

---

# TÉCNICA DE DECOMPOSIÇÃO DE DOMÍNIOS ATRAVÉS DO MÉTODO DE ARLEQUIN ESTABILIZADO

---

Com intuito de superar os impasses encontrados com a técnica de decomposição de domínios apresentada no Cap. ??, neste capítulo será apresentado o método multiescala Arlequin.

A primeira parte deste capítulo será dedicada a descrever o método clássico de Arlequin, introduzido por ??). Na sequência, será apresentado o método de Arlequin estabilizado introduzido por ??) para a resolução de problemas de escoamento de fluidos incompressíveis. Por fim, será apresentada a descrição da técnica para problemas de contorno móveis e exemplos de validação serão exibidos.

## 1.1 Método Arlequin

O método Arlequin, introduzido por ??), consiste na superposição de um domínio local a um domínio global, em região efeitos localizados. Os modelos, local e global, são acoplados em uma zona de colagem através de operadores de Lagrange.

O método de Arlequin, de acordo com ??), é baseado em três principais ideias (ver Fig.??):

- Um domínio local  $\Omega_1$  é sobreposto em um domínio global  $\Omega_0$  em uma zona de interesse de modo a representar efeitos locais;

- Os modelos são colados um ao outro em uma subzona da zona de superposição ( $\Omega_s$ ), chamada de zona de colagem ( $\Omega_c$ ), através de um operador de acoplamento conveniente;
- Garante-se a distribuição da energia entre os modelos empregando uma função ponderadora, definida a partir da partição da unidade;

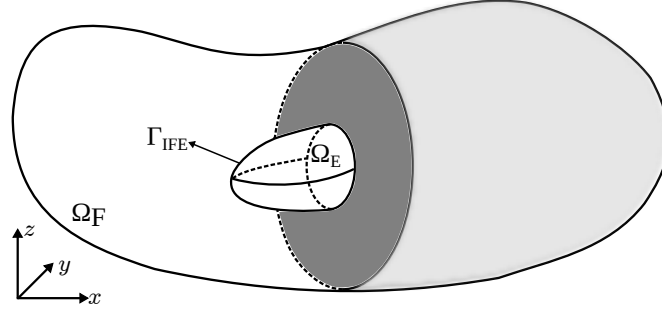


Figura 1.1 – Domínio local e global

Dessa forma, o domínio computacional do problema é definido por:

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_1, \quad (1.1)$$

$$(1.2)$$

a zona de superposição,  $\Omega_s$ , pode ser definida matematicamente da seguinte forma:

$$\Omega_s = \Omega_0 \cap \Omega_1, \quad (1.3)$$

$$\Omega_s = \Omega_c \cup \Omega_f, \quad (1.4)$$

$$\Omega_s > 0, \quad (1.5)$$

$$(1.6)$$

sendo  $\Omega_f$  a chamada zona livre.

Umas das formas mais comuns de se realizar o acoplamento entre os modelos na zona de colagem  $\Omega_c$  é através da aplicação de campos de multiplicadores de Lagrange. Uma forma generalizada de representar os operadores de acoplamento é apresentada em ??), da maneira que se segue:

$$(\boldsymbol{\lambda}, \Delta u) = \int_{\Omega_c} k_0[\boldsymbol{\lambda} \cdot \Delta u] + k_1[\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta u)], \quad (1.7)$$

$$(1.8)$$

onde  $\boldsymbol{\lambda}$  é o campo de multiplicadores de Lagrange,  $\Delta u = \mathbf{u}_0|_{\Omega_c} - \mathbf{u}_1|_{\Omega_c}$  é a diferença entre os campos acoplados na zona de colagem. As constantes  $k_0$  e  $k_1$  são estritamente positivas.

Quando  $k_0 > 0$  e  $k_1 = 0$  têm-se o operador de acoplamento  $L^2$ . Esse acoplador estabelece a continuidade de ordem 0 do campo compatibilizado, que significa que

ele garante no sentido de forma fraca, a continuidade das variáveis ao longo da zona de colagem. Para valores  $k_0 > 0$  e  $k_1 > 0$  obtêm-se o operador de acoplamento  $H_1$ , que garante a continuidade de ordem 1 ao campo compatibilizado, fazendo com que ele garanta no sentido de forma fraca, a continuidade de uma combinação de variáveis e seu Laplaciano (??).

É importante mencionar que o sucesso do método, indiferente do tipo de operador adotado, depende da escolha apropriada dos parâmetros  $k_0$  e  $k_1$ . Para o acoplamento utilizando  $L^2$ , devido a simplicidade da aplicação na restrição dos campos  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0$  na zona de colagem, o condicionamento do sistema depende fortemente da adoção do parâmetro  $k_0$ . Por isso, esta é uma das razões que a maioria dos trabalhos realizados utilizando o método Arlequin aplica o operador  $H_1$ . Devido a dificuldade de encontrar parâmetros ótimos para o método, o trabalho de ??) apresenta uma modificação na construção do operador de acoplamento  $L^2$  que será apresentada adiante no texto.

A definição do espaço de funções para os operadores de Lagrange é muito importante. O método apresenta flexibilidade para usar uma discretização diferente da zona de colagem, entretanto, usualmente se adota um subconjunto do espaço de funções de um dos modelos sobrepostos.

Por fim, para que o método não adicione energia ao sistema, é necessário que seja definida uma função ponderadora ( $\alpha$ ) que garanta a distribuição da energia do sistema ao longo dos modelos sobrepostos. Em geral, essa função é definida, para cada um dos modelos da seguinte forma:

$$\begin{cases} \alpha_i \in [0; 1] \text{ em } \Omega, \\ \alpha_0 + \alpha_1 = 1 \text{ em } \Omega, \\ \alpha_i = 1 \text{ em } \Omega_i \setminus \Omega_j, \ i \neq j, \\ \alpha_i = ka > 0 \text{ em } \Omega_f, \end{cases} \quad (1.9)$$

com  $i = 0, 1$  que varia em função do modelo em questão, e  $ka$  uma constante arbitrariamente pequena para o método de Arlequin ser relevante (??), conforme pode ser observado na Fig. 1.2. REVISAR ESSE TRECHO.

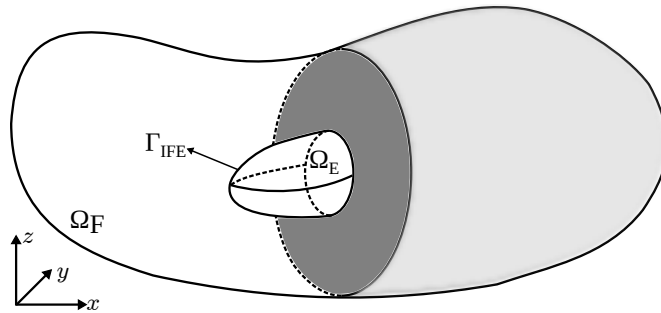


Figura 1.2 – Domínio local e global

## 1.2 Método Arlequin clássico aplicado à problemas de escoamentos incompressíveis

O método Arlequin vem sendo aplicado amplamente em diversos trabalhos da mecânica dos sólidos nas últimas décadas. Entretanto, no que diz respeito a materiais incompressíveis, pode-se citar mais recentemente o trabalho de ??), no qual os autores desenvolvem uma técnica para análise de sólidos incompressíveis empregando elementos do tipo Taylor-Hood, que satisfazem a condição LBB. Essa metodologia é testada também para problemas descritos pelas equações de Stokes.

De acordo com os autores ??) a principal dificuldade encontrada para aplicação do método Arlequin no contexto de materiais incompressíveis é que duas restrições devem ser aplicadas concomitantemente: a compatibilização dos campos de interesse na zona de colagem e a condição de incompressibilidade do material nessa mesma região. Os autores apontaram que a imposição da condição de incompressibilidade em ambos os modelos pode gerar problema de redundância, acarretando em um sistema algébrico associado singular.

A solução proposta pelos autores nesse trabalho ??) foi a aplicação da condição de incompressibilidade em cada ponto do domínio computacional apenas uma vez. A metodologia consiste então da remoção da condição de incompressibilidade dos elementos total ou parcialmente encontrados na zona de colagem ( $\Omega_c$ ) em um dos modelos. Indiferente do modelo eleito para a remoção da condição de incompressibilidade na zona de colagem, na zona livre, a condição de incompressibilidade é removida do modelo global. Deve-se destacar que no trabalho citado existem algumas recomendações com relação a estabilidade da metodologiam, como por exemplo, a necessidade de existir pelo menos um elemento global na zona livre. Tal trabalho não explora as possíveis mudanças que acarretariam na estabilidade numérica em caso de sucessivas remoções e inclusões de condição de incompressibilidade no caso de um modelo local móvel.

Por esse motivo, e pelas pesquisas anteriores já realizadas pela presente autora e seu grupo de pesquisa, optou-se pela adoção de elementos estabilizados, os quais já foram retratos nos capítulos anteriores (Cap. ?? e Cap. ??).

Para a construção do método de Arlequin clássico precisamos retomar às equações para um monomodelo apresentadas na seção ?? que representam a forma fraca discretizada espacialmente e estabilizada das equações da quantidade de movimento (Eq. ??) e da continuidade (Eq. ??). MUDAR AS EQUAÇÕES NO CAPÍTULO DE FLUIDOS PARA DEIXAR SEM O TERMO ALE INICIALMENTE.

Vamos considera os espaços de dimensão finita das funções tentativa que descrevem a velocidade ( $\mathcal{S}_{ui}^h$ ) e a pressão ( $\mathcal{S}_{pi}^h$ ) e os espaços de funções testes  $\mathcal{V}_{ui}^h$  e  $\mathcal{V}_{pi}^h$ , com  $i = 0, 1$  indicando o índice do modelo, definidos como:

$$\mathcal{S}_{ui}^h = \left\{ \mathbf{u}_i^h \mid \mathbf{u}_i^h(\cdot, t) \in (H^{1h}(\Omega_i)), \mathbf{u}_i^h = \mathbf{u}_{Di}^h \text{ em } \Gamma_{Di} \right\} \quad (1.10)$$

$$\mathcal{S}_{pi}^h = \left\{ p_i^h \mid p_i^h(\cdot) \in L^{2h}(\Omega_i) \right\}, \quad (1.11)$$

$$\mathcal{V}_{ui}^h = \left\{ \mathbf{w}_i^h \mid \mathbf{w}_i^h(\cdot) \in H^{1h}(\Omega_i), \mathbf{w}_i^h = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_{D_i} \right\}, \quad (1.12)$$

e,

$$\mathcal{V}_{pi}^h = \mathcal{S}_{pi}^h. \quad (1.13)$$

Analogamente, os espaços das funções tentativas ( $\mathcal{M}^h$ ) e teste ( $\mathcal{Q}^h$ ) para o campo dos multiplicadores de Lagrange ( $\boldsymbol{\lambda}$ ) são definidos como:

$$\mathcal{M}^h = \left\{ \boldsymbol{\lambda}^h \mid \boldsymbol{\lambda}^h(\cdot) \in H^{1h}(\Omega_c) \right\}, \quad (1.14)$$

$$\mathcal{Q}^h = \mathcal{M}^h. \quad (1.15)$$

A aplicação do operador de acoplamento  $L^2$  a formulação clássica Arlequin consiste em dado os espaços tentativa e teste apresentados nas equações anteriores: Encontrar  $(\mathbf{u}_0^h, p_0^h, \mathbf{u}_1^h, p_1^h, \boldsymbol{\lambda}^h) \in \mathcal{S}_{u0}^h \times \mathcal{S}_{p0}^h \times \mathcal{S}_{u1}^h \times \mathcal{S}_{p1}^h \times \mathcal{M}^h$  de maneira que  $\forall \mathbf{w}_0^h \in \mathcal{V}_{u0}^h, q_0^h \in \mathcal{V}_{p0}^h, \mathbf{w}_1^h \in \mathcal{V}_{u1}^h, q_1^h \in \mathcal{V}_{p1}^h$ , e  $\forall \boldsymbol{\zeta}^h \in \mathcal{Q}^h$ :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_0^h}{\partial t} d\Omega_0 \\ & + \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot (\mathbf{u}_0^h \cdot \nabla \mathbf{u}_0^h) d\Omega_0 \\ & + \int_{\Omega_0} \alpha_0 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{w}_0^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_0 \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{SUPG}} \left( (\mathbf{u}_0^h \cdot \nabla) \mathbf{w}_0^h \right) \cdot \mathbf{r}_{M0}(\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_0 \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \nu_{\text{LSIC}} \nabla \cdot \mathbf{w}_0^h r_{C0}(\mathbf{u}_0^h) d\Omega_0 \\ & + \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_0^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h d\Omega_c = \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot \mathbf{f}_0^h d\Omega_0 + \int_{\Gamma_0} \alpha_0 \mathbf{u}_0^h \cdot \mathbf{h}_0^h d\Gamma_0, \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\int_{\Omega_0} \alpha_0 q_0^h \nabla \cdot \mathbf{u}_0^h d\Omega_0 + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{PSPG}} \left( \frac{\nabla q_0^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_{M0}(\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_0 = 0, \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_1^h}{\partial t} d\Omega_1 \\
& + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot (\mathbf{u}_1^h \cdot \nabla \mathbf{u}_1^h) d\Omega_1 \\
& + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \dot{\epsilon}(\mathbf{w}_1^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{SUPG} ((\mathbf{u}_1^h \cdot \nabla) \mathbf{w}_1^h) \cdot \mathbf{r}_{M1}(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \nu_{LSIC} \nabla \cdot \mathbf{w}_1^h r_{C1}(\mathbf{u}_1^h) d\Omega_1 \\
& + \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_1^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h d\Omega_c = \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{f}_1^h d\Omega_1 + \int_{\Gamma_1} \alpha_1 \mathbf{u}_1^h \cdot \mathbf{h}_1^h d\Gamma_1,
\end{aligned} \tag{1.18}$$

$$\int_{\Omega_1} \alpha_1 q_1^h \nabla \cdot \mathbf{u}_1^h d\Omega_1 + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{PSPG} \left( \frac{\nabla q_1^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_{M1}(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 = 0, \tag{1.19}$$

$$\int_{\Omega_c} \boldsymbol{\zeta}^h \cdot (\mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_1^h) d\Omega_c \tag{1.20}$$

onde  $\mathbf{r}_{Mi}$  e  $r_{Ci}$  são os resíduos da equação da quantidade de movimento e da equação da continuidade, respectivamente, dados por:

$$\mathbf{r}_{Mi}(\mathbf{u}_i^h, p_i^h, \boldsymbol{\lambda}^h) = \alpha_i \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}_i^h}{\partial t} + (\mathbf{u}_i^h \cdot \nabla) \mathbf{u}_i^h - \mathbf{f}_i^h \right) - \alpha_i \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_i^h, p_i^h) + \chi(i) \boldsymbol{\lambda}^h, \tag{1.21}$$

$$r_{Ci}(\mathbf{u}_i^h) = \alpha_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i^h, \tag{1.22}$$

com  $\chi(i)$  descrito da maneira que se segue:

$$\chi(i) = \begin{cases} (-1)^i & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega_c \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \notin \Omega_c \end{cases} \quad .. \tag{1.23}$$

O problema descrito pelas equações 1.16 à 1.20 descreve a versão clássica do método de Arlequin para o problema de Navier-Stokes estabilizado. Matematicamente trata-se de um problema de ponto de sela decorrente de uma formulação mista. Entretanto, desde que a condição LBB seja satisfeita, existe solução para o problema e ela é única. Em ??) pode-se encontrar uma vasta análise matemática a cerca das questões relacionadas com estabilidade, convergência e relevância do método.

O problema acima é análogo a formulação mista em elementos finitos para escoamentos incompressíveis, que limita a escolha das funções aproximadoras para o campo de velocidade e pressão. No caso da mecânica dos fluidos, conforme apresentado no Cap. ??, uma forma de superar esta restrição é o uso de métodos estabilizados como o PSPG.

Seguindo essa mesma filosofia, ??) introduzem uma técnica de estabilização consistente que será apresentada na seguinte seção.