

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

PATRICIA TONON

*Combinação de discretizações isogeométrica  
e por elementos finitos na análise de  
interação fluido-estrutura*

SÃO CARLOS/SP  
2021



PATRICIA TONON

*Combinação de discretizações isogeométrica  
e por elementos finitos na análise de  
interação fluido-estrutura*

Texto apresentado para o exame de qualificação ao doutorado no Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências, Programa: Engenharia Civil (Estruturas).

Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo André Kuche Sanches

SÃO CARLOS/SP  
2021

**RESUMO**

**TONON, P. Combinação de discretizações isogeométrica e por elementos finitos na análise de interação fluido-estrutura.** 2021. 130 p. Qualificação da Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

O presente trabalho tem como principal intuito a construção de uma ferramenta computacional robusta para análise de problemas de interação fluido-estrutura onde o domínio fluido é discretizado combinando-se aproximações baseadas em análise isogeométrica e método dos elementos finitos tradicional. São considerados escoamentos incompressíveis, sendo que o domínio fluido possui uma discretização global, em descrição Euleriana, à qual é sobreposta uma discretização local, mais refinada. As discretizações local e global são diferentes, sendo uma isogeométrica e outra por elementos finitos. Os dois modelos são acoplados por uma técnica de partição de domínio com sobreposição de malhas, a qual baseia-se na modificação das funções de forma de ambas as discretizações em uma região de sobreposição e posterior união dos espaços de funções local e global de modo a formar um espaço enriquecido que garanta a partição da unidade. A malha local é adaptada à estrutura e deforma-se dinamicamente para acomodar a movimentação da estrutura, enquanto a malha global permanece fixa. Com isso o método proposto compartilha vantagens dos métodos de rastreamento de interface (malhas móveis) e de captura de interface (contornos imersos), visto que o fluido próximo à estrutura é adequadamente discretizado garantindo a captura de efeitos localizados, ao mesmo tempo em que a malha local, por ser menor, tolera maiores deformações, e em caso de necessidade de remalhamento, apenas essa malha precisa ser reconstruída. Adota-se uma formulação estabilizada para o escoamento incompressível, permitindo aproximação de mesma ordem para velocidades e pressão, e a integração temporal é feita através do método  $\alpha$ -generalizado. A estrutura é modelada empregando-se uma abordagem do método dos elementos finitos baseada em posições aplicada a elementos de casca com grandes deslocamentos. O acoplamento fluido-estrutura é particionado do tipo bloco-iterativo.

**Palavras-chave:** *Interação Fluido-Estrutura. Análise Isogeométrica. Método dos Elementos Finitos. Técnica de sobreposição de malhas.*

# ABSTRACT

TONON, P. **Combination of isogeometric and finite element discretizations for fluid-structure interaction analysis.** 2021. 130 p. Thesis qualification (Doctorate in Structural Engineering) – Department of Structural Engineering, São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, São Carlos, 2021.

This work aims the construction of a robust computational tool for fluid-structure interaction analysis where the fluid domain is discretized combining isogeometric and traditional finite elements approximations. The flow is considered to be incompressible and the fluid domain has a global discretization, under Eulerian description, with an overlapping of a local one more refined. Local and global discretizations are different, being one isogeometric and the other a traditional finite element discretization, coupled by a domain partitioning technique that relies on the modification of both, local and global, shape functions over and overlapping region and subsequent union of local and global spaces of functions generating an enriched space that fulfills unity partition. The local mesh is adapted to the structure and deforms dynamically to accommodate structural movements while the global one remains fixed. Therefore, the proposed method shares advantages of both, interface tracking (moving mesh) and interface capturing (immersed boundary) methods, once the fluid/structure interface is adequately discretized for local effects, at the same time that the local mesh, being smaller, tolerates larger deformations, and, in case of need for re-meshing, only the local mesh needs to be rebuilt. The incompressible flow is modeled by a stabilized formulation, allowing equal order pressure-velocity interpolation, with time integration by the  $\alpha$ -generalized method. The structure is modeled in a position-based large-displacement shell finite element formulation. The fluid-structure coupling is a block iterative type partitioned scheme.

**Keywords:** *Fluid-structure interaction. Isogeometric analysis. Finite Element Method. Overlap technique.*



# LISTA DE FIGURAS

---

---

Figura 2.1 – Domínios utilizados para a descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária . . . . .	31
Figura 2.2 – Elementos Finitos: representação espacial e paramétrica . . . . .	42
Figura 2.3 – Cilindro 2D: Geometria, condições de contorno e malha de elementos finitos. . . . .	44
Figura 2.4 – Cilindro 2D: Coeficientes aerodinâmicos. . . . .	46
Figura 2.5 – Cilindro 2D: Campos de pressão e de velocidade para um escoamento com $Re = 100$ . . . . .	47
Figura 2.6 – Cavidade quadrada: Geometria, condições de contorno e malha de elementos finitos. . . . .	48
Figura 2.7 – Cavidade quadrada: Perfis de velocidade adimensionalizados nas direções $x$ e $y$ . . . . .	49
Figura 2.8 – Cavidade quadrada: campos de velocidade. . . . .	50
Figura 2.9 – Cavidade quadrada: campos de pressão. . . . .	51
Figura 3.1 – NURBS: espaço paramétrico, espaço indicial, espaço parental, malha de pontos de controle e malha física. Fonte: Adaptado de Cottrell, Hughes e Bazilevs (2009) . . . . .	54
Figura 3.2 – <i>B-Splines</i> . . . . .	56
Figura 3.3 – Curva <i>B-Spline</i> . . . . .	57
Figura 3.4 – Projeção transformativa para obtenção circunferência. Fonte: Cottrell, Hughes e Bazilevs (2009) . . . . .	59
Figura 3.5 – Cilindro 3D: Geração curva NURBS . . . . .	62
Figura 3.6 – Cilindro 3D: Geração superfície NURBS. . . . .	62
Figura 3.7 – Cilindro 3D: Geometria e malha de células físicas . . . . .	63
Figura 3.8 – Cilindro 3D: Coeficientes aerodinâmicos. . . . .	64
Figura 3.9 – Degrau 3D: Geometria. . . . .	64
Figura 3.10–Degrau 3D: Geometria e malha de células físicas . . . . .	65
Figura 3.11–Degrau 3D: Comprimento de recolamento do vórtice principal . . . . .	66
Figura 3.12–Degrau 3D: Campo de velocidade. . . . .	67
Figura 4.1 – Cinemática de sólido deformável . . . . .	70
Figura 4.2 – Mudança no volume na mudança de configuração. . . . .	72
Figura 4.3 – Mudança na área na mudança de configuração. . . . .	72
Figura 4.4 – Sólido sujeito a um conjunto de carregamento externo. . . . .	74
Figura 4.5 – Mapeamento da superfície média. . . . .	77

Figura 4.6 – Vetores de posição. . . . .	78
Figura 4.7 – Casca: Geometria e Malha. . . . .	82
Figura 4.8 – Casca: Deslocamento vertical nó central. . . . .	83
Figura 4.9 – Casca: Campo de deslocamento. . . . .	83
Figura 5.1 – Definição dos domínios global,local e de sobreposição. . . . .	86
Figura 5.2 – Zona de sobreposição - Problema unidimensional. . . . .	88
Figura 5.3 – Cavidade 2D: Condições de contorno. . . . .	91
Figura 5.4 – Cavidade 2D: Malhas Global e Local. . . . .	91
Figura 5.5 – Cavidade 2D: Zona de sobreposição. . . . .	92
Figura 5.6 – Cavidade 2D: Solução do problema de Navier Stokes para $Re = 100$ . . . . .	92
Figura 5.7 – Cavidade 2D: Perfis de velocidade. . . . .	93
Figura 6.1 – Domínio local e global . . . . .	96
Figura 6.2 – Função Ponderadora . . . . .	98
Figura 6.3 – Domínio Arlequin móvel . . . . .	107
Figura 6.4 – Geometria Aerofólio . . . . .	107
Figura 6.5 – Coeficiente de Arrasto . . . . .	108
Figura 6.6 – Coeficiente de Sustentação . . . . .	108
Figura 6.7 – Geometria Aerofólio . . . . .	109
Figura 6.8 – Coeficiente de Arrasto . . . . .	109
Figura 6.9 – Coeficiente de Sustentação . . . . .	110
Figura 7.1 – Domínios do Fluido e da Estrutura. . . . .	112
Figura 7.2 – Contorno IFE . . . . .	114
Figura 7.3 – Geometria Cavidade Fundo Flexível 2D . . . . .	116
Figura 7.4 – Geometria Cavidade Fundo Flexível 3D . . . . .	117

# **LISTA DE TABELAS**

---

---

Tabela 1.1 – Cronograma de atividades do trabalho de doutorado . . . . .	28
Tabela 3.1 – Número de pontos de controle por <i>patch</i> . . . . .	65



---

# LISTA DE SÍMBOLOS

---

Nesta seção são apresentados os principais símbolos matemáticos, operadores e variáveis utilizadas neste trabalho. De um modo geral, símbolos em negrito denotam grandezas vetoriais ou tensoriais, enquanto os escritos em estilo de formatação normal ou itálico representam grandezas escalares. Os casos omissos são descritos ao longo do texto.

**Capítulo 2 - Dinâmica dos fluidos computacional**  $[\Omega_t]$  Domínio computacional de um escoamento em um instante de tempo arbitrário  $t$ ;

$n_{sd}$  Dimensão espacial;



# SUMÁRIO

---

---

1	INTRODUÇÃO . . . . .	13
1.1	Apresentação do texto . . . . .	15
1.2	Estado da Arte . . . . .	16
1.2.1	<i>Dinâmica dos fluidos computacional</i> . . . . .	16
1.2.2	<i>Dinâmica de estruturas computacional considerando grandes deslocamentos</i> . . . . .	18
1.2.3	<i>Acoplamento fluido-estrutura</i> . . . . .	19
1.2.4	<i>Análise Isogeométrica</i> . . . . .	21
1.2.5	<i>Técnica de partição de domínios</i> . . . . .	22
1.3	Objetivos . . . . .	24
1.4	Metodologia . . . . .	24
1.5	Justificativa . . . . .	26
1.6	Cronograma . . . . .	26
2	DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL . . . . .	29
2.1	Forma forte das equações governantes . . . . .	30
2.2	Descrição Euleriana-Lagrangiana arbitrária (ALE) . . . . .	30
2.3	Forma Fraca e discretização espacial . . . . .	33
2.3.1	<i>Parâmetros de estabilização</i> . . . . .	36
2.4	Integração Temporal . . . . .	38
2.5	Método dos elementos finitos aplicado à Mecânica dos Fluidos	41
2.5.1	<i>Implementação Computacional</i> . . . . .	43
2.6	Verificação e Aplicações . . . . .	43
2.6.1	<i>Escoamento sobre um cilindro - 2D</i> . . . . .	43
2.6.2	<i>Cavidade Quadrada - 3D</i> . . . . .	45
3	ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA APLICADA À MECÂNICA DOS FLUIDOS . . . . .	53
3.1	Noções Gerais de IGA . . . . .	54
3.2	Representação geométrica utilizando NURBS . . . . .	55
3.2.1	<i>Vetor de knots</i> . . . . .	55
3.2.2	<i>B-Splines</i> . . . . .	56
3.2.3	<i>B-Splines não-uniformes racionais e análise isogeométrica</i> . . . . .	58
3.3	Verificação e aplicações . . . . .	60
3.3.1	<i>Escoamento sobre um cilindro - 3D</i> . . . . .	60
3.3.2	<i>Escoamento em um canal com degrau</i> . . . . .	64
4	DINÂMICA DOS SÓLIDOS COMPUTACIONAL . . . . .	69
4.1	Cinemática dos corpos deformáveis . . . . .	70
4.2	Equilíbrio de corpos deformáveis . . . . .	73

4.2.1	<i>Equações globais de equilíbrio em descrição Euleriana e variação do funcional de energia mecânica . . . . .</i>	73
4.2.2	<i>Equação da conservação da massa . . . . .</i>	75
4.2.3	<i>Equações globais de equilíbrio em descrição Lagrangiana . . . . .</i>	75
4.2.4	<i>Modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff . . . . .</i>	76
4.3	Método dos Elementos Finitos Posicional . . . . .	76
4.3.1	<i>Elemento finito de Casca . . . . .</i>	76
4.3.2	<i>Integração temporal e técnica de solução . . . . .</i>	79
4.3.3	<i>Implementação Computacional . . . . .</i>	81
4.4	Exemplo de aplicação - Casca cilíndrica com <i>snap through</i> dinâmico . . . . .	82
5	<b>TÉCNICA DE DECOMPOSIÇÃO DE DOMÍNIOS . . . . .</b>	85
5.1	Combinação de espaços de funções . . . . .	85
5.1.1	<i>Função ponderadora de combinação . . . . .</i>	87
5.2	Implementação Computacional . . . . .	89
5.3	Exemplo de aplicação . . . . .	90
6	<b>MÉTODO DE ARLEQUIN ESTABILIZADO . . . . .</b>	95
6.1	Método Arlequin . . . . .	95
6.2	Método Arlequin clássico aplicado à problemas de escoamentos incompressíveis . . . . .	97
6.3	Método Arlequin estabilizado aplicado à problemas de escoamentos incompressíveis . . . . .	101
6.3.1	<i>Parâmetro de estabilização <math>\tau_{ARLQ}</math> . . . . .</i>	104
6.4	Superposição de modelos móveis . . . . .	105
6.5	Implementação Computacional . . . . .	106
6.6	Exemplos . . . . .	106
6.6.1	<i>Escoamento sobre um aerofólio NACA 0012 . . . . .</i>	106
6.6.2	<i>Aerofólio com movimento de arfagem prescrito . . . . .</i>	106
7	<b>ACOPLAMENTO FLUIDO-ESTRUTURA . . . . .</b>	111
7.1	Condições de acoplamento . . . . .	111
7.2	Movimentação da Malha . . . . .	112
7.3	Discretizações não coincidentes entre os meios . . . . .	113
7.4	Técnica de Acoplamento - Bloco-Iterativo . . . . .	114
7.4.1	<i>Implementação Computacional . . . . .</i>	115
7.5	Cavidade com fundo flexível - 2D . . . . .	116
7.6	Cavidade com fundo flexível - 3D . . . . .	116
8	<b>CONCLUSÕES PARCIAIS . . . . .</b>	119
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	121

CAPÍTULO

---

**1**

# INTRODUÇÃO

---



---

A interação fluido-estrutura caracteriza-se por ser uma classe de problemas em que existe uma interdependência nos comportamentos do fluido e da estrutura. O comportamento do fluido depende do formato da estrutura e sua movimentação, assim como, o movimento e a deformação da estrutura dependem das forças que provém do fluido.

A modelagem numérica dos problemas da engenharia estrutural é um ramo vastamente desenvolvido, sendo a análise de estruturas por elementos finitos em softwares comerciais uma prática corrente entre os engenheiros. Entretanto, quando fala-se de interação fluido-estrutura (IFE), esses softwares encontram-se muito longe de atender à demanda dos engenheiros.

Problemas que envolvem a interação entre fluido e estrutura estão presentes em diversas áreas da engenharia, pode-se citar, por exemplo, a ação do vento sobre edifícios, aerodinâmica de modelos automotivos, problemas de *flutter* em estruturas aeronáuticas e de pontes, ou ainda problemas de escoamento de sangue sobre vasos sanguíneos e órgãos, entre muitos outros. A análise experimental de tais problemas, em geral, é muito custosa e envolve muito tempo, desta forma, é de interesse o desenvolvimento de métodos numéricos que representem adequadamente tais análises e que possibilitem que sejam realizadas dentro de um tempo razoável. O crescimento da informática tem auxiliado nesse processo, embora, ainda muitas análises somente sejam possíveis de serem realizadas em grandes *clusters*, e algumas, devido à complexidade dos problemas, não possam ser simuladas sem grandes simplificações.

A análise computacional dos problemas de IFE envolvem basicamente três partes: dinâmica dos fluidos computacional, mecânica dos sólidos computacional e acoplamento entre os meios fluido e sólido. Uma das maiores dificuldades encontrada nessa área diz respeito ao acoplamento entre fluido e sólido visto que para fluidos aplica-se, em geral, uma descrição matemática Euleriana, e para sólidos, Lagrangiana. O processo de acoplamento é

realizado basicamente utilizando-se duas possíveis técnicas: método de malhas adaptadas e os métodos de malhas não-adaptadas.

Nos métodos de malhas adaptadas, uma porção do contorno da malha de fluido deforma-se de maneira a acomodar a mudança de configuração que a estrutura sofre. Nesse tipo de metodologia uma descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária pode ser aplicada ao fluido, permitindo a movimentação do domínio computacional de maneira independente do domínio do fluido. Essa técnica é adequada para problemas em que a estrutura sofre deslocamentos em pequenas escalas comparados à configuração inicial da estrutura, sem que haja mudança topológica do domínio do fluido, visto que grandes distorções do domínio fluido, em geral, acarretam na necessidade de técnicas de remalhamento, que apresentam um custo computacional muito elevado.

No método de malhas não-adaptadas se utiliza uma malha fixa para o fluido, na qual o sólido se encontra imerso. Um dos aspectos importantes desse método diz respeito à localização do contorno da estrutura dentro da malha do fluido, podendo ser resolvido por exemplo com o uso de uma função *level-set* baseada na distância assinalada ao contorno. Essa técnica, embora possa ser aplicada para grandes deslocamentos, em geral não é adequada para levar em consideração efeitos localizados que precisem de um maior precisão da malha, como por exemplo, em regiões de camada limite na vizinhança da estrutura.

Em trabalhos atuais, o uso do método dos elementos finitos para a dinâmica dos fluidos tem sido largamente abordado. Mais recentemente, a análise isogeométrica, que tem como principal objetivo permitir a integração análise-projeto, também encontrou seu lugar na mecânica dos fluidos computacional. Ambas as técnicas de discretização são baseadas nos mesmos conceitos e possuem vantagens e desvantagens, podendo ser mais adequadas a casos particulares.

Nesta proposta de doutorado, para análise dos problemas IFE, propõe-se o desenvolvimento de uma técnica de partição de domínio com malhas sobrepostas no intuito de unir as vantagens das metodologias de malhas adaptadas e de malhas não-adaptadas e ao mesmo tempo proporcionar a combinação de discretizações isogeométrica e por elementos finitos. Propõe-se o uso de duas discretizações espaciais para o fluido, uma malha global maior, menos refinada e fixa no espaço, e uma malha local menor, mais refinada, em contato com a estrutura e que se move para acomodar as deformações da estrutura. Uma das discretizações pode ser isogeométrica, enquanto a outra em elementos finitos tradicional. Como consequência, caso seja necessária a realização de remalhamento, o mesmo pode ser realizado apenas na malha local, diminuindo o custo computacional. As malhas serão acopladas através da modificação do espaço das funções base em uma zona de sobreposição, de maneira a preservar a independência linear das funções e a partição da unidade.

Neste capítulo são apresentados o estado da arte dos principais assuntos envolvidos no desenvolvimento deste projeto, os objetivos, e a metodologia a ser aplicada.

## 1.1 Apresentação do texto

Este texto está dividido em 6 capítulos os quais serão descritos sucintamente na continuação.

No *Capítulo 1* introduz-se e contextualiza-se o tema de pesquisa. Na sequência, no estado da arte, faz-se uma breve apresentação de algumas das técnicas mais utilizadas para a solução dos problemas que envolvem a interação fluido-estrutura e dos métodos a serem aplicados nesta pesquisa. Por fim, apresentam-se os objetivos, a metodologia, justificativa e o cronograma de atividades do Doutorado.

O *Capítulo 2* comprehende a descrição da solução numérica para o problema de dinâmica dos fluidos computacional. Apresentam-se inicialmente as equações governantes em sua forma forte na descrição Euleriana, posteriormente, é apresentada a obtenção da descrição Euleriana-Lagrangiana arbitrária. Na sequência, a formulação fraca é obtida através da aplicação do método dos resíduos ponderados utilizando a técnica clássica de Galerkin. Após isso, descrevem-se as estabilizações utilizadas para contornar as instabilidades que ocorrem nesse tipo de discretização, seguida da técnica de integração temporal do conjunto de equações. Ao final, o algoritmo da implementação computacional é apresentado e alguns exemplos são avaliados para a verificação do programa.

No *Capítulo 3*, apresenta-se a análise isogeométrica. Descrevem-se as funções NURBS e sua aplicação na discretização das geometrias e variáveis em substituição às tradicionais funções polinomiais de Lagrange empregadas no método dos elementos finitos clássico. Por fim, verifica-se o código computacional da DFC com análise isogeométrica por meio de exemplos numéricos.

O *Capítulo 4* apresenta uma breve revisão sobre a mecânica dos sólidos voltada ao equilíbrio de corpos deformáveis em descrição Lagrangiana. Na sequência, apresentam-se os conceitos do método dos elementos finitos posicional e o elemento finito de casca a ser utilizado nesse projeto. Por fim, um exemplo de problema dinâmico é apresentado.

No *Capítulo 5* a técnica de decomposição de domínios é apresentada. Descreve-se a obtenção do novo espaço de funções na zona de sobreposição entre malhas global e local, e apresenta-se por fim um exemplo de verificação voltado à dinâmica dos fluidos computacional.

No *Capítulo 5* apresenta-se a metodologia adotada para o acoplamento fluido-estrutura. Primeiramente são apresentadas as condições de acoplamento, na sequência, desenvolve-se a técnica de movimentação de malhas a ser aplicada no modelo local do fluido. Ao final, descreve-se o algoritmo a ser utilizado para o acoplamento particionado forte do tipo bloco-iterativo.

No *Capítulo 6* são apresentadas conclusões parciais acerca do que foi desenvolvido até momento, bem como considerações sobre o plano de trabalho e resultados esperados ao final do Doutorado.

## 1.2 Estado da Arte

Nesta seção apresenta-se uma breve contextualização das teorias e técnicas mais importantes relacionadas à metodologia aplicada neste projeto para a resolução dos problemas de interação fluido-estrutura. Assim, aborda-se brevemente o estado da arte da mecânica dos fluidos computacional aplicada a problemas de contornos móveis, mecânica dos sólidos computacional aplicada a problemas dinâmicos com grandes deslocamentos, técnicas de acoplamento numérico fluido-estrutura, análise isogeométrica e técnicas de partição de domínio com sobreposição de malhas.

### 1.2.1 *Dinâmica dos fluidos computacional*

Na dinâmica dos fluidos computacional (DFC) técnicas numéricas são aplicadas para obtenção de uma solução aproximada para o conjunto de equações que descreve o comportamento dos fluidos no espaço e no tempo, visto que a solução analítica para esses problemas é conhecida para poucos e simples casos. Os principais tópicos abordados aqui são referentes às diferentes metodologias aplicadas no que diz respeito a: discretização espacial, métodos de estabilização e modelagem de escoamentos turbulentos.

No que diz respeito à discretização espacial a DFC desenvolveu-se inicialmente no âmbito do método das diferenças finitas e do método dos volumes finitos (ver, por exemplo, Chung (2002) e Anderson (1995)). O método dos elementos finitos (MEF), por sua vez, popularizou-se inicialmente em análises de estruturas na década de 50, com problemas baseados em princípios variacionais. Alguns anos depois, passou a ser usado também em problemas da DFC, visto que o mesmo apresenta algumas propriedades vantajosas, como por exemplo, a capacidade de discretizar geometrias complexas com o uso de malhas não estruturadas arbitrárias e a facilidade de aplicação de condições de contorno em geometrias complexas e de alta ordem (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; NITHIARASU, 2005; REDDY; GARTLING, 2010).

Umas das dificuldades encontradas na aplicação do MEF à dinâmica dos fluidos computacional é o fato de que, ao adotar-se o método clássico de Galerkin na discretização espacial das equações que descrevem o comportamento dos fluidos, obtém-se matrizes assimétricas e, em escoamentos com convecção dominante, surgem variações espúrias nas variáveis transportadas. Esse problema pode ser amenizado à medida que a malha de elementos finitos é refinada, entretanto, é desejável que o método escolhido apresente resultados mesmo em malhas mais grosseiras.

Para resolver tal dificuldade, algumas técnicas de estabilização foram propostas, a exemplo da metodologia *Stream-Upwind/Petrov-Galerkin* - SUPG (BROOKS; HUGHES, 1982), *Galerkin Least-Squares-GLS* (HUGHES; FRANCA; HULBERT, 1989) , *Sub-Grid Scale-SGS* (HUGHES, 1995), ou ainda, *Consistent Approximate Upwind-CAU* (GALEÃO; CARMO, 1988). Todas essas técnicas baseiam-se na introdução de termos estabilizantes

ao problema, contendo as variações espúrias que ocorrem em problemas com convecção dominante. Outra possibilidade, diz respeito ao uso do método Taylor-Galerkin (T-G), introduzido por Donea (1984) onde a estabilização é obtida pela introdução de termos de mais alta ordem para a expansão em série de Taylor no processo de discretização temporal.

Uma das metodologias mais difundidas para estabilização dos termos convectivos, é a técnica SUPG, a ser aplicada neste trabalho, que consiste em adicionar à forma fraca da equação da quantidade de movimento, o resíduo da equação da quantidade de movimento ponderado por uma função especialmente escolhida para adicionar difusão na direção das linhas de corrente. Diversos autores contribuíram para consolidação dessa técnica, dentre os quais pode-se citar, Hughes e Tezduyar (1984), Tezduyar (1992), Catabriga e Coutinho (2002). O parâmetro adimensional estabilizador cuja função é aplicar uma escala na parcela adicionada, ainda possui sua obtenção discutida em diversos trabalhos tais como os Takizawa, Tezduyar e Otoguro (2018) e Otoguro, Takizawa e Tezduyar (2020).

Outra dificuldade da DFC diz respeito aos escoamentos incompressíveis. Ao levar-se em conta a incompressibilidade do escoamento, obtém-se a chamada equação da continuidade, onde tem-se apenas o termo do divergente do vetor velocidade. Do ponto de vista computacional, esse aspecto traz problemas na obtenção do campo de pressão. Nesses casos, a utilização da pressão e da velocidade como variáveis primárias aproximadas por funções de forma de mesmo grau pode conduzir instabilidades na resolução do sistema. Essas instabilidades podem ser contornadas utilizando elementos que respeitem a restrição de *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi* ou LBB, onde a pressão é interpolada por funções de forma de ordem menor, sendo tais elementos conhecidos como Taylor-Hood (BREZZI; FORTIN, 1991; ZIENKIEWICZ; TAYLOR; NITHIARASU, 2005; STRANG; FIX, 2008).

Uma metodologia de estabilização semelhante à técnica SUPG foi também desenvolvida para contornar esse problema (HUGHES; FRANCA; BALESTRA, 1986; TEZDUYAR et al., 1992a). Essa metodologia é conhecida como PSPG (*Pressure stabilized Petrov-Galerkin*) e consiste em adicionar à forma fraca da equação da continuidade o resíduo da equação da quantidade de movimento ponderado pelo gradiente da equação da continuidade multiplicado por uma constante estabilizadora.

Outro aspecto relevante nas simulações numéricas diz respeito à reprodução de escoamentos turbulentos. As equações de Navier-Stokes descrevem tanto escoamentos laminares como turbulentos, entretanto, a utilização da chamada Simulação Direta de Turbulência leva a custos computacionais elevados, visto que requer uma malha refinada de maneira a representar adequadamente todas as escalas de turbulência. Para contornar esse problema, diferentes técnicas podem ser empregadas, como por exemplo, modelos algébricos de turbulência, baseados na hipótese de Reynolds, simulações de grandes vórtices (LES) (LAUNDER; SPALDING, 1972; WILCOX, 1993) e também métodos multiescalas (HUGHES; OBERAI; MAZZEI, 2001; SONDAK et al., 2015).

### 1.2.2 Dinâmica de estruturas computacional considerando grandes deslocamentos

A análise de interação fluido estrutura recai muitas vezes em problemas onde é necessário a consideração da não linearidade geométrica da estrutura devida aos grandes deslocamentos ou a efeitos acoplados de membrana e flexão. Dentro desse grupo de problemas pode-se citar *flutter* de grande amplitude, sistemas de desaceleração (paraquedas), aplicações biomédicas, entre outros.

A solução numérica de problemas estruturais é realizada tradicionalmente aplicando-se o método dos elementos finitos. Dentro do contexto da análise não-linear de estruturas utilizando MEF, a formulação co-rotacional proposta por Truesdell (1955) é muito popular e propõe a representação cinemática de algumas estruturas submetidas a grandes deslocamentos através da representação de deformações em termos de deslocamentos nodais e rotações. Essa formulação, aplicada para pórticos, treliças e cascas, pode ser vista nos trabalhos de Hughes e Liu (1981a), Hughes e Liu (1981b), Argyris (1982), Simo e Fox (1989), Ibrahimovic e Taylor (2002), Battini e Pacoste (2006).

A formulação co-rotacional, ao descrever rotações como parâmetros nodais, apresenta uma limitação para grandes deslocamentos, visto que não se pode aplicar a propriedade comutativa a essa grandeza. Para resolver este problema, utilizam-se formulações linearizadas de Euler-Rodrigues para aproximação das rotações, conforme pode ser visto em Coda e Paccola (2010).

A conservação da energia nessa formulação é um assunto muito controverso em problemas de dinâmica não-linear de estruturas. Isso porque no uso da formulação co-rotacional, as rotações finitas, que são parâmetros nodais, apresentam objetividade apenas para pequenos incrementos, além disso, a aplicação da formulação resulta em matriz de massa variável, proibindo o uso de algumas processos de integração temporal bem estabelecidos.

Motivado por Bonet et al. (2000), Coda (2003) introduz uma formulação baseada em posições, sem rotações como parâmetros nodais. Essa formulação tem sido aplicada com sucesso para problemas de pórticos e cascas (GRECO; CODA, 2004; CODA; PACCOLA, 2010; CARRAZEDO; CODA, 2010; CODA; PACCOLA, 2011), incluindo problemas de interação fluido-estrutura (SANCHES; CODA, 2013; SANCHES; CODA, 2014; FERNANDES; CODA; SANCHES, 2019).

Em Sanches e Coda (2014), os autores utilizam o integrador temporal de Newmark para análise de problemas dinâmicos não-lineares de estruturas de cascas no contexto da IFE com grandes deslocamentos e rotações de corpo rígido. Nesse trabalho, os autores apresentam a prova da conservação da quantidade de movimento linear e angular no uso dessa metodologia, e testam a estabilidade e conservação de energia para problemas com pequenas deformações.

Baseado no último trabalho citado, neste projeto, aplica-se a formulação Lagrangiana total para elementos de cascas baseada em posições e vetores generalizados, o que evita o uso de aproximações para grandes rotações e permite o uso do integrador de Newmark nos problemas dinâmicos da IFE que apresentam grandes deslocamentos e rotações.

### 1.2.3 Acoplamento fluido-estrutura

O problema de interação fluido-estrutura pode ser descrito como um conjunto de equações diferenciais e condições de contornos associadas ao fluido e a estrutura que precisam ser satisfeitas ao mesmo tempo. Os domínios do fluido e da estrutura não se sobrepõe e devem ser acoplados na interface fluido-estrutura.

Como sólidos e fluidos geralmente apresentam descrições matemáticas diferentes, sendo os sólidos tradicionalmente analisados por descrições Lagrangianas e os fluidos por descrições Eulerianas, um dos desafios da análise computacional de IFE é o acoplamento entre os dois meios. A solução a ser aplicada pode ser classificada em dois tipos de metodologias: métodos de rastreamento de interface (*interface tracking*) ou método de malhas adaptadas e métodos de captura de interface (*interface capturing*) ou método de malhas não-adaptadas (HOU; WANG; LAYTON, 2012; BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013b).

Nos métodos de rastreamento de interface, à medida em que a interface move, o domínio espacial do fluido muda seu formato, e a malha do fluido é movimentada para acomodar a mudança da interface. Nesse tipo de metodologia duas possíveis técnicas podem ser aplicadas na modelagem do domínio fluido: a descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária (HUGHES; LIU; ZIMMERMAN, 1981; DONEA; GIULIANI; HALLEUX, 1982; BAZILEVS et al., 2006a) ou a formulação Espaço-Tempo (*Space-Time - ST*) (TEZDUYAR et al., 1992b; TEZDUYAR; BEHR; LIOU, 1992c; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2012), sendo que ambas permitem a movimentação arbitrária da discretização espacial. A principal vantagem do método de malhas adaptadas é a capacidade de controlar a dimensão da malha próxima a interface, bem como a conformidade dos domínios, e como consequência, garantir a precisão dos resultados nessa região.

A técnica empregada para movimentação de malhas é muito importante nesse tipo de problemas, pois deve ser eficiente de maneira a resultar em elementos que possuam uma mínima distorção e alteração de volume, e de forma a evitar que a malha necessite ser reconstruída. Diversos trabalhos sobre movimentação de malhas para interação fluido-estrutura podem ser vistos na literatura, tais como: Johnson e Tezduyar (1994), Kanchi e Masud (2007), Farhat, Lesoinne e LeTallec (1998), Stein, Tezduyar e Benney (2004), Lefrançois (2008), Fernandes, Coda e Sanches (2019). Nos métodos de malha adaptada no entanto, em alguns casos o remalhamento torna-se inevitável, como em problemas com grandes distorções do domínio ou em problemas com mudanças topológicas, fazendo com que o custo computacional se torne muito elevado.

Por sua vez, os métodos de captura de interface são capazes de lidar com mudanças topológicas e grandes deslocamentos. Para isso, utilizam-se os chamados métodos de contornos imersos, introduzido por Peskin (1972), nos quais mantém-se a malha do fluido fixa e permite-se que a estrutura mova-se dentro dessa malha. Nesses métodos é necessário que as posições da estrutura sejam identificadas dentro da malha do fluido a cada passo de tempo (WANG et al., 2011; MITTAL; IACCARINO, 2005). Isso pode ser feito por uma função distância assinalada do contorno da estrutura (método *level-set*), como pode ser visto nos trabalhos de Cirak e Radovitzky (2005), Sanches e Coda (2014), Akkerman et al. (2012). A principal desvantagem desse tipo de metodologia é que a resolução da discretização na camada limite fica limitada a discretização da malha de elementos finitos onde a interface estiver posicionada no instante de análise.

A resolução dos problemas da IFE pode ser realizada através de duas variações principais: Métodos particionados (BAZILEVS et al., 2011; ROUX; GARAUD, 2009; SANCHES; CODA, 2013; SANCHES; CODA, 2014; FERNANDES; CODA; SANCHES, 2019) e métodos monolíticos (BLOM, 1998; HÜBNER; WALHORN; DINKLER, 2004; HRON; MADLIK, 2007). No primeiro grupo, as equações para fluido, estrutura e de movimentação de malha são resolvidas separadamente, cada um podendo utilizar formulação ou técnica de integração temporal diferentes, sendo as condições de acoplamento transmitidas, em geral em termos de condições de Neumann e Dirichlet, de um meio para o outro, enquanto no segundo, fluido e estrutura são tratados como entidade única, sendo um único sistema de equações gerado para fluido e estrutura.

As técnicas de acoplamento particionado podem ainda ser fracas, ou explícitas, onde as equações são resolvidas de uma maneira desacoplada e só no passo de tempo seguinte as forças do fluido são transferidas para o sólido e os deslocamentos do sólido para o fluido e para a movimentação da malha do fluido, ou fortes, ou implícitas, onde usa-se de processos iterativos de acoplamento dentro de um passo de tempo. Esse tipo de metodologia facilita a solução dos problemas de IFE devido ao total desacoplamento entre os *solvers* de estrutura e de fluido, entretanto, problemas de convergência podem ser encontrados em situações específicas.

Bazilevs, Takizawa e Tezduyar (2013b) apresentam uma classificação das técnicas de acoplamento segundo a forma de se resolver o sistema não linear de equações resultantes. São estabelecidas três categorias: técnica direta, técnica bloco-iterativa e técnica quase-direta.

Na técnica direta, equivalente aos métodos monolíticos, ao se aplicar o método de Newton Raphson, obtém-se uma matriz tangente que considera a variação das equações do fluido, do sólido e da malha, em relação às variáveis nodais dos 3 problemas: fluido, sólido e malha. Isso gera um único sistema a ser resolvido em cada iteração do método de Newton-Raphson e conduz a boa convergência, entretanto, devido aos grandes sistemas algébricos resultantes ocorre um aumento no custo computacional.

Na técnica bloco iterativa, na obtenção da matriz tangente do método de Newton Raphson, considera-se que o fluido dependa apenas de suas próprias variáveis, que o sólido dependa apenas de suas variáveis e que a malha dependa apenas de suas variáveis, o que gera uma matriz com 3 blocos que podem ser resolvidos independentemente. No entanto, no cálculo do resíduo, a cada iteração, as dependências das variáveis dos outros meios é considerada. Nota-se que o que ocorre é apenas uma modificação da matriz tangente, assim, a resposta não é alterada, no entanto a convergência pode ser afetada.

Em alguns problemas onde a massa do fluido envolvida é semelhante ou superior a massa da estrutura, pode-se ter uma divergência dos resultados da técnica de bloco-iterativa, nesses casos, pode-se utilizar a metodologia introduzida por Tezduyar, Behr e Liou (1992c), chamada de *augmented mass* que consiste em multiplicar a massa da matriz tangente respectiva à estrutura por um fator que dependerá do tipo de problema em análise. Outra técnica que pode ser utilizada é a alteração do esquema de acoplamento do tipo Dirichlet-Neumann para condições de contorno de Robin, que consiste em uma combinação linear das condições de Dirichlet e Neumann, ver por exemplo, Badia, Nobile e Vergara (2008). Pode-se utilizar ainda a relaxação de Aitken, proposto por Irons e Tuck (1969), e que demonstra-se muito eficiente e trabalhos sequentes (KÜTTLER; WALL, 2008; FERNANDES; CODA; SANCHES, 2019).

A técnica acoplamento quase-direto, garante boa convergência independente da magnitude das variáveis do fluido e da estrutura. Nessa metodologia, ao calcular a matriz tangente, considera-se que o fluido e o sólido dependem ambos das variáveis nodais do fluido e do sólido, e que a malha depende apenas de suas próprias variáveis. Assim, obtém-se uma matriz com dois blocos independentes, um composto pelos parcelas do fluido e estrutura, que serão resolvidos em um único sistema algébrico, e o outro composto pelas parcelas da movimentação da malha. O processo de solução entre os dois blocos é iterativo, com a movimentação da malha sendo executada a cada iteração a partir dos dados provenientes do primeiro bloco (TEZDUYAR et al., 2006; TEZDUYAR; SATHE; STEIN, 2006).

#### 1.2.4 Análise Isogeométrica

A Análise Isogeométrica (IGA - *Isogeometric Analysis*) é uma metodologia para análise numérica de problemas descritos por equações diferenciais e foi introduzida primeiramente por Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005). Pode-se dizer que se trata de uma generalização do método dos elementos finitos clássico, a partir do uso de funções base especiais, e sua formulação foi consolidada através de inúmeros trabalhos sequentes, como por exemplo, Bazilevs et al. (2006a), Bazilevs et al. (2007), Bazilevs et al. (2006b), Cottrell et al. (2006), Cottrell, Hughes e Reali (2007), Zhang et al. (2007).

Na análise isogeométrica, as funções base utilizadas são aquelas aplicadas nos sistemas CAD (*Computed Aided Design*), ou seja, nas tecnologias aplicadas na engenharia de *design*, animação, artes gráficas e visualização. Dentro das possibilidades de funções, as

mais conhecidas são as funções NURBS (PIEGL; TILLER, 1996), fazendo que esse seja um ponto de partida para os estudos sobre IGA.

Um dos principais objetivos do desenvolvimento dessa ferramenta é a integração entre os sistemas CAD e as técnicas numéricas baseadas em elementos finitos, as quais requerem a geração de malhas baseadas nos dados obtidos em programas CAD.

Uma das principais vantagens do uso dessa metodologia é representação exata de geometrias mesmo em malhas pouco refinadas, visto que elas são capazes de representar exatamente seções cônicas, círculos, cilindros, esferas e elipsóides. Essa característica é muito atrativa, por exemplo, em problemas de flambagem de cascas, os quais são extremamente sensíveis a imperfeições geométricas, além disso, as funções NURBS são continuas  $p - 1$  vezes entre os elementos, sendo  $p$  o grau da função base, o que pode ser uma característica interessante para esse tipo de problema que requer continuidade  $C^1$  entre elementos. Trabalhos como os de Benson et al. (2010), Kiendl et al. (2009) demonstram a aplicabilidade da IGA na análise de problemas de cascas.

A descrição exata das geometria das funções NURBS é uma característica desejável também em problemas que envolvem fenômenos de camada limite, os quais dependem fortemente da precisão geométrica da superfície do corpo imerso no escoamento. Alguns problemas envolvendo escoamentos turbulentos e interação fluido-estrutura, podem ser consultados em: Bazilevs et al. (2007), Bazilevs et al. (2010), Bazilevs e Akkerman (2010), Zhang et al. (2007), Bazilevs et al. (2008).

Outras metodologias aplicando diretamente funções *B-Splines* também tem se mostrado eficiente para a análise de problemas da dinâmica dos fluidos computacional, como pode ser visto nos trabalhos de Höllig, Reif e Wipper (2001), Bazilevs, Takizawa e Tezduyar (2013), Bazilevs et al. (2014).

Neste projeto, a aproximação IGA, baseada em funções NURBS, é aplicada parcialmente à malha de fluidos utilizada nas análises de interação entre fluido estrutura, como será visto em mais detalhes na sequência.

### **1.2.5 Técnica de partição de domínios**

Em diversas áreas da engenharia se faz necessário levar em consideração efeitos localizados, geralmente de menor escala, em um modelo global. Dentro da análise estrutural pode-se citar problemas de fissuras, orifícios, imperfeições; na mecânica dos fluidos, problemas de camada limite, a interface entre dois fluidos; e na interação fluido-estrutura a interface entre estrutura-fluido, entre outros.

Para uma solução precisa desse tipo de problemas, faz-se necessário a aplicação de técnicas que levem em consideração os efeitos locais, mas ao mesmo tempo não tornem a simulação inviável devido ao seu custo computacional.

O método dos elementos finitos, tradicionalmente aplicado para as análises numéricas de equações diferenciais, foi desenvolvido a partir de um modelo mecânico de

meio contínuo, apresentando pouca flexibilidade para a consideração desses efeitos. Os refinamentos  $p$  e  $h$  são metodologias eficientes, entretanto, para alguns problemas dinâmicos, demandam técnicas de remalhamento, e podem ser muito caros computacionalmente.

Buscando uma melhoria nesse aspecto do MEF, muitas propostas têm sido realizadas para melhorar a flexibilidade de problemas multiescala, como pode-se citar por exemplo, o caso dos elementos finitos difusos (NAYROLES; TOUZOT; VILLON, 1992) onde o conceito de partículas foi introduzido, resultando em uma generalização do método dos elementos finitos sem malha, ou o método de Galerkin livre de elementos que é combinação entre elementos sem malha e o MEF, ver Belytschko et al. (1995). Com esse mesmo intuito pode-se citar o método de Partição da Unidade (MELENK; BABUSKA, 1996), o método dos elementos finitos generalizado (STROUBOULIS; COPPS; BABUSKA, 2001) ou o método dos elementos finitos estendido (FARHAT; HARARI; FRANCA, 2001), os quais introduzem o enriquecimento à base aproximadora por meio de funções capazes de capturar efeitos localizados.

Dentro do contexto da mecânica dos fluidos, Tezduyar, Aliabadi e Behr (1998), Tezduyar e Aliabadi (2000) introduziram a técnica *EDICT* (*Enhanced-Discretization Interface-Capturing Technique*) para captura de interface com aprimoramento da discretização para problemas bifásicos ou com superfície livre. Para isso, nessa região de interface definem-se um subconjunto de elementos (sub-malhas), que posteriormente são refinados sucessivamente, de modo a melhorar a precisão da solução. Como resultado obtém-se uma discretização melhorada para capturar a interface, entretanto, as sub-malhas provenientes, não representam com exatidão descontinuidades na interface. Uma versão mais eficiente dessa técnica foi proposta em Tezduyar e Sathe (2005), na qual um método iterativo multinível é projetado para a captura de efeitos do escoamento em pequenas escalas, permitindo a simulação de problemas mais complexos.

Outro grupo de métodos é proposta para flexibilizar o MEF em problemas com efeitos locais, que são os baseados em superposição de um domínio local a um domínio global. A técnica Chimera definida por Benek et al. (1986) traz a introdução de orifícios na região de superposição dos modelos, definindo um contorno artificial para o modelo global, e a transmissão de dados ocorre através desses contornos artificiais gerados. O método S (FISH, 1992) trata o modelo local como um enriquecimento ao global, e a solução é obtida através da soma dos campos de interesse de cada domínio.

O método Arlequin (BEN DHIA, 1998; BEN DHIA; RATEAU, 2001), por sua vez também baseia-se na superposição de modelos de modo a combinar um modelo local mais refinado a um global, no entanto, esse processo é realizado através do cruzamento e colagem entre os modelos em uma zona de superposição e fazendo-se o uso para tal de multiplicadores de Lagrange. A desvantagem do método de Arlequin, é a introdução mais variáveis ao sistema, e como consequência um sistema mais difícil de ser tratado. Uma formulação estabilizada do método Arlequin é desenvolvida e aplicada à escoamentos

incompressíveis por Fernandes et al. (2020). No contexto da interação fluido-estrutura, Fernandes (2020) aplicou o método Arlequin à problemas de interação fluido-estrutura considerando problemas bidimensionais.

## 1.3 Objetivos

O objetivo principal desse trabalho é construir um código computacional capaz de realizar simulações de problemas da interação fluido-estrutura combinando aproximações por elementos finitos clássico e análise isogeométrica.

Para alcançar o objetivo principal, os seguintes objetivos secundários precisam ser atingidos:

- Expandir um código de MEF bidimensional de dinâmica dos fluidos pré-existente para um código que também analise problemas tridimensionais e que conte com uma discretização através de análise isogeométrica;
- Implementar uma técnica de partição de domínios e sobreposição de malhas para levar em conta efeitos locais no código de dinâmica dos fluidos computacional;
- Estudar um código para análise não-linear geométrica de estruturas de cascas utilizando o MEF posicional previamente desenvolvido;
- Realizar o acoplamento entre os códigos da dinâmica dos fluidos computacional com o código de estruturas através de uma técnica de acoplamento particionado forte usando um acoplamento do tipo bloco-iterativo;
- Validar os códigos anteriores através da simulação de problemas da dinâmica dos fluidos, dinâmica das estruturas e problemas IFE.

## 1.4 Metodologia

Em função da complexidade envolvida na implementação computacional dos códigos desenvolvidos optou-se pelo uso da linguagem de programação C++ orientada a objetos, visto que esta linguagem já vem sendo utilizada com sucesso no grupo de trabalho da presente estudante de doutorado. Além disso, a programação orientada a objetos proporciona uma maior modularidade dos códigos desenvolvidos e uma maior facilidade para o acoplamento entre módulos distintos. Todas as implementações são realizadas utilizando bibliotecas, compiladores e softwares livres ou de código aberto, em ambiente Linux.

O projeto de pesquisa iniciou-se tendo como base um código de dinâmica dos fluidos computacional para análises bidimensionais desenvolvido por Fernandes (2016), Fernandes

(2020) em seus trabalhos de mestrado e doutorado. Primeiramente, ampliou-se o código pré-existente de maneira que o mesmo contemplasse análises de problemas tridimensionais. Na sequência, incluiu-se a este código baseado em MEF para análises 2D e 3D da DFC a técnica de análise isogeométrica.

A partir desse ponto, iniciou-se o processo de estudo da metodologia de sobreposição de malhas de modelos locais à malhas de modelos globais, e sua implementação foi realizada primeiramente para problemas bidimensionais. Na continuação desse projeto esse código será expandido para contemplar também problemas tridimensionais.

Para a análise dos problemas não-lineares geométricos de estruturas de cascas baseado no MEF posicional, estudaram-se os textos apresentados em Coda (2018), Sanches e Coda (2010a), Sanches e Coda (2010b), e será empregado um código cedido pelo professor Humberto Breves Coda em linguagem FORTRAN e com paralelização em protocolo em MPI.

Na sequência deste projeto, será realizado o acoplamento entre os códigos de fluidos e de estrutura, utilizando-se a metodologia de acoplamento particionado forte através de bloco-iterativo e empregando a estratégia de relaxação de Aitken com o objetivo de acelerar a convergência do processo iterativo.

Para maior eficiência na resolução dos problemas, os códigos da DFC e de IFE também apresentam paralelização em protocolo MPI (*Message passing interface*). O processamento paralelo acontece a partir da divisão do domínio de elementos finitos entre os processos, o qual é realizado através da biblioteca METIS<sup>1</sup>. O METIS proporciona divisão do domínio de elementos finitos em número semelhantes de elementos entre os processos e agrupando-os por proximidade geométrica.

É importante ressaltar que os códigos contam com a interface e implementações do pacote PETSc<sup>2</sup>. Essa biblioteca é desenvolvida em código aberto e possui uma grande quantidade de método iterativos e diretos para solução de sistemas algébricos e também de pré-condicionadores. Além do mais, o PETSc possui uma interface bem desenvolvida com outras bibliotecas, como por exemplo, com o METIS citado anteriormente. No âmbito da resolução dos problemas algébricos nesta primeira fase foi utilizada a biblioteca MUMPS<sup>3</sup> que trata-se um método direto de solução de sistemas lineares e é uma biblioteca em código aberto.

As malhas de elementos finitos utilizadas nas análises são obtidas através do software GMSH<sup>4</sup> e a etapa de pós-processamento e visualização é realizada no PARAVIEW<sup>5</sup>. Para problemas aplicando a análise isogeométrica, a etapa de pré-processamento é realizada com um código desenvolvido pela autora desse trabalho em seu trabalho de mestrado.

<sup>1</sup> Disponível em: <<http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/metis/metis/overview>>

<sup>2</sup> Disponível em: <<http://https://www.mcs.anl.gov/petsc/>>

<sup>3</sup> Disponível em: <<http://mumps.enseeicht.fr/>>

<sup>4</sup> Disponível em: <<https://gmsh.info/>>

<sup>5</sup> Disponível em: <<http://https://www.paraview.org/>>

No que diz respeito à infraestrutura, utiliza-se o *cluster* disponível no Laboratório de Informática e de Mecânica Computacional (LIMC) do SET para a simulação de problemas mais complexos, e um computador pessoal para a simulação de problemas mais simples.

## 1.5 Justificativa

Os problemas de interação fluido-estrutura estão presentes em todas as partes, na engenharia, nas ciências, na medicina e também no dia-a-dia das pessoas. O projeto de estruturas cada vez mais esbeltas, a necessidade de obtenção de energia elétrica a partir de fontes de energia limpa, como as usinas eólicas, o estudo de *airbags*, o bombeamento do sangue pelos ventrículos do coração humano e o abrir e fechar das válvulas do coração, são apenas alguns dos exemplos que demonstram a necessidade de se aprofundar nos estudos da interação fluido-estrutura computacional.

Enquanto que no campo engenharia estrutural os pacotes comerciais baseados em MEF estão em constante evolução, e podem resolver uma grande gama de problemas, os softwares que tratam de problemas da dinâmica dos fluidos computacional e de problemas multifísicos, como os problemas da IFE, ainda precisam evoluir muito para suprirem a demanda dos pesquisadores. A simulação numérica de problemas reais de IFE é ainda muito difícil de ser realizada em função do elevado custo computacional, e muitas vezes, devido a grande complexidade dos problemas, ainda é impossível simulá-los sem que sejam realizadas grandes simplificações. Dessa forma, os ensaios experimentais, ainda são em grande parte das vezes, a melhor forma de se estudar o comportamento de IFE, embora, sejam muito custosos e demorados.

Dentro desse contexto, muitos pesquisadores tem se esforçado para que a análise de problemas da IFE computacionalmente seja possível e eficiente. Com essa mesma proposta, nesse projeto pretende-se desenvolver uma ferramenta computacional eficiente para análise tridimensional de problemas de interação fluido-estrutura utilizando uma combinação entre método dos elementos finitos e análise isogeométrica. Nesse trabalho, será aplicada uma técnica de sobreposição de malhas com método multiescala ao modelo do fluido, com uma malha local mais refinada e deformável em contato com a superfície da estrutura sobreposta a uma malha global fixa e com discretização mais grosseira. Dessa forma, ainda que a estrutura mude drasticamente, não se faz necessário o remalhamento de toda a malha que compõe o fluido, diminuindo assim o custo computacional. Esta proposta compartilha as vantagens dos métodos de malhas adaptadas e de malhas não adaptadas, possuindo a possibilidade de alcançar uma ótima convergência.

## 1.6 Cronograma de Atividades

As atividades relativas ao presente trabalho de doutorado, as quais foram desenvolvidas ou estão em processo de desenvolvimento, são divididas nos seguintes grupos:

1. Cumprimento dos créditos mínimos obrigatórios para a obtenção do título de Doutor em Engenharia de Estruturas;
2. Estudo das teorias necessárias para o desenvolvimento dos códigos computacionais;
3. Ampliação de um código computacional 2D de dinâmica dos fluidos previamente desenvolvido para um código que possibilite a análise de problemas tridimensionais;
4. Desenvolvimento de um código computacional que possibilite a análise de problemas da dinâmica dos fluidos computacional utilizando uma aproximação por análise isogeométrica;
5. Estágio de doutorado sanduíche;
6. Desenvolvimento de um programa para movimentação de malhas baseado na teoria da elasticidade;
7. Desenvolvimento de um artigo em parceria com o orientador no exterior sobre movimentação de malhas;
8. Ampliação do código da dinâmica dos fluidos computacional para que conte com a técnica de sobreposição de malhas para problemas 2D;
9. Escrita do texto de qualificação;
10. Estudo de um código pré-existente de análise não-linear geométrica utilizando MEF posicional e elementos de cascas;
11. Ampliação do código de dinâmica dos fluidos computacional com sobreposição de malhas para contemplar problemas 3D;
12. Acoplamento entre os códigos de dinâmica dos fluidos e do código de estruturas de cascas e validação do mesmo através da avaliação de alguns problemas;
13. Desenvolvimento da tese de doutorado.

Na Tab. 1.1 apresentam-se o cronograma de execução das atividades de doutorado.

Tabela 1.1 – Cronograma de atividades do trabalho de doutorado

Atividade	Período (Ano/Semestre)								
	18/01	18/02	19/01	19/02	20/01	20/02	21/01	21/02	22/01
1	■	■							
2	■		■	■	■	■	■	■	
3			■	■					
4				■	■				
5					■	■			
6					■	■			
7						■	■		
8					■	■	■		
9						■	■	■	
10							■	■	
11							■	■	
12								■	■
13						■	■	■	



# DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL

---

---

O escoamento isotérmico de um fluido newtoniano é governado pelas equações advindas da conservação da quantidade de movimento, ou de Navier-Stokes, e da conservação de massa. Nos casos em que ocorram variações significativas no campo de temperatura, ou em escoamentos compressíveis, a equação da conservação de energia deve ser adicionada ao sistema. Essas equações governantes, juntamente com as relações constitutivas, resultam em um sistema de equações diferenciais não lineares que descrevem o comportamento do escoamento no tempo e no espaço.

Neste trabalho são analisados escoamentos incompressíveis isotérmicos e com contornos móveis. Nas próximas seções, são apresentadas as principais técnicas utilizadas na solução desse tipo de problema e sua implementação computacional. Uma descrição Euleriana-Lagrangiana arbitrária é utilizada para as equações e a discretização espacial se dá através da método dos elementos finitos (FEM) ou da análise isogeométrica (IGA). Para resolver os problemas numéricos típicos desse sistema de equações, como as oscilações espúrias que ocorrem em problemas com convecção dominante quando aplicado o método dos resíduos ponderados baseado na técnica de Galerkin clássica, a metodologia SUPG é utilizada. Além disso, para contornar a restrição de *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi* ou LBB a técnica de estabilização PSPG é aplicada. A integração temporal das equações é realizada pelo método  $\alpha$ -generalizado. No final deste capítulo, apresenta-se um algoritmo que descreve o esquema de solução computacional dos problemas da DFC seguido da solução de alguns problemas clássicos da DFC para sua verificação.

## 2.1 Forma forte das equações governantes

As equações de Navier-Stokes são derivadas da segunda lei de Newton, e são obtidas através do balanço entre a resultante das forças externas que atuam em um elemento infinitesimal de fluido e a sua variação temporal da quantidade de movimento, resultando:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (2.1)$$

onde  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{f}$  são respectivamente a densidade, a velocidade e a forças de domínio por unidade de massa. O tensor de tensões de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  é definido para fluidos newtonianos incompressíveis pela seguinte relação constitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}), \quad (2.2)$$

onde  $p$  representa a pressão,  $\mu$  a viscosidade dinâmica do fluido e  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  é o tensor taxa de deformação, definido como:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left( \nabla(\mathbf{u}) + \nabla(\mathbf{u})^T \right). \quad (2.3)$$

A equação de conservação da massa realiza um balanço em um volume de controle infinitesimal entre as parcelas de massa que entram e saem por unidade de tempo, definindo a variação da densidade. Para um escoamento incompressível a variação da densidade é nula, de modo que a equação se resume a:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.4)$$

As condições de contorno essenciais, ou de Dirichlet, e as condições de contorno naturais, ou de Neumann, são necessárias para completar as equações da mecânica dos fluidos, e são descritas respectivamente por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ em } (\Gamma_t)_g, \quad (2.5)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{h} \text{ em } (\Gamma_t)_h, \quad (2.6)$$

sendo  $(\Gamma_t)_g$  a porção do contorno com condições de contorno de Dirichlet, representadas pelo vetor  $\mathbf{g}$ , e  $(\Gamma_t)_h$  aquela com condições de contorno de Neumann, descritas por  $\mathbf{h}$ . A variável  $\mathbf{n}$  representa o vetor unitário normal ao contorno em análise.

## 2.2 Descrição Euleriana-Lagrangiana arbitrária (ALE)

A descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária (DONEA; GIULIANI; HALLEUX, 1982) representa uma generalização da descrição puramente Lagrangiana e da descrição

puramente Euleriana do movimento do contínuo. A descrição Lagrangiana fixa a atenção em pontos materiais do contínuo, enquanto que na descrição Euleriana considera-se uma porção fixa do espaço ocupada pelo contínuo, e analisam-se os pontos materiais que passam por essa porção ao longo do tempo. Como consequência, na descrição puramente Lagrangiana a malha computacional move-se com o contínuo, enquanto que na Euleriana a malha computacional mantém-se fixa. Por sua vez, na descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária, trabalha-se com pontos de referência que podem movimentar-se, mas de maneira independente do movimento dos pontos materiais do contínuo analisado.

Para a aplicação dessa metodologia às equações governantes da mecânica dos fluidos é importante a definição de três domínios, de acordo com a Fig. 2.1. O domínio inicial, chamado de **domínio material** ( $\Omega_X$ ), que é definido pelas coordenadas dos pontos materiais  $\mathbf{X}$ ; O domínio atual, chamado de **domínio espacial** ( $\Omega_x$ ), definido pelas coordenadas  $\mathbf{x}$ ; e por fim, o **domínio de referência** ( $\Omega_{\bar{x}}$ ) com coordenadas dos pontos de referência  $\bar{\mathbf{x}}$ .

As coordenadas no domínio atual do contínuo podem ser mapeadas a partir do domínio inicial ou a partir do domínio de referência utilizando as seguintes funções de mapeamento:

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t) = \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{x}}, t). \quad (2.7)$$

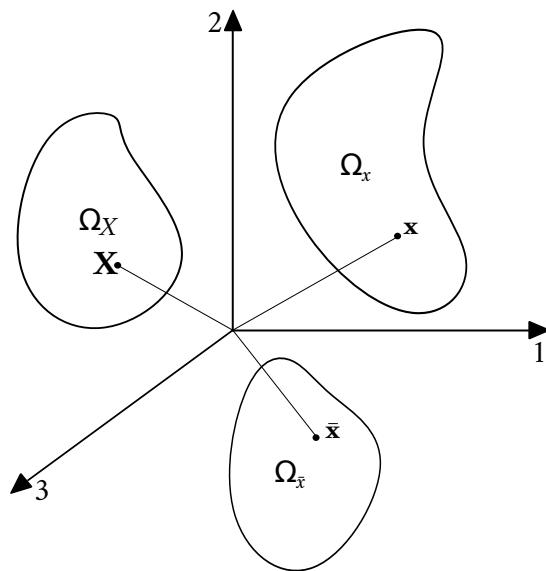


Figura 2.1 – Domínios utilizados para a descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária

a velocidade, por sua vez, para os pontos materiais ( $\mathbf{u}$ ) no instante  $t$  é obtida pela derivada do vetor posição  $\mathbf{x}$  mantendo  $\mathbf{X}$  fixo:

$$\mathbf{u} = \left. \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}}, \quad (2.8)$$

e a velocidade do contínuo nos pontos de referência  $\bar{\mathbf{u}}$  é descrita como:

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}}. \quad (2.9)$$

Para expressar as equações da dinâmica dos fluidos em descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária, parte-se do conceito de *derivada material*. A derivada material de uma propriedade qualquer  $F$  do contínuo é definida como a variação por unidade de tempo sentida por um observador movendo-se junto com os pontos materiais e é escrita como  $\frac{DF}{Dt}$ . A derivada material da velocidade, variável de interesse para as equações da mecânica dos fluidos, quando representada pelo domínio espacial é definida como:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \Big|_t \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}. \quad (2.10)$$

Aplicando-se a Eq. (2.8) à Eq. (2.10) pode-se reescrevê-la como:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \Big|_t. \quad (2.11)$$

Baseado nessa última expressão as equações de Navier-Stokes para escoamento incompressível podem ser apresentadas, em termo da derivada material, da seguinte forma:

$$\rho \left( \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (2.12)$$

Utilizando-se agora o domínio de referência  $\Omega_{\bar{x}}$ , para expressar a derivada material chega-se à seguinte expressão:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + \frac{\partial \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \Big|_t \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}. \quad (2.13)$$

Derivando-se (2.7) no tempo com  $\mathbf{X}$  fixo, é possível escrever:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \Big|_t \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}, \quad (2.14)$$

onde o termo  $\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}}$  representa a velocidade do domínio de referência (malha de elementos finitos), em relação ao domínio espacial, representada por  $\bar{\mathbf{u}}$ , permitindo escrever:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \Big|_t \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}, \quad (2.15)$$

ou ainda:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} = (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_t. \quad (2.16)$$

Utilizando-se das expressões Eq. (2.16) e Eq. (2.13) obtém-se que:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \frac{\partial \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial \mathbf{x}} \Big|_t. \quad (2.17)$$

Por fim, aplicando-se a Eq. (2.17) em Eq. 2.12, chega-se à equação da conservação da quantidade de movimento para escoamentos incompressíveis em descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (2.18)$$

Já para o caso incompressível, a equação da continuidade

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.19)$$

continua válida para a descrição ALE.

## 2.3 Forma Fraca e discretização espacial

Tomando-se a forma forte das equações governantes, aplica-se o método de resíduos ponderados para se chegar à forma fraca e proceder com a discretização espacial. Os espaços de dimensão finita das funções tentativa que descrevem a velocidade e a pressão são chamados de  $\mathcal{S}_u$  e  $\mathcal{S}_p$  respectivamente, e definidos como:

$$\mathcal{S}_u = \left\{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u}(\cdot, t) \in \left( H^1(\Omega_t) \right)^{n_{sd}}, u_i = g_i \text{ em } (\Gamma_t)_{g_i} \right\} \quad (2.20)$$

e

$$\mathcal{S}_p = \left\{ p \mid p(\cdot) \in L^2(\Omega_t), \int_{\Omega_t} p \, d\Omega = 0 \text{ se } \Gamma_t = (\Gamma_t)_g \right\}, \quad (2.21)$$

sendo  $L^2(\Omega_t)$  o espaço de funções escalares que são de quadrado integrável sobre  $\Omega_t$ ; e  $(H^1(\Omega_t))^{n_{sd}}$  é o espaço de funções vetoriais com derivadas de quadrado integrável sobre  $\Omega_t$ .

O espaço das funções teste ou funções peso das equações da quantidade de movimento e da continuidade são definidos respectivamente por:

$$\mathcal{V}_u = \left\{ \mathbf{w} \mid \mathbf{w}(\cdot) \in \left( H^1(\Omega_t) \right)^{n_{sd}}, w_i = 0 \text{ em } (\Gamma_t)_{g_i} \right\}, \quad (2.22)$$

$$\mathcal{V}_p = \mathcal{S}_p. \quad (2.23)$$

Aplicando-se o método dos resíduos ponderados sobre as equações Eq. (2.18) e Eq. (2.19), integrando-se por partes o termo referente ao tensor de tensões de Cauchy, empregando-se o teorema da divergência e levando-se em consideração a condição de homogeneidade da função  $\mathbf{w}$  sobre o contorno  $(\Gamma_t)_g$ , obtém-se a forma fraca. A solução do problema consiste então em encontrar  $\mathbf{u} \in \mathcal{S}_u$  e  $p \in \mathcal{S}_p$ , de tal modo que  $\forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}_u$  e  $q \in \mathcal{V}_p$ , as seguintes expressões sejam verdadeiras:

$$\int_{\Omega_t} \mathbf{w} \cdot \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) d\Omega + \int_{\Omega_t} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{w}) : \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{(\Gamma_t)_h} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} = 0, \quad (2.24)$$

$$\int_{\Omega_t} q (\nabla \cdot \mathbf{u}) d\Omega = 0. \quad (2.25)$$

A discretização espacial tanto pelo método dos elementos finitos como pela técnica de análise isogeométrica consiste em, dado um problema com domínio  $\Omega$  dividi-lo em subdomínios  $\Omega^e$ , também chamados de elementos ou células, de forma que:

$$\Omega \approx \Omega^h = \bigcup_{e=1}^{nel} \Omega^e, \quad (2.26)$$

onde  $\Omega^h$  é o domínio discretizado por subdomínios, o índice  $h$  se refere ao tamanho representativo dos elementos, e  $nel$  representa o número total de elementos.

Os espaços de função tentativa para velocidade e pressão, bem como as funções teste para o domínio e contorno são agora dados pela combinação linear de parâmetros nodais com funções de forma definidas sobre cada subdomínio, atendendo à partição da unidade, de forma que o problema da dinâmica dos fluidos fica definido como: encontrar  $\mathbf{u}^h \in \mathcal{S}_u^h$  e  $p^h \in \mathcal{S}_p^h$ , de tal modo que  $\forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_u^h$  e  $q^h \in \mathcal{V}_p^h$  a seguinte expressão seja verdadeira:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t} \mathbf{w}^h \cdot \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) d\Omega + \int_{\Omega_t} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{w}^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\ & - \int_{(\Gamma_t)_h} \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{h}^h + \int_{\Omega_t} q^h (\nabla \cdot \mathbf{u}^h) d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{A=1}^{N_{nos}} \mathbf{u}_A(t) N_A(x), \quad (2.28)$$

$$p^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{A=1}^{N_{nos}} p_A(t) N_A(x), \quad (2.29)$$

$$\mathbf{w}^h(\mathbf{x}) = \sum_{A=1}^{N_{nos}} \mathbf{w}_A N_A(x), \quad (2.30)$$

$$q^h(\mathbf{x}) = \sum_{A=1}^{N_{nos}} q_A N_A(x), \quad (2.31)$$

sendo que  $N$  representa as funções de forma da discretização, o subscrito  $A$  refere-se a variável discreta do nó ou ponto de controle  $A$  e  $N_{nos}$  é o número total de nós no contexto dos elementos finitos ou pontos de controle em análise isogeométrica da malha discreta. As variáveis  $\mathbf{w}_A$  e  $q_A$  são arbitrárias nas aproximações.

No entanto, as formulações obtidas pelo método de Galerkin são conhecidas por apresentarem oscilações espúrias em escoamentos dominados pela convecção. Uma das formas de se lidar com esse problema é a utilização de métodos estabilizados, como

*Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin* (SUPG) aplicado nesse trabalho (BROOKS; HUGHES, 1982; HUGHES; TEZDUYAR, 1984). Essa metodologia consiste em adicionar à equação da quantidade de movimento, o seu resíduo ponderado por  $\tau_{\text{SUPG}} ((\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla \mathbf{w}^h)$ , onde  $\tau_{\text{SUPG}}$  é um parâmetro de estabilização. Do ponto de vista numérico esse termo age de maneira a eliminar as oscilações espúrias na direção das linhas de corrente e garantir a estabilidade em problemas com convecção dominante.

Para os problemas de escoamentos incompressíveis aqui analisados, deve-se levar em conta que os campos de velocidade e pressão não podem ser aproximados arbitrariamente, podendo levar à ocorrência de oscilações espúrias no campo de pressão. Para evitar isso, podem ser escolhidos elementos Taylor-Hood que obedecem, à condição de *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi* ou LBB (BREZZI; FORTIN, 1991; ZIENKIEWICZ; TAYLOR; NITHIA-RASU, 2005; STRANG; FIX, 2008), ou pode-se recorrer a um método estabilizado.

Para estabilizar a pressão, neste trabalho emprega-se a técnica *Pressure Stabilization Petrov Galerkin* (PSPG) (HUGHES; FRANCA; BALESTRA, 1986; TEZDUYAR et al., 1992a). Essa técnica consiste em adicionar à equação da continuidade, o resíduo da equação da quantidade de movimento ponderada pela função  $\tau_{\text{PSPG}} (\frac{\nabla q^h}{\rho})$ , onde  $\tau_{\text{PSPG}}$  é um parâmetro de estabilização. Essa estabilização cria termos dependentes da pressão na equação da continuidade, responsáveis pela flexibilização do campo de pressão e por contornar a condição LBB.

Por fim, para prover maior estabilização em problemas com formação de vórtices, adiciona-se à equação da quantidade de movimento o resíduo da equação da continuidade ponderado por  $\rho \nu_{\text{LSIC}} \nabla \cdot \mathbf{w}^h$  (TEZDUYAR; OSAWA, 2000), sendo  $\nu_{\text{LSIC}}$  um parâmetro de estabilização. Esse termo está baseado no método dos mínimos quadrados na restrição de incompressibilidade.

Nota-se que a consistência da formulação estabilizada é garantida, uma vez que são adicionados às equações seus resíduos ponderados.

Os parâmetros de estabilização  $\tau_{\text{SUPG}}$ ,  $\tau_{\text{PSPG}}$  e  $\nu_{\text{LSIC}}$  têm função de proporcionar uma solução estável e otimizar a convergência durante o refinamento de malha. A obtenção dos parâmetros estabilizadores será discutida em 2.3.1.

Por fim, o problema da dinâmica dos fluidos passa a ser a determinação de  $\mathbf{u}^h \in \mathcal{S}_u^h$  e  $p^h \in \mathcal{S}_p^h$ , de tal modo que  $\forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_u^h$  e  $q^h \in \mathcal{V}_p^h$  as seguintes expressões sejam verdadeiras:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \mathbf{w}^h \cdot \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) d\Omega + \int_{\Omega} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{w}^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} q^h \nabla \cdot \mathbf{u}^h d\Omega - \int_{\Gamma_h} \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{h}^h d\Gamma_h \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{SUPG} ((\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla \mathbf{w}^h) \cdot \mathbf{r}_M(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{PSPG} \left( \frac{\nabla q^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_M(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \rho \nu_{LSIC} \nabla \cdot \mathbf{w}^h r_C(\mathbf{u}^h) d\Omega = 0,
\end{aligned} \tag{2.32}$$

e

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} q^h \nabla \cdot \mathbf{u}^h d\Omega \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{PSPG} \left( \frac{\nabla q^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_M(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega = 0,
\end{aligned} \tag{2.33}$$

onde  $\mathbf{r}_M$  e  $r_C$  são os resíduos da equação da quantidade de movimento e da equação da continuidade, respectivamente, dados por:

$$\mathbf{r}_M(\mathbf{u}^h, p^h) = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h, p^h), \tag{2.34}$$

$$r_C(\mathbf{u}^h) = \nabla \cdot \mathbf{u}^h. \tag{2.35}$$

Considerando  $\dot{\mathbf{U}}$ ,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{p}$  os vetores nodais dos graus de liberdade respectivos a velocidade, aceleração e pressão, pode-se escrever o problema da DFC como: Encontrar  $\dot{\mathbf{U}}$ ,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{p}$  de maneira que

$$\mathbf{R}_M(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}, \tag{2.36}$$

e

$$\mathbf{R}_C(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}. \tag{2.37}$$

### 2.3.1 Parâmetros de estabilização

Considerando que nesse trabalho dois tipos de aproximações espaciais são utilizadas, uma baseada no FEM e outra baseada em IGA, adotam-se os parâmetros propostos por Takizawa, Tezduyar e Otoguro (2018) e Otoguro, Takizawa e Tezduyar (2020), que são adequados para ambas aproximações. Para essa opção é necessário definir-se inicialmente o tensor métrico do elemento:

$$\mathbf{Q} = \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right), \tag{2.38}$$

onde  $\mathbf{Q}$  representa a matriz Jacobiana e  $\boldsymbol{\xi}$  representa as coordenadas do espaço paramétrico dos elementos, no qual as funções de forma são descritas. Para que a ordem polinomial seja levada em consideração na determinação dos parâmetros de estabilização, aplica-se uma mudança de escala na matriz  $\mathbf{Q}$  conforme:

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}\mathbf{D}^{-1}. \quad (2.39)$$

onde  $\hat{\mathbf{Q}}$  é o novo tensor métrico e  $\mathbf{D}$ , para elementos finitos com funções de forma Lagrangianas, e espaço paramétrico  $-1 \leq \xi_i \leq 1$ , é definida como:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

com  $p$  representado a ordem das funções de forma em cada direção do espaço paramétrico.

Para discretização utilizando IGA adota-se:

$$\mathbf{D} = \left( \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\xi}}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right), \quad (2.41)$$

com  $\bar{\boldsymbol{\xi}}$  representando as coordenadas do chamado espaço paramétrico preferido.

Para problemas em 1D,  $\mathbf{D}$  é definido como:

$$D = \frac{\Delta \bar{\boldsymbol{\xi}}}{\min_{a=1,\dots,p} \Delta \boldsymbol{\xi}_a}, \quad (2.42)$$

onde  $\Delta \bar{\boldsymbol{\xi}}$  é o comprimento do elemento de Bézier no espaço paramétrico (espaço preferido),  $p$  é o grau polinomial das funções base e  $\Delta \boldsymbol{\xi}_a$  é:

$$\Delta \boldsymbol{\xi}_a = \frac{\Delta \bar{\boldsymbol{\xi}}}{p} \sum_{b=0}^p \left( \mathbf{C}^{-1}_{ba} - \mathbf{C}^{-1}_{ba-1} \right), \quad (2.43)$$

a matriz  $\mathbf{C}^{-1}$  é o tensor de transformação de Bézier. Para múltiplas dimensões têm-se  $\mathbf{D}_{ij} = D^i \delta_{ij}$ , com  $D^i$  o valor de  $D$  na direção  $i$ .

A partir disso, o comprimento direcional do elemento é definido como:

$$h_{RQD} = 2(\mathbf{r} \mathbf{r} : \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.44)$$

sendo  $\mathbf{r}$  o vetor direção unitário da velocidade no elemento e  $\mathbf{G}$  uma matriz auxiliar, os quais são representados respectivamente como:

$$\mathbf{r} = \frac{\nabla \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|}{\|\nabla \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\|} \quad (2.45)$$

e

$$\mathbf{G} = \hat{\mathbf{Q}}^{-T} \cdot \hat{\mathbf{Q}}^{-1}. \quad (2.46)$$

O comprimento do elemento é limitado pelos mínimos e máximos valores represen-

tados abaixo:

$$h_{min} \equiv 2 \min_r \left( (\mathbf{r} : \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}} \right), \quad (2.47)$$

$$h_{max} \equiv 2 \max_r \left( (\mathbf{r} : \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}} \right). \quad (2.48)$$

Os parâmetros de estabilização são dados por:

$$\tau_{SUPG} = \tau_{PSPG} = \left( \frac{1}{\tau_{SUGN1}^2} + \frac{1}{\tau_{SUGN2}^2} + \frac{1}{\tau_{SUGN3}^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.49)$$

$$\nu_{LSIC} = \frac{h_{RQD}^2}{\tau_{SUPG}}, \quad (2.50)$$

onde:

$$\tau_{SUGN1}^{-2} = (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) : \mathbf{G}, \quad (2.51)$$

$$\tau_{SUGN2} = \frac{\Delta t}{2}, \quad (2.52)$$

e

$$\tau_{SUGN3}^{-1} = \nu \left( \mathbf{r}_{reg} \mathbf{r}_{reg} : \mathbf{G} + (1 - \mathbf{r}_{reg}^2) 4 h_{min}^{-2} \right), \quad (2.53)$$

sendo  $\mathbf{r}_{reg}$  definido como:

$$\mathbf{r}_{reg} = \frac{\nabla \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|}{\|\nabla \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\| + \varepsilon (\|\nabla \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\|)_0}, \quad (2.54)$$

com  $\varepsilon$  uma constante pequena e  $(\|\nabla \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\|)_0$  um valor de referência. Os termos  $\tau_{SUGN1}$ ,  $\tau_{SUGN2}$  e  $\tau_{SUGN3}$  são parâmetros correspondentes aos termos convectivos, iniciais e viscosos, respectivamente.

## 2.4 Integração Temporal

Para a integração temporal das equações governantes, utiliza-se o método  $\alpha$ -generalizado. Esse método, no contexto das equações de Navier-Stokes em escoamentos incompressíveis para domínios fixos foi utilizado inicialmente por Jansen, Whiting e Hulbert (2000).

Considerando que o tempo da análise do problema é definido por um intervalo de  $[0, T]$ , o qual é particionado em subintervalos  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ , com  $t_n$  e  $t_{n+1}$  os instantes anterior e atual, respectivamente. A solução do problema consiste em: conhecida a solução nos graus de liberdade nodais ( $\dot{\mathbf{U}}$ ,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{p}$ ) no passo de tempo  $n$ , encontrar a solução no passo de tempo  $n + 1$  de forma que:

$$\mathbf{R}_M(\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}, \mathbf{U}_{n+\alpha_f}, \mathbf{p}_{n+1}) = \mathbf{0}, \quad (2.55)$$

$$\mathbf{R}_C(\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}, \mathbf{U}_{n+\alpha_f}, \mathbf{p}_{n+1}) = \mathbf{0}, \quad (2.56)$$

com:

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m} = \dot{\mathbf{U}}_n + \alpha_m (\dot{\mathbf{U}}_{n+1} - \dot{\mathbf{U}}_n), \quad (2.57)$$

$$\mathbf{U}_{n+\alpha_f} = \mathbf{U}_n + \alpha_f (\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n), \quad (2.58)$$

sendo  $\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}$  e  $\mathbf{U}_{n+\alpha_f}$  valores intermediários entre  $t_n$  e  $t_{n+1}$  do vetor aceleração e velocidade. A relação entre os valores nodais de aceleração e velocidade são calculados de acordo com fórmula discreta de Newmark (ver, por exemplo, (HUGHES, 1976)):

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta t ((1 - \gamma) \dot{\mathbf{U}}_n + \gamma \dot{\mathbf{U}}_{n+1}). \quad (2.59)$$

Os parâmetros que definem o instante intermediário, no qual as variáveis serão calculadas, são determinados de forma a proporcionarem estabilidade e precisão ao método. Seguindo a metodologia proposta por Jansen, Whiting e Hulbert (2000), uma precisão de segunda ordem é obtida desde que:

$$\gamma = 1/2 + \alpha_m - \alpha_f, \quad (2.60)$$

enquanto que a estabilidade do problema é incondicional com:

$$\alpha_m \geq \alpha_f \geq 1/2. \quad (2.61)$$

Para proporcionar a precisão de segunda-ordem de convergência e estabilidade da solução, pode-se calcular o parâmetro  $\gamma$  de acordo com Eq. 2.60 e  $\alpha_m$ ,  $\alpha_f$ , através de (HUGHES, 2000):

$$\alpha_m = \frac{1}{2} \left( \frac{3 - \rho_\infty}{1 + \rho_\infty} \right) \quad (2.62)$$

$$(2.63)$$

e

$$\alpha_f = \frac{1}{1 + \rho_\infty}. \quad (2.64)$$

O parâmetro  $\rho_\infty$  é conhecido como raio espectral da matriz de amplificação quando  $\Delta t_n \rightarrow \infty$ . Esse parâmetro controla a dissipação numérica em altas frequências realizada pelo processo de integração e está contido no intervalo de  $[0, 1]$ . Para  $\rho_\infty = 0$  a dissipação é máxima e para  $\rho_\infty = 1$  não há introdução de difusão numérica ao método.

Para a solução do sistema de equações não lineares compostas por Eq. (2.55) e Eq. (2.56) utiliza-se o método de Newton-Raphson. O método pode ser separado em duas etapas, uma etapa preditiva e outra iterativa corretiva.

Na primeira etapa, conhecida a solução em um passo de tempo  $n$ , prediz-se a solução em  $n + 1$  com as seguintes equações:

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \dot{\mathbf{U}}_n, \quad (2.65)$$

$$\mathbf{U}_{n+1}^0 = \mathbf{U}_n, \quad (2.66)$$

$$\mathbf{p}_{n+1}^0 = \mathbf{p}_n, \quad (2.67)$$

onde o índice 0 representa a iteração de número zero.

Na etapa iterativa corretiva, itera-se sobre a Eq. (2.55) e Eq. (2.56) até que elas sejam satisfeitas, considerando uma tolerância prescrita, ou até que se alcance uma quantidade máxima de iterações pré-estabelecida. Essa etapa é composta por três fases. A fase 1 consiste em determinar os valores no instante intermediário para as variáveis nodais na iteração  $i$ :

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}^i = \dot{\mathbf{U}}_n + \alpha_m (\dot{\mathbf{U}}_{n+1} - \dot{\mathbf{U}}_n), \quad (2.68)$$

$$\mathbf{U}_{n+\alpha_f}^i = \mathbf{U}_n + \alpha_f (\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n), \quad (2.69)$$

$$\mathbf{p}_{n+1}^i = \mathbf{p}_{n+1}^i. \quad (2.70)$$

Na fase 2, com os valores intermediários das variáveis nodais resolve-se o sistema linear resultante da linearização das equações Eq. (2.55) e Eq. (2.56) com respeito às variáveis de interesse  $\mathbf{p}_{n+1}$  e  $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$ :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}_M}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{n+1}} \right|_i \Delta \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i + \left. \frac{\partial \mathbf{R}_M}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} \right|_i \Delta \mathbf{p}_{n+1}^i = -\mathbf{R}_M^i, \quad (2.71)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}_C}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{n+1}} \right|_i \Delta \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i + \left. \frac{\partial \mathbf{R}_C}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} \right|_i \Delta \mathbf{p}_{n+1}^i = -\mathbf{R}_C^i. \quad (2.72)$$

Por fim, na fase 3 atualiza-se a solução através das seguintes relações:

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^{i+1} = \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i + \Delta \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i, \quad (2.73)$$

$$\mathbf{U}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{U}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{U}_{n+1}^i, \quad (2.74)$$

$$\mathbf{p}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{p}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{p}_{n+1}^i. \quad (2.75)$$

Na utilização do método  $\alpha$ -generalizado as integrais das equações Eq. (2.55) e Eq. (2.56) são avaliadas no instante  $t = t_{n+\alpha_f}$ , de forma que:

$$\int_{\Omega_t} (\cdot) d\Omega = \int_{\Omega_{t_{n+\alpha_f}}} (\cdot) d\Omega \quad (2.76)$$

$$\Omega_{t_{(n+\alpha_f)}} = \left\{ \mathbf{x}^h \mid \mathbf{x}^h(\bar{\mathbf{x}}^h, t_{(n+\alpha_f)}) = \alpha_f \mathbf{x}^h(\bar{\mathbf{x}}^h, t_{n+1}) + (1 - \alpha_f) \mathbf{x}^h(\bar{\mathbf{x}}^h, t_n) \right\}. \quad (2.77)$$

## 2.5 Método dos elementos finitos aplicado à Mecânica dos Fluidos

No contexto do método dos elementos finitos, o contínuo é decomposto em um conjunto de subdomínios chamados de elementos, que compreendem um arranjo de pontos denominados nós. As variáveis de interesse do problema, que incluem a geometria na abordagem isoparamétrica, são aproximadas pela combinação linear de um número finito de funções associadas aos nós, chamadas funções de forma, multiplicadas por variáveis chamadas parâmetros nodais.

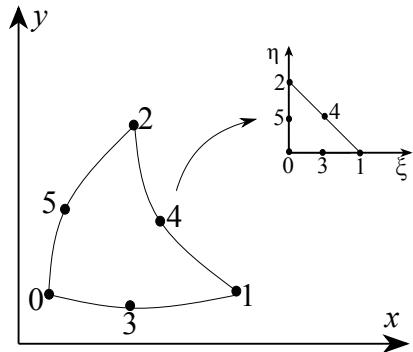
A aproximação das variáveis nodais é realizada, em geral através dos polinômios de Lagrange, sendo os parâmetros nodais iguais ao valor interpolado da respectiva variável na posição dos nós da malha de elementos finitos. A técnica de elementos finitos pode ser estudada nos diversos livros disponíveis sobre o assunto, tais como Zienkiewicz, Taylor e Nithiarasu (2005a), Reddy (2006).

Nesse trabalho são utilizadas funções de forma quadráticas do tipo polinômios de Lagrange, sendo empregados elementos isoparamétricos triangulares para o caso 2D e tetraédricos para o caso 3D. Na Fig. 2.2a e Fig. 2.2b, pode-se observar os elementos finitos 2d e 3d respectivamente bem como os espaços paramétricos adimensionais adotados para definir as funções de forma.

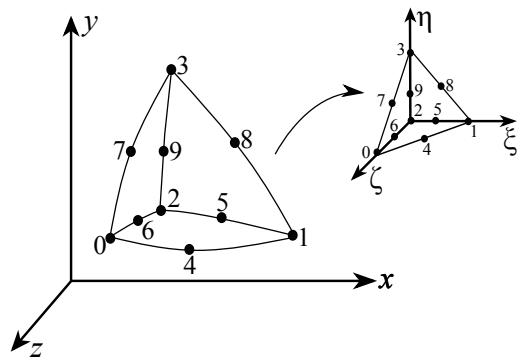
Adotar a abordagem isoparamétrica implica que a geometria do problema é descrita também pela combinação entre funções de forma e as coordenadas nodais da malha:

$$\mathbf{x}^h = \sum_{A=1}^{N_{nos}} \mathbf{x}_A(t) N_A(x), \quad (2.78)$$

permitindo desta forma a representação de formas curvas.



(a) Elemento Finito 2d.



(b) Elemento Finito 3d.

Figura 2.2 – Elementos Finitos: representação espacial e paramétrica

### 2.5.1 Implementação Computacional

O Algoritmo que descreve a implementação computacional tanto de problemas utilizando o método dos elementos finitos, quanto para problemas utilizando a análise Isogeométrica, é apresentado no Alg. 1.

---

#### Algoritmo 1 Algoritmo para problemas de dinâmica dos fluidos computacional

---

- 1: **para** o passo de tempo 0 até T **faça**
- 2:     *i* = 0;
- 3:     Predição da solução: aplicação das Eq. (2.65), Eq. (2.66) e Eq. (2.67);
- 4:     **enquanto** ( $\epsilon <$  tolerância) **faça**
- 5:         *i*++;
- 6:         Interpolação das variáveis do problema: aplicação da Eq. (2.68), Eq. (2.69) e Eq. (2.70);
- 7:         Cálculo do incremento nas variáveis do problema:  $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$  e  $\mathbf{p}_{n+1}$  de acordo com as Eq. (2.71) e Eq. (2.72);
- 8:         Atualização da solução: calculadas de acordo com Eq. (2.73), Eq. (2.74) e Eq. (2.75).
- 9:         Cálculo do erro:

$$\epsilon = \|\mathbf{R}_M^i\|_{L^2} \quad (2.79)$$

- 10:         **fim enquanto**

- 11:         **fim para**

---

## 2.6 Verificação e Aplicações

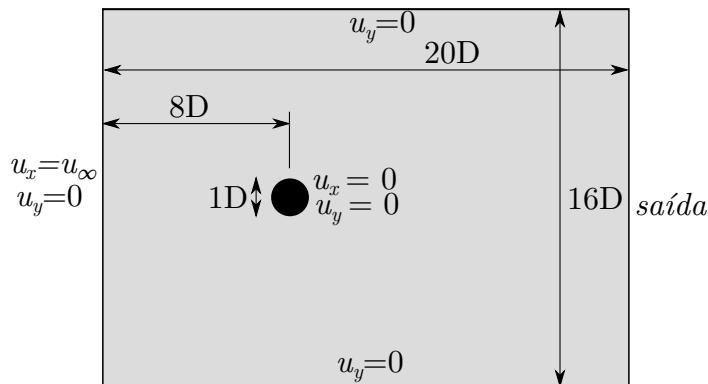
Para a verificação dos códigos baseados no método dos elementos finitos, adotam-se 2 exemplos muito populares nas bibliografias: Escoamento sobre um cilindro 2D e o problema da cavidade quadrada 3D, os quais são apresentados na subseções sequentes.

### 2.6.1 Escoamento sobre um cilindro - 2D

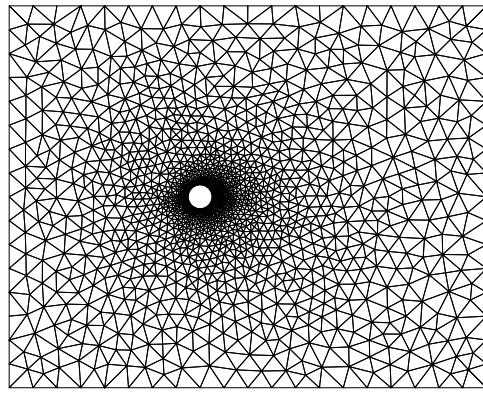
O estudo do problema de um escoamento sobre um cilindro 2D teve como principal intuito a análise dos coeficientes aerodinâmicos medidos ao longo do tempo e verificar consequentemente se o modelo é capaz de reproduzir os fenômenos relacionados à formação e desprendimento de vórtices característicos desse problema. Para isso, diferentes números de Reynolds (Re) foram estudados,  $Re = 40, 100$  e  $1000$ , os quais são calculados de acordo com a seguinte equação:

$$Re = \frac{\rho L \|\mathbf{u}_\infty\|}{\mu} = \frac{L \|\mathbf{u}_\infty\|}{\nu}, \quad (2.80)$$

com  $L$  a dimensão característica do problema, sendo nesse caso o diâmetro do cilindro, e  $\nu$  a viscosidade cinemática do fluido.



(a) Geometria e condições de contorno.



(b) Discretização espacial.

Figura 2.3 – Cilindro 2D: Geometria, condições de contorno e malha de elementos finitos.

A geometria e condições de contorno são apresentadas na Fig. 2.3a. Como pode-se observar trata-se de um domínio retangular, parametrizado em função do diâmetro do cilindro, com um perfil constante de velocidade na entrada e condição de parede lisa nas paredes superior e inferior (velocidade normal à parede  $u_n = 0$ ). No contorno denominado como *saída*, não se conhece o comportamento do escoamento, desta forma, determina-se sua posição no domínio computacional a uma distância grande o suficiente de maneira a não interferir no comportamento do escoamento. Além disso, prescreve-se uma condição de contorno dita artificial, que consiste em  $\sigma \mathbf{n} = 0$ .

Na Fig. 2.3b pode-se observar a malha não-estruturada de elementos finitos utilizada para esse problema, composta por 3122 elementos triangulares quadráticos e 6376 nós. O problema foi simulado para um velocidade de entrada  $u_\infty = 1,0$ ,  $\rho = 1,0$ ,  $\Delta t = 0,05$ , e  $\rho_\infty = 0,5$ .

Para o cálculo dos coeficientes aerodinâmicos é necessário definir-se primeiramente as forças de arrasto - horizontal ( $F_D$ ) e de sustentação - vertical ( $F_L$ ), que são induzidas por tensões desviadores e hidrostáticas e são calculadas pelas seguintes equações:

$$F_D = \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\sigma}_{1j} n_j d\Gamma_c, \quad (2.81)$$

$$F_L = \int_{\Gamma_c} \sigma_{2j} n_j d\Gamma_c, \quad (2.82)$$

nas quais o símbolo  $\Gamma_c$  representa o contorno do cilindro e  $n$  é o vetor normal à essa superfície. Os coeficientes de arrasto e sustentação são definidos respectivamente por:

$$C_D = \frac{F_D}{0,5\rho\|\mathbf{u}\|^2 L}, \quad (2.83)$$

$$C_L = \frac{F_L}{0,5\rho\|\mathbf{u}\|^2 L}, \quad (2.84)$$

Devido ao fenômeno de desprendimento de vórtices que ocorre a partir de determinado número de Reynolds do escoamento, é usual determinar-se a frequência deste fenômeno através do número adimensional de Strouhal (St), dado por:

$$St = \frac{f_V L}{\|\mathbf{u}\|}, \quad (2.85)$$

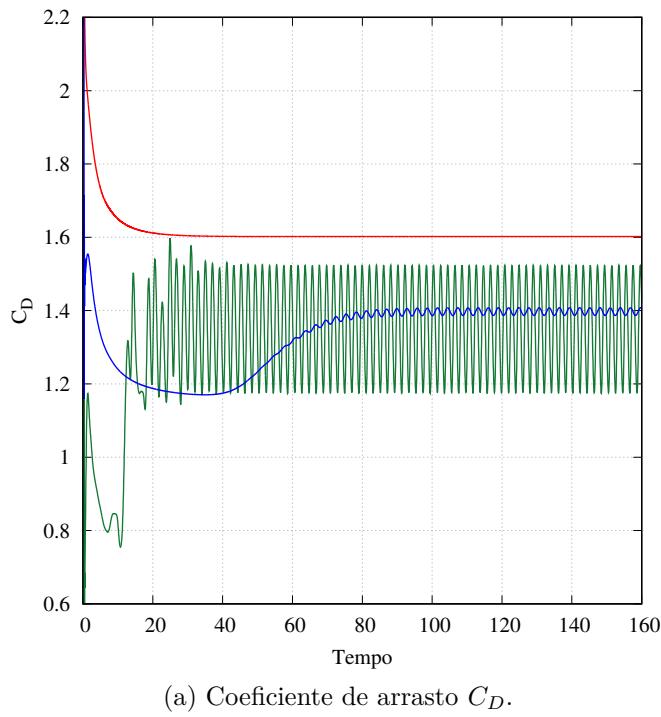
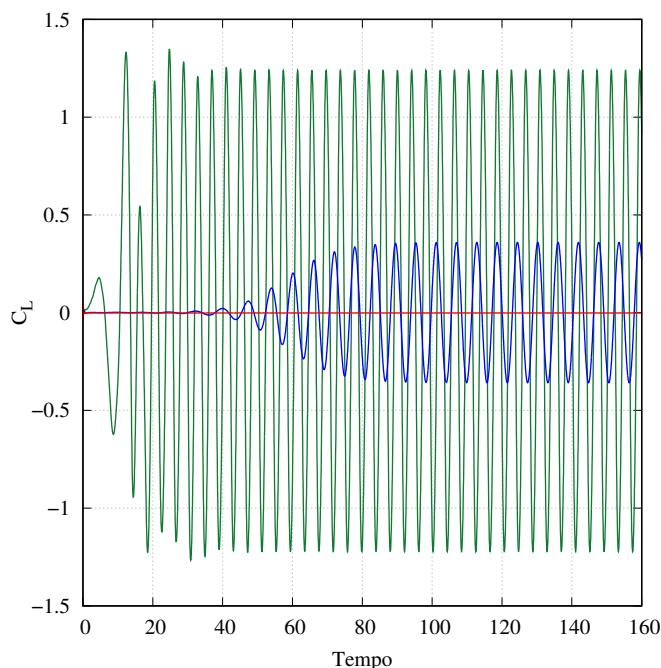
com  $f_V$  sendo a frequência de desprendimento dos vórtices.

Como pode-se observar na Fig. 2.4 para  $Re = 40$ , os coeficientes de arrasto e de sustentação, após o escoamento entrar em fase estacionária, se mantém constantes ao longo de todo o tempo de análise. Isso ocorre, visto que para Reynolds entre 5 à 50, aproximadamente, formam-se dois vórtices simétricos e estacionários na região logo após o cilindro. Posteriormente, o par de vórtices se quebra e passa existir a chamada esteira de Von Karmán, que ocorre devido à formação de vórtices de maneira alternada entre as regiões superior e inferior do cilindro, o que pode ser notado também na Fig. 2.4 para  $Re = 100$  e  $Re = 1000$ . Os valores do coeficiente de Strouhal, para  $Re = 100$  e  $Re = 1000$ , foram de 0,1716 e 0,2454 respectivamente. Os valores obtidos para os coeficientes aerodinâmicos foram os esperados para o problema em questão (ver, por exemplo, Tonon (2016), Henderson (1997)).

Nas Fig. 2.5a e Fig. 2.5b podem ser observados os campos de pressão e velocidade em um tempo  $t = 11,5$  da análise para  $Re = 100$ . Pode-se notar nessas imagens, a formação e os desprendimentos de vórtices na esteira de Von Karmán, característico do escoamento para o número de Reynolds simulado.

## 2.6.2 Cavidade Quadrada - 3D

Para a verificação do código 3D utilizando elementos finitos o problema de uma cavidade quadrada com velocidade prescrita  $u_\infty$  em sua parede superior foi estudado. A geometria do problema em questão e o conjunto de suas condições de contorno são apresentadas na Fig. 2.6a. As paredes da cavidade são rígidas, com paredes laterais e do fundo com condição de aderência, e adicionalmente, velocidade  $u_z = 0$ , condição de

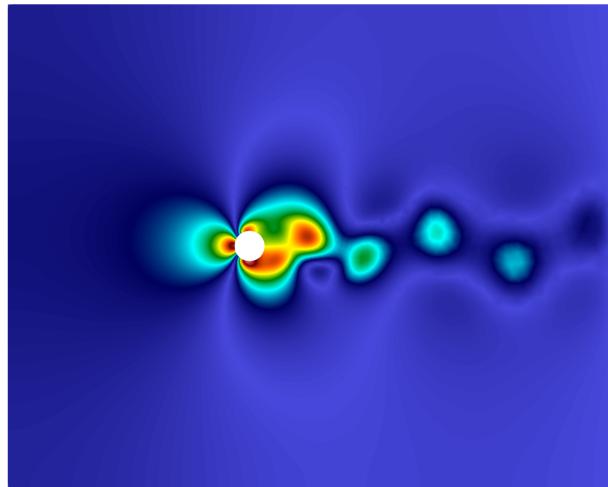
(a) Coeficiente de arrasto  $C_D$ .(b) Coeficiente de sustentação  $C_L$ .

$Re\ 40$  —————  $Re\ 100$  —————  $Re\ 1000$  —————

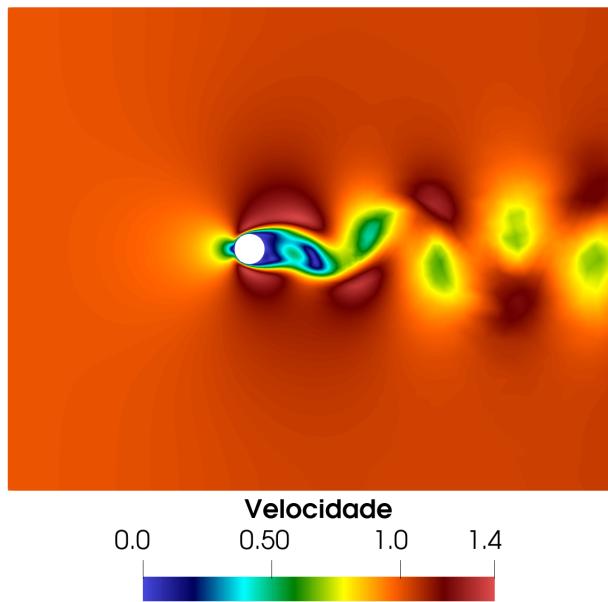
Figura 2.4 – Cilindro 2D: Coeficientes aerodinâmicos.

parede lisa, nas paredes das faces frontal e posterior. A cavidade possui na direção  $z$  uma espessura de 0,03. A discretização espacial em elementos finitos utilizada é apresentada na Fig. 2.6b, a qual consiste em 7252 elementos tetraédricos quadráticos e 14727 nós.

O problema é estudado para os números de Reynolds: 100, 400 e 1000. O número



(a) Campo de pressão



(b) Campo de velocidade

Figura 2.5 – Cilindro 2D: Campos de pressão e de velocidade para um escoamento com  $Re = 100$

de Reynolds foi calculado de acordo com Eq. (2.80), com  $L$  equivalente ao comprimento do lado da cavidade. O problema foi simulado para uma velocidade na parede superior de  $\mathbf{u}_\infty = 1,0$ ,  $\rho = 1,0$ ,  $\Delta t = 0,05$ , e  $\rho_\infty = 0$ , sendo a viscosidade do fluido variada de modo a alterar o número de Reynolds. A simulação foi mantida até que se atingiu o estado estacionário de escoamento.

Os perfis de velocidade adimensionalizados ( $\mathbf{u}/\mathbf{u}_\infty$ ) horizontal e vertical ao longo de duas linhas centrais nas direções  $x$  e  $y$  posicionadas no centro da espessura na direção  $z$  da cavidade são apresentados na Fig. 2.7 e comparados com a referência de Ghia, Ghia e Shin (1982).

Os campos de velocidade e de pressão são apresentados nas figuras Fig 2.8 e 2.9

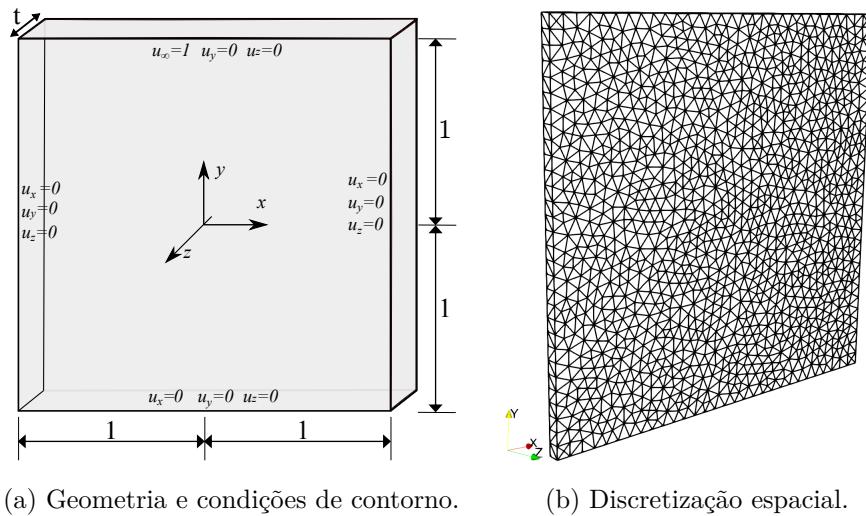


Figura 2.6 – Cavidade quadrada: Geometria, condições de contorno e malha de elementos finitos.

respectivamente. Ressalta-se que para a solução do problema, por se tratar de um problema com todos os contornos com condição de Dirichlet impostas, a pressão torna-se indefinida. Por esse motivo, prescreveu-se uma pressão  $p = p_{ref} = 0$  no canto superior direito da cavidade.

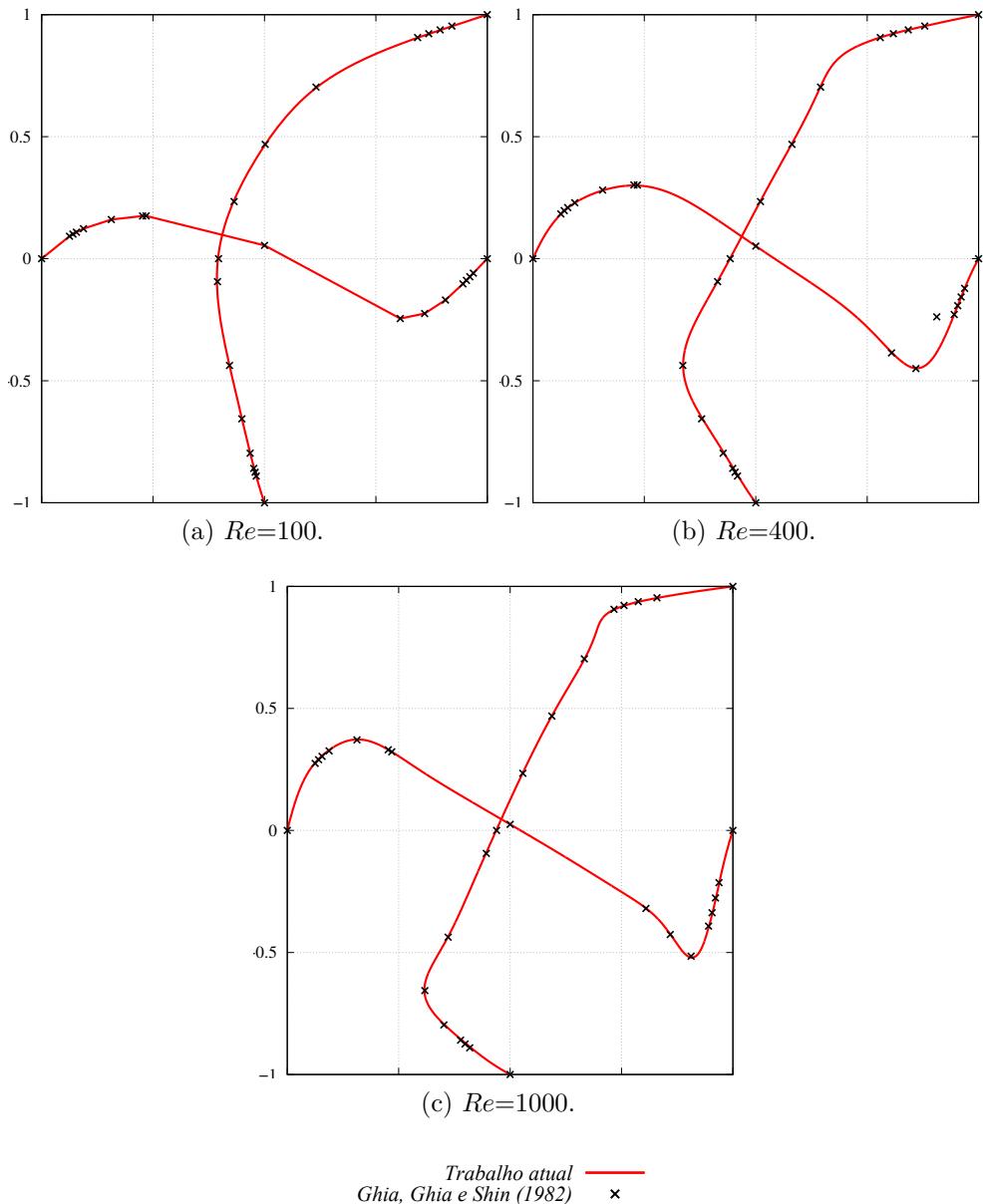


Figura 2.7 – Cavidade quadrada: Perfis de velocidade adimensionais nas direções  $x$  e  $y$ .

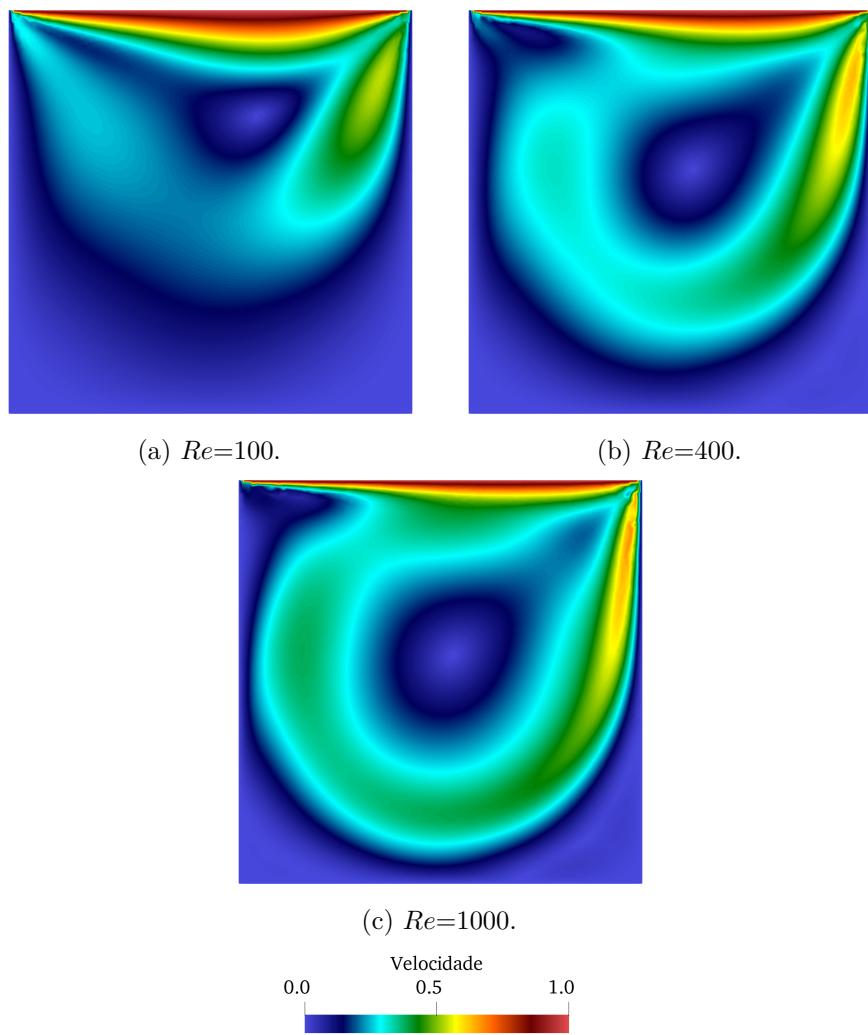


Figura 2.8 – Cavidade quadrada: campos de velocidade.

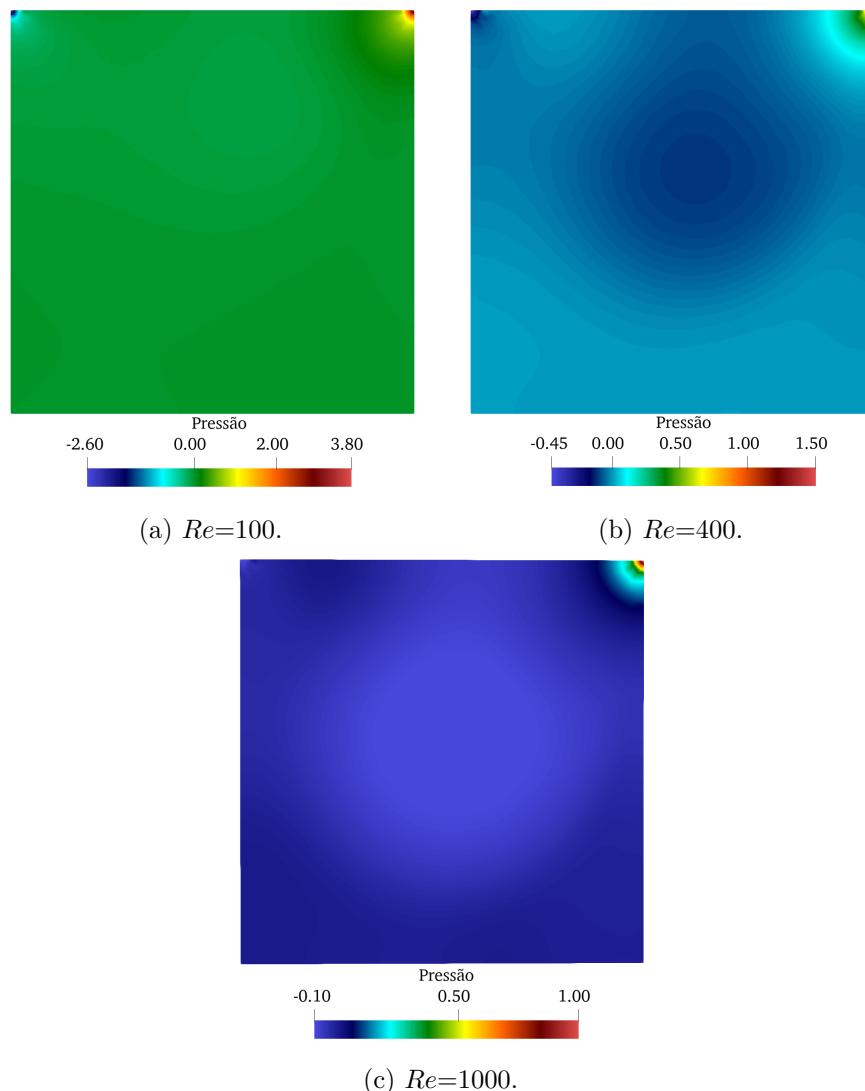


Figura 2.9 – Cavidade quadrada: campos de pressão.



## CAPÍTULO

## 3

# ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA APLICADA À MECÂNICA DOS FLUIDOS

---



---

A Análise Isogeométrica é uma técnica numérica introduzida por (HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005) para obtenção de soluções aproximadas de equações diferenciais. O método pode ser entendido como uma generalização do método dos elementos finitos clássicos a partir do uso de funções base especiais.

Na Análise Isogeométrica, as funções base escolhidas na discretização da geometria do problema e de suas variáveis são aquelas utilizadas nos sistemas CAD, sendo as funções do tipo NURBS as mais aplicadas (ver, por exemplo, Piegl e Tiller (1996)). O grande impulso para o desenvolvimento da técnica foi proporcionar a integração entre a engenharia de *design*, com modelos baseado em CAD (*Computed Aided Design*), e as simulações numéricas, com modelos principalmente baseados no MEF, de forma que ambas trabalhem com somente um modelo geométrico.

Além disso, a IGA se apresenta vantajosa por propiciar a representação exata de muitas geometrias comuns, como seções cônicas, e por possuir muitos algoritmos eficientes e estáveis para geração de objetos NURBS. Ressalta-se que as funções NURBS apresentam muitas características matemáticas que as tornam uma boa opção a ser aplicada, como por exemplo, suavidade das funções, que apresentam continuidade  $p - 1$  sobre a interface dos elementos, sendo  $p$  o grau das funções, boa aproximação e habilidade de refinamento através da inserção de *knots*, que são coordenadas do espaço paramétrico onde as funções são definidas.

Nesse capítulo apresenta-se uma breve introdução sobre a IGA, o processo de

obtenção das geometrias NURBS e seu uso na descrição das variáveis discretas nas simulações numéricas. Por fim, são apresentados alguns exemplos de sua aplicação em problemas da DFC.

### 3.1 Noções Gerais de IGA

No contexto do MEF isoparamétrico tem-se apenas uma noção de malha e de elemento, com os elementos finitos representados tanto no espaço físico quanto no espaço paramétrico. Os elementos são definidos por suas coordenadas nodais, com os graus de liberdade do problema os valores interpolados das funções base nesses nós.

Dentro da IGA têm-se duas noções de malha: uma malha de pontos de controle e uma malha física. A malha de pontos de controle é muito semelhante a uma malha de elementos finitos, entretanto, ela não define a geometria, ela é apenas um esqueleto que controla o formato da geometria (ver Fig. 3.1), devido ao fato de que as funções de forma baseadas em *B-Splines* não são necessariamente interpolatórias. Assim, os graus de liberdade nodais do problema são definidos sobre os pontos de controle, e não coincidem necessariamente com a forma representada.

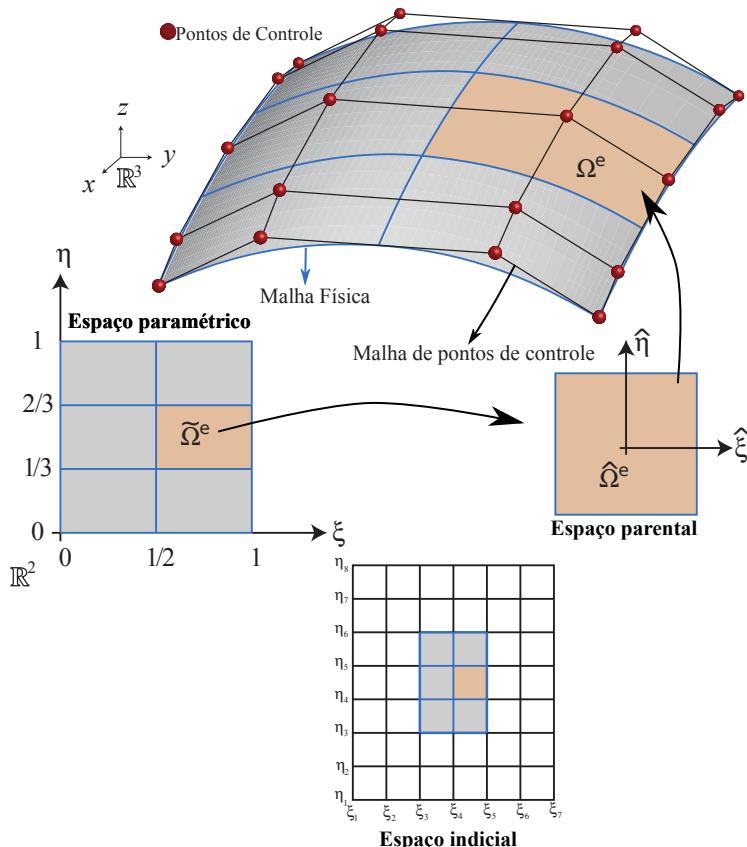


Figura 3.1 – NURBS: espaço paramétrico, espaço indicial, espaço parental, malha de pontos de controle e malha física. Fonte: Adaptado de Cottrell, Hughes e Bazilevs (2009)

A malha física representa a geometria discretizada, e dentro da malha física podem ainda ser definidos dois tipos de elementos, um macro-elemento, denominado de *patch*, e o *knot span*, que é o equivalente a um elemento finito e será denominado célula ao longo deste texto. Cada *patch* é composto por um conjunto de células. Muitas geometrias simples podem ser discretizadas apenas com um *patch*, entretanto, a depender da complexidade da mesma, se torna necessário o uso de um conjunto de *patches*. As células são representações geométricas de linhas, superfícies e volumes nos espaços físicos unidimensional, bidimensional e tridimensional respectivamente.

Cada *patch* e suas respectivas células possuem uma representação ainda no espaço paramétrico, que é o espaço onde as funções base são definidas. O espaço paramétrico, para os casos unidimensionais, é definido por um *knot vector*, aqui denominado de vetor de *knots*, que é um conjunto de coordenadas paramétricas. As células são constituídos pelo espaço entre duas coordenadas paramétricas ou dois *knots*. O espaço onde se representam todos as células ou *knot spans*, inclusive os nulos (quando mais de um *knot* ocupa a mesma posição), é chamado de espaço indicial.

Por fim, na análise isogeométrica conta-se ainda com o espaço parental, que é o espaço de integração numérica das funções base, em geral, definido de forma adimensional de -1 a 1 dentro de uma célula. Na Fig. 3.1 pode-se observar os espaços relatados para uma superfície 3D construída por funções base quadráticas e apenas um *patch*.

## 3.2 Representação geométrica utilizando NURBS

### 3.2.1 Vetor de *knots*

As funções *B-Splines*, que são utilizadas na construção das NURBS, são definidas em um espaço paramétrico que é comum a um conjunto de células ou *patch*. Um vetor de *knots* em uma dimensão é um conjunto não decrescente de coordenadas no espaço paramétrico definido como:  $\Xi = [\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n+p+1}]$ , com  $\xi_i \in \mathbb{R}$  representando a coordenada paramétrica do *knot*  $i$ ,  $n$  é o número de funções base na direção paramétrica e  $p$  o grau das mesmas.

Um *knot* pode possuir multiplicidade maior do que um, e esse fato, implica em importantes mudanças nas funções base, que serão tratadas posteriormente. Os vetores de *knots* conhecidos como abertos, são frequentemente utilizados nas literaturas de CAD, e caracterizam-se por ter a primeira e a última coordenada paramétrica repetidas  $p + 1$  vezes. Este fato garante que as funções unidirecionais sejam interpolatórias nos extremos do espaço paramétrico, proporcionando por exemplo a homogeneidade com respeito às condições de contorno essenciais.

### 3.2.2 B-Splines

As funções *B-Splines* são definidas a partir de um vetor de *knots*. As funções podem ser obtidas recursivamente, sendo que para  $p = 0$  são escritas através da seguinte relação:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (3.1)$$

enquanto que para funções com  $p \geq 1$  são definidas como:

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi). \quad (3.2)$$

Na Fig.3.2, pode-se observar funções *B-Splines* quadráticas construídas sobre o vetor de *Knots* aberto  $\Xi = [0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4]$ . Pode-se observar que, devido à repetição dos *Knots*  $p + 1$  vezes nos extremos do vetor de *knots*, as funções são interpoladoras nesses pontos, por outro lado a base passa a ser não uniforme. Além disso, devido o *knot*  $\xi = 3$  ter multiplicidade igual a 2, nota-se a perda da ordem de continuidade da função de forma nessa coordenada, passando a não apresentar derivada contínua sobre o *knot*. A regra geral para a determinação da continuidade das funções é definida então como o grau das função ( $p$ ) menos o número de vezes que uma coordenada paramétrica se repete.

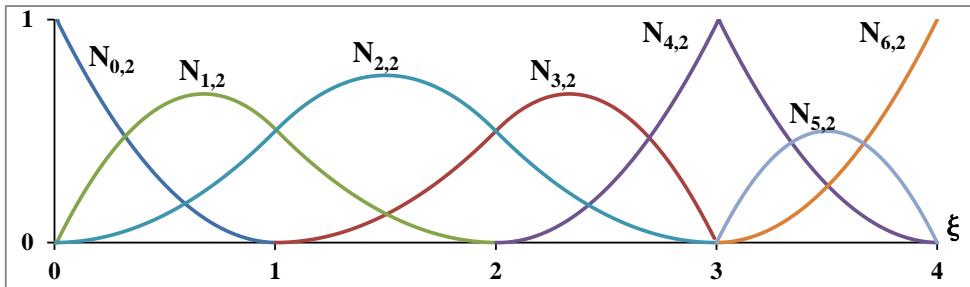


Figura 3.2 – *B-Splines*

As principais propriedades das funções *B-Splines* são:

- **Partição da Unidade:**  $\sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) = 1$ ;
- **Positividade:** Todas as funções base são positivas, ou seja,  $N_{i,p} \geq 0, \forall \xi$ ;
- **Suavidade:** função de ordem  $p$  é, em geral,  $p - 1$  vezes contínua no contorno das células;
- **Suporte Compacto:** O suporte de cada  $N_{i,p}$  está contido no intervalo  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ , ou seja, em cada célula, apenas  $p + 1$  funções são não nulas.

A derivada de uma função de forma *B-Spline* é calculada de acordo com a seguinte equação recursiva:

$$N_{i,p}^d = p \left( \frac{N_{i,p-1}^{(d-1)}}{\xi_{i+p} - \xi_i} - \frac{N_{i+1,p-1}^{(d-1)}}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \right), \quad (3.3)$$

sendo  $d$  a  $d$ -ésima derivada da função  $N_{i,p}$ .

Uma curva *B-Spline* é construída a partir da combinação linear entre funções base e um conjunto de pontos de controle. Considerando um conjunto de  $n$  funções base,  $N_{i,p}$ , com  $i = 0, 1, \dots, n$  e pontos de controle  $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}$  e  $i = 0, 1, \dots, n$ , uma curva polinomial por partes *B-Spline* unidimensional é definida como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{x}(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{B}_i, \quad (3.4)$$

com  $x$ ,  $y$  e  $z$  sendo as coordenadas físicas de um espaço cartesiano. Utilizando as funções *B-Splines* apresentadas na Fig.3.2 e uma malha de pontos de controle qualquer, obtém-se a curva apresentada na Fig.3.3a. Na Fig.3.3b pode-se observar as células físicas equivalentes a essa combinação.

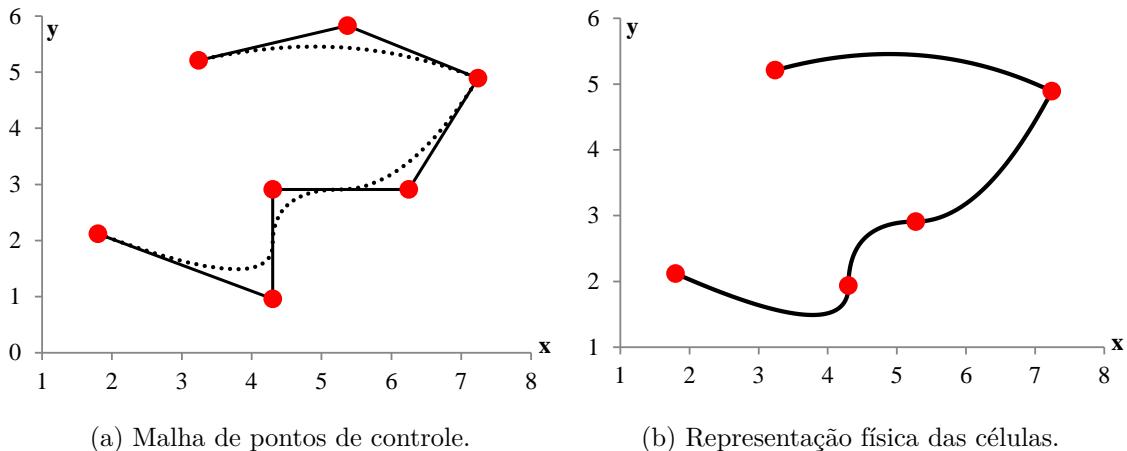


Figura 3.3 – Curva *B-Spline*

A partir da Fig.3.3a pode-se constatar que a curva *B-Spline* interpola o primeiro e o último ponto de controle, que é uma característica das curvas construídas com funções descritas a partir de vetores de nós abertos. Adicionalmente nota-se que, devido à multiplicidade do *knot* de coordenada paramétrica 3, existe um ponto de controle intermediário também interpolando a curva. Coordenadas paramétricas com multiplicidade igual ou superior ao grau do polinômio  $p$  resultam em pontos de controle interpoladores. Por fim, observa-se ainda, que a multiplicidade de  $\xi = 3$  resultou na perda da ordem de continuidade da curva sobre esse ponto, que passa a não ter derivada contínua.

Conforme observado Fig.3.3a, muitas das características das curvas *B-Splines* são consequências das propriedades das funções *B-splines*. Outra importante propriedade dessas curvas é a *Transformação Afim*, significando que uma transformação na curva é obtida se aplicarmos uma transformação afim aos pontos de controle. Devido ao suporte

compacto das funções base, as curvas *B-Splines* possuem característica denominada de *localidade*, que significa que, movendo-se um ponto de controle, afeta-se não mais do que  $p + 1$  células na curva.

Uma superfície *B-spline* é obtida analogamente. Dado uma rede de pontos de controle  $\mathbf{B}_{i,j}$ , com  $i = 0, 1, \dots, n$  e  $j = 0, 1, \dots, m$ , e vetores de *knots*  $\Xi = [\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{p+n+1}]$ ,  $\mathcal{H} = [\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{q+m+1}]$ , a superfície é obtida através do produto tensorial entre  $n$  funções unidireccionais  $N_{i,p}$  e  $m$  funções unidireccionais  $M_{j,q}$  da seguinte forma:

$$\mathbf{S} = \mathbf{x}(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) \mathbf{B}_{i,j}, \quad (3.5)$$

onde  $q$  representa o grau das funções na direção paramétrica  $\eta$ . Devido à natureza do produto tensorial, as superfícies *B-Splines* herdam as características citadas anteriormente para as curvas, sendo o suporte, por exemplo, de uma função bivariada  $\hat{N}_{i,j;p,q}(\xi, \eta) = N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta)$  equivalente à:  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+q+1}]$

Por fim, um sólido *B-Splines* é obtido através do produto tensorial entre funções unidireccionais  $N_{i,p}$ ,  $M_{j,q}$ ,  $L_{k,r}$ , construídas sobre os vetores de *knots*  $\Xi = [\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{p+n+1}]$ ,  $\mathcal{H} = [\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{q+m+1}]$  e  $\mathcal{Z} = [\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{l+r+1}]$  respectivamente, e um conjunto de pontos de controle  $\mathbf{B}_{i,j,k}$  com  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ ,  $k = 0, 1, \dots, l$ , da seguinte forma:

$$\mathbf{T} = \mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta) \mathbf{B}_{i,j,k}, \quad (3.6)$$

na qual  $l$  e  $r$  representam o número de funções e o grau das funções na direção paramétrica  $\zeta$ . Um sólido *B-spline* herda as características das respectivas curvas que o deram origem. Além disso, o suporte de uma função trivariada  $\hat{N}_{i,j,k;p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) = N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta)$  está contido no intervalo  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+q+1}] \times [\zeta_k, \zeta_{k+r+1}]$ .

### 3.2.3 *B-Splines não-uniformes racionais e análise isogeométrica*

Uma entidade NURBS no  $\mathbb{R}^d$  pode ser entendida, de ponto de vista geométrico, como a projeção transformativa de uma entidade *B-Spline* no  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Geometrias cônicas podem ser construídas exatamente pela projeção transformativa de curvas por partes quadráticas (para maiores detalhes sobre projeção transformativa, ver Farin (1999)). Na Fig. 3.4, apresenta-se uma curva NURBS  $\mathbf{C}(\xi)$ , que representa, de forma exata, uma circunferência, sendo essa obtida a partir da projeção de uma curva *B-Spline*  $\mathbf{C}^w(\xi)$ .

Matematicamente, uma função NURBS é obtida pela racionalização de uma função *B-Spline*. A racionalização dessa função ocorre através da razão entre dois polinômios. Uma função racional NURBS ( $R$ ) é construída através da seguinte expressão:

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{\hat{i}=0}^n N_{\hat{i},p}(\xi) w_{\hat{i}}} \quad (3.7)$$

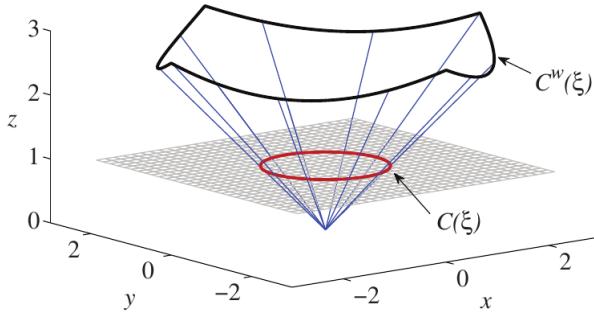


Figura 3.4 – Projeção transformativa para obtenção circunferência. Fonte: Cottrell, Hughes e Bazilevs (2009)

onde  $w_i$  e  $w_{\hat{i}} \in \mathbb{R}$ , com  $i = \hat{i} = 0, 1, \dots, n$ , correspondem aos pesos relativos as funções  $N_{i,p}(\xi)$  e  $N_{\hat{i},p}(\xi)$  respectivamente.

A  $d$ -ésima derivada de  $R_i$  (onde suprimiu-se o índice  $p$  para facilitar a representação), é obtida da seguinte forma:

$$R_i^d(\xi) = \frac{N_i^d(\xi)w_i - \sum_{l=1}^d \left[ \binom{d}{l} \sum_{j=1}^n N_j^l(\xi)w_j R_i^{d-l}(\xi) \right]}{\sum_{j=0}^n N_j(\xi)w_j}, \quad (3.8)$$

em que:

$$\binom{d}{l} = \frac{d!}{l!(d-l)!}. \quad (3.9)$$

Uma curva NURBS é obtida por:

$$\mathbf{C} = \mathbf{x}(\xi) = \sum_{i=0}^n R_i^p(\xi) \mathbf{B}_i, \quad (3.10)$$

sendo os pesos selecionados de maneira a se obter a geometria desejada. Analogamente uma superfície NURBS é obtida através das seguintes relações:

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{\hat{i}=0}^n \sum_{\hat{j}=0}^m N_{\hat{i},p}(\xi)M_{\hat{j},q}(\eta)w_{\hat{i},\hat{j}}}, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{x}(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) \mathbf{B}_{i,j}, \quad (3.12)$$

com  $w_{i,j}$  e  $w_{\hat{i},\hat{j}} \in \mathbb{R}$ , sendo  $i = \hat{i} = 0, 1, \dots, n$  e  $j = \hat{j} = 0, 1, \dots, m$ , correspondem aos pesos relativos às funções  $(N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta))$  e  $(N_{\hat{i},p}(\xi)M_{\hat{j},q}(\eta))$  respectivamente. Por fim, um sólido NURBS é obtido por:

$$R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)L_{k,r}(\zeta)w_{i,j,k}}{\sum_{\hat{i}=0}^n \sum_{\hat{j}=0}^m \sum_{\hat{k}=0}^l N_{\hat{i},p}(\xi)M_{\hat{j},q}(\eta)L_{\hat{k},r}(\zeta)w_{\hat{i},\hat{j},\hat{k}}}, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{B}_{i,j,k}, \quad (3.14)$$

onde  $w_{i,j,k}$  e  $w_{\hat{i},\hat{j},\hat{k}} \in \mathbb{R}$ , sendo  $i = \hat{i} = 0, 1, \dots, n$ ,  $j = \hat{j} = 0, 1, \dots, m$  e  $k = \hat{k} = 0, 1, \dots, l$ , cor-

respondem aos pesos relativos às funções  $(N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta))$  e  $(N_{\hat{i},p}(\xi) M_{\hat{j},q}(\eta) L_{\hat{k},r}(\zeta))$  respectivamente.

Na aplicação da IGA, as funções tentativa para velocidade e pressão, e as funções peso associadas a elas, apresentadas nas Eq. (2.8) à Eq. (2.31) como  $N$ , são equivalentes à  $R_i^p(\xi)$ ,  $R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta)$  e  $R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi, \eta, \zeta)$  para os casos unidimensional, bidimensional e tridimensional respectivamente. E a geometria é representada pelas Eq. (3.10), Eq. (3.12) e Eq. (3.14) dependendo da dimensão do problema em análise.

A integração numérica nas células é realizada através da quadratura Gaussiana. Considerando o domínio paramétrico de uma célula  $\tilde{\Omega}^e$  e o domínio parental  $\hat{\Omega}^e$  apresentados na Fig.3.1, definidos respectivamente em um espaço tridimensional pelas coordenadas  $\xi(\xi, \eta, \zeta)$  e  $\hat{\xi}(\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta})$ , a matriz jacobiana do mapeamento do espaço físico, com coordenadas  $\mathbf{x}(x, y, z)$ , para o espaço de quadratura, é definida por:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\hat{\xi}} = \frac{d\mathbf{x}}{d\xi} \frac{d\xi}{d\hat{\xi}} \quad (3.15)$$

O primeiro termo à direita da igualdade da Eq. (3.15) é calculado a partir das derivadas de Eq. (3.10), Eq. (3.12) e Eq. (3.14) e o segundo termo, considerando a célula  $\tilde{\Omega}^e = [\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}] \times [\zeta_k, \zeta_{k+1}]$ , calcula-se  $\xi, \eta, \zeta \in \tilde{\Omega}^e$  a partir de  $\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta} \in \hat{\Omega}^e$  através das seguintes relações:

$$\xi = \xi_i + (\hat{\xi} + 1) \left( \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{2} \right), \quad (3.16)$$

$$\eta = \eta_i + (\hat{\eta} + 1) \left( \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{2} \right) \quad (3.17)$$

e

$$\zeta = \zeta_i + (\hat{\zeta} + 1) \left( \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_i}{2} \right). \quad (3.18)$$

### 3.3 Verificação e aplicações

Para aplicação da IGA em problemas da DFC seguiu-se o mesmo procedimento matemático descrito ao longo do Cap. ??, sendo que a implementação computacional seguiu o roteiro apresentado no Alg. 1. Os exemplos escolhidos para a verificação do código computacional foram o escoamento sobre um cilindro 3D e o problema de escoamento sobre um canal com degrau utilizando células 3D. Os resultados obtidos são apresentados nas seções subsequentes.

#### 3.3.1 Escoamento sobre um cilindro - 3D

Na geração da geometria NURBS, correspondente ao problema do escoamento sobre um cilindro, utilizou-se um código previamente desenvolvido pela estudante durante

seu mestrado (TONON, 2016). Por tratar-se de uma geometria de pequena complexidade, pôde-se gerá-la com um único *patch*, o qual é composto por um cubo com um cilindro inserido em seu centro. O processo de geração da malha, simplificadamente, consiste em se escolher vetores de *knots*, pontos de controle, e pesos adequados para a descrição de tal geometria.

O código previamente desenvolvido, baseia-se na quantidade mínima de pontos de controle necessários para gerar uma circunferência completa (ver Fig. 3.5a). Para a obtenção exata de uma circunferência utilizam-se funções quadráticas e o vetor de *knots* na direção paramétrica  $\xi$  inicial é composto por:  $\Xi = [0, 0, 0, 1/4, 1/4, 1/2, 1/2, 3/4, 3/4, 1, 1, 1]$ . A posição dos pontos de controle da circunferência e seus respectivos pesos foram obtidos de acordo com Piegl e Tiller (1996).

A obtenção da curva respectiva ao quadrado, que é descrita no espaço paramétrico correspondente a direção  $\xi$ , é consequência das escolhas realizadas para gerar a circunferência, logo, a curva possui o mesmo vetor de *knots* e funções quadráticas. Os pontos de controle para a formação do quadrado foram posicionados, no espaço físico, de forma a ser obtida a dimensão requerida à seção transversal quadrada que compõe a geometria do cubo, e de forma que os mesmos ficassem alinhados com os pontos de controle da circunferência na direção radial. Os pesos respectivos ao pontos de controle do retângulo são unitários. Na Fig. 3.5a pode-se observar a posição dos pontos de controle respectivos à circunferência e ao quadrado e as curvas resultantes desta discretização em linha vermelho pontilhado.

Na sequência o código realiza o procedimento de refinamento por inserção sucessiva de *knots* no vetor de *knots*. O algoritmo utilizado para este procedimento pode ser encontrado em Piegl e Tiller (1996). Na Fig. 3.5b apresenta-se um exemplo de pontos de controle gerados após a inserção de um novo *knot* no centro de cada *knot span* do espaço paramétrico inicial. A quantidade de *knots* a ser inserida depende da discretização necessária a análise numérica.

Para a obtenção de uma seção transversal da geometria em questão, gera-se uma superfície a partir da discretização na direção  $\eta$  do espaço paramétrico. O código utiliza um vetor de *knots* aberto, com os *knots* distribuídos uniformemente, e funções de forma quadráticas. Os pontos de controle são distribuídos radialmente no espaço físico através de uma progressão geométrica unidirecional e seus pesos são determinados a partir de uma interpolação linear entre os pesos dos pontos de controle da circunferência e os pontos do quadrado. A quantidade mínima de pontos de controle respectiva à direção  $\eta$  é de  $q + 1$  pontos, sendo a quantidade final definida em função da análise numérica. Na Fig. 3.3.1, apresenta-se um exemplo de uma rede de pontos de controle, obtida a partir das curvas apresentadas em Fig. 3.5b com 9 pontos de controle na direção  $\eta$ . Na figura em questão omitiu-se a nomenclatura dos pontos de controle intermediários às curvas da circunferência e do quadrado para evitar a sobreposição da nomenclatura na figura.

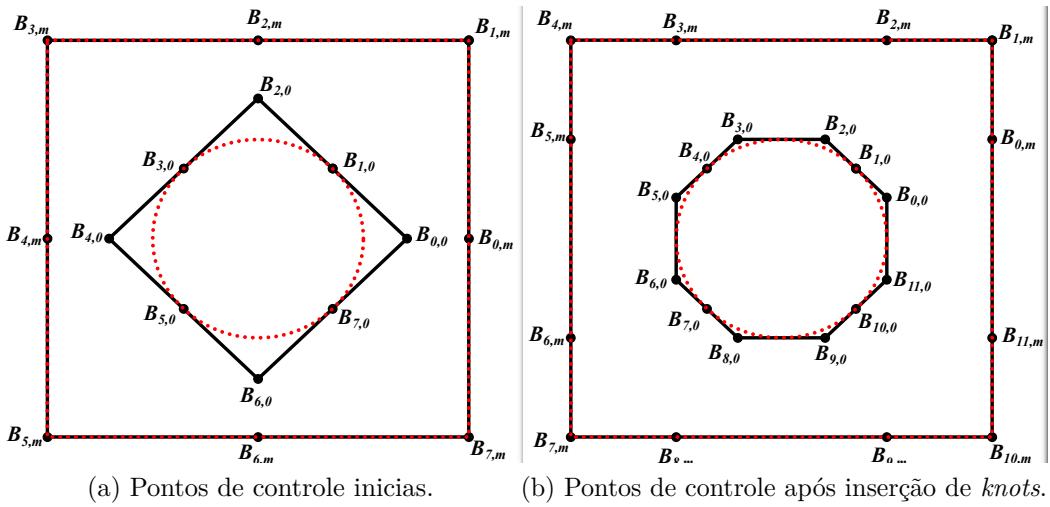


Figura 3.5 – Cilindro 3D: Geração curva NURBS

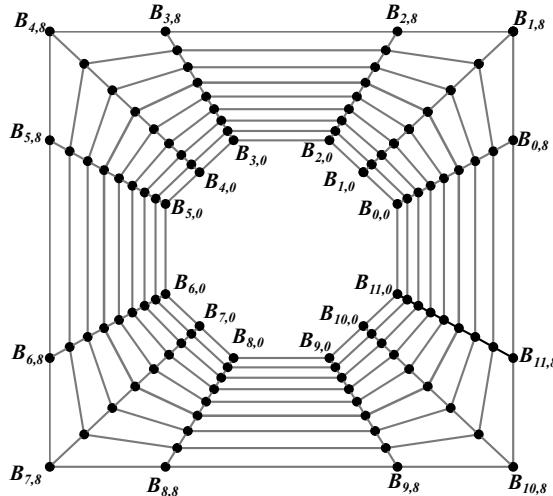


Figura 3.6 – Cilindro 3D: Geração superfície NURBS.

Nessa primeira etapa do trabalho, a direção paramétrica  $\zeta$ , respectiva à direção  $z$  da geometria física, foi discretizada com apenas uma célula, utilizando-se para isso vetor de *knots* abertos com distribuição uniforme de *knots*, e funções base quadráticas.

Visando a verificação do código de IGA 3D analisa-se o problema do escoamento sobre o cilindro para  $Re = 40, 100$  e  $1000$  (Eq. (2.80)). Para isso, gera-se uma malha com  $101 \times 71 \times 3$  pontos de controle nas direções paramétricas  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$  respectivamente, resultando em 6624 células. Na Fig. 3.7a apresentam-se as dimensões da geometria em questão, bem como as condições de contorno aplicadas, e na Fig. 3.7b apresenta-se a malha física resultante da discretização.

Adicionalmente, prescrevem-se nas paredes frontal e posterior, condição de parede lisa ( $u_z = 0$ ), e na Saída do escoamento condição de força de superfície nula ( $\sigma \mathbf{n} = \mathbf{0}$ ). O problema é simulado para um velocidade de entrada  $u_\infty = 1,0$ ,  $\rho = 1,0$ ,  $\Delta t = 0,05$ , e

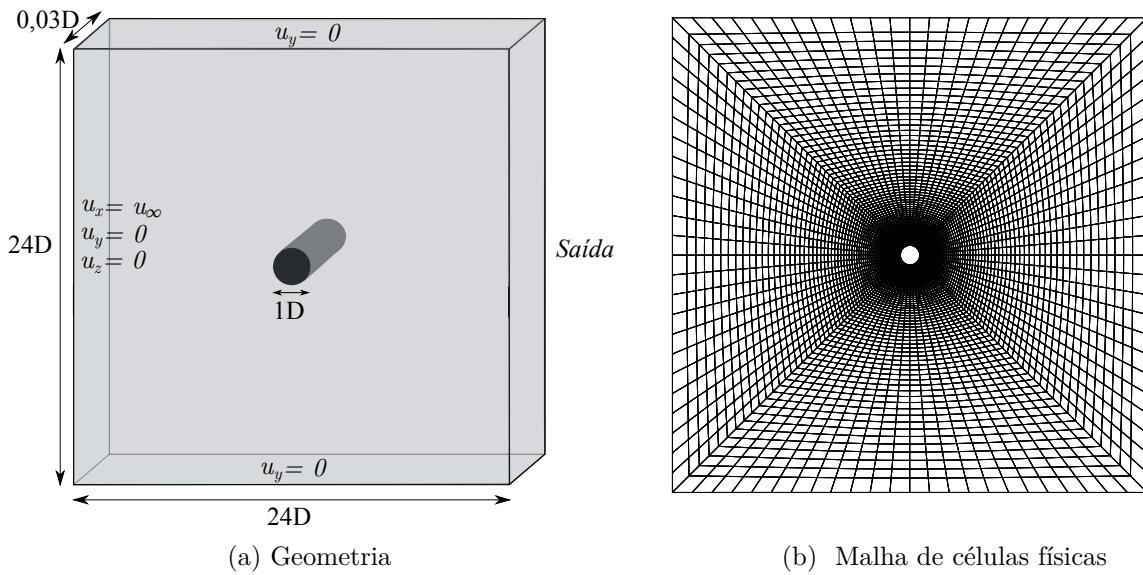


Figura 3.7 – Cilindro 3D: Geometria e malha de células físisas

$\rho_\infty = 0,5$ , sendo a viscosidade variada de acordo com o número de Reynolds desejado. Para o cálculo dos coeficientes aerodinâmicos  $C_D$ ,  $C_L$  e do número de Strouhal (St) utilizam-se as equações apresentadas no Item 2.6.1.

Nas Figs. 3.8a e 3.8b, apresentam-se a variação ao longo do tempo dos coeficientes  $C_D$  e  $C_L$ . Os valores obtidos com a malha isogeométrica 3D estão muito próximos ao obtidos com a malha de elementos finitos 2D (Item 2.6.1) para Reynolds 40 e 100. Para Reynolds 1000, nota-se que a variação ao longo do tempo dos valores de  $C_D$  e  $C_L$  para IGA resulta em valores mais elevados do que os obtidos com MEF. Tal diferença ainda deverá ser investigada, sendo que tanto as diferenças nas dimensões das malhas como a diferença que pode haver na convergência dos resultados ou a efeitos de 3D de vorticidade podem contribuir para isso. Os resultados obtidos para o histórico de  $C_D$  e  $C_L$  por Henderson (1997) para  $Re = 1000$  em análises tridimensionais baseadas em MEF, foram menores do que os 2D. Essa disparidade entre os resultados obtidos nesse trabalho e de Henderson (1997) podem estar relacionados com o fato de que a dimensão escolhida da malha na direção  $z$  foi muito pequena de maneira a impossibilitar que os efeitos tridimensionais do escoamento fossem adequadamente capturados.

Para o número de Strouhal, o valor obtido para  $Re = 100$  foi de 0,1681 e para  $Re = 1000$  de 0,2395. Nota-se que, embora os valores de  $C_D$  e  $C_L$  apresentem diferenças entre os resultados 2d baseados em elementos finitos e a malha 3D baseada em IGA, a frequência do desprendimento de vórtices obtida foi muito semelhante.

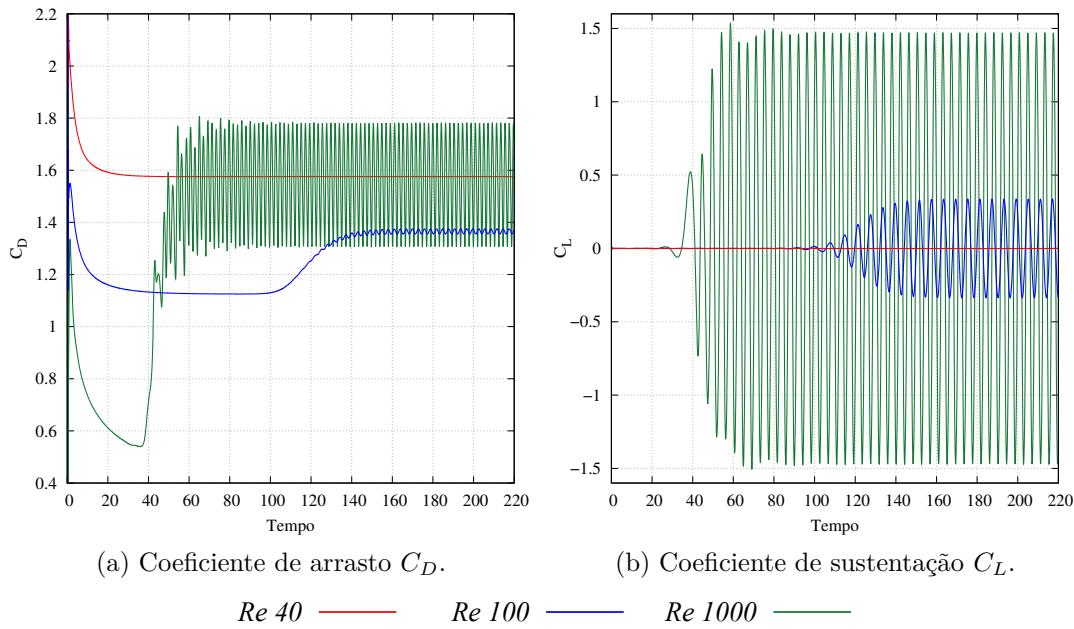


Figura 3.8 – Cilindro 3D: Coeficientes aerodinâmicos.

### 3.3.2 Escoamento em um canal com degrau

Este exemplo é amplamente utilizado na verificação de códigos para escoamentos incompressíveis, sendo sua geometria apresentada na Fig. 3.9. O problema consiste em prescrever-se um perfil parabólico de escoamento na entrada do canal, e condição de aderência ( $\mathbf{u} = 0$ ) nas demais paredes que estão contidas nos planos  $xz$  e  $yz$ , exceto na saída do canal, a qual possui como condição  $\sigma\mathbf{n} = \mathbf{0}$ . Para as paredes dos planos  $xy$ , frontal e posterior, prescreveu-se condição de parede lisa ( $u_z = 0$ ).

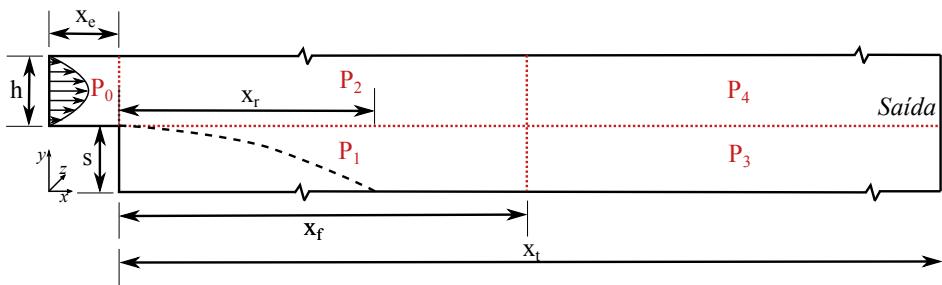


Figura 3.9 – Degrau 3D: Geometria.

As dimensões selecionadas para o canal foram  $h = 1,0m$ ,  $s = 0,94m$ ,  $x_e = 1,0m$ ,  $x_f = 15m$  e  $x_t = 30m$  e dimensão na direção  $z$  de  $0,1m$ . Adicionalmente, o perfil de velocidade na entrada do canal é descrito pela seguinte relação:

$$u_x = V_{max} \left( 1 - \left( \frac{(y - s) - h/2}{h/2} \right)^2 \right), \quad (3.19)$$

com velocidade  $V_{max} = 10m/s$  e  $u_y = u_z = 0$ .

O escoamento sobre o degrau é caracterizado por produzir áreas de recirculação onde o fluido se separa e forma vórtices. A distância entre o degrau e o ponto de recolamento do vórtice principal  $x_r$  é uma das principais características verificadas nesse problema. A dimensão dos vórtices varia em função do número de Re, a qual é calculada de acordo com Armaly et al. (1983), sendo expressa por:

$$Re = \frac{\rho \left( \frac{2V_{max}}{3} \right) 2h}{\mu}, \quad (3.20)$$

com  $\rho = 1kg/m^3$ . Foram selecionados para as análises 3 diferentes número de Reynolds: 100, 400 e 800, variando-se a viscosidade do fluido.

Para a geração da geometria NURBS, discretiza-se o canal em 5 *patches*, os quais são denominados  $P_0, P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$ , e podem ser observados na Fig. 3.9. Todas as direções paramétricas são discretizadas com vetores de *knots* abertos e com *knots* igualmente espaçados no interior do vetor, além de funções de forma quadráticas. Os pontos de controle para os *patches* 0, 1 e 2 foram distribuídos no espaço físico, direções  $x, y$  e  $z$  de maneira a se obter células igualmente espaçadas. Para os *patches* 3 e 4, na direção do espaço físico  $y$  e  $z$ , os pontos são posicionadas de maneira a gerar células uniformes, e, na direção  $x$ , são distribuídos de maneira a resultar numa progressão geométrica do tamanho das células, com as células aumentando de tamanho da esquerda para a direita, conforme pode ser observado na Fig. 3.10. Na Tab. 3.1 podem ser observados os números de pontos de controle utilizados em cada direção dos espaços paramétricos para cada *patch*, resultando em 60795 pontos de controle e 4800 células.

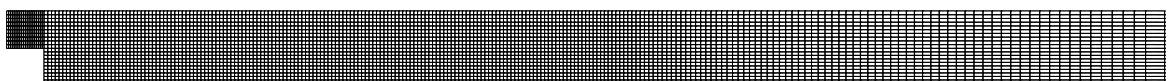


Figura 3.10 – Degrau 3D: Geometria e malha de células físicas

Tabela 3.1 – Número de pontos de controle por *patch*

<i>Patch</i>	$\xi$	$\eta$	$\zeta$
0	22	12	3
1	152	12	3
2	152	12	3
3	82	12	3
4	82	12	3

Na Fig. 3.11 são apresentados os comprimentos de recolamento do vórtice primário adimensionalizados ( $x_r/s$ ), juntamente com os resultados adaptados dos ensaios experimentais de Armaly et al. (1983) e os resultados de análises 2d de Williams e Baker (1999). Nota-se que os resultados obtidos estão próximos das referências para  $Re = 100$  e  $Re = 400$ , entretanto, para  $Re = 800$  nota-se um afastamento do presente trabalho, e do referente à análise 2D com relação ao experimento realizado por Armaly et al. (1983). Isto ocorre, visto que o ensaio experimental foi realizado com um canal com 2m de comprimento na direção  $z$ , e a simulação atual com apenas uma célula nessa direção é incapaz de captar os fenômenos tridimensionais que ocorrem a medida que o número de Reynolds cresce. Na Fig.3.12 pode-se observar o campo de velocidade para os Reynolds estudados, e o aspecto do vórtice primário desenvolvido.

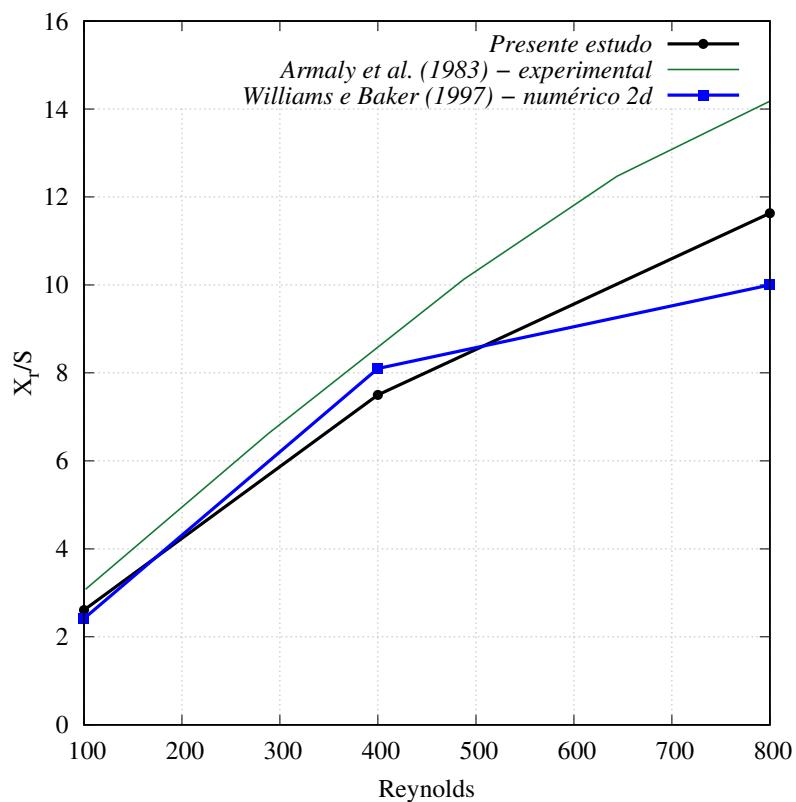


Figura 3.11 – Degrau 3D: Comprimento de recolamento do vórtice principal

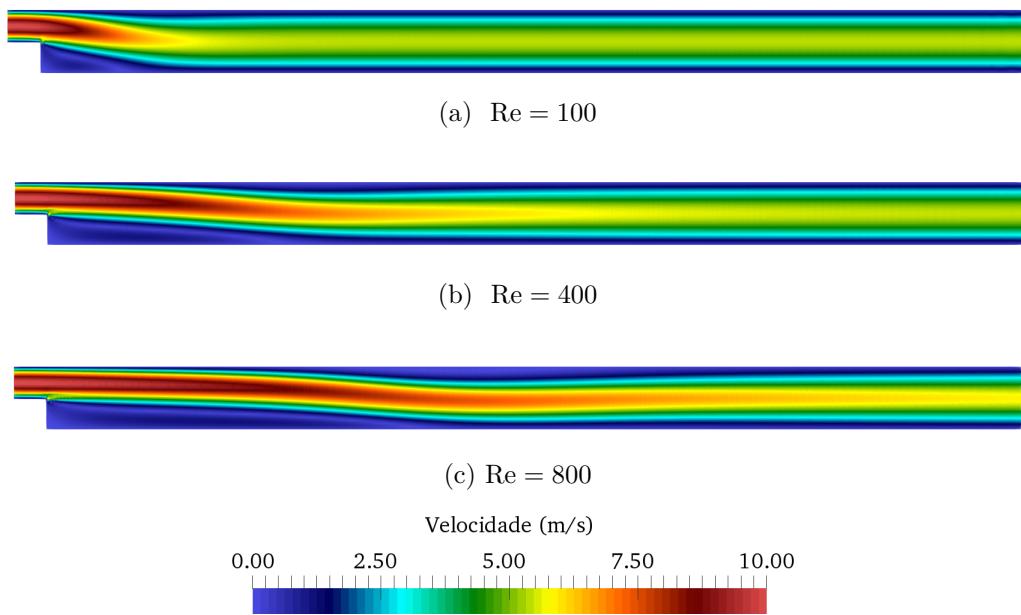


Figura 3.12 – Degrau 3D: Campo de velocidade.



CAPÍTULO

---

**4**

# DINÂMICA DOS SÓLIDOS COMPUTACIONAL

---



---

Assim como no caso da Mecânica dos Fluidos, um sólido é modelado considerando-o como um corpo contínuo, e seu movimento é governado também por um conjunto de equações provenientes das leis de: conservação da quantidade de movimento, conservação da massa e conservação da energia. Entretanto, diferentemente dos fluidos, os sólidos possuem resistência a esforços normais e tangenciais até que alcancem seu limite resistente, e por isso, apresentam deslocamentos e deformações finitos. Sendo os deslocamentos, ou posições atuais ao longo do tempo, as variáveis de interesse na resolução do conjunto de equações que descrevem seu comportamento. Por esse motivo, uma descrição do tipo Lagrangiana é mais adequada para essas análises.

Com respeito à escala de deslocamentos e de deformação, os sólidos podem apresentar comportamento linear ou não-linear, sendo as não linearidades de natureza geométrica (unicamente devidas à escala de deslocamentos) ou física (mudanças na relação constitutiva do material).

Ao se tratar de problemas elásticos com grandes deslocamentos, apenas as não linearidades geométricas são levadas em consideração, e em relação ao problema linear, altera-se a forma com que se considera o equilíbrio das forças no sólido. Em uma modelagem linear, onde um corpo sofre pequenos deslocamentos e deformações, o equilíbrio é realizado em relação a configuração inicial (que é muito próxima da atual). Já em uma análise não-linear, ver com mais detalhes os trabalhos de Ogden (1984) e Coda (2018), o equilíbrio é considerado na configuração atual.

Nesse estudo, é utilizada uma análise não-linear geométrica, visto que, em muitos problemas de IFE, como *flutter* e *buffeting*, grandes deslocamentos estão envolvidos. Além

disso, o sólido é descrito na forma Lagrangiana Total, e considera-se o equilíbrio dinâmico do mesmo.

A solução numérica é obtida através do método dos elementos finitos em abordagem posicional (CODA, 2003; CODA, 2018), onde as variáveis principais são as posições nodais. Escolhe-se trabalhar com elementos de cascas, uma vez que esses podem representar a maioria dos problemas estruturais 3D. No casos das cascas são adicionadas às incógnitas nodais vetores generalizados e um termo de que considera a variação linear da espessura do elemento para permitir o mapeamento completo do sólido.

## 4.1 Cinemática dos corpos deformáveis

Um sólido deformável quando sujeito à ações externas, sofre uma mudança de configuração. Na Fig. 4.1, pode-se observar um sólido na sua configuração inicial  $\Omega_x$ , com suas coordenadas materiais descritas por  $\mathbf{x}$ , que em outro instante, se transforma no domínio representado por  $\Omega_y$ , com coordenadas espaciais  $\mathbf{y}$ . A função que mapeia a mudança de configuração, da posição inicial para a atual, é chamada de  $\mathcal{F}$ .

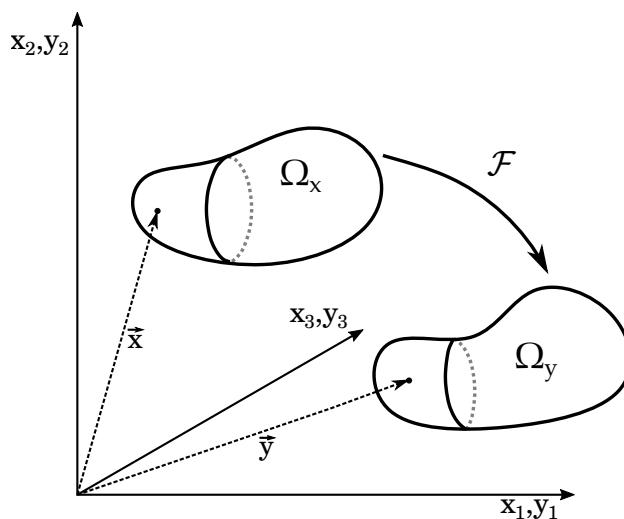


Figura 4.1 – Cinemática de sólido deformável

As deformações de um corpo são mensuradas neste trabalho através do tensor de deformações de Green-Lagrange, que trata-se de uma medida objetiva Lagrangiana de deformação, sendo descrito de acordo com Ogden (1984) pela seguinte expressão:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad (4.1)$$

com  $\mathbf{C}$  sendo um tensor simétrico denominado de tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green, o qual é escrito como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t, \quad (4.2)$$

sendo  $\mathbf{A}$  o gradiente da função mudança de configuração, expresso matematicamente como:

$$\mathbf{A} = \nabla_{\mathbf{x}}(\mathcal{F}). \quad (4.3)$$

A partir do gradiente da função mudança de configuração pode-se estabelecer uma relação entre um vetor qualquer  $\mathbf{u}$  definido na configuração inicial e seu equivalente na configuração atual  $\mathbf{v}$  através da seguinte expressão:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} \quad (4.4)$$

Para a definição posteriormente das equações de equilíbrio em descrição Lagrangiana, duas importantes relações serão definidas aqui: mudança de volume e mudança de área que ocorrem na mudança de configuração.

Para estabelecer-se uma relação entre o volume inicial e final, define-se dois volume infinitesimais, um inicial  $dV_0$  e um final  $dV$ , apresentados na Fig. 4.2. O volume infinitesimal inicial  $dV_0$  pode ser calculado por:

$$dV_0 = (\mathbf{dx}^1 \wedge \mathbf{dx}^2) \cdot \mathbf{dx}^3 = \xi_{ijk} dx_i^1 dx_j^2 dx_k^3, \quad (4.5)$$

e o volume atual por:

$$dV = (\mathbf{dy}^1 \wedge \mathbf{dy}^2) \cdot \mathbf{dy}^3 = \xi_{ijk} dy_i^1 dy_j^2 dy_k^3, \quad (4.6)$$

com  $\mathbf{dx}^1$ ,  $\mathbf{dx}^2$  e  $\mathbf{dx}^3$  vetores que definem o volume inicial;  $\mathbf{dy}^1$ ,  $\mathbf{dy}^2$  e  $\mathbf{dy}^3$  os vetores que definem o volume atual;  $\xi_{ijk}$  é o tensor permutação de Levi-Cevita, com  $i=1,2,3$ ,  $j = 1,2,3$  e  $k = 1,2,3$ .

O infinitésimo de volume atual pode ser ainda escrito como:

$$dV = \det(\mathbf{A}) dV_0 = J dV_0, \quad (4.7)$$

que estabelece uma relação entre esses volumes, sendo  $J$  conhecido como determinante da transformação.

Para escrever a relação entre as áreas inicial e atual que ocorre na mudança de configuração se tomará como referência os cilindros da Fig. 4.3. Considerando que os vetores que definem a área inicial  $\mathbf{dA}_0$  e a área atual  $\mathbf{dA}$  são definidos respectivamente como:

$$\mathbf{dA}_0 = \mathbf{N} dA_0 \quad (4.8)$$

$$\mathbf{dA} = \mathbf{n} dA, \quad (4.9)$$

com  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{n}$  os versores unitários normais às áreas inicial  $dA_0$  e atual  $dA$ . O volume na configuração inicial ( $dV_0$ ) e na configuração atual ( $dV$ ) são calculados por:

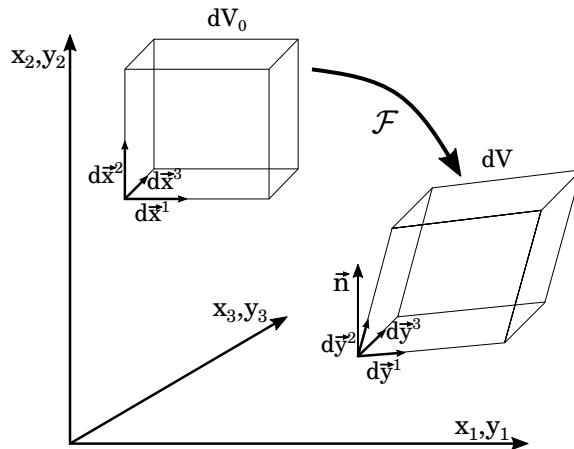


Figura 4.2 – Mudança no volume na mudança de configuração.

$$dV_0 = \mathbf{u} \cdot dA_0 \quad (4.10)$$

$$dV = \mathbf{v} \cdot dA, \quad (4.11)$$

com  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  os vetores que definem as alturas dos cilindros na posição inicial e atual respectivamente.

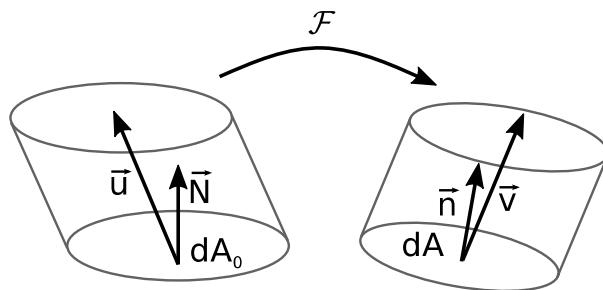


Figura 4.3 – Mudança na área na mudança de configuração.

Considerando a relação da Eq. (4.4), e a arbitrariedade de  $\mathbf{u}$ , escreve-se a seguinte expressão para relacionar as áreas inicial e atual:

$$\mathbf{n} dA = J \mathbf{B} \cdot \mathbf{N} dA_0, \quad (4.12)$$

com  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-t}$ . Essa relação é conhecida como Fórmula de Nanson.

## 4.2 Equilíbrio de corpos deformáveis

No estudo do equilíbrio de corpos deformáveis a análise da energia mecânica é um assunto de grande importância. A energia mecânica é formada basicamente por três parcelas: energia potencial das forças externas ( $\mathbb{P}$ ), energia de deformação ( $\mathbb{U}_e$ ) e energia cinética ( $\mathbb{K}$ ). A energia total mecânica ( $\Pi$ ) é um funcional obtido pela soma dessas três parcelas, sendo escrita da seguinte maneira:

$$\Pi = \mathbb{P} + \mathbb{K} + \mathbb{U}_e. \quad (4.13)$$

O princípio da estacionariedade da energia, define que um corpo quando em equilíbrio apresenta a primeira variação do funcional de energia mecânica nula, sendo o equilíbrio estável quando a posição de equilíbrio representa um mínimo local para a energia mecânica total. O princípio da estacionariedade, utilizando uma descrição das equações de equilíbrio em posições, pode ser expresso matematicamente como:

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{y}} \cdot \delta\mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad (4.14)$$

ou, dada a arbitrariedade de  $\delta\mathbf{y}$ ,

$$\delta\Pi = \delta\mathbb{P} + \delta\mathbb{K} + \delta\mathbb{U}_e. \quad (4.15)$$

### 4.2.1 Equações globais de equilíbrio em descrição Euleriana e variação do funcional de energia mecânica

O sólido da Fig. 4.4 está sujeito a forças de corpo  $\mathbf{b}$  e forças de superfície  $\mathbf{p}$ , com  $\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{n}$ , sendo  $\boldsymbol{\sigma}$  o tensor de tensões de Cauchy e  $\mathbf{n}$  equivalente ao versor unitário normal a superfície. Aplicando-se a segunda Lei de Newton, considerando que a configuração do meio contínuo apresentada é a atual, chega-se a seguinte expressão que descreve o equilíbrio global do mesmo:

$$\int_V \mathbf{b} dV + \int_A \boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \rho \ddot{\mathbf{y}} dV, \quad (4.16)$$

com  $\rho$  representando a massa específica do material que compõe o sólido e  $\ddot{\mathbf{y}}$  é a derivada material da velocidade do ponto material (aceleração do corpo).

Aplicando o teorema de Gauss sobre a Eq.(4.16), pode-se escrever também as equações de equilíbrio global em descrição Euleriana da seguinte forma:

$$\int_V \mathbf{b} dV + \int_V \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^t) dV = \int_V \rho \ddot{\mathbf{y}} dV. \quad (4.17)$$

Baseado na Eq. (4.14) pode-se reescrever a Eq. (4.17) como:

$$\delta\Pi = \int_V (-\mathbf{b} - \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^t) + \rho \ddot{\mathbf{y}}) \cdot \delta\mathbf{y} dV = 0. \quad (4.18)$$

Desta forma deve haver uma igualdade entre os termos da Eq. (4.18) e os termos

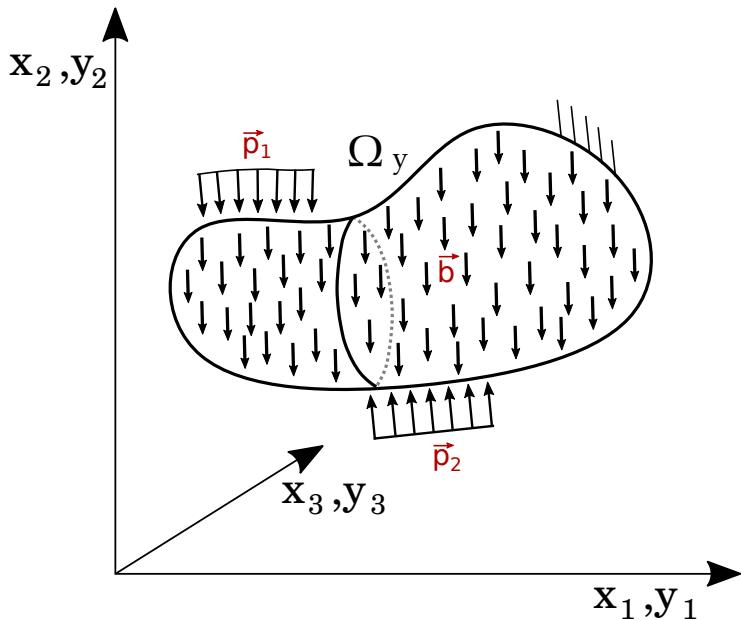


Figura 4.4 – Sólido sujeito a um conjunto de carregamento externo.

$\delta\mathbb{P}$ ,  $\delta\mathbb{K}$  e  $\delta\mathbb{U}_e$ . Antes de abordar essa relação, o segundo termo de Eq. (4.18) será desdobrado em dois:

$$\int_V -\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^t) \cdot \delta \mathbf{y} dV = - \int_A \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{y} dA + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \nabla_{\mathbf{y}} \delta \mathbf{y} dV, \quad (4.19)$$

ou,

$$\int_V -\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^t) \cdot \delta \mathbf{y} dV = - \int_A \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{y} dA + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV., \quad (4.20)$$

com  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sendo o tensor de deformação de engenharia.

As parcelas de  $\delta\mathbb{P}$ ,  $\delta\mathbb{K}$  e  $\delta\mathbb{U}_e$  são relacionadas aos termos da Eq. (4.18) como:

$$\delta\mathbb{P} = - \int_V \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{y} - \int_A \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{y} dA \quad (4.21)$$

$$\delta\mathbb{K} = \int_V \rho \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} dV \quad (4.22)$$

$$\delta\mathbb{U}_e = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV. \quad (4.23)$$

Dessa forma, uma outra maneira de se expressar as equações global de equilíbrio Euleriano é:

$$-\int_V \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{y} dV - \int_A \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{y} dA + \int_V \rho \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = 0. \quad (4.24)$$

A equivalência entre a equação de equilíbrio obtida pela primeira lei de Euler e os termos da variações do potencial de energia mecânica total é apresentada de maneira detalhada em Coda (2018).

### 4.2.2 Equação da conservação da massa

A massa pode ser calculada em qualquer instante de tempo ( $t$ ) da análise, e considerando-se que a massa não possa ser retirada ou criada, a equação da conservação da massa ( $M$ ) define que:

$$M = \int_{V_0} \rho_0 dV_0 = \int_{V(t)} \rho(t) dV. \quad (4.25)$$

Considerando a Eq.4.7, a conservação da massa pode ainda ser expressa como:

$$M = \int_{V_0} \rho(t) J(t) dV_0. \quad (4.26)$$

### 4.2.3 Equações globais de equilíbrio em descrição Lagrangiana

Partindo-se da Eq. (4.16) do equilíbrio Euleriano, e utilizando as relações para a mudança de volume e área apresentadas nas Eq. (4.7) e Eq. (4.12) respectivamente, em conjunto com a equação da conservação da massa (Eq. (4.25)), chega-se a:

$$\int_{V_0} \mathbf{b}^0 dV_0 + \int_{A_0} J\boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{N} dA_0 = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} dV_0, \quad (4.27)$$

com  $\mathbf{b}^0$  sendo as forças de corpo descritas na configuração inicial. Considerando que o tensor das tensões de Piola Kirchhoff de primeira espécie  $\mathbf{P}$  é escrito como  $\mathbf{P}^t = J\boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{B}$ , pode-se rescrever a Eq. (4.27) como:

$$\int_{V_0} \mathbf{b}^0 dV_0 + \int_{A_0} \mathbf{P}^t \cdot \mathbf{N} dA_0 = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} dV_0, . \quad (4.28)$$

Como consequência a versão da Eq. (4.24) em descrição Lagrangiana é descrita por:

$$-\int_{V_0} \mathbf{b}^0 \cdot \delta \mathbf{y} dV_0 - \int_{A_0} \mathbf{p}^0 \cdot \delta \mathbf{y} dA_0 + \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} dV_0 + \int_{V_0} \mathbf{P}^t : \delta \mathbf{A} dV_0 = 0., \quad (4.29)$$

com  $\mathbf{p}^0$  sendo as forças de superfície na configuração inicial.

Seguindo a metodologia de Coda (2018), deseja-se trabalhar com o segundo tensor de tensões de Piola Kirchhoff ( $\mathbf{S}$ ), o qual, ao contrário de  $\mathbf{P}$ , é sempre simétrico. Dessa forma, utiliza-se do fato que:

$$\mathbf{P} = \mathbf{S}^t \cdot \mathbf{A}, \quad (4.30)$$

escreve-se a equação do equilíbrio Lagrangiano local que será utilizada nas aproximações do MEF:

$$-\int_{V_0} \mathbf{b}^0 \cdot \delta \mathbf{y} dV_0 - \int_{A_0} \mathbf{p}^0 \cdot \delta \mathbf{y} dA_0 + \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} dV_0 + \int_{V_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV_0 = 0, \quad (4.31)$$

#### 4.2.4 Modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff

A lei constitutiva hiperelástica de Saint-Venant-Kirchhoff estabelece uma relação linear entre o tensor das tensões de Piola Kirchhoff de segunda espécie e o tensor de deformação de Green, e pode ser escrita pela expressão generalizada da energia de deformação por:

$$u_e(E) = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbf{E}, \quad (4.32)$$

ou, em notação indicial:

$$u_e(E) = \frac{1}{2} E_{kl} C_{klij} E_{ij} \quad (4.33)$$

com  $\mathbb{C}$  representando o tensor constitutivo elástico isotrópico, que é um tensor de quarta ordem definido como:

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \left( \kappa - \frac{2}{3} G \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (4.34)$$

sendo  $\delta_{ij}$  o delta de Kronecker,  $\kappa$  e  $G$  os módulos volumétrico e de cisalhamento respectivamente, os quais são calculados através das seguintes relações:

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3} G, \quad (4.35)$$

$$G = \frac{\mathbb{E}}{2(1+\nu)}, \quad (4.36)$$

$$\lambda = \frac{\nu \mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (4.37)$$

com  $\mathbb{E}$  sendo o módulo de elasticidade longitudinal e  $\nu$  o coeficiente de Poisson. Ressalta-se que essa lei constitutiva aqui utilizada é adequada para grandes deslocamentos, entretanto, a mesma não é adequada para grandes deformações.

### 4.3 Método dos Elementos Finitos Posicional

#### 4.3.1 Elemento finito de Casca

As cascas são sólidos que possuem uma de suas dimensões muito menor do que as outras. A cinemática utilizada para os elementos finitos de casca é aquela apresentada em Sanches e Coda (2010b), Sanches e Coda (2010a), na qual aplica-se uma aproximação das configurações do sólido baseada em posições e vetores generalizados como graus de liberdade. A proposta não utiliza o conceito de rotações como graus de liberdade, propiciando um método que conserva o momento angular e linear para grandes deslocamentos de corpo rígido quando utilizado o integrador temporal de Newmark.

As funções que definem a mudança de configuração para a superfície média da casca, conforme pode ser observada na Fig. 4.5, são definidas como:

$$\mathcal{F}^{m0} = \mathbf{x}^m(\xi_1, \xi_2, \mathbf{X}_l) = N_l(\xi_1, \xi_2)\mathbf{X}_l \quad (4.38)$$

$$\mathcal{F}^{m1} = \mathbf{y}^m(\xi_1, \xi_2, \mathbf{Y}_l) = N_l(\xi_1, \xi_2)\mathbf{Y}_l, \quad (4.39)$$

com  $\mathcal{F}^{m0}$  sendo a função mapeamento da superfície média das coordenadas do domínio paramétrico, definidas por  $\xi$ , para o domínio inicial. Já  $\mathcal{F}^{m1}$  é a função mapeamento da superfície média do domínio paramétrico para o domínio atual.  $\mathbf{X}_l$  e  $\mathbf{Y}_l$  representam as coordenadas do nó  $l$  do elemento nas configurações inicial e atual respectivamente, e,  $N_l$  representa a função de forma do nó  $l$ .

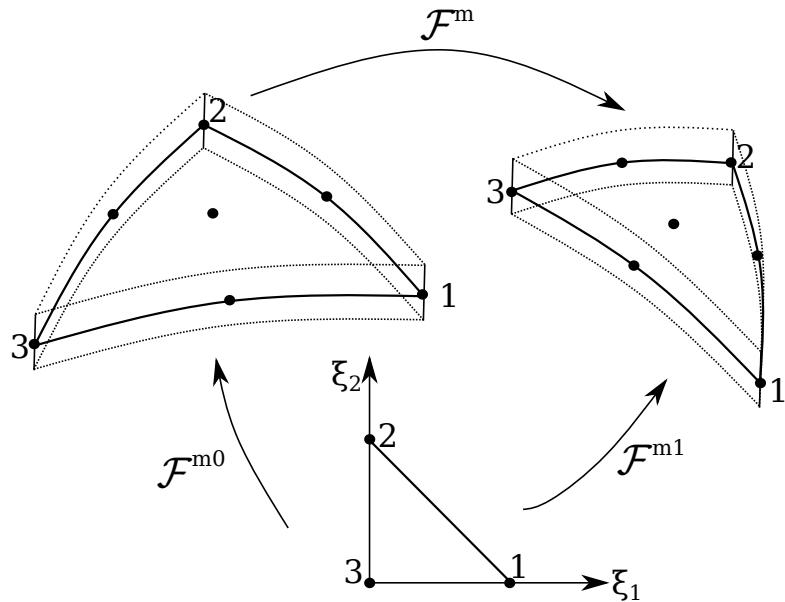


Figura 4.5 – Mapeamento da superfície média.

Para completar a cinemática do casca, as coordenadas iniciais e atuais de qualquer ponto da casca podem ser calculadas pela adição às aproximações apresentadas nas Eq. (4.38) e Eq. (4.39) de vetores posição partindo da superfície média, conforme Fig. 4.6. Dessa forma pode-se escrever as coordenadas de um ponto como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^m + \mathbf{v}^0 \quad (4.40)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^m + \mathbf{v}^1, \quad (4.41)$$

com  $\mathbf{v}^0$  e  $\mathbf{v}^1$  sendo os vetores posição para a configuração inicial (perpendicular à superfície média) e atual respectivamente, que são expressos da seguinte forma:

$$\mathbf{v}^0 = \frac{h_0}{2} N_l(\xi_1, \xi_2) \mathbf{V}_l^0 \xi_3, \quad (4.42)$$

$$\mathbf{v}^1 = \frac{h_0}{2} N_l(\xi_1, \xi_2) \mathbf{V}_l^1 [\xi_3 + \alpha(\xi_1, \xi_2) \xi_3^2], \quad (4.43)$$

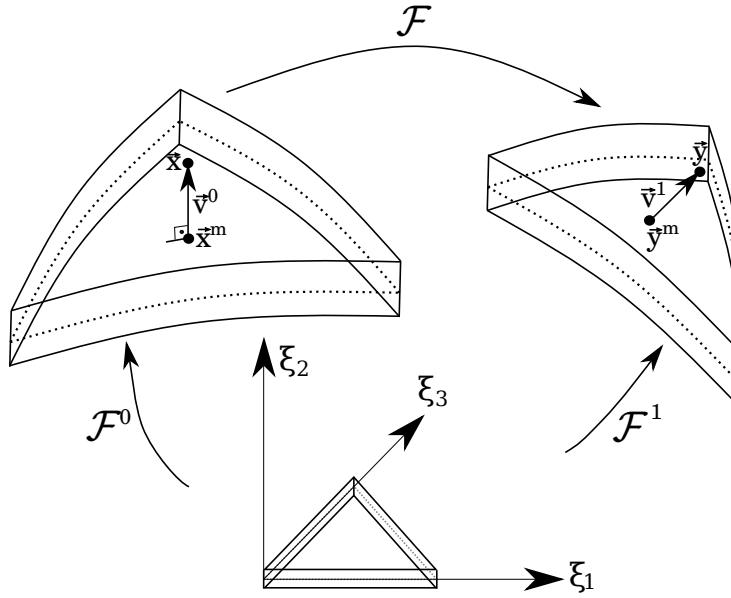


Figura 4.6 – Vetores de posição.

com  $h_0$  representando a espessura média inicial do elemento de casca,  $\mathbf{V}_l^0$  e  $\mathbf{V}_l^1$  o vetor de posição do nó  $l$  nas configurações inicial e atual, e  $\alpha$  é chamada de taxa linear de variação da espessura e é parametrizada por seus valores nodais  $\Lambda_l$  da seguinte forma:

$$\alpha(\xi_1, \xi_2) = N_l(\xi_1, \xi_2) \Lambda_l. \quad (4.44)$$

Por fim, o mapeamento posicional da casca nas configurações inicial e atual é descrito por:

$$\mathcal{F}^0 = N_l(\xi_1, \xi_2) \mathbf{X}_l + \frac{h_0}{2} N_l(\xi_1, \xi_2) \mathbf{V}_l^0 \xi_3 \quad (4.45)$$

$$\mathcal{F}^1 = N_l(\xi_1, \xi_2) \mathbf{Y}_l + \frac{h_0}{2} N_l(\xi_1, \xi_2) \mathbf{V}_l^1 [\xi_3 + \alpha(\xi_1, \xi_2) \xi_3^2]. \quad (4.46)$$

As equações Eq. (4.45) e Eq. (4.46) apresentam sete parâmetros incógnitos em cada nó  $l$ : 3 posições ( $\mathbf{Y}_l$ ), 3 componentes do vetor generalizado ( $\mathbf{V}_l^i$ ) e o valor nodal da variação linear da deformação na espessura  $\Lambda_l$ . A partir desse ponto os parâmetros incógnitos serão descritos por uma única variável  $\mathbf{Y}_l^i$ , com  $i = 0, 1$  e  $2$  representando as posições,  $i = 3, 4$  e  $5$  as componentes do vetor generalizado e  $i = 6$  a taxa de variação linear da espessura.

Para iniciar-se a descrição do MEF posicional, adiciona-se mais um termo à Eq. (4.31) respectivo a forças concentradas nodais e fica-se com a seguinte definição para as equações de equilíbrio Lagrangiana:

$$-\mathbf{F}_l \delta \mathbf{Y}_l - \int_{V_0} \mathbf{b}^0 \cdot \delta \mathbf{y} dV_0 - \int_{A_0} \mathbf{p}^0 \cdot \delta \mathbf{y} dA_0 + \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} dV_0 + \int_{V_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV_0 = 0, \quad (4.47)$$

sendo o termo  $-\mathbf{F}_l$  respectivo a força concentrada aplicada sobre o nó  $l$ . O tensor  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{Y})$

é função de  $\mathbf{A}$ , e pode ser obtido em função das posições através de  $\mathcal{F}^0$  e  $\mathcal{F}^1$  como:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^1 (\mathbf{A}^0)^{-1}. \quad (4.48)$$

Considerando uma aproximação tradicional das variáveis de elementos finitos, tem-se:

$$\delta\mathbf{y} = N_l(\xi_1, \xi_2) \delta\mathbf{Y}_l, \quad (4.49)$$

$$\mathbf{b}^0 = N_l(\xi_1, \xi_2) \mathbf{B}_l^0, \quad (4.50)$$

$$\mathbf{p}^0 = N_l(\xi_1, \xi_2) \mathbf{Q}_l^0, \quad (4.51)$$

$$\ddot{\mathbf{y}} = N_l(\xi_1, \xi_2) \ddot{\mathbf{Y}}_l, \quad (4.52)$$

da arbitrariedade de  $\delta\mathbf{Y}$  as equações do equilíbrio em função das posições nodais são escritas como:

$$\begin{aligned} & -\mathbf{F}_l - \int_{V_0^{el}} N_m(\boldsymbol{\xi}) N_l(\boldsymbol{\xi}) dV_0^{el} \mathbf{B}_m^0 - \int_{A_0^{el}} N_m(\boldsymbol{\xi}) N_l(\boldsymbol{\xi}) dA_0^{el} \mathbf{Q}_m^0 \\ & + \int_{V_0^{el}} \rho_0 N_m(\boldsymbol{\xi}) N_l(\boldsymbol{\xi}) dV_0^{el} \ddot{\mathbf{Y}}_m + \int_{V_0^{el}} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{Y}_l} dV_0^{el}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

### 4.3.2 Integração temporal e técnica de solução

As equações do equilíbrio baseadas em posição podem ser apresentadas sinteticamente como:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{Y}} = \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial \mathbf{Y}} + \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial \mathbf{Y}} + \frac{\partial \mathbb{U}_e}{\partial \mathbf{Y}} = \mathbf{0}, \quad (4.54)$$

ou ainda,

$$-\mathbf{F}^{ext}(t) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{F}^{int}(\mathbf{Y}) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{0}, \quad (4.55)$$

na qual  $\mathbf{F}^{int}(\mathbf{Y})$  representa as forças internas provenientes da variação da energia potencial interna,  $\mathbf{M}$  é a conhecida como matriz de massa proveniente da variação da energia cinética e  $\mathbf{F}^{ext}$  representam as forças externas na estrutura fruto da variação da energia potencial das forças externas. O termo  $\mathbf{C}$  representa uma matriz de amortecimento proporcional a massa, e  $\dot{\mathbf{Y}}$  a velocidade nodal.

A integração temporal das equações apresentadas na Eq. (4.55) inicia-se com a discretização temporal do tempo de maneira que:

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t, \quad (4.56)$$

na qual  $t_{n+1}$  representa o tempo no instante atual,  $t_n$  o instante de tempo anterior e  $\Delta t$  o intervalo de tempo utilizado na discretização. Utilizando as aproximações de Newmark, posições, velocidade e aceleração nos tempos  $n+1$  e  $n$  são relacionados por:

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + \Delta t \dot{\mathbf{Y}}_n + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{Y}}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{Y}}_{n+1}, \quad (4.57)$$

$$\dot{\mathbf{Y}}_{n+1} = \dot{\mathbf{Y}}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{Y}}_n + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{Y}}_{n+1}, \quad (4.58)$$

em que  $\beta$  e  $\gamma$  são parâmetros dependentes do comportamento assumido para a aceleração, adotados nesse trabalho como  $\gamma = 1/2$  e  $\beta = 1/4$  para uma aceleração constante.

Considerando a discretização temporal apresentada em Eq. (4.56) e aplicando-se a Eq. (4.57) e Eq. (4.58) à Eq. (4.55) de maneira a escrever-se a equação somente em função das posições nodais, tem-se, para um instante  $n + 1$  a seguinte relação:

$$\mathbf{F}_{n+1}^{int} - \mathbf{F}_{n+1}^{ext} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \mathbf{Y}_{n+1} - \mathbf{M} \mathbf{Q}_n + \mathbf{C} \mathbf{R}_n + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \mathbf{Y}_{n+1} - \gamma \Delta t \mathbf{C} \mathbf{Q}_n = \mathbf{0}, \quad (4.59)$$

em que  $\mathbf{Q}_n$  e  $\mathbf{R}_n$  representam os termos dependentes apenas de velocidades, acelerações e posições do instante anterior, dados por:

$$\mathbf{Q}_n = \frac{\mathbf{Y}_n}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{\mathbf{Y}}_n}{\beta \Delta t} + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{Y}}_n, \quad (4.60)$$

$$\mathbf{R}_n = \dot{\mathbf{Y}}_n + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{Y}}_n. \quad (4.61)$$

Pode-se escrever ainda o problema não linear definido por (4.59) em função do resíduo da equação governante discretizada no espaço e no tempo, tal que:

$$\mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}) = \mathbf{F}_{n+1}^{int} - \mathbf{F}_{n+1}^{ext} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \mathbf{Y}_{n+1} - \mathbf{M} \mathbf{Q}_n + \mathbf{C} \mathbf{R}_n + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \mathbf{Y}_{n+1} - \gamma \Delta t \mathbf{C} \mathbf{Q}_n = \mathbf{0}. \quad (4.62)$$

O problema não linear da Eq. (4.62) é resolvido por meio do método iterativo de Newton-Raphson. Para isso, realiza-se uma expansão em série de Taylor de primeira ordem:

$$\mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}^{i+1}) \approx \mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}^i) + \Delta \mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}^i) \Delta \mathbf{Y}_i \quad (4.63)$$

em que  $i$  indica o índice da iteração atual. Na primeira iteração para o cálculo de  $\mathbf{Y}_{n+1}$  utiliza-se como predição da iteração anterior os valores das variáveis no passo de tempo  $n$ . O método de Newton-Raphson consiste em resolver o seguinte sistema:

$$\Delta \mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}^i) \Delta \mathbf{Y}^i = -\mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}^i) \quad (4.64)$$

com:

$$\Delta \mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}^i) = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{Y}^2} = \frac{\partial^2 \mathbb{U}_e}{\partial \mathbf{Y}^2} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t}. \quad (4.65)$$

A cada iteração de Newton-Raphson atualiza-se a posição, a aceleração e a velocidade de acordo com as seguintes equações:

$$\mathbf{Y}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{Y}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{Y}^i \quad (4.66)$$

$$\ddot{\mathbf{Y}}_{n+1}^{i+1} = \frac{\mathbf{Y}_{n+1}^{i+1}}{\beta \Delta t^2} + \mathbf{Q}_n \quad (4.67)$$

$$\dot{\mathbf{Y}}_{n+1}^{i+1} = \frac{\gamma \mathbf{Y}_{n+1}^{i+1}}{\beta \Delta t} + \mathbf{R}_n - \gamma \Delta t \mathbf{Q}_n \quad (4.68)$$

### 4.3.3 Implementação Computacional

Emprega-se o programa para análise não linear de estruturas de casca cedido pelo professor Humberto Breves Coda (CODA; PACCOLA, 2007; CODA; PACCOLA, 2008), o qual segue a formulação descrita neste texto e é implementado em linguagem FORTRAN, com paralelização em protocolo MPI.

O algoritmo implementado foi criteriosamente estudado de forma a permitir a implementação do acoplamento, sendo apresentado em Alg. 2.

#### Algoritmo 2 Algoritmo para problemas de dinâmica dos sólidos computacional

1: **para** o passo de tempo 0 até T **faça**

2:     *i* = 0;

3:     Predição da solução:

$$\mathbf{Y}_{n+1}^0 = \mathbf{Y}_n, \quad (4.69)$$

$$\dot{\mathbf{Y}}_{n+1}^0 = \dot{\mathbf{Y}}_n, \quad (4.70)$$

$$\ddot{\mathbf{Y}}_{n+1}^0 = \ddot{\mathbf{Y}}_n; \quad (4.71)$$

4:     Calcula-se nível de força aplicado  $\mathbf{F}_{n+1}^{ext}(t_{n+1})$  e/ou as posições prescritas  $\mathbf{Y}_{n+1}$ ;

5:     Calculam-se os valores de  $\mathbf{Q}_n$  (Eq. (4.60)) e  $\mathbf{R}_n$  (Eq. (4.61));

6:     **enquanto** ( $\epsilon <$  tolerância) **faça**

7:         *i*++;

8:         Cálculo do incremento da variável do problema:  $\mathbf{Y}_{n+1}^i$  de acordo com a Eq. (4.64);

9:         Atualização da solução: calculada de acordo com Eq. (4.66), Eq. (4.67) e Eq. (4.68).

10:       Cálculo do erro:

$$\epsilon = \|\Delta \mathbf{R}_S (\mathbf{Y}_{n+1}^{i+1})\|_{L^2} \quad (4.72)$$

ou,

$$\epsilon = \|\Delta \mathbf{Y}_{n+1}^{i+1}\|_{L^2} \quad (4.73)$$

11:       **fim enquanto**

12:       **fim para**

## 4.4 Exemplo de aplicação - Casca cilíndrica com *snap through* dinâmico

Nesta seção é apresentada uma simulação feita com o código cedido pelo professor Humberto Breves Coda para problemas de análise não-linear geométrica de cascas. Esta análise foi realizada com o objetivo de estudar o programa a ser empregado na pesquisa.

O problema clássico analisado trata-se de um casca cilíndrica submetida a um carregamento concentrado em seu centro geométrico. Proposto inicialmente no trabalho de (KUHL; RAMM, 1999), o problema apresenta grande não-linearidade geométrica devido ao efeito de *snap-through*.

A geometria do problema em questão é apresentada na Fig. 4.7a, sendo a espessura da casca equivalente a 0,1 m. Como condições de contorno, têm-se o deslocamento restrito nas direções  $x, y, z$  para as bordas retas que formam a geometria da casca. A malha de elementos finitos que representa a superfície média da casca utilizada pode ser visualizada na Fig. 4.7b, a qual é composta por 32 elementos cúbicos e 49 nós.

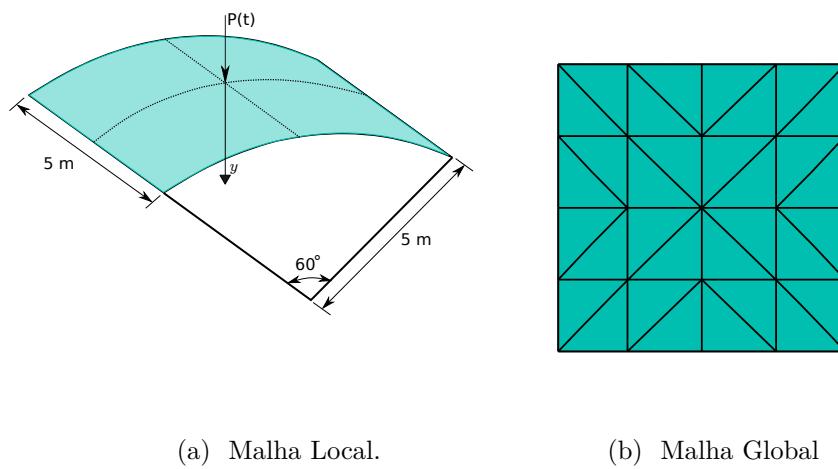
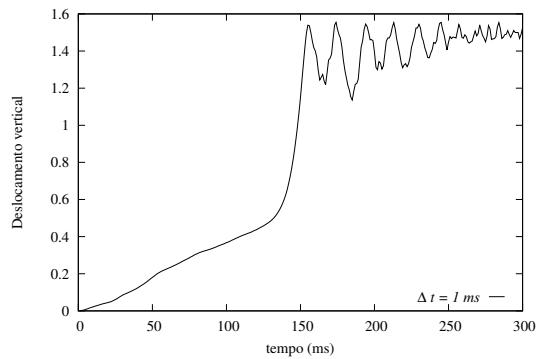


Figura 4.7 – Casca: Geometria e Malha.

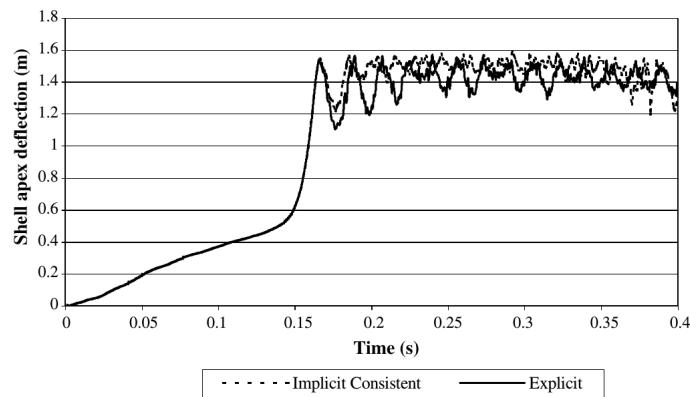
O carregamento  $P(t)$  é aplicado linearmente no intervalo  $t = 0s$  até  $t = 0,2s$ , com  $P(0) = 0kN$  e  $P(2s) = 50000kN$ , e então mantido constante. As características físicas do material utilizado são:  $\mathbb{E} = 200GPa$ ,  $\nu = 0,25$  e  $\rho = 10000kg/m^3$  e o passo de tempo adotado na simulação é  $\Delta_t = 0,001s$ .

O deslocamento vertical do nó central da casca pode ser visualizado na Fig. 4.8a. O resultado obtido está de acordo com os resultados de Argyris, Papadrakakis e Mouroutis (2003), conforme pode ser visto na Fig. 4.8b e o campo de deslocamentos nos instantes  $t = 0s$ ,  $t = 100ms$  e  $t = 155ms$  são apresentados na Fig. 4.9.

Embora a implementação do programa de cascas não seja objetivo deste trabalho, e essa análise tenha objetivo de estudar o código a ser empregado, ela também traz indício da robustez e precisão da formulação escolhida.



(a) Presente trabalho.



(b) Referência

Fonte: Argyris, Papadrakakis e Mouroutis (2003)

Figura 4.8 – Casca: Deslocamento vertical nó central.

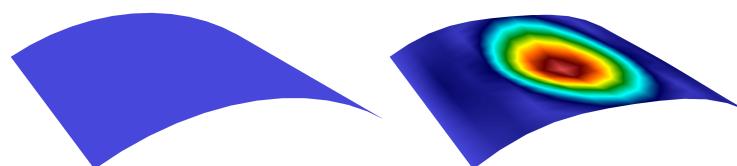
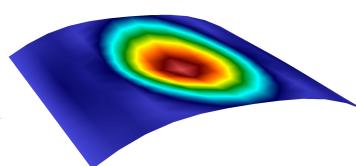
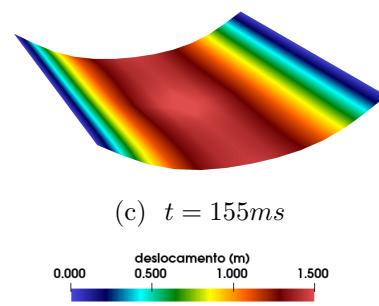
(a)  $t = 0s$ .(b)  $t = 100ms$ (c)  $t = 155ms$ 

Figura 4.9 – Casca: Campo de deslocamento.





# TÉCNICA DE DECOMPOSIÇÃO DE DOMÍNIOS

---



---

Muitas aplicações de engenharia envolvem efeitos localizados, são os casos, por exemplo, de fissuras na mecânica dos sólidos, interface entre dois tipos diferentes de fluidos na mecânica dos fluidos, ou ainda, a camada limite na interface entre sólido e fluido, entre outros. Para uma análise computacional realística desses problemas, os efeitos locais devem ser apropriadamente representados e a um custo computacional razoável.

Neste trabalho aplica-se um método decomposição de domínios que permite utilizar uma malha local mais refinada sobreposta a uma malha global com discretização mais grosseira com o intuito de melhorar a precisão local da análise numérica ou simplesmente representar a geometria local e as condições de contorno adequadamente. A malha local pode ter uma escala diferente de discretização, ou até mesmo uma aproximação numérica diferente, como no caso deste trabalho em que se utiliza o método dos elementos finitos em conjunto com a análise isogeométrica.

## 5.1 Combinação de espaços de funções

Para o entendimento da técnica de sobreposição de malhas define-se inicialmente um domínio global  $\Omega_G$ , de acordo com a Fig. 5.1a, e um domínio local,  $\Omega_L$ , apresentado na Fig. 5.1b, menor que o domínio global e que contém a região com efeitos localizados. O domínio total de estudo é então composto por:  $\Omega = \Omega_G \cup \Omega_L$ .

Adicionalmente definem-se os contornos desses domínios, conforme Fig. 5.1c, como:  $\Gamma_G$  contorno físico de  $\Omega$  determinado pelo domínio global;  $\Gamma_L$  contorno físico de  $\Omega$  pertencente ao domínio local;  $(\Gamma_G)_B$  contorno que define a região de sobreposição

pertencente ao domínio global e  $(\Gamma_L)_B$  contorno que define a região de sobreposição pertencente ao domínio local. É importante observar que os domínios ditos físicos podem ou não estarem presentes nos problemas de sobreposição. A zona dita de sobreposição  $\Omega_B = \Omega_G \cap \Omega_L$  é definida pelos contornos  $(\Gamma_L)_B$  e  $(\Gamma_G)_B$ .

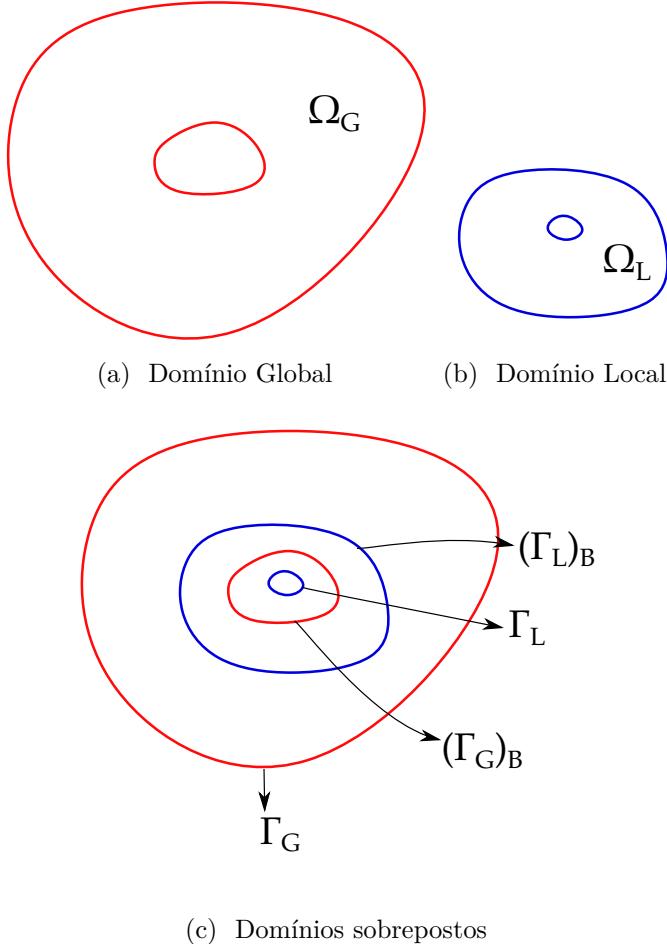


Figura 5.1 – Definição dos domínios global,local e de sobreposição.

O espaço de funções tentativa global  $u_G(\mathbf{x})$  é definido como  $\mathcal{S}_u^G$ , e o espaço das funções tentativa local  $u_L(\mathbf{x})$  por  $\mathcal{S}_u^L$ , com funções peso global  $w_G(\mathbf{x})$  e local  $w_L(\mathbf{x})$  definidas nos espaço  $\mathcal{V}_u^G$  e  $\mathcal{V}_u^L$  respectivamente. A união direta dos espaços de funções na zona de sobreposição obviamente não resulta em um espaço que respeita a partição da unidade. Dessa forma, utiliza-se uma função ponderadora de combinação  $b(\mathbf{x})$ , de maneira a criar um novo espaço de funções tentativa e peso definidas por:

$$u(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x})u_G(\mathbf{x}) + (1 - b(\mathbf{x}))u_L(\mathbf{x}), \quad (5.1)$$

$$w(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x})w_G(\mathbf{x}) + (1 - b(\mathbf{x}))w_L(\mathbf{x}), \quad (5.2)$$

com a função  $b(\mathbf{x})$  apresentando valor unitário sobre o domínio global livre (sem sobreposições), e valor zero no domínio local livre, e com uma transição suave na região de sobreposição.

Os espaços enriquecidos na região de sobreposição de malhas, são definidos por  $\mathcal{S}_{enr}^h$  e  $\mathcal{V}_{enr}^h$ , correspondentes às funções tentativa e teste respectivamente. A solução de um problema de valor de contorno recai em encontrar  $u^h \in \mathcal{S}_{enr}^h$  tal que  $\forall w^h \in \mathcal{V}_{enr}^h$ :

$$B(u^h, w^h) = F(w^h), \quad (5.3)$$

com  $B(\bullet, \bullet)$  e  $F(\bullet)$  sendo operadores bilineares e lineares respectivamente. A discretização de  $u(\mathbf{x})$  e  $w(\mathbf{x})$  no contexto dos elementos finitos é obtida através das seguintes relações:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{A=1}^{(n_{np})_G} (u_G)_A b(\mathbf{x})(N_G)_A(\mathbf{x}) + \sum_{A=1}^{(n_{np})_L} (u_L)_A (1 - b(\mathbf{x}))(N_L)_A(\mathbf{x}), \quad (5.4)$$

$$w^h(\mathbf{x}) = \sum_{A=1}^{(n_{np})_G} (w_G)_A b(\mathbf{x})(N_G)_A(\mathbf{x}) + \sum_{A=1}^{(n_{np})_L} (w_L)_A (1 - b(\mathbf{x}))(N_L)_A(\mathbf{x}), \quad (5.5)$$

com  $N_G$  e  $N_L$  sendo as funções de forma global e local; e  $(n_{np})_G$  e  $(n_{np})_L$  o número de funções de forma nas discretizações global e local respectivamente.

### 5.1.1 Função ponderadora de combinação

De maneira a se obter uma solução única deseja-se que as funções  $b(\mathbf{x})(N_G)$  e  $(1 - b(\mathbf{x}))(N_L)$  sejam linearmente independentes sobre  $\Omega_B$ . Esta não é uma questão simples de ser garantida de forma geral. Considerando que as funções base local e global possuem grau polinomial  $p$  e são linearmente independentes, e que  $b(\mathbf{x})$  e  $(1 - b(\mathbf{x}))$  são linearmente independentes, adota-se  $b(\mathbf{x})$  com grau polinomial 1 vez superior as funções base ( $p + 1$ ). Isso resulta um espaço enriquecido onde o número de funções de forma em cada ponto da zona de superposição é compatível com o grau do polinômio.

Nesse trabalho aplicam-se funções de forma locais e globais de grau polinomial quadrático. Dessa forma, a função de combinação foi definida como cúbica e é expressa por:

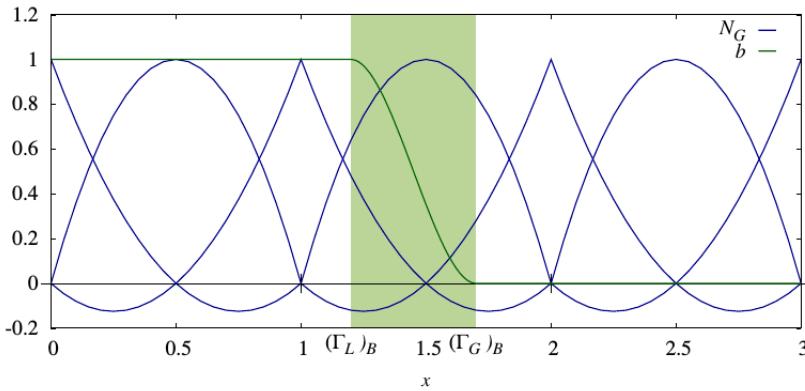
$$b(\mathbf{x}) = \begin{cases} 2 \left( \frac{X_L(\mathbf{x})}{\delta(\mathbf{x})} \right)^3 - 3 \left( \frac{X_L(\mathbf{x})}{\delta(\mathbf{x})} \right)^2 & \text{se } X_G(\mathbf{x}) > 0 \text{ e } X_L(\mathbf{x}) > 0 \\ 1 & X_L(\mathbf{x}) \leq 0 \\ 0 & X_G(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases}, \quad (5.6)$$

com  $X_L(\mathbf{x})$  a função distância assinalada medida a partir de  $(\Gamma_L)_B$ , com valores positivos dentro do domínio local e negativos fora, e  $X_G(\mathbf{x})$  a função distância assinalada medida a partir de  $(\Gamma_G)_B$ , sendo positivo se o ponto pertence à  $\Omega_G$  e negativos caso contrário. Nota-se que os pontos em que ambas funções distância assinalada são positivos estão contidos dentro da zona de sobreposição. O parâmetro  $\delta$  é obtido por  $\delta(\mathbf{x}) = X_L(\mathbf{x}) + X_G(\mathbf{x})$ , e coincide com a espessura da zona de sobreposição quando  $(\Gamma_L)_B$  e  $(\Gamma_G)_B$  são paralelos.

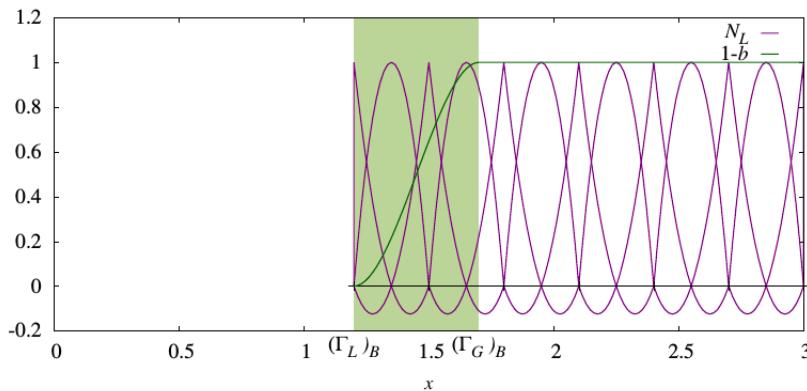
Na prática, considera-se que o domínio global tem o tamanho do domínio total, ficando a definição de  $(\Gamma_G)_B$  para uma etapa posterior, baseado na forma do modelo local,

e os elementos e nós sem suporte físico após a obtenção do novo espaço de funções são desativados da análise.

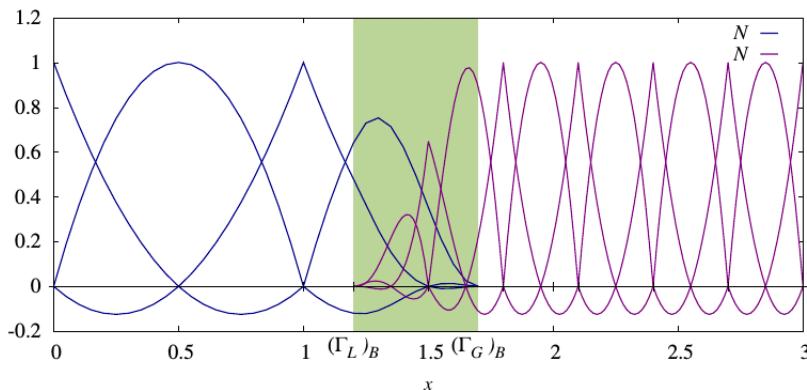
O contorno  $(\Gamma_G)_B$  pode ser obtido através de uma réplica do contorno  $(\Gamma_L)_B$  a uma distância paralela  $\delta$  do mesmo. Na Fig. 5.2 apresenta-se um exemplo do espaço de funções obtido para um caso unidimensional a partir de funções base Lagrangianas quadráticas para os domínios global e local.



(a) Funções Globais e função ponderadora ( $b$ ).



(b) Funções locais e função ponderadora ( $1-b$ )



(c) Novo espaço de funções

Figura 5.2 – Zona de sobreposição - Problema unidimensional.

Após a definição  $(\Gamma_G)_B$  é necessária uma metodologia eficiente para determinação das funções base globais com pequena influência dentro da zona de sobreposição, visto que essas podem levar a um sistema mal condicionado. Para resolver esse problema, utiliza-se, para todos os nós globais A da análise, uma variável definida como:

$$(M_G)_{AA} = \int_{\Omega} b(\boldsymbol{\xi}) N_A(\boldsymbol{\xi}) b(\boldsymbol{\xi}) N_A(\boldsymbol{\xi}) d\Omega, \quad (5.7)$$

e define-se um valor  $M_{min}$  para  $(M_G)_{AA}$ . Os nós globais são desativados se  $(M_G)_{AA} < M_{min}$ .

Os parâmetros de estabilização utilizados nesta formulação ainda necessitam um estudo mais aprofundado. No presente trabalho, faz-se a combinação dos parâmetros calculados em cada discretização:

$$\tau_{SUPG}(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x})\tau_{SUPG}^G(\mathbf{x}) + (1 - b(\mathbf{x}))\tau_{SUPG}^L(\mathbf{x}), \quad (5.8)$$

$$\tau_{PSPG}(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x})\tau_{PSPG}^G(\mathbf{x}) + (1 - b(\mathbf{x}))\tau_{PSPG}^L(\mathbf{x}), \quad (5.9)$$

$$\nu_{LSIC}(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x})\nu_{LSIC}^G(\mathbf{x}) + (1 - b(\mathbf{x}))\nu_{LSIC}^L(\mathbf{x}), \quad (5.10)$$

com  $\tau_{SUPG}^G$ ,  $\tau_{PSPG}^G$  e  $\nu_{LSIC}^G$  sendo os parâmetros de estabilização na malha global e  $\tau_{SUPG}^L$ ,  $\tau_{PSPG}^L$  e  $\nu_{LSIC}^L$  sendo os parâmetros de estabilização na malha local.

## 5.2 Implementação Computacional

O algoritmo de partição de domínios foi implementado para a solução de escoamentos incompressíveis seguindo a formulação apresentada nos capítulos ?? e 2. Nesse código, após a leitura dos dados respectivos às malhas global e local, segue-se com a definição da distância assinalada respectiva a todos os nós da malha global e da malha local com respeito aos contornos  $(\Gamma_G)_B$  e  $(\Gamma_L)_B$ . O contorno  $(\Gamma_G)_B$  é obtido a partir dos dados de entrada, onde define-se a espessura da zona de sobreposição. De posse da distância assinalada e espessura da zona de sobreposição, são definidos quais elementos das malhas local e global fazem parte da zona de sobreposição. Qualquer elemento que possua 1 ou mais nós dentro da zona de sobreposição é considerado como um elemento pertencente a ela.

As equações na região de sobreposição são integradas sobre o elemento local, dessa forma, num processo prévio à solução, os pontos de integração da malha local são projetados sobre a malha global e o elemento e coordenadas locais a que pertencem são armazenados.

Determinam-se também os nós inativos da malha global, sejam porque encontram-se fora da zona de sobreposição, ou, porque possuem pequena influência dentro da mesma, de acordo com a Eq. 5.7.

Finalmente, o processo de marcha no tempo se inicia da maneira explicitada no Item 2.5.1 levando-se em consideração que as funções tentativa e peso, e os parâmetros de estabilização são modificados de acordo com o apresentado neste capítulo.

O algoritmo que descreve esse processo de solução das equações da DFC considerando a partição de domínios pode ser visualizado no Alg. 3.

---

**Algoritmo 3** Algoritmo para problemas de dinâmica dos fluidos computacional com sobreposição de malhas
 

---

- 1: Cálculo da distância assinalada dos nós e pontos de controle aos contornos;
- 2: Determinação dos elementos e células da zona de sobreposição;
- 3: Busca dos pontos de integração na malha global equivalentes aos definidos para à malha local;
- 4: Definição dos nós inativos da malha global;
- 5: **para** o passo de tempo 0 até T **faça**
- 6:     *i* = 0;
- 7:     Predição da solução: aplicação das Eq. (2.65), Eq. (2.66) e Eq. (2.67);
- 8:     **enquanto** ( $\epsilon < \text{tolerância}$ ) **faça**
- 9:         *i*++;
- 10:         Interpolação das variáveis do problema: aplicação da Eq. (2.68), Eq. (2.69) e Eq. (2.70);
- 11:         Cálculo do incremento nas variáveis do problema:  $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$  e  $\mathbf{p}_{n+1}$  de acordo com as Eq. (2.71) e Eq. (2.72);
- 12:         Atualização da solução: calculadas de acordo com Eq. (2.73), Eq. (2.74) e Eq. (2.75).
- 13:         Cálculo do erro:

$$\epsilon = \left\| \mathbf{R}_M^i \right\|_{L^2} \quad (5.11)$$

- 14:         **fim enquanto**
  - 15:         **fim para**
- 

### 5.3 Exemplo de aplicação

Para verificar a metodologia de partição de domínios com sobreposição de malhas, neste item apresenta-se a solução estacionária do problema de Navier Stokes para a cavidade 2D.

A geometria do problema e suas condições contorno são apresentadas na Fig. 5.3. O problema foi avaliado para um número de Reynolds = 100, calculado de acordo com Eq. (2.80) e  $\rho = 1,0$ .

Sabe-se que nas paredes da cavidade podem haver efeitos de camada limite, dessa forma, definiu-se uma malha local que circunda a cavidade de acordo com a Fig. 5.4a. A malha local foi discretizada através de uma aproximação isogeométrica e foi definida com 1440 pontos de controle que foram divididos em 8 diferentes *patches*, chamados de  $P_1, P_2, \dots, P_8$ . Os *patches*  $P_1, P_3, P_6$  e  $P_8$  possuem 64 células e os  $P_2, P_4, P_5$  e  $P_7$  192 células.

A malha global por sua vez é definida para toda a seção da cavidade, sendo composta por 800 elementos triangulares quadráticos e 1681 nós, de acordo com Fig. 5.4b.

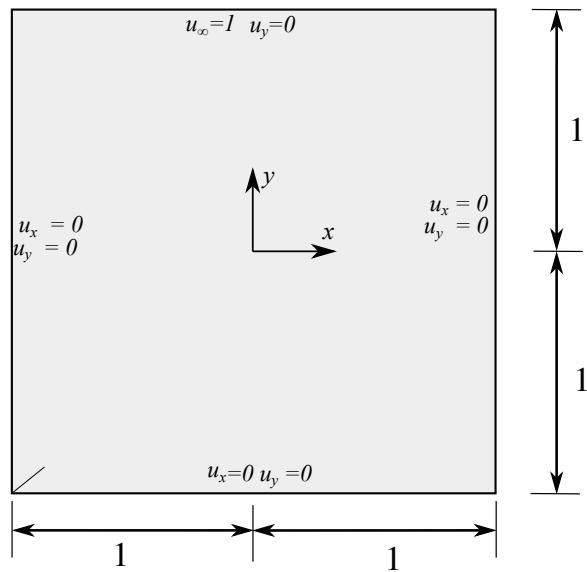


Figura 5.3 – Cavidade 2D: Condições de contorno.

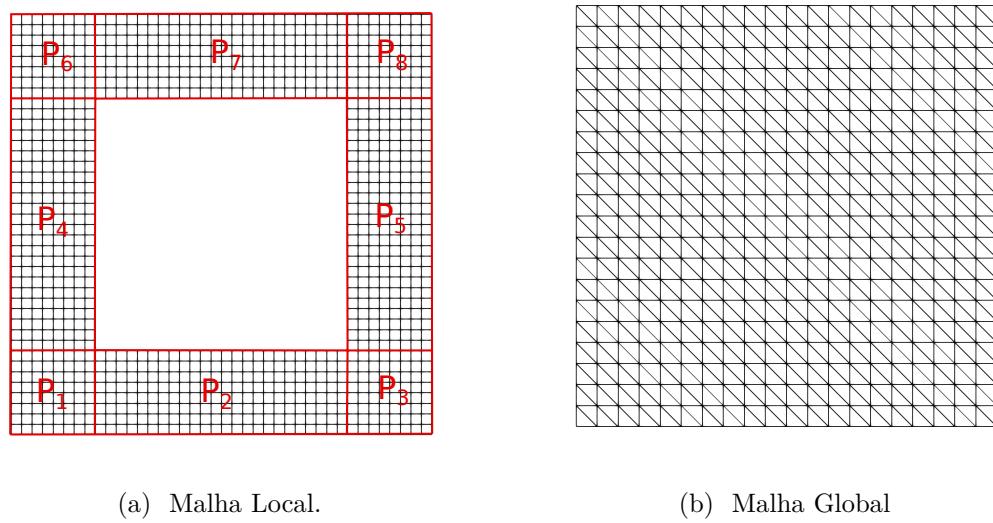


Figura 5.4 – Cavidade 2D: Malhas Global e Local.

Definiu-se uma espessura para a zona de sobreposição de 0,1 medida paralelamente ao contorno fictício local ( $\Gamma_L$ )<sub>B</sub>, e, a partir desse dado, os elementos globais sob o domínio local ( $\Omega_L$ ) e fora da zona de sobreposição ( $\Omega_B$ ) foram desativados. As células e elementos pertencentes à zona de sobreposição, tanto para a malha local quanto para a malha global, podem ser vistos nas Fig. 5.5a e Fig. 5.5b respectivamente.

Os campos de velocidade e pressão obtidos são apresentados nas Fig. 5.6a e Fig. 5.6b.

Os perfis de velocidade adimensionalizados ( $\mathbf{u}/\mathbf{u}_\infty$ ) horizontal e vertical ao longo de duas linhas centrais nas direções  $x$  e  $y$  da cavidade são apresentados na Fig. 5.7 e

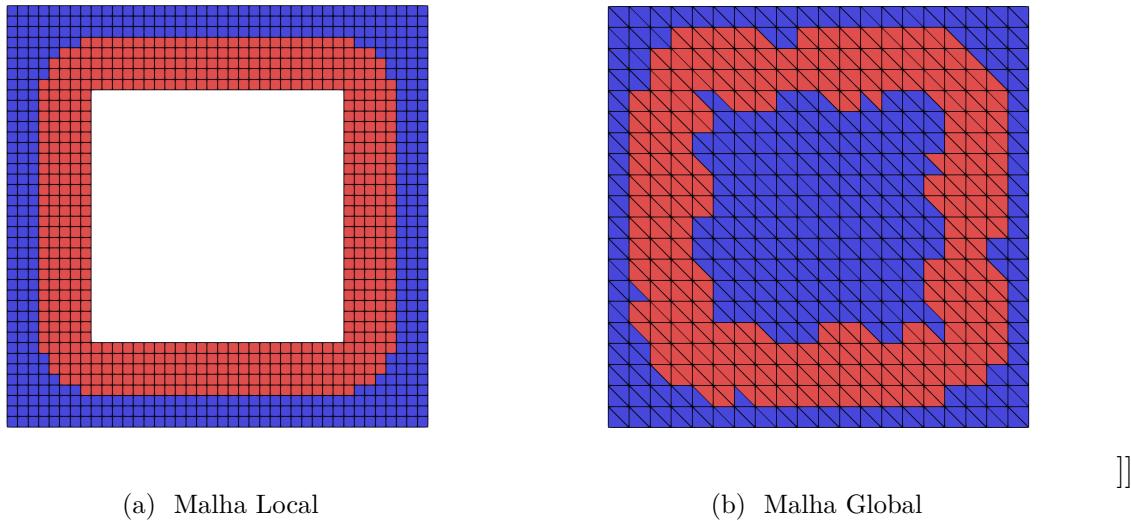


Figura 5.5 – Cavidade 2D: Zona de sobreposição.

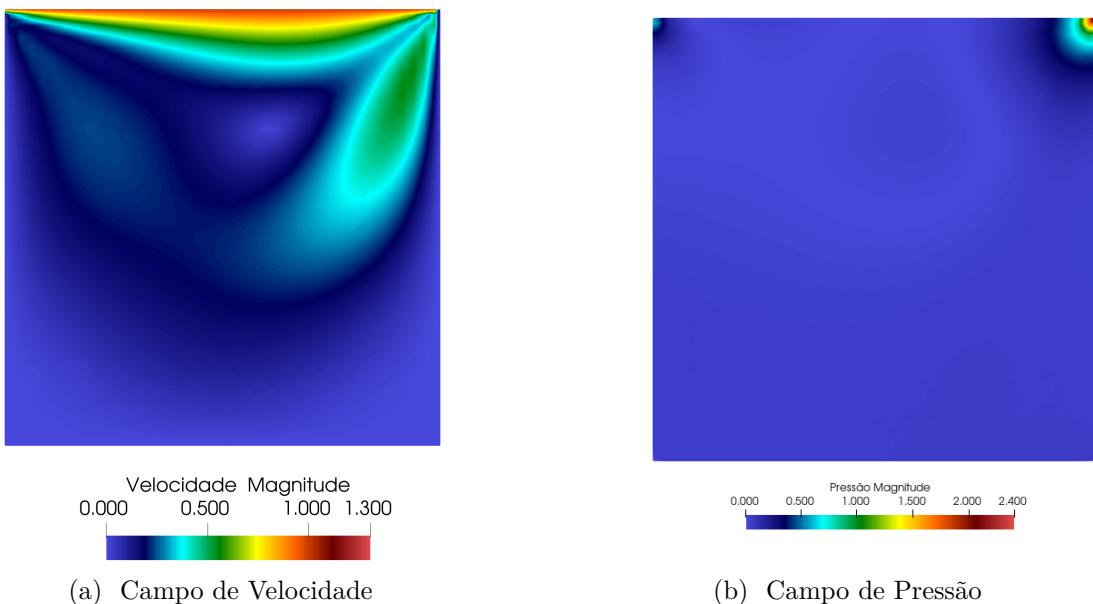


Figura 5.6 – Cavidade 2D: Solução do problema de Navier Stokes para  $Re = 100$ .

comparados com os resultados de Ghia, Ghia e Shin (1982).

De acordo com os resultados obtidos, a metodologia se mostrou muito eficiente, com características promissoras para as próximas aplicações que serão realizadas neste projeto.

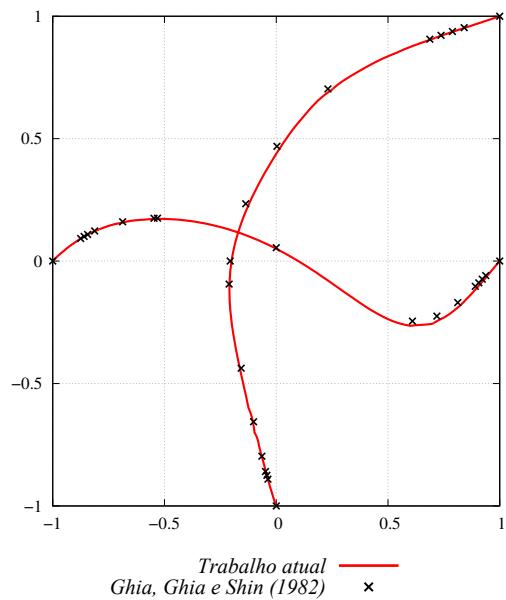


Figura 5.7 – Cavidade 2D: Perfis de velocidade.



# TÉCNICA DE DECOMPOSIÇÃO DE DOMÍNIOS ATRAVÉS DO MÉTODO DE ARLEQUIN ESTABILIZADO - RBSAM

---



---

Com intuito de superar os impasses encontrados com a técnica de decomposição de domínios apresentada no Cap. 5, neste capítulo será apresentado o método multiescala Arlequin.

A primeira parte deste capítulo será dedicada a descrever o método clássico de Arlequin, introduzido por Ben Dhia (1998). Na sequência, será apresentado o método de Arlequin estabilizado introduzido por Fernandes et al. (2020) para a resolução de problemas de escoamento de fluidos incompressíveis. Por fim, será apresentada a descrição da técnica para problemas de contorno móveis e exemplos de validação serão exibidos.

## 6.1 Método Arlequin

O método Arlequin, introduzido por Ben Dhia (1998), consiste na superposição de um domínio local a um domínio global, em região efeitos localizados. Os modelos, local e global, são acoplados em uma zona de colagem através de operadores de Lagrange.

O método de Arlequin, de acordo com Dhia e Rateau (2005), é baseado em três principais ideias ( ver Fig.??):

- Um domínio local  $\Omega_1$  é sobreposto em um domínio global  $\Omega_0$  em uma zona de

interesse de modo a representar efeitos locais;

- Os modelos são colados um ao outro em uma subzona da zona de superposição ( $\Omega_s$ ) , chamada de zona de colagem ( $\Omega_c$ ), através de um operador de acoplamento conveniente;
- Garante-se a distribuição da energia entre os modelos empregando uma função ponderadora, definida a partir da partição da unidade;

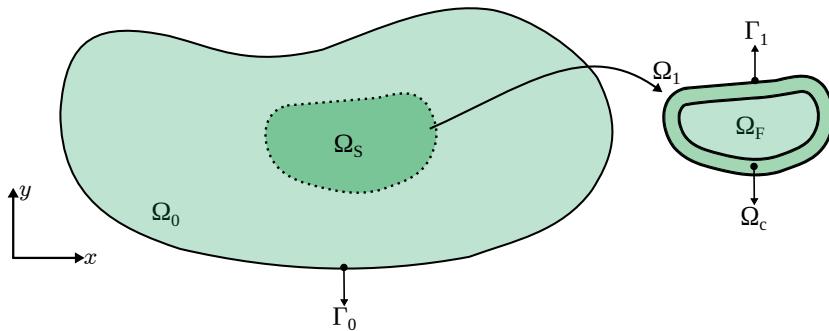


Figura 6.1 – Domínio local e global

Dessa forma, o domínio computacional do problema é definido por:

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_1, \quad (6.1)$$

$$(6.2)$$

a zona de superposição,  $\Omega_s$ , pode ser definida matematicamente da seguinte forma:

$$\Omega_s = \Omega_0 \cap \Omega_1, \quad (6.3)$$

$$\Omega_s = \Omega_c \cup \Omega_f, \quad (6.4)$$

$$\Omega_s > 0, \quad (6.5)$$

$$(6.6)$$

sendo  $\Omega_f$  a chamada zona livre.

Umas das formas mais comuns de se realizar o acoplamento entre os modelos na zona de colagem  $\Omega_c$  é através da aplicação de campos de multiplicadores de Lagrange. Uma forma generalizada de representar os operadores de acoplamento é apresentada em Dhia e Rateau (2002), da maneira que se segue:

$$(\boldsymbol{\lambda}, \Delta u) = \int_{\Omega_c} k_0 [\boldsymbol{\lambda} \cdot \Delta u] + k_1 [\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta u)], \quad (6.7)$$

$$(6.8)$$

onde  $\boldsymbol{\lambda}$  é o campo de multiplicadores de Lagrange,  $\Delta u = \mathbf{u}_0|_{\Omega_c} - \mathbf{u}_1|_{\Omega_c}$  é a diferença entre os campos acoplados na zona de colagem. As constantes  $k_0$  e  $k_1$  são estritamente positivas.

Quando  $k_0 > 0$  e  $k_1 = 0$  têm-se o operador de acoplamento  $L^2$ . Esse acoplador estabelece a continuidade de ordem 0 do campo compatibilizado, que significada que ele garante no sentido de forma fraca, a continuidade das variáveis ao longo da zona de colagem. Para valores  $k_0 > 0$  e  $k_1 > 0$  obtêm-se o operador de acoplamento  $H_1$ , que garante a continuidade de ordem 1 ao campo compatibilizado, fazendo com que ele garanta no sentido de forma fraca, a continuidade de uma combinação de variáveis e seu Laplaciano (GUIDAULT; BELYTSCHKO, 2007).

É importante mencionar que o sucesso do método, indiferente do tipo de operador adotado, depende da escolha apropriada dos parâmetros  $k_0$  e  $k_1$ . Para o acoplamento utilizando  $L^2$ , devido a simplicidade da aplicação na restrição dos campos  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0$  na zona de colagem, o condicionamento do sistema depende fortemente da adoção do parâmetro  $k_0$ . Por isso, esta é uma das razões que a maioria dos trabalhos realizados utilizando o método Arlequin aplica o operador  $H_1$ . Devido a dificuldade de encontrar parâmetros ótimos para o método, o trabalho de Fernandes et al. (2020) apresenta uma modificação na construção do operador de acoplamento  $L^2$  que será apresentada adiante no texto.

A definição do espaço de funções para os operadores de Lagrange é muito importante. O método apresenta flexibilidade para usar uma discretização diferente da zona de colagem, entretanto, usualmente se adota um subconjunto do espaço de funções de um dos modelos sobrepostos.

Por fim, para que o método não adicione energia ao sistema, é necessário que seja definida uma função ponderadora ( $\alpha$ ) que garanta a distribuição da energia do sistema ao longo dos modelos sobrepostos. Em geral, essa função é definida, para cada um dos modelos da seguinte forma:

$$\begin{cases} \alpha_i \in [0; 1] \text{ em } \Omega, \\ \alpha_0 + \alpha_1 = 1 \text{ em } \Omega, \\ \alpha_i = 1 \text{ em } \Omega_i \setminus \Omega_j, \quad i \neq j, \\ \alpha_i = ka > 0 \text{ em } \Omega_f, \end{cases} \quad (6.9)$$

com  $i = 0, 1$  que varia em função do modelo em questão, e  $ka$  uma constante arbitrariamente pequena para o método de Arlequin ser relevante (BEN DHIA, 2008), conforme pode ser observado na Fig. 6.2. REVISAR ESSE TRECHO.

## 6.2 Método Arlequin clássico aplicado à problemas de escoamentos incompressíveis

O método Arlequin vem sendo aplicado amplamente em diversos trabalhos da mecânica dos sólidos nas últimas décadas. Entretanto, no que diz respeito a materiais

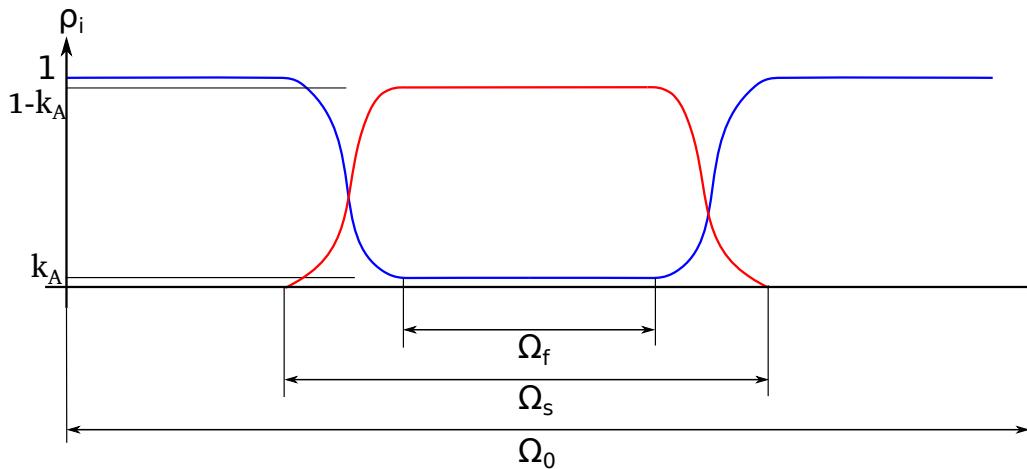


Figura 6.2 – Função Ponderadora

incompressíveis, pode-se citar mais recentemente o trabalho de Jamond e Ben Dhia (2013), no qual os autores desenvolvem uma técnica para análise de sólidos incompressíveis empregando elementos do tipo Taylor-Hood, que satisfazem a condição LBB. Essa metodologia é testada também para problemas descritos pelas equações de Stokes.

De acordo com os autores Jamond e Ben Dhia (2013) a principal dificuldade encontrada para aplicação do método Arlequin no contexto de materiais incompressíveis é que duas restrições devem ser aplicadas concomitantemente: a compatibilização dos campos de interesse na zona de colagem e a condição de incompressibilidade do material nessa mesma região. Os autores apontaram que a imposição da condição de incompressibilidade em ambos os modelos pode gerar problema de redundância, acarretando em um sistema algébrico associado singular.

A solução proposta pelos autores nesse trabalho (JAMOND; BEN DHIA, 2013) foi a aplicação da condição de incompressibilidade em cada ponto do domínio computacional apenas uma vez. A metodologia consiste então da remoção da condição de incompressibilidade dos elementos total ou parcialmente encontrados na zona de colagem ( $\Omega_c$ ) em um dos modelos. Indiferente do modelo eleito para a remoção da condição de incompressibilidade na zona de colagem, na zona livre, a condição de incompressibilidade é removida do modelo global. Deve-se destacar que no trabalho citado existem algumas recomendações com relação a estabilidade da metodologia, como por exemplo, a necessidade de existir pelo menos um elemento global na zona livre. Tal trabalho não explora as possíveis mudanças que acarretariam na estabilidade numérica em caso de sucessivas remoções e inclusões de condição de incompressibilidade no caso de um modelo local móvel.

Por esse motivo, e pelas pesquisas anteriores já realizadas pela presente autora e seu grupo de pesquisa, optou-se pela adoção de elementos estabilizados, os quais já foram retratados nos capítulos anteriores (Cap. 2 e Cap. 3).

Para a construção do método de Arlequin clássico precisamos retomar às equações

para um monomodelo apresentadas na seção 2.3 que representam a forma fraca discretizada espacialmente e estabilizada das equações da quantidade de movimento (Eq. 2.32) e da continuidade (Eq. 2.33). MUDAR AS EQUAÇÕES NO CAPÍTULO DE FLUIDOS PARA DEIXAR SEM O TERMO ALE INICIALMENTE.

Vamos considerar os espaços de dimensão finita das funções tentativa que descrevem a velocidade ( $\mathcal{S}_{ui}^h$ ) e a pressão ( $\mathcal{S}_{pi}^h$ ) e os espaços de funções testes  $\mathcal{V}_{ui}^h$  e  $\mathcal{V}_{pi}^h$ , com  $i = 0, 1$  indicando o índice do modelo, definidos como:

$$\mathcal{S}_{ui}^h = \left\{ \mathbf{u}_i^h \mid \mathbf{u}_i^h(\cdot, t) \in (H^{1h}(\Omega_i), \mathbf{u}_i^h = \mathbf{u}_{Di}^h \text{ em } \Gamma_{Di}) \right\} \quad (6.10)$$

$$\mathcal{S}_{pi}^h = \left\{ p_i^h \mid p_i^h(\cdot) \in L^{2h}(\Omega_i) \right\}, \quad (6.11)$$

$$\mathcal{V}_{ui}^h = \left\{ \mathbf{w}_i^h \mid \mathbf{w}_i^h(\cdot) \in H^{1h}(\Omega_i), \mathbf{w}_i^h = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_{Di} \right\}, \quad (6.12)$$

e,

$$\mathcal{V}_{pi}^h = \mathcal{S}_{pi}^h. \quad (6.13)$$

Analogamente, os espaços das funções tentativas ( $\mathcal{M}^h$ ) e teste ( $\mathcal{Q}^h$ ) para o campo dos multiplicadores de Lagrange ( $\boldsymbol{\lambda}$ ) são definidos como:

$$\mathcal{M}^h = \left\{ \boldsymbol{\lambda}^h \mid \boldsymbol{\lambda}^h(\cdot) \in H^{1h}(\Omega_c) \right\}, \quad (6.14)$$

$$\mathcal{Q}^h = \mathcal{M}^h. \quad (6.15)$$

A aplicação do operador de acoplamento  $L^2$  à formulação clássica Arlequin consiste em dado os espaços tentativa e teste apresentados nas equações anteriores: Encontrar  $(\mathbf{u}_0^h, p_0^h, \mathbf{u}_1^h, p_1^h, \boldsymbol{\lambda}^h) \in \mathcal{S}_{u0}^h \times \mathcal{S}_{p0}^h \times \mathcal{S}_{u1}^h \times \mathcal{S}_{p1}^h \times \mathcal{M}^h$  de maneira que  $\forall \mathbf{w}_0^h \in \mathcal{V}_{u0}^h, q_0^h \in \mathcal{V}_{p0}^h, \mathbf{w}_1^h \in \mathcal{V}_{u1}^h, q_1^h \in \mathcal{V}_{p1}^h$ , e  $\forall \boldsymbol{\zeta}^h \in \mathcal{Q}^h$ :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_0^h}{\partial t} d\Omega_0 \\ & + \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot (\mathbf{u}_0^h \cdot \nabla \mathbf{u}_0^h) d\Omega_0 \\ & + \int_{\Omega_0} \alpha_0 \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{w}_0^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_0 \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{\text{SUPG}} ((\mathbf{u}_0^h \cdot \nabla) \mathbf{w}_0^h) \cdot \mathbf{r}_{M0}^h(\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_0 \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \nu_{\text{LSIC}} \nabla \cdot \mathbf{w}_0^h r_{C0}^h(\mathbf{u}_0^h) d\Omega_0 \\ & + \chi_0 \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_0^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h d\Omega_c = \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot \mathbf{f}_0^h d\Omega_0 + \int_{\Gamma_0} \alpha_0 \mathbf{u}_0^h \cdot \mathbf{h}_0^h d\Gamma_0, \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\int_{\Omega_0} \alpha_0 q_0^h \nabla \cdot \mathbf{u}_0^h d\Omega_0 + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{\text{PSPG}} \left( \frac{\nabla q_0^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_{M0}^h(\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_0 = 0, \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_1^h}{\partial t} d\Omega_1 \\
& + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot (\mathbf{u}_1^h \cdot \nabla \mathbf{u}_1^h) d\Omega_1 \\
& + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{w}_1^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{SUPG} ((\mathbf{u}_1^h \cdot \nabla) \mathbf{w}_1^h) \cdot \mathbf{r}_{M1}^h(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \nu_{LSIC} \nabla \cdot \mathbf{w}_1^h r_{Ci}^h(\mathbf{u}_1^h) d\Omega_1 \\
& + \chi_1 \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_1^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h d\Omega_c = \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{f}_1^h d\Omega_1 + \int_{\Gamma_1} \alpha_1 \mathbf{u}_1^h \cdot \mathbf{h}_1^h d\Gamma_1,
\end{aligned} \tag{6.18}$$

$$\int_{\Omega_1} \alpha_1 q_1^h \nabla \cdot \mathbf{u}_1^h d\Omega_1 + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{PSPG} \left( \frac{\nabla q_1^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_{M1}^h(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 = 0, \tag{6.19}$$

$$\int_{\Omega_c} \boldsymbol{\zeta}^h \cdot (\mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_1^h) d\Omega_c \tag{6.20}$$

onde  $\mathbf{r}_{Mi}^h$  e  $r_{Ci}^h$  são os resíduos da equação da quantidade de movimento e da equação da continuidade, respectivamente, dados por:

$$\mathbf{r}_{Mi}^h(\mathbf{u}_i^h, p_i^h, \boldsymbol{\lambda}^h) = \alpha_i \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}_i^h}{\partial t} + (\mathbf{u}_i^h \cdot \nabla) \mathbf{u}_i^h - \mathbf{f}_i^h \right) - \alpha_i \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_i^h, p_i^h) + \chi_i \boldsymbol{\lambda}^h, \tag{6.21}$$

$$r_{Ci}^h(\mathbf{u}_i^h) = \alpha_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i^h, \tag{6.22}$$

com  $\chi_i$ ) descrito da maneira que se segue:

$$\chi_i = \begin{cases} (-1)^i & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega_c \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \notin \Omega_c \end{cases} \dots \tag{6.23}$$

CONVERSAR COM O RODOLFO SOBRE ESSE TRECHO! O problema descrito pelas equações 6.16 à 6.20 descreve à versão clássica do método de Arlequin para o problema de Navier-Stokes estabilizado pela técnica XXXXX. Matematicamente trata-se de um problema de ponto de sela decorrente de uma formulação mista. Entretanto, desde que a condição LBB seja satisfeita, existe solução para o problema e ela é única. Em Guidault e Belytschko (2007) pode-se encontrar uma vasta análise matemática a cerca das questões relacionadas com estabilidade, convergência e relevância do método. Nesta pesquisa, os autores relatam, por exemplo, a necessidade de emprego de funções ponderadoras contínuas quando utilizado o operador de acoplamento  $L^2$ , tal caso não ocorre com o operador de acoplamento  $H^1$ . Além disso, os autores destacam que espaços muito refinados para os acopladores de Lagrange podem levar a uma solução não convergente, independente do tipo de operador de acoplamento. Este problema ocorre devido a forte dependência da discretização do modelo global na solução.

O problema descrito no método Arlequin clássico é análogo a formulação mista

em elementos finitos para escoamentos incompressíveis, que limita a escolha das funções aproximadoras para o campo de velocidade e pressão. No caso da mecânica dos fluidos, conforme apresentado no Cap. 2, uma forma de superar esta restrição é o uso de métodos estabilizados como o PSPG. Seguindo essa mesma filosofia, Fernandes et al. (2020) introduzem uma técnica de estabilização consistente que será apresentada na seguinte seção.

## 6.3 Método Arlequin estabilizado aplicado à problemas de escoamentos incompressíveis

Com intuito de superar a condição LBB para o problema de Arlequin, Fernandes et al. (2020) desenvolvem uma técnica de estabilização consistente baseada em resíduo. Para isso, introduz-se uma parcela adicional à equação dos campos de multiplicadores de Lagrange, que leva em conta o gradiente de  $\zeta^h$  e o resíduo da equação da quantidade de movimento:

$$\sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_e^c} \frac{\tau_{ARLQ0}}{\rho} \nabla \zeta^h : \nabla \mathbf{r}_{M0}^h d\Omega_c - \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_e^c} \frac{\tau_{ARLQ1}}{\rho} \nabla \zeta^h : \nabla \mathbf{r}_{M1}^h d\Omega_c, \quad (6.24)$$

sendo  $\tau_{ARLQ0}$  e  $\tau_{ARLQ1}$  parâmetros de estabilização, respectivamente da malha global e local, que devem ser suficientes para estabilizar o campo de multiplicadores de Lagrange sem comprometer a estabilidade do método. A obtenção destes parâmetros será abordada na subseção seguinte.

Dessa forma, pode-se definir a solução do problema de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis utilizando a técnica de Arlequin estabilizada da seguinte forma: Encontrar  $(\mathbf{u}_0^h, p_0^h, \mathbf{u}_1^h, p_1^h, \boldsymbol{\lambda}^h) \in \mathcal{S}_{u0}^h \times \mathcal{S}_{p0}^h \times \mathcal{S}_{u1}^h \times \mathcal{S}_{p1}^h \times \mathcal{M}^h$  de maneira que  $\forall \mathbf{w}_0^h \in \mathcal{V}_{u0}^h$ ,  $q_0^h \in \mathcal{V}_{p0}^h$ ,  $\mathbf{w}_1^h \in \mathcal{V}_{u1}^h$ ,  $q_1^h \in \mathcal{V}_{p1}^h$ , e  $\forall \zeta^h \in \mathcal{Q}^h$ :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_0^h}{\partial t} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot (\mathbf{u}_0^h \cdot \nabla \mathbf{u}_0^h) d\Omega_0 \\ & + \int_{\Omega_0} \alpha_0 \dot{\epsilon}(\mathbf{w}_0^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_0 \\ & + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_e^c} \tau_{\text{SUPG}} ((\mathbf{u}_0^h \cdot \nabla) \mathbf{w}_0^h) \cdot \mathbf{r}_{M0}^h (\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_0 \\ & + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_e^c} \nu_{\text{LSIC}} \nabla \cdot \mathbf{w}_0^h r_{C0}^h (\mathbf{u}_0^h) d\Omega_0 \\ & + \chi_0 \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_0^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h d\Omega_c = \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot \mathbf{f}_0^h d\Omega_0 + \int_{\Gamma_0} \alpha_0 \mathbf{u}_0^h \cdot \mathbf{h}_0^h d\Gamma_0, \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\int_{\Omega_0} \alpha_0 q_0^h \nabla \cdot \mathbf{u}_0^h d\Omega_0 + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{PSPG} \left( \frac{\nabla q_0^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_{M0}^h (\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_0 = 0, \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_1^h}{\partial t} d\Omega_1 + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot (\mathbf{u}_1^h \cdot \nabla \mathbf{u}_1^h) d\Omega_1 \\ & + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{w}_1^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{SUPG} ((\mathbf{u}_1^h \cdot \nabla) \mathbf{w}_1^h) \cdot \mathbf{r}_{M1}^h (\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \nu_{LSIC} \nabla \cdot \mathbf{w}_1^h r_{C1}^h (\mathbf{u}_1^h) d\Omega_1 \\ & + \chi_1 \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_1^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h d\Omega_c = \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{f}_1^h d\Omega_1 + \int_{\Gamma_1} \alpha_1 \mathbf{u}_1^h \cdot \mathbf{h}_1^h d\Gamma_1, \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \alpha_1 q_1^h \nabla \cdot \mathbf{u}_1^h d\Omega_1 \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{PSPG} \left( \frac{\nabla q_1^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_{M1}^h (\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 = 0, \end{aligned} \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\zeta}^h \cdot (\mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_1^h) d\Omega_c + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_c^e} \frac{\tau_{ARLQ0}}{\rho} \nabla \boldsymbol{\zeta}^h : \nabla \mathbf{r}_{M0}^h d\Omega_c - \\ & \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_c^e} \frac{\tau_{ARLQ1}}{\rho} \nabla \boldsymbol{\zeta}^h : \nabla \mathbf{r}_{M1}^h d\Omega_c, \end{aligned} \quad (6.29)$$

com os resíduos  $\mathbf{r}_{Mi}^h$  e  $r_{Ci}^h$  escritos conforme as Eq. 6.21 e Eq .6.22.

O sistema resultante pode ser reescrito em notação matricial como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{L}}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_1 & -\hat{\mathbf{L}}_1 \\ \mathbf{L}_0^T & -\mathbf{L}_1^T & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_1 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_\lambda \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

Note que na estabilização Arlequin baseada no resíduo (RBSAM) não existem elementos zeros na diagonal da matriz, diferente do mesmo problema na formulação clássica Arlequin.

No trabalho de Fernandes et al. (2020) pode-se encontrar a análise de estabilidade dessa técnica e testes numéricos que avaliam o condicionamento do sistema algébrico e a convergência do método.

O problema de Arlequin não linear apresentado nas equações: Eq. 6.25 à 6.29 pode ser reescrito em sua forma semi-discreta residual para  $i = 0, 1$ , da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{M,i} = & \int_{\Omega_i} \alpha_i \rho \mathbf{w}_i^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i^h}{\partial t} d\Omega_i + \int_{\Omega_i} \alpha_i \rho \mathbf{w}_i^h \cdot (\mathbf{u}_i^h \cdot \nabla \mathbf{u}_i^h) d\Omega_i \\
& + \int_{\Omega_i} \alpha_i \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{w}_i^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_i^h, p_i^h) d\Omega_i \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{SUPG} ((\mathbf{u}_i^h \cdot \nabla) \mathbf{w}_i^h) \cdot \mathbf{r}_{Mi}^h(\mathbf{u}_i^h, p_i^h) d\Omega_i \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \nu_{LSIC} \nabla \cdot \mathbf{w}_i^h r_{Ci}^h(\mathbf{u}_i^h) d\Omega_i \\
& + \chi_i \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_i^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h d\Omega_c - \int_{\Omega_i} \alpha_i \rho \mathbf{w}_i^h \cdot \mathbf{f}_i^h d\Omega_i - \int_{\Gamma_i} \alpha_i \mathbf{u}_i^h \cdot \mathbf{h}_i^h d\Gamma_i,
\end{aligned} \tag{6.31}$$

$$\mathbf{R}_{C,i} = \int_{\Omega_i} \alpha_i q_i^h \nabla \cdot \mathbf{u}_i^h d\Omega_i + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{PSPG} \left( \frac{\nabla q_i^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_{Mi}^h(\mathbf{u}_i^h, p_i^h) d\Omega_i = 0, \tag{6.32}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_L = & \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\zeta}^h \cdot (\mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_1^h) d\Omega_c + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \frac{\tau_{ARLQ0}}{\rho} \nabla \boldsymbol{\zeta}^h : \nabla \mathbf{r}_{M0}^h d\Omega_c \\
& - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \frac{\tau_{ARLQ1}}{\rho} \nabla \boldsymbol{\zeta}^h : \nabla \mathbf{r}_{M1}^h d\Omega_c,
\end{aligned} \tag{6.33}$$

Com  $\dot{\mathbf{U}}_i$ ,  $\mathbf{U}_i$ ,  $\mathbf{p}_i$  e  $\Lambda$  os vetores nodais dos graus de liberdade respectivos a velocidade, aceleração, pressão e multiplicadores de Lagrange. Dessa forma, pode-se escrever o problema semidiscreto da DFC como: Determinar  $\dot{\mathbf{U}}_0$ ,  $\mathbf{U}_0$ ,  $\mathbf{p}_0$ ,  $\dot{\mathbf{U}}_1$ ,  $\mathbf{U}_1$ ,  $\mathbf{p}_1$  e  $\Lambda$  de maneira que:

$$\mathbf{R}_{M,0}(\dot{\mathbf{U}}_0, \mathbf{U}_0, \mathbf{p}_0, \Lambda) = \mathbf{0}, \tag{6.34}$$

$$\mathbf{R}_{C,0}(\dot{\mathbf{U}}_0, \mathbf{U}_0, \mathbf{p}_0, \Lambda) = \mathbf{0}, \tag{6.35}$$

$$\mathbf{R}_{M,1}(\dot{\mathbf{U}}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{p}_1, \Lambda) = \mathbf{0}, \tag{6.36}$$

$$\mathbf{R}_{C,1}(\dot{\mathbf{U}}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{p}_1, \Lambda) = \mathbf{0}, \tag{6.37}$$

$$\mathbf{R}_L(\dot{\mathbf{U}}_0, \mathbf{U}_0, \mathbf{p}_0, \dot{\mathbf{U}}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{p}_1, \Lambda) = \mathbf{0}. \tag{6.38}$$

Quanto ao procedimento de integração temporal, utilizou-se também o método *alpha*-generalizado, conforme apresentado na seção 2.4.

Neste trabalho, o campo de multiplicadores de Lagrange é sempre definido como um subconjunto do modelo local. Esta escolha permite que se tenha os multiplicadores de Lagrange definidos sempre nos mesmos elementos finitos durante toda a análise, mesmo no caso de malhas móveis, facilitando a implementação computacional. Além disso, adotou-se uma variação linear para as funções ponderadoras.

### 6.3.1 Parâmetro de estabilização $\tau_{ARLQ}$

Propõe-se como critério para o cálculo de  $\tau_{ARLQ}$  a obtenção de termos de estabilização com magnitude próxima aos termos da equação de acoplamento, através da utilização de normas vetoriais.

$$\tau_{ARLQi} = \frac{1}{\sqrt{(\tau_{A^i})^{-2} + (\tau_{B^i})^{-2} + (\tau_{C^i})^{-2} + (\tau_{D^i})^{-2} + (\tau_{E^i})^{-2}}} \quad (6.39)$$

i=0,1 definindo qual modelo global e local respectivamente

$$\mathbf{M}_{\lambda_0} = \int_{\Omega_c^e} N_k \cdot \mathbf{u}_0^h d\Omega_c^e \quad (6.40)$$

$$\mathbf{M}_{\lambda_1} = - \int_{\Omega_c^e} N_k \cdot \mathbf{u}_1^h d\Omega_c^e \quad (6.41)$$

$$\mathbf{t}_i = \int_{\Omega_c^e} \nabla N_k : \alpha_i \nabla (\mathbf{u}_i^h \cdot \nabla \mathbf{u}_i^h) d\Omega_c^e \quad (6.42)$$

$$\mathbf{j}_i = \int_{\Omega_c^e} \nabla N_k : \alpha_i \nabla \left( \frac{\partial \mathbf{u}_i^h}{\partial t} \right) d\Omega_c^e \quad (6.43)$$

$$\mathbf{k}_i = \int_{\Omega_c^e} \nabla^2 N_k : \alpha_i 2\mu \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} (\mathbf{u}_i^h) d\Omega_c^e \quad (6.44)$$

$$\mathbf{p}_i = \int_{\Omega_c^e} \nabla N_k : \alpha_i \nabla (-p \mathbf{I}) d\Omega_c^e \quad (6.45)$$

$$\mathbf{\Gamma}_i = \int_{\Omega_c^e} \nabla N_k : \nabla (\chi(i) \boldsymbol{\lambda}^h) d\Omega_c^e \quad (6.46)$$

Normas:

$$\tau_{A_1^i} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_1}\|}{\|\mathbf{t}_i\|} \quad (6.47)$$

$$\tau_{A_2^i} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_0}\|}{\|\mathbf{t}_i\|} \quad (6.48)$$

$$\tau_{B_1^i} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_1}\|}{\|\mathbf{j}_i\|} \quad (6.49)$$

$$\tau_{B_2^i} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_0}\|}{\|\mathbf{j}_i\|} \quad (6.50)$$

$$\tau_{C_1^i} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_1}\|}{\|\mathbf{k}_i\|} \quad (6.51)$$

$$\tau_{C_2^i} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_0}\|}{\|\mathbf{k}_i\|} \quad (6.52)$$

$$\tau_{D_1^i} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_1}\|}{\|\mathbf{p}_i\|} \quad (6.53)$$

$$\tau_{D_2^i} = \frac{||\mathbf{M}_{\lambda_0}||}{||\mathbf{p}_i||} \quad (6.54)$$

$$\tau_{E_1^i} = \frac{||\mathbf{M}_{\lambda_1}||}{||\boldsymbol{\Gamma}_i||} \quad (6.55)$$

$$\tau_{E_2^i} = \frac{||\mathbf{M}_{\lambda_0}||}{||\boldsymbol{\Gamma}_i||} \quad (6.56)$$

$$\tau_{A^i} = \frac{1}{\sqrt{(\tau_{A_1^i})^{-2} + (\tau_{A_2^i})^{-2}}} \quad (6.57)$$

$$\tau_{B^i} = \frac{1}{\sqrt{(\tau_{B_1^i})^{-2} + (\tau_{B_2^i})^{-2}}} \quad (6.58)$$

$$\tau_{C^i} = \frac{1}{\sqrt{(\tau_{C_1^i})^{-2} + (\tau_{C_2^i})^{-2}}} \quad (6.59)$$

$$\tau_{D^i} = \frac{1}{\sqrt{(\tau_{D_1^i})^{-2} + (\tau_{D_2^i})^{-2}}} \quad (6.60)$$

$$\tau_{E^i} = \frac{1}{\sqrt{(\tau_{E_1^i})^{-2} + (\tau_{E_2^i})^{-2}}} \quad (6.61)$$

## 6.4 Superposição de modelos móveis

As equações Eq. 6.25 à 6.29 resolvem problemas de escoamentos incompressíveis em uma discretização Euleriana. Entretanto, como têm-se como alvo à movimentação do domínio local do fluido (ver Fig. 6.3) para acomodar a movimentação da estrutura, faz-se o uso de uma descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária (ALE) no modelo local ( $/\Omega_{\alpha_1}$ ) enquanto que o domínio global ( $/\Omega_{\alpha_0}$ ) mantém-se fixo e com descrição Euleriana.

Dessa forma, a superposição de modelos não somente auxilia na representação de efeitos localizados em um escoamento, como também possibilita considerar o movimento da estrutura imersa ao fluido como um efeito de interesse.

Para o entendimento da metodologia de superposição de modelos móveis em um esquema Euleriano-ALE, pode-se analisar a Fig. 6.3. Nela, pode-se observar a mudança de configuração dos modelos de fluido do passo  $t_n$  para o passo  $t_{n+1}$ . Nota-se que o modelo global mantém sua geometria e discretização inalterados no passo de tempo, enquanto que o modelo local é movimentado seja pra representar uma nova localização de um objeto imerso, ou de um fenômeno de interesse envolvido. Vale ressaltar que o contorno do domínio do modelo local ( $/\Omega_{\alpha_1}$ ) é conhecido em  $t_n$  e em  $t_{n+1}$ , e que a zona de superposição  $\Omega_s$  é definida em diferentes posições em cada instante.

Para análise de domínios móveis do tipo Euleriano-ALE, a Eq. 6.27 será reescrita,

levando-se em consideração as definições apresentadas na Seção 2.2, como:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_1^h}{\partial t} d\Omega_1 \\
 & + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \left( (\mathbf{u}_1^h - \bar{\mathbf{u}}_1^h) \cdot \nabla \mathbf{u}_1^h \right) d\Omega_1 \\
 & + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \dot{\varepsilon}(\mathbf{w}_1^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 \\
 & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{SUPG} ((\mathbf{u}_1^h \cdot \nabla) \mathbf{w}_1^h) \cdot \mathbf{r}_{M1}^h(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 \\
 & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \nu_{LSIC} \nabla \cdot \mathbf{w}_1^h r_{C1}^h(\mathbf{u}_1^h) d\Omega_1 \\
 & + \chi_1 \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_1^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h d\Omega_c = \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{f}_1^h d\Omega_1 + \int_{\Gamma_1} \alpha_1 \mathbf{u}_1^h \cdot \mathbf{h}_1^h d\Gamma_1,
 \end{aligned} \tag{6.62}$$

e o resíduo apresentado na Eq. 6.21 ficará reescrito para  $i = 1$ , como:

$$\mathbf{r}_{M1}^h(\mathbf{u}_1^h, p_1^h, \boldsymbol{\lambda}^h) = \alpha_1 \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}_1^h}{\partial t} + (\mathbf{u}_1^h - \bar{\mathbf{u}}_1^h) \cdot \nabla \mathbf{u}_1^h - \mathbf{f}_1^h \right) - \alpha_1 \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) + \chi_1 \boldsymbol{\lambda}^h. \tag{6.63}$$

Além da consideração da descrição ALE para o modelo local, deve-se ressaltar que a função ponderadora  $\alpha_i$  passa a ser uma variável temporal, ou seja,  $\alpha_i(t)$ , tanto para o modelo local quanto para o modelo global, já que a zona de superposição  $\Omega_s$  é definida em diferentes posições em cada instante. Dessa forma, a integração temporal utilizando o método *alpha*-generalizado deve considerar essa variação através da seguinte interpolação no tempo intermediário:

$$\alpha_{0(n+\alpha_f)} = \alpha_{0(n)} + \alpha_f (\alpha_{0(n+1)} - \alpha_{0(n)}), \tag{6.64}$$

$$\alpha_{1(n+\alpha_f)} = \alpha_{1(n)} + \alpha_f (\alpha_{1(n+1)} - \alpha_{1(n)}). \tag{6.65}$$

## 6.5 Implementação Computacional

## 6.6 Exemplos

### 6.6.1 Escoamento sobre um aerofólio NACA 0012

### 6.6.2 Aerofólio com movimento de arfagem prescrito

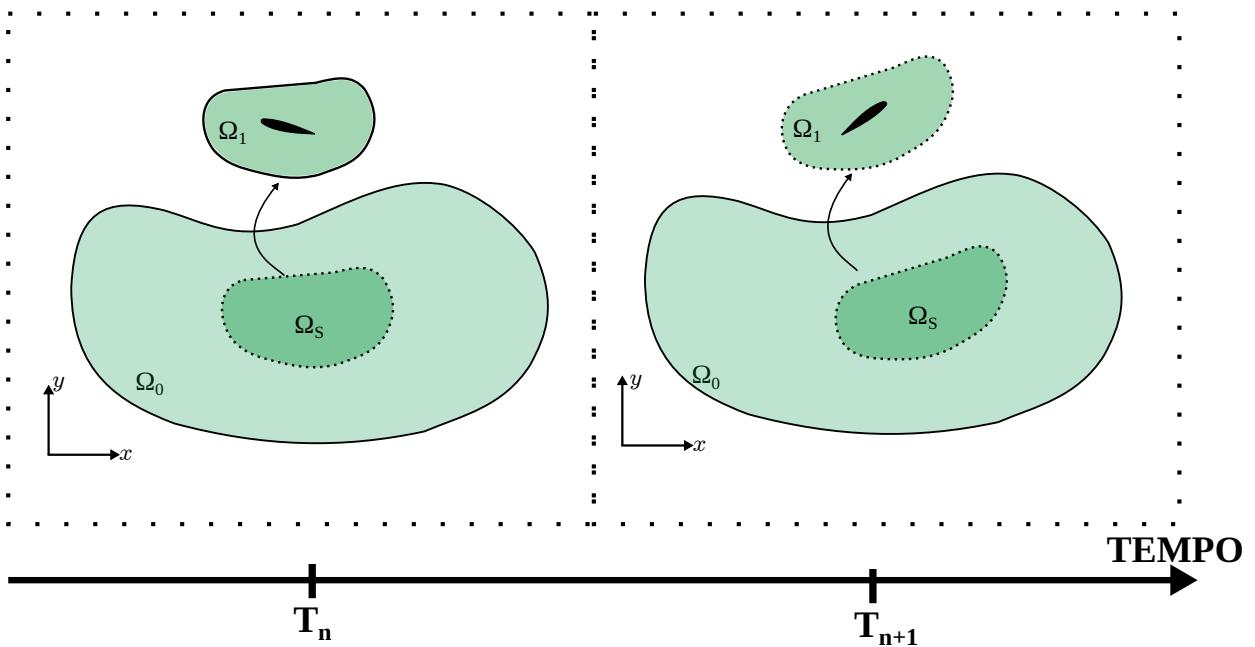


Figura 6.3 – Domínio Arlequin móvel

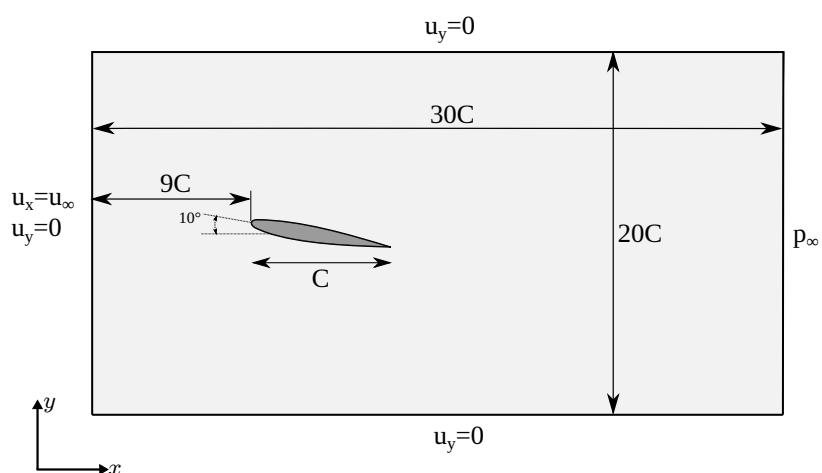


Figura 6.4 – Geometria Aerofólio

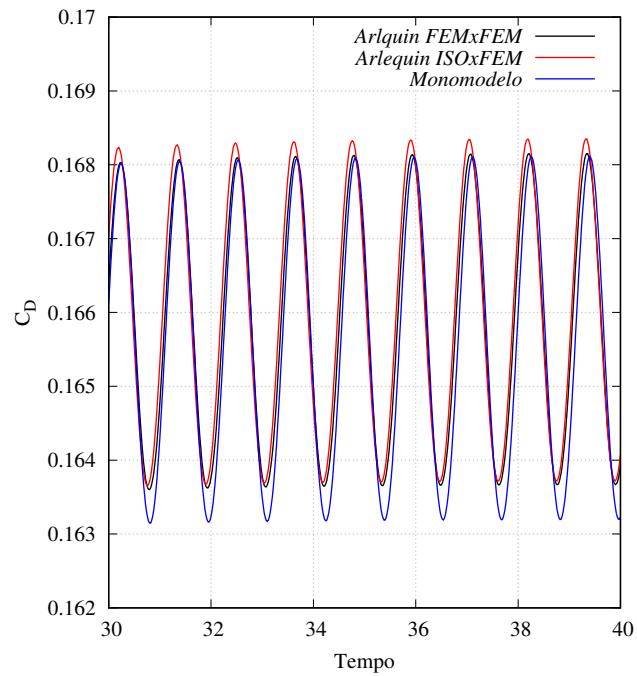


Figura 6.5 – Coeficiente de Arrasto

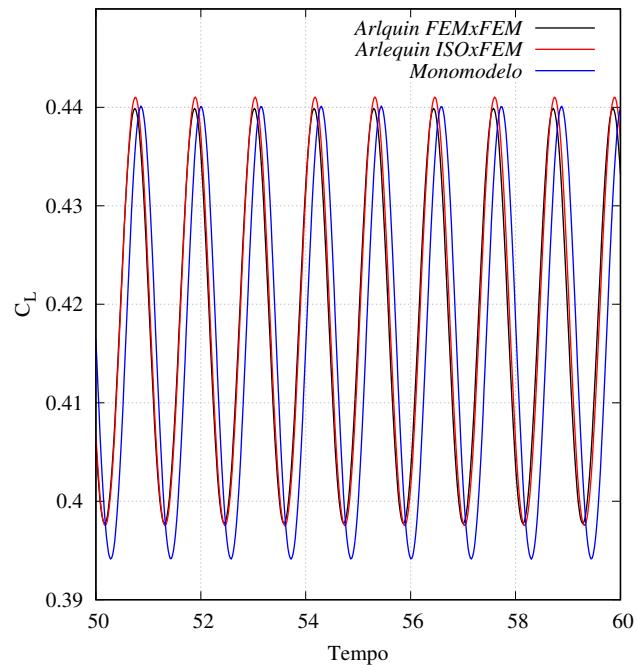


Figura 6.6 – Coeficiente de Sustentação

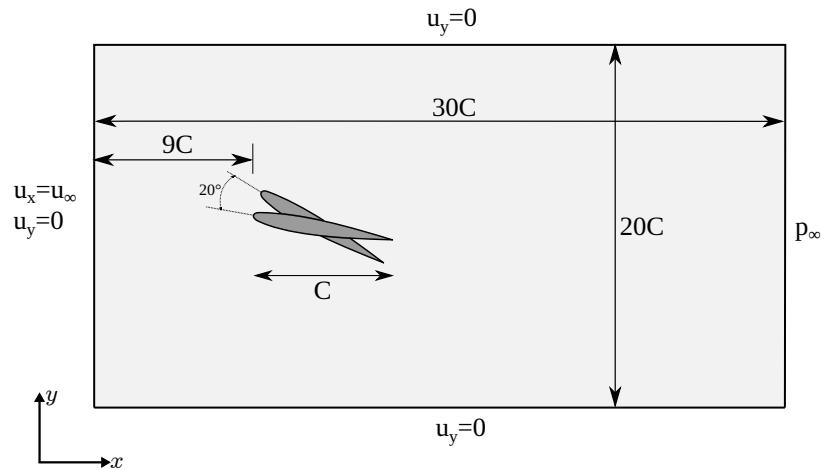


Figura 6.7 – Geometria Aerofólio

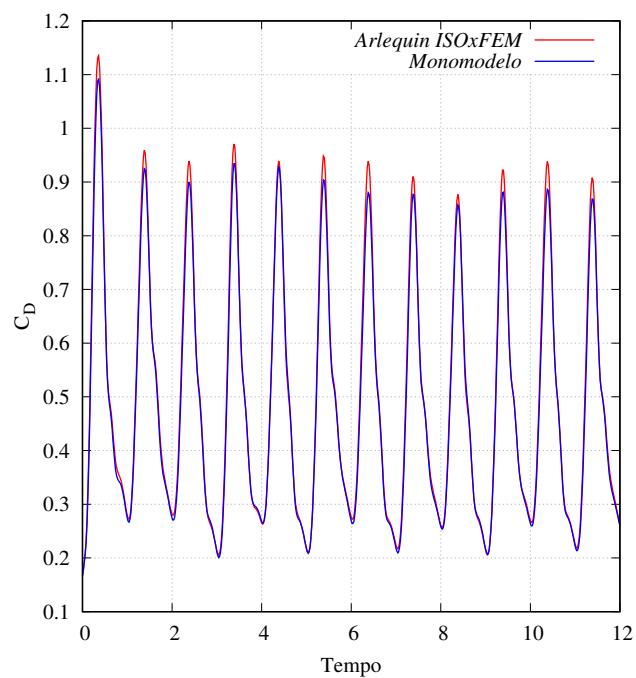


Figura 6.8 – Coeficiente de Arrasto

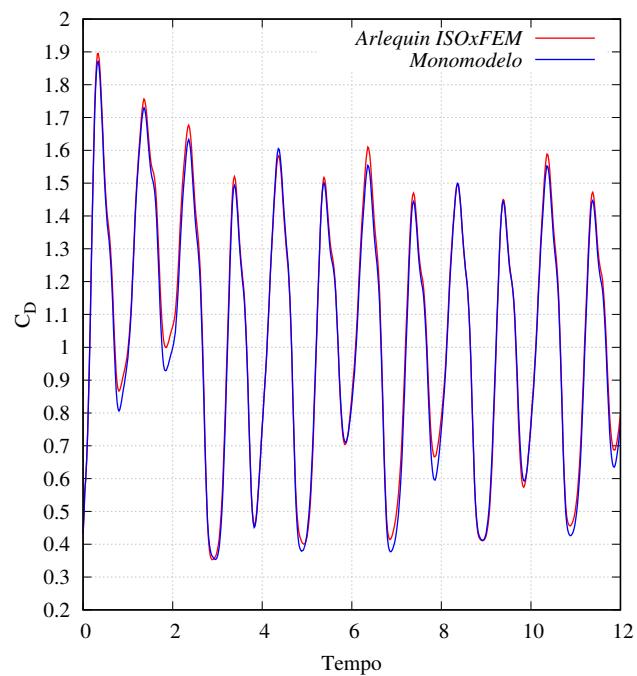


Figura 6.9 – Coeficiente de Sustentação




---

# INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

---



---

O acoplamento entre Fluido e Estrutura proposto nesse trabalho é do tipo particionado forte através da técnica de bloco iterativo. O acoplamento foi resultado do desenvolvimento computacional dos modelos matemáticos apresentados nos capítulos anteriores deste trabalho, ou seja, das equações que descrevem o comportamento do fluido, do *Capítulo 1* e *Capítulo 2*, juntamente com a técnica de decomposição de domínios baseada no método Arlequin para o modelo de fluido apresentada no *Capítulo 4*, e, também, a metodologia de análise não linear de estruturas de casca pelo método dos elementos finitos posicional vista no *Capítulo 3*.

Nesse contexto, para o acoplamento, utiliza-se a técnica de rastreamento de interface para a malha local do fluido em contato com a estrutura, na qual aplica-se uma descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária, fazendo com que o domínio computacional local possa ser movido independentemente do movimento do fluido.

No texto a seguir apresentam-se inicialmente as condições de acoplamento que possibilitam a resolução dos problemas de IFE, a técnica de movimentação de malhas utilizada, o procedimento adotado em malhas não coincidentes de fluido e estrutura na interface fluido-estrutura, e, por fim, o tipo de acoplamento adotado.

## 7.1 Condições de acoplamento

O domínio computacional para a análise de problemas de interação fluido-estrutura (Fig. 7.1), denominado de  $\Omega_{IFE}$ , é composto pela união entre os domínios da estrutura  $\Omega_E$  e do fluido  $\Omega_F$ , ou seja,  $\Omega_{IFE} = \Omega_F \cup \Omega_E$ , com  $\Gamma_{IFE}$  o sendo o contorno que define a

interface fluido-estrutura.

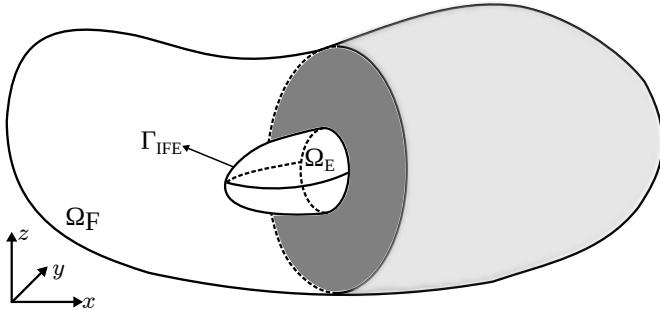


Figura 7.1 – Domínios do Fluido e da Estrutura.

O domínio computacional não se sobrepõe, por isso, é necessário que em  $\Gamma_{IFE}$  existam condições físicas adicionais para se realizar o acoplamento. Richter (2017) cita que o acoplamento é realizado através de 3 diferentes princípios no contorno  $\Gamma_{IFE}$ : condição cinemática, condição dinâmica e condição geométrica.

A condição cinemática refere-se ao fato de que a velocidade do fluido e do sólido na interface devem ser iguais, ou seja:

$$\mathbf{u}^h = \dot{\mathbf{y}}^h \text{ no contorno } \Gamma_{IFE} \quad (7.1)$$

A condição dinâmica, preescreve o balanço da tensão normal no contorno, ao que diz respeito à ação e reação, conforme a equação abaixo:

$$\sigma_E \mathbf{n}_E + \sigma_F \mathbf{n}_F = 0 \text{ no contorno } \Gamma_{IFE}, \quad (7.2)$$

na qual,  $\sigma_E$  representa as tensões de Cauchy da estrutura,  $\sigma_F$  as tensões de Cauchy no fluido, e  $\mathbf{n}_E$  e  $\mathbf{n}_F$  representam o vetor normal no contorno  $\Gamma_{IFE}$  respectivamente apontando para o fluido e para a estrutura.

Já a condição geométrica está relacionada ao fato que os domínios computacionais  $\Omega_E$  da estrutura e  $\Omega_F$  do fluido devem sempre coincidir em  $\Gamma_{IFE}$ , ou seja, não devem existir superposições ou frestas nessa interface.

## 7.2 Movimentação da Malha

Nos métodos de malhas adaptadas, à medida em que a interface  $\Gamma_{IFE}$  se move, a malha do fluido deve mover-se para ajustar-se ao novo formato e se adaptar à estrutura. Nessa metodologia demanda-se maior controle da resolução da malha próxima a interface dos meios fluidos e sólidos, possibilitando o uso de uma melhor discretização para representar os efeitos de camada limite, e como consequência, a obtenção de soluções mais acuradas nessas regiões críticas.

Para possibilitar esse controle, neste trabalho será utilizada a técnica de movimentação de malhas introduzida em Tezduyar et al. (1992f) e Tezduyar et al. (1993) conhecida como MJBS (*Mesh-Jacobian Based Stiffening*).

O movimento da malha é determinado usando um problema da elasticidade de Dirichlet fictício, descrito como:

$$\int_{\Omega_{\tilde{t}}} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^h) : \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{y}}^h - \bar{\mathbf{y}}_{\tilde{t}}^h) d\Omega_{\tilde{t}} = 0, \quad (7.3)$$

na qual  $\boldsymbol{\varepsilon}$  e  $\boldsymbol{\sigma}$  representam o tensor de deformação linear infinitesimal e o tensor de tensões de Cauchy respectivamente.  $\mathbf{w}^h$  é a função peso respectiva ao deslocamento da malha  $\bar{\mathbf{y}}^h$ , medido a partir de uma configuração de referência até a configuração atual  $\mathbf{x}^h$  e  $\bar{\mathbf{y}}_{\tilde{t}}^h$  representa o deslocamento da configuração de referência até a malha no tempo  $\tilde{t}$ , ou  $\mathbf{x}_{\tilde{t}}^h$ . A escolha para  $\tilde{t}$  é geralmente  $\tilde{t} = t_n$  quando se calcula a configuração da malha no tempo  $t_{n+1}$  (ver Tonon et al. (2021) para maiores detalhes). O índice  $h$  refere-se à discretização das variáveis por uma aproximação matemática em elementos finitos ou isogeométrica.

O tensor de tensões é calculado através da seguinte relação:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) = \frac{E}{1+\nu} \left( \frac{\nu}{(1-2\nu)} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y})) \mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) \right) \quad (7.4)$$

com  $E$  e  $\nu$  o módulo de Elasticidade e o coeficiente de Poisson respectivamente.

Para fazer com que na deformação da malha se leve em conta o tamanho dos elementos, enrijecendo os menores mais do que os maiores, no método MJBS a equação da elasticidade fica descrita ao final como:

$$\int_{\Omega_{\tilde{t}}} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^h) : \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{y}}^h - \bar{\mathbf{y}}_{\tilde{t}}^h) \left( \frac{J_M}{(J_M)_0} \right)^{-\chi} d\Omega_{\tilde{t}} = 0, \quad (7.5)$$

onde  $J_M$  é o Jacobiano da malha,  $(J_M)_0$  é um parâmetro livre e  $\chi$  determina a ordem pela qual os elementos menores serão enrijecidos mais do que os maiores.  $\chi$  é adotado correntemente como 1. E o Jacobiano da malha calculado da forma que se segue:

$$J_M = \det \left( \frac{\partial \mathbf{x}_{\tilde{t}}^h}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right), \quad (7.6)$$

onde  $\boldsymbol{\xi}$  são as coordenadas paramétricas do elemento.

## 7.3 Discretizações não coincidentes entre os meios

Na maioria dos casos a discretização das malhas do fluido e da estrutura são não-coincidentes e podem inclusive ter aproximações matemáticas distintas. Dessa forma, uma metodologia que possibilita a aplicação de condições de contorno em caso de discretizações

com nós não coincidentes, é imprescindível. Para isso, uma técnica aplicada em Fernandes (2020) foi utilizada.

Esse procedimento pode ser entendido a partir da Fig. 7.2. Nele, durante o pré-processamento, cada nó do contorno da estrutura  $\mathbf{x}_E$  é projetado sobre o contorno do fluido, e busca-se a coordenada paramétrica relativa a este ponto definida como  $\xi_F(\mathbf{x}_E)$ . Da mesma forma, cada nó do contorno do fluido  $\mathbf{x}_F$  é projetado sobre o contorno da estrutura, e encontra-se uma coordenada paramétrica equivalente  $\xi_E(\mathbf{x}_F)$ .

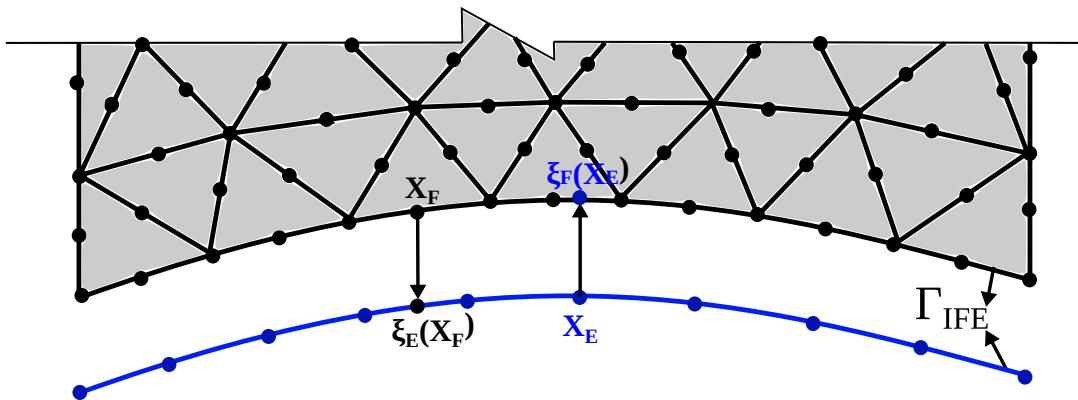


Figura 7.2 – Contorno IFE

Dessa forma, as informações que serão transmitidas ao fluido pela estrutura são interpoladas na malha da estrutura em cada uma das coordenadas paramétricas que possuem um nó equivalente na malha de fluido, e após isso aplicadas a este nó. O equivalente ocorre quando os dados são provenientes do fluido e serão transmitidos a estrutura.

## 7.4 Técnica de Acoplamento - Bloco-Iterativo

Os problemas de IFE são caracterizados pela interdependência entre o fluido e a estrutura, visto que o comportamento do escoamento depende do formato e do movimento da estrutura, enquanto que o movimento da estrutura e sua deformação dependem das forças do fluido que atuam sobre ela. Matematicamente pode-se dizer que os problemas de IFE são conjuntos de equações e condições de contorno associadas ao fluido e a estrutura que devem ser satisfeitas simultaneamente Nessa seção se apresenta a técnica de acoplamento de Bloco-Iterativo, conforme Bazilevs, Takizawa e Tezduyar (2013). As equações completas discretizadas da formumação de IFE conduzem a um sistema equações não-lineares que devem ser resolvidas a cada passo de tempo e podem ser representadas da seguinte maneira:

$$\mathbf{N}_1(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) = 0, \quad (7.7)$$

$$\mathbf{N}_2(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) = 0, \quad (7.8)$$

$$\mathbf{N}_3(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) = 0, \quad (7.9)$$

em que  $\mathbf{N}_1$ ,  $\mathbf{N}_2$  e  $\mathbf{N}_3$  representam as equações que descrevem o fluido, a estrutura e a malha respectivamente, e,  $\mathbf{d}_1$ ,  $\mathbf{d}_2$ ,  $\mathbf{d}_3$  são vetores com as variáveis nodais de cada meio. A resolução dessas equações através do método de Newton-Raphson conduz ao seguinte sistema linear de equações:

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 + \mathbf{A}_{13}\mathbf{x}_3 = \mathbf{b}_1 \quad (7.10)$$

$$\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 + \mathbf{A}_{23}\mathbf{x}_3 = \mathbf{b}_2 \quad (7.11)$$

$$\mathbf{A}_{31}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{32}\mathbf{x}_2 + \mathbf{A}_{33}\mathbf{x}_3 = \mathbf{b}_3 \quad (7.12)$$

sendo  $\mathbf{b}_1 = -\mathbf{N}_1$ ,  $\mathbf{b}_2 = -\mathbf{N}_2$ ,  $\mathbf{b}_3 = -\mathbf{N}_3$ .  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  e  $\mathbf{x}_3$  são os incrementos às soluções  $\mathbf{d}_1$ ,  $\mathbf{d}_2$  e  $\mathbf{d}_3$  respectivamente e  $\mathbf{A}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial \mathbf{d}_j}$ .

Quando se utiliza o acoplamento forte do tipo bloco iterativo, para cada passo de iteração se resolve sequencialmente cada um dos três blocos, conforme apresentado a seguir:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{N}_1}{\partial \mathbf{d}_1} \right|_{(\mathbf{d}_1^i, \mathbf{d}_2^i, \mathbf{d}_3^i)} \Delta \mathbf{d}_1^i = -\mathbf{N}_1(\mathbf{d}_1^i, \mathbf{d}_2^i, \mathbf{d}_3^i) \quad (7.13)$$

$$\mathbf{d}_1^{i+1} = \mathbf{d}_1^i + \Delta \mathbf{d}_1^i \quad (7.14)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{N}_2}{\partial \mathbf{d}_2} \right|_{(\mathbf{d}_1^{i+1}, \mathbf{d}_2^i, \mathbf{d}_3^i)} \Delta \mathbf{d}_2^i = -\mathbf{N}_2(\mathbf{d}_1^{i+1}, \mathbf{d}_2^i, \mathbf{d}_3^i) \quad (7.15)$$

$$\mathbf{d}_2^{i+1} = \mathbf{d}_2^i + \Delta \mathbf{d}_2^i \quad (7.16)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{N}_3}{\partial \mathbf{d}_3} \right|_{(\mathbf{d}_1^{i+1}, \mathbf{d}_2^{i+1}, \mathbf{d}_3^i)} \Delta \mathbf{d}_3^i = -\mathbf{N}_3(\mathbf{d}_1^{i+1}, \mathbf{d}_2^{i+1}, \mathbf{d}_3^i) \quad (7.17)$$

$$\mathbf{d}_3^{i+1} = \mathbf{d}_3^i + \Delta \mathbf{d}_3^i \quad (7.18)$$

Nas resoluções de problemas IFE, quando a estrutura é leve, a resposta estrutural torna-se muito sensível para pequenas mudanças nas forças provenientes do fluido. Para resolver esse problema, utilizou-se a técnica apresentada em Tezduyar (2003), onde para corrigir o deslocamento estrutural durante a resolução a matriz de massa em  $\mathbf{A}_{22}$  é aumentada. Isso ocorre sem que  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  e  $\mathbf{b}_3$  sejam alterados, ou seja, sem que ocorra uma mudança nas equações não lineares. Isso faz com que quando a solução por bloco iterativo converge, ela converge sem que seja alterada a massa estrutural real do problema.

#### 7.4.1 Implementação Computacional

O Algoritmo que descreve a implementação computacional do problema de IFE de acordo com a técnica de acoplamento forte do tipo bloco-iterativo é apresentada no Alg. 4.

CITAR O QUE SÃO OS SÍMBOLOS que estão no algoritmo e não foram escritos no texto. FAZER lista de símbolos e deixar comentada?

**Algoritmo 4** Algoritmo para problemas IFE

---

```

1: para o passo de tempo  $t = 0$  até  $t = T$  faca
2:   Atualiza as variáveis do fluido, estrutura e malha no passo de tempo  $t - 1$ ;
3:   para número de iterações de Newton Raphson  $it = 0$  até  $it = Nit$  faca
4:     Fluido
5:       Resolve o problema do fluido (Eq. (7.13));
6:       Atualiza as variáveis do fluido na iteração  $it$  através da eq. 7.14;
7:       Calcula medida de convergência  $\epsilon_F$ 
8:       Atualiza as forças de superfície no contorno  $\Gamma_{IFE}$ :  $t^E = -\sigma_F \cdot n_F$  ;
9:     Estrutura
10:    Resolve o problema da estrutura (Eq. (7.15));
11:    Atualiza as variáveis da estrutura na iteração  $it$  através da eq. (7.16);
12:    Calcula medida de convergência  $\epsilon_E$ 
13:    Atualiza velocidade e acelerações no fluido no contorno  $\Gamma_{IFE}$ ;
14:    Atualiza velocidade e acelerações na malha no contorno  $\Gamma_{IFE}$ ;
15:   Malha
16:   Resolve o problema de malha Eq. (7.17);
17:   Atualiza as variáveis da malha na iteração  $it$  através da eq. (7.18);
18:   Calcula medida de convergência  $\epsilon_M$ 
19:   se  $\epsilon_F$ ,  $\epsilon_E$  e  $\epsilon_M < tol$  então
20:     Sair do loop;
21:   fim se
22: fim para
23: fim para

```

---

## 7.5 Cavidade com fundo flexível - 2D

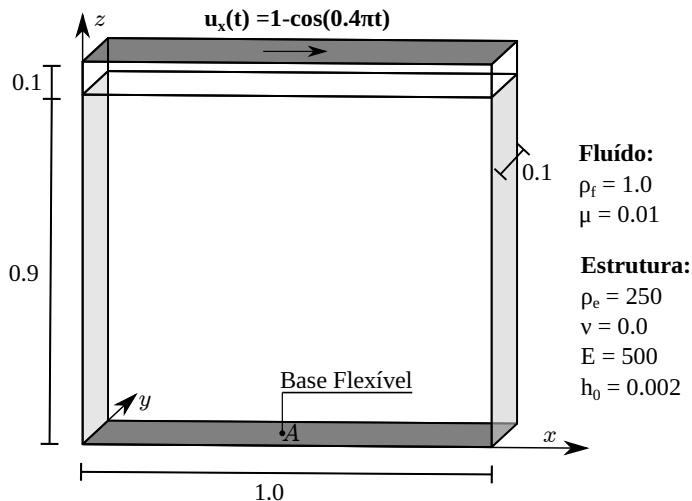


Figura 7.3 – Geometria Cavidade Fundo Flexível 2D

## 7.6 Cavidade com fundo flexível - 3D

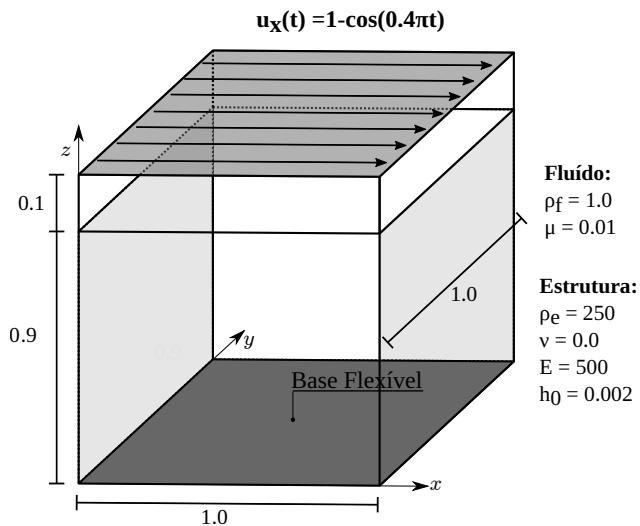


Figura 7.4 – Geometria Cavidade Fundo Flexível 3D



CAPÍTULO

---

**8**

## CONCLUSÕES PARCIAIS

---



---

O principal intuito desse trabalho, conforme foi apresentado nos capítulos anteriores, é a criação de uma ferramenta computacional para análise de interação fluido-estrutura para problemas 2D e 3D. Essa ferramenta conta com uma técnica de partição de domínios para a malha do fluido, fazendo com que se tenha uma malha global menos refinada e fixa e uma malha local deformável e mais refinada e que é gerada de maneira a se levar em consideração efeitos locais na interface entre fluido e estrutura. Dentro do contexto de partição de domínios diferentes aproximações podem ser utilizadas para a local e global.

Até o presente momento deste projeto, conta-se com um versátil código de DFC que possibilita a análise de problemas 2D e 3D, e pode utilizar como aproximação numérica tanto o Método dos Elementos Finitos, quanto a análise Isogeométrica, conforme pode ser visualizado nos exemplos estudados nos Cap. 1 e Cap. 2.

No Cap. 3, demonstrou-se que o código de análise não-linear geométrica de cascavéis baseado no método dos elementos finitos posicional, cedido pelo professor Humberto Breves Coda, é muito robusto e atende as necessidades deste projeto para as posteriores análises de interação Fluido-Estrutura.

No Cap. 4 apresenta-se a técnica de partição de domínios, para levar-se em conta efeitos localizados nas malhas de fluidos. Para validação da metodologia proposta o problema clássico da cavidade 2D, considerando-se o problema estacionário de Navier-Stokes, foi analisado e obtiveram-se resultados ótimos e promissores.

Na sequência desse projeto, a técnica de partição de domínios será ampliada para problemas da DFC com variação temporal, e diferentes possibilidades para os termos estabilizadores serão estudadas. Além disso, o código será ampliado para uma versão tridimensional.

Ao final do projeto, os programas da DFC com a técnica de partição de domínios e o código de estruturas serão acoplados através de uma técnica de acoplamento particionado

forte. Além disso, exemplos de problemas da IFE serão avaliados para a verificação do código proposto neste trabalho de doutorado.

# REFERÊNCIAS

---



---

- AKKERMAN, I.; BAZILEVS, Y.; BENSON, D.; FARTHING, M.; KEES, C. Free-surface flow and fluid-object interaction modeling with emphasis on ship hydrodynamics. *Journal of Applied Mechanics*, v. 79, p. doi:10.1115/1.4005072, 01 2012.
- ANDERSON, J. D. *Computational fluid dynamic - the basics with applications*. 1. ed. New York, USA: McGraw-Hill Book Company, 1995.
- ARGYRIS, J. An excursion into large rotations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 32, p. 85–155, 1982.
- ARGYRIS, J.; PAPADRAKAKIS, M.; MOUROUTIS, Z. S. Nonlinear dynamic analysis of shells with the triangular element TRIC. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 192, p. 3005–3038, 2003.
- ARMALY, B. F.; F.DURST; PEREIRA, J. C. F.; SCHÖNUNG, B. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 127, p. 473–496, 1983.
- BADIA, S.; NOBILE, F.; VERGARA, C. Fluid-structure partitioned procedures based on robin transmission conditions. *Journal of Computational Physics*, v. 227, p. 7027–7051, 2008.
- BATTINI, J. M.; PACOSTE, C. On the choice of the linear element for corotational triangular shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, n. 44-47, p. 6362–6377, 2006. ISSN 0045-7825.
- BAZILEVS, Y.; AKKERMAN, I. Large eddy simulation of turbulent taylor–couette flow using isogeometric analysis and the residual-based variational multiscale method. *Journal of Computational Physics*, v. 229, n. 9, p. 3402 – 3414, 2010. ISSN 0021-9991.
- BAZILEVS, Y.; CALO, V.; ZHANG, Y.; HUGHES, T. Isogeometric fluid–structure interaction analysis with applications to arterial blood flow. *Computational Mechanics*, v. 38, p. 310 – 322, 2006a.
- BAZILEVS, Y.; CALO, V. M.; COTTRELL, J. A.; HUGHES, T. J. R.; REALI, A.; SCOVazzi, G. Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 197, p. 173–201, 2007.
- BAZILEVS, Y.; CALO, V. M.; HUGHES, T. J. R.; ZHANG, Y. Isogeometric fluid–structure interaction: theory, algorithms, and computations. *Computational Mechanics*, v. 43, p. 3–37, 2008.
- BAZILEVS, Y.; HSU, M.-C.; KIENDL, J.; WÜCHNER, R.; BLETZINGER, K.-U. 3d simulation of wind turbine rotors at full scale. part ii: Fluid-structure interaction modeling

with composite blades. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 65, p. 236 – 253, 01 2011.

BAZILEVS, Y.; MICHLER, C.; CALO, V.; HUGHES, T. Isogeometric variational multiscale modeling of wall-bounded turbulent flows with weakly enforced boundary conditions on unstretched meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 199, n. 13, p. 780 – 790, 2010. ISSN 0045-7825.

BAZILEVS, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. Challenges and directions in computational fluid-structure interaction. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, v. 23, p. 215–221, 02 2013b.

BAZILEVS, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E. *Computational Fluid-Structure Interaction: Methods and Applications*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2013.

BAZILEVS, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E.; HSU, M.-C.; KOSTOV, N.; MCINTYRE, S. Aerodynamic and FSI analysis of wind turbines with the ALE-VMS and ST-VMS methods. *Archives of Computational Methods in Engineering*, v. 21, p. 359–398, 2014.

BAZILEVS, Y.; VEIGA, L. B. da; COTTRELL, J. A.; HUGHES, T.; SANGALLI, G. Isogeometric analysis: Approximation, stability and error estimates for h-refined meshes. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, v. 16, n. 07, p. 1031–1090, 2006b.

BELYTSCHKO, T.; LU, Y. Y.; GU, L.; TABBARA, M. Element-free Galerkin methods for static and dynamic fracture. *International Journal of Solids and Structures*, v. 32, n. 17–18, p. 2547–2570, 1995.

BEN DHIA, H. Multiscale mechanical problems: The Arlequin method. *Comptes Rendus Acad. Sci. I*, v. 326, p. 899–904, 1998.

BEN DHIA, H. Further insights by theoretical investigations of the multiscale Arlequin method. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, v. 6, n. 3, p. 215–232, 2008.

BEN DHIA, H.; RATEAU, G. Mathematical analysis of the mixed Arlequin method. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris Série I*, v. 332, p. 649–654, 2001.

BENEK, J.; STEGER, J.; DOUGHERTY, F.; BUNING, P. *Chimera. A grid-embedding technique*. [S.l.], 1986.

BENSON, D.; BAZILEVS, Y.; HSU, M.; HUGHES, T. Isogeometric shell analysis: The reissner–mindlin shell. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 199, n. 5, p. 276 – 289, 2010. ISSN 0045-7825.

BLOM, F. J. A monolithical fluid-structure interaction algorithm applied to the piston problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 167, n. 3-4, p. 369–391, 1998. ISSN 0045-7825.

BONET, J.; WOOD, R. D.; MAHANEY, J.; HEYWOOD, P. Finite element analysis of air supported membrane structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 5-7, p. 579–595, 2000. ISSN 0045-7828.

- BREZZI, F.; FORTIN, M. Mixed and hybrid finite element methods. In: *Vol. 15 of Springer Series in Computational Mathematics*. New York: Springer, 1991.
- BROOKS, A. N.; HUGHES, T. J. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 32, n. 1-3, p. 199–259, 1982.
- CARRAZEDO, R.; CODA, H. B. Alternative positional FEM applied to thermomechanical impact of truss structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 46, n. 11, p. 1008–1016, 2010.
- CATABRIGA, L.; COUTINHO, A. L. G. Implicit SUPG solution of euler equations using edge-based data structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 191, n. 32, p. 3477–3490, 2002. ISSN 0045-7825.
- CHUNG, T. J. *Computational fluid dynamics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002.
- CIRAK, F.; RADOVITZKY, R. A Lagrangian-Eulerian shell-fluid coupling algorithm based on level sets. *Computers & Structures*, v. 83, p. 491–498, 2005.
- CODA, H. B. *Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: Uma formulação posicional baseada no MEF*. Tese (Tese para concurso de professor titular) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2003.
- CODA, H. B. *O Método dos Elementos Finitos posicional: Sólidos e Estruturas - Não linearidade Geométrica e Dinâmica*. 1. ed. São Carlos: EESC-USP, 2018. 284 p.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. An alternative positional FEM formulation for geometrically non-linear analysis of shells: Curved triangular isoparametric elements. *Computational Mechanics*, v. 40, n. 1, p. 185–200, jun 2007.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A positional FEM formulation for geometrical non-linear analysis of shells. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 5, p. 205–223, 2008.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Improved finite element for 3D laminate frame analysis including warping for any cross-section. *Applied Mathematical Modelling*, v. 34, n. 4, p. 1107–1137, 2010.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A FEM procedure based on positions and unconstrained vectors applied to non-linear dynamic of 3D frames. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 47, n. 4, p. 319–333, 2011.
- COTTRELL, J.; HUGHES, T.; REALI, A. Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 196, n. 41, p. 4160 – 4183, 2007. ISSN 0045-7825.
- COTTRELL, J.; REALI, R.; BAZILEVS, Y.; HUGHES, T. Isogeometric analysis of structural vibrations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, n. 41, p. 5257–5296, 2006. ISSN 0045-7825.
- COTTRELL, J. A.; HUGHES, T. J. R.; BAZILEVS, Y. *Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA*. first. [S.l.]: Wiley, 2009. ISBN 9780470748732.

DHIA, H.; RATEAU, G. The Arlequin method as a flexible engineering design tool. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 62, n. 11, p. 1442–1462, 2005.

DHIA, H. B.; RATEAU, G. Application of the Arlequin method to some structures with defects. *Revue Européenne des Éléments Finis*, Taylor & Francis, v. 11, n. 2-4, p. 291–304, 2002.

DONEA, J. A taylor-galerkin method for convective transport problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 20, p. 101–119, 1984.

DONEA, J.; GIULIANI, S.; HALLEUX, J. P. An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 33, n. 1-3, p. 689–723, 1982.

FARHAT, C.; HARARI, I.; FRANCA, L. P. The discontinuous enrichment method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 48, p. 6455–6479, 2001.

FARHAT, C.; LESOINNE, M.; LETALLEC, P. Load and motion transfer algorithms for fluid/structure interaction problems with non-matching discrete interfaces: Momentum and energy conservation, optimal discretization and application to aeroelasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 157, p. 95–114, 1998.

FARIN, G. *Curves and Surfaces for CAGD, A Practical Guide*. Fifth. [S.l.]: Morgan Kaufmann Publishers, 1999.

FERNANDES, J. W. D. *Interação fluido-estrutura com escoamentos incompressíveis utilizando o método dos elementos finitos*. Dissertação (Mestrado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2016.

FERNANDES, J. W. D. *Técnica de superposição de modelos estabilizada para análise de interação fluido-estrutura*. Tese (Doutorado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2020.

FERNANDES, J. W. D.; BARBARULO, A.; Ben Dhia, H.; SANCHES, R. A. K. A residual-based stabilized finite element formulation for incompressible flow problems in the arlequin framework. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 370, p. 113073, 2020. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782520302577>>.

FERNANDES, J. W. D.; CODA, H. B.; SANCHES, R. A. K. ALE incompressible fluid–shell coupling based on a higher-order auxiliary mesh and positional shell finite element. *Computational Mechanics*, v. 63, n. 3, p. 555–569, 2019.

FISH, J. The s-version of the finite element method. *Computers & Structures*, v. 43, n. 3, p. 539–547, 1992.

GALEÃO, A. C.; CARMO, E. G. D. do. A consistent approximate upwind Petrov-Galerkin method for convection-dominated problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 68, n. 1, p. 83 – 95, 1988. ISSN 0045-7825.

- GHIA, U.; GHIA, K. N.; SHIN, C. T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, v. 48, p. 387–441, 1982.
- GRECO, M.; CODA, H. B. A simple and precise FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 193, p. 3541–3557, 2004.
- GUIDAULT, P.-A.; BELYTSCHKO, T. On the l2 and the h1 couplings for an overlapping domain decomposition method using lagrange multipliers. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 70, n. 3, p. 322–350, 2007. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nme.1882>>.
- HENDERSON, R. D. Nonlinear dynamics and pattern formation in turbulent wake transition. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 352, p. 65–112, 1997. ISSN 0022-1120.
- HÖLLIG, K.; REIF, U.; WIPPER, J. Weighted extended b-spline approximation of dirichlet problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, Society for Industrial and Applied Mathematics, USA, v. 39, n. 2, p. 442–462, 2001. ISSN 0036-1429.
- HOU, G.; WANG, J.; LAYTON, A. Numerical methods for fluid-structure interaction - a review. *Commun. Comput. Phys.*, v. 12, p. 337–377, 2012.
- HRON, J.; MADLIK, M. Fluid-structure interaction with applications in biomechanics. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, v. 8, n. 5, p. 1431–1458, 2007.
- HÜBNER, B.; WALHORN, E.; DINKLER, D. A monolithic approach to fluid-structure interaction using space-time finite elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 193, p. 2087–2104, 2004.
- HUGHES, T. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. [S.l.]: Dover Publications, 2000. (Dover Civil and Mechanical Engineering). ISBN 9780486411811.
- HUGHES, T. J.; FRANCA, L. P.; BALESTRA, M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuška-Brezzi condition: a stable Petrov-Galerkin formulation of the stokes problem accommodating equal-order interpolations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 59, n. 1, p. 85 – 99, 1986.
- HUGHES, T. J.; FRANCA, L. P.; HULBERT, G. M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 73, n. 2, p. 173 – 189, 1989. ISSN 0045-7825.
- HUGHES, T. J.; LIU, W. K.; ZIMMERMAN, T. K. Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 29, p. 329–349, 1981.
- HUGHES, T. J. R. Stability, convergence and growth and decay of energy of the average acceleration method in nonlinear structural dynamics. *Computers & Structures*, v. 6, p. 313–324, 1976.

HUGHES, T. J. R. Multiscale phenomena: Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale methods, bubbles and the origins of stabilized methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 127, p. 387–401, 1995.

HUGHES, T. J. R.; COTTRELL, J. A.; BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement . *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 194, p. 4135–4195, 2005.

HUGHES, T. J. R.; LIU, W. K. Nonlinear finite element analysis of shells: Part I. three-dimensional shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 26, n. 3, p. 331–362, 1981. A. ISSN 0045-7825.

HUGHES, T. J. R.; LIU, W. K. Nonlinear finite element analysis of shells: Part II. two-dimensional shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 27, n. 2, p. 167–181, 1981. A. ISSN 0045-7825.

HUGHES, T. J. R.; OBERAI, A. A.; MAZZEI, L. Large Eddy Simulation of turbulent channel flows by the variational multiscale method. *Physics of Fluids*, v. 13, p. 1874–1799, 2001.

HUGHES, T. J. R.; TEZDUYAR, T. E. Finite element methods for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible Euler equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 45, p. 217–284, 1984.

IBRAHIMBEGOVIC, A.; TAYLOR, R. L. On the role of frame-invariance in structural mechanics models at finite rotations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 191, p. 5159–5176, 2002.

IRONS, B. M.; TUCK, R. C. A version of the Aitken accelerator for computer iteration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 1, n. 3, p. 275–277, 1969.

JAMOND, O.; BEN DHIA, H. Incompressibility in the multimodel Arlequin framework. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, v. 94, p. 374–399, 2013.

JANSEN, K. E.; WHITING, C. H.; HULBERT, G. M. A generalized- $\alpha$  method for integrating the filtered Navier–Stokes equations with a stabilized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 3, p. 305 – 319, 2000. ISSN 0045-7825.

JOHNSON, A. A.; TEZDUYAR, T. E. Mesh update strategies in parallel finite element computations of flow problems with moving boundaries and interfaces. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 119, p. 73–94, 1994.

KANCHI, H.; MASUD, A. A 3D adaptative mesh moving scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 54, p. 923–944, 2007.

KIENDL, J.; BLETZINGER, K.-U.; LINHARD, J.; WÜCHNER, R. Isogeometric shell analysis with kirchhoff–love elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 198, n. 49, p. 3902 – 3914, 2009. ISSN 0045-7825.

KUHL, D.; RAMM, E. Generalized energy-momentum method for non-linear adaptative shell dynamics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 178, p. 343–366, 1999.

- KÜTTLER, U.; WALL, W. A. Fixed-point fluid–structure interaction solvers with dynamic relaxation. *Computational mechanics*, Springer, v. 43, n. 1, p. 61–72, 2008.
- LAUNDER, B. E.; SPALDING, D. B. *Lectures in mathematical models of turbulence*. New York: Academic Press, 1972.
- LEFRANÇOIS, E. A simple mesh deformation technique for fluid-structure interaction based on a submesh approach. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, v. 75, p. 1085–1101, 2008.
- MELENK, J. M.; BABUSKA, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, n. 1, p. 289–314, 1996.
- MITTAL, R.; IACCARINO, G. Immersed boundary methods. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 37, p. 237–261, 2005.
- NAYROLES, B.; TOUZOT, G.; VILLON, P. Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, v. 10, n. 5, p. 307–318, 1992.
- OGDEN, R. W. *Non-linear elastic deformations*. Chichester, England.: Ellis Harwood, 1984.
- OTOGURO, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E. Element length calculation in B-spline meshes for complex geometries. *Computational Mechanics*, v. 65, p. 1085–1103, 2020.
- PESKIN, C. S. Flow patterns around heart valves: A numerical method. *Journal of Computational Physics*, v. 10, n. 2, p. 252–271, 1972.
- PIEGL, L.; TILLER, W. *The NURBS Book*. second. New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1996.
- REDDY, J. N. *An Introduction to the Finite Element Method*. 3. ed. [S.l.]: McGraw Hill, 2006.
- REDDY, J. N.; GARTLING, D. K. *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*. 3. ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 2010.
- RICHTER, T. *Fluid-structure Interactions: Models, Analysis and Finite Elements*. Springer International Publishing, 2017. (Lecture Notes in Computational Science and Engineering). ISBN 9783319639703. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=hsEyDwAAQBAJ>>.
- ROUX, F. X.; GARAUD, J. D. Domain decomposition methodology with robin interface matching conditions for solving strongly coupled fluid-structure problems. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, v. 7, p. 29–38, 2009.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. An embedded domain technique based on level-sets for finite element method (FEM) fluid-shell coupling. *Mecánica Computacional*, XXIX, p. 4801–4818, 2010a.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Fluid-structure interaction using an arbitrary Lagrangian-Eulerian Fluid solver coupled to a positional Lagrangian shell solver. *Mecánica Computacional*, XXIX, p. 1627–1647, 2010b.

- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Unconstrained vector nonlinear shell formulation applied to fluid-structure interaction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 259, p. 177–196, 2013.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. On fluid-shell coupling using an arbitrary Lagrangian-Eulerian fluid solver coupled to a positional Lagrangian shell solver. *Applied Mathematical Modelling*, v. 38, p. 3401–3418, 2014.
- SIMO, J. C.; FOX, D. D. On a stress resultant geometrically exact shell model. Part I: formulation and optimal parametrization. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 72, p. 267–304, 1989.
- SONDAK, D.; SHADID, J. N.; OBERAI, A. A.; PAWLOWSKI, R. P.; CYR, E. C.; SMITH, T. M. A new class of finite element variational multiscale turbulence models for incompressible magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, v. 295, p. 596–616, 2015.
- STEIN, K.; TEZDUYAR, T. E.; BENNEY, R. Automatic mesh update with the solid-extension mesh moving technique. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 193, p. 2019–2032, 2004.
- STRANG, G.; FIX, G. *An analysis of the Finite Element Method*. 2. ed. [S.l.]: Wesley-Cambridge Press, 2008.
- STROUBOULIS, T.; COPPS, K.; BABUSKA, I. The generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 32–33, p. 4081–4193, 2001.
- TAKIZAWA, K. .; TEZDUYAR, T. Space-time fluid-structure interaction methods. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, v. 22, p. 1230001, 08 2012.
- TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E.; OTOGURO, Y. Stabilization and discontinuity-capturing parameters for space-time flow computations with finite element and isogeometric discretizations. *Computational Mechanics*, v. 62, n. 5, p. 1169–1186, 2018.
- TEZDUYAR, T. Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations. In: HUTCHINSON, J. W.; WU, T. Y. (Ed.). [S.l.]: Elsevier, 1992, (Advances in Applied Mechanics, v. 28). p. 1 – 44.
- TEZDUYAR, T.; ALIABADI, S.; BEHR, M. Enhanced-Discretization Interface-Capturing Technique (EDICT) for computation of unsteady flows with interfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 155, p. 235–248, 1998.
- TEZDUYAR, T.; ALIABADI, S.; BEHR, M.; JOHNSON, A.; MITTAL, S. Parallel finite-element computation of 3D flows. *Computer*, v. 26, n. 10, p. 27–36, 1993.
- TEZDUYAR, T.; SATHE, S.; KEEDY, R.; STEIN, K. Space-time finite element techniques for computation of fluid-structure interactions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, p. 2002–2027, 03 2006.
- TEZDUYAR, T. E. Stabilized finite element methods for flows with moving boundaries and interfaces. *HERMIS: The International Journal of Computer Mathematics and its Applications*, v. 4, p. 63–88, 2003.

- TEZDUYAR, T. E.; ALIABADI, S. EDICT for 3D computation of two-fluid interfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, p. 403–410, 2000.
- TEZDUYAR, T. E.; BEHR, M.; LIOU, J. A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces - the deforming-spatial-domain/space-time procedure: I. The concept and the preliminary numerical tests. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 94, p. 339–351, 1992c.
- TEZDUYAR, T. E.; BEHR, M.; MITTAL, S.; LIOU, J. A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces - the deforming-spatial-domain/space-time procedure: II. Computation of free-surface flows, two-liquid flows, and flows with drifting cylinders. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 94, p. 353–371, 1992b.
- TEZDUYAR, T. E.; BEHR, M.; MITTAL, S.; JOHNSON, A. A. Computation of unsteady incompressible flows with the finite element methods: Space–time formulations, iterative strategies and massively parallel implementations. In: *New Methods in Transient Analysis*. New York: ASME, 1992f. (PVP-Vol.246/AMD-Vol.143), p. 7–24.
- TEZDUYAR, T. E.; MITTAL, S.; RAY, S. E.; SHIH, R. Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 95, p. 221–242, 1992a.
- TEZDUYAR, T. E.; OSAWA, Y. Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 3, p. 411–430, 2000.
- TEZDUYAR, T. E.; SATHE, S. Enhanced-discretization successive update method (EDSUM). *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 47, p. 633–654, 2005.
- TEZDUYAR, T. E.; SATHE, S.; STEIN, K. Solution Techniques for the Fully-Discretized Equations in Computation of Fluid–Structure Interactions with the Space–Time Formulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, p. 5743–5753, 2006.
- TONON, P. *Simulação numérica de escoamentos incompressíveis através da análise isogemétrica*. Dissertação (Mestrado) — PPGEC-UFRGS, Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil, 2016.
- TONON, P.; SANCHES, R. A. K.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E. A linear-elasticity-based mesh moving method with no cycle-to-cycle accumulated distortion. *Computational Mechanics*, 2021.
- TRUESDELL, C. A. Hypo-elasticity. *J. Rational Mech. Anal.*, v. 4, p. 83–133, 1955.
- WANG, K.; RALLU, A.; GERBEAU, J.-F.; FARHAT, C. Algorithms for interface treatment and load computation in embedded boundary methods for fluid and fluid–structure interaction problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, John Wiley & Sons, Ltd., v. 67, n. 9, p. 1175–1206, 2011.
- WILCOX, D. C. *Turbulence modeling for CFD*. La Cañada, CA: DCW Industries Inc., 1993.

WILLIAMS, P. T.; BAKER, A. J. Numerical simulations of laminar flow over a 3d backward-facing step. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 24, p. 1159–1183, 1999.

ZHANG, Y.; BAZILEVS, Y.; GOSWAMI, S.; BAJAJ, C. L.; HUGHES, T. J. Patient-specific vascular nurbs modeling for isogeometric analysis of blood flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 196, n. 29, p. 2943 – 2959, 2007. ISSN 0045-7825.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; NITHIARASU, P. *The Finite Element Method: Fluid Dynamics*. 6. ed. [S.l.]: Butterworth Heinemann Linacre house, 2005. v. 3. 334 p.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; NITHIARASU, P. *The Finite Element Method: The Basis*. 6. ed. [S.l.]: Butterworth Heinemann Linacre house, 2005a. v. 1. 689 p.