
DINÂMICA DOS SÓLIDOS COMPUTACIONAL

Assim como no caso da Mecânica dos Fluidos, um sólido é modelado como um corpo contínuo, com seu movimento governado por um conjunto de equações provenientes da lei da conservação da quantidade de movimento, lei da conservação da massa e lei da conservação de energia. Entretanto, diferentemente dos fluidos, os sólidos possuem resistência aos esforços normais e tangenciais até que alcancem seu limite resistente, e por isso, apresentam deslocamentos e deformações finitos. As variáveis de interesse na resolução do conjunto de equações que descrevem o comportamento do sólido são os deslocamentos, ou, posições atuais ao longo do tempo, dessa forma, uma descrição do tipo Lagrangiana é mais adequada para essas análises.

No contexto da mecânica dos sólidos, o comportamento estrutural pode ser classificado como linear ou não linear. As não linearidades podem ser de natureza geométrica, quando associadas à presença de grandes deslocamentos e rotações que invalidam a hipótese de pequenas deformações, ou de natureza física, quando resultam de modificações na relação constitutiva do material.

Para problemas de sólidos com comportamento elástico, quando houver a possibilidade de grandes deslocamentos, a não-linearidade geométrica deve ser contemplada. Para essa análise, altera-se a forma de consideração do equilíbrio das forças no sólido. Enquanto que em uma modelagem linear, o equilíbrio é realizado em relação a configuração inicial, que é muito próxima a configuração atual do corpo, em uma análise não-linear, o equilíbrio é considerado na configuração atual (ver, por exemplo ??) e ??).

Em muitos problemas da IFE, como *flutter* e *buffeting*, grandes deslocamentos estão envolvidos. Por isso, nesse estudo, utiliza-se uma formulação não-linear geométrica dinâmica baseada em uma descrição Lagrangiana Total para as análises das estruturas. A

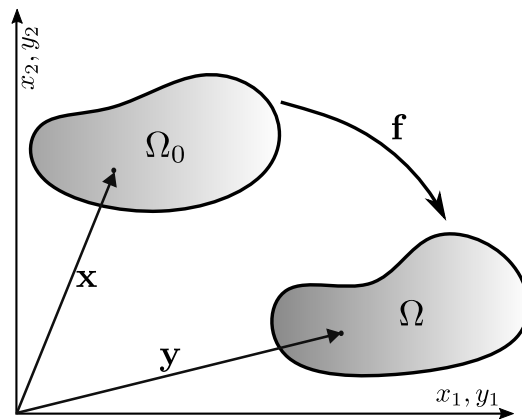
formulação é baseada no método dos elementos finitos com abordagem posicional (????), onde as variáveis principais são as posições nodais. Escolheu-se trabalhar com elementos de cascas, uma vez que esses podem representar a maioria dos problemas estruturais tridimensionais. No casos das cascas, vetores generalizados e um termo que considera a variação linear da espessura do elemento para permitir o mapeamento completo do sólido, são adicionadas às incógnitas nodais do problema.

Neste capítulo, a formulação é apresentada a partir da descrição da cinemática e das condições de equilíbrio dos corpos deformáveis, com o objetivo de se deduzirem as equações globais de equilíbrio na formulação Lagrangiana, seguida pela introdução do modelo constitutivo de *Saint-Venant–Kirchhoff*. Em seguida, aborda-se o método dos elementos finitos posicional aplicado ao elemento finito de casca, incluindo a técnica de integração temporal empregada. Na sequência, apresenta-se o algoritmo de implementação computacional adotado e, por fim, são expostos os resultados de um exemplo de validação.

1.1 Cinemática dos corpos deformáveis

Um sólido deformável quando sujeito à ações externas, sofre uma mudança de configuração. Na Figura 1.1, pode-se observar um sólido na sua configuração inicial Ω_0 , com coordenadas materiais descritas por \mathbf{x} , e, o sólido no instante atual, representado por Ω , com coordenadas espaciais \mathbf{y} .

Figura 1.1 – Cinemática de um sólido deformável



Fonte: Elaborada pela autora

A função mudança de configuração, denominada de \mathbf{f} , mapeia cada ponto da posição inicial para a atual, de modo que:

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \quad (1.1)$$

Uma medida de deformação Lagrangeana deve quantificar a mudança de forma em cada ponto do contínuo em relação ao estado inicial. Para o caso de grandes deslocamentos, assunto desse estudo, a medida de deformação deve ser independente de movimento de corpo rígido ou da escolha dos eixos de referência, ou seja, deve ser uma medida objetiva de deformação. A medida de deformação é descrita em termos do gradiente da função mudança de configuração, \mathbf{A} , definido matematicamente como:

$$\mathbf{A} = \nabla_x (\mathbf{f}) = \nabla_x \mathbf{y}. \quad (1.2)$$

Nesse contexto, o tensor de deformações de Green-Lagrange, respeita a condição de medida de deformação objetiva, sendo descrito de acordo com ??) pela seguinte expressão:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad (1.3)$$

sendo \mathbf{C} um tensor simétrico denominado de tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green, o qual é escrito como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t. \quad (1.4)$$

A partir do gradiente da função mudança de configuração pode-se estabelecer uma relação entre um vetor qualquer \mathbf{u} definido na configuração inicial e seu equivalente na configuração atual \mathbf{v} através da seguinte expressão:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} \quad (1.5)$$

Para a obtenção posteriormente das equações de equilíbrio em descrição Lagrangiana, faz-se necessário abordar as relações de mudança de volume e de área que ocorrem da configuração inicial para a atual.

No estabelecimento de uma relação entre o volume inicial e final, definem-se dois volumes infinitesimais, um inicial dV_0 e um final dV , apresentados na ??. O volume infinitesimal inicial dV_0 pode ser calculado por:

$$dV_0 = (\mathbf{dx}_1 \wedge \mathbf{dx}_2) \cdot \mathbf{dx}_3 = \det(\mathbf{dx}_1, \mathbf{dx}_2, \mathbf{dx}_3), \quad (1.6)$$

com \mathbf{dx}_1 , \mathbf{dx}_2 e \mathbf{dx}_3 vetores que definem o volume inicial. O volume atual pode ser expresso então, por:

$$dV = (\mathbf{dy}_1 \wedge \mathbf{dy}_2) \cdot \mathbf{dy}_3 = \det(\mathbf{dy}_1, \mathbf{dy}_2, \mathbf{dy}_3), \quad (1.7)$$

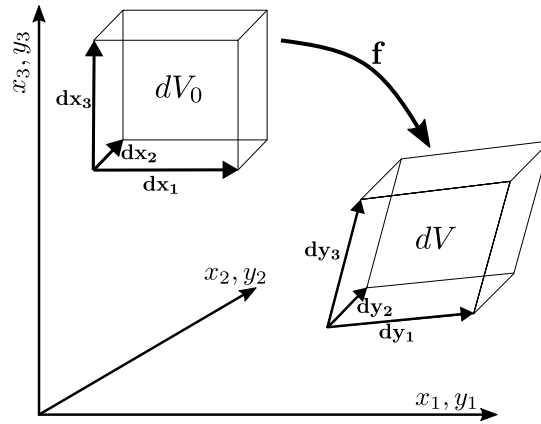
sendo \mathbf{dy}_1 , \mathbf{dy}_2 e \mathbf{dy}_3 os vetores que definem o volume atual.

Tendo em vista a expressão 1.5, pode-se reescrever a Equação 1.7, como:

$$dV = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{dx}_1, \mathbf{dx}_2, \mathbf{dx}_3) = J dV_0, \quad (1.8)$$

na qual J representa o determinante Jacobiano da função mudança de configuração.

Figura 1.2 – Mudança no volume



Fonte: Elaborada pela autora

Para escrever a relação entre as áreas inicial e atual se tomará como referência os cilindros da Figura 1.3. Considerando um vetor área inicial \mathbf{dA}_0 e um vetor área atual \mathbf{dA} como:

$$\mathbf{dA}_0 = \mathbf{N}dA_0, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{dA} = \mathbf{n}dA, \quad (1.10)$$

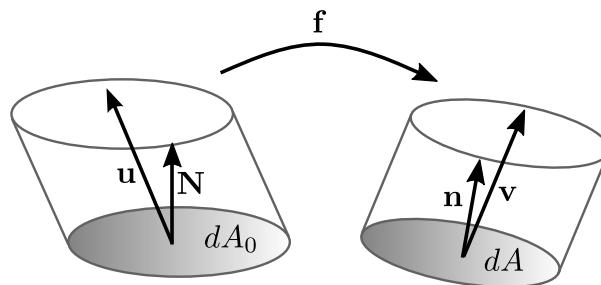
com \mathbf{N} e \mathbf{n} os versores unitários normais às áreas inicial dA_0 e atual dA . O volume na configuração inicial (dV_0) e na configuração atual (dV) são calculados por:

$$dV_0 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{dA}_0 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{N}dA_0, \quad (1.11)$$

$$dV = \mathbf{v} \cdot \mathbf{dA} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}dA, \quad (1.12)$$

com \mathbf{u} e \mathbf{v} vetores não coplanares com as áreas inicial e atual, respectivamente.

Figura 1.3 – Mudança de área



Fonte: Elaborada pela autora

Considerando a relação da Equação 1.5, pode-se escrever o volume na configuração atual, dV , como:

$$dV = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{n} dA = J dV_0 = J \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dA_0. \quad (1.13)$$

Pré-multiplicando-se a Equação 1.13 por \mathbf{B} ($(\mathbf{A}^t)^{-1}$) e considerando-se a arbitrariedade de \mathbf{u} , chega-se a conhecida fórmula de Nanson, descrita como:

$$\mathbf{n} dA = J \mathbf{B} \cdot \mathbf{N} dA_0. \quad (1.14)$$

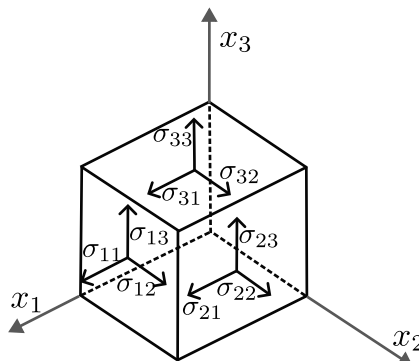
1.2 Equilíbrio de corpos deformáveis

1.2.1 Estado de tensão em um ponto

Um corpo contínuo, ao ser submetido a ações externas, desenvolve forças internas de modo a garantir o equilíbrio dinâmico ou estático. A medida em cada ponto dessas forças internas é fundamental dentro da mecânica dos sólidos para a aplicação das leis da física às partículas do corpo.

Considerando um corpo qualquer, na configuração atual, sujeito a um conjunto equilibrado de forças externas, ao fazer-se a extração de um volume elementar infinitesimal, conforme pode ser observado na Figura 1.4, surgem em suas faces, por ação e reação, uma distribuição de forças por unidade de superfície. Decompondo essas tensões em componentes cartesianas, obtém-se em cada face uma componente normal e duas componentes tangenciais de tensão. As componentes de tensão são designadas por σ_{ij} , com i referindo-se ao plano de atuação e j indicando a direção de atuação da tensão. Na Figura 1.4 podem ser observadas as componentes positivas de tensão em cada plano. No plano paralelo oposto, pela lei da ação e reação, as tensões possuem mesma intensidade, porém sentido contrário.

Figura 1.4 – Volume infinitesimal: componentes de tensão



Fonte: Elaborada pela autora

O tensor de tensões de Cauchy ($\boldsymbol{\sigma}$) contém todas as informações de tensão em um ponto e será representado como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

Ao realizar-se o equilíbrio de momentos sobre um elemento infinitesimal, nota-se que $\boldsymbol{\sigma}$ é simétrico (Teorema de Cauchy), e pode ser reescrito como:

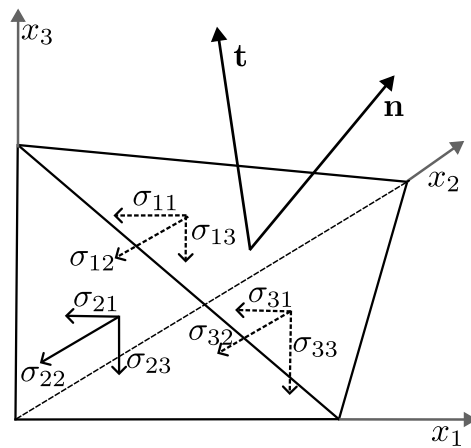
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.16)$$

Vale ressaltar que, a tensão de Cauchy é definida na configuração atual do contínuo, e por isso, trata-se de uma medida Euleriana de tensão.

Se extraíssemos do corpo contínuo um volume tetraédrico (Figura 1.5), no plano inclinado, cujo versor normal é \mathbf{n} , surge um vetor de tensões designado por \mathbf{t} . Considerando que a área do plano inclinado foi definida como dA , enquanto que as áreas correspondentes aos planos coordenados são suas projeções, pode-se calcular o equilíbrio do tetraedro em cada direção, chegando-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}. \quad (1.17)$$

Figura 1.5 – Tetraedro elementar



Fonte: Elaborada pela autora

Essa expressão é conhecida por fórmula de Cauchy. Considerando que o plano inclinado refere-se a superfície externa, essa equação pode ser utilizada para relacionar o estado de tensão em um ponto com as forças de superfície (\mathbf{p}), como:

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}. \quad (1.18)$$

1.2.2 Equilíbrio local Lagrangeano

Para a obtenção das equações de equilíbrio local em descrição Lagrangeana, será utilizada como ponto de partida a equação de equilíbrio local Euleriana. Para isso, considere o sólido apresentado na Figura 1.6, o qual está submetido a forças de corpo, \mathbf{b} , e a forças de superfície, \mathbf{p} . Extraíndo-se um elemento infinitesimal deste corpo que sofreu mudança de configuração, e aplicando-se a segunda Lei de Newton, o equilíbrio local pode ser descrito:

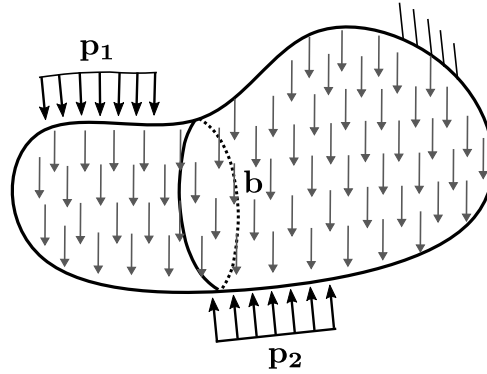
$$\nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma}^t + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{y}}, \quad (1.19)$$

ou ainda, em notação indicial:

$$\sigma_{ji,j} + b_i = \rho \ddot{y}_i, \quad (1.20)$$

com ρ representando a massa específica do material que compõe o sólido e $\ddot{\mathbf{y}}$ é a derivada material da velocidade do ponto material (aceleração do corpo).

Figura 1.6 – Sólido sob carregamento externo



Fonte: Elaborada pela autora

Ao integrar-se a Equação 1.19 no volume do sólido e utilizar-se o Teorema da Divergência chega-se a:

$$\int_A \boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{n} dA + \int_V \mathbf{b} dV = \int_V \rho \ddot{\mathbf{y}} dV \quad (1.21)$$

ou, ainda:

$$\int_A \mathbf{p} dA + \int_V \mathbf{b} dV = \int_V \rho \ddot{\mathbf{y}} dV \quad (1.22)$$

Considerando as relações de mudança de área e volume, apresentadas nas equações Equação 1.8 e Equação 1.14, e que da equação da conservação da massa (M) tem-se que:

$$M = \int_{V_0} \rho_0 dV_0 = \int_{V(t)} \rho(t) dV, \quad (1.23)$$

escreve-se a equação global de equilíbrio Lagrangeana, a partir da Equação 1.21 como:

$$\int_{A_0} \mathbf{P}^t \cdot \mathbf{N} dA_0 + \int_{V_0} \mathbf{b}_0 dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} dV_0, \quad (1.24)$$

na qual o primeiro tensor de tensões transposto de Piola-Kirchhoff (\mathbf{P}^t), não simétrico, é definido como $\mathbf{P}^t = J \boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{B}$, e o subíndice 0, refere-se a variável no instante inicial.

Ao aplicar-se o Teorema da Divergência a Equação 1.24 e da consideração da arbitrariedade do volume, chega-se a versão local da equação de equilíbrio Lagrangeano, expressa por:

$$\nabla_x \cdot \mathbf{P}^t + \mathbf{b}_0 = \rho_0 \ddot{\mathbf{y}}. \quad (1.25)$$

1.2.3 Princípio de Estacionariedade de energia

No estudo do equilíbrio de corpos deformáveis a análise da energia mecânica é um assunto de grande importância. A energia mecânica é formada basicamente por três parcelas: energia potencial das forças externas (\mathbb{P}), energia de deformação (\mathbb{U}_e) e energia cinética (\mathbb{K}). A energia total mecânica (Π) é um funcional obtido pela soma dessas três parcelas, sendo escrita da seguinte maneira:

$$\Pi = \mathbb{P} + \mathbb{K} + \mathbb{U}_e. \quad (1.26)$$

O princípio da estacionariedade da energia define que um corpo quando em equilíbrio apresenta a primeira variação do funcional de energia mecânica nula, sendo o equilíbrio estável quando a posição de equilíbrio representa um mínimo local para a energia mecânica total. Este princípio, para uma descrição das equações de equilíbrio em posições, pode ser expresso matematicamente da seguinte forma:

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad (1.27)$$

ou, dada a arbitrariedade de $\delta \mathbf{y}$, como:

$$\delta \Pi = \delta \mathbb{P} + \delta \mathbb{K} + \delta \mathbb{U}_e. \quad (1.28)$$

Um incremento de energia mecânica específica (energia mecânica por unidade de volume) pode ser obtido pelo produto escalar da Equação 1.25 por um incremento de posição $\delta \mathbf{y}$, e, integrando-se sobre o domínio inicial, têm-se:

$$\delta \Pi = \int_{V_0} (\rho_0 \ddot{\mathbf{y}} - \nabla_x \cdot \mathbf{P}^t - \mathbf{b}_0) \cdot \delta \mathbf{y} dV_0 = 0 \quad (1.29)$$

Ao integrar-se por partes o segundo termo da Equação 1.29 e utilizar-se o Teorema da Divergência, chega-se a seguinte expressão:

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta\mathbf{y} dV_0 - \int_{A_0} \mathbf{P}^t \cdot \mathbf{N} \cdot \delta\mathbf{y} dA_0 + \int_{V_0} \mathbf{P}^t : \nabla_x(\delta\mathbf{y}) dV_0 - \int_{V_0} \mathbf{b}_0 \cdot \delta\mathbf{y} dV_0 = 0 \quad (1.30)$$

A Equação 1.30 pode ainda ser reformulada, considerando que $\nabla_x(\delta\mathbf{y}) = \delta\mathbf{A}$ e que $\mathbf{P}^t \cdot \mathbf{N}$ representa as forças de superfície na configuração inicial (\mathbf{p}_0) como:

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta\mathbf{y} dV_0 - \int_{A_0} \mathbf{p}_0 \cdot \delta\mathbf{y} dA_0 + \int_{V_0} \mathbf{P}^t : \delta\mathbf{A} dV_0 - \int_{V_0} \mathbf{b}_0 \cdot \delta\mathbf{y} dV_0 = 0. \quad (1.31)$$

Conforme relatou-se, o tensor de Piola-Kirchhoff de primeira espécie não é necessariamente simétrico, desta forma, torna-se mais conveniente adotar uma medida de tensão que resulte em um tensor simétrico. Com essa finalidade, adota-se um tensor \mathbf{S} , de forma que:

$$\mathbf{P} = \mathbf{S}^t \cdot \mathbf{A}^t, \quad (1.32)$$

com \mathbf{S} conhecido como tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie.

Utilizando-se a relação apresentada na Equação 1.32 na Equação 1.31, chega-se a:

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta\mathbf{y} dV_0 - \int_{A_0} \mathbf{p}_0 \cdot \delta\mathbf{y} dA_0 + \int_{V_0} \mathbf{S} : \delta\mathbf{E} dV_0 - \int_{V_0} \mathbf{b}_0 \cdot \delta\mathbf{y} dV_0 = 0. \quad (1.33)$$

A Equação 1.33, será adicionada ainda uma parcela referente a possibilidade de carregamentos pontuais, sendo expressa então, por:

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta\mathbf{y} dV_0 - \int_{A_0} \mathbf{p}_0 \cdot \delta\mathbf{y} dA_0 + \int_{V_0} \mathbf{S} : \delta\mathbf{E} dV_0 - \int_{V_0} \mathbf{b}_0 \cdot \delta\mathbf{y} dV_0 - \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{y} = 0. \quad (1.34)$$

Partindo-se da Equação 1.34, encontra-se a relação entre suas componentes e as parcelas de energia mecânica, dessa forma, têm-se:

$$\delta\P = - \int_{A_0} \mathbf{p}_0 \cdot \delta\mathbf{y} dA_0 - \int_{V_0} \mathbf{b}_0 \cdot \delta\mathbf{y} dV_0 - \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{y}, \quad (1.35)$$

$$\delta\mathbb{K} = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta\mathbf{y} dV_0, \quad (1.36)$$

$$\delta\mathbb{U}_e = \int_{V_0} \mathbf{S} : \delta\mathbf{E} dV_0. \quad (1.37)$$

1.2.4 Modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff

A lei constitutiva hiperelástica de Saint-Venant-Kirchhoff estabelece uma relação linear entre o tensor das tensões de Piola Kirchhoff de segunda espécie e o tensor de deformação de Green, e pode ser escrita pela expressão generalizada da energia de deformação por:

$$u_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbf{E}, \quad (1.38)$$

ou, em notação indicial:

$$u_e = \frac{1}{2} E_{kl} C_{klij} E_{ij} \quad (1.39)$$

com \mathbb{C} representando o tensor constitutivo elástico isotrópico, que é um tensor de quarta ordem definido como:

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \left(\kappa - \frac{2}{3}G \right) \delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad (1.40)$$

sendo δ_{ij} o delta de Kronocker, κ e G os módulos volumétrico e de cisalhamento respectivamente, os quais são calculados através das seguintes relações:

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}G, \quad (1.41)$$

$$G = \frac{\mathbb{E}}{2(1 + \nu)}, \quad (1.42)$$

$$\lambda = \frac{\nu \mathbb{E}}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad (1.43)$$

com \mathbb{E} sendo o módulo de elasticidade longitudinal e ν o coeficiente de Poisson. Ressalta-se que essa lei constitutiva aqui utilizada é adequada para grandes deslocamentos, entretanto, a mesma é adequada somente para deformações pequenas a moderadas.

1.3 Método dos Elementos Finitos Posicional

Conforme discutido na ??, o método dos elementos finitos baseia-se na substituição do contínuo por um conjunto finito de subdomínios, denominados elementos finitos. Em cada um desses elementos, as variáveis de interesse — incluindo a própria geometria — são aproximadas, de modo que o problema contínuo é convertido em um problema discreto, caracterizado por um número finito de incógnitas.

Nesta subseção será apresentado o desenvolvimento da formulação posicional do Método dos Elementos Finitos aplicada a cinemática de cascas.

1.3.1 Elemento finito de Casca

A formulação não-linear geométrica de casca posicional foi desenvolvida por ??), e consistia inicialmente em 6 graus de liberdade por nó, sendo 3 referentes à posições e 3 referentes às componentes do vetor generalizado. Em ??) incluí-se a formulação um sétimo parâmetro, que considera a taxa de variação linear da espessura, para lidar com o fenômeno de travamento volumétrico. Essa última cinemática será utilizada nesse trabalho.

As cascas são sólidos que possuem uma de suas dimensões muito menor do que

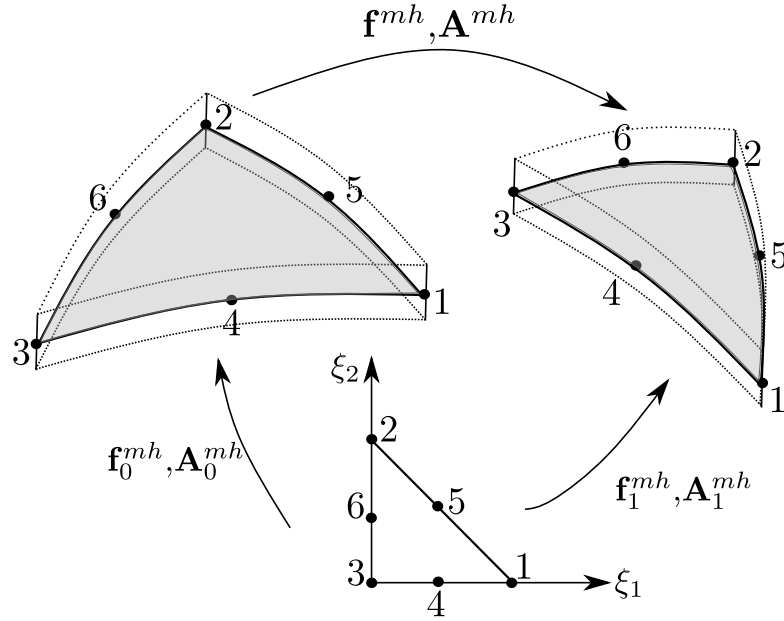
as outras, assim o mapeamento da configuração do sólido pode ser facilitado tomando-se a superfície média como referência. Os mapeamentos das configurações inicial e atual dos pontos da superfície média, conforme pode ser observado na Figura 1.7, são definidos respectivamente como:

$$\mathbf{f}_0^{mh}(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{x}^{mh}(\xi_1, \xi_2) = N_l(\xi_1, \xi_2)\mathbf{x}_l^{mh} \quad (1.44)$$

$$\mathbf{f}_1^{mh}(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{y}^{mh}(\xi_1, \xi_2) = N_l(\xi_1, \xi_2)\mathbf{y}_l^{mh}, \quad (1.45)$$

com \mathbf{x}_l^{mh} e \mathbf{y}_l^{mh} representando os vetores dos parâmetros de posição inicial e atual da linha média respectivos ao nó l , e, $N_l(\xi_1, \xi_2)$ é o valor da função de forma do nó l calculado no ponto de coordenadas paramétricas (ξ_1, ξ_2) .

Figura 1.7 – Mapeamento da superfície média da casca



Fonte: Elaborada pela autora

Para completar a cinemática da casca, os demais pontos são mapeados por meio da soma da posição de um ponto na superfície média com um vetor generalizado \mathbf{g}_0^h ou \mathbf{g}_1^h nas configurações inicial e atual, respectivamente. \mathbf{g}_0^h é normal a linha de referência na configuração inicial, conforme pode ser observado na Figura 1.8. Desta forma, o mapeamento completo fica definido por:

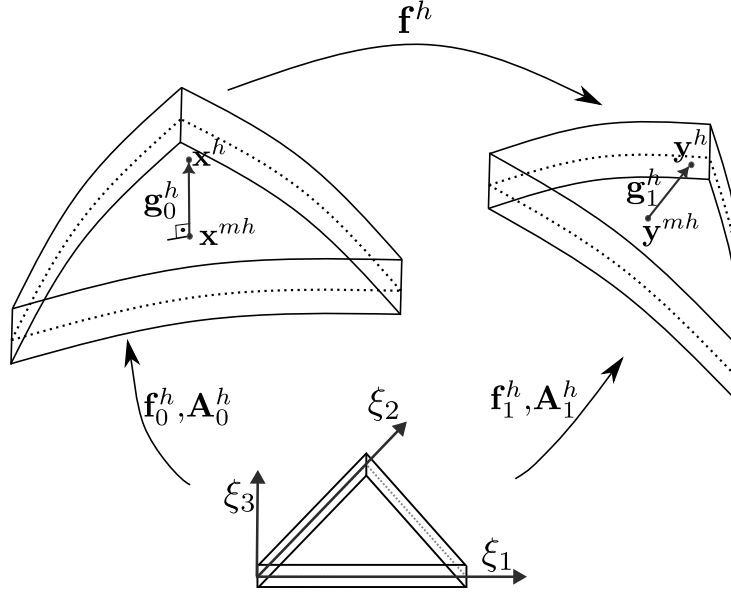
$$\mathbf{f}_0^h(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \mathbf{x}^h(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \mathbf{f}_0^{mh}(\xi_1, \xi_2) + \mathbf{g}_0^h(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (1.46)$$

$$\mathbf{f}_1^h(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \mathbf{y}^h(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \mathbf{f}_1^{mh}(\xi_1, \xi_2) + \mathbf{g}_1^h(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (1.47)$$

em que ξ_3 é a coordenada adimensional na espessura da casca variando de -1 a 1.

Os vetores generalizados \mathbf{g}_0^h e \mathbf{g}_1^h representados na discretização por elementos finitos ficam expressos por:

Figura 1.8 – Vetores generalizados



Fonte: Elaborada pela autora

$$\mathbf{g}_0^h(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{h_0}{2} \xi_3 N_l(\xi_1, \xi_2) \cdot (\mathbf{e}_x)_l, \quad (1.48)$$

$$\mathbf{g}_1^h(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{h_0}{2} \left[\xi_3 + \eta_l N_l(\xi_1, \xi_2) \xi_3^2 \right] N_l(\xi_1, \xi_2) \cdot (\mathbf{e}_y)_l, \quad (1.49)$$

com h_0 representando a espessura média inicial do elemento de casca, $(\mathbf{e}_x)_l$ é o l -ésimo valor nodal do vetor unitário normal à linha de referência inicial, $(\mathbf{e}_y)_l$ o l -ésimo valor nodal do vetor generalizado na configuração atual e η_l é o l -ésimo valor nodal da chamada de taxa linear de variação da espessura.

Finalmente, defini-se a função mudança de configura, através da seguinte relação:

$$\mathbf{f}^h = \mathbf{f}_1^h \circ (\mathbf{f}_0^h)^{-1}. \quad (1.50)$$

De forma análoga pode-se representar o gradiente de \mathbf{f}^h como:

$$\mathbf{A}^h = \mathbf{A}_1^h \cdot (\mathbf{A}_0^h)^{-1}, \quad (1.51)$$

em que $\mathbf{A}^h = \nabla_x \mathbf{f}^h$, $\mathbf{A}_0^h = \frac{\partial \mathbf{f}_0^h}{\partial \xi}$ e $\mathbf{A}_1^h = \frac{\partial \mathbf{f}_1^h}{\partial \xi}$.

Assim, o alongamento à direta de Cauchy-Green e a deformação de Green podem ser escritos em função de \mathbf{A}_0^h e \mathbf{A}_1^h , como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} = \left(\mathbf{A}_1^h \cdot (\mathbf{A}_0^h)^{-1} \right)^t \cdot \left(\mathbf{A}_1^h \cdot (\mathbf{A}_0^h)^{-1} \right), \quad (1.52)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \left(\left(\mathbf{A}_1^h \cdot (\mathbf{A}_0^h)^{-1} \right)^t \cdot \left(\mathbf{A}_1^h \cdot (\mathbf{A}_0^h)^{-1} \right) - \mathbf{I} \right). \quad (1.53)$$

Neste trabalho, aplicou-se nas discretizações um elemento triangular quadrático

com 6 nós.

Partindo do mapeamento apresentado é possível escrever o funcional de energia mecânica em função dos parâmetros nodais apresentados, e ao discretizar-se as equações no tempo, a solução do problema consiste encontrar os parâmetros nodais que satisfaçam:

$$\frac{\partial \Pi^h}{\partial \mathbf{y}_l^{mh}} = \frac{\partial \Pi^h}{\partial (\mathbf{e}_y)_l} = \frac{\partial \Pi^h}{\partial \eta_l} = \mathbf{0}. \quad (1.54)$$

1.3.2 Integração Temporal e solução do problema não-linear

Para a resolução do problema não-linear, vamos reescrever o princípio da estacionariedade em função da variável \mathbf{Y} , que consiste em um vetor que contém todos os parâmetros nodais da estrutura (posições, vetores generalizados e taxa de variação linear da espessura) da seguinte forma:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{Y}} = \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial \mathbf{Y}} + \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial \mathbf{Y}} + \frac{\partial \mathbb{U}_e}{\partial \mathbf{Y}} = \mathbf{0}, \quad (1.55)$$

ou ainda,

$$-\mathbf{F}^{ext}(t) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{F}^{int}(\mathbf{Y}) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{0}, \quad (1.56)$$

na qual $\mathbf{F}^{int}(\mathbf{Y})$ representa as forças internas provenientes da variação da energia potencial interna, \mathbf{M} é a conhecida como matriz de massa proveniente da variação da energia cinética e \mathbf{F}^{ext} representam as forças externas na estrutura fruto da variação da energia potencial das forças externas. O termo \mathbf{C} representa uma matriz de amortecimento proporcional a massa, e $\dot{\mathbf{Y}}$ a velocidade nodal.

Nesse trabalho, para a discretização temporal das equações, será utilizado o integrador de Newmark, visto que o mesmo demonstrou estabilidade e eficácia na vasta gama de trabalhos envolvendo o MEF posicional com sua aplicação ((???????????)).

A integração temporal das equações inicia-se com a discretização do tempo de maneira que:

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t, \quad (1.57)$$

na qual t_{n+1} representa o tempo no instante atual, t_n o instante de tempo anterior e Δt o intervalo de tempo utilizado na discretização. Utilizando as aproximações de Newmark, posição, velocidade e aceleração nos tempos $n + 1$ e n são relacionados por:

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + \Delta t \dot{\mathbf{Y}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{Y}}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{Y}}_{n+1}, \quad (1.58)$$

$$\dot{\mathbf{Y}}_{n+1} = \dot{\mathbf{Y}}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{Y}}_n + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{Y}}_{n+1}, \quad (1.59)$$

em que β e γ são parâmetros dependentes do comportamento assumido para a aceleração. Para um aceleração constante adotada-se nesse trabalho $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/4$.

Partindo das equações Equação 1.58 e Equação 1.59 é possível escrever a aceleração

e a velocidade atual em função das posições no instante $n + 1$, as incógnitas do problema, e das demais variáveis do passo anterior:

$$\ddot{\mathbf{Y}}_{n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{Y}_{n+1} - \mathbf{Q}(t_n), \quad (1.60)$$

$$\dot{\mathbf{Y}}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{Y}_{n+1} + \mathbf{R}(t_n) - \gamma \Delta t \mathbf{Q}(t_n), \quad (1.61)$$

em que:

$$\mathbf{Q}(t_n) = \frac{\mathbf{Y}_n}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{\mathbf{Y}}_n}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{Y}}_n, \quad (1.62)$$

$$\mathbf{R}(t_n) = \dot{\mathbf{Y}}_n + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{Y}}_n. \quad (1.63)$$

Utilizando as equações Equação 1.60 e Equação 1.61 na equação do equilíbrio em forma matricial (Equação 1.56), tem-se para o instante t_{n+1} a seguinte relação:

$$\mathbf{F}_{n+1}^{int} - \mathbf{F}_{n+1}^{ext} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \mathbf{Y}_{n+1} - \mathbf{M} \mathbf{Q}_n + \mathbf{C} \mathbf{R}_n + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \mathbf{Y}_{n+1} - \gamma \Delta t \mathbf{C} \mathbf{Q}_n = \mathbf{0}, \quad (1.64)$$

Pode-se escrever ainda o problema não linear definido pela Equação 1.64 em função do resíduo da equação governante discretizada no espaço e no tempo, como:

$$\mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}) = \mathbf{F}_{n+1}^{int} - \mathbf{F}_{n+1}^{ext} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \mathbf{Y}_{n+1} - \mathbf{M} \mathbf{Q}_n + \mathbf{C} \mathbf{R}_n + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \mathbf{Y}_{n+1} - \gamma \Delta t \mathbf{C} \mathbf{Q}_n = \mathbf{0}. \quad (1.65)$$

O problema não linear da Equação 1.65 é resolvido por meio do método iterativo de Newton-Raphson. Para isso, realiza-se uma expansão em série de Taylor de primeira ordem:

$$\mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}^{i+1}) \approx \mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}^i) + \Delta \mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}^i) \Delta \mathbf{Y}_{n+1}^i \quad (1.66)$$

em que i indica o índice da iteração atual. Na primeira iteração para o cálculo de \mathbf{Y}_{n+1} utiliza-se como predição da iteração anterior os valores das variáveis no passo de tempo n . O método de Newton-Raphson consiste em resolver o seguinte sistema:

$$\Delta \mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}^i) \Delta \mathbf{Y}_{n+1}^i = -\mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}^i) \quad (1.67)$$

com:

$$\Delta \mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}^i) = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{Y}^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{U}_e}{\partial \mathbf{Y}^2} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t}. \quad (1.68)$$

A cada iteração de Newton-Raphson atualiza-se a posição, a aceleração e a velocidade de acordo com as seguintes equações:

$$\mathbf{Y}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{Y}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{Y}_{n+1}^i \quad (1.69)$$

$$\ddot{\mathbf{Y}}_{n+1}^{i+1} = \frac{\mathbf{Y}_{n+1}^{i+1}}{\beta \Delta t^2} + \mathbf{Q}_n \quad (1.70)$$

$$\dot{\mathbf{Y}}_{n+1}^{i+1} = \frac{\gamma \mathbf{Y}_{n+1}^{i+1}}{\beta \Delta t} + \mathbf{R}_n - \gamma \Delta t \mathbf{Q}_n \quad (1.71)$$

Para mais detalhes a cerca da obtenção das matrizes e vetores do método, recomenda-se a consulta de ??).

1.3.3 Implementação Computacional

Emprega-se nesse estudo, o programa computacional de análise não-linear dinâmica de sólidos cedido pelo aluno de doutorado Rosicley Junior Rodrigues Rosa, que faz parte do grupo de pesquisa da presente autora (GRUMEC) no Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos - USP. O referido autor começou a desenvolver o código em seu trabalho de dissertação (??), o qual continua em desenvolvimento atualmente em sua tese de doutorado.

O código foi desenvolvido em linguagem C++ utilizando paralelização em protocolo MPI. Ressalta-se que a implementação conta com uma estratégia de acoplamento entre elementos não coplanares, que pode ser vista em ??). O algoritmo que descreve a implementação computacional pode ser visualizado em Alg. 1. No algoritmo a variável \mathbf{X} consiste em um vetor das variáveis nodais na configuração inicial.

1.4 Exemplo de aplicação - Casca cilíndrica com *snap through* dinâmico

Nesta seção apresenta-se um problema clássico que trata-se de uma casca cilíndrica submetida a um carregamento concentrado em seu centro geométrico. Proposto inicialmente no trabalho de ??), o problema apresenta grande não-linearidade geométrica devido ao efeito de *snap-through*.

A geometria do problema em questão é apresentada na Subfigure 1.10a, sendo a espessura da casca equivalente a 0,1m. A malha de elementos finitos que representa a superfície média da estrutura utilizada pode ser visualizada na Subfigure 1.10b, a qual é composta por 104 elementos quadráticos e 233 nós.

Os contornos esquerdo e direito da chapa são considerados simplesmente apoiados. O carregamento aplicado ao ponto central (ponto A) $P(t)$ é aplicado linearmente no intervalo $t = 0s$ até $t = 0,2s$, com $P(0) = 0kN$ e $P(2s) = 200000kN$, e então mantido constante. As características físicas do material utilizado são: $E = 200GPa$, $\nu = 0,25$ e $\rho = 10000kg/m^3$ e o passo de tempo adotado na simulação é $\Delta t = 0,001s$.

Algoritmo 1 Algoritmo para problemas não-lineares dinâmicos utilizando MEF posicional

- 1: Adota-se $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$;
- 2: **para** o passo de tempo 0 até T **faça**
- 3: $i = 0$;
- 4: Predição da solução:

$$\mathbf{Y}_{n+1}^0 = \mathbf{Y}_n, \quad (1.72)$$

$$\dot{\mathbf{Y}}_{n+1}^0 = \dot{\mathbf{Y}}_n, \quad (1.73)$$

$$\ddot{\mathbf{Y}}_{n+1}^0 = \ddot{\mathbf{Y}}_n; \quad (1.74)$$

- 5: Calcula-se nível de força aplicado $\mathbf{F}_{n+1}^{ext}(t_{n+1})$ e/ou as posições prescritas \mathbf{Y}_{n+1} ;
- 6: Calculam-se os valores de \mathbf{Q}_n (Equação 1.62) e \mathbf{R}_n (Equação 1.63);
- 7: **enquanto** ($\epsilon < \text{tolerância}$) **faça**
- 8: $i++$;
- 9: Cálculo do incremento da variável do problema: \mathbf{Y}_{n+1}^i de acordo com a Equação 1.67;
- 10: Atualização da solução: calculada de acordo com Equação 1.69, Equação 1.70 e Equação 1.71.
- 11: Cálculo do erro:

$$\epsilon = \|\Delta \mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}^{i+1})\|_{L^2} \quad (1.75)$$

ou,

$$\epsilon = \|\Delta \mathbf{Y}_{n+1}^{i+1}\|_{L^2} \quad (1.76)$$

- 12: **fim enquanto**
- 13: Atualiza-se a solução do passo anterior:

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{Y}_{n+1}, \quad (1.77)$$

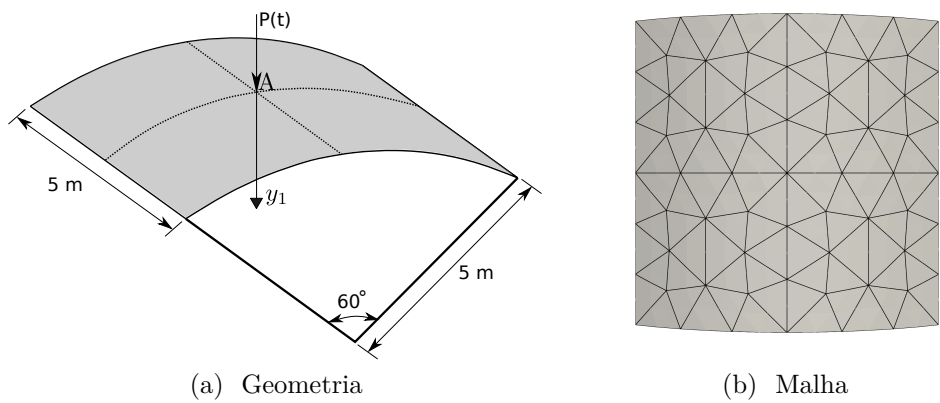
$$\dot{\mathbf{Y}}_n = \dot{\mathbf{Y}}_{n+1}, \quad (1.78)$$

$$\ddot{\mathbf{Y}}_n = \ddot{\mathbf{Y}}_{n+1}; \quad (1.79)$$

- 14: **fim para**
-

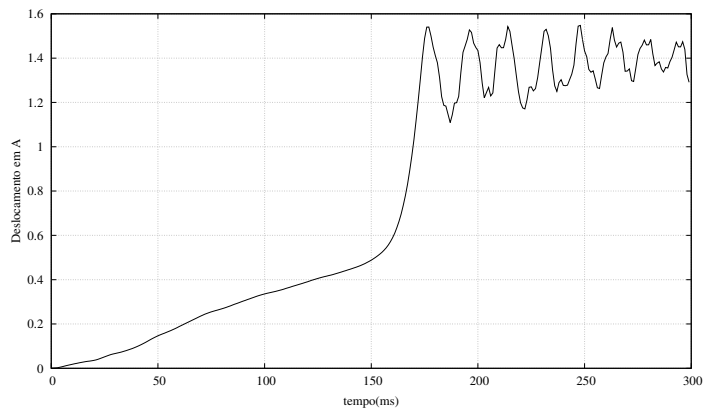
O deslocamento vertical do nó central da casca obtido nesse trabalho pode ser visualizado na Figura 1.10, enquanto que, para o autor de referência na Figura 1.11. O resultado obtido está de acordo com os resultados de ??), conforme pode ser visto na Figura 1.11. Os campos de deslocamentos para os instantes $t = 140ms$, $t = 165ms$, $t = 174ms$ e $t = 177ms$ são apresentados na Subfigure 1.12.

Figura 1.9 – Casca: Geometria e Malha



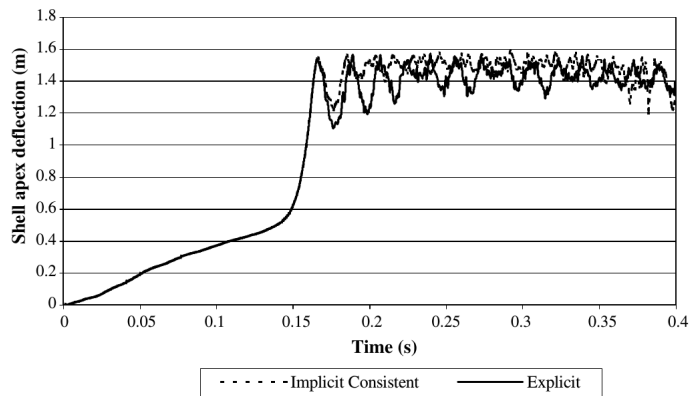
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 1.10 – Casca: Deslocamento vertical nó central A



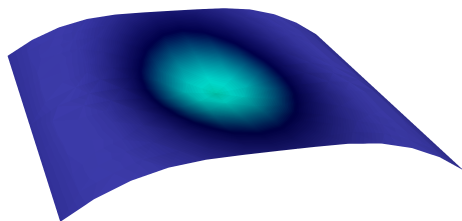
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 1.11 – Casca: Deslocamento vertical nó central A - referência

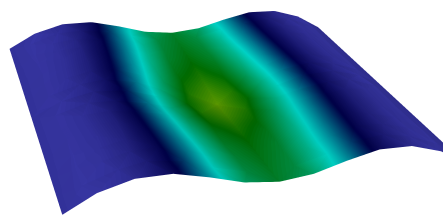


Fonte: ??)

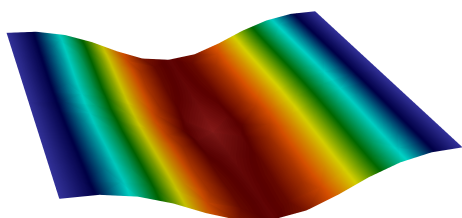
Figura 1.12 – Casca: Campos de deslocamentos



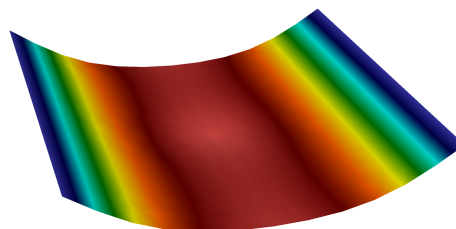
(a) $t = 140ms$.



(b) $t = 165ms$.



(c) $t = 174ms$.



(d) $t = 177ms$.



Fonte: Elaborada pela autora