

TÉCNICA DE PARTIÇÃO DE DOMÍNIOS

Muitas aplicações de engenharia envolvem efeitos localizados, são os casos, por exemplo, de fissuras na mecânica dos sólidos, interface entre dois tipos diferentes de fluidos na mecânica dos fluidos, ou ainda, a camada limite na interface entre sólido e fluido, entre outros. Para uma análise computacional realística desses problemas, os efeitos locais devem ser apropriadamente representados e a um custo computacional razoável.

Neste trabalho aplicou-se um método partição de domínios, no contexto da DFC, que permite utilizar uma malha local mais refinada sobreposta a uma malha global com discretização mais grosseira com o intuito de melhorar a precisão local da análise numérica ou simplesmente representar a geometria local e as condições de contorno adequadamente. A malha local pode ter uma escala diferente de discretização, ou até mesmo uma aproximação numérica diferente, como no caso deste trabalho em que se utiliza o método dos elementos finitos em conjunto com a análise isogeométrica. Na zona de sobreposição das malhas as funções base de cada uma das discretizações são ponderadas e somadas de forma a garantirem a partição da unidade e formarem uma nova base linearmente independente.

Nesta seção apresenta-se inicialmente a técnica de combinação de espaços de funções, para posteriormente introduzir as particularidades da implementação numérica, e ao final, um exemplo de aplicação é apresentado.

Ressalta-se que, embora a técnica se mostre bastante promissora, no contexto da dinâmica dos fluidos computacional, especialmente quando associada às técnicas de estabilização empregadas neste trabalho, ainda é necessário um estudo mais aprofundado para a determinação de parâmetros de estabilização adequados na região de sobreposição. Essa conclusão foi obtida a partir das simulações realizadas ao longo deste doutorado. Para

problemas de menor complexidade, como o caso da cavidade apresentado na seção 1.3, os resultados foram bastante satisfatórios; contudo, para problemas mais complexos, foram observadas dificuldades de convergência.

1.1 Combinação de espaços de funções

Para o entendimento da técnica de partição de domínios define-se inicialmente um domínio global Ω_G , de acordo com a Subfigure 1.2a, e um domínio local, Ω_L , apresentado na Subfigure 1.2b, menor que o domínio global e que contém a região com efeitos localizados. O domínio total de estudo é então composto por: $\Omega = \Omega_G \cup \Omega_L$.

Os contornos físicos de Ω (Subfigure 1.2c), podem ser divididos em $\Gamma_G = (\Gamma_G)_D \cup (\Gamma_G)_N$, relacionado ao domínio global, e, $\Gamma_L = (\Gamma_L)_D \cup (\Gamma_L)_N$ relacionado ao domínio local, sendo os subíndices D e N respectivos aos contornos de Dirichlet e Neumann respectivamente. É importante ressaltar que os contornos físicos podem ou não estarem presentes, ou ainda, existirem apenas condições de Dirichlet ou apenas condições de Neumann. O contorno não-físico $(\Gamma_G)_B$ define a região de sobreposição pertencente ao domínio global, enquanto que, $(\Gamma_L)_B$ é o contorno que define a região de sobreposição pertencente ao domínio local. A zona de sobreposição, Ω_B , é definida como: $\Omega_B = \Omega_G \cap \Omega_L$, sendo limitada pelos contornos $(\Gamma_L)_B$ e $(\Gamma_G)_B$.

Considerando um problema cujas funções tentativa no domínio global sejam caracterizadas por $u_G(\mathbf{y})$ e definidas no espaço finito de funções \mathcal{S}_u^G , e cujas funções tentativa locais, $u_L(\mathbf{y})$, sejam definidas no espaço finito de funções \mathcal{S}_u^L . Considera-se também, as funções peso global $w_G(\mathbf{y})$ e local $w_L(\mathbf{y})$ nos espaços das funções teste \mathcal{V}_u^G e \mathcal{V}_u^L , respectivamente. A união direta dos espaços de funções na zona de sobreposição obviamente não resulta em um espaço que respeita a partição da unidade. Dessa forma, utiliza-se uma função ponderadora de combinação $b(\mathbf{y})$, de maneira a criar um novo espaço de funções tentativa e peso, definido por:

$$u(\mathbf{y}) = b(\mathbf{y})u_G(\mathbf{y}) + (1 - b(\mathbf{y}))u_L(\mathbf{y}), \quad (1.1)$$

$$w(\mathbf{y}) = b(\mathbf{y})w_G(\mathbf{y}) + (1 - b(\mathbf{y}))w_L(\mathbf{y}), \quad (1.2)$$

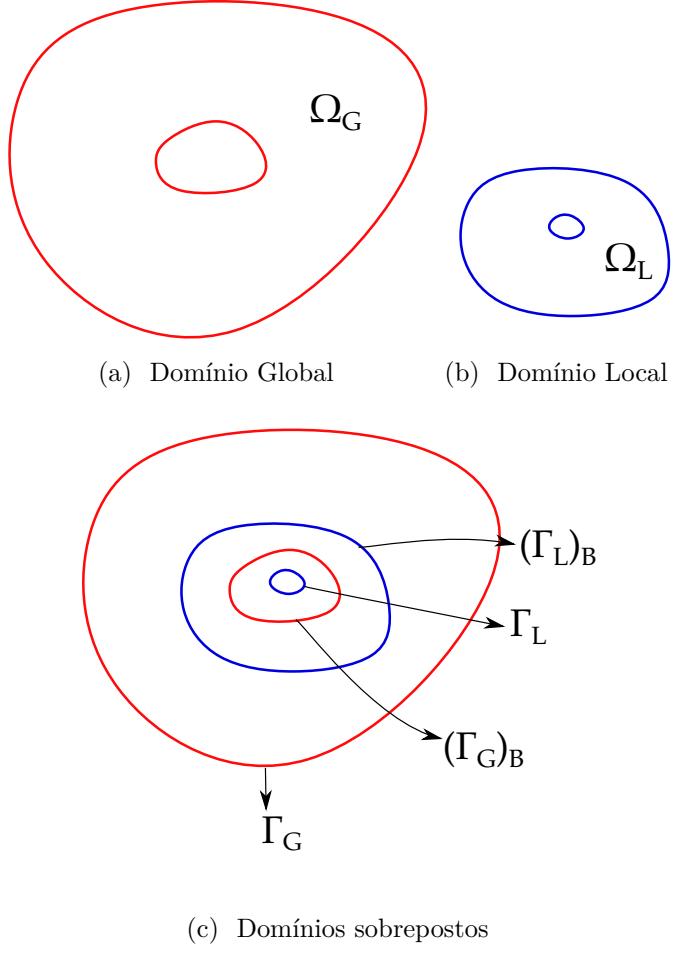
com $b(\mathbf{y})$ apresentando valor unitário sobre o domínio global livre (sem sobreposições), valor zero no domínio local livre, e apresentando uma transição suave na região de sobreposição.

Os espaços enriquecidos na região de sobreposição de malhas, são definidos por \mathcal{S}_{enr} e \mathcal{V}_{enr} , correspondentes às funções tentativa e teste respectivamente. A solução de um problema de valor de contorno recai em encontrar $u^h \in \mathcal{S}_{enr}$ tal que $\forall w^h \in \mathcal{V}_{enr}$:

$$B(u^h, w^h) = F(w^h), \quad (1.3)$$

com $B(\bullet, \bullet)$ e $F(\bullet)$ sendo operadores bilineares e lineares respectivamente. A discretização

Figura 1.1 – Definição dos domínios global, local e de zona de sobreposição



Fonte: Elaborada pela autora

de $u^h(\mathbf{y})$ e $w^h(\mathbf{y})$ no contexto dos elementos finitos é obtida através das seguintes relações:

$$u^h(\mathbf{y}) = \sum_{A=1}^{(n_{np})_G} (u_G)_A b(\mathbf{y})(N_G)_A(\mathbf{y}) + \sum_{A=1}^{(n_{np})_L} (u_L)_A (1 - b(\mathbf{y}))(N_L)_A(\mathbf{y}), \quad (1.4)$$

$$w^h(\mathbf{y}) = \sum_{A=1}^{(n_{np})_G} (w_G)_A b(\mathbf{y})(N_G)_A(\mathbf{y}) + \sum_{A=1}^{(n_{np})_L} (w_L)_A (1 - b(\mathbf{y}))(N_L)_A(\mathbf{y}), \quad (1.5)$$

com N_G e N_L sendo as funções de forma global e local; e $(n_{np})_G$ e $(n_{np})_L$ o número de funções de forma nas discretizações global e local respectivamente.

1.1.1 Função ponderadora de combinação

Considerando que as funções $b(\mathbf{y})(N_G)$ e $(1 - b(\mathbf{y}))(N_L)$ sejam linearmente independentes sobre Ω_B , e que as funções base local e global sejam discretizadas com polinômios de igual ordem p e constituam funções base independentes dentro das discretizações local e global, a escolha de b um grau acima das funções base, ou seja, grau $p+1$, irá proporcionar uma nova base também linearmente independente. A nova base é um polinômio completo

de grau p fora do domínio de sobreposição e torna-se um polinômio completo de ordem $2p + 1$ dentro da zona de sobreposição. Além disso, a nova base cumpre com a partição da unidade.

Nesse trabalho aplicam-se funções de forma locais e globais de grau polinomial quadrático. Dessa forma, a função ponderadora de combinação foi definida como cúbica e é expressa por:

$$b(\mathbf{y}) = \begin{cases} 2 \left(\frac{Y_L(\mathbf{y})}{\delta(\mathbf{y})} \right)^3 - 3 \left(\frac{Y_L(\mathbf{y})}{\delta(\mathbf{y})} \right)^2 & \text{se } Y_G(\mathbf{y}) > 0 \text{ e } Y_L(\mathbf{y}) > 0 \\ 1 & Y_L(\mathbf{y}) \leq 0 \\ 0 & Y_G(\mathbf{y}) \leq 0 \end{cases}, \quad (1.6)$$

com $Y_L(\mathbf{y})$ a função distância assinalada medida a partir de $(\Gamma_L)_B$, com valores positivos dentro do domínio local e negativos fora, e $Y_G(\mathbf{y})$ a função distância assinalada medida a partir de $(\Gamma_G)_B$, sendo positiva se o ponto pertence à Ω_G , e negativa, caso contrário. Nota-se que os pontos em que ambas funções distância assinalada são positivas estão contidos dentro da zona de sobreposição. O parâmetro δ é obtido por $\delta(\mathbf{y}) = Y_L(\mathbf{y}) + Y_G(\mathbf{y})$, e coincide com a espessura da zona de sobreposição quando $(\Gamma_L)_B$ e $(\Gamma_G)_B$ são paralelos.

Na prática, considera-se que o domínio global tem o tamanho do domínio total, ficando a definição de $(\Gamma_G)_B$ para uma etapa posterior, baseado na forma do modelo local. Os elementos e nós da malha global, sem suporte físico após a obtenção do novo espaço de funções, são desativados da análise. O contorno $(\Gamma_G)_B$ pode ser obtido através de uma réplica do contorno $(\Gamma_L)_B$ a uma distância paralela δ do mesmo.

Após a definição $(\Gamma_G)_B$ é necessária uma metodologia eficiente para determinação das funções base globais com pequena influência dentro da zona de sobreposição, visto que essas podem levar a um sistema mal condicionado. Para resolver esse problema, utiliza-se, para todos os nós globais A da análise, uma variável definida como:

$$(M_G)_{AA} = \int_{\Omega} b(\boldsymbol{\xi}) N_A(\boldsymbol{\xi}) b(\boldsymbol{\xi}) N_A(\boldsymbol{\xi}) d\Omega, \quad (1.7)$$

e define-se um valor M_{min} para $(M_G)_{AA}$. Os nós globais são desativados se $(M_G)_{AA} < M_{min}$.

Na Subfigure 1.2 apresenta-se um exemplo unidimensional da técnica de partição de domínios. Na Subfigure 1.3a observam-se as funções globais definidas inicialmente sobre todo o domínio, e a função ponderadora de modificação $b(y)$ com valor unitário sobre o domínio global livre e com transição suave sobre a região de sobreposição. Na Subfigure 1.3b representam-se as funções locais definidas somente no domínio local e a função ponderadora de modificação $1 - b(y)$ com valor unitário sobre o domínio local livre e com transição suave sobre a zona de sobreposição. Por fim, na Subfigure 1.3c apresenta-se o novo espaço de funções independentes que cumprem com a partição da unidade e possuem grau polinomial 5. Nota-se nessa figura a desativação das funções de forma globais que estão sobre o domínio local livre.

1.1.2 Aplicação da técnica a Dinâmica dos Fluidos Computacional

Para o emprego da metodologia nas análises da DFC as aproximações apresentadas nas Equação 1.4 e 1.5 devem ser aplicadas nas funções tentativa para velocidade e pressão, e nas funções teste associadas à elas, apresentadas nas ?? à ??.

Conforme relatado, os parâmetros de estabilização utilizados na técnica da DFC ainda necessitam de um estudo mais aprofundado, entretanto, para estudos iniciais, fez-se a combinação dos parâmetros calculados em cada uma das discretizações sobre a zona de sobreposição:

$$\tau_{\text{SUPG}}(\mathbf{y}) = b(\mathbf{y})(\tau_{\text{SUPG}})^G(\mathbf{y}) + (1 - b(\mathbf{y}))(\tau_{\text{SUPG}})^L(\mathbf{y}), \quad (1.8)$$

$$\tau_{\text{PSPG}}(\mathbf{y}) = b(\mathbf{y})(\tau_{\text{PSPG}})^G(\mathbf{y}) + (1 - b(\mathbf{y}))(\tau_{\text{PSPG}})^L(\mathbf{y}), \quad (1.9)$$

$$\nu_{\text{LSIC}}(\mathbf{y}) = b(\mathbf{y})(\nu_{\text{LSIC}})^G(\mathbf{y}) + (1 - b(\mathbf{y}))(\nu_{\text{LSIC}})^L(\mathbf{y}), \quad (1.10)$$

com $(\tau_{\text{SUPG}})^G$, $(\tau_{\text{PSPG}})^G$ e $(\nu_{\text{LSIC}})^G$ os parâmetros de estabilização na malha global; $(\tau_{\text{SUPG}})^L$, $(\tau_{\text{PSPG}})^L$ e $(\nu_{\text{LSIC}})^L$ os parâmetros de estabilização na malha local.

1.2 Implementação Computacional

O algoritmo de partição de domínios foi implementado para a solução de escoamentos incompressíveis seguindo a formulação apresentada nos capítulos ?? e ???. Nesse código, após a leitura dos dados respectivos às malhas global e local, segue-se com a definição da distância assinalada respectiva a todos os nós da malha global e da malha local com respeito aos contornos $(\Gamma_G)_B$ e $(\Gamma_L)_B$, respectivamente. O contorno $(\Gamma_G)_B$ é obtido a partir dos dados de entrada, onde define-se a espessura da zona de sobreposição. De posse da distância assinalada e espessura da zona de sobreposição, são definidos quais elementos das malhas local e global fazem parte da zona de sobreposição. Qualquer elemento que possua 1 ou mais nós dentro da zona de sobreposição é considerado como um elemento pertencente a ela.

As equações na região de sobreposição são integradas sobre o elemento local, dessa forma, no pré-processamento, os pontos de integração da malha local são projetados sobre a malha global e o elemento global e suas coordenadas paramétricas correspondentes a cada ponto são armazenados.

Na etapa de pré-processamento determinam-se ainda os nós inativos da malha global, sejam porque encontram-se fora da zona de sobreposição, ou, porque possuem pequena influência dentro da mesma, de acordo com a expressão apresentada na Equação 1.7.

Finalmente, o processo de marcha no tempo se inicia da maneira explicitada no Item ?? levando-se em consideração que as funções tentativa e peso, e os parâmetros de estabilização são modificados de acordo com o apresentado neste capítulo.

O algoritmo que descreve esse processo de solução das equações da DFC considerando a partição de domínios pode ser visualizado no Alg. 1.

Algoritmo 1 Algoritmo para problemas da dinâmica dos fluidos computacional com a técnica de partição de domínios

- 1: Cálculo da distância assinalada dos nós e pontos de controle aos contornos;
 - 2: Determinação dos elementos e células da zona de sobreposição;
 - 3: Busca da correspondência dos pontos de integração da malha local na malha global;
 - 4: Definição dos nós inativos da malha global;
 - 5: **para** o passo de tempo 0 até T **faca**
 - 6: $i = 0$;
 - 7: Predição da solução: aplicação das ??, ?? e ??;
 - 8: **enquanto** ($\epsilon < \text{tolerância}$) **faca**
 - 9: $i++$;
 - 10: Interpolação das variáveis do problema: aplicação da ??, ?? e ??;
 - 11: Cálculo do incremento nas variáveis do problema: $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$ e \mathbf{p}_{n+1} de acordo com as ?? e ??;
 - 12: Atualização da solução: calculadas de acordo com ??, ?? e ??.
 - 13: Cálculo do erro:
- $$\epsilon = \left\| \mathbf{R}_M^i \right\|_{L^2} \quad (1.11)$$
- 14: **fim enquanto**
 - 15: Atualização das variáveis do passo anterior;
 - 16: **fim para**
-

1.3 Exemplo de aplicação

Para verificar a metodologia de partição de domínios com sobreposição de malhas, neste item apresenta-se a solução estacionária do problema de Navier Stokes para a cavidade 2D.

A geometria do problema e suas condições contorno são apresentadas na Figura 1.3. O problema foi avaliado para um número de Reynolds = 100, calculado de acordo com ?? e $\rho = 1,0$.

Sabe-se que nas paredes da cavidade podem haver efeitos de camada limite, dessa forma, definiu-se uma malha local que circunda a cavidade de acordo com a Subfigure 1.5a. A malha local foi discretizada através de uma aproximação isogeométrica e foi definida com 1440 pontos de controle que foram divididos em 8 diferentes *patches*, chamados de P_1, P_2, \dots, P_8 . Os *patches* P_1, P_3, P_6 e P_8 possuem 64 células e os P_2, P_4, P_5 e P_7 192 células.

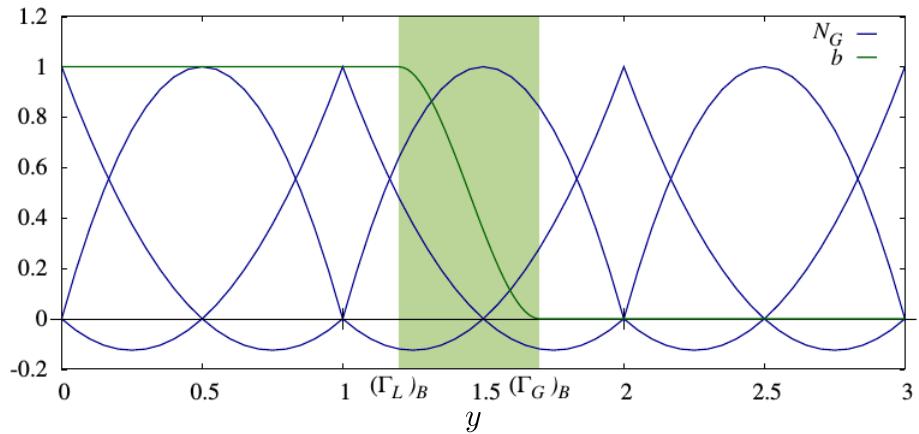
A malha global por sua vez é definida para toda a seção da cavidade, sendo composta por 800 elementos triangulares quadráticos e 1681 nós, de acordo com Subfigure 1.5b.

Definiu-se uma espessura para a zona de sobreposição equivalente a $\delta = 0,1$ e medida paralelamente ao contorno fictício local (Γ_L)_B. As células e elementos pertencentes

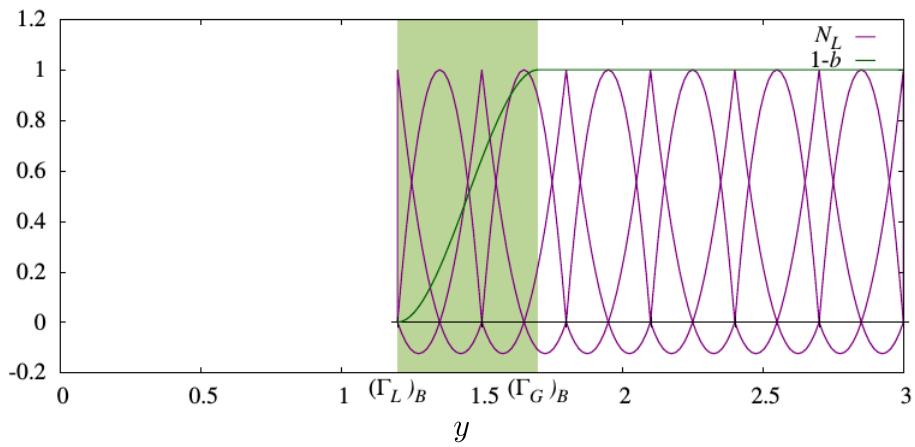
à zona de sobreposição, tanto para a malha local quanto para a malha global, podem ser vistos nas Subfigure 1.6a e Subfigure 1.6b, respectivamente.

Os campos de velocidade e pressão obtidos são apresentados nas Subfigure 1.7a e ???. Os perfis de velocidade adimensionalizados ($\mathbf{u}/\mathbf{u}_\infty$) horizontal e vertical ao longo de duas linhas centrais nas direções y_1 e y_2 da cavidade são apresentados na Figura 1.7 e comparados com os resultados de ??).

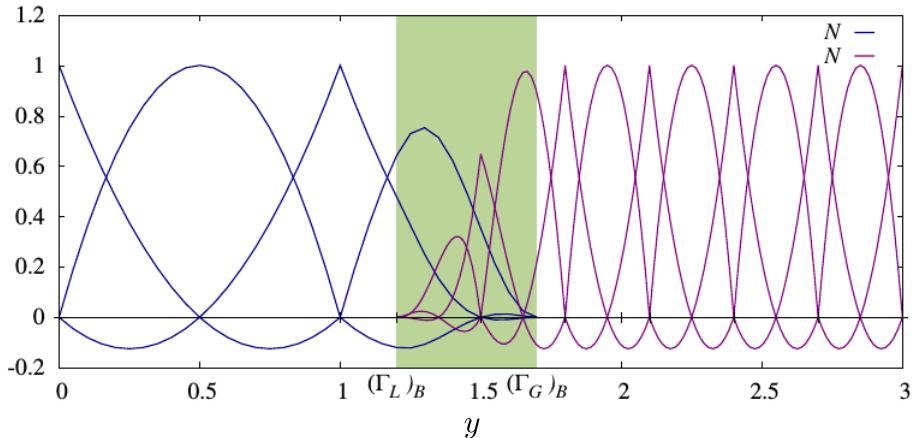
Figura 1.2 – Espaços de funções na técnica de partição de domínios - Problema unidimensional



(a) Funções globais e função ponderadora (b).



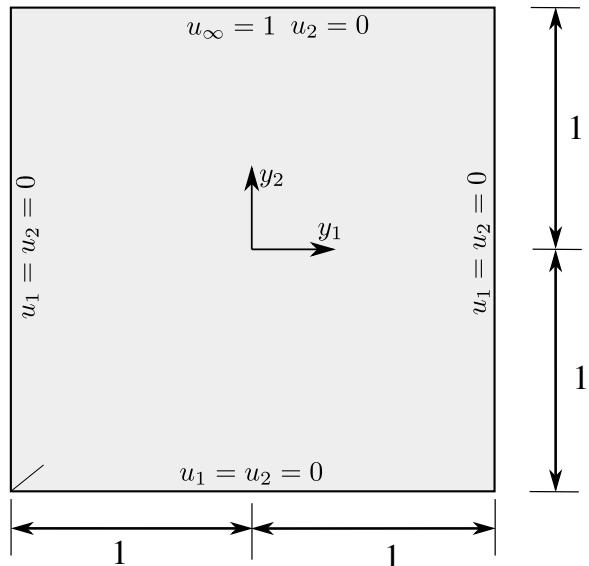
(b) Funções locais e função ponderadora ($1-b$)



(c) Novo espaço de funções

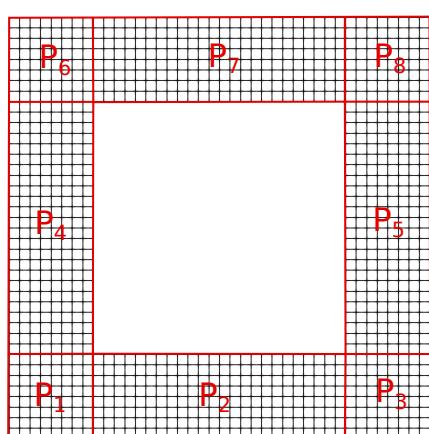
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 1.3 – Cavidade: geometria e condições de contorno

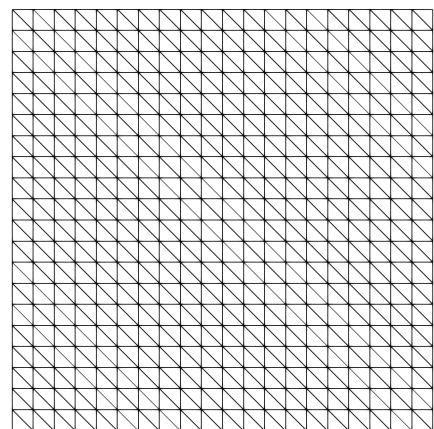


Fonte: Elaborada pela autora

Figura 1.4 – Cavidade 2D: Malhas Global e Local



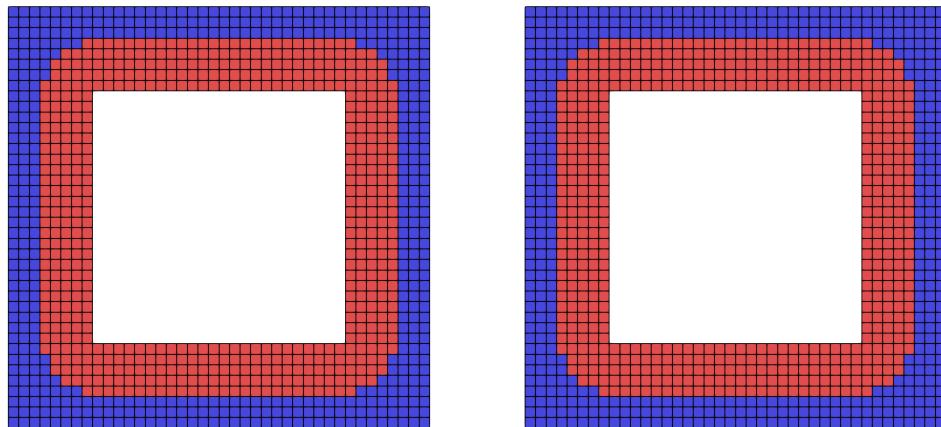
(a) Malha Local



(b) Malha Global

Fonte: Elaborada pela autora

Figura 1.5 – Cavidade 2D: Zona de sobreposição

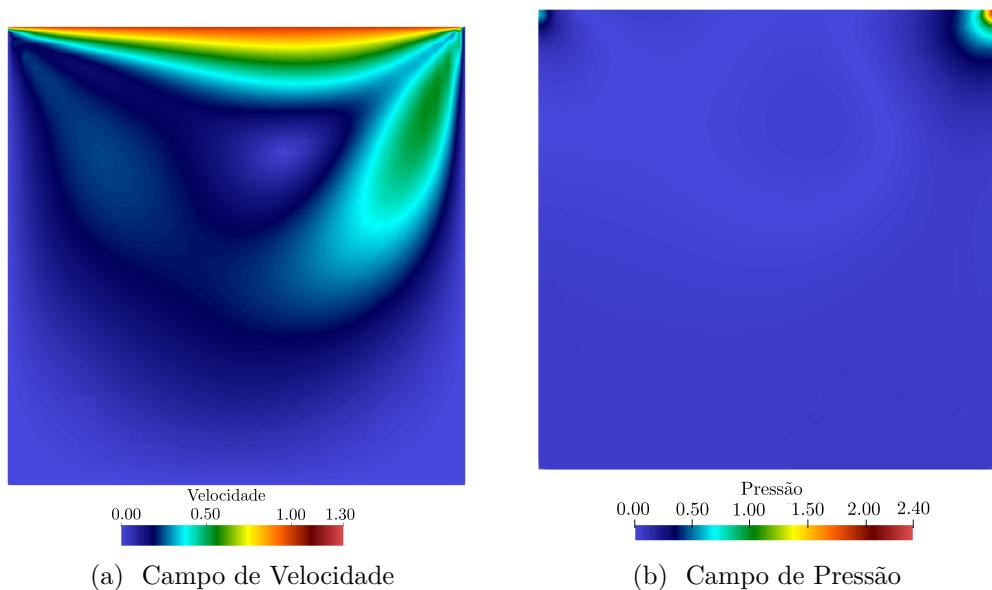


(a) Malha Local

(b) Malha Global

Fonte: Elaborada pela autora

Figura 1.6 – Cavidade 2D: Solução do problema de Navier Stokes para $Re = 100$

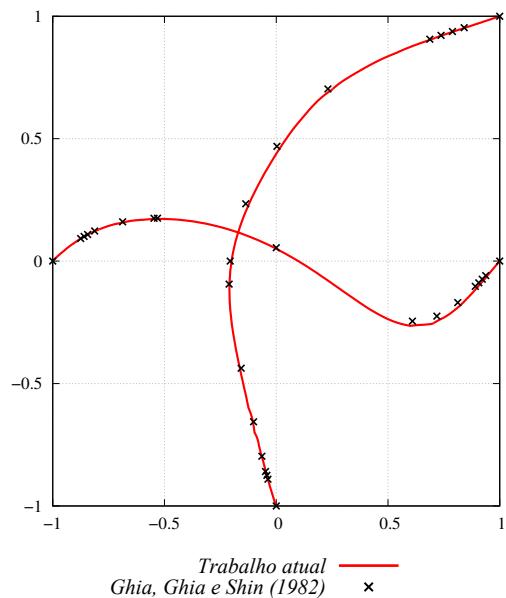


(a) Campo de Velocidade

(b) Campo de Pressão

Fonte: Elaborada pela autora

Figura 1.7 – Cavidade 2D: Perfis de velocidade



Fonte: Elaborada pela autora