

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

PATRICIA TONON

*Combinação de discretizações isogeométrica  
e por elementos finitos na análise de  
interação fluido-estrutura (**Colocar a capa  
oficial**)*

SÃO CARLOS/SP  
2021



PATRICIA TONON

*Combinação de discretizações isogeométrica  
e por elementos finitos na análise de  
interação fluido-estrutura (**Colocar a capa  
oficial**)*

Texto apresentado para o exame de qualificação ao doutorado no Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências, Programa: Engenharia Civil (Estruturas).

Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo André Kuche Sanches

SÃO CARLOS/SP  
2021

**RESUMO**

**TONON, P. Combinação de discretizações isogeométrica e por elementos finitos na análise de interação fluido-estrutura.** 2021. 131 p. Qualificação da Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

**revisar ao final** O presente trabalho tem como principal intuito a construção de uma ferramenta computacional robusta para análise de problemas de interação fluido-estrutura onde o domínio fluido é discretizado combinando-se aproximações baseadas em análise isogeométrica e método dos elementos finitos tradicional. São considerados escoamentos incompressíveis, sendo que o domínio fluido possui uma discretização global, em descrição Euleriana, à qual é sobreposta uma discretização local, mais refinada. As discretizações local e global são diferentes, sendo uma isogeométrica e outra por elementos finitos. Os dois modelos são acoplados por uma técnica de partição de domínio com sobreposição de malhas, a qual baseia-se na modificação das funções de forma de ambas as discretizações em uma região de sobreposição e posterior união dos espaços de funções local e global de modo a formar um espaço enriquecido que garanta a partição da unidade. A malha local é adaptada à estrutura e deforma-se dinamicamente para acomodar a movimentação da estrutura, enquanto a malha global permanece fixa. Com isso o método proposto compartilha vantagens dos métodos de rastreamento de interface (malhas móveis) e de captura de interface (contornos imersos), visto que o fluido próximo à estrutura é adequadamente discretizado garantindo a captura de efeitos localizados, ao mesmo tempo em que a malha local, por ser menor, tolera maiores deformações, e em caso de necessidade de remalhamento, apenas essa malha precisa ser reconstruída. Adota-se uma formulação estabilizada para o escoamento incompressível, permitindo aproximação de mesma ordem para velocidades e pressão, e a integração temporal é feita através do método  $\alpha$ -generalizado. A estrutura é modelada empregando-se uma abordagem do método dos elementos finitos baseada em posições aplicada a elementos de casca com grandes deslocamentos. O acoplamento fluido-estrutura é particionado do tipo bloco-iterativo.

**Palavras-chave:** *Interação Fluido-Estrutura. Análise Isogeométrica. Método dos Elementos Finitos. Técnica de sobreposição de malhas.*

# ABSTRACT

TONON, P. **Combination of isogeometric and finite element discretizations for fluid-structure interaction analysis.** 2021. 131 p. Thesis qualification (Doctorate in Structural Engineering) – Department of Structural Engineering, São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, São Carlos, 2021.

**review at the end** This work aims the construction of a robust computational tool for fluid-structure interaction analysis where the fluid domain is discretized combining isogeometric and traditional finite elements approximations. The flow is considered to be incompressible and the fluid domain has a global discretization, under Eulerian description, with an overlapping of a local one more refined. Local and global discretizations are different, being one isogeometric and the other a traditional finite element discretization, coupled by a domain partitioning technique that relies on the modification of both, local and global, shape functions over and overlapping region and subsequent union of local and global spaces of functions generating an enriched space that fulfills unity partition. The local mesh is adapted to the structure and deforms dynamically to accommodate structural movements while the global one remains fixed. Therefore, the proposed method shares advantages of both, interface tracking (moving mesh) and interface capturing (immersed boundary) methods, once the fluid/structure interface is adequately discretized for local effects, at the same time that the local mesh, being smaller, tolerates larger deformations, and, in case of need for re-meshing, only the local mesh needs to be rebuilt. The incompressible flow is modeled by a stabilized formulation, allowing equal order pressure-velocity interpolation, with time integration by the  $\alpha$ -generalized method. The structure is modeled in a position-based large-displacement shell finite element formulation. The fluid-structure coupling is a block iterative type partitioned scheme.

**Keywords:** *Fluid-structure interaction. Isogeometric analysis. Finite Element Method. Overlap technique.*



# LISTA DE FIGURAS

---

---

Figura 2.1 – Volume de controle infinitesimal: Fluxo de massa . . . . .	28
Figura 2.2 – Volume de controle infinitesimal: Componentes de força na direção $y_1$ .	30
Figura 2.3 – Volume de controle infinitesimal: Fluxo de quantidade de Movimento .	31
Figura 2.4 – Domínio para o problema da dinâmica dos fluidos computacional . . . .	32
Figura 2.5 – Descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária . . . . .	33
Figura 2.6 – Elementos Finitos: representação espacial e paramétrica . . . . .	38
Figura 2.7 – Cilindro: Geometria, condições de contorno e malha de elementos finitos.	48
Figura 2.8 – Cilindro: Coeficientes aerodinâmicos. . . . .	49
Figura 2.9 – Cilindro: Campos de velocidade para $Re = 100$ . . . . .	50
Figura 2.10–Cilindro: Campos de pressão para $Re = 100$ . . . . .	51
Figura 2.11–Cavidade quadrada: Geometria, condições de contorno e malha de elementos finitos . . . . .	52
Figura 2.12–Cavidade quadrada: Perfis de velocidade adimensionalizados nas direções $y_1$ e $y_2$ . . . . .	53
Figura 2.13–Cavidade quadrada: Campos de velocidade - plano $y_1y_2$ . . . . .	54
Figura 2.14–Cavidade quadrada: Campos de pressão - plano $y_1y_2$ . . . . .	55
Figura 3.1 – NURBS: espaço físico, espaço paramétrico, espaço indicial e espaço parental . . . . .	58
Figura 3.2 – <i>B-Splines quadráticas</i> . . . . .	61
Figura 3.3 – Curva <i>B-Spline</i> . . . . .	62
Figura 3.4 – Refinamento $h$ para um curva <i>B-Spline</i> . . . . .	65
Figura 3.5 – Projeção transformativa de entidade <i>B-Spline</i> . . . . .	66
Figura 3.6 – Funções base univariadas na interface entre <i>Patches</i> . . . . .	69
Figura 3.7 – Cilindro 3D: Geração curva NURBS . . . . .	72
Figura 3.8 – Cilindro 3D: Geração superfície NURBS. . . . .	73
Figura 3.9 – Cilindro 3D: Geometria e malha de células físicas . . . . .	74
Figura 3.10–Cilindro 3D: Coeficientes aerodinâmicos. . . . .	75
Figura 3.11–Degrau 3D: Geometria. . . . .	75
Figura 3.12–Degrau 3D: Geometria e malha de células físicas . . . . .	76
Figura 3.13–Degrau 3D: Comprimento de recolamento do vórtice principal . . . .	77
Figura 3.14–Degrau 3D: Campo de velocidade. . . . .	78
Figura 4.1 – Domínio local e global. . . . .	80
Figura 4.2 – Função Ponderadora . . . . .	82

Figura 4.3 – Domínio Arlequin móvel . . . . .	92
Figura 4.4 – Aerofólio: Geometria . . . . .	94
Figura 4.5 – Aerofólio: Malha Monomodelo (MEF) . . . . .	95
Figura 4.6 – Aerofólio: Discretização das malhas global e local . . . . .	96
Figura 4.7 – Aerofólio: Coeficiente de Arrasto . . . . .	97
Figura 4.8 – Aerofólio: Coeficiente de Sustentação . . . . .	97
Figura 4.9 – Aerofólio: Campo de velocidade . . . . .	98
Figura 4.10–Aerofólio: Campo de pressão . . . . .	99
Figura 4.11–Aerofólio Mov.: Geometria . . . . .	99
Figura 4.12–Aerofólio Mov.: Coeficiente de Arrasto . . . . .	100
Figura 4.13–Aerofólio Mov.: Coeficiente de Sustentação . . . . .	100
Figura 4.14–Aerofólio Mov.: Campos de velocidade . . . . .	101
Figura 4.15–Aerofólio Mov.: Campos de pressão . . . . .	101
Figura 5.1 – Domínios Computacional para análise de problemas de IFE. . . . .	104
Figura 5.2 – Discretizações não-coincidentes no contorno IFE . . . . .	106
Figura 5.3 – Cavidade fundo flexível 2D: geometria . . . . .	110
Figura 5.4 – Cavidade fundo flexível 2D: Vista frontal da discretização para modelo Arlequin - malha 2 . . . . .	112
Figura 5.5 – Cavidade fundo flexível 2D: Deslocamento em A para malhas do modelo Arlequin . . . . .	112
Figura 5.6 – Cavidade fundo flexível 2D: Deslocamento em A comparado com as referências e monomodelo . . . . .	113
Figura 5.7 – Cavidade fundo flexível 2D: Campos de velocidade . . . . .	114
Figura 5.8 – Cavidade fundo flexível 2D: Campos de Pressão . . . . .	115
Figura 5.9 – Cavidade fundo flexível 3D: Geometria . . . . .	115
Figura 5.10–Cavidade fundo flexível 3D: Discretização . . . . .	116
Figura 5.11–Cavidade fundo flexível 3D: Deslocamento em A . . . . .	117
Figura 5.12–Painel Flexível: Geometria . . . . .	117
Figura 5.13–Painel Flexível: Discretização . . . . .	118
Figura 5.14–Painel Flexível: Deslocamento em A . . . . .	119
Figura 5.15–Painel Flexível: Colapso malha monomodelo . . . . .	119

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Comparação entre valores obtidos e valores de referência para $C_{Dmed}$ e $St$ em diferentes números de Reynolds. . . . .	49
Tabela 3.1 – Número de pontos de controle por <i>patch</i> . . . . .	76
Tabela 5.1 – Discretizações . . . . .	111



# SUMÁRIO

---

---

1	INTRODUÇÃO . . . . .	11
1.1	Apresentação do texto . . . . .	13
1.2	Beve Apanhado do Estado da Arte . . . . .	14
1.2.1	<i>Dinâmica dos fluidos computacional</i> . . . . .	15
1.2.2	<i>Dinâmica de estruturas computacional considerando grandes deslocamentos</i> . . . . .	17
1.2.3	<i>Acoplamento fluido-estrutura</i> . . . . .	18
1.2.4	<i>Métodos Multiescala e Técnicas de partição de domínios</i> . . . . .	21
1.3	Objetivos . . . . .	22
1.4	Metodologia . . . . .	23
1.5	Justificativa . . . . .	24
2	DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL . . . . .	27
2.1	Equações governantes na descrição Euleriana . . . . .	28
2.1.1	<i>Equação da conservação da massa</i> . . . . .	28
2.1.2	<i>Equação da quantidade de movimento</i> . . . . .	29
2.1.3	<i>Relação constitutiva</i> . . . . .	30
2.1.4	<i>Modelo matemático para escoamentos incompressíveis na forma forte</i> . . . . .	31
2.2	Descrição Euleriana-Lagrangiana arbitrária (ALE) . . . . .	32
2.2.1	<i>Forma forte do modelo para escoamentos incompressíveis com contornos móveis</i> . . . . .	35
2.3	Forma fraca e discretização espacial das equações governantes	36
2.3.1	<i>Método dos elementos finitos para escoamentos incompressíveis</i> . . . . .	37
2.3.2	<i>Discretização Espacial</i> . . . . .	38
2.3.3	<i>Parâmetros de estabilização</i> . . . . .	41
2.4	Integração Temporal . . . . .	44
2.5	Implementação Computacional . . . . .	46
2.6	Verificação e Aplicações . . . . .	46
2.6.1	<i>Escoamento sobre um cilindro</i> . . . . .	47
2.6.2	<i>Cavidade quadrada</i> . . . . .	50
3	ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA APLICADA À DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL . . . . .	57
3.1	Noções Gerais de IGA . . . . .	58
3.2	<i>B-Splines</i> . . . . .	59
3.2.1	<i>Vetor de knots</i> . . . . .	59
3.2.2	<i>Funções base e suas derivadas</i> . . . . .	60
3.2.3	<i>Geometrias B-Splines</i> . . . . .	61
3.2.4	<i>Refinamento</i> . . . . .	63
3.3	NURBS . . . . .	64

<i>3.3.1</i>	<i>Funções base NURBS e suas derivadas . . . . .</i>	<i>66</i>
<i>3.3.2</i>	<i>Geometria NURBS . . . . .</i>	<i>67</i>
<i>3.3.3</i>	<i>Múltiplos Patches . . . . .</i>	<i>68</i>
<i>3.4</i>	<i>Análise Isogeométrica . . . . .</i>	<i>69</i>
<i>3.4.1</i>	<i>Parâmetros de estabilização . . . . .</i>	<i>70</i>
<i>3.5</i>	<i>Verificação e aplicações . . . . .</i>	<i>71</i>
<i>3.5.1</i>	<i>Escoamento sobre um cilindro - 3D . . . . .</i>	<i>71</i>
<i>3.5.2</i>	<i>Escoamento em um canal com degrau . . . . .</i>	<i>74</i>
<i>4</i>	<b>MÉTODO DE ARLEQUIN ESTABILIZADO . . . . .</b>	<b>79</b>
<i>4.1</i>	<i>Método Arlequin . . . . .</i>	<i>79</i>
<i>4.2</i>	<i>Método Arlequin clássico aplicado à problemas de escoamentos incompressíveis . . . . .</i>	<i>81</i>
<i>4.3</i>	<i>Método Arlequin estabilizado aplicado à problemas de escoamentos incompressíveis . . . . .</i>	<i>85</i>
<i>4.3.1</i>	<i>Integração Temporal . . . . .</i>	<i>87</i>
<i>4.3.2</i>	<i>Parâmetro de estabilização para técnica RBSAM . . . . .</i>	<i>89</i>
<i>4.4</i>	<i>Superposição de modelos móveis . . . . .</i>	<i>91</i>
<i>4.5</i>	<i>Implementação Computacional . . . . .</i>	<i>92</i>
<i>4.6</i>	<i>Exemplos . . . . .</i>	<i>93</i>
<i>4.6.1</i>	<i>Escoamento sobre um aerofólio NACA 0012 . . . . .</i>	<i>93</i>
<i>4.6.2</i>	<i>Aerofólio com movimento de arfagem prescrito . . . . .</i>	<i>96</i>
<i>5</i>	<b>ACOPLAMENTO FLUIDO-ESTRUTURA . . . . .</b>	<b>103</b>
<i>5.1</i>	<i>Condições de acoplamento . . . . .</i>	<i>104</i>
<i>5.1.1</i>	<i>Movimentação da Malha . . . . .</i>	<i>105</i>
<i>5.2</i>	<i>Discretizações não coincidentes entre os meios . . . . .</i>	<i>106</i>
<i>5.3</i>	<i>Acoplamento Particionado Forte - Bloco-Iterativo . . . . .</i>	<i>107</i>
<i>5.3.1</i>	<i>Implementação Computacional . . . . .</i>	<i>108</i>
<i>5.4</i>	<i>Exemplos . . . . .</i>	<i>109</i>
<i>5.4.1</i>	<i>Cavidade com fundo flexível - 2D . . . . .</i>	<i>110</i>
<i>5.4.2</i>	<i>Cavidade com fundo flexível - 3D . . . . .</i>	<i>112</i>
<i>5.4.3</i>	<i>Flutter em painel flexível . . . . .</i>	<i>114</i>
<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>		<b>121</b>

CAPÍTULO

---

1

# INTRODUÇÃO

---

A interação fluido-estrutura caracteriza-se por ser uma classe de problemas em que existe uma interdependência entre comportamentos do fluido e da estrutura. O comportamento do fluido depende da forma e da movimentação da estrutura, assim como, o movimento e a deformação da estrutura dependem das forças provenientes do fluido.

A modelagem numérica dos problemas da engenharia estrutural é um ramo vastamente desenvolvido, sendo a análise de estruturas por elementos finitos em softwares comerciais uma prática corrente entre os engenheiros. Entretanto, quando se trata de interação fluido-estrutura (IFE), esses softwares estão longe de atender à demanda dos engenheiros.

Problemas que envolvem a interação entre fluido e estrutura estão presentes em diversas áreas, podendo-se citar como exemplos a ação do vento sobre edifícios, aerodinâmica de modelos automotivos, problemas de *flutter* em estruturas aeronáuticas e de pontes, ou ainda problemas de escoamento de sangue em vasos sanguíneos e órgãos, entre muitos outros. A análise experimental de tais problemas, em geral, é muito custosa e demanda bastante tempo e equipamentos complexos. Dessa forma, é de interesse o desenvolvimento de métodos numéricos que permitam simular adequadamente tais problemas dentro de um tempo razoável. O crescimento da informática tem auxiliado nesse processo, contudo, muitas análises ainda só podem serem realizadas em grandes *clusters*, e algumas, devido à complexidade dos problemas, não possam ser simuladas sem grandes simplificações.

A análise computacional dos problemas de IFE possui basicamente três componentes: a dinâmica dos fluidos computacional, a mecânica dos sólidos computacional e o acoplamento entre os meios fluido e sólido. Uma das maiores dificuldades encontradas nessa área, diz respeito à compatibilização das formulações da mecânica dos fluidos e dos sólidos, visto que, em geral, para fluidos aplica-se uma descrição matemática Euleriana,

e para sólidos, Lagrangiana. Dessa forma, existem duas formas comuns de se realizar o acoplamento fluido-estrutura, que são os métodos de malhas conformes, ou de malhas móveis, e os métodos de malhas não-conformes, ou de malhas fixas.

Nos métodos de malhas adaptadas, a malha do fluido é conforme ao domínio computacional do sólido e acompanha seu movimento, requerendo, assim, procedimentos de atualização (deformação ou deformação associada à reconstrução) dessa malha ao longo da análise. Nesse tipo de metodologia, uma descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária (ALE) pode ser aplicada ao fluido, permitindo a movimentação do domínio computacional de maneira independente do movimento das partículas de fluido. Essa técnica é adequada para problemas em que a estrutura sofre deslocamentos em pequenas escalas em relação à configuração inicial da estrutura, sem que haja mudança topológica do domínio do fluido, visto que grandes distorções do domínio fluido, em geral, acarretam na necessidade de técnicas de especiais de remalhamento, que apresentam um custo computacional elevado.

Nos métodos de malhas não conformes, utiliza-se uma malha fixa para o fluido, na qual o sólido se encontra imerso, sendo adotadas técnicas de contorno imerso para a imposição das condições de acoplamento. Um dos aspectos importantes desse método diz respeito à localização do contorno da estrutura dentro da malha do fluido, o que pode ser resolvido, por exemplo, com o uso de uma função *level-set* baseada na distância assinalada ao contorno do sólido. Essa técnica pode ser aplicada a qualquer escala de deslocamentos, inclusive em problemas com mudanças topológicas no domínio do fluido, entretanto, não é eficiente para levar em consideração efeitos localizados que exigem maior resolução da malha, como, por exemplo, em regiões de camada limite na vizinhança da estrutura.

Neste trabalho, busca-se, no contexto da análise tridimensional de interação fluido-estrutura, empregar técnicas de partição de domínio com malhas superpostas, de modo a unir as vantagens das metodologias de malhas móveis e de malhas fixas, e, ao mesmo tempo, possibilitar a combinação de diferentes técnicas de discretização (por elementos finitos e isogeométrica). Para isso, duas discretizações espaciais para o domínio do fluido são superpostas: uma malha global, maior, menos refinada, fixa no espaço e não conforme à estrutura; e uma malha local, menor, mais refinada e conforme à estrutura, que se move para acomodar suas deformações. Uma das discretizações pode ser isogeométrica, enquanto a outra pode ser baseada em elementos finitos. Como consequência, caso seja necessário realizar o remalhamento, ele pode ser feito apenas na malha local, reduzindo o custo computacional.

Foram consideradas duas técnicas para partição de domínio. A primeira, denominada método da combinação dos espaços de função, conforme proposto por ??) consiste em ponderar as funções de forma da discretização local e da discretização global por funções de combinação e unir os espaços local e global, gerando uma nova base, enquanto a segunda consiste no método Arlequin proposto por ??), em sua versão estabilizada com base no trabalho de ??), que consiste em acoplar os modelos local e global por

meio de multiplicadores de Lagrange definidos sobre a zona de superposição. A primeira técnica, embora tenha se demonstrado bastante robusta em outros problemas, mostrou-se inadequada para a formulação estabilizada para escoamentos incompressíveis a número de Reynolds elevados, enquanto o método Arlequin, embora mais custoso, mostra-se adequado para qualquer número de Reynolds.

Sugiro um parágrafo destacando as principais contribuições dessa tese: Acoplamento FEM-IGA para IFE; Estudo do método de combinação dos espaços de funções para acoplar MEF e IGA para IFE; Emprego do Arlequin estabilizado para acoplar FEM e IGA; Emprego do Arlequin estabilizado para IFE 3D ...

## 1.1 Apresentação do texto

revisar ao final

Este texto está dividido em 8 capítulos os quais serão descritos sucintamente na continuação.

No *Capítulo 1* introduz-se e contextualiza-se o tema de pesquisa. Na sequência, no estado da arte, faz-se uma breve apresentação de algumas das formulações mais utilizadas para a solução dos problemas que envolvem a interação fluido-estrutura e métodos de partição de domínios. Por fim, apresentam-se os objetivos, a metodologia e justificava desta pesquisa.

O *Capítulo 2* comprehende a descrição da técnica numérica utilizada para a resolução de problemas da dinâmica dos fluidos computacional. Apresentam-se inicialmente as equações governantes em sua forma forte em descrição Euleriana, expandindo-as na continuação para uma descrição Euleriana-Lagrangiana arbitrária. Na sequência, a formulação fraca é obtida através da aplicação do método dos resíduos ponderados utilizando a técnica clássica de Galerkin e apresenta-se a discretização espacial das equações. Para contornar as instabilidades típicas que ocorrem quando aplicado o método de Galerkin, e afim de contornar a condição LBB, apresenta-se uma metodologia estabilizada. Para a integração temporal das equações, o método  $\alpha$ -generalizado aplicado é exposto. Ao final, o algoritmo da implementação computacional é apresentado e alguns exemplos são avaliados para a verificação do programa.

No *Capítulo 3*, apresenta-se a análise isogeométrica aplicada à Dinâmica dos Fluidos Computacional (DFC) por meio da utilização de funções NURBS. O capítulo se inicia com uma breve contextualização do tema, seguida da descrição das funções-base *B-Splines* e de suas principais características, culminando na geração de geometrias a partir dessas funções. Em seguida, introduzem-se as funções NURBS, construídas a partir das *B-Splines*, destacando-se a obtenção de curvas, superfícies e sólidos NURBS. A abordagem isogeométrica é então detalhada, evidenciando a substituição das tradicionais funções polinomiais de Lagrange, utilizadas no Método dos Elementos Finitos clássico, por

funções NURBS na discretização das geometrias e variáveis. Além disso, são explicados os parâmetros de estabilização empregados nas equações governantes discretizadas via IGA. Por fim, verifica-se a implementação computacional da DFC com análise isogeométrica por meio de exemplos numéricos.

**ALTERAR** O *Capítulo 4* apresenta uma breve revisão sobre a mecânica dos sólidos voltada ao equilíbrio de corpos deformáveis em descrição Lagrangiana. Na sequência, apresentam-se os conceitos do método dos elementos finitos posicional e o elemento finito de casca a ser utilizado nesse projeto. Por fim, um exemplo de problema dinâmico é apresentado.

**ALTERAR** No *Capítulo 5* a técnica de decomposição de domínios é apresentada. Descreve-se a obtenção do novo espaço de funções na zona de sobreposição entre malhas global e local, e apresenta-se por fim um exemplo de verificação voltado à dinâmica dos fluidos computacional.

No *Capítulo 6* apresenta-se a técnica de decomposição de domínios através do método Arlequin estabilizado (RBSAM). A primeira parte do capítulo foi dedicada a descrever o método clássico de Arlequin, para na sequência, introduzir a metodologia estabilizada para a solução de escoamentos incompressíveis. Apresenta-se na sucessão do capítulo a extensão da metodologia para problemas de contorno móveis. Ao final, o algoritmo de implementação é apresentado, bem como, exemplos de validação são avaliados.

No *Capítulo 7* discorre-se sobre a formulação utilizada para análise de problemas de Interação Fluido-Estrutura. No texto, apresentam-se as condições de acoplamento necessárias a solução de um problema de IFE, a técnica de movimentação de malha utilizada, e a metodologia de transferência de condições de contorno em uma interface entre fluido e sólido com malhas não coincidentes. Descreve-se na continuação do texto a teoria envolvida no esquema de acoplamento particionado forte adotado. Por fim, o algoritmo de implementação computacional e exemplos de validação são apresentados.

**ALTERAR** No *Capítulo 8* são apresentadas conclusões parciais acerca do que foi desenvolvido até momento, bem como considerações sobre o plano de trabalho e resultados esperados ao final do Doutorado.

## 1.2 Estado da Arte

Nesta seção apresenta-se uma breve contextualização dos principais assuntos relacionados a este trabalho. Assim, aborda-se brevemente o estado da arte da mecânica dos fluidos computacional aplicada a escoamentos com contornos móveis, a mecânica dos sólidos computacional aplicada a problemas dinâmicos com grandes deslocamentos com o foco em elementos sólidos e de cascas, às técnicas numéricas para acoplamento fluido-estrutura e aos métodos de decomposição de domínios e multiescala. **Está abordando a análise isogeométrica?**

### 1.2.1 Dinâmica dos fluidos computacional

A dinâmica dos fluidos computacional (DFC) trata da obtenção de soluções numéricas para as equações diferenciais que descrevem o comportamento dos fluidos no espaço e no tempo, tendo em vista que a solução analítica para esses problemas é conhecida apenas em raros casos e sob hipóteses simplificadoras. Os principais tópicos abordados aqui referem-se às diferentes metodologias aplicadas à discretização espacial, às fontes de instabilidade numérica e aos métodos de estabilização.

No que diz respeito à discretização espacial, a DFC desenvolveu-se inicialmente no âmbito do método das diferenças finitas e do método dos volumes finitos (ver, por exemplo, Chung (2002) e Anderson (1995)). O método dos elementos finitos (MEF), por sua vez, popularizou-se inicialmente em análises de estruturas na década de 1950, com formulações baseadas em princípios variacionais. Alguns anos depois, passou a ser utilizado também em problemas da DFC, visto que apresenta propriedades vantajosas, como, por exemplo, a facilidade de discretizar geometrias complexas com o uso de malhas não estruturadas arbitrárias e a facilidade de aplicar condições de contorno em geometrias complexas e de alta ordem (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; NITHIARASU, 2005; REDDY; GARTLING, 2010).

Uma das dificuldades encontradas na aplicação do MEF à dinâmica dos fluidos computacional é o fato de que, ao se adotar o método clássico de Galerkin na discretização espacial das equações governantes em descrição Euleriana, obtêm-se matrizes assimétricas e, em escoamentos com convecção dominante, surgem variações espúrias nas variáveis transportadas [colocar referências](#). Esse problema pode ser amenizado à medida que a malha de elementos finitos é refinada; entretanto, é desejável que o método escolhido apresente resultados estáveis mesmo em malhas mais grosseiras.

Para resolver tal dificuldade, algumas técnicas de estabilização foram propostas, a exemplo dos métodos *Stream-Upwind/Petrov-Galerkin* (SUPG) (BROOKS; HUGHES, 1982), *Galerkin Least-Squares* (GLS) (HUGHES; FRANCA; HULBERT, 1989) e *Sub-Grid Scale* (SGS) (HUGHES, 1995). Todas essas formulações baseiam-se na introdução de termos estabilizantes ao problema, de modo a conter as variações espúrias em casos de convecção dominante. Outra possibilidade diz respeito ao uso do método Taylor-Galerkin (T-G), introduzido por Donea (1984), no qual a estabilização é obtida pela inclusão de termos de ordem superior que exercem efeito estabilizante, ao se empregar a expansão em série de Taylor no processo de discretização temporal.

Uma das metodologias mais difundidas para a estabilização dos termos convectivos é a técnica SUPG, a qual é aplicada neste estudo. Essa técnica consiste em adicionar, à forma fraca da equação da quantidade de movimento, o resíduo dessa equação ponderado por uma função especialmente escolhida para introduzir estabilização na direção das linhas de corrente, resultando em uma formulação consistente. Diversos autores contribuíram para a consolidação dessa técnica, dentre os quais podem ser citados Hughes e Tezduyar (1984),

Tezduyar (1992) e Catabriga e Coutinho (2002). O parâmetro adimensional estabilizador, cuja função é aplicar uma escala na parcela adicionada, tem sua obtenção discutida em diversos trabalhos, tais como Takizawa, Tezduyar e Otoguro (2018) e Otoguro, Takizawa e Tezduyar (2020).

Outra dificuldade da aplicação do MEF à mecânica dos fluidos diz respeito aos escoamentos incompressíveis. Ao levar-se em conta a incompressibilidade do escoamento, obtém-se a chamada equação da continuidade, na qual aparece apenas o termo do divergente do vetor velocidade. Do ponto de vista numérico, a pressão atua como um multiplicador de Lagrange, impondo a condição de divergente da velocidade nulo. Nesse caso, para que o sistema tenha solução única e resulte em uma formulação estável, é necessário observar as restrições de *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi* (LBB) na escolha dos espaços de funções para a aproximação da pressão e da velocidade, não sendo possível interpolar essas variáveis por polinômios de mesma ordem (BREZZI; FORTIN, 1991; ZIENKIEWICZ; TAYLOR; NITHIARASU, 2005; STRANG; FIX, 2008). Dessa forma, foram desenvolvidos diversos elementos, denominados Taylor-Hood, que atendem a essas restrições (??).

De modo a permitir o uso do mesmo espaço de funções para pressão e velocidade, aumentando assim a flexibilidade do método, surgiram técnicas de estabilização do campo de pressão. Uma metodologia de estabilização para problemas incompressíveis, semelhante à técnica SUPG, foi apresentada por Hughes, Franca e Balestra (1986) para escoamentos de Stokes, posteriormente aplicada ao problema de Navier-Stokes e denominada PSPG (*Pressure Stabilized Petrov-Galerkin*) por Tezduyar (1992). Essa metodologia é adotada neste estudo e consiste em adicionar, à forma fraca da equação da continuidade, o resíduo da equação da quantidade de movimento ponderado pelo gradiente da função teste da equação da continuidade, multiplicado por um parâmetro de estabilização.

Outra consideração importante nas simulações numéricas diz respeito à reprodução de escoamentos turbulentos. As equações de Navier-Stokes descrevem tanto escoamentos laminares como turbulentos, entretanto, a utilização da chamada Simulação Direta de Turbulência leva a custos computacionais elevados, visto que requer uma malha refinada de maneira a representar adequadamente todas as escalas de turbulência. Para contornar esse problema, diferentes técnicas podem ser empregadas, destacando-se os métodos *Reynolds-Averaged Navier-Stokes* (RANS) (SPEZIALE, 1991; ALFONSI, 2009) e Simulações de grandes Vórtices (*Large Eddy Simulation - LES*) (LAUNDER; SPALDING, 1972; GERMANO et al., 1991; WILCOX, 1993; PIOMELLI, 1999).

Os métodos RANS baseiam-se na decomposição das variáveis de fluxo em uma média temporal e em uma componente de flutuação. Essa abordagem permite que as equações governantes sejam manipuladas de forma a representar as médias de longo prazo do escoamento, enquanto as flutuações turbulentas são tratadas como termos adicionais, muitas vezes modelados por equações de fechamento. A definição da média pode variar conforme as características do problema. Já nas simulações LES, o objetivo principal é

capturar as estruturas turbulentas de grande escala, responsáveis pela maior parte da transferência de quantidade de movimento e energia, e aplicar um modelo para os vórtices de pequena escala.

O método Variacional Multiescala (VMS) (HUGHES, 1995; HUGHES et al., 1998; HUGHES; OBERAI; MAZZEI, 2001; BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013) permite lidar simultaneamente com os efeitos da convecção dominante, a instabilidade associada ao campo de pressão em problemas incompressíveis e a representação adequada de estruturas relacionadas à vorticidade. O método, a partir de princípios variacionais, propõem a representação do problema físico por meio de sua decomposição em escalas grandes (resolvidas) e pequenas (não resolvidas), tratando-as separadamente. A modelagem do espaço de pequenas escalas é realizado em termos de resíduos das equações de conservação de massa e de conservação da quantidade de movimento. **Ficou bem resumido, talvez fosse interessante complementar um pouco**

Mover para uma seção específica de análise isogeométrica, onde deverão ser considerados tanto a aplicação de IGA para fluidos como para sólidos

A Análise Isogeométrica (IGA - *Isogeometric Analysis*) é uma metodologia para análise numérica de problemas descritos por equações diferenciais e foi introduzida primeiramente por Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005). Pode-se dizer que se trata de uma generalização do método dos elementos finitos clássico, a partir do uso de funções base especiais. Na análise isogeométrica, as funções base utilizadas são aquelas aplicadas nos sistemas CAD (*Computed Aided Design*), ou seja, nas tecnologias aplicadas na engenharia de *design*, animação, artes gráficas e visualização. Dentro das possibilidades de funções, as mais conhecidas são as funções NURBS(*Non-Uniform Rational B-Splines*) (PIEGL; TILLER, 1996), fazendo que esse seja um ponto de partida para os estudos sobre IGA. Um dos principais objetivos do desenvolvimento dessa ferramenta é a integração entre os sistemas CAD e as técnicas numéricas baseadas em elementos finitos, as quais requerem a geração de malhas baseadas nos dados obtidos em programas CAD.

Uma das principais vantagens do uso dessa metodologia é representação exata de geometrias mesmo em malhas pouco refinadas, visto que essas funções são capazes de representar exatamente seções cônicas, círculos, cilindros, esferas e elipsoides. Além disso, outra característica matemática que a torna uma boa opção a ser utilizada, é a suavidade das funções NURBS, que são continuas  $p - 1$  vezes entre os elementos, sendo  $p$  o grau da função base. A descrição exata das geometrias é uma característica desejável em problemas que envolvem fenômenos de camada limite, os quais dependem fortemente da precisão geométrica da superfície do corpo imerso no escoamento. Alguns problemas envolvendo escoamentos turbulentos e interação fluido-estrutura, podem ser consultados em: Bazilevs et al. (2007), Zhang et al. (2007), Bazilevs et al. (2008), Bazilevs et al. (2010), Bazilevs e Akkerman (2010).

Outras metodologias aplicando diretamente funções *B-Splines* também tem se

mostrado eficiente para a análise de problemas da dinâmica dos fluidos computacional, como pode ser visto nos trabalhos de Höllig, Reif e Wipper (2001), Bazilevs, Takizawa e Tezduyar (2013), Bazilevs et al. (2014).

### 1.2.2 Dinâmica de estruturas computacional considerando grandes deslocamentos

A análise de problemas como a interação fluido-estrutura recai, muitas vezes requer a consideração da não linearidade geométrica da estrutura, devido a grandes deslocamentos ou a efeitos acoplados de membrana e flexão. Dentro desse grupo de problemas, pode-se citar o *flutter* de grande amplitude, sistemas de desaceleração (como paraquedas), aplicações biomédicas, entre outros.

Atualmente a solução numérica de problemas estruturais é majoritariamente realizada por meio do método dos elementos finitos. No contexto da análise não linear geométrica de estruturas, a formulação corrotacional proposta por Truesdell (1955) é muito popular e descreve a mudança de configuração da estrutura, decompondo seus movimentos em rígido e de deformação, e representando-os em termos dos deslocamentos e rotações nodais. Essa formulação, aplicada a pórticos, treliças e cascas, pode ser encontrada nos trabalhos de Hughes e Liu (1981a), Hughes e Liu (1981b), Argyris (1982), Simo e Fox (1989), Ibrahimovic e Taylor (2002), Battini e Pacoste (2006).

A formulação corrotacional, ao empregar rotações como parâmetros nodais, apresenta uma limitação para grandes deslocamentos, visto que não se pode aplicar a propriedade comutativa a essa grandeza. Para contornar esse problema, utilizam-se as formulações linearizadas de Euler-Rodrigues para a aproximação das rotações finitas, conforme pode ser observado, por exemplo, em Gruttmann, Sauer e Wagner (2000), Coda e Paccolla (2010). Essa formulação resulta em matriz de massa variável, dificultando o uso de alguns processos de integração temporal bem estabelecidos (SANCHES; CODA, 2013).

Motivado por Bonet et al. (2000), Coda (2003) introduz uma formulação baseada em posições, sem o emprego de rotações como parâmetros nodais. Essa formulação tem sido aplicada com sucesso para análise de sólidos, pórticos e cascas (CODA, 2018; GRECO; CODA, 2004; CODA; PACCOLA, 2010; CARRAZEDO; CODA, 2010; CODA; PACCOLA, 2011; SANCHES; CODA, 2016), incluindo problemas de interação fluido-estrutura (SANCHES; CODA, 2013; SANCHES; CODA, 2014; FERNANDES; CODA; SANCHES, 2019; AVANCINI; SANCHES, 2020).

Em Sanches e Coda (2013), os autores utilizam o integrador temporal de Newmark para a análise de problemas dinâmicos não lineares de estruturas de cascas, no contexto da IFE, com grandes deslocamentos e rotações de corpo rígido. Nesse trabalho, os autores apresentam a demonstração da conservação da quantidade de movimento linear e angular no uso dessa metodologia, e testam a estabilidade e a conservação de energia em problemas

com pequenas deformações e grandes deslocamentos, demonstrando que a formulação é adequada para os problemas de interação fluido-estrutura.

Baseado no último trabalho citado, neste projeto, aplica-se a formulação Lagrangiana total baseada em posições e vetores generalizados para elementos de casca.

**muito superficial, se der tempo, tente enriquecer...**

### 1.2.3 Acoplamento fluido-estrutura

O problema de interação fluido-estrutura pode ser descrito como um conjunto de equações diferenciais e condições de contornos associadas ao fluido e à estrutura que precisam ser satisfeitas ao mesmo tempo. Como sólidos e fluidos geralmente apresentam descrições matemáticas diferentes, sendo a mecânica dos sólidos tradicionalmente formulada por descrições Lagrangianas e a mecânica dos fluidos por descrições Eulerianas, um dos desafios da análise computacional de IFE é a compatibilização dessas diferentes descrições. Os métodos de acoplamento encontrados na literatura, em geral, podem ser classificado em dois tipos: métodos de malhas móveis, ou método de malhas adaptadas; e métodos de malhas fixas ou método de malhas não-adaptadas (HOU; WANG; LAYTON, 2012; BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013b).

Nos métodos de malhas móveis, à medida em que a interface fluido-estrutura move, o domínio computacional do fluido é deformado, e a malha do fluido é movimentada para acomodar a mudança da interface. Nesse tipo de metodologia duas possíveis técnicas podem ser aplicadas na modelagem do domínio fluido: a descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária (HUGHES; LIU; ZIMMERMAN, 1981; DONEA; GIULIANI; HALLEUX, 1982; KANCHI; MASUD, 2007) ou a formulação Espaço-Tempo para domínios deformáveis (TEZDUYAR; BEHR; LIOU, 1992b; TEZDUYAR et al., 1992c; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2012), sendo que ambas permitem a movimentação arbitrária (independente das partículas) da discretização espacial. A principal vantagem do método de malhas adaptadas é a capacidade de controlar o refinamento da malha do fluido próxima a interface fluido-estrutura, bem como a conformidade dos domínios, e como consequência, garantir a captura de efeitos de camada limite nessa região, garantindo precisão dos resultados.

A técnica empregada para movimentação de malhas é muito importante nos métodos de malhas móveis, pois essa deve ser eficiente de maneira a resultar em elementos que possuam mínima distorção e alteração de volume, e de forma a evitar que a malha necessite ser reconstruída. Diversas técnicas têm sido desenvolvidas para essa finalidade e podem ser divididas em três categorias. Na primeira os deslocamentos são impostos na interface entre estrutura e fluido e o campo de deslocamentos é obtido através da resolução de um problema de valor de contorno, formulando-se o problema através de analogia com estrutura de molas (BOTTASSO; DETOMI; SERRA, 2005) ou com sólido elástico (JOHNSON; TEZDUYAR, 1994; STEIN; TEZDUYAR; BENNEY, 2004) ou emprego da equação de Laplace para distribuição dos deslocamentos (KANCHI; MASUD, 2007),

entre outras. O segundo grupo são esquemas ponto-a-ponto, nos quais os deslocamentos da malha são diretamente interpolados a partir dos deslocamentos impostos na interface (DONEA; GIULIANI; HALLEUX, 1982; TEZDUYAR et al., 1993; SANCHES; CODA, 2014). Existem ainda métodos híbridos, que combinam vantagens de diferentes técnicas de movimentação de malhas (LEFRANÇOIS, 2008; FERNANDES; CODA; SANCHES, 2019).

Nos métodos de malhas móveis, entretanto, em alguns casos o remalhamento torna-se inevitável, como em problemas com grandes distorções do domínio, e em especial, em problemas com mudanças topológicas do domínio do fluido, fazendo com que o custo computacional se torne muito elevado.

Por sua vez, os métodos de malhas fixas são capazes de lidar com mudanças topológicas e grandes deslocamentos. Para isso, utilizam-se os chamados métodos de contornos imersos, tal como o introduzido por Peskin (1972), onde mantém-se a malha do fluido fixa e permite-se que a estrutura mova-se dentro dessa malha. Nesses métodos, é necessário que as posições da estrutura sejam identificadas dentro da malha do fluido a cada passo de tempo (MITTAL; IACCARINO, 2005; WANG et al., 2011). Uma das formas de identificação é através de uma função distância assinalada do contorno da estrutura (método *level-set*). Nesse contexto, pode-se citar os trabalhos de Cirak e Radovitzky (2005) aplicados no âmbito dos volumes finitos e de Sanches e Coda (2014) e Akkerman et al. (2012) em elementos finitos. A principal desvantagem desse tipo de metodologia é que a resolução da discretização na camada limite fica limitada à discretização da malha de elementos finitos onde a interface estiver posicionada no instante de análise.

Em termos da forma de solução do sistema acoplado, as técnicas de acoplamento disponíveis dividem-se em duas classes principais: métodos particionados (ROUX; GARAUD, 2009; BAZILEVS et al., 2011; SANCHES; CODA, 2013; SANCHES; CODA, 2014; FERNANDES; CODA; SANCHES, 2019) e métodos monolíticos (BLOM, 1998; HÜBNER; WALHORN; DINKLER, 2004; HRON; MADLIK, 2007; AVANCINI, 2023). No primeiro grupo, as equações do fluido e da estrutura são resolvidas separadamente, sendo as condições de acoplamento transmitidas de um meio para o outro na interface, em geral, em termos de condições de Dirichlet-Neumann ao longo do processo de solução. No segundo grupo, o dos métodos monolíticos, fluido e estrutura são tratados como entidade única, com um único sistema de equações gerado para fluido e estrutura, sendo as condições de acoplamento atendidas de maneira implícita durante o equacionamento.

As técnicas de acoplamento particionado do tipo Dirichlet-Neumann em geral consistem na aplicação de condições de contorno de Dirichlet no contorno do fluido que está em contato com a estrutura (velocidades provenientes da movimentação da estrutura) e de Neumann no contorno do sólido que está em contato com o fluido (forças provenientes da pressão e das tensões viscosas no fluido). Os métodos particionados podem ainda ser subdivididos em acoplamentos fracos (explícitos), ou fortes (implícitos). No acoplamento

particionado fraco, as equações são resolvidas de uma maneira desacoplada e só no passo de tempo seguinte as condições de acoplamento são transmitidas para de um meio para o outro. Já no o acoplamento particionado forte, as condições de acoplamento são atualizadas a cada iteração do processo de solução do sistema não linear dentro de cada passo de tempo. Esse tipo de resolução, aplicada nesse trabalho, também é conhecida como bloco-iterativa (BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013), e pode ser representada por uma modificação da matriz tangente monolítica do método de Newton-Raphson, permitindo que os sistemas do fluido, da estrutura e da malha tratados em blocos separados. Esse tipo de metodologia particionada facilita a solução dos problemas de IFE devido ao total desacoplamento entre os *solvers* de estrutura e de fluido.

Os esquemas particionados podem apresentar, entretanto, algumas desvantagens, como a defasagem que pode ocorrer entre as integrações temporais do fluido e da estrutura quando as condições de contorno na interface entre fluido e estrutura são aplicadas de maneira explícita, e, ainda, instabilidades numéricas como o efeito de massa adicionada (FELIPPA; PARK; FARHAT, 2001). Em escoamentos governados pelo campo de pressão, a ação do fluido sobre a estrutura funciona como uma massa adicional, alterando sua inércia (TALLEC; MOURO, 2001). Em escoamentos incompressíveis, nos quais a densidade do sólido e do fluido podem ser muito próximas, ou quando a estrutura é muito esbelta, esse fenômeno pode ocasionar erros elevados e instabilidades nos acoplamentos fracos, ou perda de convergência e instabilidades numéricas em técnicas de acoplamento particionado forte.

Uma das formas de se contornar esse problema é a alteração do esquema de acoplamento do tipo Dirichlet-Neumann para condições de contorno de Robin, que consiste em uma combinação linear das condições de Dirichlet e Neumann, ver por exemplo, Badia, Nobile e Vergara (2008). A metodologia introduzida por Tezduyar, Behr e Liou (1992b), chamada de *augmented mass*, que consiste em multiplicar a massa da matriz tangente respectiva à estrutura por um fator que dependerá do tipo de problema em análise, também pode ser empregada para isso. Outra metodologia, que demonstra-se muito eficiente para os casos de acoplamento do tipo bloco-iterativo, como mostram os trabalhos de (KÜTTLER; WALL, 2008; FERNANDES; CODA; SANCHES, 2019), é o uso da relaxação de Aitken, proposto por Irons e Tuck (1969).

#### **1.2.4 Métodos Multiescala e Técnicas de partição de domínios**

Em diversas áreas da engenharia, faz-se necessário considerar efeitos localizados, geralmente de menor escala, dentro de um modelo global. Na análise estrutural, podem ser citados problemas envolvendo fissuras, orifícios e imperfeições; na mecânica dos fluidos, fenômenos de camada limite e a interface entre dois fluidos em escoamentos multifásicos; e, na interação fluido-estrutura, a própria interface entre estrutura e fluido.

Para obter soluções precisas nesse tipo de problema, é necessária a aplicação de técnicas que considerem os efeitos locais sem, contudo, tornar a simulação inviável pelo

elevado custo computacional.

O método dos elementos finitos, tradicionalmente utilizado para a análise numérica de equações diferenciais, foi desenvolvido a partir de modelos mecânicos de meios contínuos, o que lhe confere pouca flexibilidade para a consideração desses efeitos. Os refinamentos  $p$  e  $h$  constituem metodologias eficientes; contudo, em determinados problemas dinâmicos, exigem técnicas de remalhamento e podem acarretar custos computacionais elevados.

Em busca de aprimorar o Método dos Elementos Finitos (MEF), diversas propostas têm sido apresentadas com o objetivo de aumentar sua flexibilidade na resolução de problemas com efeitos localizados. Entre elas, pode-se citar os elementos finitos difusos (NAYROLES; TOUZOT; VILLON, 1992), nos quais o conceito de partículas foi introduzido, resultando em uma generalização do MEF sem a necessidade de malha. Outra proposta é o método de Galerkin livre de elementos, que combina características de métodos sem malha com o MEF (ver Belytschko et al. (1995)). Na mesma direção, destacam-se o método de partição da unidade (MELENK; BABUSKA, 1996), o método dos elementos finitos generalizado (G-FEM) (STROUBOULIS; COPPS; BABUSKA, 2001) e o método dos elementos finitos estendido (X-FEM) (MOËS et al., 2003), os quais introduzem o enriquecimento da base aproximadora por meio de funções capazes de capturar efeitos localizados. Contudo, tanto o G-FEM quanto o X-FEM apresentam forte dependência do conhecimento prévio da solução local ou, ao menos, de sua distribuição espacial.

Pesquisas como as de Farhat, Harari e Franca (2001) propõem enriquecimentos descontínuos nos espaços funcionais, incorporando modos regulares por meio de formulações discretas de Galerkin e multiplicadores de Lagrange. Além disso, métodos de discretização que não dependem diretamente da interface, fundamentados na técnica de Nitsche, foram desenvolvidos para lidar com problemas envolvendo descontinuidades materiais, como demonstrado no estudo de Hansbo e Hansbo (2002).

No contexto da mecânica dos fluidos, Tezduyar, Aliabadi e Behr (1998), Tezduyar e Aliabadi (2000) introduziram a técnica *EDICT* (*Enhanced-Discretization Interface-Capturing Technique*) para a captura de interface, com aprimoramento da discretização em problemas bifásicos ou com superfície livre. Para isso, nessa região de interface definem-se subconjuntos de elementos (sub-malhas), que posteriormente são refinados sucessivamente, de modo a melhorar a precisão da solução. Como resultado, obtém-se uma discretização mais adequada para capturar a interface; entretanto, as sub-malhas geradas não representam com exatidão as descontinuidades na interface. Uma versão mais eficiente dessa técnica foi proposta em Tezduyar e Sathe (2005), na qual um método iterativo multinível é projetado para a captura dos efeitos do escoamento em pequenas escalas, permitindo a simulação de problemas mais complexos.

Pode-se citar ainda o método Variacional Multiescala (VMS) (HUGHES et al., 1998) que utiliza o conceito de micromodelos e macromodelos, sendo que os micromodelos capturam efeitos em pequenas escalas de maneira a corrigir os macromodelos, sendo muito

utilizado para a obtenção de métodos estabilizados para a mecânica dos fluidos.

Outro grupo de métodos proposto para flexibilizar o MEF em problemas com efeitos locais, é o dos métodos baseados em superposição de um domínio computacional local a um domínio global. A técnica Chimera definida por Benek et al. (1986) traz a introdução de orifícios na região de superposição dos modelos, definindo um contorno artificial para o modelo global, e a transmissão de dados ocorre através desses contornos artificiais gerados. O método S (FISH, 1992) trata o modelo local como um enriquecimento ao global, e a solução é obtida através da soma dos campos de interesse de cada domínio.

O método Arlequin (BEN DHIA, 1998; BEN DHIA; RATEAU, 2001), por sua vez, também baseia-se na superposição de modelos de modo a combinar um modelo local mais refinado a um global, no entanto, esse processo é realizado através do cruzamento e colagem entre os modelos em uma zona de superposição, fazendo-se isso o uso de multiplicadores de Lagrange. O método Arlequin vem sendo utilizado amplamente em diversas áreas da mecânica dos sólidos (ver, por exemplo, Dhia e Jamond (2010), Caleyron et al. (2013), Dhia e Torkhani (2011), Bauman et al. (2008), Biscani et al. (2016), Jamond e Ben Dhia (2013)), na DFC e IFE, entretanto, ainda é pouco explorado. Fernier, Faucher e Jamond (2020) aplica a metodologia para análise de escoamentos compressíveis, e Fernandes et al. (2020) para análise de escoamentos incompressíveis e de IFE para problemas bidimensionais. Nesse trabalho será feita uma extensão do trabalho de Fernandes (2020) para problemas tridimensionais de IFE e levando em consideração diferentes discretizações matemáticas para as malhas global e local.

Faltou falar o método dos espaços de função combinados (blended), citando os trabalhos do Rosicley.

## 1.3 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho é o desenvolvimento e implementação computacional de uma formulação tridimensional para análise de problemas de interação fluido-estrutura que permita a consideração de efeitos localizados no domínio do fluido por meio de técnica de partição de domínios, além de viabilizar o uso combinado de aproximações por elementos finitos clássicos e análise isogeométrica.

Para tal finalidade, enumeram-se os seguintes objetivos específicos:

- Desenvolvimento de um programa para a análise bi e tridimensional de escoamentos Newtonianos incompressíveis, que permita a utilização tanto da discretização por elementos finitos quanto da discretização isogeométrica;
- Estudo de técnicas de partição de domínios para levar em conta efeitos localizados no âmbito da DFC;

- Implementação de técnicas de partição de domínios no código de dinâmica dos fluidos computacional contemplando problemas da DFC com contornos móveis;
- Estudo aprofundado da formulação Lagrangiana total baseada em posições para estruturas de cascas, bem como do código computacional para análise dinâmica de cascas desenvolvido no grupo de pesquisa em que este trabalho está inserido;
- Acoplamento entre os códigos computacionais para fluido e para estruturas através do emprego de uma técnica particionada do tipo bloco-iterativa;
- Verificação dos códigos computacionais através da simulação de problemas da dinâmica dos fluidos, dinâmica das estruturas e de IFE e comparação com resultados da literatura.

## 1.4 Metodologia

A base da metodologia adotada para cada sub-problema envolvido nesta tese, consiste em estudo da literatura, desenvolvimento de formulação numérica, implementação computacional e verificação do código implementado.

Em função da complexidade envolvida na implementação das ferramentas computacionais propostas, optou-se pelo uso da linguagem de programação C++ orientada a objetos, visto que esta já vem sendo utilizada com sucesso no grupo de pesquisas em que este trabalho se insere, facilitando o aproveitamento de códigos pré-existentes. Além disso, a programação orientada a objetos proporciona maior modularidade aos códigos e maior facilidade para o acoplamento entre módulos distintos. Todas as implementações são realizadas utilizando bibliotecas, compiladores e softwares livres ou de código aberto, em ambiente Linux.

Toma-se como base como base os desenvolvimentos na área de análise isogeométrica da mecânica dos fluidos de Tonon (2016) e um código computacional de dinâmica dos fluidos para análises de escoamentos incompressíveis bidimensionais desenvolvido no trabalho de doutorado de Fernandes (2020). Esse código é inicialmente ampliado para contemplar elementos tridimensionais. Na sequência, implementa-se nesse código discretização isogeométrica por meio de funções NURBs.

A partir desse ponto, inicia-se o estudo das metodologias de decomposição de domínios e sua implementação para problemas bidimensionais da DFC, onde são consideradas duas técnicas, o método da combinação dos espaços de funções (????) e o Método Arlequin em sua versão estabilizada conforme o trabalho de Fernandes (2020), de modo a adotar o mais eficiente para as análises de IFE.

Os estudos e desenvolvimentos em relação à mecânica das estruturas focam nas estruturas de casca, com base nos trabalhos de Sanches e Coda (2013), Sanches e Coda

(2014) e Coda (2018), sendo empregado um código computacional desenvolvido no grupo de pesquisa em linguagem de programação em C++ orientada a objeto, que engloba tanto MEF quanto IGA.

O acoplamento entre os códigos para fluido e para estrutura é desenvolvido de forma particionada forte.

Para maior eficiência na resolução dos problemas, adota-se o protocolo MPI (*Message passing interface*) para processamento paralelo com memória distribuída. A partição do domínio discretizado entre os processos, o qual é realizado através da biblioteca METIS<sup>1</sup> e o pacote Escrever o que significa a sigla PETSc PETSc<sup>2</sup> é adotada para a solução de sistemas lineares em processamento paralelo.

Para a geração de malhas de elementos finitos emprega-se o programa GMSH<sup>3</sup>, enquanto para a geração dos grisd para análise isogeométrica, emprega-se o programa desenvolvido pela autora e seu orientador durante seu trabalho de mestrado (TONON, 2016). Para pós-processamento e visualização dos resultados, utilizam-se os programas Kitware Paraview<sup>4</sup> e Gnuplot<sup>5</sup>.

No que diz respeito à infraestrutura, utiliza-se o *cluster* disponível no Laboratório de Informática e de Mecânica Computacional (LIMC) do SET para a simulação de problemas mais complexos, e um computador pessoal para a simulação de problemas mais simples.

## 1.5 Justificativa

Não está boa, tente reescrever. Dê uma olhada nas últimas teses do grupo e na sugestão do chatgpt que eu coloquei no final para reescrever. Depois me avise para revisar.

Os problemas de interação fluido-estrutura estão presentes em diversas situações, na engenharia, nas ciências, na medicina e também no dia-a-dia das pessoas. O projeto de estruturas cada vez mais esbeltas, a necessidade de obtenção de energia elétrica a partir de fontes de energia limpa, como as usinas eólicas, o estudo de *airbags*, o bombeamento do sangue pelos ventrículos do coração humano e o abrir e fechar das válvulas do coração, são apenas alguns dos exemplos que demonstram a necessidade de se aprofundar nos estudos da interação fluido-estrutura computacional.

Enquanto que no campo engenharia estrutural os pacotes comerciais baseados em MEF estão em constante evolução, e podem resolver uma grande gama de problemas, os softwares que tratam de problemas da dinâmica dos fluidos computacional e de problemas multifísicos, como os problemas da IFE, ainda precisam evoluir muito para suprirem a demanda dos pesquisadores. A simulação numérica de problemas reais de IFE é ainda

<sup>1</sup> Disponível em: <<http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/metis/metis/overview>>

<sup>2</sup> Disponível em: <<http://https://www.mcs.anl.gov/petsc/>>

<sup>3</sup> Disponível em:<<https://gmsh.info/>>

<sup>4</sup> Disponível em:<<http://https://www.paraview.org/>>

<sup>5</sup> Disponível em:<<https://gnuplot.info/>>

muito difícil de ser realizada em função do elevado custo computacional, e muitas vezes, devido a grande complexidade dos problemas, ainda é impossível simulá-los sem que sejam realizadas grandes simplificações. Dessa forma, os ensaios experimentais, ainda são em grande parte das vezes, a melhor forma de se estudar o comportamento de IFE, embora, sejam muito custosos e demorados.

Dentro desse contexto, muitos pesquisadores tem se esforçado para que a análise de problemas da IFE computacionalmente seja possível e eficiente. Com essa mesma proposta, nesse projeto pretende-se desenvolver uma ferramenta computacional eficiente para análise tridimensional de problemas de interação fluido-estrutura utilizando uma combinação entre método dos elementos finitos e análise isogeométrica. Nesse trabalho, será aplicado o método Arlequin para a superposição de malhas no modelo do fluido, com uma malha local mais refinada e deformável em contato com a superfície da estrutura sobreposta a uma malha global fixa e com discretização mais grosseira. Dessa forma, ainda que a estrutura mude drasticamente, não se faz necessário o remalhamento de toda a malha que compõe o fluido, diminuindo assim o custo computacional. Esta proposta compartilha as vantagens dos métodos de malhas adaptadas e de malhas não adaptadas, possuindo a possibilidade de alcançar uma ótima convergência.

**sugestão da ia:** A motivação central desta pesquisa decorre da relevância científica e tecnológica dos problemas de interação fluido-estrutura (IFE) e das limitações das metodologias atualmente disponíveis para sua análise numérica. Embora os avanços recentes em dinâmica dos fluidos computacional, mecânica dos sólidos computacional e técnicas de acoplamento tenham possibilitado progressos significativos na modelagem desses problemas, ainda persistem desafios importantes, especialmente quando se trata de situações envolvendo grandes deslocamentos estruturais, escoamentos tridimensionais incompressíveis a altos números de Reynolds e mudanças topológicas no domínio do fluido.

Do ponto de vista computacional, os métodos tradicionais de malhas móveis apresentam limitações relacionadas ao elevado custo de remalhamentos sucessivos, inevitáveis em problemas com grandes distorções do domínio fluido. Por outro lado, os métodos de malhas fixas, embora adequados para lidar com mudanças topológicas, apresentam deficiências na representação de fenômenos localizados, como os efeitos de camada limite em torno de estruturas imersas. Assim, existe uma lacuna metodológica que justifica a busca por técnicas capazes de combinar as vantagens das abordagens existentes e, ao mesmo tempo, mitigar suas limitações.

Nesse contexto, a proposta de utilizar técnicas de decomposição de domínio com malhas superpostas apresenta-se como uma alternativa promissora. A sobreposição de malhas globais (fixas e menos refinadas) e locais (móveis e conformes à estrutura) possibilita tanto o tratamento adequado de grandes deslocamentos e mudanças topológicas quanto a captura precisa de efeitos de fronteira, reduzindo a necessidade de remalhamentos extensivos. Além disso, a adoção de diferentes discretizações — combinando elementos finitos e análise

isogeométrica — permite explorar as vantagens de cada metodologia: a flexibilidade geométrica dos elementos finitos e a descrição exata de superfícies e continuidade elevada das funções NURBS.

Adicionalmente, a literatura ainda é incipiente no que se refere à aplicação conjunta da análise isogeométrica e do método dos elementos finitos em problemas de IFE tridimensionais. A investigação do método da combinação dos espaços de funções e do método Arlequin estabilizado, aplicados ao acoplamento entre malhas globais e locais, representa uma contribuição original deste trabalho, tanto no âmbito teórico quanto no computacional. Em particular, a avaliação da robustez do Arlequin estabilizado para escoamentos incompressíveis em altos números de Reynolds e sua extensão para a análise de problemas de IFE tridimensionais configuram avanços relevantes frente às metodologias atualmente disponíveis.

Portanto, esta tese justifica-se pela necessidade de desenvolver e consolidar técnicas numéricas mais eficientes e robustas para a análise de problemas complexos de interação fluido-estrutura. O desenvolvimento proposto contribuirá não apenas para o avanço do conhecimento científico na área de mecânica computacional, mas também para aplicações práticas em engenharia, tais como análise aeroelástica, projeto de estruturas submetidas à ação do vento, dinâmica de sistemas biomecânicos e estudo de fenômenos hidrodinâmicos em engenharia naval e oceânica.



CAPÍTULO

---

**2**

# DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL

---



---

O escoamento isotérmico de um fluido newtoniano é descrito pelas equações advindas da conservação da quantidade de movimento, ou de Navier-Stokes, e da conservação de massa. Nos casos em que ocorram variações significativas de temperatura ou em escoamentos compressíveis, a equação da conservação da energia deve ser incorporada ao sistema. Essas equações, em conjunto com a relação constitutiva, formam um sistema de equações diferenciais não lineares que descrevem o comportamento do escoamento no tempo e no espaço.

Neste trabalho, são investigados escoamentos incompressíveis, isotérmicos e com contornos móveis. As seções seguintes apresentam a abordagem adotada para a resolução desse tipo de problema, bem como sua implementação computacional. Adota-se uma descrição Euleriana-Lagrangiana Arbitrária (ALE) para representar as equações, e a discretização espacial é realizada por meio do método dos elementos finitos (FEM) ou da análise isogeométrica (IGA).

Para tratar questões numéricas recorrentes nesse tipo de equações, como as oscilações espúrias em casos de convecção dominante, típicas da aplicação direta do método dos resíduos ponderados na formulação clássica de Galerkin, emprega-se a metodologia Streamline Upwind/Petrov-Galerkin (SUPG). Além disso, a estabilização Pressure-Stabilizing/Petrov-Galerkin (PSPG) é aplicada com o objetivo de contornar as condições de *Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi* (LBB) associadas aos escoamentos incompressíveis, permitindo o uso estável de um mesmo espaço de funções de aproximação para pressão e velocidade. A integração temporal é realizada por meio do método  $\alpha$ -generalizado.

Ao final deste capítulo, apresenta-se um algoritmo que descreve o esquema de

solução computacional adotado neste trabalhos para a mecânica dos fluidos, seguido da simulação de casos clássicos para a verificação da metodologia proposta.

## 2.1 Equações governantes na descrição Euleriana

### 2.1.1 Equação da conservação da massa

Para obter a equação da conservação da massa na descrição espacial, considera-se um volume de controle infinitesimal fixo no espaço, permeável à matéria e submetido a um escoamento com velocidade  $\mathbf{u}$ , cujos componentes são  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  (conforme a Fig. 2.1). Para um intervalo de tempo infinitesimal  $dt$ , a lei da conservação da massa estabelece que a variação de massa dentro do volume de controle deve ser igual ao balanço do fluxo líquido de massa que atravessa suas fronteiras, podendo ser expressa matematicamente da seguinte forma:

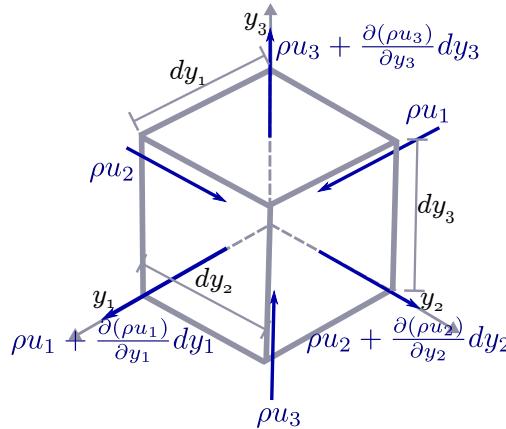


Figura 2.1 – Volume de controle infinitesimal: Fluxo de massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dV = (\rho u_1 dA_1 + \rho u_2 dA_2 + \rho u_3 dA_3) - \left( \left( \rho u_1 + \frac{\partial \rho u_1}{\partial y_1} dy_1 \right) dA_1 + \left( \rho u_2 + \frac{\partial \rho u_2}{\partial y_2} dy_2 \right) dA_2 + \left( \rho u_3 + \frac{\partial \rho u_3}{\partial y_3} dy_3 \right) dA_3 \right), \quad (2.1)$$

com  $\rho$  sendo a densidade de massa do fluido e  $dA_i$  a área referente à face ortogonal ao eixo  $y_i$ . Considerando que  $dV = dy_1 dy_2 dy_3 = dy_1 dA_1 = dy_2 dA_2 = dy_3 dA_3$  e manipulando-se algebraicamente a Eq. 2.1, resulta:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u_1}{\partial y_1} - \frac{\partial \rho u_2}{\partial y_2} - \frac{\partial \rho u_3}{\partial y_3}. \quad (2.2)$$

Para escoamentos incompressíveis, quando  $\rho$  é constante, a equação fica reduzida a:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \frac{\partial u_2}{\partial y_2} + \frac{\partial u_3}{\partial y_3} = 0, \quad (2.3)$$

ou ainda:

$$\nabla_y \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.4)$$

onde  $\nabla_y \cdot (\mathbf{u})$  é o divergente de  $\mathbf{u}$  em relação às coordenadas Eulerianas  $\mathbf{y}$ .

### 2.1.2 Equação da quantidade de movimento

Para um volume de controle infinitesimal, a lei da conservação da quantidade de movimento afirma que a variação temporal da quantidade de movimento no interior do volume é determinada pela diferença entre o fluxo de quantidade de movimento que entra e o que sai pelas suas fronteiras, somada à resultante das forças aplicadas sobre o volume de controle.

Para chegar-se à equação da quantidade de movimento em sua forma conservativa e seguindo a descrição espacial, inicia-se com a avaliação das forças que atuam sobre um volume de controle infinitesimal no instante atual, como ilustrado na Fig. 2.2, onde são mostradas apenas as componentes que atuam na direção  $y_1$ . Somando-se vetorialmente as componentes de forças externas e internas na direção  $y_1$ , chega-se na seguinte relação:

$$\begin{aligned} F_1 = & -(\sigma_{11}dy_2dy_3 + \sigma_{12}dy_1dy_3 + \sigma_{13}dy_1dy_2) + \\ & \left( \left( \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial y_1} dy_1 \right) dy_2 dy_3 + \left( \sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y_2} dy_2 \right) dy_1 dy_3 + \left( \sigma_{13} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial y_3} dy_3 \right) dy_1 dy_2 \right) + \\ & b_1 dy_1 dy_2 dy_3, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde  $F_1$  representa a resultante das forças externas na direção  $y_1$ ;  $\sigma_{ij}$  são as componentes  $ij$  do tensor das tensões de Cauchy ( $\boldsymbol{\sigma}$ ); e  $b_1$  representa a componente do vetor força de campo por unidade de volume na direção  $y_1$ . Dividindo-se Eq. 2.5 por  $dV$  e efetuando as subtrações, tem-se a componente de força resultante por unidade de volume na direção de  $y_1$  ( $q_1$ ):

$$q_1 = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial y_3} + b_1. \quad (2.6)$$

Seguindo a mesma ideia para as direções  $y_2$  e  $y_3$ , escreve-se:

$$q_2 = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y_3} + b_2, \quad (2.7)$$

e

$$q_3 = \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial y_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial y_3} + b_3, \quad (2.8)$$

ou ainda, de forma simbólica:

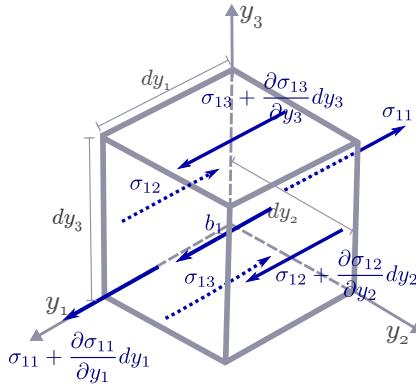


Figura 2.2 – Volume de controle infinitesimal: Componentes de força na direção  $y_1$

$$\mathbf{q} = \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}. \quad (2.9)$$

Realizando-se o balanço da quantidade de movimento no volume de controle infinitesimal da Fig. 2.3, e aplicando-se o princípio da conservação da quantidade de movimento, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} dV = & u_1 \rho \mathbf{u} dA_1 + u_2 \rho \mathbf{u} dA_2 + u_3 \rho \mathbf{u} dA_3 - \\ & \left( \left( u_1 \rho \mathbf{u} + \frac{\partial u_1 \rho \mathbf{u}}{\partial y_1} dy_1 \right) dA_1 + \left( u_2 \rho \mathbf{u} + \frac{\partial u_2 \rho \mathbf{u}}{\partial y_2} dy_2 \right) dA_2 + \right. \\ & \left. \left( u_3 \rho \mathbf{u} + \frac{\partial u_3 \rho \mathbf{u}}{\partial y_3} dy_3 \right) dA_3 \right) + \mathbf{q} dV, \end{aligned} \quad (2.10)$$

dividindo-se a Eq. 2.10 por  $dV$  e efetuando-se as subtrações, chega-se a :

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\partial u_1 \rho \mathbf{u}}{\partial y_1} - \frac{\partial u_2 \rho \mathbf{u}}{\partial y_2} - \frac{\partial u_3 \rho \mathbf{u}}{\partial y_3} + \mathbf{q}, \quad (2.11)$$

ou ainda, considerando que  $\rho$  é constante:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla_y \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mathbf{f} \right) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (2.12)$$

onde  $\mathbf{f} = \mathbf{b}/\rho$  representa a força de campo por unidade de massa.

Da consideração da equação da continuidade, a Eq. 2.12 pode ser rescrita em sua forma convectiva como:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla_y) \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (2.13)$$

### 2.1.3 Relação constitutiva

O tensor de tensões de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  é definido para fluidos newtonianos incompressíveis pela seguinte relação constitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \quad (2.14)$$

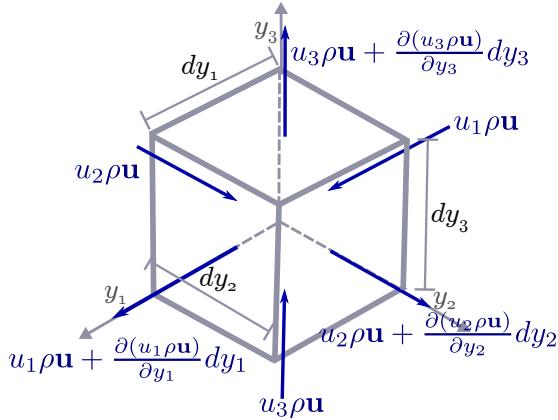


Figura 2.3 – Volume de controle infinitesimal: Fluxo de quantidade de Movimento

onde  $p$  representa a pressão,  $\mu$  a viscosidade dinâmica do fluido e  $\varepsilon(\bullet)$  é o tensor taxa de deformação Euleriana, definido como:

$$\varepsilon(\bullet) = \frac{1}{2} \left( \nabla_y(\bullet) + \nabla_y(\bullet)^T \right). \quad (2.15)$$

#### 2.1.4 *Modelo matemático para escoamentos incompressíveis na forma forte*

*Sugiro colocar isso após a descrição ALE apenas....*

Seja  $\Omega \in \mathbb{R}^{n_{\text{sd}}}$ , com  $n_{\text{sd}} = 1, 2, 3$  definindo a dimensão do domínio espacial do escoamento com contorno  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ , no instante  $t \in (0, T)$  (ver Fig. 2.4).

Para escoamentos incompressíveis isotérmicos o fluido possui movimento descrito pela equação da quantidade de movimento, ou equações de Navier-Stokes (Eq. 2.13) e da conservação de massa (Eq. 2.4). Para completar a formulação da mecânica dos fluidos, condições de contorno devem ser especificadas. Em geral, em uma dada parte do contorno espacial, condições de contorno essenciais (Dirichlet) ou naturais (Neumann) são aplicadas. Dessa forma, o escoamento é governado pelo seguinte conjunto de equações:

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_y \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ em } \Omega \\ \nabla_y \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ em } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_D \text{ em } \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{h} \text{ em } \Gamma_N, \end{cases} \quad (2.16)$$

sendo  $\Gamma_D$  a porção do contorno com condições de contorno de Dirichlet, representadas pelo campo de velocidades  $\mathbf{u}_D$ , e  $\Gamma_N$  aquela com condições de contorno de Neumann, descritas pelas forças de superfície  $\mathbf{h}$ . A variável  $\mathbf{n}$  representa o vetor unitário normal ao contorno  $\Gamma_N$ .

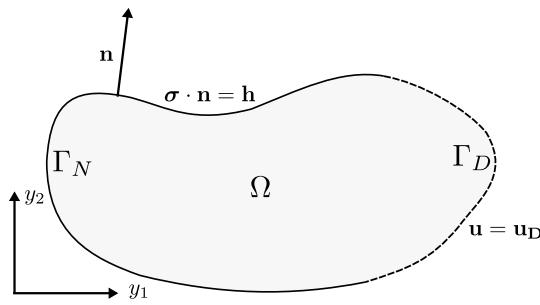


Figura 2.4 – Domínio para o problema da dinâmica dos fluidos computacional

## 2.2 Descrição Euleriana-Lagrangiana arbitrária (ALE)

A descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária (HUGHES; LIU; ZIMMERMAN, 1981; DONEA; GIULIANI; HALLEUX, 1982) representa uma generalização das descrições puramente Lagrangiana e puramente Euleriana do movimento do contínuo. A descrição Lagrangiana fixa a atenção em pontos materiais do contínuo, enquanto que, na descrição Euleriana, considera-se uma porção fixa do espaço ocupada pelo contínuo e analisam-se os pontos materiais que passam por essa porção ao longo do tempo. Como consequência, na descrição puramente Lagrangiana a malha computacional move-se com o contínuo, enquanto que, na Euleriana, a malha computacional mantém-se espacialmente fixa e permeável ao meio contínuo. Por sua vez, na descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária trabalha-se com um domínio de referência que pode mover-se de maneira independente do movimento dos pontos materiais do contínuo analisado.

Para a aplicação dessa metodologia às equações governantes da mecânica dos fluidos, consideram-se três domínios contínuos, de acordo com a Fig. 2.5: (i) o domínio inicial, chamado de **domínio material** ( $\Omega_0$ ), definido pelas coordenadas dos pontos materiais  $\mathbf{x}$  na configuração inicial; (ii) o domínio atual, chamado de **domínio espacial** ( $\Omega$ ), definido pelas coordenadas espaciais  $\mathbf{y}$ ; e, por fim, (iii) o **domínio de referência** ( $\Omega_{\bar{\mathbf{x}}}$ ), associado às coordenadas dos pontos de referência  $\bar{\mathbf{x}}$ .

Considera-se neste texto, o domínio de referência,  $\Omega_{\bar{\mathbf{x}}}$ , como sendo a configuração inicial da malha, enquanto que as configurações atuais, tanto da malha como do contínuo, coincidem com a referência espacial  $\Omega$ .

As coordenadas no domínio  $\Omega$  podem ser mapeadas a partir do domínio inicial ( $\Omega_0$ ) ou do domínio de referência ( $\Omega_{\bar{\mathbf{x}}}$ ) utilizando as seguintes funções de mapeamento:

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, t). \quad (2.17)$$

Da mesma forma, o domínio de referência pode ser mapeado a partir do domínio inicial por:

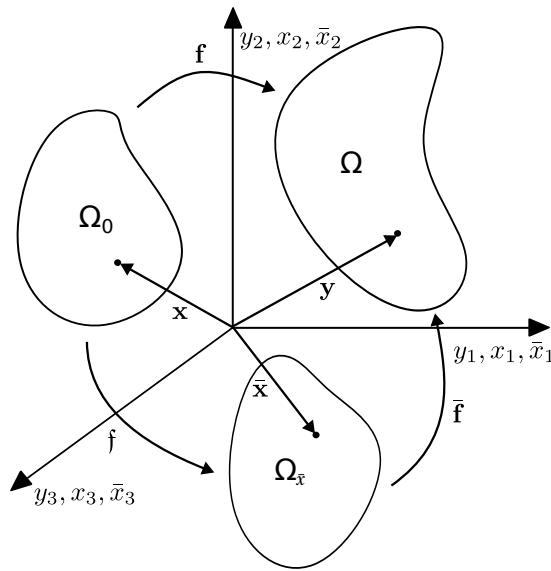


Figura 2.5 – Descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathfrak{f}(\mathbf{x}, t). \quad (2.18)$$

A velocidade dos pontos da malha é calculada por:

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}}, \quad (2.19)$$

e a velocidade dos pontos materiais no instante  $t$  é obtida pela derivada do vetor posição  $\mathbf{y}$ , mantendo  $\mathbf{x}$  fixo:

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}. \quad (2.20)$$

As matrizes jacobianas dos mapeamentos considerando a dependência do espaço e do tempo são dadas por:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial (\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial (\mathbf{x}, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{\partial (\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, t), t)}{\partial (\bar{\mathbf{x}}, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} & \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

e

$$\mathfrak{F} = \frac{\partial (\mathfrak{f}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial (\mathbf{x}, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{w} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

sendo  $\mathbf{w} = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}$ .

Considerando que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{f}} \circ \mathfrak{f}$ , pode-se escrever:

$$\frac{\partial(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial(\mathbf{x}, t)} = \frac{\partial(\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, t), t)}{\partial(\bar{\mathbf{x}}, t)} \cdot \frac{\partial(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial(\mathbf{x}, t)}, \quad (2.24)$$

que pode ser rescrita como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} & \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{w} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Dessa forma, pode-se estabelecer uma relação entre a velocidade da malha e a velocidade do ponto material:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{w}. \quad (2.26)$$

Supondo agora uma grandeza física escalar, denominada  $g(\mathbf{y}, t)$  na configuração espacial, de  $g^*(\bar{\mathbf{x}}, t)$  na configuração de referência e  $g^{**}(\mathbf{x}, t)$  na configuração material, pode-se escrever então:

$$g^{**}(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), t), \quad (2.27)$$

ou:

$$g^{**} = g \circ \mathbf{f}, \quad (2.28)$$

o que permite escrever o seguinte gradiente:

$$\frac{\partial g^{**}(\mathbf{x}, t)}{\partial(\mathbf{x}, t)} = \frac{\partial g(\mathbf{y}, t)}{\partial(\mathbf{y}, t)} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial(\mathbf{x}, t)}, \quad (2.29)$$

que, em forma matricial, é apresentado como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g^{**}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial g^{**}}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial g}{\partial t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Essa expressão nos permite escrever a derivada temporal da variável na configuração material:

$$\frac{\partial g^{**}}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}} \cdot \mathbf{u}, \quad (2.31)$$

que corresponde à derivada material de  $g$ . Para facilitar a visualização, podem-se remover os sobrescritos  $**$ , e então:

$$\frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial g}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} g. \quad (2.32)$$

Usando essa mesma metodologia, pode-se escrever a transformação de  $g^*(\bar{\mathbf{x}}, t)$  para a referência material da seguinte forma:

$$g^{**} = g^* \circ \mathbf{f}, \quad (2.33)$$

que resulta no seguinte gradiente

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g^{**}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial g^{**}}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g^*}{\partial \bar{\mathbf{x}}} & \frac{\partial g^*}{\partial t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{w} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

com a segunda coluna resultando em:

$$\frac{\partial g^{**}}{\partial t} = \frac{\partial g^*}{\partial t} + \frac{\partial g^*}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{w}. \quad (2.35)$$

Utilizando-se a expressão apresentada na Eq. 2.26 e substituindo-a em 2.35, resulta em:

$$\frac{\partial g^{**}}{\partial t} = \frac{\partial g^*}{\partial t} + \frac{\partial g^*}{\partial \mathbf{y}} \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}). \quad (2.36)$$

Removendo-se os sobrescritos (\*\* e \*), chega-se a equação fundamental para os desenvolvimentos utilizando a metodologia ALE:

$$\frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial g}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} g. \quad (2.37)$$

A partir da definição de derivada material da Eq. 2.32 e comparando com a Eq. 2.13, pode-se rescrever a equação da quantidade de movimento da seguinte forma:

$$\rho \left( \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \mathbf{f} \right) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0. \quad (2.38)$$

Para expressar a equação da quantidade de movimento em uma descrição Euleriana-Lagrangiana, basta substituir na Eq. 2.38 a definição de derivada material apresentada na Eq. 2.37, resultando:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0. \quad (2.39)$$

A equação da continuidade é independente da movimentação da malha. Dessa forma, a Eq. (2.4) permanece válida para análises usando uma descrição ALE.

**Sempre que estiver se referindo a equações, use (??) ao invés de ??!** Arrume isso em todo o texto...

### 2.2.1 Forma forte do modelo para escoamentos incompressíveis com contornos móveis

Nesta seção é apresentado o problema para escoamentos incompressíveis com contornos móveis, assumindo-se que a velocidade da malha (do domínio de referência) é inteiramente conhecida. Posteriormente será desenvolvido o modelo matemático adotado para a movimentação da malha.

Seja  $\Omega \in \mathbb{R}^{n_{sd}}$ , com  $n_{sd} = 1, 2, 3$  definindo a dimensão do domínio espacial do escoamento com contorno  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ , no instante  $t \in (0, T)$  (ver Fig. 2.4).

Por hora, assume-se que a velocidade da malha é um dado conhecido. Posteriormente

será abordada a sua determinação.

Para escoamentos incompressíveis isotérmicos o fluido possui movimento descrito pela equação da quantidade de movimento, (Eq. (2.38)) e da continuidade (Eq. 2.4). Para completar a formulação da mecânica dos fluidos, condições de contorno devem ser especificadas. Em geral, em uma dada parte do contorno espacial, condições de contorno essenciais (Dirichlet) ou naturais (Neumann) são aplicadas. Dessa forma, o escoamento é governado pelo seguinte conjunto de equações:

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\bar{x}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_y \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ em } \Omega \\ \nabla_y \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ em } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_D \text{ em } \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{h} \text{ em } \Gamma_N, \end{cases} \quad (2.40)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}$  é obtido por meio da Eq. (2.14), sendo  $\Gamma_D$  a porção do contorno sobre a qual são impostas as condições de contorno de Dirichlet, representadas pela distribuição de velocidade prescrita  $\mathbf{u}_D$ , e  $\Gamma_N$  a porção com condições de Neumann, descritas pelas forças de superfície  $\mathbf{h}$ . A variável  $\mathbf{n}$  representa o vetor unitário normal ao contorno  $\Gamma_N$ .

## 2.3 Forma fraca e discretização espacial das equações governantes

Tomando-se a forma forte das equações governantes da DFC em descrição ALE (Eq. (2.40)), aplica-se o método dos resíduos ponderados para se chegar à forma fraca e proceder com a discretização espacial. Os espaços de dimensão finita das funções tentativa que descrevem a velocidade e a pressão são chamados de  $\mathcal{S}_u$  e  $\mathcal{S}_p$  respectivamente, e definidos como:

$$\mathcal{S}_u = \left\{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u}(\cdot, t) \in (H^1(\Omega))^{n_{sd}}, \mathbf{u} = \mathbf{u}_D \text{ em } \Gamma_D \right\} \quad (2.41)$$

e

$$\mathcal{S}_p = \left\{ p \mid p(\cdot) \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} p \, d\Omega = 0 \text{ se } \Gamma = \Gamma_N \right\}, \quad (2.42)$$

sendo  $(H^1(\Omega))^{n_{sd}}$  o espaço de funções vetoriais com derivadas de quadrado integrável sobre  $\Omega$  e  $L^2(\Omega)$  o espaço de funções escalares de quadrado integrável sobre  $\Omega$ .

Os espaços das funções teste (ou funções ponderadoras) das equações da quantidade de movimento e da continuidade são definidos, respectivamente, por:

$$\mathcal{V}_u = \left\{ \mathbf{w} \mid \mathbf{w}(\cdot) \in (H^1(\Omega))^{n_{sd}}, \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_D \right\}, \quad (2.43)$$

$$\mathcal{V}_p = \mathcal{S}_p. \quad (2.44)$$

Aplicando-se o método dos resíduos ponderados às equações Eq. (2.39) e Eq.(2.4), integrando-se por partes o termo referente ao tensor de tensões de Cauchy, empregando-se o teorema da divergência e levando-se em consideração a condição de homogeneidade da função  $\mathbf{w}$  sobre o contorno  $\Gamma_D$ , obtém-se a forma fraca do problema, dada por:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\bar{x}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_y \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) : \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} d\Gamma_N = 0, \quad (2.45)$$

e

$$\int_{\Omega} q (\nabla_y \cdot \mathbf{u}) d\Omega = 0. \quad (2.46)$$

A solução do problema consiste, então, em encontrar  $\mathbf{u} \in \mathcal{S}_u$  e  $p \in \mathcal{S}_p$ , de modo que para todo  $\mathbf{w} \in \mathcal{V}_u$  e para todo  $q \in \mathcal{V}_p$ , Eq. (2.45) e Eq. (??) sejam verdadeiras.

### 2.3.1 Método dos elementos finitos para escoamentos incompressíveis

Antes de prosseguir com a discretização espacial da forma fraca do conjunto de equações da Mecânica dos Fluidos, é fundamental compreender os princípios básicos do Método dos Elementos Finitos. A discretização espacial tanto pelo método dos elementos finitos, como pela técnica de análise isogeométrica (Cap. 3), baseia-se em tomar um problema contínuo com domínio  $\Omega$  e representá-lo por um domínio  $\Omega^h$  que é dividido em subdomínios  $\Omega^e$ , também chamados de elementos ou células, de forma que:

$$\Omega \approx \Omega^h = \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \Omega^e, \quad (2.47)$$

onde  $n_{el}$  representa o número total de elementos.

Da mesma forma, o contorno de  $\Omega$  é aproximado da seguinte forma:

$$\Gamma \approx \Gamma^h = \bigcup_{b=1}^{n_{eb}} \Gamma^b, \quad (2.48)$$

onde  $n_{eb}$  representa o número de faces ou lados de elementos que formam o contorno.

No Método dos Elementos Finitos, cada elemento é definido com auxílio de um conjunto de pontos chamados nós. As variáveis de interesse do problema, que incluem a geometria na abordagem isoparamétrica, são aproximadas pela combinação linear de um número finito de funções associadas aos nós, chamadas funções de forma, multiplicadas por variáveis denominadas parâmetros nodais. As funções de forma utilizadas no Método dos Elementos Finitos tradicionalmente satisfazem a propriedade de partição da unidade, ou seja, a soma das funções de forma associadas a todos os nós de um elemento resulta em 1 para qualquer ponto dentro do seu domínio. A técnica de elementos finitos pode ser encontrada nos diversos livros disponíveis sobre o assunto, tais como Zienkiewicz, Taylor e Nithiarasu (2005a) e Reddy (2006).

Nesse trabalho, para a mecânica dos fluidos, são utilizadas funções de forma quadráticas do tipo polinômios de Lagrange, sendo empregados elementos isoparamétricos

triangulares para o caso 2D e tetraédricos para o caso 3D. Esses elementos são apresentados nas Figs. 2.6a e 2.6b, onde são ilustrados também as coordenadas paramétricas adimensionais adotados para definir as funções de forma.

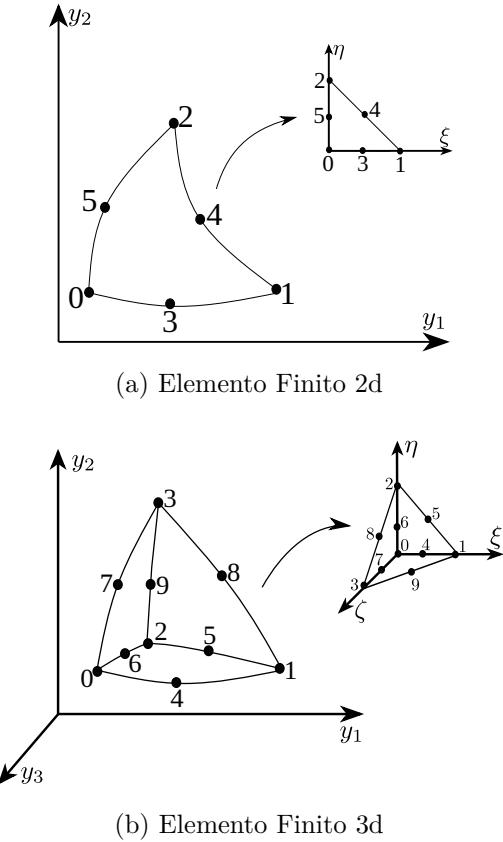


Figura 2.6 – Elementos Finitos: representação espacial e paramétrica

Adotar a abordagem isoparamétrica implica que a geometria do problema é descrita também pela combinação entre funções de forma e as coordenadas nodais da malha, ou seja:

$$\mathbf{y}^h(\xi) = \sum_{a=1}^{n_{\text{nos}}} \mathbf{y}_a N_a(\xi), \quad (2.49)$$

**MUDEI DE A PARA a O ÍNDICE. SE QUISER PODE TROCAR, MAS USE ALGUM CARACTER MINÚSCULO. NAS OUTRAS EQUAÇÕES NÃO MUDEI...** sendo que para uma geometria tridimensional o vetor  $\mathbf{y}$  possui coordenadas  $y_1, y_2$  e  $y_3$ , as quais representam as posições atuais dos pontos que compõem o domínio. O subíndice "a" representa o índice dos nós da malha,  $n_{\text{nos}}$  o número total de nós e  $N$  as funções de forma da discretização.

### 2.3.2 Discretização Espacial

As funções tentativa para velocidade e pressão, bem as funções teste, assim com as coordenadas (Eq. (2.49)) são dadas pela combinação linear das funções de forma definidas

sobre cada subdomínio:

Trocar  $\mathbf{y}$  por  $\xi$  nas equações abaixo

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{y}, t) = \sum_{A=1}^{n_{\text{nos}}} \mathbf{u}_A(t) N_A(\mathbf{y}), \quad (2.50)$$

$$p^h(\mathbf{y}, t) = \sum_{A=1}^{n_{\text{nos}}} p_A(t) N_A(\mathbf{y}), \quad (2.51)$$

$$\mathbf{w}^h(\mathbf{y}) = \sum_{A=1}^{n_{\text{nos}}} \mathbf{w}_A N_A(\mathbf{y}) \quad (2.52)$$

e

$$q^h(\mathbf{y}) = \sum_{A=1}^{n_{\text{nos}}} q_A N_A(\mathbf{y}). \quad (2.53)$$

O problema passa a ser enunciado como: Encontrar  $\mathbf{u}^h \in \mathcal{S}_u^h$  e  $p^h \in \mathcal{S}_p^h$ , de tal modo que  $\forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_u^h$  e  $q^h \in \mathcal{V}_p^h$  a seguinte expressão seja verdadeira:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{w}^h \cdot \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_N} \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{h}^h d\Gamma_N + \int_{\Omega} q^h (\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u}^h) d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (2.54)$$

sendo as variáveis  $\mathbf{w}_A$  e  $q_A$  arbitrárias nas aproximações, enquanto  $\mathbf{u}_A$  e  $p_A$  são as incógnitas a serem determinadas.

No entanto, as formulações obtidas pelo método de Bobnov-Galerkin são conhecidas por apresentarem oscilações espúrias em escoamentos dominados pela convecção. Uma das formas de se lidar com esse problema é a utilização de métodos estabilizados, como o *Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin* (SUPG) (BROOKS; HUGHES, 1982; HUGHES; TEZDUYAR, 1984). Essa metodologia consiste em adicionar à equação da quantidade de movimento, o seu resíduo ponderado por  $\tau_{\text{SUPG}} ((\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{w}^h)$ , onde  $\tau_{\text{SUPG}}$  é um parâmetro calculado para garantir bom condicionamento ao sistema. Do ponto de vista numérico, isso adiciona termos estabilizantes na direção das linhas de corrente, mantendo a formulação consistente por ser baseado na adição do resíduo ponderado.

Para os problemas de escoamentos incompressíveis aqui analisados, deve-se levar em conta que os campos de velocidade e pressão não podem ser aproximados arbitrariamente, podendo levar à ocorrência de oscilações espúrias no campo de pressão e instabilidade na solução. Para evitar isso, podem ser escolhidos elementos Taylor-Hood que obedecam à condição de *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi* (LBB) (BREZZI; FORTIN, 1991; ZIENKIEWICZ; TAYLOR; NITHIARASU, 2005; STRANG; FIX, 2008), ou pode-se recorrer a um método estabilizado.

Para conferir maior flexibilidade ao programa, opta-se pela formulação estabilizada com a técnica *Pressure Stabilization Petrov Galerkin* (PSPG) (HUGHES; FRANCA; BALESTRA, 1986; TEZDUYAR et al., 1992a). Essa técnica consiste em adicionar à equação da continuidade, o resíduo da equação da quantidade de movimento ponderado pela função  $\tau_{\text{PSPG}} \left( \frac{\nabla_{\mathbf{y}} q^h}{\rho} \right)$ , onde  $\tau_{\text{PSPG}}$  é um parâmetro calculado para garantir bom

condicionamento ao sistema. Essa técnica introduz termo dependente da pressão na equação da continuidade, que é responsável pela estabilização, contornando a condição LBB.

Por fim, para prover maior estabilização em problemas com formação de vórtices, adiciona-se à equação da quantidade de movimento o resíduo da equação da continuidade ponderado por  $\nu_{\text{LSIC}} \rho (\nabla_y \cdot \mathbf{w}^h)$ , sendo  $\nu_{\text{LSIC}}$  um parâmetro de estabilização. Essa estabilização, denominada *Least Squares on Incompressibility Constraint LSIC* (LSIC), dá origem a um termo do tipo mínimos quadrados que introduz, de forma consistente, maior estabilidade à formulação (??BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013).

Nota-se que a consistência da formulação com SUPG, PSPG e LSIC é garantida, uma vez que são adicionados às equações seus resíduos ponderados.

Assim, o problema da dinâmica dos fluidos na formulação estabilizada, passa a ser a determinação de  $\mathbf{u}^h \in \mathcal{S}_u^h$  e  $p^h \in \mathcal{S}_p^h$ , de tal modo que  $\forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_u^h$  e  $q^h \in \mathcal{V}_p^h$  as seguintes expressões sejam verdadeiras:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{w}^h \cdot \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_y \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_N} \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{h}^h d\Gamma_N + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_e} \tau_{\text{SUPG}} ((\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_y \mathbf{w}^h) \cdot \mathbf{r}_M(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_e} \rho \nu_{\text{LSIC}} \nabla_y \cdot \mathbf{w}^h r_C(\mathbf{u}^h) d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (2.55)$$

e

$$\int_{\Omega} q^h \nabla_y \cdot \mathbf{u}^h d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_e} \tau_{\text{PSPG}} \left( \frac{\nabla_y q^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_M(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega = 0, \quad (2.56)$$

onde  $\mathbf{r}_M$  e  $r_C$  são os resíduos da equação da quantidade de movimento e da equação da continuidade, respectivamente, dados por:

$$\mathbf{r}_M(\mathbf{u}^h, p^h) = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_y \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h, p^h), \quad (2.57)$$

$$r_C(\mathbf{u}^h) = \nabla_y \cdot \mathbf{u}^h. \quad (2.58)$$

Visto que existem funções teste separadas para a velocidade e pressão, pode-se definir dois vetores residuais correspondentes a equação da quantidade de movimento ( $\mathbf{R}_M$ ) e a equação da continuidade ( $\mathbf{R}_C$ ). Considerando a arbitrariedade de  $\mathbf{w}_A$  e  $q_A$ , têm-se:

$$\mathbf{R}_M = [(\mathbf{R}_M)_{A,i}], \quad (2.59)$$

$$\mathbf{R}_C = [(\mathbf{R}_C)_A], \quad (2.60)$$

com:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{R}_M)_{A,i} = & \int_{\Omega} N_A \mathbf{e}_i \cdot \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_y \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(N_A \mathbf{e}_i) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\
& - \int_{\Gamma_N} N_A \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{h}^h d\Gamma_N + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{SUPG} ((\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_y N_A \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{r}_M(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \rho \nu_{LSIC} (\nabla_y \cdot N_A \mathbf{e}_i) r_C(\mathbf{u}^h) d\Omega,
\end{aligned} \tag{2.61}$$

e:

$$(\mathbf{R}_C)_A = \int_{\Omega} N_A \nabla_y \cdot \mathbf{u}^h d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{PSPG} \left( \frac{\nabla_y N_A}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_M(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega, \tag{2.62}$$

com  $i = 1, 2$  para problemas 2D e  $i = 1, 3$  para problemas 3D.

Considerando  $\dot{\mathbf{U}}$ ,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{p}$  os vetores nodais dos graus de liberdade respectivos a velocidade, aceleração e pressão, pode-se escrever a forma semidiscreta do problema da DFC como: Encontrar  $\dot{\mathbf{U}}$ ,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{p}$  de maneira que

$$\mathbf{R}_M(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}, \tag{2.63}$$

e

$$\mathbf{R}_C(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}. \tag{2.64}$$

### 2.3.3 Parâmetros de estabilização

A definição adequada dos parâmetros de estabilização desempenha papel fundamental no desempenho do método e na sua estabilidade numérica.

Desde os primeiros desenvolvimentos relacionados aos métodos estabilizados houve um amadurecimento das expressões de definição dos parâmetros  $\tau$ , as quais passam a levar em consideração formulações mais robustas, sendo adaptadas tanto para elementos de ordem elevadas, quanto para malhas mais complexas, como as usadas em análise isogeométrica.

Considerando que neste trabalho dois tipos de aproximações espaciais são utilizadas, uma baseada no FEM e outra baseada em IGA, adotam-se os parâmetros propostos mais recentemente por Takizawa, Tezduyar e Otoguro (2018), Takizawa, Ueda e Tezduyar (2019), Otoguro, Takizawa e Tezduyar (2020), que são adequados para ambas aproximações.

Para essa opção é necessário definir-se o tensor métrico do elemento no espaço. Com essa finalidade, descreve-se inicialmente a matriz Jacobiana  $\mathbf{Q}$ , como:

$$\mathbf{Q} = \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi} \right), \tag{2.65}$$

com  $\xi$  representando as coordenadas do espaço paramétrico, com componentes  $\xi, \eta$  e  $\zeta$ .

Para que a ordem polinomial seja levada em consideração, ou, outros fatores como a

dimensão do elemento no espaço paramétrico, aplica-se à  $\mathbf{Q}$ , uma matriz de transformação ( $\mathbf{D}$ ), conforme a seguinte expressão:

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}\mathbf{D}^{-1}. \quad (2.66)$$

O comprimento direcional do elemento fica definido como:

$$h_{\text{RQD}} = 2(\mathbf{r}\mathbf{r} : \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.67)$$

o fator 2 vem de um típico espaço paramétrico, que é um quadrado ou um cubo com lado de comprimento 2.  $\mathbf{r}$  é o vetor unitário na direção do gradiente da intensidade da velocidade e  $\mathbf{G}$  o tensor métrico do elemento, os quais são representados respectivamente como:

$$\mathbf{r} = \frac{\nabla_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|}{\|\nabla_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\|} \quad (2.68)$$

e

$$\mathbf{G} = \hat{\mathbf{Q}}^{-T} \cdot \hat{\mathbf{Q}}^{-1}. \quad (2.69)$$

Para elementos finitos com funções de forma polinomiais de Lagrange de ordens  $p_\xi$ ,  $p_\eta$  e  $p_\zeta$  nas direções paramétricas  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$ , respectivamente, com  $\xi, \eta, \zeta \in [-1, 1]$ , a matriz  $\mathbf{D}$  é definida por:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} p_\xi & 0 & 0 \\ 0 & p_\eta & 0 \\ 0 & 0 & p_\zeta \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

Em geral, se escolhe o espaço paramétrico baseado em razões como eficiência da integração numérica ou conveniência de implementação. A maioria das metodologias utilizadas para definir o comprimento do elemento não levam este fator em consideração. Para essa finalidade, em Takizawa, Ueda e Tezduyar (2019), apresenta-se a matriz de transformação ( $\mathbf{D}$ ) como:

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\xi}}}{\partial \boldsymbol{\xi}}, \quad (2.71)$$

com  $\hat{\boldsymbol{\xi}}$  chamado de espaço de paramétrico de preferência.

Para elementos simplex, buscando encontrar uma expressão que leve a um comprimento de elemento que não possua variação em função da ordenação dos nós, os autores introduziram um espaço paramétrico preferido que consiste em um elemento simplex regular com distância entre vértices de 2, e chegaram a seguinte expressão para  $\mathbf{D}$  quando  $n_{\text{sd}} = 2$ :

$$\mathbf{D} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} + 1 & \sqrt{3} - 1 \\ \sqrt{3} - 1 & \sqrt{3} + 1 \end{bmatrix}, \quad (2.72)$$

e para  $n_{\text{sd}} = 3$ :

$$\mathbf{D} = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

A definição da matriz  $\mathbf{D}$  para elementos isogeométricos será descrita na Subseção 3.4.1.

Além disso, nessa metodologia, o comprimento do elemento é limitado pelos mínimos e máximos valores representados abaixo:

$$h_{\min} \equiv 2 \min_r \left( (\mathbf{r} \mathbf{r} : \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}} \right), \quad (2.74)$$

$$h_{\max} \equiv 2 \max_r \left( (\mathbf{r} \mathbf{r} : \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}} \right), \quad (2.75)$$

que podem ser reescritos como:

$$h_{\min} = 2 (\lambda_{\max} \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.76)$$

$$h_{\max} = 2 (\lambda_{\min} \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.77)$$

onde  $\lambda_{\max}$  e  $\lambda_{\min}$  representam os máximos e mínimos autovalores da matriz  $\mathbf{G}$ .

Por fim, os parâmetros de estabilização são escritos como:

$$\tau_{\text{SUPG}} = \tau_{\text{PSPG}} = \left( \frac{1}{\tau_{\text{SUGN1}}^2} + \frac{1}{\tau_{\text{SUGN2}}^2} + \frac{1}{\tau_{\text{SUGN3}}^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.78)$$

$$\nu_{\text{LSIC}} = \tau_{\text{SUPG}} \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|^2, \quad (2.79)$$

onde:

$$\tau_{\text{SUGN1}}^{-2} = (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) : \mathbf{G}, \quad (2.80)$$

$$\tau_{\text{SUGN2}} = \frac{\Delta t}{2}, \quad (2.81)$$

e

$$\tau_{\text{SUGN3}}^{-1} = \nu \left( \mathbf{r}_{\text{reg}} \mathbf{r}_{\text{reg}} : \mathbf{G} + (1 - \mathbf{r}_{\text{reg}}^2) 4 h_{\min}^{-2} \right), \quad (2.82)$$

sendo  $\mathbf{r}_{\text{reg}}$  definido como:

$$\mathbf{r}_{\text{reg}} = \frac{\nabla_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|}{\|\nabla_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\| + \varepsilon (\|\nabla_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\|)_0}, \quad (2.83)$$

com  $\varepsilon$  uma constante pequena e  $(\|\nabla_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\|)_0$  um valor de referência. Os termos  $\tau_{\text{SUGN1}}$ ,  $\tau_{\text{SUGN2}}$  e  $\tau_{\text{SUGN3}}$  são parâmetros correspondentes aos termos convectivos, inerciais e viscosos, respectivamente.

## 2.4 Integração Temporal

Para a integração temporal das equações governantes, utiliza-se o método  $\alpha$ -generalizado. Esse método foi proposto inicialmente por Chung e Hulbert (1993) no contexto da mecânica das estruturas, e foi estendido para o contexto da dinâmica dos fluidos computacional por Jansen, Whiting e Hulbert (2000).

Considerando que o tempo da análise do problema é definido por um intervalo de  $[0, T]$ , o qual é partitionado em subintervalos  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ , com  $t_n$  e  $t_{n+1}$  os instantes anterior e atual, respectivamente. A solução do problema consiste em: conhecidos os valores nodais de aceleração, velocidade e pressão ( $\dot{\mathbf{U}}$ ,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{p}$ ) no instante  $n$ , encontrar a solução no instante  $n + 1$  de forma que:

$$\mathbf{R}_M(\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}, \mathbf{U}_{n+\alpha_f}, \mathbf{p}_{n+1}) = \mathbf{0}, \quad (2.84)$$

$$\mathbf{R}_C(\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}, \mathbf{U}_{n+\alpha_f}, \mathbf{p}_{n+1}) = \mathbf{0}, \quad (2.85)$$

com:

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m} = \dot{\mathbf{U}}_n + \alpha_m (\dot{\mathbf{U}}_{n+1} - \dot{\mathbf{U}}_n), \quad (2.86)$$

$$\mathbf{U}_{n+\alpha_f} = \mathbf{U}_n + \alpha_f (\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n), \quad (2.87)$$

sendo  $\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}$  e  $\mathbf{U}_{n+\alpha_f}$  valores intermediários entre  $t_n$  e  $t_{n+1}$  do vetor aceleração e velocidade. A relação entre os valores nodais de aceleração e velocidade são calculados de acordo com fórmula de Newmark (ver, por exemplo, (HUGHES, 1976)):

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta t ((1 - \gamma) \dot{\mathbf{U}}_n + \gamma \dot{\mathbf{U}}_{n+1}). \quad (2.88)$$

onde  $\gamma$  é um parâmetro do método.

Os parâmetros que definem o instante intermediário, alteram as características de estabilidade e precisão ao método. Segundo Jansen, Whiting e Hulbert (2000), precisão de segunda ordem é garantida, para problemas lineares, se:

$$\gamma = 1/2 + \alpha_m - \alpha_f, \quad (2.89)$$

enquanto que a estabilidade do problema é incondicional com:

$$\alpha_m \geq \alpha_f \geq 1/2. \quad (2.90)$$

Para proporcionar a precisão de segunda-ordem de convergência, estabilidade incondicional da solução, e permitir dissipação ótima de altas frequências, calcula-se o parâmetro  $\gamma$  de acordo com Eq. 2.89 e  $\alpha_m$ ,  $\alpha_f$ , através de (HUGHES, 2000):

$$\alpha_m = \frac{1}{2} \left( \frac{3 - \rho_\infty}{1 + \rho_\infty} \right) \quad (2.91)$$

$$(2.92)$$

e

$$\alpha_f = \frac{1}{1 + \rho_\infty}. \quad (2.93)$$

O parâmetro  $\rho_\infty$  é o raio espectral da matriz de amplificação quando  $\Delta t_n \rightarrow \infty$ , devendo estar contido no intervalo de  $[0, 1]$ . Para  $\rho_\infty = 0$  a dissipação de altas freqüências é máxima e para  $\rho_\infty = 1$  não há introdução de difusão numérica ao método.

Para a solução do sistema de equações não lineares compostas por Eq. (2.84) e Eq. (2.85) utiliza-se o método de Newton-Raphson. O método pode ser separado em duas etapas, uma etapa preditiva e outra iterativa corretiva (BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013).

Na etapa preditiva, conhecida a solução em um passo de tempo  $n$ , prediz-se a solução em  $n + 1$  com as seguintes equações:

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \dot{\mathbf{U}}_n, \quad (2.94)$$

$$\mathbf{U}_{n+1}^0 = \mathbf{U}_n, \quad (2.95)$$

$$\mathbf{p}_{n+1}^0 = \mathbf{p}_n, \quad (2.96)$$

onde o índice 0 representa a iteração de número zero.

Na etapa iterativa corretiva, itera-se sobre a Eq. (2.84) e Eq. (2.85) até que elas sejam satisfeitas, considerando uma tolerância prescrita, ou até que se alcance uma quantidade máxima de iterações pré-estabelecida. Essa etapa é composta por três fases. A fase 1 consiste em determinar os valores no instante intermediário para as variáveis nodais na iteração  $i$ :

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}^i = \dot{\mathbf{U}}_n + \alpha_m (\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i - \dot{\mathbf{U}}_n), \quad (2.97)$$

$$\mathbf{U}_{n+\alpha_f}^i = \mathbf{U}_n + \alpha_f (\mathbf{U}_{n+1}^i - \mathbf{U}_n), \quad (2.98)$$

$$\mathbf{p}_{n+1}^i = \mathbf{p}_{n+1}^i. \quad (2.99)$$

Na fase 2, com os valores intermediários das variáveis nodais resolve-se o sistema linear resultante da linearização das equações Eq. (2.84) e Eq. (2.85) com respeito às variáveis de interesse  $\mathbf{p}_{n+1}$  e  $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$ :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}_M}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{n+1}} \right|_i \Delta \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i + \left. \frac{\partial \mathbf{R}_M}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} \right|_i \Delta \mathbf{p}_{n+1}^i = -\mathbf{R}_M^i, \quad (2.100)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}_C}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{n+1}} \right|_i \Delta \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i + \left. \frac{\partial \mathbf{R}_C}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} \right|_i \Delta \mathbf{p}_{n+1}^i = -\mathbf{R}_C^i. \quad (2.101)$$

Por fim, na fase 3 atualiza-se a solução através das seguintes relações:

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^{i+1} = \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i + \Delta \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i, \quad (2.102)$$

$$\mathbf{U}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{U}_{n+1}^i + \gamma \Delta t \Delta \mathbf{U}_{n+1}^i, \quad (2.103)$$

$$\mathbf{p}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{p}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{p}_{n+1}^i. \quad (2.104)$$

Na utilização do método  $\alpha$ -generalizado as integrais das equações Eq. (2.84) e Eq. (2.85) são avaliadas no instante  $t = t_{n+\alpha_f}$ , de forma que:

$$\int_{\Omega} (\cdot) d\Omega = \int_{\Omega_{t_{n+\alpha_f}}} (\cdot) d\Omega, \quad (2.105)$$

e, por consequência:

$$\Omega_{t_{n+\alpha_f}} = \left\{ \mathbf{y}^h \mid \mathbf{y}^h(\bar{\mathbf{x}}^h, t_{(n+\alpha_f)}) = \alpha_f \mathbf{y}^h(\bar{\mathbf{x}}^h, t_{n+1}) + (1 - \alpha_f) \mathbf{y}^h(\bar{\mathbf{x}}^h, t_n) \right\}. \quad (2.106)$$

## 2.5 Implementação Computacional

O Algoritmo que descreve a implementação computacional tanto de problemas utilizando o método dos elementos finitos, quanto para problemas utilizando a análise Isogeométrica, é apresentado no Alg. 1.

---

### Algoritmo 1 Algoritmo para problemas de dinâmica dos fluidos computacional

---

- 1: **para** o passo de tempo 0 até  $T$  **faça**
- 2:     *i* = 0;
- 3:     Predição da solução: aplicação das Eq. (2.94), Eq. (2.95) e Eq. (2.96);
- 4:     **enquanto** ( $\epsilon <$  tolerância) **faça**
- 5:         *i*++;
- 6:         Interpolação das variáveis do problema: aplicação da Eq. (2.97), Eq. (2.98) e Eq. (2.99);
- 7:         Cálculo do incremento nas variáveis do problema:  $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$  e  $\mathbf{p}_{n+1}$  de acordo com as Eq. (2.100) e Eq. (2.101);
- 8:         Atualização da solução: calculadas de acordo com Eq. (2.102), Eq. (2.103) e Eq. (2.104).
- 9:         Cálculo do erro:

$$\epsilon = \left\| \mathbf{R}_M^i \right\|_{L^2} \quad (2.107)$$

- 10:      **fim enquanto**

- 11:      **fim para**

---

## 2.6 Verificação e Aplicações

Para a verificação dos códigos baseados no método dos elementos finitos, adotam-se 2 exemplos muito populares nas bibliografias: Escoamento sobre um cilindro e o problema da cavidade quadrada, os quais são apresentados na subseções sequentes.

### 2.6.1 Escoamento sobre um cilindro

O estudo do problema de um escoamento sobre um cilindro 2D teve como principal intuito a análise dos coeficientes aerodinâmicos medidos ao longo do tempo e verificar consequentemente se o modelo é capaz de reproduzir os fenômenos relacionados à formação e desprendimento de vórtices característicos desse problema. Para isso, diferentes números de Reynolds (Re) foram estudados,  $Re = 40$ ,  $Re = 100$  e  $Re = 1000$ , os quais são calculados de acordo com a seguinte equação:

$$Re = \frac{\rho L \| \mathbf{u}_\infty \|}{\mu} = \frac{L \| \mathbf{u}_\infty \|}{\nu}, \quad (2.108)$$

com  $L$  a dimensão característica do problema, sendo nesse caso o diâmetro do cilindro, e  $\nu$  a viscosidade cinemática do fluido.

A geometria e condições de contorno são apresentadas na Fig. 2.7a. Como pode-se observar trata-se de um domínio retangular, parametrizado em função do diâmetro do cilindro, com um perfil constante de velocidade na entrada e condição de parede lisa nas paredes superior e inferior. No contorno denominado como *saída*, não se conhece o comportamento do escoamento, desta forma, determina-se sua posição no domínio computacional a uma distância grande o suficiente de maneira a não interferir no comportamento do escoamento.

Na Fig. 2.7b pode-se observar a malha não-estruturada de elementos finitos utilizada para esse problema, composta por 9122 elementos triangulares quadráticos e 18508 nós. O problema foi simulado para um velocidade de entrada  $u_\infty = 1,0$ ,  $\rho = 1,0$ ,  $\Delta t = 0,05$ , e  $\rho_\infty = 0,5$ .

Para o cálculo dos coeficientes aerodinâmicos é necessário definir-se primeiramente as forças de arrasto - horizontal ( $F_D$ ) e de sustentação - vertical ( $F_L$ ), que são induzidas por tensões desviadoras e hidrostáticas e são calculadas pelas seguintes equações:

$$F_D = \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\sigma}_{1j} n_j d\Gamma_c, \quad (2.109)$$

$$F_L = \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\sigma}_{2j} n_j d\Gamma_c, \quad (2.110)$$

nas quais o símbolo  $\Gamma_c$  representa o contorno do cilindro e  $n_j$  é o vetor normal à esse contorno na direção  $j$ , com  $j = 1, 2$ . Os coeficientes de arrasto e sustentação são definidos respectivamente por:

$$C_D = \frac{F_D}{0,5\rho \| \mathbf{u}_\infty \|^2 L}, \quad (2.111)$$

$$C_L = \frac{F_L}{0,5\rho \| \mathbf{u}_\infty \|^2 L}, \quad (2.112)$$

Devido ao fenômeno de desprendimento de vórtices que ocorre a partir de deter-

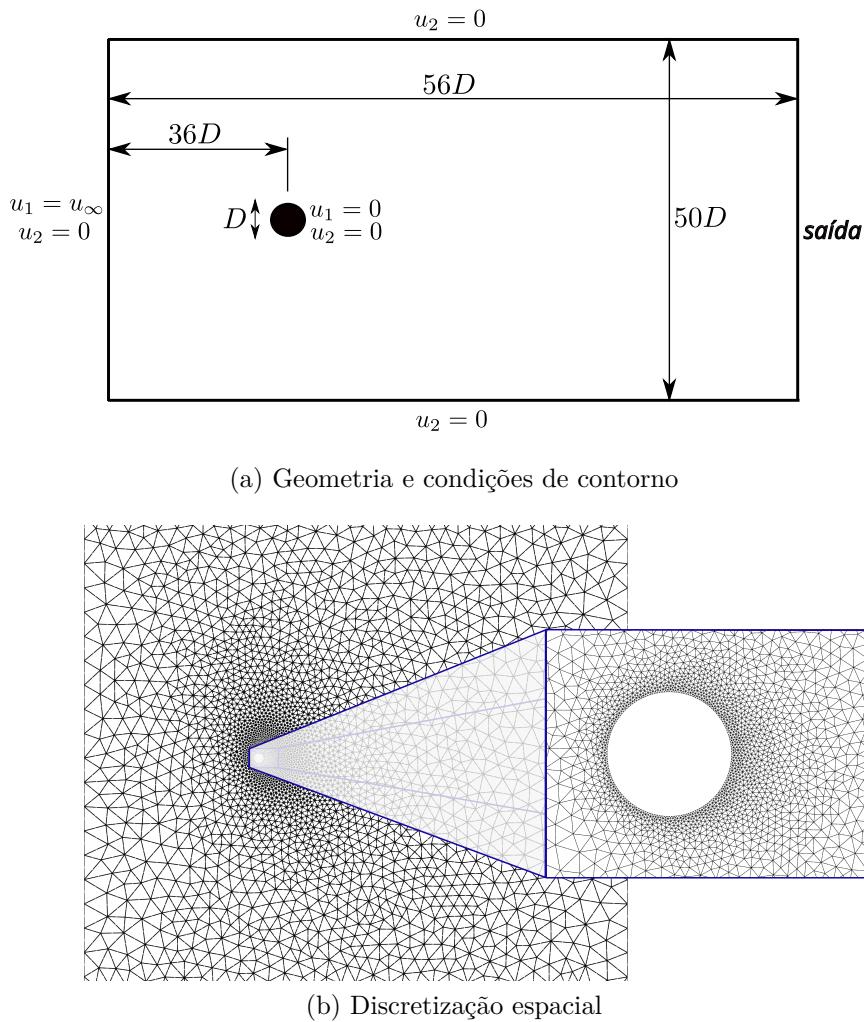


Figura 2.7 – Cilindro: Geometria, condições de contorno e malha de elementos finitos.

minado número de Reynolds do escoamento, é usual determinar-se a frequência deste fenômeno através do número adimensional de Strouhal (St), dado por:

$$St = \frac{f_v L}{\|\mathbf{u}_\infty\|}, \quad (2.113)$$

com  $f_v$  sendo a frequência de desprendimento dos vórtices.

Como pode-se observar na Fig. 2.8 para  $Re = 40$ , os coeficientes de arrasto e de sustentação, após o escoamento entrar em fase estacionária, se mantém constantes ao longo de todo o tempo de análise. Isso ocorre, visto que para Reynolds entre 5 à 50, aproximadamente, formam-se dois vórtices simétricos e estacionários na região logo após o cilindro. Posteriormente, o par de vórtices se quebra e passa a existir a chamada esteira de Von Kármán, que ocorre devido à formação de vórtices de maneira alternada entre as regiões superior e inferior do cilindro, o que pode ser notado também na Fig. 2.8 para  $Re = 100$  e  $Re = 1000$ . Os valores do coeficiente de Strouhal, para  $Re = 100$  e

$Re = 1000$ , assim como os valores médios obtidos para o coeficiente de arrasto ( $C_{Dmed}$ ) para  $Re = 40$ ,  $Re = 100$  e  $Re = 1000$  são apresentados na Tab. 2.1 juntamente com os valores de referência provenientes do trabalho de ??).

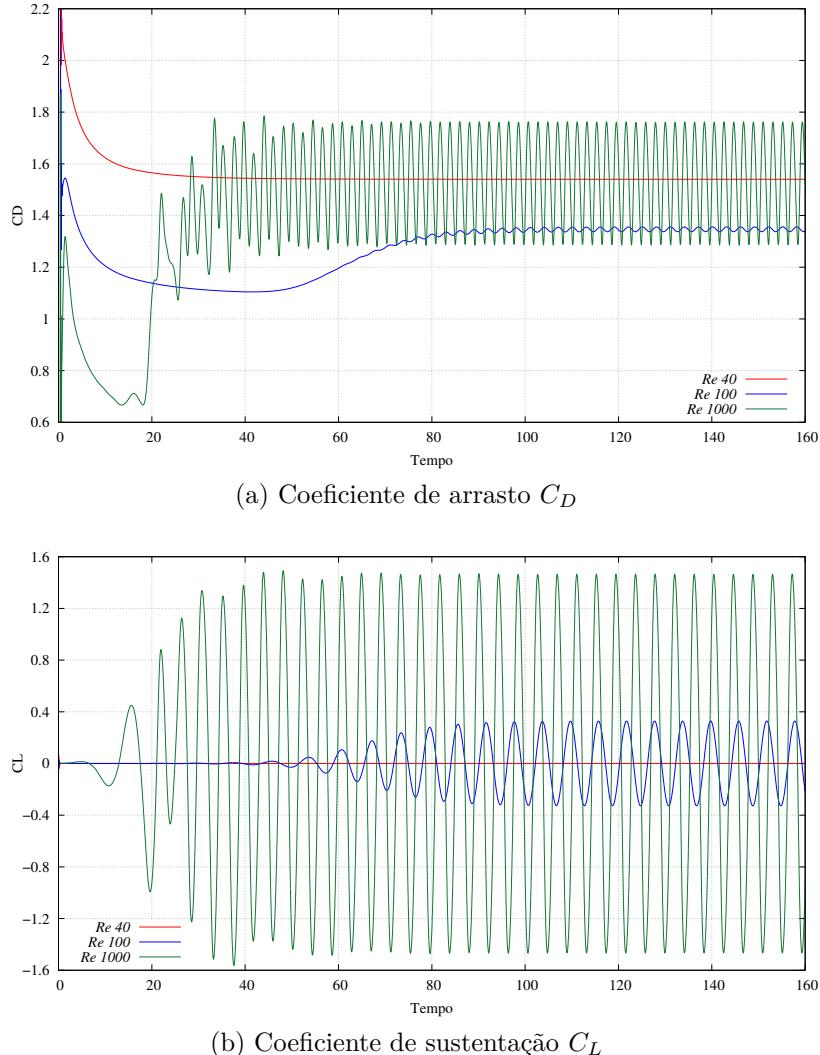


Figura 2.8 – Cilindro: Coeficientes aerodinâmicos.

Tabela 2.1 – Comparação entre valores obtidos e valores de referência para  $C_{Dmed}$  e  $St$  em diferentes números de Reynolds.

$Re$	$C_{Dmed}$		$St$	
	Presente estudo	Referência	Presente estudo	Referência
40	1,54	1,59	-	-
100	1,35	1,33	0,166	0,163
1000	1,52	1,51	0,238	0,235

Nas Fig. 2.9 e Fig. 2.10 podem ser observados os campos de velocidade e pressão ao longo de um ciclo de desprendimento de vórtices para  $Re = 100$ . Pode-se notar nessas imagens, a formação e o desprendimento de vórtices na esteira de Von Karmán.

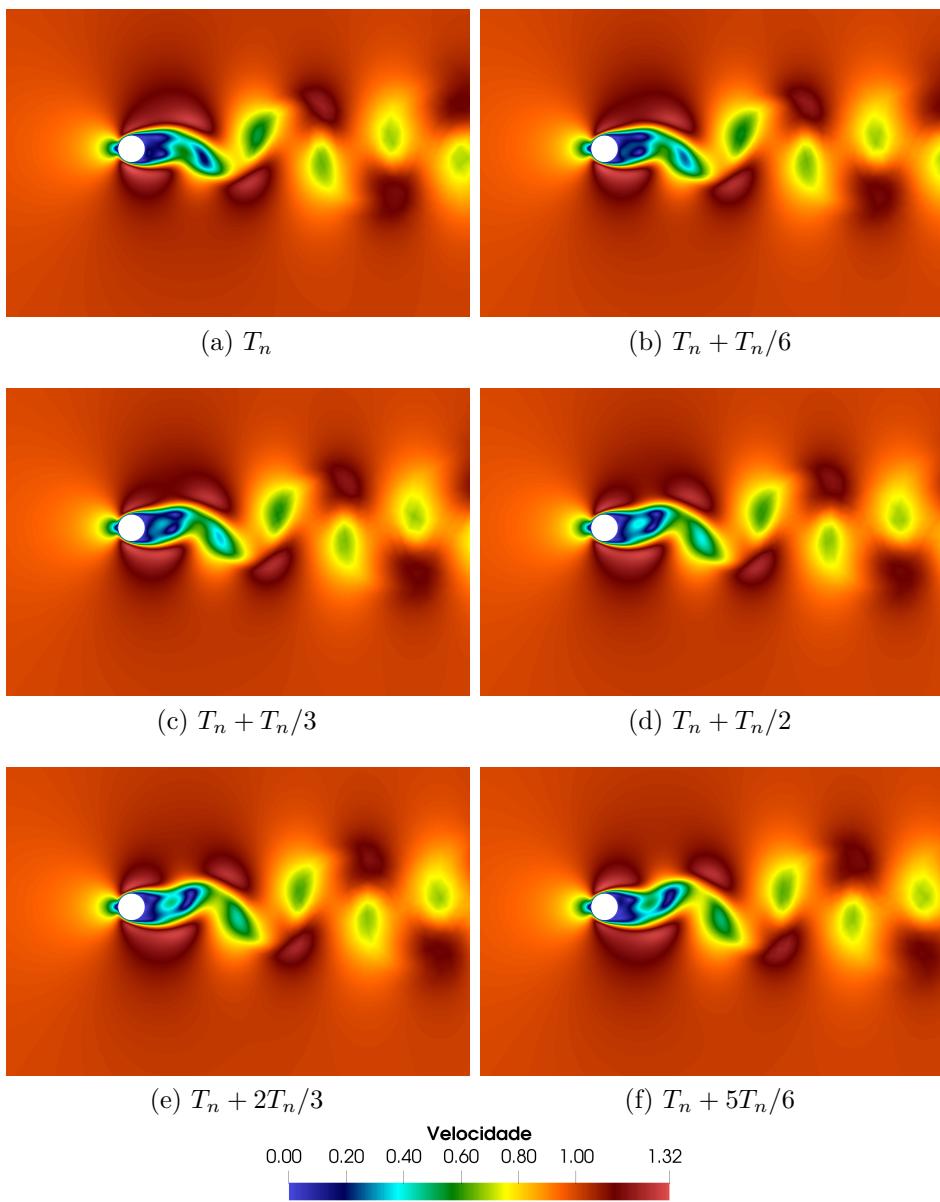


Figura 2.9 – Cilindro: Campos de velocidade para  $Re = 100$

### 2.6.2 Cavidade quadrada

Para a verificação do código 3D utilizando elementos finitos o problema de uma cavidade quadrada com velocidade prescrita  $u_\infty$  em sua parede superior foi estudado. A geometria do problema em questão e o conjunto de suas condições de contorno são apresentadas na Fig. 2.11a. As paredes da cavidade são rígidas, com paredes laterais e do fundo com condição de aderência, e adicionalmente, condição de simetria na direção  $y_3$ . A cavidade possui na direção  $y_3$  uma espessura de 0,03. A discretização espacial em elementos finitos utilizada é apresentada na Fig. 2.11b, a qual consiste em 7252 elementos tetraédricos quadráticos e 14727 nós.

O problema é estudado para os números de Reynolds: 100, 400 e 1000. O número

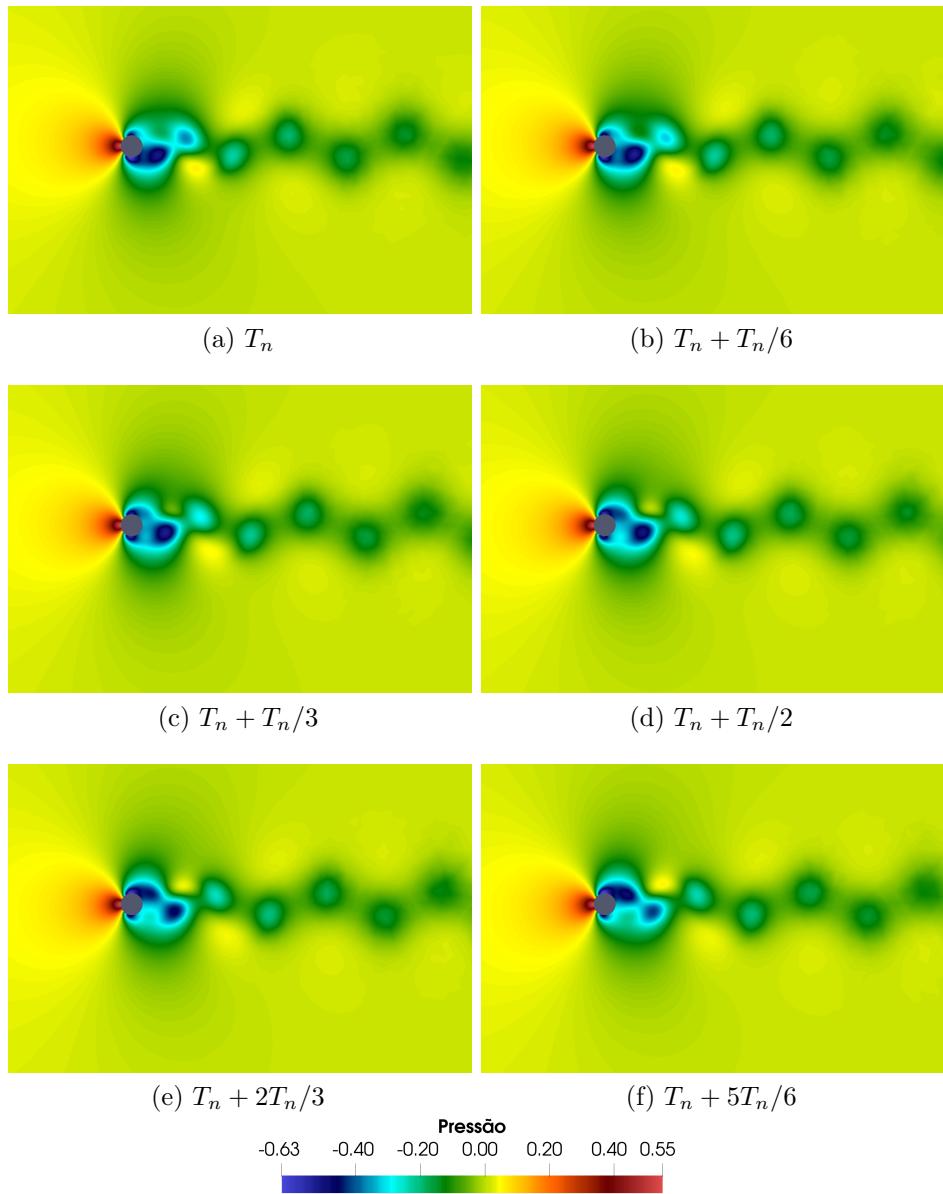
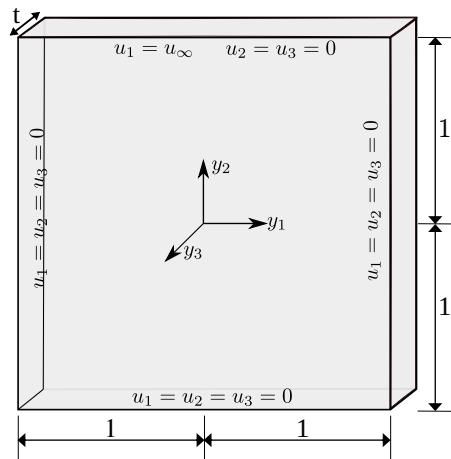


Figura 2.10 – Cilindro: Campos de pressão para  $\text{Re} = 100$

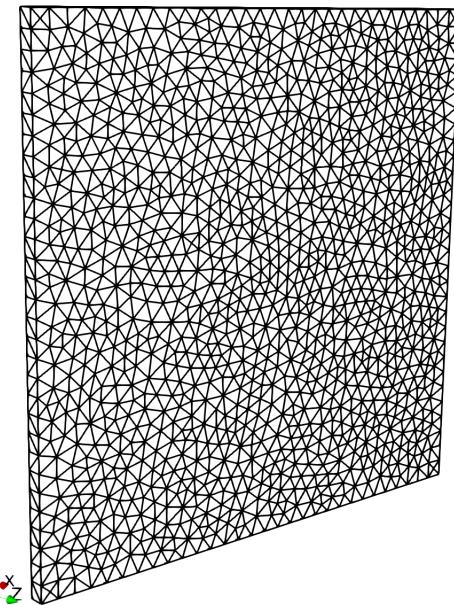
de Reynolds foi calculado de acordo com Eq. (2.108), com  $L$  equivalente ao comprimento do lado da cavidade. O problema foi simulado para uma velocidade na parede superior de  $u_\infty = 1,0$ ,  $\rho = 1,0$ ,  $\Delta t = 0,05$ , e  $\rho_\infty = 0$ , sendo a viscosidade do fluido variada de modo a alterar o número de Reynolds. A simulação foi mantida até que se atingiu o estado estacionário de escoamento.

Os perfis de velocidade adimensionalizados ( $\mathbf{u}/u_\infty$ ) ao longo de duas linhas centrais nas direções  $y_1$  e  $y_2$  posicionadas no centro da espessura da direção  $y_3$  da cavidade são apresentados na Fig. 2.12 e comparados com a referência de Ghia, Ghia e Shin (1982).

Os campos de velocidade e de pressão são apresentados nas figuras Fig 2.13 e 2.14 respectivamente. Ressalta-se que para a solução do problema, por se tratar de um problema com todos os contornos com condição de Dirichlet impostos, a pressão torna-se



(a) Geometria e condições de contorno



(b) Discretização espacial.

Figura 2.11 – Cavidade quadrada: Geometria, condições de contorno e malha de elementos finitos

indefinida. Por esse motivo, prescreveu-se uma pressão  $p = p_{ref} = 0.0$  no canto superior direito da cavidade.

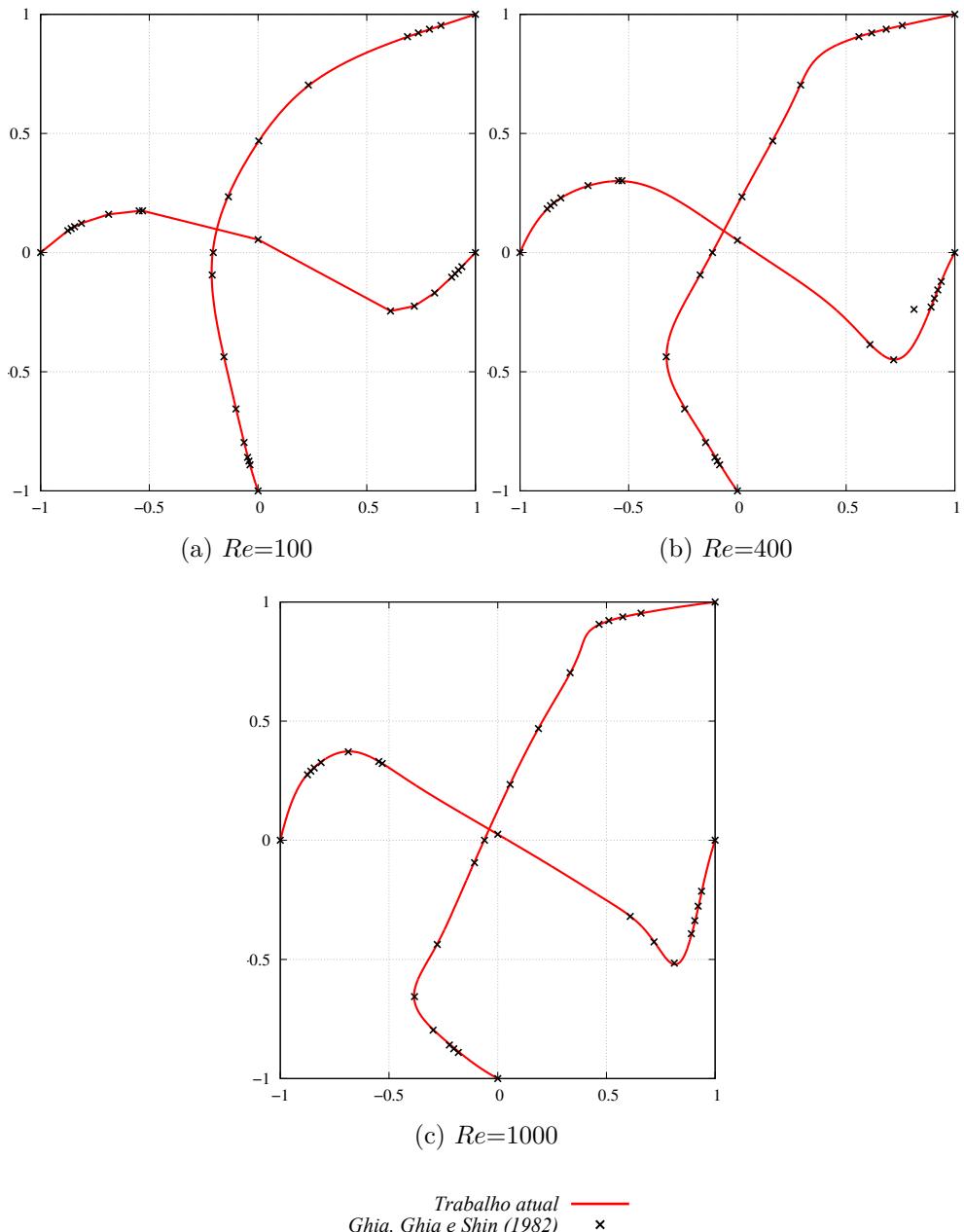


Figura 2.12 – Cavidade quadrada: Perfis de velocidade adimensionalizados nas direções  $y_1$  e  $y_2$

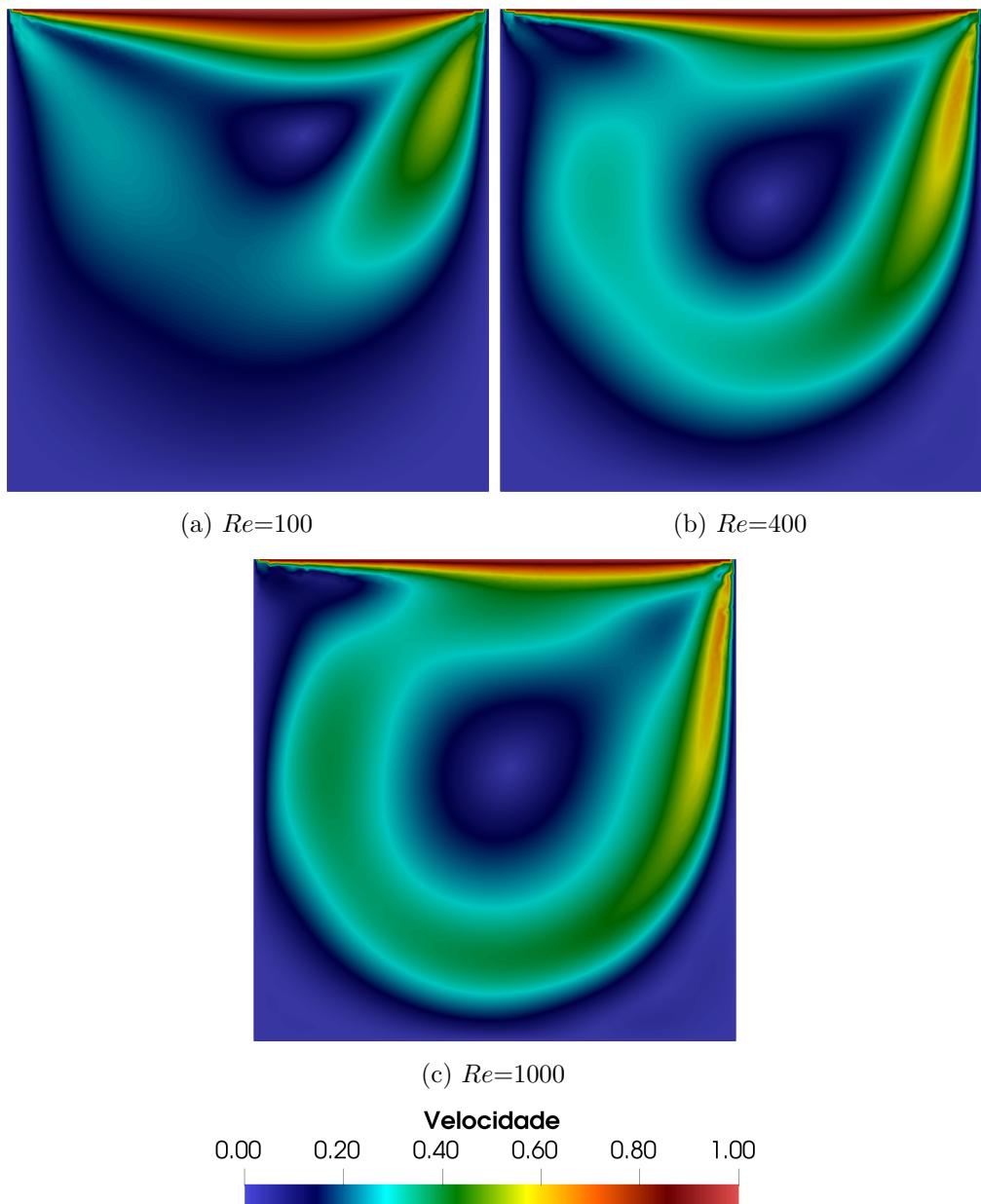


Figura 2.13 – Cavidade quadrada: Campos de velocidade - plano  $y_1y_2$

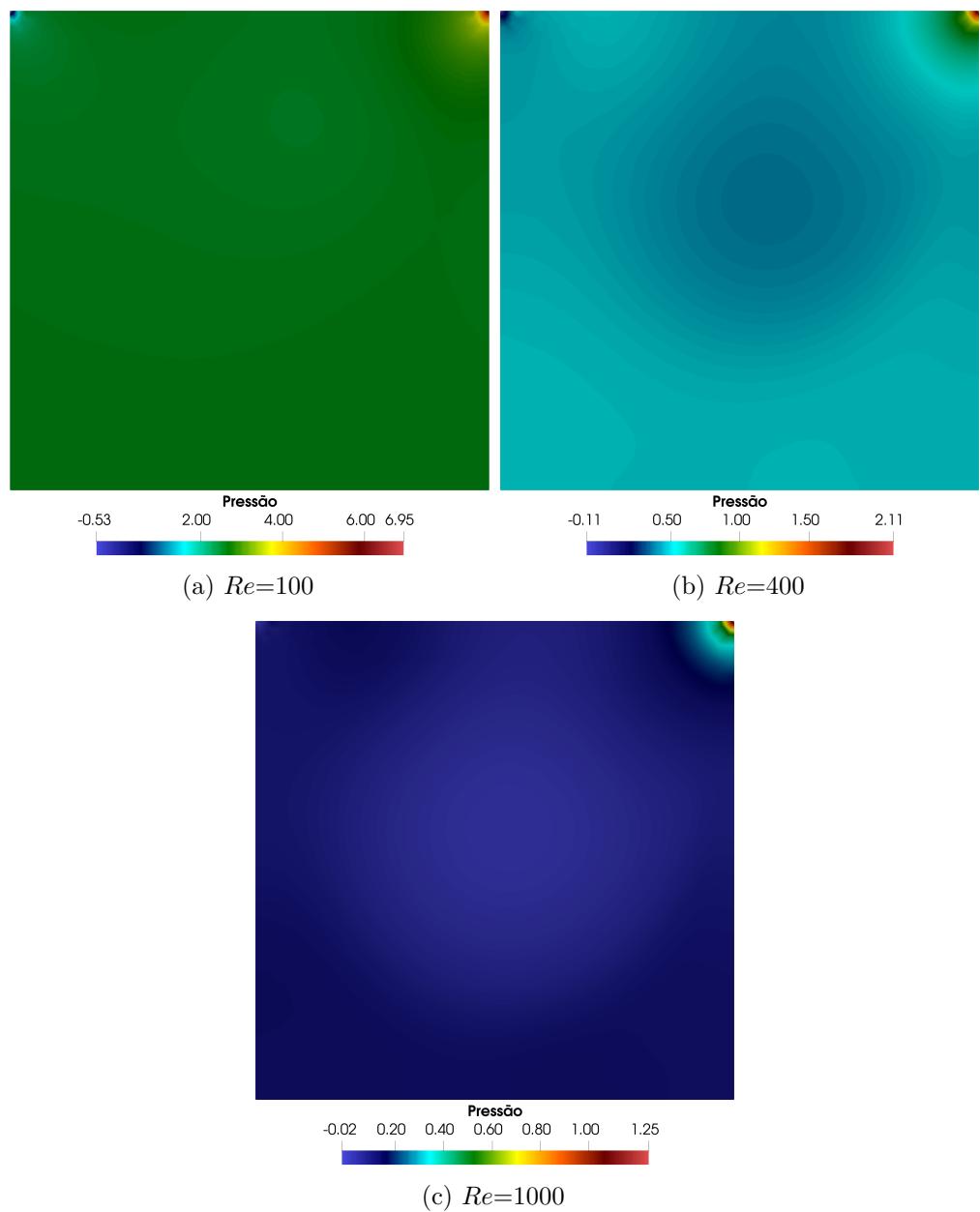


Figura 2.14 – Cavidade quadrada: Campos de pressão - plano  $y_1y_2$



## CAPÍTULO

## 3

---

# ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA APLICADA À DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL

---



---

A Análise Isogeométrica (IGA) é uma técnica numérica introduzida por Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005) para obtenção de soluções aproximadas de equações diferenciais. O método pode ser entendido como uma generalização do método dos elementos finitos clássicos a partir do uso de funções base especiais.

Na Análise Isogeométrica, as funções base escolhidas na discretização da geometria do problema e de suas variáveis são aquelas utilizadas nos sistemas CAD, sendo as funções do tipo NURBS as mais aplicadas (ver, por exemplo, Piegl e Tiller (1996)). O grande impulso para o desenvolvimento da técnica foi proporcionar a integração entre a engenharia de *design*, com modelos baseados em CAD, e as simulações numéricas, com modelos principalmente baseados no MEF, de forma que ambas trabalhem com somente um modelo geométrico.

Além disso, a IGA apresenta vantagens significativas, uma vez que permite a representação exata de diversas geometrias comuns, como seções cônicas, círculos, cilindros, esferas e elipsoides, além de dispor de algoritmos eficientes e estáveis para a geração de objetos NURBS. As funções NURBS, em particular, possuem propriedades matemáticas que as tornam adequadas para aplicações numéricas, destacando-se a elevada suavidade — com continuidade  $p - 1$  nas interfaces entre elementos, sendo  $p$  o grau das funções —, a alta capacidade de aproximação e a possibilidade de refinamento local por meio da inserção de *knots*, que correspondem às coordenadas do espaço paramétrico nas quais as funções são definidas.

**REVER ESSE TRECHO QUANDO TERMINAR O CAPÍTULO.** Nesse capítulo apresenta-se uma breve introdução sobre a IGA, o processo de obtenção das geometrias NURBS e seu uso na descrição das variáveis discretas nas simulações numéricas. As referências bibliográficas que fundamentam esta construção são Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005) e Piegl e Tiller (1996). Por fim, são apresentados alguns exemplos de sua aplicação em problemas da DFC.

### 3.1 Noções Gerais de IGA

No contexto do MEF isoparamétrico, a formulação é construída a partir da definição de uma malha e de seus elementos, os quais são representados tanto no espaço físico quanto no espaço paramétrico. Cada elemento é caracterizado pelas coordenadas de seus nós, sendo os graus de liberdade do problema associados aos valores das funções de forma interpolados nesses pontos nodais.

Dentro da IGA têm-se duas noções de malha: uma malha de pontos de controle e uma malha física. A malha de pontos de controle é muito semelhante a uma malha de elementos finitos, entretanto, ela não define a geometria, ela é apenas um esqueleto que controla o formato da geometria (ver Fig. 3.1), visto que as funções de forma baseadas em *B-Splines* não são necessariamente interpolatórias. Dessa forma, os graus de liberdade do problema são associados aos pontos de controle, cujas posições não coincidem, necessariamente, com a geometria representada.

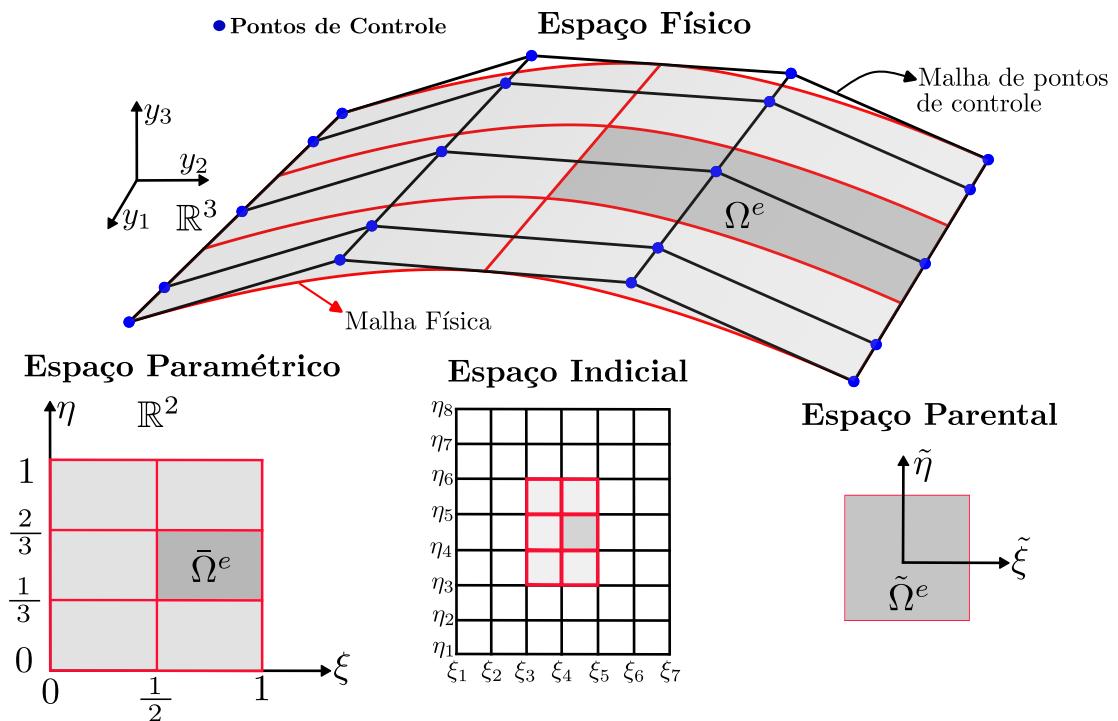


Figura 3.1 – NURBS: espaço físico, espaço paramétrico, espaço indicial e espaço parental

A malha física representa a geometria discretizada. Dentro da malha física podem ser definidos dois tipos de elementos, um macro-elemento, denominado de *patch*, e o *knot span*, que é o equivalente a um elemento finito e será denominado como célula ao longo desse texto. Cada *patch* é composto por um conjunto de células. Muitas geometrias simples podem ser discretizadas apenas com um *patch*, entretanto, a depender da complexidade da geometria ou de requisitos de parametrização, se torna necessário o uso de um conjunto de *patches*. As células são representações geométricas de linhas, superfícies e volumes nos espaços físicos unidimensional, bidimensional e tridimensional respectivamente.

Cada *patch* e suas respectivas células possuem uma representação no espaço paramétrico (Fig. 3.1), que é o espaço onde as funções base são definidas. O espaço paramétrico, para os casos de funções univariadas, é definido por um *knot vector*, aqui denominado de vetor de *knots*, que é um conjunto de *knots* ou coordenadas paramétricas. As células são constituídas pelo espaço entre dois *knots* consecutivos. O espaço onde se representam todas as células, inclusive as nulas (quando mais de um *knot* ocupa a mesma posição), é chamado de espaço indicial.

Por fim, na análise isogeométrica conta-se ainda com o espaço parental, que é o espaço de integração numérica das funções base, em geral, definido de forma adimensional  $[-1, 1]$  dentro de uma célula. Na Fig. 3.1 pode-se observar os espaços relatados para uma superfície 3D construída por funções base quadráticas e apenas um *patch*.

## 3.2 B-Splines

Para a construção de uma geometria NURBS, é fundamental compreender as funções base *B-splines* e suas particularidades. Essas funções servem como o ponto de partida para a definição de curvas, superfícies e sólidos NURBS, sendo essenciais para o entendimento da flexibilidade e controle geométrico oferecido por esse modelo. As *B-splines* são funções construídas através de um vetor de coordenadas paramétricas (vetor de *knots*) e que dependem de um conjunto de pontos de controle, sendo esses elementos responsáveis por estabelecer a forma geométrica e o grau de continuidade da curva ou superfície.

### 3.2.1 Vetor de *knots*

As funções *B-Splines*, utilizadas na construção das NURBS, são definidas em um espaço paramétrico que é comum a um conjunto de células ou *patch*. O espaço paramétrico unidimensional é construído através de um vetor de *knots*, que consiste em um conjunto não decrescente de coordenadas paramétricas, definido como:  $\Xi = [\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n+p+1}]$ , sendo que  $\xi_i \in \mathbb{R}$  e representa a  $i$ -ésima coordenada paramétrica com  $i = 0, 1, \dots, n + p + 1$ , e  $p$  corresponde ao grau polinomial das funções. O parâmetro  $n$  equivale ao índice da última

função base nesta direção paramétrica, sendo o conjunto de funções base indexado de 0 a  $n$ , totalizando  $n + 1$  funções. Os *knots* definem células no espaço paramétrico, cujos contornos são mapeados pelas funções base para formar a malha no espaço físico.

O vetor de *knots* pode ser classificado como uniforme, quando as coordenadas paramétricas são igualmente espaçadas, e como não-uniformes, caso contrário. A multiplicidade de um *knot* pode ser superior a um, influenciando diretamente na continuidade e na forma das funções base, conforme será visto posteriormente. Os vetores de *knots* conhecidos como abertos, são frequentemente utilizados nas literaturas de CAD, e caracterizam-se por ter a primeira e a última coordenada paramétrica repetidas  $p + 1$  vezes. Este fato garante que as funções sejam interpolatórias nos extremos do espaço paramétrico e nas bordas entre *patches*, proporcionando, por exemplo, a homogeneidade com respeito às condições de contorno essenciais.

### 3.2.2 Funções base e suas derivadas

As funções base *B-Splines* ( $N^b$ ) univariadas são definidas a partir de um vetor de *knots*, sendo para  $p = 0$ , escritas através da seguinte relação:

$$N_{i,0}^b(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (3.1)$$

enquanto que para funções com  $p \geq 1$  são definidas como:

$$N_{i,p}^b(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}^b(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}^b(\xi), \quad (3.2)$$

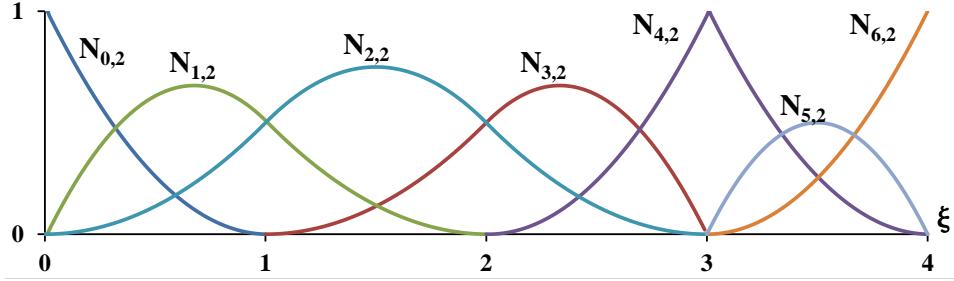
com  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Essas equações são conhecidas como a fórmula recursiva de *Cox-de Boor* (COX, 1972; de Boor, 1972). Para funções *B-Splines* de grau  $p = 0$  ou  $p = 1$ , obtém-se, respectivamente, as mesmas funções constantes e lineares por partes utilizadas no método dos elementos finitos padrão.

Na Fig.3.2, pode-se observar funções *B-Splines* quadráticas construídas sobre o vetor de *knots* não-uniforme aberto  $\Xi = [0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4]$ . A figura evidencia que, devido à repetição de  $p + 1$  vezes dos *knots* nas extremidades do vetor, as funções base se tornam interpolatórias nesses pontos. Ademais, a presença de um *knot* com multiplicidade 2 em  $\xi = 3$  reduz a regularidade da função base nesse ponto, resultando na descontinuidade da sua derivada. Em termos gerais, a continuidade de uma função *B-Spline* em uma coordenada paramétrica é dada por  $C^{p-m}$ , onde  $m$  é a multiplicidade do *knot*.

As principais propriedades das funções *B-Splines* são:

- **Partição da Unidade:**  $\sum_{i=0}^n N_{i,p}^b(\xi) = 1$ ;
- **Positividade:** Todas as funções base são positivas, ou seja,  $N_{i,p}^b \geq 0, \forall \xi$ ;

Figura 3.2 – *B-Splines quadráticas*

- **Suavidade:** função de ordem  $p$  é, em geral,  $p - 1$  vezes contínua no contorno das células;
- **Suporte Compacto:** O suporte de cada  $N_{i,p}^b$  está contido no intervalo  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ , ou seja, em cada célula, apenas  $p + 1$  funções são não nulas.

A derivada de uma função de forma *B-Spline* pode ser calculada recursivamente em termos de funções base de ordem menor. Considerando uma função de ordem  $p$  e vetor de *knots*  $\Xi$ , a derivada da  $i$ -ésima função de forma pode ser escrita como:

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}^b(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}^b(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}^b(\xi). \quad (3.3)$$

Essa expressão pode ser generalizada para derivadas de ordem superior através de:

$$\frac{d^k}{d\xi^k} N_{i,p}^b(\xi) = \frac{p!}{(p-k)!} \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} N_{i+j,p-k}^b(\xi), \quad (3.4)$$

sendo  $k$  a  $k$ -ésima derivada da função  $N_{i,p}^b(\xi)$  e:

$$\alpha_{0,0} = 1, \quad (3.5)$$

$$\alpha_{k,0} = \frac{\alpha_{k-1,0}}{\xi_{i+p-k+1} - \xi_i}, \quad (3.6)$$

$$\alpha_{k,j} = \frac{\alpha_{k-1,j} - \alpha_{k-1,j-1}}{\xi_{i+p+j-k+1} - \xi_{i+j}} \quad j = 1, \dots, k-1, \quad (3.7)$$

$$\alpha_{k,k} = \frac{-\alpha_{k-1,k-1}}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+k}}. \quad (3.8)$$

Algoritmos eficientes para a determinação das funções de forma *B-Splines* e de suas derivadas podem ser encontradas em Piegl e Tiller (1996).

### 3.2.3 Geometrias *B-Splines*

Uma curva *B-Spline* é construída a partir da combinação linear entre funções base e um conjunto de pontos de controle. Considerando um conjunto de  $n + 1$  funções base  $N_{i,p}^b$  e respectivos pontos de controle  $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{n_{sd}}$  com  $i = 0, 1, \dots, n$ , uma curva polinomial por partes *B-Spline* univariada é definida como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{y}(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}^b(\xi) \mathbf{B}_i, \quad (3.9)$$

com  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$  as componentes do vetor de coordenadas físicas  $\mathbf{y}$ . Utilizando as funções *B-Splines* apresentadas na Fig.3.2 e uma malha de pontos de controle, obtém-se a curva apresentada na Fig.3.3a. Na Fig.3.3b pode-se observar as células físicas equivalentes a essa combinação.

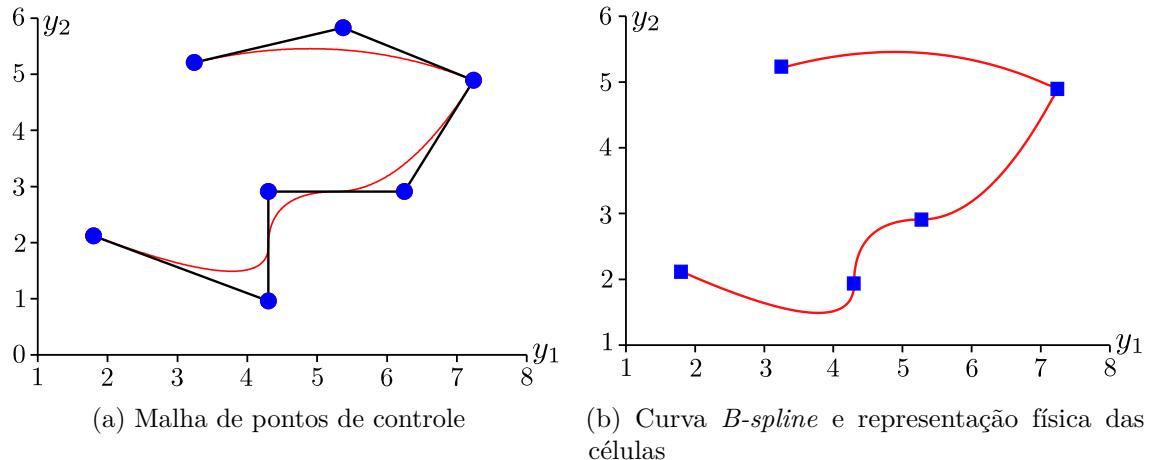


Figura 3.3 – Curva *B-Spline*

A partir da Fig.3.3a pode-se constatar que a curva *B-Spline* interpola o primeiro e o último ponto de controle, que é uma característica das curvas construídas com funções descritas a partir de vetores de *knots* abertos. Adicionalmente nota-se que, devido à multiplicidade do *knot* de coordenada paramétrica  $\xi = 3$ , existe um ponto de controle intermediário também interpolando a curva. Coordenadas paramétricas com multiplicidade maior ou igual ao grau polinomial  $p$  resultam, por definição, em interpolação dos pontos de controle associados. Além disso, a curva possui continuidade  $C^{p-1} = C^1$  em todos os lugares, exceto em  $\xi = 3$ , onde equivale a  $C^{p-2} = C^0$ , que trata-se de uma propriedade herdada das funções base.

Conforme observado Fig.3.3b, muitas das características de curvas *B-Splines* são consequências das propriedades das funções *B-splines*. Outra importante propriedade dessas curvas é a Transformação Afim, que significa que uma transformação afim de uma curva *B-spline* é obtida aplicando a transformação diretamente aos pontos de controle. Além disso, devido ao suporte compacto das funções base, as curvas *B-Splines* possuem característica denominada de *localidade*, que significa que, movendo-se um ponto de controle, afeta-se não mais do que  $p + 1$  células na curva. Outras propriedades matemáticas das curvas *B-Splines* podem ser consultadas em detalhes em Piegl e Tiller (1996).

Uma superfície *B-spline* é obtida analogamente à curva *B-spline*. Dado uma rede de pontos de controle  $\mathbf{B}_{i,j} \in \mathbb{R}^{n_{sd}}$  com  $i = 0, 1, \dots, n$  e  $j = 0, 1, \dots, m$ , e vetores de *knots*

$\Xi = [\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{p+n+1}]$ ,  $\mathcal{H} = [\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{q+m+1}]$ , a superfície é obtida através do produto tensorial entre  $(n + 1)$  funções univariadas  $N_{i,p}^b$  e  $(m + 1)$  funções univariadas  $M_{j,q}^b$  da seguinte forma:

$$\mathbf{S} = \mathbf{y}(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}^b(\xi) M_{j,q}^b(\eta) \mathbf{B}_{i,j}, \quad (3.10)$$

onde  $q$  representa o grau das  $m + 1$  funções na direção paramétrica  $\eta$ . Muitas das propriedades das superfícies *B-Splines* são resultado da natureza do produto tensorial que as geram. A base de funções apresenta propriedade de positividade e formam uma partição de unidade, de forma que:  $\forall(\xi, \eta) \text{ in } [\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{p+n+1}] \times [\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{q+m+1}]$ :

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}^b(\xi) M_{j,q}^b(\eta) = \left( \sum_{i=0}^n N_{i,p}^b(\xi) \right) \left( \sum_{j=0}^m M_{j,q}^b(\eta) \right) = 1. \quad (3.11)$$

O suporte, por exemplo, de uma função bivariada  $\hat{N}_{i,j:p,q}^b(\xi, \eta) = N_{i,p}^b(\xi) M_{j,q}^b(\eta)$  é equivalente à:  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+q+1}]$ .

Por fim, um sólido *B-Spline* é obtido através do produto tensorial entre funções univariadas  $N_{i,p}^b$ ,  $M_{j,q}^b$ ,  $L_{k,r}^b$ , construídas sobre os vetores de *knots*  $\Xi = [\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{p+n+1}]$ ,  $\mathcal{H} = [\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{q+m+1}]$  e  $\mathcal{Z} = [\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{r+l+1}]$  respectivamente, e um conjunto de pontos de controle  $\mathbf{B}_{i,j,k} \in \mathbb{R}^{n_{sd}}$  com  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ ,  $k = 0, 1, \dots, l$ , da seguinte forma:

$$\mathbf{T} = \mathbf{y}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l N_{i,p}^b(\xi) M_{j,q}^b(\eta) L_{k,r}^b(\zeta) \mathbf{B}_{i,j,k}, \quad (3.12)$$

na qual  $r$  representa o grau das  $l+1$  funções base na direção paramétrica  $\zeta$ . As propriedades de um sólido *B-Spline*, correspondem às generalizações trivariadas das propriedades das superfícies *B-Spline*. Além disso, o suporte de uma função trivariada  $\hat{N}_{i,j,k:p,q,r}^b(\xi, \eta, \zeta) = N_{i,p}^b(\xi) M_{j,q}^b(\eta) L_{k,r}^b(\zeta)$  está contido no intervalo  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+q+1}] \times [\zeta_k, \zeta_{k+r+1}]$ .

### 3.2.4 Refinamento

Um dos aspectos mais relevantes das *B-splines* é a flexibilidade na forma de enriquecimento da base, permitindo aprimorar sua representação sem alterar a geometria subjacente nem sua parametrização. Dentre os principais procedimentos utilizados, destacam-se: a inserção de *knots* (ou refinamento  $h$ ), que consiste na subdivisão da malha; a elevação de grau (ou refinamento  $p$ ), que aumenta a ordem polinomial das funções base; o refinamento  $k$ , que promove simultaneamente um aumento da ordem e da continuidade entre células; e, por fim, o refinamento  $hpk$ , que combina de forma coordenada as três estratégias anteriores, oferecendo maior controle e eficiência na representação da geometria e na solução numérica de problemas.

Neste trabalho, será adotado na geração das geometrias o refinamento  $h$ , baseado na inserção de *knots*. Por essa razão, somente essa estratégia será abordada ao longo desse texto.

O enriquecimento das funções base utilizando a inserção de *knots* é realizado sem que se altere uma curva geometricamente ou parametricamente. Para essa finalidade, considerando o vetor de *knots*  $\Xi = [\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n+p+1}]$ , será introduzido o conceito de vetor de *knots* estendido, o qual compreende em:  $\bar{\Xi} = [\bar{\xi}_0 = \xi_0, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_{n+m+p+1} = \xi_{n+p+1}]$ . As  $(n + m + 1)$  novas funções de base *B-Splines* são determinadas através da Eq. 3.1 e Eq. 3.2, aplicando-as ao vetor de *knots*  $\bar{\Xi}$ . Os  $(n + m + 1)$  novos pontos de controle  $\bar{\mathcal{B}} = [\bar{\mathbf{B}}_0, \bar{\mathbf{B}}_1, \dots, \bar{\mathbf{B}}_{n+m}]^T$  são obtidos através da combinação linear dos  $(n + 1)$  pontos de controle originais,  $\mathcal{B} = [\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n]^T$ , por:

$$\bar{\mathcal{B}} = \mathbf{T}^p \mathcal{B}, \quad (3.13)$$

, com:

$$\mathbf{T}_{ij}^0 = \begin{cases} 1 & \text{se } \bar{\xi}_i \in [\xi_j, \xi_{j+1}) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{T}_{ij}^{q+1} = \frac{\bar{\xi}_{i+q} - \xi_j}{\xi_{j+q} - \xi_j} \mathbf{T}_{ij}^q + \frac{\xi_{j+q+1} - \bar{\xi}_{i+q}}{\xi_{j+q+1} - \xi_{j+1}} \mathbf{T}_{ij+1}^q \text{ com } q = 0, 1, 2, \dots, p-1, \quad (3.15)$$

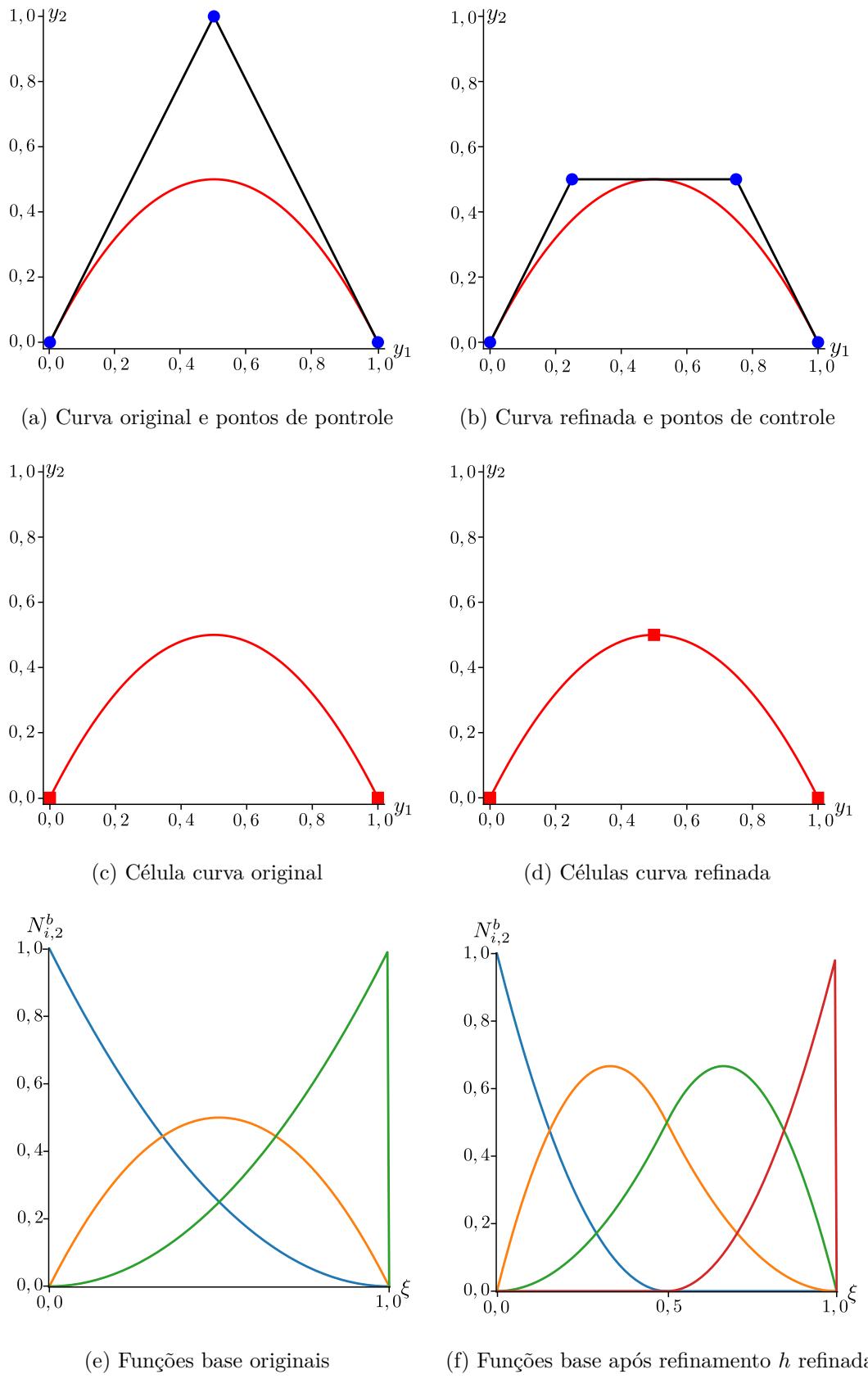
sendo  $i = 0, 1, \dots, (n + m)$  e  $j = 0, 1, \dots, n$ .

Considerando uma curva quadrática *B-spline* construída sobre um vetor de *knots* aberto  $\Xi = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$  apresentada na Fig. 3.4a juntamente com sua rede de pontos de controle. Essa curva, possui apenas uma célula no espaço físico, conforme pode ser observado na Fig. 3.4c, e 3 funções base no espaço paramétrico (Fig. 3.4e). Ao realizar-se a inserção de um *knot*,  $\xi = 1/2$ , o vetor de *knots* estendido fica definido como:  $\bar{\Xi} = [0, 0, 0, 1/2, 1, 1, 1]$ . Aplicando-se as Eq. 3.1 e Eq. 3.2 à esse vetor de coordenadas paramétricas, obtém-se as 4 funções base apresentadas na Fig. 3.4f definidas sobre 2 células do espaço paramétrico. Após o emprego do refinamento  $h$ , a geometria da curva é preservada. No entanto, como ilustrado na Fig. 3.4d, uma nova célula física é inserida, além de que, de acordo com a Fig. 3.4b, a malha de pontos de controle é modificada, com o acréscimo de um novo ponto e o reajuste de suas posições.

Para fins práticos, o processo de refinamento consiste na inserção consecutiva de coordenadas paramétricas ao vetor de (*knots*) até que se alcance a discretização desejada. Um algoritmo mais eficiente para realizar esse procedimento de refinamento pode ser encontrado em Piegl e Tiller (1996). Esse procedimento pode ser aplicado analogamente à superfícies e sólidos, aplicando-se a inserção de *knots* nas direções paramétricas desejadas.

### 3.3 NURBS

Uma geometria NURBS no  $\mathbb{R}^{n_{sd}}$  pode ser entendida, do ponto de vista geométrico, como a transformação projetiva de uma geometria *B-Spline* no  $\mathbb{R}^{n_{sd}+1}$ . Nesse contexto,

Figura 3.4 – Refinamento  $h$  para um curva *B-Spline*

geometrias cônicas podem ser construídas exatamente através de curvas quadráticas por partes. Na Fig. 3.5b, apresenta-se uma curva NURBS  $\mathbf{C}(\xi)$  no  $\mathbb{R}^2$ , que representa de forma exata uma circunferência, a qual foi obtida a partir da transformação projetiva de uma curva quadrática por partes  $B$ -Spline ( $\mathbf{C}^w(\xi)$ ) no  $\mathbb{R}^3$ . A transformação é realizada através da projeção em um plano  $y_3 = 1$  de cada ponto da curva projetiva ( $\mathbf{C}^w(\xi)$ ) através de um raio que passa pela origem.

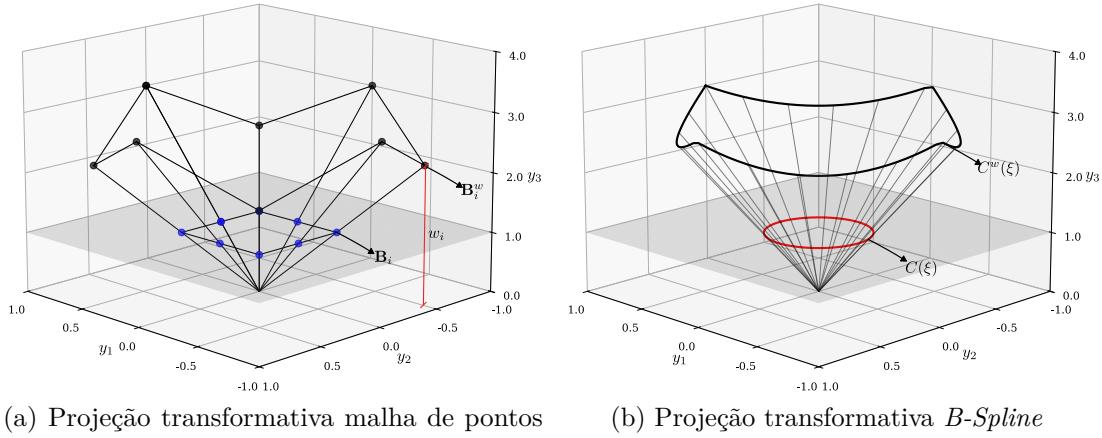


Figura 3.5 – Projeção transformativa de entidade  $B$ -Spline

O mesmo procedimento de transformação pode ser realizado para obtenção dos pontos de controle NURBS (Fig. 3.5a) a partir de pontos de controle projetivos ( $\mathbf{B}_i^w$ ), usando a seguinte relação:

$$(\mathbf{B}_i)_j = (\mathbf{B}_i^w)_j / w_i, \quad j = 1, \dots, n_{sd}, \quad (3.16)$$

$$w_i = (\mathbf{B}_i^w)_{n_{sd}+1}, \quad (3.17)$$

com  $(\mathbf{B}_i)_j$  o  $j$ -ésimo componente do vetor  $\mathbf{B}_i$  e  $w_i$  refere-se ao  $i$ -ésimo peso, que consiste na coordenada  $y_3$  dos pontos de controle projetivos para o exemplo citado.

Para a aplicação dessa mesma transformação para cada ponto da curva, será utilizado um conceito de função peso, dada por:

$$W(\xi) = \sum_{\hat{i}=0}^n N_{\hat{i},p}^b(\xi) w_{\hat{i}}, \quad (3.18)$$

e a curva NURBS pode ser definida como:

$$(\mathbf{C}(\xi))_j = (\mathbf{C}^w(\xi))_j / W(\xi), \quad j = 1, \dots, n_{sd}. \quad (3.19)$$

Tanto  $\mathbf{C}^w$  como  $W(\xi)$  são funções polinomiais por partes, dessa forma,  $\mathbf{C}(\xi)$  é uma função racional por partes.

### 3.3.1 Funções base NURBS e suas derivadas

Matematicamente, uma função NURBS é obtida pela racionalização de uma função *B-Spline*. A racionalização dessa função ocorre através da razão entre dois polinômios. Uma função racional NURBS ( $R$ ) é construída através da seguinte expressão, dessa forma, têm-se:

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}^b(\xi)w_i}{\sum_{\hat{i}=0}^n N_{\hat{i},p}^b(\xi)w_{\hat{i}}}. \quad (3.20)$$

com  $w_i$  e  $w_{\hat{i}} \in \mathbb{R}$ , sendo  $i = \hat{i} = 0, 1, \dots, n$ .

A derivada de uma função  $R_{i,p}$  é obtida aplicando simplesmente a regra do quociente à expressão da Eq. 3.20:

$$\frac{d}{d\xi} R_{i,p}(\xi) = w_i \frac{W(\xi)(N_{i,p}^b)'(\xi) - W'(\xi)N_{i,p}^b(\xi)}{(W(\xi))^2}, \quad (3.21)$$

com:

$$(N_{i,p}^b)'(\xi) \equiv \frac{d}{d\xi} N_{i,p}^b(\xi), \quad (3.22)$$

e:

$$W'(\xi) = \sum_{\hat{i}=0}^n (N_{\hat{i},p}^b)'(\xi) w_{\hat{i}}. \quad (3.23)$$

A  $k$ -ésima derivada de  $R_{i,p}$  é obtida em termos de derivadas de menores ordem, através da seguinte expressão:

$$\frac{d^k}{d\xi^k} R_{i,p}(\xi) = \frac{A_i^{(k)}(\xi) - \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} W^{(j)}(\xi) \frac{d^{(k-j)}}{d\xi^{(k-j)}} R_{i,p}(\xi)}{W(\xi)} \quad (3.24)$$

com:

$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}, \quad (3.25)$$

$$W^{(j)}(\xi) = \frac{d^j}{d\xi^j} W(\xi), \quad (3.26)$$

e:

$$A_i^{(k)}(\xi) = w_i \frac{d^k}{d\xi^k} N_{i,p}^b(\xi) \text{ sem soma em } i. \quad (3.27)$$

### 3.3.2 Geometria NURBS

Uma curva NURBS é obtida através da combinação linear entre as funções base NURBS e um conjunto de pontos de controle, conforme expresso pela equação abaixo:

$$\mathbf{C} = \mathbf{y}(\xi) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(\xi) \mathbf{B}_i, \quad (3.28)$$

cujos pontos de controle e pesos são escolhidos criteriosamente de forma a obter-se a geometria desejada.

Analogamente uma superfície NURBS é obtida através das seguintes relações:

$$R_{i,j:p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}^b(\xi) M_{j,q}^b(\eta) w_{i,j}}{\sum_{\hat{i}=0}^n \sum_{\hat{j}=0}^m N_{\hat{i},p}^b(\xi) M_{\hat{j},q}^b(\eta) w_{\hat{i},\hat{j}}}, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{y}(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j:p,q}(\xi, \eta) \mathbf{B}_{i,j}, \quad (3.30)$$

com  $w_{i,j}$  e  $w_{\hat{i},\hat{j}} \in \mathbb{R}$ , sendo  $i = \hat{i} = 0, 1, \dots, n$  e  $j = \hat{j} = 0, 1, \dots, m$ , correspondem aos pesos relativos às funções  $(N_{i,p}^b(\xi) M_{j,q}^b(\eta))$  e  $(N_{\hat{i},p}^b(\xi) M_{\hat{j},q}^b(\eta))$  respectivamente. Por fim, um sólido NURBS é obtido por:

$$R_{i,j,k:p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{N_{i,p}^b(\xi) M_{j,q}^b(\eta) L_{k,r}^b(\zeta) w_{i,j,k}}{\sum_{\hat{i}=0}^n \sum_{\hat{j}=0}^m \sum_{\hat{k}=0}^l N_{\hat{i},p}^b(\xi) M_{\hat{j},q}^b(\eta) L_{\hat{k},r}^b(\zeta) w_{\hat{i},\hat{j},\hat{k}}}, \quad (3.31)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{y}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l R_{i,j,k:p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{B}_{i,j,k}, \quad (3.32)$$

onde  $w_{i,j,k}$  e  $w_{\hat{i},\hat{j},\hat{k}} \in \mathbb{R}$ , sendo  $i = \hat{i} = 0, 1, \dots, n$ ,  $j = \hat{j} = 0, 1, \dots, m$  e  $k = \hat{k} = 0, 1, \dots, l$ , correspondem aos pesos relativos às funções  $(N_{i,p}^b(\xi) M_{j,q}^b(\eta) L_{k,r}^b(\zeta))$  e  $(N_{\hat{i},p}^b(\xi) M_{\hat{j},q}^b(\eta) L_{\hat{k},r}^b(\zeta))$  respectivamente.

### 3.3.3 Múltiplos Patches

Na grande maioria das situações práticas, é necessário para descrever um domínio computacional o uso de múltiplos *Patches* NURBS, isto se deve ao fato que o produto tensorial do espaço paramétrico não é adequado para a representação de domínios complexos multiplamente conectados. Ademais, mesmo para domínios simples, do ponto de vista da simulação numérica, o uso de múltiplos *patches* pode ser adequado para discretização das geometrias, conforme será visto na seção de exemplos.

Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005) cita ainda que o uso de múltiplos *patches* pode facilitar a análise numérica quando diferentes materiais e modelos físicos são utilizados em diferentes partes do domínio. E, além disso, em processamento paralelo, pode se tornar conveniente, do ponto de vista de estruturas de dados, não ter um único *patch* entre diferentes processadores.

A utilização de múltiplos *patches* implica na compatibilização da discretização na interface entre *patches* adjacentes, ou seja, a parametrização e o mapeamento devem ser idênticos nesses locais. Cada ponto de controle em uma face de *patches* adjacentes deve possuir um correspondente na outra face. Esses pontos iguais são tratados como um único ponto de controle dentro do sistema global resultante da análise numérica.

Ressalta-se ainda, que na interface entre os *patches*, devido a natureza interpolatória do vetores de *knots* abertos, as funções base terão continuidade  $C_0$ , conforme pode ser

observado na Fig. 3.6, onde apresentam-se as funções base univariadas na interface entre dois *Patches*.

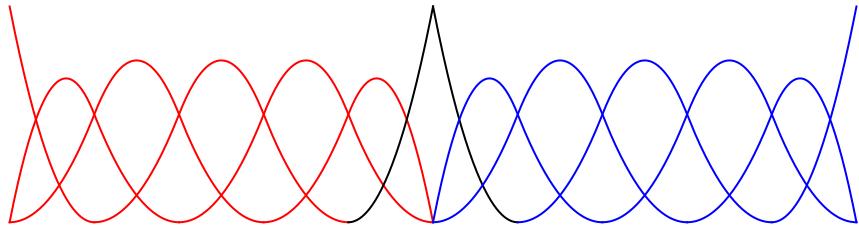


Figura 3.6 – Funções base univariadas na interface entre *Patches*

## 3.4 Análise Isogeométrica

Para a aplicação da IGA no contexto da Dinâmica dos Fluidos Computacional, será utilizada como base a metodologia apresentada no Cap. 2. Nesse contexto, a aproximação da geometria, realizada no contexto do MEF pela Eq. 2.49, será substituída pela abordagem Isogeométrica através do uso de geometrias NURBS, descritas pelas equações: Eq. 3.28, Eq. 3.30 ou Eq. 3.32 para os casos de curvas, superfícies ou sólidos respectivamente.

As funções tentativa para velocidade e pressão, e as funções teste associadas à elas, apresentadas nas Eq. (2.50) à Eq. (2.53) como  $N$ , são equivalentes à  $R_{i,p}(\xi)$ ,  $R_{i,j:p,q}(\xi, \eta)$  e  $R_{i,j,k:p,q,r}(\xi, \eta, \zeta)$  a depender da geometria em análise.

A integração numérica nas células é realizada através da quadratura Gaussiana. Considerando o domínio paramétrico de uma célula:  $\bar{\Omega}^e$ , e o domínio de integração ou parental:  $\tilde{\Omega}^e$ , apresentados na Fig.3.1, definidos respectivamente pelos vetores de coordenadas paramétricas  $\xi(\xi, \eta, \zeta)$  e  $\tilde{\xi}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta})$ , a matriz jacobiana do mapeamento do espaço físico, com coordenadas  $\mathbf{y}(y_1, y_2, y_3)$ , para o espaço de quadratura, é definida por:

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tilde{\xi}} = \frac{d\mathbf{y}}{d\xi} \frac{d\xi}{d\tilde{\xi}}, \quad (3.33)$$

com  $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta} \in [-1, 1]$ .

O primeiro termo à direita da igualdade da Eq. (3.33) é calculado a partir das derivadas parciais da Equação: Eq. (3.28), Eq. (3.30) ou Eq. (3.32), a depender do tipo da geometria em questão (curva, superfície ou sólido, respectivamente).

Para a obtenção do segundo termo à direita, primeiramente é necessário definir-se a relação entre as coordenadas do domínio paramétrico e do domínio parental. Considerando-se a célula  $\bar{\Omega}^e = [\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}] \times [\zeta_k, \zeta_{k+1}]$ , pode-se calcular  $\xi, \eta, \zeta \in \bar{\Omega}^e$  a partir de  $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta} \in \tilde{\Omega}^e$  através das seguintes relações:

$$\xi = \xi_i + (\tilde{\xi} + 1) \left( \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{2} \right), \quad (3.34)$$

$$\eta = \eta_i + (\tilde{\eta} + 1) \left( \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{2} \right), \quad (3.35)$$

e

$$\zeta = \zeta_i + (\tilde{\zeta} + 1) \left( \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_i}{2} \right), \quad (3.36)$$

assim,  $\frac{d\xi}{d\tilde{\xi}}$  é obtido derivando-se parcialmente às expressões apresentadas em: Eq. 3.34, Eq. 3.35 e Eq. 3.36.

### 3.4.1 Parâmetros de estabilização

Para a determinação dos parâmetros de estabilização  $\tau$ , de acordo com o exposto na Subseção 2.3.3, faz-se necessário a determinação de um tensor métrico,  $\mathbf{G}$  (Eq. 2.69), o qual depende da matriz jacobiana transformada,  $\hat{\mathbf{Q}}$ , definida na Eq. 2.66.

Devido a diferença entre o espaço paramétrico utilizado na definição das funções de base e do espaço paramétrico de integração, definido aqui como espaço parental, a matriz  $\mathbf{Q}$  será reescrita como:

$$\mathbf{Q} = \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \tilde{\xi}} \right). \quad (3.37)$$

Para a obtenção de  $\hat{\mathbf{Q}}$ , de acordo com a Eq. 2.66, define-se a matriz  $\mathbf{D}$  para análise isogeométrica, de acordo com o trabalho de Otoguro, Takizawa e Tezduyar (2020), como:

$$\mathbf{D} = \left( \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial \tilde{\xi}} \right), \quad (3.38)$$

que representa a relação entre o espaço paramétrico de preferência, onde o comprimento efetivo do elemento deve ser medido, e o espaço de integração, onde são definidos os pontos de quadratura.

O espaço paramétrico de preferência, para problemas unidimensionais, é definido para cada elemento por meio de uma interpolação usando polinômios de Bernstein  $B_b^p$  de ordem  $p$ :

$$\hat{\xi}(\tilde{\xi}) = \sum_{b=0}^p \hat{\xi}_b B_b^p(\tilde{\xi}), \quad (3.39)$$

com os pontos de controle de Bézier,  $\hat{\xi}_b$ , definidos igualmente espaçados da seguinte maneira:

$$\hat{\xi}_b = \frac{\Delta \hat{\xi}}{p} b, \quad (3.40)$$

sendo  $\Delta\hat{\xi}$  o comprimento paramétrico do elemento de Bézier.

Os pontos de controle correspondentes no espaço de integração são dados por:

$$\tilde{\xi}_a = \frac{\Delta\hat{\xi}}{p} \sum_{b=0}^p b \left\{ \mathbf{C}^{-1} \right\}_{ba}, \quad (3.41)$$

com  $a = 0, \dots, p$ .  $\mathbf{C}$  consiste no operador de extração de Bézier, que relaciona as funções B-spline globais às funções de Bernstein locais, cuja obtenção, nesse trabalho, é realizada de acordo com o exposto em Borden et al. (2011).

O comprimento efetivo de elemento para  $a = 1, \dots, p$  pode ser calculado por:

$$\Delta\tilde{\xi}_a = \tilde{\xi}_a - \tilde{\xi}_{a-1} \quad (3.42)$$

$$= \frac{\Delta\hat{\xi}}{p} \sum_{b=0}^p b \left( \left\{ \mathbf{C}^{-1} \right\}_{ba} - \left\{ \mathbf{C}^{-1} \right\}_{ba-1} \right). \quad (3.43)$$

A partir disso pode-se definir o razão entre o comprimento do elemento de Bézier e o comprimento efetivo do elemento. Considerando um problema 1D, uma das proposta dos autores para  $D$ , utilizada nesse trabalho, chama-se *RQD-MAX* e consiste em:

$$D = \frac{\Delta\hat{\xi}}{\min_{a=1,\dots,p} \Delta\tilde{\xi}_a}, \quad (3.44)$$

resultando em:

$$D = p \left( \min_{a=1,\dots,p} \sum_{b=0}^p b \left( \left\{ \mathbf{C}^{-1} \right\}_{ba} - \left\{ \mathbf{C}^{-1} \right\}_{ba-1} \right) \right)^{-1} \quad (3.45)$$

$$= p \max_{a=1,\dots,p} \left( \sum_{b=0}^p b \left( \left\{ \mathbf{C}^{-1} \right\}_{ba} - \left\{ \mathbf{C}^{-1} \right\}_{ba-1} \right) \right)^{-1} \quad (3.46)$$

Para múltiplas dimensões o coeficiente de transformação  $D$  é obtido individualmente para cada uma das direções do espaço paramétrico, e os componentes da matriz de transformação  $\mathbf{D}$  são determinados como:

$$D_{ij} = D^i \delta_{ij}, \quad (3.47)$$

$i, j = 1, \dots, n_{pd}$ , sendo  $n_{pd}$  a dimensão do espaço paramétrico.

[VOLTAR AQUI!](#)

## 3.5 Verificação e aplicações

Para aplicação da IGA em problemas da DFC seguiu-se o mesmo procedimento matemático descrito ao longo do Cap. ??, sendo que a implementação computacional seguiu o roteiro apresentado no Alg. ???. Os exemplos escolhidos para a verificação do código computacional foram o escoamento sobre um cilindro 3D e o problema de escoamento sobre um canal com degrau utilizando células 3D. Os resultados obtidos são apresentados

nas seções subsequentes.

### 3.5.1 Escoamento sobre um cilindro - 3D

Na geração da geometria NURBS, correspondente ao problema do escoamento sobre um cilindro, utilizou-se um código previamente desenvolvido pela estudante durante seu mestrado (TONON, 2016). Por tratar-se de uma geometria de pequena complexidade, pôde-se gerá-la com um único *patch*, o qual é composto por um cubo com um cilindro inserido em seu centro. O processo de geração da malha, simplificadamente, consiste em se escolher vetores de *knots*, pontos de controle, e pesos adequados para a descrição de tal geometria.

O código previamente desenvolvido, baseia-se na quantidade mínima de pontos de controle necessários para gerar uma circunferência completa (ver Fig. 3.7a). Para a obtenção exata de uma circunferência utilizam-se funções quadráticas e o vetor de *knots* na direção paramétrica  $\xi$  inicial é composto por:  $\xi = [0, 0, 0, 1/4, 1/4, 1/2, 1/2, 3/4, 3/4, 1, 1, 1]$ . A posição dos pontos de controle da circunferência e seus respectivos pesos foram obtidos de acordo com Piegl e Tiller (1996).

A obtenção da curva respectiva ao quadrado, que é descrita no espaço paramétrico correspondente a direção  $\xi$ , é consequência das escolhas realizadas para gerar a circunferência, logo, a curva possui o mesmo vetor de *knots* e funções quadráticas. Os pontos de controle para a formação do quadrado foram posicionados, no espaço físico, de forma a ser obtida a dimensão requerida à seção transversal quadrada que compõe a geometria do cubo, e de forma que os mesmos ficassem alinhados com os pontos de controle da circunferência na direção radial. Os pesos respectivos ao pontos de controle do retângulo são unitários. Na Fig. 3.7a pode-se observar a posição dos pontos de controle respectivos à circunferência e ao quadrado e as curvas resultantes desta discretização em linha vermelho pontilhado.

Na sequência o código realiza o procedimento de refinamento por inserção sucessiva de *knots* no vetor de *knots*. O algoritmo utilizado para este procedimento pode ser encontrado em Piegl e Tiller (1996). Na Fig. 3.7b apresenta-se um exemplo de pontos de controle gerados após a inserção de um novo *knot* no centro de cada *knot span* do espaço paramétrico inicial. A quantidade de *knots* a ser inserida depende da discretização necessária a análise numérica.

Para a obtenção de uma seção transversal da geometria em questão, gera-se uma superfície a partir da discretização na direção  $\eta$  do espaço paramétrico. O código utiliza um vetor de *knots* aberto, com os *knots* distribuídos uniformemente, e funções de forma quadráticas. Os pontos de controle são distribuídos radialmente no espaço físico através de uma progressão geométrica unidirecional e seus pesos são determinados a partir de uma interpolação linear entre os pesos dos pontos de controle da circunferência e os pontos do quadrado. A quantidade mínima de pontos de controle respectiva à direção  $\eta$  é de  $q + 1$

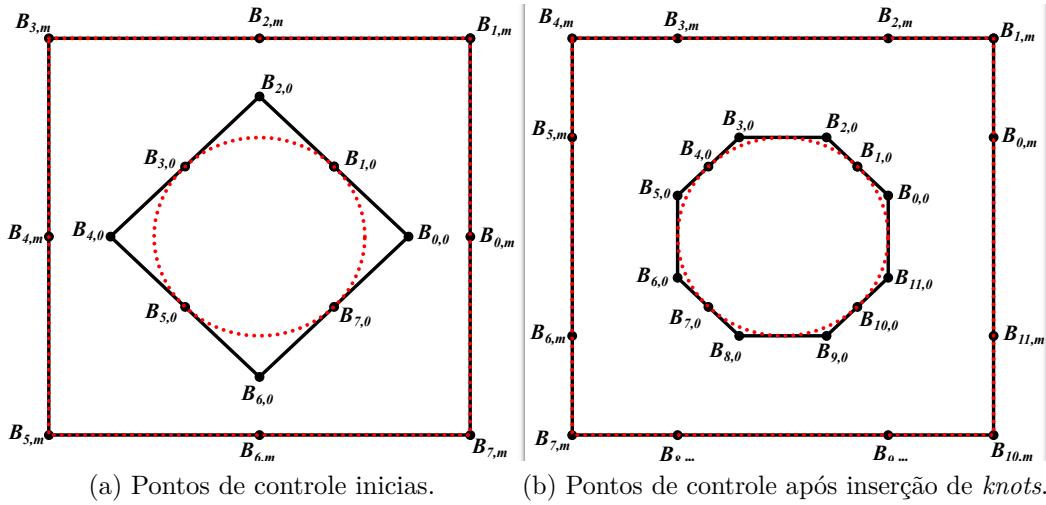


Figura 3.7 – Cilindro 3D: Geração curva NURBS

pontos, sendo a quantidade final definida em função da análise numérica. Na Fig. 3.5.1, apresenta-se um exemplo de uma rede de pontos de controle, obtida a partir das curvas apresentadas em Fig. 3.7b com 9 pontos de controle na direção  $\eta$ . Na figura em questão omitiu-se a nomenclatura dos pontos de controle intermediários às curvas da circunferência e do quadrado para evitar a sobreposição da nomenclatura na figura.

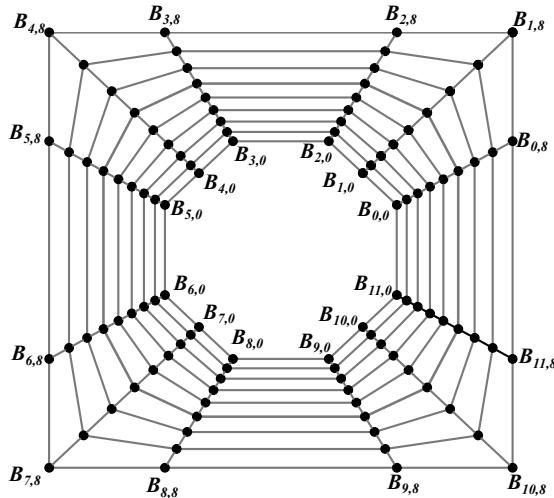


Figura 3.8 – Cilindro 3D: Geração superfície NURBS.

Nessa primeira etapa do trabalho, a direção paramétrica  $\zeta$ , respectiva à direção  $z$  da geometria física, foi discretizada com apenas uma célula, utilizando-se para isso vetor de *knots* abertos com distribuição uniforme de *knots*, e funções base quadráticas.

Visando a verificação do código de IGA 3D analisa-se o problema do escoamento sobre o cilindro para  $Re = 40, 100$  e  $1000$  (Eq. (2.108)). Para isso, gera-se uma malha com  $101 \times 71 \times 3$  pontos de controle nas direções paramétricas  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$  respectivamente, resultando em 6624 células. Na Fig. 3.9a apresentam-se as dimensões da geometria em

questão, bem como as condições de contorno aplicadas, e na Fig. 3.9b apresenta-se a malha física resultante da discretização.

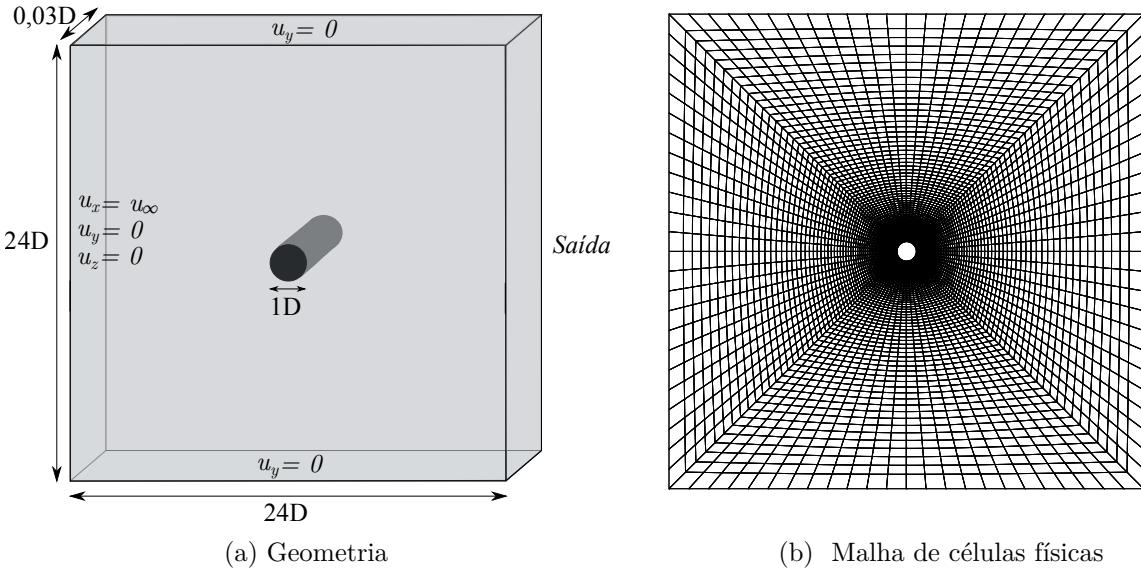


Figura 3.9 – Cilindro 3D: Geometria e malha de células físicas

Adicionalmente, prescrevem-se nas paredes frontal e posterior, condição de parede lisa ( $u_z = 0$ ), e na *Saída* do escoamento condição de força de superfície nula ( $\sigma \mathbf{n} = \mathbf{0}$ ). O problema é simulado para um velocidade de entrada  $u_\infty = 1,0$ ,  $\rho = 1,0$ ,  $\Delta t = 0,05$ , e  $\rho_\infty = 0,5$ , sendo a viscosidade variada de acordo com o número de Reynolds desejado. Para o cálculo dos coeficientes aerodinâmicos  $C_D$ ,  $C_L$  e do número de Strouhal (St) utilizam-se as equações apresentadas no Item ??.

Nas Figs. 3.10a e 3.10b, apresentam-se a variação ao longo do tempo dos coeficientes  $C_D$  e  $C_L$ . Os valores obtidos com a malha isogeométrica 3D estão muito próximos ao obtidos com a malha de elementos finitos 2D (Item ??) para Reynolds 40 e 100. Para Reynolds 1000, nota-se que a variação ao longo do tempo dos valores de  $C_D$  e  $C_L$  para IGA resulta em valores mais elevados do que os obtidos com MEF. Tal diferença ainda deverá ser investigada, sendo que tanto as diferenças nas dimensões das malhas como a diferença que pode haver na convergência dos resultados ou a efeitos de 3D de vorticidade podem contribuir para isso. Os resultados obtidos para o histórico de  $C_D$  e  $C_L$  por Henderson (1997) para  $Re = 1000$  em análises tridimensionais baseadas em MEF, foram menores do que os 2D. Essa disparidade entre os resultados obtidos nesse trabalho e de Henderson (1997) podem estar relacionados com o fato de que a dimensão escolhida da malha na direção  $z$  foi muito pequena de maneira a impossibilitar que os efeitos tridimensionais do escoamento fossem adequadamente capturados.

Para o número de Strouhal, o valor obtido para  $Re = 100$  foi de 0,1681 e para  $Re = 1000$  de 0,2395. Nota-se que, embora os valores de  $C_D$  e  $C_L$  apresentem diferenças entre os resultados 2d baseados em elementos finitos e a malha 3D baseada em IGA, a

frequência do desprendimento de vórtices obtida foi muito semelhante.

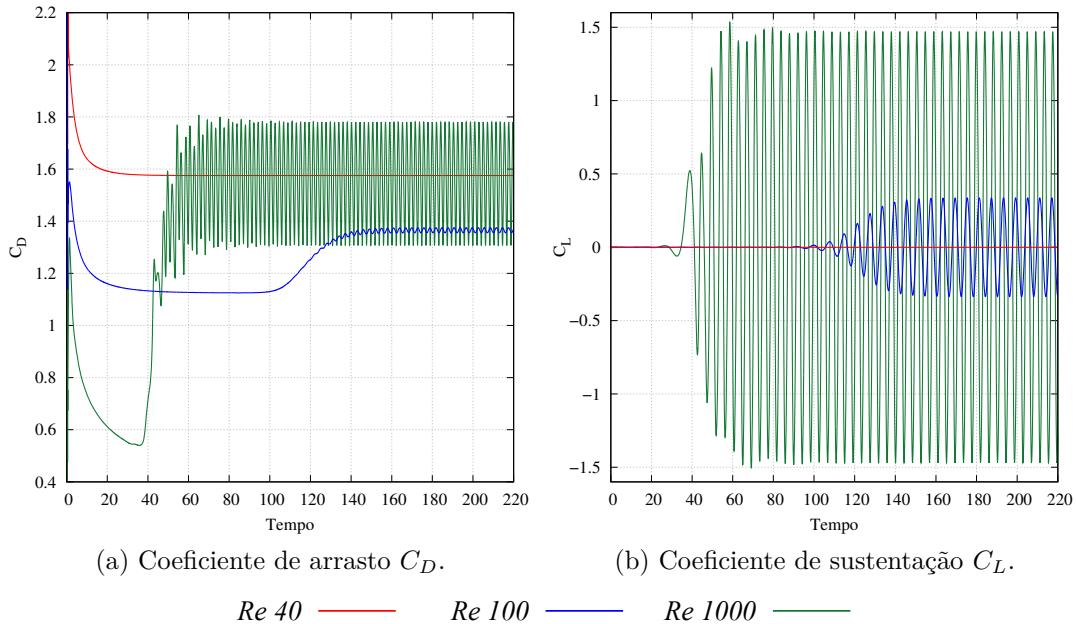


Figura 3.10 – Cilindro 3D: Coeficientes aerodinâmicos.

### 3.5.2 Escoamento em um canal com degrau

Este exemplo é amplamente utilizado na verificação de códigos para escoamentos incompressíveis, sendo sua geometria apresentada na Fig. 3.11. O problema consiste em prescrever-se um perfil parabólico de escoamento na entrada do canal, e condição de aderência ( $\mathbf{u} = 0$ ) nas demais paredes que estão contidas nos planos  $xz$  e  $yz$ , exceto na saída do canal, a qual possui como condição  $\sigma \mathbf{n} = 0$ . Para as paredes dos planos  $xy$ , frontal e posterior, prescreveu-se condição de parede lisa ( $u_z = 0$ ).

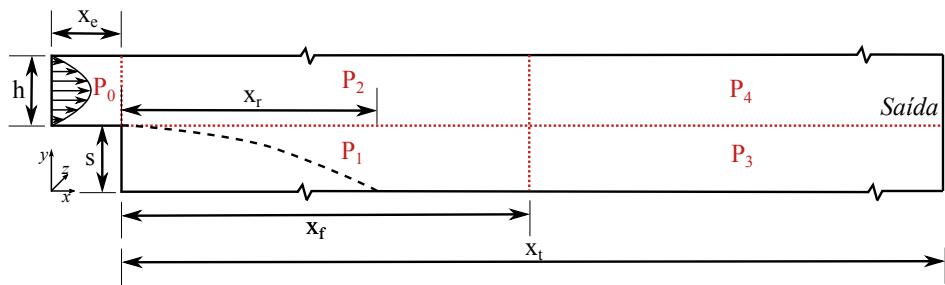


Figura 3.11 – Degrau 3D: Geometria.

As dimensões selecionadas para o canal foram  $h = 1,0m$ ,  $s = 0,94m$ ,  $x_e = 1,0m$ ,  $x_f = 15m$  e  $x_t = 30m$  e dimensão na direção  $z$  de  $0,1m$ . Adicionalmente, o perfil de velocidade na entrada do canal é descrito pela seguinte relação:

$$u_x = V_{max} \left( 1 - \left( \frac{(y - s) - h/2}{h/2} \right)^2 \right), \quad (3.48)$$

com velocidade  $V_{max} = 10m/s$  e  $u_y = u_z = 0$ .

O escoamento sobre o degrau é caracterizado por produzir áreas de recirculação onde o fluido se separa e forma vórtices. A distância entre o degrau e o ponto de recolamento do vórtice principal  $x_r$  é uma das principais características verificadas nesse problema. A dimensão dos vórtices varia em função do número de Re, a qual é calculada de acordo com Armaly et al. (1983), sendo expressa por:

$$Re = \frac{\rho \left( \frac{2V_{max}}{3} \right) 2h}{\mu}, \quad (3.49)$$

com  $\rho = 1kg/m^3$ . Foram selecionados para as análises 3 diferentes número de Reynolds: 100, 400 e 800, variando-se a viscosidade do fluido.

Para a geração da geometria NURBS, discretiza-se o canal em 5 *patches*, os quais são denominados  $P_0, P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$ , e podem ser observados na Fig. 3.11. Todas as direções paramétricas são discretizadas com vetores de *knots* abertos e com *knots* igualmente espaçados no interior do vetor, além de funções de forma quadráticas. Os pontos de controle para os *patches* 0, 1 e 2 foram distribuídos no espaço físico, direções  $x, y$  e  $z$  de maneira a se obter células igualmente espaçadas. Para os *patches* 3 e 4, na direção do espaço físico  $y$  e  $z$ , os pontos são posicionadas de maneira a gerar células uniformes, e, na direção  $x$ , são distribuídos de maneira a se resultar numa progressão geométrica do tamanho das células, com as células aumentando de tamanho da esquerda para a direita, conforme pode ser observado na Fig. 3.12. Na Tab. 3.1 podem ser observados os números de pontos de controle utilizados em cada direção dos espaços paramétricos para cada *patch*, resultando em 60795 pontos de controle e 4800 células.

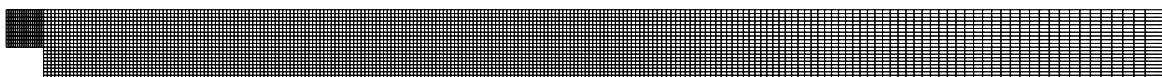


Figura 3.12 – Degrau 3D: Geometria e malha de células físicas

Na Fig. 3.13 são apresentados os comprimentos de recolamento do vórtice primário adimensionalizados ( $x_r/s$ ), juntamente com os resultados adaptados dos ensaios experimentais de Armaly et al. (1983) e os resultados de análises 2d de Williams e Baker (1999). Nota-se que os resultados obtidos estão próximos das referências para  $Re = 100$  e  $Re = 400$ , entretanto, para  $Re = 800$  nota-se um afastamento do presente trabalho, e do referente à

Tabela 3.1 – Número de pontos de controle por *patch*

<i>Patch</i>	$\xi$	$\eta$	$\zeta$
0	22	12	3
1	152	12	3
2	152	12	3
3	82	12	3
4	82	12	3

análise 2D com relação ao experimento realizado por Armaly et al. (1983). Isto ocorre, visto que o ensaio experimental foi realizado com um canal com  $2m$  de comprimento na direção  $z$ , e a simulação atual com apenas uma célula nessa direção é incapaz de captar os fenômenos tridimensionais que ocorrem a medida que o número de Reynolds cresce. Na Fig.3.14 pode-se observar o campo de velocidade para os Reynolds estudados, e o aspecto do vórtice primário desenvolvido.

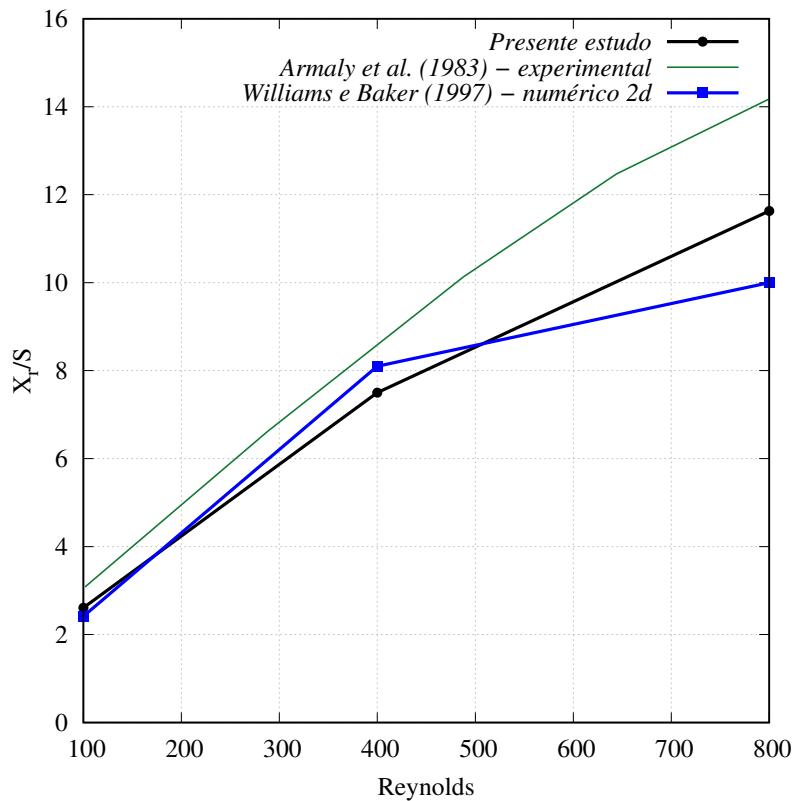


Figura 3.13 – Degrau 3D: Comprimento de recolamento do vórtice principal

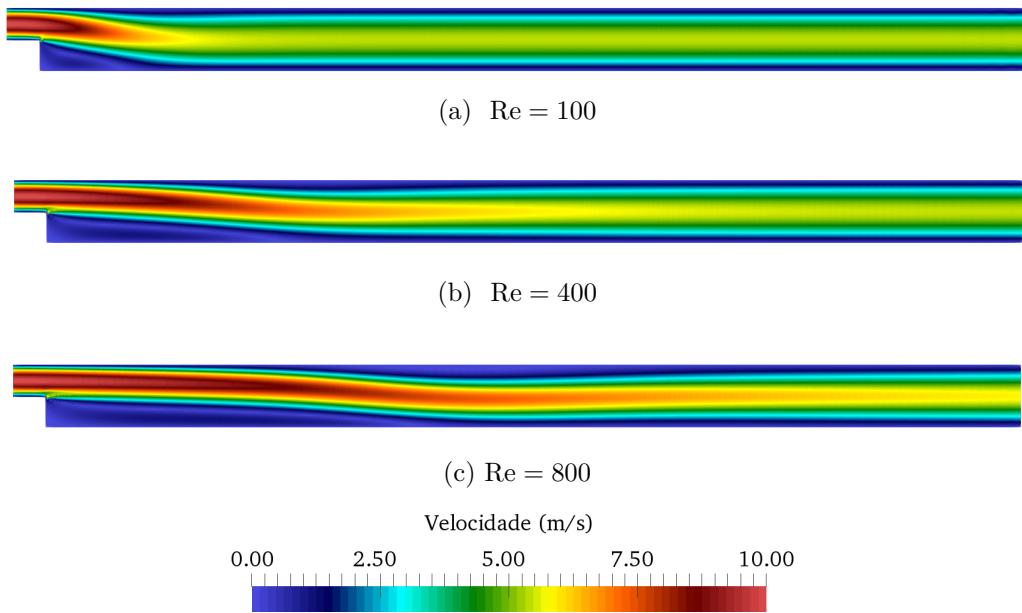


Figura 3.14 – Degrau 3D: Campo de velocidade.



# TÉCNICA DE DECOMPOSIÇÃO DE DOMÍNIOS ATRAVÉS DO MÉTODO DE ARLEQUIN ESTABILIZADO - RBSAM

---



---

Com intuito de superar as dificuldades encontrados com a técnica de decomposição de domínios apresentada no Cap. ??, neste capítulo será apresentado o método multiescala Arlequin que permite também levar em conta efeitos localizados através do uso de um modelo local mais refinado superposto a um modelo global com discretização mais grosseira. No método Arlequin, o processo é realizado através do cruzamento e colagem entre os modelos em uma zona de colagem através da utilização de um operador de acoplamento.

A primeira parte deste capítulo descreve o método clássico de Arlequin, introduzido por Ben Dhia (1998). Em seguida, será apresentada a técnica de estabilização (RBSAM) proposta por Fernandes et al. (2020) para o método de Arlequin no contexto de escoamentos incompressíveis. Na sequência, será discutida a extensão dessa metodologia para problemas com contornos móveis. Por fim, serão apresentados o algoritmo da implementação computacional e exemplos de validação

## 4.1 Método Arlequin

O método Arlequin, introduzido por Ben Dhia (1998), consiste na superposição de um domínio local a um domínio global em uma região de efeitos localizados. Os modelos, local e global, são acoplados em uma zona de colagem através de um operador

de acoplamento conveniente.

O método de Arlequin, de acordo com Dhia e Rateau (2005), é baseado em três principais ideias (ver Fig. 4.1):

- Um domínio local  $\Omega_1$  é sobreposto em um domínio global  $\Omega_0$  em uma zona de interesse de modo a representar efeitos locais;
- Os modelos são colados um ao outro em uma subzona da zona de superposição ( $\Omega_s$ ), chamada de zona de colagem ( $\Omega_c$ ), através de um operador de acoplamento conveniente;
- Garante-se a distribuição da energia entre os modelos através do emprego de uma função ponderadora, definida a partir da partição da unidade;

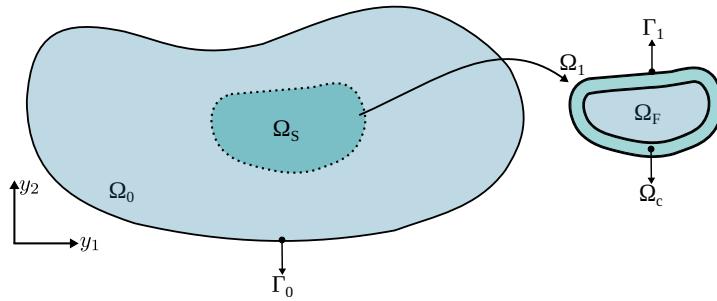


Figura 4.1 – Domínio local e global.

Dessa forma, o domínio computacional do problema é definido por:

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_1, \quad (4.1)$$

a zona de superposição,  $\Omega_s$ , pode ser definida matematicamente da seguinte forma:

$$\Omega_s = \Omega_0 \cap \Omega_1, \quad (4.2)$$

$$\Omega_s = \Omega_c \cup \Omega_{fr}, \quad (4.3)$$

$$\Omega_s > 0, \quad (4.4)$$

sendo  $\Omega_{fr}$  a chamada zona livre.

Umas das formas mais comuns de se realizar o acoplamento entre os modelos na zona de colagem  $\Omega_c$  é através da aplicação de campos de multiplicadores de Lagrange. Uma forma generalizada de representar os operadores de acoplamento é apresentada em Dhia e Rateau (2002), da maneira que se segue:

$$(\boldsymbol{\lambda}, \Delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega_c} k_0 [\boldsymbol{\lambda} \cdot \Delta \mathbf{u}] + k_1 [\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u})] \, d\Omega_c, \quad (4.5)$$

onde  $\lambda$  é o campo de multiplicadores de Lagrange,  $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u}_0|_{\Omega_c} - \mathbf{u}_1|_{\Omega_c}$  é a diferença entre os campos acoplados na zona de colagem.  $k_0$  e  $k_1$  são constantes estritamente positivas.

Quando  $k_0 > 0$  e  $k_1 = 0$  têm-se o operador de acoplamento  $L^2$ . Esse acoplador estabelece a continuidade de ordem 0 do campo compatibilizado, que significada que ele garante no sentido de forma fraca, a continuidade das variáveis ao longo da zona de colagem. Para valores  $k_0 > 0$  e  $k_1 > 0$  obtêm-se o operador de acoplamento  $H^1$ , estabelecendo continuidade de ordem 1 do campo compatibilizado, garantindo no sentido de forma fraca, a continuidade de uma combinação de variáveis e seu Laplaciano (GUIDAULT; BELYTSCHKO, 2007).

O sucesso do método, indiferente do tipo de operador adotado, depende da escolha apropriada dos parâmetros  $k_0$  e  $k_1$ . Para o acoplamento utilizando  $L^2$ , devido a simplicidade da aplicação da restrição dos campos compatibilizados na zona de colagem, o condicionamento do sistema depende fortemente da adoção do parâmetro  $k_0$ , sendo esta uma das razões pela qual a maioria dos trabalhos realizados utilizando o método Arlequin aplica o operador  $H^1$ . A obtenção de parâmetros ótimos para o método pode ser uma tarefa difícil, sendo esse um dos fatores que levaram Fernandes et al. (2020) ao desenvolvimento da técnica RBSAM que será discutida na próxima seção.

A definição do espaço de funções para os operadores de Lagrange é muito importante. O método apresenta flexibilidade para usar uma discretização diferente da zona de colagem, entretanto, usualmente se adota um subconjunto do espaço de funções de um dos modelos sobrepostos. A escolha por um modelo ou outro pode conduzir a um maior ou menor acoplamento, sendo a escolha definida em função da aplicação desejada.

Por fim, para que o método não adicione energia ao sistema, é necessário que seja definida uma função ponderadora, denominada ( $\alpha$ ), que garanta a distribuição da energia do sistema ao longo dos modelos sobrepostos. Em geral, essa função é definida da seguinte forma:

$$\begin{cases} \alpha_0 \in [ka; 1] \text{ em } \Omega, \\ \alpha_0 = 1 \text{ em } \Omega_0 \setminus \Omega_1, \\ \alpha_0 = k_a > 0 \text{ em } \Omega_{fr}, \\ \alpha_0 + \alpha_1 = 1 \text{ em } \Omega, \end{cases} \quad (4.6)$$

com  $k_a$  uma constante arbitrariamente pequena para o método de Arlequin ser relevante (BEN DHIA, 2008), conforme pode ser observado na Fig. 4.2.

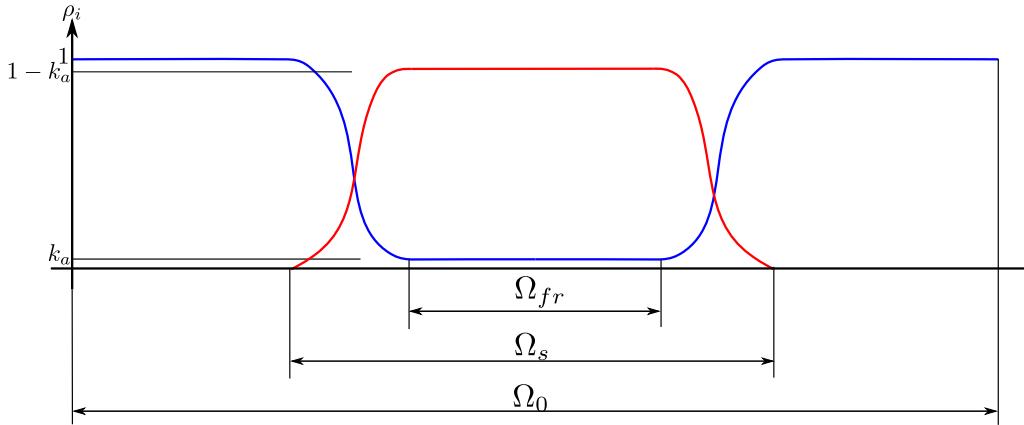


Figura 4.2 – Função Ponderadora

## 4.2 Método Arlequin clássico aplicado à problemas de escoamentos incompressíveis

O método Arlequin vem sendo aplicado amplamente em diversos trabalhos da mecânica dos sólidos nas últimas décadas. Entretanto, no que diz respeito a materiais incompressíveis, pode-se citar mais recentemente o trabalho de Jamond e Ben Dhia (2013), no qual os autores desenvolvem uma técnica para análise empregando elementos do tipo Taylor-Hood, que satisfazem a condição LBB. Essa metodologia é testada também para problemas descritos pelas equações de Stokes.

De acordo com os autores Jamond e Ben Dhia (2013) a principal dificuldade encontrada para aplicação do método Arlequin no contexto de materiais incompressíveis é que duas restrições devem ser aplicadas concomitantemente: a compatibilização dos campos de interesse na zona de colagem e a condição de incompressibilidade do material nessa mesma região. Os autores apontaram que a imposição da condição de incompressibilidade em ambos os modelos pode gerar problema de redundância, acarretando em um sistema algébrico associado singular.

A solução proposta pelos autores nesse trabalho foi a aplicação da condição de incompressibilidade em cada ponto do domínio computacional apenas uma vez. A metodologia consiste então da remoção da condição de incompressibilidade dos elementos total ou parcialmente encontrados na zona de colagem ( $\Omega_c$ ) em um dos modelos. Indiferente do modelo eleito para a remoção da condição de incompressibilidade na zona de colagem, na zona livre, a condição de incompressibilidade é removida do modelo global. Deve-se destacar que no trabalho citado existem algumas recomendações com relação a estabilidade da metodologia, como, por exemplo, a necessidade de existir pelo menos um elemento global na zona livre. Tal trabalho não explora as possíveis mudanças que acarretariam na estabilidade numérica em caso de sucessivas remoções e inclusões de condição de

incompressibilidade no caso de um modelo local móvel.

Por esse motivo, e pelas pesquisas anteriores já realizadas pela presente autora e seu grupo de pesquisa, optou-se pela adoção de elementos estabilizados, os quais já foram retratados no Cap. 2.

Para a construção do método de Arlequin clássico precisamos retomar às equações para um monomodelo apresentadas no Cap. 2 que representam a forma fraca discretizada espacialmente e estabilizada das equações da quantidade de movimento e da continuidade. Entretanto, será usada inicialmente uma descrição Euleriana dessas equações nesse capítulo.

Considerando os espaços de dimensão finita das funções tentativa que descrevem a velocidade ( $\mathcal{S}_{ui}^h$ ) e a pressão ( $\mathcal{S}_{pi}^h$ ) e seus respectivos espaços de funções testes  $\mathcal{V}_{ui}^h$  e  $\mathcal{V}_{pi}^h$ , com  $i = 0, 1$  indicando o índice do modelo, definidos como:

$$\mathcal{S}_{ui}^h = \left\{ \mathbf{u}_i^h \mid \mathbf{u}_i^h(\cdot, t) \in (H^{1h}(\Omega_i), \mathbf{u}_i^h = \mathbf{u}_{Di}^h \text{ em } \Gamma_{Di}) \right\} \quad (4.7)$$

$$\mathcal{S}_{pi}^h = \left\{ p_i^h \mid p_i^h(\cdot) \in L^{2h}(\Omega_i) \right\}, \quad (4.8)$$

$$\mathcal{V}_{ui}^h = \left\{ \mathbf{w}_i^h \mid \mathbf{w}_i^h(\cdot) \in H^{1h}(\Omega_i), \mathbf{w}_i^h = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_{Di} \right\}, \quad (4.9)$$

e,

$$\mathcal{V}_{pi}^h = \mathcal{S}_{pi}^h. \quad (4.10)$$

Analogamente, os espaços das funções tentativas ( $\mathcal{M}^h$ ) e teste ( $\mathcal{Q}^h$ ) para o campo dos multiplicadores de Lagrange ( $\boldsymbol{\lambda}$ ) são definidos como:

$$\mathcal{M}^h = \left\{ \boldsymbol{\lambda}^h \mid \boldsymbol{\lambda}^h(\cdot) \in H^{1h}(\Omega_c) \right\} \quad (4.11)$$

$$\mathcal{Q}^h = \mathcal{M}^h. \quad (4.12)$$

A aplicação do operador de acoplamento  $L^2$  à formulação clássica Arlequin consiste em dado os espaços tentativa e teste apresentados nas equações anteriores: Encontrar  $(\mathbf{u}_0^h, p_0^h, \mathbf{u}_1^h, p_1^h, \boldsymbol{\lambda}^h) \in \mathcal{S}_{u0}^h \times \mathcal{S}_{p0}^h \times \mathcal{S}_{u1}^h \times \mathcal{S}_{p1}^h \times \mathcal{M}^h$  de maneira que  $\forall \mathbf{w}_0^h \in \mathcal{V}_{u0}^h, q_0^h \in \mathcal{V}_{p0}^h, \mathbf{w}_1^h \in \mathcal{V}_{u1}^h, q_1^h \in \mathcal{V}_{p1}^h$ , e  $\forall \boldsymbol{\zeta}^h \in \mathcal{Q}^h$ :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_0^h}{\partial t} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot (\mathbf{u}_0^h \cdot \nabla_y) \mathbf{u}_0^h d\Omega_0 \\
& + \int_{\Omega_0} \alpha_0 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_0^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_0 \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{SUPG} ((\mathbf{u}_0^h \cdot \nabla_y) \mathbf{w}_0^h) \cdot \mathbf{r}_{M0}^h (\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_0 \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \nu_{LSIC} \nabla_y \cdot \mathbf{w}_0^h r_{C0}^h (\mathbf{u}_0^h) d\Omega_0 + \chi_0 \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_0^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h d\Omega_c \\
& = \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot \mathbf{f}_0^h d\Omega_0 + \int_{\Gamma_{N0}} \alpha_0 \mathbf{w}_0^h \cdot \mathbf{h}_0^h d\Gamma_{N0},
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\int_{\Omega_0} \alpha_0 q_0^h \nabla_y \cdot \mathbf{u}_0^h d\Omega_0 + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{PSPG} \left( \frac{\nabla_y q_0^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_{M0}^h (\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_0, \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_1^h}{\partial t} d\Omega_1 + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot (\mathbf{u}_1^h \cdot \nabla_y) \mathbf{u}_1^h d\Omega_1 \\
& + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_1^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{SUPG} ((\mathbf{u}_1^h \cdot \nabla_y) \mathbf{w}_1^h) \cdot \mathbf{r}_{M1}^h (\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \nu_{LSIC} \nabla_y \cdot \mathbf{w}_1^h r_{C1}^h (\mathbf{u}_1^h) d\Omega_1 + \chi_1 \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_1^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h d\Omega_c \\
& = \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{f}_1^h d\Omega_1 + \int_{\Gamma_{N1}} \alpha_1 \mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{h}_1^h d\Gamma_{N1},
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\int_{\Omega_1} \alpha_1 q_1^h \nabla_y \cdot \mathbf{u}_1^h d\Omega_1 + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{PSPG} \left( \frac{\nabla_y q_1^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_{M1}^h (\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 = 0, \tag{4.16}$$

$$\int_{\Omega_c} \boldsymbol{\zeta}^h \cdot (\mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_1^h) d\Omega_c = 0, \tag{4.17}$$

onde  $\mathbf{r}_{Mi}^h$  e  $r_{Ci}^h$  são os resíduos da equação da quantidade de movimento e da equação da continuidade, com  $i = 0, 1$ , respectivamente, dados por:

$$\mathbf{r}_{Mi}^h (\mathbf{u}_i^h, p_i^h, \boldsymbol{\lambda}^h) = \alpha_i \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}_i^h}{\partial t} + (\mathbf{u}_i^h \cdot \nabla_y) \mathbf{u}_i^h - \mathbf{f}_i^h \right) - \alpha_i \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_i^h, p_i^h) + \chi_i \boldsymbol{\lambda}^h, \tag{4.18}$$

$$r_{Ci}^h (\mathbf{u}_i^h) = \alpha_i \nabla_y \cdot \mathbf{u}_i^h, \tag{4.19}$$

com  $\chi_i$  descrito da maneira que se segue:

$$\chi_i = \begin{cases} (-1)^i & \text{se } \mathbf{y} \in \Omega_c \\ 0 & \text{se } \mathbf{y} \notin \Omega_c. \end{cases}. \tag{4.20}$$

O problema descrito pelas equações 4.13 à 4.17 descreve à versão clássica do método de Arlequin para o problema de Navier-Stokes estabilizado pela técnica PSPG/SUPG. Matematicamente trata-se de um problema de ponto de sela decorrente de uma formulação mista. Entretanto, desde que a condição LBB seja satisfeita, existe solução para o problema

e ela é única.

Em Guidault e Belytschko (2007) pode-se encontrar uma vasta análise matemática a cerca das questões relacionadas com estabilidade, convergência e relevância do método. Nesta pesquisa, os autores relatam, por exemplo, a necessidade de emprego de funções ponderadoras contínuas quando utilizado o operador de acoplamento  $L^2$ , tal caso não ocorre com o operador de acoplamento  $H^1$ . Além disso, os autores destacam que espaços muito refinados para os acopladores de Lagrange podem levar a uma solução não convergente, independente do tipo de operador de acoplamento. Este problema ocorre devido a forte dependência da discretização do modelo global na solução.

O problema descrito no método Arlequin clássico é análogo a formulação mista em elementos finitos para escoamentos incompressíveis, que limita a escolha das funções aproximadoras para o campo de velocidade e pressão. No caso da mecânica dos fluidos, conforme apresentado no Cap. 2, uma forma de superar esta restrição LBB é o uso de métodos estabilizados como o PSPG. Seguindo essa mesma filosofia, Fernandes et al. (2020) introduzem uma técnica de estabilização consistente que será apresentada na seguinte seção.

## 4.3 Método Arlequin estabilizado aplicado à problemas de escoamentos incompressíveis

Com intuito de superar a condição LBB para o problema de Arlequin, Fernandes et al. (2020) desenvolvem uma técnica de estabilização consistente baseada em resíduo. Para isso, introduz-se uma parcela adicional à equação dos campos de multiplicadores de Lagrange, que leva em conta o gradiente de  $\zeta^h$  e o resíduo da equação da quantidade de movimento:

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_c^e} \frac{\tau_{ARLQ0}}{\rho} \nabla_y \zeta^h : \nabla_y \mathbf{r}_{M0}^h (\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_c - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_c^e} \frac{\tau_{ARLQ1}}{\rho} \nabla_y \zeta^h : \nabla_y \mathbf{r}_{M1}^h (\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_c, \quad (4.21)$$

sendo  $\tau_{ARLQ0}$  e  $\tau_{ARLQ1}$  parâmetros de estabilização, respectivamente da malha global e local. A obtenção destes parâmetros será abordada na subseção seguinte.

Dessa forma, pode-se definir a solução do problema de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis utilizando a técnica de Arlequin estabilizada da seguinte forma: Encontrar  $(\mathbf{u}_0^h, p_0^h, \mathbf{u}_1^h, p_1^h, \boldsymbol{\lambda}^h) \in \mathcal{S}_{u0}^h \times \mathcal{S}_{p0}^h \times \mathcal{S}_{u1}^h \times \mathcal{S}_{p1}^h \times \mathcal{M}^h$  de maneira que  $\forall \mathbf{w}_0^h \in \mathcal{V}_{u0}^h$ ,  $q_0^h \in \mathcal{V}_{p0}^h$ ,  $\mathbf{w}_1^h \in \mathcal{V}_{u1}^h$ ,  $q_1^h \in \mathcal{V}_{p1}^h$ , e  $\forall \zeta^h \in \mathcal{Q}^h$ :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_0^h}{\partial t} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot (\mathbf{u}_0^h \cdot \nabla_y) \mathbf{u}_0^h d\Omega_0 \\
& + \int_{\Omega_0} \alpha_0 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_0^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_0 \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{SUPG} ((\mathbf{u}_0^h \cdot \nabla_y) \mathbf{w}_0^h) \cdot \mathbf{r}_{M0}^h (\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_0
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \nu_{LSIC} \nabla_y \cdot \mathbf{w}_0^h r_{C0}^h (\mathbf{u}_0^h) d\Omega_0 + \chi_0 \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_0^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h d\Omega_c \\
& = \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot \mathbf{f}_0^h d\Omega_0 + \int_{\Gamma_{N0}} \alpha_0 \mathbf{w}_0^h \cdot \mathbf{h}_0^h d\Gamma_{N0},
\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_1^h}{\partial t} d\Omega_1 + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot (\mathbf{u}_1^h \cdot \nabla_y) \mathbf{u}_1^h d\Omega_1 \\
& + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_1^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{SUPG} ((\mathbf{u}_1^h \cdot \nabla_y) \mathbf{w}_1^h) \cdot \mathbf{r}_{M1}^h (\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1
\end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \nu_{LSIC} \nabla_y \cdot \mathbf{w}_1^h r_{C1}^h (\mathbf{u}_1^h) d\Omega_1 + \chi_1 \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_1^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h d\Omega_c \\
& = \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{f}_1^h d\Omega_1 + \int_{\Gamma_{N1}} \alpha_1 \mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{h}_1^h d\Gamma_{N1},
\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\zeta}^h \cdot (\mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_1^h) d\Omega_c + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_c^e} \frac{\tau_{ARLQ0}}{\rho} \nabla_y \boldsymbol{\zeta}^h : \nabla_y \mathbf{r}_{M0}^h (\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_c \\
& - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_c^e} \frac{\tau_{ARLQ1}}{\rho} \nabla_y \boldsymbol{\zeta}^h : \nabla_y \mathbf{r}_{M1}^h d\Omega_c = 0,
\end{aligned} \tag{4.26}$$

com os resíduos  $\mathbf{r}_{Mi}^h$  e  $r_{Ci}^h$  escritos conforme as Eq. 4.18 e Eq .4.19.

O sistema resultante pode ser reescrito em notação matricial como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{L}}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_1 & -\hat{\mathbf{L}}_1 \\ \mathbf{L}_0^T & -\mathbf{L}_1^T & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{U}}_0 \\ \bar{\mathbf{U}}_1 \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_{\Lambda} \end{bmatrix}. \tag{4.27}$$

Considerando  $i = 0, 1$  designando os modelos global e local respectivamente têm-se a definição dos termos da Eq. 4.27 como:  $\mathbf{K}_i$  é uma matriz que representa os termos provenientes das matrizes referentes as equações da quantidade de movimento e da continuidade para o modelo  $i$ ;  $\hat{\mathbf{L}}_i$  matriz que representa os termos de acoplamento do modelo  $i$ ;  $\mathbf{L}_i^T$  matriz procedente dos termos da equação de restrição e de componentes da estabilização RBSAM do modelo  $i$ ;  $\mathbf{E}$  apresenta termos oriundos da estabilização RBSAM;  $\bar{\mathbf{U}}_i$  representa os vetores nodais dos graus de liberdade respectivos a velocidade e pressão do

modelo  $i$ ;  $\Lambda$  representa os graus de liberdade respectivos aos multiplicadores de Lagrange;  $\mathbf{F}_i$  representa os vetores provenientes das equações da quantidade de movimento e da continuidade para o modelo  $i$ ;  $\mathbf{F}_\Lambda$  representa os termos vetoriais advindos da estabilização RBSAM.

Note que na estabilização Arlequin baseada no resíduo (RBSAM) não existem elementos zeros na diagonal da matriz, diferente do mesmo problema na formulação clássica Arlequin. No trabalho de Fernandes et al. (2020) pode-se encontrar a análise de estabilidade dessa técnica e testes numéricos que avaliam o condicionamento do sistema algébrico e a convergência do método.

O problema de Arlequin não linear apresentado nas equações: Eq. 4.22 à 4.26 pode ser reescrito em sua forma semi-discreta residual para  $i = 0, 1$ , da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} R_{M,i} &= \int_{\Omega_i} \alpha_i \rho \mathbf{w}_i^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i^h}{\partial t} d\Omega_i + \int_{\Omega_i} \alpha_i \rho \mathbf{w}_i^h \cdot (\mathbf{u}_i^h \cdot \nabla_y) \mathbf{u}_i^h d\Omega_i \\ &\quad + \int_{\Omega_i} \alpha_i \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_i^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_i^h, p_i^h) d\Omega_i \\ &\quad + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{SUPG} ((\mathbf{u}_i^h \cdot \nabla_y) \mathbf{w}_i^h) \cdot \mathbf{r}_{Mi}^h (\mathbf{u}_i^h, p_i^h) d\Omega_i \\ &\quad + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \nu_{LSIC} \nabla_y \cdot \mathbf{w}_i^h r_{Ci}^h (\mathbf{u}_i^h) d\Omega_i + \chi_i \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_i^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h d\Omega_c \\ &\quad - \int_{\Omega_i} \alpha_i \rho \mathbf{w}_i^h \cdot \mathbf{f}_i^h d\Omega_i - \int_{\Gamma_i} \alpha_i \mathbf{w}_i^h \cdot \mathbf{h}_i^h d\Gamma_i \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$R_{C,i} = \int_{\Omega_i} \alpha_i q_i^h \nabla_y \cdot \mathbf{u}_i^h d\Omega_i + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{PSPG} \left( \frac{\nabla_y q_i^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_{Mi}^h (\mathbf{u}_i^h, p_i^h) d\Omega_i, \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} R_L &= \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\zeta}^h \cdot (\mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_1^h) d\Omega_c + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \frac{\tau_{ARLQ0}}{\rho} \nabla_y \boldsymbol{\zeta}^h : \nabla_y \mathbf{r}_{M0}^h (\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_c \\ &\quad - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \frac{\tau_{ARLQ1}}{\rho} \nabla_y \boldsymbol{\zeta}^h : \nabla_y \mathbf{r}_{M1}^h (\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_c. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Considerando  $\dot{\mathbf{U}}_i$ ,  $\mathbf{U}_i$ ,  $\mathbf{p}_i$  e  $\boldsymbol{\Lambda}$  os vetores nodais dos graus de liberdade respectivos a aceleração, velocidade, pressão e multiplicadores de Lagrange, pode-se escrever o problema semidiscreto da DFC como: Determinar  $\dot{\mathbf{U}}_0$ ,  $\mathbf{U}_0$ ,  $\mathbf{p}_0$ ,  $\dot{\mathbf{U}}_1$ ,  $\mathbf{U}_1$ ,  $\mathbf{p}_1$  e  $\boldsymbol{\Lambda}$  de maneira que:

$$R_{M0}(\dot{\mathbf{U}}_0, \mathbf{U}_0, \mathbf{p}_0, \boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{0}, \quad (4.31)$$

$$R_{C0}(\dot{\mathbf{U}}_0, \mathbf{U}_0, \mathbf{p}_0, \boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{0}, \quad (4.32)$$

$$R_{M1}(\dot{\mathbf{U}}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{p}_1, \boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{0}, \quad (4.33)$$

$$R_{C1}(\dot{\mathbf{U}}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{p}_1, \boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{0}, \quad (4.34)$$

$$R_L(\dot{\mathbf{U}}_0, \mathbf{U}_0, \mathbf{p}_0, \dot{\mathbf{U}}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{p}_1, \boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{0}. \quad (4.35)$$

### 4.3.1 Integração Temporal

Quanto ao procedimento de integração temporal, utilizou-se o método  $\alpha$ -generalizado. Conforme a metodologia apresentado na Seção 2.4, para a solução do sistema de equações não lineares compostas por Eq. (4.31) à Eq. (4.35) utiliza-se o método de Newton-Raphson. A solução resulta em uma etapa preditiva e outra iterativa corretiva.

Na etapa preditiva, conhecida a solução em um passo de tempo  $n$ , prediz-se a solução no passo seguinte ( $n + 1$ ) através das seguintes relações:

$$\dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \dot{\mathbf{U}}_{0(n)}, \quad (4.36)$$

$$\mathbf{U}_{0(n+1)}^0 = \mathbf{U}_{0(n)}, \quad (4.37)$$

$$\mathbf{p}_{0(n+1)}^0 = \mathbf{p}_{0(n)}, \quad (4.38)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \dot{\mathbf{U}}_{1(n)}, \quad (4.39)$$

$$\mathbf{U}_{1(n+1)}^0 = \mathbf{U}_{1(n)}, \quad (4.40)$$

$$\mathbf{p}_{1(n+1)}^0 = \mathbf{p}_{1(n)}, \quad (4.41)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^0 = \boldsymbol{\Lambda}_{(n)}, \quad (4.42)$$

onde o superíndice 0 representa a iteração de número zero, enquanto que os subíndices 0 e 1 representam as variáveis do modelo global e local respectivamente.

Na etapa iterativa corretiva, itera-se sobre a Eq. (4.31) à Eq. (4.35) até que elas sejam satisfeitas, seja através de uma tolerância prescrita, ou até que se alcance uma quantidade máxima de iterações pré-estabelecida. A etapa iterativa corretiva é constituída por três fases. A fase 1 consiste em determinar os valores no instante intermediário para as variáveis nodais na iteração  $i$ :

$$\dot{\mathbf{U}}_{0(n+\alpha_m)}^i = \dot{\mathbf{U}}_{0(n)} + \alpha_m (\dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^i - \dot{\mathbf{U}}_{0(n)}), \quad (4.43)$$

$$\mathbf{U}_{0(n+\alpha_f)}^i = \mathbf{U}_{0(n)} + \alpha_f (\mathbf{U}_{0(n+1)}^i - \mathbf{U}_{0(n)}), \quad (4.44)$$

$$\mathbf{p}_{0(n+1)}^i = \mathbf{p}_{0(n+1)}^i, \quad (4.45)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{1(n+\alpha_m)}^i = \dot{\mathbf{U}}_{1(n)} + \alpha_m (\dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^i - \dot{\mathbf{U}}_{1(n)}), \quad (4.46)$$

$$\mathbf{U}_{1(n+\alpha_f)}^i = \mathbf{U}_{1(n)} + \alpha_f (\mathbf{U}_{1(n+1)}^i - \mathbf{U}_{1(n)}), \quad (4.47)$$

$$\mathbf{p}_{1(n+1)}^i = \mathbf{p}_{1(n+1)}^i, \quad (4.48)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^i = \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^i. \quad (4.49)$$

Na fase 2, com os valores intermediários das variáveis nodais resolve-se o sistema linear resultante da linearização das equações Eq. (4.31) à Eq. (4.35) com respeito às variáveis de interesse  $\dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}$ ,  $\mathbf{p}_{0(n+1)}$ ,  $\dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}$ ,  $\mathbf{p}_{1(n+1)}$  e  $\boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{M0}}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^i} & \frac{\partial R_{M0}}{\partial \mathbf{p}_{0(n+1)}^i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial R_{M0}}{\partial \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^i} \\ \frac{\partial R_{C0}}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^i} & \frac{\partial R_{C0}}{\partial \mathbf{p}_{0(n+1)}^i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial R_{C0}}{\partial \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial R_{M1}}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^i} & \frac{\partial R_{M1}}{\partial \mathbf{p}_{1(n+1)}^i} & \frac{\partial R_{M1}}{\partial \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial R_{C1}}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^i} & \frac{\partial R_{C1}}{\partial \mathbf{p}_{1(n+1)}^i} & \frac{\partial R_{C1}}{\partial \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^i} \\ \frac{\partial R_L}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^i} & \frac{\partial R_L}{\partial \mathbf{p}_{0(n+1)}^i} & \frac{\partial R_L}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^i} & \frac{\partial R_L}{\partial \mathbf{p}_{1(n+1)}^i} & \frac{\partial R_L}{\partial \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^i \\ \Delta \mathbf{p}_{0(n+1)}^i \\ \Delta \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^i \\ \Delta \mathbf{p}_{1(n+1)}^i \\ \Delta \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_{M0} \\ -R_{C0} \\ -R_{M1} \\ -R_{C1} \\ -R_L \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Atualiza-se então na fase 3 a solução através das seguintes relações:

$$\dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^{i+1} = \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^i + \Delta \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^i, \quad (4.51)$$

$$\mathbf{U}_{0(n+1)}^{i+1} = \mathbf{U}_{0(n+1)}^i + \gamma \Delta t \Delta \mathbf{U}_{0(n+1)}^i, \quad (4.52)$$

$$\mathbf{p}_{0(n+1)}^{i+1} = \mathbf{p}_{0(n+1)}^i + \Delta \mathbf{p}_{0(n+1)}^i, \quad (4.53)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^{i+1} = \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^i + \Delta \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^i, \quad (4.54)$$

$$\mathbf{U}_{1(n+1)}^{i+1} = \mathbf{U}_{1(n+1)}^i + \gamma \Delta t \Delta \mathbf{U}_{1(n+1)}^i, \quad (4.55)$$

$$\mathbf{p}_{1(n+1)}^{i+1} = \mathbf{p}_{1(n+1)}^i + \Delta \mathbf{p}_{1(n+1)}^i, \quad (4.56)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{1(n+1)}^{i+1} = \boldsymbol{\Lambda}_{1(n+1)}^i + \Delta \boldsymbol{\Lambda}_{1(n+1)}^i. \quad (4.57)$$

Na utilização do método  $\alpha$ -generalizado as integrais das equações são avaliadas no instante  $t = t_{n+\alpha_f}$ . As relações entre velocidade e aceleração, e os parâmetros utilizados pelo método podem ser consultados na Seção 2.4.

### 4.3.2 Parâmetro de estabilização para técnica RBSAM

No método Arlequin existe a necessidade de definição do parâmetro de estabilização  $\tau_{ARLQ}$ , o qual deve possuir valor suficiente para estabilizar os campos de multiplicadores de Lagrange, sem, no entanto, comprometer a convergência do método.

Para a definição de  $\tau_{ARLQ}$  tomou-se como referência os trabalhos de Tezduyar e Osawa (2000) e Tezduyar e Sathe (2003) nos quais se apresenta uma vasta quantidade de informação a cerca da obtenção dos parâmetros de estabilização das equações da DFC ( $\tau_{SUPG}$ ,  $\tau_{PSPG}$ ,  $\nu_{LSIC}$ ).

Propõe-se como critério a obtenção de termos de estabilização com magnitude próxima aos termos da equação de acoplamento, através da utilização de normas vetoriais. Este parâmetro será definido para cada um dos modelos como:

$$\tau_{ARLQi} = \left( \frac{1}{(\tau_{A_i})^2} + \frac{1}{(\tau_{B_i})^2} + \frac{1}{(\tau_{C_i})^2} + \frac{1}{(\tau_{D_i})^2} + \frac{1}{(\tau_{E_i})^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.58)$$

com  $i = 0, 1$  definindo o modelo global e local respectivamente e:

$$\tau_{A_i} = \left( \frac{1}{(\tau_{A_i^0})^2 + (\tau_{A_i^1})^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.59)$$

$$\tau_{B_i} = \left( \frac{1}{(\tau_{B_i^0})^2 + (\tau_{B_i^1})^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.60)$$

$$\tau_{C_i} = \left( \frac{1}{(\tau_{C_i^0})^2 + (\tau_{C_i^1})^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.61)$$

$$\tau_{D_i} = \left( \frac{1}{(\tau_{D_i^0})^2 + (\tau_{D_i^1})^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.62)$$

$$\tau_{E_i} = \left( \frac{1}{(\tau_{E_i^0})^2 + (\tau_{E_i^1})^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.63)$$

sendo as variáveis das equações 4.59 à 4.63 as seguintes normas vetoriais:

$$\tau_{A_i^0} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_0}\|}{\|\mathbf{t}_i\|}; \quad \tau_{A_i^1} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_1}\|}{\|\mathbf{t}_i\|}; \quad (4.64)$$

$$\tau_{B_i^0} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_0}\|}{\|\mathbf{j}_i\|}; \quad \tau_{B_i^1} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_1}\|}{\|\mathbf{j}_i\|}; \quad (4.65)$$

$$\tau_{C_i^0} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_0}\|}{\|\mathbf{k}_i\|}; \quad \tau_{C_i^1} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_1}\|}{\|\mathbf{k}_i\|}; \quad (4.66)$$

$$\tau_{D_i^0} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_0}\|}{\|\mathbf{p}_i\|}; \quad \tau_{D_i^1} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_1}\|}{\|\mathbf{p}_i\|}; \quad (4.67)$$

$$\tau_{E_i^0} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_0}\|}{\|\boldsymbol{\Gamma}_i\|}; \quad \tau_{E_i^1} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_1}\|}{\|\boldsymbol{\Gamma}_i\|}; \quad (4.68)$$

Por fim, os vetores em questão, são definidos através das seguintes relações:

$$\mathbf{M}_{\lambda_0} = \int_{\Omega_c} N_k \cdot \mathbf{u}_0^h d\Omega_c, \quad (4.69)$$

$$\mathbf{M}_{\lambda_1} = - \int_{\Omega_c} N_k \cdot \mathbf{u}_1^h d\Omega_c, \quad (4.70)$$

$$\mathbf{t}_i = \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}} N_k : \alpha_i \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}} \left( (\mathbf{u}_i^h \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}}) \mathbf{u}_i^h \right) d\Omega_c, \quad (4.71)$$

$$\mathbf{j}_i = \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}} N_k : \alpha_i \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_i^h}{\partial t} \right) d\Omega_c, \quad (4.72)$$

$$\mathbf{k}_i = \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}}^2 N_k : \alpha_i 2\mu \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_i^h) d\Omega_c, \quad (4.73)$$

$$\mathbf{p}_i = \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}} N_k : \alpha_i \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}} (-\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}} p_i^h) d\Omega_c, \quad (4.74)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_i = \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}} N_k : \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}} (\chi(i) \boldsymbol{\lambda}^h) d\Omega_c, \quad (4.75)$$

com  $k$  representando o índice dos graus de liberdade do campo de multiplicadores de Lagrange.

## 4.4 Superposição de modelos móveis

As equações Eq. (4.22) à Eq. (4.26) resolvem problemas de escoamentos incompressíveis em uma discretização Euleriana. Entretanto, como têm-se como alvo à movimentação do domínio local do fluido (ver Fig. 4.3) para acomodar a movimentação da estrutura em problemas de IFE ou representar o deslocamento de um objeto imerso na DFC, faz-se o uso de uma descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária (ALE) no modelo local ( $\Omega_1$ ) enquanto que o domínio global ( $\Omega_0$ ) mantém-se fixo e com descrição Euleriana.

Para o entendimento da metodologia de superposição de modelos móveis em um esquema Euleriano-ALE, pode-se analisar a Fig. 4.3. Nela, pode-se observar a mudança de configuração dos modelos de fluido do passo  $t_n$  para o passo  $t_{n+1}$ . Nota-se que o modelo global mantém sua geometria inalterada na mudança de passo de tempo, enquanto que o modelo local é movimentado para representar uma nova localização de um objeto imerso. Vale ressaltar que o contorno do domínio do modelo local ( $\Gamma_1$ ) é conhecido em  $t_n$  e em  $t_{n+1}$ , e que a zona de superposição  $\Omega_s$  é definida em diferentes posições em cada instante.

Para análise de domínios móveis do tipo Euleriano-ALE, a Eq. 4.24 será reescrita, levando-se em consideração as definições apresentadas na Seção 2.2, como:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_1^h}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} d\Omega_1 + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot ((\mathbf{u}_1^h - \bar{\mathbf{u}}_1^h) \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}} \mathbf{u}_1^h) d\Omega_1 \\ & + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_1^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{SUPG} ((\mathbf{u}_1^h - \bar{\mathbf{u}}_1^h) \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}} \mathbf{w}_1^h) \cdot \mathbf{r}_{M1}^h(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \nu_{LSIC} \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{w}_1^h r_{C1}^h(\mathbf{u}_1^h) d\Omega_1 \\ & + \chi_1 \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_1^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h d\Omega_c = \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{f}_1^h d\Omega_1 + \int_{\Gamma_{N1}} \alpha_1 \mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{h}_1^h d\Gamma_{N1}, \end{aligned} \quad (4.76)$$

e o resíduo apresentado na Eq. 4.18 ficará reescrito para  $i = 1$ , como:

$$\mathbf{r}_{M1}^h(\mathbf{u}_1^h, p_1^h, \boldsymbol{\lambda}^h) = \alpha_1 \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}_1^h}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u}_1^h - \bar{\mathbf{u}}_1^h) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}_1^h - \mathbf{f}_1^h \right) - \alpha_1 \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1^h, p_1^h, \boldsymbol{\lambda}^h) + \chi_1 \boldsymbol{\lambda}^h. \quad (4.77)$$

Além da consideração da descrição ALE para o modelo local, deve-se ressaltar que a função ponderadora  $\alpha_i$  passa a ser uma variável temporal, ou seja,  $\alpha_i(t)$ , visto que a zona de superposição  $\Omega_s$  é definida em diferentes posições em cada instante de tempo. Dessa forma, a integração temporal utilizando o método  $\alpha$ -generalizado deve considerar essa variação através da seguinte interpolação no tempo intermediário:

$$\alpha_{i(n+\alpha_f)} = \alpha_{i(n)} + \alpha_f (\alpha_{i(n+1)} - \alpha_{i(n)}). \quad (4.78)$$

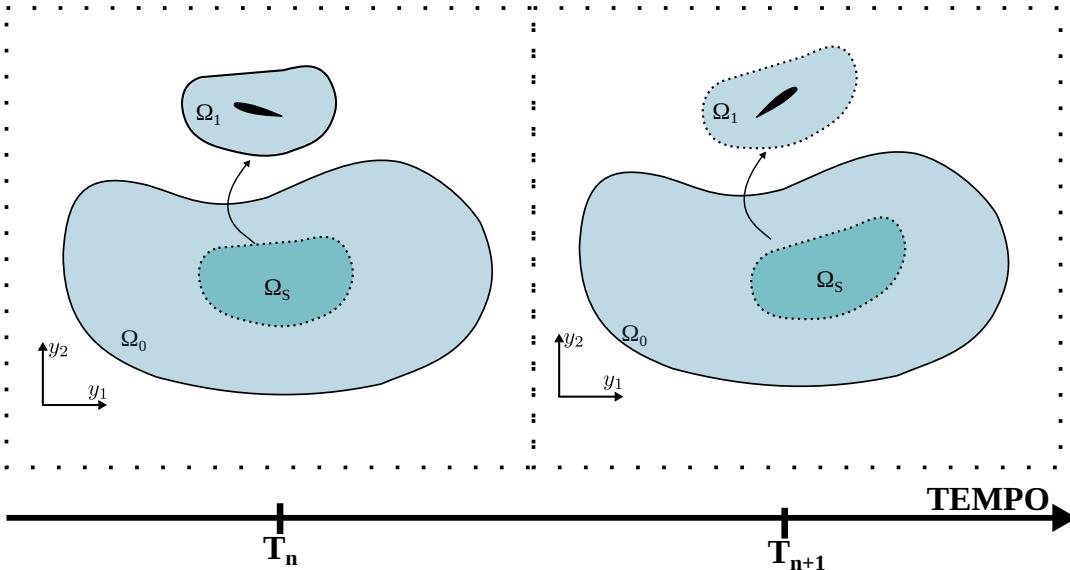


Figura 4.3 – Domínio Arlequin móvel

A solução de modelos móveis requer a utilização de uma técnica adequada para movimentação da malha local. A técnica utilizada nesse trabalho é conhecida como MJBS (Mesh-Jacobian Based Stiffening) introduzida por Tezduyar et al. (1992f) e será abordada na Subseção 5.1.1.

## 4.5 Implementação Computacional

Previamente à explicação a cerca da implementação computacional, é importante indicar que o campo dos multiplicadores de Lagrange é definido neste estudo na malha local. Tal escolha ocorre pelo fato de que mesmo em problemas em que se tenham grandes deslocamentos, a quantidade de elementos locais da zona de superposição permanece inalterada, fazendo com que o sistema algébrico mantenha-se com dimensão constante ao longo do tempo, diminuindo assim, o custo computacional.

O uso da técnica Arlequin envolve a realização de algumas etapas de pré-processamento como parte de sua implementação computacional, que podem ser divididas em 4 etapas: 1. Determinação de distâncias assinaladas; 2. Determinação da zona de colagem; 3. Determinação da função ponderadora; 4. Encontro de correspondência entre pontos dos modelos global e local.

A etapa 1 consiste em determinar a distância assinalada com relação ao contorno  $\Gamma_1$  de todos os pontos (nós para malha de elementos finitos ou pontos de controle para malha isogeométrica) que compõe cada um dos modelos.

Na etapa 2, a partir da distância assinalada, são definidos os elementos locais que fazem parte da zona de colagem em função da espessura dessa região que foi previamente indicada pelo usuário do código.

A função ponderadora para os modelos (etapa 3) é determinada conforme Eq. 4.6. Além disso, a função ponderadora ( $\alpha$ ), para os modelos local e global, foi definida como uma função linear nesse trabalho.

Uma das maiores dificuldades da técnica de Arlequin diz respeito à integração numérica do operador de acoplamento quando se tem na composição da integral funções definidas em modelos distintos. Neste estudo, as integrais são definidas sobre a malha local, desta forma, durante o pré-processamento realiza-se um processo de busca de correspondência (etapa 4) na malha global para cada ponto de integração da malha local. O processo de busca consiste em encontrar a coordenada paramétrica e elemento da malha global correspondente a cada ponto de integração da malha local na zona de colagem.

Para contemplar a solução de problemas com contornos móveis utilizando a técnica Arlequin, a cada passo de tempo, algumas tarefas adicionais devem ser realizadas: atualização da configuração da malha; atualização da distância assinalada com relação ao contorno  $\Gamma_1$  de todos os pontos (nós para malha de elementos finitos ou pontos de controle para malha isogeométrica) que compõe cada um dos modelos; Alteração da função ponderadora; e atualização das correspondências entre pontos de integração da malha local na malha global.

O Algoritmo que descreve a implementação computacional é apresentado no Alg. 2. A implementação computacional e resolução do sistema de equações resultantes ocorreu de forma análoga ao monomodelo descrito na Seção 2.5. O índice  $i$  apresentado diz respeito à iteração de Newton-Raphson.

## 4.6 Exemplos

Para a validação da método Arlequin estabilizado, dois exemplos amplamente explorados nas bibliografias, serão avaliados. O primeiro exemplo, trata-se de um problema de escoamento sobre um aerofólio NACA 0012, e o segundo, com intuito de validação da técnica de movimentação de domínios, consistirá no aerofólio NACA 0012 com um

---

**Algoritmo 2** Algoritmo para problemas móveis da DFC utilizando técnica ARLEQUIN RBSAM
 

---

- 1: Cálculo da distância assinalada dos nós e pontos de controle ao contorno  $\Gamma_1$ ;
- 2: Determinação da zona de colagem  $\Omega_c$ ;
- 3: Definição da função de ponderadora de acordo com Eq. 4.6;
- 4: Busca pela correspondência entre os pontos de integração da malha local na malha global;
- 5: **para** o passo de tempo 0 até T **faca**
- 6:    Movimentação da Malha;
- 7:     $i = 0$ ;
- 8:    Predição da solução: aplicação da Eq. (4.36), Eq. (4.37), Eq. (4.38), Eq. (4.39), Eq. (4.40), Eq. (4.41) e Eq. (4.42);
- 9:    **enquanto** ( $\epsilon < \text{tolerância}$ ) **faca**
- 10:       $i++$ ;
- 11:      Atualização da distância assinalada;
- 12:      Atualização da função ponderadora;
- 13:      Atualização das correspondências entre os pontos de integração da malha local na malha global;
- 14:      Interpolação das variáveis do problema: aplicação da Eq. (4.43), Eq. (4.44), Eq. (4.45), Eq. (4.46), Eq. (4.47), Eq. (4.48) e Eq. (4.49);
- 15:      Cálculo do incremento nas variáveis do problema: Resolução do sistema apresentado na Eq. (4.50);
- 16:      Atualização da solução: cálculo de acordo com (4.51), Eq. (4.52), Eq. (4.53), Eq. (4.54), Eq. (4.55), Eq. (4.56) e Eq. (4.57);
- 17:      Cálculo do erro:

$$\epsilon = \|R_{M0}^i + R_{M1}^i\|_{L^2} \quad (4.79)$$

- 18:    **fim enquanto**
  - 19: **fim para**
- 

movimento de arfagem prescrito.

#### 4.6.1 Escoamento sobre um aerofólio NACA 0012

Para simulação do problema de escoamento sobre um aerofólio NACA 0012, com 1 unidade de corda de dimensão e ângulo de ataque de  $10^\circ$ , utilizou-se o domínio apresentado na Fig. 4.4. O contorno da entrada de fluxo está localizado a 6 cordas (C) do bordo de ataque do aerofólio, com velocidade de entrada  $u_\infty$  na direção  $y_1$ . Os contornos superior e inferior da geometria, com condições de contorno de parede lisa, também estão afastados do aerofólio em 6 unidades de corda. O contorno direito do domínio é localizado a 20 unidades de corda a jusante do bordo de fuga do aerofólio.

A análise é realizada para um número de Reynolds (Re) 1000 calculado a partir da dimensão do aerofólio e da velocidade de entrada do escoamento. Foram utilizados ainda como parâmetros de análise:  $u_\infty = 1,0$ ,  $\rho = 1,0$ ,  $\Delta t = 0,02$ , e  $\rho_\infty = 0,75$ .

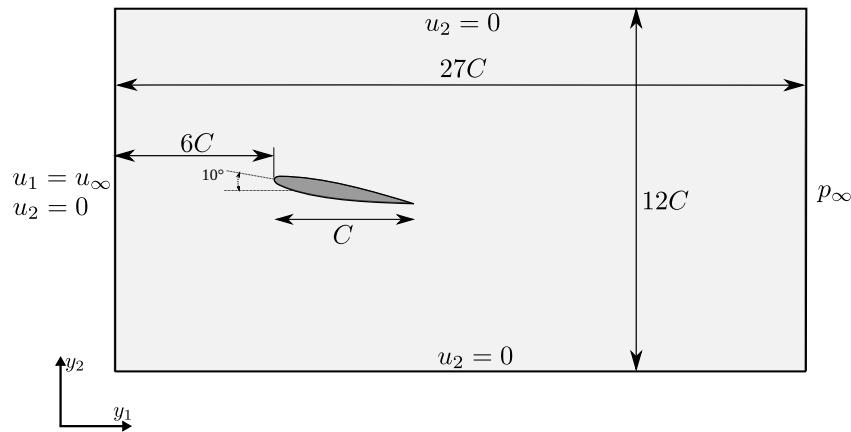


Figura 4.4 – Aerofólio: Geometria

Para validação da teoria apresentada nesse capítulo, compararam-se os resultados de coeficientes de arrasto e sustentação ao longo do tempo para duas discretizações distintas: 1. Monomodelo; 2. Combinação de duas malhas através do método Arlequin estabilizado.

O monomodelo foi discretizado através de elementos finitos (Fig. 4.5), com malha constituída de 9240 elementos triangulares quadráticos e 18792 nós.

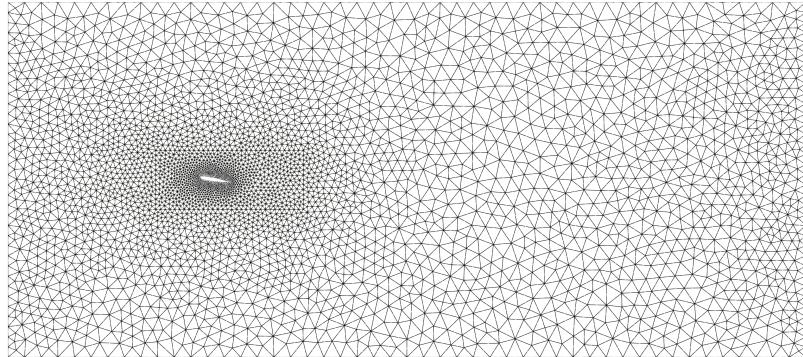
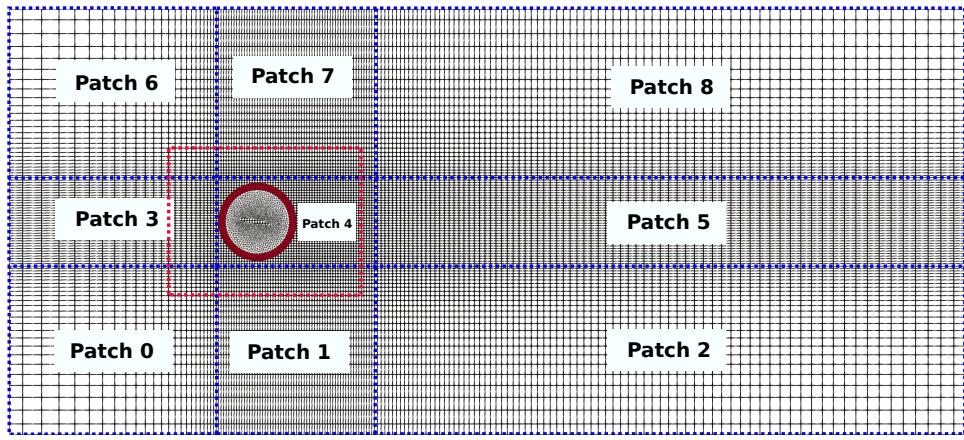


Figura 4.5 – Aerofólio: Malha Monomodelo (MEF)

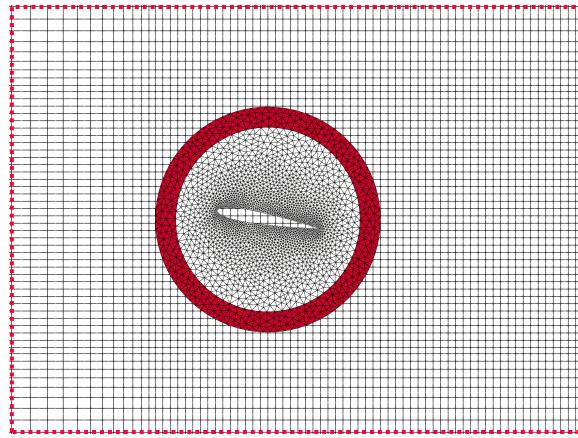
Para o método Arlequin, duas malhas foram utilizadas, uma malha global em elementos isogeométricos (IGA) e uma malha local, mais refinada, em elementos finitos (MEF). Uma visão global da composição do domínio é apresentada na Fig. 4.6a. Uma vista aproximada do aeroporto e da malha local pode ser visualizada na Fig. 4.6b.

A malha global em elementos isogeométricos quadráticos foi obtida através da utilização de 9 *patches*, que totalizaram 15561 pontos de controle e 14025 elementos. A malha local por sua vez é composta por 5214 elementos triangulares quadráticos e 10670 nós.

Na Fig. 4.6b pode observar em vermelho os elementos que fazem parte da zona de colagem. A espessura da zona de colagem foi definida como 0,2, totalizando 628 elementos



(a) Discretização da malha global (IGA) e local (MEF)



(b) Discretização da malha local

Figura 4.6 – Aerofólio: Discretização das malhas global e local

triangulares quadráticos e 1428 nós nessa região. A constante do operador de acoplamento  $L^2$  foi definida como  $k_0 = 10$ .

Nesse problema observa-se o surgimento de uma esteira de vórtices a jusante do aerofólio, que resulta em um número de Strouhal (St) equivalente a 0,877. Esse valor encontra-se em concordância com o obtido por Mittal e Tezduyar (1994) de 0,862.

Nas Fig. 4.7 e Fig. 4.8 apresentam-se os resultados de coeficiente de arrasto e sustentação obtidos para as análises realizadas. Pode-se observar que os resultados obtidos com o modelo baseado no método Arlequin estabilizados estão de acordo com os obtidos para o modelo usando monomodelo.

Nas Fig. 4.9 e Fig. 4.10 estão apresentados os campos de velocidade e pressão respectivamente para um período de um ciclo das curvas referentes aos coeficientes de arrasto e sustentação.

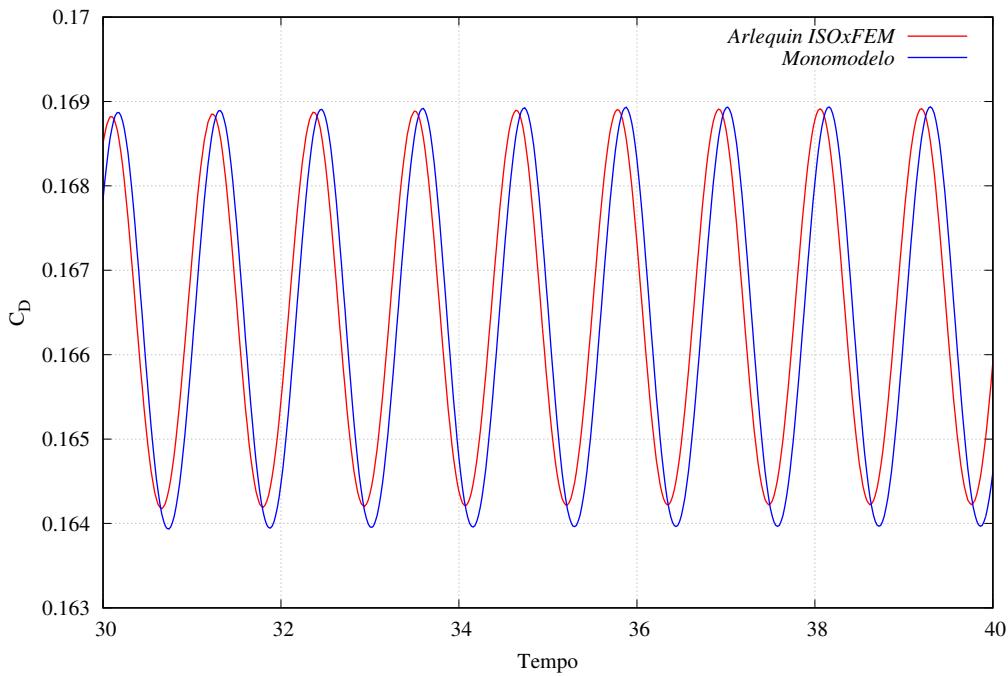


Figura 4.7 – Aeroftólio: Coeficiente de Arrasto

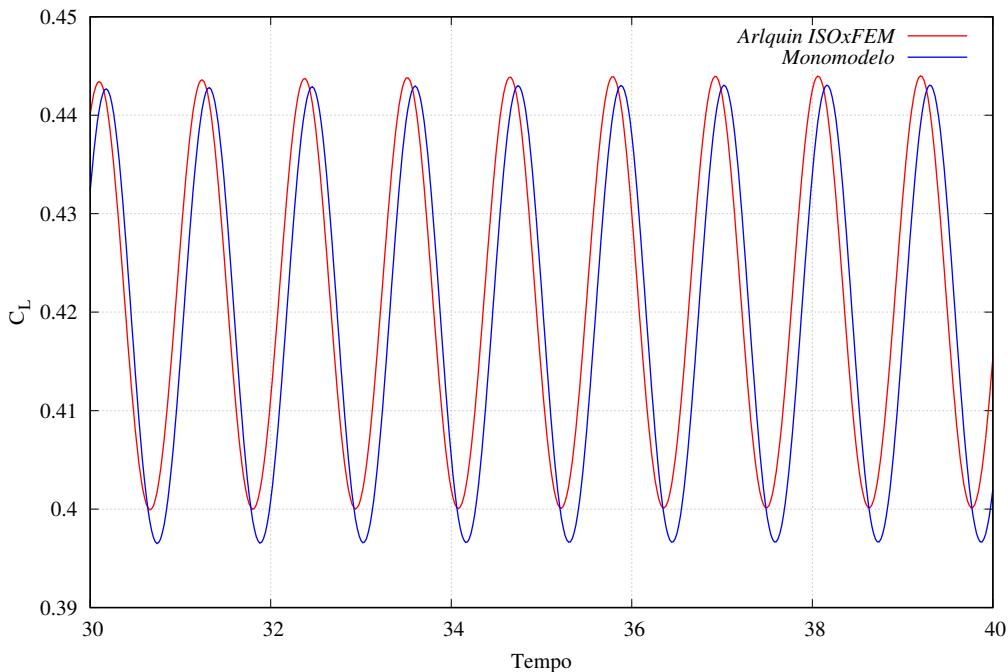


Figura 4.8 – Aeroftólio: Coeficiente de Sustentação

#### 4.6.2 Aeroftólio com movimento de arfagem prescrito

Para a validação computacional da técnica Arlequin estabilizada em domínios móveis utilizou-se um problema envolvendo um aeroftólio NACA 0012, semelhante ao apresentado na Subseção 4.6.1, aplicando-se, entretanto, um movimento de arfagem ao mesmo. O aeroftólio apresenta variação do ângulo de ataque em 20°, iniciando o movimento

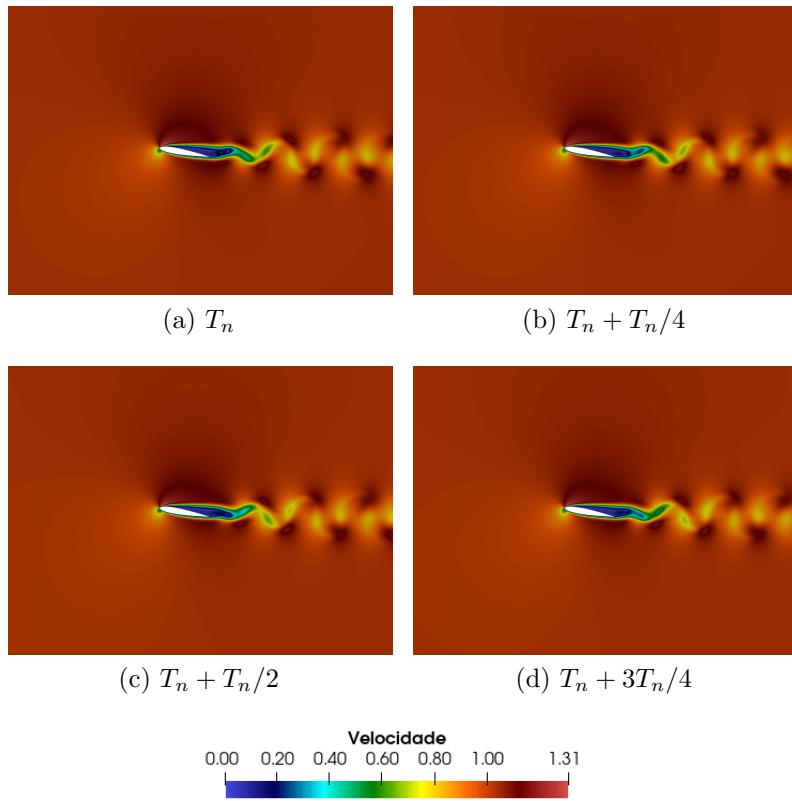


Figura 4.9 – Aerofólio: Campo de velocidade

em  $10^\circ$  e finalizando-o em  $30^\circ$ .

Para descrever-se tal movimento aplica-se, tendo como centro a corda média do aerofólio, o movimento de rotação de corpo rígido através da seguinte relação:

$$\theta = \frac{\theta_{max} + \theta_{min}}{2} - \frac{\theta_{max} - \theta_{min}}{2} \cos \omega_f t, \quad (4.80)$$

com  $\omega_f = 2\pi f_o$ , sendo  $f_o$  a frequência de oscilação, adotada nesse estudo como 1.0,  $\theta_{max} = 30^\circ$  e  $\theta_{min} = 10^\circ$ .

As dimensões da geometria do domínio computacional são alteradas (ver Fig. 4.11) para capturar os efeitos dos desprendimentos de vórtices, que para esse problema, se desprendem em uma faixa mais ampla. Os demais parâmetros de análise foram mantidos iguais aos apresentados no exemplo da Subseção 4.6.1.

Novamente são analisadas 2 discretizações: 1. Monomodelo; 2. Combinação de duas malhas através do método Arlequin estabilizado. O monomodelo consiste em uma malha com 12438 elementos triangulares quadráticos e 25188 elementos. As malhas global e local do método Arlequin mantiveram-se com a mesma discretização do problema da Subseção 4.6.1, incluindo a quantidade de elementos na zona de colagem.

É importante ressaltar que para a simulação desse exemplo, utilizou-se como campo inicial de velocidade e pressão, valores obtidos em uma solução de longo termo do aerofólio na condição de repouso.

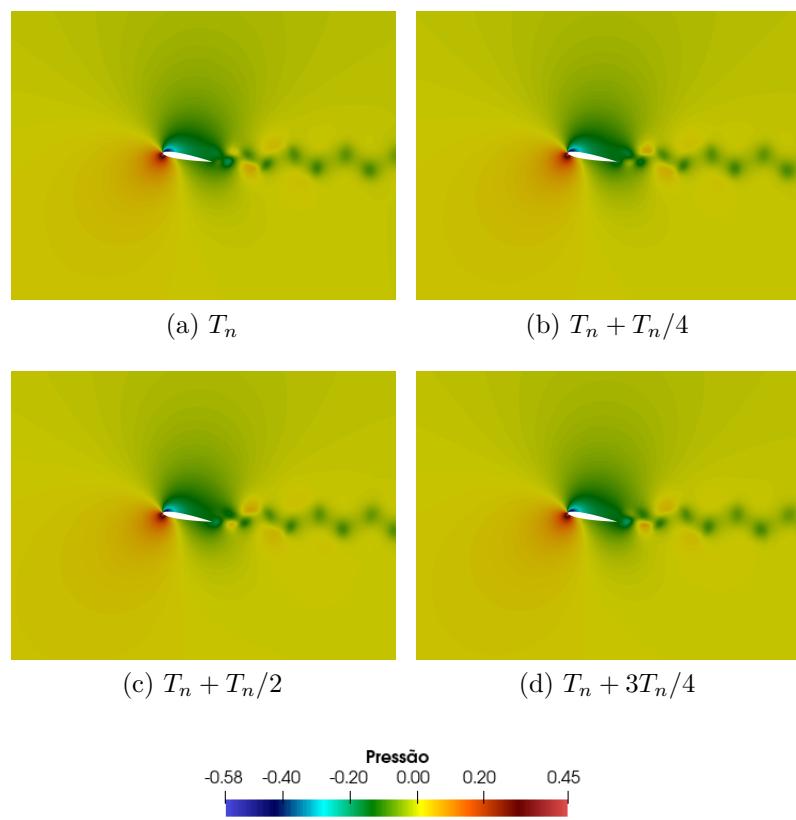


Figura 4.10 – Aerofólio: Campo de pressão

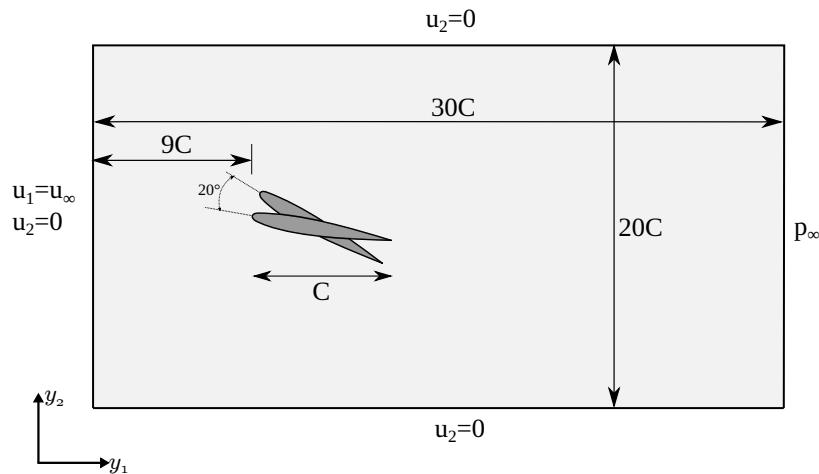


Figura 4.11 – Aerofólio Mov.: Geometria

A variação dos coeficientes de arrasto e sustentação ao longo do tempo são apresentados nas Fig. 4.12 e Fig. 4.13. Nota-se nas imagens que o monomodelo e o modelo Arlequin estão consistentes em suas respostas. Soluções semelhantes podem ser observados no trabalho de Fernandes (2020).

Nas figuras Fig. 4.14 e Fig. 4.15 são apresentados os campos de velocidade e pressão

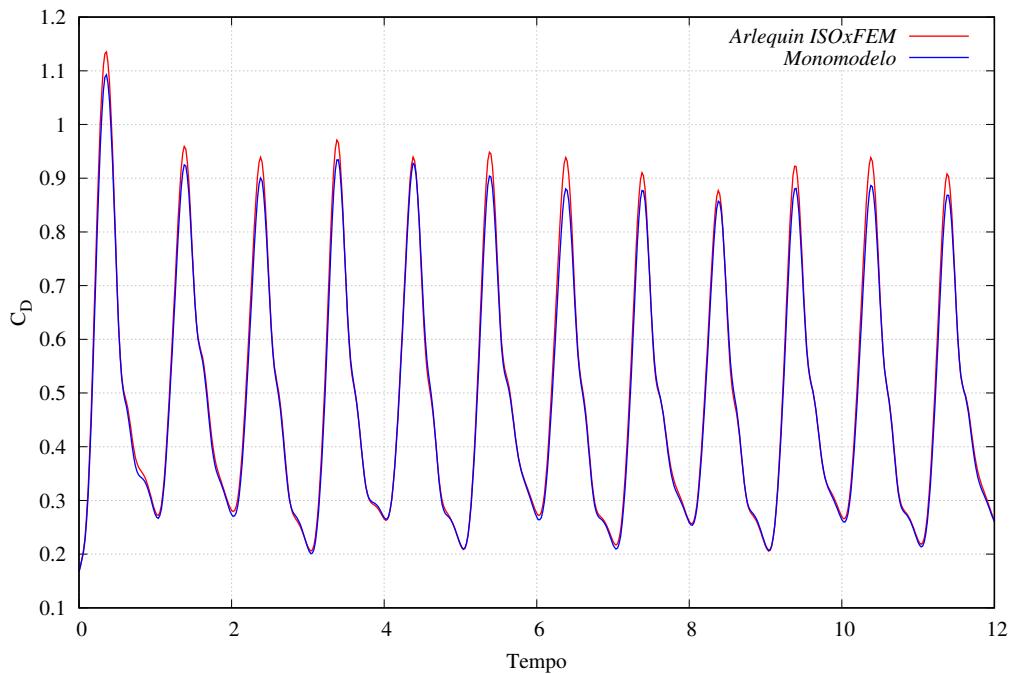


Figura 4.12 – Aerofólio Mov.: Coeficiente de Arrasto

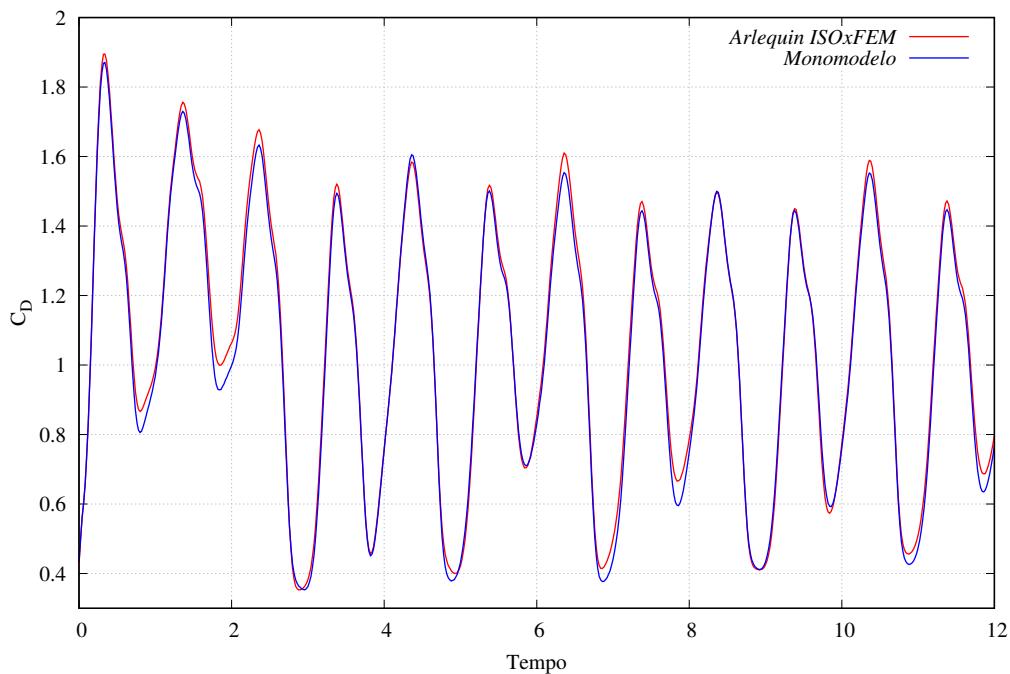


Figura 4.13 – Aerofólio Mov.: Coeficiente de Sustentação

em alguns instantes para um ciclo do movimento oscilatório preescrito.

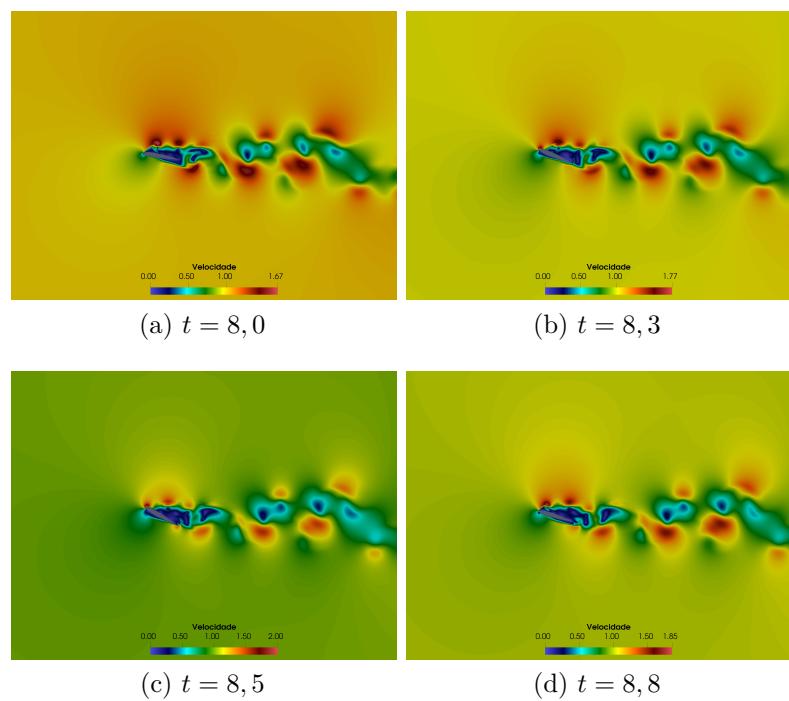


Figura 4.14 – Aerofólio Mov.: Campos de velocidade

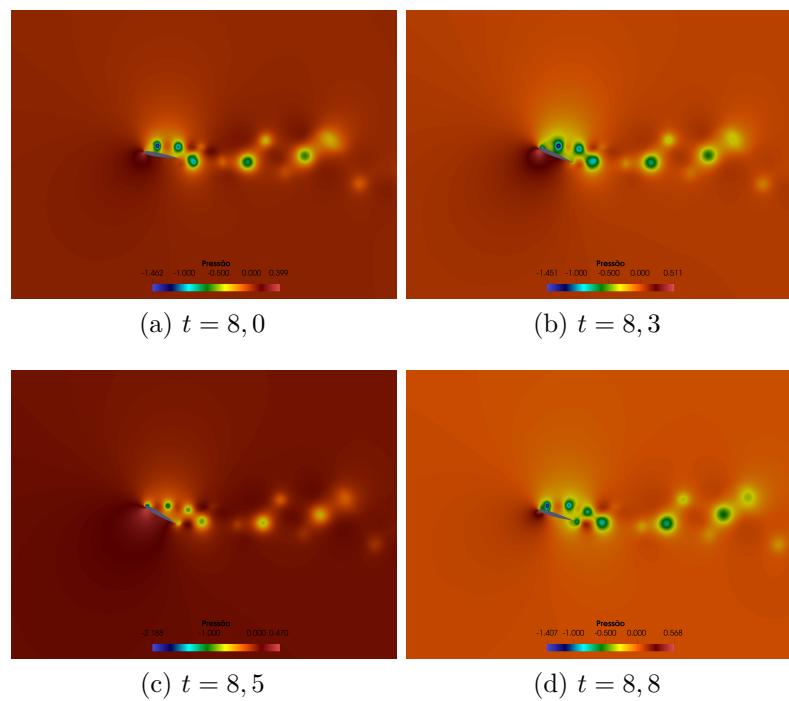


Figura 4.15 – Aerofólio Mov.: Campos de pressão






---

# INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

---



---

Ao longo deste trabalho, conforme apresentado nos capítulos anteriores, foi desenvolvido um código computacional para análise de fluidos incompressíveis que permite a decomposição do domínio para capturar efeitos localizados por meio da técnica Arlequin estabilizada. Além disso, para esta pesquisa, foi disponibilizado pelo pesquisador Rosicley Júnior Rodrigues Rosa um código computacional para a análise não-linear de estruturas pelo método dos elementos finitos posicional, o qual foi desenvolvido durante seu trabalho de mestrado (ROSA, 2021). Com base nesses desenvolvimentos, optou-se por um esquema de acoplamento particionado forte entre fluido e estrutura. Essa abordagem foi escolhida por proporcionar um total desacoplamento entre os *solvers* de fluido e de estrutura, o que facilita a solução dos problemas que aqui serão propostos.

Nesse contexto, para o acoplamento, utiliza-se a técnica de malhas adaptadas para a malha local do fluido em contato com a estrutura, aplicando-se uma descrição ALE. Vale ressaltar que, embora a malha local possa se mover, a malha global permanece fixa com descrição Euleriana, fazendo com que o método de acoplamento possa ser classificado como uma técnica híbrida.

No texto a seguir descrevem-se as condições de acoplamento necessárias a solução de um problema IFE, a técnica de movimentação de malha utilizada nesse estudo, e a metodologia de transferência de condições de contorno (Dirichlet-Neumann) em uma interface de fluido e sólido com malha não coincidente. Discorre-se na continuação sobre os detalhes a cerca do esquema de acoplamento particionado forte adotado. Por fim, o algoritmo de implementação computacional será apresentado, e exemplos de validação serão exibidos na sequência.

## 5.1 Condições de acoplamento

O domínio computacional para a análise de problemas de interação fluido-estrutura (Fig. 5.1), denominado de  $\Omega_{IFE}$ , é composto pela união entre os domínios da estrutura  $\Omega_E$  e do fluido  $\Omega_F$ , ou seja,  $\Omega_{IFE} = \Omega_F \cup \Omega_E$ , com  $\Gamma_{IFE}$  representando o contorno que define a interface fluido-estrutura.

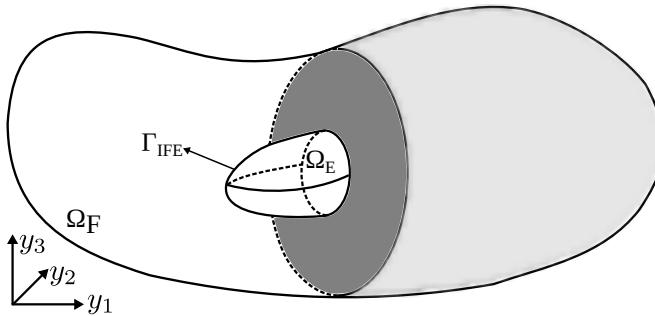


Figura 5.1 – Domínios Computacional para análise de problemas de IFE.

O domínio computacional não se sobrepõe, por isso, é necessário que em  $\Gamma_{IFE}$  existam condições físicas adicionais para se realizar o acoplamento. Richter (2017) cita que o acoplamento é realizado através de 3 diferentes princípios no contorno  $\Gamma_{IFE}$  : condição cinemática, condição dinâmica e condição geométrica.

A condição cinemática refere-se ao fato de que a velocidade do fluido e do sólido na interface devem ser iguais. A condição dinâmica, refere-se à existência de continuidade do vetor tensão de Cauchy na direção normal ao contorno  $\Gamma_{IFE}$ .

Em esquemas de acoplamento monolítico, as condições cinemática e dinâmica são atendidas de maneira implícita, visto que os meios são tratados no mesmo contexto matemático. Para esquemas particionadas, como o desse estudo, essas condições são atendidas através da transferência de condições de contorno apropriadas entre os meios.

Para a condição cinemática têm-se:

$$\mathbf{u} = \dot{\mathbf{y}} \text{ no contorno } \Gamma_{IFE}, \quad (5.1)$$

atendida através da aplicação dos valores de  $\dot{\mathbf{y}}$  nos nós (ou pontos de controle) que compõe a malha do fluido na interface entre os meios.

A condição dinâmica, preescreve o balanço da tensão normal no contorno, ao que diz respeito à ação e reação, conforme a equação abaixo:

$$\boldsymbol{\sigma}_E \mathbf{n}_E + \boldsymbol{\sigma}_F \mathbf{n}_F = \mathbf{0} \text{ no contorno } \Gamma_{IFE}, \quad (5.2)$$

na qual,  $\boldsymbol{\sigma}_E$  representa as tensões de Cauchy da estrutura,  $\boldsymbol{\sigma}_F$  as tensões de Cauchy no fluido, e  $\mathbf{n}_E$  e  $\mathbf{n}_F$  representam o vetor normal no contorno  $\Gamma_{IFE}$  apontando para o fluido e para a estrutura respectivamente. Essa condição é atendida através da aplicação de  $\boldsymbol{\sigma}_F \mathbf{n}_F$

aos nós da malha da estrutura na interface entre os meios.

Já a condição geométrica está relacionada ao fato que os domínios computacionais  $\Omega_E$  da estrutura e  $\Omega_F$  do fluido devem sempre coincidir em  $\Gamma_{IFE}$ , ou seja, não devem existir superposições ou frestas nessa interface. No contexto desse estudo essa condição é atendida através de uma movimentação adequada da malha local (Método Arlequin), que se deforma para acomodar a mudança de configuração da estrutura. A técnica de movimentação de malha adotada será apresentada na Subseção 5.1.1.

### 5.1.1 Movimentação da Malha

Para a satisfação da condição geométrica nos problemas de IFE desse trabalho, uma técnica adequada de movimentação de malha deve ser aplicada. É necessário que o método de movimentação de malha seja robusto o suficiente para que garanta ao longo de toda a análise dos problemas uma discretização de qualidade.

Dentre as técnicas desenvolvidas até o momento, destacam-se aquelas que impõem os deslocamentos da estrutura na malha do fluido ao longo do contorno  $\Gamma_{IFE}$ , determinando o campo de deslocamentos na malha do fluido por meio da resolução de um problema de valor de contorno (PVC). Neste trabalho, será adotada essa abordagem, formulando o problema com base na equivalência entre a movimentação da malha à um problema de mecânica dos sólidos, e aplicando-se a técnica de movimentação de malhas introduzida em Tezduyar et al. (1992f) e Tezduyar et al. (1993) conhecida como MJBS (*Mesh-Jacobian Based Stiffening*).

Nesse método, o movimento da malha é determinado usando um problema da elasticidade de Dirichlet fictício, descrito como:

$$\int_{\Omega_{\tilde{t}}} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_M^h) : \boldsymbol{\sigma}_M (\bar{\mathbf{z}}^h - \bar{\mathbf{z}}_{\tilde{t}}^h) d\Omega = 0, \quad (5.3)$$

na qual  $\mathbf{w}_M^h$  é a função peso;  $\bar{\mathbf{z}}^h$  é o deslocamento medido da configuração de referência, com coordenadas  $\bar{\mathbf{x}}^h$ , até a configuração atual  $\mathbf{y}^h$  ( $\mathbf{y}^h = \bar{\mathbf{x}}^h + \bar{\mathbf{z}}^h$ ); e  $\bar{\mathbf{z}}_{\tilde{t}}^h$  representa o deslocamento da configuração de referência até a malha no tempo  $\tilde{t}$ , ou  $\mathbf{y}_{\tilde{t}}^h$  ( $\mathbf{y}_{\tilde{t}}^h = \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{z}}_{\tilde{t}}^h$ );  $\boldsymbol{\sigma}_M$  representa o tensor de Cauchy aplicado aos deslocamentos da malha.

A escolha para  $\tilde{t}$  é geralmente  $\tilde{t} = t_n$  quando se calcula a configuração da malha no tempo  $t_{n+1}$  (ver Tonon et al. (2021) para maiores detalhes).

O tensor de tensões é calculado através da seguinte relação:

$$\boldsymbol{\sigma}_M(\mathbf{z}) = \frac{E_M}{1 + \nu_M} \left( \frac{\nu_M}{(1 - 2\nu_M)} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{z})) \mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{z}) \right) \quad (5.4)$$

com  $E_M$  e  $\nu_M$  o módulo de Elasticidade e o coeficiente de Poisson fictícios da malha respectivamente. Os valores usados por definição nesse trabalho são  $E_M = 1,0$  e  $\nu_M = 0,3$ .

Nos problemas de IFE, demanda-se maior controle da resolução da malha próxima a interface dos meios fluidos e sólidos, para representar os efeitos de camada limite, e como

consequência, a obtenção de soluções mais acuradas nessas regiões críticas. Para fazer com que na deformação da malha se leve em conta o tamanho dos elementos, enrijecendo os menores mais do que os maiores, no método MJBS a equação da elasticidade fica descrita ao final como:

$$\int_{\Omega_t} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_M^h) : \boldsymbol{\sigma}_M (\bar{\mathbf{z}}^h - \bar{\mathbf{z}}_t^h) \left( \frac{J_M}{(J_M)_0} \right)^{-\chi_M} d\Omega = 0, \quad (5.5)$$

onde  $J_M$  é o Jacobiano da malha,  $(J_M)_0$  é um parâmetro livre e  $\chi_M$  determina a ordem pela qual os elementos menores serão enrijecidos mais do que os maiores.  $\chi_M$  é adotado correntemente como 1,0. E o Jacobiano da malha calculado da forma que se segue:

$$J_M = \det \left( \frac{\partial \mathbf{y}_t^h}{\partial \xi} \right). \quad (5.6)$$

## 5.2 Discretizações não coincidentes entre os meios

Na maioria dos casos a discretização das malhas do fluido e da estrutura são não-coincidentes no contorno  $\Gamma_{IFE}$  e podem inclusive ter aproximações matemáticas distintas. Dessa forma, uma metodologia que possibilita a aplicação de condições de contorno em caso de discretizações com nós não coincidentes, é imprescindível.

O procedimento adotado nesse trabalho pode ser entendido a partir da Fig. 5.2. Durante o pré-processamento do código computacional, cada nó do contorno da estrutura  $\mathbf{y}_E$  é projetado sobre o contorno do fluido, e busca-se a coordenada paramétrica relativa a este ponto definida como  $\xi_F(\mathbf{y}_E)$ . Da mesma forma, cada nó do contorno do fluido  $\mathbf{y}_F$  é projetado sobre o contorno da estrutura, e encontra-se uma coordenada paramétrica equivalente  $\xi_E(\mathbf{y}_F)$ .

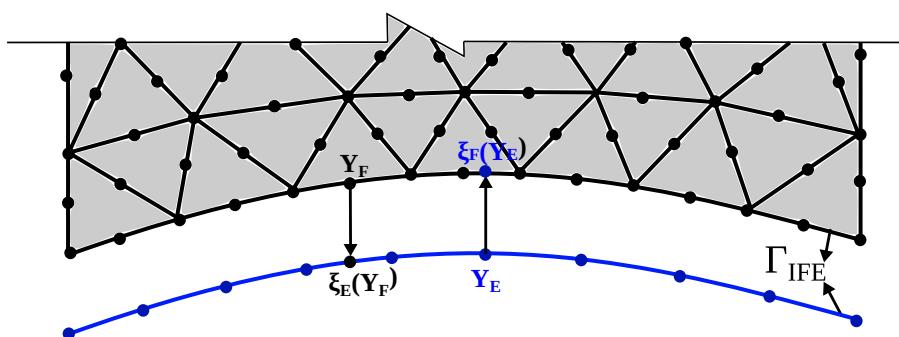


Figura 5.2 – Discretizações não-coincidentes no contorno IFE

Dessa forma, as informações que serão transmitidas ao fluido pela estrutura são interpoladas na malha da estrutura em cada uma das coordenadas paramétricas que

possuem um nó equivalente na malha de fluido, e após isso aplicadas a este nó. O equivalente ocorre quando os dados são provenientes do fluido e serão transmitidos a estrutura.

## 5.3 Acoplamento Particionado Forte - Bloco-Iterativo

Os problemas de IFE são caracterizados pela interdependência entre o fluido e a estrutura, visto que o comportamento do escoamento depende do formato e do movimento da estrutura, enquanto que o movimento da estrutura e sua deformação dependem das forças do fluido que atuam sobre ela. Matematicamente pode-se dizer que os problemas de IFE são conjuntos de equações e condições de contorno associadas ao fluido e a estrutura que devem ser satisfeitas simultaneamente.

As equações completas discretizadas da formulação IFE conduzem a um sistema de equações não-lineares que devem ser resolvidas a cada passo de tempo e podem ser representadas da seguinte maneira (BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013):

$$\mathbf{N}_1(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) = \mathbf{0}, \quad (5.7)$$

$$\mathbf{N}_2(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) = \mathbf{0}, \quad (5.8)$$

$$\mathbf{N}_3(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) = \mathbf{0}, \quad (5.9)$$

em que  $\mathbf{N}_1$ ,  $\mathbf{N}_2$  e  $\mathbf{N}_3$  representam as equações que descrevem o fluido, a estrutura e a malha respectivamente, e,  $\mathbf{d}_1$ ,  $\mathbf{d}_2$ ,  $\mathbf{d}_3$  são vetores com as variáveis nodais de cada meio. A resolução dessas equações através do método de Newton-Raphson conduz ao seguinte sistema linear de equações:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_3 \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

sendo  $\mathbf{c}_1 = -\mathbf{N}_1$ ,  $\mathbf{c}_2 = -\mathbf{N}_2$ ,  $\mathbf{c}_3 = -\mathbf{N}_3$ .  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  e  $\mathbf{x}_3$  são os incrementos às soluções  $\mathbf{d}_1$ ,  $\mathbf{d}_2$  e  $\mathbf{d}_3$  respectivamente e  $\mathbf{A}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial \mathbf{d}_j}$ .

Bazilevs, Takizawa e Tezduyar (2013) apresentam uma classificação da metodologia de acoplamento segundo a forma de resolver essas equações não-lineares. As categorias definidas pelos autores são: técnica direta, técnica bloco-iterativa e técnica quase-direta.

A técnica direta seria equivalente aos esquemas de solução monolíticos citados ao longo do texto, e consiste na resolução a cada iteração de Newton-Raphson do sistema apresentado na Eq. 5.10. Essa técnica apresenta boa convergência, entretanto, devido aos grandes sistemas lineares gerados, ocorre um aumento do custo computacional.

Nesse contexto, e buscando proporcionar um total desacoplamento entre os *solvers*

de fluido e de estrutura, adotou-se o um esquema de acoplamento do tipo particionado forte. Dentro da classificação dos autores Bazilevs, Takizawa e Tezduyar (2013) seria equivalente a técnica de acoplamento do tipo bloco iterativo.

Quando se utiliza um acoplamento do tipo bloco iterativo, os sistemas do fluido, da estrutura e da malha são tratados em blocos separados, e para cada iteração dentro de um passo de tempo, se resolve sequencialmente o seguinte conjunto de equações:

$$\frac{\partial \mathbf{N}_1}{\partial \mathbf{d}_1} \Big|_{(\mathbf{d}_1^i, \mathbf{d}_2^i, \mathbf{d}_3^i)} \Delta \mathbf{d}_1^i = -\mathbf{N}_1(\mathbf{d}_1^i, \mathbf{d}_2^i, \mathbf{d}_3^i) \quad (5.11)$$

$$\mathbf{d}_1^{i+1} = \mathbf{d}_1^i + \Delta \mathbf{d}_1^i \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{N}_2}{\partial \mathbf{d}_2} \Big|_{(\mathbf{d}_1^{i+1}, \mathbf{d}_2^i, \mathbf{d}_3^i)} \Delta \mathbf{d}_2^i = -\mathbf{N}_2(\mathbf{d}_1^{i+1}, \mathbf{d}_2^i, \mathbf{d}_3^i) \quad (5.13)$$

$$\mathbf{d}_2^{i+1} = \mathbf{d}_2^i + \Delta \mathbf{d}_2^i \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial \mathbf{N}_3}{\partial \mathbf{d}_3} \Big|_{(\mathbf{d}_1^{i+1}, \mathbf{d}_2^{i+1}, \mathbf{d}_3^i)} \Delta \mathbf{d}_3^i = -\mathbf{N}_3(\mathbf{d}_1^{i+1}, \mathbf{d}_2^{i+1}, \mathbf{d}_3^i) \quad (5.15)$$

$$\mathbf{d}_3^{i+1} = \mathbf{d}_3^i + \Delta \mathbf{d}_3^i \quad (5.16)$$

Nota-se que o ocorre é apenas uma modificação da matriz tangente com relação ao método direto. Este fato, faz com que a resposta não seja alterada, entretanto, a convergência do problema pode ser afetada.

Em certos problemas envolvendo estruturas leves, a resposta estrutural pode tornar-se extremamente sensível a pequenas variações nas forças provenientes do fluido. Esse fenômeno pode levar à divergência da técnica de bloco iterativo. Para contornar essa dificuldade, adotou-se a estratégia proposta por Tezduyar (2003), chamada de *Augmented A22* na qual a matriz de massa em  $\mathbf{A}_{22}$  é aumentada por um fator dependente do tipo de problema em análise. Essa modificação ocorre sem alterar  $\mathbf{c}_1$ ,  $\mathbf{c}_2$  e  $\mathbf{c}_3$ , ou seja, sem modificar as equações não lineares. Dessa forma, quando a solução pelo método de bloco iterativo converge, a massa estrutural real do problema permanece inalterada.

### 5.3.1 Implementação Computacional

O Algoritmo que descreve a implementação computacional do problema de IFE de acordo com a técnica de acoplamento forte do tipo bloco-iterativo é apresentada no Alg. 3.

No algoritmo apresentado  $\mathbf{t}^E$  representa as forças de superfície no contorno  $\Gamma_{IFE}$  aplicadas à estrutura, e as medidas de convergência  $\epsilon_F$ ,  $\epsilon_E$  e  $\epsilon_M$  são normas vetoriais  $L_2$  aplicadas sobre o resíduo das respectivas equações diferenciais.

**Algoritmo 3** Algoritmo para solução de problemas IFE

---

```

1: Busca por coordenadas paramétricas correspondentes aos nós da malha do fluido na
   malha da estrutura;
2: Busca por coordenadas paramétricas correspondentes aos nós da malha da estrutura
   na malha do fluido;
3: para o passo de tempo  $t = 0$  até  $t = T$  faca
4:   Atualiza as variáveis do fluido, estrutura e malha no passo de tempo  $t = t - 1$ ;
5:   para número de iterações de Newton Raphson  $it = 0$  até  $it = N_{it}$  faca
6:     Fluido
7:       Realiza os passos das linhas 1., 2., 3. e 4. do Algoritmo 2;
8:       Resolve o problema do fluido (Eq. (5.11));
9:       Atualiza as variáveis do fluido na iteração  $it$  através da eq. 5.12;
10:      Calcula medida de convergência  $\epsilon_F$ ;
11:      Atualiza as forças de superfície no contorno  $\Gamma_{IFE}$  ( $\mathbf{t}^E = -\boldsymbol{\sigma}_F \cdot \mathbf{n}_F$ ) ;
12:      Estrutura
13:      Resolve o problema da estrutura (Eq. (5.13));
14:      Atualiza as variáveis da estrutura na iteração  $it$  através da eq. (5.14);
15:      Calcula medida de convergência  $\epsilon_E$ ;
16:      Atualiza velocidade e acelerações no fluido no contorno  $\Gamma_{IFE}$ ;
17:      Atualiza posição da interface da malha no contorno  $\Gamma_{IFE}$ ;
18:      Malha
19:      Resolve o problema de malha Eq. (5.15);
20:      Atualiza as variáveis da malha na iteração  $it$  através da eq. (5.16);
21:      Calcula medida de convergência  $\epsilon_M$ ;
22:      se  $\epsilon_F, \epsilon_E$  e  $\epsilon_M < tol$  então
23:        Sair do loop;
24:      fim se
25:    fim para
26:  fim para

```

---

## 5.4 Exemplos

Para a validação da metodologia de análise de problemas de IFE, apresentada nesse capítulo, alguns exemplos serão estudados e analisados.

Os dois primeiros exemplos dizem respeito a uma cavidade com um fundo flexível composto por uma chapa, com velocidade oscilatória aplicada em seu topo. Esses exemplos são uma extensão do típico problema da DFC de uma cavidade quadrada (apresentado, por exemplo, na Seção 2.6.2) e serão apresentados em uma versão bidimensional e tridimensional.

O seguinte exemplo consiste em um painel flexível engastado a um bloco prismático rígido. Esse problema é comumente utilizado na validação de códigos de Interação Fluido-Estrutura (IFE), pois envolve fenômenos complexos. À medida que ocorre o desprendimento de vórtices devido ao escoamento ao redor do prisma, perturbações são geradas no fluxo, excitando a estrutura, que então sofre grandes deslocamentos.

### 5.4.1 Cavidade com fundo flexível - 2D

O problema da cavidade com fundo flexível trata-se de uma extensão do típico problema da DFC de uma cavidade quadrada com velocidade prescrita em sua parede superior. Sua simulação computacional já foi realizada por diversos autores, como por exemplo, Gerbeau e Vidrascu (2003) e Yokomizo (2024), e por isso, será utilizada no processo de validação da metodologia nesta tese apresentada.

A cavidade com fundo flexível (geometria apresentada na Fig. 5.3) consiste em uma cavidade composta por paredes laterais rígidas e um fundo flexível composto por uma placa fina de 0,002. No seu topo uma velocidade oscilatória horizontal  $u_1(t) = 1 - \cos(0,4\pi t)$  é aplicada, sendo as demais velocidades ( $u_2$  e  $u_3$ ) nessa parede nulas. Condições de contorno de não deslizamento são aplicadas as paredes laterais. Esse modelo de cavidade apresenta duas aberturas de 0,1 no topo de suas laterais com condições homogêneas de Neumann. Como o problema apresenta comportamento bidimensional o mesmo será analisado utilizando-se uma discretização 3D com uma espessura de 0,1 de profundidade. Adotou-se condição de simetria para o fluido na direção  $y_3$ . Na Fig. 5.3 são apresentadas também as propriedades físicas do fluido e da estrutura necessárias a análise.

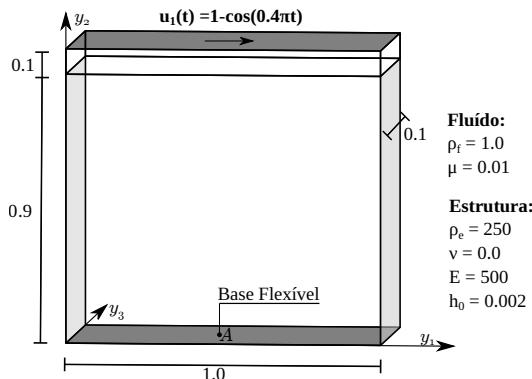


Figura 5.3 – Cavidade fundo flexível 2D: geometria

A placa fina possui condições de deslocamentos nulos em suas laterais esquerda e direita, e, na direção perpendicular ao plano da cavidade o vetor generalizado e os deslocamentos, nesta direção, são prescritos como zero em  $y_3 = 0,0$  e  $y_3 = 0,1$ .

No que diz respeito a integração temporal utilizou-se  $\Delta t = 0,1$ , e  $\rho_\infty = 0,0$ . A escolha por uma integração temporal com máxima dissipação se deu por conta do trabalho de Förster, Wall e Ramm (2007) que reporta que a regra trapezoidal de integração leva a resultados instáveis para esse problema.

Foram utilizadas nas análises três diferentes discretizações para o modelo Arlequin, sendo as malhas globais em elementos isogeométricos quadráticos (IGA) e as malhas locais, mais refinadas, em elementos finitos (MEF) tetraédricos quadráticos. Além disso, os resultados foram comparados com uma discretização somente em elementos finitos

tetraédricos quadráticos, chamada de monomodelo. A quantidade de nós, ou pontos de controle (PC), e de elementos para cada uma dessas discretizações é apresentada na Tab. 5.1, assim como detalhes da discretização da placa, na qual foram utilizados elementos triangulares quadráticos. Na tabela ML e MG são abreviações para malha local e malha global respectivamente.

Tabela 5.1 – Discretizações

	Nós/PC ML	Elementos ML	Nós/PC MG	Elementos MG
Arlequin - Malha 0	777	370	504	100
Arlequin - Malha 1	1625	778	1584	400
Arlequin - Malha 2	6156	3040	5544	1600
Monomodelo	-	-	11789	5750
Estrutura - Malha 0	-	-	103	40
Estrutura - Malha 1	-	-	203	80
Estrutura - Malha 2	-	-	883	400

A malha isogeométrica utilizada foi composta por 2 *patches* (observar Fig. 5.4). Essa discretização usando 2 *patches* foi necessária para gerar pontos de controle interpolatórios posicionados na linha que separa as paredes laterais das aberturas, possibilitando a adequada aplicação das condições de contorno. Na Fig. 5.4 pode ser observada também a composição do modelo Arlequin. A região em vermelho da malha local corresponde aos elementos que fazem parte da zona de colagem. A espessura da zona de colagem foi definida como 0,1. A constante do operador de acoplamento  $L^2$  foi especificada como  $k_0 = 10$ . A quantidade de elementos na zona de colagem para malha 0, 1 e 2 foram respectivamente de 185, 390, 1569, e de nós 400, 915 e 3372.

Nesse problema foi necessário para atingir a convergência a utilização da técnica *Augmented A22*, multiplicando-se a parcela da matriz tangente referente à matriz de massa da estrutura por um fator 2,0.

Na Fig. 5.5 são apresentados os deslocamentos da placa no ponto A (ver Fig. 5.3) para os modelos Arlequin (malha 0, malha 1 e malha 2). Para a comparação com as referências e com o monomodelo, utilizou-se o modelo Arlequin composto pela malha 2, mais refinada, e os resultados são apresentados na Fig. 5.6. Pode-se observar nessa última figura, que os dados obtidos com o modelo Arlequin são compatíveis com os obtidos com o monomodelo. As diferenças encontradas entre a amplitude dos deslocamentos obtidos nesse trabalho com as referências podem ser atribuídas para as diferentes formulações adotadas para a modelagem do fluido e da chapa.

Na Fig. 5.7 são apresentados os campos de velocidade em diferentes tempos da análise. Na Fig. 5.8 são apresentados os campos de pressão nesses mesmos tempos de análise,

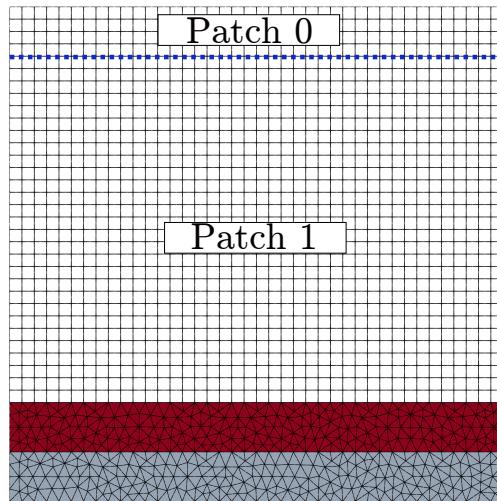


Figura 5.4 – Cavidade fundo flexível 2D: Vista frontal da discretização para modelo Arlequin - malha 2

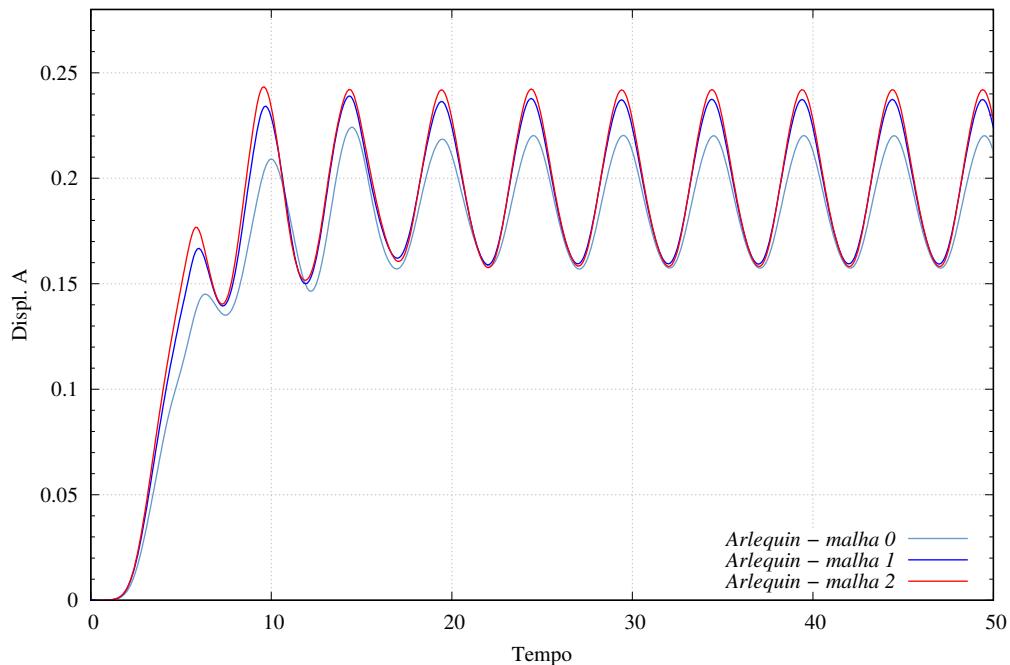


Figura 5.5 – Cavidade fundo flexível 2D: Deslocamento em A para malhas do modelo Arlequin

sendo plotadas nessas figuras a deformada da malha local que comporta a movimentação da estrutura.

#### 5.4.2 *Cavidade com fundo flexível - 3D*

O problema da cavidade tridimensional com fundo flexível foi proposto inicialmente por Mok (2001) e é muito semelhante ao 2D, entretanto, nessa variação a profundidade

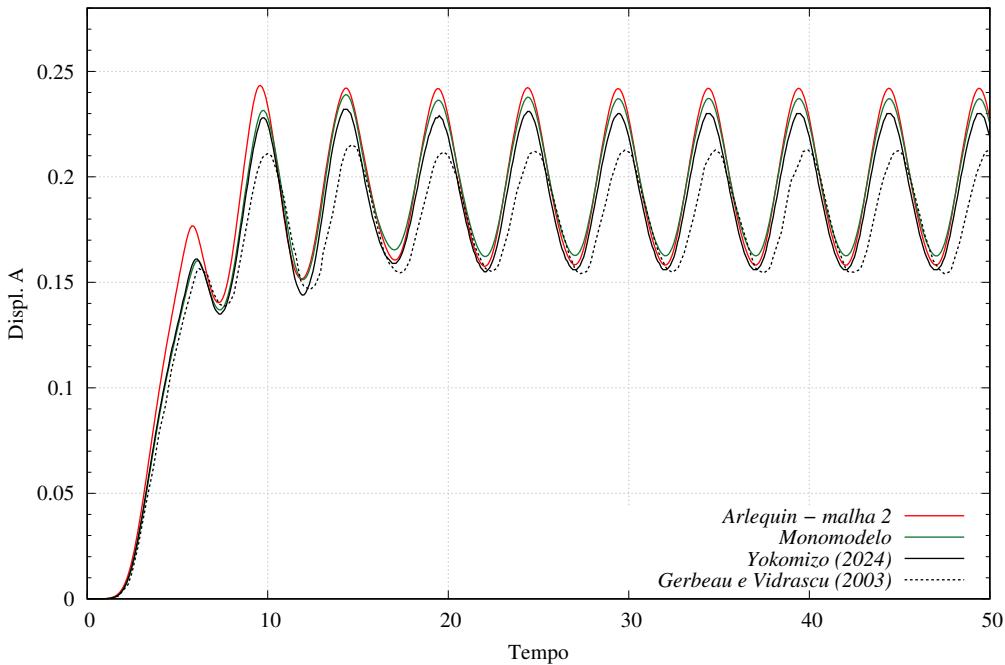


Figura 5.6 – Cavidade fundo flexível 2D: Deslocamento em A comparado com as referências e monomodelo

da cavidade possui dimensão unitária, conforme pode ser visualizado na Fig. 5.9, além disso, a chapa possui restrição de deslocamentos em todos os 4 bordos. Os demais dados necessários à análise são idênticos ao do problema 2D.

Foram utilizadas nas análises desse problema duas diferentes discretizações: 1. Modelo Arlequin (ver Fig. 5.10a), sendo a malha global em elementos isogeométricos quadráticos (IGA) e a malha local, mais refinada, em elementos finitos (MEF) tetraédricos quadráticos; 2 . Monomodelo discretizado com elementos finitos tetraédricos quadráticos. Para ambos modelos utilizou-se uma placa discretizada com elementos finitos triangulares quadráticos (Fig. 5.10b).

O modelo Arlequin é composto por uma malha global discretizada com 2 *patches* que totalizam 8000 elementos e 11616 pontos de controle. A malha local possui 9090 elementos e 14997 nós. A zona de colagem (ver área vermelha da Fig. 5.10a) é composta por 4523 elementos e 8566 nós. Ressalta-se que na Fig. 5.10a as malhas global e local são apresentadas separadamente para melhorar a visualização, entretanto, a malha local é superposta à malha global na região inferior da cavidade. O monomodelo foi discretizado com 15899 elementos e 25127 nós. A malha da placa é constituída por 1969 nós e 944 elementos.

Na Fig. 5.11 (PROVAVELMENTE SERÁ TROCADA ESSA) pode se observar o deslocamento no ponto A que fica no centro da placa flexível para os modelos Arlequin e monomodelo, assim como dos trabalhos de Mok (2001) e Vázquez (2007). As diferenças encontradas entre a amplitude dos deslocamentos obtidos nesse trabalho com as referências

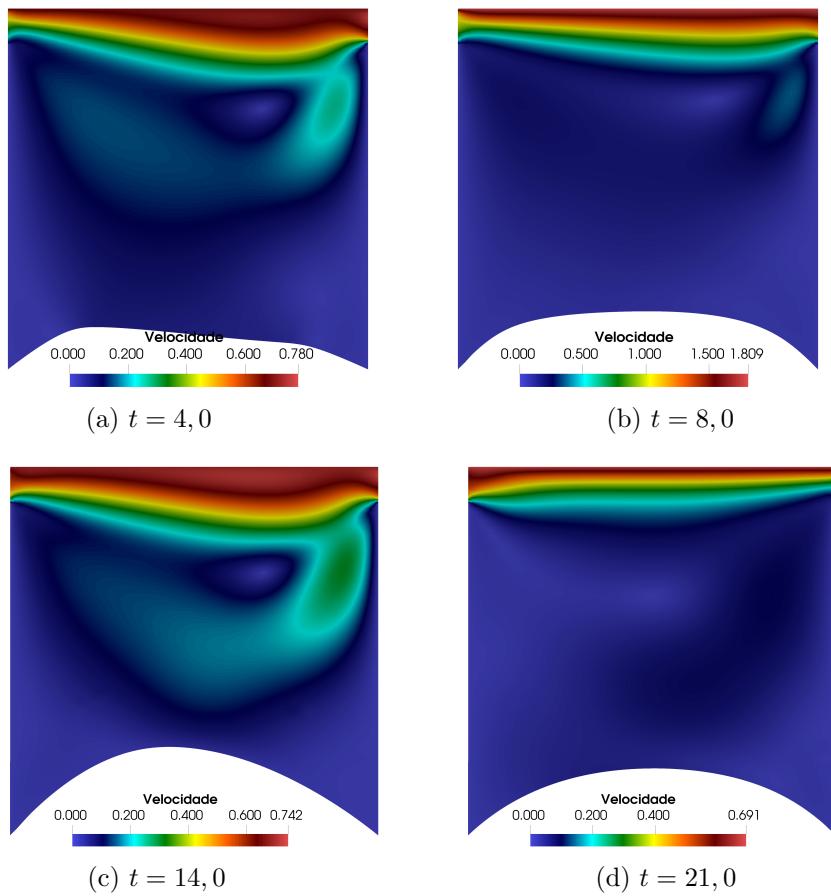


Figura 5.7 – Cavidade fundo flexível 2D: Campos de velocidade

podem ser atribuídas para as diferentes formulações adotadas para a modelagem do fluido e da chapa.

**rever aqui** Rodar denovo o monomodelo 3d ALTERAR FIGURA ANTERIOR ADICIONAR AQUI imagens da velocidade e pressão. ADICIONAR AQUI imagens do campo de deslocamentos na placa.

#### **5.4.3 Flutter em painel flexível**

O problema dessa subseção consiste em um painel flexível engastado a um prisma rígido, conforme Fig. 5.12. Devido a complexidade dos fenômenos envolvidos nessa simulação, esse exemplo caracteriza-se por ser um dos mais utilizados na literatura para validação de formulações de IFE. Esse problema foi inicialmente proposto por Wall e Ramm (1998), e mais tarde, reformulado por Hübner, Walhorn e Dinkler (2004). Essa segunda versão apresenta a mesma geometria da original, entretanto, possui alteração na velocidade de entrada e nas propriedades elásticas da estrutura. A versão apresentada por Hübner, Walhorn e Dinkler (2004), será utilizada nesse estudo, e distingue-se por ser menos propícia a instabilidades decorrentes de acoplamento fraco. Esse problema apresenta

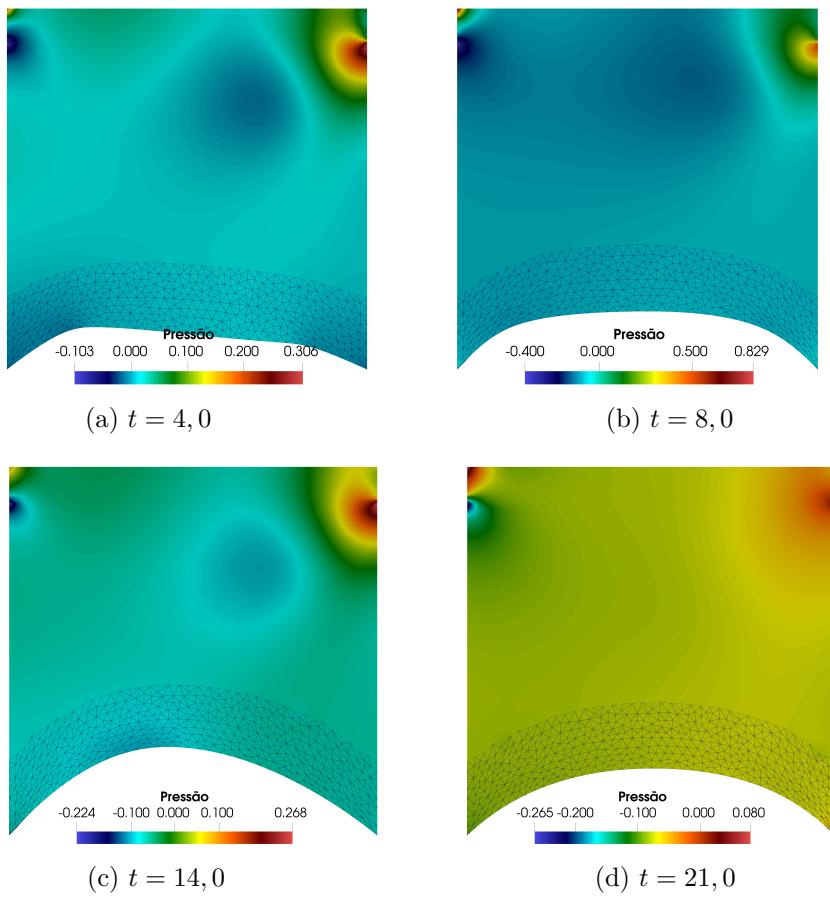


Figura 5.8 – Cavidade fundo flexível 2D: Campos de Pressão

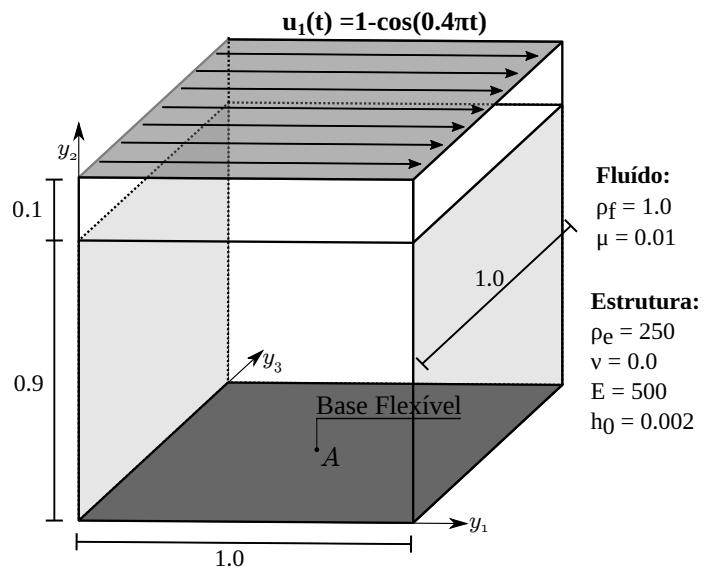
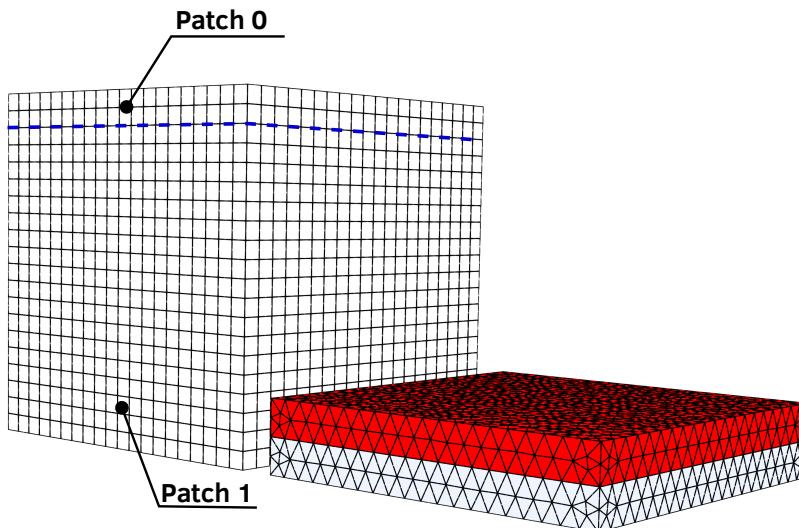
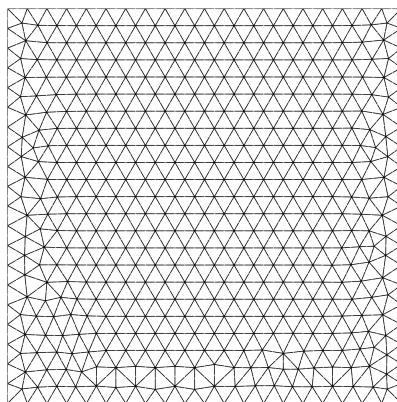


Figura 5.9 – Cavidade fundo flexível 3D: Geometria

comportamento bidimensional e aqui será simulado através de uma malha 3D utilizando-se uma profundidade de 0,1cm.



(a) Malhas do modelo Arlequin



(b) Malha da placa

Figura 5.10 – Cavidade fundo flexível 3D: Discretização

A velocidade de entrada do escoamento é definida por  $u_\infty = 31,5 \text{ cm/s}$  e o fluido possui propriedades físicas do ar:  $\mu = 1,82 \times 10^{-4} \text{ g/(cm.s)}$  e  $\rho_f = 1,18 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3$ . Tomando-se por referência o comprimento do prisma obtém-se um número de Reynolds  $Re = 204$ . A placa possui espessura de  $0,06 \text{ cm}$ ,  $\rho_e = 2,0 \text{ g/cm}^3$ , e  $E = 2,0 \times 10^5 \text{ g/(cm.s}^2)$ . Devido ao comportamento bidimensional do problema adotou-se  $\nu = 0,0$  para a placa.

Para a simulação adotou-se para o campo de velocidade inicial  $u_\infty$ . As condições de contorno para o problema são apresentadas na Fig. 5.12 (com dimensões em cm). Adicionalmente adotou-se condição de simetria para o fluido na direção  $y_3$ , e para estrutura, em  $y_3 = 0,0$  e  $y_3 = 0,1 \text{ cm}$ , definiu-se vetor generalizado e os deslocamentos, nesta direção, como nulos.

As simulações foram conduzidas utilizando um Modelo Arlequin (Fig. 5.13a), onde a malha global foi discretizada com elementos isogeométricos quadráticos, enquanto

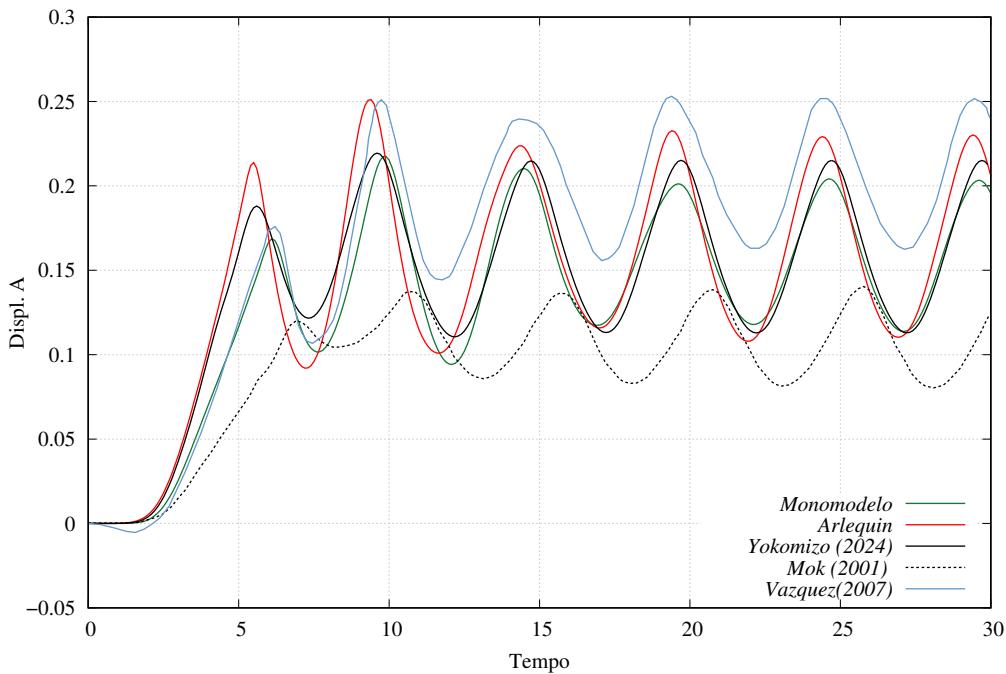


Figura 5.11 – Cavidade fundo flexível 3D: Deslocamento em A

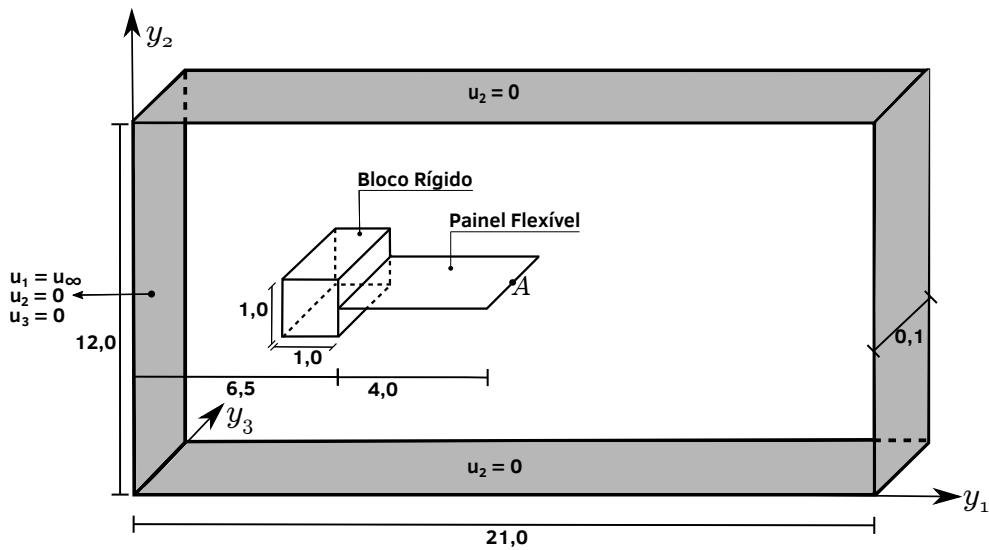


Figura 5.12 – Painel Flexível: Geometria

que para malha local foram utilizados elementos finitos tetraédricos quadráticos. Além disso, um monomodelo foi empregado nas análises, discretizado com elementos finitos tetraédricos quadráticos. Em ambos os modelos, a placa foi representada por elementos finitos triangulares quadráticos, conforme ilustrado na Fig. 5.13b.

O modelo Arlequin é composto por uma malha global discretizada com 1800 elementos e 5952 pontos de controle. A malha local possui 11061 elementos e 22407 nós. A zona de colagem, com espessura de 0,2cm, de acordo com a Fig. 5.13a é composta por 2979 elementos e 6503 nós. O monomodelo foi discretizado com 13315 elementos e 26599

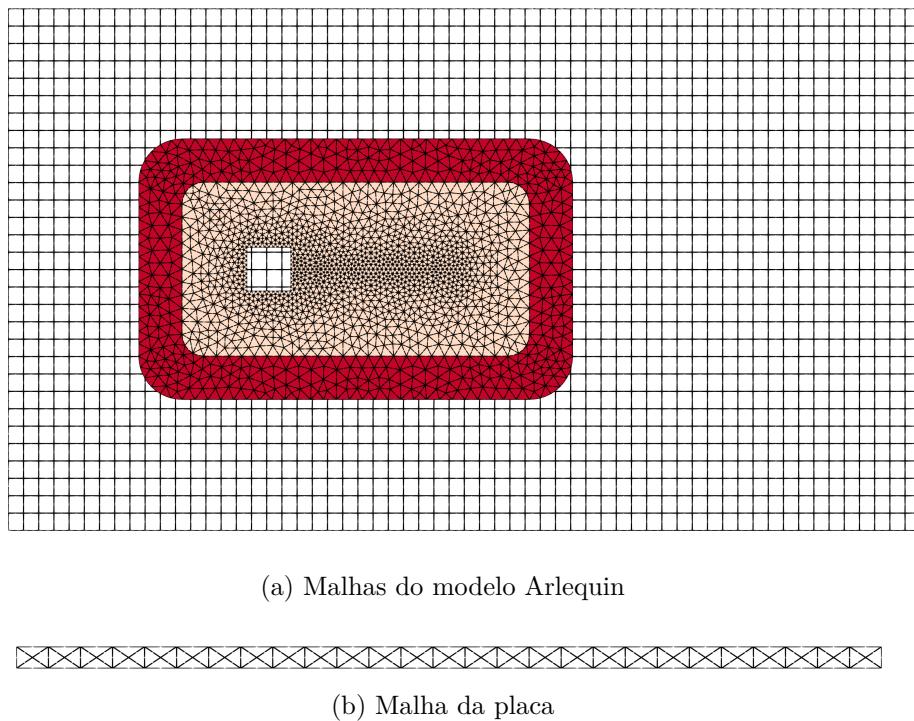


Figura 5.13 – Painel Flexível: Discretização

nós. A malha da placa é constituída por 273 nós e 108 elementos. No que diz respeito a integração temporal utilizou-se  $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$ , e  $\rho_\infty = 0,5$ .

Hübner, Walhorn e Dinkler (2004) obtém em suas simulações uma frequência de desprendimento de vórtices, considerando a placa como rígida, de  $f_f = 3,7\text{Hz}$ . De acordo com a teoria clássica da dinâmica das estruturas as três primeiras frequências naturais de vibração para essa estrutura de placa são  $f_1 = 0,61\text{Hz}$ ,  $f_2 = 3,80\text{Hz}$  e  $f_3 = 10,63\text{Hz}$ . Dessa forma, espera-se que a frequência de vibração da estrutura para o problema de IFE fique próxima a sua segunda frequência natural.

Na Fig. 5.14 pode-se observar os resultados de deslocamento vertical na ponta da placa (ponto A) obtidos nesse estudo através do modelo Arlequin e do Monomodelo. Conforme pode ser observado os resultados para o monomodelo não chegam até o tempo final estimado para análise, isto se deve em função do colapso que ocorre na malha devido aos grandes deslocamentos. A deformação da malha do monomodelo em um tempo anterior ao colapso pode ser observada na Fig. 5.15. Na Fig. 5.14 também podem ser visualizado a envoltória dos deslocamentos obtidos por Hübner, Walhorn e Dinkler (2004). Nota-se que os resultados desse trabalho vão se aproximando com os da referência a medida que o tempo de análise aumenta. A placa desloca-se de maneira crescente até certo ponto da análise, e a partir de então sua amplitude de vibração se mantém aproximadamente constante.

Hübner, Walhorn e Dinkler (2004) obteve frequência de vibração um valor de

$3,1\text{Hz}$  enquanto que nesse trabalho obteve-se o valor de ACRESCENTAR VALOR. Com relação a amplitude máxima obtiveram-se valores de  $+0,78$  e  $-0,78$ . ALTERAR.

Alterar fogira abaixo

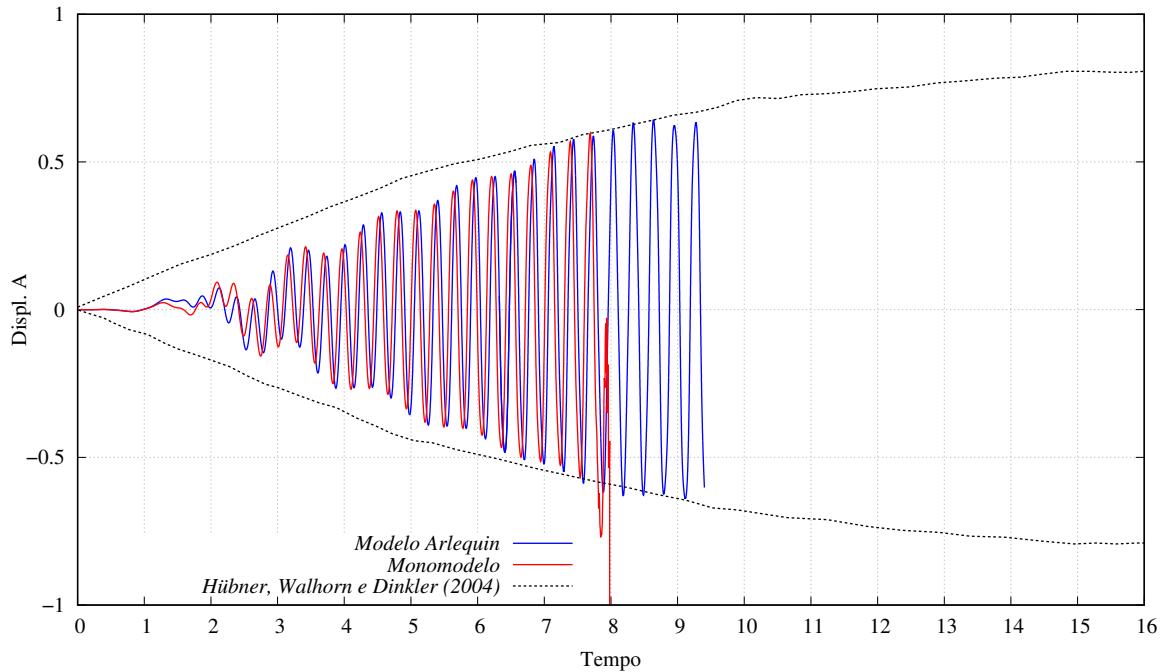


Figura 5.14 – Painel Flexível: Deslocamento em A

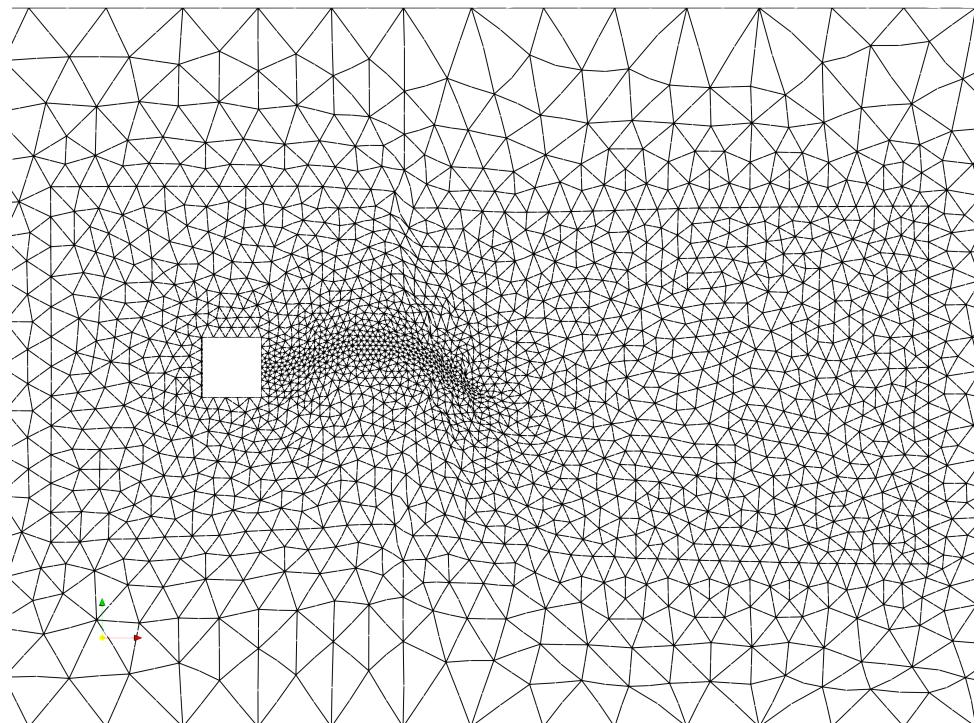


Figura 5.15 – Painel Flexível: Colapso malha monomodelo

Considerando um ciclo de movimento da estrutura  $T$  (aproximadamente periódico) apresentam-se os valores de campos de velocidade (Fig. ) e de pressão (Fig) para alguns instantes dentro do ciclo. Na Fig. apresentam-se as deformações da malha para o problema nesses mesmos instantes.

[Adicionar Figuras](#)

# REFERÊNCIAS

---



---

- AKKERMAN, I.; BAZILEVS, Y.; BENSON, D.; FARTHING, M.; KEES, C. Free-surface flow and fluid-object interaction modeling with emphasis on ship hydrodynamics. *Journal of Applied Mechanics*, v. 79, p. doi:10.1115/1.4005072, 01 2012.
- ALFONSI, G. Reynolds-averaged navier–stokes equations for turbulence modeling. *Applied Mechanics Reviews*, v. 62, n. 4, p. 040802, 06 2009. ISSN 0003-6900. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3124648>>.
- ANDERSON, J. D. *Computational fluid dynamic - the basics with applications*. 1. ed. New York, USA: McGraw-Hill Book Company, 1995.
- ARGYRIS, J. An excursion into large rotations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 32, p. 85–155, 1982.
- ARMALY, B. F.; F.DURST; PEREIRA, J. C. F.; SCHÖNUNG, B. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 127, p. 473–496, 1983.
- AVANCINI, G. *Formulação unificada para análise tridimensional de interação fluido-estrutura com escoamento de superfície livre: Uma abordagem Lagrangiana baseada em posições*. Tese (Doutorado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2023.
- AVANCINI, G.; SANCHES, R. A. A total lagrangian position-based finite element formulation for free-surface incompressible flows. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 169, p. 103348, 2020.
- BADIA, S.; NOBILE, F.; VERGARA, C. Fluid-structure partitioned procedures based on robin transmission conditions. *Journal of Computational Physics*, v. 227, p. 7027–7051, 2008.
- BATTINI, J. M.; PACOSTE, C. On the choice of the linear element for corotational triangular shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, n. 44-47, p. 6362–6377, 2006. ISSN 0045-7825.
- BAUMAN, P. T.; BEN DHIA, H.; ELKHODJA, N.; ODEN, J. T.; PRUDHOMME, S. On the application of the Arlequin method to the coupling of particle and continuum models. *Comput. Mech.*, v. 42, p. 511–530, 2008.
- BAZILEVS, Y.; AKKERMAN, I. Large eddy simulation of turbulent taylor–couette flow using isogeometric analysis and the residual-based variational multiscale method. *Journal of Computational Physics*, v. 229, n. 9, p. 3402 – 3414, 2010. ISSN 0021-9991.
- BAZILEVS, Y.; CALO, V. M.; COTTRELL, J. A.; HUGHES, T. J. R.; REALI, A.; SCOVAZZI, G. Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 197, p. 173–201, 2007.

- BAZILEVS, Y.; CALO, V. M.; HUGHES, T. J. R.; ZHANG, Y. Isogeometric fluid-structure interaction: theory, algorithms, and computations. *Computational Mechanics*, v. 43, p. 3–37, 2008.
- BAZILEVS, Y.; HSU, M.-C.; KIENDL, J.; WÜCHNER, R.; BLETZINGER, K.-U. 3d simulation of wind turbine rotors at full scale. part ii: Fluid-structure interaction modeling with composite blades. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 65, p. 236 – 253, 01 2011.
- BAZILEVS, Y.; MICHLER, C.; CALO, V.; HUGHES, T. Isogeometric variational multiscale modeling of wall-bounded turbulent flows with weakly enforced boundary conditions on unstretched meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 199, n. 13, p. 780 – 790, 2010. ISSN 0045-7825.
- BAZILEVS, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. Challenges and directions in computational fluid-structure interaction. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, v. 23, p. 215–221, 02 2013b.
- BAZILEVS, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E. *Computational Fluid-Structure Interaction: Methods and Applications*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2013.
- BAZILEVS, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E.; HSU, M.-C.; KOSTOV, N.; MCINTYRE, S. Aerodynamic and FSI analysis of wind turbines with the ALE-VMS and ST-VMS methods. *Archives of Computational Methods in Engineering*, v. 21, p. 359–398, 2014.
- BELYTSCHKO, T.; LU, Y. Y.; GU, L.; TABBARA, M. Element-free Galerkin methods for static and dynamic fracture. *International Journal of Solids and Structures*, v. 32, n. 17–18, p. 2547–2570, 1995.
- BEN DHIA, H. Multiscale mechanical problems: The Arlequin method. *Comptes Rendus Acad. Sci. Sér. IIb*, v. 326, p. 899–904, 1998.
- BEN DHIA, H. Further insights by theoretical investigations of the multiscale Arlequin method. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, v. 6, n. 3, p. 215–232, 2008.
- BEN DHIA, H.; RATEAU, G. Mathematical analysis of the mixed Arlequin method. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris Série I*, v. 332, p. 649–654, 2001.
- BENEK, J.; STEGER, J.; DOUGHERTY, F.; BUNING, P. *Chimera. A grid-embedding technique*. [S.l.], 1986.
- BISCANI, F.; GIUNTA, G.; BELOUETTAR, S.; HU, H.; CARRERA, E. Mixed-dimensional modeling by means of solid and higher-order multi-layered plate finite elements. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, v. 23, n. 9, p. 960–970, 2016.
- BLOM, F. J. A monolithical fluid-structure interaction algorithm applied to the piston problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 167, n. 3-4, p. 369–391, 1998. ISSN 0045-7825.
- BONET, J.; WOOD, R. D.; MAHANEY, J.; HEYWOOD, P. Finite element analysis of air supported membrane structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 5-7, p. 579–595, 2000. ISSN 0045-7828.

- BORDEN, M. J.; SCOTT, M. A.; EVANS, J. A.; HUGHES, T. J. R. Isogeometric finite element data structures based on b閦ier extraction of nurbs. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 87, n. 1-5, p. 15–47, 2011. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.2968>>.
- BOTTASSO, C. L.; DETOMI, D.; SERRA, R. The ball-vertex method: a new simple spring analogy method for unstructured dynamic meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 194, n. 39, p. 4244–4264, 2005.
- BREZZI, F.; FORTIN, M. Mixed and hybrid finite element methods. In: *Vol. 15 of Springer Series in Computational Mathematics*. New York: Springer, 1991.
- BROOKS, A. N.; HUGHES, T. J. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 32, n. 1-3, p. 199–259, 1982.
- CALEYRON, F.; COMBESCURE, A.; FAUCHER, V.; POTAPOV, S. SPH modeling of fluid-solid interaction for dynamic failure analysis of fluid-filled thin shells. *Journal of Fluids and Structures*, v. 39, p. 126–153, 2013.
- CARRAZEDO, R.; CODA, H. B. Alternative positional FEM applied to thermomechanical impact of truss structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 46, n. 11, p. 1008–1016, 2010.
- CATABRIGA, L.; COUTINHO, A. L. G. Implicit SUPG solution of euler equations using edge-based data structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 191, n. 32, p. 3477–3490, 2002. ISSN 0045-7825.
- CHUNG, J.; HULBERT, G. M. A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics With Improved Numerical Dissipation: The Generalized- $\alpha$  Method. *Journal of Applied Mechanics*, v. 60, n. 2, p. 371–375, 06 1993. ISSN 0021-8936.
- CHUNG, T. J. *Computational fluid dynamics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002.
- CIRAK, F.; RADOVITZKY, R. A Lagrangian-Eulerian shell-fluid coupling algorithm based on level sets. *Computers & Structures*, v. 83, p. 491–498, 2005.
- CODA, H. B. *Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: Uma formulação posicional baseada no MEF*. Tese (Tese para concurso de professor titular) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2003.
- CODA, H. B. *O Método dos Elementos Finitos posicional: Sólidos e Estruturas - Não linearidade Geométrica e Dinâmica*. 1. ed. São Carlos: EESC-USP, 2018. 284 p.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Improved finite element for 3D laminate frame analysis including warping for any cross-section. *Applied Mathematical Modelling*, v. 34, n. 4, p. 1107–1137, 2010.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A FEM procedure based on positions and unconstrained vectors applied to non-linear dynamic of 3D frames. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 47, n. 4, p. 319–333, 2011.

- COX, M. G. The numerical evaluation of b-splines\*. *IMA Journal of Applied Mathematics*, v. 10, n. 2, p. 134–149, 10 1972. ISSN 0272-4960. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/imamat/10.2.134>>.
- de Boor, C. On calculating with b-splines. *Journal of Approximation Theory*, v. 6, n. 1, p. 50–62, 1972. ISSN 0021-9045. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021904572900809>>.
- DHIA, H.; JAMOND, O. On the use of XFEM within the Arlequin framework for the simulation of crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 199, n. 21-22, p. 1403–1414, 2010.
- DHIA, H.; RATEAU, G. The Arlequin method as a flexible engineering design tool. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 62, n. 11, p. 1442–1462, 2005.
- DHIA, H.; TORKHANI, M. Modeling and computation of fretting wear of structures under sharp contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 85, p. 61–83, 2011.
- DHIA, H. B.; RATEAU, G. Application of the Arlequin method to some structures with defects. *Revue Européenne des Éléments Finis*, Taylor & Francis, v. 11, n. 2-4, p. 291–304, 2002.
- DONEA, J. A taylor-galerkin method for convective transport problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 20, p. 101–119, 1984.
- DONEA, J.; GIULIANI, S.; HALLEUX, J. P. An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 33, n. 1-3, p. 689–723, 1982.
- FARHAT, C.; HARARI, I.; FRANCA, L. P. The discontinuous enrichment method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 48, p. 6455–6479, 2001.
- FELIPPA, C. A.; PARK, K. C.; FARHAT, C. Partitioned analysis of coupled mechanical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 24-25, p. 3247–3270, 2001.
- FERNANDES, J. W. D. *Interação fluido-estrutura com escoamentos incompressíveis utilizando o método dos elementos finitos*. Dissertação (Mestrado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2016.
- FERNANDES, J. W. D. *Técnica de superposição de modelos estabilizada para análise de interação fluido-estrutura*. Tese (Doutorado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2020.
- FERNANDES, J. W. D.; BARBARULO, A.; Ben Dhia, H.; SANCHES, R. A. K. A residual-based stabilized finite element formulation for incompressible flow problems in the arlequin framework. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 370, p. 113073, 2020. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782520302577>>.

- FERNANDES, J. W. D.; CODA, H. B.; SANCHES, R. A. K. ALE incompressible fluid–shell coupling based on a higher-order auxiliary mesh and positional shell finite element. *Computational Mechanics*, v. 63, n. 3, p. 555–569, 2019.
- FERNIER, A.; FAUCHER, V.; JAMOND, O. Multi-model Arlequin approaches for fast transient, FSI-oriented, fluid dynamics with explicit time integration. *Computers and Fluids*, Elsevier, v. 199, p. 104428, mar. 2020. Disponível em: <<https://hal.science/hal-03991421>>.
- FISH, J. The s-version of the finite element method. *Computers & Structures*, v. 43, n. 3, p. 539–547, 1992.
- FÖRSTER, C.; WALL, W. A.; RAMM, E. Artificial added mass instabilities in sequential staggered coupling on nonlinear structures and incompressible viscous flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 196, p. 1278–1293, 2007.
- GERBEAU, J. F.; VIDRASCU, M. A quasi-newton algorithmm based on a reduced model for fluid-structure interaction problems in blood flows. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, v. 37, p. 631–647, 2003.
- GERMANO, M.; PIOMELLI, U.; MOIN, P.; CABOT, W. H. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, v. 3, n. 7, p. 1760–1765, 07 1991. ISSN 0899-8213. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.857955>>.
- GHIA, U.; GHIA, K. N.; SHIN, C. T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, v. 48, p. 387–441, 1982.
- GRECO, M.; CODA, H. B. A simple and precise FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 193, p. 3541–3557, 2004.
- GRUTTMANN, F.; SAUER, R.; WAGNER, W. Theory and numerics of three-dimensional beams with elastoplastic material behaviour. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 48, n. 12, p. 1675–1702, 2000.
- GUIDAULT, P.-A.; BELYTSCHKO, T. On the l2 and the h1 couplings for an overlapping domain decomposition method using lagrange multipliers. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 70, n. 3, p. 322–350, 2007. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1882>>.
- HANSBO, A.; HANSBO, P. An unfitted finite element method, based on Nitsche’s method, for elliptic interface problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 191, n. 47–48, p. 5537–5552, 2002.
- HENDERSON, R. D. Nonlinear dynamics and pattern formation in turbulent wake transition. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 352, p. 65–112, 1997. ISSN 0022-1120.
- HÖLLIG, K.; REIF, U.; WIPPER, J. Weighted extended b-spline approximation of dirichlet problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, Society for Industrial and Applied Mathematics, USA, v. 39, n. 2, p. 442–462, 2001. ISSN 0036-1429.

- HOU, G.; WANG, J.; LAYTON, A. Numerical methods for fluid-structure interaction - a review. *Commun. Comput. Phys.*, v. 12, p. 337–377, 2012.
- HRON, J.; MADLIK, M. Fluid-structure interaction with applications in biomechanics. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, v. 8, n. 5, p. 1431–1458, 2007.
- HÜBNER, B.; WALHORN, E.; DINKLER, D. A monolithic approach to fluid-structure interaction using space-time finite elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 193, p. 2087–2104, 2004.
- HUGHES, T. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. [S.l.]: Dover Publications, 2000. (Dover Civil and Mechanical Engineering). ISBN 9780486411811.
- HUGHES, T. J.; FRANCA, L. P.; BALESTRA, M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuška-Brezzi condition: a stable Petrov-Galerkin formulation of the stokes problem accommodating equal-order interpolations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 59, n. 1, p. 85 – 99, 1986.
- HUGHES, T. J.; FRANCA, L. P.; HULBERT, G. M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 73, n. 2, p. 173 – 189, 1989. ISSN 0045-7825.
- HUGHES, T. J.; LIU, W. K.; ZIMMERMAN, T. K. Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 29, p. 329–349, 1981.
- HUGHES, T. J. R. Stability, convergence and growth and decay of energy of the average acceleration method in nonlinear structural dynamics. *Computers & Structures*, v. 6, p. 313–324, 1976.
- HUGHES, T. J. R. Multiscale phenomena: Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale methods, bubbles and the origins of stabilized methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 127, p. 387–401, 1995.
- HUGHES, T. J. R.; COTTERELL, J. A.; BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement . *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 194, p. 4135–4195, 2005.
- HUGHES, T. J. R.; FEIJÓO, G. R.; MAZZEI, L.; QUINCY, J. B. The variational multiscale method - a paradigm for computational mechanics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 166, p. 3–24, 1998.
- HUGHES, T. J. R.; LIU, W. K. Nonlinear finite element analysis of shells: Part I. three-dimensional shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 26, n. 3, p. 331–362, 1981. A. ISSN 0045-7825.
- HUGHES, T. J. R.; LIU, W. K. Nonlinear finite element analysis of shells: Part II. two-dimensional shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 27, n. 2, p. 167–181, 1981. A. ISSN 0045-7825.

- HUGHES, T. J. R.; OBERAI, A. A.; MAZZEI, L. Large Eddy Simulation of turbulent channel flows by the variational multiscale method. *Physics of Fluids*, v. 13, p. 1874–1799, 2001.
- HUGHES, T. J. R.; TEZDUYAR, T. E. Finite element methods for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible Euler equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 45, p. 217–284, 1984.
- IBRAHIMBEGOVIC, A.; TAYLOR, R. L. On the role of frame-invariance in structural mechanics models at finite rotations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 191, p. 5159–5176, 2002.
- IRONS, B. M.; TUCK, R. C. A version of the Aitken accelerator for computer iteration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 1, n. 3, p. 275–277, 1969.
- JAMOND, O.; BEN DHIA, H. Incompressibility in the multimodel Arlequin framework. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, v. 94, p. 374–399, 2013.
- JANSEN, K. E.; WHITING, C. H.; HULBERT, G. M. A generalized- $\alpha$  method for integrating the filtered Navier–Stokes equations with a stabilized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 3, p. 305 – 319, 2000. ISSN 0045-7825.
- JOHNSON, A. A.; TEZDUYAR, T. E. Mesh update strategies in parallel finite element computations of flow problems with moving boundaries and interfaces. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 119, p. 73–94, 1994.
- KANCHI, H.; MASUD, A. A 3D adaptative mesh moving scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 54, p. 923–944, 2007.
- KÜTTLER, U.; WALL, W. A. Fixed-point fluid–structure interaction solvers with dynamic relaxation. *Computational mechanics*, Springer, v. 43, n. 1, p. 61–72, 2008.
- LAUNDER, B. E.; SPALDING, D. B. *Lectures in mathematical models of turbulence*. New York: Academic Press, 1972.
- LEFRANÇOIS, E. A simple mesh deformation technique for fluid-structure interaction based on a submesh approach. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, v. 75, p. 1085–1101, 2008.
- MELENK, J. M.; BABUSKA, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, n. 1, p. 289–314, 1996.
- MITTAL, R.; IACCARINO, G. Immersed boundary methods. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 37, p. 237–261, 2005.
- MITTAL, S.; TEZDUYAR, T. Massively parallel finite element computation of incompressible flows involving fluid-body interactions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 112, n. 1, p. 253 – 282, 1994. ISSN 0045-7825.
- MOËS, N.; CLOIREC, M.; CARTRAUD, P.; REMACLE, J.-F. A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 192, n. 28–30, p. 3163–3177, 2003.

- MOK, D. P. *Partitionierte Lösungsansätze in der Strukturdynamik und der Fluid-Struktur-Interaktion*. Tese (Doutorado) — Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Stuttgart, 2001.
- NAYROLES, B.; TOUZOT, G.; VILLON, P. Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, v. 10, n. 5, p. 307–318, 1992.
- OTOGURO, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E. Element length calculation in B-spline meshes for complex geometries. *Computational Mechanics*, v. 65, p. 1085–1103, 2020.
- PESKIN, C. S. Flow patterns around heart valves: A numerical method. *Journal of Computational Physics*, v. 10, n. 2, p. 252–271, 1972.
- PIEGL, L.; TILLER, W. *The NURBS Book*. second. New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1996.
- PIOMELLI, U. Large-eddy simulation: achievements and challenges. *Progress in Aerospace Sciences*, v. 35, n. 4, p. 335–362, 1999. ISSN 0376-0421. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0376042198000141>>.
- REDDY, J. N. *An Introduction to the Finite Element Method*. 3. ed. [S.l.]: McGraw Hill, 2006.
- REDDY, J. N.; GARTLING, D. K. *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*. 3. ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 2010.
- RICHTER, T. *Fluid-structure Interactions: Models, Analysis and Finite Elements*. Springer International Publishing, 2017. (Lecture Notes in Computational Science and Engineering). ISBN 9783319639703. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=hsEyDwAAQBAJ>>.
- ROSA, R. J. R. *Técnica de partição de domínio para análise numérica de sólidos bidimensionais fraturados combinando análise isogeométrica e elementos finitos*. Dissertação (Mestrado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2021.
- ROUX, F. X.; GARAUD, J. D. Domain decomposition methodology with robin interface matching conditions for solving strongly coupled fluid-structure problems. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, v. 7, p. 29–38, 2009.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. An embedded domain technique based on level-sets for finite element method (FEM) fluid-shell coupling. *Mecânica Computacional*, XXIX, p. 4801–4818, 2010a.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Fluid-structure interaction using an arbitrary Lagrangian-Eulerian Fluid solver coupled to a positional Lagrangian shell solver. *Mecânica Computacional*, XXIX, p. 1627–1647, 2010b.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Unconstrained vector nonlinear shell formulation applied to fluid-structure interaction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 259, p. 177–196, 2013.

- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. On fluid-shell coupling using an arbitrary Lagrangian-Eulerian fluid solver coupled to a positional Lagrangian shell solver. *Applied Mathematical Modelling*, v. 38, p. 3401–3418, 2014.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Flexible multibody dynamics finite element formulation applied to structural progressive collapse analysis. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 13, n. 16, p. 52–71, 2016.
- SIMO, J. C.; FOX, D. D. On a stress resultant geometrically exact shell model. Part I: formulation and optimal parametrization. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 72, p. 267–304, 1989.
- SPEZIALE, C. G. Analytical methods for the development of reynolds-stress closures in turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, Annual Reviews, v. 23, n. Volume 23, 1991, p. 107–157, 1991. ISSN 1545-4479. Disponível em: <<https://www.annualreviews.org/content/journals/10.1146/annurev.fl.23.010191.000543>>.
- STEIN, K.; TEZDUYAR, T. E.; BENNEY, R. Automatic mesh update with the solid-extension mesh moving technique. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 193, p. 2019–2032, 2004.
- STRANG, G.; FIX, G. *An analysis of the Finite Element Method*. 2. ed. [S.l.]: Wesley-Cambridge Press, 2008.
- STROUBOULIS, T.; COPPS, K.; BABUSKA, I. The generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 32–33, p. 4081–4193, 2001.
- TAKIZAWA, K. .; TEZDUYAR, T. Space-time fluid–structure interaction methods. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, v. 22, p. 1230001, 08 2012.
- TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E.; OTOGURO, Y. Stabilization and discontinuity-capturing parameters for space-time flow computations with finite element and isogeometric discretizations. *Computational Mechanics*, v. 62, n. 5, p. 1169–1186, 2018.
- TAKIZAWA, K.; UEDA, Y.; TEZDUYAR, T. E. A node-numbering-invariant directional length scale for simplex elements. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, v. 29, n. 14, p. 2719–2753, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0218202519500581>>.
- TALLEC, P. L.; MOURO, J. Fluid structure interaction with large structural displacements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 190, p. 3039–3067, 2001.
- TEZDUYAR, T. Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations. In: HUTCHINSON, J. W.; WU, T. Y. (Ed.). [S.l.]: Elsevier, 1992, (Advances in Applied Mechanics, v. 28). p. 1 – 44.
- TEZDUYAR, T.; ALIABADI, S.; BEHR, M. Enhanced-Discretization Interface-Capturing Technique (EDICT) for computation of unsteady flows with interfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 155, p. 235–248, 1998.
- TEZDUYAR, T.; ALIABADI, S.; BEHR, M.; JOHNSON, A.; MITTAL, S. Parallel finite-element computation of 3D flows. *Computer*, v. 26, n. 10, p. 27–36, 1993.

- TEZDUYAR, T.; SATHE, S. Stabilization parameters in supg and pspg formulations. *Journal of Computational and Applied Mechanics*, v. 4, n. 1, p. 71–88, 2003.
- TEZDUYAR, T. E. Stabilized finite element methods for flows with moving boundaries and interfaces. *HERMIS: The International Journal of Computer Mathematics and its Applications*, v. 4, p. 63–88, 2003.
- TEZDUYAR, T. E.; ALIABADI, S. EDICT for 3D computation of two-fluid interfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, p. 403–410, 2000.
- TEZDUYAR, T. E.; BEHR, M.; LIOU, J. A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces - the deforming-spatial-domain/space-time procedure: I. The concept and the preliminary numerical tests. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 94, p. 339–351, 1992b.
- TEZDUYAR, T. E.; BEHR, M.; MITTAL, S.; LIOU, J. A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces - the deforming-spatial-domain/space-time procedure: II. Computation of free-surface flows, two-liquid flows, and flows with drifting cylinders. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 94, p. 353–371, 1992c.
- TEZDUYAR, T. E.; BEHR, M.; MITTAL, S.; JOHNSON, A. A. Computation of unsteady incompressible flows with the finite element methods: Space–time formulations, iterative strategies and massively parallel implementations. In: *New Methods in Transient Analysis*. New York: ASME, 1992f. (PVP-Vol.246/AMD-Vol.143), p. 7–24.
- TEZDUYAR, T. E.; MITTAL, S.; RAY, S. E.; SHIH, R. Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 95, p. 221–242, 1992a.
- TEZDUYAR, T. E.; OSAWA, Y. Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 3, p. 411–430, 2000.
- TEZDUYAR, T. E.; SATHE, S. Enhanced-discretization successive update method (EDSUM). *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 47, p. 633–654, 2005.
- TONON, P. *Simulação numérica de escoamentos incompressíveis através da análise isogemétrica*. Dissertação (Mestrado) — PPGEC-UFRGS, Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil, 2016.
- TONON, P.; SANCHES, R. A. K.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E. A linear-elasticity-based mesh moving method with no cycle-to-cycle accumulated distortion. *Computational Mechanics*, 2021.
- TRUESELL, C. A. Hypo-elasticity. *J. Rational Mech. Anal.*, v. 4, p. 83–133, 1955.
- VÁZQUEZ, J. G. V. *Nonlinear analysis of orthotropic membrane and shell structures including fluid-structure interaction*. Tese (Doutorado) — Universitat Politecnica de Catalunya, Barcelona, Espanha, 2007.
- WALL, W. A.; RAMM, E. Fluid structure interaction based upon a stabilized (ALE) finite element method. In: IDELSON, S. et al. (Ed.). *Computational Mechanics*. Barcelona: CIMNE, 1998.

- WANG, K.; RALLU, A.; GERBEAU, J.-F.; FARHAT, C. Algorithms for interface treatment and load computation in embedded boundary methods for fluid and fluid–structure interaction problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, John Wiley & Sons, Ltd., v. 67, n. 9, p. 1175–1206, 2011.
- WILCOX, D. C. *Turbulence modeling for CFD*. La Cañada, CA: DCW Industries Inc., 1993.
- WILLIAMS, P. T.; BAKER, A. J. Numerical simulations of laminar flow over a 3d backward-facing step. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 24, p. 1159–1183, 1999.
- YOKOMIZO, M. H. *Análise numérica de problemas de interação fluido-estrutura com vorticidade*. Dissertação (Mestrado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2024.
- ZHANG, Y.; BAZILEVS, Y.; GOSWAMI, S.; BAJAJ, C. L.; HUGHES, T. J. Patient-specific vascular nurbs modeling for isogeometric analysis of blood flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 196, n. 29, p. 2943 – 2959, 2007. ISSN 0045-7825.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; NITHIARASU, P. *The Finite Element Method: Fluid Dynamics*. 6. ed. [S.l.]: Butterworth Heinemann Linacre house, 2005. v. 3. 334 p.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; NITHIARASU, P. *The Finite Element Method: The Basis*. 6. ed. [S.l.]: Butterworth Heinemann Linacre house, 2005a. v. 1. 689 p.