UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Escola de Engenharia de São Carlos

Combinação de discretizações isogeométrica e por elementos finitos na análise de interação fluido-estrutura

Combination of isogeometric and finite element discretizations for fluid-structure interaction analysis

Patrícia Tonon

Ph.D. Thesis – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo

EESC • USP

Patrícia Tonon

Combinação de discretizações isogeométrica e por elementos finitos na análise de interação fluido-estrutura

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Ciências - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas).

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo André Kuche Sanches

São Carlos

2025

RESUMO

TONON, P. **Combinação de discretizações isogeométrica e por elementos finitos na análise de interação fluido-estrutura**. 2025. 227 p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2025.

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de uma ferramenta computacional para a análise numérica de problemas de interação fluido-estrutura, em que o domínio do fluido é discretizado por meio da combinação de aproximações baseadas na Análise Isogeométrica e no Método dos Elementos Finitos tradicional. Consideram-se escoamentos incompressíveis, sendo o domínio fluido representado por uma discretização global fixa e não conforme à estrutura, sobre a qual se sobrepõe uma discretização local, mais refinada e adaptada à interface fluido-estrutura. O escoamento incompressível, é solucionado por meio de uma formulação estabilizada, permitindo aproximações de mesma ordem para as variáveis de velocidade e pressão, com integração temporal implícita realizada pelo método α-generalizado. O acoplamento entre os modelos local e global de fluido é tratado por uma formulação estabilizada do método Arlequin, que consiste em superpor dois modelos — um discretizado por elementos finitos e outro por análise isogeométrica — e compatibilizá-los por meio de um campo de multiplicadores de Lagrange definido sobre uma região denominada zona de colagem. Para garantir a estabilidade do campo de multiplicadores e ampliar a flexibilidade da formulação, adiciona-se uma parcela estabilizadora baseada no resíduo da equação governante. A movimentação do modelo local de fluido, bem como o acoplamento com a estrutura, são viabilizados pela adoção de uma descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária das equações governantes. A estrutura é modelada por meio de elementos de casca com cinemática de Reissner-Mindlin, utilizando uma formulação posicional do método dos elementos finitos em descrição Lagrangiana total, adequada à análise dinâmica com grandes deslocamentos. O acoplamento fluido-estrutura é realizado por um esquema particionado forte do tipo bloco-iterativo, que assegura a interação consistente entre os dois meios.Além de garantir uma discretização com resolução suficiente para capturar efeitos localizados próximos à estrutura, como os associados à camada limite, a metodologia proposta combina as vantagens dos métodos de malhas móveis e de malhas fixas (contornos imersos), permitindo a simulação eficiente de problemas que, no contexto de métodos de malhas móveis tradicionais, exigiriam remalhamento global. A abordagem desenvolvida também proporciona maior flexibilidade na escolha das discretizações e melhora o desempenho computacional em análises tridimensionais complexas de interação fluido-estrutura.

Palavras-chave: Interação Fluido-Estrutura. Análise Isogeométrica. Método dos Elementos Finitos. Método Arlequin. Descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária.

ABSTRACT

TONON, P. **Combination of isogeometric and finite element discretizations for fluid-structure interaction analysis**. 2025. 227 p. Thesis (Doctor) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2025.

This work presents the development of a computational tool for numerical analysis of fluid-structure interaction problems, in which the fluid domain is discretized by combining approximations based on Isogeometric Analysis (IGA) and the traditional Finite Element Method (FEM). Incompressible flows are considered, with the fluid domain represented by a fixed global discretization, nonconforming with the structure, upon which a refined local discretization, adapted to the fluid–structure interface, is superposed. The incompressible flow is solved through a stabilized formulation that allows equal-order interpolation for velocity and pressure fields, with implicit time integration performed using the α-generalized method. The coupling between the local and global fluid models is handled by a stabilized formulation of the Arlequin method, which consists in superposing two models—one discretized by finite elements and the other by isogeometric analysis—and enforcing compatibility through a field of Lagrange multipliers defined over a region called the gluing zone. To ensure the stability of the multiplier field and enhance the flexibility of the formulation, a stabilization term based on the residual of the governing equations is added. The motion of the local fluid model, as well as the coupling with the structure, is achieved through an Arbitrary Lagrangian–Eulerian (ALE) description of the governing equations. The structure is modeled using Reissner–Mindlin shell elements within a positional finite element formulation under a total Lagrangian description, suitable for dynamic analyses involving large displacements. The fluid–structure coupling is performed using a strong partitioned block-iterative scheme that ensures consistent interaction between the two media. In addition to providing a discretization capable of capturing localized effects near the structure—such as boundary-layer phenomena—the proposed methodology combines the advantages of moving-mesh and fixed-mesh (immersed boundary) methods. This approach enables efficient simulation of problems that, in the context of traditional moving-mesh methods, would require global remeshing, while also offering greater flexibility in the choice of discretizations and improved computational performance in complex three-dimensional FSI analyses.

Keywords: Fluid-structure interaction. Isogeometric analysis. Finite Element Method. Arlequin Method. Arbitrary Lagrangian-Eulerian Description.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A interação fluido-estrutura caracteriza-se por ser uma classe de problemas em que existe uma interdependência entre comportamentos do fluido e da estrutura. O comportamento do fluido depende da forma e da movimentação da estrutura, assim como, o movimento e a deformação da estrutura dependem das forças provenientes do fluido.

A modelagem numérica dos problemas da engenharia estrutural é um ramo vastamente desenvolvido, sendo a análise de estruturas por elementos finitos em softwares comerciais uma prática corrente entre os engenheiros. Entretanto, quando se trata de interação fluido-estrutura (IFE), esses softwares estão longe de atender à demanda dos engenheiros.

Problemas que envolvem a interação entre fluido e estrutura estão presentes em diversas áreas, podendo-se citar como exemplos a ação do vento sobre edifícios, aerodinâmica de modelos automotivos, problemas de *flutter* em estruturas aeronáuticas e de pontes, ou ainda problemas de escoamento de sangue em vasos sanguíneos e órgãos, entre muitos outros. A análise experimental de tais problemas, em geral, é muito custosa e demanda bastante tempo e equipamentos complexos. Dessa forma, é de interesse o desenvolvimento de métodos numéricos que permitam simular adequadamente tais problemas dentro de um tempo razoável. O crescimento da informática tem auxiliado nesse processo, contudo, muitas análises ainda só podem ser realizadas em grandes *clusters* e, em alguns casos, devido à complexidade dos problemas, não podem ser simuladas sem grandes simplificações.

A análise computacional dos problemas de IFE possui basicamente três componentes: a dinâmica dos fluidos computacional, a mecânica dos sólidos computacional e o acoplamento entre os meios fluido e sólido. Uma das maiores dificuldades encontradas nessa área, diz respeito à compatibilização das formulações da mecânica dos fluidos e dos sólidos, visto que, em geral, para fluidos aplica-se uma descrição matemática Euleriana, e para sólidos, Lagrangiana. Dessa forma, existem duas formas comuns de se realizar o acoplamento fluido-estrutura, que são os métodos de malhas conformes, ou de malhas móveis, e os métodos de malhas não-conformes, ou de malhas fixas.

Nos métodos de malhas conformes, a malha do fluido é conforme ao domínio computacional do sólido e acompanha seu movimento, requerendo, assim, procedimentos de atualização (deformação ou deformação associada à reconstrução) dessa malha ao longo da análise. Nesse tipo de metodologia, uma descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária (ALE) pode ser aplicada ao fluido, permitindo a movimentação do domínio computacional de maneira independente do movimento das partículas de fluido. Essa técnica é adequada para problemas em que a estrutura sofre deslocamentos em pequenas escalas em relação à configuração inicial da estrutura, sem que haja mudança topológica do domínio do fluido, visto que grandes distorções do domínio fluido, em geral, acarretam na necessidade de técnicas especiais de remalhamento, que apresentam um custo computacional elevado.

Nos métodos de malhas não-conformes, utiliza-se uma malha fixa para o fluido, na qual o sólido se encontra imerso, sendo adotadas técnicas de contorno imerso para a imposição das condições de acoplamento. Um dos aspectos importantes desse método diz respeito à localização do contorno da estrutura dentro da malha do fluido, o que pode ser resolvido, por exemplo, com o uso de uma função *level-set* baseada na distância assinalada ao contorno do sólido. Essa técnica pode ser aplicada a qualquer escala de deslocamentos, inclusive em problemas com mudanças topológicas no domínio do fluido, entretanto, não é eficiente para levar em consideração efeitos localizados que exigem maior resolução da malha, como, por exemplo, em regiões de camada limite na vizinhança da estrutura.

Neste trabalho, busca-se, no contexto da análise tridimensional de interação fluido-estrutura, empregar técnicas de partição de domínio com malhas superpostas, para permitir uma malha local mais refinada sobreposta a uma malha global, de modo a unir as vantagens das metodologias de malhas móveis e de malhas fixas. Essa malha local é conforme ao contorno da estrutura, e, nos casos de interação fluido-estrutura, deforma-se acompanhando a movimentação da estrutura. O intuito disso é melhorar a precisão local da análise numérica, permitir a combinação de diferentes técnicas de discretização, especificamente a isogeométrica e a de elementos finitos, e viabilizar a simulação de problemas com grandes escalas de deslocamentos, sem a necessidade de reconstrução da malha global.

Duas técnicas foram consideradas para este estudo. A primeira, denominada técnica de combinação de espaços de funções, foi introduzida nos trabalhos de Rosa, Coda e Sanches (2022) e Sanches *et al.* (2019), consiste em ponderar os espaços de função local e global sobre uma zona de superposição e combiná-las formando um novo espaço enriquecido. A segunda, é a forma estabilizada do Método Arlequin apresentada por Fernandes *et al.* (2020), que consiste em superpor os modelos local e global em uma zona de colagem, ponderando-os por uma função de particionamento e acoplando os modelos por um campo de multiplicadores de Lagrange, além de adicionar uma técnica de estabilização baseada no resíduo para flexibilizar a escolha dos espaços de aproximação.

A primeira técnica, embora tenha se demonstrado bastante robusta em outros problemas, mostrou-se inadequada para a formulação estabilizada para escoamentos incompressíveis a número de Reynolds elevados, enquanto o método Arlequin, embora mais custoso, mostra-se adequado para qualquer número de Reynolds.

1.1 Apresentação do texto

Este texto está dividido em 8 capítulos os quais serão descritos sucintamente na continuação.

No *Capítulo 1* introduz-se e contextualiza-se o tema de pesquisa. Na sequência, no estado da arte, faz-se uma breve apresentação de algumas das formulações mais utilizadas para a solução dos problemas que envolvem a interação fluido-estrutura e métodos de partição de domínios. Por fim, apresentam-se os objetivos, a metodologia e justificava desta pesquisa.

O *Capítulo 2* compreende a descrição da técnica numérica utilizada para a resolução de problemas da dinâmica dos fluidos computacional. Apresentam-se inicialmente as equações governantes em sua forma forte em descrição Euleriana, expandindo-as na continuação para uma descrição Euleriana-Lagrangiana arbitrária. Na sequência, a formulação fraca é obtida através da aplicação do método dos resíduos ponderados utilizando a técnica clássica de Galerkin e apresenta-se a discretização espacial da equações. Para contornar as instabilidades típicas que ocorrem quando aplicado o método de Galerkin, e afim de contornar a condição LBB, apresenta-se uma metodologia estabilizada. Para a integração temporal das equações, o método α-generalizado aplicado é exposto. Ao final, o algoritmo da implementação computacional é apresentado e alguns exemplos são avaliados para a verificação do programa computacional.

No *Capítulo 3*, apresenta-se a análise isogeométrica aplicada à Dinâmica dos Fluidos Computacional (DFC) por meio da utilização de funções NURBS. O capítulo se inicia com uma breve contextualização do tema, seguida da descrição das funções-base *B-Splines* e de suas principais características, culminando na geração de geometrias a partir dessas funções. Em seguida, introduzem-se as funções NURBS, construídas a partir das *B-Splines*, destacando-se a obtenção de curvas, superfícies e sólidos NURBS. A abordagem isogeométrica é então detalhada, evidenciando a substituição das tradicionais funções polinomiais de Lagrange, utilizadas no Método dos Elementos Finitos clássico, por funções NURBS na discretização das geometrias e variáveis. Além disso, são explicados os parâmetros de estabilização empregados nas equações governantes discretizadas via AIG. Por fim, verifica-se a implementação computacional da DFC com análise isogeométrica por meio de exemplos numéricos.

O *Capítulo 4* apresenta uma breve revisão sobre a mecânica dos sólidos voltada a cinemática e ao equilíbrio de corpos deformáveis em descrição Lagrangiana, assim como elenca o princípio da estacionariedade de energia e a apresenta o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff adotado nesse trabalho. Na sequência, apresentam-se os conceitos do método dos elementos finitos posicional e o elemento finito de casca a ser utilizado nesse projeto para análise não linear dinâmica de sólidos. Por fim, o algoritmo da implementação computacional é exibido e um problema de casca cilíndrica com *snap through* dinâmico é simulado.

No *Capítulo 5* a técnica de partição de domínios por combinação dos espaços de funções é apresentada. Descreve-se inicialmente a combinação proposta para os espaços de funções respectivos as malhas local e global com intuito de obter-se um novo espaço de funções independentes na zona de superposição. Na sequência, descreve-se a metodologia para o cálculo da função ponderadora de combinação dentro do domínio. O roteiro de implementação computacional é então exibido, e apresenta-se, um exemplo de verificação voltado à dinâmica dos fluidos computacional.

No *Capítulo 6* apresenta-se a técnica de decomposição de domínios através do método Arlequin estabilizado (RBSAM). A primeira parte do capítulo foi dedicada a descrever o método clássico de Arlequin, para na sequência, introduzir a metodologia estabilizada para a solução de escoamentos incompressíveis. Apresenta-se na sucessão do capítulo a extensão da metodologia para problemas de contorno móveis. Ao final, o algoritmo de implementação é apresentado, assim como, exemplos para verificação do código computacional.

No *Capítulo 7* discorre-se sobre a formulação utilizada para análise de problemas de Interação Fluido-Estrutura. No texto, apresentam-se as condições de acoplamento necessárias a solução de um problema de IFE, a técnica de movimentação de malha utilizada, e a metodologia de transferência de condições de contorno em uma interface entre fluido e sólido com malhas não coincidentes. Descreve-se na continuação do texto a teoria envolvida no esquema de acoplamento particionado forte adotado. Por fim, o algoritmo de implementação computacional e exemplos de verificação são apresentados.

No *Capítulo 8* são apresentadas as considerações finais sobre o trabalho desenvolvido.

1.2 Estado da arte

Nesta seção apresenta-se uma breve contextualização dos principais assuntos relacionados a este trabalho. Assim, aborda-se brevemente o estado da arte da mecânica dos fluidos computacional aplicada a escoamentos com contornos móveis, a análise isogeométrica aplicada a problemas da dinâmica dos fluidos computacional, a mecânica dos sólidos computacional aplicada a problemas dinâmicos com grandes deslocamentos com o foco em elementos de cascas, às técnicas numéricas para acoplamento fluido-estrutura e os métodos de decomposição de domínios e multiescala.

1.2.1 Dinâmica dos fluidos computacional

A dinâmica dos fluidos computacional (DFC) trata da obtenção de soluções numéricas para as equações diferenciais que descrevem o comportamento dos fluidos no espaço e no tempo, tendo em vista que a solução analítica para esses problemas é conhecida apenas em raros casos e sob hipóteses simplificadoras. Os principais tópicos abordados aqui referem-se às diferentes metodologias aplicadas à discretização espacial, às fontes de instabilidade numérica e aos métodos de estabilização.

No que diz respeito à discretização espacial, a DFC desenvolveu-se inicialmente no âmbito do método das diferenças finitas e do método dos volumes finitos (ver, por exemplo, Anderson (1995) e Chung (2002)). O método dos elementos finitos (MEF), por sua vez, popularizou-se inicialmente em análises de estruturas na década de 1950, com formulações baseadas em princípios variacionais. Alguns anos depois, passou a ser utilizado também em problemas da DFC, visto que apresenta propriedades vantajosas, como, por exemplo, a facilidade de discretizar geometrias complexas com o uso de malhas não estruturadas arbitrárias e a facilidade de aplicar condições de contorno em geometrias complexas e de alta ordem (REDDY; GARTLING, 2010; ZIENKIEWICZ; TAYLOR; NITHIARASU, 2005a).

Uma das dificuldades encontradas na aplicação do MEF à dinâmica dos fluidos computacional é o fato de que, ao se adotar o método clássico de Galerkin na discretização espacial das equações governantes em descrição Euleriana, obtêm-se matrizes assimétricas e, em escoamentos com convecção dominante, surgem variações espúrias nas variáveis transportadas (BROOKS; HUGHES, 1982; ZIENKIEWICZ; TAYLOR; NITHIARASU, 2005a). Esse problema pode ser amenizado à medida que a malha de elementos finitos é refinada; entretanto, é desejável que o método escolhido apresente resultados estáveis mesmo em malhas mais grosseiras.

Para resolver tal dificuldade, algumas técnicas de estabilização foram propostas, a exemplo dos métodos *Stream-Upwind/Petrov-Galerkin* (SUPG) (BROOKS; HUGHES, 1982), *Galerkin Least-Squares* (GLS) (HUGHES; FRANCA; HULBERT, 1989) e *Sub-Grid Scale* (SGS) (HUGHES, 1995). Todas essas formulações baseiam-se na introdução de termos estabilizantes ao problema, de modo a conter as variações espúrias em casos de convecção dominante. Outra possibilidade diz respeito ao uso do método Taylor-Galerkin (T-G), introduzido por Donea (1984), no qual a estabilização é obtida pela inclusão de termos de ordem superior que exercem efeito estabilizante, ao se empregar a expansão em série de Taylor no processo de discretização temporal.

Uma das metodologias mais difundidas para a estabilização dos termos convectivos é a técnica SUPG, a qual é aplicada neste estudo. Essa técnica consiste em adicionar, à forma fraca da equação da quantidade de movimento, o resíduo dessa equação ponderado por uma função especialmente escolhida para introduzir estabilização na direção das linhas de corrente, resultando em uma formulação consistente. Diversos autores contribuíram para a consolidação dessa técnica, dentre os quais podem ser citados Catabriga e Coutinho (2002), Hughes e Tezduyar (1984) e Tezduyar (1992). O parâmetro adimensional estabilizador, cuja função é aplicar uma escala na parcela adicionada, tem sua obtenção discutida em diversos trabalhos, tais como Otoguro, Takizawa e Tezduyar (2020) e Takizawa, Tezduyar e Otoguro (2018).

Outra dificuldade da aplicação do MEF à mecânica dos fluidos diz respeito aos escoamentos incompressíveis. Ao levar-se em conta a incompressibilidade do escoamento, obtém-se a chamada equação da continuidade, na qual aparece apenas o termo do divergente do vetor velocidade. Do ponto de vista numérico, a pressão atua como um multiplicador de Lagrange, impondo a condição de divergente da velocidade nulo. Nesse caso, para que o sistema tenha solução única e resulte em uma formulação estável, é necessário observar as restrições de *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi* (LBB) na escolha dos espaços de funções para a aproximação da pressão e da velocidade, não sendo possível interpolar essas variáveis por polinômios de mesma ordem (BREZZI; FORTIN, 1991; STRANG; FIX, 2008; ZIENKIEWICZ; TAYLOR; NITHIARASU, 2005b). Dessa forma, foram desenvolvidos diversos elementos, denominados Taylor-Hood, que atendem a essas restrições (DONEA; HUERTA, 2003).

De modo a permitir o uso do mesmo espaço de funções para pressão e velocidade, aumentando assim a flexibilidade do método, surgiram técnicas de estabilização do campo de pressão. Uma metodologia de estabilização para problemas incompressíveis, semelhante à técnica SUPG, foi apresentada por Hughes, Franca e Balestra (1986) para escoamentos de Stokes, posteriormente aplicada ao problema de Navier-Stokes e denominada PSPG (*Pressure Stabilized Petrov-Galerkin*) por Tezduyar (1992). Essa metodologia é adotada neste estudo e consiste em adicionar, à forma fraca da equação da continuidade, o resíduo da equação da quantidade de movimento ponderado pelo gradiente da função teste da equação da continuidade, multiplicado por um parâmetro de estabilização.

Outra consideração importante nas simulações numéricas diz respeito à reprodução de escoamentos turbulentos. As equações de Navier-Stokes descrevem tanto escoamentos laminares como turbulentos, entretanto, a utilização da chamada Simulação Direta de Turbulência leva a custos computacionais elevados, visto que requer uma malha refinada de maneira a representar adequadamente todas as escalas de turbulência. Para contornar esse problema, diferentes técnicas podem ser empregadas, destacando-se os métodos *Reynolds-Averaged Navier-Stokes* (RANS) (ALFONSI, 2009; SPEZIALE, 1991) e Simulações de grandes Vórtices (*Large Eddy Simulation* - LES) (GERMANO *et al.*, 1991; LAUNDER; SPALDING, 1972; PIOMELLI, 1999; WILCOX, 1993).

Os métodos RANS baseiam-se na decomposição das variáveis de fluxo em uma média temporal e em uma componente de flutuação. Essa abordagem permite que as equações governantes sejam manipuladas de forma a representar as médias de longo prazo do escoamento, enquanto as flutuações turbulentas são tratadas como termos adicionais, muitas vezes modelados por equações de fechamento. A definição da média pode variar conforme as características do problema. Já nas simulações LES, o objetivo principal é capturar as estruturas turbulentas de grande escala, responsáveis pela maior parte da transferência de quantidade de movimento e energia, e aplicar um modelo para os vórtices de pequena escala.

O método Variacional Multiescala (VMS) (BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013a; HUGHES, 1995; HUGHES *et al.*, 1998; HUGHES; OBERAI; MAZZEI, 2001) permite lidar simultaneamente com os efeitos da convecção dominante, a instabilidade associada ao campo de pressão em problemas incompressíveis e a representação adequada de estruturas relacionadas à vorticidade. O método, a partir de princípios variacionais, propõem a representação do problema físico por meio de sua decomposição em escalas grandes (resolvidas) e pequenas (não resolvidas), tratando-as separadamente. A modelagem do espaço de pequenas escalas é realizado em termos de resíduos das equações de conservação de massa e de conservação da quantidade de movimento.

1.2.2 Análise isogeométrica

A Análise Isogeométrica (AIG) é uma metodologia para análise numérica de problemas descritos por equações diferenciais e foi introduzida primeiramente por Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005). Pode-se dizer que se trata de uma generalização do método dos elementos finitos clássico, a partir do uso de funções base especiais. Na análise isogeométrica, as funções base utilizadas são aquelas aplicadas nos sistemas CAD (*Computed Aided Desing*), ou seja, nas tecnologias aplicadas na engenharia de *design*, animação, artes gráficas e visualização. Dentro das possibilidades de funções, as mais conhecidas são as funções NURBS (*Non-Uniform Rational B-Splines*) (PIEGL; TILLER, 1996), fazendo que esse seja um ponto de partida para os estudos sobre AIG. Um dos principais objetivos do desenvolvimento dessa ferramenta é a integração entre os sistemas CAD e as técnicas numéricas baseadas em elementos finitos, as quais requerem a geração de malhas baseadas nos dados obtidos em programas CAD.

Uma das principais vantagens do uso dessa metodologia é representação exata de geometrias mesmo em malhas pouco refinadas, visto que essas funções são capazes de representar exatamente seções cônicas, círculos, cilindros, esferas e elipsoides. Além disso, outra característica matemática que a torna uma boa opção a ser utilizada, é a suavidade das funções NURBS, que são continuas $p-1$ vezes entre os elementos, sendo p o grau da função base. A descrição exata das geometrias é uma característica desejável em problemas que envolvem fenômenos de camada limite, os quais dependem fortemente da precisão geométrica da superfície do corpo imerso no escoamento. Alguns problemas envolvendo escoamentos turbulentos e interação fluido-estrutura, podem ser consultados em: Bazilevs e Akkerman (2010), Bazilevs *et al.* (2007), Bazilevs *et al.* (2008), Bazilevs *et al.* (2010), Zhang *et al.* (2007).

Outras metodologias aplicando diretamente funções *B-Splines* também tem se mostrado eficiente para a análise de problemas da dinâmica dos fluidos computacional, como pode ser visto nos trabalhos de Bazilevs *et al.* (2014), Bazilevs, Takizawa e Tezduyar (2013a), Höllig, Reif e Wipper (2001).

1.2.3 Dinâmica de estruturas computacional considerando grandes deslocamentos

A análise de problemas de interação fluido-estrutura, muitas vezes requer a consideração da não linearidade geométrica da estrutura, devido a grandes deslocamentos ou a efeitos acoplados de membrana e flexão. Dentro desse grupo de problemas, podem-se citar o *flutter* de grande amplitude, sistemas de desaceleração (como paraquedas), aplicações biomédicas, entre outros.

Atualmente a solução numérica de problemas estruturais é majoritariamente realizada por meio do método dos elementos finitos. No contexto da análise não linear geométrica de estruturas, a formulação corrotacional proposta por Truesdell (1955) é muito popular e descreve a mudança de configuração da estrutura, decompondo seus movimentos em rígido e de deformação, e representando-os em termos dos deslocamentos e rotações nodais. Essa formulação, aplicada a pórticos, treliças e cascas, pode ser encontrada nos trabalhos de Argyris (1982), Battini e Pacoste (2006), Hughes e Liu (1981a), Hughes e Liu (1981b), Ibrahimbegovic e Taylor (2002), Simo e Fox (1989).

A formulação corrotacional, ao empregar rotações como parâmetros nodais, apresenta uma limitação para grandes deslocamentos, visto que não se pode aplicar a propriedade comutativa a essa grandeza. Para contornar esse problema, utilizam-se as formulações linearizadas de Euler-Rodrigues para a aproximação das rotações finitas, conforme pode ser observado, por exemplo, em Coda e Paccola (2010), Gruttmann, Sauer e Wagner (2000). A conservação de energia em problemas dinâmicos de estruturas reticuladas é um tema que ainda desperta discussões na literatura. Parte dessa controvérsia decorre do fato de que as rotações finitas mantêm sua objetividade apenas quando consideradas em pequenos incrementos. Além disso, na formulação corrotacional, a matriz de massa deixa de ser constante, o que inviabiliza o uso de métodos clássicos de integração temporal empregados na análise dinâmica linear, como o método de Newmark (SANCHES; CODA, 2013).

Motivado por Bonet *et al.* (2000), Coda (2003) introduz uma formulação baseada em posições, denominada de MEF posicional, sem o emprego de rotações como parâmetros nodais. Essa formulação tem sido aplicada com sucesso para análise de sólidos, pórticos e cascas (Coda, 2018; Carrazedo; Coda, 2010; Coda; Paccola, 2010, 2011; Greco; Coda, 2004; Sanches; Coda, 2016), incluindo problemas de interação fluido-estrutura (Avancini; Sanches, 2020; Fernandes; Coda; Sanches, 2019; Sanches; Coda, 2013, 2014). Entre as vantagens da formulação posicional do MEF destaca-se ainda o fato de ela gerar uma matriz de massa constante, facilitando a realização de análises dinâmicas das estruturas.

A formulação não linear geométrica do elemento finito de casca posicional, aplicado nesse trabalho,foi proposta por (CODA; PACCOLA, 2007), apresentando inicialmente seis graus de liberdade por nó — três associados às posições e três às componentes do vetor generalizado. Posteriormente, diante do problema de travamento volumétrico, os autores ampliaram o modelo com a introdução de um sétimo parâmetro, responsável por representar a variação linear da espessura da casca (CODA; PACCOLA, 2008).

Em Sanches e Coda (2013), os autores utilizam o integrador temporal de Newmark para a análise de problemas dinâmicos não lineares de estruturas de cascas, no contexto da IFE, com grandes deslocamentos e rotações de corpo rígido. Nesse trabalho, os autores apresentam a demonstração da conservação da quantidade de movimento linear e angular no uso dessa metodologia, e testam a estabilidade e a conservação de energia em problemas com pequenas deformações e grandes deslocamentos, demonstrando que a formulação é adequada para os problemas de interação fluido-estrutura.

Em virtude da eficiência dessa formulação na resolução de problemas dinâmicos não lineares de estruturas, sobretudo nos casos que envolvem interação fluido-estrutura, o presente trabalho adota o MEF posicional aplicado a cascas como modelo matemático para representar as estruturas.

1.2.4 Acoplamento fluido-estrutura

O problema de interação fluido-estrutura pode ser descrito como um conjunto de equações diferenciais e condições de contornos associadas ao fluido e à estrutura que precisam ser satisfeitas ao mesmo tempo. Como sólidos e fluidos geralmente apresentam descrições matemáticas diferentes, sendo a mecânica dos sólidos tradicionalmente formulada por descrições Lagrangianas e a mecânica dos fluidos por descrições Eulerianas, um dos desafios da análise computacional de IFE é a compatibilização dessas diferentes descrições. Os métodos de acoplamento encontrados na literatura, em geral, podem ser classificado em dois tipos: métodos de malhas móveis, ou método de malhas conformes; e métodos de malhas fixas ou método de malhas não-conformes (BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013b; HOU; WANG; LAYTON, 2012).

Nos métodos de malhas móveis, à medida em que a interface fluido-estrutura se movimenta, o domínio computacional do fluido é deformado, e a malha do fluido é movimentada para acomodar a mudança da interface. Nesse tipo de metodologia duas possíveis técnicas podem ser aplicadas na modelagem do domínio fluido: a descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária (DONEA; GIULIANI; HALLEUX, 1982; HUGHES; LIU;

ZIMMERMAN, 1981; KANCHI; MASUD, 2007) ou a formulação Espaço-Tempo para domínios deformáveis (TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2012; TEZDUYAR; BEHR; LIOU, 1992; TEZDUYAR *et al.*, 1992b), sendo que ambas permitem a movimentação arbitrária (independente das partículas) da discretização espacial. A principal vantagem do método de malhas adaptadas é a capacidade de controlar o refinamento da malha do fluido próxima a interface fluido-estrutura, bem como a conformidade dos domínios, e como consequência, garantir a captura de efeitos de camada limite nessa região, garantindo precisão dos resultados.

A técnica empregada para movimentação de malhas é muito importante nos métodos de malhas móveis, pois essa deve ser eficiente de maneira a resultar em elementos que possuam mínima distorção e alteração de volume, e de forma a evitar que a malha necessite ser reconstruída. Diversas técnicas têm sido desenvolvidas para essa finalidade e podem ser divididas em três categorias. Na primeira, os deslocamentos são impostos na interface entre estrutura e fluido e o campo de deslocamentos é obtido através da resolução de um problema de valor de contorno, formulando-se o problema através de analogia com estrutura de molas (BOTTASSO; DETOMI; SERRA, 2005) ou com sólido elástico (JOHNSON; TEZDUYAR, 1994; STEIN; TEZDUYAR; BENNEY, 2004) ou emprego da equação de Laplace para distribuição dos deslocamentos (KANCHI; MASUD, 2007), entre outras. O segundo grupo são esquemas ponto-a-ponto, nos quais os deslocamentos da malha são diretamente interpolados a partir dos deslocamentos impostos na interface (DONEA; GIULIANI; HALLEUX, 1982; SANCHES; CODA, 2014; TEZDUYAR *et al.*, 1993). Existem ainda métodos híbridos, que combinam vantagens de diferentes técnicas de movimentação de malhas (FERNANDES; CODA; SANCHES, 2019; LEFRANÇOIS, 2008).

Nos métodos de malhas móveis, entretanto, em alguns casos o remalhamento torna-se inevitável, como em problemas com grandes distorções do domínio, e em especial, em problemas com mudanças topológicas do domínio do fluido, fazendo com que o custo computacional se torne muito elevado.

Por sua vez, os métodos de malhas fixas são capazes de lidar com mudanças topológicas e grandes deslocamentos. Para isso, utilizam-se os chamados métodos de contornos imersos, tal como o introduzido por Peskin (1972), onde mantém-se a malha do fluido fixa e permite-se que a estrutura mova-se dentro dessa malha. Nesses métodos, é necessário que as posições da estrutura sejam identificadas dentro da malha do fluido a cada passo de tempo (MITTAL; IACCARINO, 2005; WANG *et al.*, 2011). Uma das formas de identificação é através de uma função distância assinalada do contorno da estrutura (método *level-set*). Nesse contexto, pode-se citar os trabalhos de Cirak e Radovitzky (2005) aplicados no âmbito dos volumes finitos e de Akkerman *et al.* (2012) e Sanches e Coda (2014) em elementos finitos. A principal desvantagem desse tipo de metodologia é que a resolução da discretização na camada limite fica limitada à discretização da malha de elementos finitos onde a interface estiver posicionada no instante de análise.

Em termos da forma de solução do sistema acoplado, as técnicas de acoplamento disponíveis dividem-se em duas classes principais: métodos particionados (Bazilevs et al., 2011; Fernandes; Coda; Sanches, 2019; Roux; Garaud, 2009; Sanches; Coda, 2013, 2014) e métodos monolíticos (AVANCINI, 2023; BLOM, 1998; HÜBNER; WALHORN; DINKLER, 2004; HRON; MADLIK, 2007). No primeiro grupo, as equações do fluido e da estrutura são resolvidas separadamente, sendo as condições de acoplamento transmitidas de um meio para o outro na interface, em geral, em termos de condições de Dirichlet-Neumann ao longo do processo de solução. No segundo grupo, o dos métodos monolíticos, fluido e estrutura são tratados como entidade única, com um único sistema de equações gerado para fluido e estrutura, sendo as condições de acoplamento atendidas de maneira implícita durante o equacionamento.

As técnicas de acoplamento particionado do tipo Dirichlet-Neumann em geral consistem na aplicação de condições de contorno de Dirichlet no contorno do fluido que está em contato com a estrutura (velocidades provenienentes da movimentação da estrutura) e de Neumann no contorno do sólido que está em contato com o fluido (forças proveninentes da pressão e das tensões viscosas no fluido). Os métodos particionados podem ainda ser subdividos em acoplamentos fracos (explícitos), ou fortes (implícitos). No acoplamento particionado fraco, as equações são resolvidas de uma maneira desacoplada e só no passo de tempo seguinte as condições de acoplamento são transmitidas para de um meio para o outro. Já no o acoplamento particionado forte, as condições de acoplamento são atualizadas a cada iteração do processo de solução do sistema não linear dentro de cada passo de tempo. Esse tipo de resolução, aplicada nesse trabalho, também é conhecida como bloco-iterativa (BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013a), e pode ser representada por uma modificação da matriz tangente monolítica do método de Newton-Raphson, permitindo que os sistemas do fluido, da estrutura e da malha sejam tratados em blocos separados. Esse tipo de metodologia particionada facilita a solução dos problemas de IFE devido ao total desacoplamento entre os *solvers* de estrutura e de fluido.

Os esquemas particionados podem apresentar, entretanto, algumas desvantagens, como a defasagem que pode ocorrer entre as integrações temporais do fluido e da estrutura quando as condições de contorno na interface entre fluido e estrutura são aplicadas de maneira explícita, e, ainda, instabilidades numéricas como o efeito de massa adicionada (FELIPPA; PARK; FARHAT, 2001). Em escoamentos governados pelo campo de pressão, a ação do fluido sobre a estrutura funciona como uma massa adicional, alterando sua inércia (TALLEC; MOURO, 2001). Em escoamentos incompressíveis, nos quais a densidade do sólido e do fluido podem ser muito próximas, ou quando a estrutura é muito esbelta, esse fenômeno pode ocasionar erros elevados e instabilidades nos acoplamentos fracos, ou perda de convergência e instabilidades numéricas em técnicas de acoplamento particionado forte.

Uma das formas de se contornar esse problema é a alteração do esquema de acoplamento do tipo Dirichlet-Neumann para condições de contorno de Robin, que consiste em uma combinação linear das condições de Dirichlet e Neumann, ver por exemplo, Badia, Nobile e Vergara (2008). A metodologia introduzida por Tezduyar, Behr e Liou (1992), chamada de *augmented mass*, aplicada nesse trabalho, consiste em multiplicar a massa da matriz tangente respectiva à estrutura por um fator que dependerá do tipo de problema em análise, também pode ser empregada para essa finalidade. Outra metodologia, que demonstra-se muito eficiente para os casos de acoplamento do tipo bloco-iterativo, como mostram os trabalhos de (FERNANDES; CODA; SANCHES, 2019; KÜTTLER; WALL, 2008), é o uso da relaxação de Aitken, proposto por Irons e Tuck (1969).

1.2.5 Métodos multiescala e técnicas de partição de domínios

Em diversas áreas da engenharia, faz-se necessário considerar efeitos localizados, geralmente de menor escala, dentro de um modelo global. Na análise estrutural, podem ser citados problemas envolvendo fissuras, orifícios e imperfeições; na mecânica dos fluidos, fenômenos de camada limite e a interface entre dois fluidos em escoamentos multifásicos; e, na interação fluido-estrutura, a própria interface entre estrutura e fluido.

Para obter soluções precisas nesse tipo de problema, é necessária a aplicação de técnicas que considerem os efeitos locais sem, contudo, tornar a simulação inviável pelo elevado custo computacional.

O método dos elementos finitos, tradicionalmente utilizado para a análise numérica de equações diferenciais, foi desenvolvido a partir de modelos mecânicos de meios contínuos, o que lhe confere pouca flexibilidade para a consideração desses efeitos. Os refinamentos p e h constituem metodologias eficientes; contudo, em determinados problemas dinâmicos, exigem técnicas de remalhamento e podem acarretar custos computacionais elevados.

Em busca de aprimorar o Método dos Elementos Finitos (MEF), diversas propostas têm sido apresentadas com o objetivo de aumentar sua flexibilidade na resolução de problemas com efeitos localizados. Entre elas, pode-se citar os elementos finitos difusos (NAYROLES; TOUZOT; VILLON, 1992), nos quais o conceito de partículas foi introduzido, resultando em uma generalização do MEF sem a necessidade de malha. Outra proposta é o método de Galerkin livre de elementos, que combina características de métodos sem malha com o MEF (ver Belytschko *et al.* (1995)). Na mesma direção, destacam-se o método de partição da unidade (MELENK; BABUSKA, 1996), o método dos elementos finitos generalizado (G-FEM) (STROUBOULIS; COPPS; BABUSKA, 2001) e o método dos elementos finitos estendido (X-FEM) (MOËS *et al.*, 2003), os quais introduzem o enriquecimento da base aproximadora por meio de funções capazes de capturar efeitos localizados. Contudo, tanto o G-FEM quanto o X-FEM apresentam forte dependência do conhecimento prévio da solução local ou, ao menos, de sua distribuição espacial.

Pesquisas como as de Farhat, Harari e Franca (2001) propõem enriquecimentos descontínuos nos espaços funcionais, incorporando modos regulares por meio de formulações discretas de Galerkin e multiplicadores de Lagrange. Além disso, métodos de discretização que não dependem diretamente da interface, fundamentados na técnica de Nitsche, foram desenvolvidos para lidar com problemas envolvendo descontinuidades materiais, como demonstrado no estudo de Hansbo e Hansbo (2002).

No contexto da mecânica dos fluidos, Tezduyar e Aliabadi (2000), Tezduyar, Aliabadi e Behr (1998) introduziram a técnica *EDICT* (*Enhanced-Discretization Interface-Capturing Technique*) para a captura de interface, com aprimoramento da discretização em problemas bifásicos ou com superfície livre. Para isso, nessa região de interface definem-se subconjuntos de elementos (sub-malhas), que posteriormente são refinados sucessivamente, de modo a melhorar a precisão da solução. Como resultado, obtém-se uma discretização mais adequada para capturar a interface; entretanto, as sub-malhas geradas não representam com exatidão as descontinuidades na interface. Uma versão mais eficiente dessa técnica foi proposta em Tezduyar e Sathe (2005), na qual um método iterativo multinível é projetado para a captura dos efeitos do escoamento em pequenas escalas, permitindo a simulação de problemas mais complexos.

Pode-se citar ainda o método Variacional Multiescala (VMS) (HUGHES *et al.*, 1998) que utiliza o conceito de micromodelos e macromodelos, sendo que os micromodelos capturam efeitos em pequenas escalas de maneira a corrigir os macromodelos, sendo muito utilizado para a obtenção de métodos estabilizados para a mecânica dos fluidos.

Outro grupo de métodos proposto para flexibilizar o MEF em problemas com efeitos locais, é o dos métodos baseados em superposição de um domínio computacional local a um domínio global. A técnica Chimera definida por Benek *et al.* (1986) traz a introdução de orifícios na região de superposição dos modelos, definindo um contorno artificial para o modelo global, e a transmissão de dados ocorre através desses contornos artificiais gerados. O método S (FISH, 1992) trata o modelo local como um enriquecimento ao global, e a solução é obtida através da soma dos campos de interesse de cada domínio.

O método Arlequin (DHIA, 1998; DHIA; RATEAU, 2001), por sua vez, também baseia-se na superposição de modelos de modo a combinar um modelo local mais refinado a um global, no entanto, esse processo é realizado através do cruzamento e colagem entre os modelos em uma zona de superposição, fazendo-se isso através do uso de multiplicadores de Lagrange. O método Arlequin vem sendo utilizado amplamente em diversas áreas da mecânica dos sólidos (ver, por exemplo, Bauman *et al.* (2008), Biscani *et al.* (2016), Caleyron *et al.* (2013), Dhia e Jamond (2010), Dhia e Torkhani (2011), Jamond e Dhia (2013)), na DFC e IFE, entretanto, ainda é pouco explorado. Fernier, Faucher e Jamond (2020) aplica a metodologia para análise de escoamentos compressíveis, e Fernandes *et al.* (2020) utiliza uma versão estabilizada do método para análise de escoamentos incompressíveis e de IFE para problemas bidimensionais.

Ainda no contexto de superposição de domínios, pode-se citar o método de combinação dos espaços de função, proposto por Rosa, Coda e Sanches (2022), que consiste em ponderar as funções de forma da discretização local e da discretização global por funções de combinação e unir os espaços local e global, gerando uma nova base. No trabalho citado, a técnica foi aplicada para problemas de fratura da dinâmica de estruturas computacional para grandes deslocamentos.

No presente estudo, foram aplicadas duas metodologias de partição de domínios para análise dos fluidos dentro do contexto dos problemas de IFE tridimensionais, o método de combinação de espaços de funções e o método Arlequin estabilizado. Essas técnicas permitiram a consideração de efeitos localizados nos problemas analisados, além de possibilitarem a união de discretizações por método dos elementos finitos tradicional e análise isogeométrica.

1.3 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho é o desenvolvimento e implementação computacional de uma formulação tridimensional para análise de problemas de interação fluido-estrutura que permita a consideração de efeitos localizados no domínio do fluido por meio de técnica de partição de domínios, além de viabilizar o uso combinado de aproximações por elementos finitos clássicos e análise isogeométrica.

Para tal finalidade, enumeram-se os seguintes objetivos específicos:

- Desenvolvimento de um programa para a análise bi e tridimensional de escoamentos Newtonianos incompressíveis, que permita a utilização tanto da discretização por elementos finitos quanto da discretização isogeométrica;

- Estudo de técnicas de partição de domínios para levar em conta efeitos localizados no âmbito da DFC;

- Implementação de técnicas de partição de domínios no código de dinâmica dos fluidos computacional contemplando problemas da DFC com contornos móveis;

- Estudo aprofundado da formulação Lagrangiana total baseada em posições para estruturas de cascas, bem como do código computacional para análise dinâmica de cascas desenvolvido no grupo de pesquisa em que este trabalho está inserido;

- Acoplamento entre os códigos computacionais para fluido e para estruturas através do emprego de uma técnica particionada do tipo bloco-iterativa;

- Verificação dos códigos computacionais através da simulação de problemas da dinâmica dos fluidos, dinâmica das estruturas e de IFE e comparação com resultados da literatura.

1.4 Metodologia

A base da metodologia adotada para cada sub-problema envolvido nesta tese, consiste em estudo da literatura, desenvolvimento de formulação numérica, implementação computacional e verificação do código implementado.

Em função da complexidade envolvida na implementação das ferramentas computacionais propostas, optou-se pelo uso da linguagem de programação C++ orientada a objetos, visto que esta já vem sendo utilizada com sucesso no grupo de pesquisas em que este trabalho se insere, facilitando o aproveitamento de códigos pré-existentes. Além disso, a programação orientada a objetos proporciona maior modularidade aos códigos e maior facilidade para o acoplamento entre módulos distintos. Todas as implementações são realizadas utilizando bibliotecas, compiladores e softwares livres ou de código aberto, em ambiente Linux.

Toma-se como base como base os desenvolvimentos na área de análise isogeométrica da mecânica dos fluidos de Tonon (2016) e um código computacional de dinâmica dos fluidos para análises de escoamentos incompressíveis bidimensionais desenvolvido no trabalho de doutorado de Fernandes (2020). Esse código é inicialmente ampliado para contemplar elementos tridimensionais. Na sequência, implementa-se nesse código discretização isogeométrica por meio de funções NURBs.

A partir desse ponto, inicia-se o estudo das metodologias de decomposição de domínios e sua implementação para problemas bidimensionais da DFC, onde são consideradas duas técnicas, o método da combinação dos espaços de funções (ROSA, 2021; ROSA; CODA; SANCHES, 2022) e o Método Arlequin em sua versão estabilizada conforme o trabalho de Fernandes (2020), de modo a adotar o mais eficiente para as análises de IFE.

Os estudos e desenvolvimentos em relação à mecânica das estruturas fforam focados nas estruturas de casca, com base nos trabalhos de Coda (2018) e Sanches e Coda (2013, 2014), sendo empregado um código computacional desenvolvido no grupo de pesquisa em linguagem de programação em C++ orientada a objeto, que engloba tanto MEF quanto AIG.

O acoplamento entre os códigos para fluido e para estrutura é desenvolvido de forma particionada forte. Para maior eficiência na resolução dos problemas, adota-se o protocolo MPI (*Message passing interface*) para processamento paralelo com memória distribuída. A partição do domínio discretizado entre os processos, é realizado através da biblioteca METIS[1], e o pacote PETSc[2] (Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation) é adotada para a solução de sistemas lineares em processamento paralelo.

Para a geração de malhas de elementos finitos emprega-se o programa GMSH[3], enquanto para a geração dos *grids* para análise isogeométrica, emprega-se o programa desenvolvido pela autora e seu orientador durante seu trabalho de mestrado (TONON, 2016). Para pós-processamento e visualização dos resultados, utilizam-se os programas Kitware Paraview[4] e Gnuplot[5].

No que diz respeito à infraestrutura, utiliza-se o *cluster* disponível no Laboratório de Informática e de Mecânica Computacional (LIMC) do SET para a simulação de problemas mais complexos, e um computador pessoal para a simulação de problemas mais simples.

1.5 Justificativa

A motivação central desta pesquisa decorre da relevância científica e tecnológica dos problemas de interação fluido-estrutura (IFE) e das limitações das metodologias atualmente disponíveis para sua análise numérica. Embora os avanços recentes em dinâmica dos fluidos computacional, mecânica dos sólidos computacional e técnicas de acoplamento tenham possibilitado progressos significativos na modelagem desses problemas, ainda persistem desafios importantes, especialmente quando se trata de situações envolvendo grandes deslocamentos estruturais, escoamentos tridimensionais incompressíveis a altos números de Reynolds e grandes distorções ou mudanças topológicas no domínio do fluido.

Do ponto de vista computacional, os métodos tradicionais de acoplamento com malhas móveis apresentam limitações relacionadas ao elevado custo de remalhamentos sucessivos, inevitáveis em problemas com grandes distorções do domínio fluido. Por outro lado, os métodos de malhas fixas, embora adequados para lidar com grandes distorções no domínio do fluido, e até mesmo mudanças topológicas, apresentam deficiências na representação de fenômenos localizados, como os efeitos de camada limite em torno de estruturas imersas. Assim, fica justificada a busca por técnicas capazes de combinar as vantagens das abordagens existentes e, ao mesmo tempo, mitigar suas limitações.

Nesse contexto, a proposta de utilizar técnicas de decomposição de domínio com malhas superpostas apresenta-se como uma alternativa promissora. A superposição de uma malha local (móvel e conforme à estrutura) à uma malha global (fixa e menos refinada), possibilita tanto o tratamento adequado de problemas grandes escalas de deslocamento, incluindo alguns problemas com distorção indefinida do domínio do fluido, como ocorre

[1] Disponível em: http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/metis/metis/overview
[2] Disponível em: http://https://www.mcs.anl.gov/petsc/
[3] Disponível em:https://gmsh.info/
[4] Disponível em:http://https://www.paraview.org/
[5] Disponível em:https://gnuplot.info/

em diversos casos que envolvem estruturas rotativas, quanto a captura precisa de efeitos de fronteira, reduzindo a necessidade de remalhamentos extensivos. Além disso, a adoção de diferentes discretizações — combinando elementos finitos e análise isogeométrica — permite explorar as vantagens de cada metodologia, tais como a flexibilidade geométrica dos elementos finitos e a descrição exata de superfícies e continuidade elevada das funções NURBS.

Adicionalmente, a literatura ainda é incipiente no que se refere à aplicação conjunta da análise isogeométrica e do método dos elementos finitos em problemas de IFE tridimensionais. A investigação do método de combinação dos espaços de funções e do método Arlequin estabilizado, aplicados ao acoplamento entre malhas globais e locais tridimensionais, representa uma contribuição original deste trabalho, tanto no âmbito teórico quanto no computacional. Em particular, o uso do método Arlequin estabilizado para escoamentos incompressíveis tridimensionais e sua extensão para a análise de problemas de IFE tridimensionais configuram avanço frente às metodologias atualmente disponíveis, e ao considerar a combinação elementos finitos - análise isogeométrica esse avanço torna-se ainda mais relevante.

Portanto, esta tese justifica-se pela necessidade de desenvolver e consolidar técnicas numéricas mais eficientes e robustas para a análise de problemas complexos de interação fluido-estrutura. O desenvolvimento proposto possui potencial para aplicações práticas em diversos ramos da engenharia, tais como análise aeroelástica, projeto de estruturas submetidas à ação do vento, projetos de aerogeradores, dinâmica de sistemas biomecânicos e estudo de fenômenos hidrodinâmicos em engenharia naval e oceânica.

2 DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL

O escoamento isotérmico de um fluido newtoniano é descrito pelas equações advindas da conservação da quantidade de movimento, ou de Navier-Stokes, e da conservação de massa. Nos casos em que ocorram variações significativas de temperatura ou em escoamentos compressíveis, a equação da conservação da energia deve ser incorporada ao sistema. Essas equações, em conjunto com a relação constitutiva, formam um sistema de equações diferenciais não lineares que descrevem o comportamento do escoamento no tempo e no espaço.

Neste trabalho, são investigados escoamentos incompressíveis, isotérmicos e com contornos móveis. As seções seguintes apresentam a abordagem adotada para a resolução desse tipo de problema, bem como sua implementação computacional. Adota-se uma descrição Euleriana-Lagrangiana Arbitrária (ALE) para representar as equações, e a discretização espacial é realizada por meio do método dos elementos finitos (FEM) ou da análise isogeométrica (AIG).

Para tratar questões numéricas recorrentes nesse tipo de equações, como as oscilações espúrias em casos de convecção dominante, típicas da aplicação direta do método dos resíduos ponderados na formulação clássica de Galerkin, emprega-se a metodologia Streamline Upwind/Petrov-Galerkin (SUPG). Além disso, a estabilização Pressure-Stabilizing/Petrov-Galerkin (PSPG) é aplicada com o objetivo de contornar as condições de *Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi* (LBB) associadas aos escoamentos incompressíveis, permitindo o uso estável de um mesmo espaço de funções de aproximação para pressão e velocidade. A integração temporal é realizada por meio do método α-generalizado.

Ao final deste capítulo, apresenta-se um algoritmo que descreve o esquema de solução computacional adotado neste trabalhos para a mecânica dos fluidos, seguido da simulação de casos clássicos para a verificação da metodologia proposta.

2.1 Equações governantes na descrição Euleriana

2.1.1 Equação da conservação da massa

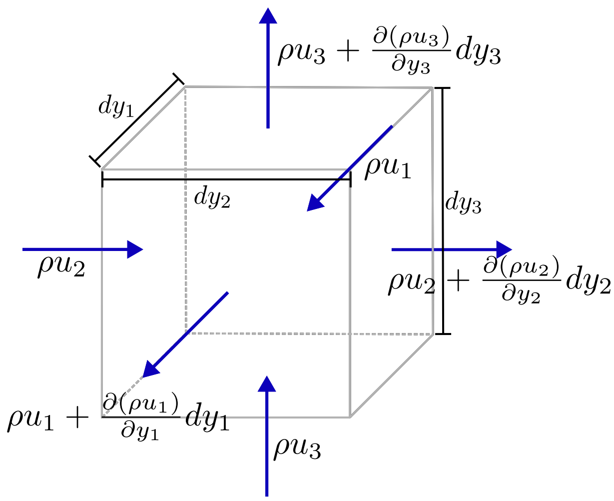
Para obter a equação da conservação da massa na descrição espacial, considera-se um volume de controle infinitesimal fixo no espaço, permeável à matéria e submetido a um escoamento com velocidade $\mathbf{u}$, cujos componentes são u_1, u_2 e u_3 (conforme a Figura 1). Para um intervalo de tempo infinitesimal $\mathrm{d}t$, a lei da conservação da massa estabelece que a variação de massa dentro do volume de controle deve ser igual ao balanço do fluxo líquido de massa que atravessa suas fronteiras, podendo ser expressa matematicamente da seguinte forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}V = (\rho u_1 \mathrm{d}A_1 + \rho u_2 \mathrm{d}A_2 + \rho u_3 \mathrm{d}A_3) - \left(\left(\rho u_1 + \frac{\partial \rho u_1}{\partial y_1}\mathrm{d}y_1 \right) \mathrm{d}A_1 + \left(\rho u_2 + \frac{\partial \rho u_2}{\partial y_2}\mathrm{d}y_2 \right) \mathrm{d}A_2 + \left(\rho u_3 + \frac{\partial \rho u_3}{\partial y_3}\mathrm{d}y_3 \right) \mathrm{d}A_3 \right), \tag{2.1}$$

com ρ sendo a densidade de massa do fluido e $\mathrm{d}A_i$ a área referente à face ortogonal ao eixo y_i. Considerando que $\mathrm{d}V = \mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3 = \mathrm{d}y_1\mathrm{d}A_1 = \mathrm{d}y_2\mathrm{d}A_2 = \mathrm{d}y_3\mathrm{d}A_3$ e manipulando-se algebricamente a Equação (2.1), resulta:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u_1}{\partial y_1} - \frac{\partial \rho u_2}{\partial y_2} - \frac{\partial \rho u_3}{\partial y_3}. \tag{2.2}$$

Figura 1 – Volume de controle infinitesimal: Fluxo de massa



Fonte: Elaborada pela autora

Para escoamentos incompressíveis, quando ρ é constante ao longo do tempo, a equação fica reduzida a:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \frac{\partial u_2}{\partial y_2} + \frac{\partial u_3}{\partial y_3} = 0, \tag{2.3}$$

ou ainda:

$$\boldsymbol{\nabla}_y \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{2.4}$$

onde $\boldsymbol{\nabla}_y \cdot (\mathbf{u})$ é o divergente de $\mathbf{u}$ em relação às coordenadas Eulerianas $\mathbf{y}$.

2.1.2 Equação da quantidade de movimento

Para um volume de controle infinitesimal, a lei da conservação da quantidade de movimento afirma que a variação temporal da quantidade de movimento no interior do volume é determinada pela diferença entre o fluxo de quantidade de movimento que entra e o que sai pelas suas fronteiras, somada à resultante das forças aplicadas sobre o volume de controle.

Para chegar-se à equação da quantidade de movimento em sua forma conservativa e seguindo a descrição espacial, inicia-se com a avaliação das forças que atuam sobre um volume de controle infinitesimal no instante atual, como ilustrado na Figura 2, onde são mostradas apenas as componentes que atuam na direção y_1. Somando-se vetorialmente as componentes de forças externas e internas na direção y_1, chega-se na seguinte relação:

$$\begin{aligned} F_1 = & -\left(\sigma_{11}\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3 + \sigma_{12}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_3 + \sigma_{13}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\right) + \\ & \left(\left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial y_1}\mathrm{d}y_1\right)\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3 + \left(\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y_2}\mathrm{d}y_2\right)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_3 + \left(\sigma_{13} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial y_3}\mathrm{d}y_3\right)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\right) + \\ & b_1\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3, \end{aligned} \tag{2.5}$$

onde F_1 representa a resultante das forças externas na direção y_1; σ_{ij} são as componentes ij do tensor das tensões de Cauchy ($\boldsymbol{\sigma}$); e b_1 representa a componente do vetor força de campo por unidade de volume na direção y_1. Dividindo-se Equação (2.5) por $\mathrm{d}V$ e efetuando as subtrações, tem-se a componente de força resultante por unidade de volume na direção de y_1 (q_1):

$$q_1 = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial y_3} + b_1. \tag{2.6}$$

Seguindo a mesma ideia para as direções y_2 e y_3, escreve-se:

$$q_2 = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y_3} + b_2, \tag{2.7}$$

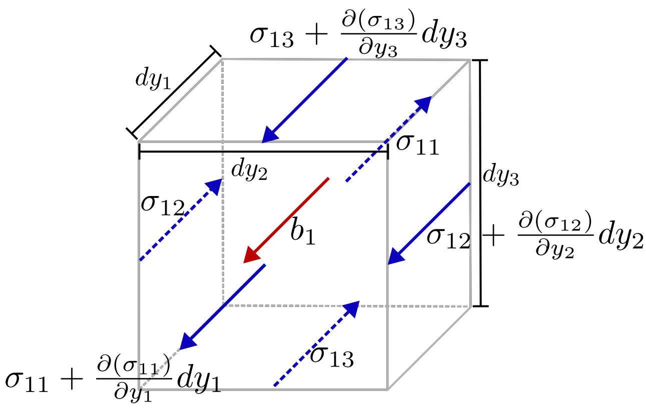
e

$$q_3 = \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial y_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial y_3} + b_3, \tag{2.8}$$

ou ainda, de forma simbólica:

$$\mathbf{q} = \boldsymbol{\nabla}_y \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}. \tag{2.9}$$

Figura 2 – Volume de controle infinitesimal: Componentes de força na direção y_1



Fonte: Elaborada pela autora

Realizando-se o balanço da quantidade de movimento no volume de controle infinitesimal da Figura 3, e aplicando-se o princípio da conservação da quantidade de movimento, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} \mathrm{d}V =& u_1 \rho \mathbf{u} \mathrm{d}A_1 + u_2 \rho \mathbf{u} \mathrm{d}A_2 + u_3 \rho \mathbf{u} \mathrm{d}A_3 - \\ & \left(\left(u_1 \rho \mathbf{u} + \frac{\partial u_1 \rho \mathbf{u}}{\partial y_1} \mathrm{d}y_1 \right) \mathrm{d}A_1 + \left(u_2 \rho \mathbf{u} + \frac{\partial u_2 \rho \mathbf{u}}{\partial y_2} \mathrm{d}y_2 \right) \mathrm{d}A_2 + \right. \\ & \left. \left(u_3 \rho \mathbf{u} + \frac{\partial u_3 \rho \mathbf{u}}{\partial y_3} \mathrm{d}y_3 \right) \mathrm{d}A_3 \right) + \mathbf{q} \mathrm{d}V, \end{aligned} \tag{2.10}$$

dividindo-se a Equação (2.10) por dV e efetuando-se as subtrações, chega-se a:

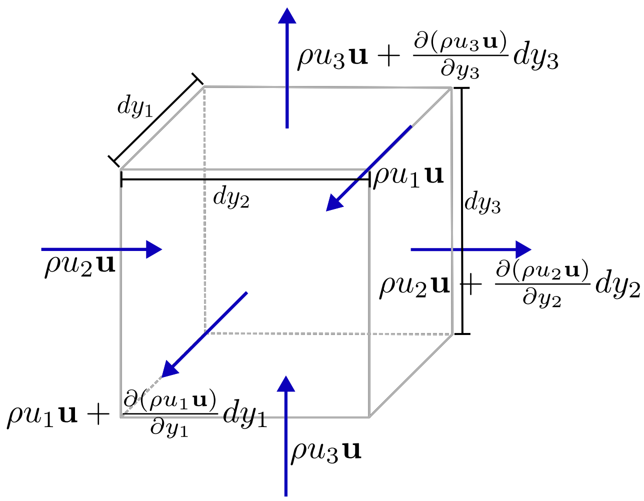
$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\partial u_1 \rho \mathbf{u}}{\partial y_1} - \frac{\partial u_2 \rho \mathbf{u}}{\partial y_2} - \frac{\partial u_3 \rho \mathbf{u}}{\partial y_3} + \mathbf{q}, \tag{2.11}$$

ou ainda, considerando que ρ é constante:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}_y \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mathbf{f} \right) - \boldsymbol{\nabla}_y \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \tag{2.12}$$

onde $\mathbf{f} = \mathbf{b}/\rho$ representa a força de campo por unidade de massa.

Figura 3 – Volume de controle infinitesimal: Fluxo de quantidade de Movimento



Fonte: Elaborada pela autora

Da consideração da equação da continuidade, a Equação (2.12) pode ser rescrita ainda em sua forma convectiva como:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}_y)\,\mathbf{u} - \mathbf{f}\right) - \boldsymbol{\nabla}_y\cdot\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \tag{2.13}$$

2.1.3 Relação constitutiva

O tensor de tensões de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ é definido para fluidos newtonianos incompressíveis pela seguinte relação constitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \tag{2.14}$$

onde p representa a pressão, μ a viscosidade dinâmica do fluido e $\boldsymbol{\varepsilon}(\bullet)$ é o tensor taxa de deformação Euleriana, definido como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\bullet) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}_y(\bullet) + \boldsymbol{\nabla}_y(\bullet)^T\right). \tag{2.15}$$

2.2 Descrição Euleriana-Lagrangiana arbitrária (ALE)

A descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária (DONEA; GIULIANI; HALLEUX, 1982; HUGHES; LIU; ZIMMERMAN, 1981) representa uma generalização das descrições puramente Lagrangiana e puramente Euleriana do movimento do contínuo. A descrição

Lagrangiana fixa a atenção em pontos materiais do contínuo, enquanto que, na descrição Euleriana, considera-se uma porção fixa do espaço ocupada pelo contínuo e analisam-se os pontos materiais que passam por essa porção ao longo do tempo. Como consequência, na descrição puramente Lagrangiana a malha computacional move-se com o contínuo, enquanto que, na Euleriana, a malha computacional mantém-se espacialmente fixa e permeável ao meio contínuo. Por sua vez, na descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária trabalha-se com um domínio de referência que pode mover-se de maneira independente do movimento dos pontos materiais do contínuo analisado.

Para a aplicação dessa metodologia às equações governantes da mecânica dos fluidos, consideram-se três domínios contínuos, de acordo com a Figura 4: (i) o domínio inicial, chamado de **domínio material** (Ω_0), definido pelas coordenadas dos pontos materiais $\mathbf{x}$ na configuração inicial; (ii) o domínio atual, chamado de **domínio espacial** (Ω), definido pelas coordenadas espaciais $\mathbf{y}$; e, por fim, (iii) o **domínio de referência** ($\Omega_{\bar{x}}$), associado às coordenadas dos pontos de referência $\bar{\mathbf{x}}$.

Considera-se neste texto, o domínio de referência, $\Omega_{\bar{x}}$, como sendo a configuração inicial da malha, enquanto que as configurações atuais, tanto da malha como do contínuo, coincidem com a referência espacial Ω.

As coordenadas no domínio Ω podem ser mapeadas a partir do domínio inicial (Ω_0) ou do domínio de referência ($\Omega_{\bar{x}}$) utilizando as seguintes funções de mapeamento:

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, t). \tag{2.16}$$

Da mesma forma, o domínio de referência pode ser mapeado a partir do domínio inicial por:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathfrak{f}(\mathbf{x}, t). \tag{2.17}$$

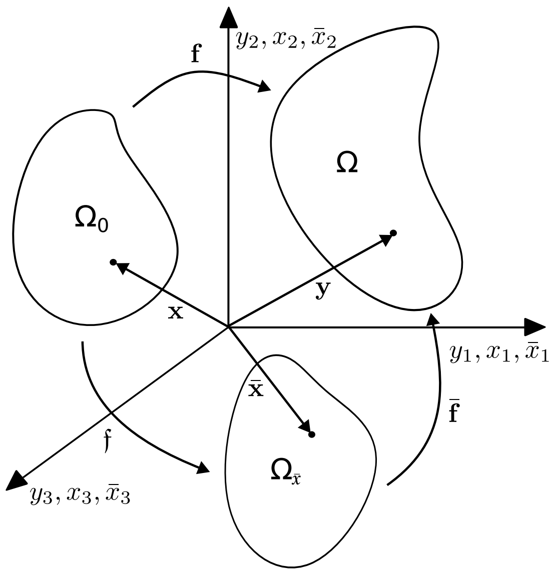
A velocidade dos pontos da malha é calculada por:

$$\bar{\mathbf{u}} = \left.\frac{\partial \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial t}\right|_{\bar{\mathbf{x}}}, \tag{2.18}$$

e a velocidade dos pontos materiais no instante t é obtida pela derivada do vetor posição $\mathbf{y}$, mantendo $\mathbf{x}$ fixo:

$$\mathbf{u} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} = \left.\frac{\partial \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}}. \tag{2.19}$$

Figura 4 – Descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária



Fonte: Elaborada pela autora

As matrizes jacobianas dos mapeamentos considerando a dependência do espaço e do tempo são dadas por:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial\left(\mathbf{f}(\mathbf{x},t),t\right)}{\partial(\mathbf{x},t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.20}$$

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{\partial\left(\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}},t),t\right)}{\partial(\bar{\mathbf{x}},t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} & \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.21}$$

e

$$\mathfrak{F} = \frac{\partial\left(\mathfrak{f}(\mathbf{x},t),t\right)}{\partial(\mathbf{x},t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{w} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.22}$$

sendo $\mathbf{w} = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial t}\Big|_{\mathbf{x}}$.

Considerando que $\mathbf{f}\left(\mathbf{x},t\right) = \bar{\mathbf{f}} \circ \mathfrak{f}$, pode-se escrever:

$$\frac{\partial(\mathbf{f}(\mathbf{x},t),t)}{\partial(\mathbf{x},t)} = \frac{\partial(\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}},t),t)}{\partial(\bar{\mathbf{x}},t)} \cdot \frac{\partial(\mathfrak{f}(\mathbf{x},t),t)}{\partial(\mathbf{x},t)}, \tag{2.23}$$

que pode ser rescrita como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} & \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{w} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.24}$$

Dessa forma, pode-se estabelecer uma relação entre a velocidade da malha e a velocidade do ponto material:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{w}. \tag{2.25}$$

Supondo agora uma grandeza física escalar, denominada $g(\mathbf{y}, t)$ na configuração espacial, de $g^*(\bar{\mathbf{x}}, t)$ na configuração de referência e $g^{**}(\mathbf{x}, t)$ na configuração material, pode-se escrever então:

$$g^{**}(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), t), \tag{2.26}$$

ou:

$$g^{**} = g \circ \mathbf{f}, \tag{2.27}$$

o que permite escrever o seguinte gradiente:

$$\frac{\partial g^{**}(\mathbf{x}, t)}{\partial (\mathbf{x}, t)} = \frac{\partial g(\mathbf{y}, t)}{\partial (\mathbf{y}, t)} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial (\mathbf{x}, t)}, \tag{2.28}$$

que, em forma matricial, é apresentado como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g^{**}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial g^{**}}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial g}{\partial t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.29}$$

Essa expressão nos permite escrever a derivada temporal da variável na configuração material:

$$\frac{\partial g^{**}}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}} \cdot \mathbf{u}, \tag{2.30}$$

que corresponde à derivada material de g. Para facilitar a visualização, podem-se remover os sobrescritos $**$, e então:

$$\frac{Dg}{Dt} = \left.\frac{\partial g}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} = \left.\frac{\partial g}{\partial t}\right|_{\mathbf{y}} + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}_y g. \tag{2.31}$$

Usando essa mesma metodologia, pode-se escrever a transformação de $g^*(\bar{\mathbf{x}}, t)$ para a referência material da seguinte forma:

$$g^{**} = g^* \circ \mathfrak{f}, \tag{2.32}$$

que resulta no seguinte gradiente

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g^{**}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial g^{**}}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g^{*}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} & \frac{\partial g*}{\partial t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{w} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.33}$$

com a segunda coluna resultando em:

$$\frac{\partial g^{**}}{\partial t} = \frac{\partial g^{*}}{\partial t} + \frac{\partial g^{*}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{w}. \tag{2.34}$$

Utilizando-se a expressão apresentada na Equação (2.25) e substituindo-a na Equação (2.34), resulta em:

$$\frac{\partial g^{**}}{\partial t} = \frac{\partial g^{*}}{\partial t} + \frac{\partial g^{*}}{\partial \mathbf{y}} \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\,. \tag{2.35}$$

Removendo-se os sobrescritos (** e *), chega-se a equação fundamental para os desenvolvimentos utilizando a metodologia ALE:

$$\frac{Dg}{Dt} = \left.\frac{\partial g}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} = \left.\frac{\partial g}{\partial t}\right|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \boldsymbol{\nabla}_y g. \tag{2.36}$$

A partir da definição de derivada material da Equação (2.31) e comparando com a Equação (2.13), pode-se rescrever a equação da quantidade de movimento da seguinte forma:

$$\rho \left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \mathbf{f} \right) - \boldsymbol{\nabla}_y \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \tag{2.37}$$

Para expressar a equação da quantidade de movimento em uma descrição Euleriana-Lagrangeana, basta substituir na Equação (2.37) a definição de derivada material apresentada na Equação (2.36), resultando:

$$\rho\left(\left.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})\cdot\boldsymbol{\nabla}_y\mathbf{u} - \mathbf{f}\right) - \boldsymbol{\nabla}_y\cdot\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \tag{2.38}$$

A equação da continuidade é independente da movimentação da malha. Dessa forma, a Equação (2.4) permanece válida para análises usando uma descrição ALE.

2.2.1 Forma forte do modelo para escoamentos incompressíveis com contornos móveis

Nesta seção é apresentado o problema para escoamentos incompressíveis com contornos móveis, assumindo-se que a velocidade da malha (do domínio de referência) é inteiramente conhecida. Posteriormente será desenvolvido o modelo matemático adotado para a movimentação da malha.

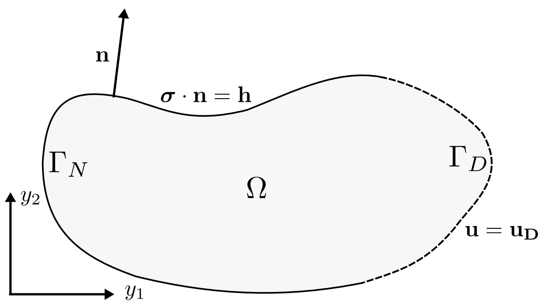
Seja $\Omega \in \mathbb{R}^{n_{\mathrm{sd}}}$, com $n_{\mathrm{sd}} = 1, 2, 3$ definindo a dimensão do domínio espacial do escoamento com contorno $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, no instante $t \in (0, T)$ (ver Figura 5).

Para escoamentos incompressíveis isotérmicos o fluido possui movimento descrito pela equação da quantidade de movimento, (Equação (2.37)) e da continuidade (Equação (2.4)). Para completar a formulação da mecânica dos fluidos, condições de contorno devem ser especificadas. Em geral, em uma dada parte do contorno espacial, condições de contorno essenciais (Dirichlet) ou naturais (Neumann) são aplicadas. Dessa forma, o escoamento é governado pelo seguinte conjunto de equações:

$$\begin{cases} \rho\left(\left.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})\cdot\boldsymbol{\nabla}_y\mathbf{u} - \mathbf{f}\right) - \boldsymbol{\nabla}_y\cdot\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ em } \Omega \\ \boldsymbol{\nabla}_y\cdot\mathbf{u} = 0 \text{ em } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_D \text{ em } \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{h} \text{ em } \Gamma_N, \end{cases} \tag{2.39}$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é obtido por meio da Equação (2.14), sendo Γ_D a porção do contorno sobre a qual são impostas as condições de contorno de Dirichlet, representadas pela distribuição de velocidade prescrita $\mathbf{u}_D$, e Γ_N a porção com condições de Neumann, descritas pelas forças de superfície $\mathbf{h}$. A variável $\mathbf{n}$ representa o vetor unitário normal ao contorno Γ_N.

Figura 5 – Domínio para o problema da DFC



Fonte: Elaborada pela autora

2.3 Forma fraca e discretização espacial das equações governantes

Tomando-se a forma forte das equações governantes da DFC em descrição ALE, aplica-se o método dos resíduos ponderados para se chegar à forma fraca e proceder com a discretização espacial. Os espaços de dimensão finita das funções tentativa que descrevem a velocidade e a pressão são chamados de $\mathcal{S}_u$ e $\mathcal{S}_p$ respectivamente, e definidos como:

$$\mathcal{S}_u = \left\{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u}(\cdot, t) \in \left(H^1(\Omega) \right)^{n_{\text{sd}}}, \mathbf{u} = \mathbf{u}_D \text{ em } \Gamma_D \right\} \tag{2.40}$$

e

$$\mathcal{S}_p = \left\{ p \mid p(\cdot) \in L^2(\Omega), \int_\Omega p \, \mathrm{d}\Omega = 0 \text{ se } \Gamma = \Gamma_N \right\}, \tag{2.41}$$

sendo $(H^1(\Omega))^{n_{\text{sd}}}$ o espaço de funções vetoriais com derivadas de quadrado integrável sobre Ω e $L^2(\Omega)$ o espaço de funções escalares de quadrado integrável sobre Ω.

Os espaços das funções teste (ou funções ponderadoras) das equações da quantidade de movimento e da continuidade são definidos, respectivamente, por:

$$\mathcal{V}_u = \left\{ \mathbf{w} \mid \mathbf{w}(\cdot) \in \left(H^1(\Omega) \right)^{n_{\text{sd}}}, \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_D \right\}, \tag{2.42}$$

$$\mathcal{V}_p = \mathcal{S}_p. \tag{2.43}$$

Aplicando-se o método dos resíduos ponderados às equações Equação (2.38) e Equação (2.4), integrando-se por partes o termo referente ao tensor de tensões de Cauchy, empregando-se o teorema da divergência e levando-se em consideração a condição de homogeneidade da função $\mathbf{w}$ sobre o contorno Γ_D, obtém-se a forma fraca do problema, dada por:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \rho \left(\left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \boldsymbol{\nabla}_y \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) : \boldsymbol{\sigma} \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_N} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} \mathrm{d}\Gamma_N = 0, \quad (2.44)$$

e

$$\int_{\Omega} q \left(\boldsymbol{\nabla}_y \cdot \mathbf{u} \right) \mathrm{d}\Omega = 0. \quad (2.45)$$

A solução do problema consiste, então, em encontrar $\mathbf{u} \in \mathcal{S}_u$ e $p \in \mathcal{S}_p$, de modo que para todo $\mathbf{w} \in \mathcal{V}_u$ e para todo $q \in \mathcal{V}_p$, Equação (2.44) e Equação (2.45) sejam verdadeiras.

2.3.1 Método dos elementos finitos

Antes de prosseguir com a discretização espacial da forma fraca do conjunto de equações da Mecânica dos Fluidos, é fundamental compreender os princípios básicos do Método dos Elementos Finitos. A discretização espacial tanto pelo método dos elementos finitos, como pela técnica de análise isogeométrica (Capítulo 3), baseia-se em tomar um problema contínuo com domínio Ω e representá-lo por um domínio Ω^h que é dividido em subdomínios Ω^e, também chamados de elementos ou células, de forma que:

$$\Omega \approx \Omega^h = \bigcup_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \Omega^e, \quad (2.46)$$

onde n_{el} representa o número total de elementos.

Da mesma forma, o contorno de Ω é aproximado da seguinte forma:

$$\Gamma \approx \Gamma^h = \bigcup_{b=1}^{n_{\mathrm{eb}}} \Gamma^b, \quad (2.47)$$

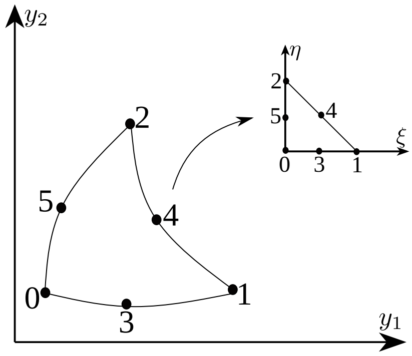
onde n_{eb} representa o número de faces ou lados de elementos que formam o contorno.

No Método dos Elementos Finitos, cada elemento é definido com auxílio de um conjunto de pontos chamados nós. As variáveis de interesse do problema, que incluem a geometria na abordagem isoparamétrica, são aproximadas pela combinação linear de um número finito de funções associadas aos nós, chamadas funções de forma, multiplicadas por variáveis denominadas parâmetros nodais. As funções de forma utilizadas no Método dos Elementos Finitos tradicionalmente satisfazem a propriedade de partição da unidade, ou seja, a soma das funções de forma associadas a todos os nós de um elemento resulta em 1 para qualquer ponto dentro do seu domínio. A técnica de elementos finitos pode ser encontrada nos diversos livros disponíveis sobre o assunto, tais como Reddy (2006) e Zienkiewicz, Taylor e Nithiarasu (2005a).

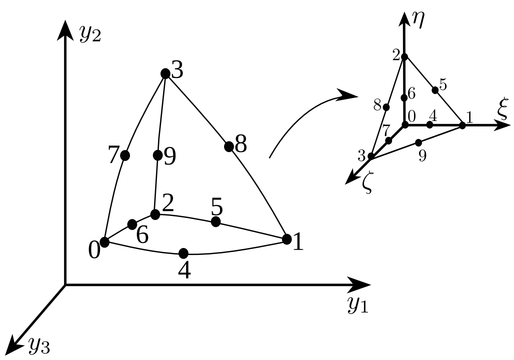
Nesse trabalho, para a mecânica dos fluidos, são utilizadas funções de forma quadráticas do tipo polinômios de Lagrange, sendo empregados elementos isoparamétricos triangulares para o caso 2D e tetraédricos para o caso 3D. Esses elementos são apresentados na Figura 6a e Figura 6b, onde são ilustrados também as coordenadas paramétricas adimensionais adotados para definir as funções de forma.

Figura 6 – Elementos Finitos: representação espacial e paramétrica

(a) Elemento Finito 2d



(b) Elemento Finito 3d



Fonte: Elaborada pela autora

Adotar a abordagem isoparamétrica implica que a geometria do problema é descrita também pela combinação entre funções de forma e as coordenadas nodais da malha, ou seja:

$$\mathbf{y}^h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{a=1}^{n_{\text{nos}}} \mathbf{y}_a N_a(\boldsymbol{\xi}), \tag{2.48}$$

sendo que para uma geometria tridimensional o vetor $\mathbf{y}$ possui coordenadas y_1, y_2 e y_3, as quais representam as posições atuais dos pontos que compõem o domínio. O subíndice "a" representa o índice dos nós da malha, n_{nos} o número total de nós e N as funções de forma da discretização.

2.3.2 Discretização espacial

As funções tentativa para velocidade e pressão, bem as funções teste, assim com as coordenadas (Equação (2.48)) são dadas pela combinação linear das funções de forma definidas sobre cada subdomínio:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{y}, t) = \sum_{a=1}^{n_{\text{nos}}} \mathbf{u}_a(t) N_a(\boldsymbol{\xi}), \tag{2.49}$$

$$p^h(\mathbf{y}, t) = \sum_{a=1}^{n_{\text{nos}}} p_a(t) N_a(\boldsymbol{\xi}), \tag{2.50}$$

$$\mathbf{w}^h(\mathbf{y}) = \sum_{a=1}^{n_{\text{nos}}} \mathbf{w}_a N_a(\boldsymbol{\xi}) \tag{2.51}$$

e

$$q^h(\mathbf{y}) = \sum_{a=1}^{n_{\text{nos}}} q_a N_a(\boldsymbol{\xi}). \tag{2.52}$$

O problema passa a ser enunciado como: Encontrar $\mathbf{u}^h \in \mathcal{S}_u^h$ e $p^h \in \mathcal{S}_p^h$, de tal modo que $\forall\ \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_u^h$ e $q^h \in \mathcal{V}_p^h$ a seguinte expressão seja verdadeira:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathbf{w}^h \cdot \rho \left(\left.\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t}\right|_{\bar{\mathbf{x}}} + \left(\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\right) \cdot \boldsymbol{\nabla}_y \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^{\mathbf{h}} \right) \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^h) : \boldsymbol{\sigma}\left(\mathbf{u}^h, p^h\right) \mathrm{d}\Omega \\ - \int_{\Gamma_N} \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{h}^{\mathbf{h}} \mathrm{d}\Gamma_N + \int_\Omega q^h \left(\boldsymbol{\nabla}_y \cdot \mathbf{u}^h\right) d\Omega = 0.\end{aligned} \tag{2.53}$$

sendo as variáveis $\mathbf{w}_a$ e q_a arbitrárias nas aproximações, enquanto $\mathbf{u}_a$ e p_a são as incógnitas a serem determinadas.

No entanto, as formulações obtidas pelo método de Bubnov-Galerkin são conhecidas por apresentarem oscilações espúrias em escoamentos dominados pela convecção. Uma das formas de se lidar com esse problema é a utilização de métodos estabilizados, como o *Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin* (SUPG) (BROOKS; HUGHES, 1982; HUGHES; TEZDUYAR, 1984). Essa metodologia consiste em adicionar à equação da quantidade de movimento, o seu resíduo ponderado por $\tau_{\mathrm{SUPG}}\left(\left(\mathbf{u}^h-\bar{\mathbf{u}}^h\right)\cdot\boldsymbol{\nabla}_y\mathbf{w}^h\right)$, onde τ_{SUPG} é um parâmetro calculado para garantir bom condicionamento ao sistema. Do ponto de vista numérico, isso adiciona termos estabilizantes na direção das linhas de corrente, mantendo a formulação consistente por ser baseado na adição do resíduo ponderado.

Para os problemas de escoamentos incompressíveis aqui analisados, deve-se levar em conta que os campos de velocidade e pressão não podem ser aproximados arbitrariamente, podendo levar à ocorrência de oscilações espúrias no campo de pressão e instabilidade na solução. Para evitar isso, podem ser escolhidos elementos Taylor-Hood que obedeçam à condição de *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi* (LBB) (BREZZI; FORTIN, 1991; STRANG; FIX, 2008; ZIENKIEWICZ; TAYLOR; NITHIARASU, 2005b), ou pode-se recorrer a um método estabilizado.

Para conferir maior flexibilidade ao programa, opta-se pela formulação estabilizada com a técnica *Pressure Stabilization Petrov Galerkin* (PSPG) (HUGHES; FRANCA; BALESTRA, 1986; TEZDUYAR *et al.*, 1992a). Essa técnica consiste em adicionar à equação da continuidade, o resíduo da equação da quantidade de movimento ponderado pela função $\tau_{\mathrm{PSPG}}\left(\frac{\boldsymbol{\nabla}_y q^h}{\rho}\right)$, onde τ_{PSPG} é um parâmetro calculado para garantir bom condicionamento ao sistema. Essa técnica introduz termo dependente da pressão na equação da continuidade, que é responsável pela estabilização, contornando a condição LBB.

Por fim, para prover maior estabilização em problemas com formação de vórtices, adiciona-se à equação da quantidade de movimento o resíduo da equação da continuidade ponderado por $\nu_{\mathrm{LSIC}}\rho\left(\boldsymbol{\nabla}_y\cdot\mathbf{w}^h\right)$, sendo ν_{LSIC} um parâmetro de estabilização. Essa estabilização, denominada *Least Squares on Incompressibility Constraint LSIC* (LSIC), dá origem a um termo do tipo mínimos quadrados que introduz, de forma consistente, maior estabilidade à formulação (BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013a; TEZDUYAR; OSAWA, 2000).

Nota-se que a consistência da formulação com SUPG, PSPG e LSIC é garantida, uma vez que são adicionados às equações seus resíduos ponderados.

Assim, o problema da dinâmica dos fluidos na formulação estabilizada, passa a ser a determinação de $\mathbf{u}^h \in \mathcal{S}_u^h$ e $p^h \in \mathcal{S}_p^h$, de tal modo que $\forall\ \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_u^h$ e $q^h \in \mathcal{V}_p^h$ as seguintes expressões sejam verdadeiras:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}^h \cdot \rho \left(\left. \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} + \left(\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\right) \cdot \boldsymbol{\nabla}_y \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^{\mathbf{h}} \right) \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}\left(\mathbf{w}^h\right) : \boldsymbol{\sigma}\left(\mathbf{u}^h, p^h\right) \, \mathrm{d}\Omega$$
$$- \int_{\Gamma_N} \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{h}^{\mathbf{h}} \, \mathrm{d}\Gamma_N + \sum_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\Omega^e} \tau_{\mathrm{SUPG}} \left(\left(\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\right) \cdot \boldsymbol{\nabla}_y \mathbf{w}^h \right) \cdot \mathbf{r}_{\mathrm{M}}\left(\mathbf{u}^h, p^h\right) \, \mathrm{d}\Omega \tag{2.54}$$
$$+ \sum_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\Omega^e} \rho \nu_{\mathrm{LSIC}} \boldsymbol{\nabla}_y \cdot \mathbf{w}^h r_{\mathrm{C}}\left(\mathbf{u}^h\right) \, \mathrm{d}\Omega = 0,$$

e

$$\int_{\Omega} q^h \boldsymbol{\nabla}_y \cdot \mathbf{u}^h \, \mathrm{d}\Omega + \sum_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\Omega^e} \tau_{\mathrm{PSPG}} \left(\frac{\boldsymbol{\nabla}_y q^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_{\mathrm{M}}\left(\mathbf{u}^h, p^h\right) \, \mathrm{d}\Omega = 0, \tag{2.55}$$

onde $\mathbf{r}_{\mathrm{M}}$ e r_{C} são os resíduos da equação da quantidade de movimento e da equação da continuidade, respectivamente, dados por:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{M}}\left(\mathbf{u}^h, p^h\right) = \rho \left(\left. \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} + \left(\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\right) \cdot \boldsymbol{\nabla}_y \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^{\mathbf{h}} \right) - \boldsymbol{\nabla}_y \cdot \boldsymbol{\sigma}\left(\mathbf{u}^h, p^h\right), \tag{2.56}$$

$$r_{\mathrm{C}}\left(\mathbf{u}^h\right) = \boldsymbol{\nabla}_y \cdot \mathbf{u}^h. \tag{2.57}$$

Visto que existem funções teste separadas para a velocidade e pressão, pode-se definir dois vetores residuais correspondentes a equação da quantidade de movimento ($\mathbf{R}_{\mathrm{M}}$) e a equação da continuidade ($\mathbf{R}_{\mathrm{C}}$). Considerando a arbitrariedade de $\mathbf{w}_a$ e q_a, tem-se:

$$\mathbf{R}_{\mathrm{M}} = [(\mathbf{R}_{\mathrm{M}})_{a,i}], \tag{2.58}$$

$$\mathbf{R}_{\mathrm{C}} = [(\mathbf{R}_{\mathrm{C}})_{a}], \tag{2.59}$$

com:

$$(\mathbf{R}_{\mathrm{M}})_{a,i} = \int_{\Omega} N_a \mathbf{e}_{\mathbf{i}} \cdot \rho \left(\left. \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} + \left(\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\right) \cdot \boldsymbol{\nabla}_y \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^{\mathbf{h}} \right) \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}\left(N_a \mathbf{e}_{\mathbf{i}}\right) : \boldsymbol{\sigma}\left(\mathbf{u}^h, p^h\right) \, \mathrm{d}\Omega$$
$$- \int_{\Gamma_N} N_a \mathbf{e}_{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{h}^{\mathbf{h}} \, \mathrm{d}\Gamma_N + \sum_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\Omega^e} \tau_{\mathrm{SUPG}} \left(\left(\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\right) \cdot \boldsymbol{\nabla}_y N_a \mathbf{e}_{\mathbf{i}} \right) \cdot \mathbf{r}_{\mathrm{M}}\left(\mathbf{u}^h, p^h\right) \, \mathrm{d}\Omega$$
$$+ \sum_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\Omega^e} \rho \nu_{\mathrm{LSIC}} \left(\boldsymbol{\nabla}_y \cdot N_a \mathbf{e}_{\mathbf{i}}\right) r_{\mathrm{C}}\left(\mathbf{u}^h\right) \, \mathrm{d}\Omega, \tag{2.60}$$

e:

$$(\mathbf{R}_{\mathrm{C}})_a = \int_{\Omega} N_a \boldsymbol{\nabla}_y \cdot \mathbf{u}^h \, \mathrm{d}\Omega + \sum_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\Omega^e} \tau_{\mathrm{PSPG}} \left(\frac{\boldsymbol{\nabla}_y N_a}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_{\mathrm{M}} \left(\mathbf{u}^h, p^h \right) \, \mathrm{d}\Omega, \tag{2.61}$$

com $i = 1, 2$ para problemas 2D e $i = 1, 3$ para problemas 3D.

Considerando $\dot{\mathbf{U}}$, $\mathbf{U}$ e $\mathbf{p}$ os vetores nodais dos graus de liberdade respectivos a velocidade, aceleração e pressão, pode-se escrever a forma semi discreta do problema da DFC como: Encontrar $\dot{\mathbf{U}}$, $\mathbf{U}$ e $\mathbf{p}$ de maneira que:

$$\mathbf{R}_{\mathrm{M}}(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}, \tag{2.62}$$

e

$$\mathbf{R}_{\mathrm{C}}(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}. \tag{2.63}$$

2.3.3 Parâmetros de estabilização

A definição adequada dos parâmetros de estabilização desempenha papel fundamental no desempenho do método e na sua estabilidade numérica.

Desde os primeiros desenvolvimentos relacionados aos métodos estabilizados houve um amadurecimento das expressões de definição dos parâmetros τ, as quais passam a levar em consideração formulações mais robustas, sendo adaptadas tanto para elementos de ordem elevadas, quanto para malhas mais complexas, como as usadas em análise isogeométrica.

Considerando que neste trabalho dois tipos de aproximações espaciais são utilizadas, uma baseada no FEM e outra baseada em AIG, adotam-se os parâmetros propostos mais recentemente por Otoguro, Takizawa e Tezduyar (2020), Takizawa, Tezduyar e Otoguro (2018) e Takizawa, Ueda e Tezduyar (2019), que são adequados para ambas aproximações.

Para essa opção é necessário definir-se o tensor métrico do elemento no espaço. Com essa finalidade, descreve-se inicialmente a matriz Jacobiana $\mathbf{Q}$, como:

$$\mathbf{Q} = \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right), \tag{2.64}$$

com $\boldsymbol{\xi}$ representando as coordenadas do espaço paramétrico, com componentes ξ, η e ζ.

Para que a ordem polinomial seja levada em consideração, ou, outros fatores como a dimensão do elemento no espaço paramétrico, aplica-se à $\mathbf{Q}$, uma matriz de transformação ($\mathbf{D}$), conforme a seguinte expressão:

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}\mathbf{D}^{-1}. \tag{2.65}$$

O comprimento direcional do elemento fica definido como:

$$h_{\mathrm{RQD}} = 2\left(\mathbf{rr} : \mathbf{G}\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.66}$$

o fator 2 vem de um típico espaço paramétrico, que é um quadrado ou um cubo com lado de comprimento 2. $\mathbf{r}$ é o vetor unitário na direção do gradiente da intensidade da velocidade e $\mathbf{G}$ o tensor métrico do elemento, os quais são representados respectivamente como:

$$\mathbf{r} = \frac{\boldsymbol{\nabla}_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|}{\|\boldsymbol{\nabla}_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\|} \tag{2.67}$$

e

$$\mathbf{G} = \hat{\mathbf{Q}}^{-T} \cdot \hat{\mathbf{Q}}^{-1}. \tag{2.68}$$

Para elementos finitos com funções de forma polinomiais de Lagrange de ordens p_ξ, p_η e p_ζ nas direções paramétricas ξ, η e ζ, respectivamente, com $\xi, \eta, \zeta \in [-1, 1]$, a matriz $\mathbf{D}$ é definida por:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} p_\xi & 0 & 0 \\ 0 & p_\eta & 0 \\ 0 & 0 & p_\zeta \end{bmatrix}. \tag{2.69}$$

Em geral, se escolhe o espaço paramétrico baseado em razões como eficiência da integração numérica ou conveniência de implementação. A maioria das metodologias utilizadas para definir o comprimento do elemento não levam este fator em consideração. Para essa finalidade, em Takizawa, Ueda e Tezduyar (2019), apresenta-se a matriz de transformação ($\mathbf{D}$) como:

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\xi}}}{\partial \boldsymbol{\xi}}, \tag{2.70}$$

com $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ chamado de espaço de paramétrico de preferência.

Para elementos simplex, buscando encontrar uma expressão que leve a um comprimento de elemento que não possua variação em função da ordenação dos nós, os autores introduziram um espaço paramétrico preferido que consiste em um elemento simplex regular com distância entre vértices de 2, e chegaram a seguinte expressão para $\mathbf{D}$ quando $n_{\mathrm{sd}} = 2$:

$$\mathbf{D} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3}+1 & \sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}-1 & \sqrt{3}+1 \end{bmatrix}, \tag{2.71}$$

e para $n_{\mathrm{sd}} = 3$:

$$\mathbf{D} = \frac{\sqrt{2}}{3}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}. \tag{2.72}$$

A definição da matriz $\mathbf{D}$ para elementos isogeométricos será descrita na subseção 3.4.1.

Além disso, nessa metodologia, o comprimento do elemento é limitado pelos mínimos e máximos valores representados abaixo:

$$h_{min} \equiv 2 \min_{r} \left((\mathbf{rr} : \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}} \right), \tag{2.73}$$

$$h_{max} \equiv 2 \max_{r} \left((\mathbf{rr} : \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}} \right), \tag{2.74}$$

que podem ser reescritos como:

$$h_{min} = 2 \left(\lambda_{max} \mathbf{G} \right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.75}$$

$$h_{max} = 2 \left(\lambda_{min} \mathbf{G} \right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.76}$$

onde λ_{max} e λ_{min} representam os máximos e mínimos autovalores da matriz $\mathbf{G}$.

Por fim, os parâmetros de estabilização são escritos como:

$$\tau_{\mathrm{SUPG}} = \tau_{\mathrm{PSPG}} = \left(\frac{1}{\tau_{\mathrm{SUGN1}}^2} + \frac{1}{\tau_{\mathrm{SUGN2}}^2} + \frac{1}{\tau_{\mathrm{SUGN3}}^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.77}$$

$$\nu_{\mathrm{LSIC}} = \tau_{\mathrm{SUPG}} \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|^2, \tag{2.78}$$

onde:

$$\tau_{\mathrm{SUGN1}}^{-2} = \left(\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\right)\left(\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\right) : \mathbf{G}, \tag{2.79}$$

$$\tau_{\mathrm{SUGN2}} = \frac{\Delta t}{2}, \tag{2.80}$$

e

$$\tau_{\mathrm{SUGN3}}^{-1} = \nu\left(\mathbf{r}_{reg}\mathbf{r}_{reg} : \mathbf{G} + \left(1 - \mathbf{r}_{reg}^2\right) 4 h_{min}^{-2}\right)\right), \tag{2.81}$$

sendo $\mathbf{r}_{reg}$ definido como:

$$\mathbf{r}_{reg} = \frac{\boldsymbol{\nabla}_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|}{\|\boldsymbol{\nabla}_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\| + \varepsilon\left(\|\boldsymbol{\nabla}_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\|\right)_0}, \tag{2.82}$$

com ε uma constante pequena e $\left(\|\boldsymbol{\nabla}_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\|\right)_0$ um valor de referência. Os termos τ_{SUGN1}, τ_{SUGN2} e τ_{SUGN3} são parâmetros correspondentes aos termos convectivos, inerciais e viscosos, respectivamente.

2.4 Integração temporal e solução numérica

Para a integração temporal das equações governantes, utiliza-se o método α-generalizado. Esse método foi proposto inicialmente por Chung e Hulbert (1993) no contexto da mecânica das estruturas, e foi estendido para o contexto da dinâmica dos fluidos computacional por Jansen, Whiting e Hulbert (2000).

Considerando que o tempo da análise do problema é definido por um intervalo temporal de $[0, T]$, o qual é particionado em *npt* subintervalos $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$, com t_n e t_{n+1} os instantes anterior e atual, respectivamente. A solução do problema consiste em: conhecidos os valores nodais de aceleração, velocidade e pressão ($\dot{\mathbf{U}}$, $\mathbf{U}$ e $\mathbf{p}$) no instante n, encontrar a solução no instante $n+1$ de forma que:

$$\mathbf{R}_{\mathrm{M}}(\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}, \mathbf{U}_{n+\alpha_f}, \mathbf{p}_{n+1}) = \mathbf{0}, \tag{2.83}$$

$$\mathbf{R}_{\mathrm{C}}(\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}, \mathbf{U}_{n+\alpha_f}, \mathbf{p}_{n+1}) = \mathbf{0}, \tag{2.84}$$

com:

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m} = \dot{\mathbf{U}}_n + \alpha_m \left(\dot{\mathbf{U}}_{n+1} - \dot{\mathbf{U}}_n \right), \tag{2.85}$$

$$\mathbf{U}_{n+\alpha_f} = \mathbf{U}_n + \alpha_f \left(\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n \right), \tag{2.86}$$

sendo $\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}$ e $\mathbf{U}_{n+\alpha_f}$ valores intermediários entre t_n e t_{n+1} do vetor aceleração e velocidade. A relação entre os valores nodais de aceleração e velocidade são calculados de acordo com fórmula de Newmark (ver, por exemplo, (HUGHES, 1976)):

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta t \left((1-\gamma) \dot{\mathbf{U}}_n + \gamma \dot{\mathbf{U}}_{n+1} \right), \tag{2.87}$$

onde γ é um parâmetro do método.

Os parâmetros que definem o instante intermediário, alteram as características de estabilidade e precisão ao método. Segundo Jansen, Whiting e Hulbert (2000), precisão de segunda ordem é garantida, para problemas lineares, se:

$$\gamma = 1/2 + \alpha_m - \alpha_f, \tag{2.88}$$

enquanto que a estabilidade do problema é incondicional com:

$$\alpha_m \geq \alpha_f \geq 1/2. \tag{2.89}$$

Para proporcionar a precisão de segunda-ordem de convergência, estabilidade incondicional da solução, e permitir dissipação ótima de altas frequências, calcula-se o parâmetro γ de acordo com Equação (2.88) e α_m, α_f, através de (HUGHES, 2000):

$$\alpha_m = \frac{1}{2} \left(\frac{3-\rho_\infty}{1+\rho_\infty} \right) \tag{2.90}$$

e

$$\alpha_f = \frac{1}{1+\rho_\infty}. \tag{2.91}$$

O parâmetro ρ_∞ é o raio espectral da matriz de amplificação quando $\Delta t \to \infty$, devendo estar contido no intervalo de $[0,1]$. Para $\rho_\infty = 0$ a dissipação de altas frequências é máxima e para $\rho_\infty = 1$ não há introdução de difusão numérica ao método.

Para a solução do sistema de equações não lineares compostas pela Equação (2.83) e Equação (2.84) utiliza-se o método de Newton-Raphson. O método pode ser separado em duas etapas, uma etapa preditiva e outra iterativa corretiva (BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013a).

Na etapa preditiva, conhecida a solução em um passo de tempo n, prediz-se a solução em $n+1$ com as seguintes equações:

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^{0} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \dot{\mathbf{U}}_{n}, \tag{2.92}$$

$$\mathbf{U}_{n+1}^{0} = \mathbf{U}_{n}, \tag{2.93}$$

$$\mathbf{p}_{n+1}^{0} = \mathbf{p}_{n}, \tag{2.94}$$

onde o índice 0 representa a iteração de número zero.

Na etapa iterativa corretiva, itera-se sobre a Equação (2.83) e Equação (2.84) até que elas sejam satisfeitas, considerando uma tolerância prescrita, ou até que se alcance uma quantidade máxima de iterações pré-estabelecida. Essa etapa é composta por três fases. A fase 1 consiste em determinar os valores no instante intermediário para as variáveis nodais na iteração i:

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}^{i} = \dot{\mathbf{U}}_{n} + \alpha_m \left(\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^{i} - \dot{\mathbf{U}}_{n} \right), \tag{2.95}$$

$$\mathbf{U}_{n+\alpha_f}^{i} = \mathbf{U}_{n} + \alpha_f \left(\mathbf{U}_{n+1}^{i} - \mathbf{U}_{n} \right), \tag{2.96}$$

$$\mathbf{p}_{n+1}^{i} = \mathbf{p}_{n+1}^{i}. \tag{2.97}$$

Na fase 2, com os valores intermediários das variáveis nodais resolve-se o sistema linear resultante da linearização da Equação (2.83) e Equação (2.84) com respeito às variáveis de interesse $\mathbf{p}_{n+1}$ e $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$:

$$\left.\frac{\partial \mathbf{R}_{\mathrm{M}}}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{n+1}}\right|_{i} \Delta \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^{i} + \left.\frac{\partial \mathbf{R}_{\mathrm{M}}}{\partial \mathbf{p}_{n+1}}\right|_{i} \Delta \mathbf{p}_{n+1}^{i} = -\mathbf{R}_{\mathrm{M}}^{i}, \tag{2.98}$$

$$\left.\frac{\partial \mathbf{R}_{\mathrm{C}}}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{n+1}}\right|_{i} \Delta \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^{i} + \left.\frac{\partial \mathbf{R}_{\mathrm{C}}}{\partial \mathbf{p}_{n+1}}\right|_{i} \Delta \mathbf{p}_{n+1}^{i} = -\mathbf{R}_{\mathrm{C}}^{i}. \tag{2.99}$$

Por fim, na fase 3 atualiza-se a solução através das seguintes relações:

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^{i+1} = \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^{i} + \Delta\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^{i}, \tag{2.100}$$

$$\mathbf{U}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{U}_{n+1}^{i} + \gamma\Delta t\Delta\mathbf{U}_{n+1}^{i}, \tag{2.101}$$

$$\mathbf{p}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{p}_{n+1}^{i} + \Delta\mathbf{p}_{n+1}^{i}. \tag{2.102}$$

Na utilização do método α-generalizado as integrais da Equação (2.83) e Equação (2.84) são avaliadas no instante $t = t_{n+\alpha_f}$, de forma que:

$$\int_{\Omega} (.)\, \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega_{t_{n+\alpha_f}}} (.)\, \mathrm{d}\Omega, \tag{2.103}$$

e, por consequência:

$$\Omega_{t_{n+\alpha_f}} = \left\{ \mathbf{y}^h \mid \mathbf{y}^h(\bar{\mathbf{x}}^h, t_{(n+\alpha_f)}) = \alpha_f \mathbf{y}^h(\bar{\mathbf{x}}^h, t_{n+1}) + (1-\alpha_f)\mathbf{y}^h(\bar{\mathbf{x}}^h, t_n) \right\}. \tag{2.104}$$

2.5 Implementação computacional

Finalmente, é possível estabelecer o algoritmo para a solução dos problemas de escoamentos incompressíveis com a formulação estabilizada do MEF, o qual é apresentado abaixo (Algoritmo. 1).

Algoritmo 1 Algoritmo para problemas de dinâmica dos fluidos computacional

para o passo de tempo 0 até $npt - 1$ **faça**
 $i \leftarrow 0$;
 Predição da solução: aplicação da Equação (2.92), Equação (2.93) e Equação (2.94);
 enquanto ($\epsilon <$ tolerância) **faça**
  $i \leftarrow i + 1$;
  Interpolação das variáveis do problema: aplicação da Equação (2.95), Equação (2.96) e Equação (2.97);
  Cálculo do incremento nas variáveis do problema: $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$ e $\mathbf{p}_{n+1}$ de acordo com a Equação (2.98) e Equação (2.99);
  Atualização da solução: calculadas de acordo com a Equação (2.100), Equação (2.101) e Equação (2.102);
  Cálculo do erro:

$$\epsilon = \left\| \mathbf{R}_{\mathrm{M}}^{i} \right\|_{L^2} \tag{2.105}$$

 fim enquanto
 Atualização das variáveis do passo anterior;
fim para

2.6 Verificação e aplicações

Para a verificação do código baseados no método dos elementos finitos são simulados 2 exemplos amplamente estudados na literatura: escoamento sobre um cilindro e escoamento sobre uma cavidade quadrada.

2.6.1 Escoamento sobre um cilindro

Este exemplo considera um escoamento viscoso incompressível sobre um cilindro rígido com diferentes números de Reynolds, Re = 40, Re = 100 e Re = 1000, calculados de acordo com:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho L \|\mathbf{u}_\infty\|}{\mu} = \frac{L\|\mathbf{u}_\infty\|}{\nu}, \tag{2.106}$$

onde a dimensão característica do problema L é adotada como sendo o diâmetro do cilindro, e ν é a viscosidade cinemática do fluido. Tomam-se como parâmetros de análise os coeficientes aerodinâmicos medidos ao longo do tempo, e avalia-se se o modelo é capaz de reproduzir os fenômenos relacionados à formação e desprendimento de vórtices característicos desse problema.

A geometria e as condições de contorno são apresentadas na Figura 7a, tratando-se de um domínio retangular, parametrizado em função do diâmetro do cilindro, com um perfil constante de velocidade na entrada e condição de parede lisa nos limites superior e inferior. No contorno denominado como saída, aplica-se condição de Neumann nula. Na Figura 7b é apresentada a malha utilizada para esse problema, composta por 9122 elementos finitos triangulares de aproximação quadrática e 18508 nós. O problema foi simulado para um velocidade de entrada $u_\infty = 1{,}0$, densidade $\rho = 1{,}0$, passo de tempo $\Delta t = 0{,}05$, e parâmetro do integrador temporal $\rho_\infty = 0{,}5$, variando-se a viscosidade em função do número de Reynolds.

Para o cálculo dos coeficientes aerodinâmicos é necessário definir-se primeiramente as forças de arrasto (F_D) e de sustentação (F_L), as quais resultam das tensões de cisalhamento e da pressão, sendo calculadas pelas seguintes expressões:

$$F_D = \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\sigma}_{1j} n_j \mathrm{d}\Gamma_c, \tag{2.107}$$

e

$$F_L = \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\sigma}_{2j} n_j \mathrm{d}\Gamma_c, \tag{2.108}$$

onde Γ_c representa o contorno do cilindro e n_j é a componente j do vetor unitário normal a Γ_c, com $j = 1, 2$. Os coeficientes de arrasto e sustentação são definidos respectivamente por:

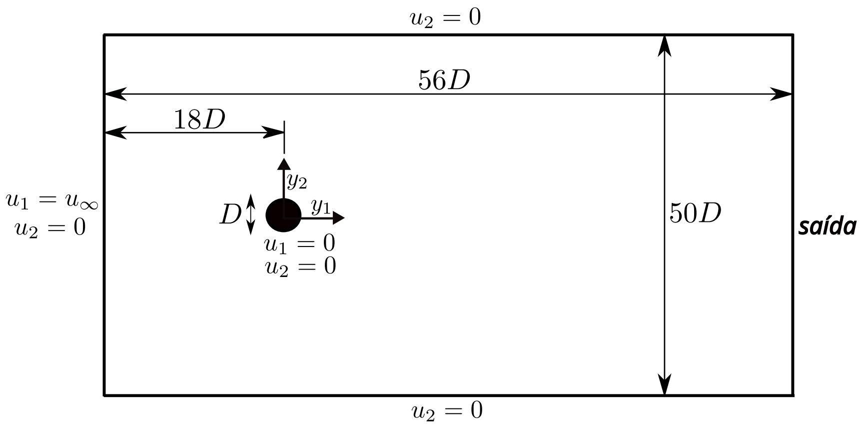
$$C_D = \frac{F_D}{0{,}5\rho\|\mathbf{u}_\infty\|^2 L}, \tag{2.109}$$

e

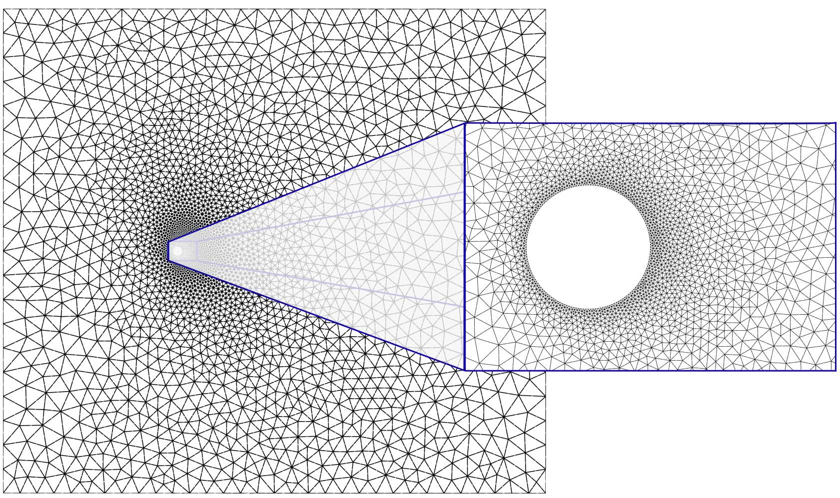
$$C_L = \frac{F_L}{0{,}5\rho\|\mathbf{u}_\infty\|^2 L}. \tag{2.110}$$

Figura 7 – Cilindro: Geometria, condições de contorno e malha de elementos finitos.

(a) Geometria e condições de contorno



(b) Discretização espacial



Fonte: Elaborada pela autora

Para este problema, a frequência do desprendimento de vórtices que ocorre a partir de determinado número de Reynolds pode ser determinada a partir do número adimensional de Strouhal (St), dado por:

$$\mathrm{St} = \frac{f_v L}{\|\mathbf{u}_\infty\|}, \tag{2.111}$$

.

com f_v sendo a frequência de desprendimento dos vórtices.

Como pode-se observar na Figura 8, para Re = 40 os coeficientes de arrasto atinge um valor constante, quando o escoamento fica estacionário, permanecendo assim até o final da análise, enquanto o coeficiente de sustentação permanece nulo. Isso é o que se espera, visto que para Reynolds entre 5 à 50, deve-se observar a formação de dois vórtices simétricos e estacionários na região à jusante do cilindro (LIENHARD, 1966). Com o aumento do número de Reynolds o par de vórtices é quebrado gerando a chamada esteira de von Kármán, com formação de vórtices de maneira alternada entre as regiões superior e inferior do cilindro, levando ao comportamento oscilatório observado nos gráficos para Re = 100 e Re = 1000. Os valores do coeficiente de Strouhal, para Re = 100 e Re = 1000, assim como os valores médios obtidos para o coeficiente de arrasto (C_{Dmed}) para Re = 40, Re = 100 e Re = 1000 são apresentados na Tabela 1, onde são comparados com os valores de referência provenientes do trabalho de Wanderley e Levi (2002).

Tabela 1 – Comparação entre valores obtidos e valores de referência

Re	C_{Dmed}		*St*	
	Presente estudo	Referência	Presente estudo	Referência
40	1,54	1,59	-	-
100	1,35	1,33	0,166	0,163
1000	1,52	1,51	0,238	0,235

Fonte: Elaborada pela autora.

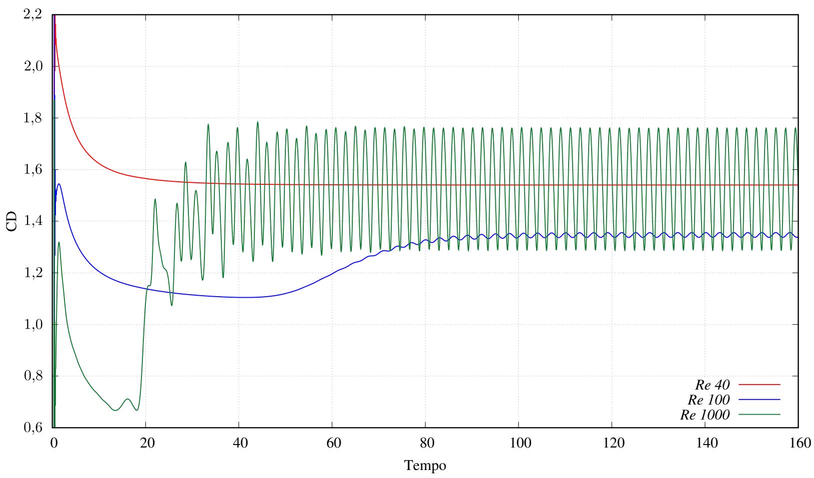
Nas Figura 9 e Figura 10 são apresentados os campos de velocidade e pressão ao longo de um ciclo de desprendimento de vórtices nT para Re = 100. Pode-se notar nessas imagens, a formação e o desprendimento de vórtices na esteira de Von Karmán.

2.6.2 Escoamento sobre cavidade com discretização 3D

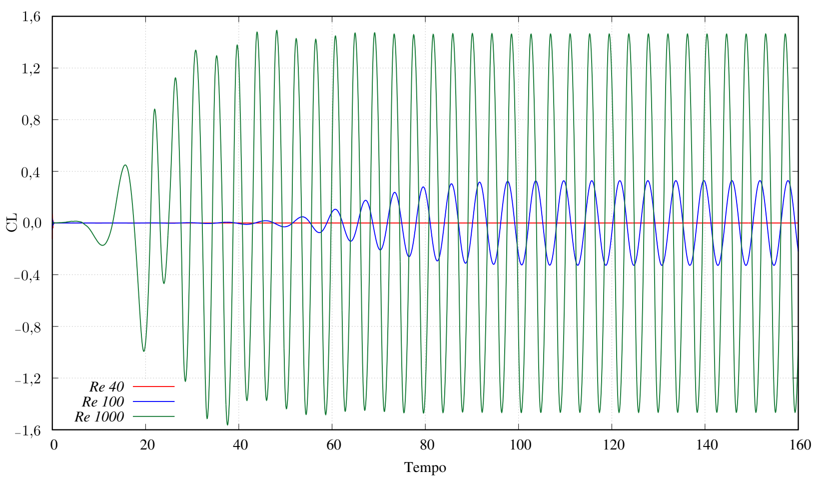
Este exemplo considera uma cavidade hexaédrica com velocidade prescrita horizontal u_∞ prescrita em sua face superior. A geometria do problema bem como as condições de contorno são apresentadas na Figura 11a. As paredes da cavidade são rígidas, com paredes laterais e do fundo com condição de aderência, e adicionalmente, condição de simetria

Figura 8 – Cilindro: Coeficientes aerodinâmicos

(a) Coeficiente de arrasto C_D



(b) Coeficiente de sustentação C_L

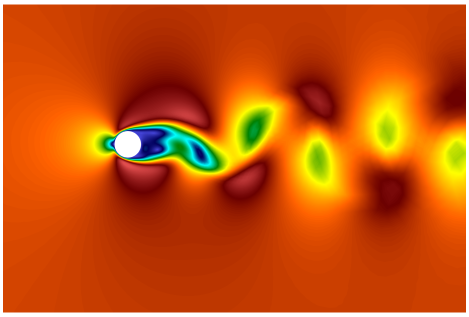


Fonte: Elaborada pela autora

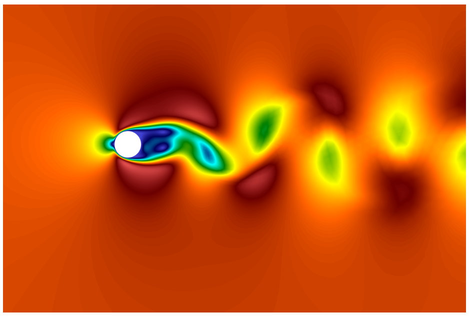
na direção y_3. A cavidade possui na direção y_3 uma espessura de 0,03. A discretização espacial em elementos finitos utilizada é apresentada na Figura 11b, a qual consiste em 7252 elementos tetraédricos quadráticos e 14727 nós. Embora este problema possa ser representado por uma discretização bidimensional, adota-se uma discretização 3D para um primeiro teste das implementações dos elementos finitos tetraédricos.

Figura 9 – Cilindro: Campos de velocidade para Re = 100

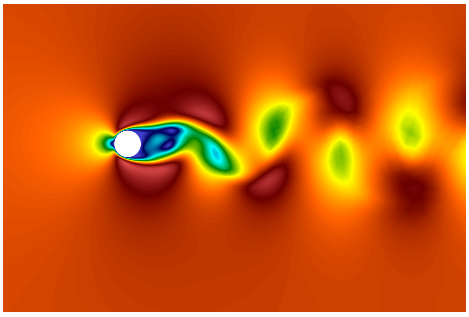
(a) nT



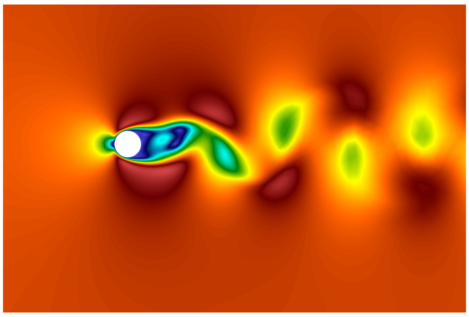
(b) $nT + nT/6$



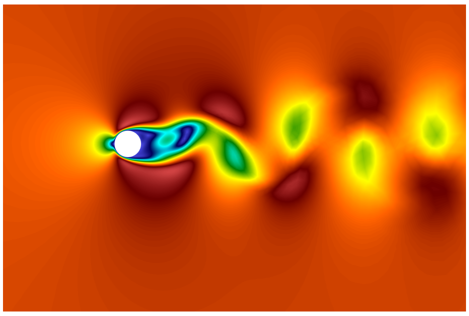
(c) $nT + nT/3$



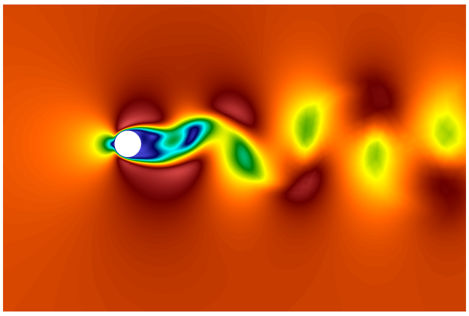
(d) $nT + nT/2$

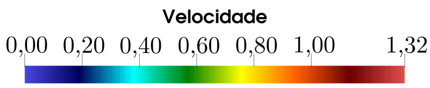


(e) $nT + n2T/3$



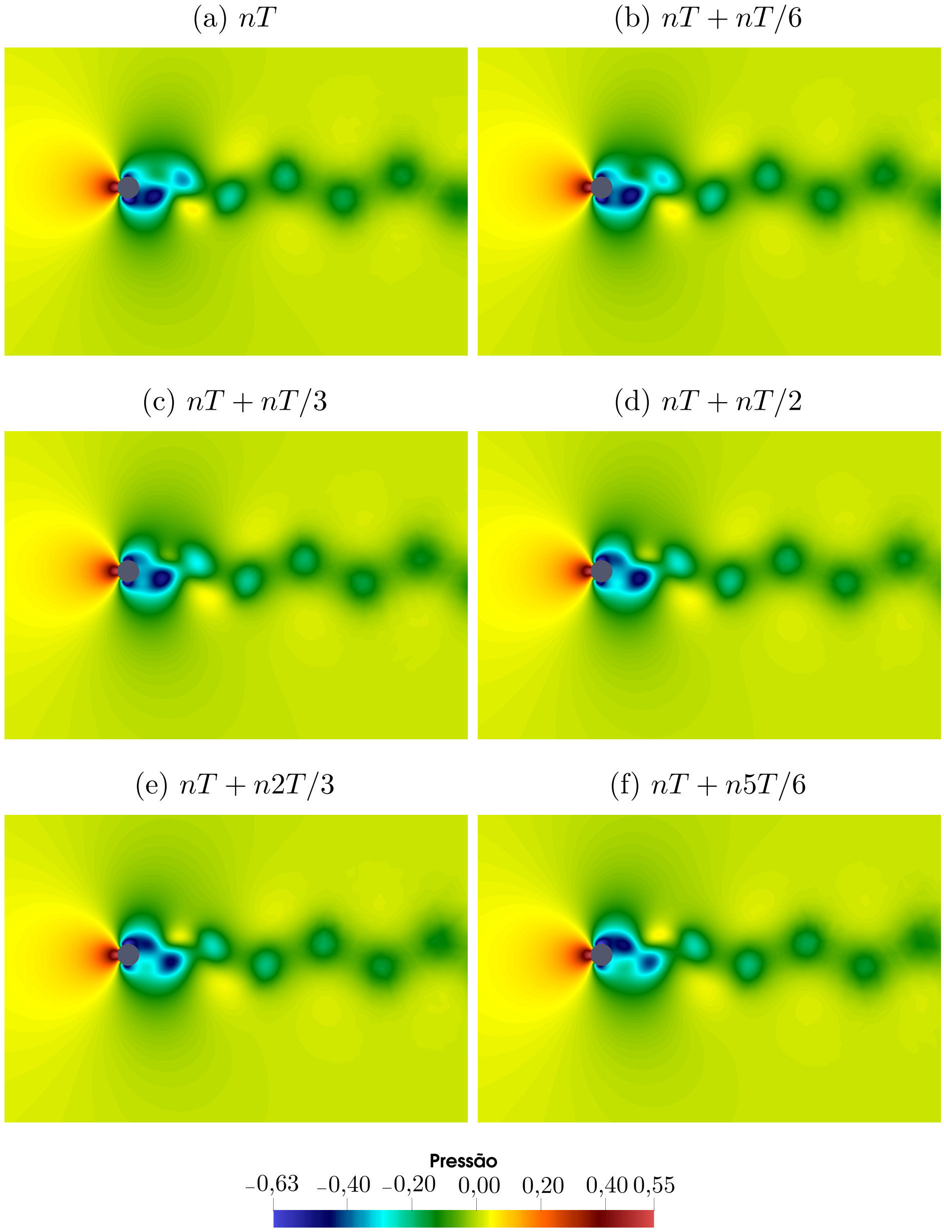
(f) $nT + n5T/6$





Fonte: Elaborada pela autora

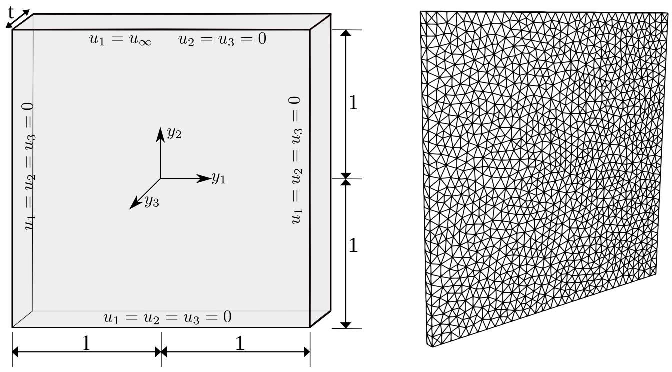
Figura 10 – Cilindro: Campos de pressão para Re = 100



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 11 – Cavidade quadrada: Geometria, condições de contorno e malha de elementos finitos

(a) Geometria e condições de contorno (b) Discretização espacial.



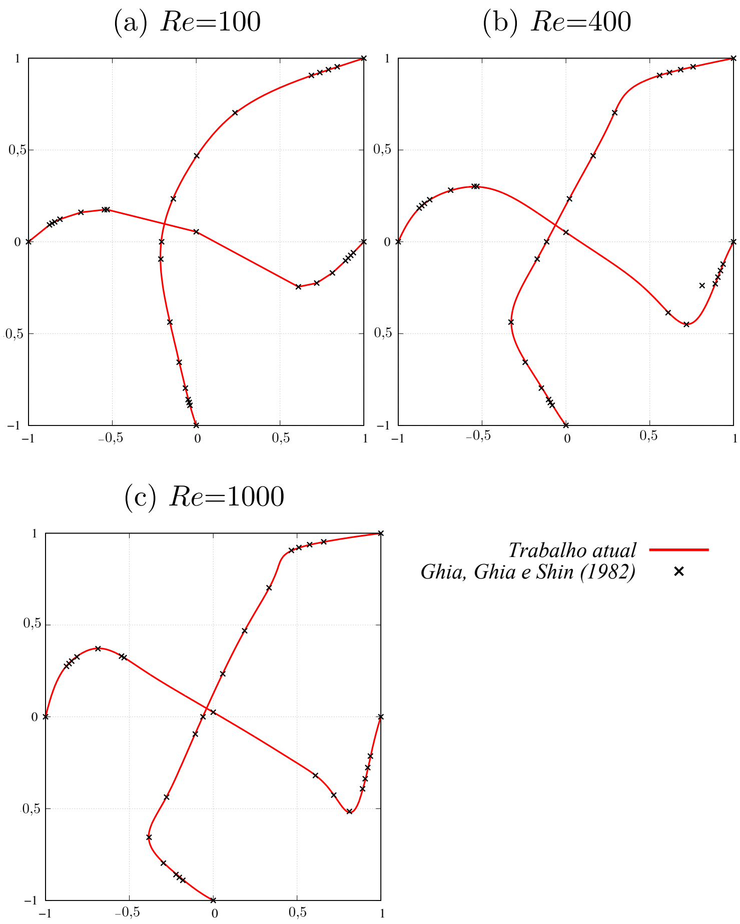
Fonte: Elaborada pela autora

O problema é estudado para 3 diferentes números de Reynolds (100, 400 e 1000), calculados de acordo com Equação (2.106), considerando L como sendo o comprimento do lado da cavidade. O problema foi simulado para uma velocidade na parede superior de $u_\infty = 1{,}0$, $\rho = 1{,}0$, $\Delta t = 0{,}05$, e $\rho_\infty = 0$, sendo a viscosidade do fluido variada de modo a alterar o número de Reynolds. A simulação foi mantida até que se atingiu o estado estacionário de escoamento.

Os perfis de velocidade adimensionalizada ($\mathbf{u}/\mathbf{u}_\infty$) ao longo de duas linhas centrais nas direções y_1 e y_2 posicionadas no centro da espessura da direção y_3, são apresentados na Figura 12 e comparados com a referência de Ghia, Ghia e Shin (1982).

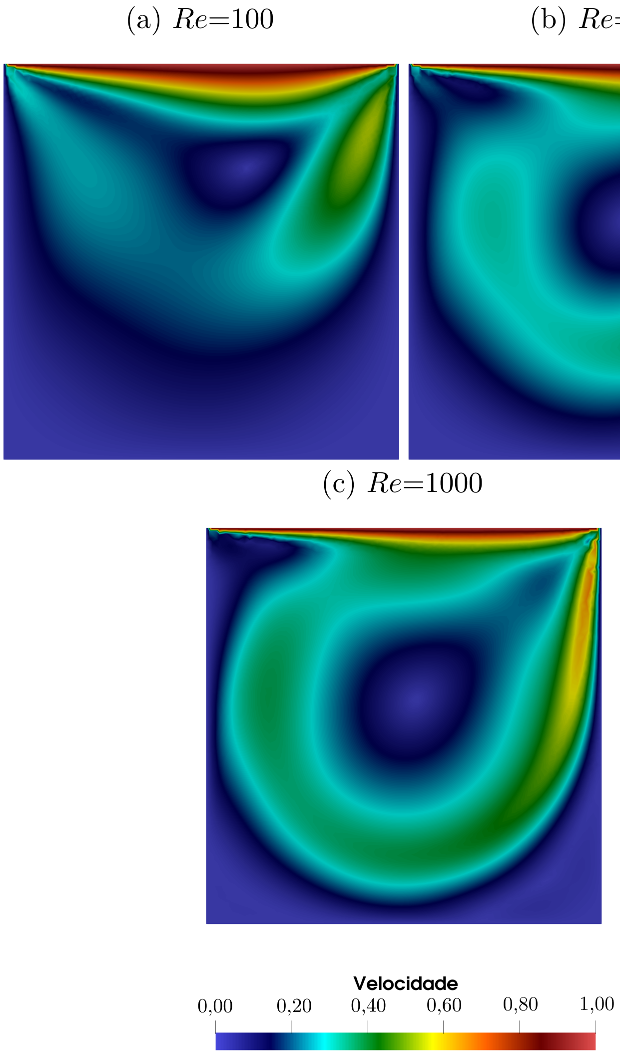
Os campos de velocidade e de pressão para a situação estacionária são apresentados na Figura 13 e Figura 14, respectivamente. Ressalta-se que para a simulação, por se tratar de um problema com todos os contornos com condição de Dirichlet impostos, a pressão torna-se indefinida. Por esse motivo, prescreveu-se pressão $p = p_{ref} = 0{,}0$ no canto superior direito da cavidade.

Figura 12 – Cavidade quadrada: Perfis de velocidade adimensionalizados nas direções y_1 e y_2



Fonte: Elaborada pela autora

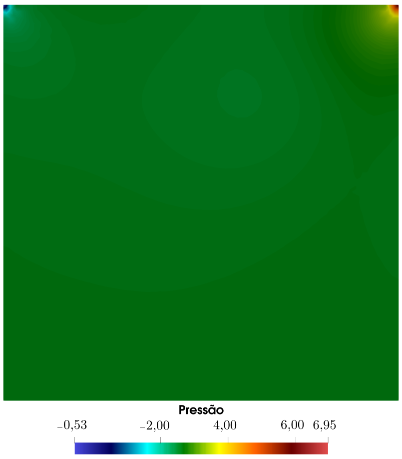
Figura 13 – Cavidade quadrada: Campos de velocidade - plano $y_1 y_2$



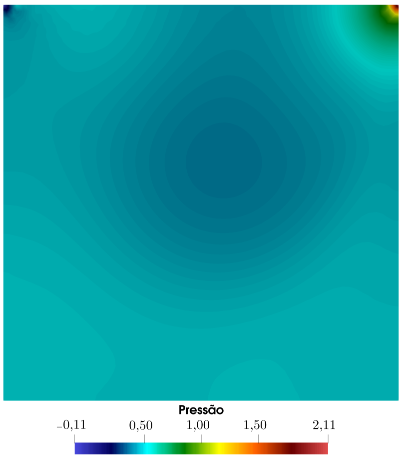
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 14 – Cavidade quadrada: Campos de pressão - plano y_1y_2

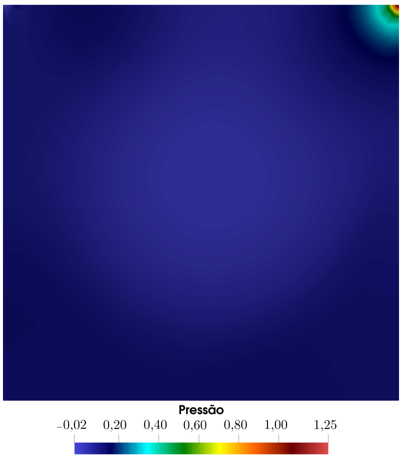
(a) Re=100



(b) Re=400



(c) Re=1000



Fonte: Elaborada pela autora

3 ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA APLICADA À DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL

A Análise Isogeométrica (AIG) é uma técnica numérica introduzida por Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005) para obtenção de soluçõ es aproximadas de equações diferenciais. O método pode ser entendido como uma generalização do método dos elementos finitos clássico a partir do uso de funções base especiais.

Na Análise isogeométrica, as funções base escolhidas na discretização da geometria do problema e de suas variáveis são aquelas utilizadas nos sistemas CAD (*Computed Aided Desing*), sendo as funções do tipo NURBS (*Non-Uniform Rational B-Splines*) as mais aplicadas (ver, por exemplo, Piegl e Tiller (1996)). O grande impulso para o desenvolvimento da técnica foi proporcionar a integração entre a engenharia de projeto, com modelos baseados em CAD, e as simulações numéricas, com modelos principalmente baseados no MEF, de forma que ambas trabalhem com somente um modelo geométrico.

A AIG apresenta vantagens significativas, uma vez que permite a representação exata de diversas geometrias comuns, como cônicas, quádricas, círculos, cilindros, esferas e elipsoides, além de dispor de algoritmos eficientes e estáveis para a geração de objetos NURBS. As funções NURBS, em particular, possuem propriedades matemáticas que as tornam adequadas para aplicações numéricas, destacando-se a elevada suavidade, a alta capacidade de aproximação e a possibilidade de refinamento local por meio da inserção de *knots*, os quais correspondem às coordenadas do espaço paramétrico nas quais as funções são definidas.

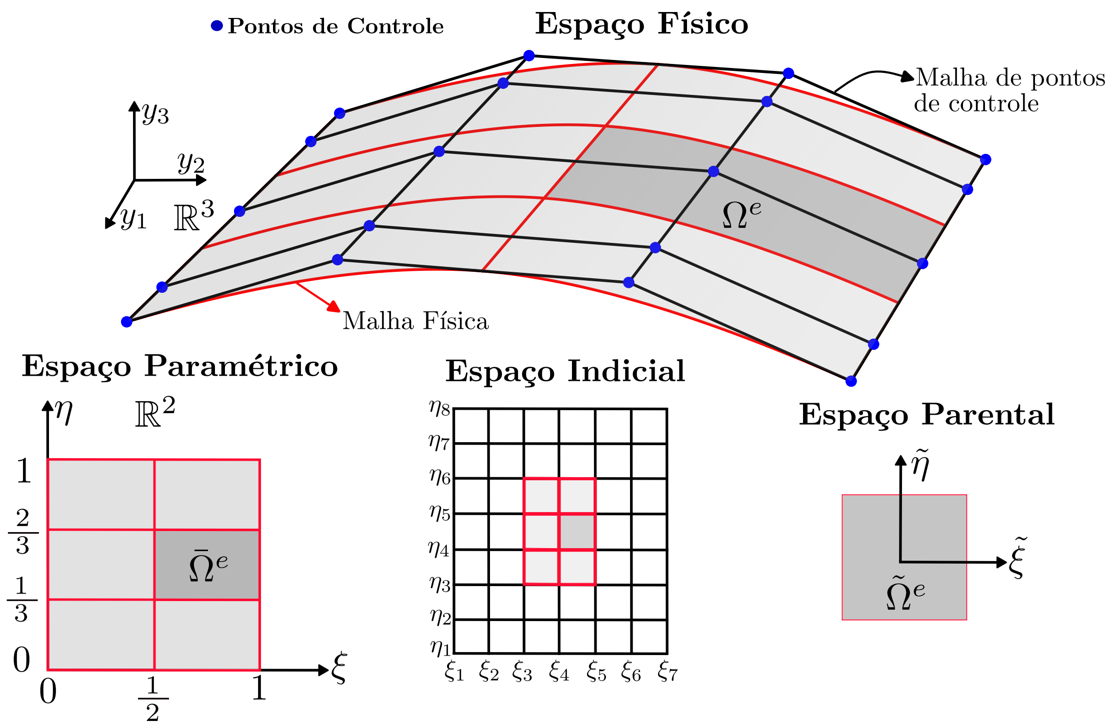
Este capítulo apresenta uma breve introdução à análise isogeométrica e sua relação com o método dos elementos finitos clássico. Inicialmente, são descritas as funções base *B-splines*, suas principais características e a construção de geometrias associadas. Em seguida, introduzem-se as funções NURBS, destacando sua formulação e aplicações geométricas. A análise isogeométrica é então introduzida no contexto da dinâmica dos fluidos computacional, enfatizando suas particularidades quanto à discretização das variáveis e da geometria, aos métodos de integração numérica e à determinação dos parâmetros de estabilização. Por fim, são apresentados exemplos numéricos que verificam a formulação proposta. As principais referências bibliográficas que fundamentam esta construção são Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005) e Piegl e Tiller (1996).

3.1 Representação geométrica com B-splines e NURBS

No contexto do MEF isoparamétrico, a formulação é construída a partir da definição de uma malha e de seus elementos, os quais são representados tanto no espaço físico quanto no espaço de coordenadas naturais adimensionais. Cada elemento é caracterizado pelas coordenadas de seus nós, sendo os graus de liberdade do problema associados aos valores das funções de forma interpolados nesses pontos nodais.

Dentro da AIG têm-se duas noções de malha: uma malha de pontos de controle e uma malha física. A malha de pontos de controle é muito semelhante a uma malha de elementos finitos, entretanto, ela não define a geometria, ela é apenas um esqueleto que controla o formato da geometria (ver Figura 15), visto que as funções de forma baseadas em *B-Splines* não são necessariamente interpolatórias. Dessa forma, os graus de liberdade do problema são associados aos pontos de controle, cujas posições não coincidem, necessariamente, com a geometria representada.

Figura 15 – NURBS: espaço físico, espaço paramétrico, espaço indicial e espaço parental



Fonte: Elaborada pela autora

A malha física representa a geometria discretizada. Dentro da malha física podem ser definidos dois tipos de elementos, um macro-elemento, denominado de *patch*, e o *knot span*, que é o equivalente a um elemento finito e será denominado como célula ao longo desse texto. Cada *patch* é composto por um conjunto de células. Muitas geometrias simples podem ser discretizadas apenas com um *patch*, entretanto, a depender da complexidade da geometria ou de requisitos de parametrização, se torna necessário o uso de um conjunto de *patches*. As células são representações geométricas de linhas, superfícies e volumes nos espaços físicos unidimensional, bidimensional e tridimensional respectivamente.

Cada *patch* e suas respectivas células possuem uma representação no espaço paramétrico (Figura 15), que é o espaço onde as funções base são definidas. O espaço paramétrico, para os casos de funções univariadas, é definido por um *knot vector*, aqui denominado de vetor de *knots*, que é um conjunto de *knots* ou coordenadas paramétricas. As células são constituídas pelo espaço entre dois *knots* consecutivos. O espaço onde se representam todas as células, inclusive as nulas (quando mais de um *knot* ocupa a mesma posição), é chamado de espaço indicial.

Por fim, na análise isogeométrica conta-se ainda com o espaço parental, que é o espaço de integração numérica das funções base, em geral, definido de forma adimensional $[-1, 1]$ dentro de uma célula. Na Figura 15 pode-se observar os espaços relatados para uma superfície 3D construída por funções base quadráticas e apenas um *patch*.

3.2 *B-Splines*

Para a construção de geometriaa NURBS, que serão empregadas neste trabalhos, é fundamental compreender as funções base *B-splines* e suas particularidades. Essas funções servem como o ponto de partida para a definição de curvas, superfícies e sólidos NURBS, sendo essenciais para o entendimento da flexibilidade e controle geométrico oferecido por esse modelo. As *B-splines* são funções construídas através de um vetor de coordenadas paramétricas (vetor de *knots*) e que dependem de um conjunto de pontos de controle, sendo esses elementos responsáveis por estabelecer a forma geométrica e o grau de continuidade da curva ou superfície.

3.2.1 Vetor de *knots*

As funções *B-Splines*, utilizadas na construção das NURBS, são definidas em um espaço paramétrico que é comum a um conjunto de células ou *patch*. O espaço paramétrico unidimensional é construído através de um vetor de *knots*, que consiste em um conjunto não decrescente de coordenadas paramétricas, definido como: $\Xi = [\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n+p+1}]$, sendo que $\xi_i \in \mathbb{R}$ e representa a i-ésima coordenada paramétrica com $i = 0, 1, ..., n + p + 1$, e p corresponde ao grau polinomial das funções. O parâmetro n equivale ao índice da última função base nesta direção paramétrica, sendo o conjunto de funções base indexado de 0 a n, totalizando $n + 1$ funções. Os *knots spans*, ou intervalo entre *knots*, definem células no espaço paramétrico, cujos contornos são mapeados pelas funções base para formar a malha no espaço físico.

O vetor de *knots* é classificado como uniforme quando as coordenadas paramétricas são igualmente espaçadas, e como não-uniformes, caso contrário. A multiplicidade de um *knot* pode ser superior a um, influenciando diretamente na continuidade e na forma das funções base, conforme será visto posteriormente. Os vetores de *knots* conhecidos como abertos, são frequentemente utilizados nas literaturas de CAD, e caracterizam-se por ter a primeira e a última coordenada paramétrica repetidas $p + 1$ vezes. Este fato garante que as funções sejam interpolatórias nos extremos do espaço paramétrico e nas bordas entre *patches*, proporcionando, por exemplo, a homogeneidade com respeito às condições de contorno essenciais.

3.2.2 Funções base e suas derivadas

As funções base *B-Splines* (N^b) univariadas são definidas a partir de um vetor de *knots* unidimensional, sendo para $p = 0$, escritas através da seguinte relação:

$$N^b_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \tag{3.1}$$

enquanto que para funções com $p \geq 1$ podem ser definidas por recorrência de:

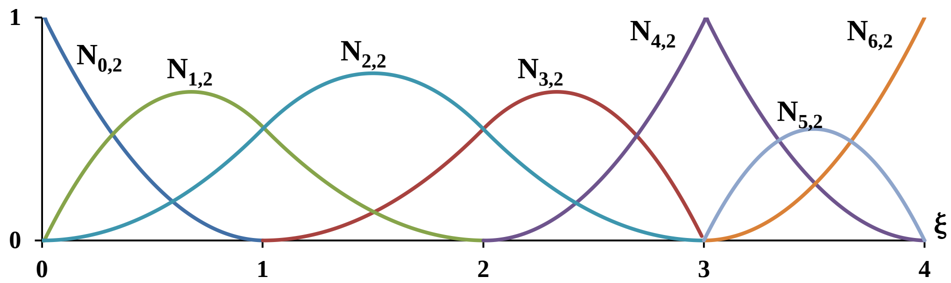
$$N^b_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N^b_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N^b_{i+1,p-1}(\xi), \tag{3.2}$$

com $i = 0, 1, ..., n$.

Essa equação é conhecida como fórmula recursiva de *Cox-de Boor* (COX, 1972; de Boor, 1972). Para funções *B-Splines* de grau $p = 0$ ou $p = 1$, obtêm-se, respectivamente, as mesmas funções constantes e lineares por partes utilizadas no método dos elementos finitos clássico.

Na Figura 16, pode-se observar funções *B-Splines* quadráticas construídas sobre o vetor de *knots* não-uniforme aberto $\Xi = [0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4]$. A figura evidencia que, devido à repetição de $p + 1$ vezes dos *knots* nas extremidades do vetor, as funções base se tornam interpolatórias nesses pontos. Ademais, a presença de um *knot* com multiplicidade 2 em $\xi = 3$ reduz a regularidade da função base nesse ponto, resultando na descontinuidade da sua derivada. Em termos gerais, a continuidade de uma função *B-Spline* em uma coordenada paramétrica é dada por C^{p-m}, onde m é a multiplicidade do *knot*.

Figura 16 – *B-Splines quadráticas*



Fonte: Elaborada pela autora

As principais propriedades das funções *B-Splines* são:

- **Partição da Unidade**: $\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}^{b}(\xi) = 1$;
- **Positividade**: Todas as funções base são positivas, ou seja, $N_{i,p}^{b} \geq 0$, $\forall \xi$;
- **Suavidade**: função de ordem p é, em geral, $p-1$ vezes continua no contorno das células;
- **Suporte Compacto**: O suporte de cada $N_{i,p}^{b}$ está contido no intervalo $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$, ou seja, em cada célula, apenas $p+1$ funções são não nulas.

A derivada de uma função de forma *B-Spline* pode ser calculada recursivamente em termos de funções base de ordem menor. Considerando uma função de ordem p e vetor de *knots* Ξ, a derivada da i-ésima função de forma pode ser escrita como:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} N_{i,p}^{b}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}^{b}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}^{b}(\xi). \tag{3.3}$$

Essa expressão pode ser generalizada para derivadas de ordem superior através de:

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\xi^k} N_{i,p}^{b}(\xi) = \frac{p!}{(p-k)!} \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} N_{i+j,p-k}^{b}(\xi), \tag{3.4}$$

que representa a k-ésima derivada da função $N_{i,p}^{b}(\xi)$, onde:

$$\alpha_{0,0} = 1, \tag{3.5}$$

$$\alpha_{k,0} = \frac{\alpha_{k-1,0}}{\xi_{i+p-k+1} - \xi_i}, \tag{3.6}$$

$$\alpha_{k,j} = \frac{\alpha_{k-1,j} - \alpha_{k-1,j-1}}{\xi_{i+p+j-k+1} - \xi_{i+j}} \quad j = 1, ..., k-1, \tag{3.7}$$

$$\alpha_{k,k} = \frac{-\alpha_{k-1,k-1}}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+k}}. \tag{3.8}$$

Algoritmos eficientes para a determinação das funções de forma *B-Splines* e de suas derivadas podem ser encontradas em Piegl e Tiller (1996).

3.2.3 Geometrias *B-Splines*

Uma curva *B-Spline* é construída a partir da combinação linear entre funções base e um conjunto de pontos de controle. Considerando um conjunto de $n+1$ funções base $N^b_{i,p}$ e respectivos pontos de controle $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{n_{\text{sd}}}$ com $i = 0, 1, ..., n$, uma curva polinomial por partes *B-Spline* univariada é definida como:

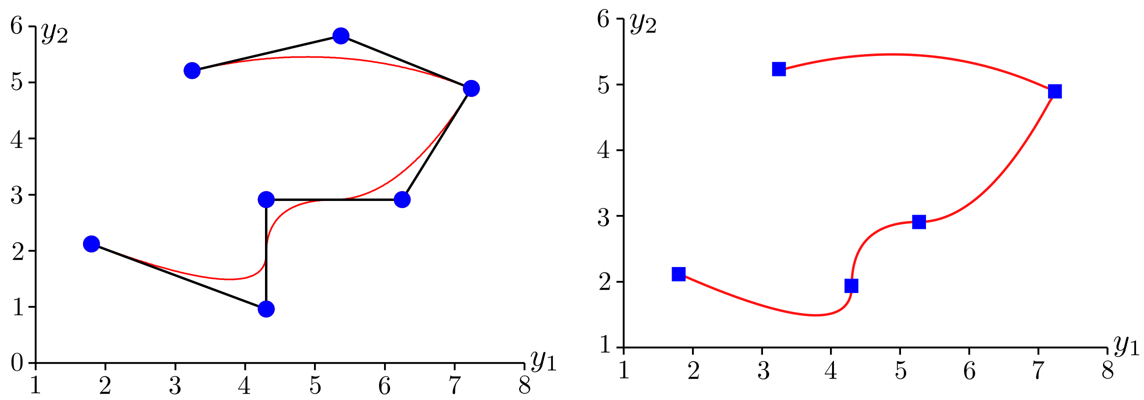
$$\mathbf{C} = \mathbf{y}\left(\xi\right) = \sum_{i=0}^{n} N^b_{i,p}(\xi)\mathbf{B}_i, \tag{3.9}$$

com y_1, y_2 e y_3 sendo as componentes do vetor de coordenadas físicas $\mathbf{y}$. Utilizando as funções *B-Splines* apresentadas na Figura 16 e uma malha de $n+1$ pontos de controle, obtém-se a curva apresentada na Figura 17a. Na Figura 17b pode-se observar as células físicas equivalentes a essa combinação.

Figura 17 – Curva *B-Spline*

(a) Malha de pontos de controle

(b) Curva *B-spline* e representação física das células



Fonte: Elaborada pela autora

A partir da Figura 17a nota-se que a curva *B-Spline* interpola o primeiro e o último ponto de controle, o que é uma característica das curvas construídas com funções descritas a partir de vetores de *knots* abertos. Adicionalmente, devido à multiplicidade do *knot* de coordenada paramétrica $\xi = 3$, existe um ponto de controle intermediário também interpolando a curva. Coordenadas paramétricas com multiplicidade maior ou igual ao grau polinomial p resultam, por definição, em interpolação dos pontos de controle associados. Além disso, a curva possui continuidade $C^{p-1} = C^1$ em todos os lugares, exceto em $\xi = 3$, onde equivale a $C^{p-2} = C^0$, que trata-se de uma propriedade herdada das funções base.

Conforme observado nas figuras: Figura 17a e Figura 17b, muitas das características de curvas *B-Splines* são consequências das propriedades das funções *B-splines*. Outra importante propriedade dessas curvas é a Transformação Afim, que significa que uma transformação afim de uma curva B-spline é obtida aplicando a transformação diretamente aos pontos de controle. Além disso, devido ao suporte compacto das funções base, as curvas *B-Splines* possuem característica denominada de *localidade*, que significa que, movendo-se um ponto de controle, afeta-se não mais do que $p+1$ células na curva. Outras propriedades matemáticas das curvas *B-Splines* podem ser consultadas em detalhes em Piegl e Tiller (1996).

Uma superfície *B-spline* é obtida analogamente à curva *B-spline*. Dado uma rede de pontos de controle $\mathbf{B}_{i,j} \in \mathbb{R}^{n_{\text{sd}}}$ com $i = 0, 1, ..., n$ e $j = 0, 1, ..., m$, e vetores de *knots* $\Xi = [\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{p+n+1}]$, $\mathcal{H} = [\eta_0, \eta_1, ..., \eta_{q+m+1}]$, a superfície é obtida através do produto tensorial entre $(n+1)$ funções univariadas $N^b_{i,p}$ e $(m+1)$ funções univariadas $M^b_{j,q}$ da seguinte forma:

$$\mathbf{S} = \mathbf{y}\left(\xi, \eta\right) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} N^b_{i,p}(\xi) M^b_{j,q}(\eta) \mathbf{B}_{i,j}, \tag{3.10}$$

onde q representa o grau das $m+1$ funções na direção paramétrica η. Muitas das propriedades das superfícies *B-Splines* são resultado da natureza do produto tensorial que as geram. A base de funções apresenta propriedade de positividade e formam uma partição de unidade, de forma que: $\forall(\xi, \eta) \in [\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{p+n+1}] \times [\eta_0, \eta_1, ..., \eta_{q+m+1}]$:

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} N^b_{i,p}(\xi) M^b_{j,q}(\eta) = \left(\sum_{i=0}^{n} N^b_{i,p}(\xi) \right) \left(\sum_{j=0}^{m} M^b_{j,q}(\eta) \right) = 1. \tag{3.11}$$

O suporte, por exemplo, de uma função bivariada $\hat{N^b}_{i,j:p,q}\left(\xi, \eta\right) = N^b_{i,p}(\xi) M^b_{j,q}(\eta)$ é equivalente à: $[\xi_i, \xi_{i+p+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+q+1}]$.

Por fim, um sólido *B-Spline* é obtido através do produto tensorial entre funções univariadas $N^b_{i,p}$, $M^b_{j,q}$, $L^b_{k,r}$, construídas sobre os vetores de *knots* $\Xi = [\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{p+n+1}]$, $\mathcal{H} = [\eta_0, \eta_1, ..., \eta_{q+m+1}]$ e $\mathcal{Z} = [\zeta_0, \zeta_1, ..., \zeta_{r+l+1}]$ respectivamente, e um conjunto de pontos de controle $\mathbf{B}_{i,j,k} \in \mathbb{R}^{n_{\text{sd}}}$ com $i = 0, 1, ..., n$, $j = 0, 1, ..., m$, $k = 0, 1, ..., l$, da seguinte forma:

$$\mathbf{T} = \mathbf{y}\left(\xi, \eta, \zeta\right) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{l} N^b_{i,p}(\xi) M^b_{j,q}(\eta) L^b_{k,r}(\zeta) \mathbf{B}_{i,j,k}, \tag{3.12}$$

na qual r representa o grau das $l+1$ funções base na direção paramétrica ζ. As propriedades de um sólido *B-Spline*, correspondem às generalizações trivariadas das propriedades das superfícies *B-Spline*. Além disso, o suporte de uma função trivariada $\hat{N^b}_{i,j,k:p,q,r}\left(\xi, \eta, \zeta\right) = N^b_{i,p}(\xi) M^b_{j,q}(\eta) L^b_{k,r}(\zeta)$ está contido no intervalo $[\xi_i, \xi_{i+p+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+q+1}] \times [\zeta_k, \zeta_{k+r+1}]$.

3.2.4 Refinamento

Um dos aspectos mais relevantes das *B-splines* é a flexibilidade na forma de enriquecimento da base, permitindo aprimorar sua representação sem alterar a geometria subjacente nem sua parametrização. Dentre os principais procedimentos utilizados, destacam-se: a inserção de *knots* (ou refinamento h), que consiste na subdivisão da malha; a elevação de grau (ou refinamento p), que aumenta a ordem polinomial das funções base; o refinamento k, que promove simultaneamente um aumento da ordem e da continuidade entre células; e, por fim, o refinamento hpk, que combina de forma coordenada as três estratégias anteriores, oferecendo maior controle e eficiência na representação da geometria e na solução numérica de problemas.

Neste trabalho, é adotado apenas o refinamento h na geração das geometrias baseado na inserção de *knots*.

O enriquecimento da base de funções utilizando a inserção de *knots* é realizado sem que se altere uma curva geometricamente ou parametricamente. Para essa finalidade, partindo-se de um vetor de *knots* $\Xi = [\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n+p+1}]$, introduz-se o conceito de vetor de *knots* estendido, o qual é representado por: $\bar{\Xi} = [\bar{\xi}_0 = \xi_0, \bar{\xi}_1, ..., \bar{\xi}_{n+m+p+1} = \xi_{n+p+1}]$. As $(n+m+1)$ novas funções base *B-Splines* são determinadas através da Equação (3.1) e Equação (3.2)), aplicando-as ao vetor de *knots* $\bar{\Xi}$. Os $(n+m+1)$ novos pontos de controle $\bar{\mathcal{B}} = [\bar{\mathbf{B}}_0, \bar{\mathbf{B}}_1, ..., \bar{\mathbf{B}}_{n+m}]^T$ são obtidos através da combinação linear dos $(n+1)$ pontos de controle originais, $\mathcal{B} = [\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, ..., \mathbf{B}_n]^T$, por:

$$\bar{\mathcal{B}} = \mathbf{T}^p \mathcal{B}, \tag{3.13}$$

, com:

$$\mathbf{T}^0_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \bar{\xi}_i \in [\xi_j, \xi_{j+1}) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{3.14}$$

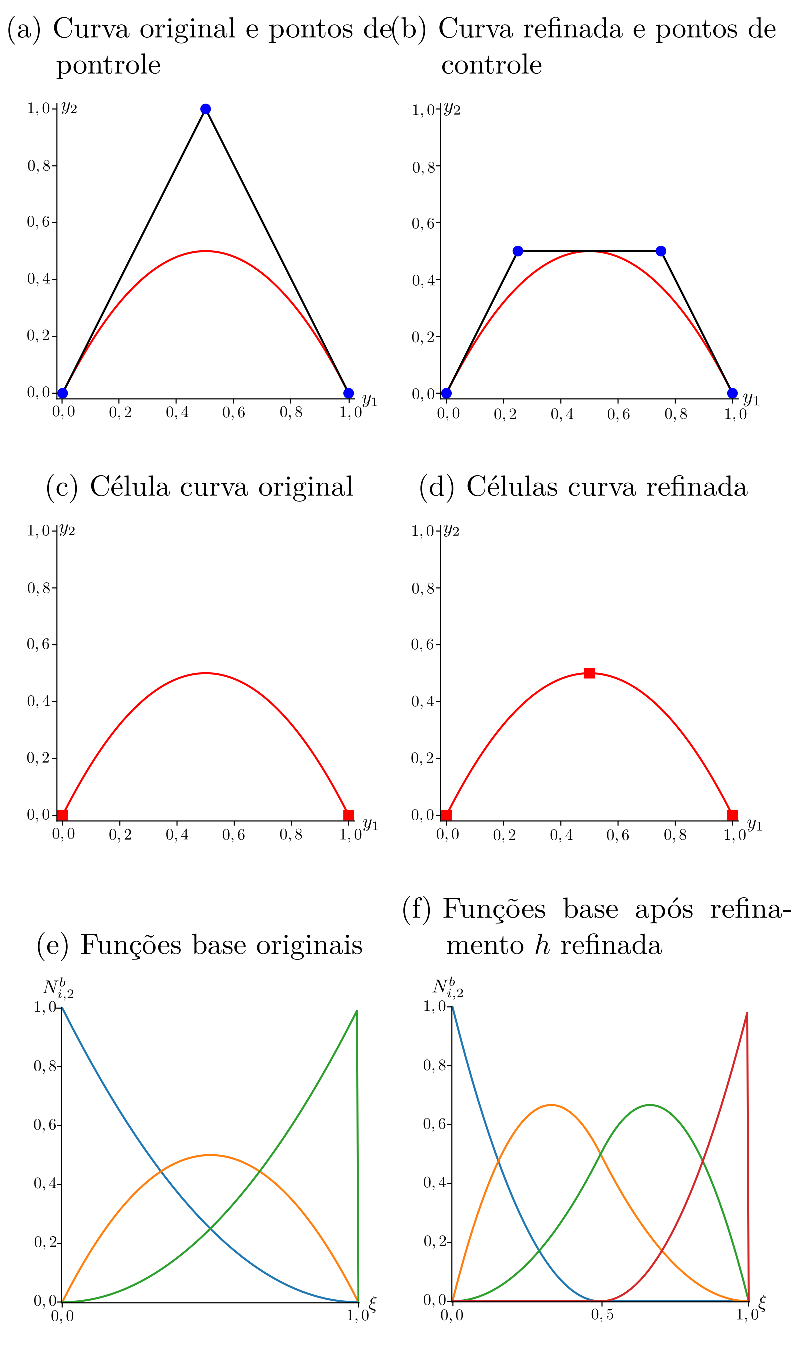
e

$$\mathbf{T}^{q+1}_{ij} = \frac{\bar{\xi}_{i+q} - \xi_j}{\xi_{j+q} - \xi_j} \mathbf{T}^q_{ij} + \frac{\xi_{j+q+1} - \bar{\xi}_{i+q}}{\xi_{j+q+1} - \xi_{j+1}} \mathbf{T}^q_{ij+1} \text{ com } q = 0, 1, 2, ..., p-1, \tag{3.15}$$

com $i = 0, 1, ..., (n+m)$ e $j = 0, 1, ..., n$.

Considerando uma curva quadrática *B-spline* construída sobre um vetor de *knots* aberto $\Xi = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$ apresentada na Figura 18a juntamente com sua rede de pontos de controle, nota-se que essa curva, possui apenas uma célula no espaço físico e 3 funções base no espaço paramétrico (Figura 18e).

Figura 18 – Refinamento h para um curva *B-Spline*



(a) Curva original e pontos de pontrole

(b) Curva refinada e pontos de controle

(c) Célula curva original

(d) Células curva refinada

(e) Funções base originais

(f) Funções base após refinamento h refinada

Fonte: Elaborada pela autora

Ao realizar a inserção de um *knot*, $\xi = 1/2$, o vetor de *knots* estendido fica definido como: $\bar{\Xi} = [0, 0, 0, 1/2, 1, 1, 1]$. Aplicando-se a Equação (3.1) e Equação (3.2) à esse vetor de coordenadas paramétricas, obtém-se as 4 funções base apresentadas na Figura 18f definidas sobre 2 células do espaço paramétrico. Após o emprego do refinamento h, a geometria da curva é preservada. No entanto, como ilustrado na Figura 18d, uma nova célula física é inserida, além de que, de acordo com a Figura 18b, a malha de pontos de controle é modificada, com o acréscimo de um novo ponto e o reajuste de suas posições.

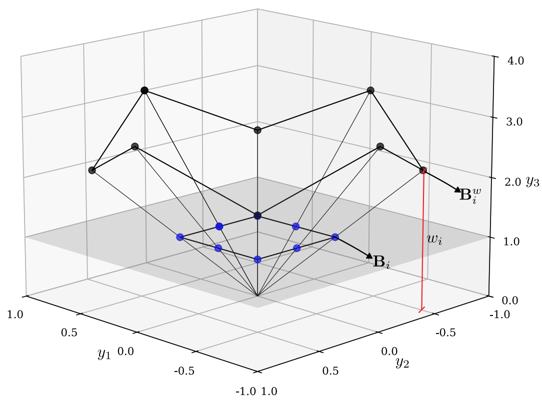
Para fins práticos, o processo de refinamento consiste na inserção consecutiva de coordenadas paramétricas ao vetor de *(*knots) até que se alcance a discretização desejada. Um algoritmo mais eficiente para realizar esse procedimento de refinamento pode ser encontrado em Piegl e Tiller (1996). Esse procedimento pode ser aplicado analogamente à superfícies e sólidos, aplicando-se a inserção de *knots* nas direções paramétricas desejadas.

3.3 NURBS

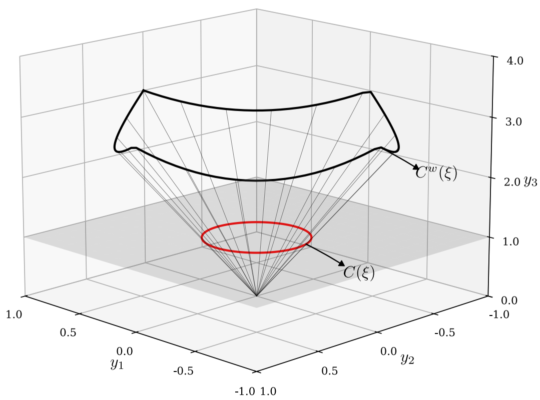
Uma geometria NURBS no $\mathbb{R}^{n_{\text{sd}}}$ pode ser entendida, do ponto de vista geométrico, como a transformação projetiva de uma geometria *B-Spline* no $\mathbb{R}^{n_{\text{sd}}+1}$. Nesse contexto, geometrias cônicas podem ser construídas exatamente através de curvas quadráticas por partes. Na Figura 19b, apresenta-se uma curva NURBS $\mathbf{C}\,(\xi)$ no $\mathbb{R}^2$, que representa de forma exata uma circunferência, a qual foi obtida a partir da transformação projetiva de uma curva quadrática por partes *B-Spline* $(\mathbf{C}^w\,(\xi))$ no $\mathbb{R}^3$. A transformação é realizada através da projeção em um plano $y_3 = 1$ de cada ponto da curva projetiva $(\mathbf{C}^w\,(\xi))$ através de um raio que passa pela origem.

Figura 19 – Projeção transformativa de entidade *B-Spline*

(a) Projeção transformativa malha de pontos de controle



(b) Projeção transformativa *B-Spline*



Fonte: Elaborada pela autora

O mesmo procedimento de transformação pode ser realizado para obtenção dos pontos de controle NURBS (Figura 19a) a partir de pontos de controle projetivos $(\mathbf{B_i}^w)$, usando a seguinte relação:

$$(\mathbf{B}_i)_j = (\mathbf{B}_i^w)_j \,/ w_i, \quad j = 1, ..., n_{\text{sd}}, \tag{3.16}$$

$$w_i = \left(\mathbf{B}_i^w\right)_{n_{\text{sd}}+1}, \tag{3.17}$$

com $\left(\mathbf{B}_i\right)_j$ o j-ésimo componente do vetor $\mathbf{B}_i$ e w_i refere-se ao i-ésimo peso, que consiste na coordenada y_3 dos pontos de controle projetivos para o exemplo citado.

Para a aplicação dessa mesma transformação para cada ponto da curva, será utilizado um conceito de função peso, dada por:

$$W(\xi) = \sum_{\hat{i}=0}^{n} N_{\hat{i},p}^b(\xi) w_{\hat{i}}, \tag{3.18}$$

e a curva NURBS pode ser definida como:

$$\left(\mathbf{C}(\xi)\right)_j = \left(\mathbf{C}^w(\xi)\right)_j / W(\xi), \quad j = 1, ..., n_{\text{sd}}. \tag{3.19}$$

Tanto $\mathbf{C}^w$ como $W(\xi)$ são funções polinomiais por partes, dessa forma, $\mathbf{C}(\xi)$ é uma função racional por partes.

3.3.1 Funções base NURBS e suas derivadas

Matematicamente, uma função NURBS é obtida pela racionalização de uma função *B-Spline*. Uma função racional NURBS (R) é construída através da seguinte expressão:

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}^b(\xi) w_i}{\sum_{\hat{i}=0}^{n} N_{\hat{i},p}^b(\xi) w_{\hat{i}}}. \tag{3.20}$$

com w_i e $w_{\hat{i}} \in \mathbb{R}$, sendo $i = \hat{i} = 0, 1, ..., n$.

A derivada de uma função $R_{i,p}$ é obtida aplicando simplesmente a regra do quociente à expressão da Equação (3.20):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} R_{i,p}(\xi) = w_i \frac{W(\xi)\left(N_{i,p}^b\right)'(\xi) - W'(\xi) N_{i,p}^b(\xi)}{\left(W(\xi)\right)^2}, \tag{3.21}$$

com:

$$\left(N_{i,p}^b\right)'(\xi) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} N_{i,p}^b(\xi), \tag{3.22}$$

e:

$$W^{'}(\xi) = \sum_{\hat{i}=0}^{n} (N_{\hat{i},p}^{b})'(\xi)\, w_{\hat{i}}. \tag{3.23}$$

A k-ésima derivada de $R_{i,p}$ é obtida em termos de derivadas de menores ordem, através da seguinte expressão:

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\xi^k} R_{i,p}(\xi) = \frac{A_i^{(k)}(\xi) - \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} W^{(j)}(\xi) \frac{\mathrm{d}^{(k-j)}}{\mathrm{d}\xi^{(k-j)}} R_{i,p}(\xi)}{W(\xi)} \tag{3.24}$$

com:

$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!\,(k-j)!}, \tag{3.25}$$

$$W^{(j)}(\xi) = \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}\xi^j} W(\xi), \tag{3.26}$$

e:

$$A_i^{(k)}(\xi) = w_i \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\xi^k} N_{i,p}^{b}(\xi)\,\text{sem soma em } i. \tag{3.27}$$

3.3.2 Geometria NURBS

Uma curva NURBS é obtida através da combinação linear entre as funções base NURBS e um conjunto de pontos de controle, conforme expresso pela equação abaixo:

$$\mathbf{C} = \mathbf{y}(\xi) = \sum_{i=0}^{n} R_{i,p}(\xi) \mathbf{B}_i, \tag{3.28}$$

cujos pontos de controle e pesos são escolhidos criteriosamente de forma a obter-se a geometria desejada.

Analogamente, uma superfície NURBS é obtida através das seguintes relações:

$$R_{i,j:p,q}(\xi,\eta) = \frac{N_{i,p}^{b}(\xi) M_{j,q}^{b}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{\hat{i}=0}^{n} \sum_{\hat{j}=0}^{m} N_{\hat{i},p}^{b}(\xi) M_{\hat{j},q}^{b}(\eta) w_{\hat{i},\hat{j}}}, \tag{3.29}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{y}\left(\xi,\eta\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} R_{i,j:p,q}(\xi,\eta)\mathbf{B}_{i,j}, \tag{3.30}$$

com $w_{i,j}$ e $w_{\hat{\imath},\hat{\jmath}} \in \mathbb{R}$, sendo $i = \hat{\imath} = 0, 1, ..., n$ e $j = \hat{\jmath} = 0, 1, ..., m$, correspondem aos pesos relativos às funções $N^b_{i,p}\left(\xi\right) M^b_{j,q}\left(\eta\right)$ e $N^b_{\hat{\imath},p}\left(\xi\right) M^b_{\hat{\jmath},q}\left(\eta\right)$ respectivamente. Por fim, um sólido NURBS é obtido por:

$$R_{i,j,k:p,q,r}(\xi,\eta,\zeta) = \frac{N^b_{i,p}(\xi)M^b_{j,q}(\eta)L^b_{k,r}(\zeta)w_{i,j,k}}{\sum_{\hat{\imath}=0}^{n}\sum_{\hat{\jmath}=0}^{m}\sum_{\hat{k}=0}^{l} N^b_{\hat{\imath},p}(\xi)M^b_{\hat{\jmath},q}(\eta)L^b_{\hat{k},r}(\zeta)w_{\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k}}}, \tag{3.31}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{y}\left(\xi,\eta,\zeta\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{l} R_{i,j,k:p,q,r}(\xi,\eta,\zeta)\mathbf{B}_{i,j,k}, \tag{3.32}$$

onde $w_{i,j,k}$ e $w_{\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k}} \in \mathbb{R}$, sendo $i = \hat{\imath} = 0, 1, ..., n$, $j = \hat{\jmath} = 0, 1, ..., m$ e $k = \hat{k} = 0, 1, ..., l$, correspondem aos pesos relativos às funções $N^b_{i,p}\left(\xi\right) M^b_{j,q}\left(\eta\right) L^b_{k,r}\left(\zeta\right)$ e $N^b_{\hat{\imath},p}\left(\xi\right) M^b_{\hat{\jmath},q}\left(\eta\right) L^b_{\hat{k},r}\left(\zeta\right)$, respectivamente.

3.3.3 Múltiplos *patches*

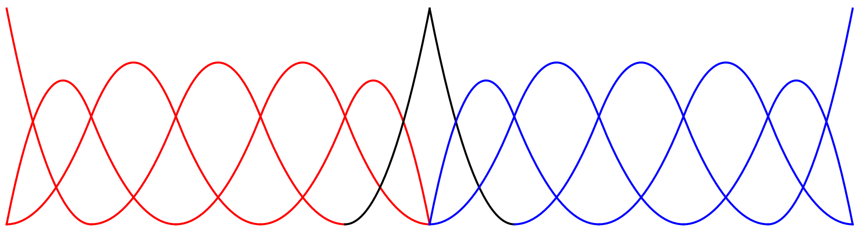
Na grande maioria das situações práticas, é necessário o uso de múltiplos *patches* NURBS para descrever um domínio computacional. Isso ocorre porque o produto tensorial do espaço paramétrico não é adequado para a representação de domínios complexos ou multiplamente conectados. Ademais, mesmo para domínios simples, do ponto de vista da simulação numérica, o uso de múltiplos *patches* pode ser necessário em algumas circunstâncias, conforme será visto na seção de exemplos.

Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005) destaca que o uso de múltiplos *patches* pode facilitar a análise numérica quando diferentes materiais e modelos físicos são utilizados em distintas regiões do domínio. Além disso, em processamento paralelo, pode ser conveniente, do ponto de vista das estruturas de dados, não compartilhar um único *patch* entre diferentes processadores.

A utilização de múltiplos *patches* implica a necessidade de compatibilizar a discretização na interface entre *patches* adjacentes; ou seja, a parametrização e o mapeamento devem ser idênticos nesses locais. Cada ponto de controle em uma face de *patches* adjacentes deve possuir um correspondente na face oposta. Esses pontos coincidentes são tratados como um único ponto de controle dentro do sistema global resultante da análise numérica.

Ressalta-se ainda, que na interface entre os *patches*, devido a natureza interpolatória do vetores de *knots* abertos, as funções base possuem continuidade C_0, conforme pode ser observado na Figura 20, onde apresentam-se as funções base univariadas na interface entre dois *patches*.

Figura 20 – Funções base univariadas na interface entre *patches*



Fonte: Elaborada pela autora

3.4 Análise isogeométrica

Para a aplicação da AIG no contexto da Dinâmica dos Fluidos Computacional, é utilizada a mesma metodologia apresentada no Cap. 2. A aproximação da geometria, realizada no contexto do MEF pela Equação (2.48) é substituída pela abordagem isogeométrica através do uso de geometrias NURBS, descritas pelas equações: Equação. (3.28), Equação (3.30) ou Equação (3.32) para os casos de curvas, superfícies ou sólidos, respectivamente. As funções tentativa para velocidade e pressão, e as funções teste associadas à elas, apresentadas na Equação (2.49) à Equação (2.52)) seguem exatamente a mesma lógica, porém, as funções de forma N, são substituídas pelas funções base NURBS $R_{i,p}(\xi)$, $R_{i,j:p,q}(\xi,\eta)$ e $R_{i,j,k:p,q,r}(\xi,\eta,\zeta)$, a depender da geometria em análise.

Assim, a implementação da AIG para escoamentos incompressíveis segue o mesmo roteiro apresentada no Algoritmo 1, levando-se em consideração as mudanças nas funções de forma, o modo de proceder com a integração numérica e as particularidades no cálculo dos parâmetros de estabilização, conforme descritos na sequência desta seção.

A integração numérica é realizada no domínio de cada célula através da quadratura Gaussiana. Considerando o domínio paramétrico de uma célula: $\bar{\Omega}^e$, e o domínio de integração ou parental: $\tilde{\Omega}^e$, apresentados na Figura 15, definidos respectivamente pelos vetores de coordenadas paramétricas $\boldsymbol{\xi}\,(\xi,\eta,\zeta)$ e $\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\tilde{\xi},\tilde{\eta},\tilde{\zeta})$, a matriz jacobiana do mapeamento do espaço físico, com coordenadas $\mathbf{y}\,(y_1,y_2,y_3)$, para o espaço de quadratura, é definida por:

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tilde{\boldsymbol{\xi}}} = \frac{d\mathbf{y}}{d\boldsymbol{\xi}}\frac{d\boldsymbol{\xi}}{d\tilde{\boldsymbol{\xi}}}, \tag{3.33}$$

com $\tilde{\xi},\tilde{\eta},\tilde{\zeta} \in [-1,1]$.

O primeiro termo à direita da igualdade da Equação (3.33) é calculado a partir das derivadas parciais da: Equação (3.28), Equação (3.30) ou Equação (3.32), a depender do tipo da geometria em questão (curva, superfície ou sólido, respectivamente).

Para a obtenção do segundo termo à direita, primeiramente é necessário definir a relação entre as coordenadas do domínio paramétrico e do domínio parental. Considerando-se a célula $\bar{\Omega}^e = [\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}] \times [\zeta_k, \zeta_{k+1}]$, pode-se calcular $\xi, \eta, \zeta \in \bar{\Omega}^e$ a partir de $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta} \in \tilde{\Omega}^e$ através das seguintes relações:

$$\xi = \xi_i + \left(\tilde{\xi} + 1\right)\left(\frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{2}\right), \tag{3.34}$$

$$\eta = \eta_i + (\tilde{\eta} + 1)\left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{2}\right), \tag{3.35}$$

e

$$\zeta = \zeta_i + \left(\tilde{\zeta} + 1\right)\left(\frac{\zeta_{i+1} - \zeta_i}{2}\right), \tag{3.36}$$

assim, $\frac{d\boldsymbol{\xi}}{d\tilde{\boldsymbol{\xi}}}$ é obtido derivando-se parcialmente às expressões apresentadas em: Equação (3.34), Equação (3.35) e Equação (3.36).

3.4.1 Parâmetros de estabilização

Para a determinação dos parâmetros de estabilização τ, de acordo com o exposto na subseção 2.3.3, faz-se necessária a determinação de um tensor métrico, $\mathbf{G}$ (Equação (2.68)), o qual depende da matriz jacobiana transformada, $\hat{\mathbf{Q}}$, definida na Equação (2.65).

Dada a diferença entre o espaço paramétrico utilizado na definição das funções de base e do espaço paramétrico de integração, definido aqui como espaço parental, a matriz $\mathbf{Q}$ é reescrita como:

$$\mathbf{Q} = \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}}\right). \tag{3.37}$$

Para a obtenção de $\hat{\mathbf{Q}}$, de acordo com a Equação (2.65), define-se a matriz $\mathbf{D}$ para análise isogeométrica, de acordo com o trabalho de Otoguro, Takizawa e Tezduyar (2020), como:

$$\mathbf{D} = \left(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\xi}}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}}\right), \tag{3.38}$$

que representa a relação entre o espaço paramétrico de preferência, onde o comprimento efetivo da célula deve ser medido, e o espaço de integração, onde são definidos os pontos de quadratura.

O espaço paramétrico de preferência para problemas unidimensionais é definido para cada célula por meio de uma interpolação usando polinômios de Bernstein B_b^p de ordem p:

$$\hat{\xi}\left(\tilde{\xi}\right) = \sum_{b=0}^{p} \hat{\xi}_b B_b^p \left(\tilde{\xi}\right), \tag{3.39}$$

com os pontos de controle de Bézier, $\hat{\xi}_b$, definidos igualmente espaçados da seguinte maneira:

$$\hat{\xi}_b = \frac{\Delta\hat{\xi}}{p} b, \tag{3.40}$$

sendo $\Delta\hat{\xi}$ o comprimento paramétrico da célula de Bézier.

Os pontos de controle correspondentes no espaço de integração são dados por:

$$\tilde{\xi}_a = \frac{\Delta\hat{\xi}}{p} \sum_{b=0}^{p} b \left\{\mathbf{C}^{-1}\right\}_{ba}, \tag{3.41}$$

sendo $a = 0, ..., p$. $\mathbf{C}$ sendo o operador de extração de Bézier, que relaciona as funções *B-spline* globais às funções de Bernstein locais, cuja obtenção, neste trabalho, é realizada de acordo com o exposto em Borden *et al.* (2011).

O comprimento efetivo da célula para $a = 1, ..., p$ pode ser calculado por:

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{\xi}_a &= \tilde{\xi}_a - \tilde{\xi}_{a-1} && (3.42) \\ &= \frac{\Delta\hat{\xi}}{p} \sum_{b=0}^{p} b \left(\left\{\mathbf{C}^{-1}\right\}_{ba} - \left\{\mathbf{C}^{-1}\right\}_{ba-1} \right). && (3.43) \end{aligned}$$

A partir disso pode-se definir o razão entre o comprimento da célula de Bézier e o comprimento efetivo da célula. Considerando um problema 1D, uma das proposta dos autores para D, utilizada neste trabalho, chama-se *RQD-MAX* e consiste em:

$$D = \frac{\Delta\hat{\xi}}{\min_{a=1,...,p} \Delta\tilde{\xi}_a}, \tag{3.44}$$

resultando em:

$$D = p\left(\min_{a=1,\dots,p}\sum_{b=0}^{p} b\left(\left\{\mathbf{C}^{-1}\right\}_{ba} - \left\{\mathbf{C}^{-1}\right\}_{ba-1}\right)\right)^{-1} \tag{3.45}$$

$$= p\max_{a=1,\dots,p}\left(\sum_{b=0}^{p} b\left(\left\{\mathbf{C}^{-1}\right\}_{ba} - \left\{\mathbf{C}^{-1}\right\}_{ba-1}\right)\right)^{-1}. \tag{3.46}$$

Para múltiplas dimensões o coeficiente de transformação D é obtido individualmente para cada uma das direções do espaço paramétrico, e os componentes da matriz de transformação $\mathbf{D}$ são determinados como:

$$D_{ij} = D^i\delta_{ij}, \tag{3.47}$$

$i, j = 1, ..., n_{pd}$, sendo n_{pd} a dimensão do espaço paramétrico.

3.5 Verificação e aplicações

Os exemplos escolhidos para a verificação do código computacional AIG para escoamentos incompressíveis são o escoamento sobre um cilindro e o escoamento sobre canal com degrau. Em ambas análises empregou-se discretização tridimensional para uma verificação mais completa do código.

3.5.1 Escoamento sobre um cilindro - discretização isogeométrica

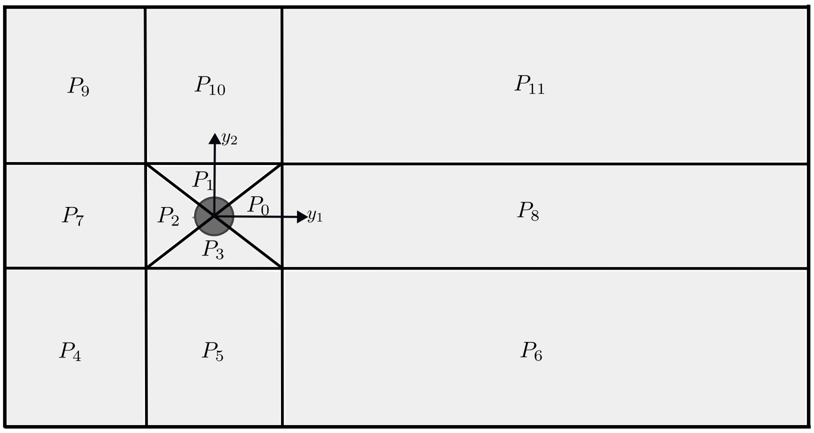
Este é o mesmo exemplo simulado com elementos finitos na subseção 2.6.1, porém considerando-se discretização tridimensional do domínio como representado na Figura 25a. São adotados os mesmos parâmetros de análise, sendo considerados também os 3 valores de número de Reynolds: Re = 40, 100 e, 1000. A dimensão t na direção y_3 é equivalente à 0,01D. Aplica-se um perfil de velocidade constante na entrada do domínio, $\mathbf{u} = [u_\infty, 0, 0]$, e condições de parede lisa são atribuídas às paredes superior e inferior, enquanto que para as frontal e dos fundos condições de simetria são aplicadas.

Por se tratar do primeiro exemplo com discretização isogeométrica, descreve-se de maneira detalhada a geração da discretização espacial, enquanto nos demais problemas a discretização é apenas apresentada.

3.5.1.1 Geração da malha NURBS

Dada a simplicidade da geometria envolvida, a malha é desenvolvida pela própria autora, i.e., sem o emprego de programas CAD para geração da malha isogeométrica. Para isso, com base nas dimensões bidimensionais do exemplo apresentado na subseção 2.6.1, divide-se o domínio físico em 12 *patches*, conforme pode ser ilustrado na Figura 21.

Figura 21 – Cilindro: Divisão dos *Patches*



Fonte: Elaborada pela autora

O processo de geração da malha, simplificadamente, consiste em se escolher vetores de *knots*, pontos de controle, e pesos adequados para a descrição da geometria de cada *patch*, assegurando simultaneamente o refinamento necessário para a análise numérica.

Para a geração do primeiro *patch*, P_0, que cobre 1/4 da circunferência do cilindro, inicia-se pela discretização de uma circunferência definida na direção paramétrica ξ. Utilizou-se o número mínimo de pontos de controle necessários para representar exatamente 1/4 de circunferência de diâmetro D com o uso de funções quadráticas NURBS. O vetor de *knots* aberto adotado é definido por: $\Xi = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$, sendo os pontos de controle $\mathbf{B}_0 = [\frac{\sqrt{2}D}{4}, -\frac{\sqrt{2}D}{4}, 0]$, $\mathbf{B}_1 = [\frac{D}{\sqrt{2}}, 0, 0]$ e $\mathbf{B}_2 = [\frac{\sqrt{2}D}{4}, \frac{\sqrt{2}D}{4}, 0]$, e os pesos: $w_0 = 1$, $w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $w_2 = 1$. A disposição dos pontos de controle e a curva resultante são apresentados na Figura 22a.

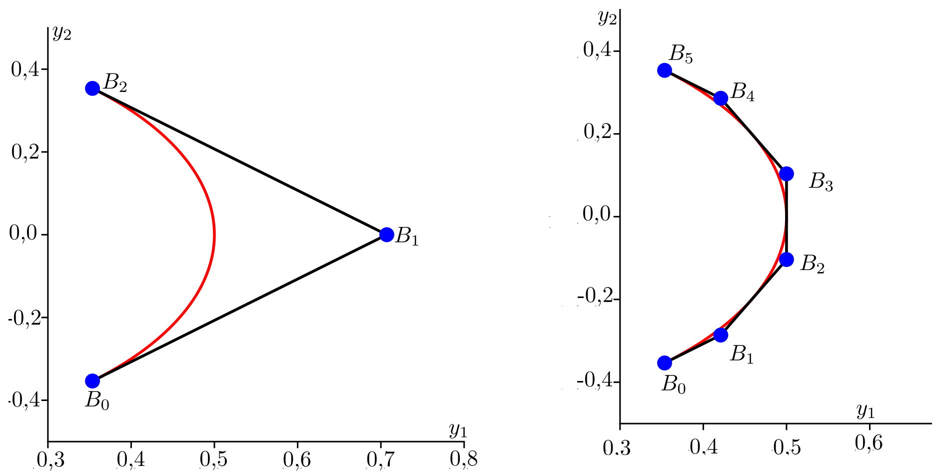
Na sequência refina-se a discretização por inserção sucessiva de coordenadas paramétricas no vetor de *knots*. O algoritmo utilizado para este procedimento pode ser encontrado em Piegl e Tiller (1996). Na Figura 22b apresenta-se um exemplo dos pontos de controle resultantes após a inserção das coordenadas paramétricas $1/4, 1/2$ e $3/4$. Essa inserção resulta em três novas células físicas. A quantidade de coordenadas paramétricas a ser inserida depende da discretização desejada para a analise numérica.

Para a representação da geometria do *patch* P_0, gerou-se uma curva na direção paramétrica ξ que define o contorno direito do domínio. A curva é definida considerando o vetor de *knots* atualizado $\Xi = [0, 0, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1, 1, 1]$ e consiste em uma reta cujas coordenadas de suas extremidades inicial e final são: $\mathbf{y}_0 = [2, -2, 0]$ e $\mathbf{y}_1 = [2, 2, 0]$, respectivamente. Os 6 pontos de controle são distribuídos sobre a reta através de um espaçamento não uniforme: nas extremidades, a distância entre pontos consecutivos corresponde à metade do espaçamento adotado no interior, enquanto a região central é subdividida uniformemente, conforme pode ser observado na Figura 23a. Essa distribuição não uniforme dos pontos de controle proporciona uma distribuição uniforme das células mapeadas no espaço físico. Para essa curva, todos os pesos são definidos como 1.

Figura 22 – Cilindro: Obtenção da circunferência

(a) Curva inicial e rede de pontos de controle

(b) Curva refinada e rede de pontos de controle



Fonte: Elaborada pela autora

A superfície do domínio é gerada discretizando-se a direção η do espaço paramétrico. Para isso, os $m+1$ pontos de controle nessa direção são posicionados ao longo das retas que conectam os pontos de controle da primeira camada (circunferência) aos da última camada (reta). A distribuição desses pontos segue uma progressão geométrica de modo que as células menores fiquem próximas ao cilindro garantindo uma melhor resolução para captar os efeitos de camada limite.

Esse processo é exemplificado na Figura 23a com a discretização mínima necessária para o emprego de funções quadráticas, ou seja, são utilizados apenas três pontos de controle na direção η, com o vetor de *knots* aberto $\mathcal{H} = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$. Na Figura 23b apresentam-se as células mapeadas do espaço paramétrico para o espaço físico. Salienta-se que os pontos de controle obtidos nessa etapa foram definidos com peso unitário.

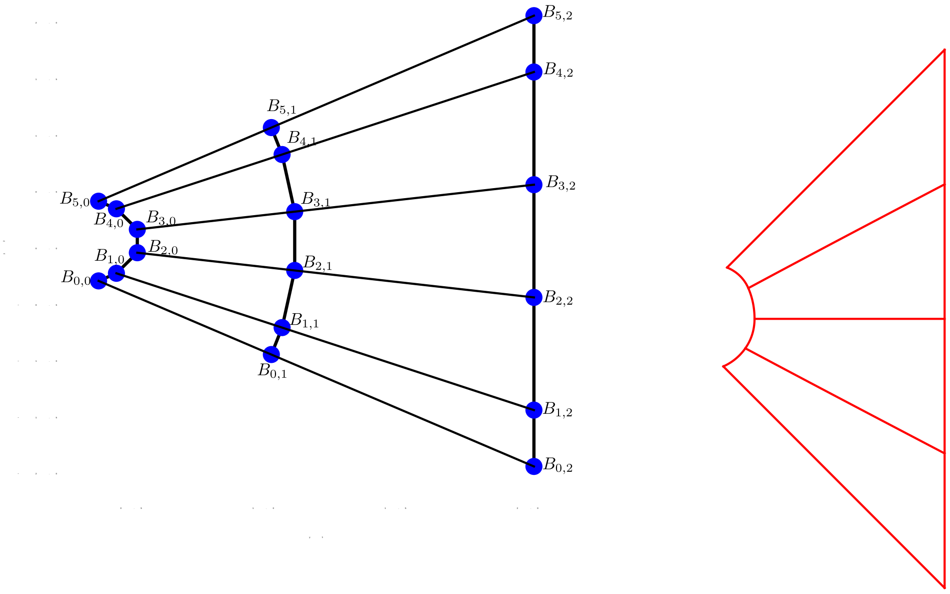
Para a simulação numérica apresentada na sequência, a quantidade de pontos de controle na direção η foi definida em função da necessidade de discretização para o problema. Para um vetor de *knots* abertos com coordenadas interiores de multiplicidade unitária, a quantidade de células ($ncel$) está relacionada número de pontos de controle npc por $ncel = npc - deg$, sendo deg o grau das funções na direção paramétrica em questão.

Por fim, para a geração do volume NURBS, adota-se apenas uma camada de células na direção paramétrica ζ, correspondente à direção y_3 do espaço físico deste problema. São empregadas funções quadráticas, com vetor de *knots* aberto $\mathcal{Z} = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$ na direção

ζ e pontos de controle distribuídos uniformemente e com peso unitário. Na Figura 24a e Figura 24b apresenta-se a rede de pontos e a malha física para a geração do volume equivalente ao *patch* P_0 para a discretização exemplificada nesta seção.

Figura 23 – Cilindro: Obtenção da superfície

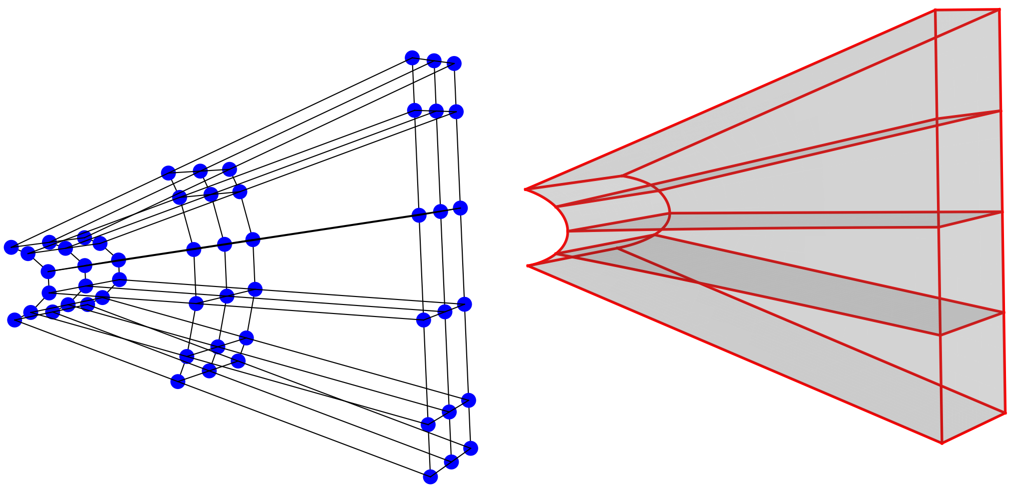
(a) Rede de pontos de controle superfície (b) Malha física



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 24 – Cilindro: Obtenção do sólido

(a) Rede de pontos de controle sólido (b) Malha física sólido



Fonte: Elaborada pela autora

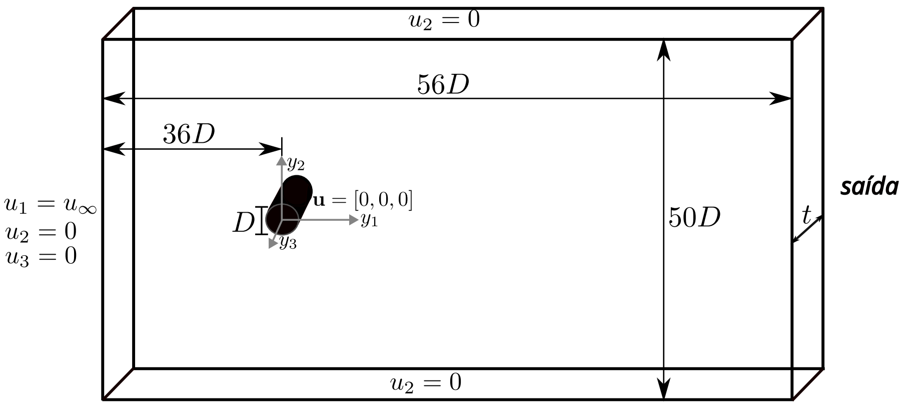
Para os *patches* P_1, P_2 e P_3, utiliza-se a mesma parametrização de P_0, obtendo-se seus pontos de controle por rotação dos pontos de controle de P_0, de modo que cada um seja ajustado ao quadrante do cilindro correspondente.

Para a geração dos*patches* retangulares, P_4 à P_{11}, definiu-se a direção paramétrica ξ respectiva à direção física y_1, η correspondente à y_2 e ζ à y_3. A quantidade de pontos de controle em cada direção foi definida a partir do número de células desejadas para a análise numérica e para garantir compatibilidade com os *patches* P_0 - P_3, adotando-se pesos unitários para os pontos de controle, vetores de *knots* abertos e com espaçamento uniforme e funções NURBS quadráticas.

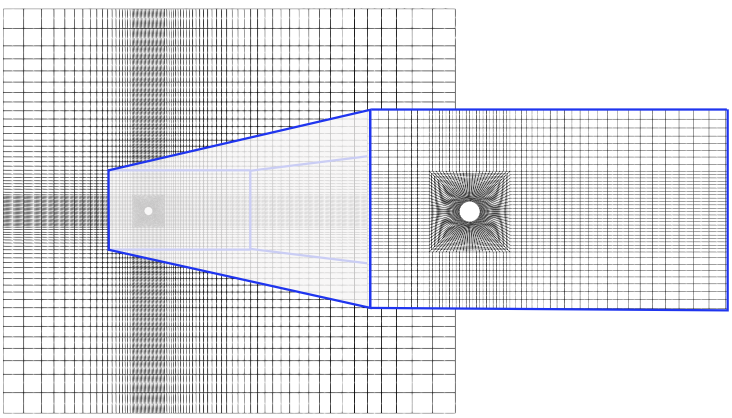
A malha isogeométrica utilizada é apresentada na Figura 25b e na Tabela 2 pode-se observar a quantidade de pontos de controle em cada uma das direções paramétricas utilizados na discretização de cada um dos *patches* que compõe a malha, resultando em 30228 pontos de controle e 8728 células físicas.

Figura 25 – Cilindro: Malha de células físicas

(a) Cilindro: Geometria e condições de contorno



(b) Discretização espacial - plano y_1y_2



Fonte: Elaborada pela autora

Tabela 2 – Cilindro: Número de pontos de controle por *patch*

Patch	ξ	η	ζ
0	26	34	3
1	26	34	3
2	26	34	3
3	26	34	3
4	20	28	3
5	26	28	3

Patch	ξ	η	ζ
6	42	28	3
7	20	26	3
8	42	26	3
9	20	28	3
10	26	28	3
11	42	28	3

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.5.1.2 Análise numérica

O problema é simulado para um velocidade de entrada $u_\infty = 1{,}0$, $\rho = 1{,}0$, $\Delta t = 0{,}05$, e $\rho_\infty = 0{,}5$, sendo a viscosidade variada de acordo com o número de Reynolds desejado. Para a discretização 3D, calculam-se os coeficientes aerodinâmicos C_D e C_L a partir das definições de forças de arrasto e de sustentação através das seguintes equações:

$$C_D = \frac{F_D}{0{,}5\rho\|\mathbf{u}_\infty\|^2 Lt}, \tag{3.48}$$

e

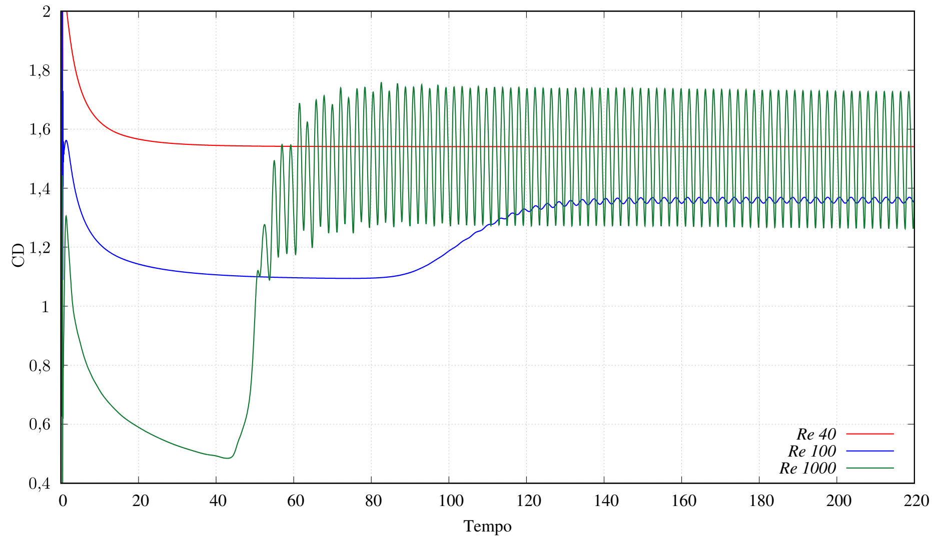
$$C_L = \frac{F_L}{0{,}5\rho\|\mathbf{u}_\infty\|^2 Lt}. \tag{3.49}$$

A Figura 26a e a Figura 26b apresentam a história de C_D e C_L. Os valores do coeficiente de arrasto médio obtidos com a malha isogeométrica com células 3d foram: $C_{Dmed} = 1{,}54$ para Re = 40, $C_{Dmed} = 1{,}36$ para Re = 100 e $C_{Dmed} = 1{,}49$ para Re = 1000. Ressalta-se, que apesar dos valores de C_{Dmed} estarem bem próximos aos da simulação com MEF tradicional da subseção 2.6.1, para as análises utilizando IGA, foram necessários mais passos de tempo para o início do processo de desprendimento de vórtices nos casos de Re = 100 e Re = 1000, o que está associado tanto à melhor uniformidade da discretização quanto à diferença na resolução da malha no plano $y_1 \times y_2$.

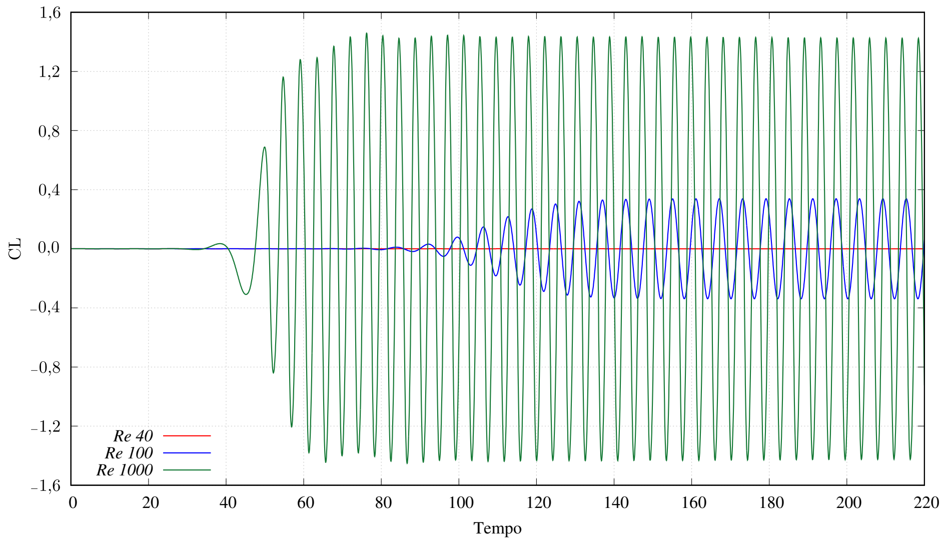
Os campos de velocidade e pressão para diferentes instantes ao longo de um ciclo de desprendimento de vórtices para Re = 1000 são apresentados na Figura 27 e Figura 28, onde observa-se resultados qualitativamente consistentes com o esperado.

Figura 26 – Cilindro: Coeficientes aerodinâmicos

(a) Coeficiente de arrasto C_D



(b) Coeficiente de sustentação C_L

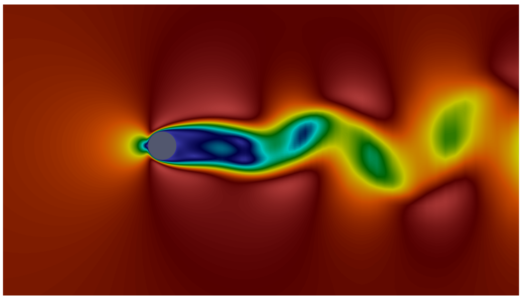


Re 40 *Re 100* *Re 1000*

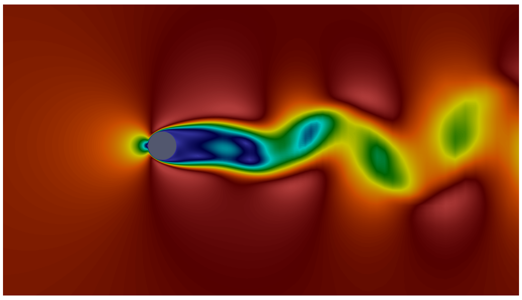
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 27 – Cilindro: Campos de velocidade para Re = 1000 - plano y_1y_2

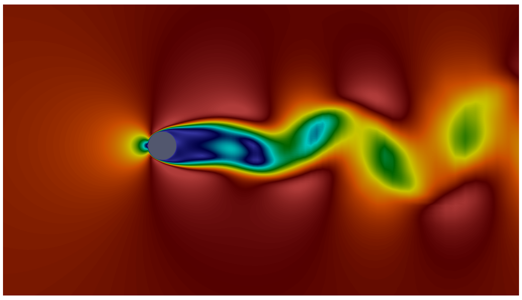
(a) T_n



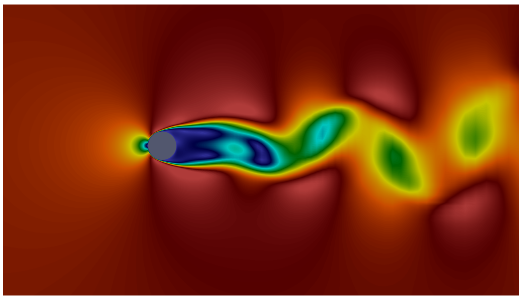
(b) $T_n + T_n/6$



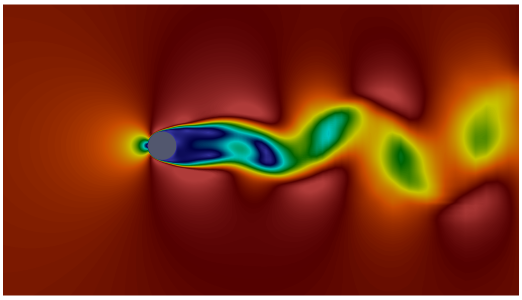
(c) $T_n + T_n/3$



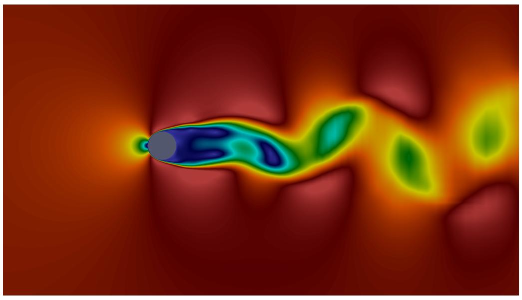
(d) $T_n + T_n/2$

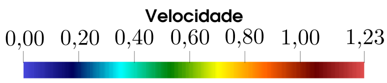


(e) $T_n + 2T_n/3$



(f) $T_n + 5T_n/6$

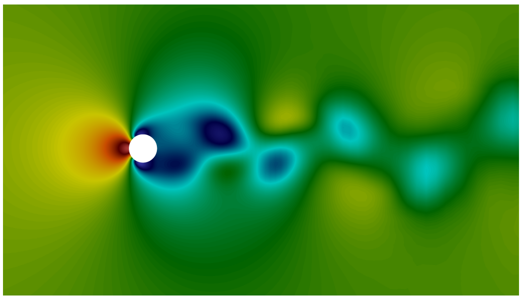




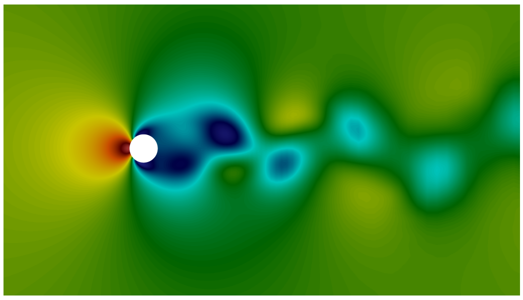
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 28 – Cilindro: Campos de pressão para Re = 1000 - plano y_1y_2

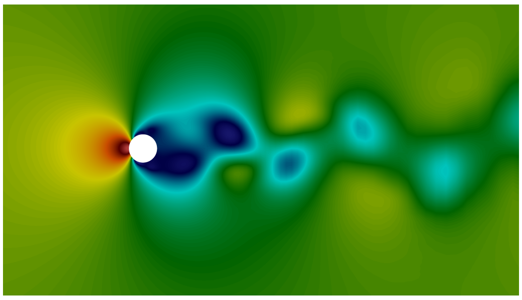
(a) T_n



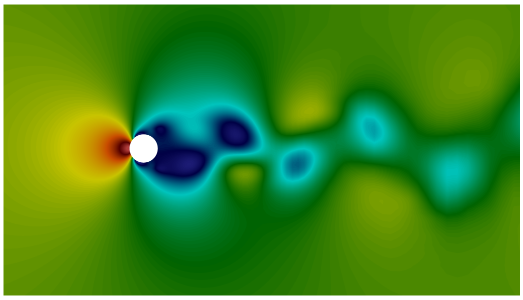
(b) $T_n + T_n/6$



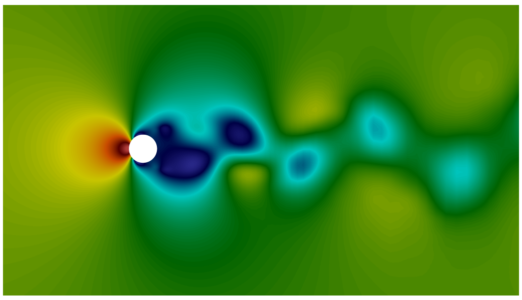
(c) $T_n + T_n/3$



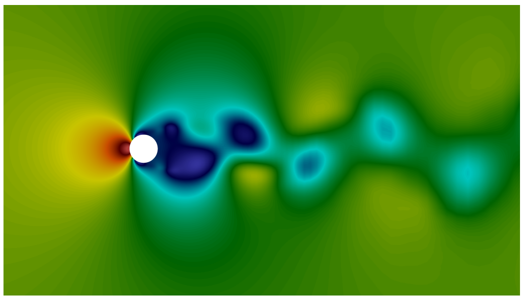
(d) $T_n + T_n/2$

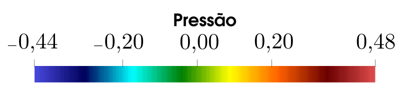


(e) $T_n + 2T_n/3$



(f) $T_n + 5T_n/6$





Fonte: Elaborada pela autora

3.5.2 Escoamento em um canal com degrau

Este problema consiste num escoamento em um canal fechado com um degrau à jusante da entrada, causando expansão abrupta da altura do canal, conforme apresentado na Figura 29, onde é descrita a geometria do canal em vista no plano $y_1 \times y_2$, sendo as dimensões: $h = 1{,}0m$, $s = 0{,}94m$, $x_e = 1{,}0m$, $x_f = 15m$ e $x_t = 30m$. A espessura adotada, na direção y_3, é constante e igual a $0{,}1m$.

Considera-se condição de aderência nas paredes paralelas aos planos y_1y_3 e y_1y_3 com $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, enquanto que as paredes paralelas ao plano y_1y_2 são consideradas lisas, com apenas $u_3 = 0$. Na entrada prescreve-se o perfil parabólico para u_1 dado por:

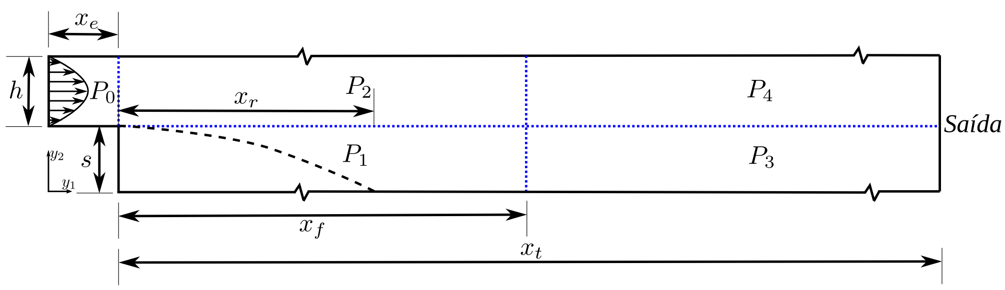
$$u_1 = V_{max}\left(1 - \left(\frac{(y_2 - s) - h/2}{h/2}\right)^2\right), \tag{3.50}$$

com velocidade $V_{max} = 10m/s$ e $u_2 = u_3 = 0$.

O escoamento sobre o degrau é caracterizado por produzir áreas de recirculação onde o fluido se separa e forma vórtices. A distância entre o degrau e o ponto de recolamento do vórtice principal, x_r, é uma das principais características verificadas nesse problema. A dimensão dos vórtices varia em função do número de Re, o qual é calculado de acordo com Armaly *et al.* (1983), por:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho\left(\frac{2V_{max}}{3}\right)2h}{\mu}. \tag{3.51}$$

Figura 29 – Degrau: Geometria - plano y_1y_2



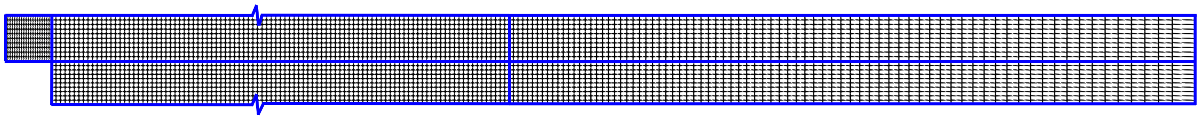
Fonte: Elaborada pela autora

Embora o problema possua caráter bidimensional, para fins de verificação do código, adota-se discretização isoparamétrica 3d com cinco *patches* e um total de 17640 pontos de controle e 4800 células, conforme pode ser observado na Figura 30. Na Tabela 3 apresenta-se o número de pontos de controle em cada direção paramétrica para cada *patch*.

São simulados três diferentes número de Reynolds para as análises: Re = 100, Re = 400 e Re = 800, os quais são obtidos a partir da variação da viscosidade do fluido.

Considera-se $\rho = 1kg/m^3$, $\Delta t = 0{,}05s$, e $\rho_\infty = 0{,}5$. As simulações são mantidas até que seja atingido o estado estacionário, sobre o qual são feitas as análises.

Figura 30 – Degrau: Malha de células físicas - plano y_1y_2



Fonte: Elaborada pela autora

Tabela 3 – Degrau: Número de pontos de controle por *patch*

Patch	ξ	η	ζ
0	22	12	3
1	152	12	3
2	152	12	3
3	82	12	3
4	82	12	3

Fonte: Elaborada pelo autor.

De acordo com os experimentos realizados por Armaly *et al.* (1983), as medições do comprimento do vórtice primário, logo a jusante do degrau na parte inferior, identificam o regime do escoamento como laminar (Re $<$ 1200), transiente (1200 $<$ Re $<$ 6600) e turbulento (Re $>$ 6600). Além disso, o autor constata em seus ensaios que para Re $<$ 400 o escoamento é predominantemente bidimensional, enquanto que para Reynolds superiores, o escoamento apresenta regiões de comportamento tridimensional.

Armaly *et al.* (1983) em suas análises constatou o surgimento de uma bolha de separação adicional ao longo do piso do canal, a jusante da separação primária, a qual desaparece para Re $>$ 2300. Outra região de separação secundária também é observada ao longo da parede superior à jusante do degrau. Isso desenvolve-se a partir de Re 400 e permanece durante todo o regime de transição.

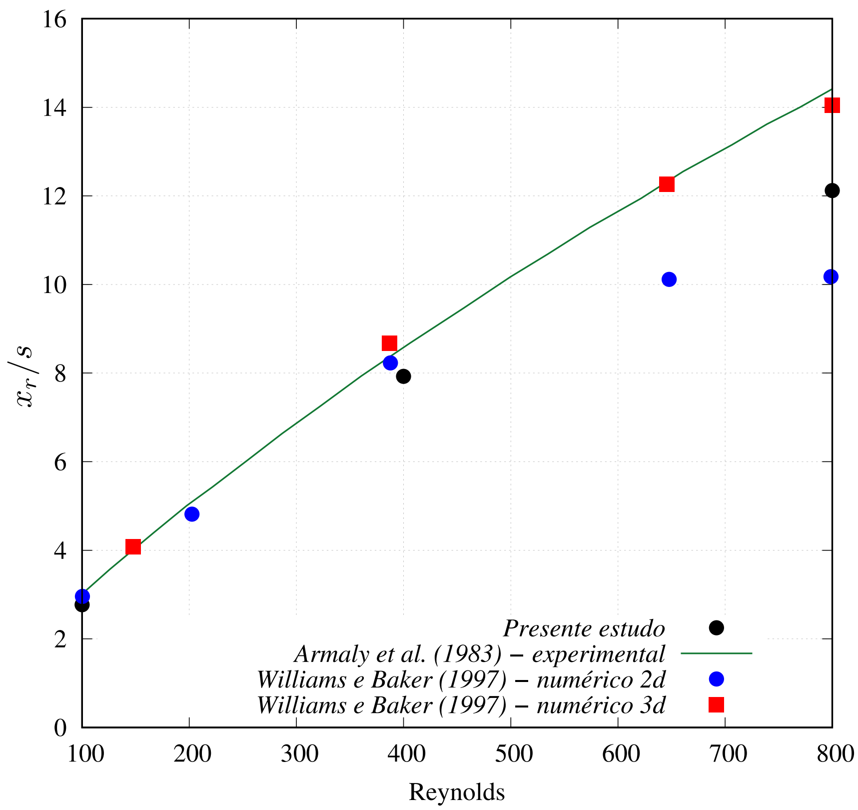
Na Figura 31 são apresentados os comprimentos de recolamento do vórtice primário adimensionalizados (x_r/s) obtidos nesse trabalho, juntamente com os valores experimentais reportados por Armaly *et al.* (1983) e os resultados de análises numéricas 2d e 3d de Williams e Baker (1999).

Com essa figura é possível observar que a medida que o número de Reynolds aumenta, os resultados obtidos do presente estudo se afastam dos valores de referência respectivos ao estudo experimental e da simulação tridimensional. Este fato ocorre visto que o ensaio experimental foi realizado em um canal com $2m$ profundidade na direção y_3, enquanto que a simulação atual conta com apenas uma célula nessa direção, sendo então incapaz de captar os fenômenos tridimensionais que ocorrem a medida que o número de Reynolds cresce.

Na Figura 32 pode-se observar a distribuição do módulo da velocidade para o domínio completo e para a região do vórtice primário para Re = 100, enquanto na Figura 33 e Figura 34 apresenta-se o mesmo para Re = 400 e Re = 800 respectivamente. Para Re = 800 constata-se a formação de um vórtice secundário na parede superior (Figura 34c), que está de acordo com o relato dos autores previamente citados.

Por fim, na Figura 35 é possível observa-se os campos de pressão para todos os números de Reynolds simulados.

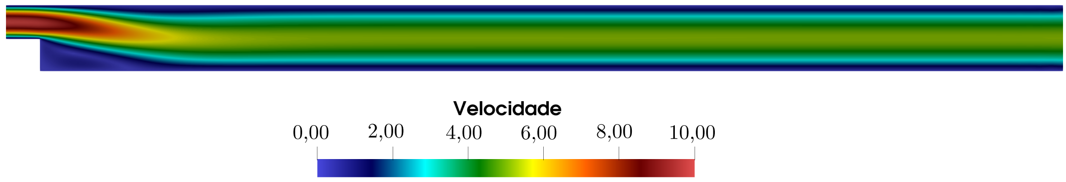
Figura 31 – Degrau: Comprimento do vórtice principal



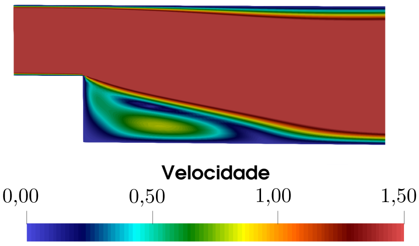
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 32 – Degrau: Campos de velocidade para Re = 100

(a) Domínio Completo



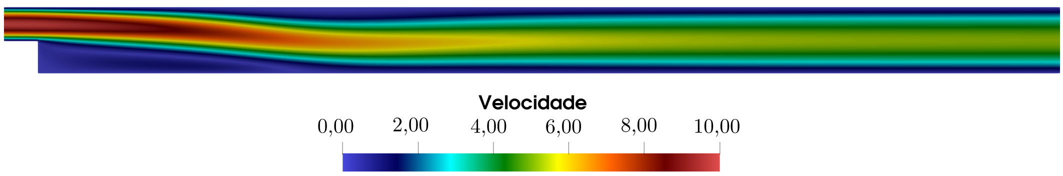
(b) Vórtice primário



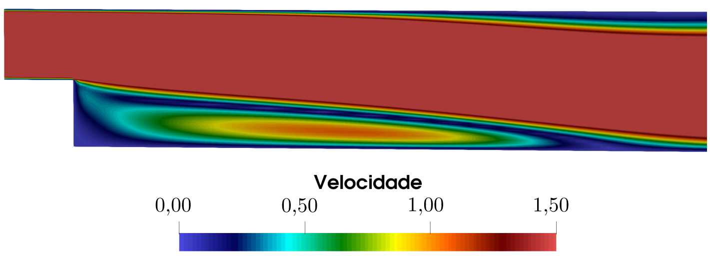
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 33 – Degrau: Campos de velocidade para Re = 400

(a) Domínio Completo



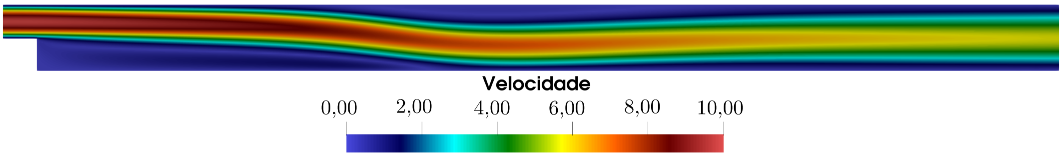
(b) Vórtice primário



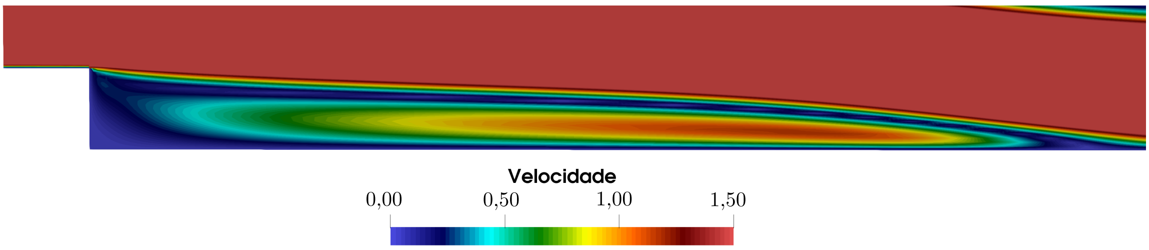
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 34 – Degrau: Campos de velocidade para Re = 800

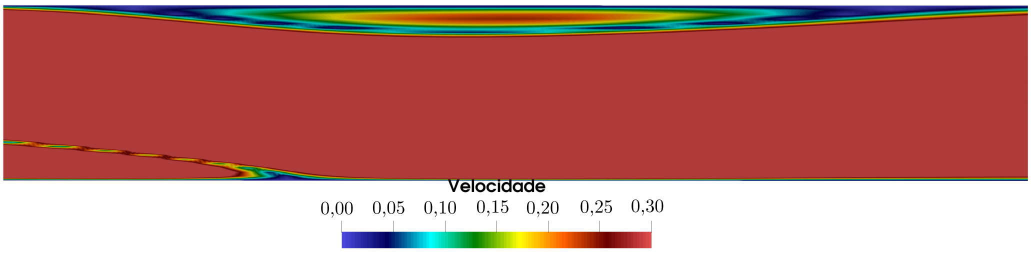
(a) Domínio Completo



(b) Vórtice primário



(c) Vórtice secundário



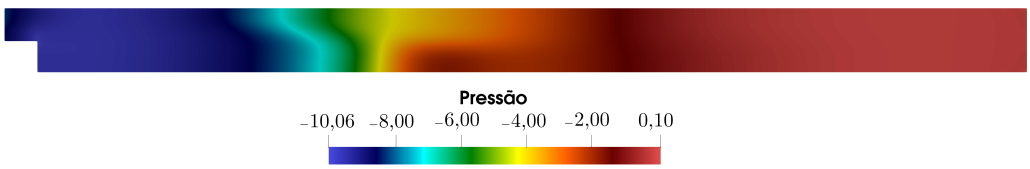
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 35 – Degrau: Campos de pressão

(a) Re = 100

(b) Re = 400

(c) Re = 800



Fonte: Elaborada pela autora

4 DINÂMICA DOS SÓLIDOS COMPUTACIONAL

Assim como no caso da Mecânica dos Fluidos, um sólido é modelado como um corpo contínuo, com seu movimento governado por um conjunto de equações provenientes da lei da conservação da quantidade de movimento, lei da conservação da massa e lei da conservação de energia. Entretanto, diferentemente dos fluidos, os sólidos possuem resistência às solicitações tangenciais até que alcance seu limite resistente, e por isso, apresentam deslocamentos e deformações finitos.

As variáveis de interesse na resolução do conjunto de equações que descrevem o comportamento do sólido são os deslocamentos, ou, posições atuais ao longo do tempo, dessa forma, uma descrição do tipo Lagrangiana é mais adequada para essas análises.

Nesse contexto, o comportamento estrutural pode ser classificado como linear ou não linear. No contexto do comportamento não linear, em geral, as não linearidades envolvidas podem ser de natureza geométrica, quando associadas à presença de grandes deslocamentos e rotações que não permitem aproximar a configuração atual pela inicial, ou de natureza física, quando resultam de modificações na relação constitutiva do material.

Para problemas de sólidos com comportamento elástico, quando houver a possibilidade de grandes deslocamentos, a não linearidade geométrica deve ser contemplada no modelo matemático. Para isso, altera-se a forma de consideração do equilíbrio das forças no sólido. Enquanto que em uma modelagem geometricamente linear o equilíbrio é considerado na configuração inicial, que é muito próxima a configuração atual do corpo, em uma análise não linear geométrica, o equilíbrio é considerado na configuração atual (ver, por exemplo Coda (2018) e Ogden (1984)).

Em muitos problemas da IFE, tal como o *flutter*, grandes deslocamentos estão envolvidos. Desse modo, neste estudo utiliza-se uma formulação não linear geométrica dinâmica de cascas baseada em uma descrição Lagrangiana Total para as análise dinâmica de estruturas.

A formulação é baseada no método dos elementos finitos com abordagem posicional (Coda, 2003, 2018), onde as variáveis principais são as posições nodais. Escolheu-se trabalhar com elementos de cascas, uma vez que esses podem representar a maioria dos problemas estruturais tridimensionais.

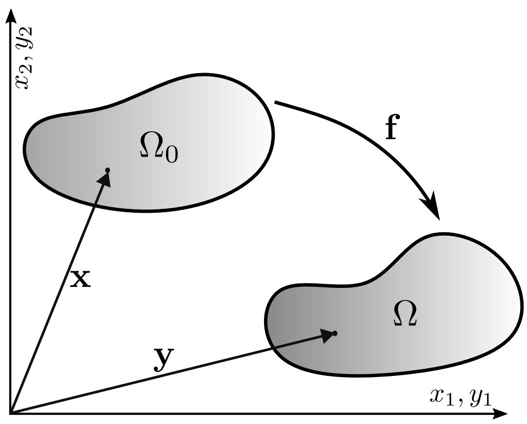
Considera-se a cinemática de Reissner-Mindlin, e adotam-se como parâmetros nodais as posições da superfície média, vetores generalizados, inicialmente unitários e perpendiculares à superfície média, e um termo de enriquecimento que permite considerar variação linear de deformação na direção da espessura, de acordo com Sanches e Coda (2013). Isso permite um mapeamento completo e flexível do elemento deformado.

Neste capítulo, a formulação é apresentada a partir da descrição da cinemática e das condições de equilíbrio dos corpos deformáveis, com o objetivo de se deduzirem as equações globais de equilíbrio na descrição Lagrangiana, seguida pela introdução do modelo constitutivo de *Saint-Venant–Kirchhoff*. Em seguida, aborda-se a formulação do método dos elementos finitos baseada em posição para ao elemento finito de casca adotado, a técnica de integração temporal e o algoritmo para solução, juntamente com um exemplo. Essa formulação foi desenvolvida, verificada e validada em diversos estudos (Coda; Paccola, 2007, 2009; Coda; Sanches; Coda, 2013, 2014; Fernandes; Coda; Sanches, 2019) e o código computacional já disponível no grupo de pesquisa foi aproveitado, de modo que não se preocupa com verificação do código.

4.1 Cinemática dos corpos deformáveis

Um sólido deformável quando sujeito à ações externas, sofre uma mudança de configuração. Nesta seção busca-se definir medidas pontuais para a deformação. Na Figura 36, pode-se observar um sólido na sua configuração inicial Ω_0, com coordenadas materiais descritas por $\mathbf{x}$, e o mesmo sólido no instante atual, representado por Ω, com coordenadas espaciais $\mathbf{y}$.

Figura 36 – Cinemática de um sólido deformável



Fonte: Elaborada pela autora

A função mudança de configuração, denominada de $\mathbf{f}$, mapeia cada ponto da posição inicial para a atual, de modo que:

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \tag{4.1}$$

Uma medida de deformação Lagrangeana deve quantificar a mudança de forma em cada ponto do contínuo em relação ao estado inicial. Para o caso de grandes deslocamentos, assunto deste estudo, a medida de deformação deve ser independente de movimento de corpo rígido ou da escolha dos eixos de referência, ou seja, deve ser uma medida objetiva. A medida de deformação é descrita em termos do gradiente da função mudança de configuração, **A**, definido como:

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\nabla}_x (\mathbf{f}) = \boldsymbol{\nabla}_x \mathbf{y}. \tag{4.2}$$

onde o subscrito **x** indica que o gradiente é tomado segundo as coordenadas da configuração material inicial.

A partir de **A**, é possível definir o tensor de deformações de Green-Lagrange (ver por exemplo Ogden (1984)), que é uma medida de deformação objetiva e normalizada dada por:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}), \tag{4.3}$$

com **C** um tensor simétrico denominado de tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green dado por:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t. \tag{4.4}$$

A partir do gradiente da função mudança de configuração pode-se estabelecer uma relação entre um vetor qualquer **u** definido na configuração inicial e seu equivalente na configuração atual **v** através da seguinte expressão:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} \tag{4.5}$$

Para a obtenção posteriormente das equações de equilíbrio em descrição Lagrangiana, faz-se necessário abordar as relações de mudança de volume e de área que ocorrem da configuração inicial para a atual.

No estabelecimento de uma relação entre o volume inicial e final, definem-se dois volumes infinitesimais, um inicial dV_0 e um final dV, apresentados na Figura 37. O volume infinitesimal inicial dV_0 pode ser calculado por:

$$dV_0 = (\mathbf{dx}_1 \wedge \mathbf{dx}_2) \cdot \mathbf{dx}_3 = \det(\mathbf{dx_1}, \mathbf{dx_2}, \mathbf{dx_3}), \tag{4.6}$$

com $\mathbf{dx}_1, \mathbf{dx}_2$ e $\mathbf{dx}_3$ vetores materiais que definem o volume inicial. O volume atual pode ser expresso então, por:

$$dV = (\mathbf{dy}_1 \wedge \mathbf{dy}_2) \cdot \mathbf{dy}_3 = \det(\mathbf{dy_1}, \mathbf{dy_2}, \mathbf{dy_3}), \tag{4.7}$$

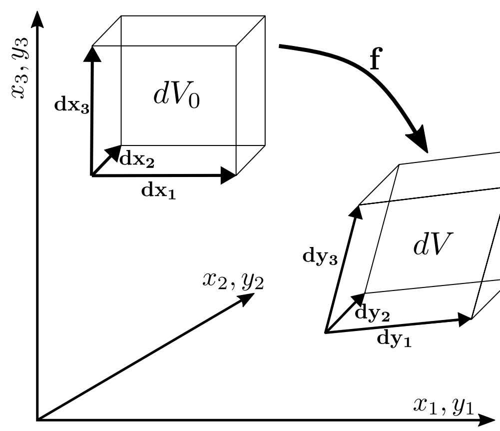
sendo $\mathbf{dy}_1, \mathbf{dy}_2$ e $\mathbf{dy}_3$ os mesmos vetores $\mathbf{dx}_1, \mathbf{dx}_2$ e $\mathbf{dx}_3$ após a mudança de configuração.

Tendo em vista a Equação (4.5), pode-se reescrever a Equação (4.7), como:

$$dV = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{dx_1}, \mathbf{dx_2}, \mathbf{dx_3}) = J dV_0, \tag{4.8}$$

na qual J representa o determinante Jacobiano da função mudança de configuração.

Figura 37 – Mudança no volume



Fonte: Elaborada pela autora

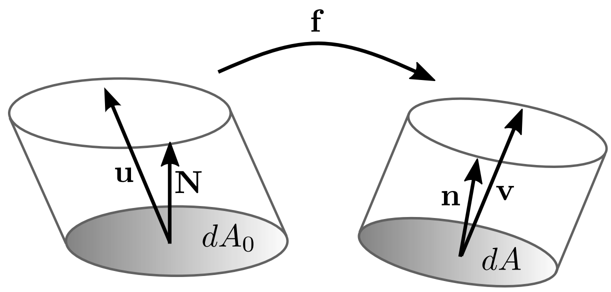
Para escrever a relação entre uma área definida na configuração inicial e o seu valor na configuração atual, considera-se o cilindro apresentado na Figura 38 em suas configurações inicial e atual. Sendo $\mathbf{N}$ e $\mathbf{n}$ os versores unitários normais às áreas inicial dA_0 e atual dA. Os volumes na configuração inicial (dV_0) e na configuração atual (dV) são calculados por:

$$dV_0 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{dA}_0 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dA_0, \tag{4.9}$$

$$dV = \mathbf{v} \cdot \mathbf{dA} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA, \tag{4.10}$$

com $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vetores não coplanares com as áreas inicial e atual, que ligam os centros da base e do topo do cilindro.

Figura 38 – Mudança de área



Fonte: Elaborada pela autora

Considerando a relação da Equação (4.5), pode-se escrever o volume na configuração atual, dV, como:

$$dV = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{n} dA = J dV_0 = J \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dA_0. \tag{4.11}$$

Pré-multiplicando-se a Equação (4.11) por $(\mathbf{A}^t)^{-1}$ e considerando-se a arbitrariedade de $\mathbf{u}$, chega-se a conhecida fórmula de Nanson, descrita como:

$$\mathbf{n} dA = J \mathbf{A}^{-t} \cdot \mathbf{N} dA_0. \tag{4.12}$$

4.2 Equilíbrio de corpos deformáveis

4.2.1 Estado de tensão em um ponto

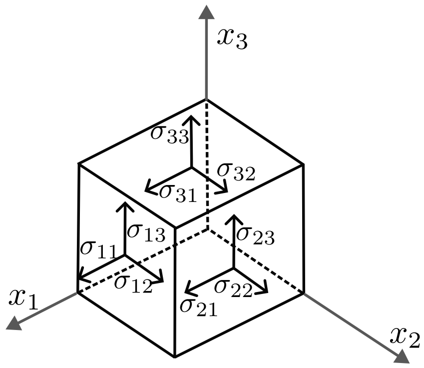
Um corpo contínuo, ao ser submetido a ações externas, desenvolve forças internas de modo a garantir o equilíbrio dinâmico ou estático. A medida dessas forças internas em cada ponto material é fundamental para a aplicação das leis que governam o movimento dos sólidos.

Considerando um corpo qualquer, na configuração atual, sujeito a um conjunto equilibrado de forças externas, ao fazer-se a extração de um volume elementar infinitesimal, conforme pode ser observado na Figura 39, considerando as forças que o restante do corpo exerce de forma distribuída sobre cada uma de suas faces, são obtidas as componentes cartesianas de tensão, com uma componente normal e duas componentes tangenciais (de cisalhamento) em cada face. Essa medida de tensão é denominada tensão de Cauchy, sendo suas componentes designadas por σ_{ij}, com i referindo-se ao plano de atuação e j indicando a direção de atuação da componente.

O tensor de tensões de Cauchy ($\boldsymbol{\sigma}$) contém todas as informações de tensão em um ponto, sendo representado por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \tag{4.13}$$

Figura 39 – Volume infinitesimal: componentes de tensão



Fonte: Elaborada pela autora

Ao realizar-se o equilíbrio de momentos sobre um elemento infinitesimal, nota-se que $\boldsymbol{\sigma}$ é simétrico (Teorema de Cauchy), e pode ser reescrito como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \tag{4.14}$$

Vale ressaltar que, a tensão de Cauchy é definida na configuração atual do contínuo, e por isso, trata-se de uma medida Euleriana de tensão, portanto inadequada para a formulação pretendida.

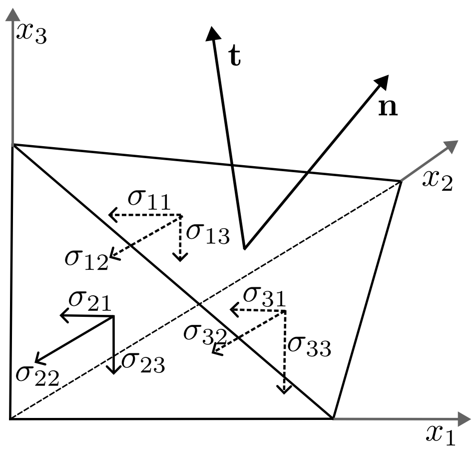
Extraindo-se do corpo contínuo um volume tetraédrico (Figura 40), no plano inclinado, cujo versor normal é $\mathbf{n}$, surge o vetor tensão de Cauchy designado por $\mathbf{t}$. Considerando que a área do plano inclinado seja dA, enquanto que as áreas correspondentes aos planos coordenados são suas projeções, pode-se calcular o equilíbrio do tetraedro em cada direção, chegando-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}. \tag{4.15}$$

Essa expressão é conhecida por fórmula de Cauchy. Caso o plano inclinado esteja no contorno do corpo (superfície externa), $\mathbf{t}$ se iguala às forças de superfície ($\mathbf{p}$) que atuam no ponto considerado do contorno, ou seja:

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}. \tag{4.16}$$

Figura 40 – Tetraedro elementar



Fonte: Elaborada pela autora

4.2.2 Equilíbrio em descrição Lagrangiana

Para a obtenção das equações de equilíbrio em descrição Lagrangiana, será utilizada como ponto de partida a equação de equilíbrio local na descrição Euleriana. Para isso, considere o sólido apresentado na Figura 41, o qual está submetido a forças de corpo, $\mathbf{b}$, e a forças de superfície, $\mathbf{p}$. Extraindo-se um elemento infinitesimal deste corpo que sofreu mudança de configuração, e aplicando-se a segunda Lei de Newton, chega-se à equação do movimento de Cauchy, que define o equilíbrio de forma local (forma local da primeira Lei do movimento de Euler), também chamada de equação da quantidade de movimento:

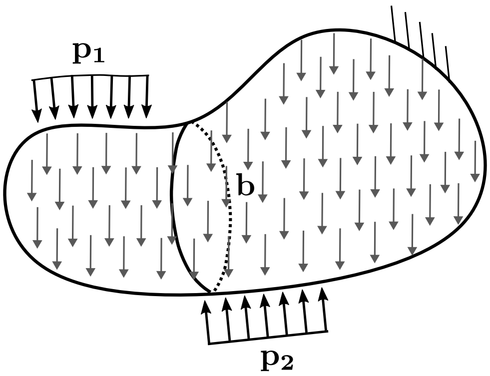
$$\boldsymbol{\nabla}_y \cdot \boldsymbol{\sigma}^t + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{y}}, \tag{4.17}$$

ou ainda, em notação indicial:

$$\sigma_{ji,j} + b_i = \rho \ddot{y}_i, \tag{4.18}$$

com ρ representando a massa específica do material na configuração atual e $\ddot{\mathbf{y}}$ é a derivada material da velocidade do ponto material (aceleração do corpo).

Figura 41 – Sólido sob carregamento externo



Fonte: Elaborada pela autora

Ao integrar-se a Equação (4.17) no volume do sólido, utilizando o Teorema da Divergência, chega-se a:

$$\int_A \boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{n} dA + \int_V \mathbf{b} dV = \int_V \rho \ddot{\mathbf{y}} dV \tag{4.19}$$

ou, ainda:

$$\int_A \mathbf{p} dA + \int_V \mathbf{b} dV = \int_V \rho \ddot{\mathbf{y}} dV \tag{4.20}$$

Considerando as relações de mudança de área e volume, apresentadas na Equação (4.8) e Equação (4.12), e que da equação da conservação da massa (M) tem-se que:

$$M = \int_{V_0} \rho_0 dV_0 = \int_{V(t)} \rho(t) dV, \tag{4.21}$$

pode-se escreve-se a forma global da equação da quantidade de movimento na descrição Lagrangiana total, a partir da Equação (4.19), como:

$$\int_{A_0} \mathbf{P}^t \cdot \mathbf{N} dA_0 + \int_{V_0} \mathbf{b}_0 dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} dV_0, \tag{4.22}$$

na qual o primeiro tensor de tensão de Piola-Kirchhoff ($\mathbf{P}$) é definido como $\mathbf{P}^t = J\boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{A}^{-t}$, e o subíndice 0, refere-se à configuração inicial.

Considerando-se o Teorema da Divergência à Equação (4.22) e a arbitrariedade do volume, chega-se à versão local da equação de equilíbrio em descrição Lagrangiana, expressa por:

$$\boldsymbol{\nabla}_x \cdot \mathbf{P}^t + \mathbf{b}_0 = \rho_0 \ddot{\mathbf{y}}. \tag{4.23}$$

4.2.3 Conservação da energia e equilíbrio

No estudo do equilíbrio de corpos deformáveis a análise da energia mecânica é um assunto de grande importância. A energia mecânica é formada basicamente por três parcelas: energia potencial das forças externas ($\mathbb{P}$), energia de deformação ($\mathbb{U}_e$) e energia cinética ($\mathbb{K}$). A energia total mecânica (Π) é um funcional obtido pela soma dessas três parcelas, sendo escrita da seguinte maneira:

$$\Pi = \mathbb{P} + \mathbb{K} + \mathbb{U}_e. \tag{4.24}$$

O princípio da estacionariedade da energia define que um corpo quando em equilíbrio apresenta a primeira variação do funcional de energia mecânica nula, sendo o equilíbrio estável quando a posição de equilíbrio representa um mínimo local para a energia mecânica total. Este princípio, para uma descrição das equações de equilíbrio em posições, pode ser expresso matematicamente da seguinte forma:

$$\delta\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{y}} \cdot \delta\mathbf{y} = \mathbf{0}, \tag{4.25}$$

ou, dada a arbitrariedade de $\delta\mathbf{y}$, como:

$$\delta\Pi = \delta\mathbb{P} + \delta\mathbb{K} + \delta\mathbb{U}_e. \tag{4.26}$$

Um incremento de energia mecânica específica (energia mecânica por unidade de volume) pode ser obtido pelo produto escalar da Equação (4.23) por um incremento de posição $\delta\mathbf{y}$, e, integrando-se sobre o domínio inicial, tem-se:

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \left(\rho_0 \ddot{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\nabla}_x \cdot \mathbf{P}^t - \mathbf{b}_0\right) \cdot \delta\mathbf{y} dV_0 = 0 \tag{4.27}$$

Ao integrar-se por partes o segundo termo da Equação (4.27) e utilizar-se o Teorema da Divergência, chega-se a seguinte expressão:

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta\mathbf{y} dV_0 - \int_{A_0} \mathbf{P}^t \cdot \mathbf{N} \cdot \delta\mathbf{y} dA_0 + \int_{V_0} \mathbf{P}^t : \boldsymbol{\nabla}_x(\delta\mathbf{y}) dV_0 - \int_{V_0} \mathbf{b_0} \cdot \delta\mathbf{y} dV_0 = 0. \tag{4.28}$$

A Equação 4.28 pode ainda ser reformulada, considerando que $\boldsymbol{\nabla}_x(\delta\mathbf{y}) = \delta\mathbf{A}$ e que $\mathbf{P}^t \cdot \mathbf{N}$ representa as forças de superfície na configuração inicial ($\mathbf{p}_0$) como:

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta\mathbf{y} dV_0 - \int_{A_0} \mathbf{p}_0 \cdot \delta\mathbf{y} dA_0 + \int_{V_0} \mathbf{P}^t : \delta\mathbf{A} dV_0 - \int_{V_0} \mathbf{b}_0 \cdot \delta\mathbf{y} dV_0 = 0. \tag{4.29}$$

Conforme relatou-se, o tensor de Piola-Kirchhoff de primeira espécie não é necessariamente simétrico, desta forma, torna-se mais conveniente adotar uma medida de tensão que resulte em um tensor simétrico. Com essa finalidade, adota-se um tensor $\mathbf{S}$, de forma que:

$$\mathbf{P} = \mathbf{S}^t \cdot \mathbf{A}^t, \tag{4.30}$$

com $\mathbf{S}$ conhecido como tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie.

Utilizando-se a relação apresentada na Equação (4.30) na Equação (4.29), chega-se a:

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta\mathbf{y} dV_0 - \int_{A_0} \mathbf{p}_0 \cdot \delta\mathbf{y} dA_0 + \int_{V_0} \mathbf{S} : \delta\mathbf{E} dV_0 - \int_{V_0} \mathbf{b}_0 \cdot \delta\mathbf{y} dV_0 = 0. \tag{4.31}$$

À Equação (4.31), será adicionada ainda uma parcela referente a possibilidade de carregamentos pontuais, sendo expressa então, por:

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta\mathbf{y} dV_0 - \int_{A_0} \mathbf{p}_0 \cdot \delta\mathbf{y} dA_0 + \int_{V_0} \mathbf{S} : \delta\mathbf{E} dV_0 - \int_{V_0} \mathbf{b}_0 \cdot \delta\mathbf{y} dV_0 - \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{y} = 0. \tag{4.32}$$

Partindo-se da Equação (4.32), encontra-se a relação entre suas componentes e as parcelas de energia mecânica, dessa forma, tem-se que:

$$\delta\mathbb{P} = -\int_{A_0} \mathbf{p}_0 \cdot \delta\mathbf{y} dA_0 - \int_{V_0} \mathbf{b}_0 \cdot \delta\mathbf{y} dV_0 - \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{y}, \tag{4.33}$$

$$\delta\mathbb{K} = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta\mathbf{y} dV_0, \tag{4.34}$$

e,

$$\delta\mathbb{U}_e = \int_{V_0} \mathbf{S} : \delta\mathbf{E} dV_0. \tag{4.35}$$

4.2.4 Modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff

A lei constitutiva hiperelástica de Saint-Venant-Kirchhoff estabelece uma relação linear entre o tensor das tensões de Piola Kirchhoff de segunda espécie e o tensor de deformação de Green, e pode ser escrita pela expressão generalizada da energia de deformação por:

$$u_e = \frac{1}{2}\mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbf{E}, \tag{4.36}$$

ou, em notação indicial:

$$u_e = \frac{1}{2} E_{kl} C_{klij} E_{ij} \tag{4.37}$$

com $\mathbb{C}$ representando o tensor constitutivo elástico isotrópico, que é um tensor de quarta ordem definido como:

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \left(\kappa - \frac{2}{3}G\right)\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \tag{4.38}$$

sendo δ_{ij} o delta de Kronocker, κ e G os módulos volumétrico e de cisalhamento respectivamente, os quais são calculados através das seguintes relações:

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}G, \tag{4.39}$$

$$G = \frac{\mathbb{E}}{2(1+\nu)}, \tag{4.40}$$

$$\lambda = \frac{\nu\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \tag{4.41}$$

com $\mathbb{E}$ sendo o módulo de elasticidade longitudinal e ν o coeficiente de Poisson. Ressalta-se que essa lei constitutiva aqui utilizada é adequada para grandes deslocamentos, entretanto, a mesma é adequada somente para deformações pequenas a moderadas por permitir a inversão do material.

4.3 Método dos Elementos Finitos

Conforme discutido na subseção 2.3.1, o método dos elementos finitos baseia-se na substituição do contínuo por um conjunto finito de subdomínios, denominados elementos finitos. Em cada um desses elementos, as variáveis de interesse — incluindo a própria geometria — são aproximadas, de modo que o problema contínuo é convertido em um problema discreto, caracterizado por um número finito de incógnitas.

Nesta subseção será apresentada formulação do método dos elementos finitos baseada em posições aplicada à cinemática de cascas.

4.3.1 Elemento finito de casca

Esta formulação foi desenvolvida por Coda e Paccola (2007), e consistia inicialmente em 6 graus de liberdade por nó, sendo 3 referentes à posições e 3 referentes às componentes do vetor generalizado. Em Coda e Paccola (2008) incluí-se à formulação um sétimo parâmetro, que considera a taxa de variação linear da espessura, para lidar com o fenômeno de travamento volumétrico. Sanches e Coda (2013) apresentam a formulação dinâmica empregando a cinemática com 7 graus de liberdade aplicada ao problema de interação fluido-estrutura, sendo essa a abordagem adotada aqui.

As cascas são sólidos que possuem uma de suas dimensões muito menor do que as outras, assim o mapeamento do seu domínio pode ser facilitado tomando-se a superfície média como referência. Os mapeamentos das configurações inicial e atual dos pontos da superfície média, conforme pode ser observado na Figura 42, são definidos respectivamente como:

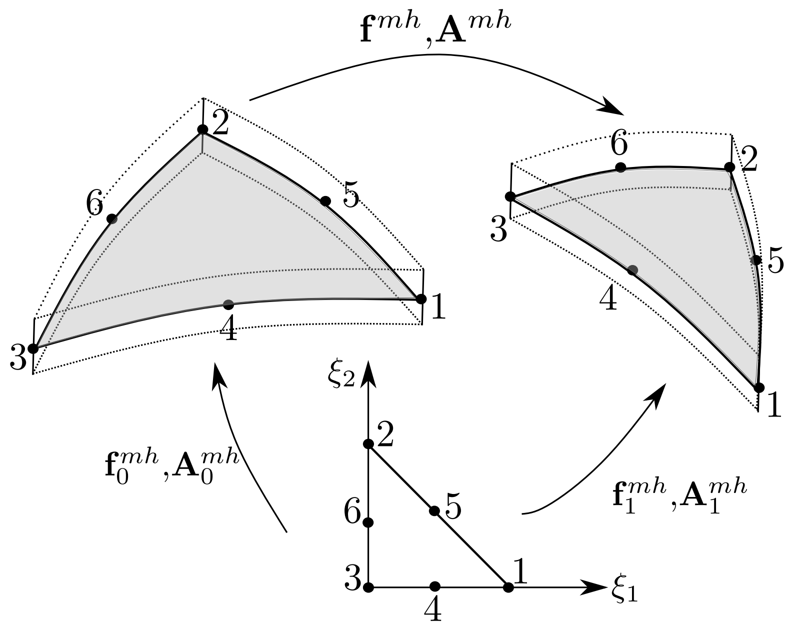
$$\mathbf{f}_0^{mh}(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{x}^{mh}(\xi_1, \xi_2) = N_l(\xi_1, \xi_2)\mathbf{x}_l^{mh} \tag{4.42}$$

$$\mathbf{f}_1^{mh}(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{y}^{mh}(\xi_1, \xi_2) = N_l(\xi_1, \xi_2)\mathbf{y}_l^{mh}, \tag{4.43}$$

onde $\mathbf{x}_l^{mh}$ e $\mathbf{y}_l^{mh}$ representam, respectivamente, os vetores dos parâmetros de posição inicial e atual da superfície média respectivos ao nó l, com $N_l(\xi_1, \xi_2)$ sendo a função de forma do nó l calculada no ponto de coordenadas paramétricas (ξ_1, ξ_2).

Os demais pontos do domínio são mapeados por meio da soma da posição de um ponto na superfície média com um vetor generalizado $\mathbf{g}_0^h$ para a configuração inicial ou $\mathbf{g}_1^h$ para a configuração atual. Observa-se que $\mathbf{g}_0^h$ é normal à superfície média na configuração inicial, conforme pode ser observado na Figura 43, enquanto $\mathbf{g}_1^h$ pode não ser normal à superfície média deformada. Desta forma, o mapeamento completo de um elemento de casca é:

Figura 42 – Mapeamento da superfície média da casca



Fonte: Elaborada pela autora

$$\mathbf{f}_0^h(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \mathbf{x}^h(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \mathbf{f}_0^{mh}(\xi_1,\xi_2) + \mathbf{g}_0^h(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \tag{4.44}$$

$$\mathbf{f}_1^h(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \mathbf{y}^h(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \mathbf{f}_1^{mh}(\xi_1,\xi_2) + \mathbf{g}_1^h(\xi_1,\xi_2,\xi_3), \tag{4.45}$$

em que ξ_3 é a coordenada adimensional na direção da espessura da casca, variando de -1 a 1.

Os vetores generalizados $\mathbf{g}_0^h$ e $\mathbf{g}_1^h$ podem ser expressos por:

$$\mathbf{g}_0^h(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \frac{h_0}{2}\xi_3 N_l\,(\xi_1,\xi_2)\cdot(\mathbf{e}_x)_l, \tag{4.46}$$

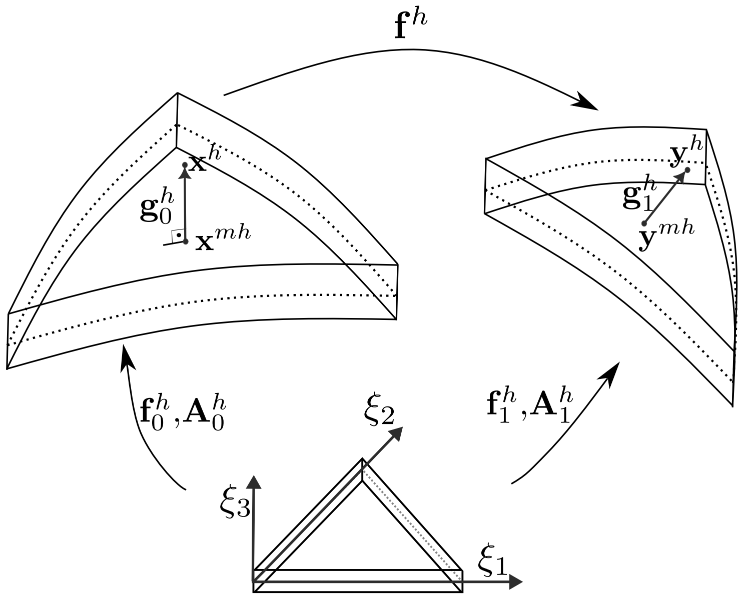
$$\mathbf{g}_1^h(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \frac{h_0}{2}\left[\xi_3 + \eta_l N_l\,(\xi_1,\xi_2)\,\xi_3^2\right] N_l\,(\xi_1,\xi_2)\cdot(\mathbf{e}_y)_l, \tag{4.47}$$

onde h_0 representa a espessura média inicial do elemento de casca, $(\mathbf{e}_x)_l$ é o l-ésimo valor nodal do vetor unitário normal à linha de referência inicial, $(\mathbf{e}_y)_l$ o l-ésimo valor nodal do vetor generalizado, de norma irrestrita, na configuração atual e η_l é o l-ésimo valor nodal da chamada de taxa linear de variação da espessura.

Dessa forma, a função mudança de configuração pode ser definida através da seguinte relação:

$$\mathbf{f}^h = \mathbf{f}_1^h \circ (\mathbf{f}_0^h)^{-1}. \tag{4.48}$$

Figura 43 – Vetores generalizados



Fonte: Elaborada pela autora

De forma análoga pode-se representar o gradiente de $\mathbf{f}^h$ como:

$$\mathbf{A}^h = \mathbf{A}_1^h \cdot \left(\mathbf{A}_0^h\right)^{-1}, \tag{4.49}$$

em que $\mathbf{A}^h = \boldsymbol{\nabla}_x \mathbf{f}^h$, $\mathbf{A}_0^h = \frac{\partial \mathbf{f}_0^h}{\partial \boldsymbol{\xi}}$ e $\mathbf{A}_1^h = \frac{\partial \mathbf{f}_1^h}{\partial \boldsymbol{\xi}}$.

Assim, o alongamento à direta de Cauchy-Green e a deformação de Green podem ser escritos em função de $\mathbf{A}_0^h$ e $\mathbf{A}_1^h$, como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} = \left(\mathbf{A}_1^h \cdot (\mathbf{A}_0^h)^{-1}\right)^t \cdot \left(\mathbf{A}_1^h \cdot (\mathbf{A}_0^h)^{-1}\right), \tag{4.50}$$

e,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{C} - \mathbf{I}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\mathbf{A}_1^h \cdot (\mathbf{A}_0^h)^{-1}\right)^t \cdot \left(\mathbf{A}_1^h \cdot (\mathbf{A}_0^h)^{-1}\right) - \mathbf{I}\right). \tag{4.51}$$

Partindo do mapeamento apresentado é possível escrever o funcional de energia mecânica em função dos parâmetros nodais apresentados, e ao discretizar-se as equações no tempo, a solução do problema consiste encontrar os parâmetros nodais que satisfaçam:

$$\frac{\partial \Pi^h}{\partial \mathbf{y}_l^{mh}} = \frac{\partial \Pi^h}{\partial (\mathbf{e}_y)_l} = \frac{\partial \Pi^h}{\partial \eta_l} = \mathbf{0}. \tag{4.52}$$

4.3.2 Integração temporal e solução do problema não linear

Para a tornar o equacionamento mais compacto, reescreve-se o equilíbrio baseado na energia da variável $\mathbf{Y}$, que consiste em um vetor que contém todos os parâmetros nodais da estrutura (posições, vetores generalizados e taxa de variação linear da espessura) de forma que:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{Y}} = \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial \mathbf{Y}} + \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial \mathbf{Y}} + \frac{\partial \mathbb{U}_e}{\partial \mathbf{Y}} = \mathbf{0}, \tag{4.53}$$

ou ainda,

$$-\mathbf{F}^{ext}(t) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{F}^{int}(\mathbf{Y}) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{0}, \tag{4.54}$$

onde $\mathbf{F}^{int}(\mathbf{Y})$ representa as forças internas provenientes da variação da energia potencial interna, $\mathbf{M}$ é a conhecida como matriz de massa e $\mathbf{F}^{ext}$ advém da variação da energia potencial das forças externas. O termo $\mathbf{C}$ representa uma matriz de amortecimento viscoso e os pontos sobrescritos indicam derivadas materiais no tempo.

Neste trabalho, para a discretização temporal das equações, será utilizado o integrador de Newmark, visto que o mesmo demonstrou estabilidade e eficácia na vasta gama de trabalhos envolvendo o MEF posicional com sua aplicação (Carrazedo; Coda, 2010; Coda; Paccola, 2010, 2011; Greco; Coda, 2004; Sanches; Coda, 2016).

A integração temporal das equações inicia-se com a discretização do tempo de maneira que:

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t, \tag{4.55}$$

onde t_{n+1} representa o instante atual, t_n o instante final do passo de tempo anterior e Δt o intervalo do passo de tempo utilizado na discretização. Utilizando as aproximações de Newmark, posição, velocidade e aceleração nos instantes $n+1$ e n são relacionados por:

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + \Delta t \dot{\mathbf{Y}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{Y}}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{Y}}_{n+1}, \tag{4.56}$$

$$\dot{\mathbf{Y}}_{n+1} = \dot{\mathbf{Y}}_n + (1-\gamma)\Delta t \ddot{\mathbf{Y}}_n + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{Y}}_{n+1}, \tag{4.57}$$

em que β e γ são parâmetros dependentes do comportamento assumido para a aceleração. Para um aceleração constante, hipótese adotada neste trabalho, $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/4$.

Partindo da Equação (4.56) e Equação (4.57) é possível escrever a aceleração e a velocidade atual em função das posições no instante $n+1$, as incógnitas do problema, e das demais variáveis do passo anterior:

$$\ddot{\mathbf{Y}}_{n+1} = \frac{1}{\beta\Delta_t^2}\mathbf{Y}_{n+1} - \mathbf{Q}(t_n), \tag{4.58}$$

$$\dot{\mathbf{Y}}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta\Delta_t}\mathbf{Y}_{n+1} + \mathbf{R}(t_n) - \gamma\Delta_t\mathbf{Q}(t_n), \tag{4.59}$$

em que:

$$\mathbf{Q}(t_n) = \frac{\mathbf{Y}_n}{\beta\Delta t^2} + \frac{\dot{\mathbf{Y}}_n}{\beta\Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{\mathbf{Y}}_n, \tag{4.60}$$

$$\mathbf{R}(t_n) = \dot{\mathbf{Y}}_n + \Delta t(1-\gamma)\ddot{\mathbf{Y}}_n. \tag{4.61}$$

Utilizando a Equação (4.58) e Equação (4.59) na equação do equilíbrio em forma matricial (Equação (4.54)), tem-se para o instante t_{n+1} a seguinte relação:

$$\mathbf{F}_{n+1}^{int} - \mathbf{F}_{n+1}^{ext} + \frac{\mathbf{M}}{\beta\Delta t^2}\mathbf{Y}_{n+1} - \mathbf{M}\mathbf{Q}_n + \mathbf{C}\mathbf{R}_n + \frac{\gamma\mathbf{C}}{\beta\Delta t}\mathbf{Y}_{n+1} - \gamma\Delta t\mathbf{C}\mathbf{Q}_n = \mathbf{0}, \tag{4.62}$$

Pode-se escrever ainda o problema não linear definido pela Equação (4.62) em função do resíduo da equação governante discretizada no espaço e no tempo, como:

$$\mathbf{R}_S\left(\mathbf{Y}_{n+1}\right) = \mathbf{F}_{n+1}^{int} - \mathbf{F}_{n+1}^{ext} + \frac{\mathbf{M}}{\beta\Delta t^2}\mathbf{Y}_{n+1} - \mathbf{M}\mathbf{Q}_n + \mathbf{C}\mathbf{R}_n + \frac{\gamma\mathbf{C}}{\beta\Delta t}\mathbf{Y}_{n+1} - \gamma\Delta t\mathbf{C}\mathbf{Q}_n = \mathbf{0}. \tag{4.63}$$

O problema não linear da Equação (4.63) é resolvido por meio do método iterativo de Newton-Raphson. Para isso, realiza-se uma expansão em série de Taylor de primeira ordem:

$$\mathbf{R}_S\left(\mathbf{Y}_{n+1}^{i+1}\right) \approx \mathbf{R}_S\left(\mathbf{Y}_{n+1}^{i}\right) + \Delta\mathbf{R}_S\left(\mathbf{Y}_{n+1}^{i}\right)\Delta\mathbf{Y}_{n+1}^{i} \tag{4.64}$$

em que i indica o índice da iteração atual. Na primeira iteração para o cálculo de $\mathbf{Y}_{n+1}$ utiliza-se como predição da iteração anterior os valores das variáveis no passo de tempo n. O método de Newton-Raphson consiste em resolver o seguinte sistema:

$$\Delta\mathbf{R}_S\left(\mathbf{Y}^i_{n+1}\right)\Delta\mathbf{Y}^i_{n+1} = -\mathbf{R}_S\left(\mathbf{Y}^i_{n+1}\right) \tag{4.65}$$

com:

$$\Delta\mathbf{R}_S\left(\mathbf{Y}^i_{n+1}\right) = \frac{\partial^2\Pi}{\partial\mathbf{Y}^2} = \frac{\partial^2\mathbb{U}_e}{\partial\mathbf{Y}^2} + \frac{\mathbf{M}}{\beta\Delta t^2} + \frac{\gamma\mathbf{C}}{\beta\Delta t}. \tag{4.66}$$

A cada iteração de Newton-Raphson atualiza-se a posição, a aceleração e a velocidade de acordo com as seguintes equações:

$$\mathbf{Y}^{i+1}_{n+1} = \mathbf{Y}^i_{n+1} + \Delta\mathbf{Y}^i_{n+1} \tag{4.67}$$

$$\ddot{\mathbf{Y}}^{i+1}_{n+1} = \frac{\mathbf{Y}^{i+1}_{n+1}}{\beta\Delta t^2} + \mathbf{Q}_n \tag{4.68}$$

$$\dot{\mathbf{Y}}^{i+1}_{n+1} = \frac{\gamma\mathbf{Y}^{i+1}_{n+1}}{\beta\Delta t} + \mathbf{R}_n - \gamma\Delta t\mathbf{Q}_n \tag{4.69}$$

Para mais detalhes a cerca da obtenção das matrizes e vetores do método, recomenda-se a consulta de Coda (2018).

4.3.3 Implementação computacional

O código empregado para a simulação das estruturas de cascas neste trabalho foi desenvolvido anteriormente dentro do grupo de pesquisas, sendo a versão utilizada aqui desenvolvida pelo doutorando Rosicley Junior Rodrigues Rosa, e empregada também no trabalho de mestrado de Yokomizo (2024), ambos do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos - USP.

O código foi desenvolvido em linguagem C++ utilizando paralelização em protocolo MPI e conta com elementos triangulares de 3, 6 ou 10 nós, respectivamente com aproximação linear, quadrática e cúbica. Ressalta-se que a implementação conta com uma estratégia de acoplamento entre elementos não coplanares, que pode ser vista em Coda (2018). O algoritmo que descreve a implementação computacional pode ser visualizado em Algoritmo 2. No algoritmo a variável $\mathbf{X}$ consiste em um vetor das variáveis nodais na configuração inicial.

Algoritmo 2 Algoritmo para problemas não lineares dinâmicos utilizando MEF posicional

Adota-se $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$;
para o passo de tempo 0 até $npt - 1$ **faça**
  $i \leftarrow 0$;
  Predição da solução:
  $\mathbf{Y}_{n+1}^{0} = \mathbf{Y}_{n}$;
  $\dot{\mathbf{Y}}_{n+1}^{0} = \dot{\mathbf{Y}}_{n}$;
  $\ddot{\mathbf{Y}}_{n+1}^{0} = \ddot{\mathbf{Y}}_{n}$;
  Calcula-se o nível de força aplicado $\mathbf{F}_{n+1}^{ext}(t_{n+1})$ e/ou as posições prescritas $\mathbf{Y}_{n+1}$;
  Calculam-se os valores de $\mathbf{Q}_n$ (Equação (4.60)) e $\mathbf{R}_n$ (Equação (4.61));
  enquanto $\epsilon >$ tolerância **faça**
    $i \leftarrow i + 1$;
    Cálculo do incremento da variável do problema $\mathbf{Y}_{n+1}^{i}$ de acordo com a Equação (4.65);
    Atualização da solução de acordo com Equação (4.67), Equação (4.68) e Equação (4.69);
    Cálculo do erro:
    $\epsilon = \|\Delta\mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}^{i+1})\|_{L^2}$ ou $\epsilon = \|\Delta\mathbf{Y}_{n+1}^{i+1}\|_{L^2}$;
  fim enquanto
  Atualiza-se a solução do passo anterior:
  $\mathbf{Y}_{n} = \mathbf{Y}_{n+1}$;
  $\dot{\mathbf{Y}}_{n} = \dot{\mathbf{Y}}_{n+1}$;
  $\ddot{\mathbf{Y}}_{n} = \ddot{\mathbf{Y}}_{n+1}$;
fim para

4.4 Exemplo de aplicação - casca cilíndrica com *snap through* dinâmico

Nesta seção apresenta-se um problema clássico que trata-se de uma casca cilíndrica submetida a um carregamento concentrado em seu centro geométrico. Proposto inicialmente no trabalho de Kuhl e Ramm (1999), o problema apresenta grande não linearidade geométrica devido ao efeito de *snap-through*.

A geometria do problema em questão é apresentada na Figura 44a, sendo a espessura da casca equivalente a 0,1 m. A malha de elementos finitos que representa a superfície média da estrutura utilizada pode ser visualizada na Figura 44b, a qual é composta por 104 elementos quadráticos e 233 nós.

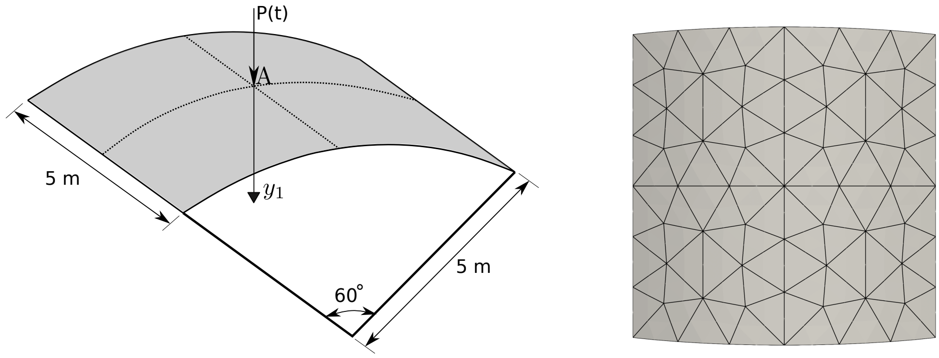
Os contornos esquerdo e direito da chapa são considerados simplesmente apoiados. O carregamento aplicado ao ponto central (ponto A) $P(t)$ é aplicado linearmente no intervalo $t = 0$ s até $t =$ 0,2 s, com $P(0) = 0$ kN e $P(2s) = 200000$kN, e então mantido constante. As características físicas do material utilizado são: $\mathbb{E} = 200$ GPa, $\nu =$ 0,25 e $\rho = 10000$ kg/m3 e o passo de tempo adotado na simulação é $\Delta_t =$ 0,001 s.

O deslocamento vertical do nó central da casca obtido nesse trabalho pode ser visualizado na Figura 45, enquanto que, para o autor de referência na Figura 46. O resultado obtido está de acordo com os resultados de Argyris, Papadrakakis e Mouroutis

(2003). Os campos de deslocamentos para os instantes $t = 140$ ms, $t = 165$ ms, $t = 174$ ms e $t = 177$ ms são apresentados na Figura 47.

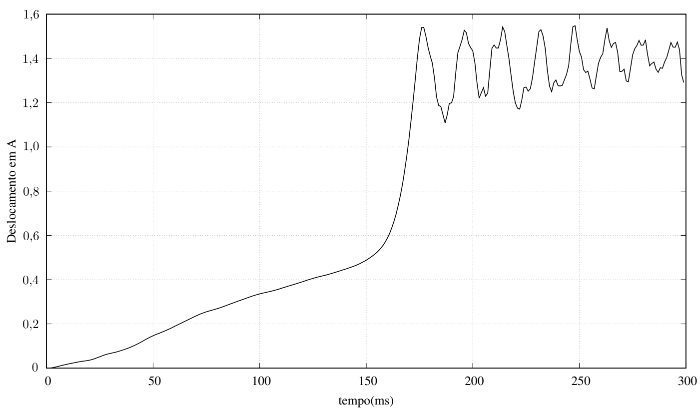
Figura 44 – Casca: Geometria e Malha

(a) Geometria (b) Malha



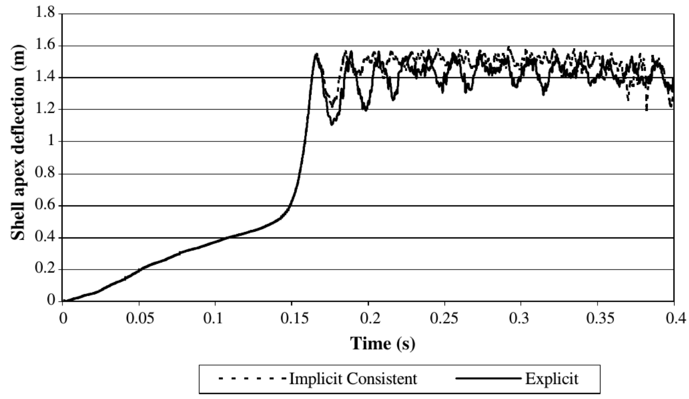
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 45 – Casca: Deslocamento vertical nó central A



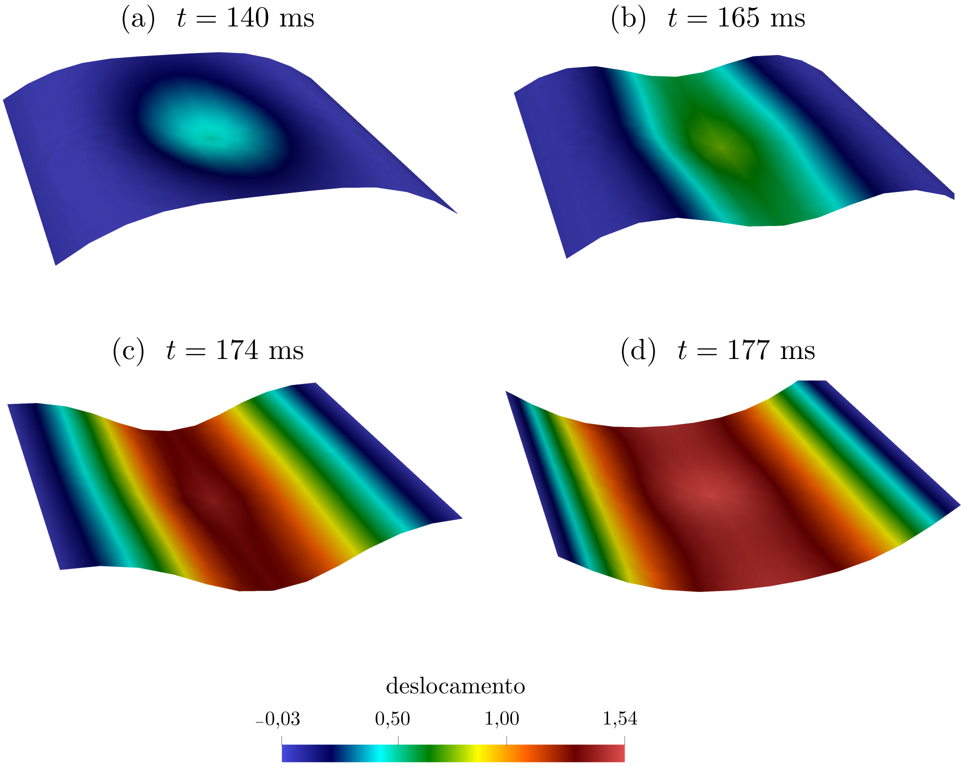
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 46 – Casca: Deslocamento vertical nó central A - referência



Fonte: Argyris, Papadrakakis e Mouroutis (2003)

Figura 47 – Casca: Campos de deslocamentos



Fonte: Elaborada pela autora

5 TÉCNICA DE PARTIÇÃO DE DOMÍNIO POR COMBINAÇÃO DOS ESPAÇOS DE FUNÇÕES

A primeira técnica de partição de domínio considerada para combinar modelos global e local, Elementos Finitos - Isogeométrico, é denominada técnica de combinação de espaços de funções e foi introduzida nos trabalhos Rosa, Coda e Sanches (2022) e Sanches *et al.* (2019). Essa técnica consiste em ponderar os espaços de função local e global sobre uma zona de superposição e combiná-las formando um novo espaço enriquecido de funções base linearmente independentes.

Essa metodologia foi aplicada com bastante sucesso no campo da mecânica da fratura elástico-linear com grandes deslocamentos como pode ser visto nos trabalhos de Rosa (2021) e Rosa, Coda e Sanches (2022). Ressalta-se que, embora a técnica se mostre bastante promissora, no contexto da dinâmica dos fluidos computacional, especialmente quando associada às técnicas de estabilização empregadas neste trabalho, ainda é necessário um estudo mais aprofundado para a determinação de parâmetros de estabilização SUPG e PSPG adequados na região de superposição, e por isso foi descartada neste trabalho após alguns estudos. Essa conclusão foi obtida a partir das simulações realizadas ao longo deste doutorado. Para problemas de menor complexidade ou com baixos números de Reynolds, como o caso da cavidade apresentado na **??**, os resultados foram bastante satisfatórios; contudo, para problemas mais complexos, foram observadas dificuldades de convergência quando aplicadas as técnicas SUPG e PSPG.

5.1 Técnica de combinação dos espaços de funções

Para o entendimento da técnica de partição de domínios define-se inicialmente um domínio global Ω_G e um domínio local, Ω_L, apresentados na Figura 48, sendo o domínio local menor que o global e contendo a região com efeitos localizados. O domínio total de estudo é então composto por: $\Omega = \Omega_G \cup \Omega_L$.

Os contornos físicos de Ω (Figura 48c), podem ser divididos em $\Gamma_G = (\Gamma_G)_D \cup (\Gamma_G)_N$, relacionado ao domínio global, e, $\Gamma_L = (\Gamma_L)_D \cup (\Gamma_L)_N$ relacionado ao domínio local, sendo os subíndices D e N respectivos aos contornos de Dirichlet e Neumann, respectivamente. É importante ressaltar que os contornos físicos podem ou não estar presentes, ou ainda, podem existir apenas condições de Dirichlet ou apenas condições de Neumann. O contorno não-físico $(\Gamma_G)_B$ define o limite da influência do domínio global na região de superposição, enquanto que, $(\Gamma_L)_B$ é o contorno que define o limite da influência do domínio local. Assim, a zona de superposição, Ω_B, é definida como: $\Omega_B = \Omega_G \cap \Omega_L$, sendo limitada pelos contornos $(\Gamma_L)_B$ e $(\Gamma_G)_B$.

Considerando um problema cujas funções tentativa nos domínios global e local sejam caracterizadas respectivamente por $u_G(\mathbf{y})$, definida no espaço finito de funções $\mathcal{S}_u^G$, e $u_L(\mathbf{y})$, definida no espaço finito de funções $\mathcal{S}_u^L$, sendo as funções teste global $w_G(\mathbf{y})$ e local $w_L(\mathbf{y})$ definidas nos espaços $\mathcal{V}_u^G$ e $\mathcal{V}_u^L$, respectivamente. A união direta dos espaços de funções na zona de superposição obviamente não resulta em um espaço que respeita a partição da unidade das funções de forma e nem garante a independência linear. Dessa forma, utiliza-se uma função ponderadora de combinação $b(\mathbf{y})$, de maneira que as funções tentativa e teste sejam:

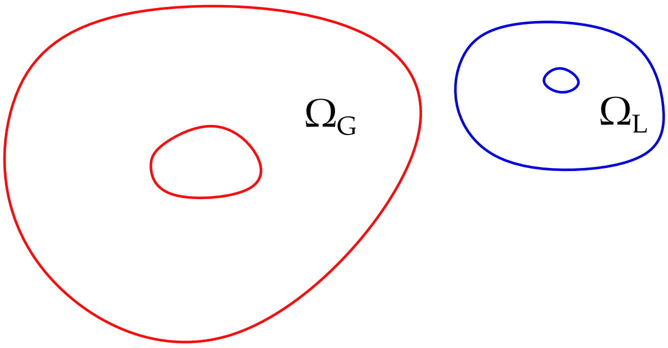
$$u(\mathbf{y}) = b(\mathbf{y})u_G(\mathbf{y}) + (1 - b(\mathbf{y}))u_L(\mathbf{y}), \tag{5.1}$$

$$w(\mathbf{y}) = b(\mathbf{y})w_G(\mathbf{y}) + (1 - b(\mathbf{y}))w_L(\mathbf{y}), \tag{5.2}$$

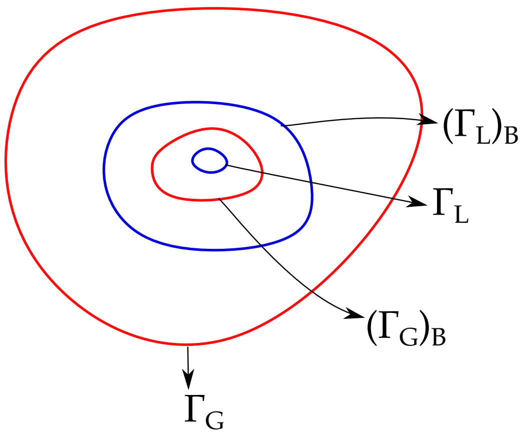
com $b(\mathbf{y})$ apresentando valor unitário sobre o domínio global livre (sem superposições), valor zero no domínio local livre, e apresentando uma transição suave na região de superposição.

Figura 48 – Partição de domínios para a técnica dos espaços de funções combinados

(a) Domínio Global (b) Domínio Local



(c) Domínios superpostos



Fonte: Elaborada pela autora

Os espaços enriquecidos na região de superposição de malhas, são definidos por

$\mathcal{S}_{enr}$ e $\mathcal{V}_{enr}$, correspondentes às funções tentativa e teste, respectivamente. A solução de um problema típico de valor de contorno recai em encontrar $u^h \in \mathcal{S}_{enr}$ tal que $\forall\ w^h \in \mathcal{V}_{enr}$:

$$B(u^h, w^h) = F(w^h), \tag{5.3}$$

com $B(\bullet, \bullet)$ e $F(\bullet)$ sendo operadores bilineares e lineares, respectivamente. A discretização de $u^h(\mathbf{y})$ e $w^h(\mathbf{y})$ no contexto dos elementos finitos é obtida através das seguintes relações:

$$u^h(\mathbf{y}) = \sum_{a=1}^{(n_{np})_G} (u_G)_a b(\mathbf{y})(N_G)_a(\mathbf{y}) + \sum_{a=1}^{(n_{np})_L} (u_L)_a(1 - b(\mathbf{y}))(N_L)_a(\mathbf{y}), \tag{5.4}$$

$$w^h(\mathbf{y}) = \sum_{a=1}^{(n_{np})_G} (w_G)_a b(\mathbf{y})(N_G)_a(\mathbf{y}) + \sum_{a=1}^{(n_{np})_L} (w_L)_a(1 - b(\mathbf{y}))(N_L)_a(\mathbf{y}), \tag{5.5}$$

com N_G e N_L sendo as funções de forma global e local; e $(n_{np})_G$ e $(n_{np})_L$ o número de funções de forma nas discretizações global e local respectivamente.

5.2 Função de combinação

Considerando que as funções $b(\mathbf{y})(N_G)$ e $(1 - b(\mathbf{y}))(N_L)$ sejam linearmente independentes sobre Ω_B, e que as funções base local e global sejam discretizadas com polinômios de igual ordem p e constituam funções base independentes dentro das discretizações local e global, a escolha de b um grau acima das funções base, ou seja, grau $p+1$, irá proporcionar uma nova base de grau consistente com o número de funções base disponíveis em cada ponto da zona de superposição. A nova base, que continua sendo um polinômio de grau p fora do domínio de superposição, torna-se um polinômio de ordem $2p + 1$ dentro da zona de superposição, evitando dependência linear entre as funções de forma e cumprindo a partição da unidade.

Nesse trabalho aplicam-se funções de forma locais e globais de grau polinomial quadrático. Dessa forma, a função ponderadora de combinação foi definida como cúbica e é expressa por:

$$b(\mathbf{y}) = \begin{cases} 2\left(\frac{Y_L(\mathbf{y})}{\delta(\mathbf{y})}\right)^3 - 3\left(\frac{Y_L(\mathbf{y})}{\delta(\mathbf{y})}\right)^2 + 1 \text{se } Y_G(\mathbf{y}) > 0 \ e \ Y_L(\mathbf{y}) > 0 \\ 1 \ Y_L(\mathbf{y}) \leq 0 \\ 0 \ Y_G(\mathbf{y}) \leq 0 \end{cases}, \tag{5.6}$$

com $Y_L(\mathbf{y})$ a função distância assinalada medida a partir de $(\Gamma_L)_B$, com valores positivos dentro do domínio local e negativos fora, e $Y_G(\mathbf{y})$ a função distância assinalada medida a partir de $(\Gamma_G)_B$, sendo positiva se o ponto pertence à Ω_G, e negativa, caso contrário. Nota-se que os pontos em que ambas funções distância assinalada são positivas estão contidos dentro da zona de superposição. O parâmetro δ é obtido por $\delta(\mathbf{y}) = Y_L(\mathbf{y}) + Y_G(\mathbf{y})$, e coincide com a espessura da zona de superposição quando $(\Gamma_L)_B$ e $(\Gamma_G)_B$ são paralelos.

Na prática, considera-se que o domínio global tem o tamanho do domínio total, ficando a definição de $(\Gamma_G)_B$ para uma etapa posterior, baseado na forma do modelo local. Os elementos e nós da malha global, sem suporte físico após a obtenção do novo espaço de funções, são desativados da análise. O contorno $(\Gamma_G)_B$ pode ser obtido através de uma réplica do contorno $(\Gamma_L)_B$ a uma distância paralela δ do mesmo.

Após a definição $(\Gamma_G)_B$ é necessária uma metodologia eficiente para determinação das funções base globais com pequena influência dentro da zona de superposição, visto que essas podem levar a um sistema mal condicionado. Para resolver esse problema, utiliza-se, para todos os nós globais "a"da análise, uma variável definida como:

$$(M_G)_{aa} = \int_{\Omega} b(\boldsymbol{\xi}) N_a(\boldsymbol{\xi}) b(\boldsymbol{\xi}) N_a(\boldsymbol{\xi}) d\Omega, \tag{5.7}$$

e define-se um valor M_{min} para $(M_G)_{aa}$. Os nós globais são desativados se $(M_G)_{aa} < M_{min}$.

Na Figura 49 apresenta-se um exemplo unidimensional da técnica de partição de domínios. Na Figura 49a observam-se as funções globais definidas inicialmente sobre todo o domínio, e a função ponderadora de modificação $b(y)$ com valor unitário sobre o domínio global livre e com transição suave sobre a região de superposição. Na Figura 49b representam-se as funções locais definidas somente no domínio local e a função ponderadora de modificação $1 - b(y)$ com valor unitário sobre o domínio local livre e com transição suave sobre a zona de superposição. Por fim, na Figura 49c apresenta-se o novo espaço de funções independentes que cumprem com a partição da unidade e possuem grau polinomial 5. Nota-se nessa figura a desativação das funções de forma globais que estão sobre o domínio local livre.

5.3 Aplicação da técnica à dinâmica dos fluidos computacional

Para o emprego da metodologia nas análises da DFC as aproximações apresentadas na Equação (5.4) e Equação (5.5) devem ser aplicadas nas funções tentativa para velocidade e pressão, e nas funções teste associadas à elas, apresentadas na Equação (2.49) à Equação (2.52).

Conforme relatado, os parâmetros de estabilização utilizados na técnica da DFC ainda necessitam de um estudo mais aprofundado, entretanto, para estudos iniciais, fez-se a combinação dos parâmetros calculados em cada uma das discretizações sobre a zona de superposição:

$$\tau_{\text{SUPG}}(\mathbf{y}) = b(\mathbf{y})(\tau_{\text{SUPG}})^G(\mathbf{y}) + (1 - b(\mathbf{y}))(\tau_{\text{SUPG}})^L(\mathbf{y}), \tag{5.8}$$

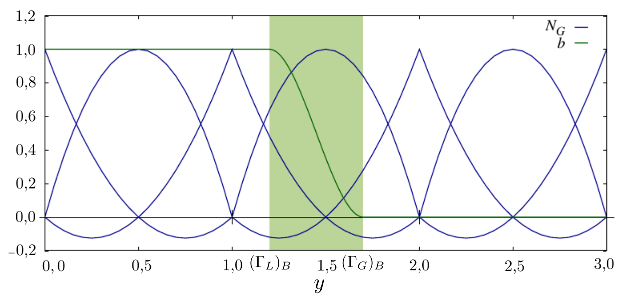
$$\tau_{\text{PSPG}}(\mathbf{y}) = b(\mathbf{y})(\tau_{\text{PSPG}})^G(\mathbf{y}) + (1 - b(\mathbf{y}))(\tau_{\text{PSPG}})^L(\mathbf{y}), \tag{5.9}$$

$$\nu_{\text{LSIC}}(\mathbf{y}) = b(\mathbf{y})(\nu_{\text{LSIC}})^G(\mathbf{y}) + (1 - b(\mathbf{y}))(\nu_{\text{LSIC}})^L(\mathbf{y}), \tag{5.10}$$

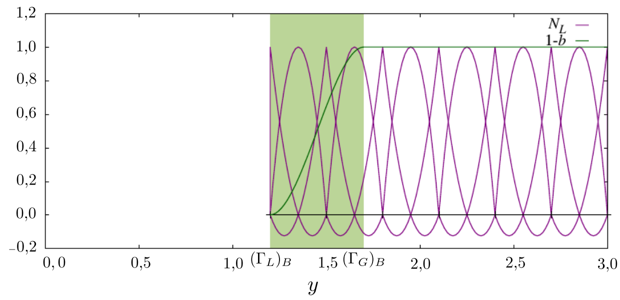
com $(\tau_{\text{SUPG}})^G$, $(\tau_{\text{PSPG}})^G$ e $(\nu_{\text{LSIC}})^G$ os parâmetros de estabilização calculados na malha global;$(\tau_{\text{SUPG}})^L$, $(\tau_{\text{PSPG}})^L$ e $(\nu_{\text{LSIC}})^L$ os parâmetros de estabilização calculados na malha local, todos conforme Equação 2.77 e Equação 2.78.

Figura 49 – Espaços de funções na técnica de partição de domínios - Problema unidimensional

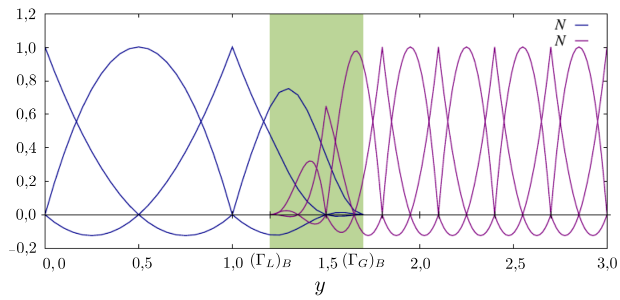
(a) Funções globais e função ponderadora (b).



(b) Funções locais e função ponderadora $(1 - b)$



(c) Novo espaço de funções



Fonte: Sanches *et al.* (2019)

5.4 Implementação computacional

O método dos espaços de funções combinados foi implementado para a solução de escoamentos incompressíveis seguindo a formulação apresentada no Capítulo 2 e Capítulo 3. Nesse código, após a leitura dos dados respectivos às malhas global e local, segue-se com a definição da distância assinalada respectiva a todos os nós da malha global e da malha local com respeito aos contornos $(\Gamma_G)_B$ e $(\Gamma_L)_B$, respectivamente. O contorno $(\Gamma_G)_B$ é obtido a partir dos dados de entrada, onde define-se a espessura da zona de superposição. De posse da distância assinalada e espessura da zona de superposição, são definidos quais elementos das malhas local e global fazem parte da zona de superposição. Qualquer elemento que possua um ou mais nós dentro da zona de superposição é considerado como um elemento que contribui com ela.

As equações na região de superposição são integradas sobre o elemento local, dessa forma, no pré-processamento, os pontos de integração da malha local são projetados sobre a malha global e o elemento global e suas coordenadas paramétricas correspondentes a cada ponto são armazenados.

Na etapa de pré-processamento, são determinados ainda os nós inativos da malha global, sejam porque o domínio de suas funções de forma encontram-se fora da zona de superposição, ou, porque possuem pequena influência dentro da mesma, de acordo com a expressão apresentada na Equação (5.7).

Finalmente, o processo de marcha no tempo se inicia da maneira explicitada no Algoritmo 1 levando-se em consideração que as funções tentativa e peso, e os parâmetros de estabilização são modificados de acordo com o apresentado neste capítulo. O algoritmo que descreve esse processo de solução pode ser visualizado no Algoritmo 3.

5.5 Verificação e aplicações

Para a verificação do código baseado na técnica de decomposição de domínios, apresentam-se dois exemplos com discretizações 2D, em que tanto a malha local, quanto a malha global, são discretizados por elementos finitos.

O primeiro exemplo, escoamento sobre uma cavidade quadrada, foi simulado para número de Reynolds 100 e apresentou boa concordância com os resultados da literatura. No segundo exemplo, referente a um escoamento sobre aerofólio NACA 0012 fixo, cujo número de Reynolds é mais elevado, foram observadas dificuldades de convergência quando aplicadas as técnicas SUPG e PSPG.

Algoritmo 3 Algoritmo para problemas da dinâmica dos fluidos computacional com a técnica de partição de domínios por combinação dos espaços de funções

Cálculo da distância assinalada dos nós e pontos de controle aos contornos;
Determinação dos elementos e células da zona de superposição;
Busca da correspondência dos pontos de integração da malha local na malha global na zona de superposição;
Definição dos nós inativos da malha global;
para o passo de tempo 0 até $npt - 1$ **faça**
  $i \leftarrow 0$;
  Predição da solução: aplicação das Equação (2.92), Equação (2.93) e Equação (2.94);
  enquanto ($\epsilon <$ tolerância) **faça**
    $i \leftarrow i + 1$;
    Interpolação das variáveis do problema: aplicação da Equação (2.95), Equação 2.96 e Equação (2.97);
    Cálculo do incremento nas variáveis do problema: $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$ e $\mathbf{p}_{n+1}$ de acordo com as Equação (2.98) e Equação (2.99);
    Atualização da solução: calculadas de acordo com Equação (2.100), Equação (2.101) e Equação (2.102);
    Cálculo do erro:

$$\epsilon = \left\| \mathbf{R}_{\mathrm{M}}^{i} \right\|_{L^2} \tag{5.11}$$

  fim enquanto
  Atualização das variáveis do passo anterior;
fim para

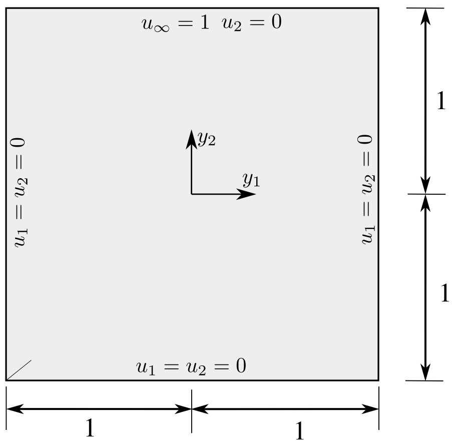
5.6 Cavidade com partição de domínio

Para a verificação inicial da metodologia de partição de domínios com superposição de malhas apresenta-se o problema clássico de escoamento sobre cavidade, a partir de uma discretização 2D.

A geometria do problema e suas condições contorno são apresentadas na Figura 50. O problema foi avaliado para um número de Reynolds = 100, calculado de acordo com a Equação (2.106), considerando L como sendo o comprimento lateral da cavidade. Na simulação considerou-se $\rho = 1{,}0$, $\Delta t = 0{,}05$, e $\rho_\infty = 0$.

Sabe-se que nas paredes da cavidade podem haver efeitos de camada limite, dessa forma, definiu-se uma malha local em elementos finitos que circunda a cavidade de acordo com a Figura 51a, composta por 4352 nós e 2048 elementos. A malha global por sua vez estende-se por toda a seção da cavidade, sendo constituída por 2401 nós e 1152 elementos, de acordo com Figura 51b.

Figura 50 – Cavidade: geometria e condições de contorno

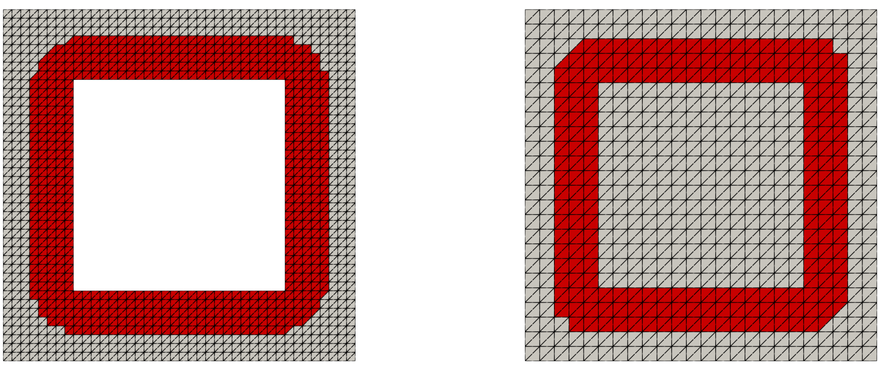


Fonte: Elaborada pela autora

Definiu-se uma espessura para a zona de superposição equivalente a $\delta = 0{,}1$ medida paralelamente ao contorno fictício local $(\Gamma_L)_B$. Considera-se pertencente a esta zona qualquer elemento da malha local que possua ao menos um nó dentro dessa região, destacados em vermelho na Figura 51a. A mesma consideração aplica-se à malha global, com os elementos correspondentes destacados na Figura 51b. Na Figura 52, podem ser observados em vermelho os nós da malha global que foram desativados da análise.

Figura 51 – Cavidade: Malhas Global e Local

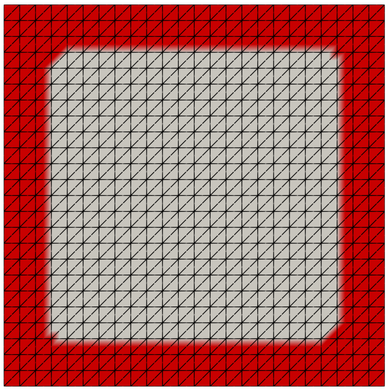
(a) Malha Local (b) Malha Global



Fonte: Elaborada pela autora

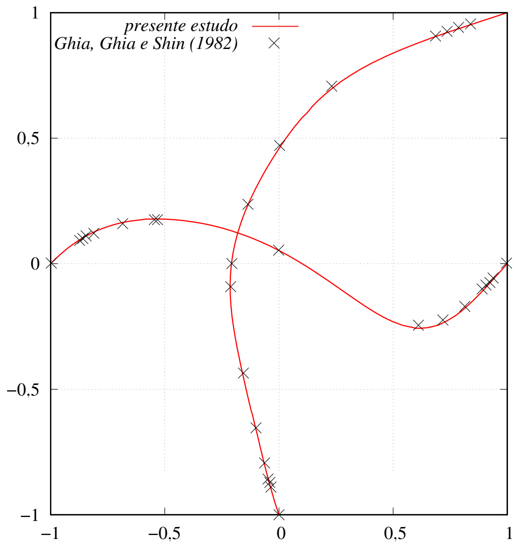
A simulação foi mantida até que se atingiu o estado estacionário de escoamento. Os perfis de velocidade adimensionalizados $(\mathbf{u}/\mathbf{u}_\infty)$ horizontal e vertical ao longo de duas linhas centrais nas direções y_1 e y_2 da cavidade são apresentados na Figura 53 e comparados com os resultados de Ghia, Ghia e Shin (1982), mostrando boa concordância. Na Figura 54a e Figura 54b são apresentados os campos de velocidade e pressão para a cavidade.

Figura 52 – Cavidade: nós desativados malha global



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 53 – Cavidade: Perfil de velocidade



Fonte: Elaborada pela autora

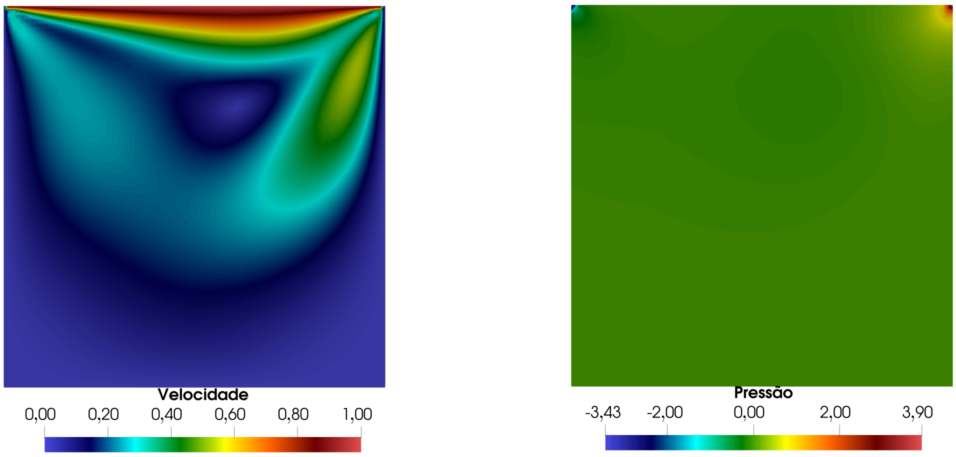
5.7 Escoamento sobre aerofólio NACA 0012 com partição de domínios

Com intuito de apresentar-se brevemente os problemas de convergência observados na metodologia de partição de domínios por combinação dos espaços de funções, irá se considerar a o problema de um aerofólio NACA 0012, cuja descrição detalhada (geometria, condições de contorno e parâmetros de análise) é apresentada na subseção 6.6.1.

Para essa análise, foi adotada a mesma discretização local da apresentada na subseção 6.6.1, incluindo a espessura da zona de superposição e quantidade de elementos e nós locais nesta região. Quanto a malha global, a mesma foi discretizada em elementos finitos e é composta por 17090 nós e 8442 elementos, conforme Figura 55.

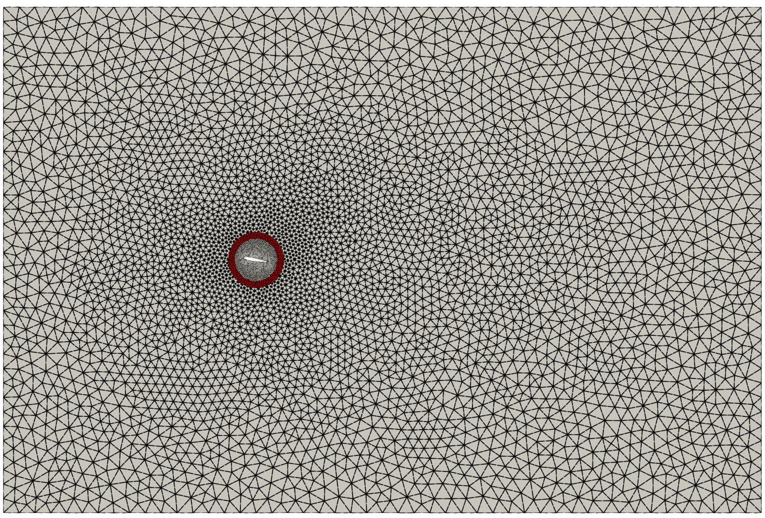
Figura 54 – Cavidade: Campos de velocidade e pressão - $Re = 100$

(a) Campo de Velocidade (b) Campo de Pressão



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 55 – Aerofólio: Malhas Global e Local

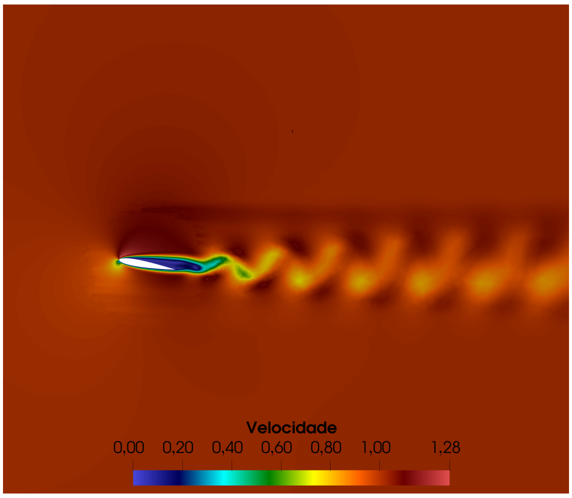


Fonte: Elaborada pela autora

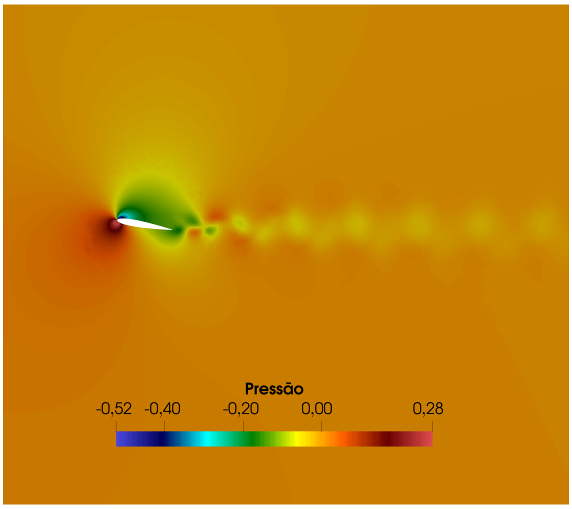
Na Figura 56a e Figura 56b são apresentados os campos de velocidade e pressão, respectivamente, em um tempo avançado da análise. Nessas figuras, podem ser observadas as oscilações que ocorrem na zona de superposição quando têm-se um número de Reynolds mais elevado.

Figura 56 – Aerofólio: Campos de velocidade e pressão

(a) Campo de Velocidade



(b) Campo de Pressão



Fonte: Elaborada pela autora

6 TÉCNICA DE DECOMPOSIÇÃO DE DOMÍNIOS ATRAVÉS DO MÉTODO ARLEQUIN ESTABILIZADO - RBSAM

Com intuito de superar as dificuldades encontradas com a técnica de partição de domínios apresentada no Capítulo 5, considera-se o método Arlequin, que permite também levar em conta efeitos localizados através do uso de um modelo local mais refinado superposto a um modelo global com discretização mais grosseira. No método Arlequin, o acoplamento entre os modelos é realizado através da superposição e colagem entre dois modelos em uma região denominada zona de colagem através de multiplicadores de Lagrange.

A primeira parte deste capítulo descreve o método clássico de Arlequin, introduzido por Dhia (1998). Em seguida, é apresentada a forma estabilizada do método (RBSAM) proposta por Fernandes *et al.* (2020) no contexto de escoamentos incompressíveis, seguida da extensão dessa metodologia para problemas com contornos móveis. Por fim são apresentados o algoritmo implementado e exemplos de verificação.

6.1 Método Arlequin

O método Arlequin foi introduzido por Dhia (1998), e é baseado em três principais ideias (ver Figura 57) (DHIA; RATEAU, 2005):

- Um domínio local Ω_1 é sobreposto em um domínio global Ω_0 em uma zona de interesse de modo a representar efeitos localizados;
- Os modelos são colados um ao outro em uma subzona da zona de superposição (Ω_s), chamada de zona de colagem (Ω_c), através de um operador de acoplamento conveninente;
- Garante-se a distribuição da energia entre os modelos através do emprego de uma função ponderadora, definida a partir da partição da unidade;

Dessa forma, o domínio computacional do problema é definido por:

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_1, \tag{6.1}$$

e a zona de superposição Ω_s é definida da seguinte forma:

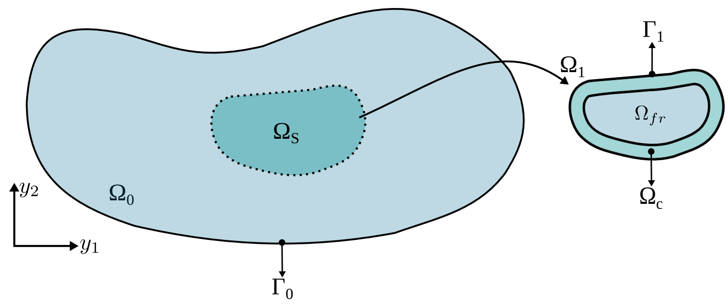
$$\Omega_s = \Omega_0 \cap \Omega_1, \tag{6.2}$$

$$\Omega_s = \Omega_c \cup \Omega_{fr}, \tag{6.3}$$

$$\Omega_s > 0, \tag{6.4}$$

sendo Ω_{fr} a chamada zona livre.

Figura 57 – Domínio local e global



Fonte: Elaborada pela autora

Umas das formas mais comuns de se realizar o acoplamento entre domínios é através de campos de multiplicadores de Lagrange. Uma forma generalizada de representar os operadores de acoplamento, conforme Dhia e Rateau (2002), é:

$$(\boldsymbol{\lambda}, \Delta\mathbf{u}) = \int_{\Omega_c} k_0[\boldsymbol{\lambda} \cdot \Delta\mathbf{u}] + k_1[\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta\mathbf{u})] \ d\Omega_c, \tag{6.5}$$

onde $\boldsymbol{\lambda}$ é o campo de multiplicadores de Lagrange, $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u}_0|_{\Omega_c} - \mathbf{u}_1|_{\Omega_c}$ é a diferença entre os campos acoplados na zona de colagem. k_0 e k_1 são constantes estritamente positivas.

Quando $k_0 > 0$ e $k_1 = 0$ tem-se o operador de acoplamento L^2. Esse operador estabelece a continuidade de ordem 0 do campo compatibilizado, o que significada que ele garante, de forma fraca, a continuidade das variáveis ao longo da zona de colagem. Para valores $k_0 > 0$ e $k_1 > 0$ obtêm-se o operador de acoplamento H^1, estabelecendo continuidade de ordem 1 do campo compatibilizado, garantindo, de forma fraca, a continuidade de uma combinação de variáveis e seu Laplaciano (GUIDAULT; BELYTSCHKO, 2007).

O sucesso do método depende da escolha apropriada dos parâmetros k_0 e k_1. Para o acoplamento utilizando L^2, devido a simplicidade da aplicação da restrição dos campos compatibilizados na zona de colagem, o condicionamento do sistema depende fortemente do valor do parâmetro k_0, sendo esta uma das razões pela qual a maioria dos trabalhos realizados com o método Arlequin empregam o operador H^1. A obtenção de parâmetros ótimos para o método pode ser uma tarefa difícil, sendo esse um dos fatores que levaram

Fernandes *et al.* (2020) ao desenvolvimento da técnica RBSAM que será discutida na próxima seção.

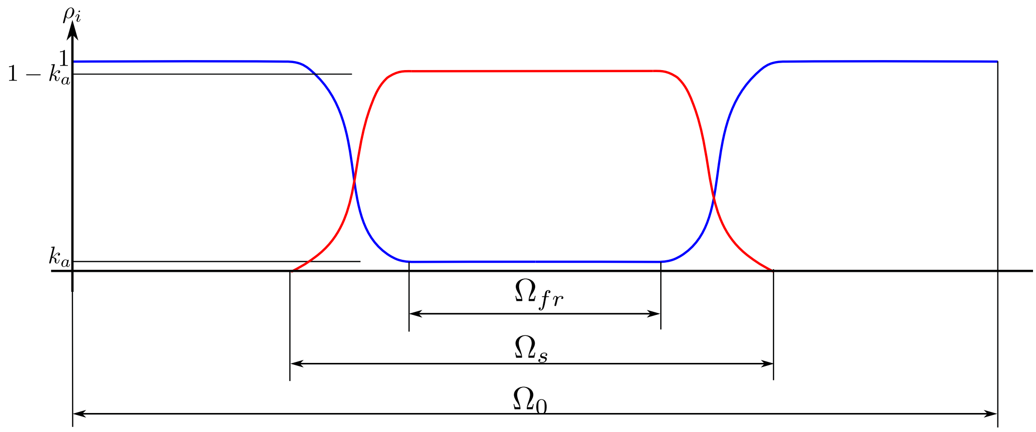
A definição do espaço de funções para o multiplicador de Lagrange é muito importante. O método apresenta flexibilidade para usar uma discretização diferente da zona de colagem, entretanto, usualmente se adota um subconjunto do espaço de funções de um dos modelos sobrepostos. A escolha por um modelo ou outro pode conduzir a um maior ou menor acoplamento, sendo a escolha definida em função da aplicação desejada.

Por fim, para que o método não adicione energia ao sistema, é necessário que seja definida uma função ponderadora, denominada (α), que garanta a distribução da energia do sistema ao longo dos modelos sobrepostos. Em geral, essa função é definida da seguinte forma:

$$\begin{cases} \alpha_0 \in [ka; 1] \ em \ \Omega, \\ \alpha_0 = 1 \ em \ \Omega_0 \backslash \Omega_1, \\ \alpha_0 = k_a > 0 \ em \ \Omega_{fr}, \\ \alpha_0 + \alpha_1 = 1 \ em \ \Omega, \end{cases} \tag{6.6}$$

com k_a uma constante arbitrariamente pequena para o método de Arlequin ser relevante (DHIA, 2008), conforme pode ser observado na Figura 58.

Figura 58 – Função Ponderadora



Fonte: Elaborada pela autora

No caso deste trabalho, adotou-se para α_0 e α_1 na zona de colagem funções lineares da distância ao contorno Γ_1, de modo que:

$$\alpha_0 = 1 - \frac{(1 - k_a)}{\delta_s} Y_1(\mathbf{y}), \tag{6.7}$$

$$\alpha_1 = \frac{(1-k_a)}{\delta_s} Y_1(\mathbf{y}), \tag{6.8}$$

com $Y_1(\mathbf{y})$ a função distância assinalada medida a partir de Γ_1 com valores positivos dentro do domínio local, e negativos fora; e δ_s representando a espessura definida para a zona de colagem.

6.2 Método Arlequin clássico aplicado a problemas de escoamentos incompressíveis

O método Arlequin vem sendo aplicado amplamente em diversos trabalhos da mecânica dos sólidos nas últimas décadas. No que diz respeito a materiais incompressíveis, pode-se citar o trabalho de Jamond e Dhia (2013), no qual os autores desenvolvem uma técnica para análise empregando elementos do tipo Taylor-Hood, que satisfazem a condição LBB. Essa metodologia é testada também para problemas descritos pelas equações de Stokes.

De acordo com os autores Jamond e Dhia (2013) a principal dificuldade encontrada para aplicação do método Arlequin no contexto de materiais incompressíveis é que duas restrições devem ser aplicadas concomitantemente: a compatibilização dos campos de interesse na zona de colagem e a condição de incompressibilidade do material nessa mesma região. Os autores apontaram que a imposição da condição de incompressibilidade em ambos os modelos pode gerar problema de redundância, acarretando em um sistema algébrico associado singular.

A solução proposta por Jamond e Dhia (2013) no trabalho foi a aplicação da condição de incompressibilidade em cada ponto do domínio computacional apenas uma vez. A metodologia consiste então em escolher um dos modelos no qual é removida a condição de incompressibilidade dos elementos total ou parcialmente localizados na zona de colagem (Ω_c). Indiferente do modelo eleito para a remoção da condição de incompressibilidade na zona de colagem, na zona livre, a condição de incompressibilidade é removida do modelo global. Deve-se destacar que, no trabalho citado, existem algumas recomendações com relação a estabilidade da metodologia, como por exemplo, a necessidade de existir pelo menos um elemento global na zona livre. Tal trabalho não explora as possíveis mudanças que acarretariam na estabilidade numérica em caso de sucessivas remoções e inclusões de condição de incompressibilidade no caso de um modelo local móvel.

Por esse motivo, neste trabalho, opta-se pela adoção da formulação estabilizada. Para a construção do método Arlequin é necessário retornar às equações para um monomodelo apresentadas no Capítulo 2, as quais representam a forma fraca estabilizada das equações da quantidade de movimento e da continuidade. Entretanto, será usada inicialmente uma descrição Euleriana das equações.

Considerando os espaços de dimensão finita das funções tentativa que descrevem a velocidade ($\mathcal{S}^h_{ui}$) e a pressão ($\mathcal{S}^h_{pi}$), bem como seus respectivos espaços de funções testes $\mathcal{V}^h_{ui}$ e $\mathcal{V}^h_{pi}$, com $i = 0, 1$ indicando o índice do modelo, definidos como:

$$\mathcal{S}^h_{ui} = \left\{ \mathbf{u}^h_i \mid \mathbf{u}^h_i (\cdot, t) \in \left(H^{1h} \left(\Omega_i\right), \mathbf{u}^h_i = \mathbf{u}^h_{Di} \text{ em } \Gamma_{Di} \right\} \tag{6.9}$$

$$\mathcal{S}^h_{pi} = \left\{ p^h_i \mid p^h_i (\cdot) \in L^{2h} \left(\Omega_i\right) \right\}, \tag{6.10}$$

$$\mathcal{V}^h_{ui} = \left\{ \mathbf{w}^h_i \mid \mathbf{w}^h_i (\cdot) \in H^{1h} \left(\Omega_i\right), \mathbf{w}^h_i = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_{D_i} \right\}, \tag{6.11}$$

e

$$\mathcal{V}^h_{pi} = \mathcal{S}^h_{pi}. \tag{6.12}$$

Analogamente, os espaços das funções tentativa ($\mathcal{M}^h$) e teste ($\mathcal{Q}^h$) para o campo dos multiplicadores de Lagrange ($\boldsymbol{\lambda}$) são definidos como:

$$\mathcal{M}^h = \left\{ \boldsymbol{\lambda}^h \,\middle|\, \boldsymbol{\lambda}^h(\cdot) \in H^{1h}(\Omega_c) \right\} \tag{6.13}$$

$$\mathcal{Q}^h = \mathcal{M}^h. \tag{6.14}$$

A aplicação do operador de acoplamento L^2 à formulação clássica Arlequin consiste em, dados os espaços tentativa e teste apresentados nas equações anteriores, encontrar $(\mathbf{u}^h_0, p^h_0, \mathbf{u}^h_1, p^h_1, \boldsymbol{\lambda}^h) \in \mathcal{S}^h_{u0} \times \mathcal{S}^h_{p0} \times \mathcal{S}^h_{u1} \times \mathcal{S}^h_{p1} \times \mathcal{M}^h$ de maneira que $\forall\ \mathbf{w}^h_0 \in \mathcal{V}^h_{u0}$, $q^h_0 \in \mathcal{V}^h_{p0}$, $\mathbf{w}^h_1 \in \mathcal{V}^h_{u1}$, $q^h_1 \in \mathcal{V}^h_{p1}$, e $\forall\ \boldsymbol{\zeta}^h \in \mathcal{Q}^h$:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}^h_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^h_0}{\partial t} \mathrm{d}\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}^h_0 \cdot \left(\mathbf{u}^h_0 \cdot \boldsymbol{\nabla}_y \right) \mathbf{u}^h_0 \mathrm{d}\Omega_0 \\
&\quad + \int_{\Omega_0} \alpha_0 \boldsymbol{\varepsilon} \left(\mathbf{w}^h_0 \right) : \boldsymbol{\sigma} \left(\mathbf{u}^h_0, p^h_0 \right) \ \mathrm{d}\Omega_0 \\
&\quad + \sum_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\Omega^e} \tau_{\mathrm{SUPG}} \left(\left(\mathbf{u}^h_0 \cdot \boldsymbol{\nabla}_y \right) \mathbf{w}^h_0 \right) \cdot \mathbf{r}^h_{\mathrm{M}0} \left(\mathbf{u}^h_0, p^h_0 \right) \ \mathrm{d}\Omega_0 \\
&\quad + \sum_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\Omega^e} \nu_{\mathrm{LSIC}} \boldsymbol{\nabla}_y \cdot \mathbf{w}^h_0 r^h_{\mathrm{C}0} \left(\mathbf{u}^h_0 \right) \ \mathrm{d}\Omega_0 + \chi_0 \int_{\Omega_c} \mathbf{w}^h_0 \cdot \boldsymbol{\lambda}^h \mathrm{d}\Omega_c \\
&\quad = \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}^h_0 \cdot \mathbf{f}^h_0 \mathrm{d}\Omega_0 + \int_{\Gamma_{N0}} \alpha_0 \mathbf{w}^h_0 \cdot \mathbf{h}^h_0 \ \mathrm{d}\Gamma_{N0},
\end{aligned} \tag{6.15}$$

$$\int_{\Omega_0} \alpha_0 q_0^h \boldsymbol{\nabla}_y \cdot \mathbf{u}_0^h \ \mathrm{d}\Omega_0 + \sum_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\Omega^e} \tau_{\mathrm{PSPG}} \left(\frac{\boldsymbol{\nabla}_y q_0^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_{\mathrm{M0}}^h \left(\mathbf{u}_0^h, p_0^h \right) \ \mathrm{d}\Omega_0 = 0, \tag{6.16}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_1^h}{\partial t} \mathrm{d}\Omega_1 + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \left(\mathbf{u}_1^h \cdot \boldsymbol{\nabla}_y \right) \mathbf{u}_1^h \mathrm{d}\Omega_1 \\
&+ \int_{\Omega_1} \alpha_1 \boldsymbol{\varepsilon} \left(\mathbf{w}_1^h \right) : \boldsymbol{\sigma} \left(\mathbf{u}_1^h, p_1^h \right) \ \mathrm{d}\Omega_1 \\
&+ \sum_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\Omega^e} \tau_{\mathrm{SUPG}} \left(\left(\mathbf{u}_1^h \cdot \boldsymbol{\nabla}_y \right) \mathbf{w}_1^h \right) \cdot \mathbf{r}_{\mathrm{M1}}^h \left(\mathbf{u}_1^h, p_1^h \right) \ \mathrm{d}\Omega_1 \\
&+ \sum_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\Omega^e} \nu_{\mathrm{LSIC}} \boldsymbol{\nabla}_y \cdot \mathbf{w}_1^h r_{\mathrm{C1}}^h \left(\mathbf{u}_1^h \right) \ \mathrm{d}\Omega_1 \quad + \chi_1 \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_1^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h \mathrm{d}\Omega_c \\
&= \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{f}_1^h \mathrm{d}\Omega_1 + \int_{\Gamma_{N1}} \alpha_1 \mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{h}_1^h \ \mathrm{d}\Gamma_{N1},
\end{aligned} \tag{6.17}$$

$$\int_{\Omega_1} \alpha_1 q_1^h \boldsymbol{\nabla}_y \cdot \mathbf{u}_1^h \ \mathrm{d}\Omega_1 + \sum_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\Omega^e} \tau_{\mathrm{PSPG}} \left(\frac{\boldsymbol{\nabla}_y q_1^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_{\mathrm{M1}}^h \left(\mathbf{u}_1^h, p_1^h \right) \ \mathrm{d}\Omega_1 = 0, \tag{6.18}$$

$$\int_{\Omega_c} \boldsymbol{\zeta}^h \cdot \left(\mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_1^h \right) \ \mathrm{d}\Omega_c = 0, \tag{6.19}$$

onde $\mathbf{r}_{\mathrm{Mi}}^h$ e r_{Ci}^h são os resíduos da equação da quantidade de movimento e da equação da continuidade, com $i = 0, 1$, respectivamente, dados por:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{Mi}}^h \left(\mathbf{u}_i^h, p_i^h, \boldsymbol{\lambda}^h \right) = \alpha_i \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}_i^h}{\partial t} + \left(\mathbf{u}_i^h \cdot \boldsymbol{\nabla}_y \right) \mathbf{u}_i^h - \mathbf{f}_i^h \right) - \alpha_i \boldsymbol{\nabla}_y \cdot \boldsymbol{\sigma} \left(\mathbf{u}_i^h, p_i^h \right) + \chi_i \boldsymbol{\lambda}^h, \tag{6.20}$$

$$r_{\mathrm{Ci}}^h \left(\mathbf{u}_i^h \right) = \alpha_i \boldsymbol{\nabla}_y \cdot \mathbf{u}_i^h, \tag{6.21}$$

com χ_i descrito da maneira que se segue:

$$\chi_i = \begin{cases} (-1)^i \ se \ \mathbf{y} \in \Omega_c \\ 0 \ se \ \mathbf{y} \notin \Omega_c. \end{cases} \quad . \tag{6.22}$$

O problema descrito pela Equação (6.15) à Equação (6.19) é à versão clássica do método de Arlequin para o problema de Navier-Stokes estabilizado pela técnica PSPG/SUPG. Matematicamente trata-se de um problema de ponto de sela decorrente de uma formulação mista. Entretanto, desde que a condição LBB seja satisfeita, existe solução para o problema e ela é única.

Em Guidault e Belytschko (2007) pode-se encontrar uma vasta análise matemática acerca das questões relacionadas com estabilidade, convergência e relevância do método. Os autores relatam, por exemplo, a necessidade de emprego de funções ponderadoras contínuas quando utilizado o operador de acoplamento L^2, o que não ocorre com o operador H^1. Além disso, os autores destacam que espaços muito refinados para os multiplicadores de Lagrange podem levar a uma solução não convergente, independente do tipo de operador de acoplamento. Esse problema ocorre devido à forte dependência da discretização do modelo global na solução.

O problema descrito no método Arlequin clássico é análogo a formulação mista em elementos finitos para escoamentos incompressíveis, que limita a escolha das funções aproximadoras para o campo de velocidade e pressão. No caso da mecânica dos fluidos, conforme apresentado no Capítulo 2, uma forma de superar as restrições LBB é o uso de métodos estabilizados como o PSPG. Seguindo essa mesma filosofia, Fernandes *et al.* (2020) introduzem uma técnica de estabilização consistente que será apresentada na seguinte seção.

6.3 Método Arlequin estabilizado aplicado à problemas de escoamentos incompressíveis

Com intuito de superar a condição LBB para o método Arlequin, Fernandes *et al.* (2020) desenvolvem uma técnica de estabilização consistente baseada em resíduo. Para isso, introduz-se uma parcela adicional à equação dos campos de multiplicadores de Lagrange, que leva em conta o gradiente de $\boldsymbol{\zeta}^h$ e o resíduo da equação da quantidade de movimento:

$$\sum_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\Omega_c^e} \frac{\tau_{ARLQ0}}{\rho} \boldsymbol{\nabla}_y \boldsymbol{\zeta}^h : \boldsymbol{\nabla}_y \mathbf{r}_{\mathrm{M0}}^h \left(\mathbf{u}_0^h, p_0^h\right) \, \mathrm{d}\Omega_c - \sum_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\Omega_c^e} \frac{\tau_{ARLQ1}}{\rho} \boldsymbol{\nabla}_y \boldsymbol{\zeta}^h : \boldsymbol{\nabla}_y \mathbf{r}_{\mathrm{M1}}^h \left(\mathbf{u}_1^h, p_1^h\right) \, \mathrm{d}\Omega_c, \tag{6.23}$$

sendo τ_{ARLQ0} e τ_{ARLQ1} parâmetros de estabilização, respectivamente da malha global e local. A obtenção destes parâmetros será abordada na subseção seguinte.

Dessa forma, pode-se definir a solução do problema de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis utilizando a técnica de Arlequin estabilizada da seguinte forma: Encontrar $(\mathbf{u}_0^h, p_0^h, \mathbf{u}_1^h, p_1^h, \boldsymbol{\lambda}^h) \in \mathcal{S}_{u0}^h \times \mathcal{S}_{p0}^h \times \mathcal{S}_{u1}^h \times \mathcal{S}_{p1}^h \times \mathcal{M}^h$ de maneira que $\forall\ \mathbf{w}_0^h \in \mathcal{V}_{u0}^h$, $q_0^h \in \mathcal{V}_{p0}^h$, $\mathbf{w}_1^h \in \mathcal{V}_{u1}^h$, $q_1^h \in \mathcal{V}_{p1}^h$, e $\forall\ \boldsymbol{\zeta}^h \in \mathcal{Q}^h$:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_0^h}{\partial t} \mathrm{d}\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot \left(\mathbf{u}_0^h \cdot \boldsymbol{\nabla}_y\right) \mathbf{u}_0^h \mathrm{d}\Omega_0 \\
&\quad + \int_{\Omega_0} \alpha_0 \boldsymbol{\varepsilon}\left(\mathbf{w}_0^h\right) : \boldsymbol{\sigma}\left(\mathbf{u}_0^h, p_0^h\right)\, \mathrm{d}\Omega_0 \\
&\quad + \sum_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\Omega^e} \tau_{\mathrm{SUPG}} \left(\left(\mathbf{u}_0^h \cdot \boldsymbol{\nabla}_y\right) \mathbf{w}_0^h\right) \cdot \mathbf{r}_{\mathrm{M0}}^h \left(\mathbf{u}_0^h, p_0^h\right)\, \mathrm{d}\Omega_0 \\
&\quad + \sum_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\Omega^e} \nu_{\mathrm{LSIC}} \boldsymbol{\nabla}_y \cdot \mathbf{w}_0^h r_{\mathrm{C0}}^h \left(\mathbf{u}_0^h\right)\, \mathrm{d}\Omega_0 + \chi_0 \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_0^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h \mathrm{d}\Omega_c \\
&\quad = \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot \mathbf{f}_0^h \mathrm{d}\Omega_0 + \int_{\Gamma_{N0}} \alpha_0 \mathbf{w}_0^h \cdot \mathbf{h}_0^h\, \mathrm{d}\Gamma_{N0},
\end{aligned} \tag{6.24}$$

$$\int_{\Omega_0} \alpha_0 q_0^h \boldsymbol{\nabla}_y \cdot \mathbf{u}_0^h\, \mathrm{d}\Omega_0 + \sum_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\Omega^e} \tau_{\mathrm{PSPG}} \left(\frac{\boldsymbol{\nabla}_y q_0^h}{\rho}\right) \cdot \mathbf{r}_{\mathrm{M0}}^h \left(\mathbf{u}_0^h, p_0^h\right)\, \mathrm{d}\Omega_0 = 0, \tag{6.25}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_1^h}{\partial t} \mathrm{d}\Omega_1 + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \left(\mathbf{u}_1^h \cdot \boldsymbol{\nabla}_y\right) \mathbf{u}_1^h \mathrm{d}\Omega_1 \\
&\quad + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \boldsymbol{\varepsilon}\left(\mathbf{w}_1^h\right) : \boldsymbol{\sigma}\left(\mathbf{u}_1^h, p_1^h\right)\, \mathrm{d}\Omega_1 \\
&\quad + \sum_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\Omega^e} \tau_{\mathrm{SUPG}} \left(\left(\mathbf{u}_1^h \cdot \boldsymbol{\nabla}_y\right) \mathbf{w}_1^h\right) \cdot \mathbf{r}_{\mathrm{M1}}^h \left(\mathbf{u}_1^h, p_1^h\right)\, \mathrm{d}\Omega_1 \\
&\quad + \sum_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\Omega^e} \nu_{\mathrm{LSIC}} \boldsymbol{\nabla}_y \cdot \mathbf{w}_1^h r_{\mathrm{C1}}^h \left(\mathbf{u}_1^h\right)\, \mathrm{d}\Omega_1 \quad + \chi_1 \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_1^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h \mathrm{d}\Omega_c \\
&\quad = \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{f}_1^h \mathrm{d}\Omega_1 + \int_{\Gamma_{N1}} \alpha_1 \mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{h}_1^h\, \mathrm{d}\Gamma_{N1},
\end{aligned} \tag{6.26}$$

$$\int_{\Omega_1} \alpha_1 q_1^h \boldsymbol{\nabla}_y \cdot \mathbf{u}_1^h\, \mathrm{d}\Omega_1 + \sum_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\Omega^e} \tau_{\mathrm{PSPG}} \left(\frac{\boldsymbol{\nabla}_y q_1^h}{\rho}\right) \cdot \mathbf{r}_{\mathrm{M1}}^h \left(\mathbf{u}_1^h, p_1^h\right)\, \mathrm{d}\Omega_1 = 0, \tag{6.27}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_c} \boldsymbol{\zeta}^h \cdot \left(\mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_1^h\right)\, \mathrm{d}\Omega_c + \sum_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\Omega_c^e} \frac{\tau_{ARLQ0}}{\rho} \boldsymbol{\nabla}_y \boldsymbol{\zeta}^h : \boldsymbol{\nabla}_y \mathbf{r}_{\mathrm{M0}}^h \left(\mathbf{u}_0^h, p_0^h\right)\, \mathrm{d}\Omega_c \\
&- \sum_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\Omega_c^e} \frac{\tau_{ARLQ1}}{\rho} \boldsymbol{\nabla}_y \boldsymbol{\zeta}^h : \boldsymbol{\nabla}_y \mathbf{r}_{\mathrm{M1}}^h\, \mathrm{d}\Omega_c = 0,
\end{aligned} \tag{6.28}$$

com os resíduos $\mathbf{r}_{\mathrm{Mi}}^h$ e r_{Ci}^h escritos conforme a Equação (6.20) e Equação (6.21).

O sistema resultante pode ser reescrito em notação matricial como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{L}}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_1 & -\hat{\mathbf{L}}_1 \\ \mathbf{L}_0^T & -\mathbf{L}_1^T & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{U}}_0 \\ \bar{\mathbf{U}}_1 \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_{\boldsymbol{\Lambda}} \end{bmatrix}. \tag{6.29}$$

Considerando $i = 0, 1$ designando os modelos global e local respectivamente, tem-se a definição dos termos da Equação (6.29) como: $\mathbf{K}_i$ é uma matriz que representa os termos provenientes das matrizes referentes as equações da quantidade de movimento e da continuidade para o modelo i; $\hat{\mathbf{L}}_i$ matriz que representa os termos de acoplamento do modelo i; $\mathbf{L}_i^T$ matriz procedente dos termos da equação de restrição e de componentes da estabilização RBSAM do modelo i; $\mathbf{E}$ apresenta termos oriundos da estabilização RBSAM; $\bar{\mathbf{U}}_i$ representa os vetores nodais dos graus de liberdade respectivos a velocidade e pressão do modelo i; $\boldsymbol{\Lambda}$ representa os graus de liberdade respectivos aos multiplicadores de Lagrange; $\mathbf{F}_i$ representa os vetores provenientes das equações da quantidade de movimento e da continuidade para o modelo i; $\mathbf{F}_{\boldsymbol{\Lambda}}$ representa os termos vetoriais advindos da estabilização RBSAM.

Note que na estabilização Arlequin baseada no resíduo (RBSAM) não existem elementos zeros na diagonal da matriz, diferente do mesmo problema na formulação clássica Arlequin. No trabalho de Fernandes *et al.* (2020) pode-se encontrar a análise de estabilidade dessa técnica e testes numéricos que avaliam o condicionamento do sistema algébrico e a convergência do método.

O problema de Arlequin não linear apresentado na Equação (6.24) à Equação (6.28) pode ser reescrito em sua forma semi-discreta residual, para $i = 0, 1$, da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R}_{\mathrm{M,i}} = & \int_{\Omega_i} \alpha_i \rho\, \mathbf{w}_i^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i^h}{\partial t}\, \mathrm{d}\Omega_i + \int_{\Omega_i} \alpha_i \rho\, \mathbf{w}_i^h \cdot \left(\mathbf{u}_i^h \cdot \boldsymbol{\nabla}_y\right) \mathbf{u}_i^h \, \mathrm{d}\Omega_i \\
& + \int_{\Omega_i} \alpha_i\, \boldsymbol{\varepsilon}\left(\mathbf{w}_i^h\right) : \boldsymbol{\sigma}\left(\mathbf{u}_i^h, p_i^h\right) \mathrm{d}\Omega_i \\
& + \sum_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\Omega^e} \tau_{\mathrm{SUPG}} \left(\left(\mathbf{u}_i^h \cdot \boldsymbol{\nabla}_y\right) \mathbf{w}_i^h\right) \cdot \mathbf{r}_{\mathrm{Mi}}^h \left(\mathbf{u}_i^h, p_i^h\right) \mathrm{d}\Omega_i \\
& + \sum_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\Omega^e} \nu_{\mathrm{LSIC}}\, \boldsymbol{\nabla}_y \cdot \mathbf{w}_i^h\, r_{\mathrm{Ci}}^h \left(\mathbf{u}_i^h\right) \mathrm{d}\Omega_i + \chi_i \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_i^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h \, \mathrm{d}\Omega_c \\
& - \int_{\Omega_i} \alpha_i \rho\, \mathbf{w}_i^h \cdot \mathbf{f}_i^h \, \mathrm{d}\Omega_i - \int_{\Gamma_i} \alpha_i\, \mathbf{w}_i^h \cdot \mathbf{h}_i^h \, \mathrm{d}\Gamma_i
\end{aligned}
\tag{6.30}
$$

$$
\mathrm{R}_{\mathrm{C,i}} = \int_{\Omega_i} \alpha_i q_i^h \boldsymbol{\nabla}_y \cdot \mathbf{u}_i^h \; \mathrm{d}\Omega_i + \sum_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\Omega^e} \tau_{\mathrm{PSPG}} \left(\frac{\boldsymbol{\nabla}_y q_i^h}{\rho}\right) \cdot \mathbf{r}_{\mathrm{Mi}}^h \left(\mathbf{u}_i^h, p_i^h\right) \; \mathrm{d}\Omega_i, \tag{6.31}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R}_{\mathrm{L}} = & \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\zeta}^h \cdot \left(\mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_1^h\right) \; \mathrm{d}\Omega_c + \sum_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\Omega_c^e} \frac{\tau_{ARLQ0}}{\rho} \boldsymbol{\nabla}_y \boldsymbol{\zeta}^h : \boldsymbol{\nabla}_y \mathbf{r}_{\mathrm{M0}}^h \left(\mathbf{u}_0^h, p_0^h\right) \; \mathrm{d}\Omega_c \\
& - \sum_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\Omega_c^e} \frac{\tau_{ARLQ1}}{\rho} \boldsymbol{\nabla}_y \boldsymbol{\zeta}^h : \boldsymbol{\nabla}_y \mathbf{r}_{\mathrm{M1}}^h \left(\mathbf{u}_1^h, p_1^h\right) \; \mathrm{d}\Omega_c.
\end{aligned}
\tag{6.32}
$$

Considerando $\dot{\mathbf{U}}_i$, $\mathbf{U}_i$, $\mathbf{p}_i$ e $\boldsymbol{\Lambda}$ os vetores nodais dos graus de liberdade respectivos a aceleração, velocidade, pressão e multiplicadores de Lagrange, pode-se escrever o problema semidiscreto da DFC como: Determinar $\dot{\mathbf{U}}_0$, $\mathbf{U}_0$, $\mathbf{p}_0$,$\dot{\mathbf{U}}_1$, $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{p}_1$ e $\boldsymbol{\Lambda}$ de maneira que:

$$\mathrm{R_{M0}}(\dot{\mathbf{U}}_0, \mathbf{U}_0, \mathbf{p}_0, \boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{0}, \tag{6.33}$$

$$\mathrm{R_{C0}}(\dot{\mathbf{U}}_0, \mathbf{U}_0, \mathbf{p}_0, \boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{0}, \tag{6.34}$$

$$\mathrm{R_{M1}}(\dot{\mathbf{U}}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{p}_1, \boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{0}, \tag{6.35}$$

$$\mathrm{R_{C1}}(\dot{\mathbf{U}}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{p}_1, \boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{0}, \tag{6.36}$$

$$\mathrm{R_{L}}(\dot{\mathbf{U}}_0, \mathbf{U}_0, \mathbf{p}_0, \dot{\mathbf{U}}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{p}_1, \boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{0}. \tag{6.37}$$

6.3.1 Parâmetro de estabilização para técnica RBSAM

No método Arlequin estabilizado, há ainda a necessidade de definição do parâmetro de estabilização τ_{ARLQ}, o qual deve possuir valor suficiente para estabilizar os campos de multiplicadores de Lagrange sem, no entanto, comprometer a convergência do método.

Para a definição de τ_{ARLQ} toma-se como referência os trabalhos de Tezduyar e Osawa (2000) e Tezduyar e Sathe (2003) nos quais se apresenta uma vasta quantidade de informação a cerca das técnicas para obtenção dos parâmetros de estabilização das equações da DFC (τ_{SUPG}, τ_{PSPG}, ν_{LSIC}).

Para um bom condicionamento do sistema, busca-se que os termos estabilizantes adicionados possuam magnitude próxima aos termos da equação de acoplamento. Assim, calcula-se τ_{ARLQi} por meio da relação entre normas de vetores que compõem a formulação por elementos finitos, definindo-se um parâmetro para cada um dos modelos por meio de:

$$\tau_{ARLQi} = \left(\frac{1}{(\tau_{A_i})^2} + \frac{1}{(\tau_{B_i})^2} + \frac{1}{(\tau_{C_i})^2} + \frac{1}{(\tau_{D_i})^2} + \frac{1}{(\tau_{E_i})^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{6.38}$$

com $i = 0, 1$ definindo os modelos global e local, respectivamente e:

$$\tau_{A_i} = \left(\frac{1}{\left(\tau_{A_i^0}\right)^2 + \left(\tau_{A_i^1}\right)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{6.39}$$

$$\tau_{B_i} = \left(\frac{1}{\left(\tau_{B_i^0}\right)^2 + \left(\tau_{B_i^1}\right)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{6.40}$$

$$\tau_{C_i} = \left(\frac{1}{\left(\tau_{C_i^0}\right)^2 + \left(\tau_{C_i^1}\right)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{6.41}$$

$$\tau_{D_i} = \left(\frac{1}{\left(\tau_{D_i^0}\right)^2 + \left(\tau_{D_i^1}\right)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{6.42}$$

$$\tau_{E_i} = \left(\frac{1}{\left(\tau_{E_i^0}\right)^2 + \left(\tau_{E_i^1}\right)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{6.43}$$

sendo as variáveis da Equação (6.39) à Equação (6.43) as seguintes normas vetoriais:

$$\tau_{A_i^0} = \frac{||\mathbf{M}_{\lambda_0}||}{||\mathbf{t}_i||}; \qquad \tau_{A_i^1} = \frac{||\mathbf{M}_{\lambda_1}||}{||\mathbf{t}_i||}; \tag{6.44}$$

$$\tau_{B_i^0} = \frac{||\mathbf{M}_{\lambda_0}||}{||\mathbf{j}_i||}; \qquad \tau_{B_i^1} = \frac{||\mathbf{M}_{\lambda_1}||}{||\mathbf{j}_i||}; \tag{6.45}$$

$$\tau_{C_i^0} = \frac{||\mathbf{M}_{\lambda_0}||}{||\mathbf{k}_i||}; \qquad \tau_{C_i^1} = \frac{||\mathbf{M}_{\lambda_1}||}{||\mathbf{k}_i||}; \tag{6.46}$$

$$\tau_{D_i^0} = \frac{||\mathbf{M}_{\lambda_0}||}{||\mathbf{p}_i||}; \qquad \tau_{D_i^1} = \frac{||\mathbf{M}_{\lambda_1}||}{||\mathbf{p}_i||}; \tag{6.47}$$

$$\tau_{E_i^0} = \frac{||\mathbf{M}_{\lambda_0}||}{||\mathbf{\Gamma}_i||}; \qquad \tau_{E_i^1} = \frac{||\mathbf{M}_{\lambda_1}||}{||\mathbf{\Gamma}_i||}; \tag{6.48}$$

Por fim, os vetores em questão, são definidos através das seguintes relações:

$$\mathbf{M}_{\lambda_0} = \int_{\Omega_c} N_k \cdot \mathbf{u}_0^h \mathrm{d}\Omega_c, \tag{6.49}$$

$$\mathbf{M}_{\lambda_1} = -\int_{\Omega_c} N_k \cdot \mathbf{u}_1^h \mathrm{d}\Omega_c, \tag{6.50}$$

$$\mathbf{t}_i = \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\nabla}_y N_k : \alpha_i \boldsymbol{\nabla}_y \left(\left(\mathbf{u}_i^h \cdot \boldsymbol{\nabla}_y \right) \mathbf{u}_i^h \right) \mathrm{d}\Omega_c, \tag{6.51}$$

$$\mathbf{j}_i = \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\nabla}_y N_k : \alpha_i \boldsymbol{\nabla}_y \left(\frac{\partial \mathbf{u}_i^h}{\partial t} \right) \mathrm{d}\Omega_c, \tag{6.52}$$

$$\mathbf{k}_i = \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\nabla}_y^2 N_k : \alpha_i 2\mu \boldsymbol{\nabla}_y \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \left(\mathbf{u}_i^h \right) \mathrm{d}\Omega_c, \tag{6.53}$$

$$\mathbf{p}_i = \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\nabla}_y N_k : \alpha_i \boldsymbol{\nabla}_y \left(-\boldsymbol{\nabla}_y p_i^h \right) \mathrm{d}\Omega_c, \tag{6.54}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_i = \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\nabla}_y N_k : \boldsymbol{\nabla}_y \left(\chi(i) \boldsymbol{\lambda}^h \right) \mathrm{d}\Omega_c, \tag{6.55}$$

com k representando o índice dos graus de liberdade do campo de multiplicadores de Lagrange.

6.3.2 Integração temporal e processo de solução

Quanto ao procedimento de integração temporal, utiliza-se o método α-generalizado conforme a metodologia apresentada na seção 2.4, para a solução do sistema de equações não lineares composto pela Equação (6.33) à Equação (6.37), utiliza-se o método de Newton-Raphson. A solução resulta em uma etapa preditiva e outra iterativa corretiva.

Na etapa preditiva, conhecida a solução em um passo de tempo n, prediz-se a solução no passo seguinte $(n+1)$ através das seguintes relações:

$$\dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \dot{\mathbf{U}}_{0(n)}, \tag{6.56}$$

$$\mathbf{U}_{0(n+1)}^0 = \mathbf{U}_{0(n)}, \tag{6.57}$$

$$\mathbf{p}^0_{0(n+1)} = \mathbf{p}_{0(n)}, \tag{6.58}$$

$$\dot{\mathbf{U}}^0_{1(n+1)} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\dot{\mathbf{U}}_{1(n)}, \tag{6.59}$$

$$\mathbf{U}^0_{1(n+1)} = \mathbf{U}_{1(n)}, \tag{6.60}$$

$$\mathbf{p}^0_{1(n+1)} = \mathbf{p}_{1(n)}, \tag{6.61}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}^0_{(n+1)} = \boldsymbol{\Lambda}_{(n)}, \tag{6.62}$$

onde o superíndice 0 representa a iteração de número zero, enquanto que os subíndices 0 e 1 representam as variáveis do modelo global e local, respectivamente.

A etapa iterativa corretiva é constituída por três fases. A fase 1 consiste em determinar os valores no instante intermediário para as variáveis nodais na iteração i por meio de:

$$\dot{\mathbf{U}}^i_{0(n+\alpha_m)} = \dot{\mathbf{U}}_{0(n)} + \alpha_m \left(\dot{\mathbf{U}}^i_{0(n+1)} - \dot{\mathbf{U}}_{0(n)}\right), \tag{6.63}$$

$$\mathbf{U}^i_{0(n+\alpha_f)} = \mathbf{U}_{0(n)} + \alpha_f \left(\mathbf{U}^i_{0(n+1)} - \mathbf{U}_{0(n)}\right), \tag{6.64}$$

$$\mathbf{p}^i_{0(n+1)} = \mathbf{p}^i_{0(n+1)}, \tag{6.65}$$

$$\dot{\mathbf{U}}^i_{1(n+\alpha_m)} = \dot{\mathbf{U}}_{1(n)} + \alpha_m \left(\dot{\mathbf{U}}^i_{1(n+1)} - \dot{\mathbf{U}}_{1(n)}\right), \tag{6.66}$$

$$\mathbf{U}^i_{1(n+\alpha_f)} = \mathbf{U}_{1(n)} + \alpha_f \left(\mathbf{U}^i_{1(n+1)} - \mathbf{U}_{1(n)}\right), \tag{6.67}$$

$$\mathbf{p}^i_{1(n+1)} = \mathbf{p}^i_{1(n+1)}, \tag{6.68}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}^i_{(n+1)} = \boldsymbol{\Lambda}^i_{(n+1)}. \tag{6.69}$$

Na fase 2, com os valores intermediários das variáveis nodais resolve-se o sistema resultante da linearização da Equação (6.33) à Equação (6.37) com respeito às variáveis de interesse $\dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}$, $\mathbf{p}_{0(n+1)}$, $\dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}$, $\mathbf{p}_{1(n+1)}$ e $\boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}$, calculando-se uma correção para essas variáveis:

$$
\begin{bmatrix}
\frac{\partial \mathrm{R_{M0}}}{\partial \dot{\mathbf{U}}^i_{0(n+1)}} & \frac{\partial \mathrm{R_{M0}}}{\partial \mathbf{p}^i_{0(n+1)}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial \mathrm{R_{M0}}}{\partial \mathbf{\Lambda}^i_{(n+1)}} \\
\frac{\partial \mathrm{R_{C0}}}{\partial \dot{\mathbf{U}}^i_{0(n+1)}} & \frac{\partial \mathrm{R_{C0}}}{\partial \mathbf{p}^i_{0(n+1)}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial \mathrm{R_{C0}}}{\partial \mathbf{\Lambda}^i_{(n+1)}} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial \mathrm{R_{M1}}}{\partial \dot{\mathbf{U}}^i_{1(n+1)}} & \frac{\partial \mathrm{R_{M1}}}{\partial \mathbf{p}^i_{1(n+1)}} & \frac{\partial \mathrm{R_{M1}}}{\partial \mathbf{\Lambda}^i_{(n+1)}} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial \mathrm{R_{C1}}}{\partial \dot{\mathbf{U}}^i_{1(n+1)}} & \frac{\partial \mathrm{R_{C1}}}{\partial \mathbf{p}^i_{1(n+1)}} & \frac{\partial \mathrm{R_{C1}}}{\partial \mathbf{\Lambda}^i_{(n+1)}} \\
\frac{\partial \mathrm{R_{L}}}{\partial \dot{\mathbf{U}}^i_{0(n+1)}} & \frac{\partial \mathrm{R_{L}}}{\partial \mathbf{p}^i_{0(n+1)}} & \frac{\partial \mathrm{R_{L}}}{\partial \dot{\mathbf{U}}^i_{1(n+1)}} & \frac{\partial \mathrm{R_{L}}}{\partial \mathbf{p}^i_{1(n+1)}} & \frac{\partial \mathrm{R_{L}}}{\partial \mathbf{\Lambda}^i_{(n+1)}}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Delta \dot{\mathbf{U}}^i_{0(n+1)} \\
\Delta \mathbf{p}^i_{0(n+1)} \\
\Delta \dot{\mathbf{U}}^i_{1(n+1)} \\
\Delta \mathbf{p}^i_{1(n+1)} \\
\mathbf{\Lambda}^i_{(n+1)}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-\mathrm{R_{M0}} \\
-\mathrm{R_{C0}} \\
-\mathrm{R_{M1}} \\
-\mathrm{R_{C1}} \\
-\mathrm{R_{L}}
\end{bmatrix}
\tag{6.70}
$$

Atualiza-se então, na fase 3, as variáveis incóginitas por meio de:

$$\dot{\mathbf{U}}^{i+1}_{0(n+1)} = \dot{\mathbf{U}}^{i}_{0(n+1)} + \Delta\dot{\mathbf{U}}^{i}_{0(n+1)}, \tag{6.71}$$

$$\mathbf{U}^{i+1}_{0(n+1)} = \mathbf{U}^{i}_{0(n+1)} + \gamma\Delta t\Delta\mathbf{U}^{i}_{0(n+1)}, \tag{6.72}$$

$$\mathbf{p}^{i+1}_{0(n+1)} = \mathbf{p}^{i}_{0(n+1)} + \Delta\mathbf{p}^{i}_{0(n+1)}, \tag{6.73}$$

$$\dot{\mathbf{U}}^{i+1}_{1(n+1)} = \dot{\mathbf{U}}^{i}_{1(n+1)} + \Delta\dot{\mathbf{U}}^{i}_{1(n+1)}, \tag{6.74}$$

$$\mathbf{U}^{i+1}_{1(n+1)} = \mathbf{U}^{i}_{1(n+1)} + \gamma\Delta t\Delta\mathbf{U}^{i}_{1(n+1)}, \tag{6.75}$$

$$\mathbf{p}^{i+1}_{1(n+1)} = \mathbf{p}^{i}_{0(n+1)} + \Delta\mathbf{p}^{i}_{1(n+1)}, \tag{6.76}$$

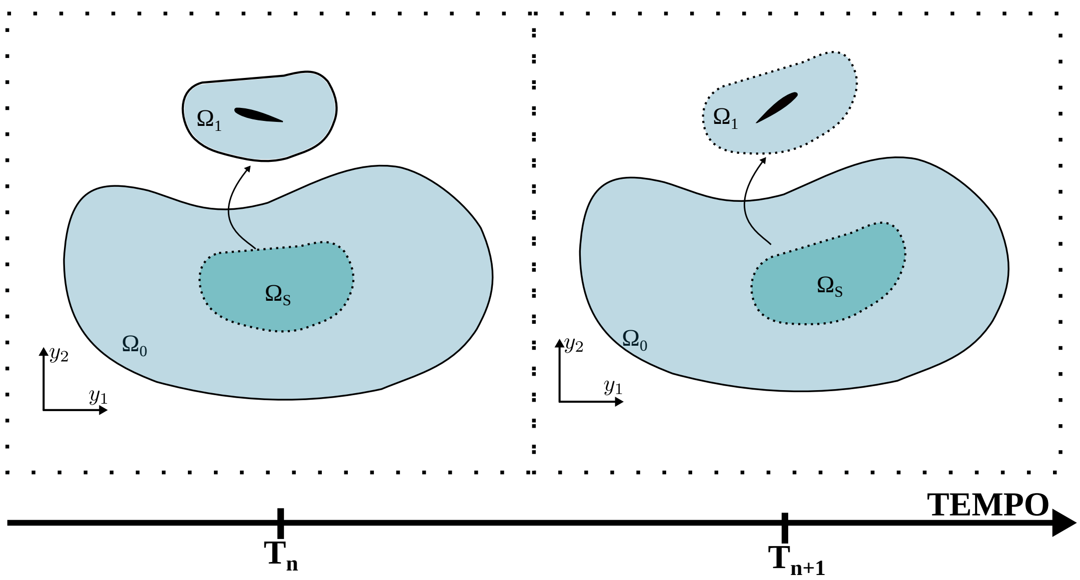
$$\mathbf{\Lambda}^{i+1}_{1(n+1)} = \mathbf{\Lambda}^{i}_{0(n+1)} + \Delta\mathbf{\Lambda}^{i}_{1(n+1)}. \tag{6.77}$$

Na utilização do método α-generalizado as integrais das equações são avaliadas no instante $t = t_{n+\alpha_f}$. As relações entre velocidade, aceleração, e os parâmetros utilizados pelo método podem ser consultados na seção 2.4.

6.4 Superposição de modelos móveis

As equações, Equação (6.24) à Equação (6.28), resolvem problemas de escoamentos incompressíveis em uma discretização Euleriana. Entretanto, tem-se como objetivo a movimentação do domínio local do fluido (ver Figura 59) para acomodar a movimentação da estrutura nos problemas de IFE, ou para representar o deslocamento de um objeto imerso no escoamento. Nota-se que o modelo global mantém sua geometria inalterada na mudança de passo de tempo, enquanto que o modelo local é movimentado para representar uma nova localização de um objeto imerso. Vale ressaltar que o contorno do domínio do modelo local (Γ_1) é conhecido em t_n e em t_{n+1}, e que a zona de superposição Ω_s é definida em diferentes posições em cada instante. Assim, faz-se uso de uma descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária (ALE) no modelo local (Ω_1) enquanto que o domínio global (Ω_0) mantém-se fixo e com descrição Euleriana.

Figura 59 – Domínio Arlequin móvel



Fonte: Elaborada pela autora

Para análise de domínios móveis do tipo Euleriano-ALE, a Equação (6.26) é reescrita, levando-se em consideração as definições apresentadas na seção 2.2, resultando em:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \left.\frac{\partial \mathbf{u}_1^h}{\partial t}\right|_{\bar{\mathbf{x}}} \mathrm{d}\Omega_1 + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \left(\left(\mathbf{u}_1^h - \bar{\mathbf{u}}_1^h \right) \cdot \boldsymbol{\nabla}_y \mathbf{u}_1^h \right) \mathrm{d}\Omega_1 \\
&\quad + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \boldsymbol{\varepsilon} \left(\mathbf{w}_1^h \right) : \boldsymbol{\sigma} \left(\mathbf{u}_1^h, p_1^h \right) \ \mathrm{d}\Omega_1 \\
&\quad + \sum_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\Omega^e} \tau_{\mathrm{SUPG}} \left(\left(\mathbf{u}_1^h - \bar{\mathbf{u}}_1^h \right) \cdot \boldsymbol{\nabla}_y \mathbf{w}_1^h \right) \cdot \mathbf{r}_{\mathrm{M1}}^h \left(\mathbf{u}_1^h, p_1^h \right) \ \mathrm{d}\Omega_1 \\
&\quad + \sum_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\Omega^e} \nu_{\mathrm{LSIC}} \boldsymbol{\nabla}_y \cdot \mathbf{w}_1^h r_{\mathrm{C1}}^h \left(\mathbf{u}_1^h \right) \ \mathrm{d}\Omega_1 \\
&\quad + \chi_1 \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_1^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h \mathrm{d}\Omega_c = \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{f}_1^h \mathrm{d}\Omega_1 + \int_{\Gamma_{N1}} \alpha_1 \mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{h}_1^h \ \mathrm{d}\Gamma_{N1},
\end{aligned} \tag{6.78}$$

enquanto o resíduo apresentado na Equação (6.20) passa a ser escrito para i = 1, como:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{M1}}^h \left(\mathbf{u}_1^h, p_1^h, \boldsymbol{\lambda}^h \right) = \alpha_1 \rho \left(\left.\frac{\partial \mathbf{u}_1^h}{\partial t}\right|_{\bar{\mathbf{x}}} + \left(\mathbf{u}_1^h - \bar{\mathbf{u}}_1^h \right) \cdot \boldsymbol{\nabla}_y \mathbf{u}_1^h - \mathbf{f}_1^h \right) - \alpha_1 \boldsymbol{\nabla}_y \cdot \boldsymbol{\sigma} \left(\mathbf{u}_1^h, p_1^h, \right) + \chi_1 \boldsymbol{\lambda}^h. \tag{6.79}$$

Além da consideração da descrição ALE para o modelo local, deve-se ressaltar que a função ponderadora α_i passa a ser uma variável temporal, ou seja, $\alpha_i(t)$, visto que a zona de superposição Ω_s é definida em diferentes posições em cada instante de tempo.

Dessa forma, a integração temporal utilizando-se o método α-generalizado deve considerar essa variação através da seguinte interpolação para o instante intermediário:

$$\alpha_{i(n+\alpha_f)} = \alpha_{i(n)} + \alpha_f(\alpha_{i(n+1)} - \alpha_{i(n)}). \tag{6.80}$$

A solução de modelos com fronteiras móveis requer uma técnica adequada para o movimento da malha local. Neste trabalho, emprega-se o método descrito em Tonon *et al.* (2021), baseado na estratégia Mesh-Jacobian Based Stiffening (MJBS), originalmente proposta por Tezduyar *et al.* (1992c). Detalhes adicionais sobre a formulação e implementação são apresentados na subseção 7.3.2.

O campo dos multiplicadores de Lagrange, neste estudo, é definido do espaço de funções da malha local. Tal escolha ocorre pelo fato de que, mesmo em problemas em que se tenham grandes deslocamentos, a quantidade de elementos locais da zona de superposição permanece inalterada, fazendo com que o sistema algébrico mantenha-se com dimensão constante ao longo do tempo, diminuindo assim, o custo computacional.

6.5 Implementação computacional

A implementação desse método envolve a realização de algumas etapas adicionais no início de cada iteração, sendo essas: 1. Determinação de distâncias assinaladas; 2. Determinação da zona de colagem; 3. Determinação da função ponderadora; 4. Encontro de correspondência dos pontos de quadratura do modelo local no modelo global.

A etapa 1 consiste em calcular a distância assinada $Y_1(\mathbf{y})$ de cada ponto — sejam nós da malha de elementos finitos ou pontos de controle da malha isogeométrica — em relação ao contorno Γ_1 de cada modelo. Na etapa 2, com base nessa distância, identificam-se os elementos locais que compõem a zona de colagem, de acordo com a espessura δ_s previamente definida pelo usuário. Somente são considerados pertencentes a essa região os elementos cujos nós se encontram integralmente dentro da zona de colagem. A função ponderadora para os modelos (etapa 3) é determinada de acordo com as relações expressas na Equação (6.6), Equação (6.7) e Equação (6.8).

Uma das maiores dificuldades da técnica Arlequin diz respeito à integração numérica do operador de acoplamento por demandar integral de funções definidas em modelos distintos. Neste estudo, a integração numérica é definida sobre a malha local, desta forma, durante o pré-processamento de cada iteração para solução do sistema, realiza-se um processo de busca de correspondência (etapa 4) na malha global para cada ponto de integração da malha local, determinando-se o vetor de coordenadas locais e o elemento da malha global correspondente a cada ponto de integração da malha local na zona de colagem.

É importante notar que, antes das etapas 1 a 4, é necessário que a malha local tenha sido atualizada, o que é feito ao final de cada iteração.

O Algoritmo que descreve a implementação computacional é apresentado no Algoritmo 4. A implementação computacional e resolução do sistema de equações resultantes ocorreu de forma análoga ao monomodelo descrito na seção 2.5. O índice i apresentado diz respeito à iteração de Newton-Raphson.

Algoritmo 4 Algoritmo para problemas móveis da DFC utilizando técnica ARLEQUIN RBSAM

para o passo de tempo 0 até $npt - 1$ **faça**
    $i \leftarrow 0$;
    Predição da solução: aplicação da Equação (6.56), Equação (6.57), Equação (6.58), Equação (6.59), Equação (6.60), Equação (6.61) e Equação (6.62);
    enquanto ($\epsilon <$ tolerância) **faça**
        $i \leftarrow i + 1$;
        Cálculo da distância assinalada dos nós e pontos de controle ao contorno Γ_1;
        Determinação da zona de colagem Ω_c;
        Definição da função de ponderadora de acordo com Equação (6.6),Equação (6.7) e Equação (6.8);
        Busca pela correspondência entre os pontos de integração da malha local na malha global;
        Interpolação das variáveis do problema: aplicação da Equação (6.63), Equação (6.64), Equação (6.65), Equação (6.66), Equação (6.67), Equação (6.68) e Equação (6.69);
        Cálculo da correção das variáveis do problema: Resolução do sistema apresentado na Equação (6.70);
        Atualização da solução: cálculo de acordo com Equação (6.71), Equação (6.72), Equação (6.73), Equação (6.74), Equação (6.75), Equação (6.76) e Equação (6.77);;
        Cálculo do erro:

$$\epsilon = \left\| \mathrm{R}^{i}_{\mathrm{M0}} + \mathrm{R}^{i}_{\mathrm{M1}} \right\|_{L^2}; \tag{6.81}$$

        Movimentação da malha;
    fim enquanto
    Atualização das variáveis do passo anterior;
fim para

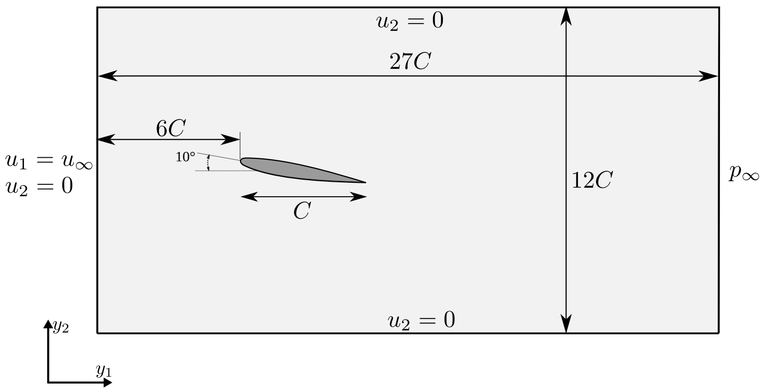
6.6 Verificação e aplicações

Para a verificação da implementação do método Arlequin estabilizado, dois exemplos amplamente explorados nas bibliografias são simulados. O primeiro exemplo, trata-se de escoamento sobre um aerofólio NACA 0012 fixo, enquanto o segundo, com intuito de verificar o método aplicado a problemas com contornos móveis, trata do mesmo aerofólio NACA 0012, porém com um movimento de arfagem prescrito.

6.6.1 Escoamento sobre aerofólio NACA 0012 fixo

Considera-se um aerofólio NACA 0012 com corda de comprimento adimensional unitário e ângulo de ataque de 10°, submetido a um escoamento incompressível viscoso com Reynolds (Re) 1000 calculado a partir da dimensão do aerofólio e da velocidade de entrada do escoamento. Foram utilizados ainda como parâmetros de análise: $u_\infty = 1{,}0$, $\rho = 1{,}0$, $\Delta t = 0{,}02$, e $\rho_\infty = 0{,}75$. O domínio do problema é apresentado na Figura 60, onde são indicas as dimensões em termos do comprimento da corda do aerofólio. Na face esquerda o fluido entra com velocidade u_∞ na direção y_1. Os contornos superior e inferior possuem condição de contorno de parede lisa, enquanto a face da direita considera-se força de superfície nula ($p_\infty = 0$).

Figura 60 – Aerofólio: Geometria



Fonte: Elaborada pela autora

Para fins de comparação, simula-se inicialmente o problema com uma malha única de elementos finitos, denominada aqui monomodelo. O monomodelo é discretizado com 9240 elementos triangulares quadráticos e 18792 nós (Figura 61).

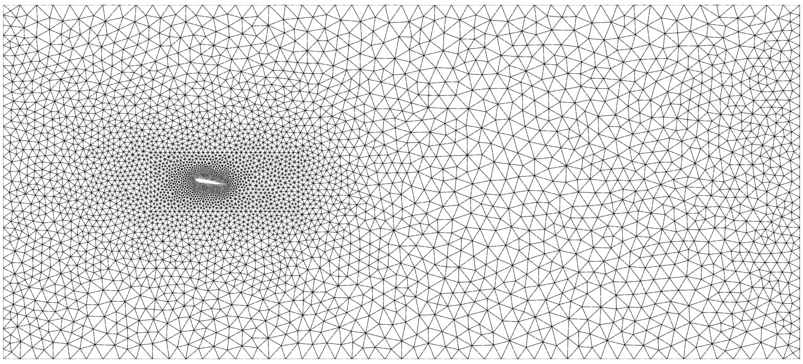
Para o método Arlequin, utiliza-se uma discretização global isogeométrica (AIG) e uma malha local, mais refinada, em elementos finitos (MEF), como apresentado na Figura 62a com detalhe da discretização local na Figura 62b. A malha global isogeométrica é constituida por 9 *patches*, totalizando 15561 pontos de controle e 14025 células. A malha local por sua vez é composta por 5214 elementos triangulares quadráticos e 10670 nós.

Na Figura 62b pode-se observar em vermelho os elementos que fazem parte da zona de colagem. A espessura da zona de colagem foi definida como 0,2, compreendendo 628 elementos triangulares quadráticos e 1428 nós.

Nesse problema, observa-se o surgimento de uma esteira de vórtices a jusante do aerofólio, que resulta em um número de Strouhal (St) equivalente a 0,877. Esse valor encontra-se em concordância com o obtido por Mittal e Tezduyar (1994) de 0,862.

Na Figura 63 e Figura 64 apresentam-se os resultados de coeficiente de arrasto e

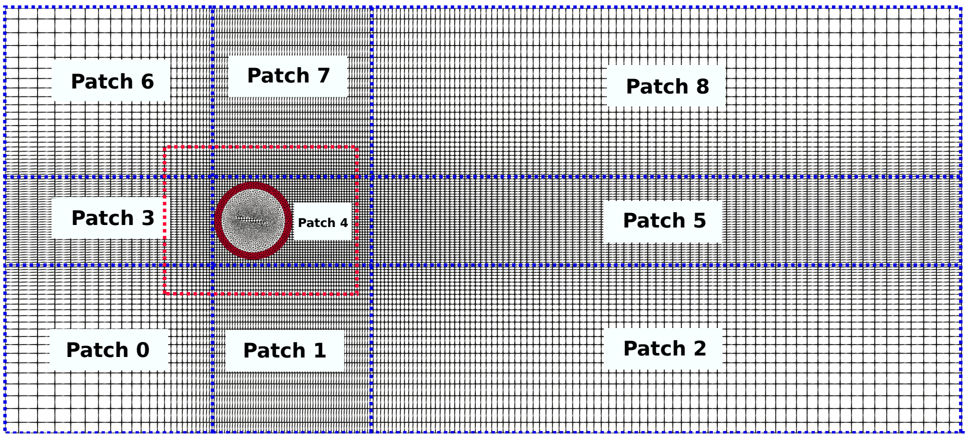
Figura 61 – Aerofólio: Malha Monomodelo (MEF)



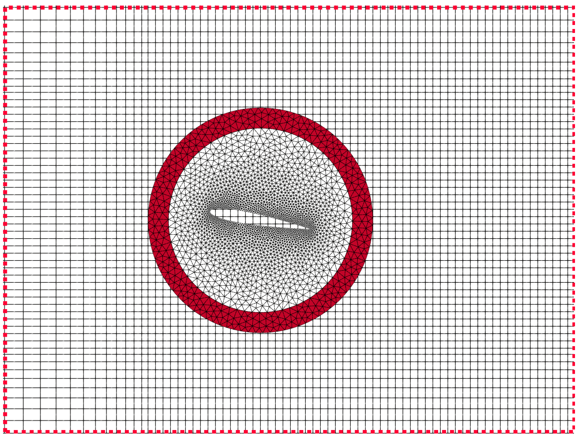
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 62 – Aerofólio: Discretização das malhas global e local

(a) Discretização da malha global (AIG) e local (MEF)



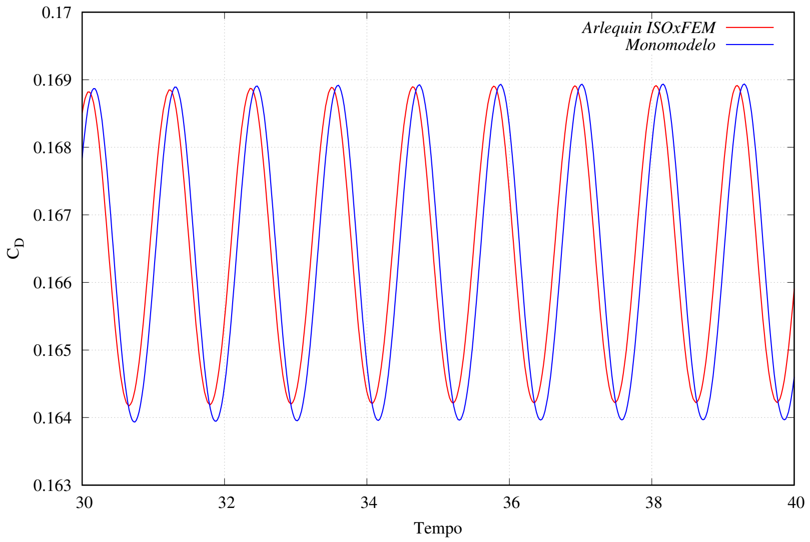
(b) Discretização da malha local



Fonte: Elaborada pela autora

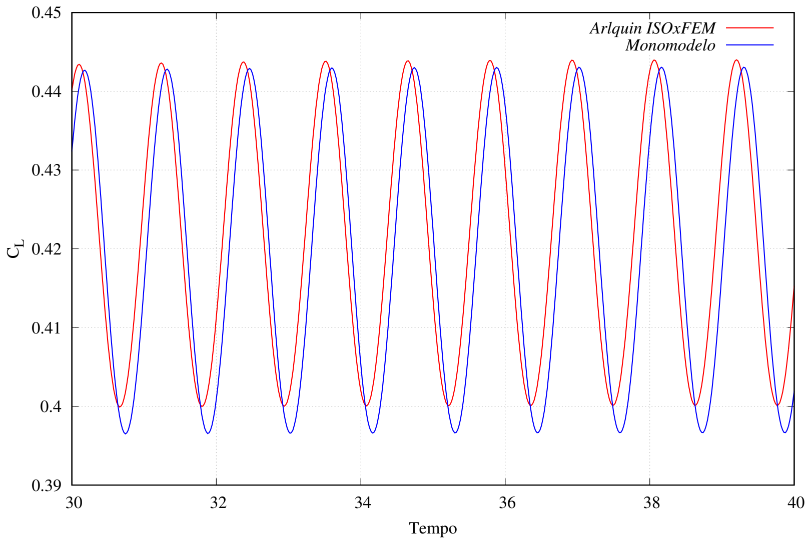
sustentação obtidos para as análises realizadas. Pode-se observar que os resultados obtidos com o modelo baseado no método Arlequin estabilizado estão de acordo com os obtidos para o modelo usando monomodelo.

Figura 63 – Aerofólio: Coeficiente de Arrasto



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 64 – Aerofólio: Coeficiente de Arrasto



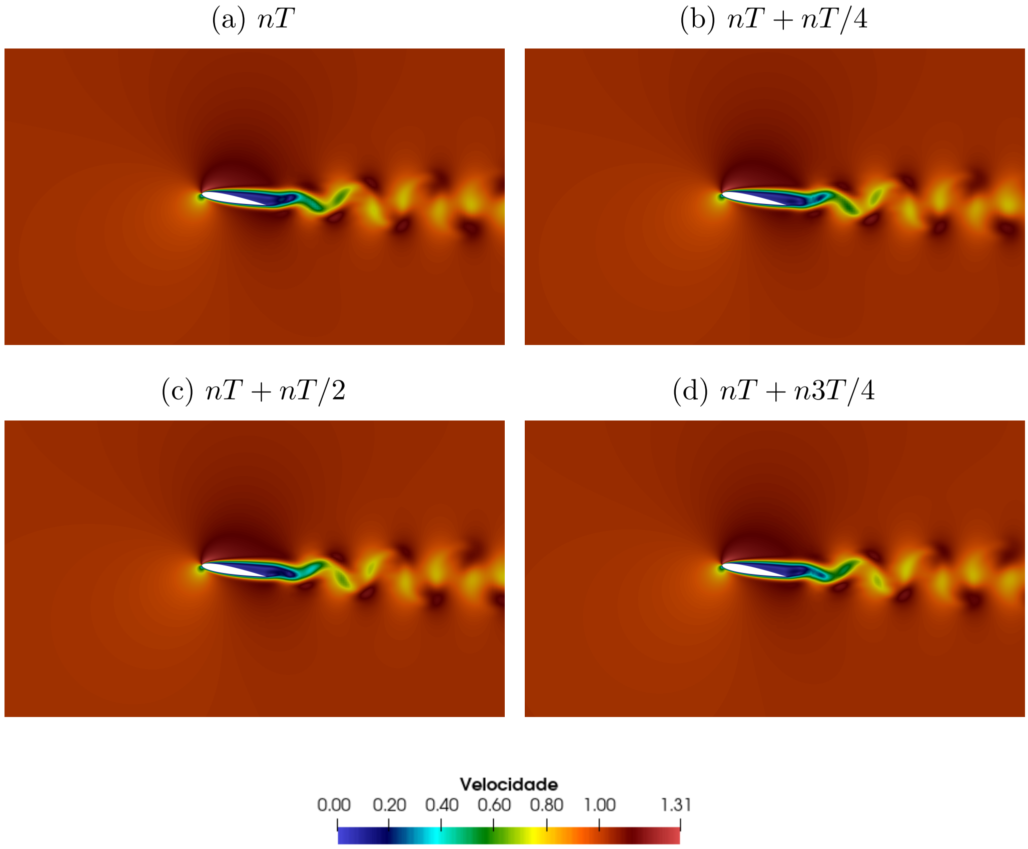
Fonte: Elaborada pela autora

Na Figura 65 e Figura 66 estão apresentados os campos de velocidade e pressão respectivamente para o período de um ciclo.

6.6.2 Aerofólio com movimento de arfagem prescrito

Para a verificação computacional da técnica Arlequin estabilizada aplicada a problemas com contornos móveis considera-se o mesmo aerofólio da subseção 6.6.1, porém

Figura 65 – Aerofólio: Campo de velocidade



Fonte: Elaborada pela autora

agora com um movimento de arfagem oscilatório. O aerofólio apresenta variação do ângulo de ataque em 20°, iniciando o movimento em 10° e finalizando-o em 30°.

Para descrever-se tal movimento aplica-se o movimento de rotação de corpo rígido sobre o ponto médio da corda, de acordo com a relação:

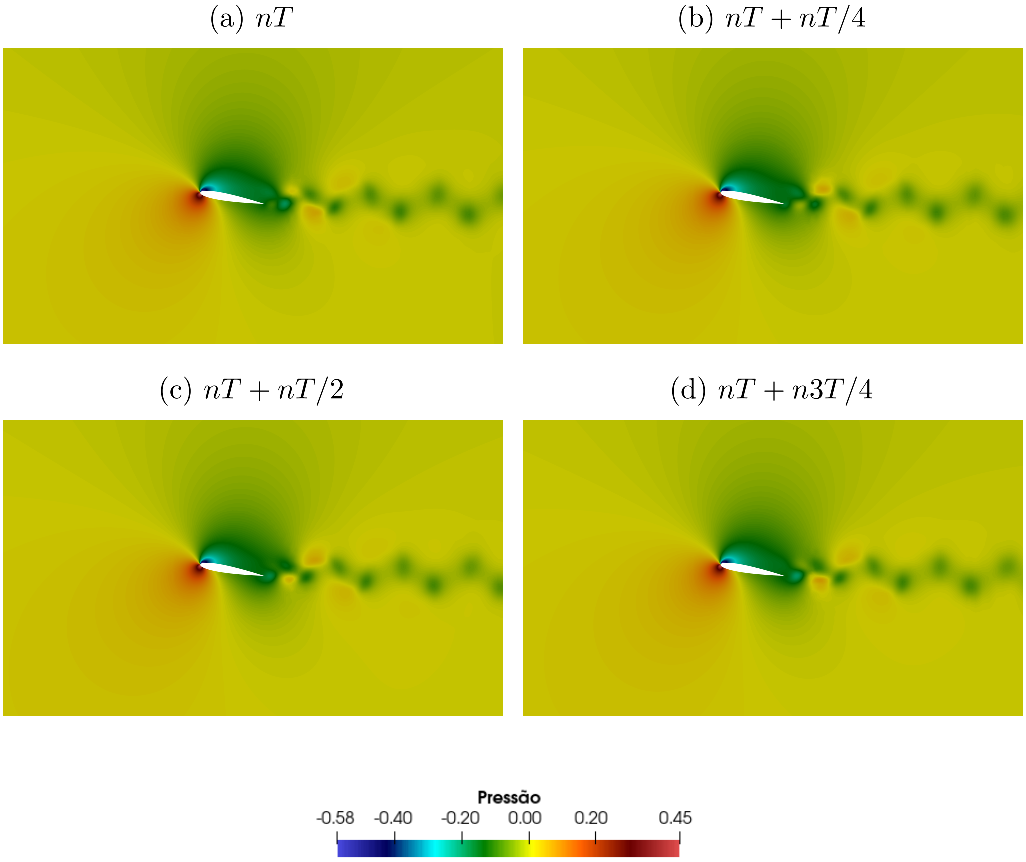
$$\theta = \frac{\theta_{max} + \theta_{min}}{2} - \frac{\theta_{max} - \theta_{min}}{2} \cos \omega_f t, \tag{6.82}$$

com $\omega_f = 2\pi f_o$, sendo f_o a frequência de oscilação, adotada nesse estudo como 1,0, $\theta_{max} = 30°$ e $\theta_{min} = 10°$.

As dimensões da geometria do domínio computacional são alteradas (ver Figura 67) para capturar os efeitos dos desprendimentos de vórtices, que para esse problema, ocorrem em uma faixa mais ampla. Os demais parâmetros de análise foram mantidos iguais aos apresentados no exemplo da subseção 6.6.1.

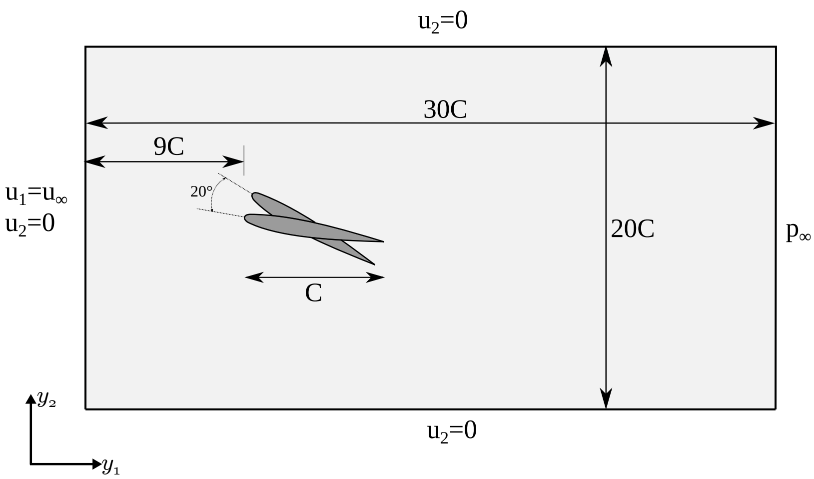
Novamente são analisadas 2 discretizações: 1. Monomodelo; 2. Combinação de duas malhas através do método Arlequin estabilizado. O monomodelo emprega uma malha com 12438 elementos triangulares quadráticos e 25188 nós. As discretizações global e local para

Figura 66 – Aerofólio: Campo de pressão



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 67 – Aerofólio Mov.: Geometria



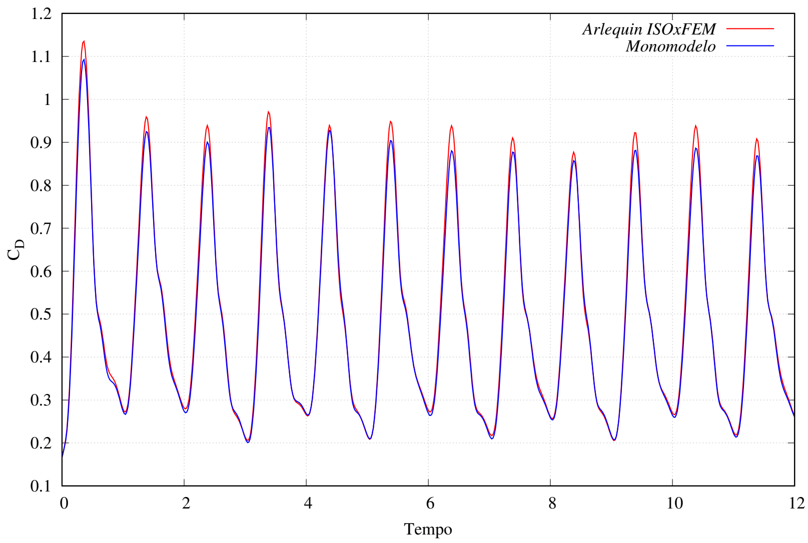
Fonte: Elaborada pela autora

o método Arlequin são as mesmas do problema da subseção 6.6.1, incluindo a quantidade de elementos na zona de colagem.

É importante ressaltar que, para iniciar a simulação desse exemplo, utilizou-se como campo inicial de velocidade e pressão, valores obtidos em uma solução de longo termo do aerofólio na condição de repouso.

A variação dos coeficientes de arrasto e sustentação ao longo do tempo são apresentados nas Figura 68 e Figura 69. Nota-se nas imagens que o monomodelo e o modelo Arlequin estão consistentes em suas respostas. Soluções semelhantes podem ser observados no trabalho de Fernandes (2020).

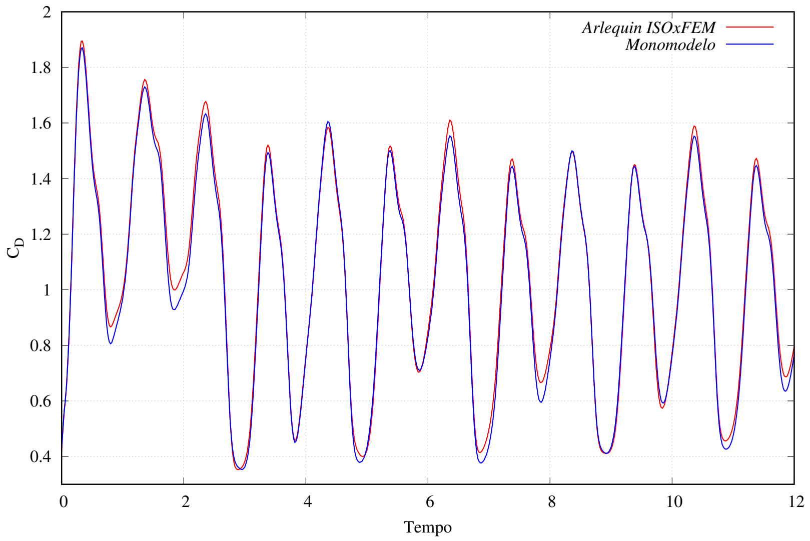
Figura 68 – Aerofólio Mov.: Coeficiente de Arrasto



Fonte: Elaborada pela autora

Na Figura 70 e Figura 71 são apresentados os campos de velocidade e pressão em diferentes instantes dentro de um ciclo do movimento oscilatório prescrito.

Figura 69 – Aerofólio Mov.: Coeficiente de Sustentação

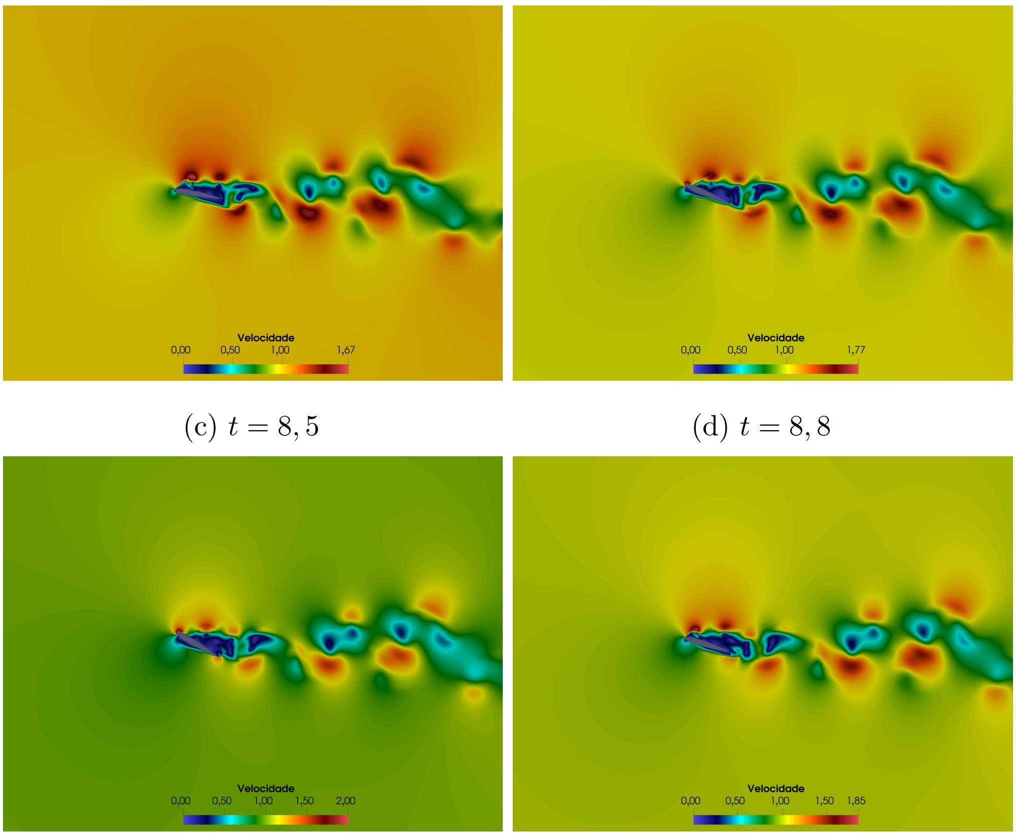


Fonte: Elaborada pela autora

Figura 70 – Aerofólio Mov.: Campos de velocidade

(a) $t = 8,0$ (b) $t = 8,3$

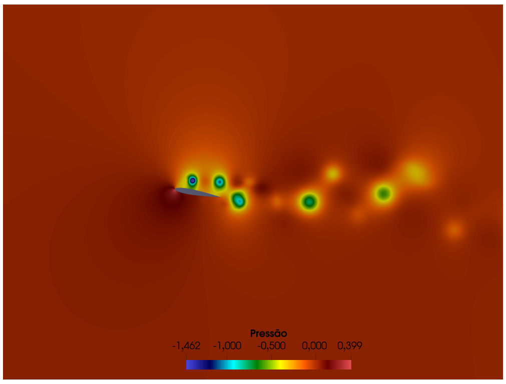
(c) $t = 8,5$ (d) $t = 8,8$



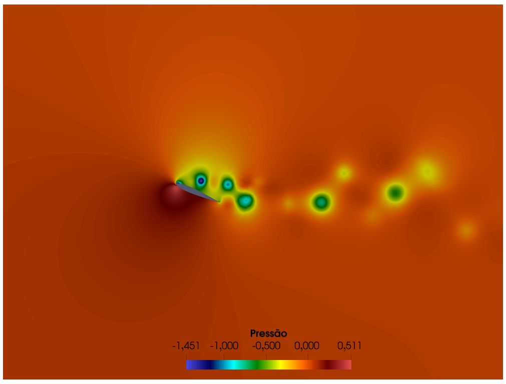
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 71 – Aerofólio Mov.: Campos de pressão

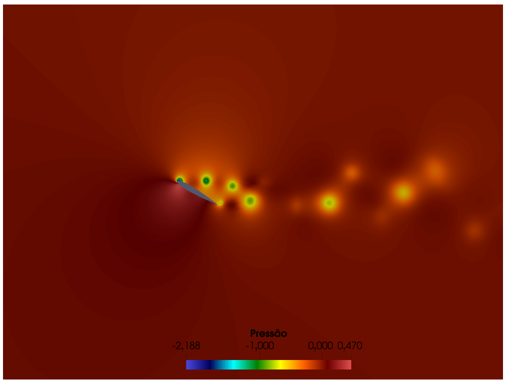
(a) $t = 8,0$



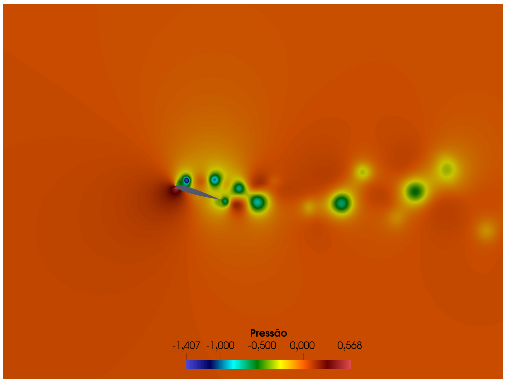
(b) $t = 8,3$



(c) $t = 8,5$



(d) $t = 8,8$



Fonte: Elaborada pela autora

7 INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

Ao longo deste trabalho, conforme apresentado nos capítulos anteriores, foi desenvolvido um código computacional para análise de fluidos incompressíveis que permite a decomposição do domínio para capturar efeitos localizados por meio da técnica Arlequin estabilizada. Além disso, para esta pesquisa, foi disponibilizado pelo grupo de pesquisa um código computacional para a análise não linear de estruturas de cascas pelo método dos elementos finitos posicional. Com base nesses desenvolvimentos, optou-se por um esquema de acoplamento particionado forte entre fluido e estrutura. Neste capítulo é apresen tada a técnica de acoplamento particionado adotada. Essa abordagem foi escolhida por proporcionar uma total modularidade entre os códigos para o fluido e para a estrutura, o que facilita a solução dos problemas que aqui serão propostos.

Nesse contexto, para o acoplamento, utiliza-se a técnica de malhas móveis para o modelo local do fluido, em contato com a estrutura, o qual baseia-se na descrição ALE, enquanto a malha global permanece fixa, com descrição Euleriana, fazendo com que o método possa ser classificado como uma técnica híbrida.

No texto a seguir descrevem-se as condições de acoplamento e técnica para a solução particionada do problema de IFE, a técnica de movimentação de malha utilizada nesse estudo, e a metodologia de transferência de condições de contorno (Dirichlet-Neumann) com malhas não coincidentes na interface fluido-estrutura. Por fim, o algoritmo de implementação computacional é apresentado e exemplos de verificação e de aplicação são propostos e simulados.

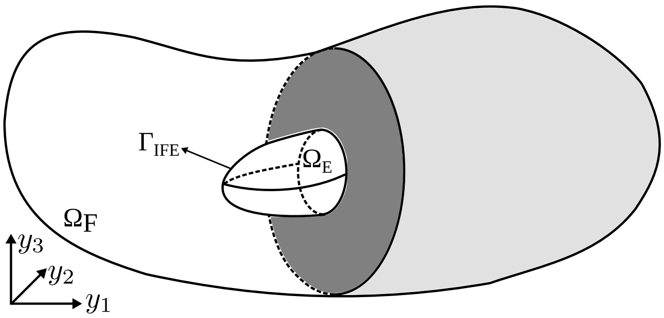
7.1 Condições de acoplamento

O domínio computacional para a análise de problemas de interação fluido-estrutura (Figura 72), denominado de Ω_{IFE}, é composto pela união entre os domínios da estrutura Ω_E e do fluido Ω_F, ou seja, $\Omega_{IFE} = \Omega_F \cup \Omega_E$, com Γ_{IFE} representando o contorno que define a interface fluido-estrutura.

O domínio computacional não se sobrepõe, por isso, é necessário que em Γ_{IFE} existam condições físicas adicionais para se realizar o acoplamento. Richter (2017) cita que o acoplamento é garantido ao se atender as seguintes condições no contorno Γ_{IFE} : condição cinemática, condição dinâmica e condição geométrica.

A condição cinemática refere-se ao fato de que a velocidade do fluido e do sólido na interface devem ser iguais. A condição dinâmica, refere-se à existência de continuidade do vetor tensão de Cauchy na direção normal ao contorno Γ_{IFE}, enquanto que a condição geométrica refere-se à conformidade entre estrutura e fluido na interface.

Figura 72 – Domínio computacional para análise de problemas de IFE



Fonte: Elaborada pela autora

Nos esquemas de acoplamento monolítico, as condições cinemática e dinâmica são atendidas de maneira implícita, visto que os meios são tratados no mesmo contexto matemático. Para esquemas particionadas, como o deste estudo, essas condições são atendidas através da transferência de condições de contorno apropriadas de um meio para outro durante o processo iterativo de solução, ou a cada passo de tempo.

Para a condição cinemática tem-se:

$$\mathbf{u} = \dot{\mathbf{y}} \text{ no contorno } \Gamma_{IFE}, \tag{7.1}$$

atendida através da aplicação dos valores de $\dot{\mathbf{y}}$ nos nós (ou pontos de controle) que compõe a malha do fluido na interface fluido-estrutura. A condição dinâmica, prescreve a continuidade da tensão (da componente normal à interface para o caso de condição de parede lisa, ou de todas as componentes para o caso de condição de aderência). Neste trabalho considera-se apenas a condição de aderência, de modo que a condição dinâmica é dada por:

$$\boldsymbol{\sigma}_E \mathbf{n}_E + \boldsymbol{\sigma}_F \mathbf{n}_F = \mathbf{0} \text{ no contorno } \Gamma_{IFE}, \tag{7.2}$$

na qual, $\boldsymbol{\sigma}_E$ representa as tensões de Cauchy da estrutura, $\boldsymbol{\sigma}_F$ as tensões de Cauchy no fluido, e $\mathbf{n}_E$ e $\mathbf{n}_F$ representam os vetores normais no contorno Γ_{IFE} apontando para o fluido e para a estrutura, respectivamente. Essa condição é imposta ao longo do processo bloco-iterativo de solução através da aplicação da força de superfície $\boldsymbol{\sigma}_F \mathbf{n}_E$ no contorno da estrutura em contato com o fluido.

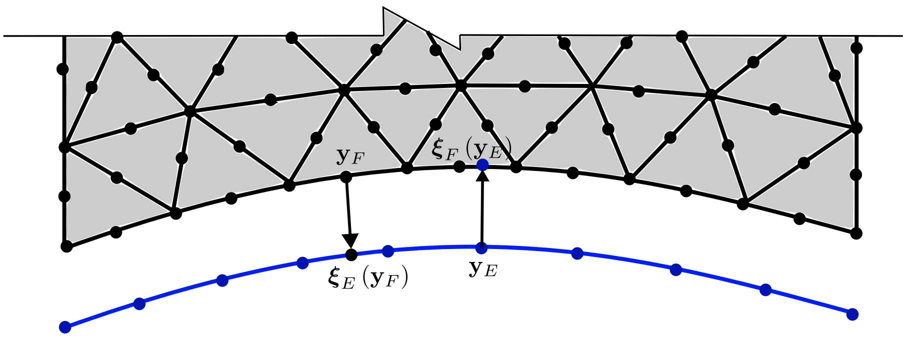
Já a condição geométrica está relacionada ao fato que os domínios computacionais Ω_E da estrutura e Ω_F do fluido devem sempre coincidir em Γ_{IFE}, ou seja, não devem existir superposições ou frestas nessa interface. No contexto desse estudo essa condição é atendida através de uma movimentação adequada da malha local (Método Arlequin), que se deforma para acomodar a mudança de configuração da estrutura. A técnica de movimentação de malha adotada é apresentada na subseção 7.3.2.

7.2 Acoplamento com malhas não coincidentes

Em diversas situações é interessante que as malhas do fluido e da estrutura possam ser diferentes no contorno Γ_{IFE}, inclusive podendo ter aproximações distintas. Assim, é importante uma metodologia que possibilita o acoplamento de discretizações com nós não coincidentes na interface fluido-estrutura.

O procedimento adotado neste trabalho pode ser compreendido a partir da Figura 73. Na etapa de pré-processamento, cada nó pertencente ao contorno da estrutura, $\mathbf{y}_E$, é projetado sobre o contorno do fluido, determinando-se a coordenada local mais próxima ao nó dentro da malha do fluido, $\boldsymbol{\xi}_F(\mathbf{y}_E)$, bem como o elemento correspondente a essa coordenada. De forma análoga, cada nó do contorno do fluido, $\mathbf{y}_F$, é projetado sobre o contorno da estrutura, obtendo-se a coordenada paramétrica equivalente, $\boldsymbol{\xi}_E(\mathbf{y}_F)$, e o respectivo elemento em que ele se encontra.

Figura 73 – Discretizações não-coincidentes no contorno IFE



Fonte: Elaborada pela autora

De forma prática, a cada iteração do processo de solução, em cada nó $\mathbf{y}_F$ pertencente ao contorno de interface Γ_{IFE}, as velocidades da estrutura são interpoladas na posição $\boldsymbol{\xi}_E(\mathbf{y}_F)$ e então transferidas para o fluido, de modo que

$$\mathbf{y}_F = \boldsymbol{\xi}_E(\mathbf{y}_F), \tag{7.3}$$

garantindo o atendimento da condição cinemática.

A condição dinâmica é satisfeita ao calcular-se a força nodal equivalente do escoamento para cada nó $\mathbf{y}_E$ através da interpolação em $\boldsymbol{\xi}_F(\mathbf{y}_E)$ na malha do fluido, de acordo com:

$$\mathbf{t}_E(\mathbf{y}_E) = \boldsymbol{\sigma}_F(\boldsymbol{\xi}_F(\mathbf{y}_E))\mathbf{n}_E. \tag{7.4}$$

As forças nodais equivalentes, $\mathbf{t}_E(\mathbf{y}_E)$, são então interpoladas por meio das funções de forma da estrutura, de modo a serem incorporadas na resolução do problema estrutural.

7.3 Acoplamento particionado forte - bloco-iterativo

Como discutido no Capítulo 1 os problemas de IFE são caracterizados pela interdependência entre o fluido e a estrutura, visto que o comportamento do escoamento depende do formato e do movimento da estrutura, enquanto que o movimento e deformação da estrutura dependem das forças do fluido que atuam sobre ela. Matematicamente pode-se descrever os problemas de IFE como conjuntos de equações e condições de contorno associadas ao fluido e a estrutura que devem ser satisfeitas simultaneamente.

As equações completas que definem o problema de IFE, discretizadas com base no modelo numérico adotado, conduzem a um sistema de equações não lineares que devem ser resolvidas a cada passo de tempo representado da seguinte maneira (BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013a):

$$\mathbf{N}_1\left(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\right) = \mathbf{0}, \tag{7.5}$$

$$\mathbf{N}_2\left(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\right) = \mathbf{0}, \tag{7.6}$$

$$\mathbf{N}_3\left(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\right) = \mathbf{0}, \tag{7.7}$$

em que $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ e $\mathbf{N}_3$ representam as equações que descrevem o fluido, a estrutura e a malha, respectivamente; e, $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$, $\mathbf{d}_3$ são vetores com as variáveis nodais incógnitas de cada meio. A resolução dessas equações através do método de Newton-Raphson conduz ao seguinte sistema linear de equações:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_3 \end{bmatrix}. \tag{7.8}$$

sendo $\mathbf{c}_1 = -\mathbf{N}_1$, $\mathbf{c}_2 = -\mathbf{N}_2$, $\mathbf{c}_3 = -\mathbf{N}_3$; $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ e $\mathbf{x}_3$ são os incrementos às soluções $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$ e $\mathbf{d}_3$, respectivamente; e $\mathbf{A}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial \mathbf{d}_j}$.

Bazilevs, Takizawa e Tezduyar (2013a) apresentam uma classificação da metodologia de acoplamento segundo a forma de resolver esse sistema de equações não lineares. As categorias definidas pelos autores são: técnica direta, técnica bloco-iterativa e técnica quase-direta.

A técnica direta é equivalente à solução monolítica, e consiste na resolução a cada iteração de Newton-Raphson do sistema apresentado na Equação (7.8) de forma completa. Embora essa técnica evite problemas de convergência e estabilidade numérica em casos fortemente acoplados, conduz a um custo computacional maior, apresenta complexidade na obtenção das submatrizes que estão fora da diagonal e limita a modularidade do método.

Na técnica quase-direta, a solução da malha é desacoplada da solução dos problemas físicos, de forma que a cada iteração fluido e estrutura são resolvidos de maneira monolítica, enquanto que a malha é atualizada por meio de um sistema separado.

Por fim, a técnica bloco-iterativa consiste em desprezar as submatrizes da matriz tangente que estão fora da diagonal na Equação (7.8), o que resulta em 3 sistemas que podem ser resolvidos de forma independente. Assim, a cada iteração, inicia-se com a solução do sistema referente ao fluido, atualizando-se as variáveis do fluido antes de partir para a solução da estrutura. Então, atualiza-se as variáveis da estrutura e soluciona-se o sistema referente à malha, atualizando-se as posições da malha do fluido e partindo para a próxima iteração. Dessa forma, o problema a ser resolvido a cada iteração i do método de Newton-Raphson consiste na solução sequencial do seguinte conjunto de equações:

$$\left.\frac{\partial \mathbf{N}_1}{\partial \mathbf{d}_1}\right|_{\left(\mathbf{d}_1^i,\mathbf{d}_2^i,\mathbf{d}_3^i\right)} \Delta \mathbf{d}_1^i = -\mathbf{N}_1\left(\mathbf{d}_1^i,\mathbf{d}_2^i,\mathbf{d}_3^i\right) \tag{7.9}$$

$$\mathbf{d}_1^{i+1} = \mathbf{d}_1^i + \Delta \mathbf{d}_1^i \tag{7.10}$$

$$\left.\frac{\partial \mathbf{N}_2}{\partial \mathbf{d}_2}\right|_{\left(\mathbf{d}_1^{i+1},\mathbf{d}_2^i,\mathbf{d}_3^i\right)} \Delta \mathbf{d}_2^i = -\mathbf{N}_2\left(\mathbf{d}_1^{i+1},\mathbf{d}_2^i,\mathbf{d}_3^i\right) \tag{7.11}$$

$$\mathbf{d}_2^{i+1} = \mathbf{d}_2^i + \Delta \mathbf{d}_2^i \tag{7.12}$$

$$\left.\frac{\partial \mathbf{N}_3}{\partial \mathbf{d}_3}\right|_{\left(\mathbf{d}_1^{i+1},\mathbf{d}_2^{i+1},\mathbf{d}_3^i\right)} \Delta \mathbf{d}_3^i = -\mathbf{N}_3\left(\mathbf{d}_1^{i+1},\mathbf{d}_2^{i+1},\mathbf{d}_3^i\right) \tag{7.13}$$

$$\mathbf{d}_3^{i+1} = \mathbf{d}_3^i + \Delta \mathbf{d}_3^i. \tag{7.14}$$

Nota-se que o ocorre é apenas uma modificação da matriz tangente com relação ao método direto, de forma semelhante ao método de Gauss-Seidel. Este fato, faz com que a resposta obtida após a convergência não seja alterada em relação à técnica direta, entretanto, a convergência do problema pode ser afetada devido às modificações na matriz tangente.

Em certos problemas envolvendo estruturas leves, a resposta estrutural pode tornar-se extremamente sensível a pequenas variações nas forças provenientes do fluido. Esse fenômeno pode levar à divergência da técnica de bloco iterativo. Para contornar essa dificuldade adota-se, neste trabalho, a estratégia proposta por Tezduyar (2003), denominada *Augmented A22*, na qual a matriz de massa da estrutura (que compõe $\mathbf{A}_{22}$) é aumentada por um fator ponderador especificado pelo usuário. Essa modificação ocorre sem alterar $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ e $\mathbf{c}_3$, ou seja, sem modificar as equações não-lineares. Dessa forma, a consistência fica garantida e a massa estrutural real do problema permanece inalterada.

7.3.1 Implementação computacional

A implementação computacional para a solução do problema de IFE de acordo com a técnica de acoplamento forte do tipo bloco-iterativo é resumida no Algoritmo. 5. Nesse algoritmo, as medidas de convergência ϵ_F, ϵ_E e ϵ_M são normas vetoriais L_2 aplicadas sobre o resíduo das respectivas equações diferenciais.

7.3.2 Movimentação da Malha

Para a satisfação da condição geométrica nos problemas de IFE desse trabalho, uma técnica adequada de movimentação de malha deve ser aplicada. É necessário que o método de movimentação de malha seja robusto o suficiente para que garanta uma discretização adequada (ou seja, com elementos geometricamente aceitáveis, com áreas e volumes maiores do que zero e com ângulos que não estejam próximos de 0^o nem de 180^o) durante toda a análise.

Dentre as técnicas constantes na literatura, destacam-se aquelas que impõem os deslocamentos da estrutura na malha do fluido ao longo do contorno Γ_{IFE}, determinando o campo de deslocamentos no restante da malha do fluido por meio da resolução de um problema de valor de contorno (PVC). Neste trabalho, será adotada essa abordagem, formulando o problema com base na equivalência entre a movimentação da malha e um problema de elasticidade linear, atribuindo-se a cada elemento uma rigidez diferente de acordo com a técnica MJBS (*Mesh-Jacobian Based Stiffening*), apresentada por Tezduyar *et al.* (1992c) e Tezduyar *et al.* (1993), que visa preservar os aspectos dos elementos menores, impedindo inversão de elementos ou que elementos assumam volume muito pequeno.

Nesse método, o movimento da malha é determinado usando um problema da elasticidade de Dirichlet fictício, descrito como

$$\int_{\Omega_{\tilde{t}}} \boldsymbol{\varepsilon}\left(\mathbf{w}_M^h\right) : \boldsymbol{\sigma}_M\left(\bar{\mathbf{z}}^h - \bar{\mathbf{z}}_{\tilde{t}}^h\right) \mathrm{d}\Omega = 0, \tag{7.15}$$

na qual $\mathbf{w}_M^h$ é a função teste; $\bar{\mathbf{z}}^h$ é o deslocamento medido da configuração de referência, com coordenadas $\bar{\mathbf{x}}^h$, até a configuração atual $\mathbf{y}^h$ ($\mathbf{y}^h = \bar{\mathbf{x}}^h + \bar{\mathbf{z}}^h$); e $\bar{\mathbf{z}}_{\tilde{t}}^h$ representa o deslocamento da configuração de referência até a configuração da malha no instante $\tilde{t}$, de modo que $\mathbf{y}_{\tilde{t}}^h$ ($\mathbf{y}_{\tilde{t}}^h = \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{z}}_{\tilde{t}}^h$); $\boldsymbol{\sigma}_M$ representa o tensor de tensões segundo a hipótese de pequenos deslocamentos.

A escolha para $\tilde{t}$ é geralmente $\tilde{t} = t_n$ quando se calcula a configuração da malha no instante t_{n+1} (ver Tonon *et al.* (2021) para maiores detalhes).

Algoritmo 5 Algoritmo para solução de problemas IFE

Pré processamento - método Arlequin RBSAM aplicado à DFC
Cálculo da distância assinalada dos nós e pontos de controle ao contorno Γ_1;
Determinação da zona de colagem Ω_c;
Definição da função ponderadora de acordo com Equação (6.6), Equação (6.7) e Equação (6.8);
Busca pela correspondência entre os pontos de integração da malha local na malha global na zona de colagem;
Pré processamento - IFE
Busca por coordenadas paramétricas correspondentes aos nós da malha do fluido na malha da estrutura no contorno Γ_{IFE};
Busca por coordenadas paramétricas correspondentes aos nós da malha da estrutura na malha do fluido no contorno Γ_{IFE};
para o passo de tempo 0 até $npt - 1$ **faça**
$i \leftarrow 0$;
Predição da solução fluido (ver Algoritmo 4);
Predição da solução estrutura (ver Algoritmo 2);
enquanto ($\epsilon <$ tolerância) **faça**
$i \leftarrow i + 1$;
Fluido
Resolve-se o problema da DFC na iteração i (Algoritmo 4);
Atualiza as forças de superfície sobre a estrutura no contorno Γ_{IFE} (Equação (7.4));
Estrutura
Resolve o problema da estrutura na iteração i (Algoritmo 2)
Atualiza velocidade (Equação (7.3)) e acelerações no fluido no contorno Γ_{IFE};
Atualiza posição da interface da malha no contorno Γ_{IFE};
Malha
Resolve o problema de malha através da Equação (7.13);
Atualiza as variáveis da malha na iteração i através da Equação (7.14);
Calcula medida de convergência ϵ_M;
se ϵ_F, ϵ_E e $\epsilon_M < tol$ **então**
Sair do loop;
fim se
fim enquanto
Atualiza os valores das variáveis do fluido, estrutura e malha do passo anterior;
fim para

O tensor de tensão é calculado através da seguinte relação:

$$\boldsymbol{\sigma}_M(\mathbf{z}) = \frac{E_M}{1+\nu_M}\left(\frac{\nu_M}{(1-2\nu_M)}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{z})\right)\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{z})\right) \tag{7.16}$$

com E_M e ν_M sendo respectivamente o módulo de Elasticidade e o coeficiente de Poisson fictícios.

Nos problemas de IFE, demanda-se maior controle da resolução da malha próxima a interface dos meios fluidos e sólidos, para representar os efeitos de camada limite, e como consequência, a obtenção de soluções mais acuradas nessas regiões críticas. Por outro lado, a discretização mais refinada apresenta maior sensibilidade às deformações. Assim, visando preservar a geometria dos elementos menores, enrijecendo-os mais do que os maiores, no método MJBS a equação da elasticidade fica descrita ao final como:

$$\int_{\Omega_{\tilde{t}}} \boldsymbol{\varepsilon}\left(\mathbf{w}_M^h\right) : \boldsymbol{\sigma}_M\left(\bar{\mathbf{z}}^h - \bar{\mathbf{z}}_{\tilde{t}}^h\right)\left(\frac{J_M}{(J_M)_0}\right)^{-\chi_M} \mathrm{d}\Omega = 0, \tag{7.17}$$

onde J_M é o determinante Jacobiano do mapeamento do espaço local adimensional para a configuração do elemento em $\tilde{t}$:

$$J_M = det\left(\frac{\partial \mathbf{y}_{\tilde{t}}^h}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right), \tag{7.18}$$

com $(J_M)_0$ um parâmetro livre tal que $(J_M)_0 >$, que pode ser adotado como o jacobiano médio na malha inicial, e χ_M determina a ordem pela qual a rigidez aumenta à medida que o tamanho dos elementos diminui, sendo adotado nas simulações deste trabalho $\chi_M = 1{,}0$.

7.4 Verificação e aplicações

Para a verificação da metodologia proposta para a análise de problemas de IFE com decomposição de domínio, são considerados 3 problemas. O primeiro consiste em uma cavidade retangular preenchida por fluido, com fundo flexível e velocidade tangencial oscilatória imposta ao escoamento no topo, sendo um problema tipicamente bidimensional. O segundo problema é uma extensão do anterior, onde a cavidade é cúbica e o fundo é representado por uma placa elástica apoiada em todos os lados, tornando o problema tridimensional. O terceiro problema consiste em um painel engastado em um bloco rígido de seção retangular submetido a um escoamento com desprendimento de vórtices. Em todos esses casos foram utilizadas malhas tridimensionais.

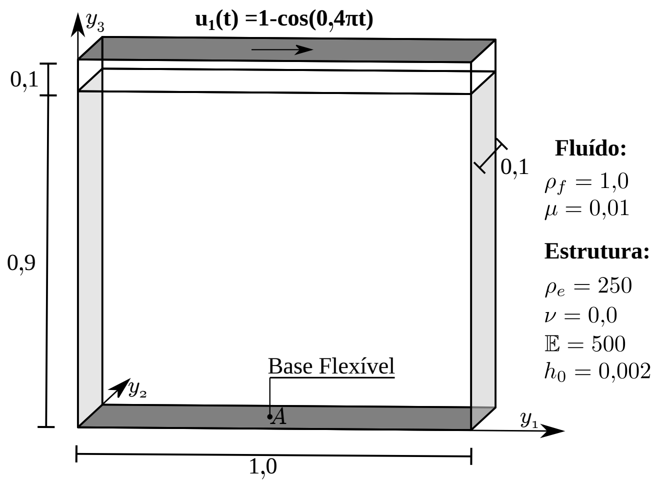
Por fim, busca-se aplicar a ferramenta desenvolvida para a simulação de um problema mais complexo onde não é possível a simulação apenas com a deformação e movimentação da malha do fluido. Para isso, primeiramente considera-se uma turbina hidráulica composta por uma hélice flexível (rotor) vinculada a um eixo e imersa em um duto cilíndrico, que é simulado com apenas um modelo empregando-se elementos finitos. Visando melhorar a eficiência, são adicionadas pás diretoras fixas à montante do rotor, o que demanda o emprego do método Arlequin com domínio local móvel para que seja possível a simulação.

7.4.1 Cavidade com fundo flexível - 2D

O problema da cavidade com fundo flexível trata-se de uma extensão do problema clássico da cavidade quadrada com velocidade prescrita em sua parede superior (subseção 2.6.2). Diversos autores estudaram numericamente este problema, tais como Gerbeau e Vidrascu (2003) e Yokomizo (2024), e por isso, é utilizada no processo de verificação da metodologia proposta nesta tese.

Considera-se a cavidade da Figura 74, composta por paredes laterais rígidas com aderência e um fundo flexível composto por uma placa elástica fina com espessura adimensional 0,002. No topo uma velocidade oscilatória horizontal $u_1(t) = 1 - cos(0{,}4\pi t)$ é aplicada, sendo as demais componentes de velocidade (u_2 e u_3) nulas. As paredes anterior e posterior são consideradas lisas, conferindo aspecto bidimensional ao escoamento. As paredes laterais apresentam abertura no topo onde são aplicadas condições homogêneas de Neumann. Dada à característica bidimensional do problema, adota-se uma discretização 3D com uma espessura de 0,1. A geometria inicial e as características físicas adotadas de forma adimensional são apresentadas na Figura 74.

Figura 74 – Cavidade fundo flexível 2D: geometria e propriedades físicas (valores adimensionais)



Fonte: Elaborada pela autora

A placa fina possui condições de deslocamentos nulos em suas laterais esquerda e direita, enquanto nos lados perpendiculares a y_2, o deslocamento bem como a componente do vetor generalizado na direção y_2 são nulos.

No que diz respeito a integração temporal utiliza-se $\Delta t = 0{,}1$, e $\rho_\infty = 0{,}0$ (fluido). A escolha por uma integração temporal com máxima dissipação se deu por conta do trabalho de Förster, Wall e Ramm (2007) que reporta que a regra trapezoidal de integração leva a resultados instáveis para esse problema.

São analisadas três diferentes discretizações para o modelo Arlequin, sendo as malhas globais em discretização isogeométrica com funções de forma quadráticas (AIG) e as malhas locais, mais refinadas e estruturadas, em elementos finitos (MEF) tetraédricos quadráticos. Além disso, os resultados foram comparados com uma discretização somente em elementos finitos tetraédricos quadráticos, chamada de monomodelo. A quantidade de nós, ou pontos de controle (PC), e de elementos ou células, para cada uma dessas discretizações é apresentada na Tabela 4, assim como detalhes da discretização da placa, na qual foram utilizados elementos triangulares quadráticos estruturados. Na tabela ML e MG são abreviações para malha local e malha global respectivamente, e El representa os elementos ou células.

Tabela 4 – Cavidade fundo flexível 2D: Discretizações

	Nós/PC-ML	El-ML	Nós/PC-MG	El-MG
Arlequin - Malha 0	315	120	504	100
Arlequin - Malha 1	1107	480	1584	400
Arlequin - Malha 2	4131	1920	5544	1600
Monomodelo	-	-	9389	4563
Estrutura - Malha 0	-	-	63	20
Estrutura - Malha 1	-	-	123	40
Estrutura - Malha 2	-	-	243	80

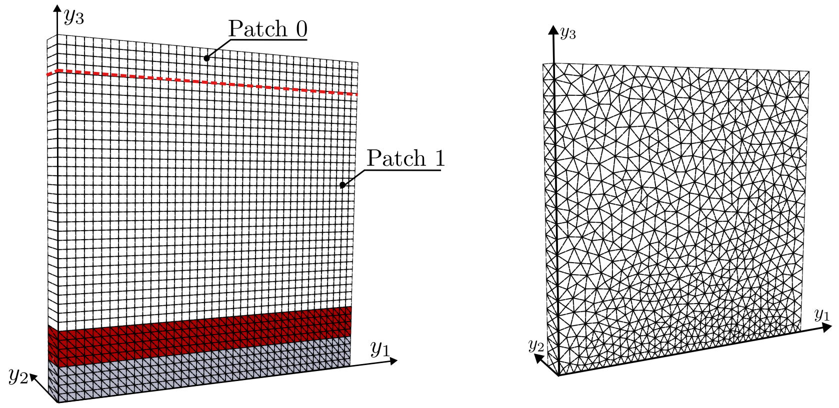
Fonte: Elaborada pela autora.

A malha isogeométrica é composta por 2 *patches* (observar Figura 75a). Essa discretização com 2 *patches* é necessária para gerar pontos de controle interpolatórios posicionados na linha que separa as paredes laterais das aberturas, possibilitando a adequada aplicação das condições de contorno. Na Figura 75a pode ser observada também a composição do modelo Arlequin. A região em vermelho da malha local corresponde aos elementos que fazem parte da zona de colagem. A espessura da zona de colagem foi definida como 0,1. A quantidade de elementos na zona de colagem para malha 0, 1 e 2 foram respectivamente de 60, 240, 960, e de nós 189, 615 e 2187. Na Figura 75b apresenta-se a malha do monomodelo e na Figura 75c a malha 2 respectiva a discretização da estrutura.

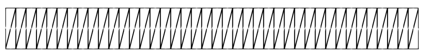
Figura 75 – Cavidade fundo flexível 2D: Discretizações

(a) Modelo Arlequin - Malha 2

(b) Monomodelo



(c) Fundo flexível - Malha 2



Fonte: Elaborada pela autora

Neste problema adotou-se a técnica *Augmented A22*, multiplicando-se a parcela da matriz tangente referente à matriz de massa da estrutura por um fator 2,0 para garantir a convergência do acoplamento forte.

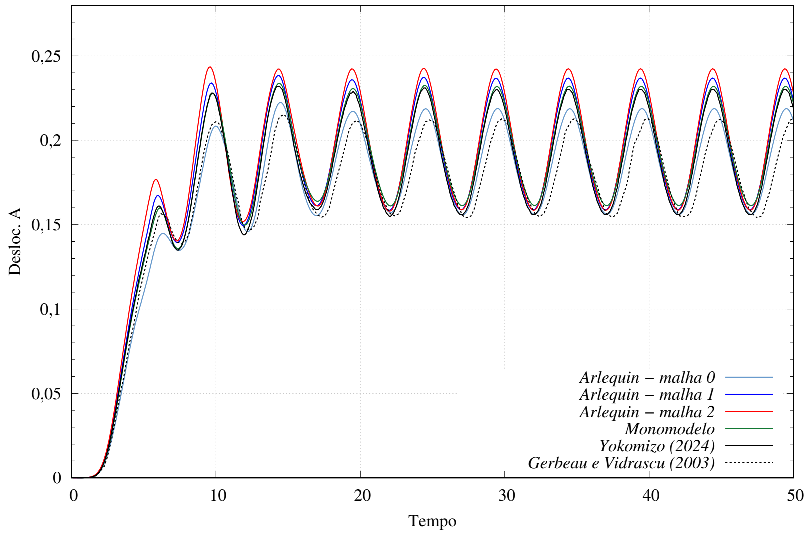
Na Figura 76 são apresentados os deslocamentos da placa no ponto A (ver Figura 74) para os modelos Arlequin (malha 0, malha 1 e malha 2), monomodelo, e resultados de referências. As diferenças encontradas entre a amplitude dos deslocamentos obtidos nesse trabalho com as referências podem ser atribuídas às diferentes formulações e discretizações adotadas para a modelagem do fluido e da estrutura.

Nas Figuras 77 e 78 são apresentados os campos de velocidade e pressão em diferentes instantes durante a análise.

7.4.2 Cavidade com fundo flexível - 3D

Este problema, proposto inicialmente por Mok (2001) é uma variação do exemplo 7.4.1 de modo a conferir caráter tridimensional. A profundidade da cavidade agora possui dimensão adimensional unitária, conforme pode ser visualizado na Figura 79, além disso, a base flexível possui restrição de deslocamentos em todos os 4 bordos. As demais características são idênticas às do problema 2D.

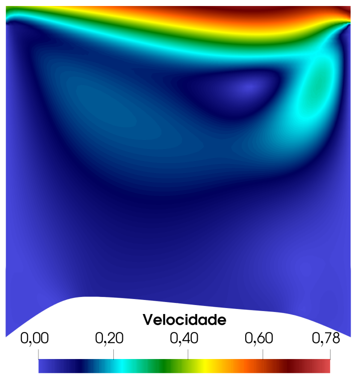
Figura 76 – Cavidade com fundo flexível 2D: Deslocamento do ponto A



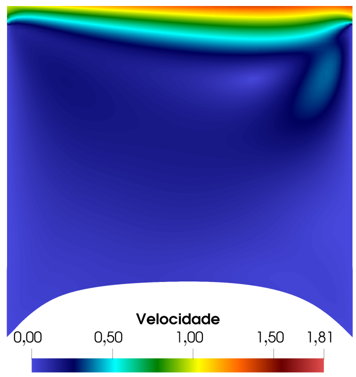
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 77 – Cavidade fundo flexível 2D: Campos de velocidade

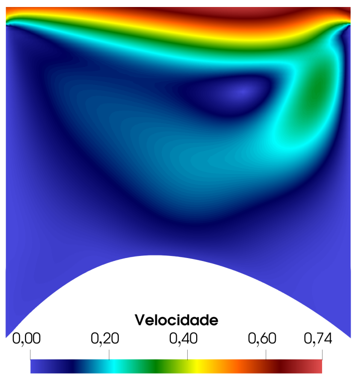
(a) $t = 4{,}0$



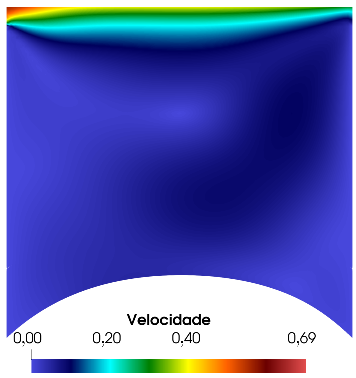
(b) $t = 8{,}0$



(c) $t = 14{,}0$

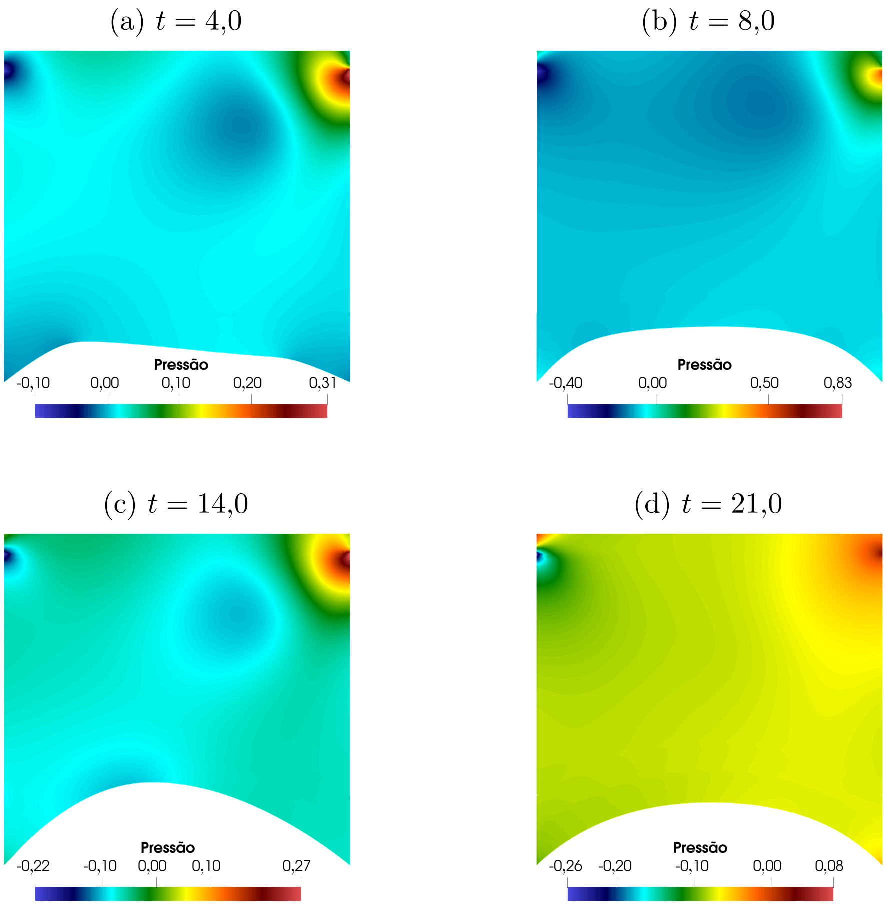


(d) $t = 21{,}0$



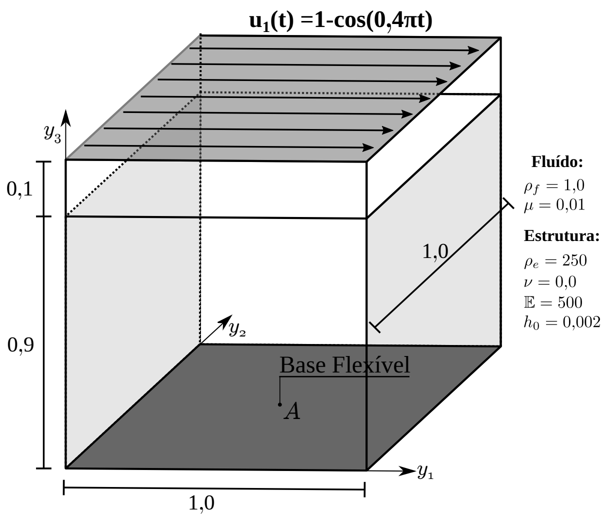
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 78 – Cavidade fundo flexível 2D: Campos de Pressão



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 79 – Cavidade fundo flexível 3D: Geometria e propriedades físicas



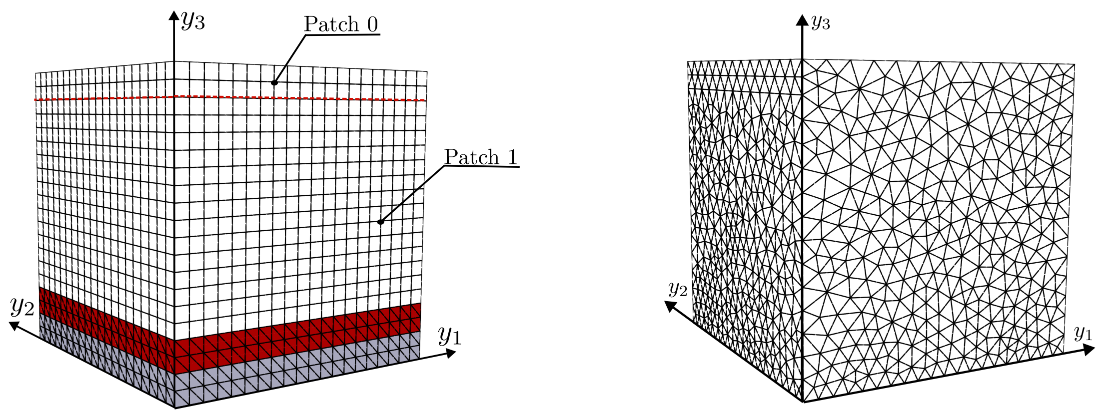
Fonte: Elaborada pela autora

São adotadas duas diferentes discretizações: 1. Modelo Arlequin (ver Figura 80a), sendo a malha global em discretização isogeométrica (AIG) com funções base quadráticas e a malha local, mais refinada e conforme à estrutura, em elementos finitos (MEF) tetraédricos quadráticos; 2. Monomodelo (Figura 80b) discretizado com elementos finitos tetraédricos quadráticos. Para ambos modelos utilizou-se uma placa discretizada com elementos finitos triangulares quadráticos de casca conforme apresentado na Figura 80c.

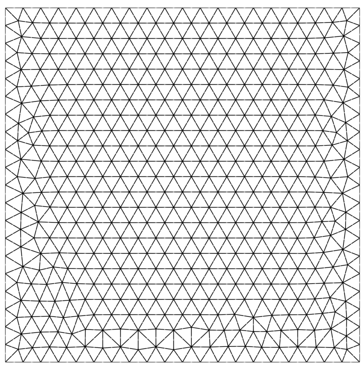
O modelo Arlequin é composto por uma malha global discretizada com 2 *patches* que totalizam 8000 células e 11616 pontos de controle. A malha local possui 9600 elementos e 15129 nós. A zona de colagem (área vermelha da Figura 80a) é composta por 4800 elementos e 8405 nós. O monomodelo foi discretizado com 15895 elementos e 25127 nós. A malha da placa é constituída por 1969 nós e 944 elementos.

Figura 80 – Cavidade fundo flexível 3D: Discretização

(a) Malhas do modelo Arlequin (b) Malha do Monomodelo



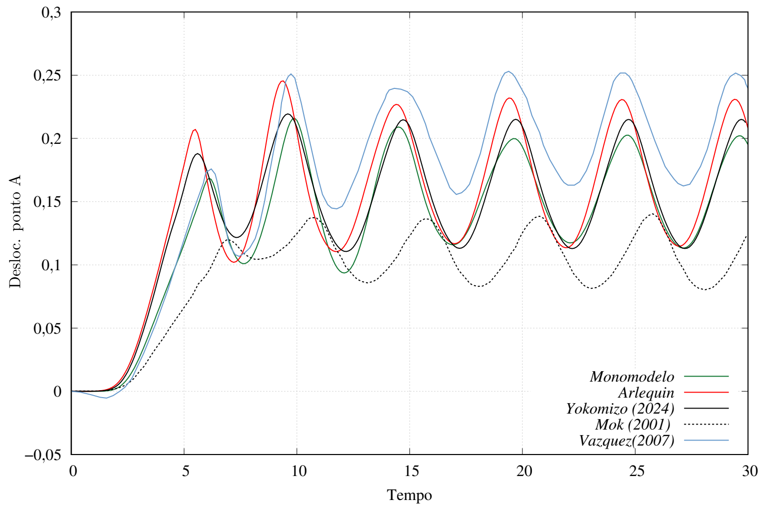
(c) Malha da placa



Fonte: Elaborada pela autora

Na Figura 81 observa-se o deslocamento do ponto A, localizado no centro da placa flexível, ao longo do tempo, onde são comparados os resultados deste trabalho com os de Mok (2001),Vázquez (2007) e Yokomizo (2024). As diferenças encontradas entre a amplitude dos deslocamentos obtidos nesse trabalho com as referências podem ser atribuídas para as diferentes formulações e discretizações adotadas para a modelagem do fluido e da placa. Na Figura 82 apresenta-se os campos de velocidade em diferentes instantes ao longo da análise para uma seção $y_1 \times y_3$ em $y_2 = 0{,}5$; na Figura 83, para esses mesmos instantes e seção, são apresentados os campos de pressão. Por fim, na Figura 84 podem ser visualizados os deslocamentos na placa nesses instantes.

Figura 81 – Cavidade fundo flexível 3D: Deslocamento vertical do ponto A



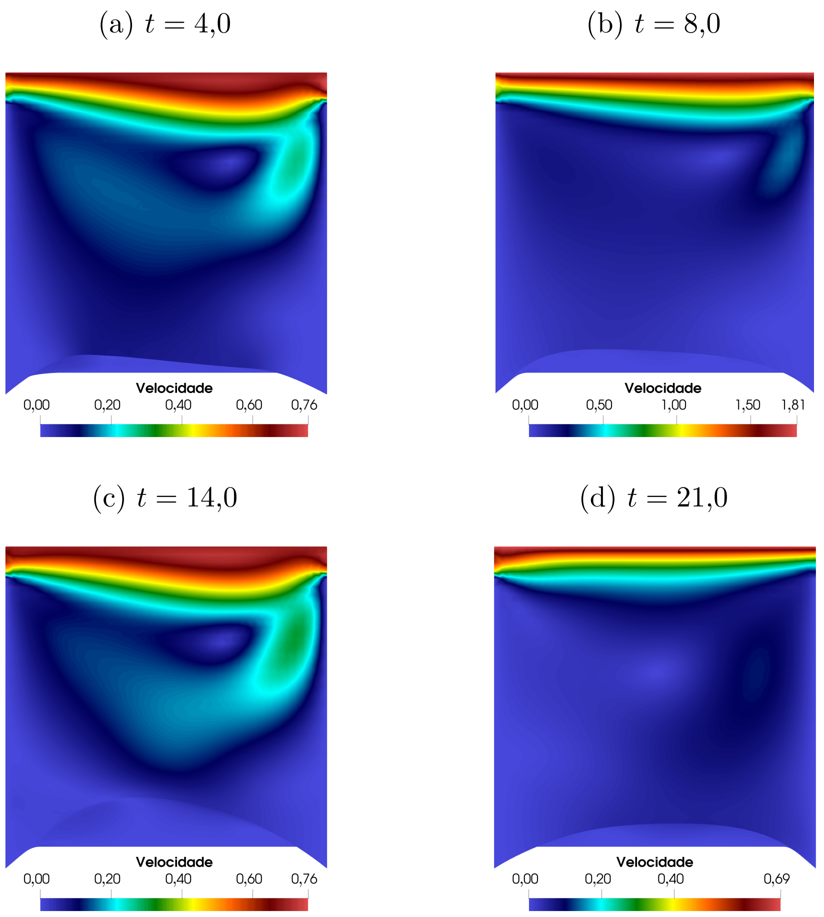
Fonte: Elaborada pela autora

7.4.3 Painel flexível submetido a escoamento com desprendimento de vórtices

O problema desta subseção consiste em um painel flexível engastado a um prisma rígido, conforme Figura 85. Dada a complexidade dos fenômenos envolvidos, este exemplo caracteriza-se por ser amplamente utilizados na literatura para verificação de formulações numéricas para IFE, sendo inicialmente proposto por Wall e Ramm (1998), e mais tarde, reformulado por Hübner, Walhorn e Dinkler (2004). A segunda versão, que é a adotada aqui, apresenta a mesma geometria da original, entretanto, possui alteração na velocidade de entrada e nas propriedades elásticas da estrutura, tornando-a menos propícia a instabilidades numéricas decorrentes de acoplamento particionado. Esse problema apresenta comportamento bidimensional, sendo simulado neste trabalho por meio de discretização 3D com espessura constante de 0,1 cm.

A geometria e as condições de contorno são apresentadas na Figura 85, sendo a velocidade na entrada $u_\infty = 31{,}5$ cm/s. O fluido possui propriedades físicas do ar: viscosidade dinâmica de $\mu = 1{,}82 \cdot 10^{-4}$ g/(cm$\cdot$s) e massa específica $\rho_f = 1{,}18 \cdot 10^{-3}$ g/cm^3. Tomando-se por referência o comprimento do prisma obtém-se o número de Reynolds Re $= 204$. A placa possui espessura de 0,06 cm, massa específica $\rho_e = 2{,}0$ g/cm^3, e módulo de elasticidade caracterizado por $\mathbb{E} = 2{,}0 \cdot 10^5$ g/(cm $\cdot$ s^2). Devido ao comportamento bidimensional do problema aplica-se para a placa um coeficiente de Poisson $\nu = 0{,}0$.

Figura 82 – Cavidade fundo flexível 3D: Campos de velocidade



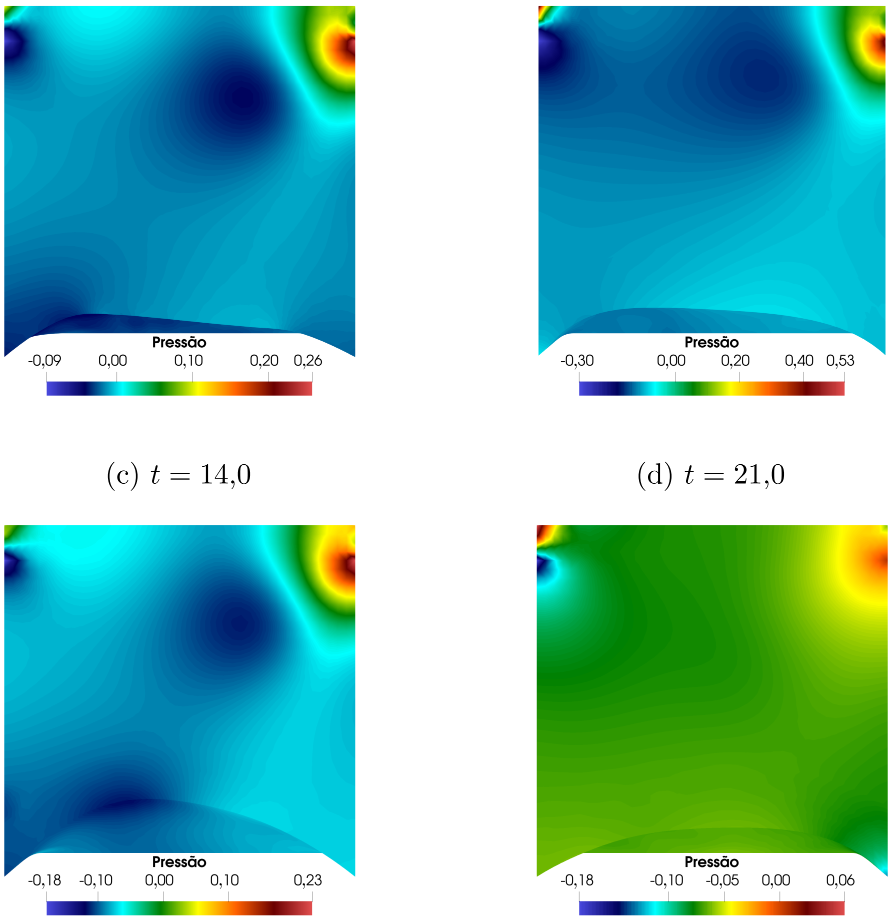
Fonte: Elaborada pela autora

A simulação é conduzida utilizando o modelo Arlequin com a discretização global isogeométrica e funções quadráticas, com 1800 células e 5952 pontos de controle, e discretização local em elementos finitos tetraédricos quadráticos, com 1821 elementos e 4251 nós (Figura 86a). A zona de colagem possui espessura de 0,2 cm, representada em vermelho na Figura 86a, contendo 1821 elementos e 4251 nós da malha local. Como referência adota-se uma discretização monomodelo (Figura 86b) com 13315 elementos finitos tetraédricos quadráticos e 26599 nós. Em ambos os modelos, a estrutura é discretizada por 108 elementos finitos de casca triangulares quadráticos e 273 nós, conforme ilustrado na Figura 86c. No que diz respeito à integração temporal, utiliza-se $\rho_\infty = 0{,}5$ (fluido), e $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ s.

Hübner, Walhorn e Dinkler (2004) obtiveram em suas simulações uma frequência de desprendimento de vórtices, considerando a placa como rígida, de $f_f = 3{,}7$ Hz. De acordo com a teoria clássica da dinâmica das estruturas as três primeiras frequências naturais de vibração para essa estrutura de placa são $f_1 = 0{,}61$ Hz, $f_2 = 3{,}80$ Hz e $f_3 = 10{,}63$ Hz. Dessa forma, espera-se que a frequência de vibração da estrutura para o problema de IFE fique próxima à sua segunda frequência natural.

Figura 83 – Cavidade fundo flexível 3D: Campos de Pressão

(a) $t = 4{,}0$ (b) $t = 8{,}0$ (c) $t = 14{,}0$ (d) $t = 21{,}0$

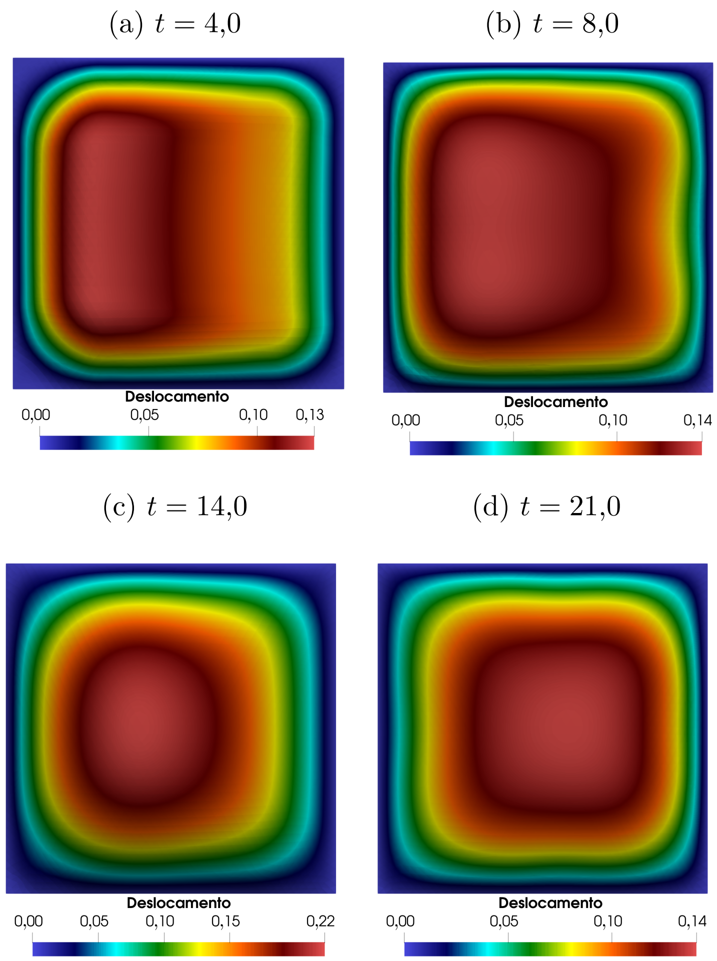


Fonte: Elaborada pela autora

A simulação empregando o monomodelo apresentou colapso da malha (emaranhamento) próximo aos 8 s desestabilizando a simulação (ver Figura 87). Esse colapso indica que o modelo da subseção 7.3.2, não foi capaz de representar adequadamente a mudança de forma da estrutura com grandes deslocamentos através da deformação da malha adotada para o monomodelo. Embora isso possa ser contornado por diferentes soluções, foge ao escopo deste trabalho. Já no modelo Arlequin, os contornos externos da malha local também são deformáveis, o que permitiu a simulação completa.

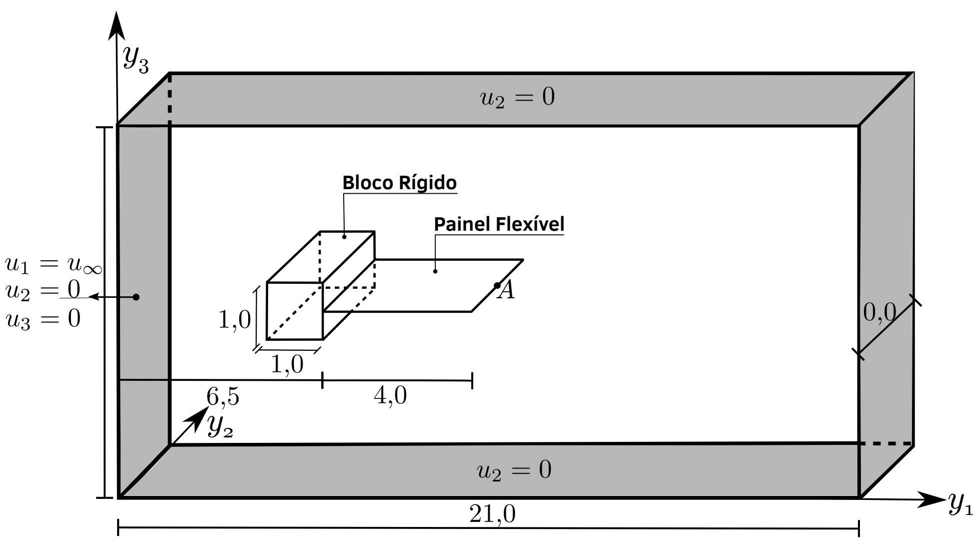
A Figura 88 apresenta deslocamento vertical na extremidade livre da placa (ponto A) ao longo do tempo comparando-se os resultados do modelo Arlequin, do monomodelo e a envoltória dos resultados obtidos por Hübner, Walhorn e Dinkler (2004). Observa-se correspondência satisfatória entre os resultados do modelo Arlequin com o monomodelo até o momento próximo de 8 s, quando ocorre o colapso da malha do monomodelo, e boa correspondência também com os resultados de Hübner, Walhorn e Dinkler (2004).

Figura 84 – Casca: Campos de Deslocamentos



Fonte: Elaborada pela autora

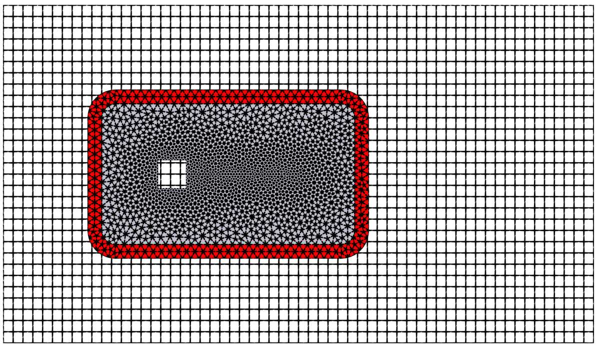
Figura 85 – Painel Flexível: Geometria e condições de contorno (dimensões em cm)



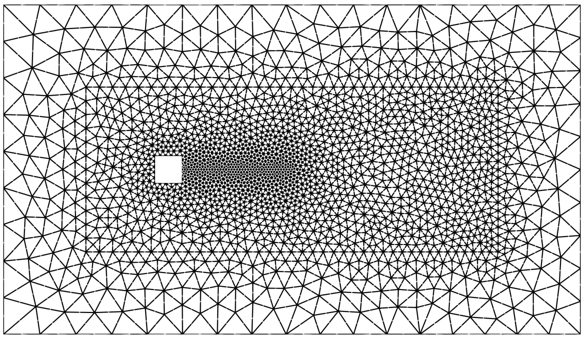
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 86 – Painel Flexível: Discretização

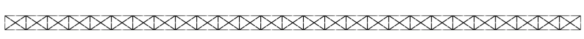
(a) Malhas do modelo Arlequin



(b) Malha do monomodelo

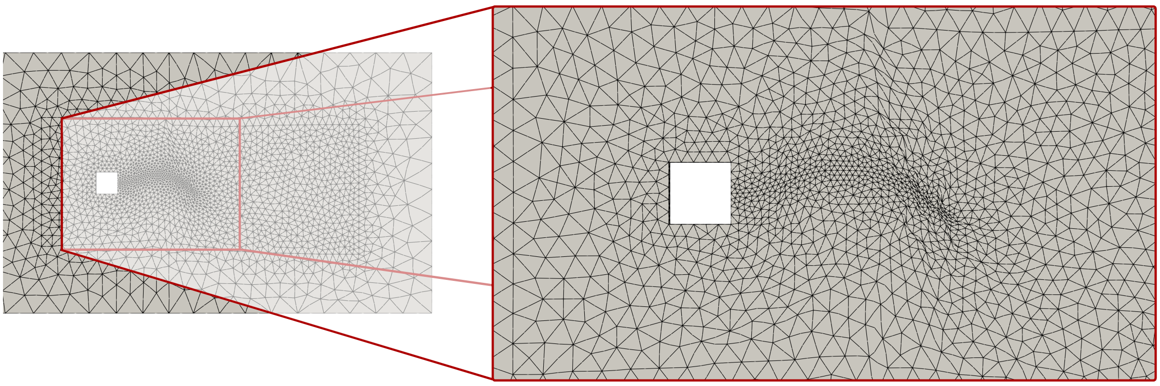


(c) Malha da placa



Fonte: Elaborada pela autora

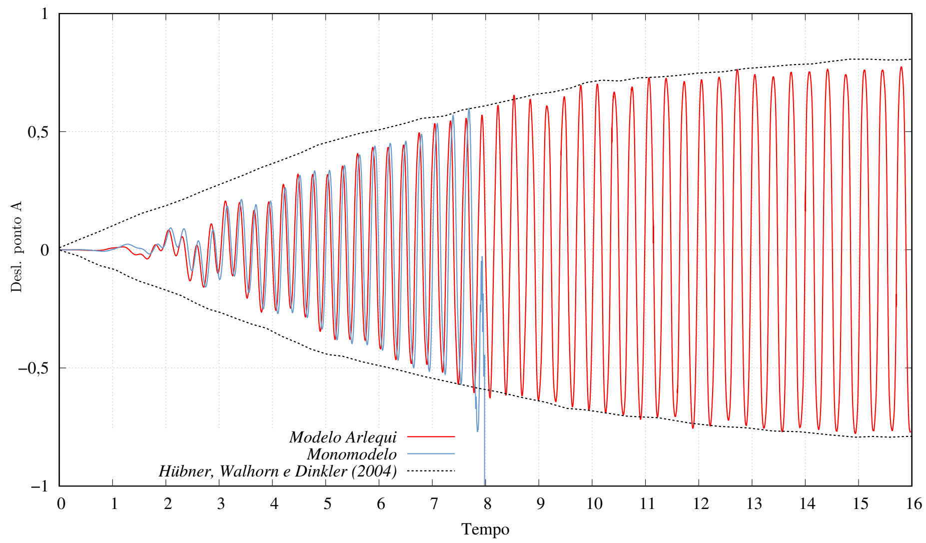
Figura 87 – Painel Flexível: Colapso malha monomodelo



Fonte: Elaborada pela autora

A partir da Figura 88 pode-se notar que a placa apresenta uma amplitude de vibração crescente até determinado ponto da análise, a partir do qual essa amplitude permanece aproximadamente constante e bastante próxima aos resultados de referência.

Figura 88 – Painel Flexível: Deslocamento em A



Fonte: Elaborada pela autora

A frequência de vibração calculada a partir da média dos períodos entre $t = 8$ s e $t = 16$ s resultante da simulação com o modelo Arlequin é de $3,07$ Hz, próxima aos $3,1$ Hz reportado por Hübner, Walhorn e Dinkler (2004). Observa-se que a frequência de vibração da estrutura, difere tanto da frequência natural quanto da frequência de desprendimento de vórtices para a placa rígida, o que é devido aos fenômenos que ocorrem no acoplamento entre os dois meios.

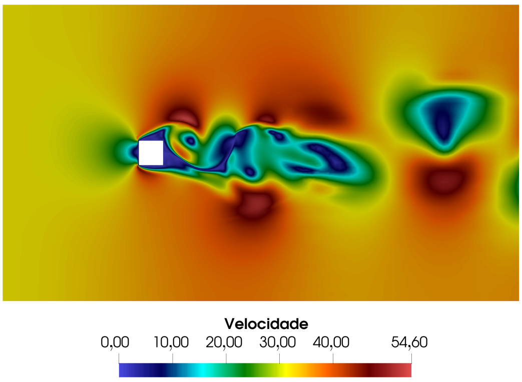
Considerando um ciclo de movimento da estrutura T (aproximadamente periódico) apresentam-se a distribuição do módulo da velocidade (Figura 89) e a distribuição de pressão (Figura 90) para alguns instantes. Na Figura 91 apresenta-se a configuração da malha local para o instante de maior deslocamento do problema.

7.4.4 Turbina

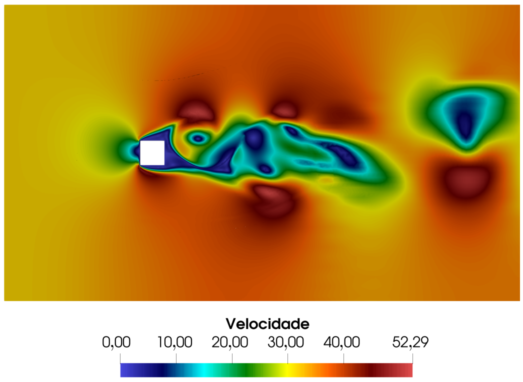
Como última aplicação, propõe-se um problema tridimensional que não pode ser simulado diretamente com métodos de málhas móveis, e que neste caso pode ser simulado com a aplicação da técnica de superposição proposta. Este problema consiste em uma turbina hidráulica com pás diretoras fixas e um rotor, com uma pressão superior à atmosférica aplicada na entrada. Inicialmente realiza-se um estudo prévio apenas com o rotor, o qual é simulado utilizando um monomodelo de elementos finitos. Posteriormente considera-se a turbina com as pás diretoras representadas por uma discretização isogeométrica global e insere-se o rotor por meio de uma discretização local por elementos finitos, a qual pode mover-se e deformar-se de modo a acomodar a rotação e deformação do rotor.

Figura 89 – Painel Flexível: Campos de velocidade

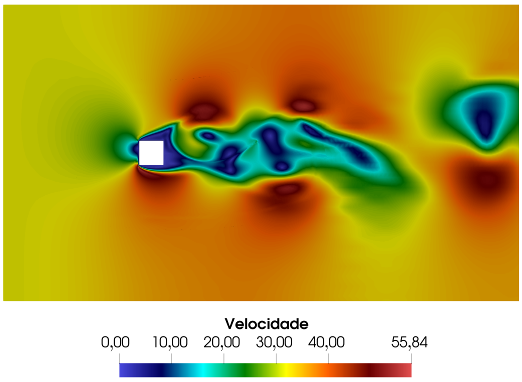
(a) nT



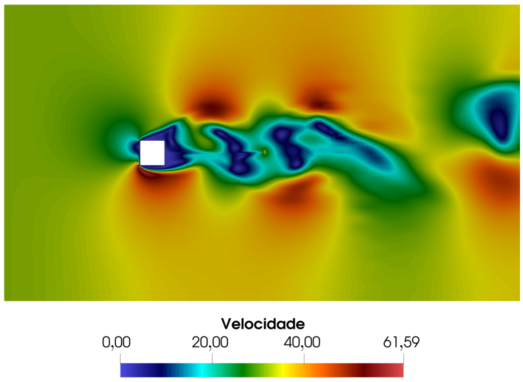
(b) $nT + nT/12$



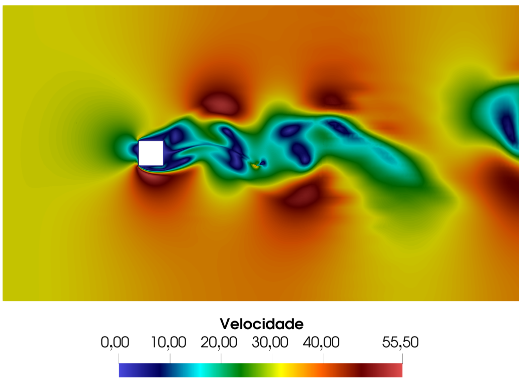
(c) $nT + nT/6$



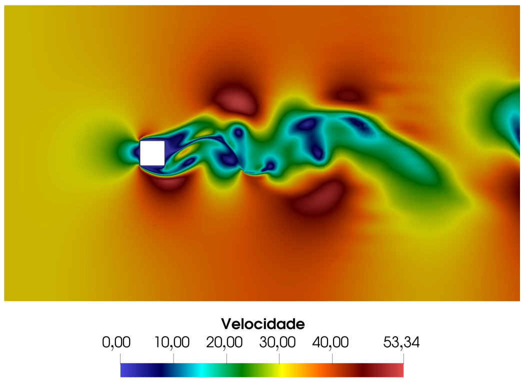
(d) $nT + nT/4$



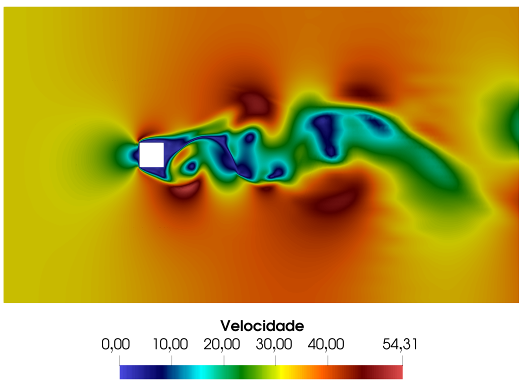
(e) $nT + n2T/6$



(f) $nT + n5T/12$

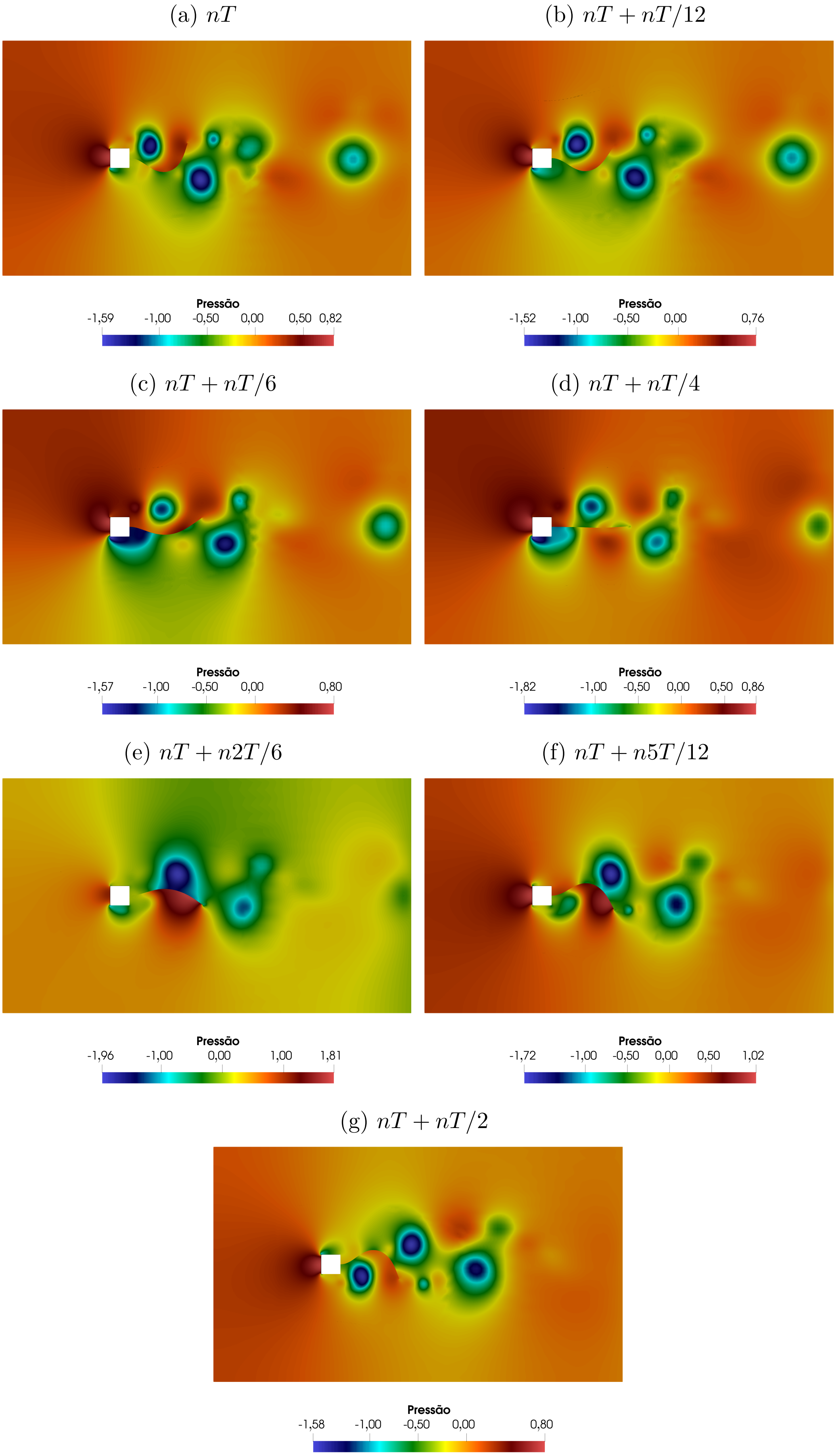


(g) $nT + nT/2$



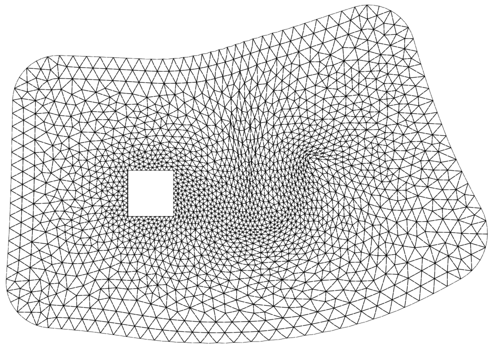
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 90 – Painel Flexível: Campos de pressão



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 91 – Painel Flexível: Deformada da malha em nT

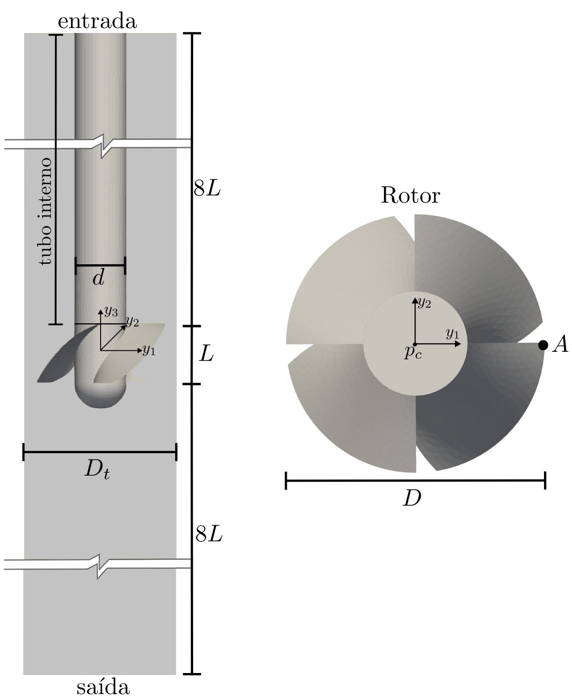


Fonte: Elaborada pela autora

7.4.4.1 Turbina - monomodelo

Considera-se a turbina formada por um tubo cilíndrico por onde ocorre o escoamento, dentro do qual encontra-se um rotor flexível acoplado a um eixo. Este eixe estende-se à montante do rotor e é encapsulado por um tubo rígido de diâmetro menor conforme ilustra a Figura 92. Os parâmetros adotados para a descrição da geometria são: comprimento do tubo $L = 0,684$ dm, diâmetro do tubo $D_t = 1,74$ dm e diâmetro do encapsulamento $d = 0,6$dm.

Figura 92 – Turbina monomodelo: Geometria



Fonte: Elaborada pela autora

Durante a rotação da turbina, toda a malha de elementos finitos do fluido é deslocada e deformada para acomodar a movimentação da estrutura. Para isso, aplica-se à malha, no contorno externo e no contorno do encapsulamento do eixo, a rotação calculada no centro do rotor. Na interface fluido-estrutura flexível, são aplicados os deslocamentos da estrutura, já na entrada e na saída, considera-se a componente de deslocamento na direção y_3 nula e as demais componentes livres.

Para o fluido considera-se velocidade nula no contorno externo do tubo bem como no contorno do encapsulamento e velocidade igual à da estrutura na interface fluido-estrutura flexível, enquanto na entrada é aplicada uma força de superfície de 100 kPa no sentido de deslocar o fluido para dentro da turbina, e na saída força de superfície nula. O fluido possui propriedades físicas da água, que consistem em viscosidade dinâmica de $\mu = 1{,}00 \cdot 10^{-4}$ kg/(dm·s) e massa específica equivalente a $\rho_f = 1{,}00$ kg/dm^3.

O rotor consiste em uma hélice de 4 pás com espessura constante $t_p = 0{,}02$ dm, com diâmetro de ponta (*tip*) $D = 1{,}5$ dm. As pás são acopladas a um cubo (*hub*) de diâmetro $d = 0{,}60$ dm com parede de espessura $t_c = 0{,}1$ dm. Considera-se que o cubo se conecta a um eixo, de mesmo diâmetro e espessura do cubo, o qual se prolonga até a entrada do escoamento por dentro do encapsulamento rígido. A geometria das pás foi gerada utilizando o software CFturbo® [1], enquanto que a discretização em elementos finitos realizada no GMSH (os dados da malha podem ser visualizados no Apêndice A). Selecionou-se um aço para compor o material da estrutura com densidade de massa $\rho_e = 8{,}0$ Kg/dm^3, e módulo de elasticidade de $\mathbb{E} = 2{,}0 \cdot 10^{10}$ kg/(dm.s^2). A superfície superior do eixo consiste em um disco com a mesma espessura e material do eixo, onde o nó central possui todas as componentes de deslocamento restritas, enquanto os demais nós dessa superfície possuem apenas os deslocamentos na direção y_3 restritos. Dada a rigidez do eixo, os deslocamentos do mesmo são pequenos o suficiente para que seja possível desconsiderar o contato com o encapsulamento.

No que diz respeito a integração temporal considera-se $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}$ s, e para o fluido um raio espectral $\rho_\infty = 0{,}5$.

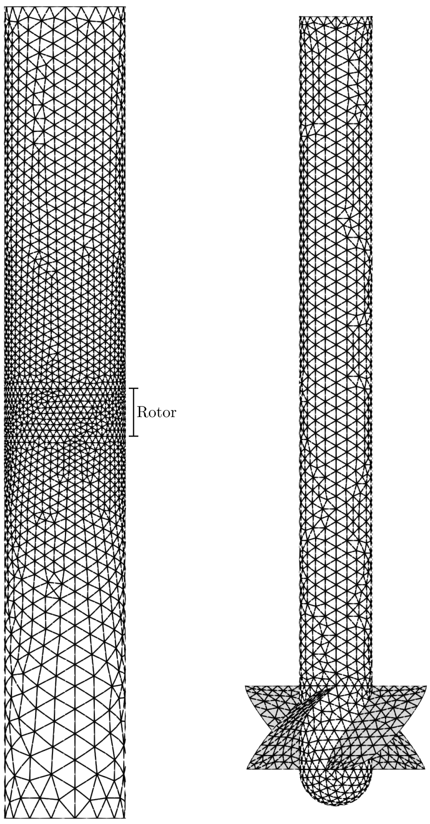
A malha utilizada para a discretização do domínio do fluido, apresentada na Figura 93a, é composta por 49239 elementos tetraédricos quadráticos e 76548 nós, enquanto que, a malha da discretização da estrutura (ver Figura 93b) é composta por 3807 elementos de casca triangulares quadráticos e 7791 nós.

Afim de se analisar os deslocamentos máximos nas pás ao longo do tempo na direção y_3, demarcou-se um ponto A na extremidade de uma das pás do rotor, conforme pode ser visualizado na Figura 92. Os deslocamento deste nó ao longo do tempo é apresentado na Figura 94. Ao realizar-se a média dos deslocamentos a partir do instante $t = 0,2$ s até o final da análise ($t = 0,5$ s), obteve-se um valor deslocamento médio de $-0,0127355$ cm neste ponto.

[1] Disponível em: https://www.cfturbo.com

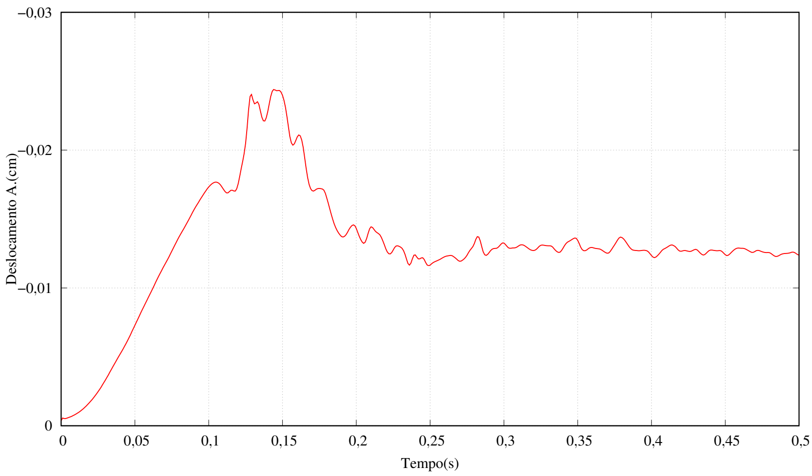
Figura 93 – Turbina monomodelo: malhas

(a) Malha fluido (b) Malha estrutura



Fonte: Elaborada pela autora.

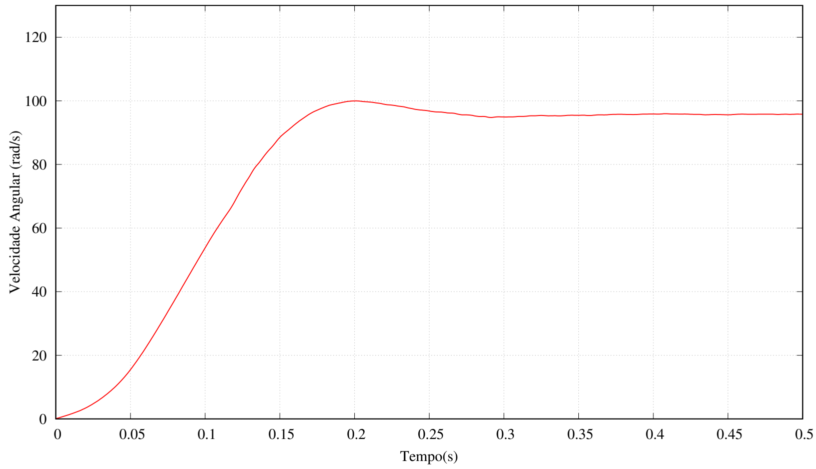
Figura 94 – Turbina monomodelo: Deslocamento em y_3 no ponto A



Fonte: Elaborada pela autora

Além disso, acompanhou-se a velocidade angular deste mesmo ponto ao longo do tempo. Conforme pode-se observar na Figura 95, a velocidade angular aumenta até o instante $t = 0,2$ s e depois mantém-se com valor aproximadamente constante de $96,25$ rad/s.

Figura 95 – Turbina monomodelo: Velocidade angular no ponto A



Fonte: Elaborada pela autora

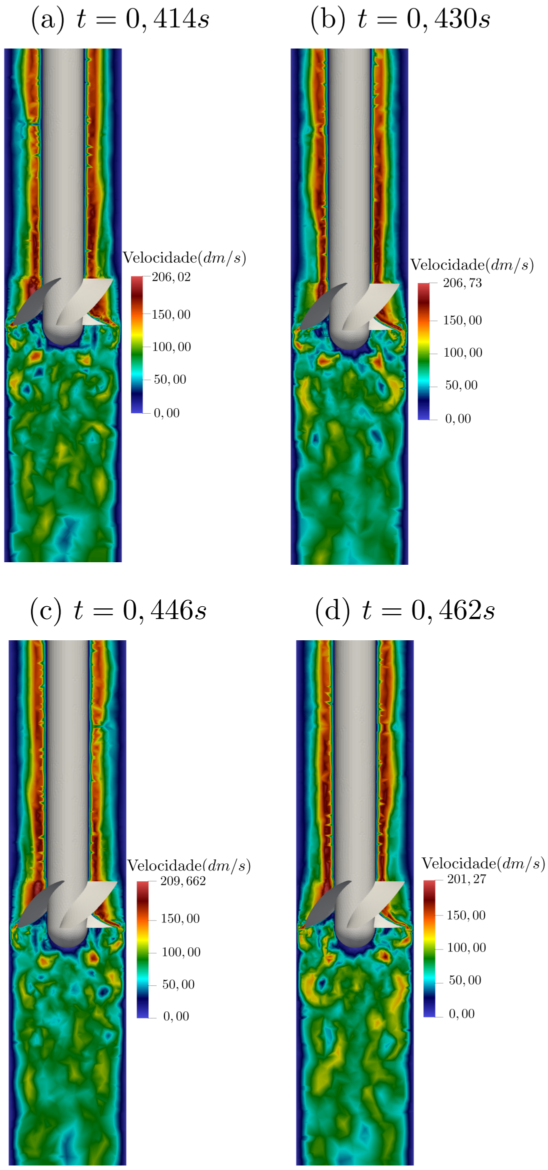
Por fim, apresentam-se os campos do módulo de velocidade e da pressão obtidos ao longo de uma rotação completa das pás dos rotores. Os campos podem ser visualizados na Figura 96 e Figura 97. Considerando-se a velocidade média do fluido na saída do tubo no final do tempo de análise, obtém-se uma vazão de $128,77$ dm^3/s.

7.4.4.2 Turbina - modelo Arlequin

Na segunda etapa de análise, adicionam-se 4 pás diretoras rígidas e fixas ao tubo interno à montante do rotor, conforme pode ser observado na Figura 98. As demais características do domínio do fluido e da estrutura utilizadas para a simulação do monomodelo (subseção 7.4.4.1), assim como as propriedades físicas dos meios apresentados, foram mantidas. Ressalta-se que, para a simulação deste problema, foram utilizados como campo inicial de pressão e velocidade, valores obtidos em uma solução de longo termo da turbina na condição de repouso.

Uma discretização global isogeométrica é empregada para descrever o domínio do fluido com o encapsulamento e as pás diretoras. Essa discretização é construída com auxílio de 21 *patches*, e possui 21438 pontos de controle e 9660 células, com funções de forma quadráticas, conforme a figura 99b. O domínio local, no qual o rotor está contido, é discretizado com uma malha em elementos finitos com 26052 nós e 40766 elementos tetraédricos quadráticos, sendo ilustrada na Figura 99a, onde a zona de colagem, é destacada com a cor vermelha, possuindo espessura de 0,129 dm e compreendendo 6782 elementos finitos e 3257 nós do modelo local.

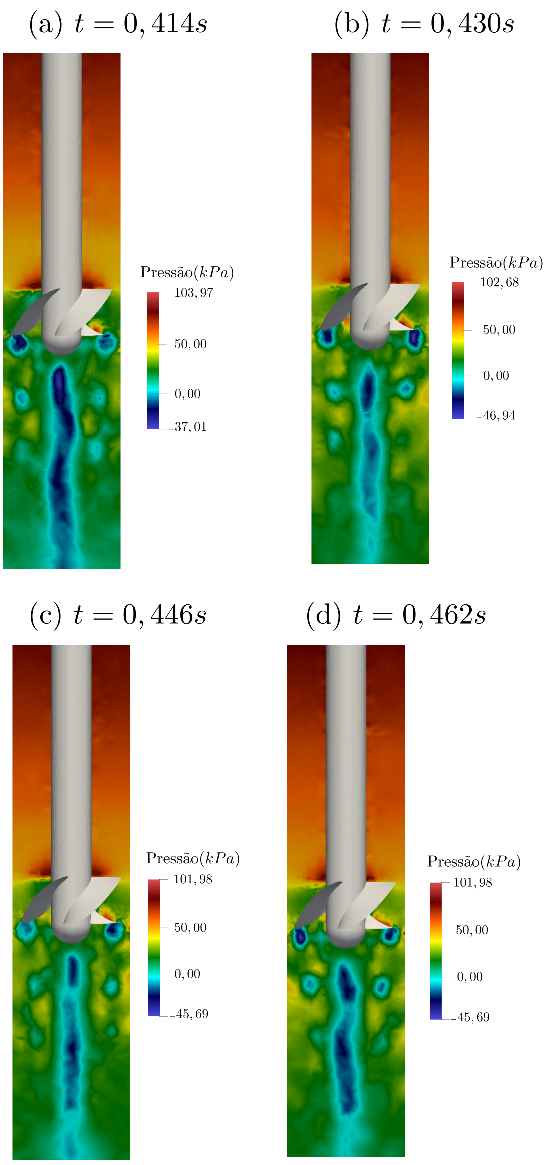
Figura 96 – Turbina monomodelo: Campos de velocidade



Fonte: Elaborada pela autora

As pás diretoras rígidas estão localizadas nos *patches* P13, P14, P15 e P16 (ver Figura 99b). Cada uma das quatro pás, corresponde à superfície de interface entre dois *patches* adjacentes, ou seja, entre as superfícies de: P13–P14, P14–P15, P15–P16 e P16–P13. A geração dos *patches* P13, P14, P15 e P16, e consequentemente das pás diretoras (Apêndice B), pode ser compreendida a partir dos cortes DD e CC (Figura 99b). O corte DD representa a superfície equivalente à montante das pás diretoras, já o corte CC representa a superfície equivalente aquela à jusante das pás diretoras, sendo obtida a partir da rotação dos pontos de controle que geram a superfície do corte DD em 45° em torno do eixo y_3, mantendo os mesmos pesos da superfície geradora. As superfícies intermediárias, são determinadas por interpolação linear entre o plano DD (0°) e o plano CC (45°).

Figura 97 – Turbina monomodelo: Campos de pressão

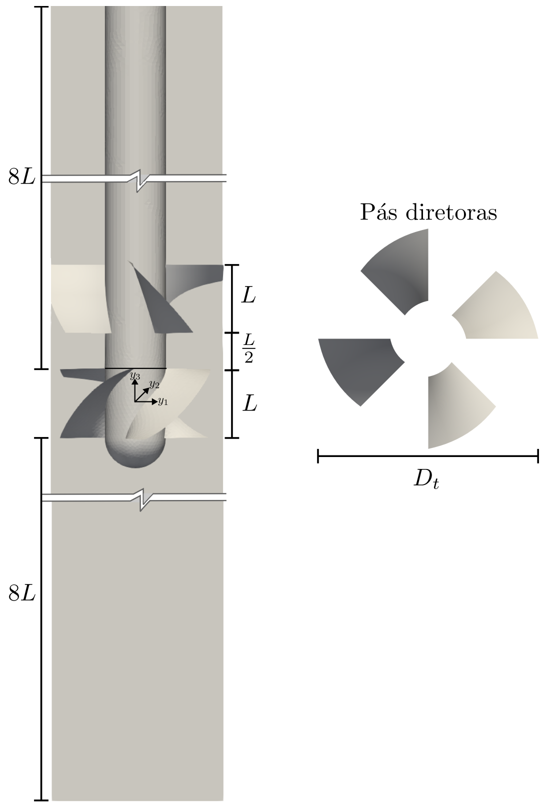


Fonte: Elaborada pela autora

Na Figura 100 pode ser observado o deslocamento na direção y_3 no ponto A da pá do rotor, cuja a média ao longo do tempo foi de −0,02436 cm. Na Figura 101 pode-se observar a velocidade angular ao longo do tempo. Fazendo-se a média da velocidade angular a partir de t = 0,15 s até o final da análise (t = 0,35 s), obteve-se uma velocidade de 119,75 rad/s.

Na Figura 102 são apresentados os campos de velocidade do escoamento ao longo de uma rotação das pás da turbina. Realizando-se o cálculo da vazão na seção de saída do escoamento no final do tempo de análise, obteve-se um valor de 139,58 dm^3/s. Nota-se que obteve-se um aumento de aproximadamente 8% na vazão com o auxílio das pás diretoras. Na Figura 103 pode-se observar os campos de pressão do escoamento ao longo de uma rotação da turbina.

Figura 98 – Turbina modelo Arlequin: Geometria



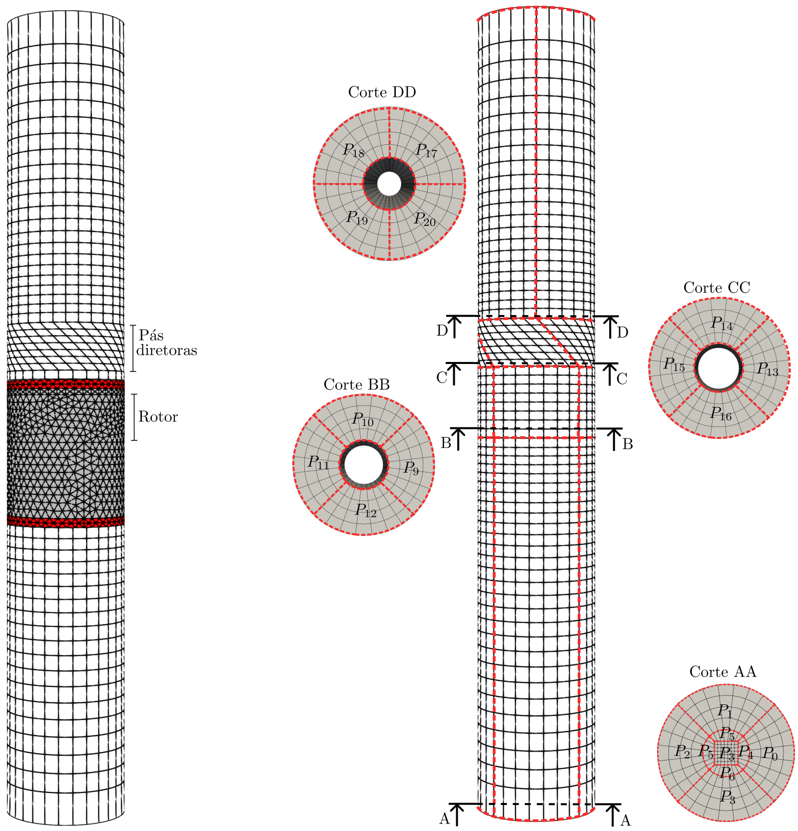
Fonte: Elaborada pela autora

Embora de maneira qualitativa, os resultados deste exemplo confirmam o potencial da metodologia proposta para problemas de estruturas com grandes rotações de corpo rígido.

Figura 99 – Turbina modelo Arlequin: Malhas

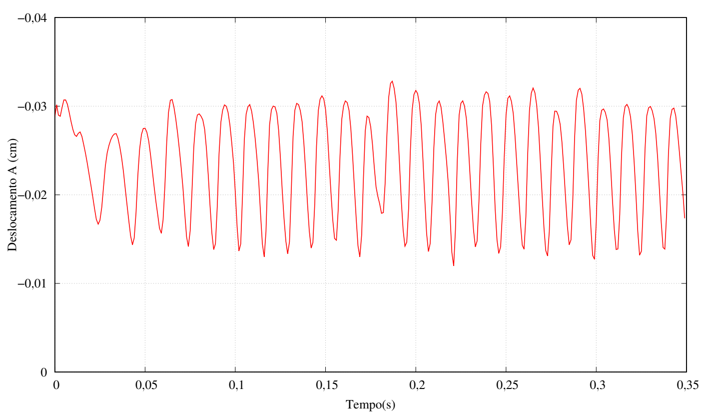
(a) Malha modelo Arlequin

(b) Malha global - *patches*



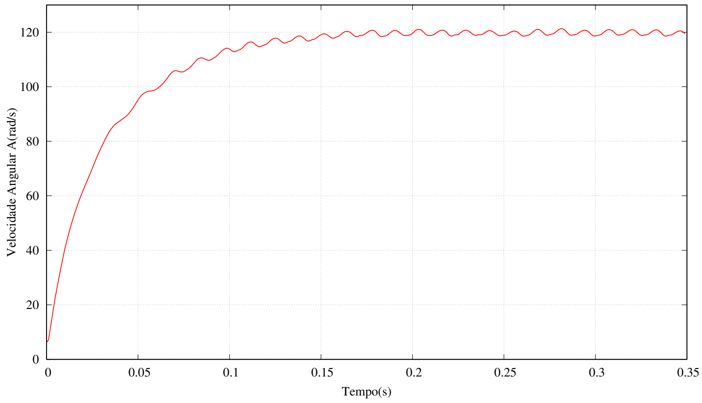
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 100 – Turbina modelo Arlequin: Deslocamento no ponto A



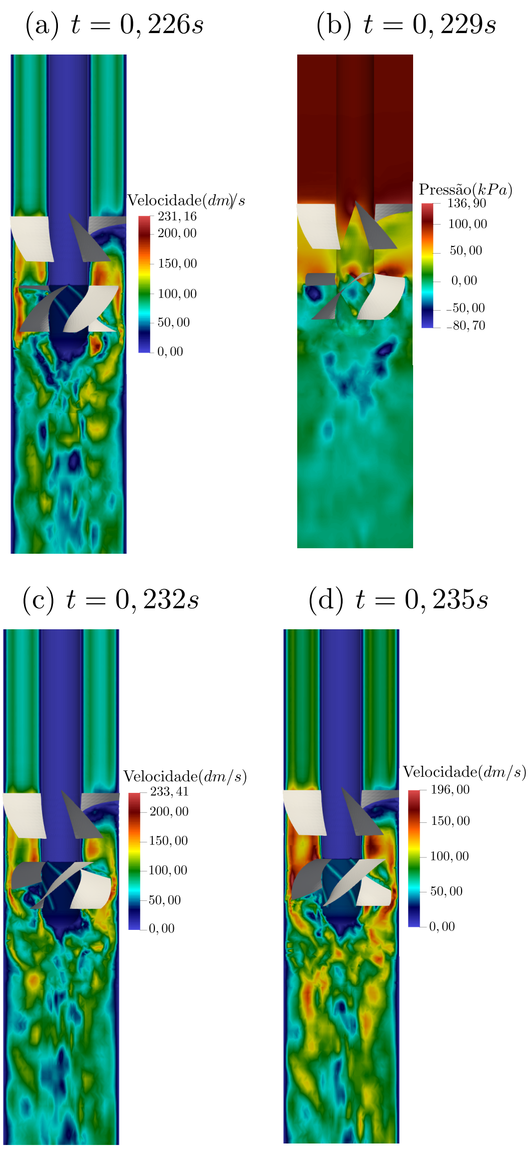
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 101 – Turbina modelo Arlequin: Velocidade angular no ponto A



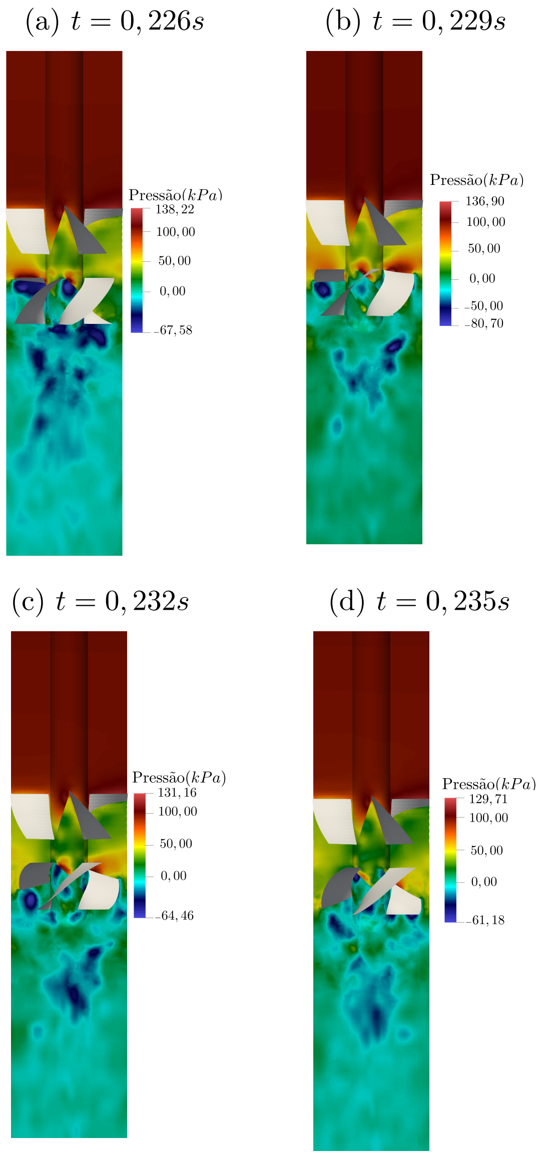
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 102 – Turbina modelo Arlequin: Campos de velocidade



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 103 – Turbina modelo Arlequin: Campos de pressão



Fonte: Elaborada pela autora

8 CONCLUSÃO

O principal objetivo deste trabalho foi o desenvolvimento e a implementação de uma metodologia numérica robusta para a análise tridimensional de problemas de interação fluido–estrutura (IFE) no contexto da análise isogeométrica e do método dos elementos finitos, em que o domínio fluido é representado por uma discretização global fixa, sobre a qual é superposta uma discretização local móvel e conforme aos contornos da estrutura. Essa abordagem permite captar simultaneamente a movimentação da estrutura e os efeitos localizados em torno da interface fluido–estrutura, com eficiência computacional, possibilitando ainda a combinação entre as discretizações isogeométrica e por elementos finitos.

Embora a análise numérica de interação fluido–estrutura já tenha alcançado certa maturidade, persistem desafios significativos, especialmente em problemas onde efeitos localizados, como os de camada limite, ocorrem junto a estruturas tridimensionais submetidas a grandes deslocamentos e rotações de corpo rígido, e especialmente nos casos de grandes rotações de corpo rígido que tornam impossível acomodar a movimentação da estrutura apenas defermando-se a malha do fluido. Esses desafios motivaram o desenvolvimento desta pesquisa.

O presente trabalho teve início com o desenvolvimento de um código computacional para a análise tridimensional de escoamentos isotérmicos, incompressíveis e com contornos móveis, empregando uma formulação estabilizada. A discretização espacial foi implementada de modo a permitir o uso tanto do método dos elementos finitos quanto da análise isogeométrica, com integração temporal implícita.

O programa computacional para escoamentos incompressíveis foi desenvolvido com base em uma formulação estabilizada fundamentada nas técnicas SUPG (Streamline Upwind Petrov–Galerkin), PSPG (Pressure-Stabilizing Petrov–Galerkin) e LSIC (Least-Squares Incompressibility Constraint) — metodologias amplamente reconhecidas e consolidadas na literatura científica. As equações de Navier–Stokes foram expressas por meio da descrição Arbitrária Euleriana–Lagrangiana (ALE), de modo a permitir a análise de problemas com contornos móveis.

No contexto do método dos elementos finitos, a discretização espacial adotou aproximações quadráticas, utilizando elementos triangulares de seis nós em 2D e elementos tetraédricos de dez nós em 3D. A discretização temporal foi realizada por meio de uma técnica implícita de marcha no tempo, o método α-generalizado, escolhido por permitir maior controle da dissipação numérica e, simultaneamente, preservar a precisão de segunda ordem. A verificação inicial do código foi realizada a partir de exemplos clássicos da literatura.

A implementação da análise isogeométrica teve como objetivo explorar as vantagens inerentes à isogeometria, especialmente a maior continuidade das funções de base e a representação geométrica exata dos domínios. Neste trabalho, foram utilizadas funções NURBS quadráticas, resultando em células quadrilaterais com nove pontos de controle em 2D e hexaédricas com vinte e sete em 3D.

A adaptação do código originalmente baseado no método dos elementos finitos exigiu modificações substanciais nas etapas de representação geométrica, pré-processamento, avaliação das funções de base, integração numérica, imposição de condições de contorno e pós-processamento. Além disso, foram adotados parâmetros de estabilização específicos para discretizações isogeométricas, conforme recomendações da literatura, visando melhorar o desempenho numérico. A verificação das implementações para escoamentos incompressíveis foi conduzida a partir de exemplos de referência antes de avançar para os desenvolvimentos subsequentes.

Na sequência, tratou-se da introdução de técnica de partição de domínio no programa para escoamentos incompressíveis de modo a capturar efeitos localizados, iniciando-se com a técnica denominada método da combinação de espaços de funções, que já vinha sendo aplicada com sucesso no contexto da fratura elástico-linear com grandes deslocamentos em trabalhos desenvolvidos concomitantemente a esta tese. Entretanto, para escoamentos incompressíveis formulados com técnicas de estabilização, verificou-se que a metodologia apresentava bom desempenho para baixos números de Reynolds, mas que instabilidades nos campos de velocidade e pressão surgiam na região de superposição à medida que o número de Reynolds aumentava. Após diversas análises, constatou-se que ajustes na magnitude dos parâmetros de estabilização podiam melhorar a resposta numérica nessa região, mas não garantiam estabilidade numérica de forma geral, descartando-se o emprego dessa técnica no presente trabalho.

Diante disso, adotou-se o método Arlequin estabilizado, na formulação RBSAM proposta por Fernandes *et al.* (2020), iniciando-se com a extensão desse método para o contexto tridimensional. A técnica consiste em acoplar os modelos logal e global em uma região da zona de superposição por meio de multiplicadores de Lagrance, seguido da introdução de um termo estabilizante construído a partir do gradiente do resíduo da equação governante ponderado por um parâmetro de estabilização. O parâmetro de estabilização τ_{ARLQ} foi definido com base em Tezduyar e Osawa (2000), Tezduyar e Sathe (2003), de modo que a magnitude dos termos de estabilização fosse compatível com os da equação de acoplamento. A implementação foi inicialmente verificada em domínios fixos e então partiu-se para o desenvolvimento nos casos de contornos locais móveis.

O modelo para movimentação da malha foi desenvolvido durante o estágio de Doutorado Sanduíche (TONON *et al.*, 2021), optando-se pela implementação da técnica de movimentação de malha MJBS (*Mesh-Jacobian Based Stiffening*), apresentada por Tezduyar *et al.* (1992c) e Tezduyar *et al.* (1993), que resolve a movimentação da malha a partir da solução de um problema de elasticidade de Dirichlet fictício. A técnica atribui a cada elemento uma rigidez diferente, que visa preservar os aspectos dos elementos menores, impedindo inversão de elementos ou que elementos assumam volume muito pequeno. A partir dessa implementação, estendeu-se e verificou-se a formulação do método de Arlequin estabilizado para problemas com contornos móveis. Nesse cenário, a malha local é formulada com uma descrição em ALE utilizando-se a técnica MJBS, enquanto que a malha global apresenta descrição Euleriana e permanece fixa ao longo de toda análise.

Após todas as implementações necessárias para a dinâmica dos fluidos, foi então conduzido um estudo de dinâmica dos sólidos computacional, escolhendo-se modelar a estrutura com elementos de casca de Reissner–Mindlin em descrição Lagrangiana total, empregando uma formulação baseada em posições, que não utiliza rotações como parâmetros nodais (CODA; PACCOLA, 2007; SANCHES; CODA, 2013). Os elementos de casca possuem flexibilidade para representar as estruturas envolvidas em uma ampla gama de problemas de IFE, e a formulação adotada é reconhecidamente robusta para aplicações como as pretendidas neste trabalho. Para discretização espacial utilizou-se elementos triangulares quadráticos de seis nós e a integração temporal implícita foi realizada com o integrador de Newmark, amplamente verificado na literatura.

Por fim, tratou-se do acoplamento fluido–estrutura, adotando-se uma metodologia particionada forte do tipo bloco-iterativo, que garante a modularidade completa entre os códigos computacionais para fluido e para estrutura. O acoplamento é do tipo Dirichlet–Neumann, implementado com projeção entre interfaces não coincidentes, garantindo a transferência consistente de quantidades cinemáticas e dinâmicas entre fluido e estrutura.

O acoplamento fluido-estrutura considerando o particionamento do domínio do fluido — ou seja, a superposição de uma malha local à uma malha global —, consiste numa técnica híbrida Euleriana–ALE, de modo que apenas a malha local, em contato com a estrutura, se movimenta para acomodar as mudanças de configuração da estrutura, enquanto a malha global permanece fixa.

O modelo computacional final para IFE foi testado por meio de exemplos com soluções numéricas de referência confiáveis, incluindo os problemas de cavidade com escoamento oscilatório e base flexível e painel flexível submetido a desprendimento de vórtices, sendo possível demonstrar a precisão e consistência da ferramenta desenvolvida.

Por fim, foi proposta a análise de uma turbina hidráulica tridimensional, composta por pás diretoras rígidas fixas e um rotor vinculado a um eixo livre para girar, imersos em um tubo de seção circular, sendo submetida a uma diferença de pressão. Essa simulação não é possível de ser conduzida empregando os métodos tradicionais de malhas móveis, a menos que esses sejam associados a técnicas robustas de remalhamento dinâmico. No entanto, a partição de domínios com o método RBSAM, torna possível a simulação, sendo que uma malha global isogeométrica foi adotada para dizcretizar todo o domínio fluido, incluindo as interfaces com as pás diretoras, enquanto o rotor foi inserido por meio de uma malha local em elementos finitos, móvel e adaptada à estrutura. Embora avaliado de forma qualitativa, esse exemplo ilustra o potencial da metodologia proposta para o tratamento de estruturas sujeitas a grandes rotações de corpo rígido.

De forma geral, os resultados obtidos demonstram a consistência, robustez e potencial de aplicação da metodologia proposta para a análise tridimensional de problemas complexos de interação fluido–estrutura. As principais contribuições originais concentram-se na integração entre a Análise Isogeométrica e o Método dos Elementos Finitos em um arcabouço particionado com malhas superpostas, associada à extensão do método Arlequin estabilizado (RBSAM) para escoamentos incompressíveis com contornos móveis tridimensionais. A metodologia proposta combina as vantagens dos métodos de malha móvel e dos métodos imersos, garantindo descrição precisa da interface e flexibilidade frente a grandes deslocamentos e rotações, minimizando a necessidade de remalhamentos. Assim, esta pesquisa representa um avanço teórico e computacional relevante, contribuindo para o desenvolvimento de técnicas numéricas mais eficientes e integradas para a modelagem e simulação de fenômenos complexos de interação fluido–estrutura.

8.1 Sugestão para trabalhos futuros

Como proposta para trabalhos futuros voltados à dinâmica dos fluidos computacional, recomenda-se a incorporação de modelos de turbulência do tipo LES (Large Eddy Simulation) ou RANS (Reynolds-Averaged Navier–Stokes). Essa ampliação é especialmente relevante, considerando que muitos problemas de interação fluido–estrutura de interesse prático envolvem regimes turbulentos, para os quais a modelagem direta (DNS), mesmo com a partição de modelos, pode se tornar inviável do ponto de vista computacional.

No contexto da análise isogeométrica, uma linha de avanço promissora consiste na integração do código desenvolvido com plataformas de modelagem geométrica consolidadas, como o Rhinoceros 3D, por meio da leitura direta de modelos NURBS exportados em formatos padronizados (IGES ou STEP). Essa integração viabilizaria o uso de geometrias complexas e realistas, eliminando a necessidade de geração manual das superfícies e volumes utilizados na discretização isogeométrica.

Em relação ao método Arlequin estabilizado, recomenda-se explorar a sugestão apresentada por Fernandes (2020) em sua tese de doutorado. O autor observa que, embora a inserção do termo de estabilização no operador de acoplamento melhore o condicionamento do sistema algébrico, outros fatores, como o valor da constante k_A, também contribuem para o mal condicionamento. Nesse sentido, o autor sugere o uso de técnicas desenvolvidas em trabalhos prévios, como os de Dhia, Elkhodja e Roux (2008) e Schlittler e Cottereau

(2017), no contexto da computação de alto desempenho (HPC – *High Performance Computing*). Em ambos os trabalhos, foi empregado o algoritmo FETI (*Finite Element Tearing and Interconnect*), que se baseia no particionamento do sistema algébrico em subproblemas independentes. Assim, métodos iterativos eficientes, como o GMRES (*Generalized Minimum Residual Method*), combinados com pré-condicionadores apropriados, podem ser empregados para a resolução eficiente de problemas de escoamentos incompressíveis.

Ainda no âmbito do método Arlequin estabilizado, propõe-se investigar as diferentes combinações possíveis de discretizações global e local – por exemplo, utilizando ambas em análise isogeométrica, ambas em elementos finitos, ou ainda uma malha local isogeométrica combinada a uma malha global em elementos finitos. Essa flexibilidade pode revelar vantagens em precisão, estabilidade e custo computacional, dependendo do tipo de problema.

No contexto da dinâmica dos sólidos computacional, sugere-se, como alternativa à técnica de integração temporal atualmente empregada, a implementação do método α-generalizado no código computacional desenvolvido, de modo a dissipar seletivamente as componentes de alta frequência, preservando a precisão de segunda ordem no tempo. Além disso, a utilização de integradores temporais consistentes entre os domínios de fluido e estrutura pode melhorar a convergência e estabilidade do acoplamento. Também se propõe explorar a discretização isogeométrica para o domínio estrutural, ampliando a coerência entre as formulações.

Por fim, no contexto da interação fluido–estrutura, propõe-se a aplicação da técnica de relaxação de Aitken ao método de particionamento forte do tipo bloco iterativo. Essa técnica numérica pode acelerar a convergência (ou evitar divergência) no processo iterativo de acoplamento entre o fluido e a estrutura. Em vez de atualizar diretamente as condições de interface com o valor obtido em cada iteração, realiza-se uma combinação ponderada entre as iterações atual e anterior, com um fator de relaxação adaptativo calculado automaticamente a partir do histórico do erro iterativo. A adoção dessa estratégia elimina a necessidade da metodologia *Augmented A22*, que requer a escolha manual de um parâmetro multiplicador associado à parcela da matriz de massa estrutural na matriz tangente global.

REFERÊNCIAS

AKKERMAN, I. *et al.* Free-surface flow and fluid-object interaction modeling with emphasis on ship hydrodynamics. **Journal of Applied Mechanics**, v. 79, n.1, 2012. DOI: 10.1115/1.4005072

ALFONSI, G. Reynolds-averaged navier–stokes equations for turbulence modeling. **Applied Mechanics Reviews**, v. 62, n. 4, July 2009.
DOI: https://doi.org/10.1115/1.3124648.

ANDERSON, J. D. **Computational fluid dynamic - the basics with applications**. New York: McGraw-Hill Book, 1995.

ARGYRIS, J. An Excursion into large rotations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 32, p. 85–155, 1982.

ARGYRIS, J.; PAPADRAKAKIS, M.; MOUROUTIS, Z. S. Nonlinear dynamic analysis of shells with the triangular element TRIC. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 192, p. 3005–3038, 2003.

ARMALY, B. F. *et al.* Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 127, p. 473–496, 1983.

AVANCINI, G. **Formulação unificada para análise tridimensional de interação fluido-estrutura com escoamento de superfície livre: Uma abordagem Lagrangiana baseada em posições**. 2023. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

AVANCINI, G.; SANCHES, R. A. K. A Total lagrangian position-based finite element formulation for free-surface incompressible flow. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 169, Feb. 2020.
DOI: 10.1016/j.finel.2019.103348.

BADIA, S.; NOBILE, F.; VERGARA, C. Fluid-structure partitioned procedures based on robin transmission conditions. **Journal of Computational Physics**, v. 227, p. 7027–7051, 2008.

BATTINI, J. M.; PACOSTE, C. On the Choice of the linear element for corotational triangular shells. **Computer Methods in Applied Mechanicas and Engineering**, v. 195, n. 44-47, p. 6362–6377, 2006.

BAUMAN, P. T. *et al.* On the Application of the Arlequin method to the coupling of particle and continuum models. **Computacional Mechanics**, v. 42, p. 511–530, 2008.

BAZILEVS, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E. **Computational fluid-structure interaction: methods and applications**. Chichester: John Wiley, 2013a.

BAZILEVS, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. Challenges and directions in computational fluid-structure interaction. **Mathematical Models and Methods in Applied Sciences**, v. 23, p. 215–221, 02 2013b.

BAZILEVS, Y.; AKKERMAN, I. Large eddy simulation of turbulent taylor–couette flow using isogeometric analysis and the residual-based variational multiscale method. **Journal of Computational Physics**, v. 229, n. 9, p. 3402–3414, 2010.

BAZILEVS, Y. *et al.* Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, p. 173–201, 2007.

BAZILEVS, Y. *et al.* Isogeometric fluid-structure interaction: theory, algorithms, and computations. **Computational Mechanics**, v. 43, p. 3–37, 2008.

BAZILEVS, Y. *et al.* Isogeometric variational multiscale modeling of wall-bounded turbulent flows with weakly enforced boundary conditions on unstretched meshes. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 199, n. 13, p. 780 – 790, 2010.

BAZILEVS, Y. *et al.* Aerodynamic and FSI analysis of wind turbines with the ALE-VMS and ST-VMS methods. **Archives of Computational Methods in Engineering**, v. 21, p. 359–398, 2014.

BELYTSCHKO, T. *et al.* Element-free Galerkin methods for static and dynamic fracture. **International Journal of Solids and Structures**, v. 32, n. 17–18, p. 2547–2570, 1995.

BENEK, J. *et al.* **Chimera: a grid-embedding technique**. Arnold Air Force Base: AEDC, 1986. (AEDC-TR-85-64)

BISCANI, F. *et al.* Mixed-dimensional modeling by means of solid and higher-order multi-layered plate finite elements. **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, v. 23, n. 9, p. 960–970, 2016.

BLOM, F. J. A Monolithical fluid-structure interaction algorithm applied to the piston problem. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 167, n. 3-4, p. 369–391, 1998.

BONET, J. *et al.* Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 5-7, p. 579–595, 2000.

BORDEN, M. J. *et al.* Isogeometric finite element data structures based on bézier extraction of nurbs. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 87, n. 1-5, p. 15–47, 2011.
DOI: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.2968.

BOTTASSO, C. L.; DETOMI, D.; SERRA, R. The Ball-vertex method: a new simple spring analogy method for unstructured dynamic meshes. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 194, n. 39, p. 4244–4264, 2005.

BREZZI, F.; FORTIN, M. Mixed and hybrid finite element methods. New York: Springer, 1991. (**Springer Series in Computational Mathematics**, 15)

BROOKS, A. N.; HUGHES, T. J. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 32, n. 1-3, p. 199–259, 1982.

CALEYRON, F. *et al.* SPH modeling of fluid-solid interaction for dynamic failure analysis of fluid-filled thin shells. **Journal of Fluids and Structures**, v. 39, p. 126–153, 2013.

CARRAZEDO, R.; CODA, H. B. Alternative positional FEM applied to thermomechanical impact of truss structures. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 46, n. 11, p. 1008–1016, 2010.

CATABRIGA, L.; COUTINHO, A. L. G. Implicit SUPG solution of euler equations using edge-based data structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 191, n. 32, p. 3477–3490, 2002.

CHUNG, J.; HULBERT, G. M. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized-$\boldsymbol{\alpha}$ method. **Journal of Applied Mechanics**, v. 60, n. 2, p. 371–375, 06 1993. ISSN 0021-8936.

CHUNG, T. J. **Computional fluid dynamics**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

CIRAK, F.; RADOVITZKY, R. A Lagrangian-Eulerian shell-fluid coupling algorithm based on level sets. **Computers & Structures**, v. 83, p. 491–498, 2005.

CODA, H. B. **Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: Uma formulação posicional baseada no MEF**. 2003. Tese (Professor Titular) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

CODA, H. B. **O Método dos elementos finitos posicional: sólidos e estruturas - não linearidade geométrica e dinâmica**. São Carlos: EESC-USP, 2018.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. An Alternative positional FEM formulation for geometrically non-linear analysis of shells: Curved triangular isoparametric elements. **Computional Mechanics**, v. 40, n. 1, p. 185–200, jun 2007.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A Positional FEM formulation for geometrical non-linear analysis of shells. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 5, p. 205–223, 2008.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Unconstrained finite element for geometrical nonlinear dynamics of shells. **Mathematical Problems in Engineering**, 2009.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Improved finite element for 3D laminate frame analysis including warping for any cross-section. **Applied Mathematical Modelling**, v. 34, n. 4, p. 1107–1137, 2010.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A FEM procedure based on positions and unconstrained vectors applied to non-linear dynamic of 3D frames. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 47, n. 4, p. 319–333, 2011.

COX, M. G. The numerical evaluation of b-splines*. **IMA Journal of Applied Mathematics**, v. 10, n. 2, p. 134–149, 10 1972.
DOI: https://doi.org/10.1093/imamat/10.2.134.

DE BOOR, C. On calculating with b-splines. **Journal of Approximation Theory**, v. 6, n. 1, p. 50–62, 1972.

DHIA, H. B.; ELKHODJA, N.; ROUX, F.-X. Multimodeling of multi-alterated structures in the Arlequin framework. **European Journal of Computational Mechanics**, v. 17, n. 5-7, p. 969–980, 2008.

DHIA, H. B.; JAMOND, O. On the Use of XFEM within the Arlequin framework for the simulation of crack propagation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 199, n. 21-22, p. 1403–1414, 2010.

DHIA, H. B.; RATEAU, G. The Arlequin method as a flexible engineering design tool. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 62, n. 11, p. 1442–1462, 2005.

DHIA, H. B.; TORKHANI, M. Modeling and computation of fretting wear of structures under sharp contact. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 85, p. 61–83, 2011.

DHIA, H. B. Multiscale mechanical problems: The Arlequin method. **Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Série IlB**, v. 326, p. 899–904, 1998.

DHIA, H. B. Further insights by theoretical investigations of the multiscale Arlequin method. **International Journal for Multiscale Computational Engineering**, v. 6, n. 3, p. 215–232, 2008.

DHIA, H. B.; RATEAU, G. Mathematical analysis of the mixed Arlequin method. **Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Série I**, v. 332, p. 649–654, 2001.

DHIA, H. B.; RATEAU, G. Application of the Arlequin method to some structures with defects. **Revue Européenne des Éléments Finis**, v. 11, n. 2-4, p. 291–304, 2002.

DONEA, J. A taylor-galerkin method for convective transport problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 20, p. 101–119, 1984.

DONEA, J.; HUERTA, A. **Finite Element Methods for flow problems**. Chichester: John Wiley, 2003.

DONEA, J.; GIULIANI, S.; HALLEUX, J. P. An Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 33, n. 1-3, p. 689–723, 1982.

FARHAT, C.; HARARI, I.; FRANCA, L. P. The Discontinuous enrichment method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 48, p. 6455–6479, 2001.

FELIPPA, C. A.; PARK, K. C.; FARHAT, C. Partitioned analysis of coupled mechanical systems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 24-25, p. 3247–3270, 2001.

FERNANDES, J. W. D. **Técnica de superposição de modelos estabilizada para análise de interação fluido-estrutura**. 2020. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.

FERNANDES, J. W. D. *et al.* A Residual-based stabilized finite element formulation for incompressible flow problems in the arlequin framework. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 370, Oct. 2020.
DOI: https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113073..

FERNANDES, J. W. D.; CODA, H. B.; SANCHES, R. A. K. ALE incompressible fluid–shell coupling based on a higher-order auxiliary mesh and positional shell finite element. **Computational Mechanics**, v. 63, n. 3, p. 555–569, 2019.

FERNIER, A.; FAUCHER, V.; JAMOND, O. Multi-model Arlequin approaches for fast transient, FSI-oriented, fluid dynamics with explicit time integration. **Computers and Fluids**, v. 199, Mar. 2020.
DOI: https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2020.104428.

FISH, J. The s-version of the finite element method. **Computers & Structures**, v. 43, n. 3, p. 539–547, 1992.

FÖRSTER, C.; WALL, W. A.; RAMM, E. Artificial added mass instabilities in sequential staggered coupling on nonlinear structures and incompressible viscous flows. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 196, p. 1278–1293, 2007.

GERBEAU, J. F.; VIDRASCU, M. A Quasi-newton algorithmm based on a reduced model for fluid-structure interaction problems in blood flows. **ESAIM Mathematical Modelling and Numerical Analysis**, v. 37, p. 631–647, 2003.

GERMANO, M. *et al.* A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. **Physics of Fluids A: fluid dynamics**, v. 3, n. 7, p. 1760–1765, 1991. ISSN 0899-8213.
DOI: https://doi.org/10.1063/1.857955.

GHIA, U.; GHIA, K. N.; SHIN, C. T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. **Journal of Computational Physics**, v. 48, p. 387–441, 1982.

GRECO, M.; CODA, H. B. A Simple and precise FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, p. 3541–3557, 2004.

GRUTTMANN, F.; SAUER, R.; WAGNER, W. Theory and numerics of three-dimensional beams with elastoplastic material behaviour. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 48, n. 12, p. 1675–1702, 2000.

GUIDAULT, P.-A.; BELYTSCHKO, T. On the l2 and the h1 couplings for an overlapping domain decomposition method using lagrange multipliers. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 70, n. 3, p. 322–350, 2007.
DOI: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1882.

HANSBO, A.; HANSBO, P. An Unfitted finite element method, based on Nitsche's method, for elliptic interface problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 191, n. 47–48, p. 5537–5552, 2002.

HöLLIG, K.; REIF, U.; WIPPER, J. Weighted extended b-spline approximation of dirichlet problems. **SIAM Journal of Numerical Analysis**,v. 39, n. 2, p. 442–462, 2001.

HOU, G.; WANG, J.; LAYTON, A. Numerical methods for fluid-structure interaction - a review. **Communications in Computational Physics**, v. 12, p. 337–377, 2012.

HRON, J.; MADLIK, M. Fluid-structure interaction with applications in biomechanics. **Nonlinear Analysis: Real World Applications**, v. 8, n. 5, p. 1431–1458, 2007.

HÜBNER, B.; WALHORN, E.; DINKLER, D. A Monolithic approach to fluid-structure interaction using space-time finite elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, p. 2087–2104, 2004.

HUGHES, T. **The Finite element method: linear static and dynamic finite element analysis**. New York: Dover, 2000. (Dover Civil and Mechanical Engineering).

HUGHES, T. J.; FRANCA, L. P.; BALESTRA, M. A New finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuška-Brezzi condition: a stable Petrov-Galerkin formulation of the stokes problem accommodating equal-order interpolations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 59, n. 1, p. 85–99, 1986.

HUGHES, T. J.; FRANCA, L. P.; HULBERT, G. M. A New finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 73, n. 2, p. 173–189, 1989.

HUGHES, T. J.; LIU, W. K.; ZIMMERMAN, T. K. Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 29, p. 329–349, 1981.

HUGHES, T. J. R. Stability, convergence and growth and decay of energy of the average acceleration method in nonlinear structural dynamics. **Computers & Structures**, v. 6, p. 313–324, 1976.

HUGHES, T. J. R. Multiscale phenomena: Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale methods, bubbles and the origins of stabilized methods. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 127, p. 387–401, 1995.

HUGHES, T. J. R.; COTTRELL, J. A.; BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement . **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 194, p. 4135–4195, 2005.

HUGHES, T. J. R. *et al.* The Variational multiscale method - a paradimg for computational mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 166, p. 3–24, 1998.

HUGHES, T. J. R.; LIU, W. K. Nonlinear finite element analysis of shells: Part I. three-dimensional shells. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 26, n. 3, p. 331–362, 1981a.

HUGHES, T. J. R.; LIU, W. K. Nonlinear finite element analysis of shells: Part II. two-dimensional shells. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 27, n. 2, p. 167–181, 1981b.

HUGHES, T. J. R.; OBERAI, A. A.; MAZZEI, L. Large Eddy Simulation of turbulent channel flows by the variational multiscale method. **Physics of Fluids**, v. 13, p. 1874–1799, 2001.

HUGHES, T. J. R.; TEZDUYAR, T. E. Finite element methods for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible Euler equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 45, p. 217–284, 1984.

IBRAHIMBEGOVIC, A.; TAYLOR, R. L. On the Role of frame-invariance in structural mechanics models at finite rotations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 191, p. 5159–5176, 2002.

IRONS, B. M.; TUCK, R. C. A Version of the Aitken accelerator for computer iteration. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 1, n. 3, p. 275–277, 1969.

JAMOND, O.; DHIA, H. B. Incompressibility in the multimodel Arlequin framework. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 94, p. 374–399, 2013.

JANSEN, K. E.; WHITING, C. H.; HULBERT, G. M. A Generalized-$\boldsymbol{\alpha}$ method for integrating the filtered Navier–Stokes equations with a stabilized finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 3, p. 305 – 319, 2000.

JOHNSON, A. A.; TEZDUYAR, T. E. Mesh update strategies in parallel finite element computations of flow problems with moving boundaries and interfaces. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 119, p. 73–94, 1994.

KANCHI, H.; MASUD, A. A 3D adaptative mesh moving scheme. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 54, p. 923–944, 2007.

KUHL, D.; RAMM, E. Generalized energy-momentum method for non-linear adaptative shell dynamics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 178, p. 343–366, 1999.

KÜTTLER, U.; WALL, W. A. Fixed-point fluid–structure interaction solvers with dynamic relaxation. **Computational Mechanics**, v. 43, n. 1, p. 61–72, 2008.

LAUNDER, B. E.; SPALDING, D. B. **Lectures in mathematical models of turbulence**. New York: Academic Press, 1972.

LEFRANÇOIS, E. A Simple mesh deformation technique for fluid-structure interaction based on a submesh approach. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 75, p. 1085–1101, 2008.

LIENHARD, J. H. **Synopsis of lift, drag, and vortex frequency data for rigid circular cylinders**. Pullman: Technical Extension Service, Washington State University, 1966. (Bulletin / College of Engineering. Research Division ; 300).

MELENK, J. M.; BABUSKA, I. The Partition of unity finite element method: Basic theory and applications. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, n. 1, p. 289–314, 1996.

MITTAL, R.; IACCARINO, G. Immersed boundary methods. **Annual Review of Fluid Mechanics**, v. 37, p. 237–261, 2005.

MITTAL, S.; TEZDUYAR, T. Massively parallel finite element computation of incompressible flows involving fluid-body interactions. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 112, n. 1, p. 253 – 282, 1994.

MOËS, N. *et al.* A Computational approach to handle complex microstructure geometries. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 192, n. 28–30, p. 3163–3177, 2003.

MOK, D. P. **Partitionierte Lösungsansätze in der Strukturdynamik und der Fluid-Struktur-Interaktion**. 2001. Dissertation (Doktorarbeit) — Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Stuttgart, 2001.

NAYROLES, B.; TOUZOT, G.; VILLON, P. Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements. **Computational Mechanics**, v. 10, n. 5, p. 307–318, 1992.

OGDEN, R. W. **Non-linear elastic deformations**. Chichester,: Ellis Harwood, 1984.

OTOGURO, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E. Element length calculation in B-spline meshes for complex geometries. **Computational Mechanics**, v. 65, p. 1085–1103, 2020.

PESKIN, C. S. Flow patterns around heart valves: A numerical method. **Journal of Computational Physics**, v. 10, n. 2, p. 252–271, 1972.

PIEGL, L.; TILLER, W. **The NURBS Book**. 2^{nd}ed. New York: Springer-Verlag, 1996.

PIOMELLI, U. Large-eddy simulation: achievements and challenges. **Progress in Aerospace Sciences**, v. 35, n. 4, p. 335–362, 1999.

REDDY, J. N. **An Introduction to the finite element method**. 3^{rd}ed. New York: McGraw Hill, 2006.

REDDY, J. N.; GARTLING, D. K. **The Finite element method in heat transfer and fluid dynamics**. 3^{rd}ed. Boca Raton: CRC Press, 2010.

RICHTER, T. **Fluid-structure Interactions: models, analysis and finite elements**. Berlin: Springer International Publishing, 2017.

ROSA, R.; CODA, H.; SANCHES, R. A. K. Blended isogeometric-finite element analysis for large displacements linear elastic fracture mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 392, p. 114622, 2022.

ROSA, R. J. R. **Técnica de partição de domínio para análise numérica de sólidos bidimensionais fraturados combinando análise isogeométrica e elementos finitos**. 2021. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. An Embedded domain technique based on level-sets for finite element method (FEM) fluid-shell coupling. **Mecánica Computacional**, v. 29, p.4801–4818, 2010a.

SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Fluid-structure interaction using an arbitrary Lagrangian-Eulerian fluid solver coupled to a positional Lagrangian shell solver. **Mecánica Computacional**, v. 29, p.1627–1647, 2010b.

SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Unconstrained vector nonlinear shell formulation applied to fluid-structure interaction. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engeneering**, v. 259, p. 177–196, 2013.

SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. On Fluid-shell coupling using an arbitrary Lagrangian-Eulerian fluid solver coupled to a positional Lagrangian shell solver. **Applied Mathematical Modelling**, v. 38, p. 3401–3418, 2014.

SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Flexible multibody dynamics finite element formulation applied to structural progressive collapse analysis. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 13, n. 16, p. 52–71, 2016.

SANCHES, R. A. K.*et al. Fluid-structure interaction computation with multi-scale overlapping meshes.* In: **CILAMCE – IBERO-LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING**, 40., 2019, Natal, RN. *Anais...* Natal: ABCM, 2019.

SCHLITTLER, T. M.; COTTEREAU, R. Fully scalable implementation of a volume coupling scheme for the modeling of multiscale materials. **Computational Mechanics**, v. 60, n. 5, p. 827–844, 2017.

SIMO, J. C.; FOX, D. D. On a Stress resultant geometrically exact shell model. Part I: formulation and optimal parametrization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 72, p. 267–304, 1989.

SPEZIALE, C. G. Analytical methods for the development of reynolds-stress closures in turbulence. **Annual Review of Fluid Mechanics**, v. 23, p. 107–157, 1991.

STEIN, K.; TEZDUYAR, T. E.; BENNEY, R. Automatic mesh update with the solid-extension mesh moving technique. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.**, v. 193, p. 2019–2032, 2004.

STRANG, G.; FIX, G. **An analysis of the Finite Element Method**. 2^{nd}ed. Cambridge: Wesley-Cambridge Press, 2008.

STROUBOULIS, T.; COPPS, K.; BABUSKA, I. The Generalized finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 32–33, p. 4081–4193, 2001.

TAKIZAWA, K. .; TEZDUYAR, T. Space–time fluid–structure interaction methods. **Mathematical Models and Methods in Applied Sciences**, v. 22, 2012. DOI: https://doi.org/10.1142/S0218202512300013.

TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E.; OTOGURO, Y. Stabilization and discontinuity-capturing parameters for space-time flow computations with finite element and isogeometric discretizations. **Computational Mechanics**, v. 62, n. 5, p. 1169–1186, 2018.

TAKIZAWA, K.; UEDA, Y.; TEZDUYAR, T. E. A Node-numbering-invariant directional length scale for simplex elements. **Mathematical Models and Methods in Applied Sciences**, v. 29, n. 14, p. 2719–2753, 2019. DOI: https://doi.org/10.1142/S0218202519500581.

TALLEC, P. L.; MOURO, J. Fluid structure interaction with large structural displacements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, p. 3039–3067, 2001.

TEZDUYAR, T. Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations. *In*: HUTCHINSON, J. W.; WU, T. Y. (ed.). **Advances in applied mechanics**. San Diego: Academic Press, 1992. p. 1-44. (Advances in Applied Mechanics, v. 28).

TEZDUYAR, T.; SATHE, S. Stabilization parameters in supg and pspg formulations. **Journal of Computational and Applied Mechanics**, v. 4, n. 1, p. 71–88, 2003.

TEZDUYAR, T.; ALIABADI, S.; BEHR, M. Enhanced-Discretization Interface-Capturing Technique (EDICT) for computation of unsteady flows with interfaces. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 155, p. 235–248, 1998.

TEZDUYAR, T. *et al.* Parallel finite-element computation of 3D flows. **Computer**, v. 26, n. 10, p. 27–36, 1993.

TEZDUYAR, T. E. Stabilized finite element methods for flows with moving boundaries and interfaces. **HERMIS: The International Journal of Computer Mathematics and its Applications**, v. 4, p. 63–88, 2003.

TEZDUYAR, T. E.; ALIABADI, S. EDICT for 3D computation of two-fluid interfaces. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, p. 403–410, 2000.

TEZDUYAR, T. E.; OSAWA, Y. Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 3, p. 411–430, 2000.

TEZDUYAR, T. E.; SATHE, S. Enhanced-discretization successive update method (EDSUM). **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 47, p. 633–654, 2005.

TEZDUYAR, T. E.; BEHR, M.; LIOU, J. A New strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces - the deforming-spatial-domain/space-time procedure: I. The concept and the preliminary numerical tests. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 94, p. 339–351, 1992.

TEZDUYAR, T. E. *et al.* Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 95, p. 221–242, 1992a.

TEZDUYAR, T. E. *et al.* A New strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces - the deforming-spatial-domain/space-time procedure: II. Computation of free-surface flows, two-loquid flows, and flows with drifting cylinders. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 94, p. 353–371, 1992b.

TEZDUYAR, T. E. *et al.* Computation of unsteady incompressible flows with the finite element methods: Space-time formulations, iterative strategies and massively parallel implementations. *IN:* NEW Methods in Trasient Analysis. New York: ASME, 1992c. p.7-24. (PVP-Vol.246/AMD-Vol.143).

TONON, P. **Simulação numérica de escoamentos incompressíveis através da análise isogemétrica**. 2016. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

TONON, P. *et al.* A linear-elasticity-based mesh moving method with no cycle-to-cycle accumulated distortion. **Computational Mechanics**, v. 67, p. 413–434, 2021.

TRUESDELL, C. A. Hypo-elasticity. **Journal Rational Mechanics and Analysis**, v. 4, p. 83–133, 1955.

VÁZQUEZ, J. G. V. **Nonlinear analysis of orthotropic membrane and shell structures including fluid-structure interaction**. 2007. Tesis (Doctorado) — Universitat Politecnica de Catalunya, Barcelona, Espanha, 2007.

WALL, W. A.; RAMM, E. Fluid structure interaction based upon a stabilized (ALE) finite element method. *In*: IDELSHON, S. *et al.* (ed.). **Computational Mechanics**. Barcelona: CIMNE, 1998.

WANDERLEY, J.; LEVI, C. Validation of a finite difference method for the simulation of vortex-induced vibrations on a circular cylinder. **Ocean Engineering**, v. 29, n. 4, p. 445–460, 2002.

WANG, K. *et al.* Algorithms for interface treatment and load computation in embedded boundary methods for fluid and fluid–structure interaction problems. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**,v. 67, n. 9, p. 1175–1206, 2011.

WILCOX, D. C. **Turbulence modeling for CFD**. La Cañada: DCW Industries, 1993.

WILLIAMS, P. T.; BAKER, A. J. Numerical simulations of laminar flow over a 3d backward-facing step. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 24, p. 1159–1183, 1999.

YOKOMIZO, M. H. **Análise numérica de problemas de interação fluido-estrutura com vorticidade**. 2024. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2024.

ZHANG, Y. *et al.* Patient-specific vascular nurbs modeling for isogeometric analysis of blood flow. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 196, n. 29, p. 2943 – 2959, 2007.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; NITHIARASU, P. **The Finite element method: the basis**. 6^{th}ed. Ozônia: Butterworth Heinemann Linacre house, 2005a. v. 1.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; NITHIARASU, P. **The Finite element method: fluid dynamics**. 6^{th}ed. Ozônia: Butterworth Heinemann Linacre house, 2005b. v.3

APÊNDICES

APÊNDICE A – MALHA PÁS ROTOR

Conforme apresentado na subseção 7.4.4 a geometria do rotor da turbina foi gerada a partir do CFturbo®, sendo a malha discretizada em elementos finitos triangulares quadráticos a partir do software GMSH. As coordenadas dos nós e as conectividades dos elementos, respectivamente, são apresentados na Tabela 5 e Tabela 6.

Tabela 5 – Coordenadas dos nós da malha

ID	y_1	y_2	y_3	ID	y_1	y_2	y_3
0	1,145984	4,816341	0,570000	50	-3,210851	1,329978	5,130000
1	1,254466	1,557664	0,570000	51	-3,756087	1,555822	5,130000
2	-4,573943	1,894589	5,130000	52	-4,301324	1,781667	5,130000
3	-1,847759	0,765367	5,130000	53	1,098148	1,671547	1,135503
4	-4,816341	1,145984	0,570000	54	0,876623	1,797646	1,676074
5	-1,557664	1,254466	0,570000	55	0,590184	1,910937	2,188209
6	-1,894589	-4,573943	5,130000	56	0,246270	1,984780	2,671298
7	-0,765367	-1,847759	5,130000	57	-0,140012	1,995093	3,127039
8	-1,145984	-4,816341	0,570000	58	-0,546908	1,923770	3,558632
9	-1,254466	-1,557664	0,570000	59	-0,948162	1,760962	3,970118
10	4,573943	-1,894589	5,130000	60	-1,315797	1,506213	4,365975
11	1,847759	-0,765367	5,130000	61	-1,623141	1,168509	4,750935
12	4,816341	-1,145984	0,570000	62	1,184247	1,611695	0,855532
13	1,557664	-1,254466	0,570000	63	0,995668	1,734544	1,409195
14	1,894589	4,573943	5,130000	64	0,741235	1,857571	1,935798
15	0,765367	1,847759	5,130000	65	0,424642	1,954400	2,433323
16	1,360987	4,182881	0,570000	66	0,057201	1,999182	2,902413
17	1,495417	3,527752	0,570000	67	-0,342450	1,970464	3,345614
18	1,530527	2,860100	0,570000	68	-0,749984	1,854056	3,766616
19	1,451454	2,196378	0,570000	69	-1,137916	1,644734	4,169710
20	1,262404	4,502633	0,570000	70	-1,478540	1,346819	4,559512
21	1,439456	3,857620	0,570000	71	-1,746953	0,973733	4,940878
22	1,526494	3,194631	0,570000	72	-4,182881	1,360987	0,570000
23	1,505832	2,526468	0,570000	73	-3,527752	1,495417	0,570000
24	1,367356	1,872583	0,570000	74	-2,860100	1,530527	0,570000
25	-4,215352	2,596390	4,843532	75	-2,196378	1,451454	0,570000
26	-3,775404	3,202615	4,465965	76	-4,502633	1,262404	0,570000
27	-3,279748	3,708595	4,016062	77	-3,857620	1,439456	0,570000
28	-2,745964	4,119479	3,515317	78	-3,194631	1,526494	0,570000
29	-2,182200	4,443920	2,984612	79	-2,526468	1,505832	0,570000
30	-1,589003	4,688869	2,443367	80	-1,872583	1,367356	0,570000
31	-0,962342	4,856369	1,910453	81	-2,596390	-4,215352	4,843532
32	-0,297177	4,941873	1,405710	82	-3,202615	-3,775404	4,465965
33	0,408063	4,933955	0,951081	83	-3,708595	-3,279748	4,016062
34	-4,406599	2,256615	4,999082	84	-4,119479	-2,745964	3,515317
35	-4,003803	2,912042	4,665085	85	-4,443920	-2,182200	2,984612
36	-3,533214	3,467971	4,248725	86	-4,688869	-1,589003	2,443367
37	-3,016903	3,925394	3,770704	87	-4,856369	-0,962342	1,910453
38	-2,467649	4,291984	3,252467	88	-4,941873	-0,297177	1,405710
39	-1,889464	4,576062	2,714132	89	-4,933955	0,408063	0,951081
40	-1,280194	4,782418	2,174669	90	-2,256615	-4,406599	4,999082
41	-0,634813	4,909932	1,653242	91	-2,912042	-4,003803	4,665085
42	0,050619	4,950542	1,170675	92	-3,467971	-3,533214	4,248725
43	0,773898	4,889939	0,749901	93	-3,925394	-3,016903	3,770704
44	-2,392996	0,991211	5,130000	94	-4,291984	-2,467649	3,252467
45	-2,938232	1,217056	5,130000	95	-4,576062	-1,889464	2,714132
46	-3,483469	1,442900	5,130000	96	-4,782418	-1,280194	2,174669
47	-4,028706	1,668745	5,130000	97	-4,909932	-0,634813	1,653242
48	-2,120377	0,878289	5,130000	98	-4,950542	0,050619	1,170675
49	-2,665614	1,104133	5,130000	99	-4,889939	0,773898	0,749901

ID	y_1	y_2	y_3	ID	y_1	y_2	y_3
100	-0,991211	-2,392996	5,130000	165	-1,098148	-1,671547	1,135503
101	-1,217056	-2,938232	5,130000	166	-0,876623	-1,797646	1,676074
102	-1,442900	-3,483469	5,130000	167	-0,590184	-1,910937	2,188209
103	-1,668745	-4,028706	5,130000	168	-0,246270	-1,984780	2,671298
104	-0,878289	-2,120377	5,130000	169	0,140012	-1,995093	3,127039
105	-1,104133	-2,665614	5,130000	170	0,546908	-1,923770	3,558632
106	-1,329978	-3,210851	5,130000	171	0,948162	-1,760962	3,970118
107	-1,555822	-3,756087	5,130000	172	1,315797	-1,506213	4,365975
108	-1,781667	-4,301324	5,130000	173	1,623141	-1,168509	4,750935
109	-1,671547	1,098148	1,135503	174	-1,184247	-1,611695	0,855532
110	-1,797646	0,876623	1,676074	175	-0,995668	-1,734544	1,409195
111	-1,910937	0,590184	2,188209	176	-0,741235	-1,857571	1,935798
112	-1,984780	0,246270	2,671298	177	-0,424642	-1,954400	2,433323
113	-1,995093	-0,140012	3,127039	178	-0,057201	-1,999182	2,902413
114	-1,923770	-0,546908	3,558632	179	0,342450	-1,970464	3,345614
115	-1,760962	-0,948162	3,970118	180	0,749984	-1,854056	3,766616
116	-1,506213	-1,315797	4,365975	181	1,137916	-1,644734	4,169710
117	-1,168509	-1,623141	4,750935	182	1,478540	-1,346819	4,559512
118	-1,611695	1,184247	0,855532	183	1,746953	-0,973733	4,940878
119	-1,734544	0,995668	1,409195	184	4,182881	-1,360987	0,570000
120	-1,857571	0,741235	1,935798	185	3,527752	-1,495417	0,570000
121	-1,954400	0,424642	2,433323	186	2,860100	-1,530527	0,570000
122	-1,999182	0,057201	2,902413	187	2,196378	-1,451454	0,570000
123	-1,970464	-0,342450	3,345614	188	4,502633	-1,262404	0,570000
124	-1,854056	-0,749984	3,766616	189	3,857620	-1,439456	0,570000
125	-1,644734	-1,137916	4,169710	190	3,194631	-1,526494	0,570000
126	-1,346819	-1,478540	4,559512	191	2,526468	-1,505832	0,570000
127	-0,973733	-1,746953	4,940878	192	1,872583	-1,367356	0,570000
128	-1,360987	-4,182881	0,570000	193	2,596390	4,215352	4,843532
129	-1,495417	-3,527752	0,570000	194	3,202615	3,775404	4,465965
130	-1,530527	-2,860100	0,570000	195	3,708595	3,279748	4,016062
131	-1,451454	-2,196378	0,570000	196	4,119479	2,745964	3,515317
132	-1,262404	-4,502633	0,570000	197	4,443920	2,182200	2,984612
133	-1,439456	-3,857620	0,570000	198	4,688869	1,589003	2,443367
134	-1,526494	-3,194631	0,570000	199	4,856369	0,962342	1,910453
135	-1,505832	-2,526468	0,570000	200	4,941873	0,297177	1,405710
136	-1,367356	-1,872583	0,570000	201	4,933955	-0,408063	0,951081
137	4,215352	-2,596390	4,843532	202	2,256615	4,406599	4,999082
138	3,775404	-3,202615	4,465965	203	2,912042	4,003803	4,665085
139	3,279748	-3,708595	4,016062	204	3,467971	3,533214	4,248725
140	2,745964	-4,119479	3,515317	205	3,925394	3,016903	3,770704
141	2,182200	-4,443920	2,984612	206	4,291984	2,467649	3,252467
142	1,589003	-4,688869	2,443367	207	4,576062	1,889464	2,714132
143	0,962342	-4,856369	1,910453	208	4,782418	1,280194	2,174669
144	0,297177	-4,941873	1,405710	209	4,909932	0,634813	1,653242
145	-0,408063	-4,933955	0,951081	210	4,950542	-0,050619	1,170675
146	4,406599	-2,256615	4,999082	211	4,889939	-0,773898	0,749901
147	4,003803	-2,912042	4,665085	212	0,991211	2,392996	5,130000
148	3,533214	-3,467971	4,248725	213	1,217056	2,938232	5,130000
149	3,016903	-3,925394	3,770704	214	1,442900	3,483469	5,130000
150	2,467649	-4,291984	3,252467	215	1,668745	4,028706	5,130000
151	1,889464	-4,576062	2,714132	216	0,878289	2,120377	5,130000
152	1,280194	-4,782418	2,174669	217	1,104133	2,665614	5,130000
153	0,634813	-4,909932	1,653242	218	1,329978	3,210851	5,130000
154	-0,050619	-4,950542	1,170675	219	1,555822	3,756087	5,130000
155	-0,773898	-4,889939	0,749901	220	1,781667	4,301324	5,130000
156	2,392996	-0,991211	5,130000	221	1,671547	-1,098148	1,135503
157	2,938232	-1,217056	5,130000	222	1,797646	-0,876623	1,676074
158	3,483469	-1,442900	5,130000	223	1,910937	-0,590184	2,188209
159	4,028706	-1,668745	5,130000	224	1,984780	-0,246270	2,671298
160	2,120377	-0,878289	5,130000	225	1,995093	0,140012	3,127039
161	2,665614	-1,104133	5,130000	226	1,923770	0,546908	3,558632
162	3,210851	-1,329978	5,130000	227	1,760962	0,948162	3,970118
163	3,756087	-1,555822	5,130000	228	1,506213	1,315797	4,365975
164	4,301324	-1,781667	5,130000	229	1,168509	1,623141	4,750935

ID	y_1	y_2	y_3	ID	y_1	y_2	y_3
230	1,611695	-1,184247	0,855532	295	0,849095	3,327360	1,153423
231	1,734544	-0,995668	1,409195	296	-2,329603	3,582180	3,596082
232	1,857571	-0,741235	1,935798	297	-2,406882	3,177270	3,883980
233	1,954400	-0,424642	2,433323	298	-0,085130	4,205505	1,598779
234	1,999182	-0,057201	2,902413	299	-0,213196	3,861089	1,881411
235	1,970464	0,342450	3,345614	300	-0,694395	4,528915	1,895297
236	1,854056	0,749984	3,766616	301	-0,367795	4,567483	1,634781
237	1,644734	1,137916	4,169710	302	0,722394	3,139780	1,345863
238	1,346819	1,478540	4,559512	303	0,933789	2,989072	1,167779
239	0,973733	1,746953	4,940878	304	0,941868	3,817709	0,932256
240	0,280058	2,434166	2,261989	305	0,697628	3,737619	1,155431
241	-0,571910	2,405744	3,195817	306	-3,527518	1,739143	5,024038
242	-1,469321	2,035432	4,094376	307	-3,798861	1,854651	5,031258
243	0,261668	4,213440	1,324751	308	0,521949	4,109611	1,165070
244	-3,011139	1,792353	4,880339	309	-2,281306	1,388423	4,868631
245	1,067517	3,178611	0,981376	310	-2,008771	1,481920	4,711268
246	-1,002682	4,110099	2,367058	311	-2,208750	1,614407	4,711240
247	-2,044272	3,692154	3,356685	312	-0,716173	4,154606	2,121382
248	-2,991404	2,967018	4,282226	313	-0,984981	4,481304	2,135379
249	0,994483	2,239228	1,290982	314	-1,368644	3,025266	3,351809
250	-1,939320	1,703192	4,545836	315	-1,600909	2,875889	3,607911
251	-2,020938	2,297796	4,219974	316	-0,013463	4,580298	1,371210
252	-1,584290	2,604389	3,780236	317	-2,469849	1,756154	4,728164
253	-2,192099	2,889519	3,944318	318	-2,197613	1,849132	4,569914
254	-0,129174	2,450559	2,733653	319	-0,754411	3,817062	2,354134
255	-0,083260	2,929903	2,329168	320	-0,473722	3,857301	2,101304
256	0,349636	2,918422	1,864308	321	-0,796281	2,338344	3,431446
257	-0,000810	3,520517	1,882399	322	-0,845801	2,654389	3,231686
258	0,623055	3,473647	1,317558	323	-0,749137	3,512077	2,545028
259	0,780265	4,004846	1,002832	324	-0,999486	3,803360	2,555326
260	-0,560326	2,938848	2,780521	325	-1,271770	4,063102	2,595856
261	-1,122672	2,900226	3,263789	326	-1,266980	3,757707	2,786167
262	-0,992634	3,499645	2,748340	327	-0,253362	3,522184	2,111714
263	-2,456674	1,994000	4,592155	328	-3,291385	1,913745	4,898782
264	-1,028164	2,263545	3,657367	329	-3,245336	1,621534	5,014337
265	0,660632	2,344507	1,782998	330	-1,625847	1,606958	4,459369
266	-0,430768	4,198287	1,874280	331	-1,782649	1,433801	4,645204
267	0,813949	2,803143	1,366819	332	-2,803503	3,219561	4,059166
268	-1,543496	4,013859	2,821041	333	-2,588576	2,932084	4,119904
269	-2,483487	1,517602	4,862883	334	-2,756935	2,723057	4,314050
270	-3,022852	2,351502	4,612633	335	-2,354968	2,687132	4,149919
271	-3,572092	2,034335	4,915394	336	-4,311065	2,015733	5,060549
272	-2,620525	3,466309	3,825790	337	-4,132720	2,364614	4,910828
273	-1,617219	3,147715	3,436072	338	0,330791	4,571463	1,132013
274	-0,509358	3,521527	2,337191	339	-1,886982	2,748320	3,864400
275	1,170985	2,582779	0,972969	340	-3,381887	3,086779	4,378056
276	-2,521851	2,479880	4,347301	341	-3,136145	3,337124	4,147859
277	-3,629907	2,536325	4,718321	342	-2,394205	3,906743	3,437545
278	-2,078925	1,259587	4,874969	343	-2,114393	4,066921	3,168823
279	0,784872	4,494538	0,854323	344	-1,294553	4,400555	2,407010
280	-1,461798	3,506901	3,090900	345	-1,245834	2,152730	3,880502
281	1,098160	3,628754	0,854866	346	-1,526934	2,319765	3,937089
282	1,209117	2,052144	0,931557	347	-3,838213	2,337564	4,855723
283	-4,050165	2,132704	4,977754	348	-3,810796	2,084125	4,948165
284	0,312144	3,497601	1,601058	349	-3,600718	2,285786	4,817938
285	0,447117	3,845825	1,326795	350	-1,849962	1,215794	4,815605
286	0,122930	3,862736	1,594781	351	-0,342590	2,696401	2,759322
287	-1,901185	3,022381	3,696027	352	-0,567560	2,671052	2,986536
288	-1,831161	3,419513	3,395728	353	-0,346176	2,431775	2,969267
289	-2,117241	3,291849	3,652117	354	0,585296	2,862190	1,618499
290	-1,305108	2,435174	3,720524	355	0,477353	3,191996	1,582353
291	-1,076132	2,581166	3,459588	356	-2,739603	2,172980	4,602829
292	-1,350420	2,755474	3,526556	357	-3,016559	2,072605	4,747882
293	1,082452	3,403586	0,917682	358	-2,731432	1,897003	4,743668
294	0,855151	3,549340	1,080018	359	-0,837537	2,923093	3,027049

ID	y_1	y_2	y_3	ID	y_1	y_2	y_3
360	-1,792134	3,854668	3,091491	425	1,258735	1,799195	0,762377
361	-1,861755	4,229892	2,904464	426	-3,921791	2,567683	4,784213
362	1,271714	3,351445	0,764103	427	1,340232	2,721125	0,761911
363	1,302486	3,019732	0,779282	428	1,322874	2,389064	0,780139
364	-2,948961	3,588777	3,923310	429	-3,702464	2,869741	4,592747
365	-0,988180	2,012236	3,813718	430	-3,306433	2,757454	4,512130
366	-1,207734	1,899357	4,033913	431	1,295313	3,577949	0,710489
367	0,782038	4,249466	0,927818	432	1,149390	1,862073	1,031645
368	0,517572	4,351174	1,081555	433	-4,039140	1,901343	5,055720
369	0,475609	2,391783	2,026213	434	-1,503438	3,759652	2,954844
370	0,511864	2,634400	1,828833	435	-2,270600	2,389839	4,285332
371	0,310237	2,673861	2,059382	436	-2,770496	2,418208	4,484684
372	1,073229	4,338819	0,712646	437	-3,006333	2,660323	4,449484
373	1,063372	4,091393	0,775738	438	-3,325630	2,445022	4,667848
374	-0,786312	2,094915	3,609648	439	-1,751324	3,601197	3,226380
375	-0,559783	2,164401	3,376778	440	-2,489189	2,237039	4,469906
376	-1,567568	4,350216	2,630310	441	1,197639	2,317634	0,957324
377	1,061722	1,956247	1,220663	442	1,107243	2,145974	1,114373
378	0,926772	2,016874	1,479054	443	-2,434166	0,280058	2,261989
379	-0,136206	2,221557	2,928836	444	-2,405744	-0,571910	3,195817
380	-0,354034	2,202107	3,163476	445	-2,035432	-1,469321	4,094376
381	-2,683704	3,792404	3,669710	446	-4,213440	0,261668	1,324751
382	0,778360	2,073912	1,734871	447	-1,792353	-3,011139	4,880339
383	0,619365	2,125322	1,981991	448	-3,178611	1,067517	0,981376
384	-1,293067	3,202768	3,176186	449	-4,110099	-1,002682	2,367058
385	-1,539279	3,327533	3,263823	450	-3,692154	-2,044272	3,356685
386	0,135767	2,925669	2,099098	451	-2,967018	-2,991404	4,282226
387	0,102182	2,684369	2,298882	452	-2,239228	0,994483	1,290982
388	-2,438845	1,253229	4,994318	453	-1,703192	-1,939320	4,545836
389	-2,708778	1,371433	5,004574	454	-2,297796	-2,020938	4,219974
390	0,441209	2,175608	2,229141	455	-2,604389	-1,584290	3,780236
391	0,259458	2,207251	2,463904	456	-2,889519	-2,192099	3,944318
392	-1,225507	3,504815	2,921928	457	-2,450559	-0,129174	2,733653
393	-1,058622	3,199054	3,004799	458	-2,929903	-0,083260	2,329168
394	0,061995	2,220073	2,705342	459	-2,918422	0,349636	1,864308
395	0,178023	3,221473	1,876902	460	-3,520517	-0,000810	1,882399
396	-2,236436	2,149008	4,411370	461	-3,473647	0,623055	1,317558
397	-1,980255	2,000331	4,382638	462	-4,004846	0,780265	1,002832
398	-1,701474	1,872901	4,325708	463	-2,938848	-0,560326	2,780521
399	-1,392997	1,770291	4,229385	464	-2,900226	-1,122672	3,263789
400	-0,294078	3,227294	2,335568	465	-3,499645	-0,992634	2,748340
401	-0,046514	3,222389	2,101229	466	-1,994000	-2,456674	4,592155
402	0,080088	2,445403	2,501742	467	-2,263545	-1,028164	3,657367
403	0,598333	4,715192	0,905683	468	-2,344507	0,660632	1,782998
404	0,961294	4,653678	0,704941	469	-4,198287	-0,430768	1,874280
405	0,912238	2,523012	1,334616	470	-2,803143	0,813949	1,366819
406	0,729851	2,571387	1,569486	471	-4,013859	-1,543496	2,821041
407	0,831887	2,292994	1,539680	472	-1,517602	-2,483487	4,862883
408	1,224457	3,904415	0,704989	473	-2,351502	-3,022852	4,612633
409	-2,747189	1,655190	4,872031	474	-2,034335	-3,572092	4,915394
410	-0,108949	2,688314	2,528833	475	-3,466309	-2,620525	3,825790
411	-0,537485	3,228131	2,555853	476	-3,147715	-1,617219	3,436072
412	-0,318353	2,936940	2,558428	477	-3,521527	-0,509358	2,337191
413	1,076208	2,410226	1,127517	478	-2,582779	1,170985	0,972969
414	0,996916	2,693851	1,173427	479	-2,479880	-2,521851	4,347301
415	-3,294863	2,197032	4,773036	480	-2,536325	-3,629907	4,718321
416	1,124853	2,881611	0,982249	481	-1,259587	-2,078925	4,874969
417	-2,974641	1,504793	5,005361	482	-4,494538	0,784872	0,854323
418	-0,775865	3,219764	2,765174	483	-3,506901	-1,461798	3,090900
419	-1,799959	2,454178	4,004889	484	-3,628754	1,098160	0,854866
420	-1,744197	2,167738	4,158925	485	-2,052144	1,209117	0,931557
421	-2,106760	2,593370	4,081679	486	-2,132704	-4,050165	4,977754
422	-1,965415	1,008392	4,996387	487	-3,497601	0,312144	1,601058
423	-2,234663	1,127980	5,006784	488	-3,845825	0,447117	1,326795
424	1,322941	2,125222	0,746262	489	-3,862736	0,122930	1,594781

ID	y_1	y_2	y_3	ID	y_1	y_2	y_3
490	-3,022381	-1,901185	3,696027	555	-2,671052	-0,567560	2,986536
491	-3,419513	-1,831161	3,395728	556	-2,431775	-0,346176	2,969267
492	-3,291849	-2,117241	3,652117	557	-2,862190	0,585296	1,618499
493	-2,435174	-1,305108	3,720524	558	-3,191996	0,477353	1,582353
494	-2,581166	-1,076132	3,459588	559	-2,172980	-2,739603	4,602829
495	-2,755474	-1,350420	3,526556	560	-2,072605	-3,016559	4,747882
496	-3,403586	1,082452	0,917682	561	-1,897003	-2,731432	4,743668
497	-3,549340	0,855151	1,080018	562	-2,923093	-0,837537	3,027049
498	-3,327360	0,849095	1,153423	563	-3,854668	-1,792134	3,091491
499	-3,582180	-2,329603	3,596082	564	-4,229892	-1,861755	2,904464
500	-3,177270	-2,406882	3,883980	565	-3,351445	1,271714	0,764103
501	-4,205505	-0,085130	1,598779	566	-3,019732	1,302486	0,779282
502	-3,861089	-0,213196	1,881411	567	-3,588777	-2,948961	3,923310
503	-4,528915	-0,694395	1,895297	568	-2,012236	-0,988180	3,813718
504	-4,567483	-0,367795	1,634781	569	-1,899357	-1,207734	4,033913
505	-3,139780	0,722394	1,345863	570	-4,249466	0,782038	0,927818
506	-2,989072	0,933789	1,167779	571	-4,351174	0,517572	1,081555
507	-3,817709	0,941868	0,932256	572	-2,391783	0,475609	2,026213
508	-3,737619	0,697628	1,155431	573	-2,634400	0,511864	1,828833
509	-1,739143	-3,527518	5,024038	574	-2,673861	0,310237	2,059382
510	-1,854651	-3,798861	5,031258	575	-4,338819	1,073229	0,712646
511	-4,109611	0,521949	1,165070	576	-4,091393	1,063372	0,775738
512	-1,388423	-2,281306	4,868631	577	-2,094915	-0,786312	3,609648
513	-1,481920	-2,008771	4,711268	578	-2,164401	-0,559783	3,376778
514	-1,614407	-2,208750	4,711240	579	-4,350216	-1,567568	2,630310
515	-4,154606	-0,716173	2,121382	580	-1,956247	1,061722	1,220663
516	-4,481304	-0,984981	2,135379	581	-2,016874	0,926772	1,479054
517	-3,025266	-1,368644	3,351809	582	-2,221557	-0,136206	2,928836
518	-2,875889	-1,600909	3,607911	583	-2,202107	-0,354034	3,163476
519	-4,580298	-0,013463	1,371210	584	-3,792404	-2,683704	3,669710
520	-1,756154	-2,469849	4,728164	585	-2,073912	0,778360	1,734871
521	-1,849132	-2,197613	4,569914	586	-2,125322	0,619365	1,981991
522	-3,817062	-0,754411	2,354134	587	-3,202768	-1,293067	3,176186
523	-3,857301	-0,473722	2,101304	588	-3,327533	-1,539279	3,263823
524	-2,338344	-0,796281	3,431446	589	-2,925669	0,135767	2,099098
525	-2,654389	-0,845801	3,231686	590	-2,684369	0,102182	2,298882
526	-3,512077	-0,749137	2,545028	591	-1,253229	-2,438845	4,994318
527	-3,803360	-0,999486	2,555326	592	-1,371433	-2,708778	5,004574
528	-4,063102	-1,271770	2,595856	593	-2,175608	0,441209	2,229141
529	-3,757707	-1,266980	2,786167	594	-2,207251	0,259458	2,463904
530	-3,522184	-0,253362	2,111714	595	-3,504815	-1,225507	2,921928
531	-1,913745	-3,291385	4,898782	596	-3,199054	-1,058622	3,004799
532	-1,621534	-3,245336	5,014337	597	-2,220073	0,061995	2,705342
533	-1,606958	-1,625847	4,459369	598	-3,221473	0,178023	1,876902
534	-1,433801	-1,782649	4,645204	599	-2,149008	-2,236436	4,411370
535	-3,219561	-2,803503	4,059166	600	-2,000331	-1,980255	4,382638
536	-2,932084	-2,588576	4,119904	601	-1,872901	-1,701474	4,325708
537	-2,723057	-2,756935	4,314050	602	-1,770291	-1,392997	4,229385
538	-2,687132	-2,354968	4,149919	603	-3,227294	-0,294078	2,335568
539	-2,015733	-4,311065	5,060549	604	-3,222389	-0,046514	2,101229
540	-2,364614	-4,132720	4,910828	605	-2,445403	0,080088	2,501742
541	-4,571463	0,330791	1,132013	606	-4,715192	0,598333	0,905683
542	-2,748320	-1,886982	3,864400	607	-4,653678	0,961294	0,704941
543	-3,086779	-3,381887	4,378056	608	-2,523012	0,912238	1,334616
544	-3,337124	-3,136145	4,147859	609	-2,571387	0,729851	1,569486
545	-3,906743	-2,394205	3,437545	610	-2,292994	0,831887	1,539680
546	-4,066921	-2,114393	3,168823	611	-3,904415	1,224457	0,704989
547	-4,400555	-1,294553	2,407010	612	-1,655190	-2,747189	4,872031
548	-2,152730	-1,245834	3,880502	613	-2,688314	-0,108949	2,528833
549	-2,319765	-1,526934	3,937089	614	-3,228131	-0,537485	2,555853
550	-2,337564	-3,838213	4,855723	615	-2,936940	-0,318353	2,558428
551	-2,084125	-3,810796	4,948165	616	-2,410226	1,076208	1,127517
552	-2,285786	-3,600718	4,817938	617	-2,693851	0,996916	1,173427
553	-1,215794	-1,849962	4,815605	618	-2,197032	-3,294863	4,773036
554	-2,696401	-0,342590	2,759322	619	-2,881611	1,124853	0,982249

ID	y_1	y_2	y_3	ID	y_1	y_2	y_3
620	-1,504793	-2,974641	5,005361	685	-0,784872	-4,494538	0,854323
621	-3,219764	-0,775865	2,765174	686	1,461798	-3,506901	3,090900
622	-2,454178	-1,799959	4,004889	687	-1,098160	-3,628754	0,854866
623	-2,167738	-1,744197	4,158925	688	-1,209117	-2,052144	0,931557
624	-2,593370	-2,106760	4,081679	689	4,050165	-2,132704	4,977754
625	-1,008392	-1,965415	4,996387	690	-0,312144	-3,497601	1,601058
626	-1,127980	-2,234663	5,006784	691	-0,447117	-3,845825	1,326795
627	-2,125222	1,322941	0,746262	692	-0,122930	-3,862736	1,594781
628	-1,799195	1,258735	0,762377	693	1,901185	-3,022381	3,696027
629	-2,567683	-3,921791	4,784213	694	1,831161	-3,419513	3,395728
630	-2,721125	1,340232	0,761911	695	2,117241	-3,291849	3,652117
631	-2,389064	1,322874	0,780139	696	1,305108	-2,435174	3,720524
632	-2,869741	-3,702464	4,592747	697	1,076132	-2,581166	3,459588
633	-2,757454	-3,306433	4,512130	698	1,350420	-2,755474	3,526556
634	-3,577949	1,295313	0,710489	699	-1,082452	-3,403586	0,917682
635	-1,862073	1,149390	1,031645	700	-0,855151	-3,549340	1,080018
636	-1,901343	-4,039140	5,055720	701	-0,849095	-3,327360	1,153423
637	-3,759652	-1,503438	2,954844	702	2,329603	-3,582180	3,596082
638	-2,389839	-2,270600	4,285332	703	2,406882	-3,177270	3,883980
639	-2,418208	-2,770496	4,484684	704	0,085130	-4,205505	1,598779
640	-2,660323	-3,006333	4,449484	705	0,213196	-3,861089	1,881411
641	-2,445022	-3,325630	4,667848	706	0,694395	-4,528915	1,895297
642	-3,601197	-1,751324	3,226380	707	0,367795	-4,567483	1,634781
643	-2,237039	-2,489189	4,469906	708	-0,722394	-3,139780	1,345863
644	-2,317634	1,197639	0,957324	709	-0,933789	-2,989072	1,167779
645	-2,145974	1,107243	1,114373	710	-0,941868	-3,817709	0,932256
646	-0,280058	-2,434166	2,261989	711	-0,697628	-3,737619	1,155431
647	0,571910	-2,405744	3,195817	712	3,527518	-1,739143	5,024038
648	1,469321	-2,035432	4,094376	713	3,798861	-1,854651	5,031258
649	-0,261668	-4,213440	1,324751	714	-0,521949	-4,109611	1,165070
650	3,011139	-1,792353	4,880339	715	2,281306	-1,388423	4,868631
651	-1,067517	-3,178611	0,981376	716	2,008771	-1,481920	4,711268
652	1,002682	-4,110099	2,367058	717	2,208750	-1,614407	4,711240
653	2,044272	-3,692154	3,356685	718	0,716173	-4,154606	2,121382
654	2,991404	-2,967018	4,282226	719	0,984981	-4,481304	2,135379
655	-0,994483	-2,239228	1,290982	720	1,368644	-3,025266	3,351809
656	1,939320	-1,703192	4,545836	721	1,600909	-2,875889	3,607911
657	2,020938	-2,297796	4,219974	722	0,013463	-4,580298	1,371210
658	1,584290	-2,604389	3,780236	723	2,469849	-1,756154	4,728164
659	2,192099	-2,889519	3,944318	724	2,197613	-1,849132	4,569914
660	0,129174	-2,450559	2,733653	725	0,754411	-3,817062	2,354134
661	0,083260	-2,929903	2,329168	726	0,473722	-3,857301	2,101304
662	-0,349636	-2,918422	1,864308	727	0,796281	-2,338344	3,431446
663	0,000810	-3,520517	1,882399	728	0,845801	-2,654389	3,231686
664	-0,623055	-3,473647	1,317558	729	0,749137	-3,512077	2,545028
665	-0,780265	-4,004846	1,002832	730	0,999486	-3,803360	2,555326
666	0,560326	-2,938848	2,780521	731	1,271770	-4,063102	2,595856
667	1,122672	-2,900226	3,263789	732	1,266980	-3,757707	2,786167
668	0,992634	-3,499645	2,748340	733	0,253362	-3,522184	2,111714
669	2,456674	-1,994000	4,592155	734	3,291385	-1,913745	4,898782
670	1,028164	-2,263545	3,657367	735	3,245336	-1,621534	5,014337
671	-0,660632	-2,344507	1,782998	736	1,625847	-1,606958	4,459369
672	0,430768	-4,198287	1,874280	737	1,782649	-1,433801	4,645204
673	-0,813949	-2,803143	1,366819	738	2,803503	-3,219561	4,059166
674	1,543496	-4,013859	2,821041	739	2,588576	-2,932084	4,119904
675	2,483487	-1,517602	4,862883	740	2,756935	-2,723057	4,314050
676	3,022852	-2,351502	4,612633	741	2,354968	-2,687132	4,149919
677	3,572092	-2,034335	4,915394	742	4,311065	-2,015733	5,060549
678	2,620525	-3,466309	3,825790	743	4,132720	-2,364614	4,910828
679	1,617219	-3,147715	3,436072	744	-0,330791	-4,571463	1,132013
680	0,509358	-3,521527	2,337191	745	1,886982	-2,748320	3,864400
681	-1,170985	-2,582779	0,972969	746	3,381887	-3,086779	4,378056
682	2,521851	-2,479880	4,347301	747	3,136145	-3,337124	4,147859
683	3,629907	-2,536325	4,718321	748	2,394205	-3,906743	3,437545
684	2,078925	-1,259587	4,874969	749	2,114393	-4,066921	3,168823

ID	y_1	y_2	y_3	ID	y_1	y_2	y_3
750	1,294553	-4,400555	2,407010	815	2,747189	-1,655190	4,872031
751	1,245834	-2,152730	3,880502	816	0,108949	-2,688314	2,528833
752	1,526934	-2,319765	3,937089	817	0,537485	-3,228131	2,555853
753	3,838213	-2,337564	4,855723	818	0,318353	-2,936940	2,558428
754	3,810796	-2,084125	4,948165	819	-1,076208	-2,410226	1,127517
755	3,600718	-2,285786	4,817938	820	-0,996916	-2,693851	1,173427
756	1,849962	-1,215794	4,815605	821	3,294863	-2,197032	4,773036
757	0,342590	-2,696401	2,759322	822	-1,124853	-2,881611	0,982249
758	0,567560	-2,671052	2,986536	823	2,974641	-1,504793	5,005361
759	0,346176	-2,431775	2,969267	824	0,775865	-3,219764	2,765174
760	-0,585296	-2,862190	1,618499	825	1,799959	-2,454178	4,004889
761	-0,477353	-3,191996	1,582353	826	1,744197	-2,167738	4,158925
762	2,739603	-2,172980	4,602829	827	2,106760	-2,593370	4,081679
763	3,016559	-2,072605	4,747882	828	1,965415	-1,008392	4,996387
764	2,731432	-1,897003	4,743668	829	2,234663	-1,127980	5,006784
765	0,837537	-2,923093	3,027049	830	-1,322941	-2,125222	0,746262
766	1,792134	-3,854668	3,091491	831	-1,258735	-1,799195	0,762377
767	1,861755	-4,229892	2,904464	832	3,921791	-2,567683	4,784213
768	-1,271714	-3,351445	0,764103	833	-1,340232	-2,721125	0,761911
769	-1,302486	-3,019732	0,779282	834	-1,322874	-2,389064	0,780139
770	2,948961	-3,588777	3,923310	835	3,702464	-2,869741	4,592747
771	0,988180	-2,012236	3,813718	836	3,306433	-2,757454	4,512130
772	1,207734	-1,899357	4,033913	837	-1,295313	-3,577949	0,710489
773	-0,782038	-4,249466	0,927818	838	-1,149390	-1,862073	1,031645
774	-0,517572	-4,351174	1,081555	839	4,039140	-1,901343	5,055720
775	-0,475609	-2,391783	2,026213	840	1,503438	-3,759652	2,954844
776	-0,511864	-2,634400	1,828833	841	2,270600	-2,389839	4,285332
777	-0,310237	-2,673861	2,059382	842	2,770496	-2,418208	4,484684
778	-1,073229	-4,338819	0,712646	843	3,006333	-2,660323	4,449484
779	-1,063372	-4,091393	0,775738	844	3,325630	-2,445022	4,667848
780	0,786312	-2,094915	3,609648	845	1,751324	-3,601197	3,226380
781	0,559783	-2,164401	3,376778	846	2,489189	-2,237039	4,469906
782	1,567568	-4,350216	2,630310	847	-1,197639	-2,317634	0,957324
783	-1,061722	-1,956247	1,220663	848	-1,107243	-2,145974	1,114373
784	-0,926772	-2,016874	1,479054	849	2,434166	-0,280058	2,261989
785	0,136206	-2,221557	2,928836	850	2,405744	0,571910	3,195817
786	0,354034	-2,202107	3,163476	851	2,035432	1,469321	4,094376
787	2,683704	-3,792404	3,669710	852	4,213440	-0,261668	1,324751
788	-0,778360	-2,073912	1,734871	853	1,792353	3,011139	4,880339
789	-0,619365	-2,125322	1,981991	854	3,178611	-1,067517	0,981376
790	1,293067	-3,202768	3,176186	855	4,110099	1,002682	2,367058
791	1,539279	-3,327533	3,263823	856	3,692154	2,044272	3,356685
792	-0,135767	-2,925669	2,099098	857	2,967018	2,991404	4,282226
793	-0,102182	-2,684369	2,298882	858	2,239228	-0,994483	1,290982
794	2,438845	-1,253229	4,994318	859	1,703192	1,939320	4,545836
795	2,708778	-1,371433	5,004574	860	2,297796	2,020938	4,219974
796	-0,441209	-2,175608	2,229141	861	2,604389	1,584290	3,780236
797	-0,259458	-2,207251	2,463904	862	2,889519	2,192099	3,944318
798	1,225507	-3,504815	2,921928	863	2,450559	0,129174	2,733653
799	1,058622	-3,199054	3,004799	864	2,929903	0,083260	2,329168
800	-0,061995	-2,220073	2,705342	865	2,918422	-0,349636	1,864308
801	-0,178023	-3,221473	1,876902	866	3,520517	0,000810	1,882399
802	2,236436	-2,149008	4,411370	867	3,473647	-0,623055	1,317558
803	1,980255	-2,000331	4,382638	868	4,004846	-0,780265	1,002832
804	1,701474	-1,872901	4,325708	869	2,938848	0,560326	2,780521
805	1,392997	-1,770291	4,229385	870	2,900226	1,122672	3,263789
806	0,294078	-3,227294	2,335568	871	3,499645	0,992634	2,748340
807	0,046514	-3,222389	2,101229	872	1,994000	2,456674	4,592155
808	-0,080088	-2,445403	2,501742	873	2,263545	1,028164	3,657367
809	-0,598333	-4,715192	0,905683	874	2,344507	-0,660632	1,782998
810	-0,961294	-4,653678	0,704941	875	4,198287	0,430768	1,874280
811	-0,912238	-2,523012	1,334616	876	2,803143	-0,813949	1,366819
812	-0,729851	-2,571387	1,569486	877	4,013859	1,543496	2,821041
813	-0,831887	-2,292994	1,539680	878	1,517602	2,483487	4,862883
814	-1,224457	-3,904415	0,704989	879	2,351502	3,022852	4,612633

ID	y_1	y_2	y_3	ID	y_1	y_2	y_3
880	2,034335	3,572092	4,915394	945	2,015733	4,311065	5,060549
881	3,466309	2,620525	3,825790	946	2,364614	4,132720	4,910828
882	3,147715	1,617219	3,436072	947	4,571463	-0,330791	1,132013
883	3,521527	0,509358	2,337191	948	2,748320	1,886982	3,864400
884	2,582779	-1,170985	0,972969	949	3,086779	3,381887	4,378056
885	2,479880	2,521851	4,347301	950	3,337124	3,136145	4,147859
886	2,536325	3,629907	4,718321	951	3,906743	2,394205	3,437545
887	1,259587	2,078925	4,874969	952	4,066921	2,114393	3,168823
888	4,494538	-0,784872	0,854323	953	4,400555	1,294553	2,407010
889	3,506901	1,461798	3,090900	954	2,152730	1,245834	3,880502
890	3,628754	-1,098160	0,854866	955	2,319765	1,526934	3,937089
891	2,052144	-1,209117	0,931557	956	2,337564	3,838213	4,855723
892	2,132704	4,050165	4,977754	957	2,084125	3,810796	4,948165
893	3,497601	-0,312144	1,601058	958	2,285786	3,600718	4,817938
894	3,845825	-0,447117	1,326795	959	1,215794	1,849962	4,815605
895	3,862736	-0,122930	1,594781	960	2,696401	0,342590	2,759322
896	3,022381	1,901185	3,696027	961	2,671052	0,567560	2,986536
897	3,419513	1,831161	3,395728	962	2,431775	0,346176	2,969267
898	3,291849	2,117241	3,652117	963	2,862190	-0,585296	1,618499
899	2,435174	1,305108	3,720524	964	3,191996	-0,477353	1,582353
900	2,581166	1,076132	3,459588	965	2,172980	2,739603	4,602829
901	2,755474	1,350420	3,526556	966	2,072605	3,016559	4,747882
902	3,403586	-1,082452	0,917682	967	1,897003	2,731432	4,743668
903	3,549340	-0,855151	1,080018	968	2,923093	0,837537	3,027049
904	3,327360	-0,849095	1,153423	969	3,854668	1,792134	3,091491
905	3,582180	2,329603	3,596082	970	4,229892	1,861755	2,904464
906	3,177270	2,406882	3,883980	971	3,351445	-1,271714	0,764103
907	4,205505	0,085130	1,598779	972	3,019732	-1,302486	0,779282
908	3,861089	0,213196	1,881411	973	3,588777	2,948961	3,923310
909	4,528915	0,694395	1,895297	974	2,012236	0,988180	3,813718
910	4,567483	0,367795	1,634781	975	1,899357	1,207734	4,033913
911	3,139780	-0,722394	1,345863	976	4,249466	-0,782038	0,927818
912	2,989072	-0,933789	1,167779	977	4,351174	-0,517572	1,081555
913	3,817709	-0,941868	0,932256	978	2,391783	-0,475609	2,026213
914	3,737619	-0,697628	1,155431	979	2,634400	-0,511864	1,828833
915	1,739143	3,527518	5,024038	980	2,673861	-0,310237	2,059382
916	1,854651	3,798861	5,031258	981	4,338819	-1,073229	0,712646
917	4,109611	-0,521949	1,165070	982	4,091393	-1,063372	0,775738
918	1,388423	2,281306	4,868631	983	2,094915	0,786312	3,609648
919	1,481920	2,008771	4,711268	984	2,164401	0,559783	3,376778
920	1,614407	2,208750	4,711240	985	4,350216	1,567568	2,630310
921	4,154606	0,716173	2,121382	986	1,956247	-1,061722	1,220663
922	4,481304	0,984981	2,135379	987	2,016874	-0,926772	1,479054
923	3,025266	1,368644	3,351809	988	2,221557	0,136206	2,928836
924	2,875889	1,600909	3,607911	989	2,202107	0,354034	3,163476
925	4,580298	0,013463	1,371210	990	3,792404	2,683704	3,669710
926	1,756154	2,469849	4,728164	991	2,073912	-0,778360	1,734871
927	1,849132	2,197613	4,569914	992	2,125322	-0,619365	1,981991
928	3,817062	0,754411	2,354134	993	3,202768	1,293067	3,176186
929	3,857301	0,473722	2,101304	994	3,327533	1,539279	3,263823
930	2,338344	0,796281	3,431446	995	2,925669	-0,135767	2,099098
931	2,654389	0,845801	3,231686	996	2,684369	-0,102182	2,298882
932	3,512077	0,749137	2,545028	997	1,253229	2,438845	4,994318
933	3,803360	0,999486	2,555326	998	1,371433	2,708778	5,004574
934	4,063102	1,271770	2,595856	999	2,175608	-0,441209	2,229141
935	3,757707	1,266980	2,786167	999	2,207251	-0,259458	2,463904
936	3,522184	0,253362	2,111714	1001	3,504815	1,225507	2,921928
937	1,913745	3,291385	4,898782	1001	3,199054	1,058622	3,004799
938	1,621534	3,245336	5,014337	1003	2,220073	-0,061995	2,705342
939	1,606958	1,625847	4,459369	1003	3,221473	-0,178023	1,876902
940	1,433801	1,782649	4,645204	1005	2,149008	2,236436	4,411370
941	3,219561	2,803503	4,059166	1005	2,000331	1,980255	4,382638
942	2,932084	2,588576	4,119904	1007	1,872901	1,701474	4,325708
943	2,723057	2,756935	4,314050	1007	1,770291	1,392997	4,229385
944	2,687132	2,354968	4,149919	1009	3,227294	0,294078	2,335568

ID	y_1	y_2	y_3
1009	3,222389	0,046514	2,101229
1011	2,445403	-0,080088	2,501742
1011	4,715192	-0,598333	0,905683
1013	4,653678	-0,961294	0,704941
1013	2,523012	-0,912238	1,334616
1015	2,571387	-0,729851	1,569486
1015	2,292994	-0,831887	1,539680
1017	3,904415	-1,224457	0,704989
1017	1,655190	2,747189	4,872031
1019	2,688314	0,108949	2,528833
1019	3,228131	0,537485	2,555853
1021	2,936940	0,318353	2,558428
1021	2,410226	-1,076208	1,127517
1023	2,693851	-0,996916	1,173427
1024	2,197032	3,294863	4,773036
1025	2,881611	-1,124853	0,982249
1026	1,504793	2,974641	5,005361
1027	3,219764	0,775865	2,765174
1028	2,454178	1,799959	4,004889
1029	2,167738	1,744197	4,158925
1030	2,593370	2,106760	4,081679
1031	1,008392	1,965415	4,996387
1032	1,127980	2,234663	5,006784
1033	2,125222	-1,322941	0,746262
1034	1,799195	-1,258735	0,762377
1035	2,567683	3,921791	4,784213
1036	2,721125	-1,340232	0,761911
1037	2,389064	-1,322874	0,780139
1038	2,869741	3,702464	4,592747
1039	2,757454	3,306433	4,512130
1040	3,577949	-1,295313	0,710489
1041	1,862073	-1,149390	1,031645
1042	1,901343	4,039140	5,055720
1043	3,759652	1,503438	2,954844
1044	2,389839	2,270600	4,285332
1045	2,418208	2,770496	4,484684
1046	2,660323	3,006333	4,449484
1047	2,445022	3,325630	4,667848
1048	3,601197	1,751324	3,226380
1049	2,237039	2,489189	4,469906
1050	2,317634	-1,197639	0,957324
1051	2,145974	-1,107243	1,114373

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 6 – Conectividade dos elementos

El	n1	n2	n3	n4	n5	n6	El	n1	n2	n3	n4	n5	n6
0	257	258	243	284	285	286	65	33	279	0	403	404	43
1	253	273	247	287	288	289	66	249	267	265	405	406	407
2	252	264	261	290	291	292	67	259	281	16	304	408	373
3	245	281	258	293	294	295	68	249	265	54	407	382	378
4	247	272	253	296	297	289	69	243	279	33	368	403	338
5	243	266	257	298	299	286	70	29	268	30	361	376	39
6	31	266	32	300	301	41	71	0	279	16	404	372	20
7	258	267	245	302	303	295	72	244	269	263	409	317	358
8	258	281	259	294	304	305	73	240	255	254	387	410	402
9	46	271	47	306	307	51	74	55	265	240	383	369	390
10	258	259	243	305	308	285	75	255	274	260	400	411	412
11	269	278	250	309	310	311	76	27	272	28	364	381	37
12	246	266	31	312	300	313	77	249	275	267	413	414	405
13	261	273	252	314	315	292	78	255	260	254	412	351	410
14	32	266	243	301	298	316	79	265	267	256	406	354	370
15	263	269	250	317	311	318	80	270	271	244	415	328	357
16	246	274	266	319	320	312	81	267	275	245	414	416	303
17	261	264	241	291	321	322	82	45	244	46	417	329	50
18	262	274	246	323	319	324	83	260	262	261	418	393	359
19	246	268	262	325	326	324	84	242	252	251	346	419	420
20	266	274	257	320	327	299	85	256	257	255	395	401	386
21	244	271	46	328	306	329	86	242	251	250	420	397	398
22	60	250	61	330	331	70	87	252	253	251	339	421	419
23	253	272	248	297	332	333	88	3	278	44	422	423	48
24	248	276	253	334	335	333	89	45	269	244	389	409	417
25	2	283	25	336	337	34	90	61	278	3	350	422	71
26	32	243	33	316	338	42	91	19	282	1	424	425	24
27	252	273	253	315	287	339	92	25	283	277	337	347	426
28	26	248	27	340	341	36	93	18	275	19	427	428	23
29	28	247	29	342	343	38	94	260	274	262	411	323	418
30	30	246	31	344	313	40	95	26	277	248	429	430	340
31	242	264	252	345	290	346	96	16	281	17	408	431	21
32	277	283	271	347	348	349	97	1	282	53	425	432	62
33	250	278	61	310	350	331	98	245	275	18	416	427	363
34	254	260	241	351	352	353	99	25	277	26	426	429	35
35	256	267	258	354	302	355	100	271	283	47	348	433	307
36	263	270	244	356	357	358	101	268	280	262	434	392	326
37	260	261	241	359	322	352	102	253	276	251	335	435	421
38	247	268	29	360	361	343	103	270	276	248	436	334	437
39	17	245	18	362	363	22	104	248	277	270	430	438	437
40	248	272	27	332	364	341	105	47	283	2	433	336	52
41	59	264	242	365	345	366	106	247	280	268	439	434	360
42	259	279	243	367	368	308	107	44	278	269	423	309	388
43	240	265	256	369	370	371	108	263	276	270	440	436	356
44	16	279	259	372	367	373	109	275	282	19	441	424	428
45	241	264	58	321	374	375	110	17	281	245	431	293	362
46	30	268	246	376	325	344	111	270	277	271	438	349	415
47	53	249	54	377	378	63	112	251	276	263	435	440	396
48	57	254	241	379	353	380	113	273	280	247	385	439	288
49	28	272	247	381	296	342	114	53	282	249	432	442	377
50	54	265	55	382	383	64	115	249	282	275	442	441	413
51	261	280	273	384	385	314	116	460	461	446	487	488	489
52	240	256	255	371	386	387	117	456	476	450	490	491	492
53	44	269	45	388	389	49	118	455	467	464	493	494	495
54	55	240	56	390	391	65	119	448	484	461	496	497	498
55	262	280	261	392	384	393	120	450	475	456	499	500	492
56	56	254	57	394	379	66	121	446	469	460	501	502	489
57	256	258	257	355	284	395	122	87	469	88	503	504	97
58	251	263	250	396	318	397	123	461	470	448	505	506	498
59	57	241	58	380	375	67	124	461	484	462	497	507	508
60	58	264	59	374	365	68	125	102	474	103	509	510	107
61	242	250	60	398	330	399	126	461	462	446	508	511	488
62	257	274	255	327	400	401	127	472	481	453	512	513	514
63	59	242	60	366	399	69	128	449	469	87	515	503	516
64	240	254	56	402	394	391	129	464	476	455	517	518	495

El	n1	n2	n3	n4	n5	n6	El	n1	n2	n3	n4	n5	n6
130	88	469	446	504	501	519	195	468	470	459	609	557	573
131	466	472	453	520	514	521	196	473	474	447	618	531	560
132	449	477	469	522	523	515	197	470	478	448	617	619	506
133	464	467	444	494	524	525	198	101	447	102	620	532	106
134	465	477	449	526	522	527	199	463	465	464	621	596	562
135	449	471	465	528	529	527	200	445	455	454	549	622	623
136	469	477	460	523	530	502	201	459	460	458	598	604	589
137	447	474	102	531	509	532	202	445	454	453	623	600	601
138	116	453	117	533	534	126	203	455	456	454	542	624	622
139	456	475	451	500	535	536	204	7	481	100	625	626	104
140	451	479	456	537	538	536	205	101	472	447	592	612	620
141	6	486	81	539	540	90	206	117	481	7	553	625	127
142	88	446	89	519	541	98	207	75	485	5	627	628	80
143	455	476	456	518	490	542	208	81	486	480	540	550	629
144	82	451	83	543	544	92	209	74	478	75	630	631	79
145	84	450	85	545	546	94	210	463	477	465	614	526	621
146	86	449	87	547	516	96	211	82	480	451	632	633	543
147	445	467	455	548	493	549	212	72	484	73	611	634	77
148	480	486	474	550	551	552	213	5	485	109	628	635	118
149	453	481	117	513	553	534	214	448	478	74	619	630	566
150	457	463	444	554	555	556	215	81	480	82	629	632	91
151	459	470	461	557	505	558	216	474	486	103	551	636	510
152	466	473	447	559	560	561	217	471	483	465	637	595	529
153	463	464	444	562	525	555	218	456	479	454	538	638	624
154	450	471	85	563	564	546	219	473	479	451	639	537	640
155	73	448	74	565	566	78	220	451	480	473	633	641	640
156	451	475	83	535	567	544	221	103	486	6	636	539	108
157	115	467	445	568	548	569	222	450	483	471	642	637	563
158	462	482	446	570	571	511	223	100	481	472	626	512	591
159	443	468	459	572	573	574	224	466	479	473	643	639	559
160	72	482	462	575	570	576	225	478	485	75	644	627	631
161	444	467	114	524	577	578	226	73	484	448	634	496	565
162	86	471	449	579	528	547	227	473	480	474	641	552	618
163	109	452	110	580	581	119	228	454	479	466	638	643	599
164	113	457	444	582	556	583	229	476	483	450	588	642	491
165	84	475	450	584	499	545	230	109	485	452	635	645	580
166	110	468	111	585	586	120	231	452	485	478	645	644	616
167	464	483	476	587	588	517	232	663	664	649	690	691	692
168	443	459	458	574	589	590	233	659	679	653	693	694	695
169	100	472	101	591	592	105	234	658	670	667	696	697	698
170	111	443	112	593	594	121	235	651	687	664	699	700	701
171	465	483	464	595	587	596	236	653	678	659	702	703	695
172	112	457	113	597	582	122	237	649	672	663	704	705	692
173	459	461	460	558	487	598	238	143	672	144	706	707	153
174	454	466	453	599	521	600	239	664	673	651	708	709	701
175	113	444	114	583	578	123	240	664	687	665	700	710	711
176	114	467	115	577	568	124	241	158	677	159	712	713	163
177	445	453	116	601	533	602	242	664	665	649	711	714	691
178	460	477	458	530	603	604	243	675	684	656	715	716	717
179	115	445	116	569	602	125	244	652	672	143	718	706	719
180	443	457	112	605	597	594	245	667	679	658	720	721	698
181	89	482	4	606	607	99	246	144	672	649	707	704	722
182	452	470	468	608	609	610	247	669	675	656	723	717	724
183	462	484	72	507	611	576	248	652	680	672	725	726	718
184	452	468	110	610	585	581	249	667	670	647	697	727	728
185	446	482	89	571	606	541	250	668	680	652	729	725	730
186	85	471	86	564	579	95	251	652	674	668	731	732	730
187	4	482	72	607	575	76	252	672	680	663	726	733	705
188	447	472	466	612	520	561	253	650	677	158	734	712	735
189	443	458	457	590	613	605	254	172	656	173	736	737	182
190	111	468	443	586	572	593	255	659	678	654	703	738	739
191	458	477	463	603	614	615	256	654	682	659	740	741	739
192	83	475	84	567	584	93	257	10	689	137	742	743	146
193	452	478	470	616	617	608	258	144	649	145	722	744	154
194	458	463	457	615	554	613	259	658	679	659	721	693	745

El	n1	n2	n3	n4	n5	n6	El	n1	n2	n3	n4	n5	n6
260	138	654	139	746	747	148	325	130	681	131	833	834	135
261	140	653	141	748	749	150	326	666	680	668	817	729	824
262	142	652	143	750	719	152	327	138	683	654	835	836	746
263	648	670	658	751	696	752	328	128	687	129	814	837	133
264	683	689	677	753	754	755	329	9	688	165	831	838	174
265	656	684	173	716	756	737	330	651	681	130	822	833	769
266	660	666	647	757	758	759	331	137	683	138	832	835	147
267	662	673	664	760	708	761	332	677	689	159	754	839	713
268	669	676	650	762	763	764	333	674	686	668	840	798	732
269	666	667	647	765	728	758	334	659	682	657	741	841	827
270	653	674	141	766	767	749	335	676	682	654	842	740	843
271	129	651	130	768	769	134	336	654	683	676	836	844	843
272	654	678	139	738	770	747	337	159	689	10	839	742	164
273	171	670	648	771	751	772	338	653	686	674	845	840	766
274	665	685	649	773	774	714	339	156	684	675	829	715	794
275	646	671	662	775	776	777	340	669	682	676	846	842	762
276	128	685	665	778	773	779	341	681	688	131	847	830	834
277	647	670	170	727	780	781	342	129	687	651	837	699	768
278	142	674	652	782	731	750	343	676	683	677	844	755	821
279	165	655	166	783	784	175	344	657	682	669	841	846	802
280	169	660	647	785	759	786	345	679	686	653	791	845	694
281	140	678	653	787	702	748	346	165	688	655	838	848	783
282	166	671	167	788	789	176	347	655	688	681	848	847	819
283	667	686	679	790	791	720	348	866	867	852	893	894	895
284	646	662	661	777	792	793	349	862	882	856	896	897	898
285	156	675	157	794	795	161	350	861	873	870	899	900	901
286	167	646	168	796	797	177	351	854	890	867	902	903	904
287	668	686	667	798	790	799	352	856	881	862	905	906	898
288	168	660	169	800	785	178	353	852	875	866	907	908	895
289	662	664	663	761	690	801	354	199	875	200	909	910	209
290	657	669	656	802	724	803	355	867	876	854	911	912	904
291	169	647	170	786	781	179	356	867	890	868	903	913	914
292	170	670	171	780	771	180	357	214	880	215	915	916	219
293	648	656	172	804	736	805	358	867	868	852	914	917	894
294	663	680	661	733	806	807	359	878	887	859	918	919	920
295	171	648	172	772	805	181	360	855	875	199	921	909	922
296	646	660	168	808	800	797	361	870	882	861	923	924	901
297	145	685	8	809	810	155	362	200	875	852	910	907	925
298	655	673	671	811	812	813	363	872	878	859	926	920	927
299	665	687	128	710	814	779	364	855	883	875	928	929	921
300	655	671	166	813	788	784	365	870	873	850	900	930	931
301	649	685	145	774	809	744	366	871	883	855	932	928	933
302	141	674	142	767	782	151	367	855	877	871	934	935	933
303	8	685	128	810	778	132	368	875	883	866	929	936	908
304	650	675	669	815	723	764	369	853	880	214	937	915	938
305	646	661	660	793	816	808	370	228	859	229	939	940	238
306	167	671	646	789	775	796	371	862	881	857	906	941	942
307	661	680	666	806	817	818	372	857	885	862	943	944	942
308	139	678	140	770	787	149	373	14	892	193	945	946	202
309	655	681	673	819	820	811	374	200	852	201	925	947	210
310	661	666	660	818	757	816	375	861	882	862	924	896	948
311	671	673	662	812	760	776	376	194	857	195	949	950	204
312	676	677	650	821	734	763	377	196	856	197	951	952	206
313	673	681	651	820	822	709	378	198	855	199	953	922	208
314	157	650	158	823	735	162	379	851	873	861	954	899	955
315	666	668	667	824	799	765	380	886	892	880	956	957	958
316	648	658	657	752	825	826	381	859	887	229	919	959	940
317	662	663	661	801	807	792	382	863	869	850	960	961	962
318	648	657	656	826	803	804	383	865	876	867	963	911	964
319	658	659	657	745	827	825	384	872	879	853	965	966	967
320	11	684	156	828	829	160	385	869	870	850	968	931	961
321	157	675	650	795	815	823	386	856	877	197	969	970	952
322	173	684	11	756	828	183	387	185	854	186	971	972	190
323	131	688	9	830	831	136	388	857	881	195	941	973	950
324	137	689	683	743	753	832	389	227	873	851	974	954	975

El	n1	n2	n3	n4	n5	n6	El	n1	n2	n3	n4	n5	n6
390	868	888	852	976	977	917	427	874	876	865	1015	963	979
391	849	874	865	978	979	980	428	879	880	853	1024	937	966
392	184	888	868	981	976	982	429	876	884	854	1023	1025	912
393	850	873	226	930	983	984	430	213	853	214	1026	938	218
394	198	877	855	985	934	953	431	869	871	870	1027	1002	968
395	221	858	222	986	987	231	432	851	861	860	955	1028	1029
396	225	863	850	988	962	989	433	865	866	864	1004	1010	995
397	196	881	856	990	905	951	434	851	860	859	1029	1006	1007
398	222	874	223	991	992	232	435	861	862	860	948	1030	1028
399	870	889	882	993	994	923	436	15	887	212	1031	1032	216
400	849	865	864	980	995	996	437	213	878	853	998	1018	1026
401	212	878	213	997	998	217	438	229	887	15	959	1031	239
402	223	849	224	999	1000	233	439	187	891	13	1033	1034	192
403	871	889	870	1001	993	1002	440	193	892	886	946	956	1035
404	224	863	225	1003	988	234	441	186	884	187	1036	1037	191
405	865	867	866	964	893	1004	442	869	883	871	1020	932	1027
406	860	872	859	1005	927	1006	443	194	886	857	1038	1039	949
407	225	850	226	989	984	235	444	184	890	185	1017	1040	189
408	226	873	227	983	974	236	445	13	891	221	1034	1041	230
409	851	859	228	1007	939	1008	446	854	884	186	1025	1036	972
410	866	883	864	936	1009	1010	447	193	886	194	1035	1038	203
411	227	851	228	975	1008	237	448	880	892	215	957	1042	916
412	849	863	224	1011	1003	1000	449	877	889	871	1043	1001	935
413	201	888	12	1012	1013	211	450	862	885	860	944	1044	1030
414	858	876	874	1014	1015	1016	451	879	885	857	1045	943	1046
415	868	890	184	913	1017	982	452	857	886	879	1039	1047	1046
416	858	874	222	1016	991	987	453	215	892	14	1042	945	220
417	852	888	201	977	1012	947	454	856	889	877	1048	1043	969
418	197	877	198	970	985	207	455	212	887	878	1032	918	997
419	12	888	184	1013	981	188	456	872	885	879	1049	1045	965
420	853	878	872	1018	926	967	457	884	891	187	1050	1033	1037
421	849	864	863	996	1019	1011	458	185	890	854	1040	902	971
422	223	874	849	992	978	999	459	879	886	880	1047	958	1024
423	864	883	869	1009	1020	1021	460	860	885	872	1044	1049	1005
424	195	881	196	973	990	205	461	882	889	856	994	1048	897
425	858	884	876	1022	1023	1014	462	221	891	858	1041	1051	986
426	864	869	863	1021	960	1019	463	858	891	884	1051	1050	1022

Fonte: Elaborada pela autora.

APÊNDICE B – MALHA PÁS DIRETORAS

Conforme exposto na subseção 7.4.4.2, os *patches* que contêm as pás diretoras são P13, P14, P15 e P16, sendo que a superfície de cada uma das quatro pás corresponde à superfície de interface entre dois *patches* adjacentes (P13–P14, P14–P15, P15–P16 e P16–P13). As superfícies superiores desses *patches* são equivalentes ao corte DD da Figura 99b, enquanto as superfícies inferiores correspondem àquelas do corte CC dessa mesma figura, obtidas a partir da rotação dos pontos de controle da superfície DD em 45° em torno do eixo y_3, mantendo-se, entretanto, os valores dos pesos relativos a cada ponto de controle. Os pontos de controle das superfícies intermediárias são determinados por interpolação linear entre o plano DD (0°) e o plano CC (45°).

A direção paramétrica ξ da discretização desses *patches* corresponde à direção física angular da geometria, enquanto a direção η equivale à direção radial e, por fim, a direção paramétrica ζ equivale à direção y_3.

Considerando que o *patch* P13 foi discretizado com $9 \times 6 \times 9$ pontos de controle nas direções ξ, η e ζ, respectivamente, a superfície que descreve a pá diretora localizada entre P16-P13, consiste em uma discretização de 6×9 pontos de controle nas direções paramétricas $\eta \times \zeta$. Os índices do espaço indicial da discretização, juntamente com os pontos de controle e seus pesos relativos são apresentados na Tabela 7. Os vetores de *knots* utilizados na discretização foram: $\mathcal{H} = [0, 0, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1, 1, 1]$ e $\mathcal{Z} = [0, 0, 0, 1/7, 2/7, 3/7, 4/7, 5/7, 6/7, 1, 1, 1]$.

Para a obtenção da geometria das demais pás diretoras, basta a aplicação de uma rotação de 90°, 180° e 270° nas coordenadas dos pontos de controle apresentados na Tabela 7.

Tabela 7 – Espaço indicial e Pontos de controle

ξ	η	ζ	y_1	y_2	y_3	peso
0	0	0	0,212132	-0,212132	1,111500	1,000000
0	1	0	0,262514	-0,262513	1,111500	1,000000
0	2	0	0,363277	-0,363275	1,111500	1,000000
0	3	0	0,464040	-0,464038	1,111500	1,000000
0	4	0	0,564803	-0,564801	1,111500	1,000000
0	5	0	0,615184	-0,615182	1,111500	1,000000
0	0	1	0,199904	-0,223692	1,160357	1,000000
0	1	1	0,247382	-0,276819	1,160357	1,000000
0	2	1	0,342336	-0,383073	1,160357	1,000000
0	3	1	0,437291	-0,489327	1,160357	1,000000
0	4	1	0,532245	-0,595581	1,160357	1,000000
0	5	1	0,579723	-0,648708	1,160357	1,000000
0	0	2	0,173602	-0,244668	1,258071	1,000000
0	1	2	0,214832	-0,302777	1,258071	1,000000
0	2	2	0,297293	-0,418994	1,258071	1,000000

ξ	η	ζ	y_1	y_2	y_3	peso
0	3	2	0,379754	-0,535211	1,258071	1,000000
0	4	2	0,462215	-0,651429	1,258071	1,000000
0	5	2	0,503445	-0,709537	1,258071	1,000000
0	0	3	0,145116	-0,262567	1,355786	1,000000
0	1	3	0,179581	-0,324926	1,355786	1,000000
0	2	3	0,248511	-0,449646	1,355786	1,000000
0	3	3	0,317441	-0,574365	1,355786	1,000000
0	4	3	0,386371	-0,699084	1,355786	1,000000
0	5	3	0,420836	-0,761444	1,355786	1,000000
0	0	4	0,114805	-0,277164	1,453500	1,000000
0	1	4	0,142072	-0,342990	1,453500	1,000000
0	2	4	0,196604	-0,474643	1,453500	1,000000
0	3	4	0,251137	-0,606296	1,453500	1,000000
0	4	4	0,305669	-0,737948	1,453500	1,000000
0	5	4	0,332935	-0,803775	1,453500	1,000000
0	0	5	0,083051	-0,288275	1,551214	1,000000
0	1	5	0,102775	-0,356740	1,551214	1,000000
0	2	5	0,142225	-0,493671	1,551214	1,000000
0	3	5	0,181674	-0,630602	1,551214	1,000000
0	4	5	0,221123	-0,767533	1,551214	1,000000
0	5	5	0,240847	-0,835998	1,551214	1,000000
0	0	6	0,050252	-0,295761	1,648929	1,000000
0	1	6	0,062187	-0,366005	1,648929	1,000000
0	2	6	0,086057	-0,506491	1,648929	1,000000
0	3	6	0,109926	-0,646978	1,648929	1,000000
0	4	6	0,133796	-0,787464	1,648929	1,000000
0	5	6	0,145731	-0,857708	1,648929	1,000000
0	0	7	0,016821	-0,299528	1,746643	1,000000
0	1	7	0,020816	-0,370666	1,746643	1,000000
0	2	7	0,028806	-0,512942	1,746643	1,000000
0	3	7	0,036796	-0,655218	1,746643	1,000000
0	4	7	0,044786	-0,797493	1,746643	1,000000
0	5	7	0,048781	-0,868631	1,746643	1,000000
0	0	8	0,000000	-0,300000	1,795500	1,000000
0	1	8	0,000000	-0,371250	1,795500	1,000000
0	2	8	0,000000	-0,513750	1,795500	1,000000
0	3	8	0,000000	-0,656250	1,795500	1,000000
0	4	8	0,000000	-0,798750	1,795500	1,000000
0	5	8	0,000000	-0,870000	1,795500	1,000000

Fonte: Elaborada pela autora.