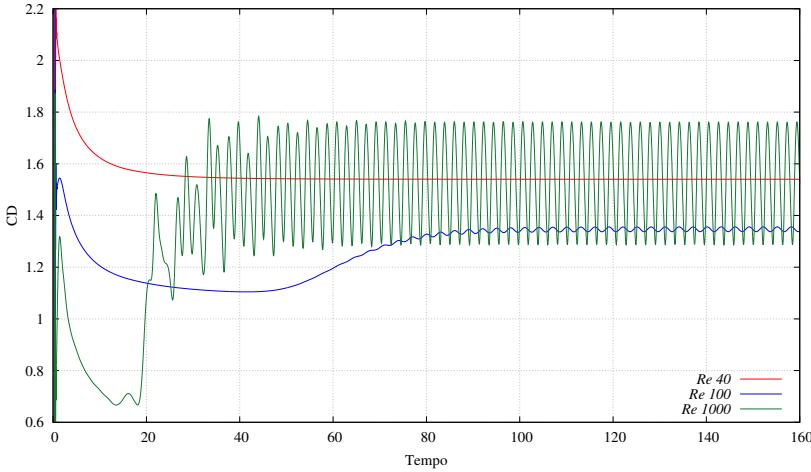
Devido ao fenômeno de desprendimento de vórtices que ocorre a partir de determinado número de Reynolds do escoamento, é usual determinar-se a frequência deste fenômeno através do número adimensional de Strouhal (St), dado por:

$$St = \frac{f_v L}{\|\mathbf{u}_\infty\|}, \quad (1.113)$$

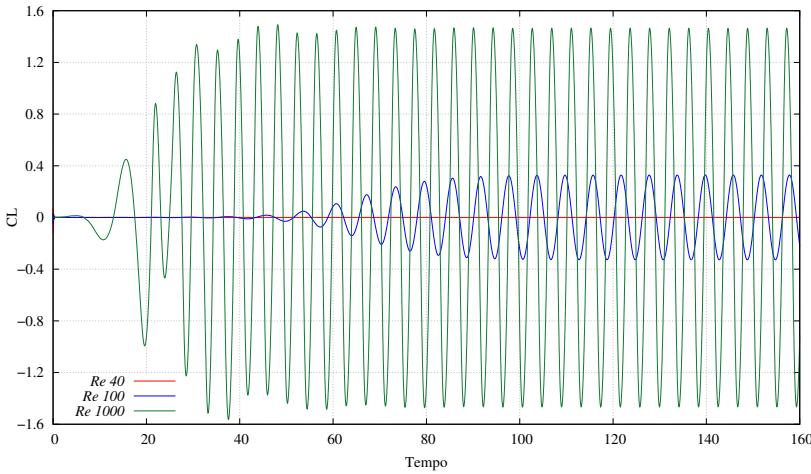
com  $f_v$  sendo a frequência de desprendimento dos vórtices.

Como pode-se observar na Fig. 1.8 para  $Re = 40$ , os coeficientes de arrasto e de sustentação, após o escoamento entrar em fase estacionária, se mantém constantes ao longo de todo o tempo de análise. Isso ocorre, visto que para Reynolds entre 5 à 50, aproximadamente, formam-se dois vórtices simétricos e estacionários na região logo

após o cilindro. Posteriormente, o par de vórtices se quebra e passa existir a chamada esteira de Von Karmán, que ocorre devido à formação de vórtices de maneira alternada entre as regiões superior e inferior do cilindro, o que pode ser notado também na Fig. 1.8 para  $Re = 100$  e  $Re = 1000$ . Os valores do coeficiente de Strouhal, para  $Re = 100$  e  $Re = 1000$ , foram de 0,1665 e 0,2381 respectivamente. Os valores obtidos para os coeficientes aerodinâmicos foram os esperados para o problema em questão (ver, por exemplo, [????](#)).



(a) Coeficiente de arrasto  $C_D$



(b) Coeficiente de sustentação  $C_L$

Figura 1.8 – Cilindro: Coeficientes aerodinâmicos.

Nas Fig. 1.9 e Fig. 1.10 podem ser observados os campos de velocidade e pressão ao longo de um ciclo de desprendimento de vórtices para  $Re = 100$ . Pode-se notar nessas imagens, a formação e o desprendimento de vórtices na esteira de Von Karmán.

### 1.6.2 Cavidade quadrada

Para a verificação do código 3D utilizando elementos finitos o problema de uma cavidade quadrada com velocidade prescrita  $u_\infty$  em sua parede superior foi estudado.

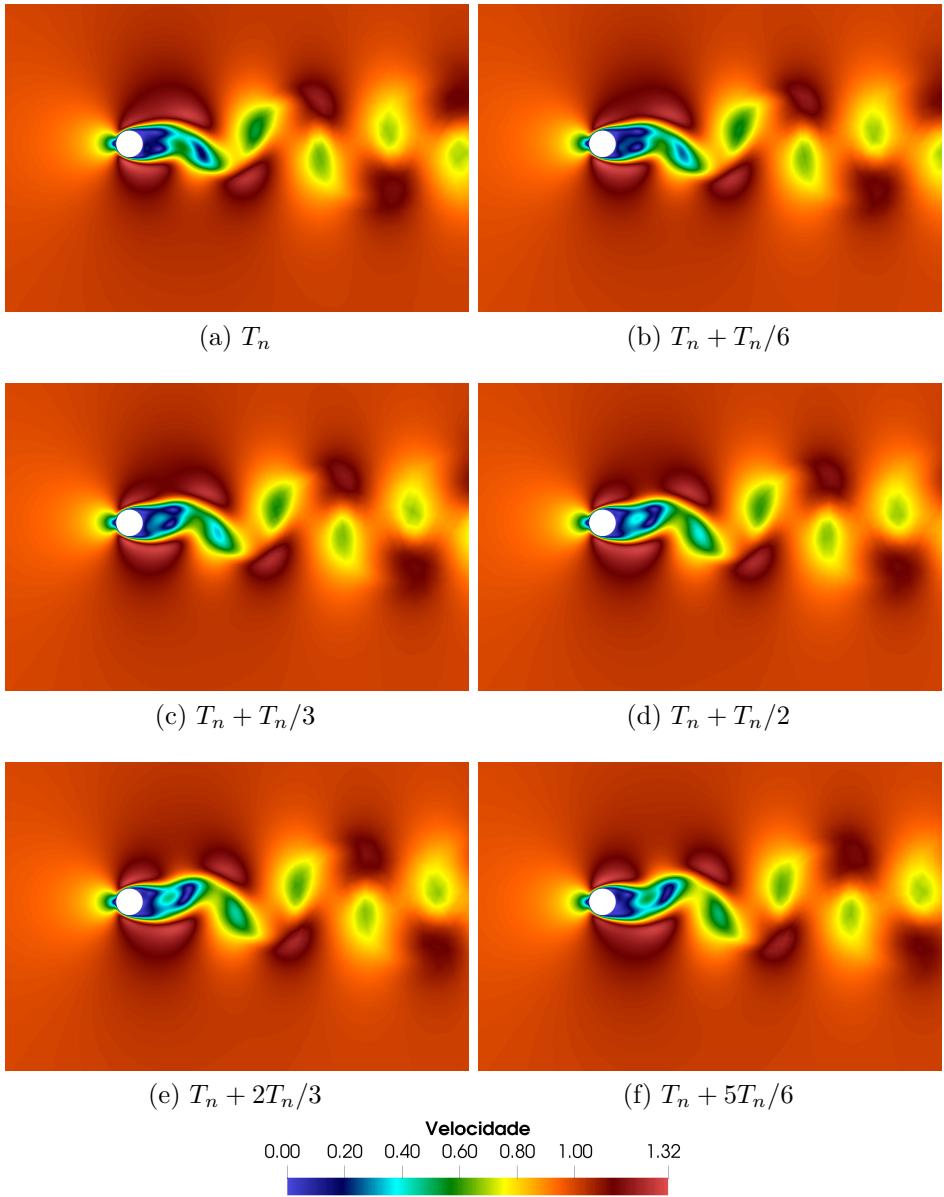


Figura 1.9 – Cilindro: Campos de velocidade

A geometria do problema em questão e o conjunto de suas condições de contorno são apresentadas na Fig. 1.11a. As paredes da cavidade são rígidas, com paredes laterais e do fundo com condição de aderência, e adicionalmente, condição de simetria na direção  $y_3$ . A cavidade possui na direção  $y_3$  uma espessura de 0,03. A discretização espacial em elementos finitos utilizada é apresentada na Fig. 1.11b, a qual consiste em 7252 elementos tetraédricos quadráticos e 14727 nós.

O problema é estudado para os números de Reynolds: 100, 400 e 1000. O número de Reynolds foi calculado de acordo com Eq. (1.108), com  $L$  equivalente ao comprimento do lado da cavidade. O problema foi simulado para uma velocidade na parede superior de  $u_\infty = 1,0$ ,  $\rho = 1,0$ ,  $\Delta t = 0,05$ , e  $\rho_\infty = 0$ , sendo a viscosidade do fluido variada de modo

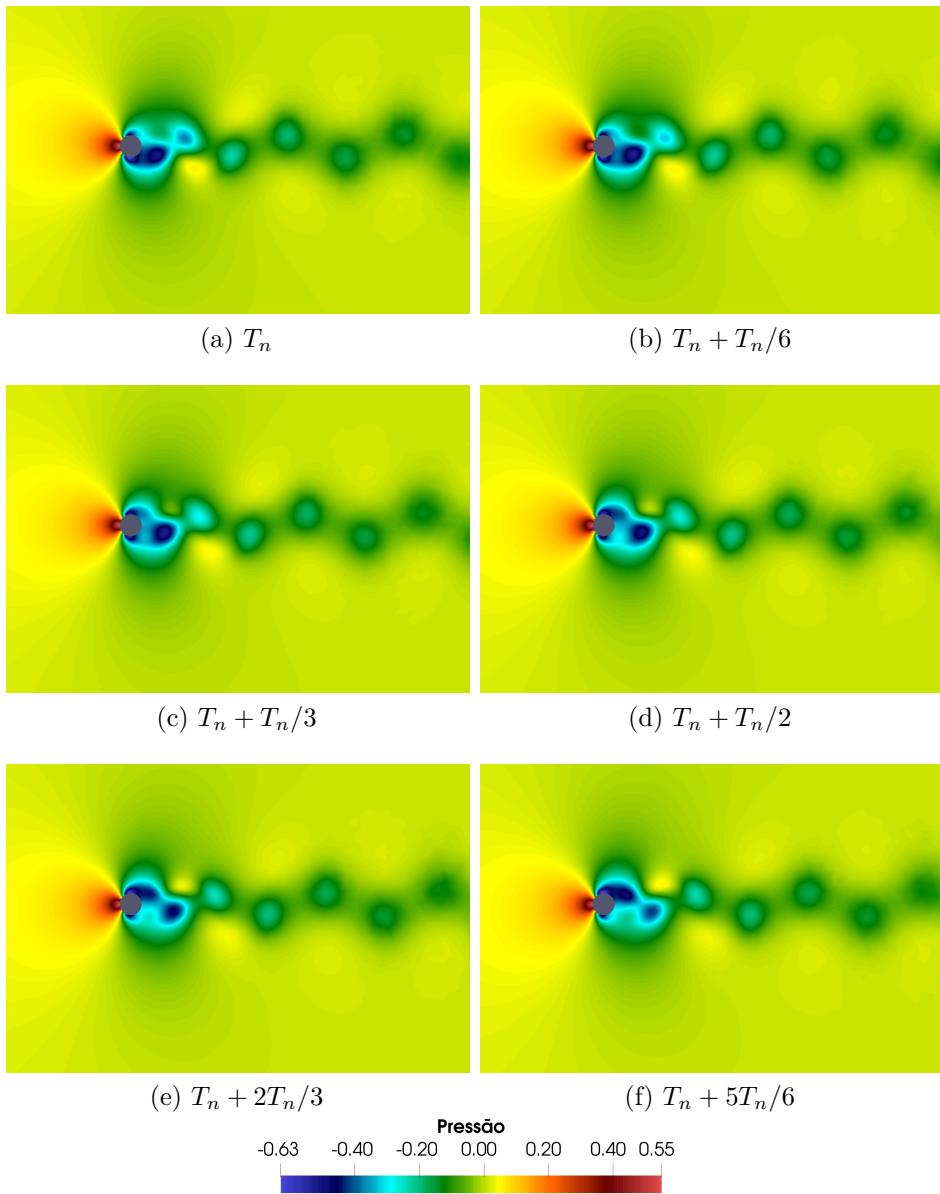
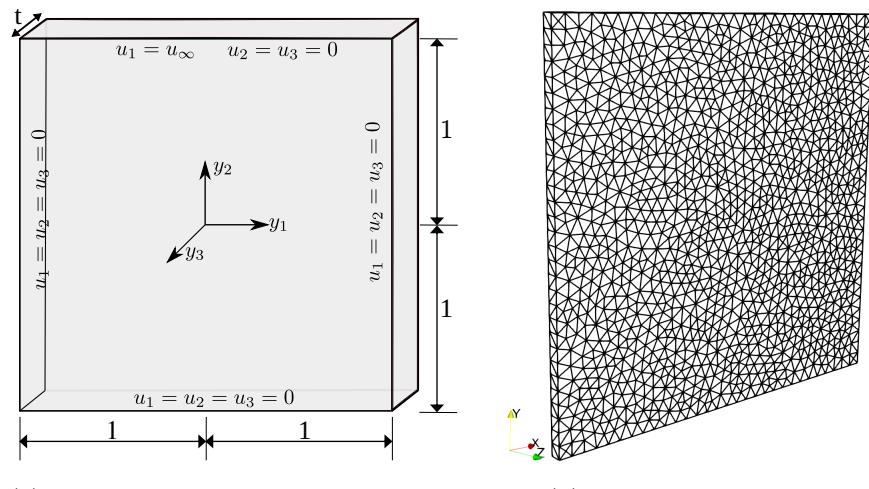


Figura 1.10 – Cilindro: Campos de pressão

a alterar o número de Reynolds. A simulação foi mantida até que se atingiu o estado estacionário de escoamento.

Os perfis de velocidade adimensionaisizados ( $\mathbf{u}/\mathbf{u}_\infty$ ) ao longo de duas linhas centrais nas direções  $y_1$  e  $y_2$  posicionadas no centro da espessura da direção  $y_3$  da cavidade são apresentados na Fig. 1.12 e comparados com a referência de ??).

Os campos de velocidade e de pressão são apresentados nas figuras Fig 1.13 e 1.14 respectivamente. Ressalta-se que para a solução do problema, por se tratar de um problema com todos os contornos com condição de Dirichlet impostas, a pressão torna-se indefinida. Por esse motivo, prescreveu-se uma pressão  $p = p_{ref} = 0.0$  no canto superior direito da cavidade.



(a) Geometria e condições de contorno

(b) Discretização espacial.

Figura 1.11 – Cavidade quadrada: Geometria, condições de contorno e malha de elementos finitos

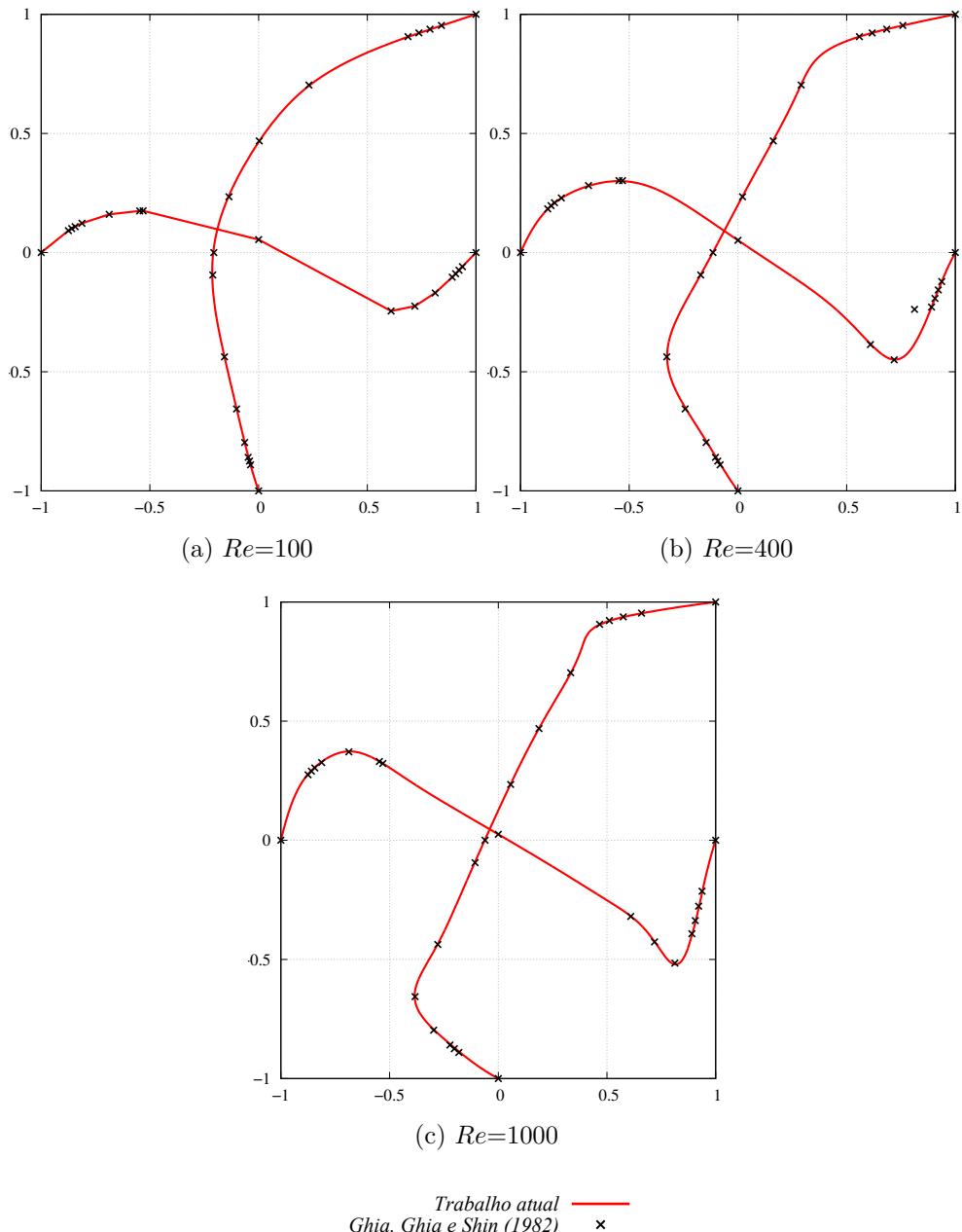


Figura 1.12 – Cavidade quadrada: Perfis de velocidade adimensionais nas direções  $y_1$  e  $y_2$

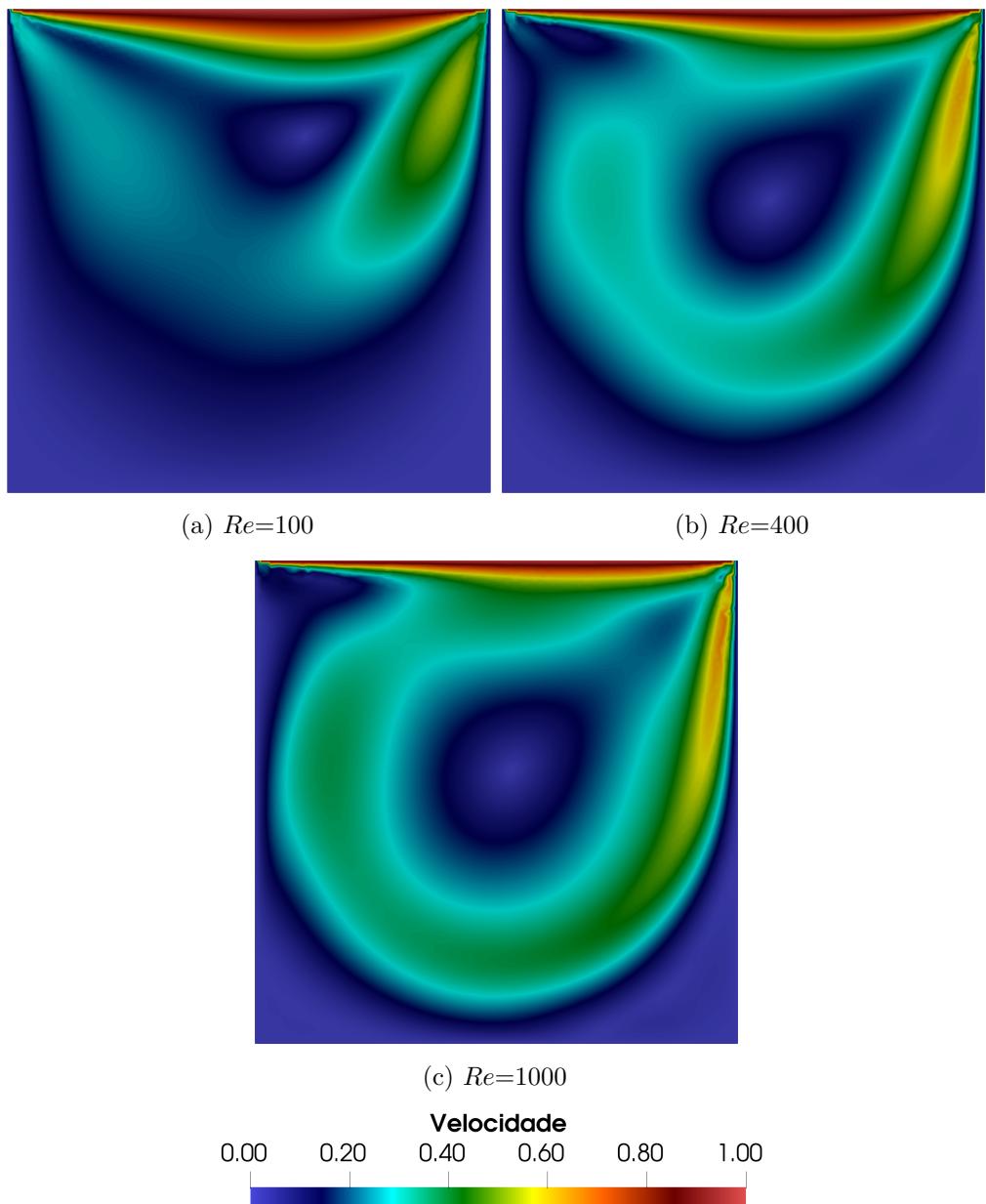


Figura 1.13 – Cavidade quadrada: Campos de velocidade.

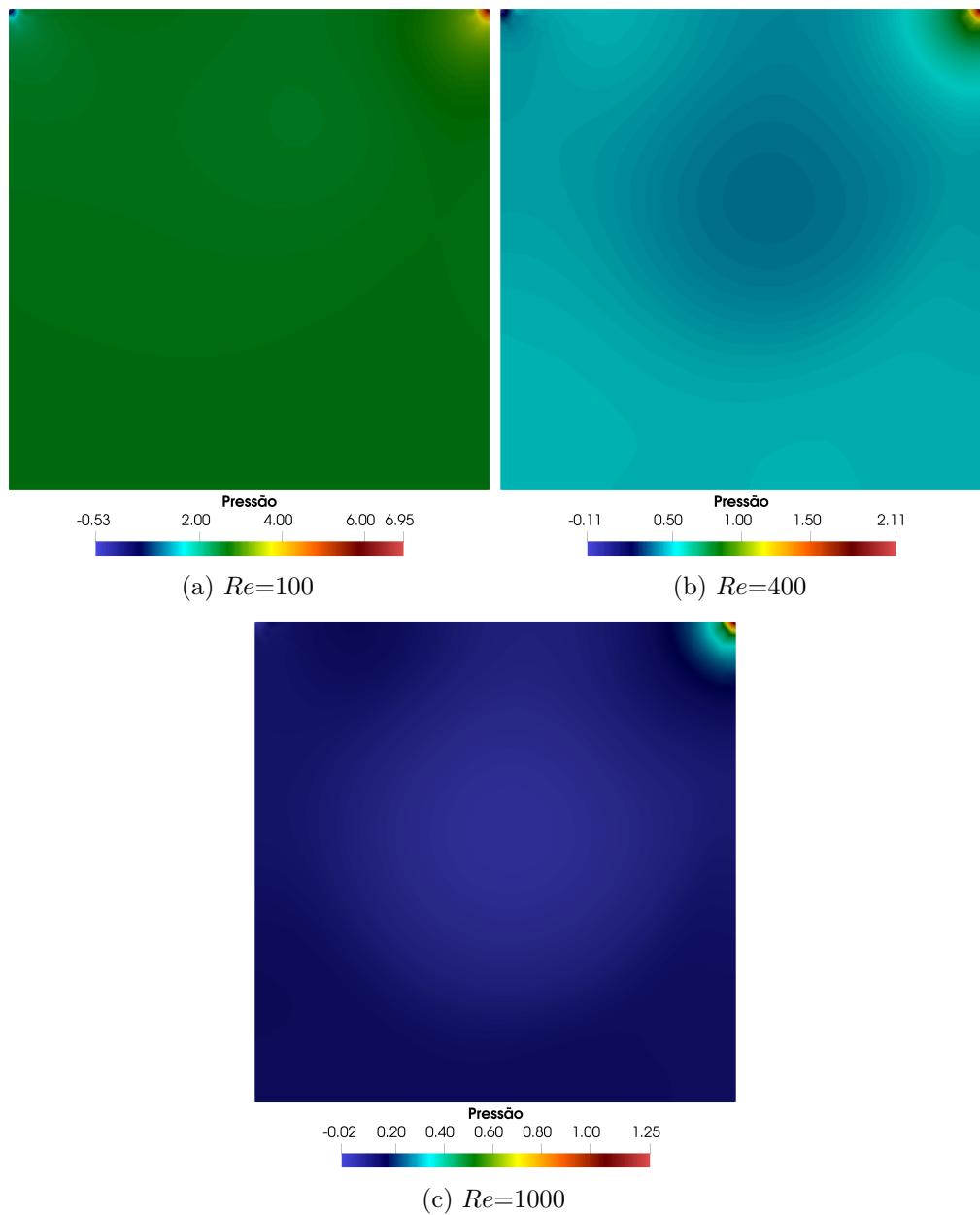


Figura 1.14 – Cavidade quadrada: Campos de pressão.