

## Combinação de discretizações isogeométrica e por elementos finitos na análise de interação fluido-estrutura

Combination of isogeometric and finite element discretizations for fluid-structure interaction analysis

**Patrícia Tonon**

Ph.D. Thesis – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo

**Patrícia Tonon**

**Combinação de discretizações isogeométrica e por  
elementos finitos na análise de interação fluido-estrutura**

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Ciências - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas).

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo André Kuche Sanches

**São Carlos  
2025**



## RESUMO

TONON, P. Combinação de discretizações isogeométrica e por elementos finitos na análise de interação fluido-estrutura. 2025. 202 p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2025.

O presente trabalho teve como principal objetivo o desenvolvimento de uma ferramenta computacional robusta para a análise de problemas de interação fluido-estrutura, incorporando uma técnica de partição de domínios no escoamento fluido, de modo a capturar efeitos localizados. Adota-se uma formulação estabilizada para análise dos escoamentos incompressíveis isotérmicos, permitindo aproximação de mesma ordem para as variáveis de velocidades e pressão, com uma integração temporal implícita realizada através do método  $\alpha$ -generalizado. A análise não-linear dinâmica da estrutura é modelada empregando-se uma abordagem do método dos elementos finitos baseada em posições aplicada a elementos de casca com integrador temporal de Newmark. Nessa formulação, levam-se em conta os efeitos localizados no modelo do fluido através do uso de um modelo local mais refinado superposto a um modelo global com discretização mais grosseira. As discretizações utilizam aproximações baseadas na análise isogeométrica ou no método dos elementos finitos clássico. A união entre malha global e malha local é realizada através de uma formulação estabilizada do método de Arlequin, o qual efetua o cruzamento e colagem entre os modelos em uma zona de colagem através da utilização de campos de multiplicadores de Lagrange. Para garantir a estabilidade do campo de multiplicadores de Lagrange, e, ao mesmo tempo, fornecer maior flexibilidade a formulação, adiciona-se um termo consistente de estabilização, baseado no resíduo das equações governantes. O acoplamento fluido-estrutura é do tipo particionado forte bloco-iterativo. Neste acoplamento, a malha local é adaptada à estrutura e deforma-se dinamicamente para acomodar a movimentação da estrutura, através de uma formulação ALE (Arbitrary Lagrangian–Eulerian), enquanto que a malha global permanece fixa. O método de acoplamento proposto pode ser caracterizado como uma abordagem híbrida e compartilha vantagens dos métodos de rastreamento de interface (malhas móveis) e de captura de interface (contornos imersos), visto que o fluido próximo à estrutura é adequadamente discretizado garantindo a captura de efeitos localizados, ao mesmo tempo em que a malha local, por ser menor, tolera maiores deformações, e em caso de necessidade de remalhamento, apenas essa malha precisa ser reconstruída. Os resultados obtidos nas simulações computacionais demonstraram a robustez e eficiência da formulação, evidenciando que trata-se de uma nova alternativa para análise de problemas de IFE com efeitos localizados.

**Palavras-chave:** Intereração Fluido-Estrutura. Análise Isogeométrica. Método dos Elementos Finitos. Partição de domínios.

## ABSTRACT

TONON, P. **Combination of isogeometric and finite element discretizations for fluid-structure interaction analysis.** 2025. 202 p. Thesis (Doctor) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2025.

The main objective of this work was the development of a robust computational tool for the analysis of fluid–structure interaction (FSI) problems, incorporating a domain partitioning technique in the fluid flow to capture localized effects. A stabilized formulation is adopted for the analysis of incompressible isothermal flows, allowing equal-order interpolation for velocity and pressure variables, with implicit time integration performed through the generalized- $\alpha$  method. The nonlinear dynamic analysis of the structure is modeled using a position-based finite element approach applied to shell elements, with time integration carried out by the Newmark method. In this formulation, localized effects in the fluid model are taken into account through the use of a refined local model superimposed on a coarser global model. The discretizations employ either isogeometric analysis or the classical finite element method. The coupling between the global and local meshes is achieved through a stabilized Arlequin method, which performs the coupling between models within an overlapping zone using Lagrange multiplier fields. To ensure the stability of the Lagrange multiplier field while providing greater flexibility to the formulation, a consistent stabilization term based on the residual of the governing equations is added. The fluid–structure coupling is strongly partitioned and block-iterative. In this coupling, the local mesh conforms to the structure and deforms dynamically to accommodate its motion through an Arbitrary Lagrangian–Eulerian (ALE) formulation, while the global mesh remains fixed. The proposed coupling method can be characterized as a hybrid approach, combining advantages of interface-tracking (moving-mesh) and interface-capturing (immersed-boundary) methods. The fluid near the structure is properly discretized to capture localized effects, while the smaller local mesh tolerates larger deformations; in case remeshing is required, only this local mesh needs to be reconstructed. The results obtained from the computational simulations demonstrated the robustness and efficiency of the formulation, showing that it provides a novel and effective alternative for the analysis of FSI problems with localized effects.

**Keywords:** Fluid-structure interaction. Isogeometric analysis. Finite Element Method. Domain Decomposition.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Volume de controle infinitesimal: Fluxo de massa . . . . .	36
Figura 2 – Volume de controle infinitesimal: Componentes de força na direção $y_1$ . . . . .	38
Figura 3 – Volume de controle infinitesimal: Fluxo de quantidade de Movimento . . . . .	39
Figura 4 – Descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária . . . . .	41
Figura 5 – Domínio para o problema da DFC . . . . .	45
Figura 6 – Elementos Finitos: representação espacial e paramétrica . . . . .	47
Figura 7 – Cilindro: Geometria, condições de contorno e malha de elementos finitos.	59
Figura 8 – Cilindro: Coeficientes aerodinâmicos . . . . .	60
Figura 9 – Cilindro: Campos de velocidade para $Re = 100$ . . . . .	61
Figura 10 – Cilindro: Campos de pressão para $Re = 100$ . . . . .	62
Figura 11 – Cavidade quadrada: Geometria, condições de contorno e malha de elementos finitos . . . . .	63
Figura 12 – Cavidade quadrada: Perfis de velocidade adimensionalizados nas direções $y_1$ e $y_2$ . . . . .	64
Figura 13 – Cavidade quadrada: Campos de velocidade - plano $y_1y_2$ . . . . .	65
Figura 14 – Cavidade quadrada: Campos de pressão - plano $y_1y_2$ . . . . .	66
Figura 15 – NURBS: espaço físico, espaço paramétrico, espaço indicial e espaço parental . . . . .	68
Figura 16 – <i>B-Splines quadráticas</i> . . . . .	71
Figura 17 – Curva <i>B-Spline</i> . . . . .	72
Figura 18 – Refinamento $h$ para um curva <i>B-Spline</i> . . . . .	75
Figura 19 – Projeção transformativa de entidade <i>B-Spline</i> . . . . .	76
Figura 20 – Funções base univariadas na interface entre <i>Patches</i> . . . . .	80
Figura 21 – Cilindro: Divisão dos <i>Patches</i> . . . . .	84
Figura 22 – Cilindro: Obtenção da circunferência . . . . .	85
Figura 23 – Cilindro: Obtenção da superfície . . . . .	86
Figura 24 – Cilindro: Obtenção do sólido . . . . .	86
Figura 25 – Cilindro: Malha de células físicas . . . . .	87
Figura 26 – Cilindro: Coeficientes aerodinâmicos . . . . .	89
Figura 27 – Cilindro: Campos de velocidade para $Re = 1000$ - plano $y_1y_2$ . . . . .	90
Figura 28 – Cilindro: Campos de pressão para $Re = 1000$ - plano $y_1y_2$ . . . . .	91
Figura 29 – Degrau: Geometria - plano $y_1y_2$ . . . . .	92
Figura 30 – Degrau: Malha de células físicas - plano $y_1y_2$ . . . . .	93
Figura 31 – Degrau: Comprimento do vórtice principal . . . . .	94
Figura 32 – Degrau: Campos de velocidade para $Re = 100$ . . . . .	95
Figura 33 – Degrau: Campos de velocidade para $Re = 400$ . . . . .	95

Figura 34 – Degrau: Campos de velocidade para $Re = 800$	96
Figura 35 – Degrau: Campos de pressão	97
Figura 36 – Cinemática de um sólido deformável	100
Figura 37 – Mudança no volume	102
Figura 38 – Mudança de área	103
Figura 39 – Volume infinitesimal: componentes de tensão	104
Figura 40 – Tetraedro elementar	105
Figura 41 – Sólido sob carregamento externo	106
Figura 42 – Mapeamento da superfície média da casca	111
Figura 43 – Vetores generalizados	111
Figura 44 – Casca: Geometria e Malha	117
Figura 45 – Casca: Deslocamento vertical nó central A	117
Figura 46 – Casca: Deslocamento vertical nó central A - referência	118
Figura 47 – Casca: Campos de deslocamentos	118
Figura 48 – Partição de domínios para a técnica dos espaços de funções combinados	120
Figura 49 – Espaços de funções na técnica de partição de domínios - Problema unidimensional	123
Figura 50 – Cavidade: geometria e condições de contorno	125
Figura 51 – Cavidade 2D: Malhas Global e Local	126
Figura 52 – Cavidade 2D: Zona de superposição	126
Figura 53 – Cavidade 2D: Solução do problema de Navier Stokes para $Re = 100$	127
Figura 54 – Cavidade 2D: Perfis de velocidade	127
Figura 55 – Domínio local e global	130
Figura 56 – Função Ponderadora	131
Figura 57 – Domínio Arlequin móvel	144
Figura 58 – Aerofólio: Geometria	146
Figura 59 – Aerofólio: Malha Monomodelo (MEF)	147
Figura 60 – Aerofólio: Discretização das malhas global e local	147
Figura 61 – Aerofólio: Coeficiente de arrasto	148
Figura 62 – Aerofólio: Coeficiente de sustentação	148
Figura 63 – Aerofólio: Campo de velocidade	149
Figura 64 – Aerofólio: Campo de pressão	150
Figura 65 – Aerofólio Mov.: Geometria	151
Figura 66 – Aerofólio Mov.: Coeficiente de Arrasto	151
Figura 67 – Aerofólio Mov.: Coeficiente de Sustentação	152
Figura 68 – Aerofólio Mov.: Campos de velocidade	152
Figura 69 – Aerofólio Mov.: Campos de pressão	153
Figura 70 – Domínios Computacional para análise de problemas de IFE	156
Figura 71 – Discretizações não-coincidentes no contorno IFE	158

Figura 72 – Cavidade fundo flexível 2D: geometria	162
Figura 73 – Cavidade fundo flexível 2D: Discretizações	164
Figura 74 – Cavidade fundo flexível 2D: Deslocamento em A para malhas do modelo Arlequin	165
Figura 75 – Cavidade fundo flexível 2D: Deslocamento em A comparado com as referências e monomodelo	165
Figura 76 – Cavidade fundo flexível 2D: Campos de velocidade	166
Figura 77 – Cavidade fundo flexível 2D: Campos de Pressão	167
Figura 78 – Cavidade fundo flexível 3D: Geometria	167
Figura 79 – Cavidade fundo flexível 3D: Discretização	168
Figura 80 – Cavidade fundo flexível 3D: Deslocamento em A	169
Figura 81 – Cavidade fundo flexível 3D: Campos de velocidade	170
Figura 82 – Cavidade fundo flexível 3D: Campos de Pressão	171
Figura 83 – Casca: Campos de Deslocamentos	172
Figura 84 – Painel Flexível: Geometria	172
Figura 85 – Painel Flexível: Discretização	173
Figura 86 – Painel Flexível: Deslocamento em A	174
Figura 87 – Painel Flexível: Campos de velocidade	175
Figura 88 – Painel Flexível: Campos de pressão	176
Figura 89 – Painel Flexível: Deformada da malha em $nT$	177
Figura 90 – Turbina monomodelo: Geometria	177
Figura 91 – Turbina monomodelo: Malhas	179
Figura 92 – Turbina monomodelo: Deslocamento em $y_3$ no ponto A	179
Figura 93 – Turbina monomodelo: Velocidade angular no ponto A	180
Figura 94 – Turbina monomodelo: Campos de velocidade	180
Figura 95 – Turbina monomodelo: Campos de pressão	181
Figura 96 – Turbina modelo Arlequin: Geometria	182
Figura 97 – Turbina modelo Arlequin: Malhas	183
Figura 98 – Turbina modelo Arlequin: Deslocamento no ponto A	183
Figura 99 – Turbina modelo Arlequin: Velocidade angular no ponto A	184
Figura 100 – Turbina modelo Arlequin: Campos de velocidade	184
Figura 101 – Turbina modelo Arlequin: Campos de pressão	185



## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1 – Comparação entre valores obtidos e valores de referência . . . . .	63
Tabela 2 – Cilindro: Número de pontos de controle por <i>patch</i> . . . . .	88
Tabela 3 – Degrau: Número de pontos de controle por <i>patch</i> . . . . .	93
Tabela 4 – Cavidade fundo flexível 2D: Discretizações . . . . .	163



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>17</b>
<b>1.1</b>	<b>Apresentação do texto . . . . .</b>	<b>19</b>
<b>1.2</b>	<b>Estado da Arte . . . . .</b>	<b>20</b>
1.2.1	Dinâmica dos fluidos computacional . . . . .	20
1.2.2	Análise isogeométrica . . . . .	23
1.2.3	Dinâmica de estruturas computacional considerando grandes deslocamentos . . . . .	24
1.2.4	Acoplamento fluido-estrutura . . . . .	25
1.2.5	Métodos multiescala e técnicas de partição de domínios . . . . .	28
<b>1.3</b>	<b>Objetivos . . . . .</b>	<b>30</b>
<b>1.4</b>	<b>Metodologia . . . . .</b>	<b>30</b>
<b>1.5</b>	<b>Justificativa . . . . .</b>	<b>32</b>
<b>2</b>	<b>DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL . . . . .</b>	<b>35</b>
<b>2.1</b>	<b>Equações governantes na descrição Euleriana . . . . .</b>	<b>35</b>
2.1.1	Equação da conservação da massa . . . . .	35
2.1.2	Equação da quantidade de movimento . . . . .	37
2.1.3	Relação constitutiva . . . . .	39
<b>2.2</b>	<b>Descrição Euleriana-Lagrangiana arbitrária (ALE) . . . . .</b>	<b>39</b>
2.2.1	Forma forte do modelo para escoamentos incompressíveis com contornos móveis . . . . .	44
<b>2.3</b>	<b>Forma fraca e discretização espacial das equações governantes . . . . .</b>	<b>45</b>
2.3.1	Método dos elementos finitos . . . . .	46
2.3.2	Discretização espacial . . . . .	48
2.3.3	Parâmetros de estabilização . . . . .	51
<b>2.4</b>	<b>Integração temporal e solução numérica . . . . .</b>	<b>54</b>
<b>2.5</b>	<b>Verificação e aplicações . . . . .</b>	<b>57</b>
2.5.1	Escoamento sobre um cilindro . . . . .	57
2.5.2	Escoamento sobre cavidade com discretização 3D . . . . .	63
<b>3</b>	<b>ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA APLICADA À DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL . . . . .</b>	<b>67</b>
<b>3.1</b>	<b>Representação geométrica com B-splines e NURBS . . . . .</b>	<b>67</b>
<b>3.2</b>	<b>B-Splines . . . . .</b>	<b>69</b>
3.2.1	Vetor de <i>knots</i> . . . . .	69
3.2.2	Funções base e suas derivadas . . . . .	70
3.2.3	Geometrias B-Splines . . . . .	72

3.2.4	Refinamento . . . . .	74
<b>3.3</b>	<b>NURBS . . . . .</b>	<b>76</b>
3.3.1	Funções base NURBS e suas derivadas . . . . .	77
3.3.2	Geometria NURBS . . . . .	78
3.3.3	Múltiplos <i>patches</i> . . . . .	79
<b>3.4</b>	<b>Análise isogeométrica . . . . .</b>	<b>80</b>
3.4.1	Parâmetros de estabilização . . . . .	81
<b>3.5</b>	<b>Verificação e aplicações . . . . .</b>	<b>83</b>
3.5.1	Escoamento sobre um cilindro - discretização isogeométrica . . . . .	83
3.5.1.1	Geração da malha NURBS . . . . .	83
3.5.1.2	Análise numérica . . . . .	88
3.5.2	Escoamento em um canal com degrau . . . . .	92
<b>4</b>	<b>DINÂMICA DOS SÓLIDOS COMPUTACIONAL . . . . .</b>	<b>99</b>
<b>4.1</b>	<b>Cinemática dos corpos deformáveis . . . . .</b>	<b>100</b>
<b>4.2</b>	<b>Equilíbrio de corpos deformáveis . . . . .</b>	<b>103</b>
4.2.1	Estado de tensão em um ponto . . . . .	103
4.2.2	Equilíbrio em descrição Lagrangiana . . . . .	105
4.2.3	Conservação da energia e equilíbrio . . . . .	107
4.2.4	Modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff . . . . .	109
<b>4.3</b>	<b>Método dos Elementos Finitos . . . . .</b>	<b>109</b>
4.3.1	Elemento finito de casca . . . . .	110
4.3.2	Integração temporal e solução do problema não linear . . . . .	113
4.3.3	Implementação computacional . . . . .	115
<b>4.4</b>	<b>Exemplo de aplicação - casca cilíndrica com <i>snap through</i> dinâmico</b>	<b>116</b>
<b>5</b>	<b>TÉCNICA DE PARTIÇÃO DE DOMÍNIO POR COMBINAÇÃO DOS ESPAÇOS DE FUNÇÕES . . . . .</b>	<b>119</b>
<b>5.1</b>	<b>Técnica de combinação dos espaços de funções . . . . .</b>	<b>119</b>
<b>5.2</b>	<b>Função de combinação . . . . .</b>	<b>121</b>
<b>5.3</b>	<b>Aplicação da técnica à dinâmica dos fluidos computacional . . . . .</b>	<b>122</b>
<b>5.4</b>	<b>Implementação computacional . . . . .</b>	<b>124</b>
<b>5.5</b>	<b>Exemplo - cavidade com partição de domínio e combinação MEF-IGA</b>	<b>124</b>
<b>6</b>	<b>MÉTODO ARLEQUIN ESTABILIZADO . . . . .</b>	<b>129</b>
<b>6.1</b>	<b>Método Arlequin . . . . .</b>	<b>129</b>
<b>6.2</b>	<b>Método Arlequin clássico aplicado a problemas de escoamentos incompressíveis . . . . .</b>	<b>131</b>
<b>6.3</b>	<b>Método Arlequin estabilizado aplicado à problemas de escoamentos incompressíveis . . . . .</b>	<b>135</b>

6.3.1	Integração temporal . . . . .	138
6.3.2	Parâmetro de estabilização para técnica RBSAM . . . . .	140
<b>6.4</b>	<b>Superposição de modelos móveis . . . . .</b>	<b>142</b>
<b>6.5</b>	<b>Implementação computacional . . . . .</b>	<b>143</b>
<b>6.6</b>	<b>Exemplos . . . . .</b>	<b>145</b>
6.6.1	Escoamento sobre um aerofólio NACA 0012 . . . . .	146
6.6.2	Aerofólio com movimento de arfagem prescrito . . . . .	149
<b>7</b>	<b>ACOPLAMENTO FLUIDO-ESTRUTURA . . . . .</b>	<b>155</b>
<b>7.1</b>	<b>Condições de acoplamento . . . . .</b>	<b>155</b>
7.1.1	Movimentação da Malha . . . . .	157
<b>7.2</b>	<b>Discretizações não coincidentes entre os meios . . . . .</b>	<b>158</b>
<b>7.3</b>	<b>Acoplamento Particionado Forte - Bloco-Iterativo . . . . .</b>	<b>159</b>
7.3.1	Implementação Computacional . . . . .	160
<b>7.4</b>	<b>Exemplos . . . . .</b>	<b>160</b>
7.4.1	Cavidade com fundo flexível - 2D . . . . .	161
7.4.2	Cavidade com fundo flexível - 3D . . . . .	164
7.4.3	<i>Flutter</i> em painel flexível . . . . .	168
7.4.4	Turbina . . . . .	173
7.4.4.1	Turbina - Monomodelo . . . . .	174
7.4.4.2	Turbina - Modelo Arlequin . . . . .	178
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>187</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>191</b>



## 1 INTRODUÇÃO

A interação fluido-estrutura caracteriza-se por ser uma classe de problemas em que existe uma interdependência entre comportamentos do fluido e da estrutura. O comportamento do fluido depende da forma e da movimentação da estrutura, assim como, o movimento e a deformação da estrutura dependem das forças provenientes do fluido.

A modelagem numérica dos problemas da engenharia estrutural é um ramo vastamente desenvolvido, sendo a análise de estruturas por elementos finitos em softwares comerciais uma prática corrente entre os engenheiros. Entretanto, quando se trata de interação fluido-estrutura (IFE), esses softwares estão longe de atender à demanda dos engenheiros.

Problemas que envolvem a interação entre fluido e estrutura estão presentes em diversas áreas, podendo-se citar como exemplos a ação do vento sobre edifícios, aerodinâmica de modelos automotivos, problemas de *flutter* em estruturas aeronáuticas e de pontes, ou ainda problemas de escoamento de sangue em vasos sanguíneos e órgãos, entre muitos outros. A análise experimental de tais problemas, em geral, é muito custosa e demanda bastante tempo e equipamentos complexos. Dessa forma, é de interesse o desenvolvimento de métodos numéricos que permitam simular adequadamente tais problemas dentro de um tempo razoável. O crescimento da informática tem auxiliado nesse processo, contudo, muitas análises ainda só podem ser realizadas em grandes *clusters* e, em alguns casos, devido à complexidade dos problemas, não podem ser simuladas sem grandes simplificações.

A análise computacional dos problemas de IFE possui basicamente três componentes: a dinâmica dos fluidos computacional, a mecânica dos sólidos computacional e o acoplamento entre os meios fluido e sólido. Uma das maiores dificuldades encontradas nessa área, diz respeito à compatibilização das formulações da mecânica dos fluidos e dos sólidos, visto que, em geral, para fluidos aplica-se uma descrição matemática Euleriana, e para sólidos, Lagrangiana. Dessa forma, existem duas formas comuns de se realizar o acoplamento fluido-estrutura, que são os métodos de malhas conformes, ou de malhas móveis, e os métodos de malhas não-conformes, ou de malhas fixas.

Nos métodos de malhas conformes, a malha do fluido é conforme ao domínio computacional do sólido e acompanha seu movimento, requerendo, assim, procedimentos de atualização (deformação ou deformação associada à reconstrução) dessa malha ao longo da análise. Nesse tipo de metodologia, uma descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária (ALE) pode ser aplicada ao fluido, permitindo a movimentação do domínio computacional de maneira independente do movimento das partículas de fluido. Essa técnica é adequada para problemas em que a estrutura sofre deslocamentos em pequenas escalas em relação à

configuração inicial da estrutura, sem que haja mudança topológica do domínio do fluido, visto que grandes distorções do domínio fluido, em geral, acarretam na necessidade de técnicas especiais de remalhamento, que apresentam um custo computacional elevado.

Nos métodos de malhas não-conformes, utiliza-se uma malha fixa para o fluido, na qual o sólido se encontra imerso, sendo adotadas técnicas de contorno imerso para a imposição das condições de acoplamento. Um dos aspectos importantes desse método diz respeito à localização do contorno da estrutura dentro da malha do fluido, o que pode ser resolvido, por exemplo, com o uso de uma função *level-set* baseada na distância assinalada ao contorno do sólido. Essa técnica pode ser aplicada a qualquer escala de deslocamentos, inclusive em problemas com mudanças topológicas no domínio do fluido, entretanto, não é eficiente para levar em consideração efeitos localizados que exigem maior resolução da malha, como, por exemplo, em regiões de camada limite na vizinhança da estrutura.

Neste trabalho, busca-se, no contexto da análise tridimensional de interação fluido-estrutura, empregar técnicas de partição de domínio com malhas superpostas, para permitir uma malha local mais refinada superposta a uma malha global, de modo a unir as vantagens das metodologias de malhas móveis e de malhas fixas. Essa malha local é conforme ao contorno da estrutura, e, nos casos de interação fluido-estrutura, deforma-se acompanhando a movimentação da estrutura. O intuito disso é melhorar a precisão local da análise numérica, permitir a combinação de diferentes técnicas de discretização, especificamente a isogeométrica e a de elementos finitos, e viabilizar a simulação de problemas com grandes escalas de deslocamentos, sem a necessidade de reconstrução da malha global.

Duas técnicas foram consideradas para este estudo. A primeira, denominada técnica de combinação de espaços de funções, foi introduzida nos trabalhos de Rosa, Coda e Sanches (2022) e Sanches *et al.* (2019), consiste em ponderar os espaços de função local e global sobre uma zona de superposição e combiná-las formando um novo espaço enriquecido. A segunda, é a forma estabilizada do Método Arlequin apresentada por Fernandes *et al.* (2020), que consiste em superpor os modelos local e global em uma zona de colagem, ponderando-os por uma função de particionamento e acoplando os modelos por um campo de multiplicadores de Lagrange, além de adicionar uma técnica de estabilização baseada no resíduo para flexibilizar a escolha dos espaços de aproximação.

A primeira técnica, embora tenha se demonstrado bastante robusta em outros problemas, mostrou-se inadequada para a formulação estabilizada para escoamentos incompressíveis a número de Reynolds elevados, enquanto o método Arlequin, embora mais custoso, mostra-se adequado para qualquer número de Reynolds.

## 1.1 Apresentação do texto

Este texto está dividido em 8 capítulos os quais serão descritos sucintamente na continuação.

No *Capítulo 1* introduz-se e contextualiza-se o tema de pesquisa. Na sequência, no estado da arte, faz-se uma breve apresentação de algumas das formulações mais utilizadas para a solução dos problemas que envolvem a interação fluido-estrutura e métodos de partição de domínios. Por fim, apresentam-se os objetivos, a metodologia e justificava desta pesquisa.

O *Capítulo 2* comprehende a descrição da técnica numérica utilizada para a resolução de problemas da dinâmica dos fluidos computacional. Apresentam-se inicialmente as equações governantes em sua forma forte em descrição Euleriana, expandindo-as na continuação para uma descrição Euleriana-Lagrangiana arbitrária. Na sequência, a formulação fraca é obtida através da aplicação do método dos resíduos ponderados utilizando a técnica clássica de Galerkin e apresenta-se a discretização espacial da equações. Para contornar as instabilidades típicas que ocorrem quando aplicado o método de Galerkin, e afim de contornar a condição LBB, apresenta-se uma metodologia estabilizada. Para a integração temporal das equações, o método  $\alpha$ -generalizado aplicado é exposto. Ao final, o algoritmo da implementação computacional é apresentado e alguns exemplos são avaliados para a verificação do programa.

No *Capítulo 3*, apresenta-se a análise isogeométrica aplicada à Dinâmica dos Fluidos Computacional (DFC) por meio da utilização de funções NURBS. O capítulo se inicia com uma breve contextualização do tema, seguida da descrição das funções-base *B-Splines* e de suas principais características, culminando na geração de geometrias a partir dessas funções. Em seguida, introduzem-se as funções NURBS, construídas a partir das *B-Splines*, destacando-se a obtenção de curvas, superfícies e sólidos NURBS. A abordagem isogeométrica é então detalhada, evidenciando a substituição das tradicionais funções polinomiais de Lagrange, utilizadas no Método dos Elementos Finitos clássico, por funções NURBS na discretização das geometrias e variáveis. Além disso, são explicados os parâmetros de estabilização empregados nas equações governantes discretizadas via AIG. Por fim, verifica-se a implementação computacional da DFC com análise isogeométrica por meio de exemplos numéricos.

O *Capítulo 4* apresenta uma breve revisão sobre a mecânica dos sólidos voltada a cinemática e ao equilíbrio de corpos deformáveis em descrição Lagrangiana, assim como elenca o princípio da estacionariedade de energia e a apresenta o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff adotado nesse trabalho. Na sequência, apresentam-se os conceitos do método dos elementos finitos posicional e o elemento finito de casca a ser utilizado nesse projeto para análise não linear dinâmica de sólidos. Por fim, o algoritmo da implementação

computacional é exibido e um problema de casca cilíndrica com *snap through* dinâmico é simulado.

No *Capítulo 5* a técnica de partição de domínios por combinação dos espaços de funções é apresentada. Descreve-se inicialmente a combinação proposta para os espaços de funções respectivos as malhas local e global com intuito de obter-se um novo espaço de funções independentes na zona de superposição. Na sequência, descreve-se a metodologia para o cálculo da função ponderadora de combinação dentro do domínio. O roteiro de implementação computacional é então exibido, e apresenta-se, um exemplo de verificação voltado à dinâmica dos fluidos computacional.

No *Capítulo 6* apresenta-se a técnica de decomposição de domínios através do método Arlequin estabilizado (RBSAM). A primeira parte do capítulo foi dedicada a descrever o método clássico de Arlequin, para na sequência, introduzir a metodologia estabilizada para a solução de escoamentos incompressíveis. Apresenta-se na sucessão do capítulo a extensão da metodologia para problemas de contorno móveis. Ao final, o algoritmo de implementação é apresentado, bem como, exemplos de validação são avaliados.

No *Capítulo 7* discorre-se sobre a formulação utilizada para análise de problemas de Interação Fluido-Estrutura. No texto, apresentam-se as condições de acoplamento necessárias a solução de um problema de IFE, a técnica de movimentação de malha utilizada, e a metodologia de transferência de condições de contorno em uma interface entre fluido e sólido com malhas não coincidentes. Descreve-se na continuação do texto a teoria envolvida no esquema de acoplamento particionado forte adotado. Por fim, o algoritmo de implementação computacional e exemplos de validação são apresentados.

No *Capítulo 8* são apresentadas as considerações finais sobre o trabalho desenvolvido.

## 1.2 Estado da arte

Nesta seção apresenta-se uma breve contextualização dos principais assuntos relacionados a este trabalho. Assim, aborda-se brevemente o estado da arte da mecânica dos fluidos computacional aplicada a escoamentos com contornos móveis, a análise isogeométrica aplicada a problemas da dinâmica dos fluidos computacional, a mecânica dos sólidos computacional aplicada a problemas dinâmicos com grandes deslocamentos com o foco em elementos de cascas, às técnicas numéricas para acoplamento fluido-estrutura e os métodos de decomposição de domínios e multiescala.

### 1.2.1 Dinâmica dos fluidos computacional

A dinâmica dos fluidos computacional (DFC) trata da obtenção de soluções numéricas para as equações diferenciais que descrevem o comportamento dos fluidos no espaço

e no tempo, tendo em vista que a solução analítica para esses problemas é conhecida apenas em raros casos e sob hipóteses simplificadoras. Os principais tópicos abordados aqui referem-se às diferentes metodologias aplicadas à discretização espacial, às fontes de instabilidade numérica e aos métodos de estabilização.

No que diz respeito à discretização espacial, a DFC desenvolveu-se inicialmente no âmbito do método das diferenças finitas e do método dos volumes finitos (ver, por exemplo, Anderson (1995) e Chung (2002)). O método dos elementos finitos (MEF), por sua vez, popularizou-se inicialmente em análises de estruturas na década de 1950, com formulações baseadas em princípios variacionais. Alguns anos depois, passou a ser utilizado também em problemas da DFC, visto que apresenta propriedades vantajosas, como, por exemplo, a facilidade de discretizar geometrias complexas com o uso de malhas não estruturadas arbitrárias e a facilidade de aplicar condições de contorno em geometrias complexas e de alta ordem (Reddy; Gartling, 2010; Zienkiewicz; Taylor; Nithiarasu, 2005a).

Uma das dificuldades encontradas na aplicação do MEF à dinâmica dos fluidos computacional é o fato de que, ao se adotar o método clássico de Galerkin na discretização espacial das equações governantes em descrição Euleriana, obtém-se matrizes assimétricas e, em escoamentos com convecção dominante, surgem variações espúrias nas variáveis transportadas (Brooks; Hughes, 1982; Zienkiewicz; Taylor; Nithiarasu, 2005a). Esse problema pode ser amenizado à medida que a malha de elementos finitos é refinada; entretanto, é desejável que o método escolhido apresente resultados estáveis mesmo em malhas mais grosseiras.

Para resolver tal dificuldade, algumas técnicas de estabilização foram propostas, a exemplo dos métodos *Stream-Upwind/Petrov-Galerkin* (SUPG) (Brooks; Hughes, 1982), *Galerkin Least-Squares* (GLS) (Hughes; Franca; Hulbert, 1989) e *Sub-Grid Scale* (SGS) (Hughes, 1995). Todas essas formulações baseiam-se na introdução de termos estabilizantes ao problema, de modo a conter as variações espúrias em casos de convecção dominante. Outra possibilidade diz respeito ao uso do método Taylor-Galerkin (T-G), introduzido por Donea (1984), no qual a estabilização é obtida pela inclusão de termos de ordem superior que exercem efeito estabilizante, ao se empregar a expansão em série de Taylor no processo de discretização temporal.

Uma das metodologias mais difundidas para a estabilização dos termos convectivos é a técnica SUPG, a qual é aplicada neste estudo. Essa técnica consiste em adicionar, à forma fraca da equação da quantidade de movimento, o resíduo dessa equação ponderado por uma função especialmente escolhida para introduzir estabilização na direção das linhas de corrente, resultando em uma formulação consistente. Diversos autores contribuíram para a consolidação dessa técnica, dentre os quais podem ser citados Catabriga e Coutinho (2002), Hughes e Tezduyar (1984) e Tezduyar (1992). O parâmetro adimensional estabilizador, cuja função é aplicar uma escala na parcela adicionada, tem sua obtenção discutida em

diversos trabalhos, tais como Otoguro, Takizawa e Tezduyar (2020) e Takizawa, Tezduyar e Otoguro (2018).

Outra dificuldade da aplicação do MEF à mecânica dos fluidos diz respeito aos escoamentos incompressíveis. Ao levar-se em conta a incompressibilidade do escoamento, obtém-se a chamada equação da continuidade, na qual aparece apenas o termo do divergente do vetor velocidade. Do ponto de vista numérico, a pressão atua como um multiplicador de Lagrange, impondo a condição de divergente da velocidade nulo. Nesse caso, para que o sistema tenha solução única e resulte em uma formulação estável, é necessário observar as restrições de *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi* (LBB) na escolha dos espaços de funções para a aproximação da pressão e da velocidade, não sendo possível interpolar essas variáveis por polinômios de mesma ordem (Brezzi; Fortin, 1991; Strang; Fix, 2008; Zienkiewicz; Taylor; Nithiarasu, 2005b). Dessa forma, foram desenvolvidos diversos elementos, denominados Taylor-Hood, que atendem a essas restrições (Donea; Huerta, 2003).

De modo a permitir o uso do mesmo espaço de funções para pressão e velocidade, aumentando assim a flexibilidade do método, surgiram técnicas de estabilização do campo de pressão. Uma metodologia de estabilização para problemas incompressíveis, semelhante à técnica SUPG, foi apresentada por Hughes, Franca e Balestra (1986) para escoamentos de Stokes, posteriormente aplicada ao problema de Navier-Stokes e denominada PSPG (*Pressure Stabilized Petrov-Galerkin*) por Tezduyar (1992). Essa metodologia é adotada neste estudo e consiste em adicionar, à forma fraca da equação da continuidade, o resíduo da equação da quantidade de movimento ponderado pelo gradiente da função teste da equação da continuidade, multiplicado por um parâmetro de estabilização.

Outra consideração importante nas simulações numéricas diz respeito à reprodução de escoamentos turbulentos. As equações de Navier-Stokes descrevem tanto escoamentos laminares como turbulentos, entretanto, a utilização da chamada Simulação Direta de Turbulência leva a custos computacionais elevados, visto que requer uma malha refinada de maneira a representar adequadamente todas as escalas de turbulência. Para contornar esse problema, diferentes técnicas podem ser empregadas, destacando-se os métodos *Reynolds-Averaged Navier-Stokes* (RANS) (Alfonsi, 2009; Speziale, 1991) e Simulações de grandes Vórtices (*Large Eddy Simulation - LES*) (Germano *et al.*, 1991; Launder; Spalding, 1972; Piomelli, 1999; Wilcox, 1993).

Os métodos RANS baseiam-se na decomposição das variáveis de fluxo em uma média temporal e em uma componente de flutuação. Essa abordagem permite que as equações governantes sejam manipuladas de forma a representar as médias de longo prazo do escoamento, enquanto as flutuações turbulentas são tratadas como termos adicionais, muitas vezes modelados por equações de fechamento. A definição da média pode variar conforme as características do problema. Já nas simulações LES, o objetivo principal é capturar as estruturas turbulentas de grande escala, responsáveis pela maior parte da

transferência de quantidade de movimento e energia, e aplicar um modelo para os vórtices de pequena escala.

O método Variacional Multiescala (VMS) (Bazilevs; Takizawa; Tezduyar, 2013a; Hughes, 1995; Hughes *et al.*, 1998; Hughes; Oberai; Mazzei, 2001) permite lidar simultaneamente com os efeitos da convecção dominante, a instabilidade associada ao campo de pressão em problemas incompressíveis e a representação adequada de estruturas relacionadas à vorticidade. O método, a partir de princípios variacionais, propõem a representação do problema físico por meio de sua decomposição em escalas grandes (resolvidas) e pequenas (não resolvidas), tratando-as separadamente. A modelagem do espaço de pequenas escalas é realizado em termos de resíduos das equações de conservação de massa e de conservação da quantidade de movimento.

### 1.2.2 Análise isogeométrica

A Análise Isogeométrica (AIG) é uma metodologia para análise numérica de problemas descritos por equações diferenciais e foi introduzida primeiramente por Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005). Pode-se dizer que se trata de uma generalização do método dos elementos finitos clássico, a partir do uso de funções base especiais. Na análise isogeométrica, as funções base utilizadas são aquelas aplicadas nos sistemas CAD (*Computed Aided Design*), ou seja, nas tecnologias aplicadas na engenharia de *design*, animação, artes gráficas e visualização. Dentro das possibilidades de funções, as mais conhecidas são as funções NURBS (*Non-Uniform Rational B-Splines*) (Piegl; Tiller, 1996), fazendo que esse seja um ponto de partida para os estudos sobre AIG. Um dos principais objetivos do desenvolvimento dessa ferramenta é a integração entre os sistemas CAD e as técnicas numéricas baseadas em elementos finitos, as quais requerem a geração de malhas baseadas nos dados obtidos em programas CAD.

Uma das principais vantagens do uso dessa metodologia é representação exata de geometrias mesmo em malhas pouco refinadas, visto que essas funções são capazes de representar exatamente seções cônicas, círculos, cilindros, esferas e elipsoides. Além disso, outra característica matemática que a torna uma boa opção a ser utilizada, é a suavidade das funções NURBS, que são continuas  $p - 1$  vezes entre os elementos, sendo  $p$  o grau da função base. A descrição exata das geometrias é uma característica desejável em problemas que envolvem fenômenos de camada limite, os quais dependem fortemente da precisão geométrica da superfície do corpo imerso no escoamento. Alguns problemas envolvendo escoamentos turbulentos e interação fluido-estrutura, podem ser consultados em: Bazilevs e Akkerman (2010), Bazilevs *et al.* (2007), Bazilevs *et al.* (2008), Bazilevs *et al.* (2010), Zhang *et al.* (2007).

Outras metodologias aplicando diretamente funções *B-Splines* também tem se mostrado eficiente para a análise de problemas da dinâmica dos fluidos computacional,

como pode ser visto nos trabalhos de Bazilevs *et al.* (2014), Bazilevs, Takizawa e Tezduyar (2013a), Höllig, Reif e Wipper (2001).

### 1.2.3 Dinâmica de estruturas computacional considerando grandes deslocamentos

A análise de problemas de interação fluido-estrutura, muitas vezes requer a consideração da não linearidade geométrica da estrutura, devido a grandes deslocamentos ou a efeitos acoplados de membrana e flexão. Dentro desse grupo de problemas, podem-se citar o *flutter* de grande amplitude, sistemas de desaceleração (como paraquedas), aplicações biomédicas, entre outros.

Atualmente a solução numérica de problemas estruturais é majoritariamente realizada por meio do método dos elementos finitos. No contexto da análise não linear geométrica de estruturas, a formulação corrotacional proposta por Truesdell (1955) é muito popular e descreve a mudança de configuração da estrutura, decompondo seus movimentos em rígido e de deformação, e representando-os em termos dos deslocamentos e rotações nodais. Essa formulação, aplicada a pórticos, treliças e cascas, pode ser encontrada nos trabalhos de Argyris (1982), Battini e Pacoste (2006), Hughes e Liu (1981a), Hughes e Liu (1981b), Ibrahimbegovic e Taylor (2002), Simo e Fox (1989).

A formulação corrotacional, ao empregar rotações como parâmetros nodais, apresenta uma limitação para grandes deslocamentos, visto que não se pode aplicar a propriedade comutativa a essa grandeza. Para contornar esse problema, utilizam-se as formulações linearizadas de Euler-Rodrigues para a aproximação das rotações finitas, conforme pode ser observado, por exemplo, em Coda e Paccola (2010), Gruttmann, Sauer e Wagner (2000). A conservação de energia em problemas dinâmicos de estruturas reticuladas é um tema que ainda desperta discussões na literatura. Parte dessa controvérsia decorre do fato de que as rotações finitas mantêm sua objetividade apenas quando consideradas em pequenos incrementos. Além disso, na formulação corrotacional, a matriz de massa deixa de ser constante, o que inviabiliza o uso de métodos clássicos de integração temporal empregados na análise dinâmica linear, como o método de Newmark (Sanches; Coda, 2013).

Motivado por Bonet *et al.* (2000), Coda (2003) introduz uma formulação baseada em posições, denominada de MEF posicional, sem o emprego de rotações como parâmetros nodais. Essa formulação tem sido aplicada com sucesso para análise de sólidos, pórticos e cascas (Coda, 2018; Carrazedo; Coda, 2010; Coda; Paccola, 2010, 2011; Greco; Coda, 2004; Sanches; Coda, 2016), incluindo problemas de interação fluido-estrutura (Avancini; Sanches, 2020; Fernandes; Coda; Sanches, 2019; Sanches; Coda, 2013, 2014). Entre as vantagens da formulação posicional do MEF destaca-se ainda o fato de ela gerar uma matriz de massa constante, facilitando a realização de análises dinâmicas das estruturas.

A formulação não linear geométrica do elemento finito de casca posicional, aplicado nesse trabalho, foi proposta por (Coda; Paccola, 2007), apresentando inicialmente seis

graus de liberdade por nó — três associados às posições e três às componentes do vetor generalizado. Posteriormente, diante do problema de travamento volumétrico, os autores ampliaram o modelo com a introdução de um sétimo parâmetro, responsável por representar a variação linear da espessura da casca (Coda; Paccola, 2008).

Em Sanches e Coda (2013), os autores utilizam o integrador temporal de Newmark para a análise de problemas dinâmicos não lineares de estruturas de cascas, no contexto da IFE, com grandes deslocamentos e rotações de corpo rígido. Nesse trabalho, os autores apresentam a demonstração da conservação da quantidade de movimento linear e angular no uso dessa metodologia, e testam a estabilidade e a conservação de energia em problemas com pequenas deformações e grandes deslocamentos, demonstrando que a formulação é adequada para os problemas de interação fluido-estrutura.

Em virtude da eficiência dessa formulação na resolução de problemas dinâmicos não lineares de estruturas, sobretudo nos casos que envolvem interação fluido-estrutura, o presente trabalho adota o MEF posicional aplicado a cascas como modelo matemático para representar as estruturas.

#### 1.2.4 Acoplamento fluido-estrutura

O problema de interação fluido-estrutura pode ser descrito como um conjunto de equações diferenciais e condições de contornos associadas ao fluido e à estrutura que precisam ser satisfeitas ao mesmo tempo. Como sólidos e fluidos geralmente apresentam descrições matemáticas diferentes, sendo a mecânica dos sólidos tradicionalmente formulada por descrições Lagrangianas e a mecânica dos fluidos por descrições Eulerianas, um dos desafios da análise computacional de IFE é a compatibilização dessas diferentes descrições. Os métodos de acoplamento encontrados na literatura, em geral, podem ser classificado em dois tipos: métodos de malhas móveis, ou método de malhas conformes; e métodos de malhas fixas ou método de malhas não-conformes (Bazilevs; Takizawa; Tezduyar, 2013b; Hou; Wang; Layton, 2012).

Nos métodos de malhas móveis, à medida em que a interface fluido-estrutura se movimenta, o domínio computacional do fluido é deformado, e a malha do fluido é movimentada para acomodar a mudança da interface. Nesse tipo de metodologia duas possíveis técnicas podem ser aplicadas na modelagem do domínio fluido: a descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária (Donea; Giuliani; Halleux, 1982; Hughes; Liu; Zimmerman, 1981; Kanchi; Masud, 2007) ou a formulação Espaço-Tempo para domínios deformáveis (Takizawa; Tezduyar, 2012; Tezduyar; Behr; Liou, 1992; Tezduyar *et al.*, 1992b), sendo que ambas permitem a movimentação arbitrária (independente das partículas) da discretização espacial. A principal vantagem do método de malhas adaptadas é a capacidade de controlar o refinamento da malha do fluido próxima a interface fluido-estrutura, bem como a conformidade dos domínios, e como consequência, garantir a captura de efeitos de camada

limite nessa região, garantindo precisão dos resultados.

A técnica empregada para movimentação de malhas é muito importante nos métodos de malhas móveis, pois essa deve ser eficiente de maneira a resultar em elementos que possuam mínima distorção e alteração de volume, e de forma a evitar que a malha necessite ser reconstruída. Diversas técnicas têm sido desenvolvidas para essa finalidade e podem ser divididas em três categorias. Na primeira, os deslocamentos são impostos na interface entre estrutura e fluido e o campo de deslocamentos é obtido através da resolução de um problema de valor de contorno, formulando-se o problema através de analogia com estrutura de molas (Bottasso; Detomi; Serra, 2005) ou com sólido elástico (Johnson; Tezduyar, 1994; Stein; Tezduyar; Benney, 2004) ou emprego da equação de Laplace para distribuição dos deslocamentos (Kanchi; Masud, 2007), entre outras. O segundo grupo são esquemas ponto-a-ponto, nos quais os deslocamentos da malha são diretamente interpolados a partir dos deslocamentos impostos na interface (Donea; Giuliani; Halleux, 1982; Sanches; Coda, 2014; Tezduyar *et al.*, 1993). Existem ainda métodos híbridos, que combinam vantagens de diferentes técnicas de movimentação de malhas (Fernandes; Coda; Sanches, 2019; Lefrançois, 2008).

Nos métodos de malhas móveis, entretanto, em alguns casos o remalhamento torna-se inevitável, como em problemas com grandes distorções do domínio, e em especial, em problemas com mudanças topológicas do domínio do fluido, fazendo com que o custo computacional se torne muito elevado.

Por sua vez, os métodos de malhas fixas são capazes de lidar com mudanças topológicas e grandes deslocamentos. Para isso, utilizam-se os chamados métodos de contornos imersos, tal como o introduzido por Peskin (1972), onde mantém-se a malha do fluido fixa e permite-se que a estrutura move-se dentro dessa malha. Nesses métodos, é necessário que as posições da estrutura sejam identificadas dentro da malha do fluido a cada passo de tempo (Mittal; Iaccarino, 2005; Wang *et al.*, 2011). Uma das formas de identificação é através de uma função distância assinalada do contorno da estrutura (método *level-set*). Nesse contexto, pode-se citar os trabalhos de Cirak e Radovitzky (2005) aplicados no âmbito dos volumes finitos e de Akkerman *et al.* (2012) e Sanches e Coda (2014) em elementos finitos. A principal desvantagem desse tipo de metodologia é que a resolução da discretização na camada limite fica limitada à discretização da malha de elementos finitos onde a interface estiver posicionada no instante de análise.

Em termos da forma de solução do sistema acoplado, as técnicas de acoplamento disponíveis dividem-se em duas classes principais: métodos particionados (Bazilevs *et al.*, 2011; Fernandes; Coda; Sanches, 2019; Roux; Garaud, 2009; Sanches; Coda, 2013, 2014) e métodos monolíticos (Avancini, 2023; Blom, 1998; Hübner; Walhorn; Dinkler, 2004; Hron; Madlik, 2007). No primeiro grupo, as equações do fluido e da estrutura são resolvidas separadamente, sendo as condições de acoplamento transmitidas de um meio

para o outro na interface, em geral, em termos de condições de Dirichlet-Neumann ao longo do processo de solução. No segundo grupo, os métodos monolíticos, fluido e estrutura são tratados como entidade única, com um único sistema de equações gerado para fluido e estrutura, sendo as condições de acoplamento atendidas de maneira implícita durante o equacionamento.

As técnicas de acoplamento particionado do tipo Dirichlet-Neumann em geral consistem na aplicação de condições de contorno de Dirichlet no contorno do fluido que está em contato com a estrutura (velocidades provenientes da movimentação da estrutura) e de Neumann no contorno do sólido que está em contato com o fluido (forças provenientes da pressão e das tensões viscosas no fluido). Os métodos particionados podem ainda ser subdivididos em acoplamentos fracos (explícitos), ou fortes (implícitos). No acoplamento particionado fraco, as equações são resolvidas de uma maneira desacoplada e só no passo de tempo seguinte as condições de acoplamento são transmitidas para de um meio para o outro. Já no acoplamento particionado forte, as condições de acoplamento são atualizadas a cada iteração do processo de solução do sistema não linear dentro de cada passo de tempo. Esse tipo de resolução, aplicada nesse trabalho, também é conhecida como bloco-iterativa (Bazilevs; Takizawa; Tezduyar, 2013a), e pode ser representada por uma modificação da matriz tangente monolítica do método de Newton-Raphson, permitindo que os sistemas do fluido, da estrutura e da malha sejam tratados em blocos separados. Esse tipo de metodologia particionada facilita a solução dos problemas de IFE devido ao total desacoplamento entre os *solvers* de estrutura e de fluido.

Os esquemas particionados podem apresentar, entretanto, algumas desvantagens, como a defasagem que pode ocorrer entre as integrações temporais do fluido e da estrutura quando as condições de contorno na interface entre fluido e estrutura são aplicadas de maneira explícita, e, ainda, instabilidades numéricas como o efeito de massa adicionada (Felippa; Park; Farhat, 2001). Em escoamentos governados pelo campo de pressão, a ação do fluido sobre a estrutura funciona como uma massa adicional, alterando sua inércia (Tallec; Mouro, 2001). Em escoamentos incompressíveis, nos quais a densidade do sólido e do fluido podem ser muito próximas, ou quando a estrutura é muito esbelta, esse fenômeno pode ocasionar erros elevados e instabilidades nos acoplamentos fracos, ou perda de convergência e instabilidades numéricas em técnicas de acoplamento particionado forte.

Uma das formas de se contornar esse problema é a alteração do esquema de acoplamento do tipo Dirichlet-Neumann para condições de contorno de Robin, que consiste em uma combinação linear das condições de Dirichlet e Neumann, ver por exemplo, Badia, Nobile e Vergara (2008). A metodologia introduzida por Tezduyar, Behr e Liou (1992), chamada de *augmented mass*, aplicada nesse trabalho, consiste em multiplicar a massa da matriz tangente respectiva à estrutura por um fator que dependerá do tipo de problema em análise, também pode ser empregada para essa finalidade. Outra metodologia, que

demonstra-se muito eficiente para os casos de acoplamento do tipo bloco-iterativo, como mostram os trabalhos de (Fernandes; Coda; Sanches, 2019; Kütler; Wall, 2008), é o uso da relaxação de Aitken, proposto por Irons e Tuck (1969).

### 1.2.5 Métodos multiescala e técnicas de partição de domínios

Em diversas áreas da engenharia, faz-se necessário considerar efeitos localizados, geralmente de menor escala, dentro de um modelo global. Na análise estrutural, podem ser citados problemas envolvendo fissuras, orifícios e imperfeições; na mecânica dos fluidos, fenômenos de camada limite e a interface entre dois fluidos em escoamentos multifásicos; e, na interação fluido-estrutura, a própria interface entre estrutura e fluido.

Para obter soluções precisas nesse tipo de problema, é necessária a aplicação de técnicas que considerem os efeitos locais sem, contudo, tornar a simulação inviável pelo elevado custo computacional.

O método dos elementos finitos, tradicionalmente utilizado para a análise numérica de equações diferenciais, foi desenvolvido a partir de modelos mecânicos de meios contínuos, o que lhe confere pouca flexibilidade para a consideração desses efeitos. Os refinamentos  $p$  e  $h$  constituem metodologias eficientes; contudo, em determinados problemas dinâmicos, exigem técnicas de remalhamento e podem acarretar custos computacionais elevados.

Em busca de aprimorar o Método dos Elementos Finitos (MEF), diversas propostas têm sido apresentadas com o objetivo de aumentar sua flexibilidade na resolução de problemas com efeitos localizados. Entre elas, pode-se citar os elementos finitos difusos (Nayroles; Touzot; Villon, 1992), nos quais o conceito de partículas foi introduzido, resultando em uma generalização do MEF sem a necessidade de malha. Outra proposta é o método de Galerkin livre de elementos, que combina características de métodos sem malha com o MEF (ver Belytschko *et al.* (1995)). Na mesma direção, destacam-se o método de partição da unidade (Melenk; Babuska, 1996), o método dos elementos finitos generalizado (G-FEM) (Strouboulis; Copps; Babuska, 2001) e o método dos elementos finitos estendido (X-FEM) (Moës *et al.*, 2003), os quais introduzem o enriquecimento da base aproximadora por meio de funções capazes de capturar efeitos localizados. Contudo, tanto o G-FEM quanto o X-FEM apresentam forte dependência do conhecimento prévio da solução local ou, ao menos, de sua distribuição espacial.

Pesquisas como as de Farhat, Harari e Franca (2001) propõem enriquecimentos descontínuos nos espaços funcionais, incorporando modos regulares por meio de formulações discretas de Galerkin e multiplicadores de Lagrange. Além disso, métodos de discretização que não dependem diretamente da interface, fundamentados na técnica de Nitsche, foram desenvolvidos para lidar com problemas envolvendo descontinuidades materiais, como demonstrado no estudo de Hansbo e Hansbo (2002).

No contexto da mecânica dos fluidos, Tezduyar e Aliabadi (2000), Tezduyar, Aliabadi e Behr (1998) introduziram a técnica *EDICT (Enhanced-Discretization Interface-Capturing Technique)* para a captura de interface, com aprimoramento da discretização em problemas bifásicos ou com superfície livre. Para isso, nessa região de interface definem-se subconjuntos de elementos (sub-malhas), que posteriormente são refinados sucessivamente, de modo a melhorar a precisão da solução. Como resultado, obtém-se uma discretização mais adequada para capturar a interface; entretanto, as sub-malhas geradas não representam com exatidão as descontinuidades na interface. Uma versão mais eficiente dessa técnica foi proposta em Tezduyar e Sathe (2005), na qual um método iterativo multinível é projetado para a captura dos efeitos do escoamento em pequenas escalas, permitindo a simulação de problemas mais complexos.

Pode-se citar ainda o método Variacional Multiescala (VMS) (Hughes *et al.*, 1998) que utiliza o conceito de micromodelos e macromodelos, sendo que os micromodelos capturam efeitos em pequenas escalas de maneira a corrigir os macromodelos, sendo muito utilizado para a obtenção de métodos estabilizados para a mecânica dos fluidos.

Outro grupo de métodos proposto para flexibilizar o MEF em problemas com efeitos locais, é o dos métodos baseados em superposição de um domínio computacional local a um domínio global. A técnica Chimera definida por Benek *et al.* (1986) traz a introdução de orifícios na região de superposição dos modelos, definindo um contorno artificial para o modelo global, e a transmissão de dados ocorre através desses contornos artificiais gerados. O método S (Fish, 1992) trata o modelo local como um enriquecimento ao global, e a solução é obtida através da soma dos campos de interesse de cada domínio.

O método Arlequin (Dhia, 1998; Dhia; Rateau, 2001), por sua vez, também baseia-se na superposição de modelos de modo a combinar um modelo local mais refinado a um global, no entanto, esse processo é realizado através do cruzamento e colagem entre os modelos em uma zona de superposição, fazendo-se isso através do uso de multiplicadores de Lagrange. O método Arlequin vem sendo utilizado amplamente em diversas áreas da mecânica dos sólidos (ver, por exemplo, Bauman *et al.* (2008), Biscani *et al.* (2016), Caleyron *et al.* (2013), Dhia e Jamond (2010), Dhia e Torkhani (2011), Jamond e Dhia (2013)), na DFC e IFE, entretanto, ainda é pouco explorado. Fernier, Faucher e Jamond (2020) aplica a metodologia para análise de escoamentos compressíveis, e Fernandes *et al.* (2020) utiliza uma versão estabilizada do método para análise de escoamentos incompressíveis e de IFE para problemas bidimensionais.

Ainda no contexto de superposição de domínios, pode-se citar o método de combinação dos espaços de função, proposto por Rosa, Coda e Sanches (2022), que consiste em ponderar as funções de forma da discretização local e da discretização global por funções de combinação e unir os espaços local e global, gerando uma nova base. No trabalho citado, a técnica foi aplicada para problemas de fratura da dinâmica de estruturas computacional

para grandes deslocamentos.

No presente estudo, foram aplicadas duas metodologias de partição de domínios para análise dos fluidos dentro do contexto dos problemas de IFE tridimensionais, o método de combinação de espaços de funções e o método Arlequin estabilizado. Essas técnicas permitiram a consideração de efeitos localizados nos problemas analisados, além de possibilitarem a união de discretizações por método dos elementos finitos tradicional e análise isogeométrica.

### **1.3 Objetivos**

O principal objetivo deste trabalho é o desenvolvimento e implementação computacional de uma formulação tridimensional para análise de problemas de interação fluido-estrutura que permita a consideração de efeitos localizados no domínio do fluido por meio de técnica de partição de domínios, além de viabilizar o uso combinado de aproximações por elementos finitos clássicos e análise isogeométrica.

Para tal finalidade, enumeram-se os seguintes objetivos específicos:

- Desenvolvimento de um programa para a análise bi e tridimensional de escoamentos Newtonianos incompressíveis, que permita a utilização tanto da discretização por elementos finitos quanto da discretização isogeométrica;
- Estudo de técnicas de partição de domínios para levar em conta efeitos localizados no âmbito da DFC;
- Implementação de técnicas de partição de domínios no código de dinâmica dos fluidos computacional contemplando problemas da DFC com contornos móveis;
- Estudo aprofundado da formulação Lagrangiana total baseada em posições para estruturas de cascás, bem como do código computacional para análise dinâmica de cascás desenvolvido no grupo de pesquisa em que este trabalho está inserido;
- Acoplamento entre os códigos computacionais para fluido e para estruturas através do emprego de uma técnica particionada do tipo bloco-iterativa;
- Verificação dos códigos computacionais através da simulação de problemas da dinâmica dos fluidos, dinâmica das estruturas e de IFE e comparação com resultados da literatura.

### **1.4 Metodologia**

A base da metodologia adotada para cada sub-problema envolvido nesta tese, consiste em estudo da literatura, desenvolvimento de formulação numérica, implementação computacional e verificação do código implementado.

Em função da complexidade envolvida na implementação das ferramentas computacionais propostas, optou-se pelo uso da linguagem de programação C++ orientada a objetos, visto que esta já vem sendo utilizada com sucesso no grupo de pesquisas em que este trabalho se insere, facilitando o aproveitamento de códigos pré-existentes. Além disso, a programação orientada a objetos proporciona maior modularidade aos códigos e maior facilidade para o acoplamento entre módulos distintos. Todas as implementações são realizadas utilizando bibliotecas, compiladores e softwares livres ou de código aberto, em ambiente Linux.

Toma-se como base como base os desenvolvimentos na área de análise isogeométrica da mecânica dos fluidos de Tonon (2016) e um código computacional de dinâmica dos fluidos para análises de escoamentos incompressíveis bidimensionais desenvolvido no trabalho de doutorado de Fernandes (2020). Esse código é inicialmente ampliado para contemplar elementos tridimensionais. Na sequência, implementa-se nesse código discretização isogeométrica por meio de funções NURBs.

A partir desse ponto, inicia-se o estudo das metodologias de decomposição de domínios e sua implementação para problemas bidimensionais da DFC, onde são consideradas duas técnicas, o método da combinação dos espaços de funções (Rosa, 2021; Rosa; Coda; Sanches, 2022) e o Método Arlequin em sua versão estabilizada conforme o trabalho de Fernandes (2020), de modo a adotar o mais eficiente para as análises de IFE.

Os estudos e desenvolvimentos em relação à mecânica das estruturas foram focados nas estruturas de casca, com base nos trabalhos de Coda (2018) e Sanches e Coda (2013, 2014), sendo empregado um código computacional desenvolvido no grupo de pesquisa em linguagem de programação em C++ orientada a objeto, que engloba tanto MEF quanto AIG.

O acoplamento entre os códigos para fluido e para estrutura é desenvolvido de forma particionada forte. Para maior eficiência na resolução dos problemas, adota-se o protocolo MPI (*Message passing interface*) para processamento paralelo com memória distribuída. A partição do domínio discretizado entre os processos, é realizado através da biblioteca METIS<sup>1</sup>, e o pacote PETSc<sup>2</sup> (Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation) é adotada para a solução de sistemas lineares em processamento paralelo.

Para a geração de malhas de elementos finitos emprega-se o programa GMSH<sup>3</sup>, enquanto para a geração dos *grids* para análise isogeométrica, emprega-se o programa desenvolvido pela autora e seu orientador durante seu trabalho de mestrado (Tonon, 2016). Para pós-processamento e visualização dos resultados, utilizam-se os programas Kitware

<sup>1</sup> Disponível em: <http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/metis/metis/overview>

<sup>2</sup> Disponível em: <http://https://www.mcs.anl.gov/petsc/>

<sup>3</sup> Disponível em:<https://gmsh.info/>

Paraview<sup>4</sup> e Gnuplot<sup>5</sup>.

No que diz respeito à infraestrutura, utiliza-se o *cluster* disponível no Laboratório de Informática e de Mecânica Computacional (LIMC) do SET para a simulação de problemas mais complexos, e um computador pessoal para a simulação de problemas mais simples.

## 1.5 Justificativa

A motivação central desta pesquisa decorre da relevância científica e tecnológica dos problemas de interação fluido-estrutura (IFE) e das limitações das metodologias atualmente disponíveis para sua análise numérica. Embora os avanços recentes em dinâmica dos fluidos computacional, mecânica dos sólidos computacional e técnicas de acoplamento tenham possibilitado progressos significativos na modelagem desses problemas, ainda persistem desafios importantes, especialmente quando se trata de situações envolvendo grandes deslocamentos estruturais, escoamentos tridimensionais incompressíveis a altos números de Reynolds e mudanças topológicas no domínio do fluido.

Do ponto de vista computacional, os métodos tradicionais de acoplamento com malhas móveis apresentam limitações relacionadas ao elevado custo de remalhamentos sucessivos, inevitáveis em problemas com grandes distorções do domínio fluido. Por outro lado, os métodos de malhas fixas, embora adequados para lidar com mudanças topológicas, apresentam deficiências na representação de fenômenos localizados, como os efeitos de camada limite em torno de estruturas imersas. Assim, existe uma lacuna metodológica que justifica a busca por técnicas capazes de combinar as vantagens das abordagens existentes e, ao mesmo tempo, mitigar suas limitações.

Nesse contexto, a proposta de utilizar técnicas de decomposição de domínio com malhas superpostas apresenta-se como uma alternativa promissora. A superposição de malhas locais (móveis e conformes à estrutura) à malhas globais (fixas e menos refinadas) possibilita tanto o tratamento adequado de grandes deslocamentos e mudanças topológicas quanto a captura precisa de efeitos de fronteira, reduzindo a necessidade de remalhamentos extensivos. Além disso, a adoção de diferentes discretizações — combinando elementos finitos e análise isogeométrica — permite explorar as vantagens de cada metodologia: a flexibilidade geométrica dos elementos finitos e a descrição exata de superfícies e continuidade elevada das funções NURBS.

Adicionalmente, a literatura ainda é incipiente no que se refere à aplicação conjunta da análise isogeométrica e do método dos elementos finitos em problemas de IFE tridimensionais. A investigação do método de combinação dos espaços de funções e do método Arlequin estabilizado, aplicados ao acoplamento entre malhas globais e locais, representa uma contribuição original deste trabalho, tanto no âmbito teórico quanto no

---

<sup>4</sup> Disponível em:<http://https://www.paraview.org/>

<sup>5</sup> Disponível em:<https://gnuplot.info/>

computacional. Em particular, a avaliação da robustez do Arlequin estabilizado para escoamentos incompressíveis em altos números de Reynolds e sua extensão para a análise de problemas de IFE tridimensionais configuram avanços relevantes frente às metodologias atualmente disponíveis.

Portanto, esta tese justifica-se pela necessidade de desenvolver e consolidar técnicas numéricas mais eficientes e robustas para a análise de problemas complexos de interação fluido-estrutura. O desenvolvimento proposto contribuirá não apenas para o avanço do conhecimento científico na área de mecânica computacional, mas também para aplicações práticas em engenharia, tais como análise aeroelástica, projeto de estruturas submetidas à ação do vento, dinâmica de sistemas biomecânicos e estudo de fenômenos hidrodinâmicos em engenharia naval e oceânica.



## 2 DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL

O escoamento isotérmico de um fluido newtoniano é descrito pelas equações advindas da conservação da quantidade de movimento, ou de Navier-Stokes, e da conservação de massa. Nos casos em que ocorram variações significativas de temperatura ou em escoamentos compressíveis, a equação da conservação da energia deve ser incorporada ao sistema. Essas equações, em conjunto com a relação constitutiva, formam um sistema de equações diferenciais não lineares que descrevem o comportamento do escoamento no tempo e no espaço.

Neste trabalho, são investigados escoamentos incompressíveis, isotérmicos e com contornos móveis. As seções seguintes apresentam a abordagem adotada para a resolução desse tipo de problema, bem como sua implementação computacional. Adota-se uma descrição Euleriana-Lagrangiana Arbitrária (ALE) para representar as equações, e a discretização espacial é realizada por meio do método dos elementos finitos (FEM) ou da análise isogeométrica (AIG).

Para tratar questões numéricas recorrentes nesse tipo de equações, como as oscilações espúrias em casos de convecção dominante, típicas da aplicação direta do método dos resíduos ponderados na formulação clássica de Galerkin, emprega-se a metodologia Streamline Upwind/Petrov-Galerkin (SUPG). Além disso, a estabilização Pressure-Stabilizing/Petrov-Galerkin (PSPG) é aplicada com o objetivo de contornar as condições de *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi* (LBB) associadas aos escoamentos incompressíveis, permitindo o uso estável de um mesmo espaço de funções de aproximação para pressão e velocidade. A integração temporal é realizada por meio do método  $\alpha$ -generalizado.

Ao final deste capítulo, apresenta-se um algoritmo que descreve o esquema de solução computacional adotado neste trabalho para a mecânica dos fluidos, seguido da simulação de casos clássicos para a verificação da metodologia proposta.

### 2.1 Equações governantes na descrição Euleriana

#### 2.1.1 Equação da conservação da massa

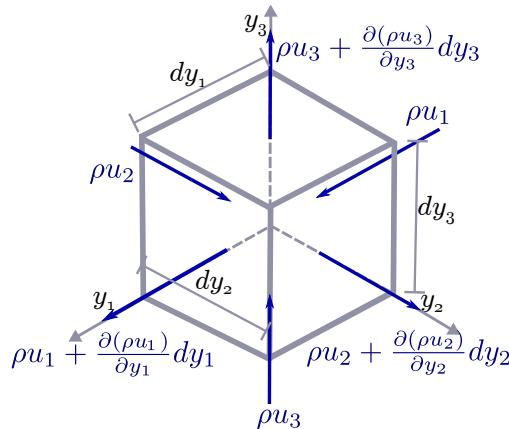
Para obter a equação da conservação da massa na descrição espacial, considera-se um volume de controle infinitesimal fixo no espaço, permeável à matéria e submetido a um escoamento com velocidade  $\mathbf{u}$ , cujos componentes são  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  (conforme a Figura 1). Para um intervalo de tempo infinitesimal  $dt$ , a lei da conservação da massa estabelece que a variação de massa dentro do volume de controle deve ser igual ao balanço do fluxo líquido de massa que atravessa suas fronteiras, podendo ser expressa matematicamente da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = & (\rho u_1 dA_1 + \rho u_2 dA_2 + \rho u_3 dA_3) - \\ & \left( \left( \rho u_1 + \frac{\partial \rho u_1}{\partial y_1} dy_1 \right) dA_1 + \left( \rho u_2 + \frac{\partial \rho u_2}{\partial y_2} dy_2 \right) dA_2 + \left( \rho u_3 + \frac{\partial \rho u_3}{\partial y_3} dy_3 \right) dA_3 \right), \end{aligned} \quad (2.1)$$

com  $\rho$  sendo a densidade de massa do fluido e  $dA_i$  a área referente à face ortogonal ao eixo  $y_i$ . Considerando que  $dV = dy_1 dy_2 dy_3 = dy_1 dA_1 = dy_2 dA_2 = dy_3 dA_3$  e manipulando-se algebricamente a Equação (2.1), resulta:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial \rho u_1}{\partial y_1} - \frac{\partial \rho u_2}{\partial y_2} - \frac{\partial \rho u_3}{\partial y_3}. \quad (2.2)$$

Figura 1 – Volume de controle infinitesimal: Fluxo de massa



Fonte: Elaborada pela autora

Para escoamentos incompressíveis, quando  $\rho$  é constante ao longo do tempo, a equação fica reduzida a:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \frac{\partial u_2}{\partial y_2} + \frac{\partial u_3}{\partial y_3} = 0, \quad (2.3)$$

ou ainda:

$$\nabla_y \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.4)$$

onde  $\nabla_y \cdot (\mathbf{u})$  é o divergente de  $\mathbf{u}$  em relação às coordenadas Eulerianas  $\mathbf{y}$ .

### 2.1.2 Equação da quantidade de movimento

Para um volume de controle infinitesimal, a lei da conservação da quantidade de movimento afirma que a variação temporal da quantidade de movimento no interior do volume é determinada pela diferença entre o fluxo de quantidade de movimento que entra e o que sai pelas suas fronteiras, somada à resultante das forças aplicadas sobre o volume de controle.

Para chegar-se à equação da quantidade de movimento em sua forma conservativa e seguindo a descrição espacial, inicia-se com a avaliação das forças que atuam sobre um volume de controle infinitesimal no instante atual, como ilustrado na Figura 2, onde são mostradas apenas as componentes que atuam na direção  $y_1$ . Somando-se vetorialmente as componentes de forças externas e internas na direção  $y_1$ , chega-se na seguinte relação:

$$\begin{aligned} F_1 = & -(\sigma_{11}dy_2dy_3 + \sigma_{12}dy_1dy_3 + \sigma_{13}dy_1dy_2) + \\ & \left( \left( \sigma_{11} + \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial y_1}dy_1 \right) dy_2dy_3 + \left( \sigma_{12} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y_2}dy_2 \right) dy_1dy_3 + \left( \sigma_{13} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial y_3}dy_3 \right) dy_1dy_2 \right) + \\ & b_1dy_1dy_2dy_3, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde  $F_1$  representa a resultante das forças externas na direção  $y_1$ ;  $\sigma_{ij}$  são as componentes  $ij$  do tensor das tensões de Cauchy ( $\boldsymbol{\sigma}$ ); e  $b_1$  representa a componente do vetor força de campo por unidade de volume na direção  $y_1$ . Dividindo-se Equação (2.5) por  $dV$  e efetuando as subtrações, tem-se a componente de força resultante por unidade de volume na direção de  $y_1$  ( $q_1$ ):

$$q_1 = \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y_2} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial y_3} + b_1. \quad (2.6)$$

Seguindo a mesma ideia para as direções  $y_2$  e  $y_3$ , escreve-se:

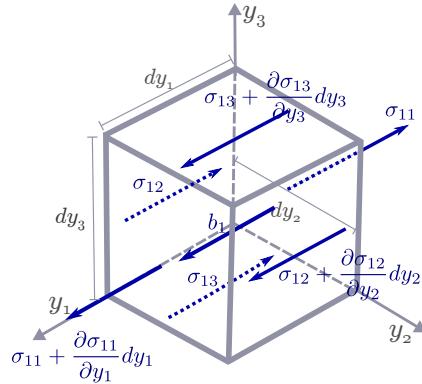
$$q_2 = \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial y_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial y_2} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial y_3} + b_2, \quad (2.7)$$

e

$$q_3 = \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial y_1} + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial y_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial y_3} + b_3, \quad (2.8)$$

ou ainda, de forma simbólica:

Figura 2 – Volume de controle infinitesimal: Componentes de força na direção  $y_1$



Fonte: Elaborada pela autora

$$\mathbf{q} = \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}. \quad (2.9)$$

Realizando-se o balanço da quantidade de movimento no volume de controle infinitesimal da Figura 3, e aplicando-se o princípio da conservação da quantidade de movimento, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} dV = & u_1 \rho \mathbf{u} dA_1 + u_2 \rho \mathbf{u} dA_2 + u_3 \rho \mathbf{u} dA_3 - \\ & \left( \left( u_1 \rho \mathbf{u} + \frac{\partial u_1 \rho \mathbf{u}}{\partial y_1} dy_1 \right) dA_1 + \left( u_2 \rho \mathbf{u} + \frac{\partial u_2 \rho \mathbf{u}}{\partial y_2} dy_2 \right) dA_2 + \right. \\ & \left. \left( u_3 \rho \mathbf{u} + \frac{\partial u_3 \rho \mathbf{u}}{\partial y_3} dy_3 \right) dA_3 \right) + \mathbf{q} dV, \end{aligned} \quad (2.10)$$

dividindo-se a Equação (2.10) por  $dV$  e efetuando-se as subtrações, chega-se a:

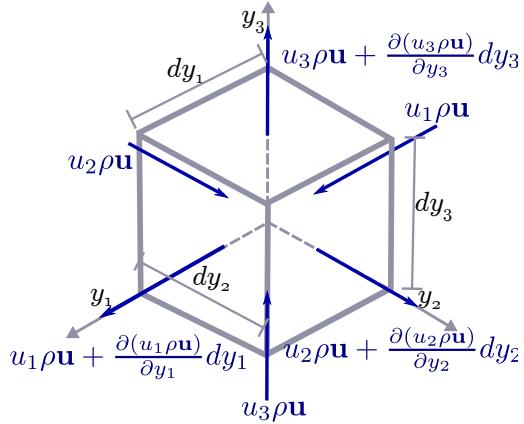
$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\partial u_1 \rho \mathbf{u}}{\partial y_1} - \frac{\partial u_2 \rho \mathbf{u}}{\partial y_2} - \frac{\partial u_3 \rho \mathbf{u}}{\partial y_3} + \mathbf{q}, \quad (2.11)$$

ou ainda, considerando que  $\rho$  é constante:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla_y \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mathbf{f} \right) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (2.12)$$

onde  $\mathbf{f} = \mathbf{b}/\rho$  representa a força de campo por unidade de massa.

Figura 3 – Volume de controle infinitesimal: Fluxo de quantidade de Movimento



Fonte: Elaborada pela autora

Da consideração da equação da continuidade, a Equação (2.12) pode ser rescrita ainda em sua forma convectiva como:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla_y) \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (2.13)$$

### 2.1.3 Relação constitutiva

O tensor de tensões de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  é definido para fluidos newtonianos incompressíveis pela seguinte relação constitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \quad (2.14)$$

onde  $p$  representa a pressão,  $\mu$  a viscosidade dinâmica do fluido e  $\boldsymbol{\varepsilon}(\bullet)$  é o tensor taxa de deformação Euleriana, definido como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\bullet) = \frac{1}{2} \left( \nabla_y(\bullet) + \nabla_y(\bullet)^T \right). \quad (2.15)$$

## 2.2 Descrição Euleriana-Lagrangiana arbitrária (ALE)

A descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária (Donea; Giuliani; Halleux, 1982; Hughes; Liu; Zimmerman, 1981) representa uma generalização das descrições puramente Lagrangiana e puramente Euleriana do movimento do contínuo. A descrição Lagrangiana fixa a atenção em pontos materiais do contínuo, enquanto que, na descrição Euleriana,

considera-se uma porção fixa do espaço ocupada pelo contínuo e analisam-se os pontos materiais que passam por essa porção ao longo do tempo. Como consequência, na descrição puramente Lagrangiana a malha computacional move-se com o contínuo, enquanto que, na Euleriana, a malha computacional mantém-se espacialmente fixa e permeável ao meio contínuo. Por sua vez, na descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária trabalha-se com um domínio de referência que pode mover-se de maneira independente do movimento dos pontos materiais do contínuo analisado.

Para a aplicação dessa metodologia às equações governantes da mecânica dos fluidos, consideram-se três domínios contínuos, de acordo com a Figura 4: (i) o domínio inicial, chamado de **domínio material** ( $\Omega_0$ ), definido pelas coordenadas dos pontos materiais  $\mathbf{x}$  na configuração inicial; (ii) o domínio atual, chamado de **domínio espacial** ( $\Omega$ ), definido pelas coordenadas espaciais  $\mathbf{y}$ ; e, por fim, (iii) o **domínio de referência** ( $\Omega_{\bar{\mathbf{x}}}$ ), associado às coordenadas dos pontos de referência  $\bar{\mathbf{x}}$ .

Considera-se neste texto, o domínio de referência,  $\Omega_{\bar{\mathbf{x}}}$ , como sendo a configuração inicial da malha, enquanto que as configurações atuais, tanto da malha como do contínuo, coincidem com a referência espacial  $\Omega$ .

As coordenadas no domínio  $\Omega$  podem ser mapeadas a partir do domínio inicial ( $\Omega_0$ ) ou do domínio de referência ( $\Omega_{\bar{\mathbf{x}}}$ ) utilizando as seguintes funções de mapeamento:

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, t). \quad (2.16)$$

Da mesma forma, o domínio de referência pode ser mapeado a partir do domínio inicial por:

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t). \quad (2.17)$$

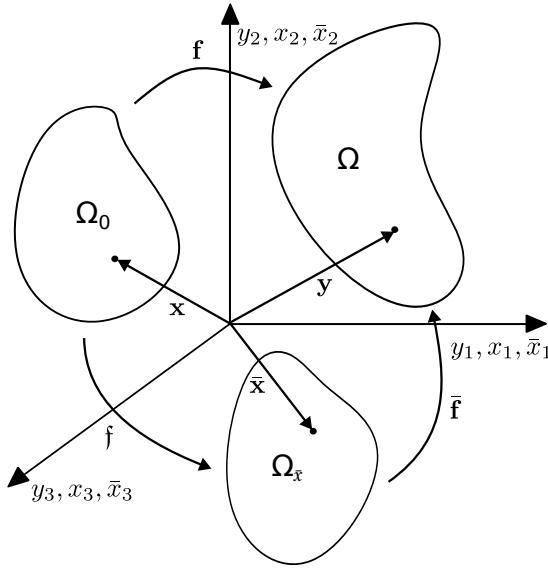
A velocidade dos pontos da malha é calculada por:

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial t} \Bigg|_{\bar{\mathbf{x}}}, \quad (2.18)$$

e a velocidade dos pontos materiais no instante  $t$  é obtida pela derivada do vetor posição  $\mathbf{y}$ , mantendo  $\mathbf{x}$  fixo:

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Bigg|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Bigg|_{\mathbf{x}}. \quad (2.19)$$

Figura 4 – Descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária



Fonte: Elaborada pela autora

As matrizes jacobianas dos mapeamentos considerando a dependência do espaço e do tempo são dadas por:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial(\mathbf{x}, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{\partial(\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, t), t)}{\partial(\bar{\mathbf{x}}, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} & \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

e

$$\mathfrak{F} = \frac{\partial(\mathfrak{f}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial(\mathbf{x}, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{w} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

sendo  $\mathbf{w} = \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}}$ .

Considerando que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{f}} \circ \mathfrak{f}$ , pode-se escrever:

$$\frac{\partial(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial(\mathbf{x}, t)} = \frac{\partial(\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, t), t)}{\partial(\bar{\mathbf{x}}, t)} \cdot \frac{\partial(\mathfrak{f}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial(\mathbf{x}, t)}, \quad (2.23)$$

que pode ser rescrita como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} & \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{w} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Dessa forma, pode-se estabelecer uma relação entre a velocidade da malha e a velocidade do ponto material:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{w}. \quad (2.25)$$

Supondo agora uma grandeza física escalar, denominada  $g(\mathbf{y}, t)$  na configuração espacial, de  $g^*(\bar{\mathbf{x}}, t)$  na configuração de referência e  $g^{**}(\mathbf{x}, t)$  na configuração material, pode-se escrever então:

$$g^{**}(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), t), \quad (2.26)$$

ou:

$$g^{**} = g \circ \mathbf{f}, \quad (2.27)$$

o que permite escrever o seguinte gradiente:

$$\frac{\partial g^{**}(\mathbf{x}, t)}{\partial (\mathbf{x}, t)} = \frac{\partial g(\mathbf{y}, t)}{\partial (\mathbf{y}, t)} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial (\mathbf{x}, t)}, \quad (2.28)$$

que, em forma matricial, é apresentado como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g^{**}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial g^{**}}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial g}{\partial t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Essa expressão nos permite escrever a derivada temporal da variável na configuração material:

$$\frac{\partial g^{**}}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}} \cdot \mathbf{u}, \quad (2.30)$$

que corresponde à derivada material de  $g$ . Para facilitar a visualização, podem-se remover os sobrescritos  $**$ , e então:

$$\frac{Dg}{Dt} = \left. \frac{\partial g}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} = \left. \frac{\partial g}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} + \mathbf{u} \cdot \nabla_y g. \quad (2.31)$$

Usando essa mesma metodologia, pode-se escrever a transformação de  $g^*(\bar{\mathbf{x}}, t)$  para a referência material da seguinte forma:

$$g^{**} = g^* \circ \mathfrak{f}, \quad (2.32)$$

que resulta no seguinte gradiente

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g^{**}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial g^{**}}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g^*}{\partial \bar{\mathbf{x}}} & \frac{\partial g^*}{\partial t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{w} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

com a segunda coluna resultando em:

$$\frac{\partial g^{**}}{\partial t} = \frac{\partial g^*}{\partial t} + \frac{\partial g^*}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{w}. \quad (2.34)$$

Utilizando-se a expressão apresentada na Equação (2.25) e substituindo-a na Equação (2.34), resulta em:

$$\frac{\partial g^{**}}{\partial t} = \frac{\partial g^*}{\partial t} + \frac{\partial g^*}{\partial \mathbf{y}} \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}). \quad (2.35)$$

Removendo-se os sobrescritos (\*\* e \*), chega-se a equação fundamental para os desenvolvimentos utilizando a metodologia ALE:

$$\frac{Dg}{Dt} = \left. \frac{\partial g}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} = \left. \frac{\partial g}{\partial t} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_y g. \quad (2.36)$$

A partir da definição de derivada material da Equação (2.31) e comparando com a Equação (2.13), pode-se rescrever a equação da quantidade de movimento da seguinte forma:

$$\rho \left( \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \mathbf{f} \right) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (2.37)$$

Para expressar a equação da quantidade de movimento em uma descrição Euleriana-Lagrangeana, basta substituir na Equação (2.37) a definição de derivada material apresentada na Equação (2.36), resultando:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_y \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (2.38)$$

A equação da continuidade é independente da movimentação da malha. Dessa forma, a Equação (2.4) permanece válida para análises usando uma descrição ALE.

### 2.2.1 Forma forte do modelo para escoamentos incompressíveis com contornos móveis

Nesta seção é apresentado o problema para escoamentos incompressíveis com contornos móveis, assumindo-se que a velocidade da malha (do domínio de referência) é inteiramente conhecida. Posteriormente será desenvolvido o modelo matemático adotado para a movimentação da malha.

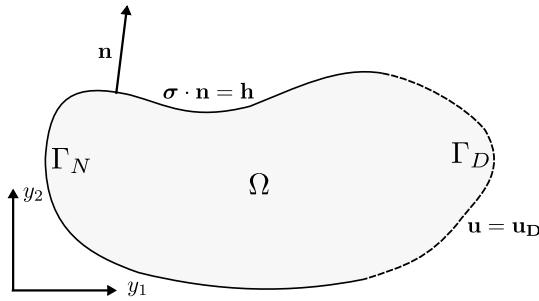
Seja  $\Omega \in \mathbb{R}^{n_{sd}}$ , com  $n_{sd} = 1, 2, 3$  definindo a dimensão do domínio espacial do escoamento com contorno  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ , no instante  $t \in (0, T)$  (ver Figura 5).

Para escoamentos incompressíveis isotérmicos o fluido possui movimento descrito pela equação da quantidade de movimento, (Equação (2.37)) e da continuidade (Equação (2.4)). Para completar a formulação da mecânica dos fluidos, condições de contorno devem ser especificadas. Em geral, em uma dada parte do contorno espacial, condições de contorno essenciais (Dirichlet) ou naturais (Neumann) são aplicadas. Dessa forma, o escoamento é governado pelo seguinte conjunto de equações:

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_y \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} & \text{em } \Omega \\ \nabla_y \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{em } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_D & \text{em } \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{h} & \text{em } \Gamma_N, \end{cases} \quad (2.39)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}$  é obtido por meio da Equação (2.14), sendo  $\Gamma_D$  a porção do contorno sobre a qual são impostas as condições de contorno de Dirichlet, representadas pela distribuição de velocidade prescrita  $\mathbf{u}_D$ , e  $\Gamma_N$  a porção com condições de Neumann, descritas pelas forças de superfície  $\mathbf{h}$ . A variável  $\mathbf{n}$  representa o vetor unitário normal ao contorno  $\Gamma_N$ .

Figura 5 – Domínio para o problema da DFC



Fonte: Elaborada pela autora

### 2.3 Forma fraca e discretização espacial das equações governantes

Tomando-se a forma forte das equações governantes da DFC em descrição ALE, aplica-se o método dos resíduos ponderados para se chegar à forma fraca e proceder com a discretização espacial. Os espaços de dimensão finita das funções tentativa que descrevem a velocidade e a pressão são chamados de  $\mathcal{S}_u$  e  $\mathcal{S}_p$  respectivamente, e definidos como:

$$\mathcal{S}_u = \left\{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u}(\cdot, t) \in (H^1(\Omega))^{n_{sd}}, \mathbf{u} = \mathbf{u}_D \text{ em } \Gamma_D \right\} \quad (2.40)$$

e

$$\mathcal{S}_p = \left\{ p \mid p(\cdot) \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} p \, d\Omega = 0 \text{ se } \Gamma = \Gamma_N \right\}, \quad (2.41)$$

sendo  $(H^1(\Omega))^{n_{sd}}$  o espaço de funções vetoriais com derivadas de quadrado integrável sobre  $\Omega$  e  $L^2(\Omega)$  o espaço de funções escalares de quadrado integrável sobre  $\Omega$ .

Os espaços das funções teste (ou funções ponderadoras) das equações da quantidade de movimento e da continuidade são definidos, respectivamente, por:

$$\mathcal{V}_u = \left\{ \mathbf{w} \mid \mathbf{w}(\cdot) \in (H^1(\Omega))^{n_{sd}}, \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_D \right\}, \quad (2.42)$$

$$\mathcal{V}_p = \mathcal{S}_p. \quad (2.43)$$

Aplicando-se o método dos resíduos ponderados às equações Equação (2.38) e Equação (2.4), integrando-se por partes o termo referente ao tensor de tensões de Cauchy,

empregando-se o teorema da divergência e levando-se em consideração a condição de homogeneidade da função  $\mathbf{w}$  sobre o contorno  $\Gamma_D$ , obtém-se a forma fraca do problema, dada por:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\bar{x}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_y \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) : \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} d\Gamma_N = 0, \quad (2.44)$$

e

$$\int_{\Omega} q (\nabla_y \cdot \mathbf{u}) d\Omega = 0. \quad (2.45)$$

A solução do problema consiste, então, em encontrar  $\mathbf{u} \in \mathcal{S}_u$  e  $p \in \mathcal{S}_p$ , de modo que para todo  $\mathbf{w} \in \mathcal{V}_u$  e para todo  $q \in \mathcal{V}_p$ , Equação (2.44) e Equação (2.45) sejam verdadeiras.

### 2.3.1 Método dos elementos finitos

Antes de prosseguir com a discretização espacial da forma fraca do conjunto de equações da Mecânica dos Fluidos, é fundamental compreender os princípios básicos do Método dos Elementos Finitos. A discretização espacial tanto pelo método dos elementos finitos, como pela técnica de análise isogeométrica (Capítulo 3), baseia-se em tomar um problema contínuo com domínio  $\Omega$  e representá-lo por um domínio  $\Omega^h$  que é dividido em subdomínios  $\Omega^e$ , também chamados de elementos ou células, de forma que:

$$\Omega \approx \Omega^h = \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \Omega^e, \quad (2.46)$$

onde  $n_{el}$  representa o número total de elementos.

Da mesma forma, o contorno de  $\Omega$  é aproximado da seguinte forma:

$$\Gamma \approx \Gamma^h = \bigcup_{b=1}^{n_{eb}} \Gamma^b, \quad (2.47)$$

onde  $n_{eb}$  representa o número de faces ou lados de elementos que formam o contorno.

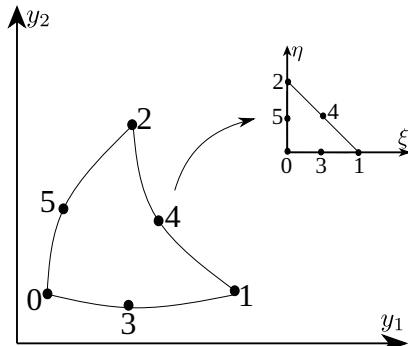
No Método dos Elementos Finitos, cada elemento é definido com auxílio de um conjunto de pontos chamados nós. As variáveis de interesse do problema, que incluem a geometria na abordagem isoparamétrica, são aproximadas pela combinação linear de um número finito de funções associadas aos nós, chamadas funções de forma, multiplicadas por variáveis denominadas parâmetros nodais. As funções de forma utilizadas no Método dos Elementos Finitos tradicionalmente satisfazem a propriedade de partição da unidade,

ou seja, a soma das funções de forma associadas a todos os nós de um elemento resulta em 1 para qualquer ponto dentro do seu domínio. A técnica de elementos finitos pode ser encontrada nos diversos livros disponíveis sobre o assunto, tais como Reddy (2006) e Zienkiewicz, Taylor e Nithiarasu (2005a).

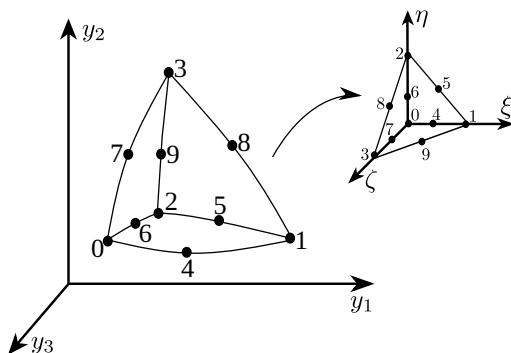
Nesse trabalho, para a mecânica dos fluidos, são utilizadas funções de forma quadráticas do tipo polinômios de Lagrange, sendo empregados elementos isoparamétricos triangulares para o caso 2D e tetraédricos para o caso 3D. Esses elementos são apresentados na Figura 6a e Figura 6b, onde são ilustrados também as coordenadas paramétricas adimensionais adotados para definir as funções de forma.

Figura 6 – Elementos Finitos: representação espacial e paramétrica

(a) Elemento Finito 2d



(b) Elemento Finito 3d



Fonte: Elaborada pela autora

Adotar a abordagem isoparamétrica implica que a geometria do problema é descrita também pela combinação entre funções de forma e as coordenadas nodais da malha, ou seja:

$$\mathbf{y}^h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{a=1}^{n_{\text{nos}}} \mathbf{y}_a N_a(\boldsymbol{\xi}), \quad (2.48)$$

sendo que para uma geometria tridimensional o vetor  $\mathbf{y}$  possui coordenadas  $y_1, y_2$  e  $y_3$ , as quais representam as posições atuais dos pontos que compõem o domínio. O subíndice "a" representa o índice dos nós da malha,  $n_{\text{nos}}$  o número total de nós e  $N$  as funções de forma da discretização.

### 2.3.2 Discretização espacial

As funções tentativa para velocidade e pressão, bem as funções teste, assim com as coordenadas (Equação (2.48)) são dadas pela combinação linear das funções de forma definidas sobre cada subdomínio:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{y}, t) = \sum_{a=1}^{n_{\text{nos}}} \mathbf{u}_a(t) N_a(\boldsymbol{\xi}), \quad (2.49)$$

$$p^h(\mathbf{y}, t) = \sum_{a=1}^{n_{\text{nos}}} p_a(t) N_a(\boldsymbol{\xi}), \quad (2.50)$$

$$\mathbf{w}^h(\mathbf{y}) = \sum_{a=1}^{n_{\text{nos}}} \mathbf{w}_a N_a(\boldsymbol{\xi}) \quad (2.51)$$

e

$$q^h(\mathbf{y}) = \sum_{a=1}^{n_{\text{nos}}} q_a N_a(\boldsymbol{\xi}). \quad (2.52)$$

O problema passa a ser enunciado como: Encontrar  $\mathbf{u}^h \in \mathcal{S}_u^h$  e  $p^h \in \mathcal{S}_p^h$ , de tal modo que  $\forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_u^h$  e  $q^h \in \mathcal{V}_p^h$  a seguinte expressão seja verdadeira:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{w}^h \cdot \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_y \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_N} \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{h}^h d\Gamma_N + \int_{\Omega} q^h (\nabla_y \cdot \mathbf{u}^h) d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (2.53)$$

sendo as variáveis  $\mathbf{w}_a$  e  $q_a$  arbitrárias nas aproximações, enquanto  $\mathbf{u}_a$  e  $p_a$  são as incógnitas a serem determinadas.

No entanto, as formulações obtidas pelo método de Bubnov-Galerkin são conhecidas por apresentarem oscilações espúrias em escoamentos dominados pela convecção. Uma das formas de se lidar com esse problema é a utilização de métodos estabilizados, como o *Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin* (SUPG) (Brooks; Hughes, 1982; Hughes; Tezduyar, 1984). Essa metodologia consiste em adicionar à equação da quantidade de movimento,

o seu resíduo ponderado por  $\tau_{\text{SUPG}} \left( (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_y \mathbf{w}^h \right)$ , onde  $\tau_{\text{SUPG}}$  é um parâmetro calculado para garantir bom condicionamento ao sistema. Do ponto de vista numérico, isso adiciona termos estabilizantes na direção das linhas de corrente, mantendo a formulação consistente por ser baseado na adição do resíduo ponderado.

Para os problemas de escoamentos incompressíveis aqui analisados, deve-se levar em conta que os campos de velocidade e pressão não podem ser aproximados arbitrariamente, podendo levar à ocorrência de oscilações espúrias no campo de pressão e instabilidade na solução. Para evitar isso, podem ser escolhidos elementos Taylor-Hood que obedecem à condição de *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi* (LBB) (Brezzi; Fortin, 1991; Strang; Fix, 2008; Zienkiewicz; Taylor; Nithiarasu, 2005b), ou pode-se recorrer a um método estabilizado.

Para conferir maior flexibilidade ao programa, opta-se pela formulação estabilizada com a técnica *Pressure Stabilization Petrov Galerkin* (PSPG) (Hughes; Franca; Balestra, 1986; Tezduyar *et al.*, 1992a). Essa técnica consiste em adicionar à equação da continuidade, o resíduo da equação da quantidade de movimento ponderado pela função  $\tau_{\text{PSPG}} \left( \frac{\nabla_y q^h}{\rho} \right)$ , onde  $\tau_{\text{PSPG}}$  é um parâmetro calculado para garantir bom condicionamento ao sistema. Essa técnica introduz termo dependente da pressão na equação da continuidade, que é responsável pela estabilização, contornando a condição LBB.

Por fim, para prover maior estabilização em problemas com formação de vórtices, adiciona-se à equação da quantidade de movimento o resíduo da equação da continuidade ponderado por  $\nu_{\text{LSIC}} \rho \left( \nabla_y \cdot \mathbf{w}^h \right)$ , sendo  $\nu_{\text{LSIC}}$  um parâmetro de estabilização. Essa estabilização, denominada *Least Squares on Incompressibility Constraint LSIC* (LSIC), dá origem a um termo do tipo mínimos quadrados que introduz, de forma consistente, maior estabilidade à formulação (Bazilevs; Takizawa; Tezduyar, 2013a; Tezduyar; Osawa, 2000).

Nota-se que a consistência da formulação com SUPG, PSPG e LSIC é garantida, uma vez que são adicionados às equações seus resíduos ponderados.

Assim, o problema da dinâmica dos fluidos na formulação estabilizada, passa a ser a determinação de  $\mathbf{u}^h \in \mathcal{S}_u^h$  e  $p^h \in \mathcal{S}_p^h$ , de tal modo que  $\forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_u^h$  e  $q^h \in \mathcal{V}_p^h$  as seguintes expressões sejam verdadeiras:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{w}^h \cdot \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_y \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_N} \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{h}^h d\Gamma_N + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_e} \tau_{\text{SUPG}} \left( (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_y \mathbf{w}^h \right) \cdot \mathbf{r}_M(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_e} \rho \nu_{\text{LSIC}} \nabla_y \cdot \mathbf{w}^h r_C(\mathbf{u}^h) d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\int_{\Omega} q^h \nabla_y \cdot \mathbf{u}^h \, d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{PSPG}} \left( \frac{\nabla_y q^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_M (\mathbf{u}^h, p^h) \, d\Omega = 0, \quad (2.55)$$

onde  $\mathbf{r}_M$  e  $r_C$  são os resíduos da equação da quantidade de movimento e da equação da continuidade, respectivamente, dados por:

$$\mathbf{r}_M (\mathbf{u}^h, p^h) = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \Big|_{\bar{x}} + (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_y \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{u}^h, p^h), \quad (2.56)$$

$$r_C (\mathbf{u}^h) = \nabla_y \cdot \mathbf{u}^h. \quad (2.57)$$

Visto que existem funções teste separadas para a velocidade e pressão, pode-se definir dois vetores residuais correspondentes a equação da quantidade de movimento ( $\mathbf{R}_M$ ) e a equação da continuidade ( $\mathbf{R}_C$ ). Considerando a arbitrariedade de  $\mathbf{w}_a$  e  $q_a$ , têm-se:

$$\mathbf{R}_M = [(\mathbf{R}_M)_{a,i}], \quad (2.58)$$

$$\mathbf{R}_C = [(\mathbf{R}_C)_a], \quad (2.59)$$

com:

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_M)_{a,i} &= \int_{\Omega} N_a \mathbf{e}_i \cdot \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \Big|_{\bar{x}} + (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_y \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) \, d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} (N_a \mathbf{e}_i) : \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{u}^h, p^h) \, d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma_N} N_a \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{h}^h \, d\Gamma_N + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{SUPG}} ((\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_y N_a \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{r}_M (\mathbf{u}^h, p^h) \, d\Omega \\ &\quad + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega^e} \rho \nu_{\text{LSIC}} (\nabla_y \cdot N_a \mathbf{e}_i) r_C (\mathbf{u}^h) \, d\Omega, \end{aligned} \quad (2.60)$$

e:

$$(\mathbf{R}_C)_a = \int_{\Omega} N_a \nabla_y \cdot \mathbf{u}^h \, d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{PSPG}} \left( \frac{\nabla_y N_a}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_M (\mathbf{u}^h, p^h) \, d\Omega, \quad (2.61)$$

com  $i = 1, 2$  para problemas 2D e  $i = 1, 3$  para problemas 3D.

Considerando  $\dot{\mathbf{U}}$ ,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{p}$  os vetores nodais dos graus de liberdade respectivos a velocidade, aceleração e pressão, pode-se escrever a forma semidiscreta do problema da DFC como: Encontrar  $\dot{\mathbf{U}}$ ,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{p}$  de maneira que

$$\mathbf{R}_M(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}, \quad (2.62)$$

e

$$\mathbf{R}_C(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}. \quad (2.63)$$

### 2.3.3 Parâmetros de estabilização

A definição adequada dos parâmetros de estabilização desempenha papel fundamental no desempenho do método e na sua estabilidade numérica.

Desde os primeiros desenvolvimentos relacionados aos métodos estabilizados houve um amadurecimento das expressões de definição dos parâmetros  $\tau$ , as quais passam a levar em consideração formulações mais robustas, sendo adaptadas tanto para elementos de ordem elevadas, quanto para malhas mais complexas, como as usadas em análise isogeométrica.

Considerando que neste trabalho dois tipos de aproximações espaciais são utilizadas, uma baseada no FEM e outra baseada em AIG, adotam-se os parâmetros propostos mais recentemente por Otoguro, Takizawa e Tezduyar (2020), Takizawa, Tezduyar e Otoguro (2018) e Takizawa, Ueda e Tezduyar (2019), que são adequados para ambas aproximações.

Para essa opção é necessário definir-se o tensor métrico do elemento no espaço. Com essa finalidade, descreve-se inicialmente a matriz Jacobiana  $\mathbf{Q}$ , como:

$$\mathbf{Q} = \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right), \quad (2.64)$$

com  $\boldsymbol{\xi}$  representando as coordenadas do espaço paramétrico, com componentes  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$ .

Para que a ordem polinomial seja levada em consideração, ou, outros fatores como a dimensão do elemento no espaço paramétrico, aplica-se à  $\mathbf{Q}$ , uma matriz de transformação ( $\mathbf{D}$ ), conforme a seguinte expressão:

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}\mathbf{D}^{-1}. \quad (2.65)$$

O comprimento direcional do elemento fica definido como:

$$h_{\text{RQD}} = 2 (\mathbf{r} \mathbf{r} : \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.66)$$

o fator 2 vem de um típico espaço paramétrico, que é um quadrado ou um cubo com lado de comprimento 2.  $\mathbf{r}$  é o vetor unitário na direção do gradiente da intensidade da velocidade e  $\mathbf{G}$  o tensor métrico do elemento, os quais são representados respectivamente como:

$$\mathbf{r} = \frac{\nabla_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|}{\|\nabla_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\|} \quad (2.67)$$

e

$$\mathbf{G} = \hat{\mathbf{Q}}^{-T} \cdot \hat{\mathbf{Q}}^{-1}. \quad (2.68)$$

Para elementos finitos com funções de forma polinomiais de Lagrange de ordens  $p_\xi$ ,  $p_\eta$  e  $p_\zeta$  nas direções paramétricas  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$ , respectivamente, com  $\xi, \eta, \zeta \in [-1, 1]$ , a matriz  $\mathbf{D}$  é definida por:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} p_\xi & 0 & 0 \\ 0 & p_\eta & 0 \\ 0 & 0 & p_\zeta \end{bmatrix}. \quad (2.69)$$

Em geral, se escolhe o espaço paramétrico baseado em razões como eficiência da integração numérica ou conveniência de implementação. A maioria das metodologias utilizadas para definir o comprimento do elemento não levam este fator em consideração. Para essa finalidade, em Takizawa, Ueda e Tezduyar (2019), apresenta-se a matriz de transformação ( $\mathbf{D}$ ) como:

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\xi}}}{\partial \boldsymbol{\xi}}, \quad (2.70)$$

com  $\hat{\boldsymbol{\xi}}$  chamado de espaço paramétrico de preferência.

Para elementos simplex, buscando encontrar uma expressão que leve a um comprimento de elemento que não possua variação em função da ordenação dos nós, os autores introduziram um espaço paramétrico preferido que consiste em um elemento simplex regular com distância entre vértices de 2, e chegaram a seguinte expressão para  $\mathbf{D}$  quando  $n_{sd} = 2$ :

$$\mathbf{D} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} + 1 & \sqrt{3} - 1 \\ \sqrt{3} - 1 & \sqrt{3} + 1 \end{bmatrix}, \quad (2.71)$$

e para  $n_{sd} = 3$ :

$$\mathbf{D} = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}. \quad (2.72)$$

A definição da matriz  $\mathbf{D}$  para elementos isogeométricos será descrita na subseção 3.4.1.

Além disso, nessa metodologia, o comprimento do elemento é limitado pelos mínimos e máximos valores representados abaixo:

$$h_{min} \equiv 2 \min_r \left( (\mathbf{r} : \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}} \right), \quad (2.73)$$

$$h_{max} \equiv 2 \max_r \left( (\mathbf{r} : \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}} \right), \quad (2.74)$$

que podem ser reescritos como:

$$h_{min} = 2 (\lambda_{max} \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.75)$$

$$h_{max} = 2 (\lambda_{min} \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.76)$$

onde  $\lambda_{max}$  e  $\lambda_{min}$  representam os máximos e mínimos autovalores da matriz  $\mathbf{G}$ .

Por fim, os parâmetros de estabilização são escritos como:

$$\tau_{SUPG} = \tau_{PSPG} = \left( \frac{1}{\tau_{SUGN1}^2} + \frac{1}{\tau_{SUGN2}^2} + \frac{1}{\tau_{SUGN3}^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.77)$$

$$\nu_{LSIC} = \tau_{SUPG} \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|^2, \quad (2.78)$$

onde:

$$\tau_{SUGN1}^{-2} = (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) : \mathbf{G}, \quad (2.79)$$

$$\tau_{\text{SUGN}2} = \frac{\Delta t}{2}, \quad (2.80)$$

e

$$\tau_{\text{SUGN}3}^{-1} = \nu \left( \mathbf{r}_{reg} \mathbf{r}_{reg} : \mathbf{G} + \left( 1 - \mathbf{r}_{reg}^2 \right) 4 h_{min}^{-2} \right), \quad (2.81)$$

sendo  $\mathbf{r}_{reg}$  definido como:

$$\mathbf{r}_{reg} = \frac{\nabla_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|}{\|\nabla_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\| + \varepsilon (\|\nabla_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\|)_0}, \quad (2.82)$$

com  $\varepsilon$  uma constante pequena e  $(\|\nabla_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\|)_0$  um valor de referência. Os termos  $\tau_{\text{SUGN}1}$ ,  $\tau_{\text{SUGN}2}$  e  $\tau_{\text{SUGN}3}$  são parâmetros correspondentes aos termos convectivos, iniciais e viscosos, respectivamente.

## 2.4 Integração temporal e solução numérica

Para a integração temporal das equações governantes, utiliza-se o método  $\alpha$ -generalizado. Esse método foi proposto inicialmente por Chung e Hulbert (1993) no contexto da mecânica das estruturas, e foi estendido para o contexto da dinâmica dos fluidos computacional por Jansen, Whiting e Hulbert (2000).

Considerando que o tempo da análise do problema é definido por um intervalo temporal de  $[0, T]$ , o qual é particionado em  $npt$  subintervalos  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ , com  $t_n$  e  $t_{n+1}$  os instantes anterior e atual, respectivamente. A solução do problema consiste em: conhecidos os valores nodais de aceleração, velocidade e pressão ( $\dot{\mathbf{U}}$ ,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{p}$ ) no instante  $n$ , encontrar a solução no instante  $n + 1$  de forma que:

$$\mathbf{R}_M(\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}, \mathbf{U}_{n+\alpha_f}, \mathbf{p}_{n+1}) = \mathbf{0}, \quad (2.83)$$

$$\mathbf{R}_C(\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}, \mathbf{U}_{n+\alpha_f}, \mathbf{p}_{n+1}) = \mathbf{0}, \quad (2.84)$$

com:

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m} = \dot{\mathbf{U}}_n + \alpha_m (\dot{\mathbf{U}}_{n+1} - \dot{\mathbf{U}}_n), \quad (2.85)$$

$$\mathbf{U}_{n+\alpha_f} = \mathbf{U}_n + \alpha_f (\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n), \quad (2.86)$$

sendo  $\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}$  e  $\mathbf{U}_{n+\alpha_f}$  valores intermediários entre  $t_n$  e  $t_{n+1}$  do vetor aceleração e velocidade. A relação entre os valores nodais de aceleração e velocidade são calculados de acordo com fórmula de Newmark (ver, por exemplo, (Hughes, 1976)):

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta t \left( (1 - \gamma) \dot{\mathbf{U}}_n + \gamma \dot{\mathbf{U}}_{n+1} \right), \quad (2.87)$$

onde  $\gamma$  é um parâmetro do método.

Os parâmetros que definem o instante intermediário, alteram as características de estabilidade e precisão ao método. Segundo Jansen, Whiting e Hulbert (2000), precisão de segunda ordem é garantida, para problemas lineares, se:

$$\gamma = 1/2 + \alpha_m - \alpha_f, \quad (2.88)$$

enquanto que a estabilidade do problema é incondicional com:

$$\alpha_m \geq \alpha_f \geq 1/2. \quad (2.89)$$

Para proporcionar a precisão de segunda-ordem de convergência, estabilidade incondicional da solução, e permitir dissipação ótima de altas frequências, calcula-se o parâmetro  $\gamma$  de acordo com Equação (2.88) e  $\alpha_m$ ,  $\alpha_f$ , através de (Hughes, 2000):

$$\alpha_m = \frac{1}{2} \left( \frac{3 - \rho_\infty}{1 + \rho_\infty} \right) \quad (2.90)$$

e

$$\alpha_f = \frac{1}{1 + \rho_\infty}. \quad (2.91)$$

O parâmetro  $\rho_\infty$  é o raio espectral da matriz de amplificação quando  $\Delta t \rightarrow \infty$ , devendo estar contido no intervalo de  $[0, 1]$ . Para  $\rho_\infty = 0$  a dissipação de altas frequências é máxima e para  $\rho_\infty = 1$  não há introdução de difusão numérica ao método.

Para a solução do sistema de equações não lineares compostas pela Equação (2.83) e Equação (2.84) utiliza-se o método de Newton-Raphson. O método pode ser separado em duas etapas, uma etapa preditiva e outra iterativa corretiva (Bazilevs; Takizawa; Tezduyar, 2013a).

Na etapa preditiva, conhecida a solução em um passo de tempo  $n$ , prediz-se a solução em  $n + 1$  com as seguintes equações:

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \dot{\mathbf{U}}_n, \quad (2.92)$$

$$\mathbf{U}_{n+1}^0 = \mathbf{U}_n, \quad (2.93)$$

$$\mathbf{p}_{n+1}^0 = \mathbf{p}_n, \quad (2.94)$$

onde o índice 0 representa a iteração de número zero.

Na etapa iterativa corretiva, itera-se sobre a Equação (2.83) e Equação (2.84) até que elas sejam satisfeitas, considerando uma tolerância prescrita, ou até que se alcance uma quantidade máxima de iterações pré-estabelecida. Essa etapa é composta por três fases. A fase 1 consiste em determinar os valores no instante intermediário para as variáveis nodais na iteração  $i$ :

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}^i = \dot{\mathbf{U}}_n + \alpha_m (\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i - \dot{\mathbf{U}}_n), \quad (2.95)$$

$$\mathbf{U}_{n+\alpha_f}^i = \mathbf{U}_n + \alpha_f (\mathbf{U}_{n+1}^i - \mathbf{U}_n), \quad (2.96)$$

$$\mathbf{p}_{n+1}^i = \mathbf{p}_{n+1}^i. \quad (2.97)$$

Na fase 2, com os valores intermediários das variáveis nodais resolve-se o sistema linear resultante da linearização da Equação (2.83) e Equação (2.84) com respeito às variáveis de interesse  $\mathbf{p}_{n+1}$  e  $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$ :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}_M}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{n+1}} \right|_i \Delta \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i + \left. \frac{\partial \mathbf{R}_M}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} \right|_i \Delta \mathbf{p}_{n+1}^i = -\mathbf{R}_M^i, \quad (2.98)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}_C}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{n+1}} \right|_i \Delta \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i + \left. \frac{\partial \mathbf{R}_C}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} \right|_i \Delta \mathbf{p}_{n+1}^i = -\mathbf{R}_C^i. \quad (2.99)$$

Por fim, na fase 3 atualiza-se a solução através das seguintes relações:

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^{i+1} = \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i + \Delta \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i, \quad (2.100)$$

$$\mathbf{U}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{U}_{n+1}^i + \gamma \Delta t \Delta \mathbf{U}_{n+1}^i, \quad (2.101)$$

$$\mathbf{p}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{p}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{p}_{n+1}^i. \quad (2.102)$$

Na utilização do método  $\alpha$ -generalizado as integrais da Equação (2.83) e Equação (2.84) são avaliadas no instante  $t = t_{n+\alpha_f}$ , de forma que:

$$\int_{\Omega} (\cdot) d\Omega = \int_{\Omega_{t_{n+\alpha_f}}} (\cdot) d\Omega, \quad (2.103)$$

e, por consequência:

$$\Omega_{t_{n+\alpha_f}} = \left\{ \mathbf{y}^h \mid \mathbf{y}^h(\bar{\mathbf{x}}^h, t_{(n+\alpha_f)}) = \alpha_f \mathbf{y}^h(\bar{\mathbf{x}}^h, t_{n+1}) + (1 - \alpha_f) \mathbf{y}^h(\bar{\mathbf{x}}^h, t_n) \right\}. \quad (2.104)$$

Finalmente, é possível estabelecer o algoritmo para a solução dos problemas de escoamentos incompressíveis com a formulação estabilizada do MEF, o qual é apresentado abaixo (Algoritmo. 1).

---

#### **Algoritmo 1** Algoritmo para problemas de dinâmica dos fluidos computacional

---

- 1: **para** o passo de tempo 0 até  $npt - 1$  **faça**
- 2:      $i = 0$ ;
- 3:     Predição da solução: aplicação da Equação (2.92), Equação (2.93) e Equação (2.94);
- 4:     **enquanto** ( $\epsilon <$  tolerância) **faça**
- 5:          $i = i + 1$ ;
- 6:         Interpolação das variáveis do problema: aplicação da Equação (2.95), Equação (2.96) e Equação (2.97);
- 7:         Cálculo do incremento nas variáveis do problema:  $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$  e  $\mathbf{p}_{n+1}$  de acordo com a Equação (2.98) e Equação (2.99);
- 8:         Atualização da solução: calculadas de acordo com a Equação (2.100), Equação (2.101) e Equação (2.102).
- 9:         Cálculo do erro:

$$\epsilon = \left\| \mathbf{R}_M^i \right\|_{L^2} \quad (2.105)$$

- 10:         **fim enquanto**
  - 11:         Atualização das variáveis do passo anterior;
  - 12:         **fim para**
- 

## 2.5 Verificação e aplicações

Para a verificação do código baseados no método dos elementos finitos são simulados 2 exemplos amplamente estudados na literatura: escoamento sobre um cilindro e escoamento sobre uma cavidade quadrada.

### 2.5.1 Escoamento sobre um cilindro

Este exemplo considera um escoamento viscoso incompressível sobre um cilindro rígido com diferentes números de Reynolds,  $Re = 40$ ,  $Re = 100$  e  $Re = 1000$ , calculados de acordo com:

$$\text{Re} = \frac{\rho L \|\mathbf{u}_\infty\|}{\mu} = \frac{L \|\mathbf{u}_\infty\|}{\nu}, \quad (2.106)$$

onde a dimensão característica do problema  $L$  é adotada como sendo o diâmetro do cilindro, e  $\nu$  é a viscosidade cinemática do fluido. Tomam-se como parâmetros de análise os coeficientes aerodinâmicos medidos ao longo do tempo, e avalia-se se o modelo é capaz de reproduzir os fenômenos relacionados à formação e desprendimento de vórtices característicos desse problema.

A geometria e as condições de contorno são apresentadas na Figura 7a, tratando-se de um domínio retangular, parametrizado em função do diâmetro do cilindro, com um perfil constante de velocidade na entrada e condição de parede lisa nos limites superior e inferior. No contorno denominado como saída, aplica-se condição de Neumann nula. Na Figura 7b é apresentada a malha utilizada para esse problema, composta por 9122 elementos finitos triangulares de aproximação quadrática e 18508 nós. O problema foi simulado para um velocidade de entrada  $u_\infty = 1,0$ , densidade  $\rho = 1,0$ , passo de tempo  $\Delta t = 0,05$ , e parâmetro do integrador temporal  $\rho_\infty = 0,5$ , variando-se a viscosidade em função do número de Reynolds.

Para o cálculo dos coeficientes aerodinâmicos é necessário definir-se primeiramente as forças de arrasto ( $F_D$ ) e de sustentação ( $F_L$ ), as quais resultam das tensões de cisalhamento e da pressão, sendo calculadas pelas seguintes expressões:

$$F_D = \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\sigma}_{1j} n_j d\Gamma_c, \quad (2.107)$$

e

$$F_L = \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\sigma}_{2j} n_j d\Gamma_c, \quad (2.108)$$

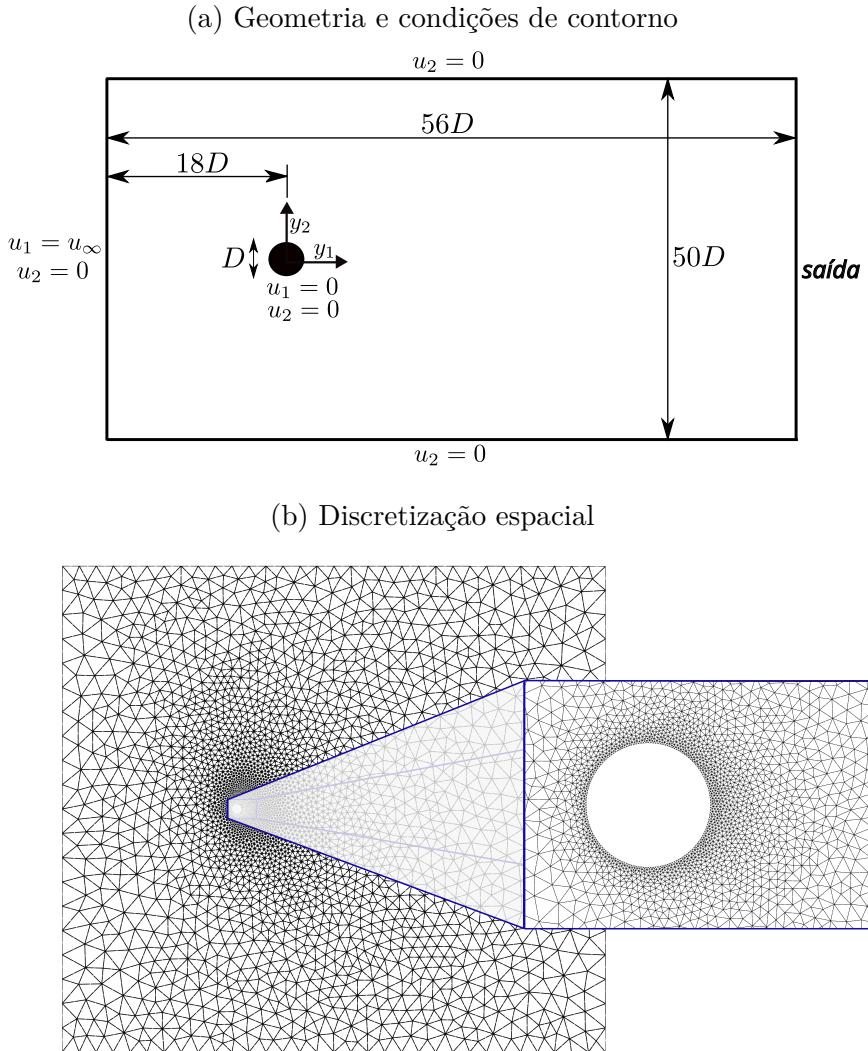
onde  $\Gamma_c$  representa o contorno do cilindro e  $n_j$  é a componente  $j$  do vetor unitário normal a  $\Gamma_c$ , com  $j = 1, 2$ . Os coeficientes de arrasto e sustentação são definidos respectivamente por:

$$C_D = \frac{F_D}{0,5\rho \|\mathbf{u}_\infty\|^2 L}, \quad (2.109)$$

e

$$C_L = \frac{F_L}{0,5\rho \|\mathbf{u}_\infty\|^2 L}. \quad (2.110)$$

Figura 7 – Cilindro: Geometria, condições de contorno e malha de elementos finitos.



Fonte: Elaborada pela autora

Para este problema, a frequência do desprendimento de vórtices que ocorre a partir de determinado número de Reynolds pode ser determinada a partir do número adimensional de Strouhal (St), dado por:

$$St = \frac{f_v L}{\|\mathbf{u}_\infty\|}, \quad (2.111)$$

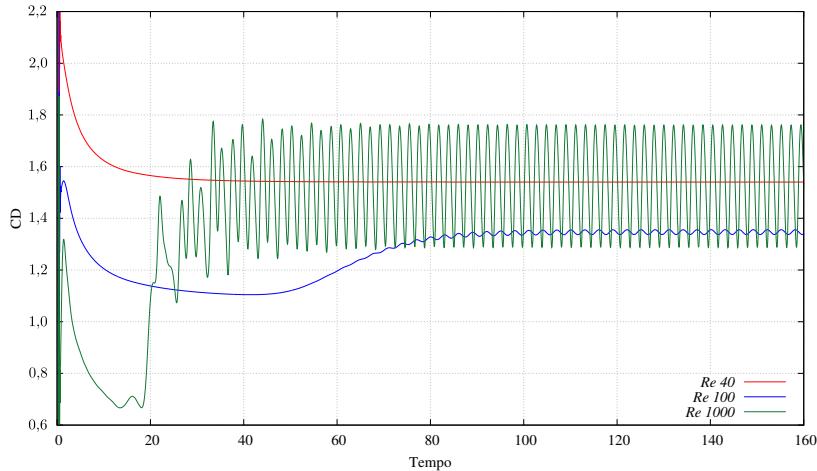
com  $f_v$  sendo a frequência de desprendimento dos vórtices.

Como pode-se observar na Figura 8, para  $Re = 40$  os coeficientes de arrasto atinge um valor constante, quando o escoamento fica estacionário, permanecendo assim até o

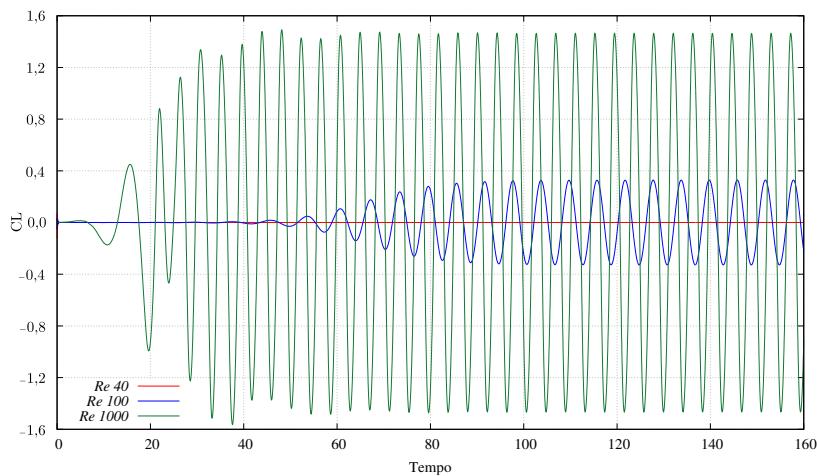
final da análise, enquanto o coeficiente de sustentação permanece nulo. Isso é o que se espera, visto que para Reynolds entre 5 à 50, deve-se observar a formação de dois vórtices simétricos e estacionários na região à jusante do cilindro (Lienhard, 1966). Com o aumento do número de Reynolds o par de vórtices é quebrado gerando a chamada esteira de von Kármán, com formação de vórtices de maneira alternada entre as regiões superior e inferior do cilindro, levando ao comportamento oscilatório observado nos gráficos para  $Re = 100$  e  $Re = 1000$ . Os valores do coeficiente de Strouhal, para  $Re = 100$  e  $Re = 1000$ , assim como os valores médios obtidos para o coeficiente de arrasto ( $C_{Dmed}$ ) para  $Re = 40$ ,  $Re = 100$  e  $Re = 1000$  são apresentados na Tabela 1, onde são comparados com os valores de referência provenientes do trabalho de Wanderley e Levi (2002).

Figura 8 – Cilindro: Coeficientes aerodinâmicos

(a) Coeficiente de arrasto  $C_D$



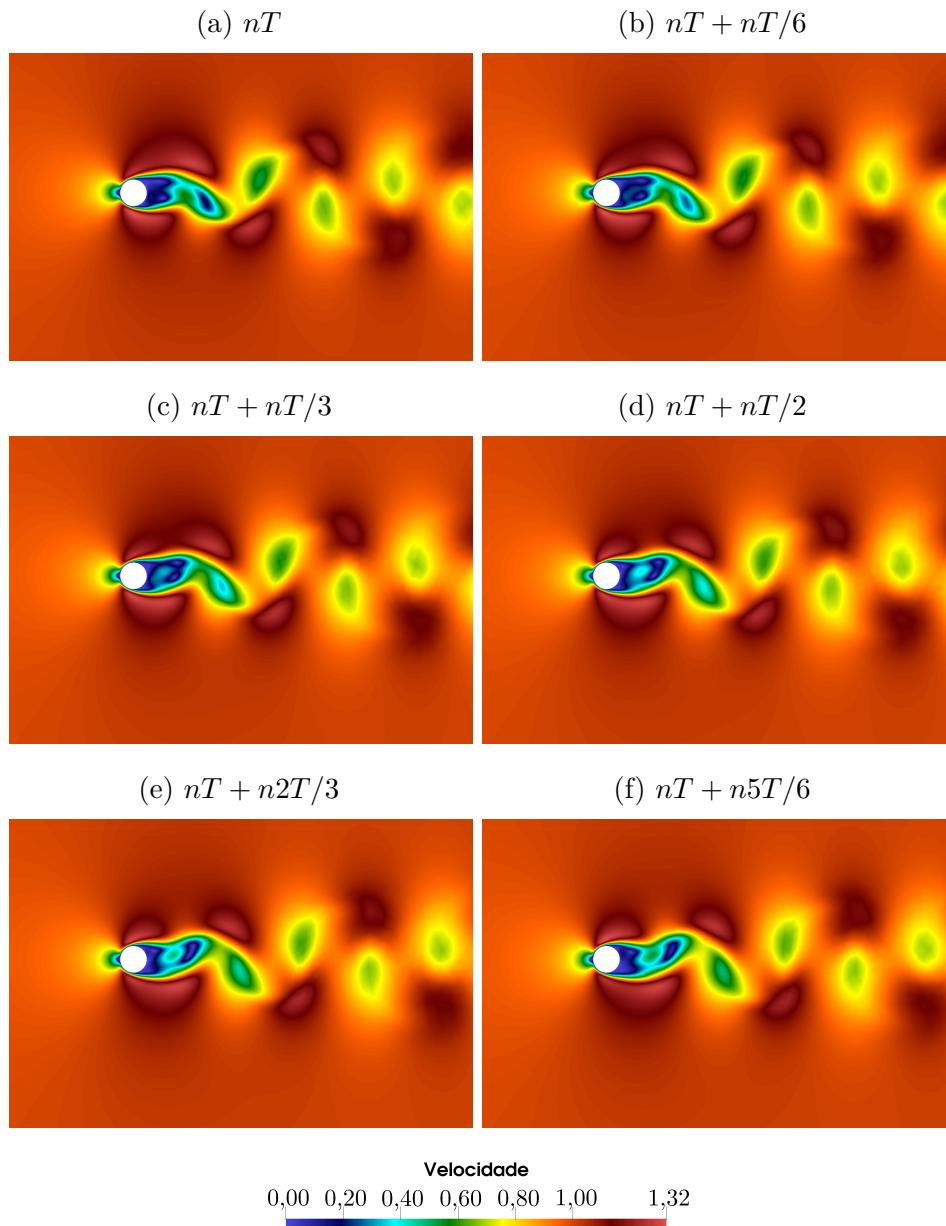
(b) Coeficiente de sustentação  $C_L$



Fonte: Elaborada pela autora

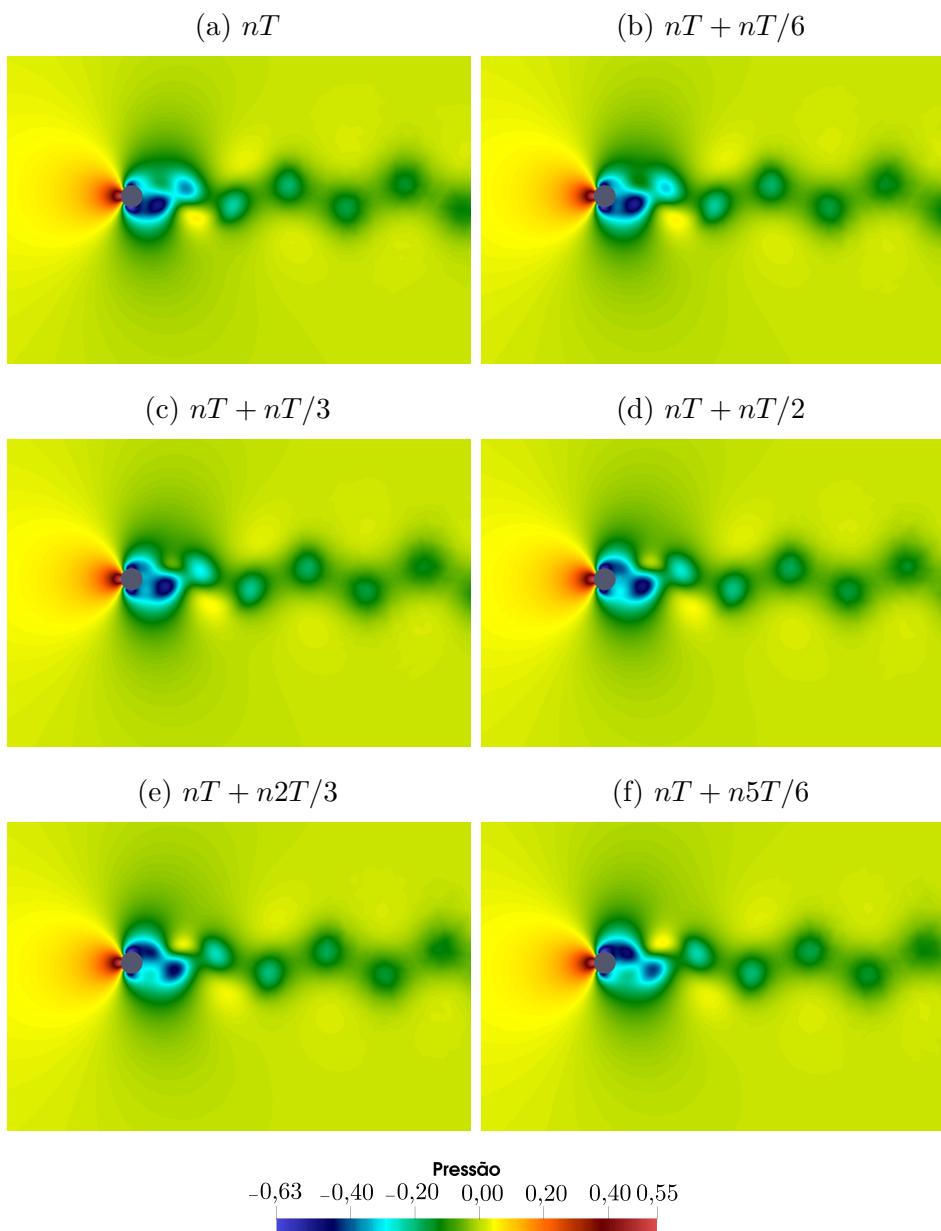
Nas Figura 9 e Figura 10 são apresentados os campos de velocidade e pressão ao longo de um ciclo de desprendimento de vórtices  $nT$  para  $Re = 100$ . Pode-se notar nessas imagens, a formação e o desprendimento de vórtices na esteira de Von Kármán.

Figura 9 – Cilindro: Campos de velocidade para  $\text{Re} = 100$



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 10 – Cilindro: Campos de pressão para  $\text{Re} = 100$



Fonte: Elaborada pela autora

Tabela 1 – Comparaçāo entre valores obtidos e valores de referēcia

$Re$	$C_{Dmed}$		$St$	
	Presente estudo	Referēcia	Presente estudo	Referēcia
40	1,54	1,59	-	-
100	1,35	1,33	0,166	0,163
1000	1,52	1,51	0,238	0,235

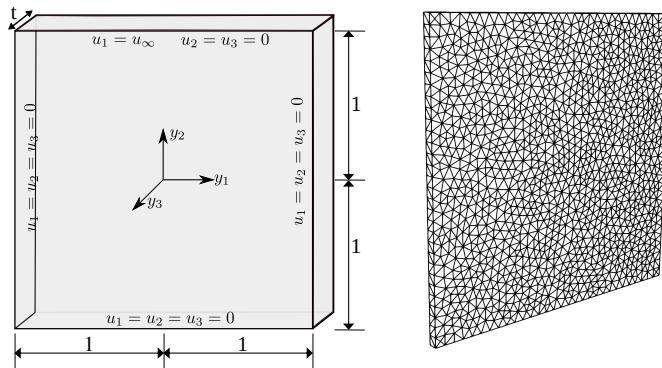
Fonte: Elaborada pela autora.

### 2.5.2 Escoamento sobre cavidade com discretização 3D

Este exemplo considera uma cavidade hexaédrica com velocidade prescrita horizontal  $u_\infty$  prescrita em sua face superior. A geometria do problema bem como as condições de contorno são apresentadas na Figura 11a. As paredes da cavidade são rígidas, com paredes laterais e do fundo com condição de aderência, e adicionalmente, condição de simetria na direção  $y_3$ . A cavidade possui na direção  $y_3$  uma espessura de 0,03. A discretização espacial em elementos finitos utilizada é apresentada na Figura 11b, a qual consiste em 7252 elementos tetraédricos quadráticos e 14727 nós. Embora este problema possa ser representado por uma discretização bidimensional, adota-se uma discretização 3D para um primeiro teste das implementações dos elementos finitos tetraédricos.

Figura 11 – Cavidade quadrada: Geometria, condições de contorno e malha de elementos finitos

(a) Geometria e condições de contorno      (b) Discretização espacial.



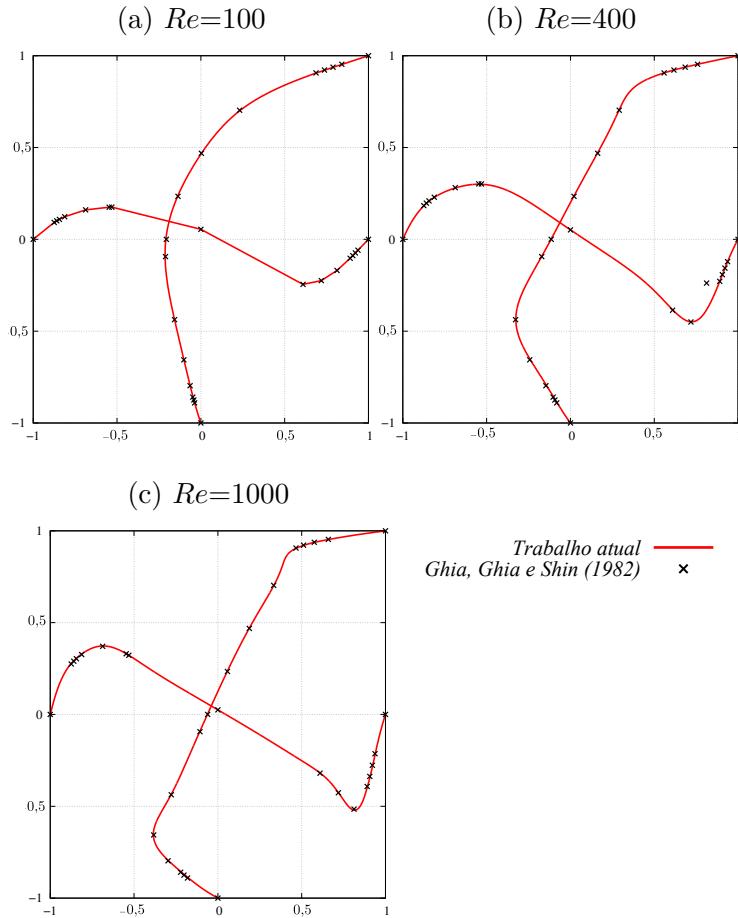
Fonte: Elaborada pela autora

O problema é estudado para 3 diferentes números de Reynolds (100, 400 e 1000), calculados de acordo com Equação (2.106), considerando  $L$  como sendo o comprimento do lado da cavidade. O problema foi simulado para uma velocidade na parede superior de  $u_\infty = 1,0$ ,  $\rho = 1,0$ ,  $\Delta t = 0,05$ , e  $\rho_\infty = 0$ , sendo a viscosidade do fluido variada de

modo a alterar o número de Reynolds. A simulação foi mantida até que se atingiu o estado estacionário de escoamento.

Os perfis de velocidade adimensionalizada ( $\mathbf{u}/\mathbf{u}_\infty$ ) ao longo de duas linhas centrais nas direções  $y_1$  e  $y_2$  posicionadas no centro da espessura da direção  $y_3$ , são apresentados na Figura 12 e comparados com a referência de Ghia, Ghia e Shin (1982).

Figura 12 – Cavidade quadrada: Perfis de velocidade adimensionalizados nas direções  $y_1$  e  $y_2$

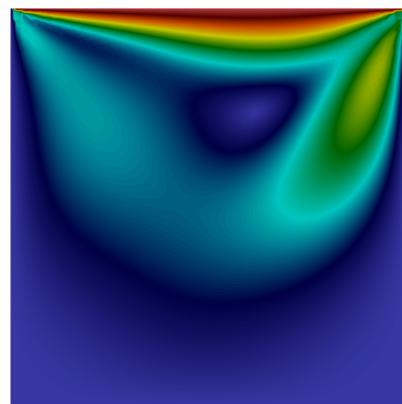


Fonte: Elaborada pela autora

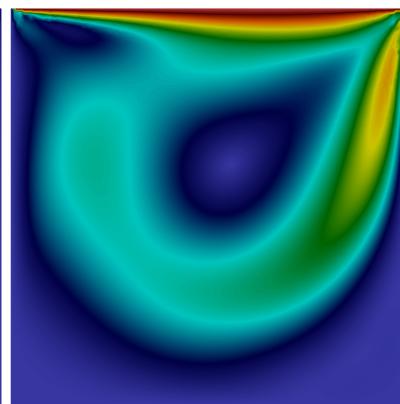
Os campos de velocidade e de pressão para a situação estacionária são apresentados na Figura 13 e Figura 14, respectivamente. Ressalta-se que para a simulação, por se tratar de um problema com todos os contornos com condição de Dirichlet impostos, a pressão torna-se indefinida. Por esse motivo, prescreveu-se pressão  $p = p_{ref} = 0,0$  no canto superior direito da cavidade.

Figura 13 – Cavidade quadrada: Campos de velocidade - plano  $y_1y_2$

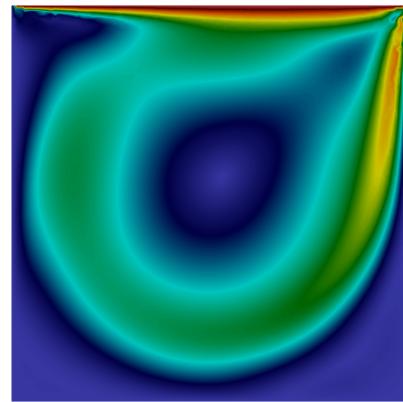
(a)  $Re=100$



(b)  $Re=400$

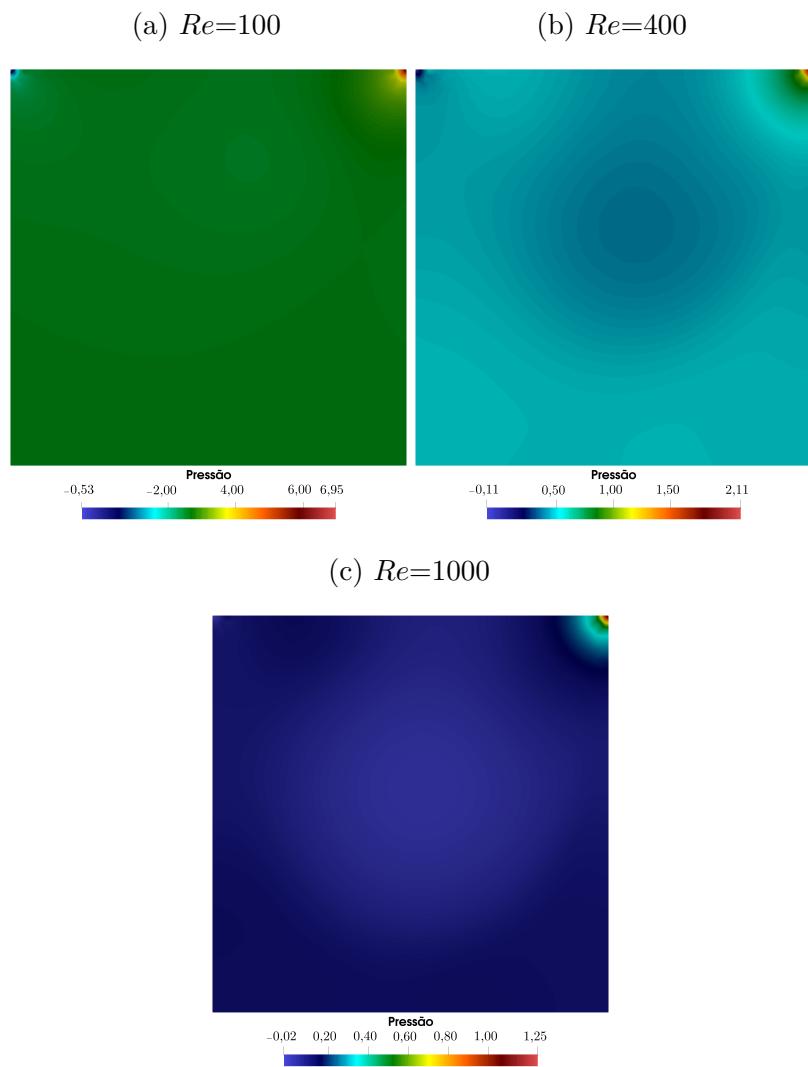


(c)  $Re=1000$



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 14 – Cavidade quadrada: Campos de pressão - plano  $y_1y_2$



Fonte: Elaborada pela autora

### 3 ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA APLICADA À DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL

A Análise Isogeométrica (AIG) é uma técnica numérica introduzida por Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005) para obtenção de soluções aproximadas de equações diferenciais. O método pode ser entendido como uma generalização do método dos elementos finitos clássico a partir do uso de funções base especiais.

Na Análise isogeométrica, as funções base escolhidas na discretização da geometria do problema e de suas variáveis são aquelas utilizadas nos sistemas CAD (*Computed Aided Design*), sendo as funções do tipo NURBS (*Non-Uniform Rational B-Splines*) as mais aplicadas (ver, por exemplo, Piegl e Tiller (1996)). O grande impulso para o desenvolvimento da técnica foi proporcionar a integração entre a engenharia de projeto, com modelos baseados em CAD, e as simulações numéricas, com modelos principalmente baseados no MEF, de forma que ambas trabalhem com somente um modelo geométrico.

A AIG apresenta vantagens significativas, uma vez que permite a representação exata de diversas geometrias comuns, como cônicas, quádricas, círculos, cilindros, esferas e elipsóides, além de dispor de algoritmos eficientes e estáveis para a geração de objetos NURBS. As funções NURBS, em particular, possuem propriedades matemáticas que as tornam adequadas para aplicações numéricas, destacando-se a elevada suavidade, a alta capacidade de aproximação e a possibilidade de refinamento local por meio da inserção de *knots*, os quais correspondem às coordenadas do espaço paramétrico nas quais as funções são definidas.

Este capítulo apresenta uma breve introdução à análise isogeométrica e sua relação com o método dos elementos finitos clássico. Inicialmente, são descritas as funções base *B-splines*, suas principais características e a construção de geometrias associadas. Em seguida, introduzem-se as funções NURBS, destacando sua formulação e aplicações geométricas. A análise isogeométrica é então introduzida no contexto da dinâmica dos fluidos computacional, enfatizando suas particularidades quanto à discretização das variáveis e da geometria, aos métodos de integração numérica e à determinação dos parâmetros de estabilização. Por fim, são apresentados exemplos numéricos que validam a formulação proposta. As principais referências bibliográficas que fundamentam esta construção são Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005) e Piegl e Tiller (1996).

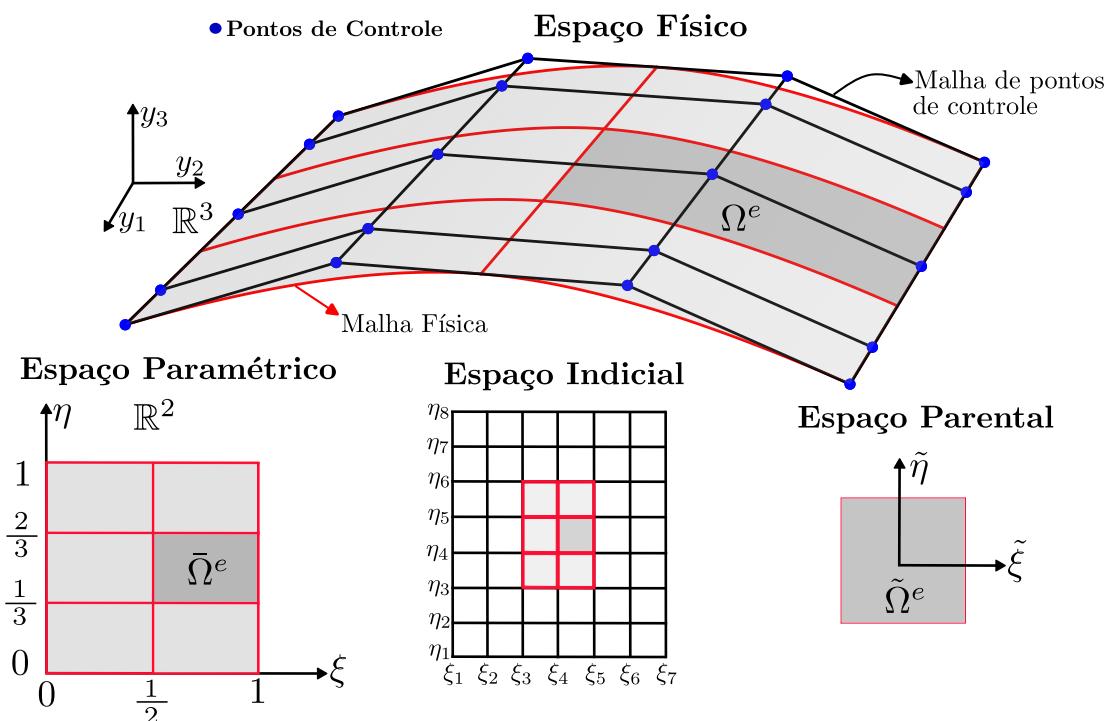
#### 3.1 Representação geométrica com B-splines e NURBS

No contexto do MEF isoparamétrico, a formulação é construída a partir da definição de uma malha e de seus elementos, os quais são representados tanto no espaço físico quanto no espaço de coordenadas naturais adimensionais. Cada elemento é caracterizado pelas

coordenadas de seus nós, sendo os graus de liberdade do problema associados aos valores das funções de forma interpolados nesses pontos nodais.

Dentro da AIG têm-se duas noções de malha: uma malha de pontos de controle e uma malha física. A malha de pontos de controle é muito semelhante a uma malha de elementos finitos, entretanto, ela não define a geometria, ela é apenas um esqueleto que controla o formato da geometria (ver Figura 15), visto que as funções de forma baseadas em *B-Splines* não são necessariamente interpolatórias. Dessa forma, os graus de liberdade do problema são associados aos pontos de controle, cujas posições não coincidem, necessariamente, com a geometria representada.

Figura 15 – NURBS: espaço físico, espaço paramétrico, espaço indicial e espaço parental



Fonte: Elaborada pela autora

A malha física representa a geometria discretizada. Dentro da malha física podem ser definidos dois tipos de elementos, um macro-elemento, denominado de *patch*, e o *knot span*, que é o equivalente a um elemento finito e será denominado como célula ao longo desse texto. Cada *patch* é composto por um conjunto de células. Muitas geometrias simples podem ser discretizadas apenas com um *patch*, entretanto, a depender da complexidade da geometria ou de requisitos de parametrização, se torna necessário o uso de um conjunto de *patches*. As células são representações geométricas de linhas, superfícies e volumes nos espaços físicos unidimensional, bidimensional e tridimensional respectivamente.

Cada *patch* e suas respectivas células possuem uma representação no espaço paramé-

trico (Figura 15), que é o espaço onde as funções base são definidas. O espaço paramétrico, para os casos de funções univariadas, é definido por um *knot vector*, aqui denominado de vetor de *knots*, que é um conjunto de *knots* ou coordenadas paramétricas. As células são constituídas pelo espaço entre dois *knots* consecutivos. O espaço onde se representam todas as células, inclusive as nulas (quando mais de um *knot* ocupa a mesma posição), é chamado de espaço indicial.

Por fim, na análise isogeométrica conta-se ainda com o espaço parental, que é o espaço de integração numérica das funções base, em geral, definido de forma adimensional  $[-1, 1]$  dentro de uma célula. Na Figura 15 pode-se observar os espaços relatados para uma superfície 3D construída por funções base quadráticas e apenas um *patch*.

### 3.2 *B-Splines*

Para a construção de geometriaa NURBS, que serão empregadas neste trabalhos, é fundamental compreender as funções base *B-splines* e suas particularidades. Essas funções servem como o ponto de partida para a definição de curvas, superfícies e sólidos NURBS, sendo essenciais para o entendimento da flexibilidade e controle geométrico oferecido por esse modelo. As *B-splines* são funções construídas através de um vetor de coordenadas paramétricas (vetor de *knots*) e que dependem de um conjunto de pontos de controle, sendo esses elementos responsáveis por estabelecer a forma geométrica e o grau de continuidade da curva ou superfície.

#### 3.2.1 Vtor de *knots*

As funções *B-Splines*, utilizadas na construção das NURBS, são definidas em um espaço paramétrico que é comum a um conjunto de células ou *patch*. O espaço paramétrico unidimensional é construído através de um vetor de *knots*, que consiste em um conjunto não decrescente de coordenadas paramétricas, definido como:  $\Xi = [\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n+p+1}]$ , sendo que  $\xi_i \in \mathbb{R}$  e representa a i-ésima coordenada paramétrica com  $i = 0, 1, \dots, n + p + 1$ , e  $p$  corresponde ao grau polinomial das funções. O parâmetro  $n$  equivale ao índice da última função base nesta direção paramétrica, sendo o conjunto de funções base indexado de 0 a  $n$ , totalizando  $n + 1$  funções. Os *knot spans*, ou intervalo entre *knots*, definem células no espaço paramétrico, cujos contornos são mapeados pelas funções base para formar a malha no espaço físico.

O vtor de *knots* é classificado como uniforme quando as coordenadas paramétricas são igualmente espaçadas, e como não-uniformes, caso contrário. A multiplicidade de um *knot* pode ser superior a um, influenciando diretamente na continuidade e na forma das funções base, conforme será visto posteriormente. Os vetores de *knots* conhecidos como abertos, são frequentemente utilizados nas literaturas de CAD, e caracterizam-se por ter

a primeira e a última coordenada paramétrica repetidas  $p + 1$  vezes. Este fato garante que as funções sejam interpolatórias nos extremos do espaço paramétrico e nas bordas entre *patches*, proporcionando, por exemplo, a homogeneidade com respeito às condições de contorno essenciais.

### 3.2.2 Funções base e suas derivadas

As funções base *B-Splines* ( $N^b$ ) univariadas são definidas a partir de um vetor de *knots* unidimensional, sendo para  $p = 0$ , escritas através da seguinte relação:

$$N_{i,0}^b(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (3.1)$$

enquanto que para funções com  $p \geq 1$  podem ser definidas por recorrência de:

$$N_{i,p}^b(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}^b(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}^b(\xi), \quad (3.2)$$

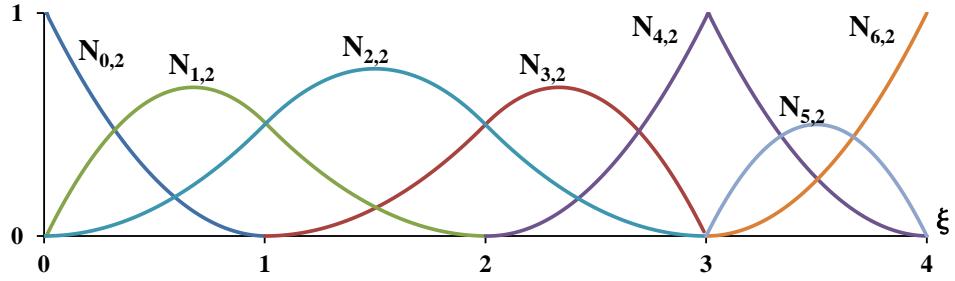
com  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Essa equação é conhecida como fórmula recursiva de *Cox-de Boor* (Cox, 1972; de Boor, 1972). Para funções *B-Splines* de grau  $p = 0$  ou  $p = 1$ , obtém-se, respectivamente, as mesmas funções constantes e lineares por partes utilizadas no método dos elementos finitos clássico.

Na Figura 16, pode-se observar funções *B-Splines* quadráticas construídas sobre o vetor de *knots* não-uniforme aberto  $\Xi = [0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4]$ . A figura evidencia que, devido à repetição de  $p + 1$  vezes dos *knots* nas extremidades do vetor, as funções base se tornam interpolatórias nesses pontos. Ademais, a presença de um *knot* com multiplicidade 2 em  $\xi = 3$  reduz a regularidade da função base nesse ponto, resultando na descontinuidade da sua derivada. Em termos gerais, a continuidade de uma função *B-Spline* em uma coordenada paramétrica é dada por  $C^{p-m}$ , onde  $m$  é a multiplicidade do *knot*.

As principais propriedades das funções *B-Splines* são:

- **Partição da Unidade:**  $\sum_{i=0}^n N_{i,p}^b(\xi) = 1$ ;
- **Positividade:** Todas as funções base são positivas, ou seja,  $N_{i,p}^b \geq 0, \forall \xi$ ;
- **Suavidade:** função de ordem  $p$  é, em geral,  $p - 1$  vezes continua no contorno das células;
- **Suporte Compacto:** O suporte de cada  $N_{i,p}^b$  está contido no intervalo  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ , ou seja, em cada célula, apenas  $p + 1$  funções são não nulas.

Figura 16 – *B-Splines quadráticas*

Fonte: Elaborada pela autora

A derivada de uma função de forma *B-Spline* pode ser calculada recursivamente em termos de funções base de ordem menor. Considerando uma função de ordem  $p$  e vetor de *knots*  $\Xi$ , a derivada da  $i$ -ésima função de forma pode ser escrita como:

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}^b(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}^b(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}^b(\xi). \quad (3.3)$$

Essa expressão pode ser generalizada para derivadas de ordem superior através de:

$$\frac{d^k}{d\xi^k} N_{i,p}^b(\xi) = \frac{p!}{(p-k)!} \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} N_{i+j,p-k}^b(\xi), \quad (3.4)$$

que representa a  $k$ -ésima derivada da função  $N_{i,p}^b(\xi)$ , onde:

$$\alpha_{0,0} = 1, \quad (3.5)$$

$$\alpha_{k,0} = \frac{\alpha_{k-1,0}}{\xi_{i+p-k+1} - \xi_i}, \quad (3.6)$$

$$\alpha_{k,j} = \frac{\alpha_{k-1,j} - \alpha_{k-1,j-1}}{\xi_{i+p+j-k+1} - \xi_{i+j}} \quad j = 1, \dots, k-1, \quad (3.7)$$

$$\alpha_{k,k} = \frac{-\alpha_{k-1,k-1}}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+k}}. \quad (3.8)$$

Algoritmos eficientes para a determinação das funções de forma *B-Splines* e de suas derivadas podem ser encontradas em Piegl e Tiller (1996).

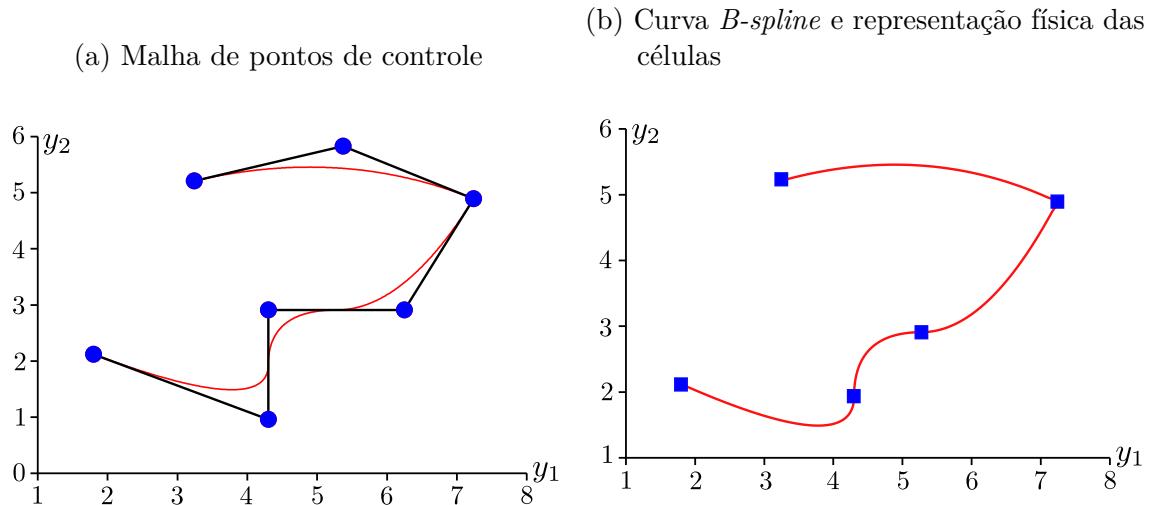
### 3.2.3 Geometrias *B-Splines*

Uma curva *B-Spline* é construída a partir da combinação linear entre funções base e um conjunto de pontos de controle. Considerando um conjunto de  $n + 1$  funções base  $N_{i,p}^b$  e respectivos pontos de controle  $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{n_{sd}}$  com  $i = 0, 1, \dots, n$ , uma curva polinomial por partes *B-Spline* univariada é definida como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{y}(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}^b(\xi) \mathbf{B}_i, \quad (3.9)$$

com  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$  sendo as componentes do vetor de coordenadas físicas  $\mathbf{y}$ . Utilizando as funções *B-Splines* apresentadas na Figura 16 e uma malha de  $n + 1$  pontos de controle, obtém-se a curva apresentada na Figura 17a. Na Figura 17b pode-se observar as células físicas equivalentes a essa combinação.

Figura 17 – Curva *B-Spline*



Fonte: Elaborada pela autora

A partir da Figura 17a nota-se que a curva *B-Spline* interpola o primeiro e o último ponto de controle, o que é uma característica das curvas construídas com funções descritas a partir de vetores de *knots* abertos. Adicionalmente, devido à multiplicidade do *knot* de coordenada paramétrica  $\xi = 3$ , existe um ponto de controle intermediário também interpolando a curva. Coordenadas paramétricas com multiplicidade maior ou igual ao grau polinomial  $p$  resultam, por definição, em interpolação dos pontos de controle associados. Além disso, a curva possui continuidade  $C^{p-1} = C^1$  em todos os lugares, exceto em  $\xi = 3$ , onde equivale a  $C^{p-2} = C^0$ , que trata-se de uma propriedade herdada das funções base.

Conforme observado nas figuras: Figura 17a e Figura 17b, muitas das características de curvas *B-Splines* são consequências das propriedades das funções *B-splines*. Outra importante propriedade dessas curvas é a Transformação Afim, que significa que uma

transformação afim de uma curva B-spline é obtida aplicando a transformação diretamente aos pontos de controle. Além disso, devido ao suporte compacto das funções base, as curvas *B-Splines* possuem característica denominada de *localidade*, que significa que, movendo-se um ponto de controle, afeta-se não mais do que  $p + 1$  células na curva. Outras propriedades matemáticas das curvas *B-Splines* podem ser consultadas em detalhes em Piegl e Tiller (1996).

Uma superfície *B-spline* é obtida analogamente à curva *B-spline*. Dado uma rede de pontos de controle  $\mathbf{B}_{i,j} \in \mathbb{R}^{n_{sd}}$  com  $i = 0, 1, \dots, n$  e  $j = 0, 1, \dots, m$ , e vetores de *knots*  $\Xi = [\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{p+n+1}]$ ,  $\mathcal{H} = [\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{q+m+1}]$ , a superfície é obtida através do produto tensorial entre  $(n + 1)$  funções univariadas  $N_{i,p}^b$  e  $(m + 1)$  funções univariadas  $M_{j,q}^b$  da seguinte forma:

$$\mathbf{S} = \mathbf{y}(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}^b(\xi) M_{j,q}^b(\eta) \mathbf{B}_{i,j}, \quad (3.10)$$

onde  $q$  representa o grau das  $m + 1$  funções na direção paramétrica  $\eta$ . Muitas das propriedades das superfícies *B-Splines* são resultado da natureza do produto tensorial que as geram. A base de funções apresenta propriedade de positividade e formam uma partição de unidade, de forma que:  $\forall(\xi, \eta) \in [\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{p+n+1}] \times [\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{q+m+1}]$ :

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}^b(\xi) M_{j,q}^b(\eta) = \left( \sum_{i=0}^n N_{i,p}^b(\xi) \right) \left( \sum_{j=0}^m M_{j,q}^b(\eta) \right) = 1. \quad (3.11)$$

O suporte, por exemplo, de uma função bivariada  $\hat{N}_{i,j:p,q}^b(\xi, \eta) = N_{i,p}^b(\xi) M_{j,q}^b(\eta)$  é equivalente à:  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+q+1}]$ .

Por fim, um sólido *B-Spline* é obtido através do produto tensorial entre funções univariadas  $N_{i,p}^b$ ,  $M_{j,q}^b$ ,  $L_{k,r}^b$ , construídas sobre os vetores de *knots*  $\Xi = [\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{p+n+1}]$ ,  $\mathcal{H} = [\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{q+m+1}]$  e  $\mathcal{Z} = [\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{r+l+1}]$  respectivamente, e um conjunto de pontos de controle  $\mathbf{B}_{i,j,k} \in \mathbb{R}^{n_{sd}}$  com  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ ,  $k = 0, 1, \dots, l$ , da seguinte forma:

$$\mathbf{T} = \mathbf{y}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l N_{i,p}^b(\xi) M_{j,q}^b(\eta) L_{k,r}^b(\zeta) \mathbf{B}_{i,j,k}, \quad (3.12)$$

na qual  $r$  representa o grau das  $l + 1$  funções base na direção paramétrica  $\zeta$ . As propriedades de um sólido *B-Spline*, correspondem às generalizações trivariadas das propriedades das superfícies *B-Spline*. Além disso, o suporte de uma função trivariada  $\hat{N}_{i,j,k:p,q,r}^b(\xi, \eta, \zeta) = N_{i,p}^b(\xi) M_{j,q}^b(\eta) L_{k,r}^b(\zeta)$  está contido no intervalo  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+q+1}] \times [\zeta_k, \zeta_{k+r+1}]$ .

### 3.2.4 Refinamento

Um dos aspectos mais relevantes das *B-splines* é a flexibilidade na forma de enriquecimento da base, permitindo aprimorar sua representação sem alterar a geometria subjacente nem sua parametrização. Dentro os principais procedimentos utilizados, destacam-se: a inserção de *knots* (ou refinamento  $h$ ), que consiste na subdivisão da malha; a elevação de grau (ou refinamento  $p$ ), que aumenta a ordem polinomial das funções base; o refinamento  $k$ , que promove simultaneamente um aumento da ordem e da continuidade entre células; e, por fim, o refinamento  $hpk$ , que combina de forma coordenada as três estratégias anteriores, oferecendo maior controle e eficiência na representação da geometria e na solução numérica de problemas.

Neste trabalho, é adotado apenas o refinamento  $h$  na geração das geometrias baseado na inserção de *knots*.

O enriquecimento da base de funções utilizando a inserção de *knots* é realizado sem que se altere uma curva geometricamente ou parametricamente. Para essa finalidade, partindo-se de um vetor de *knots*  $\Xi = [\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n+p+1}]$ , introduz-se o conceito de vetor de *knots* estendido, o qual é representado por:  $\bar{\Xi} = [\bar{\xi}_0 = \xi_0, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_{n+m+p+1} = \xi_{n+p+1}]$ . As  $(n + m + 1)$  novas funções base *B-Splines* são determinadas através da Equação (3.1) e Equação (3.2)), aplicando-as ao vetor de *knots*  $\bar{\Xi}$ . Os  $(n + m + 1)$  novos pontos de controle  $\bar{\mathcal{B}} = [\bar{\mathbf{B}}_0, \bar{\mathbf{B}}_1, \dots, \bar{\mathbf{B}}_{n+m}]^T$  são obtidos através da combinação linear dos  $(n + 1)$  pontos de controle originais,  $\mathcal{B} = [\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n]^T$ , por:

$$\bar{\mathcal{B}} = \mathbf{T}^p \mathcal{B}, \quad (3.13)$$

, com:

$$\mathbf{T}_{ij}^0 = \begin{cases} 1 & \text{se } \bar{\xi}_i \in [\xi_j, \xi_{j+1}) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.14)$$

e

$$\mathbf{T}_{ij}^{q+1} = \frac{\bar{\xi}_{i+q} - \xi_j}{\xi_{j+q} - \xi_j} \mathbf{T}_{ij}^q + \frac{\xi_{j+q+1} - \bar{\xi}_{i+q}}{\xi_{j+q+1} - \xi_{j+1}} \mathbf{T}_{ij+1}^q \text{ com } q = 0, 1, 2, \dots, p-1, \quad (3.15)$$

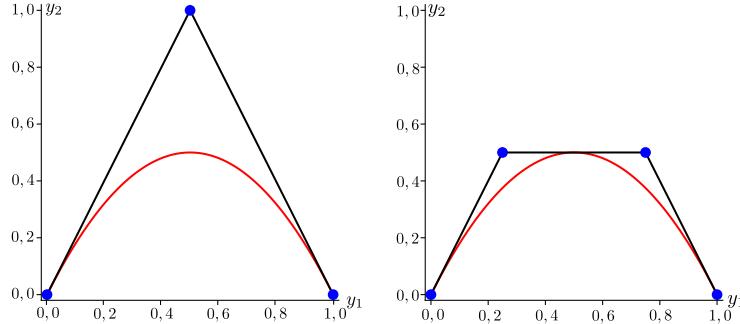
com  $i = 0, 1, \dots, (n + m)$  e  $j = 0, 1, \dots, n$ .

Considerando uma curva quadrática *B-spline* construída sobre um vetor de *knots* aberto  $\Xi = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$  apresentada na Figura 18a juntamente com sua rede de pontos

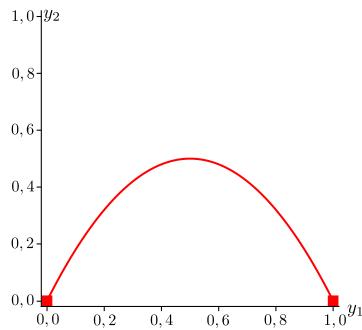
de controle, nota-se que essa curva, possui apenas uma célula no espaço físico e 3 funções base no espaço paramétrico (Figura 18e).

Figura 18 – Refinamento  $h$  para um curva *B-Spline*

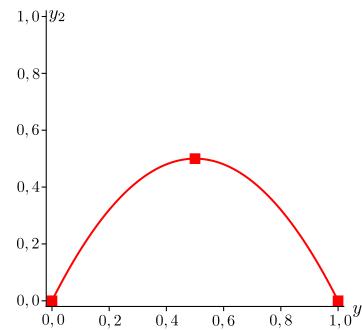
- (a) Curva original e pontos de controle  
(b) Curva refinada e pontos de controle



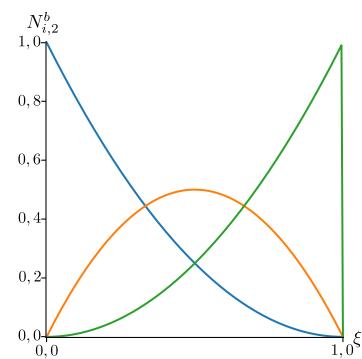
(c) Célula curva original



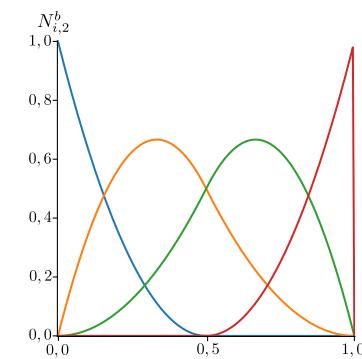
(d) Células curva refinada



(e) Funções base originais



(f) Funções base após refinamento  $h$  refinada



Fonte: Elaborada pela autora

Ao realizar a inserção de um  $knot$ ,  $\xi = 1/2$ , o vetor de  $knots$  estendido fica definido como:  $\bar{\Xi} = [0, 0, 0, 1/2, 1, 1, 1]$ . Aplicando-se a Equação (3.1) e Equação (3.2) à esse vetor de coordenadas paramétricas, obtém-se as 4 funções base apresentadas na Figura 18f definidas sobre 2 células do espaço paramétrico. Após o emprego do refinamento  $h$ , a geometria da curva é preservada. No entanto, como ilustrado na Figura 18d, uma nova

célula física é inserida, além de que, de acordo com a Figura 18b, a malha de pontos de controle é modificada, com o acréscimo de um novo ponto e o reajuste de suas posições.

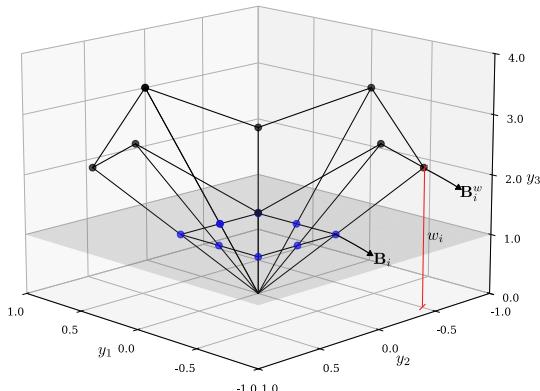
Para fins práticos, o processo de refinamento consiste na inserção consecutiva de coordenadas paramétricas ao vetor de (*knots*) até que se alcance a discretização desejada. Um algoritmo mais eficiente para realizar esse procedimento de refinamento pode ser encontrado em Piegl e Tiller (1996). Esse procedimento pode ser aplicado analogamente à superfícies e sólidos, aplicando-se a inserção de *knots* nas direções paramétricas desejadas.

### 3.3 NURBS

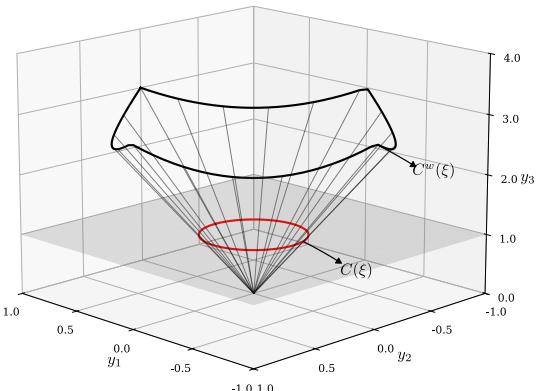
Uma geometria NURBS no  $\mathbb{R}^{n_{sd}}$  pode ser entendida, do ponto de vista geométrico, como a transformação projetiva de uma geometria *B-Spline* no  $\mathbb{R}^{n_{sd}+1}$ . Nesse contexto, geometrias cônicas podem ser construídas exatamente através de curvas quadráticas por partes. Na Figura 19b, apresenta-se uma curva NURBS  $\mathbf{C}(\xi)$  no  $\mathbb{R}^2$ , que representa de forma exata uma circunferência, a qual foi obtida a partir da transformação projetiva de uma curva quadrática por partes *B-Spline* ( $\mathbf{C}^w(\xi)$ ) no  $\mathbb{R}^3$ . A transformação é realizada através da projeção em um plano  $y_3 = 1$  de cada ponto da curva projetiva ( $\mathbf{C}^w(\xi)$ ) através de um raio que passa pela origem.

Figura 19 – Projeção transformativa de entidade *B-Spline*

(a) Projeção transformativa malha de pontos de controle



(b) Projeção transformativa *B-Spline*



Fonte: Elaborada pela autora

O mesmo procedimento de transformação pode ser realizado para obtenção dos pontos de controle NURBS (Figura 19a) a partir de pontos de controle projetivos ( $\mathbf{B}_i^w$ ), usando a seguinte relação:

$$(\mathbf{B}_i)_j = (\mathbf{B}_i^w)_j / w_i, \quad j = 1, \dots, n_{sd}, \quad (3.16)$$

$$w_i = (\mathbf{B}_i^w)_{n_{\text{sd}}+1}, \quad (3.17)$$

com  $(\mathbf{B}_i)_j$  o j-ésimo componente do vetor  $\mathbf{B}_i$  e  $w_i$  refere-se ao i-ésimo peso, que consiste na coordenada  $y_3$  dos pontos de controle projetivos para o exemplo citado.

Para a aplicação dessa mesma transformação para cada ponto da curva, será utilizado um conceito de função peso, dada por:

$$W(\xi) = \sum_{\hat{i}=0}^n N_{\hat{i},p}^b(\xi) w_{\hat{i}}, \quad (3.18)$$

e a curva NURBS pode ser definida como:

$$(\mathbf{C}(\xi))_j = (\mathbf{C}^w(\xi))_j / W(\xi), \quad j = 1, \dots, n_{\text{sd}}. \quad (3.19)$$

Tanto  $\mathbf{C}^w$  como  $W(\xi)$  são funções polinomiais por partes, dessa forma,  $\mathbf{C}(\xi)$  é uma função racional por partes.

### 3.3.1 Funções base NURBS e suas derivadas

Matematicamente, uma função NURBS é obtida pela rationalização de uma função *B-Spline*. Uma função racional NURBS ( $R$ ) é construída através da seguinte expressão:

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}^b(\xi) w_i}{\sum_{\hat{i}=0}^n N_{\hat{i},p}^b(\xi) w_{\hat{i}}}. \quad (3.20)$$

com  $w_i$  e  $w_{\hat{i}} \in \mathbb{R}$ , sendo  $i = \hat{i} = 0, 1, \dots, n$ .

A derivada de uma função  $R_{i,p}$  é obtida aplicando simplesmente a regra do quociente à expressão da Equação (3.20):

$$\frac{d}{d\xi} R_{i,p}(\xi) = w_i \frac{W(\xi) (N_{i,p}^b)'(\xi) - W'(\xi) N_{i,p}^b(\xi)}{(W(\xi))^2}, \quad (3.21)$$

com:

$$(N_{i,p}^b)'(\xi) \equiv \frac{d}{d\xi} N_{i,p}^b(\xi), \quad (3.22)$$

e:

$$W'(\xi) = \sum_{\hat{i}=0}^n (N_{\hat{i},p}^b)'(\xi) w_{\hat{i}}. \quad (3.23)$$

A  $k$ -ésima derivada de  $R_{i,p}$  é obtida em termos de derivadas de menores ordem, através da seguinte expressão:

$$\frac{d^k}{d\xi^k} R_{i,p}(\xi) = \frac{A_i^{(k)}(\xi) - \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} W^{(j)}(\xi) \frac{d^{(k-j)}}{d\xi^{(k-j)}} R_{i,p}(\xi)}{W(\xi)} \quad (3.24)$$

com:

$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}, \quad (3.25)$$

$$W^{(j)}(\xi) = \frac{d^j}{d\xi^j} W(\xi), \quad (3.26)$$

e:

$$A_i^{(k)}(\xi) = w_i \frac{d^k}{d\xi^k} N_{i,p}^b(\xi) \text{ sem soma em } i. \quad (3.27)$$

### 3.3.2 Geometria NURBS

Uma curva NURBS é obtida através da combinação linear entre as funções base NURBS e um conjunto de pontos de controle, conforme expresso pela equação abaixo:

$$\mathbf{C} = \mathbf{y}(\xi) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(\xi) \mathbf{B}_i, \quad (3.28)$$

cujos pontos de controle e pesos são escolhidos criteriosamente de forma a obter-se a geometria desejada.

Analogamente, uma superfície NURBS é obtida através das seguintes relações:

$$R_{i,j:p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}^b(\xi) M_{j,q}^b(\eta) w_{i,j}}{\sum_{\hat{i}=0}^n \sum_{\hat{j}=0}^m N_{\hat{i},p}^b(\xi) M_{\hat{j},q}^b(\eta) w_{\hat{i},\hat{j}}}, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{y}(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j:p,q}(\xi, \eta) \mathbf{B}_{i,j}, \quad (3.30)$$

com  $w_{i,j}$  e  $w_{\hat{i},\hat{j}} \in \mathbb{R}$ , sendo  $i = \hat{i} = 0, 1, \dots, n$  e  $j = \hat{j} = 0, 1, \dots, m$ , correspondem aos pesos relativos às funções  $N_{i,p}^b(\xi) M_{j,q}^b(\eta)$  e  $N_{\hat{i},p}^b(\xi) M_{\hat{j},q}^b(\eta)$  respectivamente. Por fim, um sólido NURBS é obtido por:

$$R_{i,j,k:p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{N_{i,p}^b(\xi) M_{j,q}^b(\eta) L_{k,r}^b(\zeta) w_{i,j,k}}{\sum_{\hat{i}=0}^n \sum_{\hat{j}=0}^m \sum_{\hat{k}=0}^l N_{\hat{i},p}^b(\xi) M_{\hat{j},q}^b(\eta) L_{\hat{k},r}^b(\zeta) w_{\hat{i},\hat{j},\hat{k}}}, \quad (3.31)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{y}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l R_{i,j,k:p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{B}_{i,j,k}, \quad (3.32)$$

onde  $w_{i,j,k}$  e  $w_{\hat{i},\hat{j},\hat{k}} \in \mathbb{R}$ , sendo  $i = \hat{i} = 0, 1, \dots, n$ ,  $j = \hat{j} = 0, 1, \dots, m$  e  $k = \hat{k} = 0, 1, \dots, l$ , correspondem aos pesos relativos às funções  $N_{i,p}^b(\xi) M_{j,q}^b(\eta) L_{k,r}^b(\zeta)$  e  $N_{\hat{i},p}^b(\xi) M_{\hat{j},q}^b(\eta) L_{\hat{k},r}^b(\zeta)$ , respectivamente.

### 3.3.3 Múltiplos patches

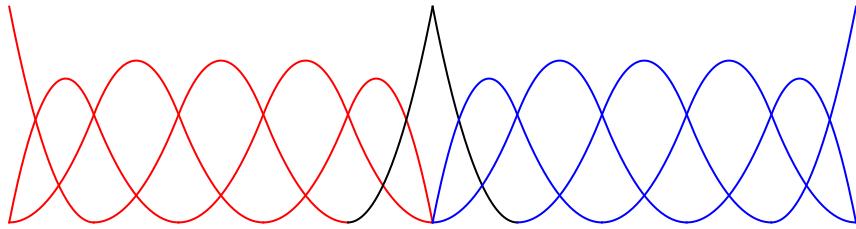
Na grande maioria das situações práticas, é necessário o uso de múltiplos *patches* NURBS para descrever um domínio computacional. Isso ocorre porque o produto tensorial do espaço paramétrico não é adequado para a representação de domínios complexos ou multiplamente conectados. Ademais, mesmo para domínios simples, do ponto de vista da simulação numérica, o uso de múltiplos *patches* pode ser necessário em algumas circunstâncias, conforme será visto na seção de exemplos.

Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005) destaca que o uso de múltiplos *patches* pode facilitar a análise numérica quando diferentes materiais e modelos físicos são utilizados em distintas regiões do domínio. Além disso, em processamento paralelo, pode ser conveniente, do ponto de vista das estruturas de dados, não compartilhar um único *patch* entre diferentes processadores.

A utilização de múltiplos *patches* implica a necessidade de compatibilizar a discretização na interface entre *patches* adjacentes; ou seja, a parametrização e o mapeamento devem ser idênticos nesses locais. Cada ponto de controle em uma face de *patches* adjacentes deve possuir um correspondente na face oposta. Esses pontos coincidentes são tratados como um único ponto de controle dentro do sistema global resultante da análise numérica.

Ressalta-se ainda, que na interface entre os *patches*, devido a natureza interpolatória do vetores de *knots* abertos, as funções base possuem continuidade  $C_0$ , conforme pode ser observado na Figura 20, onde apresentam-se as funções base univariadas na interface entre dois *patches*.

Figura 20 – Funções base univariadas na interface entre *patches*



Fonte: Elaborada pela autora

### 3.4 Análise isogeométrica

Para a aplicação da AIG no contexto da Dinâmica dos Fluidos Computacional, é utilizada a mesma metodologia apresentada no Cap. 2. A aproximação da geometria, realizada no contexto do MEF pela Equação (2.48) é substituída pela abordagem isogeométrica através do uso de geometrias NURBS, descritas pelas equações: Equação. (3.28), Equação (3.30) ou Equação (3.32) para os casos de curvas, superfícies ou sólidos, respectivamente. As funções tentativa para velocidade e pressão, e as funções teste associadas à elas, apresentadas na Equação (2.49) à Equação (2.52)) seguem exatamente a mesma lógica, porém, as funções de forma  $N$ , são substituídas pelas funções base NURBS  $R_{i,p}(\xi)$ ,  $R_{i,j:p,q}(\xi, \eta)$  e  $R_{i,j,k:p,q,r}(\xi, \eta, \zeta)$ , a depender da geometria em análise.

Assim, a implementação da AIG para escoamentos incompressíveis segue o mesmo roteiro apresentada no Algoritmo 1, levando-se em consideração as mudanças nas funções de forma, o modo de proceder com a integração numérica e as particularidades no cálculo dos parâmetros de estabilização, conforme descritos na sequência desta seção.

A integração numérica é realizada no domínio de cada célula através da quadratura Gaussiana. Considerando o domínio paramétrico de uma célula:  $\bar{\Omega}^e$ , e o domínio de integração ou parental:  $\tilde{\Omega}^e$ , apresentados na Figura 15, definidos respectivamente pelos vetores de coordenadas paramétricas  $\boldsymbol{\xi}(\xi, \eta, \zeta)$  e  $\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta})$ , a matriz jacobiana do mapeamento do espaço físico, com coordenadas  $\mathbf{y}(y_1, y_2, y_3)$ , para o espaço de quadratura, é definida por:

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tilde{\boldsymbol{\xi}}} = \frac{d\mathbf{y}}{d\boldsymbol{\xi}} \frac{d\boldsymbol{\xi}}{d\tilde{\boldsymbol{\xi}}}, \quad (3.33)$$

com  $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta} \in [-1, 1]$ .

O primeiro termo à direita da igualdade da Equação (3.33) é calculado a partir das derivadas parciais da: Equação (3.28), Equação (3.30) ou Equação (3.32), a depender do tipo da geometria em questão (curva, superfície ou sólido, respectivamente).

Para a obtenção do segundo termo à direita, primeiramente é necessário definir a

relação entre as coordenadas do domínio paramétrico e do domínio parental. Considerando-se a célula  $\bar{\Omega}^e = [\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}] \times [\zeta_k, \zeta_{k+1}]$ , pode-se calcular  $\xi, \eta, \zeta \in \bar{\Omega}^e$  a partir de  $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta} \in \tilde{\Omega}^e$  através das seguintes relações:

$$\xi = \xi_i + (\tilde{\xi} + 1) \left( \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{2} \right), \quad (3.34)$$

$$\eta = \eta_i + (\tilde{\eta} + 1) \left( \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{2} \right), \quad (3.35)$$

e

$$\zeta = \zeta_i + (\tilde{\zeta} + 1) \left( \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_i}{2} \right), \quad (3.36)$$

assim,  $\frac{d\xi}{d\tilde{\xi}}$  é obtido derivando-se parcialmente às expressões apresentadas em: Equação (3.34), Equação (3.35) e Equação (3.36).

### 3.4.1 Parâmetros de estabilização

Para a determinação dos parâmetros de estabilização  $\tau$ , de acordo com o exposto na subseção 2.3.3, faz-se necessária a determinação de um tensor métrico,  $\mathbf{G}$  (Equação (2.68)), o qual depende da matriz jacobiana transformada,  $\hat{\mathbf{Q}}$ , definida na Equação (2.65).

Dada a diferença entre o espaço paramétrico utilizado na definição das funções de base e do espaço paramétrico de integração, definido aqui como espaço parental, a matriz  $\mathbf{Q}$  é reescrita como:

$$\mathbf{Q} = \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}} \right). \quad (3.37)$$

Para a obtenção de  $\hat{\mathbf{Q}}$ , de acordo com a Equação (2.65), define-se a matriz  $\mathbf{D}$  para análise isogeométrica, de acordo com o trabalho de Otoguro, Takizawa e Tezduyar (2020), como:

$$\mathbf{D} = \left( \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\xi}}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}} \right), \quad (3.38)$$

que representa a relação entre o espaço paramétrico de preferência, onde o comprimento efetivo da célula deve ser medido, e o espaço de integração, onde são definidos os pontos de quadratura.

O espaço paramétrico de preferência para problemas unidimensionais é definido para cada célula por meio de uma interpolação usando polinômios de Bernstein  $B_b^p$  de ordem  $p$ :

$$\hat{\xi}(\tilde{\xi}) = \sum_{b=0}^p \hat{\xi}_b B_b^p(\tilde{\xi}), \quad (3.39)$$

com os pontos de controle de Bézier,  $\hat{\xi}_b$ , definidos igualmente espaçados da seguinte maneira:

$$\hat{\xi}_b = \frac{\Delta\hat{\xi}}{p} b, \quad (3.40)$$

sendo  $\Delta\hat{\xi}$  o comprimento paramétrico da célula de Bézier.

Os pontos de controle correspondentes no espaço de integração são dados por:

$$\tilde{\xi}_a = \frac{\Delta\hat{\xi}}{p} \sum_{b=0}^p b \left\{ \mathbf{C}^{-1} \right\}_{ba}, \quad (3.41)$$

sendo  $a = 0, \dots, p$ .  $\mathbf{C}$  sendo o operador de extração de Bézier, que relaciona as funções *B-spline* globais às funções de Bernstein locais, cuja obtenção, neste trabalho, é realizada de acordo com o exposto em Borden *et al.* (2011).

O comprimento efetivo da célula para  $a = 1, \dots, p$  pode ser calculado por:

$$\Delta\tilde{\xi}_a = \tilde{\xi}_a - \tilde{\xi}_{a-1} \quad (3.42)$$

$$= \frac{\Delta\hat{\xi}}{p} \sum_{b=0}^p b \left( \left\{ \mathbf{C}^{-1} \right\}_{ba} - \left\{ \mathbf{C}^{-1} \right\}_{ba-1} \right). \quad (3.43)$$

A partir disso pode-se definir o razão entre o comprimento da célula de Bézier e o comprimento efetivo da célula. Considerando um problema 1D, uma das proposta dos autores para  $D$ , utilizada neste trabalho, chama-se *RQD-MAX* e consiste em:

$$D = \frac{\Delta\hat{\xi}}{\min_{a=1,\dots,p} \Delta\tilde{\xi}_a}, \quad (3.44)$$

resultando em:

$$D = p \left( \min_{a=1,\dots,p} \sum_{b=0}^p b \left( \{\mathbf{C}^{-1}\}_{ba} - \{\mathbf{C}^{-1}\}_{ba-1} \right) \right)^{-1} \quad (3.45)$$

$$= p \max_{a=1,\dots,p} \left( \sum_{b=0}^p b \left( \{\mathbf{C}^{-1}\}_{ba} - \{\mathbf{C}^{-1}\}_{ba-1} \right) \right)^{-1}. \quad (3.46)$$

Para múltiplas dimensões o coeficiente de transformação  $D$  é obtido individualmente para cada uma das direções do espaço paramétrico, e os componentes da matriz de transformação  $\mathbf{D}$  são determinados como:

$$D_{ij} = D^i \delta_{ij}, \quad (3.47)$$

$i, j = 1, \dots, n_{pd}$ , sendo  $n_{pd}$  a dimensão do espaço paramétrico.

### 3.5 Verificação e aplicações

Os exemplos escolhidos para a verificação do código computacional AIG para escoamentos incompressíveis são o escoamento sobre um cilindro e o escoamento sobre canal com degrau. Em ambas análises empregou-se discretização tridimensional para uma verificação mais completa do código.

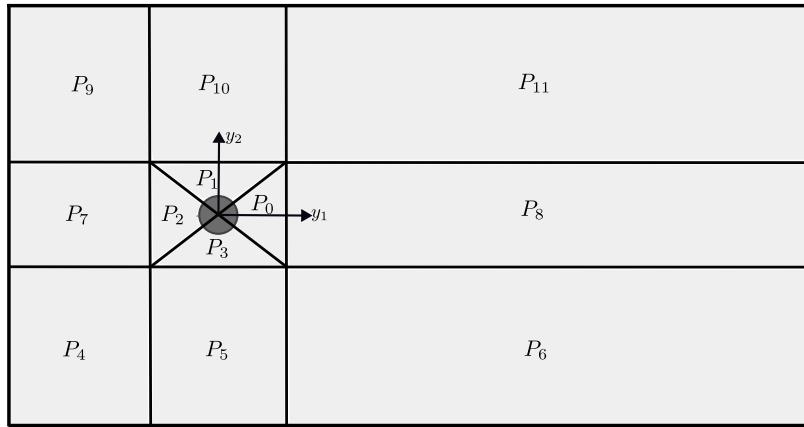
#### 3.5.1 Escoamento sobre um cilindro - discretização isogeométrica

Este é o mesmo exemplo simulado com elementos finitos na subseção 2.5.1, porém considerando-se discretização tridimensional do domínio como representado na Figura 25a. São adotados os mesmos parâmetros de análise, sendo considerados também os 3 valores de número de Reynolds:  $Re = 40, 100$  e,  $1000$ . A dimensão  $t$  na direção  $y_3$  é equivalente à  $0,01D$ . Aplica-se um perfil de velocidade constante na entrada do domínio,  $\mathbf{u} = [u_\infty, 0, 0]$ , e condições de parede lisa são atribuídas às paredes superior e inferior, enquanto que para as frontal e dos fundos condições de simetria são aplicadas.

Por se tratar do primeiro exemplo com discretização isogeométrica, descreve-se de maneira detalhada a geração da discretização espacial, enquanto nos demais problemas a discretização é apenas apresentada.

##### 3.5.1.1 Geração da malha NURBS

Dada a simplicidade da geometria envolvida, a malha é desenvolvida pela própria autora, i.e., sem o emprego de programas CAD para geração da malha isogeométrica. Para isso, com base nas dimensões bidimensionais do exemplo apresentado na subseção 2.5.1, divide-se o domínio físico em 12 *patches*, conforme pode ser ilustrado na Figura 21.

Figura 21 – Cilindro: Divisão dos *Patches*

Fonte: Elaborada pela autora

O processo de geração da malha, simplificadamente, consiste em se escolher vetores de *knots*, pontos de controle, e pesos adequados para a descrição da geometria de cada *patch*, assegurando simultaneamente o refinamento necessário para a análise numérica.

Para a geração do primeiro *patch*,  $P_0$ , que cobre 1/4 da circunferência do cilindro, inicia-se pela discretização de uma circunferência definida na direção paramétrica  $\xi$ . Utilizou-se o número mínimo de pontos de controle necessários para representar exatamente 1/4 de circunferência de diâmetro D com o uso de funções quadráticas NURBS. O vetor de *knots* aberto adotado é definido por:  $\Xi = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$ , sendo os pontos de controle  $\mathbf{B}_0 = [\frac{\sqrt{2}D}{4}, -\frac{\sqrt{2}D}{4}, 0]$ ,  $\mathbf{B}_1 = [\frac{D}{\sqrt{2}}, 0, 0]$  e  $\mathbf{B}_2 = [\frac{\sqrt{2}D}{4}, \frac{\sqrt{2}D}{4}, 0]$ , e os pesos:  $w_0 = 1$ ,  $w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$  e  $w_2 = 1$ . A disposição dos pontos de controle e a curva resultante são apresentados na Figura~22a.

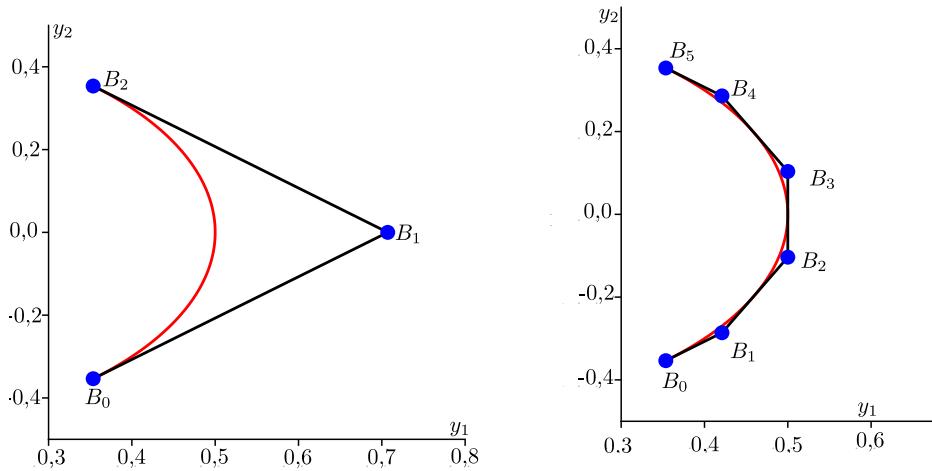
Na sequência refina-se a discretização por inserção sucessiva de coordenadas paramétricas no vetor de *knots*. O algoritmo utilizado para este procedimento pode ser encontrado em Piegl e Tiller (1996). Na Figura 22b apresenta-se um exemplo dos pontos de controle resultantes após a inserção das coordenadas paramétricas 1/4, 1/2 e 3/4. Essa inserção resulta em três novas células físicas. A quantidade de coordenadas paramétricas a ser inserida depende da discretização desejada para a análise numérica.

Para a representação da geometria do *patch*  $P_0$ , gerou-se uma curva na direção paramétrica  $\xi$  que define o contorno direito do domínio. A curva é definida considerando o vetor de *knots* atualizado  $\Xi = [0, 0, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1, 1, 1]$  e consiste em uma reta cujas coordenadas de suas extremidades inicial e final são:  $\mathbf{y}_0 = [2, -2, 0]$  e  $\mathbf{y}_1 = [2, 2, 0]$ , respectivamente. Os 6 pontos de controle são distribuídos sobre a reta através de um espaçamento não uniforme: nas extremidades, a distância entre pontos consecutivos corresponde à metade do espaçamento adotado no interior, enquanto a região central é subdividida uniformemente, conforme pode ser observado na Figura 23a. Essa distribuição

não uniforme dos pontos de controle proporciona uma distribuição uniforme das células mapeadas no espaço físico. Para essa curva, todos os pesos são definidos como 1.

Figura 22 – Cilindro: Obtenção da circunferência

- (a) Curva inicial e rede de pontos de controle      (b) Curva refinada e rede de pontos de controle



Fonte: Elaborada pela autora

A superfície do domínio é gerada discretizando-se a direção  $\eta$  do espaço paramétrico. Para isso, os  $m + 1$  pontos de controle nessa direção são posicionados ao longo das retas que conectam os pontos de controle da primeira camada (circunferência) aos da última camada (reta). A distribuição desses pontos segue uma progressão geométrica de modo que as células menores fiquem próximas ao cilindro garantindo uma melhor resolução para captar os efeitos de camada limite.

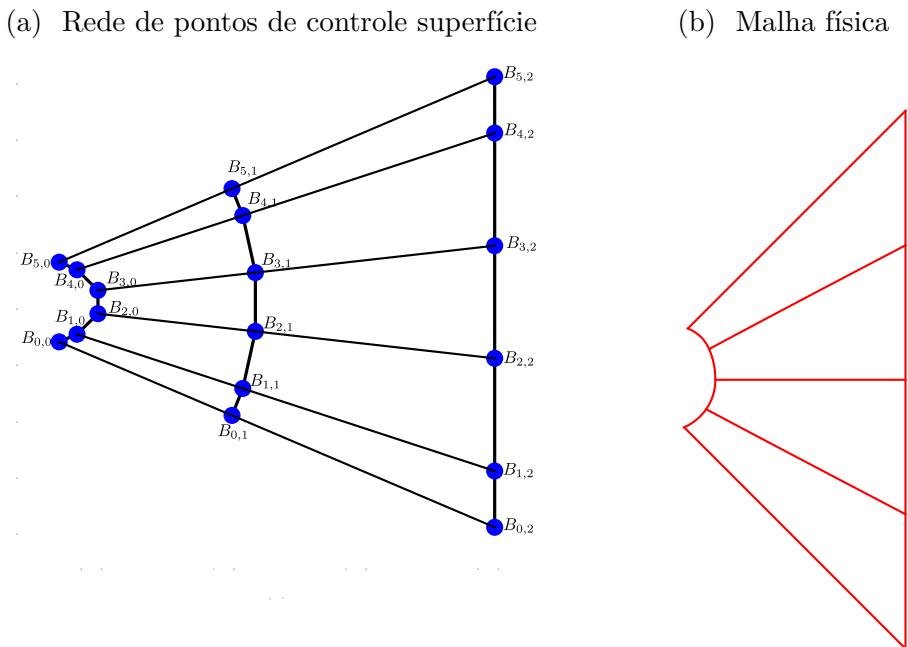
Esse processo é exemplificado na Figura 23a com a discretização mínima necessária para o emprego de funções quadráticas, ou seja, são utilizados apenas três pontos de controle na direção  $\eta$ , com o vetor de *knots* aberto  $\mathcal{H} = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$ . Na Figura 23b apresentam-se as células mapeadas do espaço paramétrico para o espaço físico. Salienta-se que os pontos de controle obtidos nessa etapa foram definidos com peso unitário.

Para a simulação numérica apresentada na sequência, a quantidade de pontos de controle na direção  $\eta$  foi definida em função da necessidade de discretização para o problema. Para um vetor de *knots* abertos com coordenadas interiores de multiplicidade unitária, a quantidade de células (*ncel*) está relacionada número de pontos de controle *npc* por  $ncel = npc - deg$ , sendo *deg* o grau das funções na direção paramétrica em questão.

Por fim, para a geração do volume NURBS, adota-se apenas uma camada de células na direção paramétrica  $\zeta$ , correspondente à direção  $y_3$  do espaço físico deste problema. São empregadas funções quadráticas, com vetor de *knots* aberto  $\mathcal{Z} = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$  na

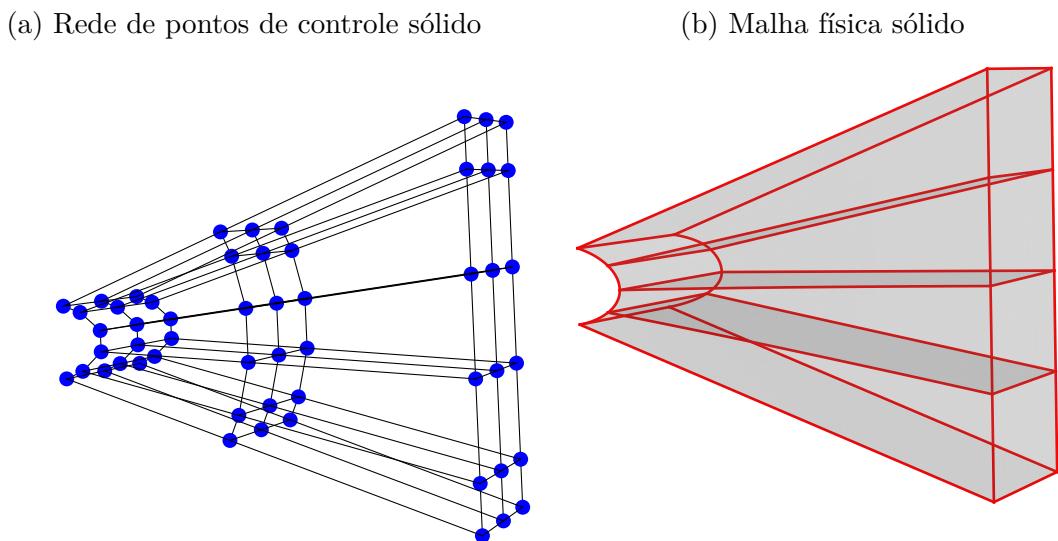
direção  $\zeta$  e pontos de controle distribuídos uniformemente e com peso unitário. Na Figura 24a e Figura 24b apresenta-se a rede de pontos e a malha física para a geração do volume equivalente ao *patch*  $P_0$  para a discretização exemplificada nesta seção.

Figura 23 – Cilindro: Obtenção da superfície



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 24 – Cilindro: Obtenção do sólido



Fonte: Elaborada pela autora

Para os *patches*  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ , utiliza-se a mesma parametrização de  $P_0$ , obtendo-se

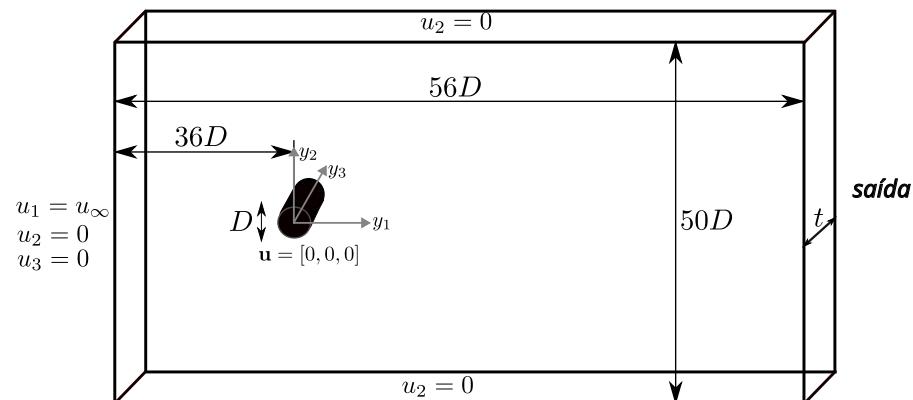
seus pontos de controle por rotação dos pontos de controle de  $P_0$ , de modo que cada um seja ajustado ao quadrante do cilindro correspondente.

Para a geração dos *patches* retangulares,  $P_4$  à  $P_{11}$ , definiu-se a direção paramétrica  $\xi$  respectiva à direção física  $y_1$ ,  $\eta$  correspondente à  $y_2$  e  $\zeta$  à  $y_3$ . A quantidade de pontos de controle em cada direção foi definida a partir do número de células desejadas para a análise numérica e para garantir compatibilidade com os *patches*  $P_0$  -  $P_3$ , adotando-se pesos unitários para os pontos de controle, vetores de *knots* abertos e com espaçamento uniforme e funções NURBS quadráticas.

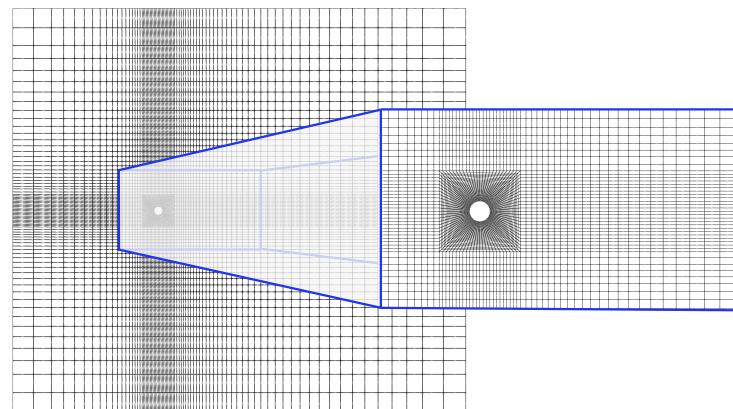
A malha isogeométrica utilizada é apresentada na Figura 25b e na Tabela 2 pode-se observar a quantidade de pontos de controle em cada uma das direções paramétricas utilizados na discretização de cada um dos *patches* que compõe a malha, resultando em 30228 pontos de controle e 8728 células físicas.

Figura 25 – Cilindro: Malha de células físicas

(a) Cilindro: Geometria e condições de contorno



(b) Discretização espacial - plano  $y_1y_2$



Fonte: Elaborada pela autora

Tabela 2 – Cilindro: Número de pontos de controle por *patch*

<i>Patch</i>	$\xi$	$\eta$	$\zeta$	<i>Patch</i>	$\xi$	$\eta$	$\zeta$
0	26	34	3	6	42	28	3
1	26	34	3	7	20	26	3
2	26	34	3	8	42	26	3
3	26	34	3	9	20	28	3
4	20	28	3	10	26	28	3
5	26	28	3	11	42	28	3

Fonte: Elaborada pelo autor.

### 3.5.1.2 Análise numérica

O problema é simulado para um velocidade de entrada  $u_\infty = 1,0$ ,  $\rho = 1,0$ ,  $\Delta t = 0,05$ , e  $\rho_\infty = 0,5$ , sendo a viscosidade variada de acordo com o número de Reynolds desejado. Para a discretização 3D, calculam-se os coeficientes aerodinâmicos  $C_D$  e  $C_L$  a partir das definições de forças de arrasto e de sustentação através das seguintes equações:

$$C_D = \frac{F_D}{0,5\rho\|\mathbf{u}_\infty\|^2 Lt}, \quad (3.48)$$

e

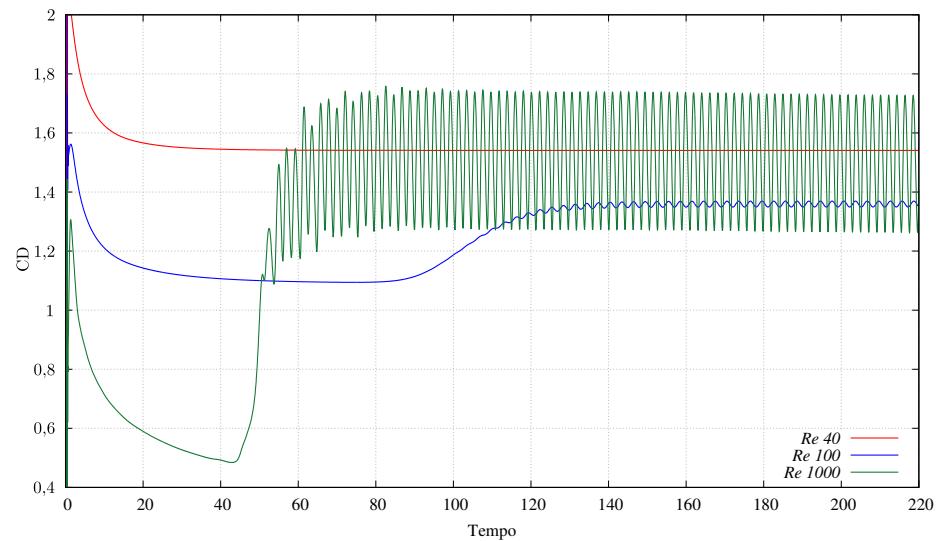
$$C_L = \frac{F_L}{0,5\rho\|\mathbf{u}_\infty\|^2 Lt}, \quad (3.49)$$

A Figura 26a e a Figura 26b apresentam a história de  $C_D$  e  $C_L$ . Os valores do coeficiente de arrasto médio obtidos com a malha isogeométrica com células 3d foram:  $C_{Dmed} = 1,54$  para  $Re = 40$ ,  $C_{Dmed} = 1,36$  para  $Re = 100$  e  $C_{Dmed} = 1,49$  para  $Re = 1000$ . Ressalta-se, que apesar dos valores de  $C_{Dmed}$  estarem bem próximos aos da simulação com MEF tradicional da subseção 2.5.1, para as análises utilizando IGA, foram necessários mais passos de tempo para o início do processo de desprendimento de vórtices nos casos de  $Re = 100$  e  $Re = 1000$ , o que está associado tanto à melhor uniformidade da discretização quanto à diferença na resolução da malha no plano  $y_1 \times y_2$ .

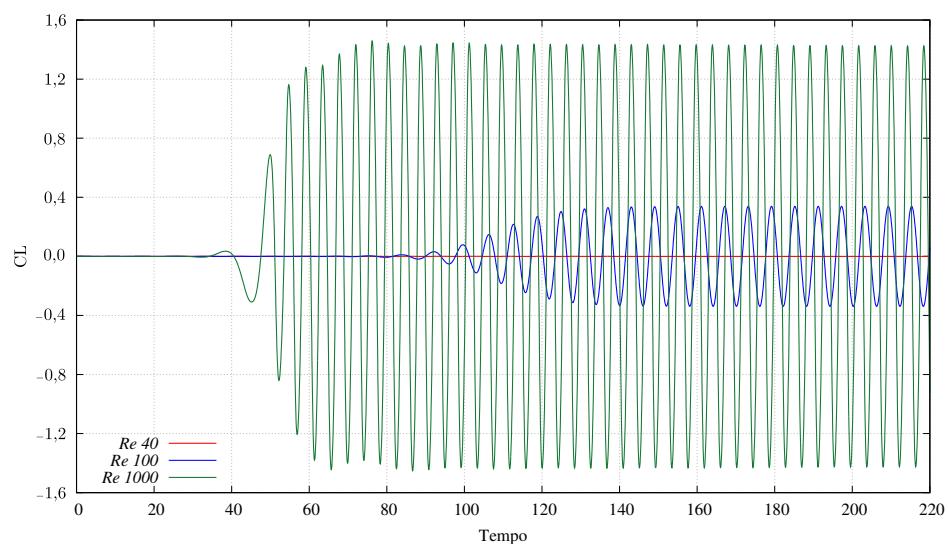
Os campos de velocidade e pressão para diferentes instantes ao longo de um ciclo de desprendimento de vórtices para  $Re = 1000$  são apresentados na Figura 27 e Figura 28, onde observa-se resultados qualitativamente consistentes com o esperado.

Figura 26 – Cilindro: Coeficientes aerodinâmicos

(a) Coeficiente de arrasto  $C_D$



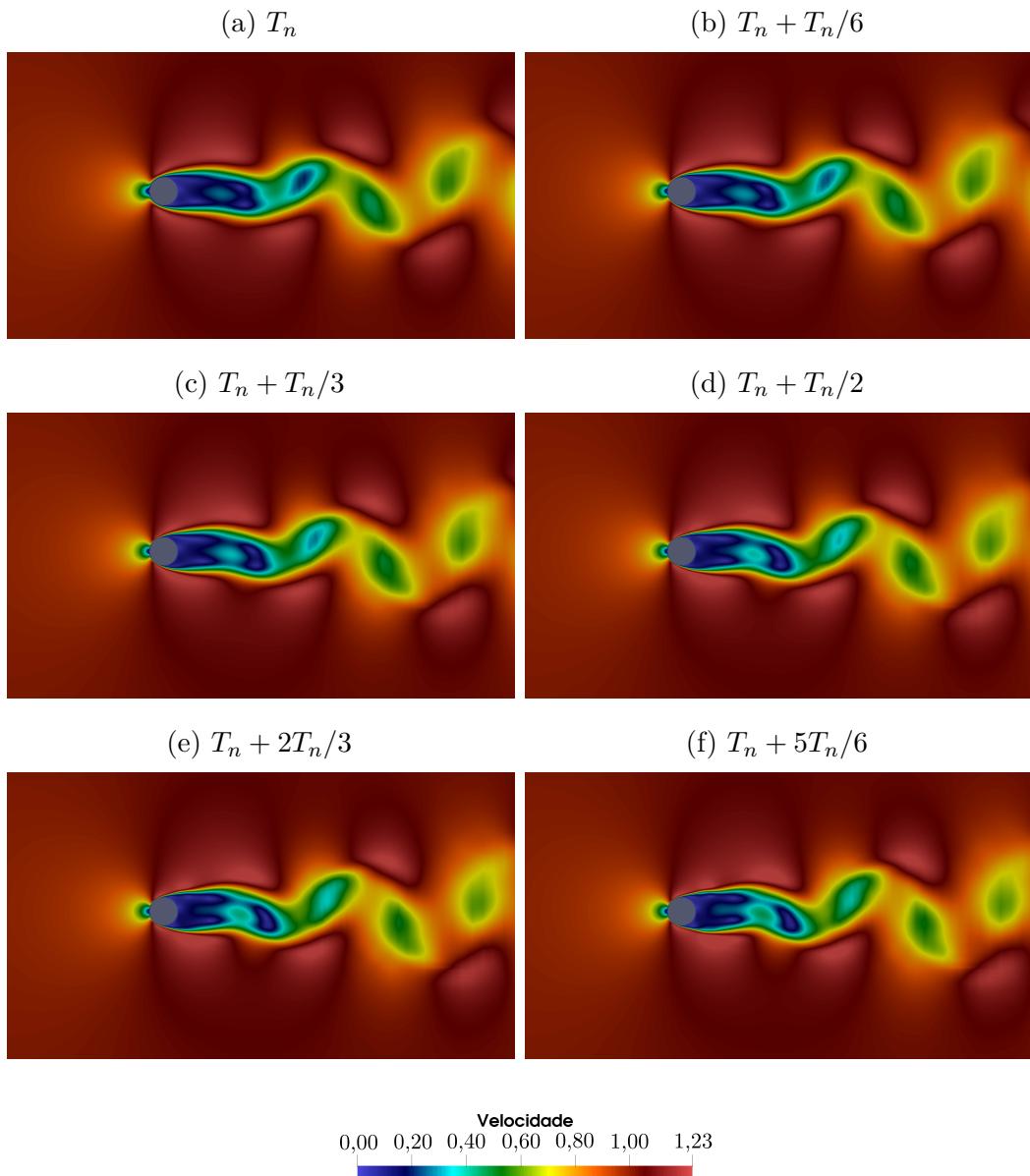
(b) Coeficiente de sustentação  $C_L$



$Re 40$  —————  $Re 100$  —————  $Re 1000$  —————

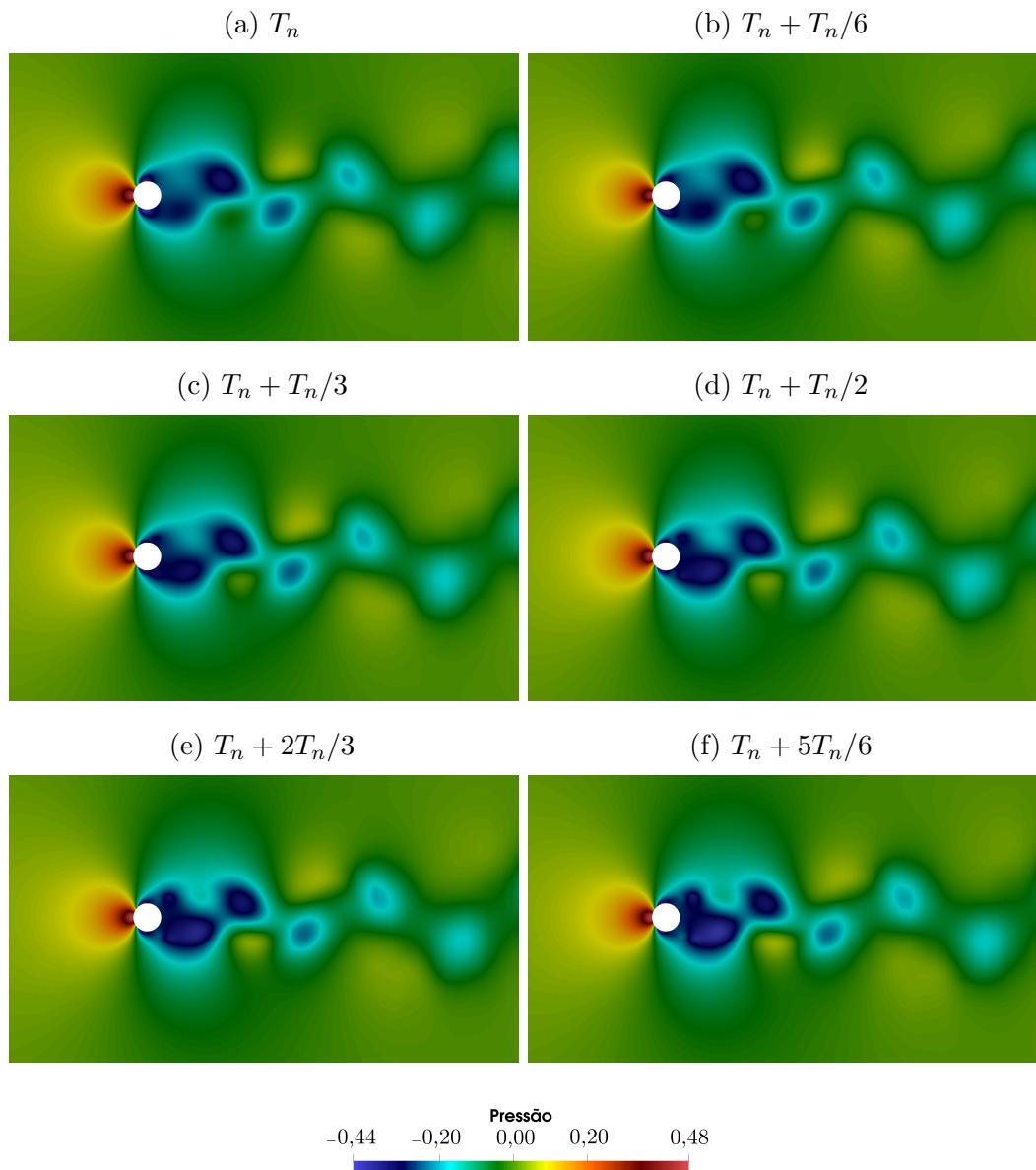
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 27 – Cilindro: Campos de velocidade para  $\text{Re} = 1000$  - plano  $y_1y_2$



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 28 – Cilindro: Campos de pressão para  $\text{Re} = 1000$  - plano  $y_1y_2$



Fonte: Elaborada pela autora

### 3.5.2 Escoamento em um canal com degrau

Este problema consiste num escoamento em um canal fechado com um degrau à jusante da entrada, causando expansão abrupta da altura do canal, conforme apresentado na Figura 29, onde é descrita a geometria do canal em vista no plano  $y_1 \times y_2$ , sendo as dimensões:  $h = 1,0m$ ,  $s = 0,94m$ ,  $x_e = 1,0m$ ,  $x_f = 15m$  e  $x_t = 30m$ . A espessura adotada, na direção  $y_3$ , é constante e igual a  $0,1m$ .

Considera-se condição de aderência nas paredes paralelas aos planos  $y_1y_3$  e  $y_1y_3$  com  $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ , enquanto que as paredes paralelas ao plano  $y_1y_2$  são consideradas lisas, com apenas  $u_3 = 0$ . Na entrada prescreve-se o perfil parabólico para  $u_1$  dado por:

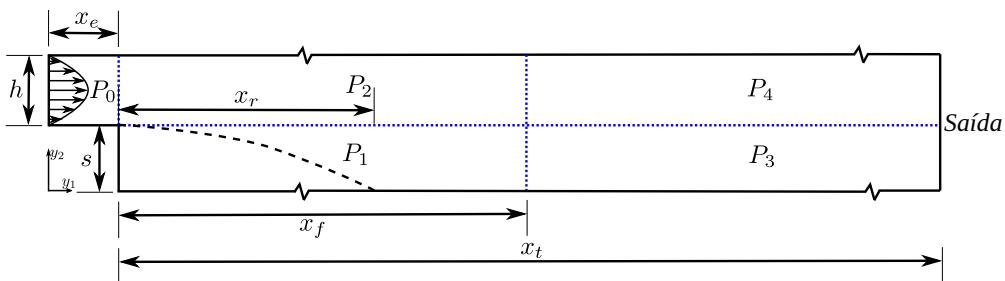
$$u_1 = V_{max} \left( 1 - \left( \frac{(y_2 - s) - h/2}{h/2} \right)^2 \right), \quad (3.50)$$

com velocidade  $V_{max} = 10m/s$  e  $u_2 = u_3 = 0$ .

O escoamento sobre o degrau é caracterizado por produzir áreas de recirculação onde o fluido se separa e forma vórtices. A distância entre o degrau e o ponto de recolamento do vórtice principal,  $x_r$ , é uma das principais características verificadas nesse problema. A dimensão dos vórtices varia em função do número de Re, o qual é calculado de acordo com Armaly *et al.* (1983), por:

$$Re = \frac{\rho \left( \frac{2V_{max}}{3} \right) 2h}{\mu}. \quad (3.51)$$

Figura 29 – Degrau: Geometria - plano  $y_1y_2$



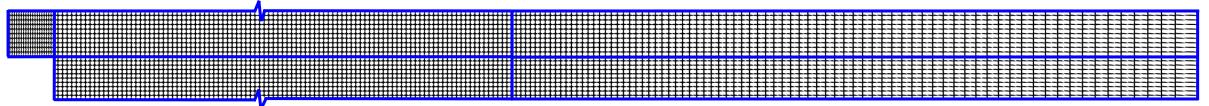
Fonte: Elaborada pela autora

Embora o problema possua caráter bidimensional, para fins de verificação do código, adota-se discretização isoparamétrica 3d com cinco *patches* e um total de 17640 pontos de controle e 4800 células, conforme pode ser observado na Figura 30. Na Tabela 3 apresenta-se o número de pontos de controle em cada direção paramétrica para cada *patch*.

São simulados três diferentes número de Reynolds para as análises:  $Re = 100$ ,  $Re = 400$  e  $Re = 800$ , os quais são obtidos a partir da variação da viscosidade do fluido.

Considera-se  $\rho = 1\text{kg/m}^3$ ,  $\Delta t = 0,05\text{s}$ , e  $\rho_\infty = 0,5$ . As simulações são mantidas até que seja atingido o estado estacionário, sobre o qual são feitas as análises.

Figura 30 – Degrau: Malha de células físicas - plano  $y_1y_2$



Fonte: Elaborada pela autora

Tabela 3 – Degrau: Número de pontos de controle por *patch*

<i>Patch</i>	$\xi$	$\eta$	$\zeta$
0	22	12	3
1	152	12	3
2	152	12	3
3	82	12	3
4	82	12	3

Fonte: Elaborada pelo autor.

De acordo com os experimentos realizados por Armaly *et al.* (1983), as medições do comprimento do vórtice primário, logo a jusante do degrau na parte inferior, identificam o regime do escoamento como laminar ( $\text{Re} < 1200$ ), transiente ( $1200 < \text{Re} < 6600$ ) e turbulento ( $\text{Re} > 6600$ ). Além disso, o autor constata em seus ensaios que para  $\text{Re} < 400$  o escoamento é predominantemente bidimensional, enquanto que para Reynolds superiores, o escoamento apresenta regiões de comportamento tridimensional.

Armaly *et al.* (1983) em suas análises constatou o surgimento de uma bolha de separação adicional ao longo do piso do canal, a jusante da separação primária, a qual desaparece para  $\text{Re} > 2300$ . Outra região de separação secundária também é observada ao longo da parede superior à jusante do degrau. Isso desenvolve-se a partir de  $\text{Re} 400$  e permanece durante todo o regime de transição.

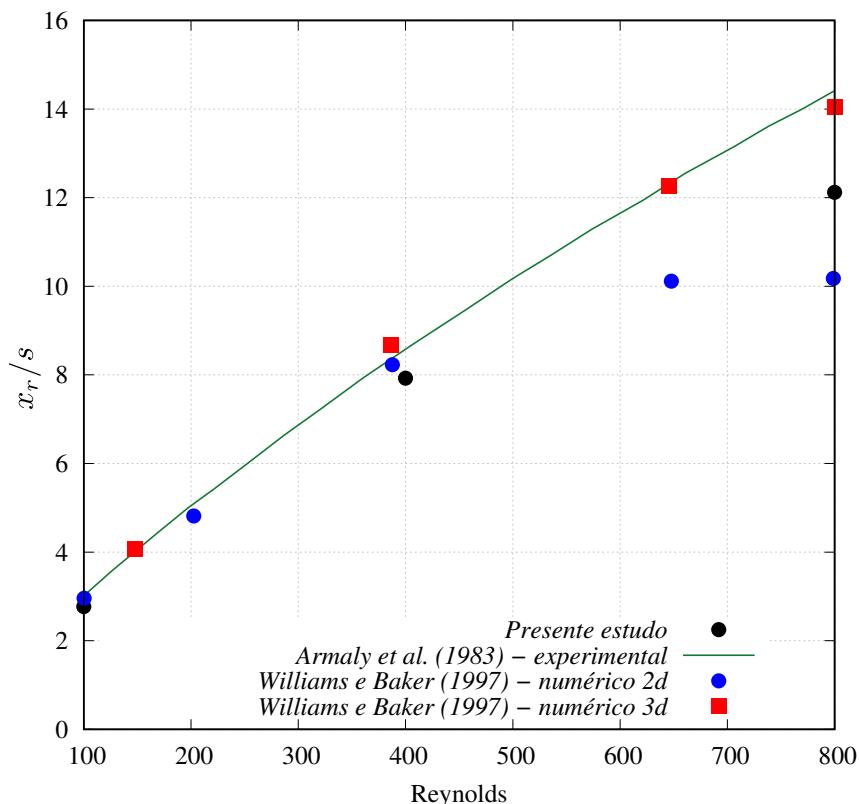
Na Figura 31 são apresentados os comprimentos de recolamento do vórtice primário adimensionalizados ( $x_r/s$ ) obtidos nesse trabalho, juntamente com os valores experimentais reportados por Armaly *et al.* (1983) e os resultados de análises numéricas 2d e 3d de Williams e Baker (1999).

Com essa figura é possível observar que a medida que o número de Reynolds aumenta, os resultados obtidos do presente estudo se afastam dos valores de referência respectivos ao estudo experimental e da simulação tridimensional. Este fato ocorre visto que o ensaio experimental foi realizado em um canal com  $2m$  profundidade na direção  $y_3$ , enquanto que a simulação atual conta com apenas uma célula nessa direção, sendo então incapaz de captar os fenômenos tridimensionais que ocorrem a medida que o número de Reynolds cresce.

Na Figura 32 pode-se observar a distribuição do módulo da velocidade para o domínio completo e para a região do vórtice primário para  $Re = 100$ , enquanto na Figura 33 e Figura 34 apresenta-se o mesmo para  $Re = 400$  e  $Re = 800$  respectivamente. Para  $Re = 800$  constata-se a formação de um vórtice secundário na parede superior (Figura 34c), que está de acordo com o relato dos autores previamente citados.

Por fim, na Figura 35 é possível observa-se os campos de pressão para todos os números de Reynolds simulados.

Figura 31 – Degrau: Comprimento do vórtice principal



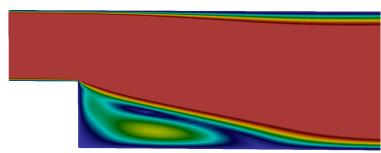
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 32 – Degrau: Campos de velocidade para  $Re = 100$

(a) Domínio Completo



(b) Vórtice primário



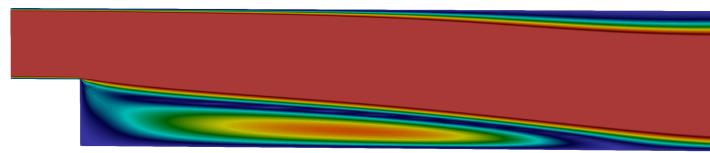
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 33 – Degrau: Campos de velocidade para  $Re = 400$

(a) Domínio Completo



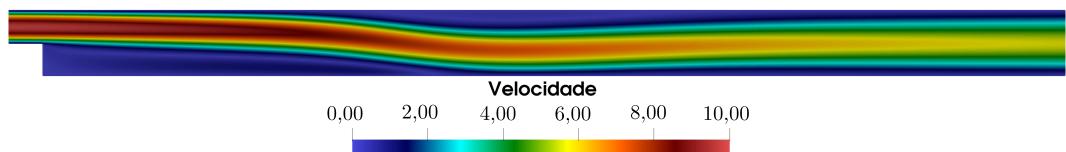
(b) Vórtice primário



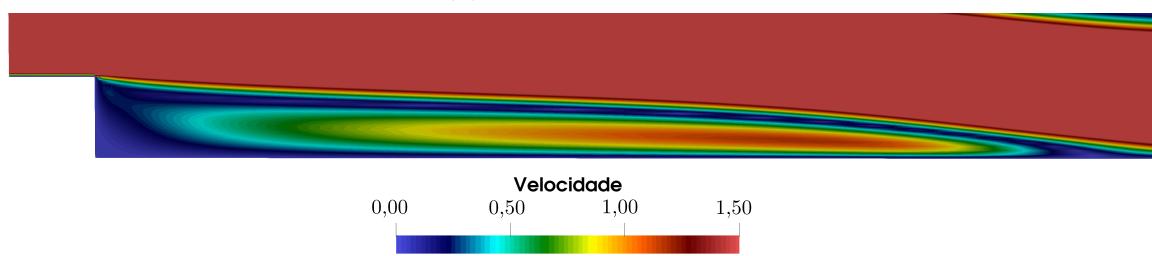
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 34 – Degrau: Campos de velocidade para  $Re = 800$

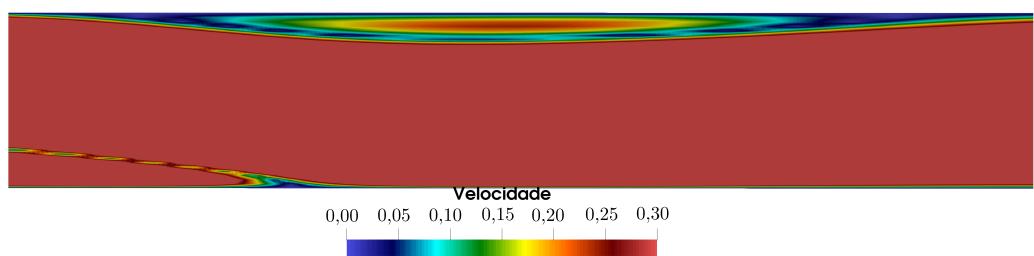
(a) Domínio Completo



(b) Vórtice primário



(c) Vórtice secundário



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 35 – Degrau: Campos de pressão

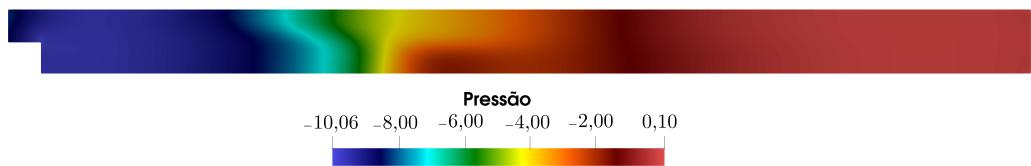
(a)  $\text{Re} = 100$



(b)  $\text{Re} = 400$



(c)  $\text{Re} = 800$



Fonte: Elaborada pela autora



## 4 DINÂMICA DOS SÓLIDOS COMPUTACIONAL

Assim como no caso da Mecânica dos Fluidos, um sólido é modelado como um corpo contínuo, com seu movimento governado por um conjunto de equações provenientes da lei da conservação da quantidade de movimento, lei da conservação da massa e lei da conservação de energia. Entretanto, diferentemente dos fluidos, os sólidos possuem resistência às solicitações tangenciais até que alcance seu limite resistente, e por isso, apresentam deslocamentos e deformações finitos.

As variáveis de interesse na resolução do conjunto de equações que descrevem o comportamento do sólido são os deslocamentos, ou, posições atuais ao longo do tempo, dessa forma, uma descrição do tipo Lagrangiana é mais adequada para essas análises.

Nesse contexto, o comportamento estrutural pode ser classificado como linear ou não linear. No contexto do comportamento não linear, em geral, as não linearidades envolvidas podem ser de natureza geométrica, quando associadas à presença de grandes deslocamentos e rotações que não permitem aproximar a configuração atual pela inicial, ou de natureza física, quando resultam de modificações na relação constitutiva do material.

Para problemas de sólidos com comportamento elástico, quando houver a possibilidade de grandes deslocamentos, a não linearidade geométrica deve ser contemplada no modelo matemático. Para isso, altera-se a forma de consideração do equilíbrio das forças no sólido. Enquanto que em uma modelagem geometricamente linear o equilíbrio é considerado na configuração inicial, que é muito próxima a configuração atual do corpo, em uma análise não linear geométrica, o equilíbrio é considerado na configuração atual (ver, por exemplo Coda (2018) e Ogden (1984)).

Em muitos problemas da IFE, tal como o *flutter*, grandes deslocamentos estão envolvidos. Desse modo, neste estudo utiliza-se uma formulação não linear geométrica dinâmica de cascas baseada em uma descrição Lagrangiana Total para as análise dinâmica de estruturas.

A formulação é baseada no método dos elementos finitos com abordagem posicional (Coda, 2003, 2018), onde as variáveis principais são as posições nodais. Escolheu-se trabalhar com elementos de cascas, uma vez que esses podem representar a maioria dos problemas estruturais tridimensionais.

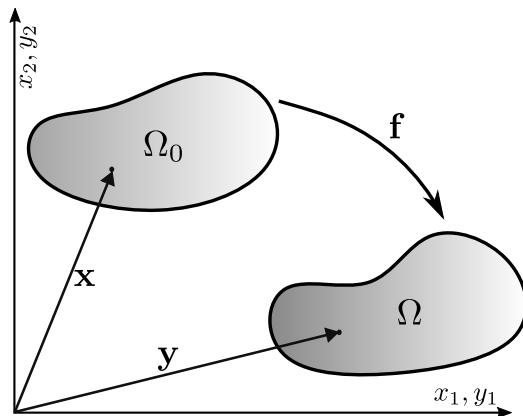
Considera-se a cinemática de Reissner-Mindlin, e adotam-se como parâmetros nodais as posições da superfície média, vetores generalizados, inicialmente unitários e perpendiculares à superfície média, e um termo de enriquecimento que permite considerar variação linear de deformação na direção da espessura, de acordo com Sanches e Coda (2013). Isso permite um mapeamento completo e flexível do elemento deformado.

Neste capítulo, a formulação é apresentada a partir da descrição da cinemática e das condições de equilíbrio dos corpos deformáveis, com o objetivo de se deduzirem as equações globais de equilíbrio na descrição Lagrangiana, seguida pela introdução do modelo constitutivo de *Saint-Venant–Kirchhoff*. Em seguida, aborda-se a formulação do método dos elementos finitos baseada em posição para ao elemento finito de casca adotado, a técnica de integração temporal e o algoritmo para solução, juntamente com um exemplo. Essa formulação foi desenvolvida, verificada e validada em diversos estudos (Coda; Paccola, 2007, 2009; Coda; Sanches; Coda, 2013, 2014; Fernandes; Coda; Sanches, 2019) e o código computacional já disponível no grupo de pesquisa foi aproveitado, de modo que não se preocupa com validação do código.

#### 4.1 Cinemática dos corpos deformáveis

Um sólido deformável quando sujeito à ações externas, sofre uma mudança de configuração. Nesta seção busca-se definir medidas pontuais para a deformação. Na Figura 36, pode-se observar um sólido na sua configuração inicial  $\Omega_0$ , com coordenadas materiais descritas por  $\mathbf{x}$ , e o mesmo sólido no instante atual, representado por  $\Omega$ , com coordenadas espaciais  $\mathbf{y}$ .

Figura 36 – Cinemática de um sólido deformável



Fonte: Elaborada pela autora

A função mudança de configuração, denominada de  $\mathbf{f}$ , mapeia cada ponto da posição inicial para a atual, de modo que:

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \quad (4.1)$$

Uma medida de deformação Lagrangeana deve quantificar a mudança de forma em cada ponto do contínuo em relação ao estado inicial. Para o caso de grandes deslocamentos, assunto deste estudo, a medida de deformação deve ser independente de movimento

de corpo rígido ou da escolha dos eixos de referência, ou seja, deve ser uma medida objetiva. A medida de deformação é descrita em termos do gradiente da função mudança de configuração,  $\mathbf{A}$ , definido como:

$$\mathbf{A} = \nabla_x (\mathbf{f}) = \nabla_x \mathbf{y}. \quad (4.2)$$

onde o subscrito  $\mathbf{x}$  indica que o gradiente é tomado segundo as coordenadas da configuração material inicial.

A partir de  $\mathbf{A}$ , é possível definir o tensor de deformações de Green-Lagrange (ver por exemplo Ogden (1984)), que é uma medida de deformação objetiva e normalizada dada por:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad (4.3)$$

com  $\mathbf{C}$  um tensor simétrico denominado de tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green dado por:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t. \quad (4.4)$$

A partir do gradiente da função mudança de configuração pode-se estabelecer uma relação entre um vetor qualquer  $\mathbf{u}$  definido na configuração inicial e seu equivalente na configuração atual  $\mathbf{v}$  através da seguinte expressão:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} \quad (4.5)$$

Para a obtenção posteriormente das equações de equilíbrio em descrição Lagrangiana, faz-se necessário abordar as relações de mudança de volume e de área que ocorrem da configuração inicial para a atual.

No estabelecimento de uma relação entre o volume inicial e final, definem-se dois volumes infinitesimais, um inicial  $dV_0$  e um final  $dV$ , apresentados na Figura 37. O volume infinitesimal inicial  $dV_0$  pode ser calculado por:

$$dV_0 = (\mathbf{dx}_1 \wedge \mathbf{dx}_2) \cdot \mathbf{dx}_3 = \det(\mathbf{dx}_1, \mathbf{dx}_2, \mathbf{dx}_3), \quad (4.6)$$

com  $\mathbf{dx}_1$ ,  $\mathbf{dx}_2$  e  $\mathbf{dx}_3$  vetores materiais que definem o volume inicial. O volume atual pode ser expresso então, por:

$$dV = (\mathbf{dy}_1 \wedge \mathbf{dy}_2) \cdot \mathbf{dy}_3 = \det(\mathbf{dy}_1, \mathbf{dy}_2, \mathbf{dy}_3), \quad (4.7)$$

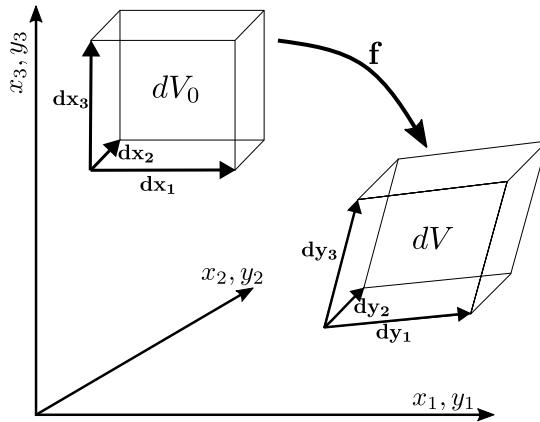
sendo  $\mathbf{dy}_1$ ,  $\mathbf{dy}_2$  e  $\mathbf{dy}_3$  os mesmos vetores  $\mathbf{dx}_1$ ,  $\mathbf{dx}_2$  e  $\mathbf{dx}_3$  após a mudança de configuração.

Tendo em vista a Equação (4.5), pode-se reescrever a Equação (4.7), como:

$$dV = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{dx}_1, \mathbf{dx}_2, \mathbf{dx}_3) = J dV_0, \quad (4.8)$$

na qual  $J$  representa o determinante Jacobiano da função mudança de configuração.

Figura 37 – Mudança no volume



Fonte: Elaborada pela autora

Para escrever a relação entre uma área definida na configuração inicial e o seu valor na configuração atual, considera-se o cilindro apresentado na Figura 38 em suas configurações inicial e atual. Sendo  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{n}$  os versores unitários normais às áreas inicial  $dA_0$  e atual  $dA$ . Os volumes na configuração inicial ( $dV_0$ ) e na configuração atual ( $dV$ ) são calculados por:

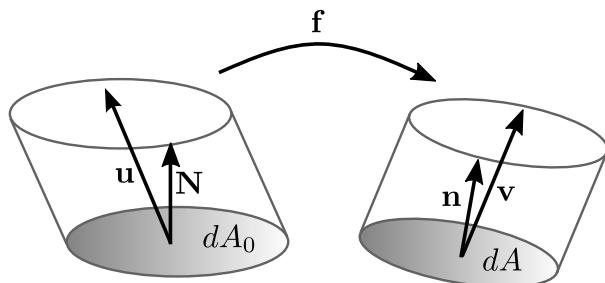
$$dV_0 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{dA}_0 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dA_0, \quad (4.9)$$

$$dV = \mathbf{v} \cdot \mathbf{dA} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA, \quad (4.10)$$

com  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  vetores não coplanares com as áreas inicial e atual, que ligam os centros da base e do topo do cilindro.

Considerando a relação da Equação (4.5), pode-se escrever o volume na configuração atual,  $dV$ , como:

Figura 38 – Mudança de área



Fonte: Elaborada pela autora

$$dV = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{n} dA = J dV_0 = J \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dA_0. \quad (4.11)$$

Pré-multiplicando-se a Equação (4.11) por  $(\mathbf{A}^t)^{-1}$  e considerando-se a arbitrariedade de  $\mathbf{u}$ , chega-se a conhecida fórmula de Nanson, descrita como:

$$\mathbf{n} dA = J \mathbf{A}^{-t} \cdot \mathbf{N} dA_0. \quad (4.12)$$

## 4.2 Equilíbrio de corpos deformáveis

### 4.2.1 Estado de tensão em um ponto

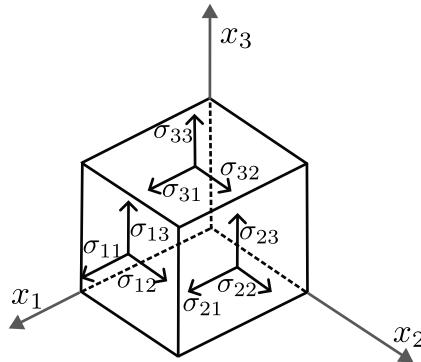
Um corpo contínuo, ao ser submetido a ações externas, desenvolve forças internas de modo a garantir o equilíbrio dinâmico ou estático. A medida dessas forças internas em cada ponto material é fundamental para a aplicação das leis que governam o movimento dos sólidos.

Considerando um corpo qualquer, na configuração atual, sujeito a um conjunto equilibrado de forças externas, ao fazer-se a extração de um volume elementar infinitesimal, conforme pode ser observado na Figura 39, considerando as forças que o restante do corpo exerce de forma distribuída sobre cada uma de suas faces, são obtidas as componentes cartesianas de tensão, com uma componente normal e duas componentes tangenciais (de cisalhamento) em cada face. Essa medida de tensão é denominada tensão de Cauchy, sendo suas componentes designadas por  $\sigma_{ij}$ , com  $i$  referindo-se ao plano de atuação e  $j$  indicando a direção de atuação da componente.

O tensor de tensões de Cauchy ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) contém todas as informações de tensão em um ponto, sendo representado por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Figura 39 – Volume infinitesimal: componentes de tensão



Fonte: Elaborada pela autora

Ao realizar-se o equilíbrio de momentos sobre um elemento infinitesimal, nota-se que  $\boldsymbol{\sigma}$  é simétrico (Teorema de Cauchy), e pode ser reescrito como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Vale ressaltar que, a tensão de Cauchy é definida na configuração atual do contínuo, e por isso, trata-se de uma medida Euleriana de tensão, portanto inadequada para a formulação pretendida.

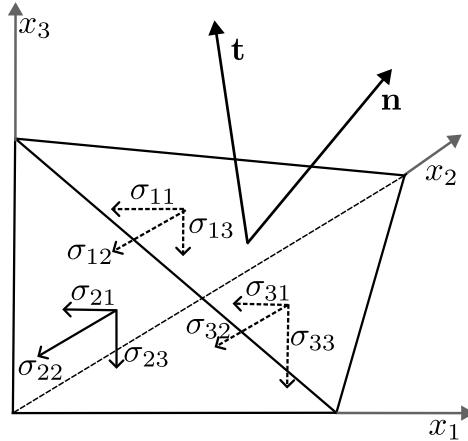
Extraindo-se do corpo contínuo um volume tetraédrico (Figura 40), no plano inclinado, cujo versor normal é  $\mathbf{n}$ , surge o vetor tensão de Cauchy designado por  $\mathbf{t}$ . Considerando que a área do plano inclinado seja  $dA$ , enquanto que as áreas correspondentes aos planos coordenados são suas projeções, pode-se calcular o equilíbrio do tetraedro em cada direção, chegando-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}. \quad (4.15)$$

Essa expressão é conhecida por fórmula de Cauchy. Caso o plano inclinado esteja no contorno do corpo (superfície externa),  $\mathbf{t}$  se iguala às forças de superfície ( $\mathbf{p}$ ) que atuam no ponto considerado do contorno, ou seja:

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}. \quad (4.16)$$

Figura 40 – Tetraedro elementar



Fonte: Elaborada pela autora

#### 4.2.2 Equilíbrio em descrição Lagrangiana

Para a obtenção das equações de equilíbrio em descrição Lagrangiana, será utilizada como ponto de partida a equação de equilíbrio local na descrição Euleriana. Para isso, considere o sólido apresentado na Figura 41, o qual está submetido a forças de corpo,  $\mathbf{b}$ , e a forças de superfície,  $\mathbf{p}$ . Extrairindo-se um elemento infinitesimal deste corpo que sofreu mudança de configuração, e aplicando-se a segunda Lei de Newton, chega-se à equação do movimento de Cauchy, que define o equilíbrio de forma local (forma local da primeira Lei do movimento de Euler), também chamada de equação da quantidade de movimento:

$$\nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma}^t + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{y}}, \quad (4.17)$$

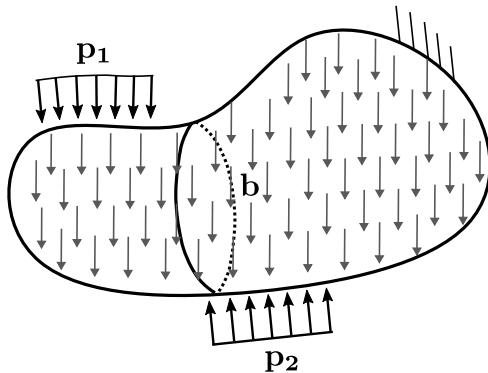
ou ainda, em notação indicial:

$$\sigma_{ji,j} + b_i = \rho \ddot{y}_i, \quad (4.18)$$

com  $\rho$  representando a massa específica do material na configuração atual e  $\ddot{\mathbf{y}}$  é a derivada material da velocidade do ponto material (aceleração do corpo).

Ao integrar-se a Equação (4.17) no volume do sólido, utilizando o Teorema da Divergência, chega-se a:

Figura 41 – Sólido sob carregamento externo



Fonte: Elaborada pela autora

$$\int_A \boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{n} dA + \int_V \mathbf{b} dV = \int_V \rho \ddot{\mathbf{y}} dV \quad (4.19)$$

ou, ainda:

$$\int_A \mathbf{p} dA + \int_V \mathbf{b} dV = \int_V \rho \ddot{\mathbf{y}} dV \quad (4.20)$$

Considerando as relações de mudança de área e volume, apresentadas na Equação (4.8) e Equação (4.12), e que da equação da conservação da massa ( $M$ ) tem-se que:

$$M = \int_{V_0} \rho_0 dV_0 = \int_{V(t)} \rho(t) dV, \quad (4.21)$$

pode-se escrever a forma global da equação da quantidade de movimento na descrição Lagrangiana total, a partir da Equação (4.19), como:

$$\int_{A_0} \mathbf{P}^t \cdot \mathbf{N} dA_0 + \int_{V_0} \mathbf{b}_0 dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} dV_0, \quad (4.22)$$

na qual o primeiro tensor de tensão de Piola-Kirchhoff ( $\mathbf{P}$ ) é definido como  $\mathbf{P}^t = J \boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{A}^{-t}$ , e o subíndice 0, refere-se à configuração inicial.

Considerando-se o Teorema da Divergência à Equação (4.22) e a arbitrariedade do volume, chega-se à versão local da equação de equilíbrio em descrição Lagrangiana, expressa por:

$$\nabla_x \cdot \mathbf{P}^t + \mathbf{b}_0 = \rho_0 \ddot{\mathbf{y}}. \quad (4.23)$$

#### 4.2.3 Conservação da energia e equilíbrio

No estudo do equilíbrio de corpos deformáveis a análise da energia mecânica é um assunto de grande importância. A energia mecânica é formada basicamente por três parcelas: energia potencial das forças externas ( $\mathbb{P}$ ), energia de deformação ( $\mathbb{U}_e$ ) e energia cinética ( $\mathbb{K}$ ). A energia total mecânica ( $\Pi$ ) é um funcional obtido pela soma dessas três parcelas, sendo escrita da seguinte maneira:

$$\Pi = \mathbb{P} + \mathbb{K} + \mathbb{U}_e. \quad (4.24)$$

O princípio da estacionariedade da energia define que um corpo quando em equilíbrio apresenta a primeira variação do funcional de energia mecânica nula, sendo o equilíbrio estável quando a posição de equilíbrio representa um mínimo local para a energia mecânica total. Este princípio, para uma descrição das equações de equilíbrio em posições, pode ser expresso matematicamente da seguinte forma:

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{y}} \cdot \delta\mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad (4.25)$$

ou, dada a arbitrariedade de  $\delta\mathbf{y}$ , como:

$$\delta\Pi = \delta\mathbb{P} + \delta\mathbb{K} + \delta\mathbb{U}_e. \quad (4.26)$$

Um incremento de energia mecânica específica (energia mecânica por unidade de volume) pode ser obtido pelo produto escalar da Equação (4.23) por um incremento de posição  $\delta\mathbf{y}$ , e, integrando-se sobre o domínio inicial, têm-se:

$$\delta\Pi = \int_{V_0} (\rho_0 \ddot{\mathbf{y}} - \nabla_x \cdot \mathbf{P}^t - \mathbf{b}_0) \cdot \delta\mathbf{y} dV_0 = 0 \quad (4.27)$$

Ao integrar-se por partes o segundo termo da Equação (4.27) e utilizar-se o Teorema da Divergência, chega-se a seguinte expressão:

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta\mathbf{y} dV_0 - \int_{A_0} \mathbf{P}^t \cdot \mathbf{N} \cdot \delta\mathbf{y} dA_0 + \int_{V_0} \mathbf{P}^t : \nabla_x(\delta\mathbf{y}) dV_0 - \int_{V_0} \mathbf{b}_0 \cdot \delta\mathbf{y} dV_0 = 0. \quad (4.28)$$

A Equação 4.28 pode ainda ser reformulada, considerando que  $\nabla_x(\delta\mathbf{y}) = \delta\mathbf{A}$  e que  $\mathbf{P}^t \cdot \mathbf{N}$  representa as forças de superfície na configuração inicial ( $\mathbf{p}_0$ ) como:

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} dV_0 - \int_{A_0} \mathbf{p}_0 \cdot \delta \mathbf{y} dA_0 + \int_{V_0} \mathbf{P}^t : \delta \mathbf{A} dV_0 - \int_{V_0} \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{y} dV_0 = 0. \quad (4.29)$$

Conforme relatou-se, o tensor de Piola-Kirchhoff de primeira espécie não é necessariamente simétrico, desta forma, torna-se mais conveniente adotar uma medida de tensão que resulte em um tensor simétrico. Com essa finalidade, adota-se um tensor  $\mathbf{S}$ , de forma que:

$$\mathbf{P} = \mathbf{S}^t \cdot \mathbf{A}^t, \quad (4.30)$$

com  $\mathbf{S}$  conhecido como tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie.

Utilizando-se a relação apresentada na Equação (4.30) na Equação (4.29), chega-se a:

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} dV_0 - \int_{A_0} \mathbf{p}_0 \cdot \delta \mathbf{y} dA_0 + \int_{V_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV_0 - \int_{V_0} \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{y} dV_0 = 0. \quad (4.31)$$

À Equação (4.31), será adicionada ainda uma parcela referente a possibilidade de carregamentos pontuais, sendo expressa então, por:

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} dV_0 - \int_{A_0} \mathbf{p}_0 \cdot \delta \mathbf{y} dA_0 + \int_{V_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV_0 - \int_{V_0} \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{y} dV_0 - \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{y} = 0. \quad (4.32)$$

Partindo-se da Equação (4.32), encontra-se a relação entre suas componentes e as parcelas de energia mecânica, dessa forma, têm-se que:

$$\delta\mathbb{P} = - \int_{A_0} \mathbf{p}_0 \cdot \delta \mathbf{y} dA_0 - \int_{V_0} \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{y} dV_0 - \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{y}, \quad (4.33)$$

$$\delta\mathbb{K} = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} dV_0, \quad (4.34)$$

e,

$$\delta\mathbb{U}_e = \int_{V_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV_0. \quad (4.35)$$

#### 4.2.4 Modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff

A lei constitutiva hiperelástica de Saint-Venant-Kirchhoff estabelece uma relação linear entre o tensor das tensões de Piola Kirchhoff de segunda espécie e o tensor de deformação de Green, e pode ser escrita pela expressão generalizada da energia de deformação por:

$$u_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbf{E}, \quad (4.36)$$

ou, em notação indicial:

$$u_e = \frac{1}{2} E_{kl} C_{klji} E_{ij} \quad (4.37)$$

com  $\mathbb{C}$  representando o tensor constitutivo elástico isotrópico, que é um tensor de quarta ordem definido como:

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \left( \kappa - \frac{2}{3} G \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + G (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (4.38)$$

sendo  $\delta_{ij}$  o delta de Kronecker,  $\kappa$  e  $G$  os módulos volumétrico e de cisalhamento respectivamente, os quais são calculados através das seguintes relações:

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3} G, \quad (4.39)$$

$$G = \frac{\mathbb{E}}{2(1 + \nu)}, \quad (4.40)$$

$$\lambda = \frac{\nu \mathbb{E}}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad (4.41)$$

com  $\mathbb{E}$  sendo o módulo de elasticidade longitudinal e  $\nu$  o coeficiente de Poisson. Ressalta-se que essa lei constitutiva aqui utilizada é adequada para grandes deslocamentos, entretanto, a mesma é adequada somente para deformações pequenas a moderadas por permitir a inversão do material.

### 4.3 Método dos Elementos Finitos

Conforme discutido na subseção 2.3.1, o método dos elementos finitos baseia-se na substituição do contínuo por um conjunto finito de subdomínios, denominados elementos finitos. Em cada um desses elementos, as variáveis de interesse — incluindo a própria

geometria — são aproximadas, de modo que o problema contínuo é convertido em um problema discreto, caracterizado por um número finito de incógnitas.

Nesta subseção será apresentada formulação do método dos elementos finitos baseada em posições aplicada à cinemática de cascas.

#### 4.3.1 Elemento finito de casca

Esta formulação foi desenvolvida por Coda e Paccola (2007), e consistia inicialmente em 6 graus de liberdade por nó, sendo 3 referentes à posições e 3 referentes às componentes do vetor generalizado. Em Coda e Paccola (2008) inclui-se à formulação um sétimo parâmetro, que considera a taxa de variação linear da espessura, para lidar com o fenômeno de travamento volumétrico. Sanches e Coda (2013) apresentam a formulação dinâmica empregando a cinemática com 7 graus de liberdade aplicada ao problema de interação fluido-estrutura, sendo essa a abordagem adotada aqui.

As cascas são sólidos que possuem uma de suas dimensões muito menor do que as outras, assim o mapeamento do seu domínio pode ser facilitado tomando-se a superfície média como referência. Os mapeamentos das configurações inicial e atual dos pontos da superfície média, conforme pode ser observado na Figura 42, são definidos respectivamente como:

$$\mathbf{f}_0^{mh}(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{x}^{mh}(\xi_1, \xi_2) = N_l(\xi_1, \xi_2) \mathbf{x}_l^{mh} \quad (4.42)$$

$$\mathbf{f}_1^{mh}(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{y}^{mh}(\xi_1, \xi_2) = N_l(\xi_1, \xi_2) \mathbf{y}_l^{mh}, \quad (4.43)$$

onde  $\mathbf{x}_l^{mh}$  e  $\mathbf{y}_l^{mh}$  representam, respectivamente, os vetores dos parâmetros de posição inicial e atual da superfície média respectivos ao nó  $l$ , com  $N_l(\xi_1, \xi_2)$  sendo a função de forma do nó  $l$  calculada no ponto de coordenadas paramétricas  $(\xi_1, \xi_2)$ .

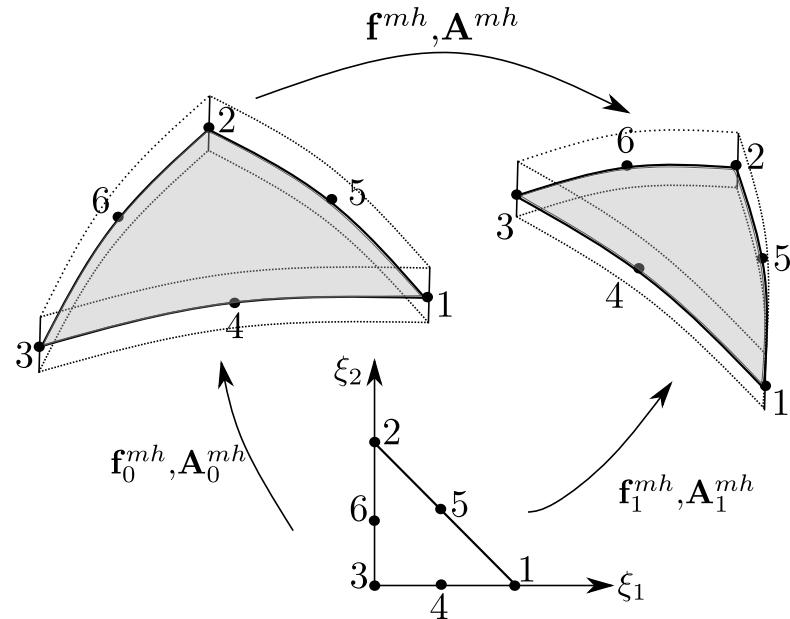
Os demais pontos do domínio são mapeados por meio da soma da posição de um ponto na superfície média com um vetor generalizado  $\mathbf{g}_0^h$  para a configuração inicial ou  $\mathbf{g}_1^h$  para a configuração atual. Observa-se que  $\mathbf{g}_0^h$  é normal à superfície média na configuração inicial, conforme pode ser observado na Figura 43, enquanto  $\mathbf{g}_1^h$  pode não ser normal à superfície média deformada. Desta forma, o mapeamento completo de um elemento de casca é:

$$\mathbf{f}_0^h(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \mathbf{x}^h(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \mathbf{f}_0^{mh}(\xi_1, \xi_2) + \mathbf{g}_0^h(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (4.44)$$

$$\mathbf{f}_1^h(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \mathbf{y}^h(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \mathbf{f}_1^{mh}(\xi_1, \xi_2) + \mathbf{g}_1^h(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (4.45)$$

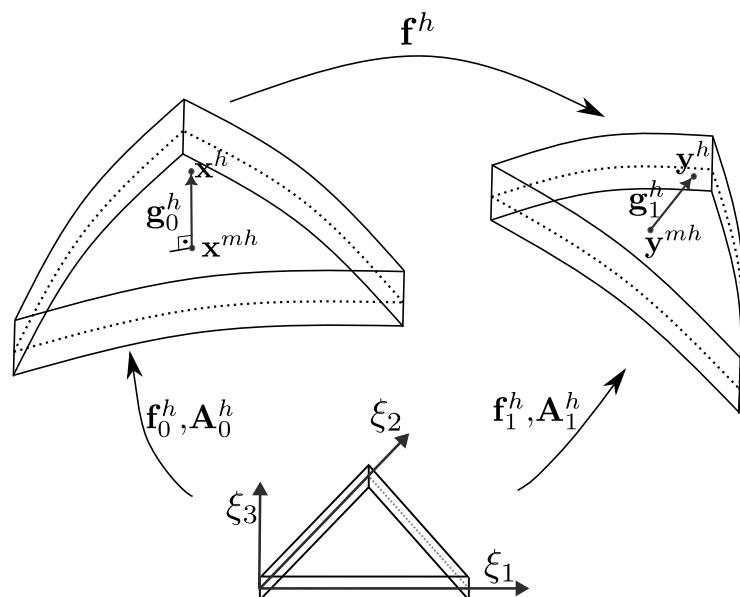
em que  $\xi_3$  é a coordenada adimensional na direção da espessura da casca, variando de -1 a 1.

Figura 42 – Mapeamento da superfície média da casca



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 43 – Vetores generalizados



Fonte: Elaborada pela autora

Os vetores generalizados  $\mathbf{g}_0^h$  e  $\mathbf{g}_1^h$  podem ser expressos por:

$$\mathbf{g}_0^h(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{h_0}{2} \xi_3 N_l(\xi_1, \xi_2) \cdot (\mathbf{e}_x)_l, \quad (4.46)$$

$$\mathbf{g}_1^h(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{h_0}{2} [\xi_3 + \eta_l N_l(\xi_1, \xi_2) \xi_3^2] N_l(\xi_1, \xi_2) \cdot (\mathbf{e}_y)_l, \quad (4.47)$$

onde  $h_0$  representa a espessura média inicial do elemento de casca,  $(\mathbf{e}_x)_l$  é o  $l$ -ésimo valor nodal do vetor unitário normal à linha de referência inicial,  $(\mathbf{e}_y)_l$  o  $l$ -ésimo valor nodal do vetor generalizado, de norma irrestrita, na configuração atual e  $\eta_l$  é o  $l$ -ésimo valor nodal da chamada de taxa linear de variação da espessura.

Dessa forma, a função mudança de configuração pode ser definida através da seguinte relação:

$$\mathbf{f}^h = \mathbf{f}_1^h \circ (\mathbf{f}_0^h)^{-1}. \quad (4.48)$$

De forma análoga pode-se representar o gradiente de  $\mathbf{f}^h$  como:

$$\mathbf{A}^h = \mathbf{A}_1^h \cdot (\mathbf{A}_0^h)^{-1}, \quad (4.49)$$

em que  $\mathbf{A}^h = \nabla_x \mathbf{f}^h$ ,  $\mathbf{A}_0^h = \frac{\partial \mathbf{f}_0^h}{\partial \xi}$  e  $\mathbf{A}_1^h = \frac{\partial \mathbf{f}_1^h}{\partial \xi}$ .

Assim, o alongamento à direta de Cauchy-Green e a deformação de Green podem ser escritos em função de  $\mathbf{A}_0^h$  e  $\mathbf{A}_1^h$ , como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{A}_1^h \cdot (\mathbf{A}_0^h)^{-1})^t \cdot (\mathbf{A}_1^h \cdot (\mathbf{A}_0^h)^{-1}), \quad (4.50)$$

e,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \left( (\mathbf{A}_1^h \cdot (\mathbf{A}_0^h)^{-1})^t \cdot (\mathbf{A}_1^h \cdot (\mathbf{A}_0^h)^{-1}) - \mathbf{I} \right). \quad (4.51)$$

Partindo do mapeamento apresentado é possível escrever o funcional de energia mecânica em função dos parâmetros nodais apresentados, e ao discretizar-se as equações no tempo, a solução do problema consiste encontrar os parâmetros nodais que satisfaçam:

$$\frac{\partial \Pi^h}{\partial \mathbf{y}_l^{mh}} = \frac{\partial \Pi^h}{\partial (\mathbf{e}_y)_l} = \frac{\partial \Pi^h}{\partial \eta_l} = \mathbf{0}. \quad (4.52)$$

### 4.3.2 Integração temporal e solução do problema não linear

Para a tornar o equacionamento mais compacto, reescreve-se o equilíbrio baseado na energia da variável  $\mathbf{Y}$ , que consiste em um vetor que contém todos os parâmetros nodais da estrutura (posições, vetores generalizados e taxa de variação linear da espessura) de forma que:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{Y}} = \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial \mathbf{Y}} + \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial \mathbf{Y}} + \frac{\partial \mathbb{U}_e}{\partial \mathbf{Y}} = \mathbf{0}, \quad (4.53)$$

ou ainda,

$$-\mathbf{F}^{ext}(t) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{F}^{int}(\mathbf{Y}) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{0}, \quad (4.54)$$

onde  $\mathbf{F}^{int}(\mathbf{Y})$  representa as forças internas provenientes da variação da energia potencial interna,  $\mathbf{M}$  é a conhecida como matriz de massa e  $\mathbf{F}^{ext}$  advém da variação da energia potencial das forças externas. O termo  $\mathbf{C}$  representa uma matriz de amortecimento viscoso e os pontos sobreescritos indicam derivadas materiais no tempo.

Neste trabalho, para a discretização temporal das equações, será utilizado o integrador de Newmark, visto que o mesmo demonstrou estabilidade e eficácia na vasta gama de trabalhos envolvendo o MEF posicional com sua aplicação (Carrazedo; Coda, 2010; Coda; Paccola, 2010, 2011; Greco; Coda, 2004; Sanches; Coda, 2016).

A integração temporal das equações inicia-se com a discretização do tempo de maneira que:

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t, \quad (4.55)$$

onde  $t_{n+1}$  representa o instante atual,  $t_n$  o instante final do passo de tempo anterior e  $\Delta t$  o intervalo do passo de tempo utilizado na discretização. Utilizando as aproximações de Newmark, posição, velocidade e aceleração nos instantes  $n + 1$  e  $n$  são relacionados por:

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + \Delta t \dot{\mathbf{Y}}_n + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{Y}}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{Y}}_{n+1}, \quad (4.56)$$

$$\dot{\mathbf{Y}}_{n+1} = \dot{\mathbf{Y}}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{Y}}_n + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{Y}}_{n+1}, \quad (4.57)$$

em que  $\beta$  e  $\gamma$  são parâmetros dependentes do comportamento assumido para a aceleração. Para um aceleração constante, hipótese adotada neste trabalho,  $\gamma = 1/2$  e  $\beta = 1/4$ .

Partindo da Equação (4.56) e Equação (4.57) é possível escrever a aceleração e a velocidade atual em função das posições no instante  $n + 1$ , as incógnitas do problema, e das demais variáveis do passo anterior:

$$\ddot{\mathbf{Y}}_{n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{Y}_{n+1} - \mathbf{Q}(t_n), \quad (4.58)$$

$$\dot{\mathbf{Y}}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{Y}_{n+1} + \mathbf{R}(t_n) - \gamma \Delta t \mathbf{Q}(t_n), \quad (4.59)$$

em que:

$$\mathbf{Q}(t_n) = \frac{\mathbf{Y}_n}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{\mathbf{Y}}_n}{\beta \Delta t} + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{Y}}_n, \quad (4.60)$$

$$\mathbf{R}(t_n) = \dot{\mathbf{Y}}_n + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{Y}}_n. \quad (4.61)$$

Utilizando a Equação (4.58) e Equação (4.59) na equação do equilíbrio em forma matricial (Equação (4.54)), tem-se para o instante  $t_{n+1}$  a seguinte relação:

$$\mathbf{F}_{n+1}^{int} - \mathbf{F}_{n+1}^{ext} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \mathbf{Y}_{n+1} - \mathbf{M} \mathbf{Q}_n + \mathbf{C} \mathbf{R}_n + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \mathbf{Y}_{n+1} - \gamma \Delta t \mathbf{C} \mathbf{Q}_n = \mathbf{0}, \quad (4.62)$$

Pode-se escrever ainda o problema não linear definido pela Equação (4.62) em função do resíduo da equação governante discretizada no espaço e no tempo, como:

$$\mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}) = \mathbf{F}_{n+1}^{int} - \mathbf{F}_{n+1}^{ext} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \mathbf{Y}_{n+1} - \mathbf{M} \mathbf{Q}_n + \mathbf{C} \mathbf{R}_n + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \mathbf{Y}_{n+1} - \gamma \Delta t \mathbf{C} \mathbf{Q}_n = \mathbf{0}. \quad (4.63)$$

O problema não linear da Equação (4.63) é resolvido por meio do método iterativo de Newton-Raphson. Para isso, realiza-se uma expansão em série de Taylor de primeira ordem:

$$\mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}^{i+1}) \approx \mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}^i) + \Delta \mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}^i) \Delta \mathbf{Y}_{n+1}^i \quad (4.64)$$

em que  $i$  indica o índice da iteração atual. Na primeira iteração para o cálculo de  $\mathbf{Y}_{n+1}$  utiliza-se como predição da iteração anterior os valores das variáveis no passo de tempo  $n$ . O método de Newton-Raphson consiste em resolver o seguinte sistema:

$$\Delta \mathbf{R}_S (\mathbf{Y}_{n+1}^i) \Delta \mathbf{Y}_{n+1}^i = -\mathbf{R}_S (\mathbf{Y}_{n+1}^i) \quad (4.65)$$

com:

$$\Delta \mathbf{R}_S (\mathbf{Y}_{n+1}^i) = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{Y}^2} = \frac{\partial^2 \mathbb{U}_e}{\partial \mathbf{Y}^2} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t}. \quad (4.66)$$

A cada iteração de Newton-Raphson atualiza-se a posição, a aceleração e a velocidade de acordo com as seguintes equações:

$$\mathbf{Y}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{Y}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{Y}_{n+1}^i \quad (4.67)$$

$$\ddot{\mathbf{Y}}_{n+1}^{i+1} = \frac{\mathbf{Y}_{n+1}^{i+1}}{\beta \Delta t^2} + \mathbf{Q}_n \quad (4.68)$$

$$\dot{\mathbf{Y}}_{n+1}^{i+1} = \frac{\gamma \mathbf{Y}_{n+1}^{i+1}}{\beta \Delta t} + \mathbf{R}_n - \gamma \Delta t \mathbf{Q}_n \quad (4.69)$$

Para mais detalhes a cerca da obtenção das matrizes e vetores do método, recomenda-se a consulta de Coda (2018).

#### 4.3.3 Implementação computacional

O código empregado para a simulação das estruturas de cascadas neste trabalho foi desenvolvido anteriormente dentro do grupo de pesquisas, sendo a versão utilizada aqui desenvolvida pelo doutorando Rosicley Junior Rodrigues Rosa, e empregada também no trabalho de mestrado de Yokomizo (2024), ambos do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos - USP.

O código foi desenvolvido em linguagem C++ utilizando paralelização em protocolo MPI e conta com elementos triangulares de 3, 6 ou 10 nós, respectivamente com aproximação linear, quadrática e cúbica. Ressalta-se que a implementação conta com uma estratégia de acoplamento entre elementos não coplanares, que pode ser vista em Coda (2018). O algoritmo que descreve a implementação computacional pode ser visualizado em Algoritmo 2. No algoritmo a variável  $\mathbf{X}$  consiste em um vetor das variáveis nodais na configuração inicial.

**Algoritmo 2** Algoritmo para problemas não lineares dinâmicos utilizando MEF posicional

---

```

1: Adota-se  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$ ;
2: para o passo de tempo 0 até  $npt - 1$  faz
3:    $i \leftarrow 0$ ;
4:   Predição da solução:
5:    $\mathbf{Y}_{n+1}^0 = \mathbf{Y}_n$ ;
6:    $\dot{\mathbf{Y}}_{n+1}^0 = \dot{\mathbf{Y}}_n$ ;
7:    $\ddot{\mathbf{Y}}_{n+1}^0 = \ddot{\mathbf{Y}}_n$ ;
8:   Calcula-se o nível de força aplicado  $\mathbf{F}_{n+1}^{ext}(t_{n+1})$  e/ou as posições prescritas  $\mathbf{Y}_{n+1}$ ;
9:   Calculam-se os valores de  $\mathbf{Q}_n$  (Equação (4.60)) e  $\mathbf{R}_n$  (Equação (4.61));
10:  enquanto  $\epsilon >$  tolerância faz
11:     $i \leftarrow i + 1$ ;
12:    Cálculo do incremento da variável do problema  $\mathbf{Y}_{n+1}^i$  de acordo com a Equa-
    ção (4.65);
13:    Atualização da solução de acordo com Equação (4.67), Equação (4.68) e Equa-
    ção (4.69);
14:    Cálculo do erro:
15:     $\epsilon = \|\Delta\mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}^{i+1})\|_{L^2}$  ou  $\epsilon = \|\Delta\mathbf{Y}_{n+1}^{i+1}\|_{L^2}$ ;
16:  fim enquanto
17:  Atualiza-se a solução do passo anterior:
18:   $\mathbf{Y}_n = \mathbf{Y}_{n+1}$ ;
19:   $\dot{\mathbf{Y}}_n = \dot{\mathbf{Y}}_{n+1}$ ;
20:   $\ddot{\mathbf{Y}}_n = \ddot{\mathbf{Y}}_{n+1}$ ;
21: fim para

```

---

**4.4 Exemplo de aplicação - casca cilíndrica com *snap through* dinâmico**

Nesta seção apresenta-se um problema clássico que trata-se de uma casca cilíndrica submetida a um carregamento concentrado em seu centro geométrico. Proposto inicialmente no trabalho de Kuhl e Ramm (1999), o problema apresenta grande não linearidade geométrica devido ao efeito de *snap-through*.

A geometria do problema em questão é apresentada na Figura 44a, sendo a espessura da casca equivalente a 0,1m. A malha de elementos finitos que representa a superfície média da estrutura utilizada pode ser visualizada na Figura 44b, a qual é composta por 104 elementos quadráticos e 233 nós.

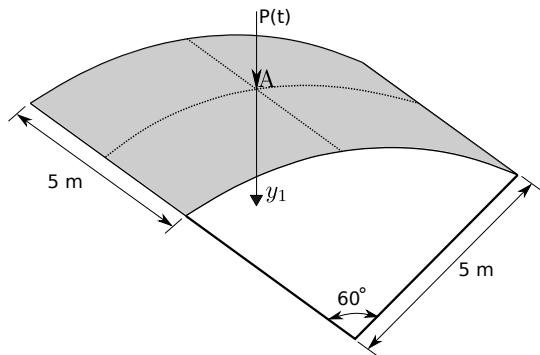
Os contornos esquerdo e direito da chapa são considerados simplesmente apoiados. O carregamento aplicado ao ponto central (ponto A)  $P(t)$  é aplicado linearmente no intervalo  $t = 0s$  até  $t = 0,2s$ , com  $P(0) = 0kN$  e  $P(2s) = 200000kN$ , e então mantido constante. As características físicas do material utilizado são:  $\mathbb{E} = 200GPa$ ,  $\nu = 0,25$  e  $\rho = 10000kg/m^3$  e o passo de tempo adotado na simulação é  $\Delta_t = 0,001s$ .

O deslocamento vertical do nó central da casca obtido nesse trabalho pode ser visualizado na Figura 45, enquanto que, para o autor de referência na Figura 46. O resultado obtido está de acordo com os resultados de Argyris, Papadrakakis e Mouroutis

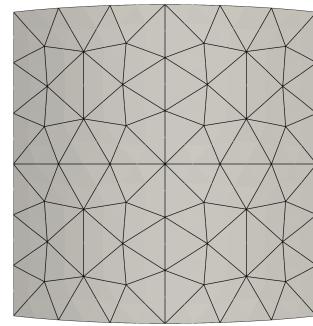
(2003). Os campos de deslocamentos para os instantes  $t = 140ms$ ,  $t = 165ms$ ,  $t = 174ms$  e  $t = 177ms$  são apresentados na Figura 47.

Figura 44 – Casca: Geometria e Malha

(a) Geometria

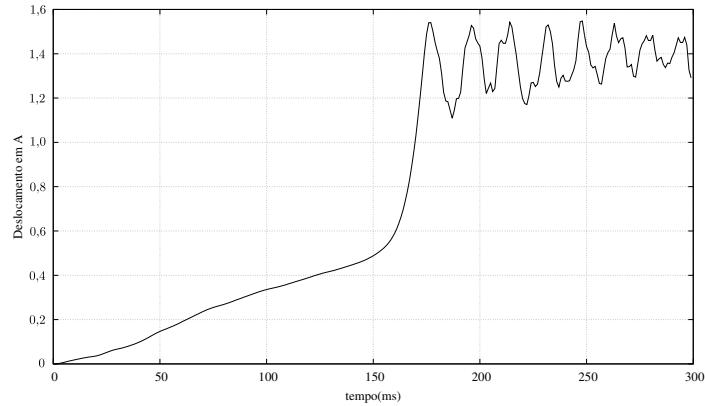


(b) Malha



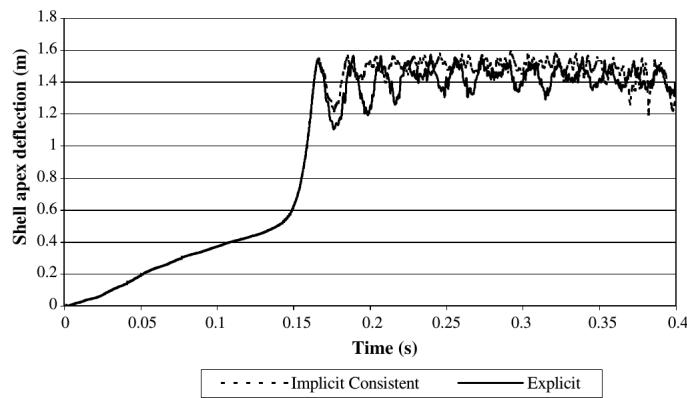
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 45 – Casca: Deslocamento vertical nó central A



Fonte: Elaborada pela autora

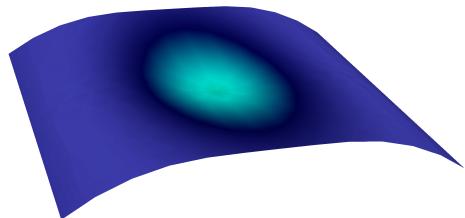
Figura 46 – Casca: Deslocamento vertical nó central A - referência



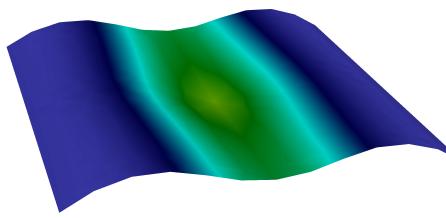
Fonte: Argyris, Papadrakakis e Mouroutis (2003)

Figura 47 – Casca: Campos de deslocamentos

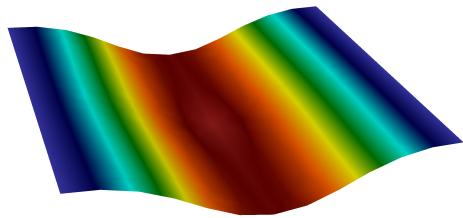
(a)  $t = 140ms.$



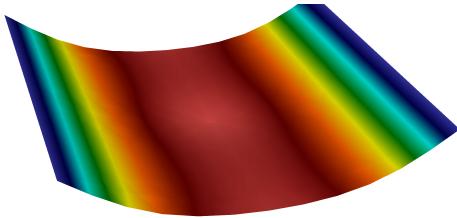
(b)  $t = 165ms.$



(c)  $t = 174ms.$



(d)  $t = 177ms.$



Fonte: Elaborada pela autora

## 5 TÉCNICA DE PARTIÇÃO DE DOMÍNIO POR COMBINAÇÃO DOS ESPAÇOS DE FUNÇÕES

A primeira técnica de partição de domínio considerada para combinar modelos global e local, Elementos Finitos - Isogeométrico, é denominada técnica de combinação de espaços de funções e foi introduzida nos trabalhos Rosa, Coda e Sanches (2022) e Sanches *et al.* (2019). Essa técnica consiste em ponderar os espaços de função local e global sobre uma zona de superposição e combiná-las formando um novo espaço enriquecido de funções base linearmente independentes.

Essa metodologia foi aplicada com bastante sucesso no campo da mecânica da fratura elástico-linear com grandes deslocamentos como pode ser visto nos trabalhos de Rosa (2021) e Rosa, Coda e Sanches (2022). Ressalta-se que, embora a técnica se mostre bastante promissora, no contexto da dinâmica dos fluidos computacional, especialmente quando associada às técnicas de estabilização empregadas neste trabalho, ainda é necessário um estudo mais aprofundado para a determinação de parâmetros de estabilização SUPG e PSPG adequados na região de superposição, e por isso foi descartada neste trabalho após alguns estudos. Essa conclusão foi obtida a partir das simulações realizadas ao longo deste doutorado. Para problemas de menor complexidade ou com baixos números de Reynolds, como o caso da cavidade apresentado na seção 5.5, os resultados foram bastante satisfatórios; contudo, para problemas mais complexos, foram observadas dificuldades de convergência quando aplicadas as técnicas SUPG e PSPG.

### 5.1 Técnica de combinação dos espaços de funções

Para o entendimento da técnica de partição de domínios define-se inicialmente um domínio global  $\Omega_G$  e um domínio local,  $\Omega_L$ , apresentados na Figura 48, sendo o domínio local menor que o global e contendo a região com efeitos localizados. O domínio total de estudo é então composto por:  $\Omega = \Omega_G \cup \Omega_L$ .

Os contornos físicos de  $\Omega$  (Figura 48c), podem ser divididos em  $\Gamma_G = (\Gamma_G)_D \cup (\Gamma_G)_N$ , relacionado ao domínio global, e,  $\Gamma_L = (\Gamma_L)_D \cup (\Gamma_L)_N$  relacionado ao domínio local, sendo os subíndices  $D$  e  $N$  respectivos aos contornos de Dirichlet e Neumann, respectivamente. É importante ressaltar que os contornos físicos podem ou não estar presentes, ou ainda, podem existir apenas condições de Dirichlet ou apenas condições de Neumann. O contorno não-físico  $(\Gamma_G)_B$  define o limite da influência do domínio global na região de superposição, enquanto que,  $(\Gamma_L)_B$  é o contorno que define o limite da influência do domínio local. Assim, a zona de superposição,  $\Omega_B$ , é definida como:  $\Omega_B = \Omega_G \cap \Omega_L$ , sendo limitada pelos contornos  $(\Gamma_L)_B$  e  $(\Gamma_G)_B$ .

Considerando um problema cujas funções tentativa nos domínios global e local

sejam caracterizadas respectivamente por  $u_G(\mathbf{y})$ , definida no espaço finito de funções  $\mathcal{S}_u^G$ , e  $u_L(\mathbf{y})$ , definida no espaço finito de funções  $\mathcal{S}_u^L$ , sendo as funções teste global  $w_G(\mathbf{y})$  e local  $w_L(\mathbf{y})$  definidas nos espaços  $\mathcal{V}_u^G$  e  $\mathcal{V}_u^L$ , respectivamente. A união direta dos espaços de funções na zona de superposição obviamente não resulta em um espaço que respeita a partição da unidade das funções de forma e nem garante a independência linear. Dessa forma, utiliza-se uma função ponderadora de combinação  $b(\mathbf{y})$ , de maneira que as funções tentativa e teste sejam:

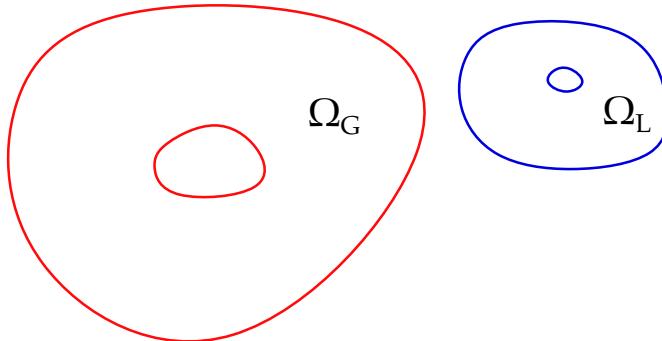
$$u(\mathbf{y}) = b(\mathbf{y})u_G(\mathbf{y}) + (1 - b(\mathbf{y}))u_L(\mathbf{y}), \quad (5.1)$$

$$w(\mathbf{y}) = b(\mathbf{y})w_G(\mathbf{y}) + (1 - b(\mathbf{y}))w_L(\mathbf{y}), \quad (5.2)$$

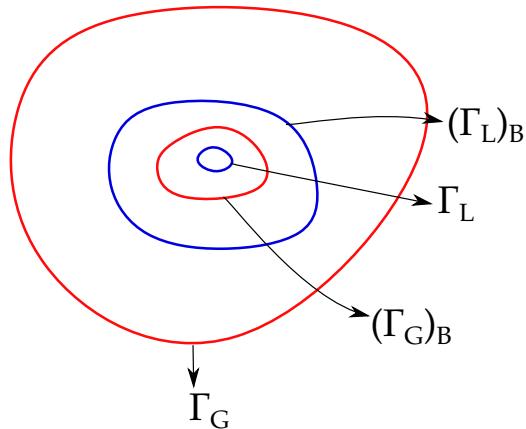
com  $b(\mathbf{y})$  apresentando valor unitário sobre o domínio global livre (sem superposições), valor zero no domínio local livre, e apresentando uma transição suave na região de superposição.

Figura 48 – Partição de domínios para a técnica dos espaços combinados

(a) Domínio Global      (b) Domínio Local



(c) Domínios sobrepostos



Fonte: Elaborada pela autora

Os espaços enriquecidos na região de superposição de malhas, são definidos por

$\mathcal{S}_{enr}$  e  $\mathcal{V}_{enr}$ , correspondentes às funções tentativa e teste, respectivamente. A solução de um problema típico de valor de contorno recai em encontrar  $u^h \in \mathcal{S}_{enr}$  tal que  $\forall w^h \in \mathcal{V}_{enr}$ :

$$B(u^h, w^h) = F(w^h), \quad (5.3)$$

com  $B(\bullet, \bullet)$  e  $F(\bullet)$  sendo operadores bilineares e lineares, respectivamente. A discretização de  $u^h(\mathbf{y})$  e  $w^h(\mathbf{y})$  no contexto dos elementos finitos é obtida através das seguintes relações:

$$u^h(\mathbf{y}) = \sum_{a=1}^{(n_{np})_G} (u_G)_a b(\mathbf{y})(N_G)_a(\mathbf{y}) + \sum_{a=1}^{(n_{np})_L} (u_L)_a (1 - b(\mathbf{y}))(N_L)_a(\mathbf{y}), \quad (5.4)$$

$$w^h(\mathbf{y}) = \sum_{a=1}^{(n_{np})_G} (w_G)_a b(\mathbf{y})(N_G)_a(\mathbf{y}) + \sum_{a=1}^{(n_{np})_L} (w_L)_a (1 - b(\mathbf{y}))(N_L)_a(\mathbf{y}), \quad (5.5)$$

com  $N_G$  e  $N_L$  sendo as funções de forma global e local; e  $(n_{np})_G$  e  $(n_{np})_L$  o número de funções de forma nas discretizações global e local respectivamente.

## 5.2 Função de combinação

Considerando que as funções  $b(\mathbf{y})(N_G)$  e  $(1 - b(\mathbf{y}))(N_L)$  sejam linearmente independentes sobre  $\Omega_B$ , e que as funções base local e global sejam discretizadas com polinômios de igual ordem  $p$  e constituam funções base independentes dentro das discretizações local e global, a escolha de  $b$  um grau acima das funções base, ou seja, grau  $p+1$ , irá proporcionar uma nova base de grau consistente com o número de funções base disponíveis em cada ponto da zona de superposição. A nova base, que continua sendo um polinômio de grau  $p$  fora do domínio de superposição, torna-se um polinômio de ordem  $2p+1$  dentro da zona de superposição, evitando dependência linear entre as funções de forma e cumprindo a partição da unidade.

Nesse trabalho aplicam-se funções de forma locais e globais de grau polinomial quadrático. Dessa forma, a função ponderadora de combinação foi definida como cúbica e é expressa por:

$$b(\mathbf{y}) = \begin{cases} 2 \left( \frac{Y_L(\mathbf{y})}{\delta(\mathbf{y})} \right)^3 - 3 \left( \frac{Y_L(\mathbf{y})}{\delta(\mathbf{y})} \right)^2 & \text{se } Y_G(\mathbf{y}) > 0 \text{ e } Y_L(\mathbf{y}) > 0 \\ 1 & Y_L(\mathbf{y}) \leq 0 \\ 0 & Y_G(\mathbf{y}) \leq 0 \end{cases}, \quad (5.6)$$

com  $Y_L(\mathbf{y})$  a função distância assinalada medida a partir de  $(\Gamma_L)_B$ , com valores positivos dentro do domínio local e negativos fora, e  $Y_G(\mathbf{y})$  a função distância assinalada medida

a partir de  $(\Gamma_G)_B$ , sendo positiva se o ponto pertence à  $\Omega_G$ , e negativa, caso contrário. Nota-se que os pontos em que ambas funções distância assinalada são positivas estão contidos dentro da zona de superposição. O parâmetro  $\delta$  é obtido por  $\delta(\mathbf{y}) = Y_L(\mathbf{y}) + Y_G(\mathbf{y})$ , e coincide com a espessura da zona de superposição quando  $(\Gamma_L)_B$  e  $(\Gamma_G)_B$  são paralelos.

Na prática, considera-se que o domínio global tem o tamanho do domínio total, ficando a definição de  $(\Gamma_G)_B$  para uma etapa posterior, baseado na forma do modelo local. Os elementos e nós da malha global, sem suporte físico após a obtenção do novo espaço de funções, são desativados da análise. O contorno  $(\Gamma_G)_B$  pode ser obtido através de uma réplica do contorno  $(\Gamma_L)_B$  a uma distância paralela  $\delta$  do mesmo.

Após a definição  $(\Gamma_G)_B$  é necessária uma metodologia eficiente para determinação das funções base globais com pequena influência dentro da zona de superposição, visto que essas podem levar a um sistema mal condicionado. Para resolver esse problema, utiliza-se, para todos os nós globais "a" da análise, uma variável definida como:

$$(M_G)_{aa} = \int_{\Omega} b(\boldsymbol{\xi}) N_a(\boldsymbol{\xi}) b(\boldsymbol{\xi}) N_a(\boldsymbol{\xi}) d\Omega, \quad (5.7)$$

e define-se um valor  $M_{min}$  para  $(M_G)_{aa}$ . Os nós globais são desativados se  $(M_G)_{aa} < M_{min}$ .

Na Figura 49 apresenta-se um exemplo unidimensional da técnica de partição de domínios. Na Figura 49a observam-se as funções globais definidas inicialmente sobre todo o domínio, e a função ponderadora de modificação  $b(y)$  com valor unitário sobre o domínio global livre e com transição suave sobre a região de superposição. Na Figura 49b representam-se as funções locais definidas somente no domínio local e a função ponderadora de modificação  $1 - b(y)$  com valor unitário sobre o domínio local livre e com transição suave sobre a zona de superposição. Por fim, na Figura 49c apresenta-se o novo espaço de funções independentes que cumprem com a partição da unidade e possuem grau polinomial 5. Nota-se nessa figura a desativação das funções de forma globais que estão sobre o domínio local livre.

### 5.3 Aplicação da técnica à dinâmica dos fluidos computacional

Para o emprego da metodologia nas análises da DFC as aproximações apresentadas na Equação (5.4) e Equação (5.5) devem ser aplicadas nas funções tentativa para velocidade e pressão, e nas funções teste associadas à elas, apresentadas na Equação (2.49) à Equação (2.52).

Conforme relatado, os parâmetros de estabilização utilizados na técnica da DFC ainda necessitam de um estudo mais aprofundado, entretanto, para estudos iniciais, fez-se a combinação dos parâmetros calculados em cada uma das discretizações sobre a zona de superposição:

$$\tau_{\text{SUPG}}(\mathbf{y}) = b(\mathbf{y})(\tau_{\text{SUPG}})^G(\mathbf{y}) + (1 - b(\mathbf{y}))(\tau_{\text{SUPG}})^L(\mathbf{y}), \quad (5.8)$$

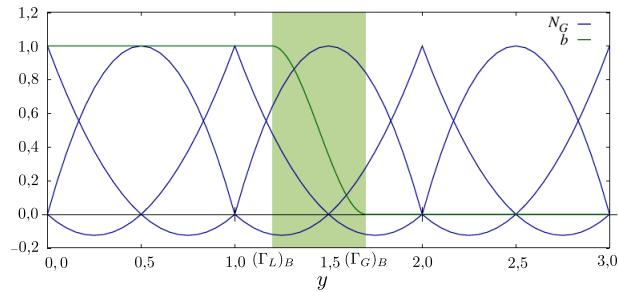
$$\tau_{\text{PSPG}}(\mathbf{y}) = b(\mathbf{y})(\tau_{\text{PSPG}})^G(\mathbf{y}) + (1 - b(\mathbf{y}))(\tau_{\text{PSPG}})^L(\mathbf{y}), \quad (5.9)$$

$$\nu_{\text{LSIC}}(\mathbf{y}) = b(\mathbf{y})(\nu_{\text{LSIC}})^G(\mathbf{y}) + (1 - b(\mathbf{y}))(\nu_{\text{LSIC}})^L(\mathbf{y}), \quad (5.10)$$

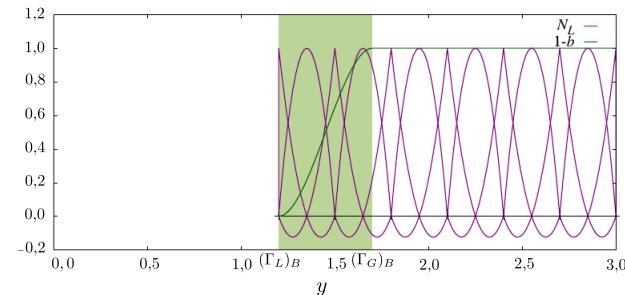
com  $(\tau_{\text{SUPG}})^G$ ,  $(\tau_{\text{PSPG}})^G$  e  $(\nu_{\text{LSIC}})^G$  os parâmetros de estabilização calculados na malha global;  $(\tau_{\text{SUPG}})^L$ ,  $(\tau_{\text{PSPG}})^L$  e  $(\nu_{\text{LSIC}})^L$  os parâmetros de estabilização calculados na malha local, todos conforme Equação 2.77 e Equação 2.78.

Figura 49 – Espaços de funções na técnica de partição de domínios - Problema unidimensional

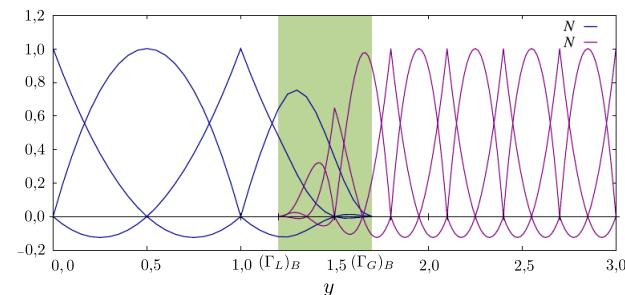
(a) Funções globais e função ponderadora ( $b$ ).



(b) Funções locais e função ponderadora ( $1 - b$ )



(c) Novo espaço de funções



Fonte: Sanches *et al.* (2019)

## 5.4 Implementação computacional

O método dos espaços de funções combinados foi implementado para a solução de escoamentos incompressíveis seguindo a formulação apresentada no Capítulo 2 e Capítulo 3. Nesse código, após a leitura dos dados respectivos às malhas global e local, segue-se com a definição da distância assinalada respectiva a todos os nós da malha global e da malha local com respeito aos contornos  $(\Gamma_G)_B$  e  $(\Gamma_L)_B$ , respectivamente. O contorno  $(\Gamma_G)_B$  é obtido a partir dos dados de entrada, onde define-se a espessura da zona de superposição. De posse da distância assinalada e espessura da zona de superposição, são definidos quais elementos das malhas local e global fazem parte da zona de superposição. Qualquer elemento que possua um ou mais nós dentro da zona de superposição é considerado como um elemento que contribui com ela.

As equações na região de superposição são integradas sobre o elemento local, dessa forma, no pré-processamento, os pontos de integração da malha local são projetados sobre a malha global e o elemento global e suas coordenadas paramétricas correspondentes a cada ponto são armazenados.

Na etapa de pré-processamento, são determinados ainda os nós inativos da malha global, sejam porque o domínio de suas funções de forma encontram-se fora da zona de superposição, ou, porque possuem pequena influência dentro da mesma, de acordo com a expressão apresentada na Equação (5.7).

Finalmente, o processo de marcha no tempo se inicia da maneira explicitada no Algoritmo 1 levando-se em consideração que as funções tentativa e peso, e os parâmetros de estabilização são modificados de acordo com o apresentado neste capítulo. O algoritmo que descreve esse processo de solução pode ser visualizado no Algoritmo 3.

## 5.5 Exemplo - cavidade com partição de domínio e combinação MEF-IGA

Para verificar a metodologia de partição de domínios com superposição de malhas, neste item apresenta-se a solução estacionária do problema de Navier Stokes para a cavidade 2D.

A geometria do problema e suas condições contorno são apresentadas na Figura 50. O problema foi avaliado para um número de Reynolds = 100, calculado de acordo com Equação (2.106) e  $\rho = 1,0$ .

Sabe-se que nas paredes da cavidade podem haver efeitos de camada limite, dessa forma, definiu-se uma malha local que circunda a cavidade de acordo com a Figura 51a. A malha local foi discretizada através de uma aproximação isogeométrica e foi definida com 1440 pontos de controle que foram divididos em 8 diferentes *patches*, chamados de  $P_1, P_2, \dots, P_8$ . Os *patches*  $P_1, P_3, P_6$  e  $P_7$  possuem 64 células e os  $P_2, P_4, P_5$  e  $P_7$  192 células.

---

**Algoritmo 3** Algoritmo para problemas da dinâmica dos fluidos computacional com a técnica de partição de domínios por combinação dos espaços de funções

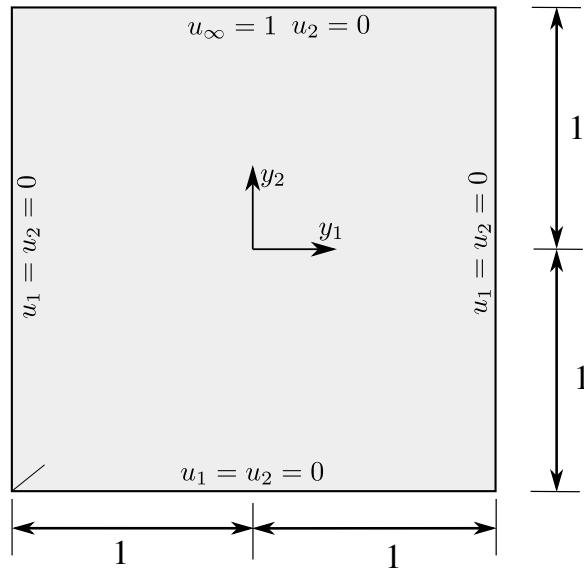
---

- 1: Cálculo da distância assinalada dos nós e pontos de controle aos contornos;
- 2: Determinação dos elementos e células da zona de superposição;
- 3: Busca da correspondência dos pontos de integração da malha local na malha global;
- 4: Definição dos nós inativos da malha global;
- 5: **para** o passo de tempo 0 até  $npt - 1$  **faça**
- 6:   *i* = 0;
- 7:   Predição da solução: aplicação das Equação (2.92), Equação (2.93) e Equação (2.94);
- 8:   **enquanto** ( $\epsilon <$  tolerância) **faça**
- 9:     *i*++;
- 10:    Interpolação das variáveis do problema: aplicação da Equação (2.95), Equação 2.96 e Equação (2.97);
- 11:    Cálculo do incremento nas variáveis do problema:  $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$  e  $\mathbf{p}_{n+1}$  de acordo com as Equação (2.98) e Equação (2.99);
- 12:    Atualização da solução: calculadas de acordo com Equação (2.100), Equação (2.101) e Equação (2.102).
- 13:    Cálculo do erro:

$$\epsilon = \left\| \mathbf{R}_M^i \right\|_{L^2} \quad (5.11)$$

- 14:   **fim enquanto**
  - 15:   Atualização das variáveis do passo anterior;
  - 16: **fim para**
- 

Figura 50 – Cavidade: geometria e condições de contorno

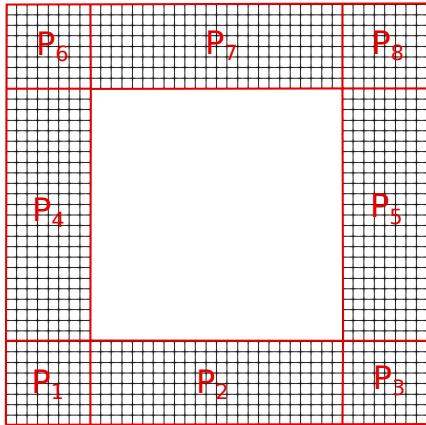


Fonte: Elaborada pela autora

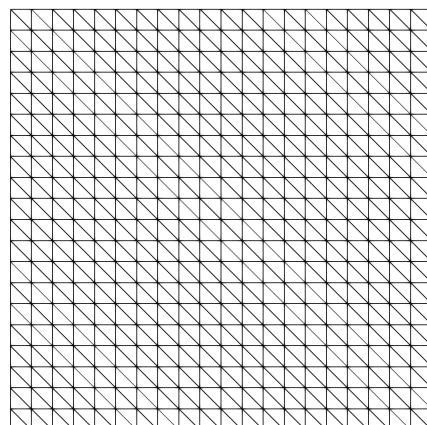
A malha global por sua vez é definida para toda a seção da cavidade, sendo composta por 800 elementos triangulares quadráticos e 1681 nós, de acordo com Figura 51b.

Figura 51 – Cavidade 2D: Malhas Global e Local

(a) Malha Local



(b) Malha Global

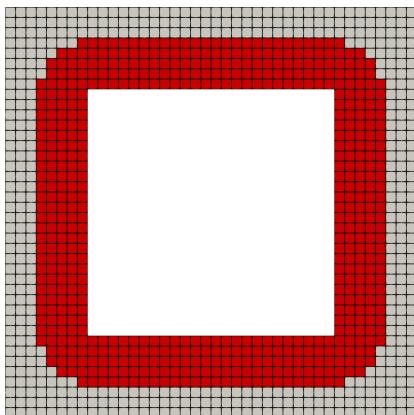


Fonte: Elaborada pela autora

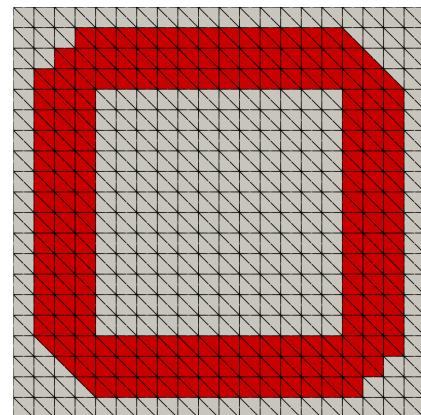
Definiu-se uma espessura para a zona de superposição equivalente a  $\delta = 0,1$  e medida paralelamente ao contorno fictício local ( $\Gamma_L$ )<sub>B</sub>. As células e elementos pertencentes à zona de superposição, tanto para a malha local quanto para a malha global, podem ser vistos na Figura 52a e Figura 52b, respectivamente.

Figura 52 – Cavidade 2D: Zona de superposição

(a) Malha Local



(b) Malha Global

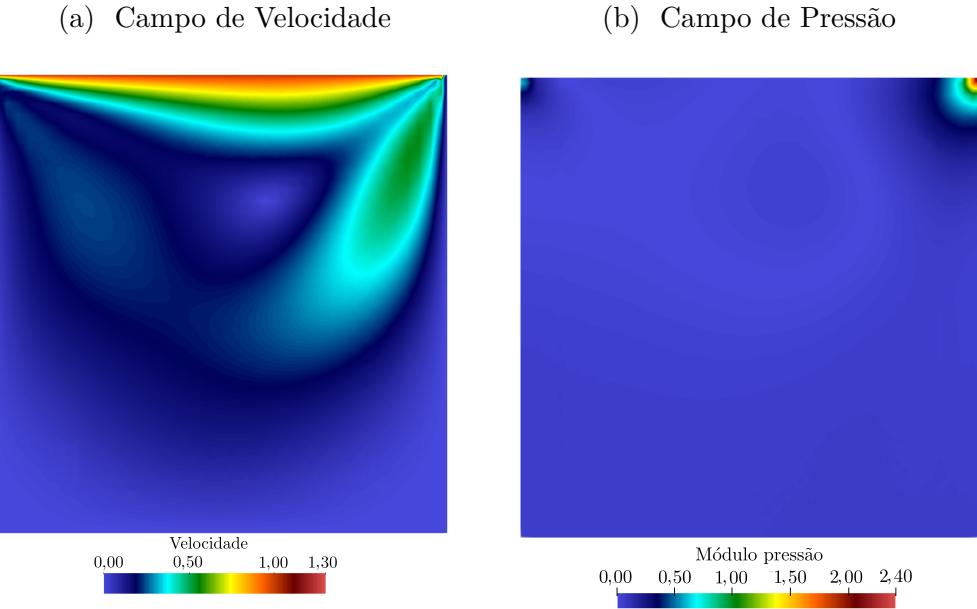


Fonte: Elaborada pela autora

Os campos de velocidade e pressão obtidos são apresentados nas Figura 53a e Figura 53b. Os perfis de velocidade adimensionalizados ( $\mathbf{u}/\mathbf{u}_\infty$ ) horizontal e vertical ao

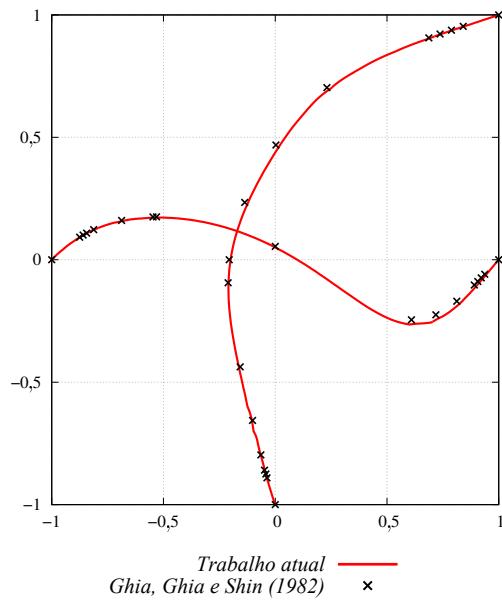
longo de duas linhas centrais nas direções  $y_1$  e  $y_2$  da cavidade são apresentados na Figura 54 e comparados com os resultados de Ghia, Ghia e Shin (1982).

Figura 53 – Cavidade 2D: Solução do problema de Navier Stokes para  $Re = 100$



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 54 – Cavidade 2D: Perfis de velocidade



Fonte: Elaborada pela autora



## 6 TÉCNICA DE DECOMPOSIÇÃO DE DOMÍNIOS ATRAVÉS DO MÉTODO ARLEQUIN ESTABILIZADO - RBSAM

Com intuito de superar as dificuldades encontradas com a técnica de partição de domínios apresentada no Capítulo 5, considera-se o método Arlequin, que permite também levar em conta efeitos localizados através do uso de um modelo local mais refinado superposto a um modelo global com discretização mais grosseira. No método Arlequin, o acoplamento entre os modelos é realizado através da sobreposição e colagem entre dois modelos em uma região denominada zona de colagem através de multiplicadores de Lagrange.

A primeira parte deste capítulo descreve o método clássico de Arlequin, introduzido por Dhia (1998). Em seguida, é apresentada a forma estabilizada do método (RBSAM) proposta por Fernandes *et al.* (2020) no contexto de escoamentos incompressíveis, seguida da extensão dessa metodologia para problemas com contornos móveis. Por fim são apresentados o algoritmo implementado e exemplos de validação.

### 6.1 Método Arlequin

O método Arlequin foi introduzido por Dhia (1998), e é baseado em três principais ideias (ver Figura 55) (Dhia; Rateau, 2005):

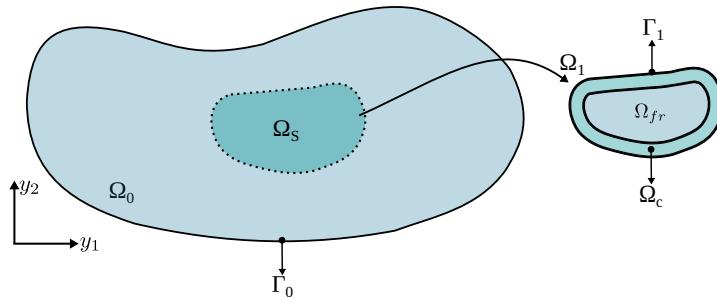
- Um domínio local  $\Omega_1$  é superposto em um domínio global  $\Omega_0$  em uma zona de interesse de modo a representar efeitos localizados;
- Os modelos são colados um ao outro em uma subzona da zona de superposição ( $\Omega_s$ ), chamada de zona de colagem ( $\Omega_c$ ), através de um operador de acoplamento conveniente;
- Garante-se a distribuição da energia entre os modelos através do emprego de uma função ponderadora, definida a partir da partição da unidade;

Dessa forma, o domínio computacional do problema é definido por:

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_1, \quad (6.1)$$

e a zona de superposição  $\Omega_s$  é definida da seguinte forma:

Figura 55 – Domínio local e global



Fonte: Elaborada pela autora

$$\Omega_s = \Omega_0 \cap \Omega_1, \quad (6.2)$$

$$\Omega_s = \Omega_c \cup \Omega_{fr}, \quad (6.3)$$

$$\Omega_s > 0, \quad (6.4)$$

sendo  $\Omega_{fr}$  a chamada zona livre.

Umas das formas mais comuns de se realizar o acoplamento entre domínios é através de campos de multiplicadores de Lagrange. Uma forma generalizada de representar os operadores de acoplamento, conforme Dhia e Rateau (2002), é:

$$(\boldsymbol{\lambda}, \Delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega_c} k_0 [\boldsymbol{\lambda} \cdot \Delta \mathbf{u}] + k_1 [\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u})] d\Omega_c, \quad (6.5)$$

onde  $\boldsymbol{\lambda}$  é o campo de multiplicadores de Lagrange,  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_0|_{\Omega_c} - \mathbf{u}_1|_{\Omega_c}$  é a diferença entre os campos acoplados na zona de colagem;  $k_0$  e  $k_1$  são constantes estritamente positivas.

Quando  $k_0 > 0$  e  $k_1 = 0$  têm-se o operador de acoplamento  $L^2$ . Esse operador estabelece a continuidade de ordem 0 do campo compatibilizado, o que significa que ele garante, de forma fraca, a continuidade das variáveis ao longo da zona de colagem. Para valores  $k_0 > 0$  e  $k_1 > 0$  obtém-se o operador de acoplamento  $H^1$ , estabelecendo continuidade de ordem 1 do campo compatibilizado, garantindo, de forma fraca, a continuidade de uma combinação de variáveis e seu Laplaciano (Guidault; Belytschko, 2007).

O sucesso do método depende da escolha apropriada dos parâmetros  $k_0$  e  $k_1$ . Para o acoplamento utilizando  $L^2$ , devido a simplicidade da aplicação da restrição dos campos compatibilizados na zona de colagem, o condicionamento do sistema depende fortemente do valor do parâmetro  $k_0$ , sendo esta uma das razões pela qual a maioria dos trabalhos realizados com o método Arlequin empregam o operador  $H^1$ . A obtenção de parâmetros ótimos para o método pode ser uma tarefa difícil, sendo esse um dos fatores que levaram

Fernandes *et al.* (2020) ao desenvolvimento da técnica RBSAM que será discutida na próxima seção.

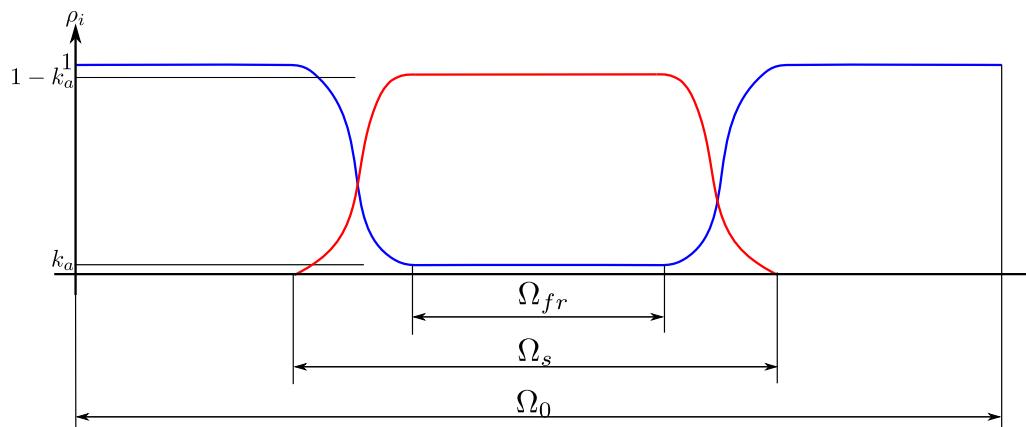
A definição do espaço de funções para o multiplicador de Lagrange é muito importante. O método apresenta flexibilidade para usar uma discretização diferente da zona de colagem, entretanto, usualmente se adota um subconjunto do espaço de funções de um dos modelos sobrepostos. A escolha por um modelo ou outro pode conduzir a um maior ou menor acoplamento, sendo a escolha definida em função da aplicação desejada.

Por fim, para que o método não adicione energia ao sistema, é necessário que seja definida uma função ponderadora, denominada ( $\alpha$ ), que garanta a distribuição da energia do sistema ao longo dos modelos superpostos. Em geral, essa função é definida da seguinte forma:

$$\begin{cases} \alpha_0 \in [ka; 1] \text{ em } \Omega, \\ \alpha_0 = 1 \text{ em } \Omega_0 \setminus \Omega_1, \\ \alpha_0 = k_a > 0 \text{ em } \Omega_{fr}, \\ \alpha_0 + \alpha_1 = 1 \text{ em } \Omega, \end{cases} \quad (6.6)$$

com  $k_a$  uma constante arbitrariamente pequena para o método de Arlequin ser relevante (Dhia, 2008), conforme pode ser observado na Figura 56.

Figura 56 – Função Ponderadora



Fonte: Elaborada pela autora

## 6.2 Método Arlequin clássico aplicado a problemas de escoamentos incompressíveis

O método Arlequin vem sendo aplicado amplamente em diversos trabalhos da mecânica dos sólidos nas últimas décadas. No que diz respeito a materiais incompressíveis, pode-se citar o trabalho de Jamond e Dhia (2013), no qual os autores desenvolvem uma

técnica para análise empregando elementos do tipo Taylor-Hood, que satisfazem a condição LBB. Essa metodologia é testada também para problemas descritos pelas equações de Stokes.

De acordo com os autores Jamond e Dhia (2013) a principal dificuldade encontrada para aplicação do método Arlequin no contexto de materiais incompressíveis é que duas restrições devem ser aplicadas concomitantemente: a compatibilização dos campos de interesse na zona de colagem e a condição de incompressibilidade do material nessa mesma região. Os autores apontaram que a imposição da condição de incompressibilidade em ambos os modelos pode gerar problema de redundância, acarretando em um sistema algébrico associado singular.

A solução proposta por Jamond e Dhia (2013) no trabalho foi a aplicação da condição de incompressibilidade em cada ponto do domínio computacional apenas uma vez. A metodologia consiste então em escolher um dos modelos no qual é removida a condição de incompressibilidade dos elementos total ou parcialmente localizados na zona de colagem ( $\Omega_c$ ). Indiferente do modelo eleito para a remoção da condição de incompressibilidade na zona de colagem, na zona livre, a condição de incompressibilidade é removida do modelo global. Deve-se destacar que, no trabalho citado, existem algumas recomendações com relação a estabilidade da metodologia, como por exemplo, a necessidade de existir pelo menos um elemento global na zona livre. Tal trabalho não explora as possíveis mudanças que acarretariam na estabilidade numérica em caso de sucessivas remoções e inclusões de condição de incompressibilidade no caso de um modelo local móvel.

Por esse motivo, neste trabalho, opta-se pela adoção da formulação estabilizada. Para a construção do método Arlequin é necessário retornar às equações para um monomodelo apresentadas no Capítulo 2, as quais representam a forma fraca estabilizada das equações da quantidade de movimento e da continuidade. Entretanto, será usada inicialmente uma descrição Euleriana das equações.

Considerando os espaços de dimensão finita das funções tentativa que descrevem a velocidade ( $\mathcal{S}_{ui}^h$ ) e a pressão ( $\mathcal{S}_{pi}^h$ ), bem como seus respectivos espaços de funções testes  $\mathcal{V}_{ui}^h$  e  $\mathcal{V}_{pi}^h$ , com  $i = 0, 1$  indicando o índice do modelo, definidos como:

$$\mathcal{S}_{ui}^h = \left\{ \mathbf{u}_i^h \mid \mathbf{u}_i^h(\cdot, t) \in (H^{1h}(\Omega_i), \mathbf{u}_i^h = \mathbf{u}_{Di}^h \text{ em } \Gamma_{Di}) \right\} \quad (6.7)$$

$$\mathcal{S}_{pi}^h = \left\{ p_i^h \mid p_i^h(\cdot) \in L^{2h}(\Omega_i) \right\}, \quad (6.8)$$

$$\mathcal{V}_{ui}^h = \left\{ \mathbf{w}_i^h \mid \mathbf{w}_i^h(\cdot) \in H^{1h}(\Omega_i), \mathbf{w}_i^h = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_{Di} \right\}, \quad (6.9)$$

e

$$\mathcal{V}_{pi}^h = \mathcal{S}_{pi}^h. \quad (6.10)$$

Analogamente, os espaços das funções tentativa ( $\mathcal{M}^h$ ) e teste ( $\mathcal{Q}^h$ ) para o campo dos multiplicadores de Lagrange ( $\boldsymbol{\lambda}$ ) são definidos como:

$$\mathcal{M}^h = \left\{ \boldsymbol{\lambda}^h \mid \boldsymbol{\lambda}^h(\cdot) \in H^{1h}(\Omega_c) \right\} \quad (6.11)$$

$$\mathcal{Q}^h = \mathcal{M}^h. \quad (6.12)$$

A aplicação do operador de acoplamento  $L^2$  à formulação clássica Arlequin consiste em, dados os espaços tentativa e teste apresentados nas equações anteriores, encontrar  $(\mathbf{u}_0^h, p_0^h, \mathbf{u}_1^h, p_1^h, \boldsymbol{\lambda}^h) \in \mathcal{S}_{u0}^h \times \mathcal{S}_{p0}^h \times \mathcal{S}_{u1}^h \times \mathcal{S}_{p1}^h \times \mathcal{M}^h$  de maneira que  $\forall \mathbf{w}_0^h \in \mathcal{V}_{u0}^h, q_0^h \in \mathcal{V}_{p0}^h, \mathbf{w}_1^h \in \mathcal{V}_{u1}^h, q_1^h \in \mathcal{V}_{p1}^h$ , e  $\forall \boldsymbol{\zeta}^h \in \mathcal{Q}^h$ :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_0^h}{\partial t} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot (\mathbf{u}_0^h \cdot \boldsymbol{\nabla}_y) \mathbf{u}_0^h d\Omega_0 \\ & + \int_{\Omega_0} \alpha_0 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_0^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_0 \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{SUPG}} ((\mathbf{u}_0^h \cdot \boldsymbol{\nabla}_y) \mathbf{w}_0^h) \cdot \mathbf{r}_{M0}^h(\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_0 \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \nu_{\text{LSIC}} \boldsymbol{\nabla}_y \cdot \mathbf{w}_0^h r_{C0}^h(\mathbf{u}_0^h) d\Omega_0 + \chi_0 \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_0^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h d\Omega_c \\ & = \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot \mathbf{f}_0^h d\Omega_0 + \int_{\Gamma_{N0}} \alpha_0 \mathbf{w}_0^h \cdot \mathbf{h}_0^h d\Gamma_{N0}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\int_{\Omega_0} \alpha_0 q_0^h \boldsymbol{\nabla}_y \cdot \mathbf{u}_0^h d\Omega_0 + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{PSPG}} \left( \frac{\boldsymbol{\nabla}_y q_0^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_{M0}^h(\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_0 = 0, \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_1^h}{\partial t} d\Omega_1 + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot (\mathbf{u}_1^h \cdot \boldsymbol{\nabla}_y) \mathbf{u}_1^h d\Omega_1 \\ & + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_1^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{SUPG}} ((\mathbf{u}_1^h \cdot \boldsymbol{\nabla}_y) \mathbf{w}_1^h) \cdot \mathbf{r}_{M1}^h(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \nu_{\text{LSIC}} \boldsymbol{\nabla}_y \cdot \mathbf{w}_1^h r_{C1}^h(\mathbf{u}_1^h) d\Omega_1 + \chi_1 \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_1^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h d\Omega_c \\ & = \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{f}_1^h d\Omega_1 + \int_{\Gamma_{N1}} \alpha_1 \mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{h}_1^h d\Gamma_{N1}, \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\int_{\Omega_1} \alpha_1 q_1^h \nabla_y \cdot \mathbf{u}_1^h \, d\Omega_1 + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{PSPG} \left( \frac{\nabla_y q_1^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_{M1}^h (\mathbf{u}_1^h, p_1^h) \, d\Omega_1 = 0, \quad (6.16)$$

$$\int_{\Omega_c} \boldsymbol{\zeta}^h \cdot (\mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_1^h) \, d\Omega_c = 0, \quad (6.17)$$

onde  $\mathbf{r}_{Mi}^h$  e  $r_{Ci}^h$  são os resíduos da equação da quantidade de movimento e da equação da continuidade respectivamente, dados por:

$$\mathbf{r}_{Mi}^h (\mathbf{u}_i^h, p_i^h, \boldsymbol{\lambda}^h) = \alpha_i \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}_i^h}{\partial t} + (\mathbf{u}_i^h \cdot \nabla_y) \mathbf{u}_i^h - \mathbf{f}_i^h \right) - \alpha_i \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{u}_i^h, p_i^h) + \chi_i \boldsymbol{\lambda}^h, \quad (6.18)$$

$$r_{Ci}^h (\mathbf{u}_i^h) = \alpha_i \nabla_y \cdot \mathbf{u}_i^h, \quad (6.19)$$

com  $\chi_i$  descrito da maneira que se segue:

$$\chi_i = \begin{cases} (-1)^i & \text{se } \mathbf{y} \in \Omega_c \\ 0 & \text{se } \mathbf{y} \notin \Omega_c. \end{cases} . \quad (6.20)$$

O problema descrito pela Equação (6.13) à Equação (6.17) é à versão clássica do método de Arlequin para o problema de Navier-Stokes estabilizado pela técnica PSPG/SUPG. Matematicamente trata-se de um problema de ponto de sela decorrente de uma formulação mista. Entretanto, desde que a condição LBB seja satisfeita, existe solução para o problema e ela é única.

Em Guidault e Belytschko (2007) pode-se encontrar uma vasta análise matemática acerca das questões relacionadas com estabilidade, convergência e relevância do método. Os autores relatam, por exemplo, a necessidade de emprego de funções ponderadoras contínuas quando utilizado o operador de acoplamento  $L^2$ , o que não ocorre com o operador  $H^1$ . Além disso, os autores destacam que espaços muito refinados para os multiplicadores de Lagrange podem levar a uma solução não convergente, independente do tipo de operador de acoplamento. Esse problema ocorre devido à forte dependência da discretização do modelo global na solução.

O problema descrito no método Arlequin clássico é análogo a formulação mista em elementos finitos para escoamentos incompressíveis, que limita a escolha das funções aproximadoras para o campo de velocidade e pressão. No caso da mecânica dos fluidos,

conforme apresentado no Capítulo 2, uma forma de superar as restrições LBB é o uso de métodos estabilizados como o PSPG. Seguindo essa mesma filosofia, Fernandes *et al.* (2020) introduzem uma técnica de estabilização consistente que será apresentada na seguinte seção.

### 6.3 Método Arlequin estabilizado aplicado à problemas de escoamentos incompressíveis

Com intuito de superar a condição LBB para o método Arlequin, Fernandes *et al.* (2020) desenvolvem uma técnica de estabilização consistente baseada em resíduo. Para isso, introduz-se uma parcela adicional à equação dos campos de multiplicadores de Lagrange, que leva em conta o gradiente de  $\zeta^h$  e o resíduo da equação da quantidade de movimento:

$$\sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_c^e} \frac{\tau_{ARLQ0}}{\rho} \nabla_y \zeta^h : \nabla_y \mathbf{r}_{M0}^h (\mathbf{u}_0^h, p_0^h) \, d\Omega_c - \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_c^e} \frac{\tau_{ARLQ1}}{\rho} \nabla_y \zeta^h : \nabla_y \mathbf{r}_{M1}^h (\mathbf{u}_1^h, p_1^h) \, d\Omega_c, \quad (6.21)$$

sendo  $\tau_{ARLQ0}$  e  $\tau_{ARLQ1}$  parâmetros de estabilização, respectivamente da malha global e local. A obtenção destes parâmetros será abordada na subseção seguinte.

Dessa forma, pode-se definir a solução do problema de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis utilizando a técnica de Arlequin estabilizada da seguinte forma: Encontrar  $(\mathbf{u}_0^h, p_0^h, \mathbf{u}_1^h, p_1^h, \boldsymbol{\lambda}^h) \in \mathcal{S}_{u0}^h \times \mathcal{S}_{p0}^h \times \mathcal{S}_{u1}^h \times \mathcal{S}_{p1}^h \times \mathcal{M}^h$  de maneira que  $\forall \mathbf{w}_0^h \in \mathcal{V}_{u0}^h$ ,  $q_0^h \in \mathcal{V}_{p0}^h$ ,  $\mathbf{w}_1^h \in \mathcal{V}_{u1}^h$ ,  $q_1^h \in \mathcal{V}_{p1}^h$ , e  $\forall \zeta^h \in \mathcal{Q}^h$ :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_0^h}{\partial t} \, d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot (\mathbf{u}_0^h \cdot \nabla_y) \mathbf{u}_0^h \, d\Omega_0 \\ & + \int_{\Omega_0} \alpha_0 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_0^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_0^h, p_0^h) \, d\Omega_0 \\ & + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_e} \tau_{\text{SUPG}} ((\mathbf{u}_0^h \cdot \nabla_y) \mathbf{w}_0^h) \cdot \mathbf{r}_{M0}^h (\mathbf{u}_0^h, p_0^h) \, d\Omega_e \\ & + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_e} \nu_{\text{LSIC}} \nabla_y \cdot \mathbf{w}_0^h r_{C0}^h (\mathbf{u}_0^h) \, d\Omega_e + \chi_0 \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_0^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h \, d\Omega_c \\ & = \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot \mathbf{f}_0^h \, d\Omega_0 + \int_{\Gamma_{N0}} \alpha_0 \mathbf{w}_0^h \cdot \mathbf{h}_0^h \, d\Gamma_{N0}, \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$\int_{\Omega_0} \alpha_0 q_0^h \nabla_y \cdot \mathbf{u}_0^h \, d\Omega_0 + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_e} \tau_{\text{PSPG}} \left( \frac{\nabla_y q_0^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_{M0}^h (\mathbf{u}_0^h, p_0^h) \, d\Omega_e = 0, \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_1^h}{\partial t} d\Omega_1 + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot (\mathbf{u}_1^h \cdot \boldsymbol{\nabla}_y) \mathbf{u}_1^h d\Omega_1 \\
& + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_1^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{SUPG} ((\mathbf{u}_1^h \cdot \boldsymbol{\nabla}_y) \mathbf{w}_1^h) \cdot \mathbf{r}_{M1}^h (\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \nu_{LSIC} \boldsymbol{\nabla}_y \cdot \mathbf{w}_1^h r_{C1}^h (\mathbf{u}_1^h) d\Omega_1 + \chi_1 \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_1^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h d\Omega_c \\
& = \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{f}_1^h d\Omega_1 + \int_{\Gamma_{N1}} \alpha_1 \mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{h}_1^h d\Gamma_{N1},
\end{aligned} \tag{6.24}$$

$$\int_{\Omega_1} \alpha_1 q_1^h \boldsymbol{\nabla}_y \cdot \mathbf{u}_1^h d\Omega_1 + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{PSPG} \left( \frac{\boldsymbol{\nabla}_y q_1^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_{M1}^h (\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 = 0, \tag{6.25}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\zeta}^h \cdot (\mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_1^h) d\Omega_c + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \frac{\tau_{ARLQ0}}{\rho} \boldsymbol{\nabla}_y \boldsymbol{\zeta}^h : \boldsymbol{\nabla}_y \mathbf{r}_{M0}^h (\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_c \\
& - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \frac{\tau_{ARLQ1}}{\rho} \boldsymbol{\nabla}_y \boldsymbol{\zeta}^h : \boldsymbol{\nabla}_y \mathbf{r}_{M1}^h d\Omega_c = 0,
\end{aligned} \tag{6.26}$$

com os resíduos  $\mathbf{r}_{Mi}^h$  e  $r_{Ci}^h$  escritos conforme a Equação (6.18) e Equação (6.19).

O sistema resultante pode ser reescrito em notação matricial como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{L}}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_1 & -\hat{\mathbf{L}}_1 \\ \mathbf{L}_0^T & -\mathbf{L}_1^T & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{U}}_0 \\ \bar{\mathbf{U}}_1 \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_{\Lambda} \end{bmatrix}. \tag{6.27}$$

Considerando  $i = 0, 1$  designando os modelos global e local respectivamente, têm-se a definição dos termos da Equação (6.27) como:  $\mathbf{K}_i$  é uma matriz que representa os termos provenientes das matrizes referentes as equações da quantidade de movimento e da continuidade para o modelo  $i$ ;  $\hat{\mathbf{L}}_i$  matriz que representa os termos de acoplamento do modelo  $i$ ;  $\mathbf{L}_i^T$  matriz procedente dos termos da equação de restrição e de componentes da estabilização RBSAM do modelo  $i$ ;  $\mathbf{E}$  apresenta termos oriundos da estabilização RBSAM;  $\bar{\mathbf{U}}_i$  representa os vetores nodais dos graus de liberdade respectivos a velocidade e pressão do modelo  $i$ ;  $\boldsymbol{\Lambda}$  representa os graus de liberdade respectivos aos multiplicadores de Lagrange;  $\mathbf{F}_i$  representa os vetores provenientes das equações da quantidade de movimento e da continuidade para o modelo  $i$ ;  $\mathbf{F}_{\Lambda}$  representa os termos vetoriais advindos da estabilização RBSAM.

Note que na estabilização Arlequin baseada no resíduo (RBSAM) não existem elementos zeros na diagonal da matriz, diferente do mesmo problema na formulação clássica

Arlequin. No trabalho de Fernandes *et al.* (2020) pode-se encontrar a análise de estabilidade dessa técnica e testes numéricos que avaliam o condicionamento do sistema algébrico e a convergência do método.

O problema de Arlequin não linear apresentado na Equação (6.22) à Equação (6.26) pode ser reescrito em sua forma semi-discreta residual, para  $i = 0, 1$ , da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} R_{M,i} = & \int_{\Omega_i} \alpha_i \rho \mathbf{w}_i^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i^h}{\partial t} d\Omega_i + \int_{\Omega_i} \alpha_i \rho \mathbf{w}_i^h \cdot (\mathbf{u}_i^h \cdot \nabla_y) \mathbf{u}_i^h d\Omega_i \\ & + \int_{\Omega_i} \alpha_i \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_i^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_i^h, p_i^h) d\Omega_i \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{SUPG} ((\mathbf{u}_i^h \cdot \nabla_y) \mathbf{w}_i^h) \cdot \mathbf{r}_{Mi}^h(\mathbf{u}_i^h, p_i^h) d\Omega_i \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \nu_{LSIC} \nabla_y \cdot \mathbf{w}_i^h r_{Ci}^h(\mathbf{u}_i^h) d\Omega_i + \chi_i \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_i^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h d\Omega_c \\ & - \int_{\Omega_i} \alpha_i \rho \mathbf{w}_i^h \cdot \mathbf{f}_i^h d\Omega_i - \int_{\Gamma_i} \alpha_i \mathbf{w}_i^h \cdot \mathbf{h}_i^h d\Gamma_i \end{aligned} \quad (6.28)$$

$$R_{C,i} = \int_{\Omega_i} \alpha_i q_i^h \nabla_y \cdot \mathbf{u}_i^h d\Omega_i + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{PSPG} \left( \frac{\nabla_y q_i^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_{Mi}^h(\mathbf{u}_i^h, p_i^h) d\Omega_i, \quad (6.29)$$

$$\begin{aligned} R_L = & \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\zeta}^h \cdot (\mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_1^h) d\Omega_c + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_c^e} \frac{\tau_{ARLQ0}}{\rho} \nabla_y \boldsymbol{\zeta}^h : \nabla_y \mathbf{r}_{M0}^h(\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_c \\ & - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_c^e} \frac{\tau_{ARLQ1}}{\rho} \nabla_y \boldsymbol{\zeta}^h : \nabla_y \mathbf{r}_{M1}^h(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_c. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Considerando  $\dot{\mathbf{U}}_i$ ,  $\mathbf{U}_i$ ,  $\mathbf{p}_i$  e  $\boldsymbol{\Lambda}$  os vetores nodais dos graus de liberdade respectivos a aceleração, velocidade, pressão e multiplicadores de Lagrange, pode-se escrever o problema semidiscreto da DFC como: Determinar  $\dot{\mathbf{U}}_0$ ,  $\mathbf{U}_0$ ,  $\mathbf{p}_0$ ,  $\dot{\mathbf{U}}_1$ ,  $\mathbf{U}_1$ ,  $\mathbf{p}_1$  e  $\boldsymbol{\Lambda}$  de maneira que:

$$R_{M0}(\dot{\mathbf{U}}_0, \mathbf{U}_0, \mathbf{p}_0, \boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{0}, \quad (6.31)$$

$$R_{C0}(\dot{\mathbf{U}}_0, \mathbf{U}_0, \mathbf{p}_0, \boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{0}, \quad (6.32)$$

$$R_{M1}(\dot{\mathbf{U}}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{p}_1, \boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{0}, \quad (6.33)$$

$$R_{C1}(\dot{\mathbf{U}}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{p}_1, \boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{0}, \quad (6.34)$$

$$R_L(\dot{\mathbf{U}}_0, \mathbf{U}_0, \mathbf{p}_0, \dot{\mathbf{U}}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{p}_1, \boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{0}. \quad (6.35)$$

### 6.3.1 Integração temporal

Quanto ao procedimento de integração temporal, utiliza-se o método  $\alpha$ -generalizado. Conforme a metodologia apresentada na seção 2.4, para a solução do sistema de equações não lineares compostas pela Equação (6.31) à Equação (6.35) utiliza-se o método de Newton-Raphson. A solução resulta em uma etapa preditiva e outra iterativa corretiva.

Na etapa preditiva, conhecida a solução em um passo de tempo  $n$ , prediz-se a solução no passo seguinte ( $n + 1$ ) através das seguintes relações:

$$\dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \dot{\mathbf{U}}_{0(n)}, \quad (6.36)$$

$$\mathbf{U}_{0(n+1)}^0 = \mathbf{U}_{0(n)}, \quad (6.37)$$

$$\mathbf{p}_{0(n+1)}^0 = \mathbf{p}_{0(n)}, \quad (6.38)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \dot{\mathbf{U}}_{1(n)}, \quad (6.39)$$

$$\mathbf{U}_{1(n+1)}^0 = \mathbf{U}_{1(n)}, \quad (6.40)$$

$$\mathbf{p}_{1(n+1)}^0 = \mathbf{p}_{1(n)}, \quad (6.41)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^0 = \boldsymbol{\Lambda}_{(n)}, \quad (6.42)$$

onde o superíndice 0 representa a iteração de número zero, enquanto que os subíndices 0 e 1 representam as variáveis do modelo global e local respectivamente.

Na etapa iterativa corretiva, itera-se sobre a Equação (6.31) à Equação (6.35) até que elas sejam satisfeitas, seja através de uma tolerância prescrita, ou até que se alcance uma quantidade máxima de iterações pré-estabelecida. A etapa iterativa corretiva é constituída por três fases. A fase 1 consiste em determinar os valores no instante intermediário para as variáveis nodais na iteração  $i$ :

$$\dot{\mathbf{U}}_{0(n+\alpha_m)}^i = \dot{\mathbf{U}}_{0(n)} + \alpha_m (\dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^i - \dot{\mathbf{U}}_{0(n)}) , \quad (6.43)$$

$$\mathbf{U}_{0(n+\alpha_f)}^i = \mathbf{U}_{0(n)} + \alpha_f (\mathbf{U}_{0(n+1)}^i - \mathbf{U}_{0(n)}) , \quad (6.44)$$

$$\mathbf{p}_{0(n+1)}^i = \mathbf{p}_{0(n+1)}^i , \quad (6.45)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{1(n+\alpha_m)}^i = \dot{\mathbf{U}}_{1(n)} + \alpha_m (\dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^i - \dot{\mathbf{U}}_{1(n)}) , \quad (6.46)$$

$$\mathbf{U}_{1(n+\alpha_f)}^i = \mathbf{U}_{1(n)} + \alpha_f (\mathbf{U}_{1(n+1)}^i - \mathbf{U}_{1(n)}) , \quad (6.47)$$

$$\mathbf{p}_{1(n+1)}^i = \mathbf{p}_{1(n+1)}^i , \quad (6.48)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^i = \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^i . \quad (6.49)$$

Na fase 2, com os valores intermediários das variáveis nodais resolve-se o sistema linear resultante da linearização da Equação (6.31) à Equação (6.35) com respeito às variáveis de interesse  $\dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}$ ,  $\mathbf{p}_{0(n+1)}$ ,  $\dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}$ ,  $\mathbf{p}_{1(n+1)}$  e  $\boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{M0}}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^i} & \frac{\partial R_{M0}}{\partial \mathbf{p}_{0(n+1)}^i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial R_{M0}}{\partial \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^i} \\ \frac{\partial R_{C0}}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^i} & \frac{\partial R_{C0}}{\partial \mathbf{p}_{0(n+1)}^i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial R_{C0}}{\partial \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial R_{M1}}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^i} & \frac{\partial R_{M1}}{\partial \mathbf{p}_{1(n+1)}^i} & \frac{\partial R_{M1}}{\partial \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial R_{C1}}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^i} & \frac{\partial R_{C1}}{\partial \mathbf{p}_{1(n+1)}^i} & \frac{\partial R_{C1}}{\partial \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^i} \\ \frac{\partial R_L}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^i} & \frac{\partial R_L}{\partial \mathbf{p}_{0(n+1)}^i} & \frac{\partial R_L}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^i} & \frac{\partial R_L}{\partial \mathbf{p}_{1(n+1)}^i} & \frac{\partial R_L}{\partial \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^i \\ \Delta \mathbf{p}_{0(n+1)}^i \\ \Delta \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^i \\ \Delta \mathbf{p}_{1(n+1)}^i \\ \Delta \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_{M0} \\ -R_{C0} \\ -R_{M1} \\ -R_{C1} \\ -R_L \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

Atualiza-se então na fase 3 a solução através das seguintes relações:

$$\dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^{i+1} = \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^i + \Delta \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^i, \quad (6.51)$$

$$\mathbf{U}_{0(n+1)}^{i+1} = \mathbf{U}_{0(n+1)}^i + \gamma \Delta t \Delta \mathbf{U}_{0(n+1)}^i, \quad (6.52)$$

$$\mathbf{p}_{0(n+1)}^{i+1} = \mathbf{p}_{0(n+1)}^i + \Delta \mathbf{p}_{0(n+1)}^i, \quad (6.53)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^{i+1} = \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^i + \Delta \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^i, \quad (6.54)$$

$$\mathbf{U}_{1(n+1)}^{i+1} = \mathbf{U}_{1(n+1)}^i + \gamma \Delta t \Delta \mathbf{U}_{1(n+1)}^i, \quad (6.55)$$

$$\mathbf{p}_{1(n+1)}^{i+1} = \mathbf{p}_{1(n+1)}^i + \Delta \mathbf{p}_{1(n+1)}^i, \quad (6.56)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{1(n+1)}^{i+1} = \boldsymbol{\Lambda}_{0(n+1)}^i + \Delta \boldsymbol{\Lambda}_{1(n+1)}^i. \quad (6.57)$$

Na utilização do método  $\alpha$ -generalizado as integrais das equações são avaliadas no instante  $t = t_{n+\alpha_f}$ . As relações entre velocidade e aceleração, e os parâmetros utilizados pelo método podem ser consultados na seção 2.4.

### 6.3.2 Parâmetro de estabilização para técnica RBSAM

No método Arlequin existe a necessidade de definição do parâmetro de estabilização  $\tau_{ARLQ}$ , o qual deve possuir valor suficiente para estabilizar os campos de multiplicadores de Lagrange, sem, no entanto, comprometer a convergência do método.

Para a definição de  $\tau_{ARLQ}$  tomou-se como referência os trabalhos de Tezduyar e Osawa (2000) e Tezduyar e Sathe (2003) nos quais se apresenta uma vasta quantidade de informação a cerca da obtenção dos parâmetros de estabilização das equações da DFC ( $\tau_{SUPG}$ ,  $\tau_{PSPG}$ ,  $\nu_{LSIC}$ ).

Propõe-se como critério a obtenção de termos de estabilização com magnitude próxima aos termos da equação de acoplamento, através da utilização de normas vetoriais. Este parâmetro será definido para cada um dos modelos como:

$$\tau_{ARLQi} = \left( \frac{1}{(\tau_{A_i})^2} + \frac{1}{(\tau_{B_i})^2} + \frac{1}{(\tau_{C_i})^2} + \frac{1}{(\tau_{D_i})^2} + \frac{1}{(\tau_{E_i})^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.58)$$

com  $i = 0, 1$  definindo o modelo global e local respectivamente, e:

$$\tau_{A_i} = \left( \frac{1}{(\tau_{A_i^0})^2 + (\tau_{A_i^1})^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.59)$$

$$\tau_{B_i} = \left( \frac{1}{(\tau_{B_i^0})^2 + (\tau_{B_i^1})^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.60)$$

$$\tau_{C_i} = \left( \frac{1}{(\tau_{C_i^0})^2 + (\tau_{C_i^1})^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.61)$$

$$\tau_{D_i} = \left( \frac{1}{(\tau_{D_i^0})^2 + (\tau_{D_i^1})^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.62)$$

$$\tau_{E_i} = \left( \frac{1}{(\tau_{E_i^0})^2 + (\tau_{E_i^1})^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.63)$$

sendo as variáveis da Equação (6.59) à (6.63) as seguintes normas vetoriais:

$$\tau_{A_i^0} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_0}\|}{\|\mathbf{t}_i\|}; \quad \tau_{A_i^1} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_1}\|}{\|\mathbf{t}_i\|}; \quad (6.64)$$

$$\tau_{B_i^0} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_0}\|}{\|\mathbf{j}_i\|}; \quad \tau_{B_i^1} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_1}\|}{\|\mathbf{j}_i\|}; \quad (6.65)$$

$$\tau_{C_i^0} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_0}\|}{\|\mathbf{k}_i\|}; \quad \tau_{C_i^1} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_1}\|}{\|\mathbf{k}_i\|}; \quad (6.66)$$

$$\tau_{D_i^0} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_0}\|}{\|\mathbf{p}_i\|}; \quad \tau_{D_i^1} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_1}\|}{\|\mathbf{p}_i\|}; \quad (6.67)$$

$$\tau_{E_i^0} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_0}\|}{\|\boldsymbol{\Gamma}_i\|}; \quad \tau_{E_i^1} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_1}\|}{\|\boldsymbol{\Gamma}_i\|}; \quad (6.68)$$

Por fim, os vetores em questão, são definidos através das seguintes relações:

$$\mathbf{M}_{\lambda_0} = \int_{\Omega_c} N_k \cdot \mathbf{u}_0^h d\Omega_c, \quad (6.69)$$

$$\mathbf{M}_{\lambda_1} = - \int_{\Omega_c} N_k \cdot \mathbf{u}_1^h d\Omega_c, \quad (6.70)$$

$$\mathbf{t}_i = \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\nabla}_y N_k : \alpha_i \boldsymbol{\nabla}_y \left( (\mathbf{u}_i^h \cdot \boldsymbol{\nabla}_y) \mathbf{u}_i^h \right) d\Omega_c, \quad (6.71)$$

$$\mathbf{j}_i = \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\nabla}_y N_k : \alpha_i \boldsymbol{\nabla}_y \left( \frac{\partial \mathbf{u}_i^h}{\partial t} \right) d\Omega_c, \quad (6.72)$$

$$\mathbf{k}_i = \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\nabla}_y^2 N_k : \alpha_i 2\mu \boldsymbol{\nabla}_y \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_i^h) d\Omega_c, \quad (6.73)$$

$$\mathbf{p}_i = \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\nabla}_y N_k : \alpha_i \boldsymbol{\nabla}_y (-\boldsymbol{\nabla}_y p_i^h) d\Omega_c, \quad (6.74)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_i = \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\nabla}_y N_k : \boldsymbol{\nabla}_y (\chi(i) \boldsymbol{\lambda}^h) d\Omega_c, \quad (6.75)$$

com  $k$  representando o índice dos graus de liberdade do campo de multiplicadores de Lagrange.

#### 6.4 Superposição de modelos móveis

A Equação (6.22) à Equação (6.26) resolvem problemas de escoamentos incompressíveis em uma discretização Euleriana. Entretanto, como têm-se como alvo à movimentação do domínio local do fluido (ver Figura 57) para acomodar a movimentação da estrutura em problemas de IFE ou representar o deslocamento de um objeto imerso na DFC, faz-se o uso de uma descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária (ALE) no modelo local ( $\Omega_1$ ) enquanto que o domínio global ( $\Omega_0$ ) mantém-se fixo e com descrição Euleriana.

Para o entendimento da metodologia de superposição de modelos móveis em um esquema Euleriano-ALE, pode-se analisar a Figura 57. Nela, observa-se a mudança de configuração dos modelos de fluido do passo  $t_n$  para o passo  $t_{n+1}$ . Nota-se que o modelo global mantém sua geometria inalterada na mudança de passo de tempo, enquanto que o modelo local é deformado para representar uma nova localização de um objeto imerso. Vale ressaltar que o contorno do domínio do modelo local ( $\Gamma_1$ ) é conhecido em  $t_n$  e em  $t_{n+1}$ , e que a zona de superposição  $\Omega_s$  é definida para cada instante de tempo.

Para análise de domínios móveis do tipo Euleriano-ALE, a Equação (6.24) será reescrita, levando-se em consideração as definições apresentadas na seção 2.2, como:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_1^h}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} d\Omega_1 + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot ((\mathbf{u}_1^h - \bar{\mathbf{u}}_1^h) \cdot \nabla_y \mathbf{u}_1^h) d\Omega_1 \\
& + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_1^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{SUPG} ((\mathbf{u}_1^h - \bar{\mathbf{u}}_1^h) \cdot \nabla_y \mathbf{w}_1^h) \cdot \mathbf{r}_{M1}^h(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \nu_{LSIC} \nabla_y \cdot \mathbf{w}_1^h r_{C1}^h(\mathbf{u}_1^h) d\Omega_1 \\
& + \chi_1 \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_1^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h d\Omega_c = \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{f}_1^h d\Omega_1 + \int_{\Gamma_{N1}} \alpha_1 \mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{h}_1^h d\Gamma_{N1},
\end{aligned} \tag{6.76}$$

e o resíduo apresentado na Equação (6.18) ficará reescrito para  $i = 1$ , como:

$$\mathbf{r}_{M1}^h(\mathbf{u}_1^h, p_1^h, \boldsymbol{\lambda}^h) = \alpha_1 \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}_1^h}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u}_1^h - \bar{\mathbf{u}}_1^h) \cdot \nabla_y \mathbf{u}_1^h - \mathbf{f}_1^h \right) - \alpha_1 \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) + \chi_1 \boldsymbol{\lambda}^h. \tag{6.77}$$

Além da consideração da descrição ALE para o modelo local, deve-se ressaltar que a função ponderadora  $\alpha_i$  passa a ser uma variável temporal, ou seja,  $\alpha_i(t)$ , visto que a zona de superposição  $\Omega_s$  varia ao longo do tempo. Dessa forma, a integração temporal utilizando o método  $\alpha$ -generalizado deve considerar essa variação através da seguinte interpolação no tempo intermediário:

$$\alpha_{i(n+\alpha_f)} = \alpha_{i(n)} + \alpha_f (\alpha_{i(n+1)} - \alpha_{i(n)}). \tag{6.78}$$

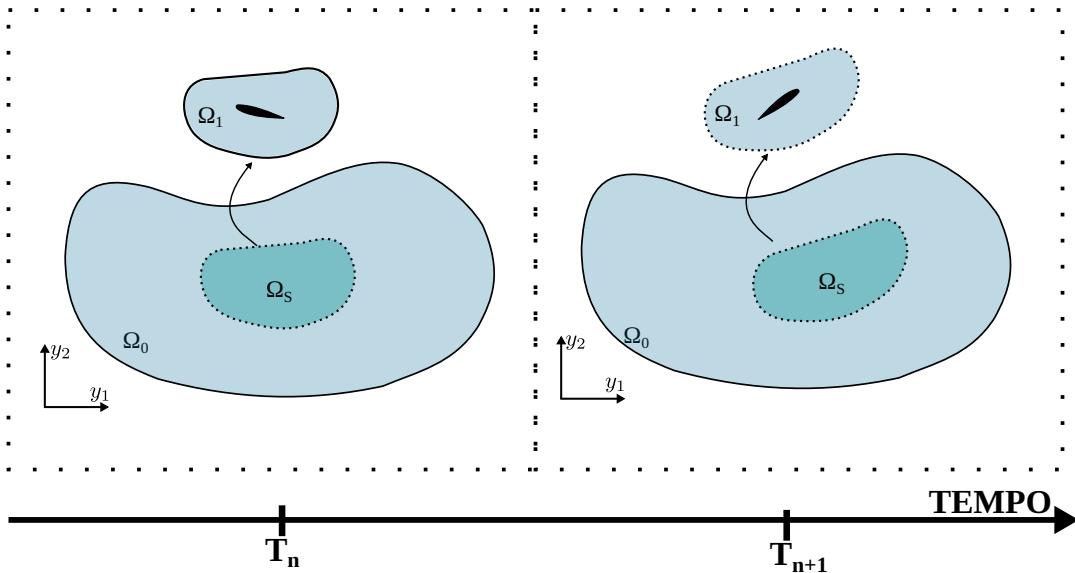
A solução de modelos móveis requer a utilização de uma técnica adequada para movimentação da malha local. A técnica utilizada nesse trabalho é conhecida como MJBS (Mesh-Jacobian Based Stiffening) introduzida por Tezduyar *et al.* (1992c) e será abordada na subseção 7.1.1.

## 6.5 Implementação computacional

Previamente à explicação a cerca da implementação computacional, é importante indicar que o campo dos multiplicadores de Lagrange é definido neste estudo na malha local. Tal escolha ocorre pelo fato de que mesmo em problemas em que se tenham grandes deslocamentos, a quantidade de elementos locais da zona de superposição permanece inalterada, fazendo com que o sistema algébrico mantenha-se com dimensão constante ao longo do tempo, diminuindo assim, o custo computacional.

O uso da técnica Arlequin envolve a realização de algumas etapas de pré-processamento como parte de sua implementação computacional, que podem ser divididas em 4 etapas: 1.

Figura 57 – Domínio Arlequin móvel



Fonte: Elaborada pela autora

Determinação de distâncias assinaladas; 2. Determinação da zona de colagem; 3. Determinação da função ponderadora; 4. Encontro de correspondência entre pontos dos modelos global e local.

A etapa 1 consiste em determinar a distância assinalada com relação ao contorno  $\Gamma_1$  de todos os pontos (nós para malha de elementos finitos ou pontos de controle para malha isogeométrica) que compõe cada um dos modelos.

Na etapa 2, a partir da distância assinalada, são definidos os elementos locais que fazem parte da zona de colagem em função da espessura dessa região que foi previamente indicada pelo usuário do código.

A função ponderadora para os modelos (etapa 3) é determinada conforme Equação (6.6). Além disso, a função ponderadora ( $\alpha$ ), para os modelos local e global, foi definida como uma função linear nesse trabalho.

Uma das maiores dificuldades da técnica de Arlequin diz respeito à integração numérica do operador de acoplamento quando se tem na composição da integral funções definidas em modelos distintos. Neste estudo, as integrais são definidas sobre a malha local, desta forma, durante o pré-processamento realiza-se um processo de busca de correspondência (etapa 4) na malha global para cada ponto de integração da malha local. O processo de busca consiste em encontrar a coordenada paramétrica e elemento da malha global correspondente a cada ponto de integração da malha local na zona de colagem.

Para contemplar a solução de problemas com contornos móveis utilizando a técnica Arlequin, a cada passo de tempo, algumas tarefas adicionais devem ser realizadas: atualização da configuração da malha; atualização da distância assinalada com relação ao contorno

$\Gamma_1$  de todos os pontos (nós para malha de elementos finitos ou pontos de controle para malha isogeométrica) que compõe cada um dos modelos; Alteração da função ponderadora; e atualização das correspondências entre pontos de integração da malha local na malha global.

O Algoritmo que descreve a implementação computacional é apresentado no Algoritmo 4. A implementação computacional e resolução do sistema de equações resultantes ocorreu de forma análoga ao monomodelo descrito no Algoritmo 1. O índice  $i$  apresentado diz respeito à iteração de Newton-Raphson.

---

**Algoritmo 4** Algoritmo para problemas móveis da DFC utilizando técnica ARLEQUIN RBSAM

---

- 1: Cálculo da distância assinalada dos nós e pontos de controle ao contorno  $\Gamma_1$ ;
- 2: Determinação da zona de colagem  $\Omega_c$ ;
- 3: Definição da função ponderadora de acordo com Equação (6.6);
- 4: Busca pela correspondência entre os pontos de integração da malha local na malha global;
- 5: **para** o passo de tempo 0 até  $npt - 1$  **faça**
- 6:     Movimentação da Malha;
- 7:      $i = 0$ ;
- 8:     Predição da solução: aplicação da Equação (6.36), Equação (6.37), Equação (6.38), Equação (6.39), Equação (6.40), Equação (6.41) e Equação (6.42);
- 9:     **enquanto** ( $\epsilon <$  tolerância) **faça**
- 10:        $i++$ ;
- 11:       Atualização da distância assinalada;
- 12:       Atualização da função ponderadora;
- 13:       Atualização das correspondências entre os pontos de integração da malha local na malha global;
- 14:       Interpolação das variáveis do problema: aplicação da Equação (6.43), Equação (6.44), Equação (6.45), Equação (6.46), Equação (6.47), Equação (6.48) e Equação (6.49);
- 15:       Cálculo do incremento nas variáveis do problema: Resolução do sistema apresentado na Equação (6.50);
- 16:       Atualização da solução: cálculo de acordo com Equação (6.51), Equação (6.52), Equação (6.53), Equação (6.54), Equação (6.55), Equação (6.56) e Equação (6.57);
- 17:       Cálculo do erro:

$$\epsilon = \|R_{M0}^i + R_{M1}^i\|_{L^2} \quad (6.79)$$

- 18:     **fim enquanto**
  - 19: **fim para**
- 

## 6.6 Exemplos

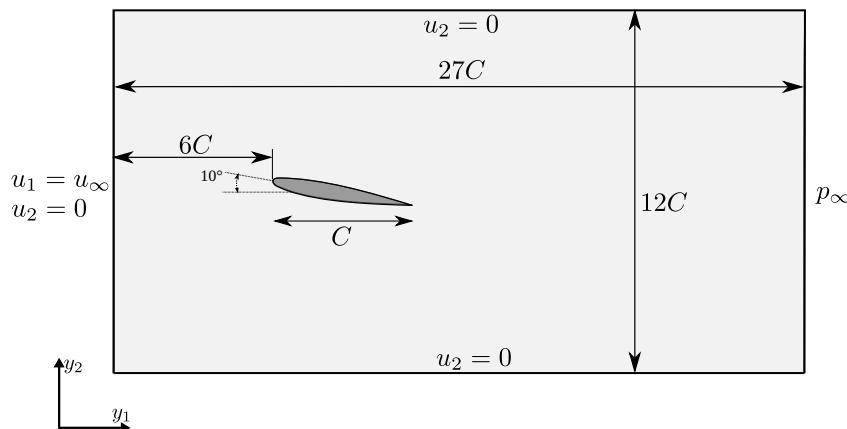
Para a validação da método Arlequin estabilizado, dois exemplos amplamente explorados nas bibliografias, serão avaliados. O primeiro exemplo, trata-se de um problema de escoamento sobre um aerofólio NACA 0012, e o segundo, com intuito de validação

da técnica de movimentação de domínios, consistirá no aerofólio NACA 0012 com um movimento de arfagem prescrito.

### 6.6.1 Escoamento sobre um aerofólio NACA 0012

Para simulação do problema de escoamento sobre um aerofólio NACA 0012, com uma unidade de corda de dimensão e ângulo de ataque de  $10^\circ$ , utilizou-se o domínio apresentado na Figura 58. O contorno da entrada de fluxo está localizado a 6 cordas ( $C$ ) do bordo de ataque do aerofólio, com velocidade de entrada  $u_\infty$  na direção  $y_1$ . Os contornos superior e inferior da geometria, com condições de contorno de parede lisa, também estão afastados do aerofólio em 6 unidades de corda. O contorno direito do domínio é localizado a 20 unidades de corda a jusante do bordo de fuga do aerofólio.

Figura 58 – Aerofólio: Geometria



Fonte: Elaborada pela autora

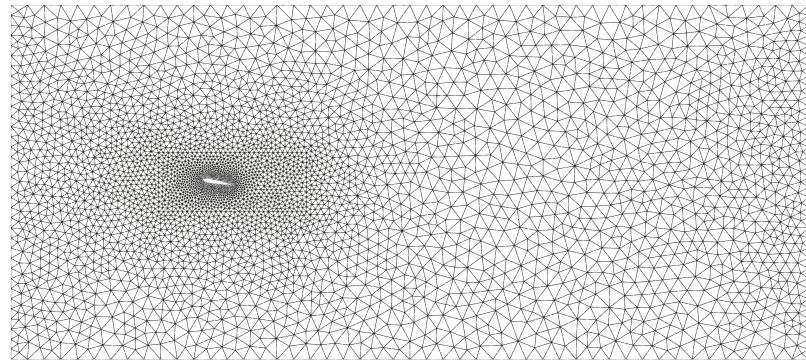
A análise é realizada para um número de Reynolds (Re) 1000 calculado a partir da dimensão do aerofólio e da velocidade de entrada do escoamento. Foram utilizados ainda como parâmetros de análise:  $u_\infty = 1,0$ ,  $\rho = 1,0$ ,  $\Delta t = 0,02$ , e  $\rho_\infty = 0,75$ .

Para validação da teoria apresentada nesse capítulo, compararam-se os resultados de coeficientes de arrasto e sustentação ao longo do tempo para duas discretizações distintas: 1. Monomodelo; 2. Combinação de duas malhas através do método Arlequin estabilizado.

O monomodelo foi discretizado através de elementos finitos (Figura 59), com malha constituída de 9240 elementos triangulares quadráticos e 18792 nós.

Para o método Arlequin, duas malhas foram utilizadas, uma malha global com discretização isogeométrica (IGA) e uma malha local, mais refinada, em elementos finitos (MEF). Uma visão global da composição do domínio é apresentada na Figura 60a. Uma vista aproximada do aerofólio e da malha local pode ser visualizada na Figura 60b.

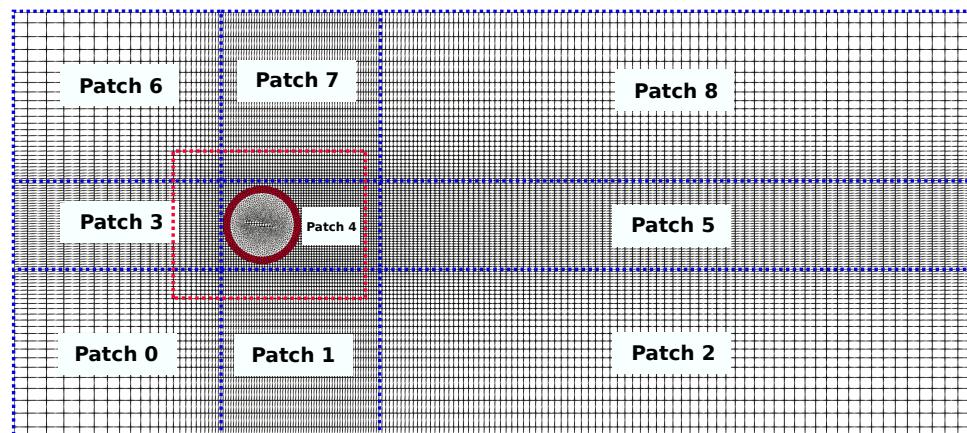
Figura 59 – Aerofólio: Malha Monomodelo (MEF)



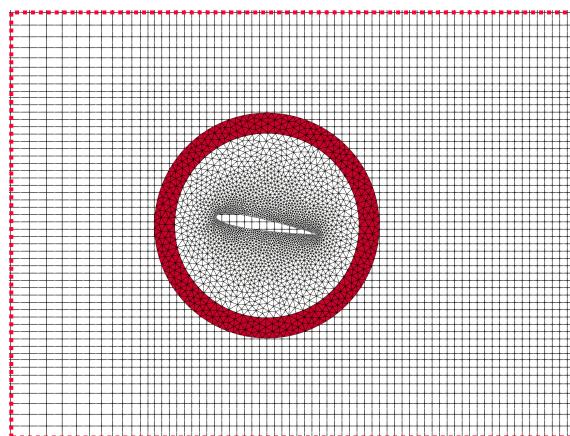
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 60 – Aerofólio: Discretização das malhas global e local

(a) Discretização da malha global (IGA) e local (MEF)



(b) Discretização da malha local



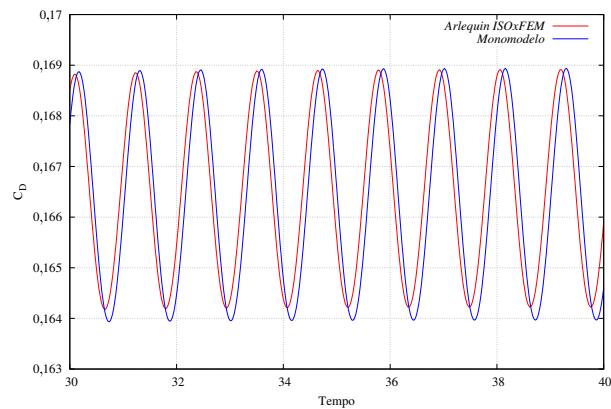
Fonte: Elaborada pela autora

A malha global isogeométrica foi obtida através da utilização de 9 *patches*, que totalizaram 15561 pontos de controle e 14025 células. A malha local por sua vez é composta por 5214 elementos triangulares quadráticos e 10670 nós.

Na Figura 60b pode observar em vermelho os elementos que fazem parte da zona de colagem. A espessura da zona de colagem foi definida como 0,2, totalizando 628 elementos triangulares quadráticos e 1428 nós nessa região. A constante do operador de acoplamento  $L^2$  foi definida como  $k_0 = 10$ .

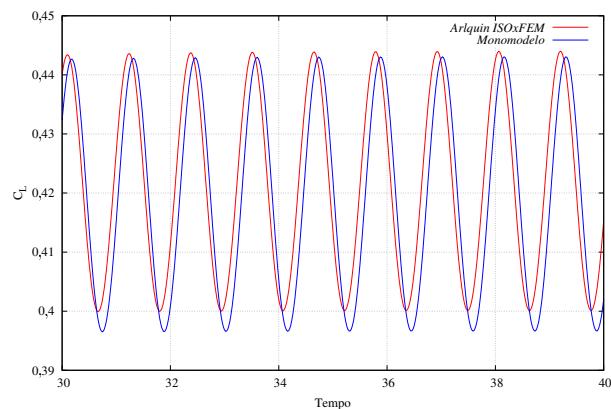
Nesse problema observa-se o surgimento de uma esteira de vórtices a jusante do aerofólio, que resulta em um número de Strouhal (St) equivalente a 0,877. Esse valor encontra-se em concordância com o obtido por Mittal e Tezduyar (1994) de 0,862. Na Figura 61 e Figura 62 apresentam-se os resultados de coeficiente de arrasto e sustentação obtidos para as análises realizadas. Pode-se observar que os resultados obtidos com o modelo baseado no método Arlequin estabilizados estão de acordo com os obtidos para o monomodelo.

Figura 61 – Aerofólio: Coeficiente de arrasto



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 62 – Aerofólio: Coeficiente de sustentação



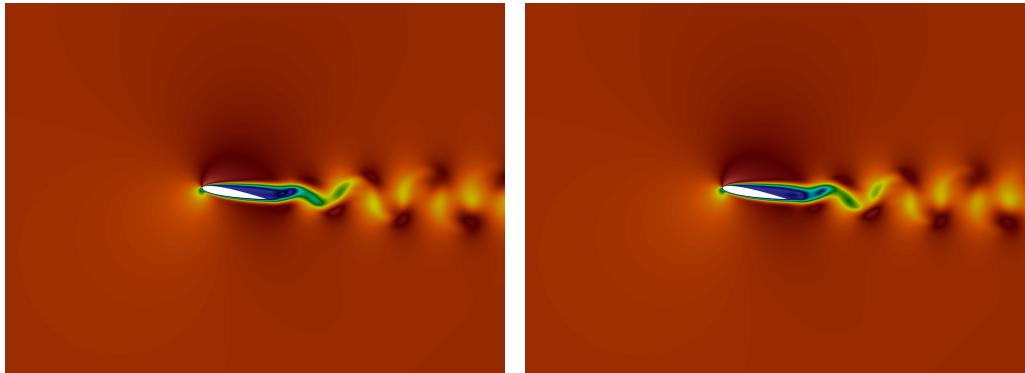
Fonte: Elaborada pela autora

Nas Figura 63 e Figura 64 estão apresentados os campos de velocidade e pressão respectivamente para um período de um ciclo das curvas referentes aos coeficientes de arrasto e sustentação.

Figura 63 – Aerofólio: Campo de velocidade

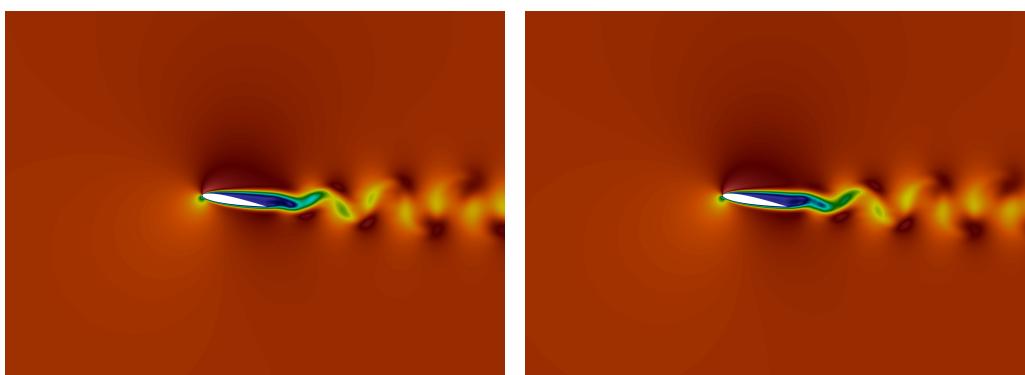
(a)  $nT$

(b)  $nT + nT/4$



(c)  $nT + nT/2$

(d)  $nT + n3T/4$



Fonte: Elaborada pela autora

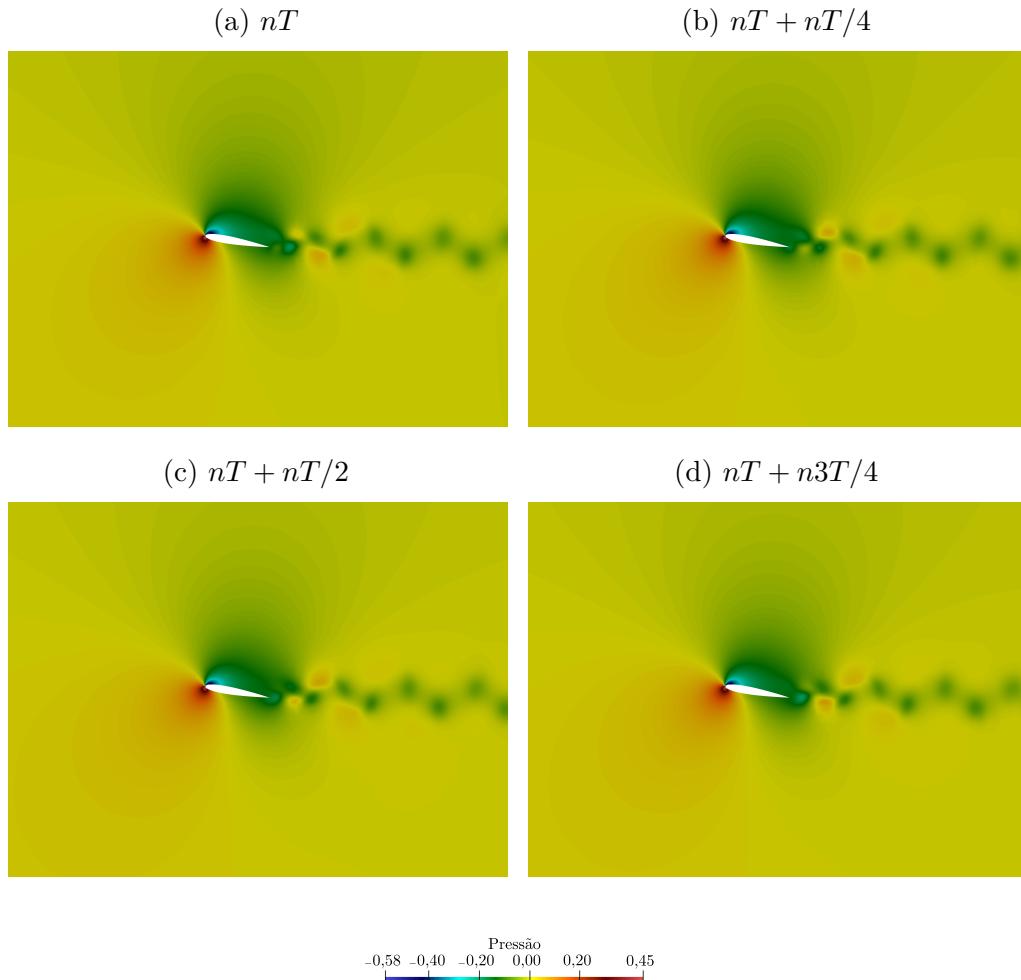
### 6.6.2 Aerofólio com movimento de arfagem prescrito

Para a validação computacional da técnica Arlequin estabilizada em domínios móveis utilizou-se um problema envolvendo um aerofólio NACA 0012, semelhante ao apresentado na subseção 6.6.1, aplicando-se, entretanto, um movimento de arfagem ao mesmo. O aerofólio apresenta variação do ângulo de ataque em  $20^\circ$ , iniciando o movimento em  $10^\circ$  e finalizando-o em  $30^\circ$ .

Para descrever-se tal movimento aplica-se, tendo como centro a corda média do aerofólio, o movimento de rotação de corpo rígido através da seguinte relação:

$$\theta = \frac{\theta_{max} + \theta_{min}}{2} - \frac{\theta_{max} - \theta_{min}}{2} \cos \omega_f t, \quad (6.80)$$

Figura 64 – Aerofólio: Campo de pressão



Fonte: Elaborada pela autora

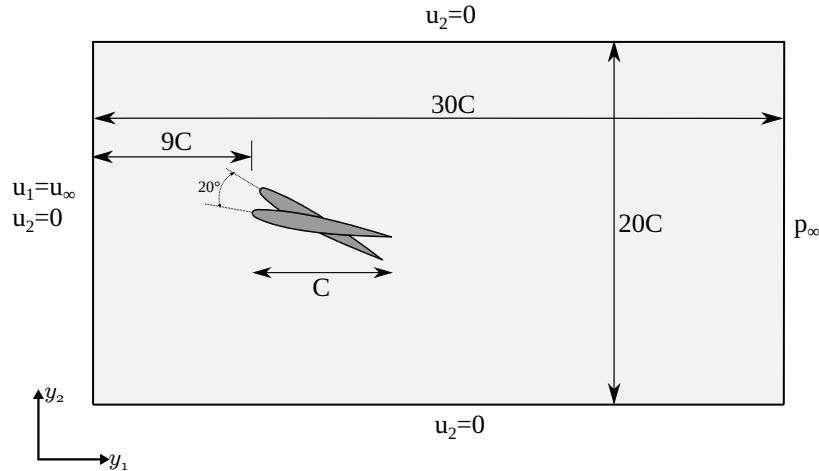
com  $\omega_f = 2\pi f_o$ , sendo  $f_o$  a frequência de oscilação, adotada nesse estudo como 1,0,  $\theta_{max} = 30^\circ$  e  $\theta_{min} = 10^\circ$ .

As dimensões da geometria do domínio computacional são alteradas (ver Figura 65) para capturar os efeitos dos desprendimentos de vórtices, que para esse problema, se desprendem em uma faixa mais ampla. Os demais parâmetros de análise foram mantidos iguais aos apresentados no exemplo da subseção 6.6.1.

Novamente são analisadas 2 discretizações: 1. Monomodelo; 2. Combinação de duas malhas através do método Arlequin estabilizado. O monomodelo consiste em uma malha com 12438 elementos triangulares quadráticos e 25188 elementos. As malhas global e local do método Arlequin mantiveram-se com a mesma discretização do problema da subseção 6.6.1, incluindo a quantidade de elementos na zona de colagem.

É importante ressaltar que para a simulação desse exemplo, utilizou-se como campo inicial de velocidade e pressão, valores obtidos em uma solução de longo termo do aerofólio na condição de repouso.

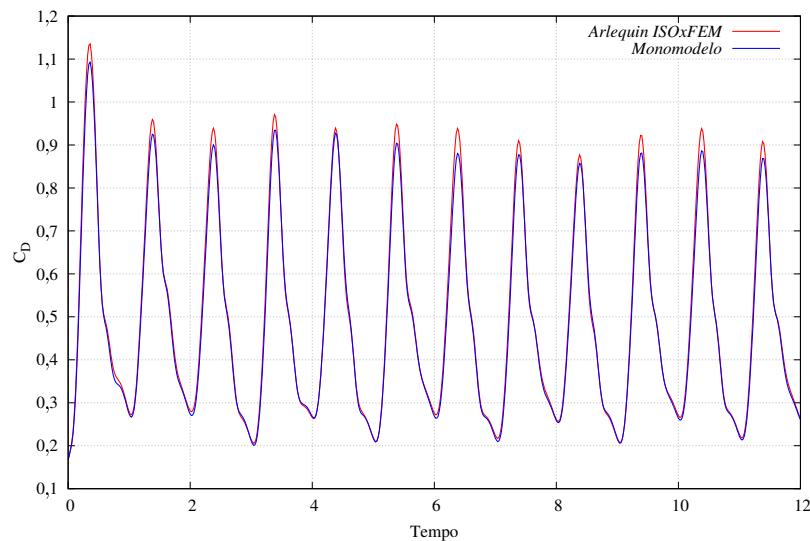
Figura 65 – Aerofólio Mov.: Geometria



Fonte: Elaborada pela autora

A variação dos coeficientes de arrasto e sustentação ao longo do tempo são apresentados na Figura 66 e Figura 67. Nota-se nas imagens que o monomodelo e o modelo Arlequin estão consistentes em suas respostas. Soluções semelhantes podem ser observados no trabalho de Fernandes (2020).

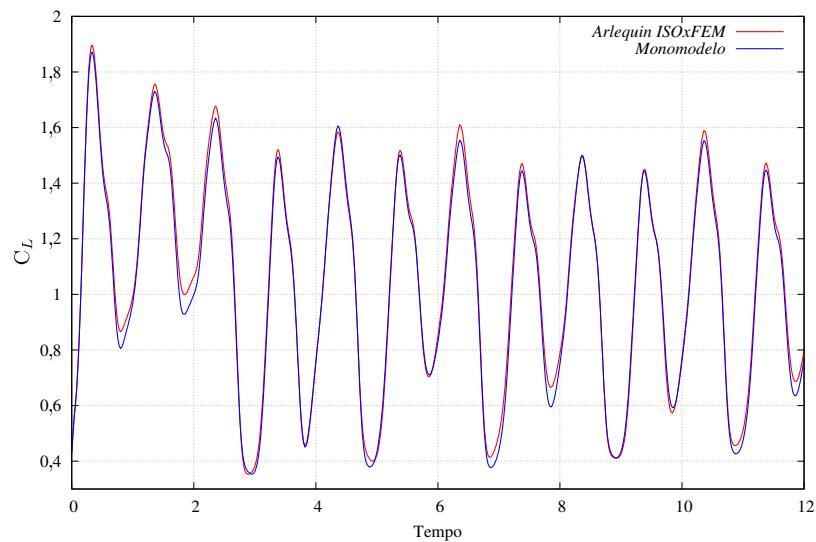
Figura 66 – Aerofólio Mov.: Coeficiente de Arrasto



Fonte: Elaborada pela autora

Na Figura 68 e Figura 69 são apresentados os campos de velocidade e pressão em alguns instantes para um ciclo do movimento oscilatório prescrito.

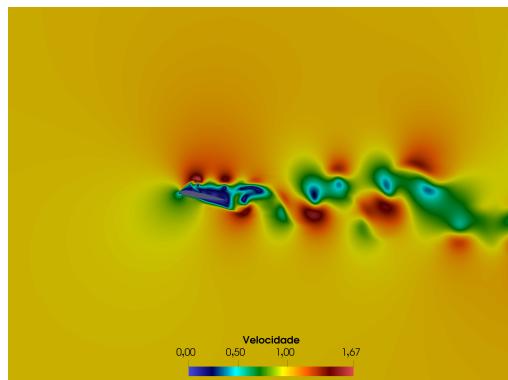
Figura 67 – Aerofólio Mov.: Coeficiente de Sustentação



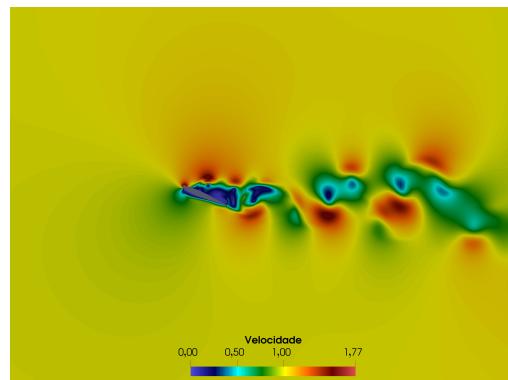
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 68 – Aerofólio Mov.: Campos de velocidade

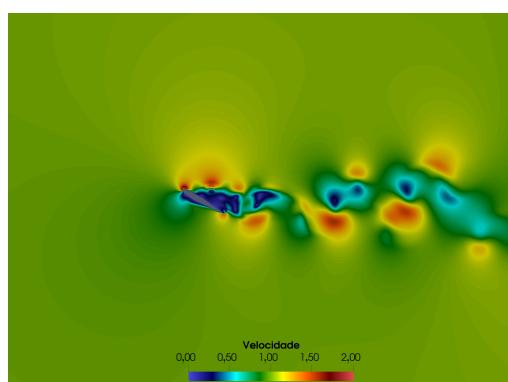
(a)  $t = 8,0$



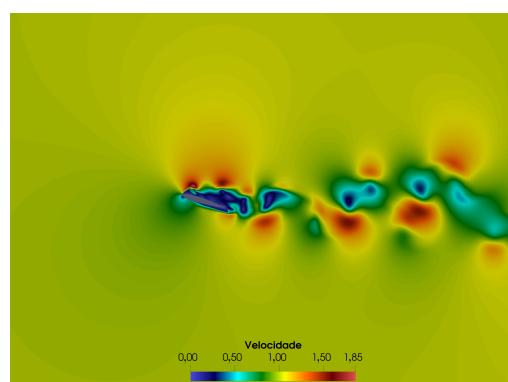
(b)  $t = 8,3$



(c)  $t = 8,5$



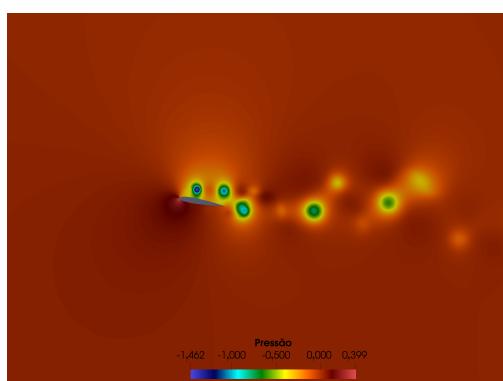
(d)  $t = 8,8$



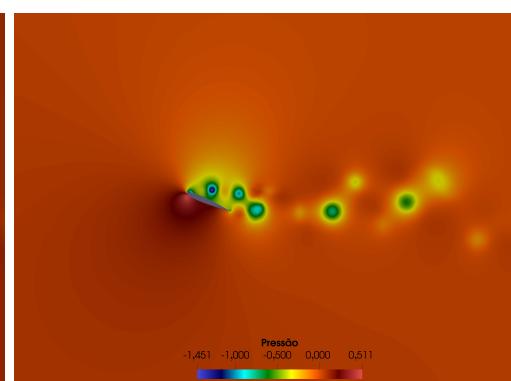
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 69 – Aerofólio Mov.: Campos de pressão

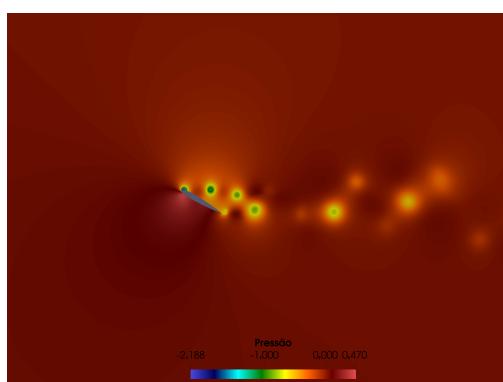
(a)  $t = 8,0$



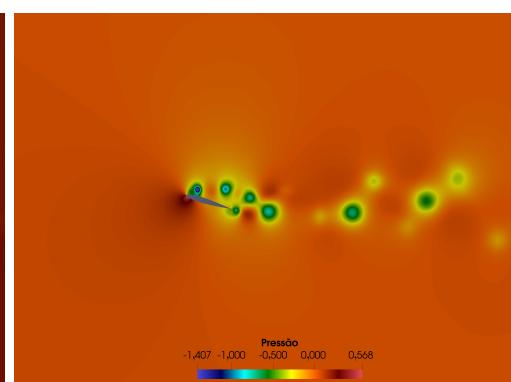
(b)  $t = 8,3$



(c)  $t = 8,5$



(d)  $t = 8,8$



Fonte: Elaborada pela autora



## 7 INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

Ao longo deste trabalho, conforme apresentado nos capítulos anteriores, foi desenvolvido um código computacional para análise de fluidos incompressíveis que permite a decomposição do domínio para capturar efeitos localizados por meio da técnica Arlequin estabilizada. Além disso, para esta pesquisa, foi disponibilizado pelo pesquisador Rosicley Júnior Rodrigues Rosa um código computacional para a análise não-linear de estruturas pelo método dos elementos finitos posicional, o qual foi desenvolvido durante seu trabalho de mestrado (Rosa, 2021). Com base nesses desenvolvimentos, optou-se por um esquema de acoplamento particionado forte entre fluido e estrutura. Essa abordagem foi escolhida por proporcionar um total desacoplamento entre os *solvers* de fluido e de estrutura, o que facilita a solução dos problemas que aqui serão propostos.

Nesse contexto, para o acoplamento, utiliza-se a técnica de malhas adaptadas para a malha local do fluido em contato com a estrutura, aplicando-se uma descrição ALE. Vale ressaltar que, embora a malha local possa se mover, a malha global permanece fixa com descrição Euleriana, fazendo com que o método de acoplamento possa ser classificado como uma técnica híbrida.

No texto a seguir descrevem-se as condições de acoplamento necessárias a solução de um problema IFE, a técnica de movimentação de malha utilizada nesse estudo, e a metodologia de transferência de condições de contorno (Dirichlet-Neumann) em uma interface de fluido e sólido com malha não coincidente. Discorre-se na continuação sobre os detalhes a cerca do esquema de acoplamento particionado forte adotado. Por fim, o algoritmo de implementação computacional será apresentado, e exemplos de validação serão exibidos na sequência.

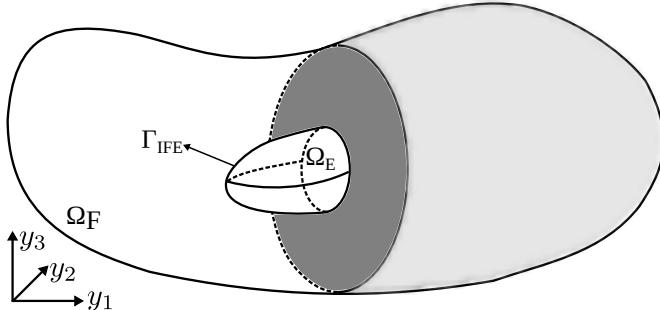
### 7.1 Condições de acoplamento

O domínio computacional para a análise de problemas de interação fluido-estrutura (Figura 70), denominado de  $\Omega_{IFE}$ , é composto pela união entre os domínios da estrutura  $\Omega_E$  e do fluido  $\Omega_F$ , ou seja,  $\Omega_{IFE} = \Omega_F \cup \Omega_E$ , com  $\Gamma_{IFE}$  representando o contorno que define a interface fluido-estrutura.

O domínio computacional não se sobrepõe, por isso, é necessário que em  $\Gamma_{IFE}$  existam condições físicas adicionais para se realizar o acoplamento. Richter (2017) cita que o acoplamento é realizado através de 3 diferentes princípios no contorno  $\Gamma_{IFE}$ : condição cinemática, condição dinâmica e condição geométrica.

A condição cinemática refere-se ao fato de que a velocidade do fluido e do sólido na interface devem ser iguais. A condição dinâmica, refere-se à existência de continuidade

Figura 70 – Domínios Computacional para análise de problemas de IFE



Fonte: Elaborada pela autora

do vetor tensão de Cauchy na direção normal ao contorno  $\Gamma_{IFE}$ .

Em esquemas de acoplamento monolítico, as condições cinemática e dinâmica são atendidas de maneira implícita, visto que os meios são tratados no mesmo contexto matemático. Para esquemas particionadas, como o desse estudo, essas condições são atendidas através da transferência de condições de contorno apropriadas entre os meios.

Para a condição cinemática têm-se:

$$\mathbf{u} = \dot{\mathbf{y}} \text{ no contorno } \Gamma_{IFE}, \quad (7.1)$$

atendida através da aplicação dos valores de  $\dot{\mathbf{y}}$  nos nós (ou pontos de controle) que compõe a malha do fluido na interface entre os meios.

A condição dinâmica, preescreve o balanço da tensão normal no contorno, ao que diz respeito à ação e reação, conforme a equação abaixo:

$$\boldsymbol{\sigma}_E \mathbf{n}_E + \boldsymbol{\sigma}_F \mathbf{n}_F = \mathbf{0} \text{ no contorno } \Gamma_{IFE}, \quad (7.2)$$

na qual,  $\boldsymbol{\sigma}_E$  representa as tensões de Cauchy da estrutura,  $\boldsymbol{\sigma}_F$  as tensões de Cauchy no fluido, e  $\mathbf{n}_E$  e  $\mathbf{n}_F$  representam o vetor normal no contorno  $\Gamma_{IFE}$  apontando para o fluido e para a estrutura respectivamente. Essa condição é atendida através da aplicação de  $\boldsymbol{\sigma}_F \mathbf{n}_F$  aos nós da malha da estrutura na interface entre os meios.

Já a condição geométrica está relacionada ao fato que os domínios computacionais  $\Omega_E$  da estrutura e  $\Omega_F$  do fluido devem sempre coincidir em  $\Gamma_{IFE}$ , ou seja, não devem existir superposições ou frestas nessa interface. No contexto desse estudo essa condição é atendida através de uma movimentação adequada da malha local (Método Arlequin), que se deforma para acomodar a mudança de configuração da estrutura. A técnica de movimentação de malha adotada será apresentada na subseção 7.1.1.

### 7.1.1 Movimentação da Malha

Para a satisfação da condição geométrica nos problemas de IFE desse trabalho, uma técnica adequada de movimentação de malha deve ser aplicada. É necessário que o método de movimentação de malha seja robusto e suficiente para que garanta ao longo de toda a análise dos problemas uma discretização de qualidade.

Dentre as técnicas desenvolvidas até o momento, destacam-se aquelas que impõem os deslocamentos da estrutura na malha do fluido ao longo do contorno  $\Gamma_{IFE}$ , determinando o campo de deslocamentos na malha do fluido por meio da resolução de um problema de valor de contorno (PVC). Neste trabalho, será adotada essa abordagem, formulando o problema com base na equivalência entre a movimentação da malha à um problema de mecânica dos sólidos, e aplicando-se a técnica de movimentação de malhas introduzida em Tezduyar *et al.* (1992c) e Tezduyar *et al.* (1993) conhecida como MJBS (*Mesh-Jacobian Based Stiffening*).

Nesse método, o movimento da malha é determinado usando um problema da elasticidade de Dirichlet fictício, descrito como:

$$\int_{\Omega_{\tilde{t}}} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_M^h) : \boldsymbol{\sigma}_M (\bar{\mathbf{z}}^h - \bar{\mathbf{z}}_{\tilde{t}}^h) d\Omega = 0, \quad (7.3)$$

na qual  $\mathbf{w}_M^h$  é a função peso;  $\bar{\mathbf{z}}^h$  é o deslocamento medido da configuração de referência, com coordenadas  $\bar{\mathbf{x}}^h$ , até a configuração atual  $\mathbf{y}^h$  ( $\mathbf{y}^h = \bar{\mathbf{x}}^h + \bar{\mathbf{z}}^h$ ); e  $\bar{\mathbf{z}}_{\tilde{t}}^h$  representa o deslocamento da configuração de referência até a malha no tempo  $\tilde{t}$ , ou  $\mathbf{y}_{\tilde{t}}^h$  ( $\mathbf{y}_{\tilde{t}}^h = \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{z}}_{\tilde{t}}^h$ );  $\boldsymbol{\sigma}_M$  representa o tensor de Cauchy aplicado aos deslocamentos da malha.

A escolha para  $\tilde{t}$  é geralmente  $\tilde{t} = t_n$  quando se calcula a configuração da malha no tempo  $t_{n+1}$  (ver Tonon *et al.* (2021) para maiores detalhes).

O tensor de tensões é calculado através da seguinte relação:

$$\boldsymbol{\sigma}_M(\mathbf{z}) = \frac{E_M}{1 + \nu_M} \left( \frac{\nu_M}{(1 - 2\nu_M)} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{z})) \mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{z}) \right) \quad (7.4)$$

com  $E_M$  e  $\nu_M$  o módulo de Elasticidade e o coeficiente de Poisson fictícios da malha respectivamente. Os valores usados por definição nesse trabalho são  $E_M = 1,0$  e  $\nu_M = 0,3$ .

Nos problemas de IFE, demanda-se maior controle da resolução da malha próxima a interface dos meios fluidos e sólidos, para representar os efeitos de camada limite, e como consequência, a obtenção de soluções mais acuradas nessas regiões críticas. Para fazer com que na deformação da malha se leve em conta o tamanho dos elementos, enrijecendo os menores mais do que os maiores, no método MJBS a equação da elasticidade fica descrita ao final como:

$$\int_{\Omega_t} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_M^h) : \boldsymbol{\sigma}_M (\bar{\mathbf{z}}^h - \bar{\mathbf{z}}_t^h) \left( \frac{J_M}{(J_M)_0} \right)^{-\chi_M} d\Omega = 0, \quad (7.5)$$

onde  $J_M$  é o Jacobiano da malha,  $(J_M)_0$  é um parâmetro livre e  $\chi_M$  determina a ordem pela qual os elementos menores serão enrijecidos mais do que os maiores.  $\chi_M$  é adotado correntemente como 1, 0. E o Jacobiano da malha calculado da forma que se segue:

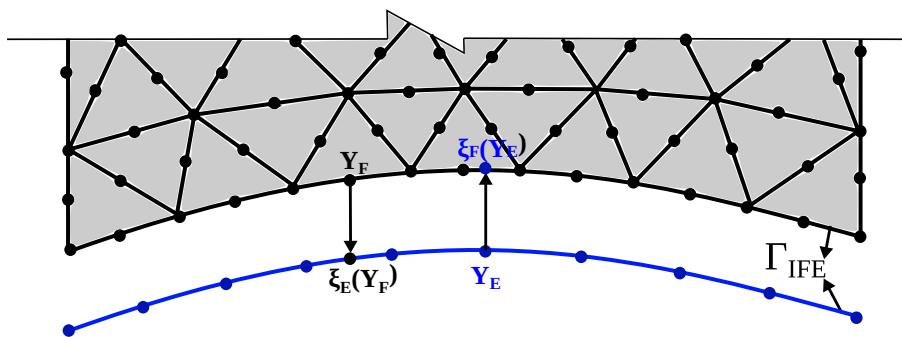
$$J_M = \det \left( \frac{\partial \mathbf{y}_t^h}{\partial \xi} \right). \quad (7.6)$$

## 7.2 Discretizações não coincidentes entre os meios

Na maioria dos casos a discretização das malhas do fluido e da estrutura são não-coincidentes no contorno  $\Gamma_{IFE}$  e podem inclusive ter aproximações matemáticas distintas. Dessa forma, uma metodologia que possibilita a aplicação de condições de contorno em caso de discretizações com nós não coincidentes, é imprescindível.

O procedimento adotado nesse trabalho pode ser entendido a partir da Figura 71. Durante o pré-processamento do código computacional, cada nó do contorno da estrutura  $\mathbf{y}_E$  é projetado sobre o contorno do fluido, e busca-se a coordenada paramétrica relativa a este ponto definida como  $\xi_F(\mathbf{y}_E)$ . Da mesma forma, cada nó do contorno do fluido  $\mathbf{y}_F$  é projetado sobre o contorno da estrutura, e encontra-se uma coordenada paramétrica equivalente  $\xi_E(\mathbf{y}_F)$ .

Figura 71 – Discretizações não-coincidentes no contorno IFE



Fonte: Elaborada pela autora

Dessa forma, as informações que serão transmitidas ao fluido pela estrutura são interpoladas na malha da estrutura em cada uma das coordenadas paramétricas que possuem um nó equivalente na malha de fluido, e após isso aplicadas a este nó. O equivalente ocorre quando os dados são provenientes do fluido e serão transmitidos a estrutura.

### 7.3 Acoplamento Particionado Forte - Bloco-Iterativo

Os problemas de IFE são caracterizados pela interdependência entre o fluido e a estrutura, visto que o comportamento do escoamento depende do formato e do movimento da estrutura, enquanto que o movimento da estrutura e sua deformação dependem das forças do fluido que atuam sobre ela. Matematicamente pode-se dizer que os problemas de IFE são conjuntos de equações e condições de contorno associadas ao fluido e a estrutura que devem ser satisfeitas simultaneamente.

As equações completas discretizadas da formulação IFE conduzem a um sistema de equações não-lineares que devem ser resolvidas a cada passo de tempo e podem ser representadas da seguinte maneira (Bazilevs; Takizawa; Tezduyar, 2013a):

$$\mathbf{N}_1(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) = \mathbf{0}, \quad (7.7)$$

$$\mathbf{N}_2(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) = \mathbf{0}, \quad (7.8)$$

$$\mathbf{N}_3(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) = \mathbf{0}, \quad (7.9)$$

em que  $\mathbf{N}_1$ ,  $\mathbf{N}_2$  e  $\mathbf{N}_3$  representam as equações que descrevem o fluido, a estrutura e a malha respectivamente, e,  $\mathbf{d}_1$ ,  $\mathbf{d}_2$ ,  $\mathbf{d}_3$  são vetores com as variáveis nodais de cada meio. A resolução dessas equações através do método de Newton-Raphson conduz ao seguinte sistema linear de equações:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_3 \end{bmatrix}. \quad (7.10)$$

sendo  $\mathbf{c}_1 = -\mathbf{N}_1$ ,  $\mathbf{c}_2 = -\mathbf{N}_2$ ,  $\mathbf{c}_3 = -\mathbf{N}_3$ .  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  e  $\mathbf{x}_3$  são os incrementos às soluções  $\mathbf{d}_1$ ,  $\mathbf{d}_2$  e  $\mathbf{d}_3$  respectivamente e  $\mathbf{A}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial \mathbf{d}_j}$ .

Bazilevs, Takizawa e Tezduyar (2013a) apresentam uma classificação da metodologia de acoplamento segundo a forma de resolver essas equações não-lineares. As categorias definidas pelos autores são: técnica direta, técnica bloco-iterativa e técnica quase-direta.

A técnica direta seria equivalente aos esquemas de solução monolíticos citados ao longo do texto, e consiste na resolução a cada iteração de Newton-Raphson do sistema apresentado na Equação 7.10. Essa técnica apresenta boa convergência, entretanto, devido aos grandes sistemas lineares gerados, ocorre um aumento do custo computacional.

Nesse contexto, e buscando proporcionar um total desacoplamento entre os *solvers* de fluido e de estrutura, adotou-se o um esquema de acoplamento do tipo particionado forte. Dentro da classificação dos autores Bazilevs, Takizawa e Tezduyar (2013a) seria equivalente a técnica de acoplamento do tipo bloco iterativo.

Quando se utiliza um acoplamento do tipo bloco iterativo, os sistemas do fluido, da estrutura e da malha são tratados em blocos separados, e para cada iteração dentro de um passo de tempo, se resolve sequencialmente o seguinte conjunto de equações:

$$\frac{\partial \mathbf{N}_1}{\partial \mathbf{d}_1} \Big|_{(\mathbf{d}_1^i, \mathbf{d}_2^i, \mathbf{d}_3^i)} \Delta \mathbf{d}_1^i = -\mathbf{N}_1(\mathbf{d}_1^i, \mathbf{d}_2^i, \mathbf{d}_3^i) \quad (7.11)$$

$$\mathbf{d}_1^{i+1} = \mathbf{d}_1^i + \Delta \mathbf{d}_1^i \quad (7.12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{N}_2}{\partial \mathbf{d}_2} \Big|_{(\mathbf{d}_1^{i+1}, \mathbf{d}_2^i, \mathbf{d}_3^i)} \Delta \mathbf{d}_2^i = -\mathbf{N}_2(\mathbf{d}_1^{i+1}, \mathbf{d}_2^i, \mathbf{d}_3^i) \quad (7.13)$$

$$\mathbf{d}_2^{i+1} = \mathbf{d}_2^i + \Delta \mathbf{d}_2^i \quad (7.14)$$

$$\frac{\partial \mathbf{N}_3}{\partial \mathbf{d}_3} \Big|_{(\mathbf{d}_1^{i+1}, \mathbf{d}_2^{i+1}, \mathbf{d}_3^i)} \Delta \mathbf{d}_3^i = -\mathbf{N}_3(\mathbf{d}_1^{i+1}, \mathbf{d}_2^{i+1}, \mathbf{d}_3^i) \quad (7.15)$$

$$\mathbf{d}_3^{i+1} = \mathbf{d}_3^i + \Delta \mathbf{d}_3^i \quad (7.16)$$

Nota-se que o ocorre é apenas uma modificação da matriz tangente com relação ao método direto. Este fato, faz com que a resposta não seja alterada, entretanto, a convergência do problema pode ser afetada.

Em certos problemas envolvendo estruturas leves, a resposta estrutural pode tornar-se extremamente sensível a pequenas variações nas forças provenientes do fluido. Esse fenômeno pode levar à divergência da técnica de bloco iterativo. Para contornar essa dificuldade, adotou-se a estratégia proposta por Tezduyar (2003), chamada de *Augmented A22* na qual a matriz de massa em  $\mathbf{A}_{22}$  é aumentada por um fator dependente do tipo de problema em análise. Essa modificação ocorre sem alterar  $\mathbf{c}_1$ ,  $\mathbf{c}_2$  e  $\mathbf{c}_3$ , ou seja, sem modificar as equações não lineares. Dessa forma, quando a solução pelo método de bloco iterativo converge, a massa estrutural real do problema permanece inalterada.

### 7.3.1 Implementação Computacional

O Algoritmo que descreve a implementação computacional do problema de IFE de acordo com a técnica de acoplamento forte do tipo bloco-iterativo é apresentada no Alg. 5.

No algoritmo apresentado  $\mathbf{t}^E$  representa as forças de superfície no contorno  $\Gamma_{IFE}$  aplicadas à estrutura, e as medidas de convergência  $\epsilon_F$ ,  $\epsilon_E$  e  $\epsilon_M$  são normas vetoriais  $L_2$  aplicadas sobre o resíduo das respectivas equações diferenciais.

## 7.4 Exemplos

Para a validação da metodologia de análise de problemas de IFE, apresentada nesse capítulo, alguns exemplos serão estudados e analisados.

---

**Algoritmo 5** Algoritmo para solução de problemas IFE
 

---

- 1: Busca por coordenadas paramétricas correspondentes aos nós da malha do fluido na malha da estrutura;
- 2: Busca por coordenadas paramétricas correspondentes aos nós da malha da estrutura na malha do fluido;
- 3: **para** o passo de tempo 0 até  $npt - 1$  **faca**
- 4:     Atualiza as variáveis do fluido, estrutura e malha no passo de tempo  $t = t - 1$ ;
- 5:     **para** número de iterações de Newton Raphson  $it = 0$  até  $it = N_{it}$  **faca**
- 6:         **Fluido**
- 7:             Realiza os passos das linhas 1., 2., 3. e 4. do Algoritmo 4;
- 8:             Resolve o problema do fluido (Equação 7.11);
- 9:             Atualiza as variáveis do fluido na iteração  $it$  através da Equação 7.12;
- 10:            Calcula medida de convergência  $\epsilon_F$ ;
- 11:            Atualiza as forças de superfície no contorno  $\Gamma_{IFE}$  ( $\mathbf{t}^E = -\boldsymbol{\sigma}_F \cdot \mathbf{n}_F$ ) ;
- 12:         **Estrutura**
- 13:             Resolve o problema da estrutura (Equação 7.13);
- 14:             Atualiza as variáveis da estrutura na iteração  $it$  através da Equação 7.14;
- 15:             Calcula medida de convergência  $\epsilon_E$ ;
- 16:             Atualiza velocidade e acelerações no fluido no contorno  $\Gamma_{IFE}$ ;
- 17:             Atualiza posição da interface da malha no contorno  $\Gamma_{IFE}$ ;
- 18:         **Malha**
- 19:             Resolve o problema de malha através da Equação 7.15;
- 20:             Atualiza as variáveis da malha na iteração  $it$  através da Equação 7.16;
- 21:             Calcula medida de convergência  $\epsilon_M$ ;
- 22:             **se**  $\epsilon_F$ ,  $\epsilon_E$  e  $\epsilon_M < tol$  **então**
- 23:                 Sair do loop;
- 24:             **fim se**
- 25:         **fim para**
- 26: **fim para**

---

Os dois primeiros exemplos dizem respeito a uma cavidade com um fundo flexível composto por uma chapa, com velocidade oscilatória aplicada em seu topo. Esses exemplos são uma extensão do típico problema da DFC de uma cavidade quadrada (apresentado, por exemplo, na subseção 2.5.2) e serão apresentados em uma versão bidimensional e tridimensional.

O seguinte exemplo consiste em um painel flexível engastado a um bloco prismático rígido. Esse problema é comumente utilizado na validação de códigos de Interação Fluido-Estrutura (IFE), pois envolve fenômenos complexos. À medida que ocorre o desprendimento de vórtices devido ao escoamento ao redor do prisma, perturbações são geradas no fluxo, excitando a estrutura, que então sofre grandes deslocamentos.

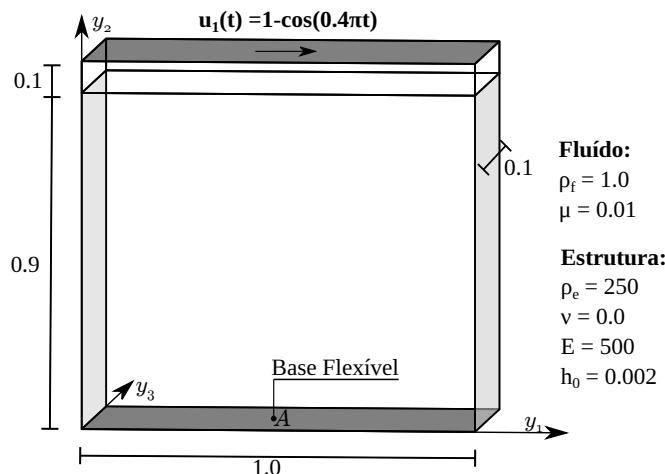
#### 7.4.1 Cavidade com fundo flexível - 2D

O problema da cavidade com fundo flexível trata-se de uma extensão do típico problema da DFC de uma cavidade quadrada com velocidade prescrita em sua parede

superior. Sua simulação computacional já foi realizada por diversos autores, como por exemplo, Gerbeau e Vidrascu (2003) e Yokomizo (2024), e por isso, será utilizada no processo de validação da metodologia nesta tese apresentada.

A cavidade com fundo flexível (geometria apresentada na Figura 72) consiste em uma cavidade composta por paredes laterais rígidas e um fundo flexível composto por uma placa fina de 0,002. No seu topo uma velocidade oscilatória horizontal  $u_1(t) = 1 - \cos(0,4\pi t)$  é aplicada, sendo as demais velocidades ( $u_2$  e  $u_3$ ) nessa parede nulas. Condições de contorno de não deslizamento são aplicadas as paredes laterais. Esse modelo de cavidade apresenta duas aberturas de 0,1 no topo de suas laterais com condições homogêneas de Neumann. O problema apresenta comportamento bidimensional, e por isso será analisado utilizando-se uma discretização 3D com uma espessura de 0,1 de profundidade. Adotou-se condição de simetria para o fluido na direção  $y_3$ . Na Figura 72 são apresentadas também as propriedades físicas do fluido e da estrutura necessárias a análise.

Figura 72 – Cavidade fundo flexível 2D: geometria



Fonte: Elaborada pela autora

A placa fina possui condições de deslocamentos nulos em suas laterais esquerda e direita, e, na direção perpendicular ao plano da cavidade o vetor generalizado e os deslocamentos, nesta direção, são prescritos como zero em  $y_3 = 0,0$  e  $y_3 = 0,1$ .

No que diz respeito a integração temporal utilizou-se  $\Delta t = 0,1$ , e  $\rho_\infty = 0,0$ . A escolha por uma integração temporal com máxima dissipação se deu por conta do trabalho de Förster, Wall e Ramm (2007) que reporta que a regra trapezoidal de integração leva a resultados instáveis para esse problema.

Foram utilizadas nas análises três diferentes discretizações para o modelo Arlequin, sendo as malhas globais em discretização isogeométrica com funções de forma quadráticas (AIG) e as malhas locais, mais refinadas e estruturadas, em elementos finitos (MEF) tetraédricos quadráticos. Além disso, os resultados foram comparados com uma discretiza-

ção somente em elementos finitos tetraédricos quadráticos, chamada de monomodelo. A quantidade de nós, ou pontos de controle (PC), e de elementos ou células, para cada uma dessas discretizações é apresentada na Tabela 4, assim como detalhes da discretização da placa, na qual foram utilizados elementos triangulares quadráticos estruturados. Na tabela ML e MG são abreviações para malha local e malha global respectivamente, e El representa os elementos ou células.

Tabela 4 – Cavidade fundo flexível 2D: Discretizações

	Nós/PC-ML	El-ML	Nós/PC-MG	El-MG
Arlequin - Malha 0	315	120	504	100
Arlequin - Malha 1	1107	480	1584	400
Arlequin - Malha 2	4131	1920	5544	1600
Monomodelo	-	-	9389	4563
Estrutura - Malha 0	-	-	63	20
Estrutura - Malha 1	-	-	123	40
Estrutura - Malha 2	-	-	243	80

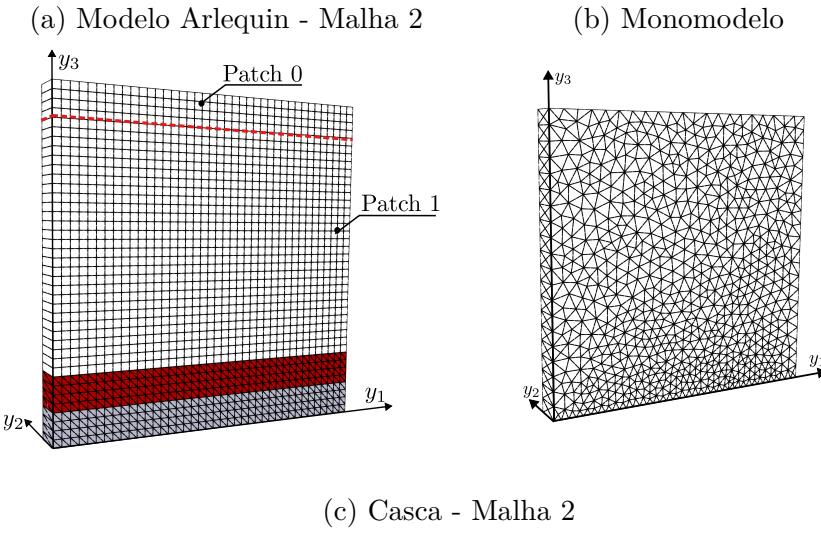
Fonte: Elaborada pelos autores.

A malha isogeométrica utilizada foi composta por 2 *patches* (observar Figura 73a para a Malha 2). Essa discretização usando 2 *patches* foi necessária para gerar pontos de controle interpolatórios posicionados na linha que separa as paredes laterais das aberturas, possibilitando a adequada aplicação das condições de contorno. Na Figura 73a pode ser observada também a composição do modelo Arlequin. A região em vermelho da malha local corresponde aos elementos que fazem parte da zona de colagem. A espessura da zona de colagem foi definida como 0,1. A constante do operador de acoplamento  $L^2$  foi especificada como  $k_0 = 10$ . A quantidade de elementos na zona de colagem para malha 0, 1 e 2 foram respectivamente de 60, 240, 960, e de nós 189, 615 e 2187. Na Figura 73b apresenta-se a malha do monomodelo e na Figura 73c a malha 2 da casca.

Nesse problema foi necessário para atingir a convergência a utilização da técnica *Augmented A22*, multiplicando-se a parcela da matriz tangente referente à matriz de massa da estrutura por um fator 2,0.

Na Figura 74 são apresentados os deslocamentos da placa no ponto A (ver Figura 72) para os modelos Arlequin (malha 0, malha 1 e malha 2). Para a comparação com as referências e com o monomodelo, utilizou-se o modelo Arlequin composto pela malha 2, mais refinada, e os resultados são apresentados na Figura 75. Pode-se observar nessa última

Figura 73 – Cavidade fundo flexível 2D: Discretizações



Fonte: Elaborada pela autora

figura, que os dados obtidos com o modelo Arlequin são compatíveis com os obtidos com o monomodelo. As diferenças encontradas entre a amplitude dos deslocamentos obtidos nesse trabalho com as referências podem ser atribuídas para as diferentes formulações e discretizações adotadas para a modelagem do fluido e da chapa. Vale ressaltar, que apesar das discretizações distintas entre o monomodelo e o modelo Arlequin, os resultados obtidos se mostraram muito satisfatórios.

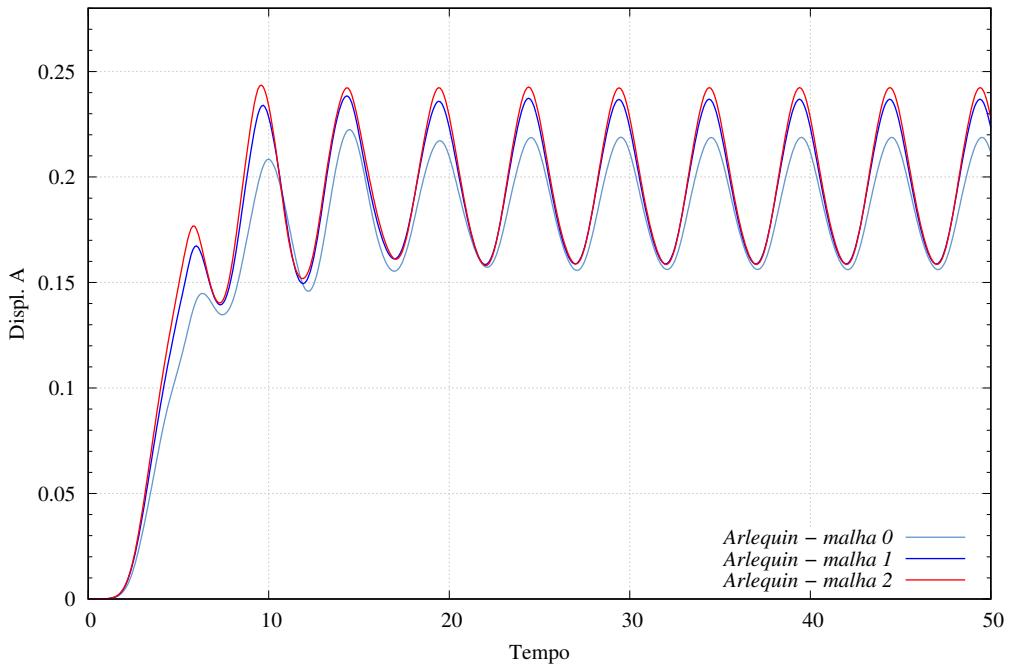
Na Figura 76 são apresentados os campos de velocidade em diferentes tempos da análise. Na Figura 77 são apresentados os campos de pressão nesses mesmos tempos de análise.

#### 7.4.2 Cavidade com fundo flexível - 3D

O problema da cavidade tridimensional com fundo flexível foi proposto inicialmente por Mok (2001) e é muito semelhante ao 2D, entretanto, nessa variação a profundidade da cavidade possui dimensão unitária, conforme pode ser visualizado na Figura 78, além disso, a chapa possui restrição de deslocamentos em todos os 4 bordos. Os demais dados necessários à análise são idênticos ao do problema 2D.

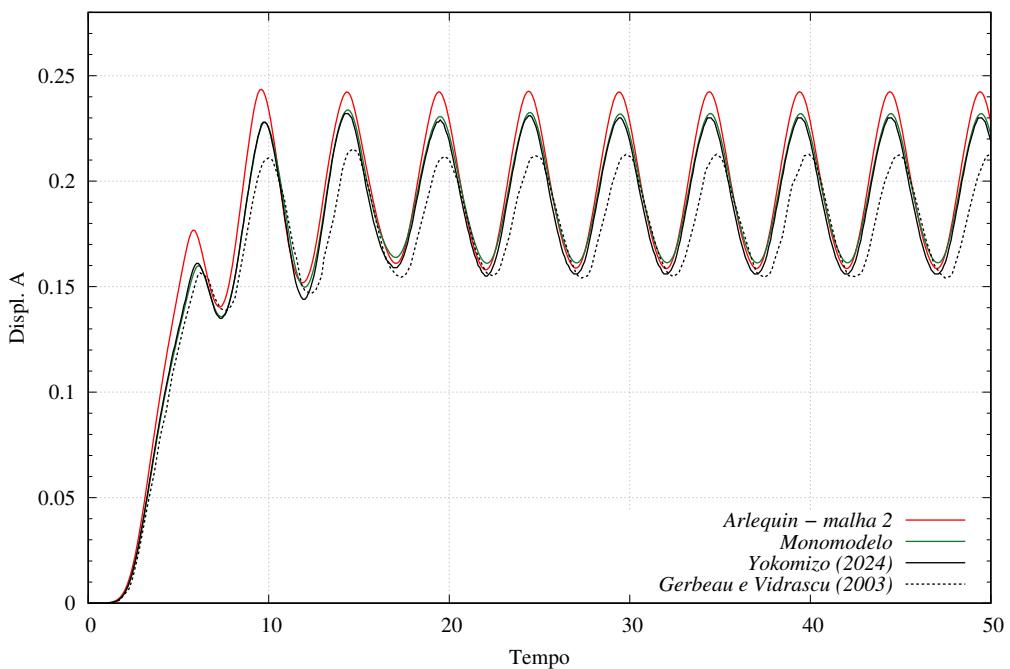
Foram utilizadas nas análises desse problema duas diferentes discretizações: 1. Modelo Arlequin (ver Figura 79a), sendo a malha global em discretização isogeométrica (AIG) com funções base quadráticas e a malha local, mais refinada e estruturada, em elementos finitos (MEF) tetraédricos quadráticos; 2 . Monomodelo (Figura 79b) discretizado com elementos finitos tetraédricos quadráticos. Para ambos modelos utilizou-se uma placa

Figura 74 – Cavidade fundo flexível 2D: Deslocamento em A para malhas do modelo Arlequin



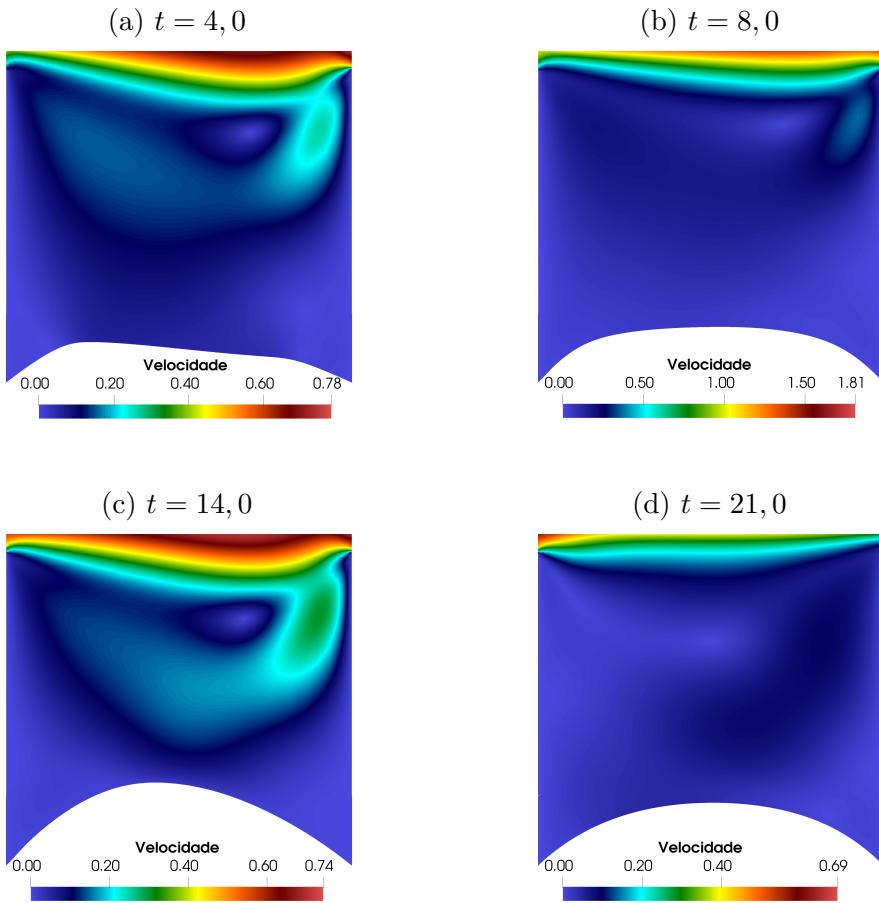
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 75 – Cavidade fundo flexível 2D: Deslocamento em A comparado com as referências e monomodelo



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 76 – Cavidade fundo flexível 2D: Campos de velocidade



Fonte: Elaborada pela autora

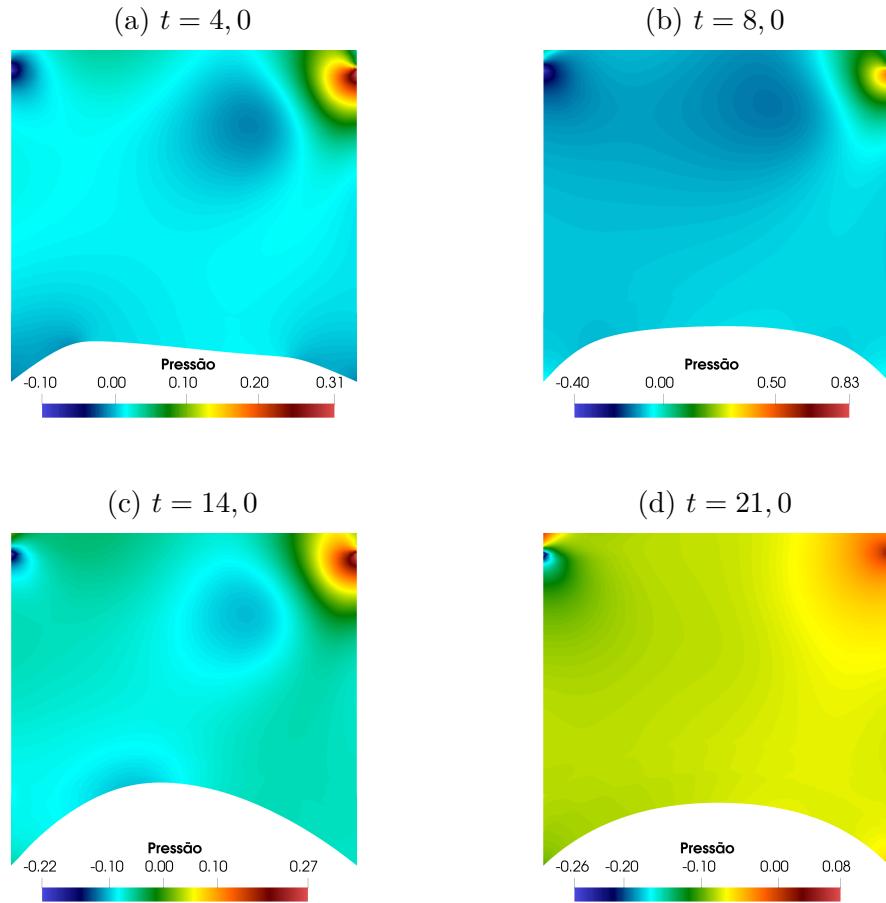
discretizada com elementos finitos triangulares quadráticos, apresentada na Figura 79c.

O modelo Arlequin é composto por uma malha global discretizada com 2 *patches* que totalizam 8000 células e 11616 pontos de controle. A malha local possui 9600 elementos e 15129 nós. A zona de colagem (ver área vermelha da Figura 79a) é composta por 4800 elementos e 8405 nós. O monomodelo foi discretizado com 15895 elementos e 25127 nós. A malha da placa é constituída por 1969 nós e 944 elementos.

Na Figura 80 pode se observar o deslocamento no ponto A que fica no centro da placa flexível para os modelos Arlequin e monomodelo, assim como os resultados dos trabalhos de Mok (2001), Vázquez (2007) e Yokomizo (2024). As diferenças encontradas entre a amplitude dos deslocamentos obtidos nesse trabalho com as referências podem ser atribuídas para as diferentes formulações e discretizações adotadas para a modelagem do fluido e da chapa.

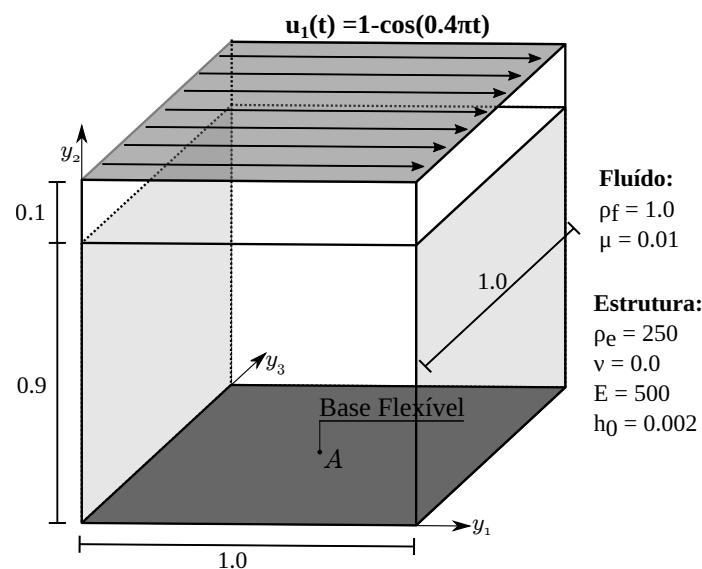
Na Figura 81 apresenta-se os campos de velocidade em diferentes instantes de tempo da análise; na Figura 82, para esses mesmos instantes, apresenta-se os campos de

Figura 77 – Cavidade fundo flexível 2D: Campos de Pressão



Fonte: Elaborada pela autora

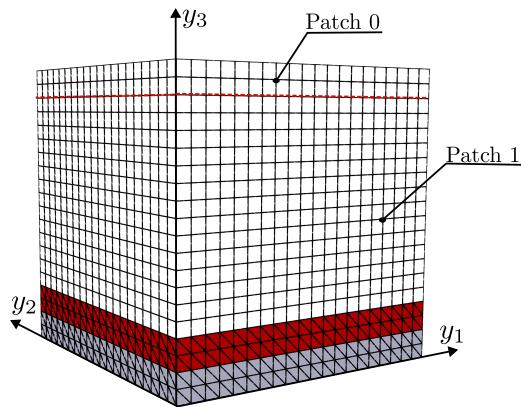
Figura 78 – Cavidade fundo flexível 3D: Geometria



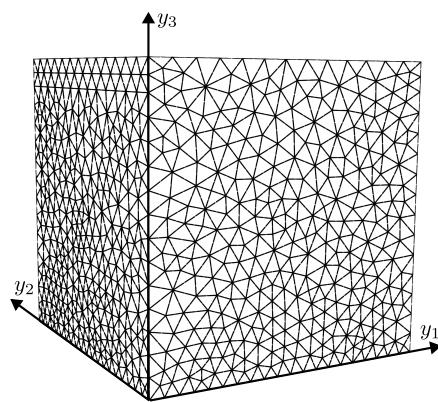
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 79 – Cavidade fundo flexível 3D: Discretização

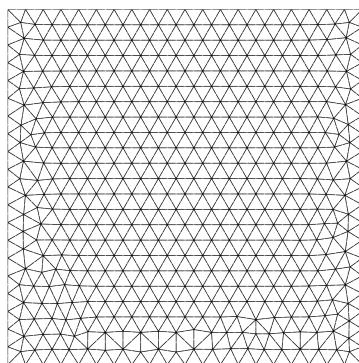
(a) Malhas do modelo Arlequin



(b) Malha do Monomodelo



(c) Malha da placa



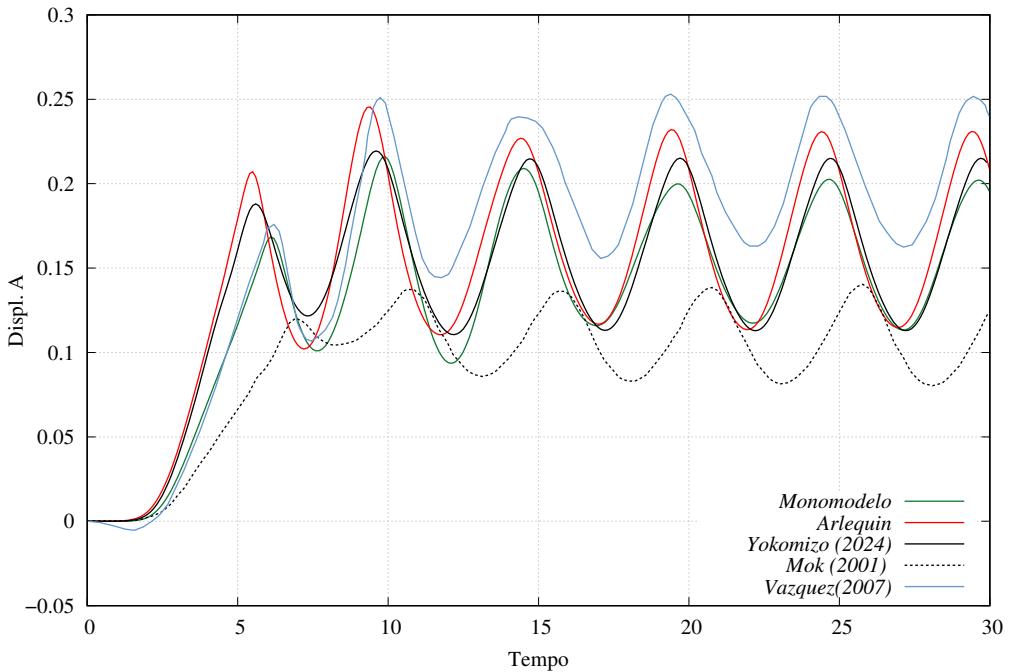
Fonte: Elaborada pela autora

pressão. Por fim, na Figura 83 podem ser visualizados os deslocamentos na placa.

#### 7.4.3 *Flutter* em painel flexível

O problema dessa subseção consiste em um painel flexível engastado a um prisma rígido, conforme Figura 84. Devido a complexidade dos fenômenos envolvidos nessa simulação, esse exemplo caracteriza-se por ser um dos mais utilizados na literatura para validação de formulações de IFE. Esse problema foi inicialmente proposto por Wall e Ramm (1998), e mais tarde, reformulado por Hübner, Walhorn e Dinkler (2004). Essa segunda versão apresenta a mesma geometria da original, entretanto, possui alteração na velocidade de entrada e nas propriedades elásticas da estrutura. A versão apresentada por Hübner, Walhorn e Dinkler (2004), será utilizada nesse estudo, e distingue-se por ser menos propícia a instabilidades decorrentes de acoplamento fraco. Esse problema apresenta comportamento bidimensional e aqui será simulado através de uma malha 3D utilizando-se

Figura 80 – Cavidade fundo flexível 3D: Deslocamento em A



Fonte: Elaborada pela autora

uma profundidade de 0,1cm.

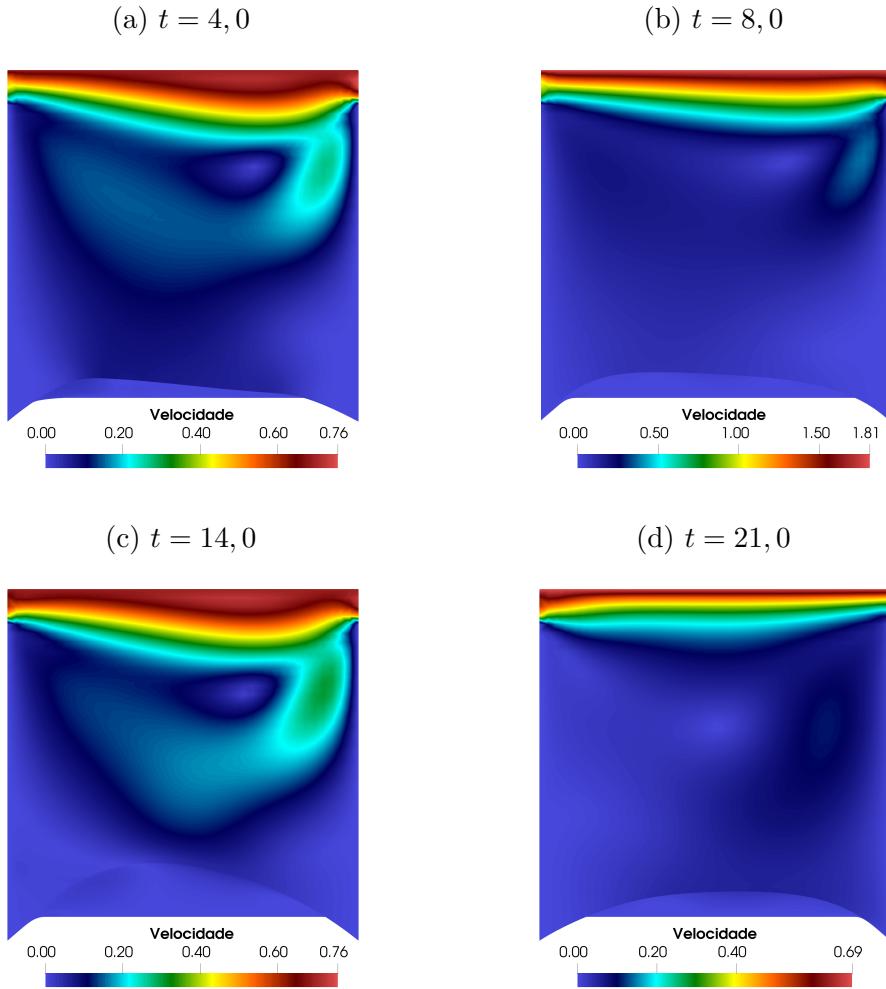
A velocidade de entrada do escoamento é definida por  $u_\infty = 31,5\text{cm/s}$  e o fluido possui propriedades físicas do ar: viscosidade dinâmica de  $\mu = 1,82 \times 10^{-4}\text{g/(cm.s)}$  e massa específica equivalente a  $\rho_f = 1,18 \times 10^{-3}\text{g/cm}^3$ . Tomando-se por referência o comprimento do prisma obtém-se um número de Reynolds  $\text{Re} = 204$ . A placa possui espessura de 0,06cm, massa específica de  $\rho_e = 2,0\text{g/cm}^3$ , e módulo de elasticidade caracterizado por  $E = 2,0 \times 10^5\text{g/(cm.s}^2)$ . Devido ao comportamento bidimensional do problema aplica-se para a placa um coeficiente de poisson  $\nu = 0,0$ .

Para a simulação adotou-se para o campo de velocidade inicial em todo o domínio equivalente a  $u_\infty$ . As condições de contorno para o problema são apresentadas na Figura 84 (com dimensões em cm). Adicionalmente adotou-se condição de simetria para o fluido na direção  $y_3$ , e para estrutura, nos contornos frontal e posterior, definiu-se vetor generalizado e os deslocamentos, nesta direção, como nulos.

As simulações foram conduzidas utilizando um Modelo Arlequin (Figura 85a), onde a malha global é aproximada por uma discretização isogeométrica com funções quadráticas, enquanto que para malha local foram utilizados elementos finitos tetraédricos quadráticos. Além disso, um monomodelo (Figura 85b) foi empregado nas análises, discretizado com elementos finitos tetraédricos quadráticos. Em ambos os modelos, a placa foi representada por elementos finitos triangulares quadráticos, conforme ilustrado na Figura 85c.

O modelo Arlequin é composto por uma malha global discretizada com 1800

Figura 81 – Cavidade fundo flexível 3D: Campos de velocidade



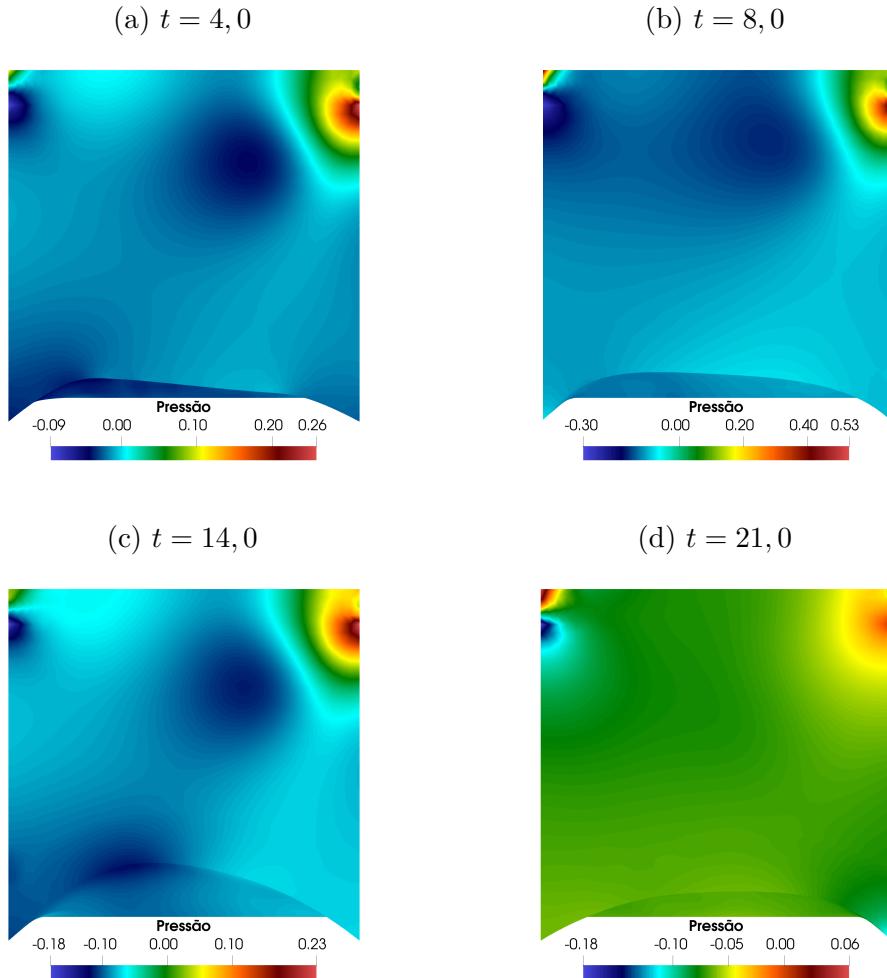
Fonte: Elaborada pela autora

elementos e 5952 pontos de controle. A malha local possui 12878 elementos e 25934 nós. A zona de colagem, com espessura de 0,2cm, de acordo com a Figura 85a é composta por 1821 elementos e 4251 nós. O monomodelo foi discretizado com 13315 elementos e 26599 nós. A malha da placa é constituída por 273 nós e 108 elementos. No que diz respeito a integração temporal utilizou-se  $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$ , e  $\rho_\infty = 0,5$ .

Hübner, Walhorn e Dinkler (2004) obtiveram em suas simulações uma frequência de desprendimento de vórtices, considerando a placa como rígida, de  $f_f = 3,7\text{Hz}$ . De acordo com a teoria clássica da dinâmica das estruturas as três primeiras frequências naturais de vibração para essa estrutura de placa são  $f_1 = 0,61\text{Hz}$ ,  $f_2 = 3,80\text{Hz}$  e  $f_3 = 10,63\text{Hz}$ . Dessa forma, espera-se que a frequência de vibração da estrutura para o problema de IFE fique próxima a sua segunda frequência natural.

Na Figura 86 pode-se observar os resultados de deslocamento vertical na ponta da placa (ponto A) obtidos nesse estudo através do modelo Arlequin e do Monomodelo.

Figura 82 – Cavidade fundo flexível 3D: Campos de Pressão

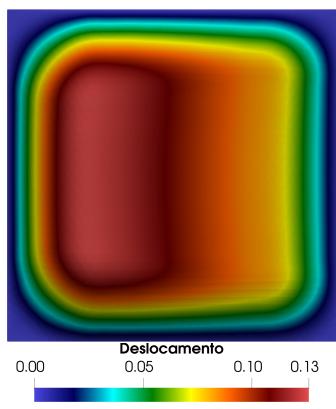
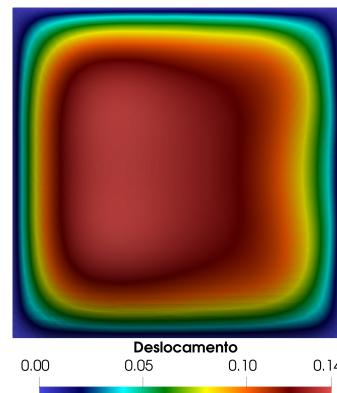
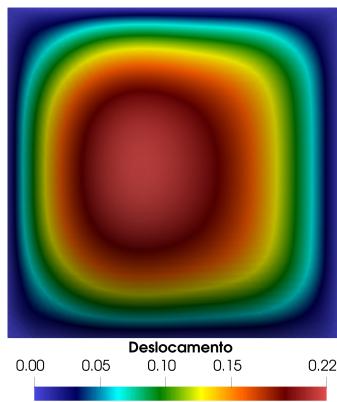
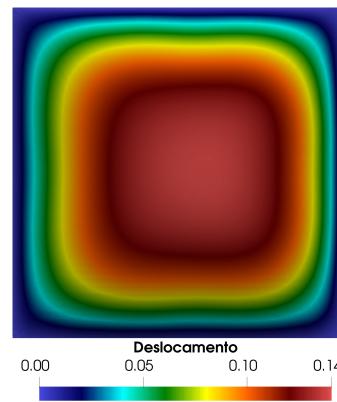


Fonte: Elaborada pela autora

Conforme pode ser observado os resultados para o monomodelo não chegam até o tempo final da análise, isto se deve em função do colapso que ocorre na malha devido aos grandes deslocamentos. Na Figura 86 também podem ser visualizado a envoltória dos deslocamentos obtidos por Hübner, Walhorn e Dinkler (2004). Nota-se que os resultados desse trabalho vão se aproximando com os da referência a medida que o tempo de análise aumenta. A placa desloca-se de maneira crescente até certo ponto da análise, e a partir de então sua amplitude de vibração se mantém aproximadamente constante.

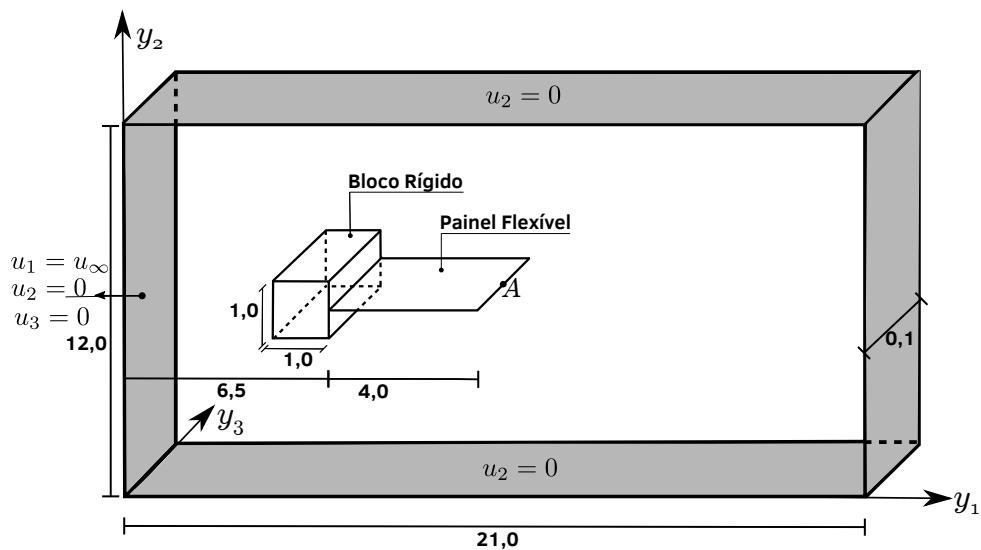
Hübner, Walhorn e Dinkler (2004) obtiveram a frequência de vibração um valor de  $3,1\text{Hz}$  enquanto que nesse trabalho obteve-se o valor de  $3,07\text{Hz}$ , calculado a partir da média dos períodos do tempo 8s até 16s. Com relação a amplitude máxima obtiveram-se valores de  $+0,77$  e  $-0,77$ . Observa-se que a frequência de vibração da estrutura diferiu da frequência natural calculada em função dos fenômenos que ocorrem no acoplamento entre os dois meios.

Figura 83 – Casca: Campos de Deslocamentos

(a)  $t = 4,0$ (b)  $t = 8,0$ (c)  $t = 14,0$ (d)  $t = 21,0$ 

Fonte: Elaborada pela autora

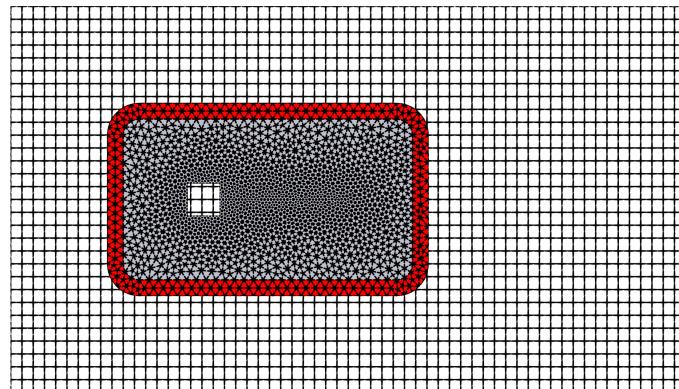
Figura 84 – Painel Flexível: Geometria



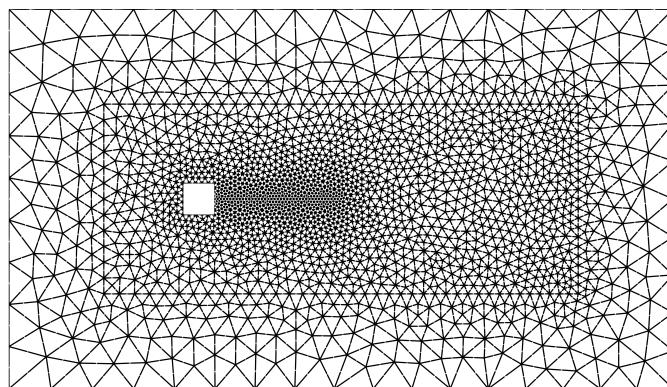
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 85 – Painel Flexível: Discretização

(a) Malhas do modelo Arlequin



(b) Malha do monomodelo



(c) Malha da placa

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

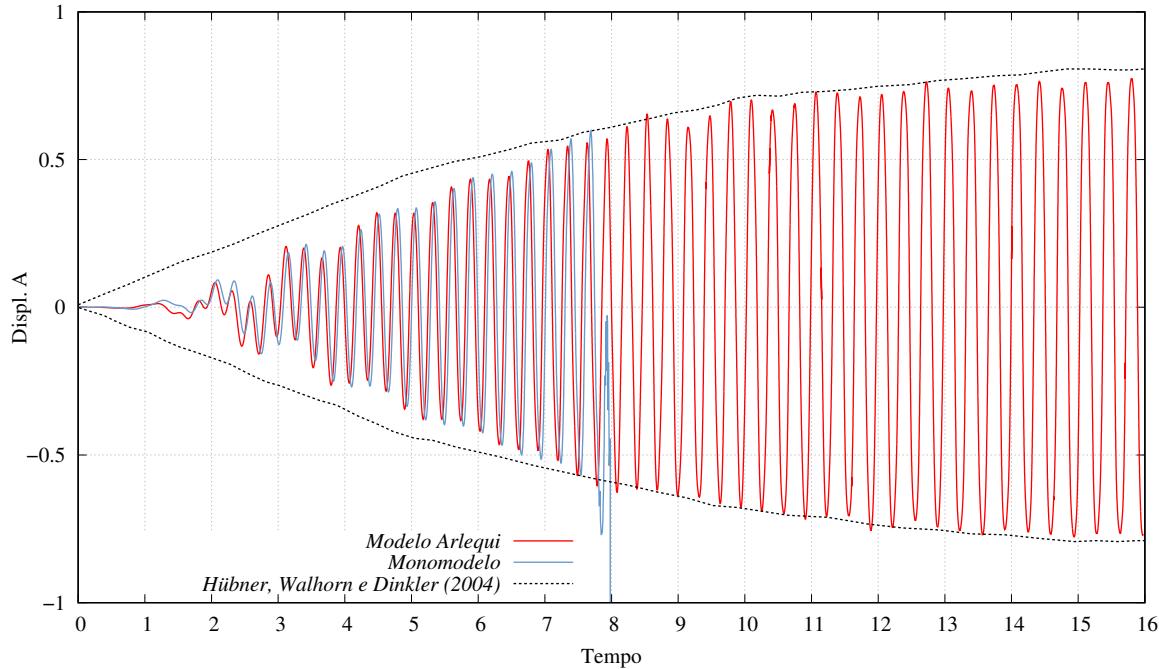
Fonte: Elaborada pela autora

Considerando um ciclo de movimento da estrutura  $T$  (aproximadamente periódico) apresentam-se os valores de campos de velocidade (Figura 87 ) e de pressão (Figura 88) para alguns instantes dentro de metade de um ciclo. Na Figura 89 apresenta-se a deformada da malha para o instante de maior deslocamento do problema.

#### 7.4.4 Turbina

Este último exemplo tem intuito de expor um caráter mais prático de aplicação da formulação relatada nessa tese. A primeira parte dessa subseção dedica-se a apresentar a simulação de um escoamento hidráulico em um rotor de turbina. Para isso, utiliza-se um tubo, por onde ocorre o escoamento, e que define um dos contornos do domínio do fluido. Dentro desse tubo encontra-se um eixo, encapsulado em um tubo interno, e, acoplado a estrutura do rotor. A estrutura é discretizada através de elementos finitos de cascavéis,

Figura 86 – Painel Flexível: Deslocamento em A



Fonte: Elaborada pela autora

enquanto que, o domínio do fluido por elementos finitos tetraédricos . Durante a rotação da turbina, toda a malha de elementos finitos do fluido se deforma e desloca para acomodar a nova posição da estrutura.

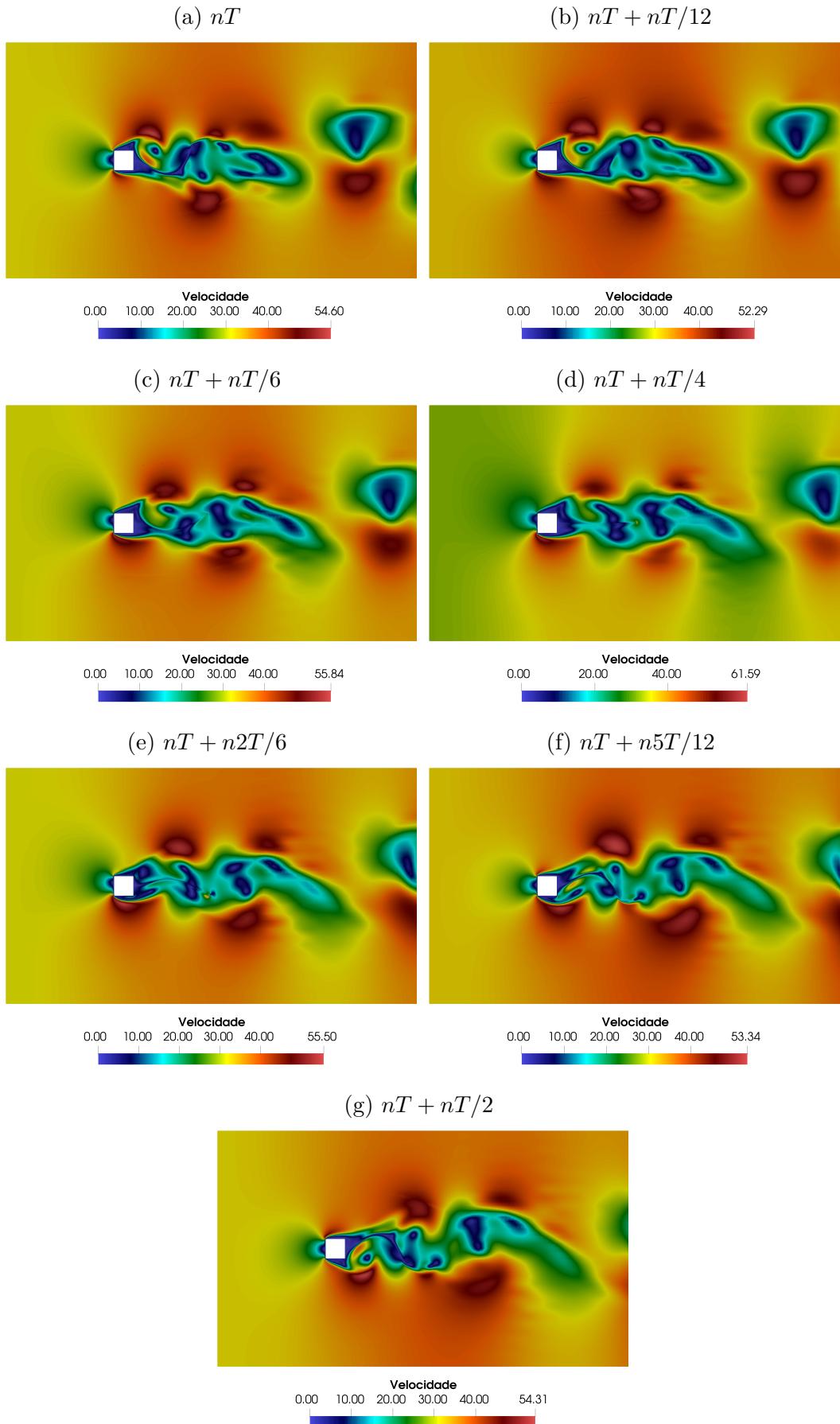
Na segunda parte do exemplo, realiza-se a simulação do funcionamento dessa mesma turbina hidráulica, entretanto, adicionam-se pás diretoras fixas e rígidas ao tubo interno a montante do rotor. Para essa finalidade, utiliza-se o modelo Arlequin estabilizado para a discretização do domínio do fluido, de maneira a permitir que apenas o domínio na região do cubo do rotor gire, enquanto que o restante da malha mantém-se fixa.

#### 7.4.4.1 Turbina - Monomodelo

A simulação do escoamento através de uma turbina hidráulica instalada em um tubo foi realizada com base na geometria ilustrada na Figura 90, que apresenta as principais características do domínio computacional considerado.

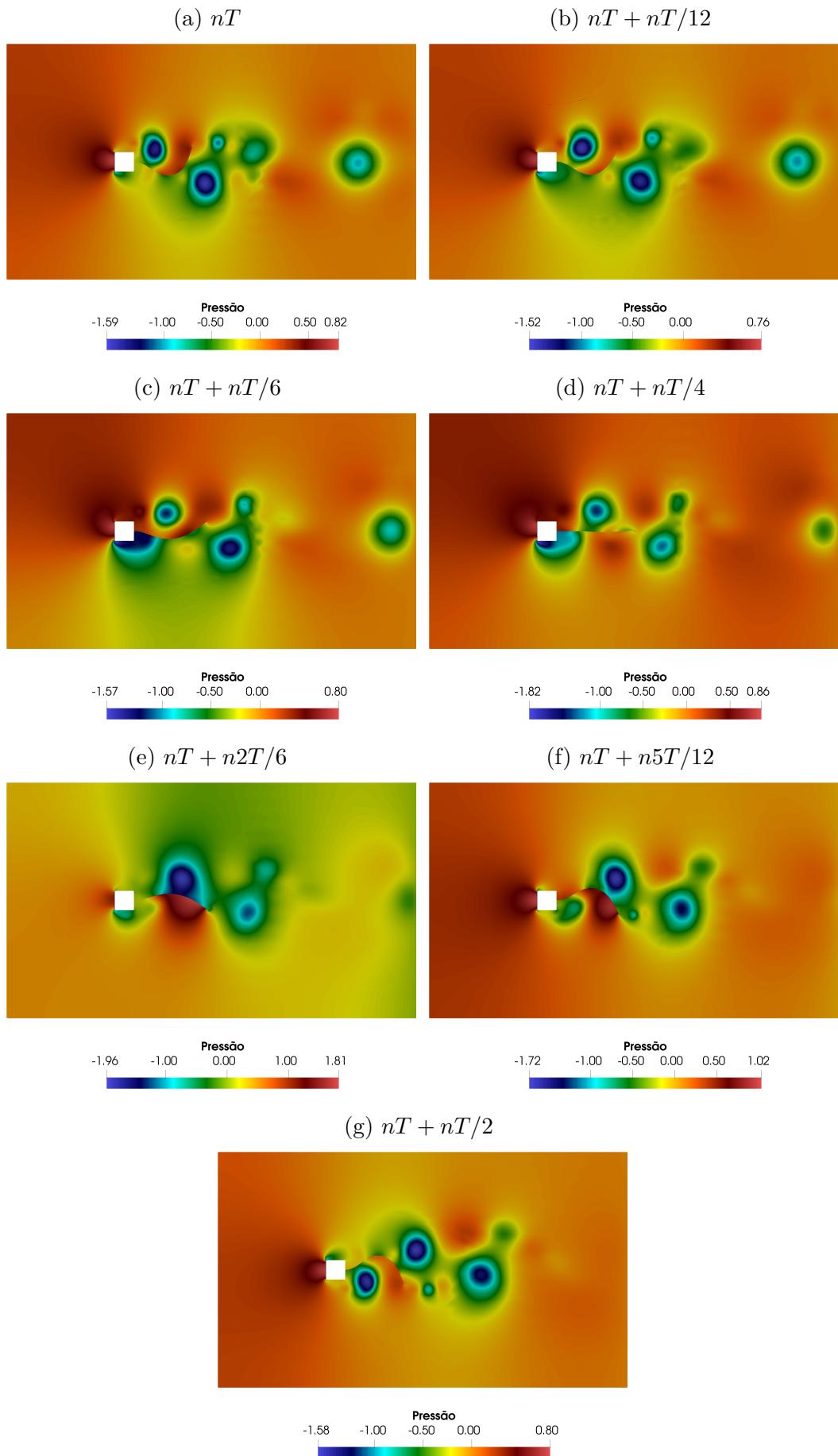
No que diz respeito ao fluido, o contorno externo do seu domínio é composto por um tubo de comprimento  $17L$ , com  $L = 0,684\text{dm}$ , e diâmetro  $D_t = 1,74\text{dm}$ . O contorno interno do domínio está delimitado pelo tubo interno de diâmetro  $d = 0,6\text{dm}$  e comprimento  $8L$ , e pela estrutura do rotor. O fluido possui propriedades físicas da água, que consistem em viscosidade dinâmica de  $\mu = 1,00 \times 10^{-4}\text{kg}/(\text{dm} \cdot \text{s})$  e massa específica equivalente a  $\rho_f = 1,00\text{kg}/\text{dm}^3$ . Ao domínio do fluido, aplica-se condição de não deslizamento para as paredes do tubo externo e interno. Além disso, uma força de

Figura 87 – Painel Flexível: Campos de velocidade



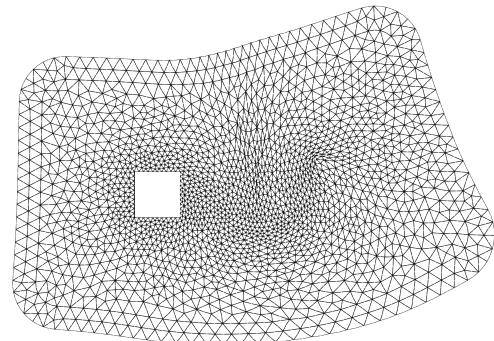
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 88 – Painel Flexível: Campos de pressão



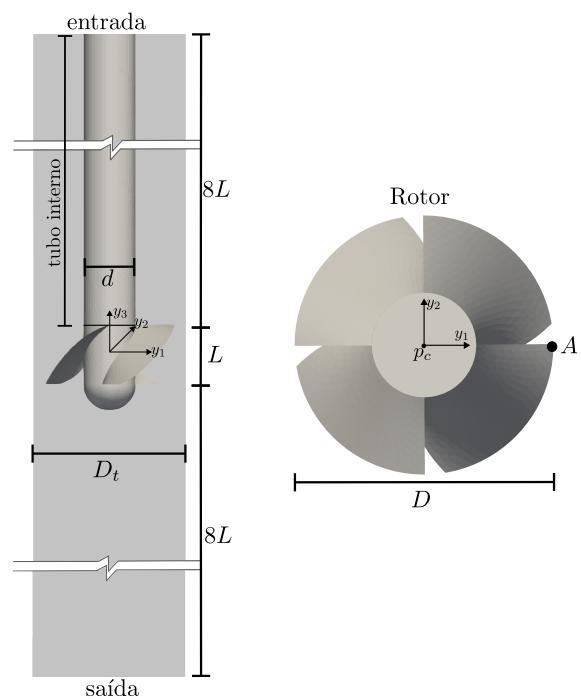
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 89 – Painel Flexível: Deformada da malha em  $nT$



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 90 – Turbina monomodelo: Geometria



Fonte: Elaborada pela autora

superfície na entrada do domínio equivalente a  $100kPa$  é empregada.

A estrutura, consistem em uma turbina de 4 pás de espessura constante,  $t_p = 0,02dm$ , com diâmetro de ponta (*tip*)  $D = 1,5dm$ . As pás são acopladas a um cubo (*hub*) de diâmetro  $d = 0,60dm$  e espessura  $t_c = 0,1dm$ . Considera-se que o eixo possui o mesmo diâmetro e espessura do cubo e se prolonga até a entrada do escoamento dentro do tubo interno. A geometria da pás foi gerada utilizando o software CFTurbo®<sup>1</sup>. Selecionou-se um aço para compor o material da estrutura, que caracteriza-se por uma massa específica de  $\rho_e = 8,0Kg/dm^3$ , e módulo de elasticidade de  $E = 2,0 \times 10^{10}kg/(dm.s^2)$ . Para permitir a rotação da turbina, no nó central ( $p_c$ ) da superfície superior do eixo (superfície de entrada do escoamento), travaram-se os deslocamentos em  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$ , enquanto que para os demais nós desta superfície restringiram-se os deslocamentos na direção de  $y_3$ .

No que diz respeito a integração temporal utilizou-se  $\Delta t = 1 \times 10^{-3}$ , e para o fluido um raio espectral  $\rho_\infty = 0,5$ .

A malha utilizada para a discretização do domínio do fluido, é apresentada na Figura 91a e é composta por 49239 elementos tetraédricos quadráticos e 76548 nós, enquanto que, a malha da discretização da estrutura (ver Figura 91b) é composta por 3807 elementos de casca triangulares quadráticos e 7791 nós.

A fim de se analisar os deslocamentos máximos nas pás ao longo do tempo na direção  $y_3$ , demarcou-se um ponto "A" na extremidade de uma das pás, conforme pode ser visualizado na Figura 90. Os deslocamentos apresentados nesse nó ao longo do tempo, são apresentados na Figura 92. Ao realizar-se a média dos deslocamentos a partir do tempo  $t = 0,2$  até o final da análise, obteve-se um valor de  $-0,0127355cm$ .

Além disso, acompanhou-se a velocidade angular deste mesmo ponto ao longo do tempo. Conforme pode-se observar na Figura 93 a velocidade angular aumenta até o tempo  $t = 0,2s$  e depois mantém-se com valor aproximadamente constante de  $96,25rad/s$ .

Por fim, apresentam-se os campos de velocidade e de pressão obtidos ao longo de uma rotação completa das pás dos rotores. Os campos podem ser visualizados na Figura 94 e Figura 95.

Considerando-se a velocidade média na saída do tubo no final da análise, obteve-se uma vazão do escoamento de  $128,77dm^3/s$ .

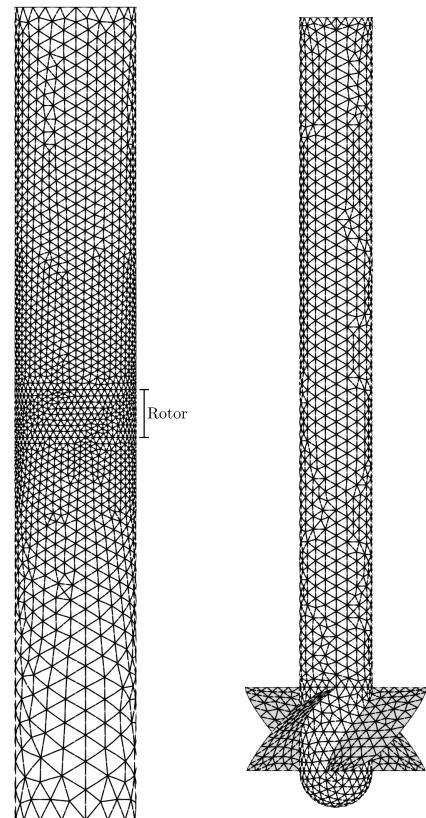
#### 7.4.4.2 Turbina - Modelo Arlequin

Na segunda etapa de análise, adicionam-se 4 pás diretoras rígidas e fixas ao tubo interno do escoamento, conforme pode ser observado na Figura 96, mantendo-se as demais características do domínio do fluido e da estrutura, assim como as propriedades físicas dos meios apresentados em subseção 7.4.4.1,

<sup>1</sup> Disponível em: <https://www.cfturbo.com>

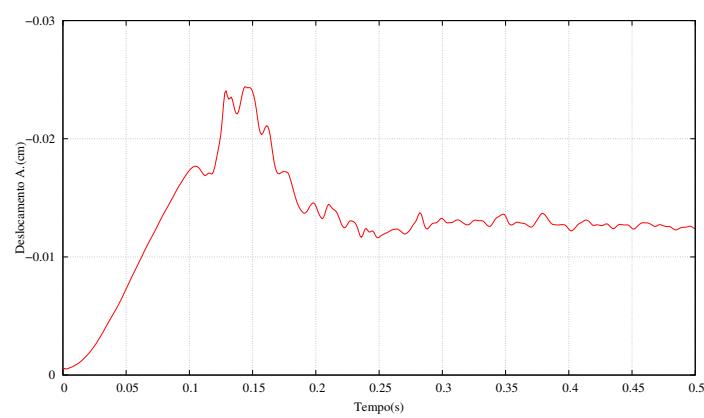
Figura 91 – Turbina monomodelo: Malhas

(a) malha fluido  
 (b) malha estrutura



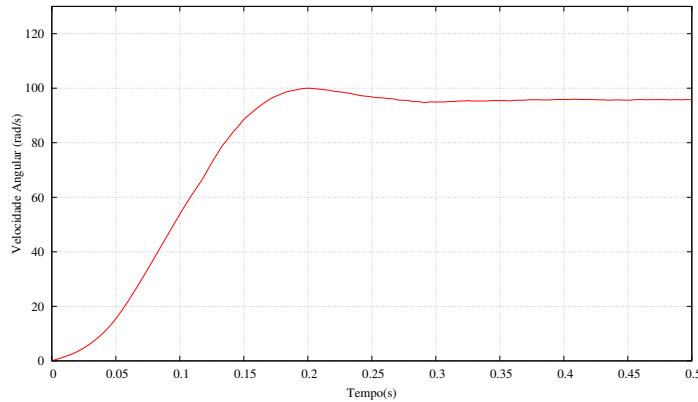
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 92 – Turbina monomodelo: Deslocamento em  $y_3$  no ponto A



Fonte: Elaborada pela autora

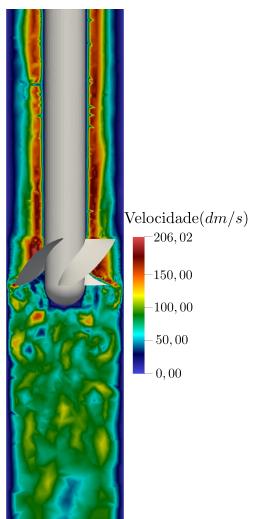
Figura 93 – Turbina monomodelo: Velocidade angular no ponto A



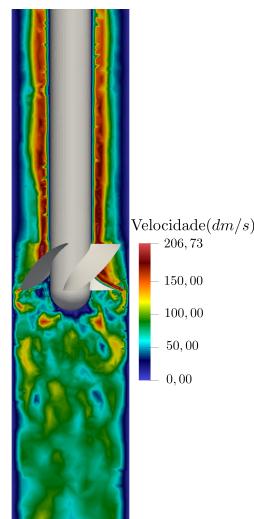
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 94 – Turbina monomodelo: Campos de velocidade

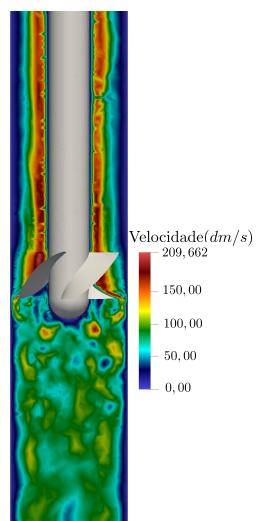
(a)  $t = 0,414s$



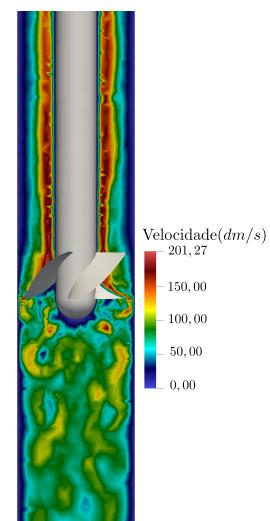
(b)  $t = 0,430s$



(c)  $t = 0,446s$

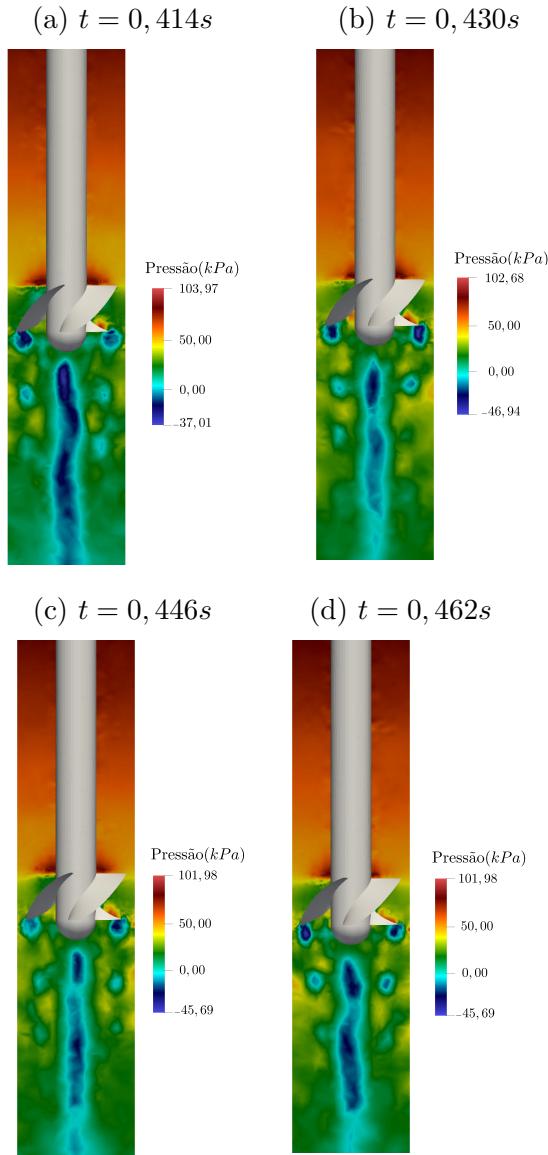


(d)  $t = 0,462s$



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 95 – Turbina monomodelo: Campos de pressão



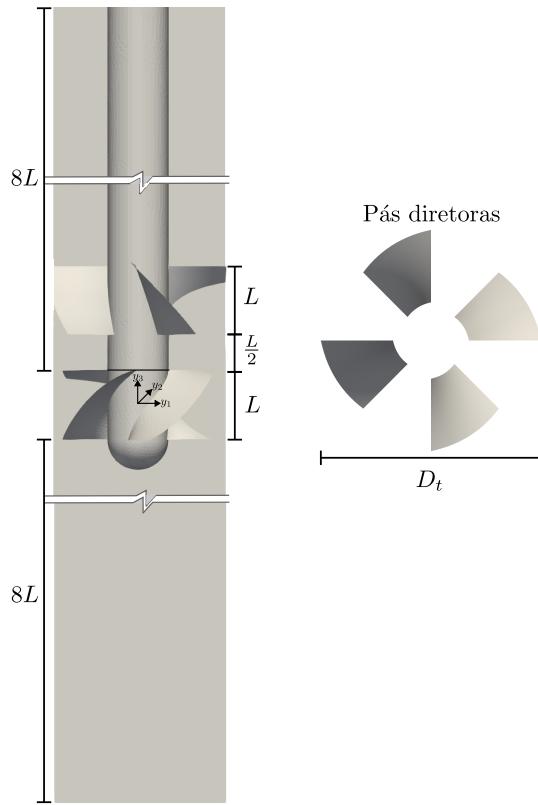
Fonte: Elaborada pela autora

Para permitir que as pás diretoras se mantenham fixas ao longo da análise do escoamento, será utilizado o método Arlequin estabilizado para a resolução do problema de IFE. O domínio local, no qual o rotor está contido, foi discretizado com uma malha em elementos finitos, de 26052 nós e 40766 elementos tetraédricos quadráticos, conforme pode ser observado na Figura 97a. A malha global, foi discretizado com o auxílio de 21 *patches* (ver Figura 97b), e possui 21438 pontos de controle e 9660 células.

A zona de colagem, que é destacada na Figura 97a com a cor vermelha, possui espessura de 0,129dm, totalizando uma quantidade de 6782 elementos finitos e 3257 nós. A constante do operador de acoplamento  $L^2$  foi especificada como  $k_0 = 10$ .

Ressalta-se que, para a simulação deste problema, foram utilizados como campo

Figura 96 – Turbina modelo Arlequin: Geometria



Fonte: Elaborada pela autora

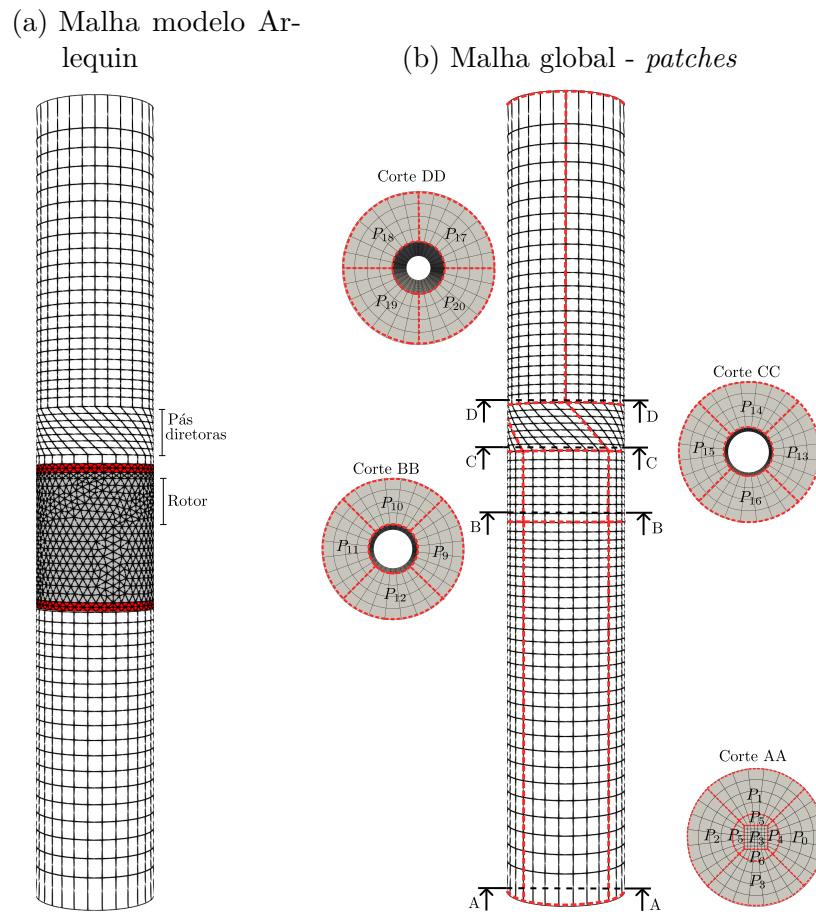
inicial de pressão e velocidade, valores obtidos em uma solução de longo termo da turbina na condição de repouso. Na Figura 98 pode ser observado o deslocamento vertical (direção  $y_3$ ) no ponto A da pá do rotor (conforme Figura 90), cuja a média ao longo do tempo foi de  $-0.02436\text{cm}$ .

Na Figura 99 pode-se observar a velocidade angular ao longo do tempo. Fazendo-se a média da velocidade angular a partir de  $t = 0,15$  até o final da análise, obteve-se uma velocidade de  $119,75\text{rad/s}$ .

Na Figura 100 são apresentados os campos de velocidade do escoamento ao longo de uma rotação das pás da turbina. Realizando-se o cálculo da vazão na seção de saída do escoamento no final do tempo de análise, obteve-se um valor de  $139,58\text{dm}^3/\text{s}$ . Nota-se que obteve-se um aumento de aproximadamente 8% na vazão com o auxílio das pás diretoras.

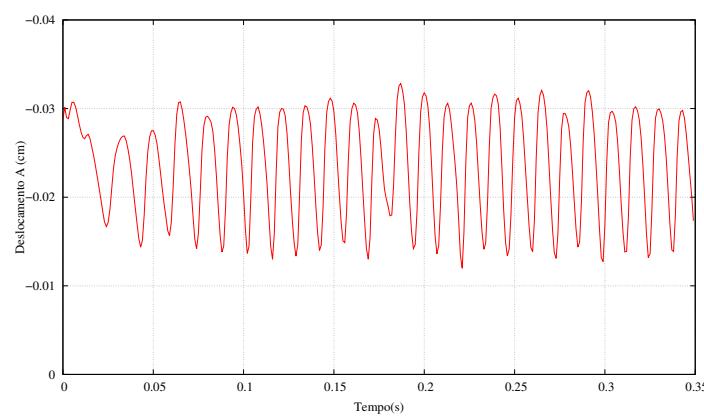
Na Figura 101 pode-se observar os campos de pressão do escoamento ao longo de uma rotação da turbina.

Figura 97 – Turbina modelo Arlequin: Malhas



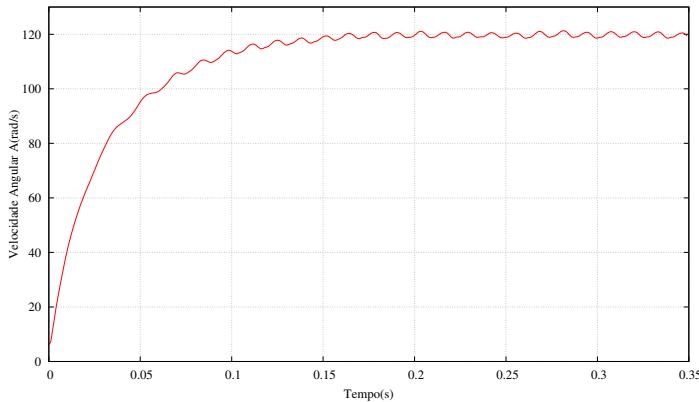
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 98 – Turbina modelo Arlequin: Deslocamento no ponto A



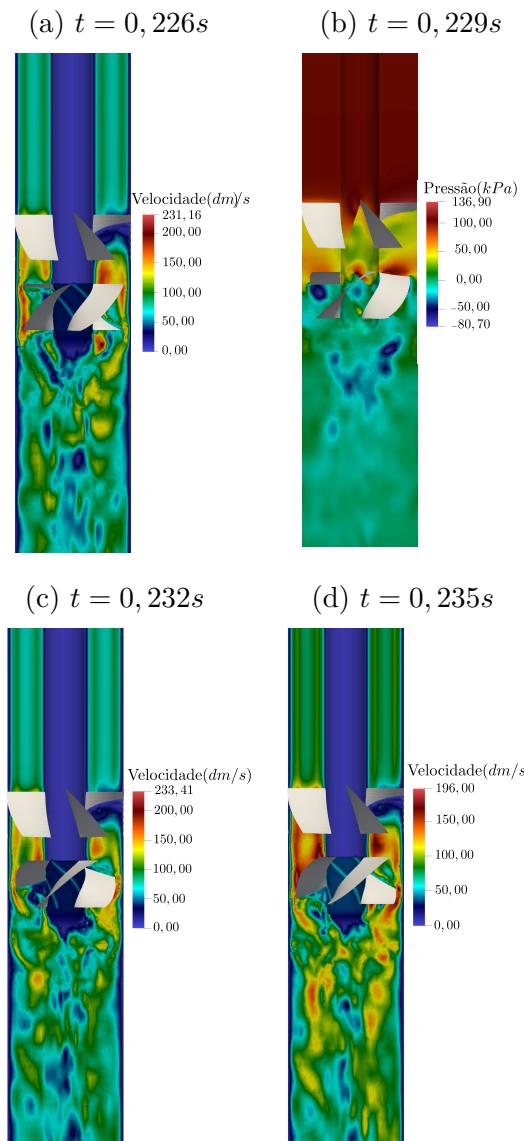
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 99 – Turbina modelo Arlequin: Velocidade angular no ponto A



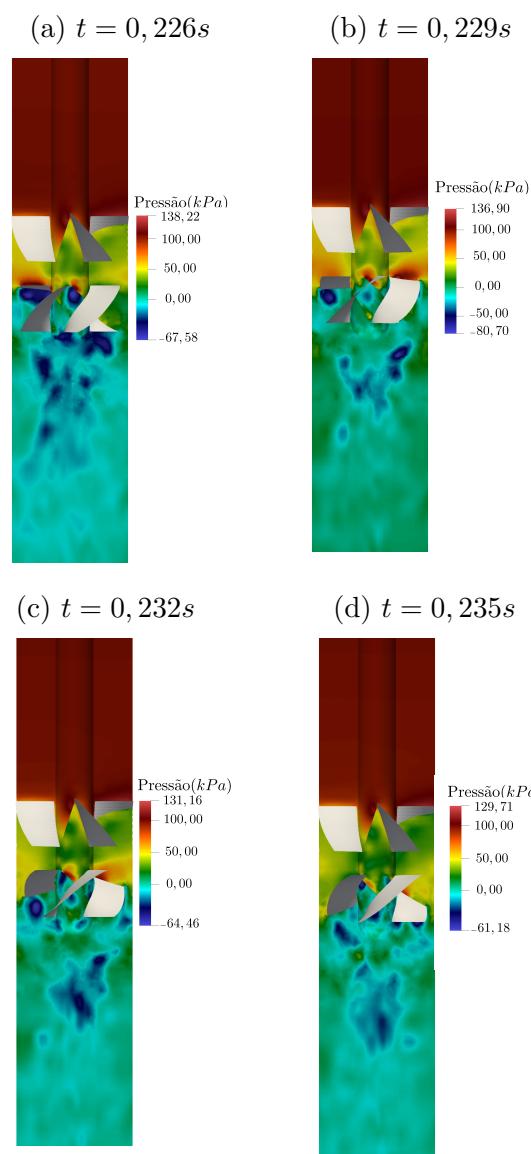
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 100 – Turbina modelo Arlequin: Campos de velocidade



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 101 – Turbina modelo Arlequin: Campos de pressão



Fonte: Elaborada pela autora



## 8 CONCLUSÕES

O principal objetivo desse estudo foi alcançado, ou seja, desenvolveu-se e implementou-se uma formulação para análises de problemas tridimensionais de interação fluido-estrutura, que contempla uma técnica de partição de domínios, para a consideração de efeitos localizados, a qual permite o uso combinado de aproximações por elementos finitos clássicos e análise isogeométrica na discretização do problema.

Para isso, conforme pode ser visto no Capítulo 2 e no Capítulo 3, optou-se por uma formulação Arbitrária Euleriana-Lagrangiana (ALE) para a descrição de escoamentos incompressíveis isotérmicos e com contornos móveis tridimensionais. Nesse modelo adotado para o fluido, o domínio e as variáveis de interesse, podem ser discretizados tanto por elementos finitos clássicos, quanto através da análise isogeométrica fazendo-se o uso funções base NURBS. Para tratar questões numéricas recorrentes nesse sistema de equações, como as oscilações espúrias em casos de convecção dominante, típicas da aplicação do método dos resíduos ponderados baseado na formulação clássica de Galerkin, empregou-se a metodologia SUPG. Adicionalmente, a estabilização PSPG é aplicada com o objetivo de contornar a condição imposta pelo critério de *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi* (LBB). A integração no tempo na formulação é conduzida por meio do método  $\alpha$ -generalizado. Do ponto de vista computacional, partiu-se de um código baseado em elementos finitos clássicos bidimensionais e expandiu-se-o para que o mesmo contemplasse uma análise tridimensional e permitisse o uso da AIG.

No que diz respeito a metodologia adotada para a análise das estruturas, conforme foi observado no Capítulo 4, adotou-se uma formulação não-linear geométrica dinâmica baseada em uma descrição Lagrangiana Total. A formulação é baseada no método dos elementos finitos com abordagem posicional, onde as variáveis principais são as posições nodais. Além disso, optou-se por trabalhar com elementos de cascas e a integração temporal utilizada é realizada através do método de Newmark. Ressalta-se que no aspecto computacional a formulação já estava totalmente implementada. Entretanto, fez-se necessário um profundo conhecimento das técnicas aplicadas e do código, para que se pudesse posteriormente realizar a integração com o programa da DFC, buscando atingir o objetivo de analisar problemas de interação fluido-estrutura.

Com relação a técnica de partição de domínios para as análises da DFC, realizou-se inicialmente o estudo e implementação da formulação apresentada no Capítulo 5, a qual permite utilizar uma malha local mais refinada superposta a uma malha global com discretização mais grosseira. A junção entre as discretizações ocorre em uma área de superposição, na qual as funções base de cada uma das discretizações são ponderadas e somadas de forma a garantirem a partição da unidade e formarem uma nova base

linearmente independente. Embora a técnica apresente características muito promissoras, no âmbito da DFC, com emprego das metodologias SUPG e PSPG, um estudo mais aprofundado deve ser ainda realizado para que os parâmetros de estabilização sejam adequadamente calculados na zona de superposição. Nesse estudo, observaram-se problemas de convergência para alguns dos problemas analisados.

Nesse contexto, para garantir o desenvolvimento do código com uma técnica de partição de domínios, optou-se pela utilização da formulação estabilizada do método Arlequin (Capítulo 6), o qual também leva em conta efeitos localizados através do uso de um modelo local mais refinado superposto a um modelo global com discretização mais grosseira. No método Arlequin, no entanto, o processo de união entre as discretizações, é realizado através do cruzamento e colagem entre os modelos em uma zona de colagem através da utilização de campos de multiplicadores de Lagrange. Para garantir a estabilidade do campo de multiplicadores de Lagrange, e, ao mesmo tempo, fornecer maior flexibilidade a formulação, adiciona-se um termo consistente de estabilização, baseado no resíduo das equações governantes. Do ponto de vista computacional, a utilização do Método Arlequin estabilizado, acarretou na implementação de rotinas adicionais para o reconhecimento dos elementos em zona de colagem e para a obtenção do valor da função ponderadora para os nós (ou pontos de controle) e pontos de integração que compõem as malhas; além de rotinas de cálculo de matrizes e vetores respectivas aos operadores de Lagrange.

Por fim, com base nesses desenvolvimentos, optou-se por um esquema de acoplamento particionado forte entre fluido e estrutura (Capítulo 7). Essa abordagem foi escolhida por proporcionar um total desacoplamento entre os *solvers* de fluido e de estrutura, o que facilita a solução dos problemas propostos. Para o acoplamento, utilizou-se a técnica de malhas adaptadas para a malha local do fluido em contato com a estrutura, aplicando-se uma descrição ALE. Vale ressaltar que, embora a malha local possa se mover, a malha global permanece fixa com descrição Euleriana, fazendo com que o método de acoplamento possa ser classificado como uma técnica híbrida. Para a implementação do acoplamento entre os dois meios no aspecto computacional, foram desenvolvidas rotinas de cálculos que propiciassem a troca adequada de informações na interface, conforme detalhou-se no Capítulo 7.

Conforme pode ser observado nos problemas simulados ao longo do texto, e particularmente as simulações de FSI, no Capítulo 7, o código computacional proporcionou resultados muito satisfatórios, e apresenta-se como uma ferramenta promissora para análise de problemas IFE com efeitos localizados. A principal vantagem do método está associada à metodologia híbrida de acoplamento entre os meios, que combina as vantagens das abordagens de rastreamento de interface (malhas móveis) e de captura de interface (contornos imersos). Essa característica permite que o fluido nas proximidades da estrutura seja discretizado de forma adequada, assegurando a captura de efeitos localizados. Além disso,

por se tratar de uma malha local menor, ela é capaz de suportar maiores deformações e, em caso de necessidade de remalhamento, apenas essa região precisa ser reconstruída.



## REFERÊNCIAS

- AKKERMAN, I. *et al.* Free-surface flow and fluid-object interaction modeling with emphasis on ship hydrodynamics. **Journal of Applied Mechanics**, v. 79, p. doi:10.1115/1.4005072, 01 2012.
- ALFONSI, G. Reynolds-averaged navier–stokes equations for turbulence modeling. **Applied Mechanics Reviews**, v. 62, n. 4, p. 040802, 06 2009. ISSN 0003-6900. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/1.3124648>.
- ANDERSON, J. D. **Computational fluid dynamic - the basics with applications**. 1. ed. New York, USA: McGraw-Hill Book Company, 1995.
- ARGYRIS, J. An excursion into large rotations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 32, p. 85–155, 1982.
- ARGYRIS, J.; PAPADRAKAKIS, M.; MOUROUTIS, Z. S. Nonlinear dynamic analysis of shells with the triangular element TRIC. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 192, p. 3005–3038, 2003.
- ARMALY, B. F. *et al.* Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 127, p. 473–496, 1983.
- AVANCINI, G. **Formulação unificada para análise tridimensional de interação fluido-estrutura com escoamento de superfície livre: Uma abordagem Lagrangiana baseada em posições**. 2023. Tese (Doutorado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2023.
- BADIA, S.; NOBILE, F.; VERGARA, C. Fluid-structure partitioned procedures based on robin transmission conditions. **Journal of Computational Physics**, v. 227, p. 7027–7051, 2008.
- BATTINI, J. M.; PACOSTE, C. On the choice of the linear element for corotational triangular shells. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, n. 44-47, p. 6362–6377, 2006. ISSN 0045-7825.
- BAUMAN, P. T. *et al.* On the application of the Arlequin method to the coupling of particle and continuum models. **Comput. Mech.**, v. 42, p. 511–530, 2008.
- BAZILEVS, Y.; AKKERMAN, I. Large eddy simulation of turbulent taylor–couette flow using isogeometric analysis and the residual-based variational multiscale method. **Journal of Computational Physics**, v. 229, n. 9, p. 3402 – 3414, 2010. ISSN 0021-9991.
- BAZILEVS, Y. *et al.* Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 197, p. 173–201, 2007.
- BAZILEVS, Y. *et al.* Isogeometric fluid-structure interaction: theory, algorithms, and computations. **Computational Mechanics**, v. 43, p. 3–37, 2008.

BAZILEVS, Y. *et al.* Isogeometric variational multiscale modeling of wall-bounded turbulent flows with weakly enforced boundary conditions on unstretched meshes. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 199, n. 13, p. 780 – 790, 2010. ISSN 0045-7825.

BAZILEVS, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. Challenges and directions in computational fluid-structure interaction. **Mathematical Models and Methods in Applied Sciences**, v. 23, p. 215–221, 02 2013b.

BAZILEVS, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E. **Computational Fluid-Structure Interaction: Methods and Applications**. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2013a.

BAZILEVS, Y. *et al.* Aerodynamic and FSI analysis of wind turbines with the ALE-VMS and ST-VMS methods. **Archives of Computational Methods in Engineering**, v. 21, p. 359–398, 2014.

BELYTSCHKO, T. *et al.* Element-free Galerkin methods for static and dynamic fracture. **International Journal of Solids and Structures**, v. 32, n. 17–18, p. 2547–2570, 1995.

BENEK, J. *et al.* Chimera. A grid-embedding technique. [S.l.], 1986.

BISCANI, F. *et al.* Mixed-dimensional modeling by means of solid and higher-order multi-layered plate finite elements. **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, v. 23, n. 9, p. 960–970, 2016.

BLOM, F. J. A monolithical fluid-structure interaction algorithm applied to the piston problem. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 167, n. 3-4, p. 369–391, 1998. ISSN 0045-7825.

BONET, J. *et al.* Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 5–7, p. 579–595, 2000. ISSN 0045-7828.

BORDEN, M. J. *et al.* Isogeometric finite element data structures based on b閦ier extraction of nurbs. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 87, n. 1-5, p. 15–47, 2011. Dispon韃vel em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.2968>.

BOTTASSO, C. L.; DETOMI, D.; SERRA, R. The ball-vertex method: a new simple spring analogy method for unstructured dynamic meshes. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 194, n. 39, p. 4244–4264, 2005.

BREZZI, F.; FORTIN, M. Mixed and hybrid finite element methods. In: **Vol. 15 of Springer Series in Computational Mathematics**. New York: Springer, 1991.

BROOKS, A. N.; HUGHES, T. J. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 32, n. 1-3, p. 199–259, 1982.

CALEYRON, F. *et al.* SPH modeling of fluid-solid interaction for dynamic failure analysis of fluid-filled thin shells. **Journal of Fluids and Structures**, v. 39, p. 126–153, 2013.

- CARRAZEDO, R.; CODA, H. B. Alternative positional FEM applied to thermomechanical impact of truss structures. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 46, n. 11, p. 1008–1016, 2010.
- CATABRIGA, L.; COUTINHO, A. L. G. Implicit SUPG solution of euler equations using edge-based data structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 191, n. 32, p. 3477–3490, 2002. ISSN 0045-7825.
- CHUNG, J.; HULBERT, G. M. A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics With Improved Numerical Dissipation: The Generalized- $\alpha$  Method. **Journal of Applied Mechanics**, v. 60, n. 2, p. 371–375, 06 1993. ISSN 0021-8936.
- CHUNG, T. J. **Computational fluid dynamics**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002.
- CIRAK, F.; RADOVITZKY, R. A Lagrangian-Eulerian shell-fluid coupling algorithm based on level sets. **Computers & Structures**, v. 83, p. 491–498, 2005.
- CODA, H. B. **Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: Uma formulação posicional baseada no MEF**. 2003. Tese (Tese para concurso de professor titular) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2003.
- CODA, H. B. **O Método dos Elementos Finitos posicional: Sólidos e Estruturas - Não linearidade Geométrica e Dinâmica**. 1. ed. São Carlos: EESC-USP, 2018. 284 p.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. An alternative positional FEM formulation for geometrically non-linear analysis of shells: Curved triangular isoparametric elements. **Computational Mechanics**, v. 40, n. 1, p. 185–200, jun 2007.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A positional FEM formulation for geometrical non-linear analysis of shells. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 5, p. 205–223, 2008.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Unconstrained finite element for geometrical nonlinear dynamics of shells. **Mathematical Problems in Engineering**, 2009. ISSN 1024-123X.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Improved finite element for 3D laminate frame analysis including warping for any cross-section. **Applied Mathematical Modelling**, v. 34, n. 4, p. 1107–1137, 2010.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A FEM procedure based on positions and unconstrained vectors applied to non-linear dynamic of 3D frames. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 47, n. 4, p. 319–333, 2011.
- COX, M. G. The numerical evaluation of b-splines\*. **IMA Journal of Applied Mathematics**, v. 10, n. 2, p. 134–149, 10 1972. ISSN 0272-4960. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/imamat/10.2.134>.
- de Boor, C. On calculating with b-splines. **Journal of Approximation Theory**, v. 6, n. 1, p. 50–62, 1972. ISSN 0021-9045. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021904572900809>.
- DHIA, H. B. Multiscale mechanical problems: The Arlequin method. **Comptes Rendus Acad. Sci. Sér. IIb.**, v. 326, p. 899–904, 1998.

DHIA, H. B. Further insights by theoretical investigations of the multiscale Arlequin method. **International Journal for Multiscale Computational Engineering**, v. 6, n. 3, p. 215–232, 2008.

DHIA, H. B.; JAMOND, O. On the use of XFEM within the Arlequin framework for the simulation of crack propagation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 199, n. 21-22, p. 1403–1414, 2010.

DHIA, H. B.; RATEAU, G. Mathematical analysis of the mixed Arlequin method. **Comptes Rendus Acad. Sci. Paris Série I**, v. 332, p. 649–654, 2001.

DHIA, H. B.; RATEAU, G. Application of the Arlequin method to some structures with defects. **Revue Européenne des Éléments Finis**, Taylor & Francis, v. 11, n. 2-4, p. 291–304, 2002.

DHIA, H. B.; RATEAU, G. The Arlequin method as a flexible engineering design tool. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 62, n. 11, p. 1442–1462, 2005.

DHIA, H. B.; TORKHANI, M. Modeling and computation of fretting wear of structures under sharp contact. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 85, p. 61–83, 2011.

DONEA, J. A taylor-galerkin method for convective transport problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 20, p. 101–119, 1984.

DONEA, J.; GIULIANI, S.; HALLEUX, J. P. An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 33, n. 1-3, p. 689–723, 1982.

DONEA, J.; HUERTA, A. **Finite Element Methods for flow problems**. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2003.

FARHAT, C.; HARARI, I.; FRANCA, L. P. The discontinuous enrichment method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 48, p. 6455–6479, 2001.

FELIPPA, C. A.; PARK, K. C.; FARHAT, C. Partitioned analysis of coupled mechanical systems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 24-25, p. 3247–3270, 2001.

FERNANDES, J. W. D. **Técnica de superposição de modelos estabilizada para análise de interação fluido-estrutura**. 2020. Tese (Doutorado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2020.

FERNANDES, J. W. D. *et al.* A residual-based stabilized finite element formulation for incompressible flow problems in the arlequin framework. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 370, p. 113073, 2020. ISSN 0045-7825. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782520302577>.

FERNANDES, J. W. D.; CODA, H. B.; SANCHES, R. A. K. ALE incompressible fluid–shell coupling based on a higher-order auxiliary mesh and positional shell finite element. **Computational Mechanics**, v. 63, n. 3, p. 555–569, 2019.

- FERNIER, A.; FAUCHER, V.; JAMOND, O. Multi-model Arlequin approaches for fast transient, FSI-oriented, fluid dynamics with explicit time integration. **Computers and Fluids**, Elsevier, v. 199, p. 104428, mar. 2020. Disponível em: <https://hal.science/hal-03991421>.
- FISH, J. The s-version of the finite element method. **Computers & Structures**, v. 43, n. 3, p. 539–547, 1992.
- FÖRSTER, C.; WALL, W. A.; RAMM, E. Artificial added mass instabilities in sequential staggered coupling on nonlinear structures and incompressible viscous flows. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 196, p. 1278–1293, 2007.
- GERBEAU, J. F.; VIDRASCU, M. A quasi-newton algorithmm based on a reduced model for fluid-structure interaction problems in blood flows. **ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis**, v. 37, p. 631–647, 2003.
- GERMANO, M. et al. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. **Physics of Fluids A: Fluid Dynamics**, v. 3, n. 7, p. 1760–1765, 07 1991. ISSN 0899-8213. Disponível em: <https://doi.org/10.1063/1.857955>.
- GHIA, U.; GHIA, K. N.; SHIN, C. T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. **Journal of Computational Physics**, v. 48, p. 387–441, 1982.
- GRECO, M.; CODA, H. B. A simple and precise FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, p. 3541–3557, 2004.
- GRUTTMANN, F.; SAUER, R.; WAGNER, W. Theory and numerics of three-dimensional beams with elastoplastic material behaviour. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 48, n. 12, p. 1675–1702, 2000.
- GUIDAULT, P.-A.; BELYTSCHKO, T. On the l2 and the h1 couplings for an overlapping domain decomposition method using lagrange multipliers. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 70, n. 3, p. 322–350, 2007. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1882>.
- HANSBO, A.; HANSBO, P. An unfitted finite element method, based on Nitsche's method, for elliptic interface problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 191, n. 47–48, p. 5537–5552, 2002.
- HÖLLIG, K.; REIF, U.; WIPPER, J. Weighted extended b-spline approximation of dirichlet problems. **SIAM J. Numer. Anal.**, Society for Industrial and Applied Mathematics, USA, v. 39, n. 2, p. 442–462, 2001. ISSN 0036-1429.
- HOU, G.; WANG, J.; LAYTON, A. Numerical methods for fluid-structure interaction - a review. **Commun. Comput. Phys.**, v. 12, p. 337–377, 2012.
- HRON, J.; MADLIK, M. Fluid-structure interaction with applications in biomechanics. **Nonlinear Analysis: Real World Applications**, v. 8, n. 5, p. 1431–1458, 2007.
- HÜBNER, B.; WALHORN, E.; DINKLER, D. A monolithic approach to fluid-structure interaction using space-time finite elements. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 193, p. 2087–2104, 2004.

HUGHES, T. **The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis.** [S.l.: s.n.]: Dover Publications, 2000. (Dover Civil and Mechanical Engineering). ISBN 9780486411811.

HUGHES, T. J.; FRANCA, L. P.; BALESTRA, M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuška-Brezzi condition: a stable Petrov-Galerkin formulation of the stokes problem accommodating equal-order interpolations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 59, n. 1, p. 85 – 99, 1986.

HUGHES, T. J.; FRANCA, L. P.; HULBERT, G. M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 73, n. 2, p. 173 – 189, 1989. ISSN 0045-7825.

HUGHES, T. J.; LIU, W. K.; ZIMMERMAN, T. K. Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 29, p. 329–349, 1981.

HUGHES, T. J. R. Stability, convergence and growth and decay of energy of the average acceleration method in nonlinear structural dynamics. **Computers & Structures**, v. 6, p. 313–324, 1976.

HUGHES, T. J. R. Multiscale phenomena: Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale methods, bubbles and the origins of stabilized methods. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 127, p. 387–401, 1995.

HUGHES, T. J. R.; COTTRELL, J. A.; BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement . **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 194, p. 4135–4195, 2005.

HUGHES, T. J. R. *et al.* The variational multiscale method - a paradigm for computational mechanics. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 166, p. 3–24, 1998.

HUGHES, T. J. R.; LIU, W. K. Nonlinear finite element analysis of shells: Part I. three-dimensional shells. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 26, n. 3, p. 331–362, 1981. A. ISSN 0045-7825.

HUGHES, T. J. R.; LIU, W. K. Nonlinear finite element analysis of shells: Part II. two-dimensional shells. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 27, n. 2, p. 167–181, 1981. A. ISSN 0045-7825.

HUGHES, T. J. R.; OBERAI, A. A.; MAZZEI, L. Large Eddy Simulation of turbulent channel flows by the variational multiscale method. **Physics of Fluids**, v. 13, p. 1874–1799, 2001.

HUGHES, T. J. R.; TEZDUYAR, T. E. Finite element methods for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible Euler equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 45, p. 217–284, 1984.

IBRAHIMBEGOVIC, A.; TAYLOR, R. L. On the role of frame-invariance in structural mechanics models at finite rotations. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 191, p. 5159–5176, 2002.

- IRONS, B. M.; TUCK, R. C. A version of the Aitken accelerator for computer iteration. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 1, n. 3, p. 275–277, 1969.
- JAMOND, O.; DHIA, H. B. Incompressibility in the multimodel Arlequin framework. **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, v. 94, p. 374–399, 2013.
- JANSEN, K. E.; WHITING, C. H.; HULBERT, G. M. A generalized- $\alpha$  method for integrating the filtered Navier–Stokes equations with a stabilized finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 3, p. 305 – 319, 2000. ISSN 0045-7825.
- JOHNSON, A. A.; TEZDUYAR, T. E. Mesh update strategies in parallel finite element computations of flow problems with moving boundaries and interfaces. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 119, p. 73–94, 1994.
- KANCHI, H.; MASUD, A. A 3D adaptative mesh moving scheme. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 54, p. 923–944, 2007.
- KUHL, D.; RAMM, E. Generalized energy-momentum method for non-linear adaptative shell dynamics. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 178, p. 343–366, 1999.
- KÜTTLER, U.; WALL, W. A. Fixed-point fluid–structure interaction solvers with dynamic relaxation. **Computational mechanics**, Springer, v. 43, n. 1, p. 61–72, 2008.
- LAUNDER, B. E.; SPALDING, D. B. **Lectures in mathematical models of turbulence**. New York: Academic Press, 1972.
- LEFRANÇOIS, E. A simple mesh deformation technique for fluid-structure interaction based on a submesh approach. **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, v. 75, p. 1085–1101, 2008.
- LIENHARD, J. H. **Synopsis of lift, drag, and vortex frequency data for rigid circular cylinders**. Pullman, Wash: Technical Extension Service, Washington State University, 1966. (Bulletin / College of Engineering. Research Division ; 300).
- MELENK, J. M.; BABUSKA, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, n. 1, p. 289–314, 1996.
- MITTAL, R.; IACCARINO, G. Immersed boundary methods. **Annual Review of Fluid Mechanics**, v. 37, p. 237–261, 2005.
- MITTAL, S.; TEZDUYAR, T. Massively parallel finite element computation of incompressible flows involving fluid-body interactions. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 112, n. 1, p. 253 – 282, 1994. ISSN 0045-7825.
- MOËS, N. *et al.* A computational approach to handle complex microstructure geometries. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 192, n. 28–30, p. 3163–3177, 2003.
- MOK, D. P. **Partitionierte Lösungsansätze in der Strukturdynamik und der Fluid-Struktur-Interaktion**. 2001. Tese (Doutorado) — Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Stuttgart, 2001.

NAYROLES, B.; TOUZOT, G.; VILLON, P. Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements. **Computational Mechanics**, v. 10, n. 5, p. 307–318, 1992.

OGDEN, R. W. **Non-linear elastic deformations**. Chichester, England.: Ellis Harwood, 1984.

OTOGURO, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E. Element length calculation in B-spline meshes for complex geometries. **Computational Mechanics**, v. 65, p. 1085–1103, 2020.

PESKIN, C. S. Flow patterns around heart valves: A numerical method. **Journal of Computational Physics**, v. 10, n. 2, p. 252–271, 1972.

PIEGL, L.; TILLER, W. **The NURBS Book**. second. New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1996.

PIOMELLI, U. Large-eddy simulation: achievements and challenges. **Progress in Aerospace Sciences**, v. 35, n. 4, p. 335–362, 1999. ISSN 0376-0421. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0376042198000141>.

REDDY, J. N. **An Introduction to the Finite Element Method**. 3. ed. [S.l.: s.n.]: McGraw Hill, 2006.

REDDY, J. N.; GARTLING, D. K. **The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics**. 3. ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 2010.

RICHTER, T. **Fluid-structure Interactions: Models, Analysis and Finite Elements**. Springer International Publishing, 2017. (Lecture Notes in Computational Science and Engineering). ISBN 9783319639703. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=hsEyDwAAQBAJ>.

ROSA, R.; CODA, H.; SANCHES, R. Blended isogeometric-finite element analysis for large displacements linear elastic fracture mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 392, p. 114622, 2022. ISSN 0045-7825. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782522000366>.

ROSA, R. J. R. **Técnica de partição de domínio para análise numérica de sólidos bidimensionais fraturados combinando análise isogeométrica e elementos finitos**. 2021. Dissertação (Mestrado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2021.

SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Unconstrained vector nonlinear shell formulation applied to fluid-structure interaction. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 259, p. 177–196, 2013.

SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. On fluid-shell coupling using an arbitrary Lagrangian-Eulerian fluid solver coupled to a positional Lagrangian shell solver. **Applied Mathematical Modelling**, v. 38, p. 3401–3418, 2014.

SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Flexible multibody dynamics finite element formulation applied to structural progressive collapse analysis. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 13, n. 16, p. 52–71, 2016.

- SIMO, J. C.; FOX, D. D. On a stress resultant geometrically exact shell model. Part I: formulation and optimal parametrization. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 72, p. 267–304, 1989.
- SPEZIALE, C. G. Analytical methods for the development of reynolds-stress closures in turbulence. **Annual Review of Fluid Mechanics**, Annual Reviews, v. 23, n. Volume 23, 1991, p. 107–157, 1991. ISSN 1545-4479. Disponível em: <https://www.annualreviews.org/content/journals/10.1146/annurev.fl.23.010191.000543>.
- STEIN, K.; TEZDUYAR, T. E.; BENNEY, R. Automatic mesh update with the solid-extension mesh moving technique. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 193, p. 2019–2032, 2004.
- STRANG, G.; FIX, G. **An analysis of the Finite Element Method**. 2. ed. [S.l.: s.n.]: Wesley-Cambridge Press, 2008.
- STROUBOULIS, T.; COPPS, K.; BABUSKA, I. The generalized finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 32–33, p. 4081–4193, 2001.
- TAKIZAWA, K. .; TEZDUYAR, T. Space-time fluid–structure interaction methods. **Mathematical Models and Methods in Applied Sciences**, v. 22, p. 1230001, 08 2012.
- TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E.; OTOGURO, Y. Stabilization and discontinuity-capturing parameters for space-time flow computations with finite element and isogeometric discretizations. **Computational Mechanics**, v. 62, n. 5, p. 1169–1186, 2018.
- TAKIZAWA, K.; UEDA, Y.; TEZDUYAR, T. E. A node-numbering-invariant directional length scale for simplex elements. **Mathematical Models and Methods in Applied Sciences**, v. 29, n. 14, p. 2719–2753, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1142/S0218202519500581>.
- TALLEC, P. L.; MOURO, J. Fluid structure interaction with large structural displacements. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 190, p. 3039–3067, 2001.
- TEZDUYAR, T. Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations. In: HUTCHINSON, J. W.; WU, T. Y. (ed.). [S.l.: s.n.]: Elsevier, 1992, (Advances in Applied Mechanics, v. 28). p. 1 – 44.
- TEZDUYAR, T.; ALIABADI, S.; BEHR, M. Enhanced-Discretization Interface-Capturing Technique (EDICT) for computation of unsteady flows with interfaces. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 155, p. 235–248, 1998.
- TEZDUYAR, T. *et al.* Parallel finite-element computation of 3D flows. **Computer**, v. 26, n. 10, p. 27–36, 1993.
- TEZDUYAR, T.; SATHE, S. Stabilization parameters in supg and pspg formulations. **Journal of Computational and Applied Mechanics**, v. 4, n. 1, p. 71–88, 2003.
- TEZDUYAR, T. E. Stabilized finite element methods for flows with moving boundaries and interfaces. **HERMIS: The International Journal of Computer Mathematics and its Applications**, v. 4, p. 63–88, 2003.

TEZDUYAR, T. E.; ALIABADI, S. EDICT for 3D computation of two-fluid interfaces. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, p. 403–410, 2000.

TEZDUYAR, T. E.; BEHR, M.; LIOU, J. A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces - the deforming-spatial-domain/space-time procedure: I. The concept and the preliminary numerical tests. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 94, p. 339–351, 1992.

TEZDUYAR, T. E. *et al.* A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces - the deforming-spatial-domain/space-time procedure: II. Computation of free-surface flows, two-liquid flows, and flows with drifting cylinders. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 94, p. 353–371, 1992b.

TEZDUYAR, T. E. *et al.* Computation of unsteady incompressible flows with the finite element methods: Space-time formulations, iterative strategies and massively parallel implementations. ASME, New York, p. 7–24, 1992c.

TEZDUYAR, T. E. *et al.* Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 95, p. 221–242, 1992a.

TEZDUYAR, T. E.; OSAWA, Y. Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 3, p. 411–430, 2000.

TEZDUYAR, T. E.; SATHE, S. Enhanced-discretization successive update method (EDSUM). **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 47, p. 633–654, 2005.

TONON, P. **Simulação numérica de escoamentos incompressíveis através da análise isogemétrica**. 2016. Dissertação (Mestrado) — PPGEC-UFRGS, Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil, 2016.

TONON, P. *et al.* A linear-elasticity-based mesh moving method with no cycle-to-cycle accumulated distortion. **Computational Mechanics**, 2021.

TRUESDELL, C. A. Hypo-elasticity. **J. Rational Mech. Anal.**, v. 4, p. 83–133, 1955.

VÁZQUEZ, J. G. V. **Nonlinear analysis of orthotropic membrane and shell structures including fluid-structure interaction**. 2007. Tese (Doutorado) — Universitat Politecnica de Catalunya, Barcelona, Espanha, 2007.

WALL, W. A.; RAMM, E. Fluid structure interaction based upon a stabilized (ALE) finite element method. In: IDELSON, S. *et al.* (ed.). **Computational Mechanics**. Barcelona: CIMNE, 1998.

WANDERLEY, J.; LEVI, C. Validation of a finite difference method for the simulation of vortex-induced vibrations on a circular cylinder. **Ocean Engineering**, v. 29, n. 4, p. 445–460, 2002. ISSN 0029-8018. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0029801801000142>.

---

WANG, K. *et al.* Algorithms for interface treatment and load computation in embedded boundary methods for fluid and fluid–structure interaction problems. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, John Wiley & Sons, Ltd., v. 67, n. 9, p. 1175–1206, 2011.

WILCOX, D. C. **Turbulence modeling for CFD**. La Cañada, CA: DCW Industries Inc., 1993.

WILLIAMS, P. T.; BAKER, A. J. Numerical simulations of laminar flow over a 3d backward-facing step. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 24, p. 1159–1183, 1999.

YOKOMIZO, M. H. **Análise numérica de problemas de interação fluido-estrutura com vorticidade**. 2024. Dissertação (Mestrado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2024.

ZHANG, Y. *et al.* Patient-specific vascular nurbs modeling for isogeometric analysis of blood flow. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 196, n. 29, p. 2943 – 2959, 2007. ISSN 0045-7825.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; NITHIARASU, P. **The Finite Element Method: The Basis**. 6. ed. [S.l.: s.n.]: Butterworth Heinemann Linacre house, 2005a. v. 1. 689 p.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; NITHIARASU, P. **The Finite Element Method: Fluid Dynamics**. 6. ed. [S.l.: s.n.]: Butterworth Heinemann Linacre house, 2005b. v. 3. 334 p.

