

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

PATRICIA TONON

*Combinação de discretizações isogeométrica  
e por elementos finitos na análise de  
interação fluido-estrutura*

SÃO CARLOS/SP  
2021



PATRICIA TONON

*Combinação de discretizações isogeométrica  
e por elementos finitos na análise de  
interação fluido-estrutura*

Texto apresentado para o exame de qualificação ao doutorado no Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências, Programa: Engenharia Civil (Estruturas).

Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo André Kuche Sanches

SÃO CARLOS/SP  
2021

**RESUMO**

**TONON, P. Combinação de discretizações isogeométrica e por elementos finitos na análise de interação fluido-estrutura.** 2021. 155 p. Qualificação da Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

O presente trabalho tem como principal intuito a construção de uma ferramenta computacional robusta para análise de problemas de interação fluido-estrutura onde o domínio fluido é discretizado combinando-se aproximações baseadas em análise isogeométrica e método dos elementos finitos tradicional. São considerados escoamentos incompressíveis, sendo que o domínio fluido possui uma discretização global, em descrição Euleriana, à qual é sobreposta uma discretização local, mais refinada. As discretizações local e global são diferentes, sendo uma isogeométrica e outra por elementos finitos. Os dois modelos são acoplados por uma técnica de partição de domínio com sobreposição de malhas, a qual baseia-se na modificação das funções de forma de ambas as discretizações em uma região de sobreposição e posterior união dos espaços de funções local e global de modo a formar um espaço enriquecido que garanta a partição da unidade. A malha local é adaptada à estrutura e deforma-se dinamicamente para acomodar a movimentação da estrutura, enquanto a malha global permanece fixa. Com isso o método proposto compartilha vantagens dos métodos de rastreamento de interface (malhas móveis) e de captura de interface (contornos imersos), visto que o fluido próximo à estrutura é adequadamente discretizado garantindo a captura de efeitos localizados, ao mesmo tempo em que a malha local, por ser menor, tolera maiores deformações, e em caso de necessidade de remalhamento, apenas essa malha precisa ser reconstruída. Adota-se uma formulação estabilizada para o escoamento incompressível, permitindo aproximação de mesma ordem para velocidades e pressão, e a integração temporal é feita através do método  $\alpha$ -generalizado. A estrutura é modelada empregando-se uma abordagem do método dos elementos finitos baseada em posições aplicada a elementos de casca com grandes deslocamentos. O acoplamento fluido-estrutura é particionado do tipo bloco-iterativo.

**Palavras-chave:** *Interação Fluido-Estrutura. Análise Isogeométrica. Método dos Elementos Finitos. Técnica de sobreposição de malhas.*

# ABSTRACT

TONON, P. **Combination of isogeometric and finite element discretizations for fluid-structure interaction analysis.** 2021. 155 p. Thesis qualification (Doctorate in Structural Engineering) – Department of Structural Engineering, São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, São Carlos, 2021.

This work aims the construction of a robust computational tool for fluid-structure interaction analysis where the fluid domain is discretized combining isogeometric and traditional finite elements approximations. The flow is considered to be incompressible and the fluid domain has a global discretization, under Eulerian description, with an overlapping of a local one more refined. Local and global discretizations are different, being one isogeometric and the other a traditional finite element discretization, coupled by a domain partitioning technique that relies on the modification of both, local and global, shape functions over and overlapping region and subsequent union of local and global spaces of functions generating an enriched space that fulfills unity partition. The local mesh is adapted to the structure and deforms dynamically to accommodate structural movements while the global one remains fixed. Therefore, the proposed method shares advantages of both, interface tracking (moving mesh) and interface capturing (immersed boundary) methods, once the fluid/structure interface is adequately discretized for local effects, at the same time that the local mesh, being smaller, tolerates larger deformations, and, in case of need for re-meshing, only the local mesh needs to be rebuilt. The incompressible flow is modeled by a stabilized formulation, allowing equal order pressure-velocity interpolation, with time integration by the  $\alpha$ -generalized method. The structure is modeled in a position-based large-displacement shell finite element formulation. The fluid-structure coupling is a block iterative type partitioned scheme.

**Keywords:** *Fluid-structure interaction. Isogeometric analysis. Finite Element Method. Overlap technique.*



# LISTA DE FIGURAS

---

---

Figura 2.1 – Volume de controle infinitesimal: Fluxo de massa . . . . .	30
Figura 2.2 – Volume de controle infinitesimal: Componentes de tensão e força na direção $y_1$ . . . . .	31
Figura 2.3 – Volume de controle infinitesimal: Fluxo de quantidade de Movimento .	33
Figura 2.4 – Domínio para o problema da dinâmica dos fluidos computacional . . .	33
Figura 2.5 – Elementos Finitos: representação espacial e paramétrica . . . . .	36
Figura 2.6 – Domínios utilizados para a descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária .	40
Figura 2.7 – Cilindro 2D: Geometria, condições de contorno e malha de elementos finitos. . . . .	48
Figura 2.8 – Cilindro 2D: Coeficientes aerodinâmicos. . . . .	50
Figura 2.9 – Cilindro 2D: Campos de pressão e de velocidade para um escoamento com $Re = 100$ . . . . .	51
Figura 2.10–Cavidade quadrada: Geometria, condições de contorno e malha de elementos finitos. . . . .	52
Figura 2.11–Cavidade quadrada: Perfis de velocidade adimensionalizados nas direções $x$ e $y$ . . . . .	53
Figura 2.12–Cavidade quadrada: campos de velocidade. . . . .	54
Figura 2.13–Cavidade quadrada: campos de pressão. . . . .	55
Figura 3.1 – NURBS: espaço paramétrico, espaço indicial, espaço parental, malha de pontos de controle e malha física. Fonte: Adaptado de Cottrell, Hughes e Bazilevs (2009) . . . . .	58
Figura 3.2 – <i>B-Splines</i> . . . . .	60
Figura 3.3 – Curva <i>B-Spline</i> . . . . .	61
Figura 3.4 – Projeção transformativa para obtenção circunferência. Fonte: Cottrell, Hughes e Bazilevs (2009) . . . . .	63
Figura 3.5 – Cilindro 3D: Geração curva NURBS . . . . .	67
Figura 3.6 – Cilindro 3D: Geração superfície NURBS. . . . .	68
Figura 3.7 – Cilindro 3D: Geometria e malha de células físicas . . . . .	69
Figura 3.8 – Cilindro 3D: Coeficientes aerodinâmicos. . . . .	70
Figura 3.9 – Degrau 3D: Geometria. . . . .	70
Figura 3.10–Degrau 3D: Geometria e malha de células físicas . . . . .	71
Figura 3.11–Degrau 3D: Comprimento de recolamento do vórtice principal . . . .	72
Figura 3.12–Degrau 3D: Campo de velocidade. . . . .	73

Figura 4.1 – Cinemática de sólido deformável . . . . .	76
Figura 4.2 – Mudança no volume na mudança de configuração. . . . .	78
Figura 4.3 – Mudança na área na mudança de configuração. . . . .	78
Figura 4.4 – Sólido sujeito a um conjunto de carregamento externo. . . . .	80
Figura 4.5 – Mapeamento da superfície média. . . . .	83
Figura 4.6 – Vetores de posição. . . . .	84
Figura 4.7 – Casca: Geometria e Malha. . . . .	88
Figura 4.8 – Casca: Deslocamento vertical nó central. . . . .	89
Figura 4.9 – Casca: Campo de deslocamento. . . . .	89
Figura 5.1 – Definição dos domínios global,local e de sobreposição. . . . .	92
Figura 5.2 – Zona de sobreposição - Problema unidimensional. . . . .	94
Figura 5.3 – Cavidade 2D: Condições de contorno. . . . .	97
Figura 5.4 – Cavidade 2D: Malhas Global e Local. . . . .	97
Figura 5.5 – Cavidade 2D: Zona de sobreposição. . . . .	98
Figura 5.6 – Cavidade 2D: Solução do problema de Navier Stokes para $Re = 100$ . . . . .	98
Figura 5.7 – Cavidade 2D: Perfis de velocidade. . . . .	99
Figura 6.1 – Domínio local e global. . . . .	102
Figura 6.2 – Função Ponderadora . . . . .	104
Figura 6.3 – Domínio Arlequin móvel . . . . .	114
Figura 6.4 – Aerofólio 2D: Geometria . . . . .	117
Figura 6.5 – Aerofólio 2D: Malha Monomodelo (MEF) . . . . .	117
Figura 6.6 – Aerofólio 2D: Discretização das malhas . . . . .	118
Figura 6.7 – Aerofólio 2D: Coeficiente de Arrasto . . . . .	119
Figura 6.8 – Aerofólio 2D: Coeficiente de Sustentação . . . . .	119
Figura 6.9 – Aerofólio 2D: Campo de velocidade . . . . .	120
Figura 6.10–Aerofólio 2D: Campo de pressão . . . . .	120
Figura 6.11–Aerofólio Mov. 2D: Geometria . . . . .	121
Figura 6.12–Aerofólio Mov. 2D: Coeficiente de Arrasto . . . . .	122
Figura 6.13–Aerofólio Mov. 2D: Coeficiente de Sustentação . . . . .	122
Figura 6.14–Aerofólio Mov. 2D: Campos de velocidade . . . . .	123
Figura 6.15–Aerofólio Mov. 2D: Campos de pressão . . . . .	124
Figura 7.1 – Domínios Computacional para análise de problemas de IFE. . . . .	126
Figura 7.2 – Discretizações não-coincidentes no contorno IFE . . . . .	128
Figura 7.3 – Cavidade fundo flexível 2D: geometria . . . . .	132
Figura 7.4 – Cavidade fundo flexível 2D: Vista frontal da discretização para modelo Arlequin - malha 2 . . . . .	134
Figura 7.5 – Cavidade fundo flexível 2D: Deslocamento em A para malhas do modelo Arlequin . . . . .	134

Figura 7.6 – Cavidade fundo flexível 2D: Deslocamento em A comparado com as referências e monomodelo . . . . .	135
Figura 7.7 – Cavidade fundo flexível 2D: Campos de velocidade . . . . .	136
Figura 7.8 – Cavidade fundo flexível 2D: Campos de Pressão . . . . .	137
Figura 7.9 – Cavidade fundo flexível 3D: Geometria . . . . .	137
Figura 7.10–Cavidade fundo flexível 3D: Discretização . . . . .	138
Figura 7.11–Cavidade fundo flexível 3D: Deslocamento em A . . . . .	139
Figura 7.12–Painel Flexível: Geometria . . . . .	139
Figura 7.13–Painel Flexível: Discretização . . . . .	140
Figura 7.14–Painel Flexível: Deslocamento em A . . . . .	141
Figura 7.15–Painel Flexível: Colapso malha monomodelo . . . . .	142



# LISTA DE TABELAS

---

---

Tabela 3.1 – Número de pontos de controle por <i>patch</i> . . . . .	71
Tabela 7.1 – Discretizações . . . . .	133



# SUMÁRIO

---

---

1	INTRODUÇÃO . . . . .	13
1.1	Apresentação do texto . . . . .	15
1.2	Estado da Arte . . . . .	16
1.2.1	<i>Dinâmica dos fluidos computacional</i> . . . . .	16
1.2.2	<i>Dinâmica de estruturas computacional considerando grandes deslocamentos</i> . . . . .	19
1.2.3	<i>Acoplamento fluido-estrutura</i> . . . . .	20
1.2.4	<i>Métodos Multiescala e Técnicas de partição de domínios</i> . . . . .	23
1.3	Objetivos . . . . .	25
1.4	Metodologia . . . . .	25
1.5	Justificativa . . . . .	27
2	DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL . . . . .	29
2.1	Equações governantes na descrição Euleriana . . . . .	30
2.1.1	<i>Equação da conservação da massa</i> . . . . .	30
2.1.2	<i>Equação da quantidade de movimento</i> . . . . .	31
2.1.3	<i>Formulação forte da mecânica dos fluidos</i> . . . . .	33
2.1.4	<i>Forma Fraca das equações governantes</i> . . . . .	34
2.1.5	<i>Método dos elementos finitos aplicado à Mecânica dos Fluidos</i> . . . . .	34
2.1.6	<i>Discretização Espacial</i> . . . . .	35
2.2	Descrição Euleriana-Lagrangiana arbitrária (ALE) . . . . .	39
2.3	Parâmetros de estabilização . . . . .	42
2.4	Integração Temporal . . . . .	44
2.4.1	<i>Implementação Computacional</i> . . . . .	46
2.5	Verificação e Aplicações . . . . .	47
2.5.1	<i>Escoamento sobre um cilindro - 2D</i> . . . . .	47
2.5.2	<i>Cavidade Quadrada - 3D</i> . . . . .	49
3	ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA APLICADA À MECÂNICA DOS FLUIDOS . . . . .	57
3.1	Noções Gerais de IGA . . . . .	58
3.2	Representação geométrica utilizando NURBS . . . . .	59
3.2.1	<i>Vetor de knots</i> . . . . .	59
3.2.2	<i>B-Splines</i> . . . . .	60
3.2.3	<i>B-Splines não-uniformes racionais e análise isogeométrica</i> . . . . .	62
3.2.4	<i>Parâmetros de estabilização</i> . . . . .	64
3.3	Verificação e aplicações . . . . .	66
3.3.1	<i>Escoamento sobre um cilindro - 3D</i> . . . . .	66
3.3.2	<i>Escoamento em um canal com degrau</i> . . . . .	69

4	DINÂMICA DOS SÓLIDOS COMPUTACIONAL . . . . .	75
4.1	Cinemática dos corpos deformáveis . . . . .	76
4.2	Equilíbrio de corpos deformáveis . . . . .	79
4.2.1	<i>Equações globais de equilíbrio em descrição Euleriana e variação do funcional de energia mecânica</i> . . . . .	79
4.2.2	<i>Equação da conservação da massa</i> . . . . .	81
4.2.3	<i>Equações globais de equilíbrio em descrição Lagrangiana</i> . .	81
4.2.4	<i>Modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff</i> . . . . .	82
4.3	Método dos Elementos Finitos Posicional . . . . .	82
4.3.1	<i>Elemento finito de Casca</i> . . . . .	82
4.3.2	<i>Integração temporal e técnica de solução</i> . . . . .	85
4.3.3	<i>Implementação Computacional</i> . . . . .	87
4.4	Exemplo de aplicação - Casca cilíndrica com <i>snap through</i> dinâmico . . . . .	88
5	TÉCNICA DE DECOMPOSIÇÃO DE DOMÍNIOS . . . . .	91
5.1	Combinação de espaços de funções . . . . .	91
5.1.1	<i>Função ponderadora de combinação</i> . . . . .	93
5.2	Implementação Computacional . . . . .	95
5.3	Exemplo de aplicação . . . . .	96
6	MÉTODO DE ARLEQUIN ESTABILIZADO . . . . .	101
6.1	Método Arlequin . . . . .	101
6.2	Método Arlequin clássico aplicado à problemas de escoamentos incompressíveis . . . . .	104
6.3	Método Arlequin estabilizado aplicado à problemas de escoamentos incompressíveis . . . . .	107
6.3.1	<i>Integração Temporal</i> . . . . .	109
6.3.2	<i>Parâmetro de estabilização para técnica RBSAM</i> . . . . .	111
6.4	Superposição de modelos móveis . . . . .	113
6.5	Implementação Computacional . . . . .	114
6.6	Exemplos . . . . .	115
6.6.1	<i>Escoamento sobre um aerofólio NACA 0012</i> . . . . .	116
6.6.2	<i>Aerofólio com movimento de arfagem prescrito</i> . . . . .	118
7	ACOPLAMENTO FLUIDO-ESTRUTURA . . . . .	125
7.1	Condições de acoplamento . . . . .	126
7.1.1	<i>Movimentação da Malha</i> . . . . .	127
7.2	Discretizações não coincidentes entre os meios . . . . .	128
7.3	Acoplamento Particionado Forte - Bloco-Iterativo . . . . .	129
7.3.1	<i>Implementação Computacional</i> . . . . .	130
7.4	Exemplos . . . . .	131
7.4.1	<i>Cavidade com fundo flexível - 2D</i> . . . . .	132
7.4.2	<i>Cavidade com fundo flexível - 3D</i> . . . . .	135
7.4.3	<i>Flutter em painel flexível</i> . . . . .	136
8	CONCLUSÕES PARCIAIS . . . . .	143
	REFERÊNCIAS . . . . .	145

CAPÍTULO

---

1

# INTRODUÇÃO

---

A interação fluido-estrutura caracteriza-se por ser uma classe de problemas em que existe uma interdependência nos comportamentos do fluido e da estrutura. O comportamento do fluido depende do formato da estrutura e sua movimentação, assim como, o movimento e a deformação da estrutura dependem das forças que provém do fluido.

A modelagem numérica dos problemas da engenharia estrutural é um ramo vastamente desenvolvido, sendo a análise de estruturas por elementos finitos em softwares comerciais uma prática corrente entre os engenheiros. Entretanto, quando fala-se de interação fluido-estrutura (IFE), esses softwares encontram-se muito longe de atender à demanda dos engenheiros. Problemas que envolvem a interação entre fluido e estrutura estão presentes em diversas áreas da engenharia, pode-se citar, por exemplo, a ação do vento sobre edifícios, aerodinâmica de modelos automotivos, problemas de *flutter* em estruturas aeronáuticas e de pontes, ou ainda problemas de escoamento de sangue sobre vasos sanguíneos e órgãos, entre muitos outros. A análise experimental de tais problemas, em geral, é muito custosa e envolve muito tempo, desta forma, é de interesse o desenvolvimento de métodos numéricos que representem adequadamente tais análises e que possibilitem que sejam realizadas dentro de um tempo razoável. O crescimento da informática tem auxiliado nesse processo, embora, ainda muitas análises somente sejam possíveis de serem realizadas em grandes *clusters*, e algumas, devido à complexidade dos problemas, não possam ser simuladas sem grandes simplificações.

A análise computacional dos problemas de IFE envolvem basicamente três partes: dinâmica dos fluidos computacional, mecânica dos sólidos computacional e acoplamento entre os meios fluido e sólido. Uma das maiores dificuldades encontrada nessa área diz respeito ao acoplamento entre fluido e sólido visto que para fluidos aplica-se, em geral, uma descrição matemática Euleriana, e para sólidos, Lagrangiana. O processo de acoplamento é realizado basicamente utilizando-se duas possíveis técnicas: métodos de rastreamento de

interface (*interface tracking*) ou método de malhas adaptadas e os métodos de captura de interface (*interface capturing*) ou método de malhas não-adaptadas.

Nos métodos de rastreamento de interface, a malha do fluido é adaptada à forma da interface sólido-fluido e acompanha seu movimento, requerendo, dessa forma, procedimentos de atualização da malha do fluido ao longo da análise. Nesse tipo de metodologia uma descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária pode ser aplicada ao fluido, permitindo a movimentação do domínio computacional de maneira independente do movimento do fluido. Essa técnica é adequada para problemas em que a estrutura sofre deslocamentos em pequenas escalas comparados à configuração inicial da estrutura, sem que haja mudança topológica do domínio do fluido, visto que grandes distorções do domínio fluido, em geral, acarretam na necessidade de técnicas de remalhamento, que apresentam um custo computacional muito elevado.

No método de captura de interface se utiliza uma malha fixa para o fluido, na qual o sólido se encontra imerso. Um dos aspectos importantes desse método diz respeito à localização do contorno da estrutura dentro da malha do fluido, podendo ser resolvido por exemplo com o uso de uma função *level-set* baseada na distância assinalada ao contorno. Essa técnica, embora possa ser aplicada para grandes deslocamentos, em geral não é adequada para levar em consideração efeitos localizados que precisem de uma maior precisão da malha, como por exemplo, em regiões de camada limite na vizinhança da estrutura.

Neste trabalho de doutorado, para análise de problemas de IFE tridimensionais, utilizou-se uma técnica para a partição do domínio do fluido, com malhas superpostas, no intuito de unir as vantagens das metodologias de rastreamento de interface e de captura de interface e ao mesmo tempo proporcionar a combinação de diferentes técnicas de discretizações para as malhas. Nesse contexto, duas discretizações espaciais para o fluido são utilizadas, uma malha global maior, menos refinada e fixa no espaço, e uma malha local menor, mais refinada, em contato com a estrutura e que se move para acomodar as deformações da estrutura. Uma das discretizações pode ser isogeométrica, enquanto a outra em elementos finitos tradicional. Como consequência, caso seja necessária a realização de remalhamento, o mesmo pode ser realizado apenas na malha local, diminuindo o custo computacional.

A proposta inicial da tese de doutorado era a realização do acoplamento entre as malhas através de uma técnica de modificação do espaço das funções base em uma zona de sobreposição, de maneira a preservar à independência linear das funções e a partição da unidade. Tal formulação, se mostrou eficiente para alguns problemas estudados, entretanto, em simulações mais complexas, a metodologia não apresentou o comportamento esperado. Dessa forma, em alinhamento com os objetivos desse trabalho, utilizou-se para o acoplamento o método Arlequin em sua forma estabilizada, conforme será retratado ao longo do texto.

Neste capítulo são apresentados o estado da arte dos principais assuntos envolvidos no desenvolvimento deste projeto, os objetivos, a metodologia aplicada e a justificativa para esta pesquisa.

## 1.1 Apresentação do texto

Este texto está dividido em 8 capítulos os quais serão descritos sucintamente na continuação.

No *Capítulo 1* introduz-se e contextualiza-se o tema de pesquisa. Na sequência, no estado da arte, faz-se uma breve apresentação de algumas das formulações mais utilizadas para a solução dos problemas que envolvem a interação fluido-estrutura e métodos de partição de domínios. Por fim, apresentam-se os objetivos, a metodologia e justificava desta pesquisa.

**ALTERAR** O *Capítulo 2* comprehende a descrição da solução numérica para o problema de dinâmica dos fluidos computacional. Apresentam-se inicialmente as equações governantes em sua forma forte na descrição Euleriana, posteriormente, é apresentada a obtenção da descrição Euleriana-Lagrangiana arbitrária. Na sequência, a formulação fraca é obtida através da aplicação do método dos resíduos ponderados utilizando a técnica clássica de Galerkin. Após isso, descrevem-se as estabilizações utilizadas para contornar as instabilidades que ocorrem nesse tipo de discretização, seguida da técnica de integração temporal do conjunto de equações. Ao final, o algoritmo da implementação computacional é apresentado e alguns exemplos são avaliados para a verificação do programa.

**ALTERAR** No *Capítulo 3*, apresenta-se a análise isogeométrica. Descrevem-se as funções NURBS e sua aplicação na discretização das geometrias e variáveis em substituição às tradicionais funções polinomiais de Lagrange empregadas no método dos elementos finitos clássico. Por fim, verifica-se o código computacional da DFC com análise isogeométrica por meio de exemplos numéricos.

**ALTERAR** O *Capítulo 4* apresenta uma breve revisão sobre a mecânica dos sólidos voltada ao equilíbrio de corpos deformáveis em descrição Lagrangiana. Na sequência, apresentam-se os conceitos do método dos elementos finitos posicional e o elemento finito de casca a ser utilizado nesse projeto. Por fim, um exemplo de problema dinâmico é apresentado.

**ALTERAR** No *Capítulo 5* a técnica de decomposição de domínios é apresentada. Descreve-se a obtenção do novo espaço de funções na zona de sobreposição entre malhas global e local, e apresenta-se por fim um exemplo de verificação voltado à dinâmica dos fluidos computacional.

No *Capítulo 6* apresenta-se a técnica de decomposição de domínios através do método Arlequin estabilizado (RBSAM). A primeira parte do capítulo foi dedicada a descrever o método clássico de Arlequin, para na sequência, introduzir a metodologia

estabilizada para a solução de escoamentos incompressíveis. Apresenta-se na sucessão do capítulo a extensão da metodologia para problemas de contorno móveis. Ao final, o algoritmo de implementação é apresentado, bem como, exemplos de validação são avaliados.

No *Capítulo 7* discorre-se sobre a formulação utilizada para análise de problemas de Interação Fluido-Estrutura. No texto, apresentam-se as condições de acoplamento necessárias a solução de um problema de IFE, a técnica de movimentação de malha utilizada, e a metodologia de transferência de condições de contorno em uma interface entre fluido e sólido com malhas não coincidentes. Descreve-se na continuação do texto a teoria envolvida no esquema de acoplamento particionado forte adotado. Por fim, o algoritmo de implementação computacional e exemplos de validação são apresentados.

**ALTERAR** No *Capítulo 8* são apresentadas conclusões parciais acerca do que foi desenvolvido até momento, bem como considerações sobre o plano de trabalho e resultados esperados ao final do Doutorado.

## 1.2 Estado da Arte

Nesta seção apresenta-se uma breve contextualização das formulações mais importantes relacionadas à metodologia aplicada neste projeto para a resolução dos problemas de interação fluido-estrutura. Assim, aborda-se brevemente o estado da arte da mecânica dos fluidos computacional aplicada a problemas de contornos móveis, mecânica dos sólidos computacional aplicada a problemas dinâmicos com grandes deslocamentos, técnicas de acoplamento numérico fluido-estrutura e métodos de decomposição de domínios e multiescala.

### 1.2.1 Dinâmica dos fluidos computacional

Na dinâmica dos fluidos computacional (DFC) técnicas numéricas são aplicadas para obtenção de uma solução aproximada para o conjunto de equações que descrevem o comportamento dos fluidos no espaço e no tempo, visto que a solução analítica para esses problemas é conhecida para poucos e simples casos. Os principais tópicos abordados aqui são referentes às diferentes metodologias aplicadas no que diz respeito a: discretização espacial, métodos de estabilização e modelagem de escoamentos turbulentos.

No que diz respeito à discretização espacial a DFC desenvolveu-se inicialmente no âmbito do método das diferenças finitas e do método dos volumes finitos (ver, por exemplo, Chung (2002) e Anderson (1995)). O método dos elementos finitos (MEF), por sua vez, popularizou-se inicialmente em análises de estruturas na década de 50, com problemas baseados em princípios variacionais. Alguns anos depois, passou a ser usado também em problemas da DFC, visto que o mesmo apresenta algumas propriedades vantajosas, como por exemplo, a capacidade de discretizar geometrias complexas com o uso de malhas não

estruturadas arbitrárias e a facilidade de aplicação de condições de contorno em geometrias complexas e de alta ordem (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; NITHIARASU, 2005; REDDY; GARTLING, 2010).

Umas das dificuldades encontradas na aplicação do MEF à dinâmica dos fluidos computacional é o fato de que, ao adotar-se o método clássico de Galerkin na discretização espacial das equações que descrevem o comportamento dos fluidos em descrição Euleriana, obtém-se matrizes assimétricas, e, em escoamentos com convecção dominante, surgem variações espúrias nas variáveis transportadas. Esse problema pode ser amenizado à medida que a malha de elementos finitos é refinada, entretanto, é desejável que o método escolhido apresente resultados estáveis mesmo em malhas mais grosseiras.

Para resolver tal dificuldade, algumas técnicas de estabilização foram propostas, a exemplo da metodologia *Stream-Upwind/Petrov-Galerkin* - SUPG (BROOKS; HUGHES, 1982), *Galerkin Least-Squares-GLS* (HUGHES; FRANCA; HULBERT, 1989) e *Sub-Grid Scale-SGS* (HUGHES, 1995). Todas essas formulações baseiam-se na introdução de termos estabilizantes ao problema, contendo as variações espúrias que ocorrem em problemas com convecção dominante. Outra possibilidade, diz respeito ao uso do método Taylor-Galerkin (T-G), introduzido por Donea (1984) onde a estabilização é obtida pela introdução de termos de mais alta ordem para a expansão em série de Taylor no processo de discretização temporal.

Uma das metodologias mais difundidas para estabilização dos termos convectivos, é a técnica SUPG, aplicada nesse estudo, que consiste em adicionar à forma fraca da equação da quantidade de movimento, o resíduo da equação da quantidade de movimento ponderado por uma função especialmente escolhida para adicionar difusão na direção das linhas de corrente. Diversos autores contribuíram para consolidação dessa técnica, dentre os quais pode-se citar, Hughes e Tezduyar (1984), Tezduyar (1992), Catabriga e Coutinho (2002). O parâmetro adimensional estabilizador cuja função é aplicar uma escala na parcela adicionada, possui sua obtenção discutida em diversos trabalhos, tais como os Takizawa, Tezduyar e Otoguro (2018) e Otoguro, Takizawa e Tezduyar (2020).

Outra dificuldade da DFC diz respeito aos escoamentos incompressíveis. Ao levar-se em conta a incompressibilidade do escoamento, obtém-se a chamada equação da continuidade, onde tem-se apenas o termo do divergente do vetor velocidade. Do ponto de vista computacional, esse aspecto traz problemas na obtenção do campo de pressão. Nesses casos, a utilização da pressão e da velocidade como variáveis primárias aproximadas por funções de forma de mesmo grau pode conduzir instabilidades na resolução do sistema. Essas instabilidades podem ser contornadas utilizando elementos que respeitem a restrição de *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi* ou LBB, onde a pressão é interpolada por funções de forma de ordem menor, sendo tais elementos conhecidos como Taylor-Hood (BREZZI; FORTIN, 1991; ZIENKIEWICZ; TAYLOR; NITHIARASU, 2005; STRANG; FIX, 2008).

Uma metodologia de estabilização semelhante à técnica SUPG foi também desenvol-

vida para contornar esse problema (HUGHES; FRANCA; BALESTRA, 1986; TEZDUYAR et al., 1992a). Essa metodologia é conhecida como PSPG (*Pressure stabilized Petrov-Galerkin*), adotada nesse estudo, e consiste em adicionar à forma fraca da equação da continuidade o resíduo da equação da quantidade de movimento ponderado pelo gradiente da equação da continuidade multiplicado por uma constante estabilizadora.

Outra consideração importante nas simulações numéricas diz respeito à reprodução de escoamentos turbulentos. As equações de Navier-Stokes descrevem tanto escoamentos laminares como turbulentos, entretanto, a utilização da chamada Simulação Direta de Turbulência leva a custos computacionais elevados, visto que requer uma malha refinada de maneira a representar adequadamente todas as escalas de turbulência. Para contornar esse problema, diferentes técnicas podem ser empregadas, destacando-se os métodos *Reynolds-Averaged Navier-Stokes* (RANS) (SPEZIALE, 1991; ALFONSI, 2009) e Simulações de grandes Vórtices (LES) (LAUNDER; SPALDING, 1972; GERMANO et al., 1991; WILCOX, 1993; PIOMELLI, 1999).

Os métodos RANS baseiam-se na decomposição das variáveis de fluxo em uma média temporal e uma componente de flutuação. Essa abordagem permite que as equações governantes sejam manipuladas de forma a representar as médias de longo prazo do fluxo, enquanto as flutuações turbulentas são tratadas como termos adicionais, muitas vezes modelados por equações de fechamento. A definição da média pode variar conforme as características do problema. Nas simulações de grandes vórtices o objetivo principal é capturar as estruturas turbulentas de grande escala, que são responsáveis pela maior parte da transferência de momento e energia, e aplicar um modelo para os vórtices de pequena escala.

O método Variacional Multiescala (VMS) (HUGHES, 1995; HUGHES et al., 1998; HUGHES; OBERAI; MAZZEI, 2001; BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013) tem intuito de garantir concomitantemente a estabilização para os efeitos de convecção, para o campo de pressão e para problemas de vorticidade. O método, a partir de princípios variacionais, propõem a representação do problema físico por meio de sua decomposição em grandes e pequenas escalas, resolvendo-as separadamente. A modelagem do espaço de pequenas escalas é realizado em termos de resíduos das equações de conservação de massa e de conservação da quantidade de movimento. Essa metodologia tem se mostrado adequada para tratamento de problemas de camada limite ou turbulência, os quais apresentam um intervalo de escalas muito amplos.

A Análise Isogeométrica (IGA - *Isogeometric Analysis*) é uma metodologia para análise numérica de problemas descritos por equações diferenciais e foi introduzida primeiramente por Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005). Pode-se dizer que se trata de uma generalização do método dos elementos finitos clássico, a partir do uso de funções base especiais. Na análise isogeométrica, as funções base utilizadas são aquelas aplicadas nos sistemas CAD (*Computed Aided Design*), ou seja, nas tecnologias aplicadas na engenharia

de *design*, animação, artes gráficas e visualização. Dentro das possibilidades de funções, as mais conhecidas são as funções NURBS (PIEGL; TILLER, 1996), fazendo que esse seja um ponto de partida para os estudos sobre IGA. Um dos principais objetivos do desenvolvimento dessa ferramenta é a integração entre os sistemas CAD e as técnicas numéricas baseadas em elementos finitos, as quais requerem a geração de malhas baseadas nos dados obtidos em programas CAD.

Uma das principais vantagens do uso dessa metodologia é representação exata de geometrias mesmo em malhas pouco refinadas, visto que essas funções são capazes de representar exatamente seções cônicas, círculos, cilindros, esferas e elipsoides. Além disso, as funções NURBS são continuas  $p - 1$  vezes entre os elementos, sendo  $p$  o grau da função base. A descrição exata das geometrias é uma característica desejável em problemas que envolvem fenômenos de camada limite, os quais dependem fortemente da precisão geométrica da superfície do corpo imerso no escoamento. Alguns problemas envolvendo escoamentos turbulentos e interação fluido-estrutura, podem ser consultados em: Bazilevs et al. (2007), Zhang et al. (2007), Bazilevs et al. (2008), Bazilevs et al. (2010), Bazilevs e Akkerman (2010).

Outras metodologias aplicando diretamente funções *B-Splines* também tem se mostrado eficiente para a análise de problemas da dinâmica dos fluidos computacional, como pode ser visto nos trabalhos de Höllig, Reif e Wipper (2001), Bazilevs, Takizawa e Tezduyar (2013), Bazilevs et al. (2014).

### **1.2.2 Dinâmica de estruturas computacional considerando grandes deslocamentos**

A análise de interação fluido estrutura recai muitas vezes em problemas onde é necessário a consideração da não linearidade geométrica da estrutura devido aos grandes deslocamentos ou a efeitos acoplados de membrana e flexão. Dentro desse grupo de problemas pode-se citar *flutter* de grande amplitude, sistemas de desaceleração (paraquedas), aplicações biomédicas, entre outros.

A solução numérica de problemas estruturais é realizada tradicionalmente aplicando-se o método dos elementos finitos. Dentro do contexto da análise não-linear de estruturas utilizando MEF, a formulação corrotacional proposta por Truesdell (1955) é muito popular e descreve a mudança de configuração da estrutura decompondo os movimentos do sólido em rígido e de deformação, e descrevendo-os em termos dos deslocamentos e rotações nodais. Essa formulação, aplicada para pórticos, treliças e cascas, pode ser vista nos trabalhos de Hughes e Liu (1981a), Hughes e Liu (1981b), Argyris (1982), Simo e Fox (1989), Ibrahimbegovic e Taylor (2002), Battini e Pacoste (2006).

A formulação corrotacional, ao descrever rotações como parâmetros nodais, apresenta uma limitação para grandes deslocamentos, visto que não se pode aplicar a proprie-

dade comutativa a essa grandeza. Para resolver este problema, utilizam-se formulações linearizadas de Euler-Rodrigues para aproximação das rotações, conforme pode ser visto, por exemplo, em Gruttmann, Sauer e Wagner (2000), Coda e Paccola (2010).

A conservação da energia nessa formulação é um assunto muito controverso em problemas de dinâmica não-linear de cascas e barras. Isso porque no uso da formulação corrotacional, as rotações finitas, que são parâmetros nodais, apresentam objetividade apenas para pequenos incrementos, além disso, a aplicação da formulação resulta em matriz de massa variável, proibindo o uso de algumas processos de integração temporal bem estabelecidos (SANCHES; CODA, 2013).

Motivado por Bonet et al. (2000), Coda (2003) introduz uma formulação baseada em posições, sem rotações como parâmetros nodais. Essa formulação tem sido aplicada com sucesso para problemas de pórticos e cascas (GRECO; CODA, 2004; CODA; PACCOLA, 2010; CARRAZEDO; CODA, 2010; CODA; PACCOLA, 2011; SANCHES; CODA, 2016), incluindo problemas de interação fluido-estrutura (SANCHES; CODA, 2013; SANCHES; CODA, 2014; FERNANDES; CODA; SANCHES, 2019; AVANCINI; SANCHES, 2020).

Em Sanches e Coda (2013), os autores utilizam o integrador temporal de Newmark para análise de problemas dinâmicos não-lineares de estruturas de cascas no contexto da IFE com grandes deslocamentos e rotações de corpo rígido. Nesse trabalho, os autores apresentam a prova da conservação da quantidade de movimento linear e angular no uso dessa metodologia, e testam a estabilidade e conservação de energia para problemas com pequenas deformações.

Baseado no último trabalho citado, neste projeto, aplica-se a formulação Lagrangiana total para elementos de cascas baseada em posições e vetores generalizados, o que evita o uso de aproximações para grandes rotações e permite o uso do integrador de Newmark nos problemas dinâmicos da IFE que apresentam grandes deslocamentos e rotações.

### **1.2.3 Acoplamento fluido-estrutura**

O problema de interação fluido-estrutura pode ser descrito como um conjunto de equações diferenciais e condições de contornos associadas ao fluido e a estrutura que precisam ser satisfeitas ao mesmo tempo. Como sólidos e fluidos geralmente apresentam descrições matemáticas diferentes, sendo os sólidos tradicionalmente analisados por descrições Lagrangianas e os fluidos por descrições Eulerianas, um dos desafios da análise computacional de IFE é o acoplamento entre os dois meios. A solução de acoplamento a ser aplicada pode ser classificada em dois tipos de metodologias: métodos de rastreamento de interface (*interface tracking*) ou método de malhas adaptadas e métodos de captura de interface (*interface capturing*) ou método de malhas não-adaptadas (HOU; WANG; LAYTON, 2012; BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013b).

Nos métodos de rastreamento de interface, à medida em que a interface fluido-estrutura move, o domínio espacial do fluido muda seu formato, e a malha do fluido é

movimentada para acomodar a mudança da interface. Nesse tipo de metodologia duas possíveis técnicas podem ser aplicadas na modelagem do domínio fluido: a descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária (HUGHES; LIU; ZIMMERMAN, 1981; DONEA; GIULIANI; HALLEUX, 1982; KANCHI; MASUD, 2007) ou a formulação Espaço-Tempo (*Space-Time - ST*) (TEZDUYAR; BEHR; LIOU, 1992b; TEZDUYAR et al., 1992c; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2012), sendo que ambas permitem a movimentação arbitrária da discretização espacial. A principal vantagem do método de malhas adaptadas é a capacidade de controlar a dimensão da malha próxima a interface, bem como a conformidade dos domínios, e como consequência, garantir a precisão dos resultados nessa região.

A técnica empregada para movimentação de malhas é muito importante nesse tipo de problemas, pois deve ser eficiente de maneira a resultar em elementos que possuam uma mínima distorção e alteração de volume, e de forma a evitar que a malha necessite ser reconstruída. Diversas técnicas têm sido desenvolvidas para essa finalidade e podem ser divididas em três categorias. Na primeira os deslocamentos são impostos na interface entre estrutura e fluido e o campo de deslocamentos é obtido através da resolução de um problema de valor de contorno, formulando-se o problema através de analogia de molas (BOTTASSO; DETOMI; SERRA, 2005), sólido (JOHNSON; TEZDUYAR, 1994; STEIN; TEZDUYAR; BENNEY, 2004), suavização Laplaciana (KANCHI; MASUD, 2007), entre outras.

O segundo grupo são esquemas ponto-a-ponto, nos quais os deslocamentos da malha são diretamente interpolados a partir dos deslocamentos impostos na interface (DONEA; GIULIANI; HALLEUX, 1982; TEZDUYAR et al., 1993; SANCHES; CODA, 2014). Existem ainda métodos híbridos, que combinam vantagens de diferentes técnicas de movimentação de malhas (LEFRANÇOIS, 2008; FERNANDES; CODA; SANCHES, 2019).

Nos métodos rastreamento de interface, no entanto, em alguns casos o remalhamento torna-se inevitável, como em problemas com grandes distorções do domínio ou em problemas com mudanças topológicas, fazendo com que o custo computacional se torne muito elevado.

Por sua vez, os métodos de captura de interface são capazes de lidar com mudanças topológicas e grandes deslocamentos. Para isso, utilizam-se os chamados métodos de contornos imersos, introduzido por Peskin (1972), nos quais mantém-se a malha do fluido fixa e permite-se que a estrutura move-se dentro dessa malha. Nesses métodos é necessário que as posições da estrutura sejam identificadas dentro da malha do fluido a cada passo de tempo (MITTAL; IACCARINO, 2005; WANG et al., 2011). Uma das formas de identificação é realizada através de uma função distância assinalada do contorno da estrutura (método *level-set*). Nesse contexto, pode-se citar os trabalhos de Cirak e Radovitzky (2005) aplicados no âmbito dos volumes finitos e de Sanches e Coda (2014) e Akkerman et al. (2012) em elementos finitos. A principal desvantagem desse tipo de metodologia é que a resolução da discretização na camada limite fica limitada a discretização da malha de elementos finitos

onde a interface estiver posicionada no instante de análise.

A resolução dos problemas da IFE pode ser realizada através de duas variações principais: Métodos particionados (ROUX; GARAUD, 2009; BAZILEVS et al., 2011; SANCHES; CODA, 2013; SANCHES; CODA, 2014; FERNANDES; CODA; SANCHES, 2019) e métodos monolíticos (BLOM, 1998; HÜBNER; WALHORN; DINKLER, 2004; HRON; MADLIK, 2007; AVANCINI, 2023). No primeiro grupo, as equações para fluido e estrutura são resolvidas separadamente, sendo as condições de acoplamento transmitidas de um meio para o outro na interface, em geral, em termos de condições de Dirichlet-Neumann. No segundo grupo, de métodos monolíticos, fluido e estrutura são tratados como entidade única, com um único sistema de equações gerado para fluido e estrutura, sendo as condições de contorno de interface atendidas de maneira implícita durante o processo.

As técnicas de acoplamento particionado do tipo Dirichlet-Neumann caracterizam-se pela aplicação na interface de condições de contorno de Dirichlet no fluido (velocidades provenientes da movimentação da estrutura) e de Neumann no sólido (forças provenientes da variação dos campos de pressão e das tensões viscosas no fluido). Essas formulações podem ainda ser classificadas em fracas (explícitas), ou fortes (implícitas). No acoplamento particionado fraco, as equações são resolvidas de uma maneira desacoplada e só no passo de tempo seguinte são aplicadas as condições de contorno na interface. Para o acoplamento particionado forte usa-se de processos iterativos de acoplamento dentro de um passo de tempo. Esse tipo de resolução, aplicada nesse trabalho, também é conhecida como bloco-iterativa (BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013), na qual ocorre uma modificação da matriz tangente com relação ao método monolítico, sendo os sistemas do fluido, da estrutura e da malha tratados em blocos separados. Esse tipo de metodologia particionada facilita a solução dos problemas de IFE devido ao total desacoplamento entre os *solvers* de estrutura e de fluido.

Os esquemas particionados podem apresentar, entretanto, algumas desvantagens, como a defasagem que pode ocorrer entre as integrações temporais do fluido e da estrutura quando as condições de contorno na interface entre fluido e estrutura são aplicadas de maneira explícita, e, ainda, instabilidades numéricas como o efeito de massa adicionada (FELIPPA; PARK; FARHAT, 2001). Em escoamentos governados pelo campo de pressão, a ação do fluido sobre a estrutura funciona como uma massa adicional, alterando sua inércia (TALLEC; MOURO, 2001). Em escoamentos incompressíveis, nos quais a densidade do sólido e do fluido são muito próximas ou quando a estrutura é muito esbelta esse fenômeno pode ocasionar instabilidades numéricas em técnicas de acoplamento particionado fraco ou dificuldades de convergência no caso da esquema particionado forte.

Uma das formas de contornar esse problema é a alteração do esquema de acoplamento do tipo Dirichlet-Neumann para condições de contorno de Robin, que consiste em uma combinação linear das condições de Dirichlet e Neumann, ver por exemplo, Badia,

Nobile e Vergara (2008). Outra possibilidade é a metodologia introduzida por Tezduyar, Behr e Liou (1992b), chamada de *augmented mass* que consiste em multiplicar a massa da matriz tangente respectiva à estrutura por um fator que dependerá do tipo de problema em análise. Cabe ressaltar ainda, para os casos de acoplamento do tipo bloco-iterativo, o uso da relaxação de Aitken, proposto por Irons e Tuck (1969), e que demonstra-se muito eficiente em trabalhos sequentes (KÜTTLER; WALL, 2008; FERNANDES; CODA; SANCHES, 2019).

### 1.2.4 Métodos Multiescala e Técnicas de partição de domínios

Em diversas áreas da engenharia se faz necessário levar em consideração efeitos localizados, geralmente de menor escala, em um modelo global. Dentro da análise estrutural pode-se citar problemas de fissuras, orifícios, imperfeições; na mecânica dos fluidos, problemas de camada limite, a interface entre dois fluidos; e na interação fluido-estrutura a interface entre estrutura-fluido, entre outros.

Para uma solução precisa desse tipo de problemas, faz-se necessário a aplicação de técnicas que levem em consideração os efeitos locais, mas ao mesmo tempo não tornem a simulação inviável devido ao seu custo computacional.

O método dos elementos finitos, tradicionalmente aplicado para as análises numéricas de equações diferenciais, foi desenvolvido a partir de um modelo mecânico de meio contínuo, apresentando pouca flexibilidade para a consideração desses efeitos. Os refinamentos  $p$  e  $h$  são metodologias eficientes, entretanto, para alguns problemas dinâmicos, demandam técnicas de remalhamento, e podem ser muito caros computacionalmente.

Em busca de aprimorar o Método dos Elementos Finitos (MEF), diversas propostas têm sido apresentadas para aumentar a flexibilidade na resolução de problemas multiescala, como pode-se citar, por exemplo, o caso dos elementos finitos difusos (NAYROLES; TOUZOT; VILLON, 1992) onde o conceito de partículas foi introduzido, resultando em uma generalização do método dos elementos finitos sem a necessidade de malha. Ou ainda, o método de Galerkin livre de elementos que é uma combinação entre métodos sem malha e o MEF (ver Belytschko et al. (1995)). Com esse mesmo intuito pode-se citar o método de partição da unidade (MELENK; BABUSKA, 1996), o método dos elementos finitos generalizado (G-FEM) (STROUBOULIS; COPPS; BABUSKA, 2001) e o método dos elementos finitos estendido (X-FEM) (MOËS et al., 2003), os quais introduzem o enriquecimento à base aproximadora por meio de funções capazes de capturar efeitos localizados. Os métodos G-FEM e X-FEM são, entretanto, fortemente dependentes do conhecimento local da solução, ou de pelo menos, seu aspecto espacial.

Pesquisas como as de Farhat, Harari e Franca (2001) propõem enriquecimentos descontínuos nos espaços funcionais, incorporando modos regulares por meio de formulações discretas de Galerkin e multiplicadores de Lagrange. Além disso, métodos de discretização que não dependem diretamente da interface, fundamentados na técnica de Nitsche, foram

desenvolvidos para lidar com problemas envolvendo descontinuidades materiais, como demonstrado no estudo de Hansbo e Hansbo (2002).

Dentro do contexto da mecânica dos fluidos, Tezduyar, Aliabadi e Behr (1998), Tezduyar e Aliabadi (2000) introduziram a técnica *EDICT (Enhanced-Discretization Interface-Capturing Technique)* para captura de interface com aprimoramento da discretização para problemas bifásicos ou com superfície livre. Para isso, nessa região de interface definem-se um subconjunto de elementos (sub-malhas), que posteriormente são refinados sucessivamente, de modo a melhorar a precisão da solução. Como resultado obtém-se uma discretização melhorada para capturar a interface, entretanto, as sub-malhas provenientes, não representam com exatidão descontinuidades na interface. Uma versão mais eficiente dessa técnica foi proposta em Tezduyar e Sathe (2005), na qual um método iterativo multinível é projetado para a captura de efeitos do escoamento em pequenas escalas, permitindo a simulação de problemas mais complexos.

No âmbito da DFC pode-se citar ainda o método Variacional Multiescala (VMS) (HUGHES et al., 1998) que utiliza o conceito de micromodelos e macromodelos, sendo que os micromodelos capturam efeitos em pequenas escalas de maneira a corrigir os macromodelos.

Outro grupo de métodos proposto para flexibilizar o MEF em problemas com efeitos locais são os baseados em superposição de um domínio local a um domínio global. A técnica Chimera definida por Benek et al. (1986) traz a introdução de orifícios na região de superposição dos modelos, definindo um contorno artificial para o modelo global, e a transmissão de dados ocorre através desses contornos artificiais gerados. O método S (FISH, 1992) trata o modelo local como um enriquecimento ao global, e a solução é obtida através da soma dos campos de interesse de cada domínio.

O método Arlequin (BEN DHIA, 1998; BEN DHIA; RATEAU, 2001), por sua vez também baseia-se na superposição de modelos de modo a combinar um modelo local mais refinado a um global, no entanto, esse processo é realizado através do cruzamento e colagem entre os modelos em uma zona de superposição e fazendo-se o uso para tal de multiplicadores de Lagrange. O método Arlequin vem sendo utilizado amplamente em diversas áreas da mecânica dos sólidos (ver, por exemplo, Dhia e Jamond (2010), Caleyron et al. (2013), Dhia e Torkhani (2011), Bauman et al. (2008), Biscani et al. (2016), Jamond e Ben Dhia (2013)), na DFC e IFE, entretanto, ainda é pouco explorado. Fernier, Faucher e Jamond (2020) aplica a metodologia para análise de escoamentos compressíveis, e Fernandes et al. (2020) para análise de escoamentos incompressíveis e de IFE para problemas bidimensionais. Nesse trabalho será feita uma extensão do trabalho de Fernandes (2020) para problemas tridimensionais de IFE e levando em consideração diferentes discretizações matemáticas para as malhas global e local.

## 1.3 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho é o desenvolvimento e implementação computacional de uma formulação para análise de problemas tridimensionais de interação fluido-estrutura. A formulação deve permitir a consideração de efeitos localizados por meio de uma técnica de partição de domínios, além de viabilizar o uso combinado de aproximações por elementos finitos clássicos e análise isogeométrica.

Para tal finalidade, enumeram-se os seguintes objetivos específicos:

- Expansão de um código computacional para análise de escoamentos incompressíveis baseado em método dos elementos finitos tradicional para um código que contemple análise de problemas da DFC tridimensionais e que inclua a possibilidade de discretização através de análise isogeométrica;
- Estudo de técnicas de partição de domínios para levar em conta efeitos localizados no âmbito da DFC;
- Implementação da técnica de partição de domínios no código de dinâmica dos fluidos computacional contemplando problemas da DFC com contornos móveis;
- Estudo aprofundado de um código pré-desenvolvido de análise não-linear geométrica de estruturas de cascas utilizando o MEF posicional;
- Acoplamento entre os códigos computacionais da DFC e de sólido através do emprego de uma técnica particionada do tipo bloco-iterativa;
- Validação dos códigos computacionais através da simulação de problemas da dinâmica dos fluidos, dinâmica das estruturas e problemas IFE.

## 1.4 Metodologia

Em função da complexidade envolvida na implementação computacional dos códigos desenvolvidos optou-se pelo uso da linguagem de programação C++ orientada a objetos, visto que esta linguagem já vem sendo utilizada com sucesso no grupo de trabalho da presente estudante de doutorado. Além disso, a programação orientada a objetos proporciona uma maior modularidade dos códigos desenvolvidos e uma maior facilidade para o acoplamento entre módulos distintos. Todas as implementações são realizadas utilizando bibliotecas, compiladores e softwares livres ou de código aberto, em ambiente Linux.

O projeto de pesquisa iniciou-se pela dinâmica dos fluidos computacional tendo como base os desenvolvimentos realizados em Tonon (2016) e um código computacional de dinâmica dos fluidos para análises de escoamentos incompressíveis bidimensionais

desenvolvido por Fernandes (2016) e Fernandes (2020) em seus trabalhos de mestrado e doutorado respectivamente. Primeiramente, ampliou-se o código pré-existente de maneira que o mesmo contemplasse análises de problemas tridimensionais. Na sequência, incluiu-se a este código baseado em método dos elementos finitos clássico a possibilidade do uso de análise isogeométrica.

A partir desse ponto, iniciou-se o processo de estudo da metodologia de decomposição de domínios e sua implementação para problemas bidimensionais da DFC foi realizada, conforme a formulação apresentada no Cap. 5. Devido a dificuldades encontradas para simulação de problemas mais complexos, o método Arlequin (BEN DHIA, 1998), em sua versão estabilizada conforme o trabalho de Fernandes (2020), foi estudado e implementado computacionalmente para problemas bidimensionais e tridimensionais da DFC.

Para a análise dos problemas não-lineares geométricos de estruturas de cascas baseado no MEF posicional, estudaram-se os textos apresentados em Sanches e Coda (2010a), Sanches e Coda (2010b) e Coda (2018), e empregou-se um código computacional cedido pelo pesquisador Rosicley Júnior Rodrigues Rosa desenvolvido em seu trabalho de mestrado (ROSA, 2021) com linguagem de programação em C++ orientada a objeto e Phyton.

Na sequência deste projeto, realizou-se o acoplamento entre os códigos de fluidos e de estrutura, utilizando-se a metodologia de acoplamento particionado forte através da técnica bloco-iterativa.

Para maior eficiência na resolução dos problemas, os códigos da DFC, de estruturas e de IFE apresentam paralelização em protocolo MPI (*Message passing interface*). O processamento paralelo acontece a partir da divisão do domínio de elementos finitos entre os processos, o qual é realizado através da biblioteca METIS<sup>1</sup>. O METIS proporciona divisão do domínio de elementos finitos em número semelhantes de elementos entre os processos e agrupando-os por proximidade geométrica.

É importante ressaltar que os códigos contam com a interface e implementações do pacote PETSc<sup>2</sup>. Essa biblioteca é desenvolvida em código aberto e possui uma grande quantidade de método iterativos e diretos para solução de sistemas algébricos e também pré-condicionadores. Além do mais, o PETSc possui uma interface bem desenvolvida com outras bibliotecas, como por exemplo, com o METIS citado anteriormente.

As malhas de elementos finitos utilizadas nas análises são obtidas através do software GMSH<sup>3</sup> e a etapa de pós-processamento e visualização é realizada no Kitware Paraview<sup>4</sup> e Gnuplot<sup>5</sup>. Para problemas aplicando a análise isogeométrica, a etapa de pré-processamento é realizada com um código desenvolvido pela autora e seu orientador

---

<sup>1</sup> Disponível em: <<http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/metis/metis/overview>>

<sup>2</sup> Disponível em: <<http://https://www.mcs.anl.gov/petsc/>>

<sup>3</sup> Disponível em:<<https://gmsh.info/>>

<sup>4</sup> Disponível em:<<http://https://www.paraview.org/>>

<sup>5</sup> Disponível em:<<https://gnuplot.info/>>

durante seu trabalho de mestrado (TONON, 2016).

No que diz respeito à infraestrutura, utiliza-se o *cluster* disponível no Laboratório de Informática e de Mecânica Computacional (LIMC) do SET para a simulação de problemas mais complexos, e um computador pessoal para a simulação de problemas mais simples.

## 1.5 Justificativa

Os problemas de interação fluido-estrutura estão presentes em todas as partes, na engenharia, nas ciências, na medicina e também no dia-a-dia das pessoas. O projeto de estruturas cada vez mais esbeltas, a necessidade de obtenção de energia elétrica a partir de fontes de energia limpa, como as usinas eólicas, o estudo de *airbags*, o bombeamento do sangue pelos ventrículos do coração humano e o abrir e fechar das válvulas do coração, são apenas alguns dos exemplos que demonstram a necessidade de se aprofundar nos estudos da interação fluido-estrutura computacional.

Enquanto que no campo engenharia estrutural os pacotes comerciais baseados em MEF estão em constante evolução, e podem resolver uma grande gama de problemas, os softwares que tratam de problemas da dinâmica dos fluidos computacional e de problemas multifísicos, como os problemas da IFE, ainda precisam evoluir muito para suprirem a demanda dos pesquisadores. A simulação numérica de problemas reais de IFE é ainda muito difícil de ser realizada em função do elevado custo computacional, e muitas vezes, devido a grande complexidade dos problemas, ainda é impossível simulá-los sem que sejam realizadas grandes simplificações. Dessa forma, os ensaios experimentais, ainda são em grande parte das vezes, a melhor forma de se estudar o comportamento de IFE, embora, sejam muito custosos e demorados.

Dentro desse contexto, muitos pesquisadores tem se esforçado para que a análise de problemas da IFE computacionalmente seja possível e eficiente. Com essa mesma proposta, nesse projeto pretende-se desenvolver uma ferramenta computacional eficiente para análise tridimensional de problemas de interação fluido-estrutura utilizando uma combinação entre método dos elementos finitos e análise isogeométrica. Nesse trabalho, será aplicado o método Arlequin para a superposição de malhas no modelo do fluido, com uma malha local mais refinada e deformável em contato com a superfície da estrutura sobreposta a uma malha global fixa e com discretização mais grosseira. Dessa forma, ainda que a estrutura mude drasticamente, não se faz necessário o remalhamento de toda a malha que compõe o fluido, diminuindo assim o custo computacional. Esta proposta compartilha as vantagens dos métodos de malhas adaptadas e de malhas não adaptadas, possuindo a possibilidade de alcançar uma ótima convergência.



CAPÍTULO

---

**2**

# DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL

---



---

O escoamento isotérmico de um fluido newtoniano é descrito pelas equações advindas da conservação da quantidade de movimento, ou de Navier-Stokes, e da conservação de massa. Nos casos em que ocorram variações significativas no campo de temperatura, ou em escoamentos compressíveis, a equação da conservação de energia deve ser adicionada ao sistema. Essas equações governantes, juntamente com as relações constitutivas, resultam em um sistema de equações diferenciais não lineares que descrevem o comportamento do escoamento no tempo e no espaço.

Neste trabalho, são investigados escoamentos incompressíveis, isotérmicos e com contornos móveis. As seções seguintes apresentam a abordagem adotada para a resolução desse tipo de problema, bem como sua implementação computacional. Utiliza-se uma formulação Arbitrária Euleriana-Lagrangiana (ALE) para representar as equações, e a discretização espacial é realizada por meio do método dos elementos finitos (FEM) ou da análise isogeométrica (IGA).

Para tratar questões numéricas recorrentes nesse sistema de equações, como as oscilações espúrias em casos de convecção dominante, típicas da aplicação do método dos resíduos ponderados baseado na formulação clássica de Galerkin, emprega-se a metodologia SUPG. Adicionalmente, a estabilização PSPG é aplicada com o objetivo de contornar a condição imposta pelo critério de *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi* (LBB). A integração no tempo é conduzida por meio do método  $\alpha$ -generalizado.

Ao final deste capítulo, é apresentado um algoritmo que detalha o esquema computacional de solução dos problemas da DFC, seguido pela resolução de alguns casos clássicos, utilizados como verificação da metodologia proposta.

## 2.1 Equações governantes na descrição Euleriana

### 2.1.1 Equação da conservação da massa

Considere um volume de controle infinitesimal fixo no espaço, permeável a matéria e submetido a uma escoamento de velocidade  $\mathbf{u}$ , com componentes  $u_1, u_2$ , e  $u_3$  (conforme fig. 2.1). Para um intervalo de tempo infinitesimal  $dt$ , a lei da conservação da massa impõe que a variação de massa dentro do volume de controle seja igual ao fluxo de massa que atravessa suas fronteiras, que pode ser expresso matematicamente da seguinte forma:

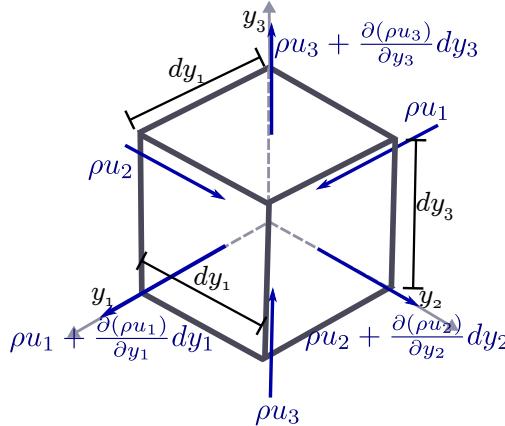


Figura 2.1 – Volume de controle infinitesimal: Fluxo de massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dV = (\rho u_1 dA_1 + \rho u_2 dA_2 + \rho u_3 dA_3) - \left( \left( \rho u_1 + \frac{\partial \rho u_1}{\partial y_1} dy_1 \right) dA_1 + \left( \rho u_2 + \frac{\partial \rho u_2}{\partial y_2} dy_2 \right) dA_2 + \left( \rho u_3 + \frac{\partial \rho u_3}{\partial y_3} dy_3 \right) dA_3 \right), \quad (2.1)$$

com  $\rho$  a massa específica do fluido e  $dA_i$  a área referente à face ortogonal ao eixo  $y_i$ . Considerando que  $dV = dy_1 dA_1 = dy_2 dA_2 = dy_3 dA_3$  e manipulando-se algebraicamente a Eq. 2.1 chega-se a seguinte expressão:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial \rho u_1}{\partial y_1} - \frac{\partial \rho u_2}{\partial y_2} - \frac{\partial \rho u_3}{\partial y_3}. \quad (2.2)$$

Para escoamentos incompressíveis, quando  $\rho$  é constante ao longo do tempo, a equação fica reduzida a:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \frac{\partial u_2}{\partial y_2} + \frac{\partial u_3}{\partial y_3} = 0, \quad (2.3)$$

ou ainda:

$$\nabla_y \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.4)$$

### 2.1.2 Equação da quantidade de movimento

Para um volume de controle infinitesimal, a lei da conservação da quantidade de movimento afirma que a variação temporal da quantidade de movimento no interior do volume é determinada pela diferença entre o fluxo de quantidade de movimento que entra e o que sai pelas suas fronteiras, somada à resultante das forças aplicadas sobre o volume de controle.

Para chegar-se à equação da quantidade de movimento em sua forma conservativa partindo desse princípio, inicia-se com a avaliação das forças que atuam sobre um volume de controle infinitesimal no instante atual. Considerando o equilíbrio das forças externas e internas na direção  $y_1$ , de acordo o volume apresentado na Fig. 2.2, chega-se na seguinte relação:

$$\begin{aligned} F_1 = & -(\sigma_{11}dy_2dy_3 + \sigma_{12}dy_1dy_3 + \sigma_{13}dy_1dy_2) + \\ & \left( \left( \sigma_{11} + \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial y_1}dy_1 \right) dy_2dy_3 + \left( \sigma_{12} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y_2}dy_2 \right) dy_1dy_3 + \left( \sigma_{13} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial y_3}dy_3 \right) dy_1dy_2 \right) + \\ & b_1dy_1dy_2dy_3, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde  $F_1$  representa a resultante das forças externas na direção  $y_1$ ;  $\sigma_{ij}$  são as componentes  $ij$  do tensor de tensões Cauchy ( $\boldsymbol{\sigma}$ ); e  $b_1$  representa a componente na direção  $y_1$  do vetor força de campo por unidade de volume  $\mathbf{b}$ . Dividindo-se Eq. 2.5 por  $dV$  e efetuando as subtrações, têm-se a força resultante por unidade de volume ( $q_1$ ) dada por:

$$q_1 = \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y_2} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial y_3} + b_1. \quad (2.6)$$

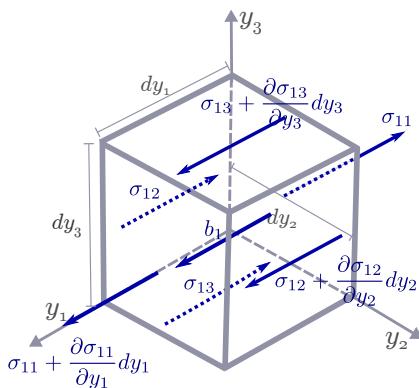


Figura 2.2 – Volume de controle infinitesimal: Componentes de tensão e força na direção  $y_1$

Considerando-se o equilíbrio das forças nas direções  $y_2$  e  $y_3$ , pode-se escrever também:

$$q_2 = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y_3} + b_2, \quad (2.7)$$

$$q_3 = \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial y_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial y_3} + b_3, \quad (2.8)$$

ou ainda:

$$\mathbf{q} = \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}. \quad (2.9)$$

Realizando-se o balanço da quantidade de movimento no volume de controle infinitesimal da Fig. 2.3 e aplicando-se a lei da conservação da quantidade de movimento, pode-se chegar a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} dV = & u_1 \rho \mathbf{u} dA_1 + u_2 \rho \mathbf{u} dA_2 + u_3 \rho \mathbf{u} dA_3 - \\ & \left( \left( u_1 \rho \mathbf{u} + \frac{\partial u_1 \rho \mathbf{u}}{\partial y_1} dy_1 \right) dA_1 + \left( u_2 \rho \mathbf{u} + \frac{\partial u_2 \rho \mathbf{u}}{\partial y_2} dy_2 \right) dA_2 + \right. \\ & \left. \left( u_3 \rho \mathbf{u} + \frac{\partial u_3 \rho \mathbf{u}}{\partial y_3} dy_3 \right) dA_3 \right) + \mathbf{q} dV, \end{aligned} \quad (2.10)$$

dividindo-se a Eq. 2.10 por  $dV$  e efetuando-se as subtrações, chega-se a:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\partial u_1 \rho \mathbf{u}}{\partial y_1} - \frac{\partial u_2 \rho \mathbf{u}}{\partial y_2} - \frac{\partial u_3 \rho \mathbf{u}}{\partial y_3} + \mathbf{q}, \quad (2.11)$$

ou ainda:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla_y \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mathbf{f} \right) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (2.12)$$

com  $\mathbf{f} = \rho \mathbf{b}$  que representa a força de campo por unidade de massa.

Da consideração da equação da continuidade, a Eq. 2.12 pode ser rescrita ainda em sua forma convectiva como:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla_y) \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (2.13)$$

O tensor de tensões de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  é definido para fluidos newtonianos incompressíveis pela seguinte relação constitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \quad (2.14)$$

onde  $p$  representa a pressão,  $\mu$  a viscosidade dinâmica do fluido e  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é o tensor taxa de deformação, definido como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left( \nabla_y \mathbf{u} + \nabla_y \mathbf{u}^T \right). \quad (2.15)$$

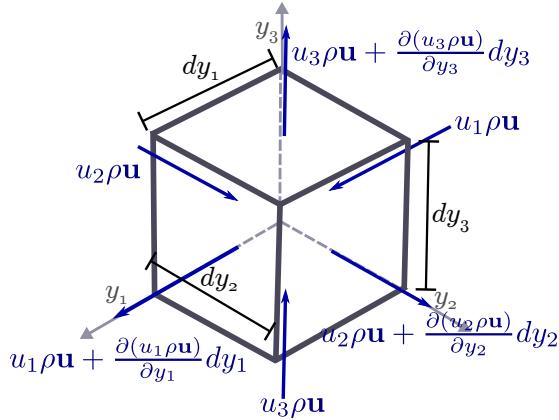


Figura 2.3 – Volume de controle infinitesimal: Fluxo de quantidade de Movimento

### 2.1.3 Formulação forte da mecânica dos fluidos

Seja  $\Omega \in \mathbb{R}^{nsd}$ , com  $n_{sd} = 2, 3$ , o domínio espacial que define o escoamento do fluido com contorno  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ , no instante  $t \in (0, T)$  (ver Fig. 2.4).

Para escoamentos incompressíveis isotérmicos o fluido possui movimento descrito pelas equações de Navier-Stokes (Eq. ??) e da conservação de massa (Eq. 2.4). Para completar a formulação da mecânica dos fluidos, condições de contorno devem ser especificadas. Em geral, em uma dada parte do contorno espacial, condições de contorno essenciais (Dirichlet) ou naturais (Neumann) são aplicadas. Dessa forma, o escoamento é governado pelo seguinte conjunto de equações:

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ em } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ em } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_D \text{ em } \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{h} \text{ em } \Gamma_N, \end{cases} \quad (2.16)$$

sendo  $\Gamma_D$  a porção do contorno com condições de contorno de Dirichlet, representadas pelo campo de velocidades  $\mathbf{u}_D$ , e  $\Gamma_N$  aquela com condições de contorno de Neumann, descritas pelas forças de superfície  $\mathbf{h}$ . A variável  $\mathbf{n}$  representa o vetor unitário normal ao contorno  $\Gamma_N$ .

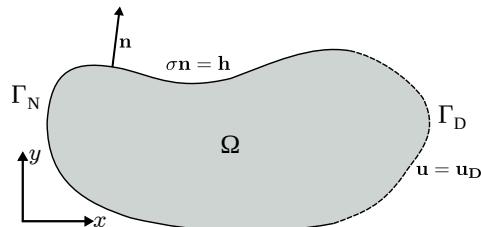


Figura 2.4 – Domínio para o problema da dinâmica dos fluidos computacional

### 2.1.4 Forma Fraca das equações governantes

Tomando-se a forma forte das equações governantes, aplica-se o método de resíduos ponderados para se chegar à forma fraca e proceder com a discretização espacial. Os espaços de dimensão finita das funções tentativa que descrevem a velocidade e a pressão são chamados de  $\mathcal{S}_u$  e  $\mathcal{S}_p$  respectivamente, e definidos como:

$$\mathcal{S}_u = \left\{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u}(\cdot, t) \in (H^1(\Omega))^{n_{sd}}, \mathbf{u} = \mathbf{u}_D \text{ em } \Gamma_D \right\} \quad (2.17)$$

e

$$\mathcal{S}_p = \left\{ p \mid p(\cdot) \in L^2(\Omega), \int_{\Omega_t} p \, d\Omega = 0 \text{ se } \Gamma = \Gamma_N \right\}, \quad (2.18)$$

sendo  $(H^1(\Omega))^{n_{sd}}$  o espaço de funções vetoriais com derivadas de quadrado integrável sobre  $\Omega$  e  $L^2(\Omega)$  o espaço de funções escalares que são de quadrado integrável sobre  $\Omega$ .

O espaço das funções teste ou funções peso das equações da quantidade de movimento e da continuidade são definidos respectivamente por:

$$\mathcal{V}_u = \left\{ \mathbf{w} \mid \mathbf{w}(\cdot) \in (H^1(\Omega))^{n_{sd}}, \mathbf{w} = 0 \text{ em } \Gamma_D \right\}, \quad (2.19)$$

$$\mathcal{V}_p = \mathcal{S}_p. \quad (2.20)$$

Aplicando-se o método dos resíduos ponderados sobre as equações Eq. (??) e Eq.(2.4), integrando-se por partes o termo referente ao tensor de tensões de Cauchy, empregando-se o teorema da divergência e levando-se em consideração a condição de homogeneidade da função  $\mathbf{w}$  sobre o contorno  $\Gamma_D$ , obtém-se a forma fraca. A solução do problema consiste então em encontrar  $\mathbf{u} \in \mathcal{S}_u$  e  $p \in \mathcal{S}_p$ , de tal modo que  $\forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}_u$  e  $q \in \mathcal{V}_p$ , as seguintes expressões sejam verdadeiras:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) : \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} = 0, \quad (2.21)$$

$$\int_{\Omega} q (\nabla \cdot \mathbf{u}) d\Omega = 0. \quad (2.22)$$

### 2.1.5 Método dos elementos finitos aplicado à Mecânica dos Fluidos

Antes de prosseguir com a discretização espacial da forma fraca do conjunto de equações da Mecânica dos Fluidos, é fundamental compreender os princípios básicos do Método dos Elementos Finitos. A discretização espacial tanto pelo método dos elementos finitos, como pela técnica de análise isogeométrica (Cap. 3), consiste em, dado um problema com domínio  $\Omega$ , dividi-lo em subdomínios  $\Omega^e$ , também chamados de elementos ou células, de forma que:

$$\Omega \approx \Omega^h = \bigcup_{e=1}^{nel} \Omega^e, \quad (2.23)$$

onde  $\Omega^h$  é o domínio discretizado por subdomínios, com o índice  $h$  se referindo ao tamanho representativo dos elementos, e  $nel$  representando o número total de elementos.

Da mesma forma o contorno do domínio também é discretizado da seguinte forma:

$$\Gamma \approx \Gamma^h = \bigcup_{b=1}^{neb} \Gamma^b, \quad (2.24)$$

onde  $neb$  representa o número de elementos que formam o contorno.

No Método dos Elementos Finitos, cada subdomínio, denominado elemento, é composto por um conjunto de pontos, chamados nós. As variáveis de interesse do problema, que incluem a geometria na abordagem isoparamétrica, são aproximadas pela combinação linear de um número finito de funções associadas aos nós, chamadas funções de forma, multiplicadas por variáveis chamadas parâmetros nodais. As funções de forma utilizadas no Método dos Elementos Finitos satisfazem, em geral, a propriedade de partição da unidade, ou seja, a soma das funções de forma associadas a todos os nós de um elemento resulta em 1 para qualquer ponto dentro do domínio paramétrico do elemento. A técnica de elementos finitos pode ser estudada nos diversos livros disponíveis sobre o assunto, tais como Zienkiewicz, Taylor e Nithiarasu (2005a), Reddy (2006).

Nesse trabalho são utilizadas funções de forma quadráticas do tipo polinômios de Lagrange, sendo empregados elementos isoparamétricos triangulares para o caso 2D e tetraédricos para o caso 3D. Na Fig. 2.5a e Fig. 2.5b, pode-se observar os elementos finitos 2D e 3D respectivamente bem como os espaços paramétricos adimensionais adotados para definir as funções de forma.

Adotar a abordagem isoparamétrica implica que a geometria do problema é descrita também pela combinação entre funções de forma e as coordenadas nodais da malha, conforme equação abaixo:

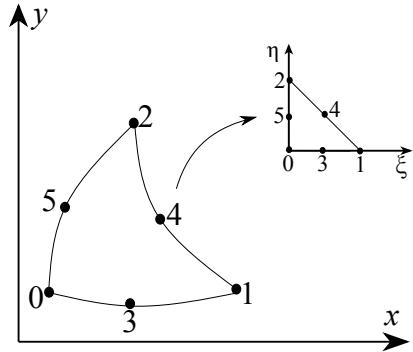
$$\mathbf{x}^h = \sum_{A=1}^{N_{nos}} \mathbf{x}_A N_A(\mathbf{x}), \quad (2.25)$$

sendo que para uma geometria tridimensional o vetor  $\mathbf{x}$  possui coordenadas  $x, y$  e  $z$ , as quais representam as posições físicas do domínio;  $A$  representa o índice dos nós da malha,  $N_{nos}$  o número total de nós e  $N$  as funções de forma da discretização.

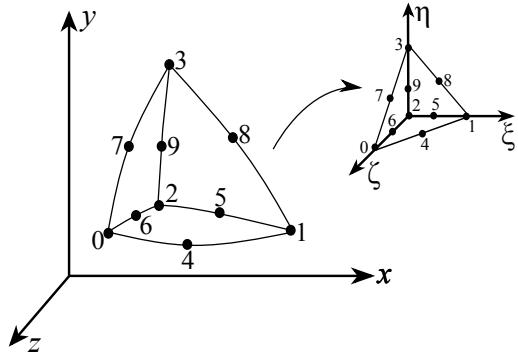
A discretização das variáveis de interesse para DFC no contexto do método dos elementos finitos serão apresentados no Cap. 2.1.6.

### 2.1.6 Discretização Espacial

Os espaços de função tentativa para velocidade e pressão, bem como as funções teste, no contexto dos método dos elementos finitos, são dados pela combinação linear de



(a) Elemento Finito 2d.



(b) Elemento Finito 3d.

Figura 2.5 – Elementos Finitos: representação espacial e paramétrica

parâmetros nodais com funções de forma definidas sobre cada subdomínio, atendendo à partição da unidade, de forma que o problema da dinâmica dos fluidos fica definido como: encontrar  $\mathbf{u}^h \in \mathcal{S}_u^h$  e  $p^h \in \mathcal{S}_p^h$ , de tal modo que  $\forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_u^h$  e  $q^h \in \mathcal{V}_p^h$  a seguinte expressão seja verdadeira:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{w}^h \cdot \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} + \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_N} \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{h}^h + \int_{\Omega} q^h (\nabla \cdot \mathbf{u}^h) d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{A=1}^{N_{nos}} \mathbf{u}_A(t) N_A(\mathbf{x}), \quad (2.27)$$

$$p^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{A=1}^{N_{nos}} p_A(t) N_A(\mathbf{x}), \quad (2.28)$$

$$\mathbf{w}^h(\mathbf{x}) = \sum_{A=1}^{N_{nos}} \mathbf{w}_A N_A(\mathbf{x}), \quad (2.29)$$

$$q^h(\mathbf{x}) = \sum_{A=1}^{N_{nos}} q_A N_A(\mathbf{x}), \quad (2.30)$$

sendo as variáveis  $\mathbf{w}_A$  e  $q_A$  arbitrárias nas aproximações.

No entanto, as formulações obtidas pelo método de Galerkin são conhecidas por apresentarem oscilações espúrias em escoamentos dominados pela convecção. Uma das formas de se lidar com esse problema é a utilização de métodos estabilizados, como *Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin* (SUPG) (BROOKS; HUGHES, 1982; HUGHES; TEZDUYAR, 1984), aplicado nesse trabalho. Essa metodologia consiste em adicionar à equação da quantidade de movimento, o seu resíduo ponderado por  $\tau_{\text{SUPG}} (\mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{w}^h)$ , onde  $\tau_{\text{SUPG}}$  é um parâmetro de estabilização. Do ponto de vista numérico a aplicação de  $\tau_{\text{SUPG}} (\mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{w}^h)$  sobre o termo convectivo da equação da quantidade de movimento dá origem a um termo difusivo adicional, cuja viscosidade tem magnitude  $\tau_{\text{SUPG}}$ , e é responsável por garantir a estabilidade numérica em problemas com convecção dominante.

Para os problemas de escoamentos incompressíveis aqui analisados, deve-se levar em conta que os campos de velocidade e pressão não podem ser aproximados arbitrariamente, podendo levar à ocorrência de oscilações espúrias no campo de pressão. Para evitar isso, podem ser escolhidos elementos Taylor-Hood que obedecam, à condição de *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi* (LBB) (BREZZI; FORTIN, 1991; ZIENKIEWICZ; TAYLOR; NITHIA-RASU, 2005; STRANG; FIX, 2008), ou pode-se recorrer a um método estabilizado.

Neste trabalho, para estabilização da pressão, emprega-se a técnica *Pressure Stabilization Petrov Galerkin* (PSPG) (HUGHES; FRANCA; BALESTRA, 1986; TEZDUYAR et al., 1992a). Essa técnica consiste em adicionar à equação da continuidade, o resíduo da equação da quantidade de movimento ponderada pela função  $\tau_{\text{PSPG}} \left( \frac{\nabla q^h}{\rho} \right)$ , onde  $\tau_{\text{PSPG}}$  é um parâmetro de estabilização. Essa estabilização cria termos dependentes da pressão na equação da continuidade, responsáveis pela flexibilização do campo de pressão e por contornar a condição LBB.

Por fim, para prover maior estabilização em problemas com formação de vórtices, adiciona-se à equação da quantidade de movimento o resíduo da equação da continuidade ponderado por  $\nu_{\text{LSIC}} \rho (\nabla \cdot \mathbf{w}^h)$  (TEZDUYAR; OSAWA, 2000), sendo  $\nu_{\text{LSIC}}$  um parâmetro de estabilização. A estabilização  $\nu_{\text{LSIC}}$  dá origem a um termo do tipo mínimos quadrados, e que também introduz na formulação uma difusão artificial.

Nota-se que a consistência da formulação estabilizada é garantida, uma vez que são adicionados às equações seus resíduos ponderados. Os parâmetros de estabilização  $\tau_{\text{SUPG}}$ ,  $\tau_{\text{PSPG}}$  e  $\nu_{\text{LSIC}}$  têm função de proporcionar uma solução estável e otimizar a convergência durante o refinamento de malha. A obtenção dos parâmetros estabilizadores será discutida na Seção 2.3.

Por fim, o problema da dinâmica dos fluidos passa a ser a determinação de  $\mathbf{u}^h \in \mathcal{S}_u^h$  e  $p^h \in \mathcal{S}_p^h$ , de tal modo que  $\forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_u^h$  e  $q^h \in \mathcal{V}_p^h$  as seguintes expressões sejam verdadeiras:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \mathbf{w}^h \cdot \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} + \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\
& - \int_{\Gamma_N} \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{h}^h d\Gamma_N \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{SUPG} (\mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{w}^h) \cdot \mathbf{r}_M (\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \rho \nu_{LSIC} \nabla \cdot \mathbf{w}^h r_C (\mathbf{u}^h) d\Omega = 0,
\end{aligned} \tag{2.31}$$

e

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} q^h \nabla \cdot \mathbf{u}^h d\Omega \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{PSPG} \left( \frac{\nabla q^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_M (\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega = 0,
\end{aligned} \tag{2.32}$$

onde  $\mathbf{r}_M$  e  $r_C$  são os resíduos da equação da quantidade de movimento e da equação da continuidade, respectivamente, dados por:

$$\mathbf{r}_M (\mathbf{u}^h, p^h) = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} + \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{u}^h, p^h), \tag{2.33}$$

$$r_C (\mathbf{u}^h) = \nabla \cdot \mathbf{u}^h. \tag{2.34}$$

Visto que existem funções teste separadas para a velocidade e pressão, pode-se definir dois vetores residuais correspondentes a equação da quantidade de movimento ( $\mathbf{R}_M$ ) e a equação da continuidade ( $\mathbf{R}_C$ ). Considerando a arbitrariedade de  $\mathbf{w}_A$  e  $q_A$ , têm-se:

$$\mathbf{R}_M = [(\mathbf{R}_M)_{A,i}], \tag{2.35}$$

$$\mathbf{R}_C = [(\mathbf{R}_C)_A], \tag{2.36}$$

com:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{R}_M)_{A,i} &= \int_{\Omega} N_A \mathbf{e}_i \cdot \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} + \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(N_A \mathbf{e}_i) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\
& - \int_{\Gamma_N} N_A \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{h}^h d\Gamma_N \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{SUPG} (\mathbf{u}^h \cdot \nabla N_A \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{r}_M (\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \rho \nu_{LSIC} (\nabla \cdot N_A \mathbf{e}_i) r_C (\mathbf{u}^h) d\Omega,
\end{aligned} \tag{2.37}$$

e:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{R}_C)_A &= \int_{\Omega} N_A \nabla \cdot \mathbf{u}^h d\Omega \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{PSPG} \left( \frac{\nabla N_A}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_M (\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Considerando  $\dot{\mathbf{U}}$ ,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{p}$  os vetores nodais dos graus de liberdade respectivos a velocidade, aceleração e pressão, pode-se escrever a forma semidiscreta do problema da DFC como: Encontrar  $\dot{\mathbf{U}}$ ,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{p}$  de maneira que

$$\mathbf{R}_M(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}, \quad (2.39)$$

e

$$\mathbf{R}_C(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}. \quad (2.40)$$

## 2.2 Descrição Euleriana-Lagrangiana arbitrária (ALE)

A descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária (DONEA; GIULIANI; HALLEUX, 1982) representa uma generalização da descrição puramente Lagrangiana e da descrição puramente Euleriana do movimento do contínuo. A descrição Lagrangiana fixa a atenção em pontos materiais do contínuo, enquanto que na descrição Euleriana considera-se uma porção fixa do espaço ocupada pelo contínuo, e analisam-se os pontos materiais que passam por essa porção ao longo do tempo. Como consequência, na descrição puramente Lagrangiana a malha computacional move-se com o contínuo, enquanto que na Euleriana a malha computacional mantém-se fixa. Por sua vez, na descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária, trabalha-se com pontos de referência que podem movimentar-se, mas de maneira independente do movimento dos pontos materiais do contínuo analisado.

Para a aplicação dessa metodologia às equações governantes da mecânica dos fluidos é importante a definição de três domínios, de acordo com a Fig. 2.6. O domínio inicial, chamado de **domínio material** ( $\Omega_0$ ), que é definido pelas coordenadas dos pontos materiais  $\mathbf{X}$ ; O domínio atual, chamado de **domínio espacial** ( $\Omega$ ), definido pelas coordenadas  $\mathbf{x}$ ; e por fim, o **domínio de referência** ( $\Omega_{\bar{x}}$ ) com coordenadas dos pontos de referência  $\bar{\mathbf{x}}$ .

Considera-se nesse texto, o domínio de referência,  $\Omega_{\bar{x}}$ , como sendo a configuração inicial da malha, enquanto que a configuração atual da malha e do contínuo consistem ambas na referência espacial  $\Omega$ .

As coordenadas no domínio atual do contínuo,  $\Omega$ , podem ser mapeadas a partir do domínio inicial ( $\Omega_0$ ) ou a partir do domínio de referência ( $\Omega_{\bar{x}}$ ) utilizando as seguintes funções de mapeamento:

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t) = \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, t). \quad (2.41)$$

Da mesma forma, o domínio de referência, pode ser mapeado a partir do domínio inicial por:

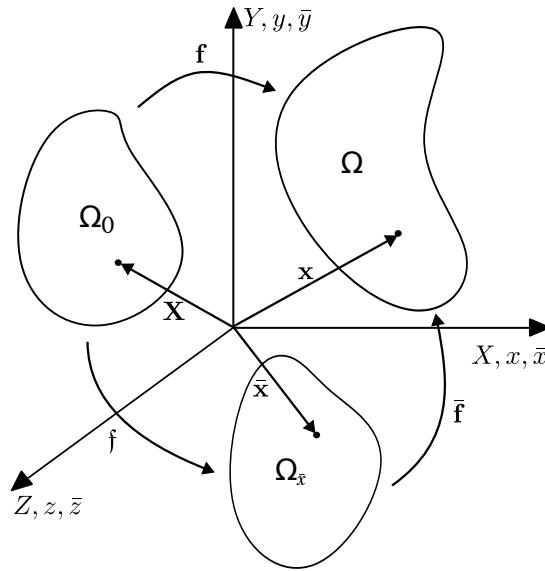


Figura 2.6 – Domínios utilizados para a descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathfrak{f}(\mathbf{X}, t). \quad (2.42)$$

A velocidade dos pontos da malha é calcula por:

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}}, \quad (2.43)$$

e a velocidade dos pontos materiais no instante  $t$  é obtida pela derivada do vetor posição  $\mathbf{x}$  mantendo  $\mathbf{X}$  fixo:

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}}. \quad (2.44)$$

As matrizes jacobianas dos mapeamentos considerando a depedênciia do espaço e do tempo são dadas por:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial (\mathbf{f}(\mathbf{X}, t), t)}{\partial (\mathbf{X}, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{\partial (\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, t), t)}{\partial (\bar{\mathbf{x}}, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} & \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.46)$$

e

$$\mathfrak{F} = \frac{\partial (\mathfrak{f}(\mathbf{X}, t), t)}{\partial (\mathbf{X}, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}} & \mathbf{w} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

sendo  $\mathbf{w} = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}}$ .

Considerando que  $\mathbf{f}(\mathbf{X}, t) = \bar{\mathbf{f}} \circ \mathfrak{f}$ , pode-se escrever:

$$\frac{\partial(\mathbf{f}(\mathbf{X}, t), t)}{\partial(\mathbf{X}, t)} = \frac{\partial(\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, t), t)}{\partial(\bar{\mathbf{x}}, t)} \cdot \frac{\partial(\mathbf{f}(\mathbf{X}, t), t)}{\partial(\mathbf{X}, t)}, \quad (2.48)$$

que pode ser rescrita como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} & \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}} & \mathbf{w} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

Dessa forma, pode-se estabelecer uma relação entre a velocidade da malha e a velocidade do ponto material:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{w} \quad (2.50)$$

Supondo agora uma grandeza física escalar, denominada de  $g(\mathbf{x}, t)$  na configuração espacial, de  $g^*(\bar{\mathbf{x}}, t)$  na configuração de referência, e  $g^{**}(\mathbf{X}, t)$  na configuração material.

Com base nos desenvolvimentos realizados até aqui, pode-se escrever que:

$$g^{**}(\mathbf{X}, t) = g(\mathbf{f}(\mathbf{X}, t), t) \quad (2.51)$$

Baseado nessa última expressão as equações de Navier-Stokes para escoamento incompressível podem ser apresentadas, em termo da derivada material, da seguinte forma:

$$\rho \left( \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (2.52)$$

Utilizando-se agora o domínio de referência  $\Omega_{\bar{\mathbf{x}}}$ , para expressar a derivada material chega-se à seguinte expressão:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + \frac{\partial \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \Big|_t \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}}. \quad (2.53)$$

Derivando-se (2.41) no tempo com  $\mathbf{X}$  fixo, é possível escrever:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \Big|_t \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}}, \quad (2.54)$$

onde o termo  $\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}}$  representa a velocidade do domínio de referência (malha de elementos finitos), em relação ao domínio espacial, representada por  $\bar{\mathbf{u}}$ , permitindo escrever:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \Big|_t \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}}, \quad (2.55)$$

ou ainda:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} = (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_t. \quad (2.56)$$

Utilizando-se das expressões Eq. (2.56) e Eq. (2.53) obtém-se que:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \frac{\partial \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial \mathbf{x}} \Big|_t. \quad (2.57)$$

Por fim, aplicando-se a Eq. (2.57) em Eq. 2.52, chega-se à equação da conservação da quantidade de movimento para escoamentos incompressíveis em descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (2.58)$$

Já para o caso incompressível, a equação da continuidade

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.59)$$

continua válida para a descrição ALE.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{w}^h \cdot \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) d\Omega + \int_{\Omega} \dot{\varepsilon}(\mathbf{w}^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} q^h \nabla \cdot \mathbf{u}^h d\Omega - \int_{\Gamma_h} \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{h}^h d\Gamma_h \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{SUPG} ((\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla \mathbf{w}^h) \cdot \mathbf{r}_M(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{PSPG} \left( \frac{\nabla q^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_M(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \rho \nu_{LSIC} \nabla \cdot \mathbf{w}^h r_C(\mathbf{u}^h) d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (2.60)$$

e

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} q^h \nabla \cdot \mathbf{u}^h d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{PSPG} \left( \frac{\nabla q^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_M(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\mathbf{r}_M(\mathbf{u}^h, p^h) = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h, p^h), \quad (2.62)$$

## 2.3 Parâmetros de estabilização

Considerando que nesse trabalho dois tipos de aproximações espaciais são utilizadas, uma baseada no FEM e outra baseada em IGA, adotam-se os parâmetros propostos por Takizawa, Tezduyar e Otoguro (2018) e Otoguro, Takizawa e Tezduyar (2020), que são adequados para ambas aproximações.

Para essa opção é necessário definir-se o tensor métrico do elemento no espaço. Para isso, inicia-se com a definição da matriz Jacobiana  $\mathbf{Q}$ , dada por:

$$\mathbf{Q} = \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right), \quad (2.63)$$

com  $\xi$  representando as coordenadas do espaço paramétrico, com componentes  $\xi, \eta$  e  $\zeta$ .

Para que a ordem polinomial seja levada em consideração na determinação dos

parâmetros de estabilização, aplica-se uma mudança de escala na matriz  $\mathbf{Q}$ , através da matriz  $\mathbf{D}$ , conforme a seguinte expressão:

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}\mathbf{D}^{-1}. \quad (2.64)$$

Para elementos finitos com funções de forma polinomiais de Lagrange de ordem  $p_\xi$ ,  $p_\eta$  e  $p_\zeta$ , definidas nas direções  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$  do espaço paramétrico respectivamente, com  $-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1$ , a matriz  $\mathbf{D}$  é definida como:

e se a variação for de 0,1 ? tem alguma diferença

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} p_\xi & 0 & 0 \\ 0 & p_\eta & 0 \\ 0 & 0 & p_\zeta \end{bmatrix}. \quad (2.65)$$

A definição da matriz  $\mathbf{D}$  para elementos isogeométricos será descrita na Subseção 3.2.4.

O comprimento direcional do elemento é definido como:

$$h_{RQD} = 2(\mathbf{r}\mathbf{r} : \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.66)$$

sendo  $\mathbf{r}$  o vetor unitário na direção do gradiente da intensidade da velocidade e  $\mathbf{G}$  é denominada de tensor métrico do elemento, os quais são representados respectivamente como:

$$\mathbf{r} = \frac{\nabla \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|}{\|\nabla \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\|} \quad (2.67)$$

e

$$\mathbf{G} = \hat{\mathbf{Q}}^{-T} \cdot \hat{\mathbf{Q}}^{-1}. \quad (2.68)$$

O comprimento do elemento é limitado pelos mínimos e máximos valores representados abaixo:

$$h_{min} \equiv 2 \min_r \left( (\mathbf{r}\mathbf{r} : \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}} \right), \quad (2.69)$$

$$h_{max} \equiv 2 \max_r \left( (\mathbf{r}\mathbf{r} : \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}} \right), \quad (2.70)$$

que podem ser reescritos como:

$$h_{min} = 2(\lambda_{max} \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.71)$$

$$h_{max} = 2(\lambda_{min} \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.72)$$

onde  $\lambda_{max}$  e  $\lambda_{min}$  representam os máximos e mínimos autovalores da matriz  $\mathbf{G}$ .

Os parâmetros de estabilização são dados por:

$$\tau_{SUPG} = \tau_{PSPG} = \left( \frac{1}{\tau_{SUGN1}^2} + \frac{1}{\tau_{SUGN2}^2} + \frac{1}{\tau_{SUGN3}^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.73)$$

$$\nu_{\text{LSIC}} = \frac{h_{\text{RQD}}^2}{\tau_{\text{SUPG}}}, \quad (2.74)$$

onde:

$$\tau_{\text{SUGN1}}^{-2} = (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) : \mathbf{G}, \quad (2.75)$$

$$\tau_{\text{SUGN2}} = \frac{\Delta t}{2}, \quad (2.76)$$

e

$$\tau_{\text{SUGN3}}^{-1} = \nu \left( \mathbf{r}_{\text{reg}} \mathbf{r}_{\text{reg}} : \mathbf{G} + (1 - \mathbf{r}_{\text{reg}}^2) 4 h_{\min}^{-2} \right), \quad (2.77)$$

sendo  $\mathbf{r}_{\text{reg}}$  definido como:

$$\mathbf{r}_{\text{reg}} = \frac{\nabla \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|}{\|\nabla \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\| + \varepsilon (\|\nabla \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\|)_0}, \quad (2.78)$$

com  $\varepsilon$  uma constante pequena e  $(\|\nabla \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\|)_0$  um valor de referência. Os termos  $\tau_{\text{SUGN1}}$ ,  $\tau_{\text{SUGN2}}$  e  $\tau_{\text{SUGN3}}$  são parâmetros correspondentes aos termos convectivos, iniciais e viscosos, respectivamente.

## 2.4 Integração Temporal

Para a integração temporal das equações governantes, utiliza-se o método  $\alpha$ -generalizado. Esse método, no contexto das equações de Navier-Stokes em escoamentos incompressíveis para domínios fixos foi utilizado inicialmente por Jansen, Whiting e Hulbert (2000).

Considerando que o tempo da análise do problema é definido por um intervalo de  $[0, T]$ , o qual é particionado em subintervalos  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ , com  $t_n$  e  $t_{n+1}$  os instantes anterior e atual, respectivamente. A solução do problema consiste em: conhecida a solução nos graus de liberdade nodais ( $\dot{\mathbf{U}}$ ,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{p}$ ) no passo de tempo  $n$ , encontrar a solução no passo de tempo  $n + 1$  de forma que:

$$\mathbf{R}_M(\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}, \mathbf{U}_{n+\alpha_f}, \mathbf{p}_{n+1}) = \mathbf{0}, \quad (2.79)$$

$$\mathbf{R}_C(\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}, \mathbf{U}_{n+\alpha_f}, \mathbf{p}_{n+1}) = \mathbf{0}, \quad (2.80)$$

com:

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m} = \dot{\mathbf{U}}_n + \alpha_m (\dot{\mathbf{U}}_{n+1} - \dot{\mathbf{U}}_n), \quad (2.81)$$

$$\mathbf{U}_{n+\alpha_f} = \mathbf{U}_n + \alpha_f (\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n), \quad (2.82)$$

sendo  $\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}$  e  $\mathbf{U}_{n+\alpha_f}$  valores intermediários entre  $t_n$  e  $t_{n+1}$  do vetor aceleração e velocidade. A relação entre os valores nodais de aceleração e velocidade são calculados de acordo com

fórmula discreta de Newmark (ver, por exemplo, (HUGHES, 1976)):

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta t \left( (1 - \gamma) \dot{\mathbf{U}}_n + \gamma \dot{\mathbf{U}}_{n+1} \right). \quad (2.83)$$

Os parâmetros que definem o instante intermediário, no qual as variáveis serão calculadas, são determinados de forma a proporcionarem estabilidade e precisão ao método. Seguindo a metodologia proposta por Jansen, Whiting e Hulbert (2000), uma precisão de segunda ordem é obtida desde que:

$$\gamma = 1/2 + \alpha_m - \alpha_f, \quad (2.84)$$

enquanto que a estabilidade do problema é incondicional com:

$$\alpha_m \geq \alpha_f \geq 1/2. \quad (2.85)$$

Para proporcionar a precisão de segunda-ordem de convergência e estabilidade da solução, pode-se calcular o parâmetro  $\gamma$  de acordo com Eq. 2.84 e  $\alpha_m$ ,  $\alpha_f$ , através de (HUGHES, 2000):

$$\alpha_m = \frac{1}{2} \left( \frac{3 - \rho_\infty}{1 + \rho_\infty} \right) \quad (2.86)$$

$$(2.87)$$

e

$$\alpha_f = \frac{1}{1 + \rho_\infty}. \quad (2.88)$$

O parâmetro  $\rho_\infty$  é conhecido como raio espectral da matriz de amplificação quando  $\Delta t_n \rightarrow \infty$ . Esse parâmetro controla a dissipação numérica em altas frequências realizada pelo processo de integração e está contido no intervalo de  $[0, 1]$ . Para  $\rho_\infty = 0$  a dissipação é máxima e para  $\rho_\infty = 1$  não há introdução de difusão numérica ao método.

Para a solução do sistema de equações não lineares compostas por Eq. (2.79) e Eq. (2.80) utiliza-se o método de Newton-Raphson. O método pode ser separado em duas etapas, uma etapa preditiva e outra iterativa corretiva.

Na primeira etapa, conhecida a solução em um passo de tempo  $n$ , prediz-se a solução em  $n + 1$  com as seguintes equações:

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \dot{\mathbf{U}}_n, \quad (2.89)$$

$$\mathbf{U}_{n+1}^0 = \mathbf{U}_n, \quad (2.90)$$

$$\mathbf{p}_{n+1}^0 = \mathbf{p}_n, \quad (2.91)$$

onde o índice 0 representa a iteração de número zero.

Na etapa iterativa corretiva, itera-se sobre a Eq. (2.79) e Eq. (2.80) até que elas sejam satisfeitas, considerando uma tolerância prescrita, ou até que se alcance uma quantidade máxima de iterações pré-estabelecida. Essa etapa é composta por três fases. A fase 1 consiste em determinar os valores no instante intermediário para as variáveis nodais na iteração  $i$ :

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}^i = \dot{\mathbf{U}}_n + \alpha_m (\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i - \dot{\mathbf{U}}_n), \quad (2.92)$$

$$\mathbf{U}_{n+\alpha_f}^i = \mathbf{U}_n + \alpha_f (\mathbf{U}_{n+1}^i - \mathbf{U}_n), \quad (2.93)$$

$$\mathbf{p}_{n+1}^i = \mathbf{p}_{n+1}. \quad (2.94)$$

Na fase 2, com os valores intermediários das variáveis nodais resolve-se o sistema linear resultante da linearização das equações Eq. (2.79) e Eq. (2.80) com respeito às variáveis de interesse  $\mathbf{p}_{n+1}$  e  $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{R}_M}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{n+1}} \Big|_i \Delta \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i + \frac{\partial \mathbf{R}_M}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} \Big|_i \Delta \mathbf{p}_{n+1}^i = -\mathbf{R}_M^i, \quad (2.95)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_C}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{n+1}} \Big|_i \Delta \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i + \frac{\partial \mathbf{R}_C}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} \Big|_i \Delta \mathbf{p}_{n+1}^i = -\mathbf{R}_C^i. \quad (2.96)$$

Por fim, na fase 3 atualiza-se a solução através das seguintes relações:

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^{i+1} = \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i + \Delta \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i, \quad (2.97)$$

$$\mathbf{U}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{U}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{U}_{n+1}^i, \quad (2.98)$$

$$\mathbf{p}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{p}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{p}_{n+1}^i. \quad (2.99)$$

Na utilização do método  $\alpha$ -generalizado as integrais das equações Eq. (2.79) e Eq. (2.80) são avaliadas no instante  $t = t_{n+\alpha_f}$ , de forma que:

$$\int_{\Omega_t} (.) d\Omega = \int_{\Omega_{t_{n+\alpha_f}}} (.) d\Omega \quad (2.100)$$

$$\Omega_{t_{(n+\alpha_f)}} = \left\{ \mathbf{x}^h \mid \mathbf{x}^h(\bar{\mathbf{x}}^h, t_{(n+\alpha_f)}) = \alpha_f \mathbf{x}^h(\bar{\mathbf{x}}^h, t_{n+1}) + (1 - \alpha_f) \mathbf{x}^h(\bar{\mathbf{x}}^h, t_n) \right\}. \quad (2.101)$$

## 2.4.1 Implementação Computacional

O Algoritmo que descreve a implementação computacional tanto de problemas utilizando o método dos elementos finitos, quanto para problemas utilizando a análise Isogeométrica, é apresentado no Alg. 1.

Escrever sobre c++ e petsc, MUMPS

---

**Algoritmo 1** Algoritmo para problemas de dinâmica dos fluidos computacional

---

```

1: para o passo de tempo 0 até T faça
2:    $i = 0$ ;
3:   Predição da solução: aplicação das Eq. (2.89), Eq. (2.90) e Eq. (2.91);
4:   enquanto ( $\epsilon <$  tolerância) faça
5:      $i++$ ;
6:     Interpolação das variáveis do problema: aplicação da Eq. (2.92), Eq. (2.93) e
    Eq. (2.94);
7:     Cálculo do incremento nas variáveis do problema:  $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$  e  $\mathbf{p}_{n+1}$  de acordo com
    as Eq. (2.95) e Eq. (2.96);
8:     Atualização da solução: calculadas de acordo com Eq. (2.97), Eq. (2.98) e Eq.
    (2.99).
9:     Cálculo do erro:

$$\epsilon = \|\mathbf{R}_M^i\|_{L^2} \quad (2.102)$$

10:    fim enquanto
11: fim para

```

---

## 2.5 Verificação e Aplicações

Para a verificação dos códigos baseados no método dos elementos finitos, adotam-se 2 exemplos muito populares nas bibliografias: Escoamento sobre um cilindro 2D e o problema da cavidade quadrada 3D, os quais são apresentados na subseções sequentes.

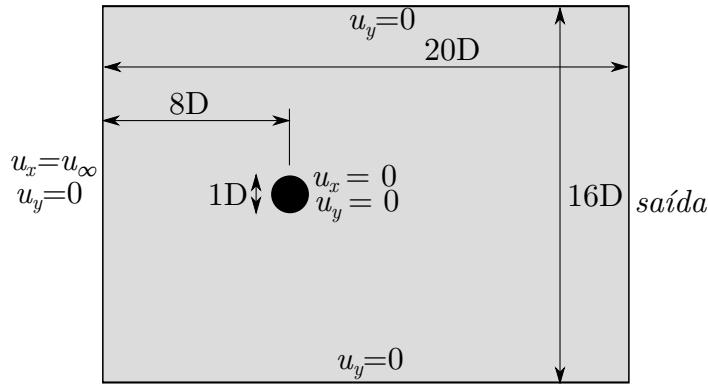
### 2.5.1 *Escoamento sobre um cilindro - 2D*

O estudo do problema de um escoamento sobre um cilindro 2D teve como principal intuito a análise dos coeficientes aerodinâmicos medidos ao longo do tempo e verificar consequentemente se o modelo é capaz de reproduzir os fenômenos relacionados à formação e desprendimento de vórtices característicos desse problema. Para isso, diferentes números de Reynolds (Re) foram estudados,  $Re = 40, 100$  e  $1000$ , os quais são calculados de acordo com a seguinte equação:

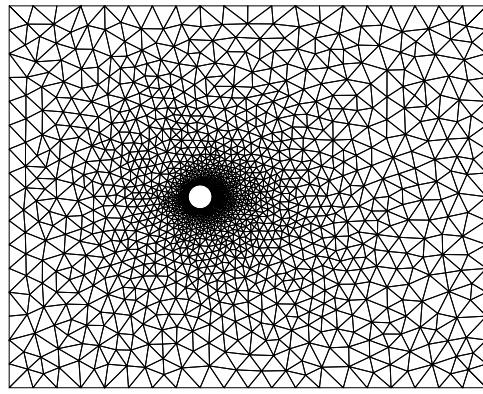
$$Re = \frac{\rho L \| \mathbf{u}_\infty \|}{\mu} = \frac{L \| \mathbf{u}_\infty \|}{\nu}, \quad (2.103)$$

com  $L$  a dimensão característica do problema, sendo nesse caso o diâmetro do cilindro, e  $\nu$  a viscosidade cinemática do fluido.

A geometria e condições de contorno são apresentadas na Fig. 2.7a. Como pode-se observar trata-se de um domínio retangular, parametrizado em função do diâmetro do cilindro, com um perfil constante de velocidade na entrada e condição de parede lisa nas paredes superior e inferior (velocidade normal à parede  $u_n = 0$ ). No contorno denominado como *saída*, não se conhece o comportamento do escoamento, desta forma, determina-se sua posição no domínio computacional a uma distância grande o suficiente de maneira a



(a) Geometria e condições de contorno.



(b) Discretização espacial.

Figura 2.7 – Cilindro 2D: Geometria, condições de contorno e malha de elementos finitos.

não interferir no comportamento do escoamento. Além disso, prescreve-se uma condição de contorno dita artificial, que consiste em  $\sigma \mathbf{n} = \mathbf{0}$ .

Na Fig. 2.7b pode-se observar a malha não-estruturada de elementos finitos utilizada para esse problema, composta por 3122 elementos triangulares quadráticos e 6376 nós. O problema foi simulado para um velocidade de entrada  $u_\infty = 1,0$ ,  $\rho = 1,0$ ,  $\Delta t = 0,05$ , e  $\rho_\infty = 0,5$ .

Para o cálculo dos coeficientes aerodinâmicos é necessário definir-se primeiramente as forças de arrasto - horizontal ( $F_D$ ) e de sustentação - vertical ( $F_L$ ), que são induzidas por tensões desviadores e hidrostáticas e são calculadas pelas seguintes equações:

$$F_D = \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\sigma}_{1j} n_j d\Gamma_c, \quad (2.104)$$

$$F_L = \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\sigma}_{2j} n_j d\Gamma_c, \quad (2.105)$$

nas quais o símbolo  $\Gamma_c$  representa o contorno do cilindro e  $n$  é o vetor normal à essa superfície. Os coeficientes de arrasto e sustentação são definidos respectivamente por:

$$C_D = \frac{F_D}{0,5\rho\|\mathbf{u}\|^2 L}, \quad (2.106)$$

$$C_L = \frac{F_L}{0,5\rho\|\mathbf{u}\|^2 L}, \quad (2.107)$$

Devido ao fenômeno de desprendimento de vórtices que ocorre a partir de determinado número de Reynolds do escoamento, é usual determinar-se a frequência deste fenômeno através do número adimensional de Strouhal (St), dado por:

$$St = \frac{f_V L}{\|\mathbf{u}\|}, \quad (2.108)$$

com  $f_V$  sendo a frequência de desprendimento dos vórtices.

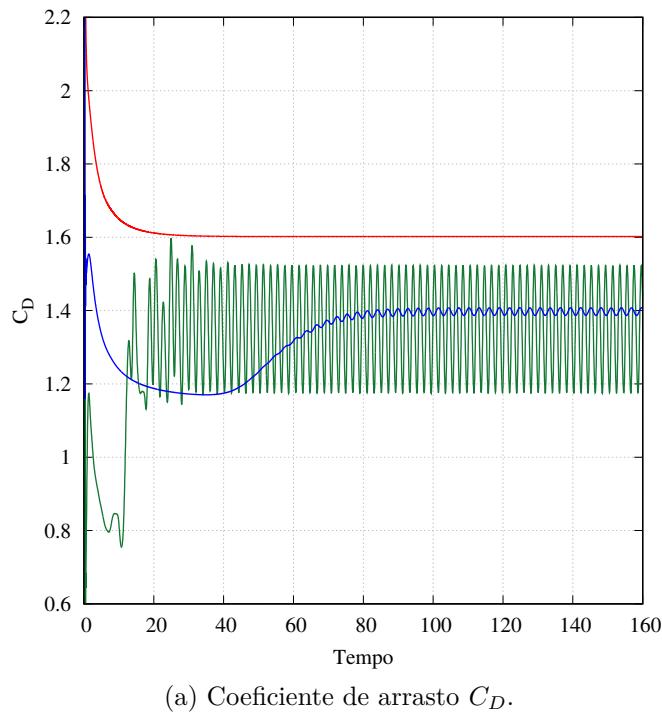
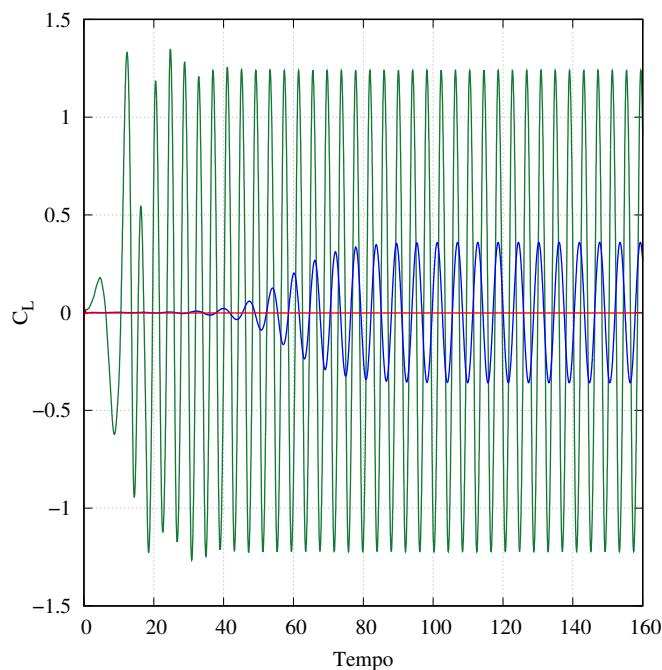
Como pode-se observar na Fig. 2.8 para  $Re = 40$ , os coeficientes de arrasto e de sustentação, após o escoamento entrar em fase estacionária, se mantém constantes ao longo de todo o tempo de análise. Isso ocorre, visto que para Reynolds entre 5 à 50, aproximadamente, formam-se dois vórtices simétricos e estacionários na região logo após o cilindro. Posteriormente, o par de vórtices se quebra e passa existir a chamada esteira de Von Karmán, que ocorre devido à formação de vórtices de maneira alternada entre as regiões superior e inferior do cilindro, o que pode ser notado também na Fig. 2.8 para  $Re = 100$  e  $Re = 1000$ . Os valores do coeficiente de Strouhal, para  $Re = 100$  e  $Re = 1000$ , foram de 0,1716 e 0,2454 respectivamente. Os valores obtidos para os coeficientes aerodinâmicos foram os esperados para o problema em questão (ver, por exemplo, Tonon (2016), Henderson (1997)).

Nas Fig. 2.9a e Fig. 2.9b podem ser observados os campos de pressão e velocidade em um tempo  $t = 11,5$  da análise para  $Re = 100$ . Pode-se notar nessas imagens, a formação e os desprendimentos de vórtices na esteira de Von Karmán, característico do escoamento para o número de Reynolds simulado.

### 2.5.2 Cavidade Quadrada - 3D

Para a verificação do código 3D utilizando elementos finitos o problema de uma cavidade quadrada com velocidade prescrita  $u_\infty$  em sua parede superior foi estudado. A geometria do problema em questão e o conjunto de suas condições de contorno são apresentadas na Fig. 2.10a. As paredes da cavidade são rígidas, com paredes laterais e do fundo com condição de aderência, e adicionalmente, velocidade  $u_z = 0$ , condição de parede lisa, nas paredes das faces frontal e posterior. A cavidade possui na direção  $z$  uma espessura de 0,03. A discretização espacial em elementos finitos utilizada é apresentada na Fig. 2.10b, a qual consiste em 7252 elementos tetraédricos quadráticos e 14727 nós.

O problema é estudado para os números de Reynolds: 100, 400 e 1000. O número de Reynolds foi calculado de acordo com Eq. (2.103), com  $L$  equivalente ao comprimento do lado da cavidade. O problema foi simulado para uma velocidade na parede superior

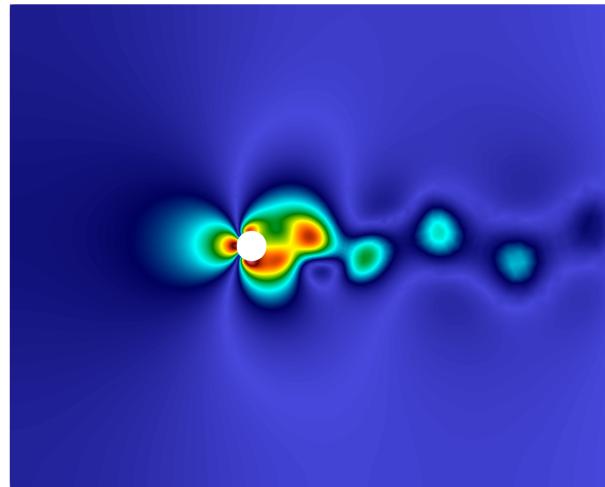
(a) Coeficiente de arrasto  $C_D$ .(b) Coeficiente de sustentação  $C_L$ .

$Re\ 40$  —————  $Re\ 100$  —————  $Re\ 1000$  —————

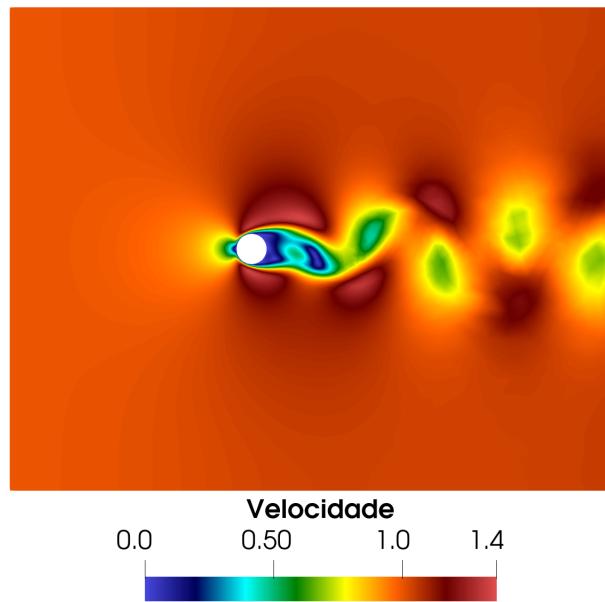
Figura 2.8 – Cilindro 2D: Coeficientes aerodinâmicos.

de  $\mathbf{u}_\infty = 1, 0$ ,  $\rho = 1, 0$ ,  $\Delta t = 0, 05$ , e  $\rho_\infty = 0$ , sendo a viscosidade do fluido variada de modo a alterar o número de Reynolds. A simulação foi mantida até que se atingiu o estado estacionário de escoamento.

Os perfis de velocidade adimensionalizados ( $\mathbf{u}/\mathbf{u}_\infty$ ) horizontal e vertical ao longo



(a) Campo de pressão

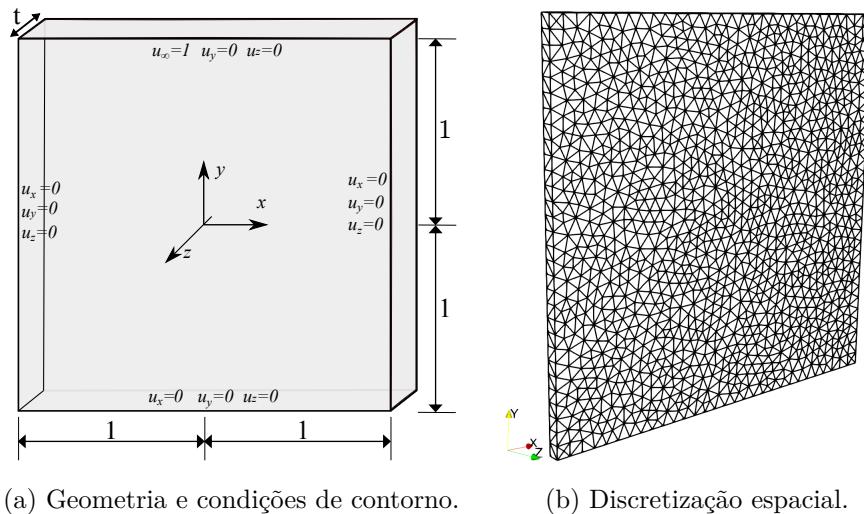


(b) Campo de velocidade

Figura 2.9 – Cilindro 2D: Campos de pressão e de velocidade para um escoamento com  $Re = 100$

de duas linhas centrais nas direções  $x$  e  $y$  posicionadas no centro da espessura na direção  $z$  da cavidade são apresentados na Fig. 2.11 e comparados com a referência de Ghia, Ghia e Shin (1982).

Os campos de velocidade e de pressão são apresentados nas figuras Fig 2.12 e 2.13 respectivamente. Ressalta-se que para a solução do problema, por se tratar de um problema com todos os contornos com condição de Dirichlet impostos, a pressão torna-se indefinida. Por esse motivo, prescreveu-se uma pressão  $p = p_{ref} = 0$  no canto superior direito da cavidade.



(a) Geometria e condições de contorno.

(b) Discretização espacial.

Figura 2.10 – Cavidade quadrada: Geometria, condições de contorno e malha de elementos finitos.

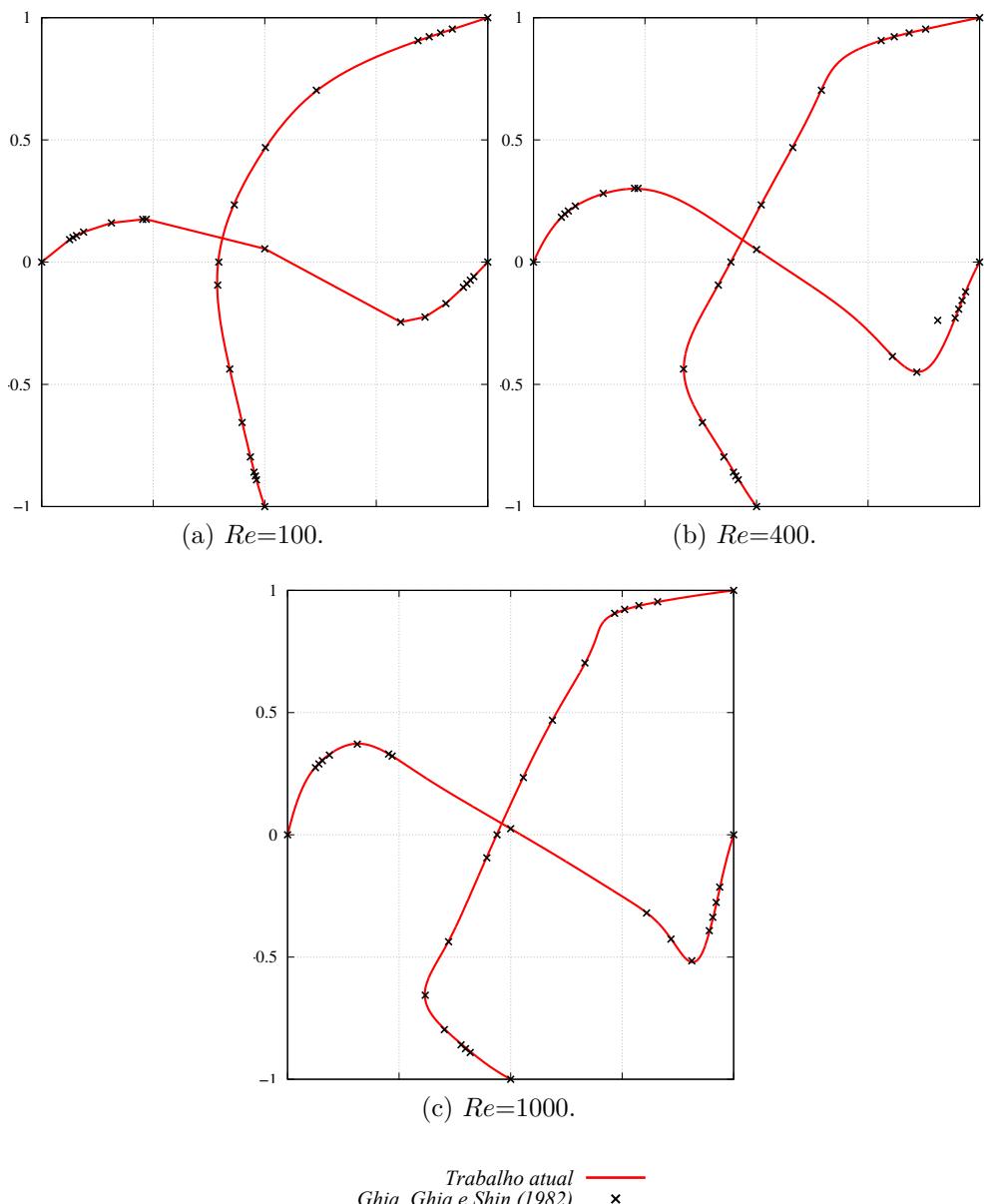


Figura 2.11 – Cavidade quadrada: Perfis de velocidade adimensionalizados nas direções  $x$  e  $y$ .

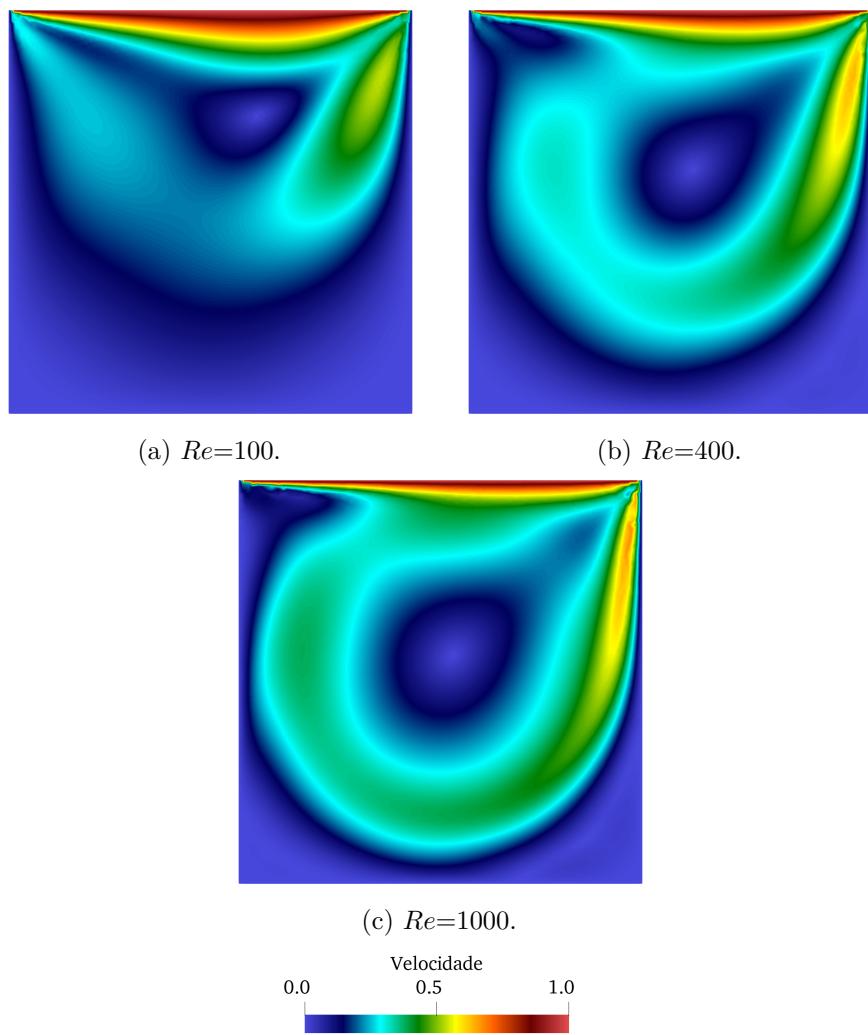


Figura 2.12 – Cavidade quadrada: campos de velocidade.

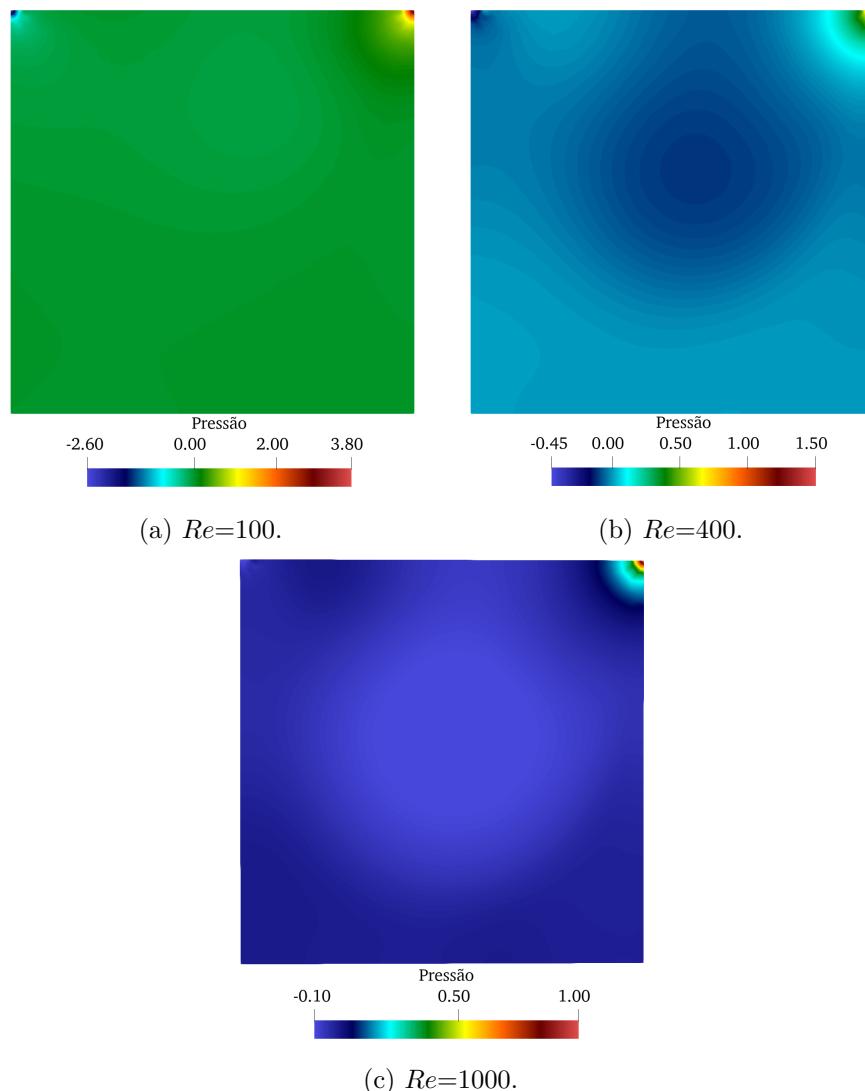


Figura 2.13 – Cavidade quadrada: campos de pressão.



CAPÍTULO

---

# 3

# ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA APLICADA À MECÂNICA DOS FLUIDOS

---



---

A Análise Isogeométrica é uma técnica numérica introduzida por (HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005) para obtenção de soluções aproximadas de equações diferenciais. O método pode ser entendido como uma generalização do método dos elementos finitos clássicos a partir do uso de funções base especiais.

Na Análise Isogeométrica, as funções base escolhidas na discretização da geometria do problema e de suas variáveis são aquelas utilizadas nos sistemas CAD, sendo as funções do tipo NURBS as mais aplicadas (ver, por exemplo, Piegl e Tiller (1996)). O grande impulso para o desenvolvimento da técnica foi proporcionar a integração entre a engenharia de *design*, com modelos baseado em CAD (*Computed Aided Design*), e as simulações numéricas, com modelos principalmente baseados no MEF, de forma que ambas trabalhem com somente um modelo geométrico.

Além disso, a IGA se apresenta vantajosa por propiciar a representação exata de muitas geometrias comuns, como seções cônicas, e por possuir muitos algoritmos eficientes e estáveis para geração de objetos NURBS. Ressalta-se que as funções NURBS apresentam muitas características matemáticas que as tornam uma boa opção a ser aplicada, como por exemplo, suavidade das funções, que apresentam continuidade  $p - 1$  sobre a interface dos elementos, sendo  $p$  o grau das funções, boa aproximação e habilidade de refinamento através da inserção de *knots*, que são coordenadas do espaço paramétrico onde as funções são definidas.

Nesse capítulo apresenta-se uma breve introdução sobre a IGA, o processo de

obtenção das geometrias NURBS e seu uso na descrição das variáveis discretas nas simulações numéricas. Por fim, são apresentados alguns exemplos de sua aplicação em problemas da DFC.

### 3.1 Noções Gerais de IGA

No contexto do MEF isoparamétrico tem-se apenas uma noção de malha e de elemento, com os elementos finitos representados tanto no espaço físico quanto no espaço paramétrico. Os elementos são definidos por suas coordenadas nodais, com os graus de liberdade do problema os valores interpolados das funções base nesses nós.

Dentro da IGA têm-se duas noções de malha: uma malha de pontos de controle e uma malha física. A malha de pontos de controle é muito semelhante a uma malha de elementos finitos, entretanto, ela não define a geometria, ela é apenas um esqueleto que controla o formato da geometria (ver Fig. 3.1), devido ao fato de que as funções de forma baseadas em *B-Splines* não são necessariamente interpolatórias. Assim, os graus de liberdade nodais do problema são definidos sobre os pontos de controle, e não coincidem necessariamente com a forma representada.

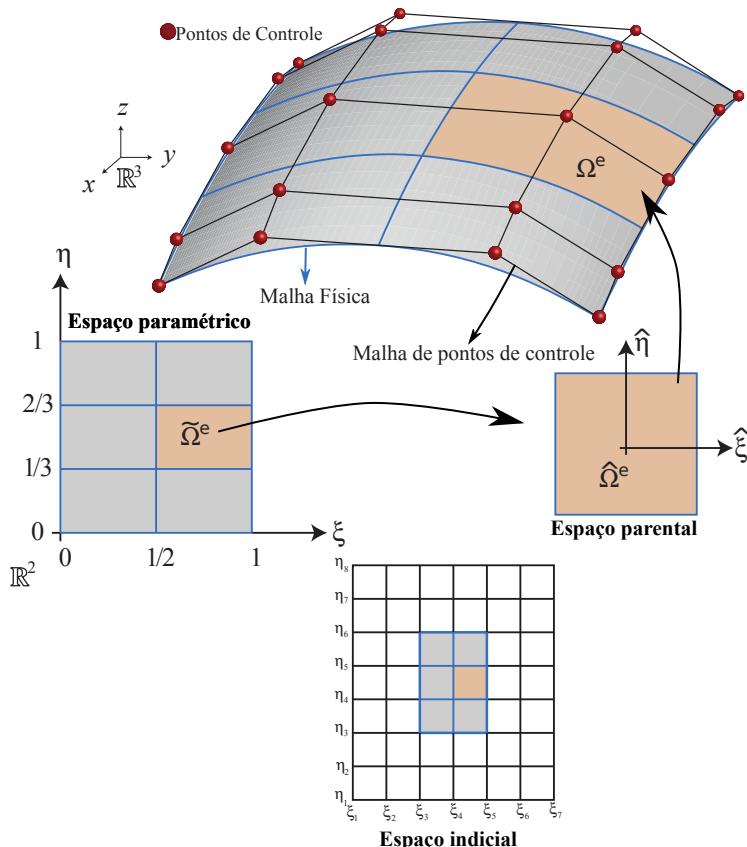


Figura 3.1 – NURBS: espaço paramétrico, espaço indicial, espaço parental, malha de pontos de controle e malha física. Fonte: Adaptado de Cottrell, Hughes e Bazilevs (2009)

A malha física representa a geometria discretizada, e dentro da malha física podem ainda ser definidos dois tipos de elementos, um macro-elemento, denominado de *patch*, e o *knot span*, que é o equivalente a um elemento finito e será denominado célula ao longo deste texto. Cada *patch* é composto por um conjunto de células. Muitas geometrias simples podem ser discretizadas apenas com um *patch*, entretanto, a depender da complexidade da mesma, se torna necessário o uso de um conjunto de *patches*. As células são representações geométricas de linhas, superfícies e volumes nos espaços físicos unidimensional, bidimensional e tridimensional respectivamente.

Cada *patch* e suas respectivas células possuem uma representação ainda no espaço paramétrico, que é o espaço onde as funções base são definidas. O espaço paramétrico, para os casos unidimensionais, é definido por um *knot vector*, aqui denominado de vetor de *knots*, que é um conjunto de coordenadas paramétricas. As células são constituídos pelo espaço entre duas coordenadas paramétricas ou dois *knots*. O espaço onde se representam todos as células ou *knot spans*, inclusive os nulos (quando mais de um *knot* ocupa a mesma posição), é chamado de espaço indicial.

Por fim, na análise isogeométrica conta-se ainda com o espaço parental, que é o espaço de integração numérica das funções base, em geral, definido de forma adimensional de -1 a 1 dentro de uma célula. Na Fig. 3.1 pode-se observar os espaços relatados para uma superfície 3D construída por funções base quadráticas e apenas um *patch*.

## 3.2 Representação geométrica utilizando NURBS

### 3.2.1 Vetor de *knots*

As funções *B-Splines*, que são utilizadas na construção das NURBS, são definidas em um espaço paramétrico que é comum a um conjunto de células ou *patch*. Um vetor de *knots* em uma dimensão é um conjunto não decrescente de coordenadas no espaço paramétrico definido como:  $\Xi = [\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n+p+1}]$ , com  $\xi_i \in \mathbb{R}$  representando a coordenada paramétrica do *knot*  $i$ ,  $n$  é o número de funções base na direção paramétrica e  $p$  o grau das mesmas.

Um *knot* pode possuir multiplicidade maior do que um, e esse fato, implica em importantes mudanças nas funções base, que serão tratadas posteriormente. Os vetores de *knots* conhecidos como abertos, são frequentemente utilizados nas literaturas de CAD, e caracterizam-se por ter a primeira e a última coordenada paramétrica repetidas  $p + 1$  vezes. Este fato garante que as funções unidirecionais sejam interpolatórias nos extremos do espaço paramétrico, proporcionando por exemplo a homogeneidade com respeito às condições de contorno essenciais.

### 3.2.2 B-Splines

As funções *B-Splines* são definidas a partir de um vetor de *knots*. As funções podem ser obtidas recursivamente, sendo que para  $p = 0$  são escritas através da seguinte relação:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (3.1)$$

enquanto que para funções com  $p \geq 1$  são definidas como:

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi). \quad (3.2)$$

Na Fig.3.2, pode-se observar funções *B-Splines* quadráticas construídas sobre o vetor de *Knots* aberto  $\Xi = [0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4]$ . Pode-se observar que, devido à repetição dos *Knots*  $p + 1$  vezes nos extremos do vetor de *knots*, as funções são interpoladoras nesses pontos, por outro lado a base passa a ser não uniforme. Além disso, devido o *knot*  $\xi = 3$  ter multiplicidade igual a 2, nota-se a perda da ordem de continuidade da função de forma nessa coordenada, passando a não apresentar derivada contínua sobre o *knot*. A regra geral para a determinação da continuidade das funções é definida então como o grau das função ( $p$ ) menos o número de vezes que uma coordenada paramétrica se repete.

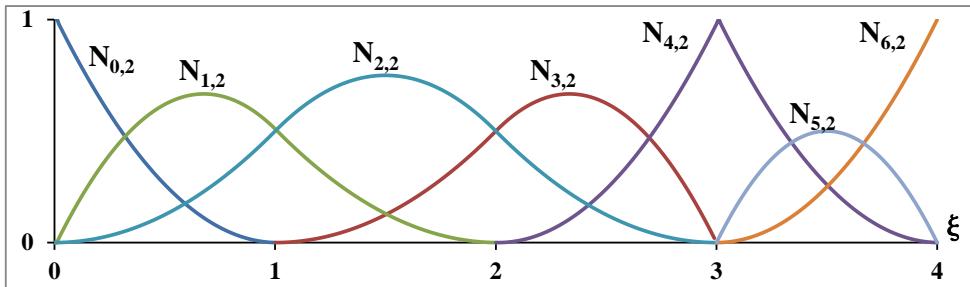


Figura 3.2 – *B-Splines*

As principais propriedades das funções *B-Splines* são:

- **Partição da Unidade:**  $\sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) = 1$ ;
- **Positividade:** Todas as funções base são positivas, ou seja,  $N_{i,p} \geq 0, \forall \xi$ ;
- **Suavidade:** função de ordem  $p$  é, em geral,  $p - 1$  vezes contínua no contorno das células;
- **Suporte Compacto:** O suporte de cada  $N_{i,p}$  está contido no intervalo  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ , ou seja, em cada célula, apenas  $p + 1$  funções são não nulas.

A derivada de uma função de forma *B-Spline* é calculada de acordo com a seguinte equação recursiva:

$$N_{i,p}^d = p \left( \frac{N_{i,p-1}^{(d-1)}}{\xi_{i+p} - \xi_i} - \frac{N_{i+1,p-1}^{(d-1)}}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \right), \quad (3.3)$$

sendo  $d$  a  $d$ -ésima derivada da função  $N_{i,p}$ .

Uma curva *B-Spline* é construída a partir da combinação linear entre funções base e um conjunto de pontos de controle. Considerando um conjunto de  $n$  funções base,  $N_{i,p}$ , com  $i = 0, 1, \dots, n$  e pontos de controle  $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}$  e  $i = 0, 1, \dots, n$ , uma curva polinomial por partes *B-Spline* unidimensional é definida como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{x}(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{B}_i, \quad (3.4)$$

com  $x$ ,  $y$  e  $z$  sendo as coordenadas físicas de um espaço cartesiano. Utilizando as funções *B-Splines* apresentadas na Fig.3.2 e uma malha de pontos de controle qualquer, obtém-se a curva apresentada na Fig.3.3a. Na Fig.3.3b pode-se observar as células físicas equivalentes a essa combinação.

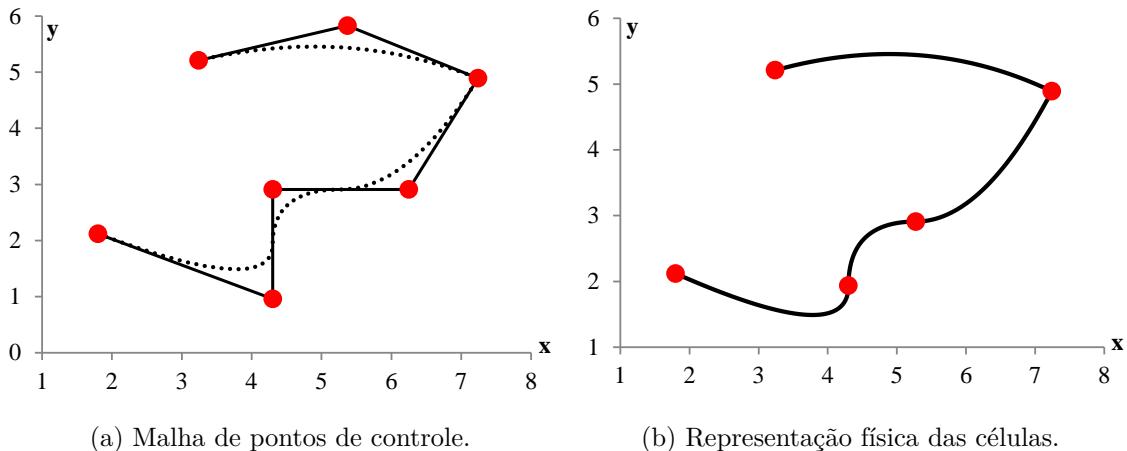


Figura 3.3 – Curva *B-Spline*

A partir da Fig.3.3a pode-se constatar que a curva *B-Spline* interpola o primeiro e o último ponto de controle, que é uma característica das curvas construídas com funções descritas a partir de vetores de nós abertos. Adicionalmente nota-se que, devido à multiplicidade do *knot* de coordenada paramétrica 3, existe um ponto de controle intermediário também interpolando a curva. Coordenadas paramétricas com multiplicidade igual ou superior ao grau do polinômio  $p$  resultam em pontos de controle interpoladores. Por fim, observa-se ainda, que a multiplicidade de  $\xi = 3$  resultou na perda da ordem de continuidade da curva sobre esse ponto, que passa a não ter derivada contínua.

Conforme observado Fig.3.3a, muitas das características das curvas *B-Splines* são consequências das propriedades das funções *B-splines*. Outra importante propriedade dessas curvas é a *Transformação Afim*, significando que uma transformação na curva é obtida se aplicarmos uma transformação afim aos pontos de controle. Devido ao suporte

compacto das funções base, as curvas *B-Splines* possuem característica denominada de *localidade*, que significa que, movendo-se um ponto de controle, afeta-se não mais do que  $p + 1$  células na curva.

Uma superfície *B-spline* é obtida analogamente. Dado uma rede de pontos de controle  $\mathbf{B}_{i,j}$ , com  $i = 0, 1, \dots, n$  e  $j = 0, 1, \dots, m$ , e vetores de *knots*  $\Xi = [\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{p+n+1}]$ ,  $\mathcal{H} = [\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{q+m+1}]$ , a superfície é obtida através do produto tensorial entre  $n$  funções unidireccionais  $N_{i,p}$  e  $m$  funções unidireccionais  $M_{j,q}$  da seguinte forma:

$$\mathbf{S} = \mathbf{x}(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) \mathbf{B}_{i,j}, \quad (3.5)$$

onde  $q$  representa o grau das funções na direção paramétrica  $\eta$ . Devido à natureza do produto tensorial, as superfícies *B-Splines* herdam as características citadas anteriormente para as curvas, sendo o suporte, por exemplo, de uma função bivariada  $\hat{N}_{i,j:p,q}(\xi, \eta) = N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta)$  equivalente à:  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+q+1}]$

Por fim, um sólido *B-Splines* é obtido através do produto tensorial entre funções unidireccionais  $N_{i,p}$ ,  $M_{j,q}$ ,  $L_{k,r}$ , construídas sobre os vetores de *knots*  $\Xi = [\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{p+n+1}]$ ,  $\mathcal{H} = [\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{q+m+1}]$  e  $\mathcal{Z} = [\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{l+r+1}]$  respectivamente, e um conjunto de pontos de controle  $\mathbf{B}_{i,j,k}$  com  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ ,  $k = 0, 1, \dots, l$ , da seguinte forma:

$$\mathbf{T} = \mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta) \mathbf{B}_{i,j,k}, \quad (3.6)$$

na qual  $l$  e  $r$  representam o número de funções e o grau das funções na direção paramétrica  $\zeta$ . Um sólido *B-spline* herda as características das respectivas curvas que o deram origem. Além disso, o suporte de uma função trivariada  $\hat{N}_{i,j,k:p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) = N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta)$  está contido no intervalo  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+q+1}] \times [\zeta_k, \zeta_{k+r+1}]$ .

### 3.2.3 *B-Splines não-uniformes racionais e análise isogeométrica*

Uma entidade NURBS no  $\mathbb{R}^d$  pode ser entendida, de ponto de vista geométrico, como a projeção transformativa de uma entidade *B-Spline* no  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Geometrias cônicas podem ser construídas exatamente pela projeção transformativa de curvas por partes quadráticas (para maiores detalhes sobre projeção transformativa, ver Farin (1999)). Na Fig. 3.4, apresenta-se uma curva NURBS  $\mathbf{C}(\xi)$ , que representa, de forma exata, uma circunferência, sendo essa obtida a partir da projeção de uma curva *B-Spline*  $\mathbf{C}^w(\xi)$ .

Matematicamente, uma função NURBS é obtida pela racionalização de uma função *B-Spline*. A racionalização dessa função ocorre através da razão entre dois polinômios. Uma função racional NURBS ( $R$ ) é construída através da seguinte expressão:

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{\hat{i}=0}^n N_{\hat{i},p}(\xi) w_{\hat{i}}} \quad (3.7)$$

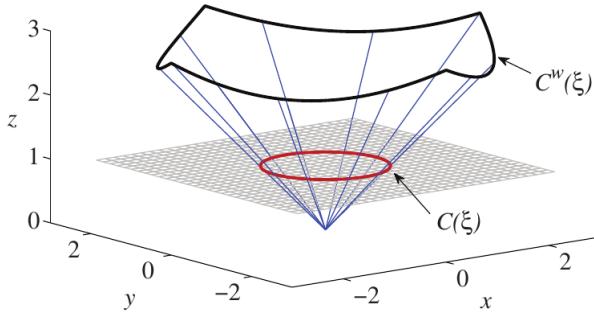


Figura 3.4 – Projeção transformativa para obtenção circunferência. Fonte: Cottrell, Hughes e Bazilevs (2009)

onde  $w_i$  e  $w_{\hat{i}} \in \mathbb{R}$ , com  $i = \hat{i} = 0, 1, \dots, n$ , correspondem aos pesos relativos as funções  $N_{i,p}(\xi)$  e  $N_{\hat{i},p}(\xi)$  respectivamente.

A  $d$ -ésima derivada de  $R_i$  (onde suprimiu-se o índice  $p$  para facilitar a representação), é obtida da seguinte forma:

$$R_i^d(\xi) = \frac{N_i^d(\xi)w_i - \sum_{l=1}^d \left[ \binom{d}{l} \sum_{j=1}^n N_j^l(\xi)w_j R_i^{d-l}(\xi) \right]}{\sum_{j=0}^n N_j(\xi)w_j}, \quad (3.8)$$

em que:

$$\binom{d}{l} = \frac{d!}{l!(d-l)!}. \quad (3.9)$$

Uma curva NURBS é obtida por:

$$\mathbf{C} = \mathbf{x}(\xi) = \sum_{i=0}^n R_i^p(\xi) \mathbf{B}_i, \quad (3.10)$$

sendo os pesos selecionados de maneira a se obter a geometria desejada. Analogamente uma superfície NURBS é obtida através das seguintes relações:

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{\hat{i}=0}^n \sum_{\hat{j}=0}^m N_{\hat{i},p}(\xi)M_{\hat{j},q}(\eta)w_{\hat{i},\hat{j}}}, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{x}(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) \mathbf{B}_{i,j}, \quad (3.12)$$

com  $w_{i,j}$  e  $w_{\hat{i},\hat{j}} \in \mathbb{R}$ , sendo  $i = \hat{i} = 0, 1, \dots, n$  e  $j = \hat{j} = 0, 1, \dots, m$ , correspondem aos pesos relativos às funções  $(N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta))$  e  $(N_{\hat{i},p}(\xi) M_{\hat{j},q}(\eta))$  respectivamente. Por fim, um sólido NURBS é obtido por:

$$R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)L_{k,r}(\zeta)w_{i,j,k}}{\sum_{\hat{i}=0}^n \sum_{\hat{j}=0}^m \sum_{\hat{k}=0}^l N_{\hat{i},p}(\xi)M_{\hat{j},q}(\eta)L_{\hat{k},r}(\zeta)w_{\hat{i},\hat{j},\hat{k}}}, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{B}_{i,j,k}, \quad (3.14)$$

onde  $w_{i,j,k}$  e  $w_{\hat{i},\hat{j},\hat{k}} \in \mathbb{R}$ , sendo  $i = \hat{i} = 0, 1, \dots, n$ ,  $j = \hat{j} = 0, 1, \dots, m$  e  $k = \hat{k} = 0, 1, \dots, l$ , cor-

respondem aos pesos relativos às funções  $(N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta))$  e  $(N_{\hat{i},p}(\xi) M_{\hat{j},q}(\eta) L_{\hat{k},r}(\zeta))$  respectivamente.

Na aplicação da IGA, as funções tentativa para velocidade e pressão, e as funções peso associadas a elas, apresentadas nas Eq. (??) à Eq. (2.30) como  $N$ , são equivalentes à  $R_i^p(\xi)$ ,  $R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta)$  e  $R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi, \eta, \zeta)$  para os casos unidimensional, bidimensional e tridimensional respectivamente. E a geometria é representada pelas Eq. (3.10), Eq. (3.12) e Eq. (3.14) dependendo da dimensão do problema em análise.

A integração numérica nas células é realizada através da quadratura Gaussiana. Considerando o domínio paramétrico de uma célula  $\tilde{\Omega}^e$  e o domínio parental  $\hat{\Omega}^e$  apresentados na Fig.3.1, definidos respectivamente em um espaço tridimensional pelas coordenadas  $\xi(\xi, \eta, \zeta)$  e  $\hat{\xi}(\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta})$ , a matriz jacobiana do mapeamento do espaço físico, com coordenadas  $\mathbf{x}(x, y, z)$ , para o espaço de quadratura, é definida por:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\hat{\xi}} = \frac{d\mathbf{x}}{d\xi} \frac{d\xi}{d\hat{\xi}} \quad (3.15)$$

O primeiro termo à direita da igualdade da Eq. (3.15) é calculado a partir das derivadas de Eq. (3.10), Eq. (3.12) e Eq. (3.14) e o segundo termo, considerando a célula  $\tilde{\Omega}^e = [\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}] \times [\zeta_k, \zeta_{k+1}]$ , calcula-se  $\xi, \eta, \zeta \in \tilde{\Omega}^e$  a partir de  $\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta} \in \hat{\Omega}^e$  através das seguintes relações:

$$\xi = \xi_i + (\hat{\xi} + 1) \left( \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{2} \right), \quad (3.16)$$

$$\eta = \eta_i + (\hat{\eta} + 1) \left( \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{2} \right) \quad (3.17)$$

e

$$\zeta = \zeta_i + (\hat{\zeta} + 1) \left( \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_i}{2} \right). \quad (3.18)$$

### 3.2.4 Parâmetros de estabilização

Considerando que nesse trabalho dois tipos de aproximações espaciais são utilizadas, uma baseada no FEM e outra baseada em IGA, adotam-se os parâmetros propostos por Takizawa, Tezduyar e Otoguro (2018) e Otoguro, Takizawa e Tezduyar (2020), que são adequados para ambas aproximações.

Para essa opção é necessário definir-se o tensor métrico do elemento no espaço. Para isso, inicia-se com a definição da matriz Jacobiana  $\mathbf{Q}$ , dada por:

$$\mathbf{Q} = \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right), \quad (3.19)$$

com  $\xi$  representando as coordenadas do espaço paramétrico. Para que a ordem polinomial seja levada em consideração na determinação dos parâmetros de estabilização, aplica-se uma mudança de escala na matriz  $\mathbf{Q}$ , através da matriz  $\mathbf{D}$ , conforme a seguinte expressão:

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}\mathbf{D}^{-1}. \quad (3.20)$$

Para elementos finitos com funções de forma polinomiais Lagrangianas de ordem  $p_i$ , definidas na direção  $i$  do espaço paramétrico, com  $-1 \leq \xi_i \leq 1$ , a matriz  $\mathbf{D}$  é definida como:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Para discretização utilizando IGA adota-se:

$$\mathbf{D} = \left( \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\xi}}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right), \quad (3.22)$$

com  $\bar{\boldsymbol{\xi}}$  representando as coordenadas do chamado espaço paramétrico preferido.

Para problemas em 1D,  $\mathbf{D}$  é definido como:

$$D = \frac{\Delta \bar{\boldsymbol{\xi}}}{\min_{a=1,\dots,p} \Delta \boldsymbol{\xi}_a}, \quad (3.23)$$

onde  $\Delta \bar{\boldsymbol{\xi}}$  é o comprimento do elemento de Bézier no espaço paramétrico (espaço preferido),  $p$  é o grau polinomial das funções base e  $\Delta \boldsymbol{\xi}_a$  é:

$$\Delta \boldsymbol{\xi}_a = \frac{\Delta \bar{\boldsymbol{\xi}}}{p} \sum_{b=0}^p \left( \mathbf{C}^{-1}_{ba} - \mathbf{C}^{-1}_{ba-1} \right), \quad (3.24)$$

a matriz  $\mathbf{C}^{-1}$  é o tensor de transformação de Bézier. Para múltiplas dimensões têm-se  $\mathbf{D}_{ij} = D^i \delta_{ij}$ , com  $D^i$  o valor de  $D$  na direção  $i$ .

A partir disso, o comprimento direcional do elemento é definido como:

$$h_{RQD} = 2(\mathbf{r} \mathbf{r} : \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.25)$$

sendo  $\mathbf{r}$  o vetor direção unitário da velocidade no elemento e  $\mathbf{G}$  uma matriz auxiliar, os quais são representados respectivamente como:

$$\mathbf{r} = \frac{\nabla \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|}{\|\nabla \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\|} \quad (3.26)$$

e

$$\mathbf{G} = \hat{\mathbf{Q}}^{-T} \cdot \hat{\mathbf{Q}}^{-1}. \quad (3.27)$$

O comprimento do elemento é limitado pelos mínimos e máximos valores representados abaixo:

$$h_{min} \equiv 2 \min_r \left( (\mathbf{r} : \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}} \right), \quad (3.28)$$

$$h_{max} \equiv 2 \max_r \left( (\mathbf{r} : \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}} \right). \quad (3.29)$$

Os parâmetros de estabilização são dados por:

$$\tau_{\text{SUPG}} = \tau_{\text{PSPG}} = \left( \frac{1}{\tau_{\text{SUGN1}}^2} + \frac{1}{\tau_{\text{SUGN2}}^2} + \frac{1}{\tau_{\text{SUGN3}}^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.30)$$

$$\nu_{\text{LSIC}} = \frac{h_{\text{RQD}}^2}{\tau_{\text{SUPG}}}, \quad (3.31)$$

onde:

$$\tau_{\text{SUGN1}}^{-2} = (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) : \mathbf{G}, \quad (3.32)$$

$$\tau_{\text{SUGN2}} = \frac{\Delta t}{2}, \quad (3.33)$$

e

$$\tau_{\text{SUGN3}}^{-1} = \nu \left( \mathbf{r}_{\text{reg}} \mathbf{r}_{\text{reg}} : \mathbf{G} + (1 - \mathbf{r}_{\text{reg}}^2) 4 h_{\text{min}}^{-2} \right), \quad (3.34)$$

sendo  $\mathbf{r}_{\text{reg}}$  definido como:

$$\mathbf{r}_{\text{reg}} = \frac{\nabla \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|}{\|\nabla \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\| + \varepsilon (\|\nabla \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\|)_0}, \quad (3.35)$$

com  $\varepsilon$  uma constante pequena e  $(\|\nabla \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\|)_0$  um valor de referência. Os termos  $\tau_{\text{SUGN1}}$ ,  $\tau_{\text{SUGN2}}$  e  $\tau_{\text{SUGN3}}$  são parâmetros correspondentes aos termos convectivos, iniciais e viscosos, respectivamente.

### 3.3 Verificação e aplicações

Para aplicação da IGA em problemas da DFC seguiu-se o mesmo procedimento matemático descrito ao longo do Cap. ??, sendo que a implementação computacional seguiu o roteiro apresentado no Alg. 1. Os exemplos escolhidos para a verificação do código computacional foram o escoamento sobre um cilindro 3D e o problema de escoamento sobre um canal com degrau utilizando células 3D. Os resultados obtidos são apresentados nas seções subsequentes.

#### 3.3.1 Escoamento sobre um cilindro - 3D

Na geração da geometria NURBS, correspondente ao problema do escoamento sobre um cilindro, utilizou-se um código previamente desenvolvido pela estudante durante seu mestrado (TONON, 2016). Por tratar-se de uma geometria de pequena complexidade, pôde-se gerá-la com um único *patch*, o qual é composto por um cubo com um cilindro inserido em seu centro. O processo de geração da malha, simplificadamente, consiste em se escolher vetores de *knots*, pontos de controle, e pesos adequados para a descrição de tal

geometria.

O código previamente desenvolvido, baseia-se na quantidade mínima de pontos de controle necessários para gerar uma circunferência completa (ver Fig. 3.5a). Para a obtenção exata de uma circunferência utilizam-se funções quadráticas e o vetor de *knots* na direção paramétrica  $\xi$  inicial é composto por:  $\Xi = [0, 0, 0, 1/4, 1/4, 1/4, 1/2, 1/2, 3/4, 3/4, 1, 1, 1]$ . A posição dos pontos de controle da circunferência e seus respectivos pesos foram obtidos de acordo com Piegl e Tiller (1996).

A obtenção da curva respectiva ao quadrado, que é descrita no espaço paramétrico correspondente a direção  $\xi$ , é consequência das escolhas realizadas para gerar a circunferência, logo, a curva possui o mesmo vetor de *knots* e funções quadráticas. Os pontos de controle para a formação do quadrado foram posicionados, no espaço físico, de forma a ser obtida a dimensão requerida à seção transversal quadrada que compõe a geometria do cubo, e de forma que os mesmos ficassem alinhados com os pontos de controle da circunferência na direção radial. Os pesos respectivos ao pontos de controle do retângulo são unitários. Na Fig. 3.5a pode-se observar a posição dos pontos de controle respectivos à circunferência e ao quadrado e as curvas resultantes desta discretização em linha vermelho pontilhado.

Na sequência o código realiza o procedimento de refinamento por inserção sucessiva de *knots* no vetor de *knots*. O algoritmo utilizado para este procedimento pode ser encontrado em Piegl e Tiller (1996). Na Fig. 3.5b apresenta-se um exemplo de pontos de controle gerados após a inserção de um novo *knot* no centro de cada *knot span* do espaço paramétrico inicial. A quantidade de *knots* a ser inserida depende da discretização necessária a análise numérica.

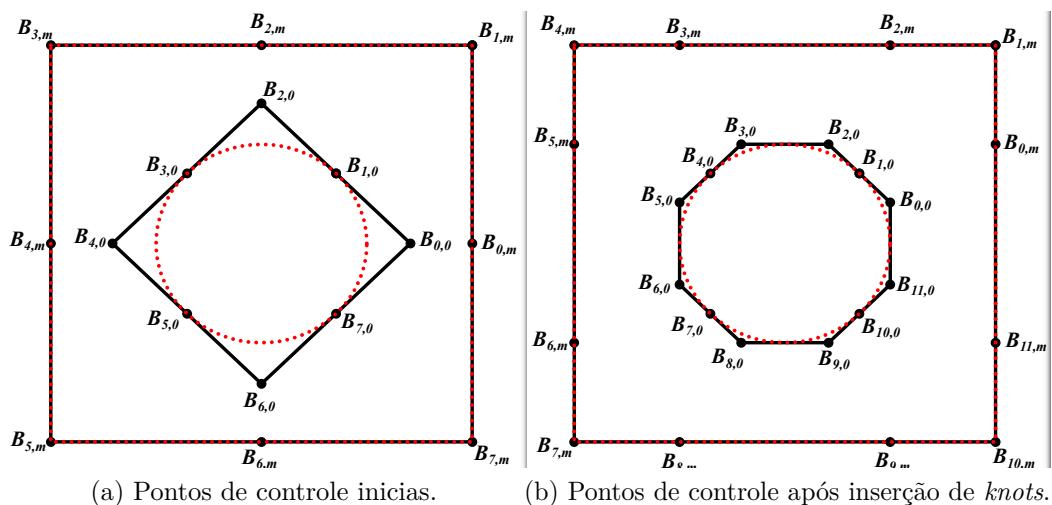


Figura 3.5 – Cilindro 3D: Geração curva NURBS

Para a obtenção de uma seção transversal da geometria em questão, gera-se uma superfície a partir da discretização na direção  $\eta$  do espaço paramétrico. O código utiliza um vetor de *knots* aberto, com os *knots* distribuídos uniformemente, e funções de forma

quadráticas. Os pontos de controle são distribuídos radialmente no espaço físico através de uma progressão geométrica unidirecional e seus pesos são determinados a partir de uma interpolação linear entre os pesos dos pontos de controle da circunferência e os pontos do quadrado. A quantidade mínima de pontos de controle respectiva à direção  $\eta$  é de  $q + 1$  pontos, sendo a quantidade final definida em função da análise numérica. Na Fig. 3.3.1, apresenta-se um exemplo de uma rede de pontos de controle, obtida a partir das curvas apresentadas em Fig. 3.5b com 9 pontos de controle na direção  $\eta$ . Na figura em questão omitiu-se a nomenclatura dos pontos de controle intermediários às curvas da circunferência e do quadrado para evitar a sobreposição da nomenclatura na figura.

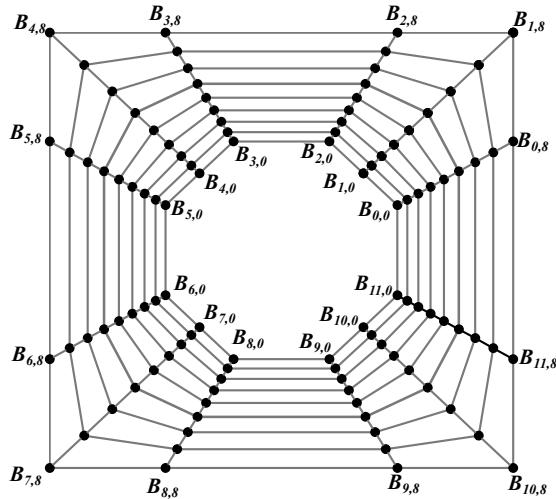


Figura 3.6 – Cilindro 3D: Geração superfície NURBS.

Nessa primeira etapa do trabalho, a direção paramétrica  $\zeta$ , respectiva à direção  $z$  da geometria física, foi discretizada com apenas uma célula, utilizando-se para isso vetor de *knots* abertos com distribuição uniforme de *knots*, e funções base quadráticas.

Visando a verificação do código de IGA 3D analisa-se o problema do escoamento sobre o cilindro para  $Re = 40, 100$  e  $1000$  (Eq. (2.103)). Para isso, gera-se uma malha com  $101 \times 71 \times 3$  pontos de controle nas direções paramétricas  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$  respectivamente, resultando em 6624 células. Na Fig. 3.7a apresentam-se as dimensões da geometria em questão, bem como as condições de contorno aplicadas, e na Fig. 3.7b apresenta-se a malha física resultante da discretização.

Adicionalmente, prescrevem-se nas paredes frontal e posterior, condição de parede lisa ( $u_z = 0$ ), e na *Saída* do escoamento condição de força de superfície nula ( $\sigma\mathbf{n} = \mathbf{0}$ ). O problema é simulado para um velocidade de entrada  $u_\infty = 1,0$ ,  $\rho = 1,0$ ,  $\Delta t = 0,05$ , e  $\rho_\infty = 0,5$ , sendo a viscosidade variada de acordo com o número de Reynolds desejado. Para o cálculo dos coeficientes aerodinâmicos  $C_D$ ,  $C_L$  e do número de Strouhal ( $St$ ) utilizam-se as equações apresentadas no Item 2.5.1.

Nas Figs. 3.8a e 3.8b, apresentam-se a variação ao longo do tempo dos coeficientes

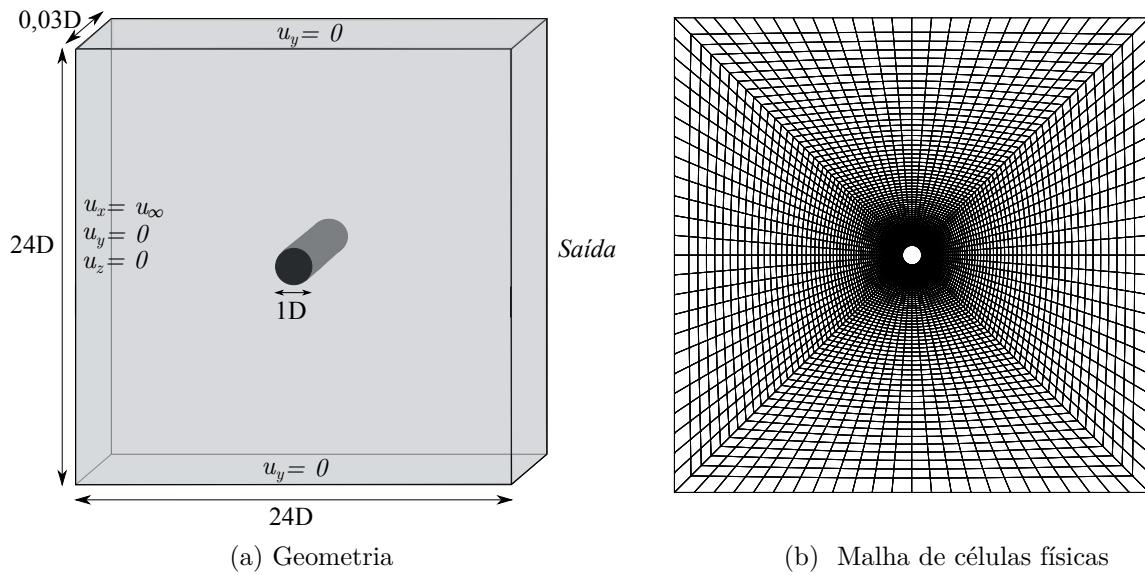


Figura 3.7 – Cilindro 3D: Geometria e malha de células físiscas

$C_D$  e  $C_L$ . Os valores obtidos com a malha isogeométrica 3D estão muito próximos ao obtidos com a malha de elementos finitos 2D (Item 2.5.1) para Reynolds 40 e 100. Para Reynolds 1000, nota-se que a variação ao longo do tempo dos valores de  $C_D$  e  $C_L$  para IGA resulta em valores mais elevados do que os obtidos com MEF. Tal diferença ainda deverá ser investigada, sendo que tanto as diferenças nas dimensões das malhas como a diferença que pode haver na convergência dos resultados ou a efeitos de 3D de vorticidade podem contribuir para isso. Os resultados obtidos para o histórico de  $C_D$  e  $C_L$  por Henderson (1997) para  $Re = 1000$  em análises tridimensionais baseadas em MEF, foram menores do que os 2D. Essa disparidade entre os resultados obtidos nesse trabalho e de Henderson (1997) podem estar relacionados com o fato de que a dimensão escolhida da malha na direção  $z$  foi muito pequena de maneira a impossibilitar que os efeitos tridimensionais do escoamento fossem adequadamente capturados.

Para o número de Strouhal, o valor obtido para  $Re = 100$  foi de 0,1681 e para  $Re = 1000$  de 0,2395. Nota-se que, embora os valores de  $C_D$  e  $C_L$  apresentem diferenças entre os resultados 2d baseados em elementos finitos e a malha 3D baseada em IGA, a frequência do desprendimento de vórtices obtida foi muito semelhante.

### 3.3.2 Escoamento em um canal com degrau

Este exemplo é amplamente utilizado na verificação de códigos para escoamentos incompressíveis, sendo sua geometria apresentada na Fig. 3.9. O problema consiste em prescrever-se um perfil parabólico de escoamento na entrada do canal, e condição de aderência ( $\mathbf{u} = 0$ ) nas demais paredes que estão contidas nos planos  $xz$  e  $yz$ , exceto na saída do canal, a qual possui como condição  $\sigma\mathbf{n} = \mathbf{0}$ . Para as paredes dos planos  $xy$ ,

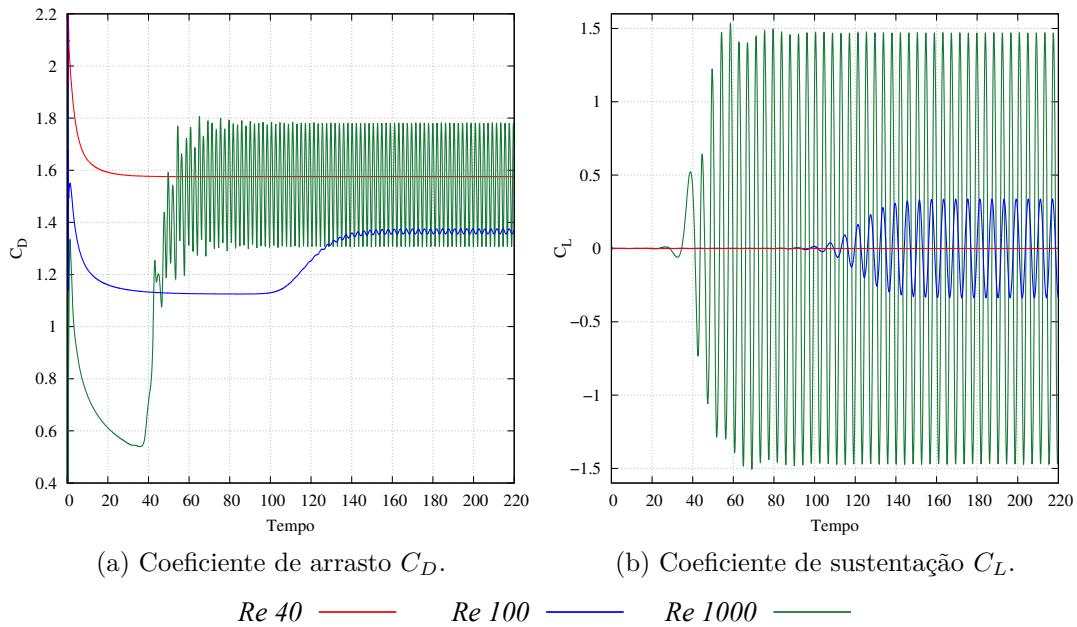


Figura 3.8 – Cilindro 3D: Coeficientes aerodinâmicos.

frontal e posterior, prescreveu-se condição de parede lisa ( $u_z = 0$ ).

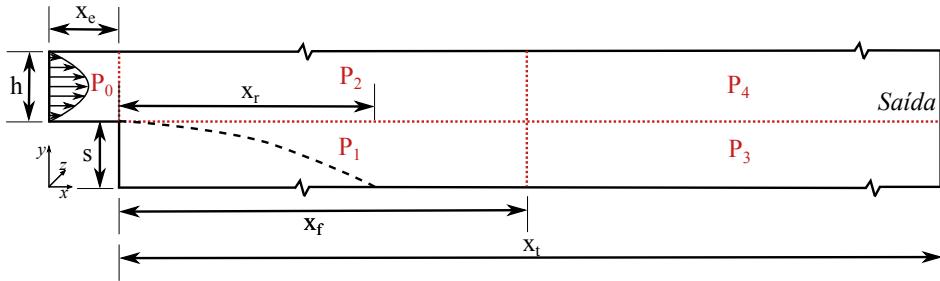


Figura 3.9 – Degrau 3D: Geometria.

As dimensões selecionadas para o canal foram  $h = 1,0m$ ,  $s = 0,94m$ ,  $x_e = 1,0m$ ,  $x_f = 15m$  e  $x_t = 30m$  e dimensão na direção  $z$  de  $0,1m$ . Adicionalmente, o perfil de velocidade na entrada do canal é descrito pela seguinte relação:

$$u_x = V_{max} \left( 1 - \left( \frac{(y - s) - h/2}{h/2} \right)^2 \right), \quad (3.36)$$

com velocidade  $V_{max} = 10m/s$  e  $u_y = u_z = 0$ .

O escoamento sobre o degrau é caracterizado por produzir áreas de recirculação onde o fluido se separa e forma vórtices. A distância entre o degrau e o ponto de recolamento do vórtice principal  $x_r$  é uma das principais características verificadas nesse problema. A dimensão dos vórtices varia em função do número de Re, a qual é calculada de acordo com Armaly et al. (1983), sendo expressa por:

$$\text{Re} = \frac{\rho \left( \frac{2V_{max}}{3} \right) 2h}{\mu}, \quad (3.37)$$

com  $\rho = 1\text{kg/m}^3$ . Foram selecionados para as análises 3 diferentes número de Reynolds: 100, 400 e 800, variando-se a viscosidade do fluido.

Para a geração da geometria NURBS, discretiza-se o canal em 5 *patches*, os quais são denominados  $P_0, P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$ , e podem ser observados na Fig. 3.9. Todas as direções paramétricas são discretizadas com vetores de *knots* abertos e com *knots* igualmente espaçados no interior do vetor, além de funções de forma quadráticas. Os pontos de controle para os *patches* 0, 1 e 2 foram distribuídos no espaço físico, direções  $x, y$  e  $z$  de maneira a se obter células igualmente espaçadas. Para os *patches* 3 e 4, na direção do espaço físico  $y$  e  $z$ , os pontos são posicionadas de maneira a gerar células uniformes, e, na direção  $x$ , são distribuídos de maneira a resultar numa progressão geométrica do tamanho das células, com as células aumentando de tamanho da esquerda para a direita, conforme pode ser observado na Fig. 3.10. Na Tab. 3.1 podem ser observados os números de pontos de controle utilizados em cada direção dos espaços paramétricos para cada *patch*, resultando em 60795 pontos de controle e 4800 células.

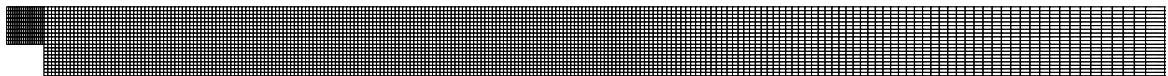


Figura 3.10 – Degrau 3D: Geometria e malha de células físicas

Tabela 3.1 – Número de pontos de controle por *patch*

<i>Patch</i>	$\xi$	$\eta$	$\zeta$
0	22	12	3
1	152	12	3
2	152	12	3
3	82	12	3
4	82	12	3

Na Fig. 3.11 são apresentados os comprimentos de recolamento do vórtice primário adimensionalizados ( $x_r/s$ ), juntamente com os resultados adaptados dos ensaios experimentais de Armaly et al. (1983) e os resultados de análises 2d de Williams e Baker (1999). Nota-se que os resultados obtidos estão próximos das referências para  $\text{Re} = 100$  e  $\text{Re} = 400$ , entretanto, para  $\text{Re} = 800$  nota-se um afastamento do presente trabalho, e do referente à análise 2D com relação ao experimento realizado por Armaly et al. (1983). Isto ocorre,

visto que o ensaio experimental foi realizado com um canal com 2m de comprimento na direção  $z$ , e a simulação atual com apenas uma célula nessa direção é incapaz de captar os fenômenos tridimensionais que ocorrem a medida que o número de Reynolds cresce. Na Fig.3.12 pode-se observar o campo de velocidade para os Reynolds estudados, e o aspecto do vórtice primário desenvolvido.

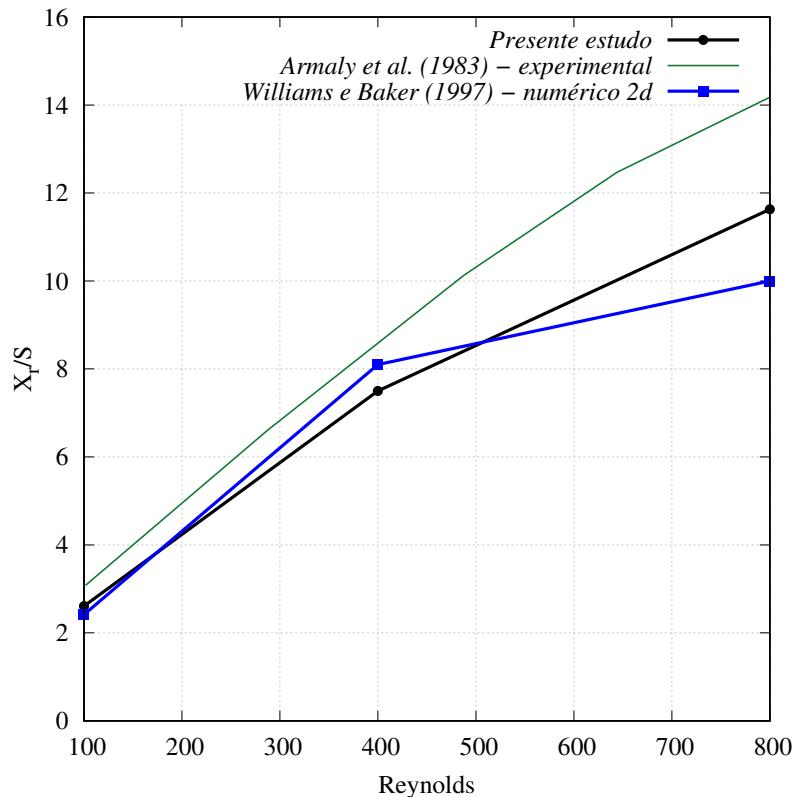


Figura 3.11 – Degrau 3D: Comprimento de recolamento do vórtice principal

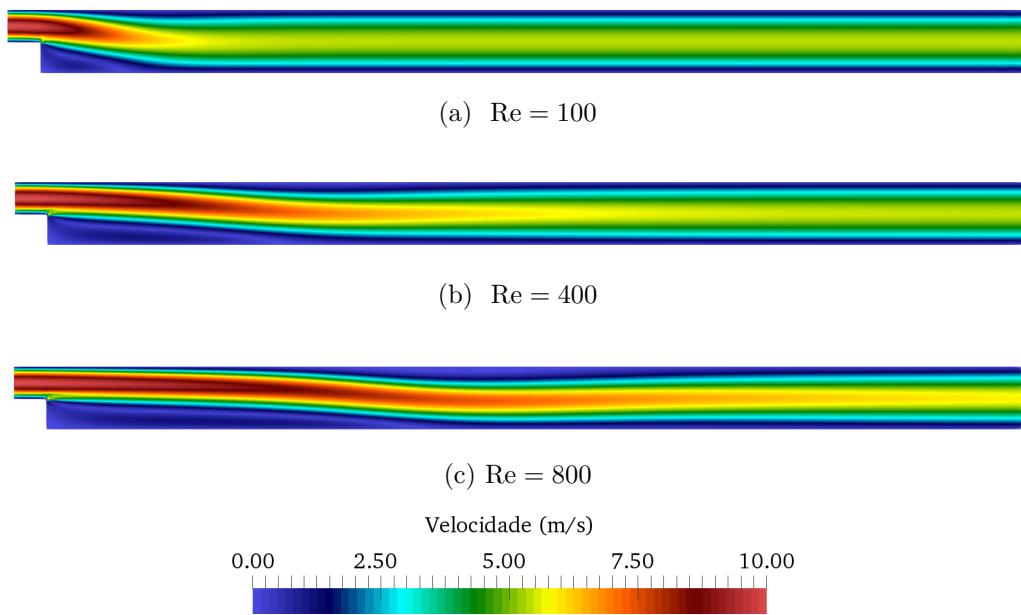


Figura 3.12 – Degrau 3D: Campo de velocidade.



CAPÍTULO

---

**4**

# DINÂMICA DOS SÓLIDOS COMPUTACIONAL

---



---

Assim como no caso da Mecânica dos Fluidos, um sólido é modelado considerando-o como um corpo contínuo, e seu movimento é governado também por um conjunto de equações provenientes das leis de: conservação da quantidade de movimento, conservação da massa e conservação da energia. Entretanto, diferentemente dos fluidos, os sólidos possuem resistência a esforços normais e tangenciais até que alcancem seu limite resistente, e por isso, apresentam deslocamentos e deformações finitos. Sendo os deslocamentos, ou posições atuais ao longo do tempo, as variáveis de interesse na resolução do conjunto de equações que descrevem seu comportamento. Por esse motivo, uma descrição do tipo Lagrangiana é mais adequada para essas análises.

Com respeito à escala de deslocamentos e de deformação, os sólidos podem apresentar comportamento linear ou não-linear, sendo as não linearidades de natureza geométrica (unicamente devidas à escala de deslocamentos) ou física (mudanças na relação constitutiva do material).

Ao se tratar de problemas elásticos com grandes deslocamentos, apenas as não linearidades geométricas são levadas em consideração, e em relação ao problema linear, altera-se a forma com que se considera o equilíbrio das forças no sólido. Em uma modelagem linear, onde um corpo sofre pequenos deslocamentos e deformações, o equilíbrio é realizado em relação a configuração inicial (que é muito próxima da atual). Já em uma análise não-linear, ver com mais detalhes os trabalhos de Ogden (1984) e Coda (2018), o equilíbrio é considerado na configuração atual.

Nesse estudo, é utilizada uma análise não-linear geométrica, visto que, em muitos problemas de IFE, como *flutter* e *buffeting*, grandes deslocamentos estão envolvidos. Além

disso, o sólido é descrito na forma Lagrangiana Total, e considera-se o equilíbrio dinâmico do mesmo.

A solução numérica é obtida através do método dos elementos finitos em abordagem posicional (CODA, 2003; CODA, 2018), onde as variáveis principais são as posições nodais. Escolhe-se trabalhar com elementos de cascas, uma vez que esses podem representar a maioria dos problemas estruturais 3D. No casos das cascas são adicionadas às incógnitas nodais vetores generalizados e um termo de que considera a variação linear da espessura do elemento para permitir o mapeamento completo do sólido.

## 4.1 Cinemática dos corpos deformáveis

Um sólido deformável quando sujeito à ações externas, sofre uma mudança de configuração. Na Fig. 4.1, pode-se observar um sólido na sua configuração inicial  $\Omega_x$ , com suas coordenadas materiais descritas por  $\mathbf{x}$ , que em outro instante, se transforma no domínio representado por  $\Omega_y$ , com coordenadas espaciais  $\mathbf{y}$ . A função que mapeia a mudança de configuração, da posição inicial para a atual, é chamada de  $\mathcal{F}$ .

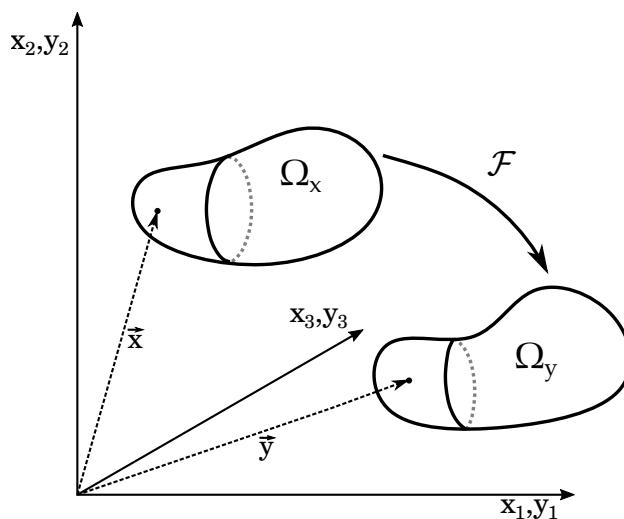


Figura 4.1 – Cinemática de sólido deformável

As deformações de um corpo são mensuradas neste trabalho através do tensor de deformações de Green-Lagrange, que trata-se de um medida objetiva Lagrangiana de deformação, sendo descrito de acordo com Ogden (1984) pela seguinte expressão:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad (4.1)$$

com  $\mathbf{C}$  sendo um tensor simétrico denominado de tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green, o qual é escrito como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t, \quad (4.2)$$

sendo  $\mathbf{A}$  o gradiente da função mudança de configuração, expresso matematicamente como:

$$\mathbf{A} = \nabla_{\mathbf{x}}(\mathcal{F}). \quad (4.3)$$

A partir do gradiente da função mudança de configuração pode-se estabelecer uma relação entre um vetor qualquer  $\mathbf{u}$  definido na configuração inicial e seu equivalente na configuração atual  $\mathbf{v}$  através da seguinte expressão:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} \quad (4.4)$$

Para a definição posteriormente das equações de equilíbrio em descrição Lagrangiana, duas importantes relações serão definidas aqui: mudança de volume e mudança de área que ocorrem na mudança de configuração.

Para estabelecer-se uma relação entre o volume inicial e final, define-se dois volume infinitesimais, um inicial  $dV_0$  e um final  $dV$ , apresentados na Fig. 4.2. O volume infinitesimal inicial  $dV_0$  pode ser calculado por:

$$dV_0 = (\mathbf{dx}^1 \wedge \mathbf{dx}^2) \cdot \mathbf{dx}^3 = \xi_{ijk} dx_i^1 dx_j^2 dx_k^3, \quad (4.5)$$

e o volume atual por:

$$dV = (\mathbf{dy}^1 \wedge \mathbf{dy}^2) \cdot \mathbf{dy}^3 = \xi_{ijk} dy_i^1 dy_j^2 dy_k^3, \quad (4.6)$$

com  $\mathbf{dx}^1$ ,  $\mathbf{dx}^2$  e  $\mathbf{dx}^3$  vetores que definem o volume inicial;  $\mathbf{dy}^1$ ,  $\mathbf{dy}^2$  e  $\mathbf{dy}^3$  os vetores que definem o volume atual;  $\xi_{ijk}$  é o tensor permutação de Levi-Cevita, com  $i=1,2,3$ ,  $j = 1,2,3$  e  $k = 1,2,3$ .

O infinitésimo de volume atual pode ser ainda escrito como:

$$dV = \det(\mathbf{A}) dV_0 = J dV_0, \quad (4.7)$$

que estabelece uma relação entre esses volumes, sendo  $J$  conhecido como determinante da transformação.

Para escrever a relação entre as áreas inicial e atual que ocorre na mudança de configuração se tomará como referência os cilindros da Fig. 4.3. Considerando que os vetores que definem a área inicial  $\mathbf{dA}_0$  e a área atual  $\mathbf{dA}$  são definidos respectivamente como:

$$\mathbf{dA}_0 = \mathbf{N} dA_0 \quad (4.8)$$

$$\mathbf{dA} = \mathbf{n} dA, \quad (4.9)$$

com  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{n}$  os versores unitários normais às áreas inicial  $dA_0$  e atual  $dA$ . O volume na configuração inicial ( $dV_0$ ) e na configuração atual ( $dV$ ) são calculados por:

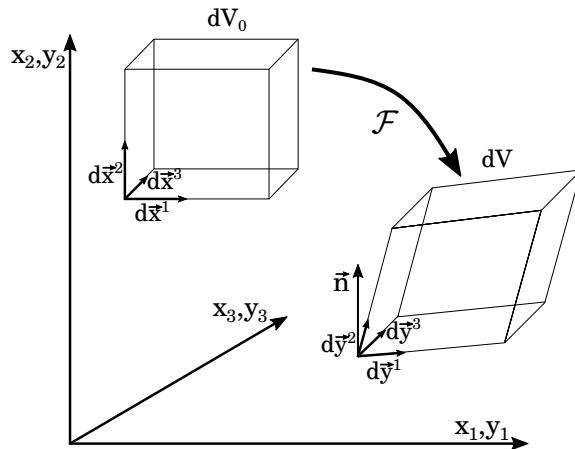


Figura 4.2 – Mudança no volume na mudança de configuração.

$$dV_0 = \mathbf{u} \cdot dA_0 \quad (4.10)$$

$$dV = \mathbf{v} \cdot dA, \quad (4.11)$$

com  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  os vetores que definem as alturas dos cilindros na posição inicial e atual respectivamente.

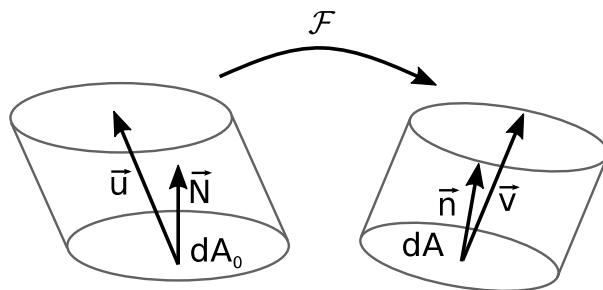


Figura 4.3 – Mudança na área na mudança de configuração.

Considerando a relação da Eq. (4.4), e a arbitrariedade de  $\mathbf{u}$ , escreve-se a seguinte expressão para relacionar as áreas inicial e atual:

$$\mathbf{n} dA = J \mathbf{B} \cdot \mathbf{N} dA_0, \quad (4.12)$$

com  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-t}$ . Essa relação é conhecida como Fórmula de Nanson.

## 4.2 Equilíbrio de corpos deformáveis

No estudo do equilíbrio de corpos deformáveis a análise da energia mecânica é um assunto de grande importância. A energia mecânica é formada basicamente por três parcelas: energia potencial das forças externas ( $\mathbb{P}$ ), energia de deformação ( $\mathbb{U}_e$ ) e energia cinética ( $\mathbb{K}$ ). A energia total mecânica ( $\Pi$ ) é um funcional obtido pela soma dessas três parcelas, sendo escrita da seguinte maneira:

$$\Pi = \mathbb{P} + \mathbb{K} + \mathbb{U}_e. \quad (4.13)$$

O princípio da estacionariedade da energia, define que um corpo quando em equilíbrio apresenta a primeira variação do funcional de energia mecânica nula, sendo o equilíbrio estável quando a posição de equilíbrio representa um mínimo local para a energia mecânica total. O princípio da estacionariedade, utilizando uma descrição das equações de equilíbrio em posições, pode ser expresso matematicamente como:

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{y}} \cdot \delta\mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad (4.14)$$

ou, dada a arbitrariedade de  $\delta\mathbf{y}$ ,

$$\delta\Pi = \delta\mathbb{P} + \delta\mathbb{K} + \delta\mathbb{U}_e. \quad (4.15)$$

### 4.2.1 Equações globais de equilíbrio em descrição Euleriana e variação do funcional de energia mecânica

O sólido da Fig. 4.4 está sujeito a forças de corpo  $\mathbf{b}$  e forças de superfície  $\mathbf{p}$ , com  $\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{n}$ , sendo  $\boldsymbol{\sigma}$  o tensor de tensões de Cauchy e  $\mathbf{n}$  equivalente ao versor unitário normal a superfície. Aplicando-se a segunda Lei de Newton, considerando que a configuração do meio contínuo apresentada é a atual, chega-se a seguinte expressão que descreve o equilíbrio global do mesmo:

$$\int_V \mathbf{b} dV + \int_A \boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \rho \ddot{\mathbf{y}} dV, \quad (4.16)$$

com  $\rho$  representando a massa específica do material que compõe o sólido e  $\ddot{\mathbf{y}}$  é a derivada material da velocidade do ponto material (aceleração do corpo).

Aplicando o teorema de Gauss sobre a Eq.(4.16), pode-se escrever também as equações de equilíbrio global em descrição Euleriana da seguinte forma:

$$\int_V \mathbf{b} dV + \int_V \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^t) dV = \int_V \rho \ddot{\mathbf{y}} dV. \quad (4.17)$$

Baseado na Eq. (4.14) pode-se reescrever a Eq. (4.17) como:

$$\delta\Pi = \int_V (-\mathbf{b} - \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^t) + \rho \ddot{\mathbf{y}}) \cdot \delta\mathbf{y} dV = 0. \quad (4.18)$$

Desta forma deve haver uma igualdade entre os termos da Eq. (4.18) e os termos

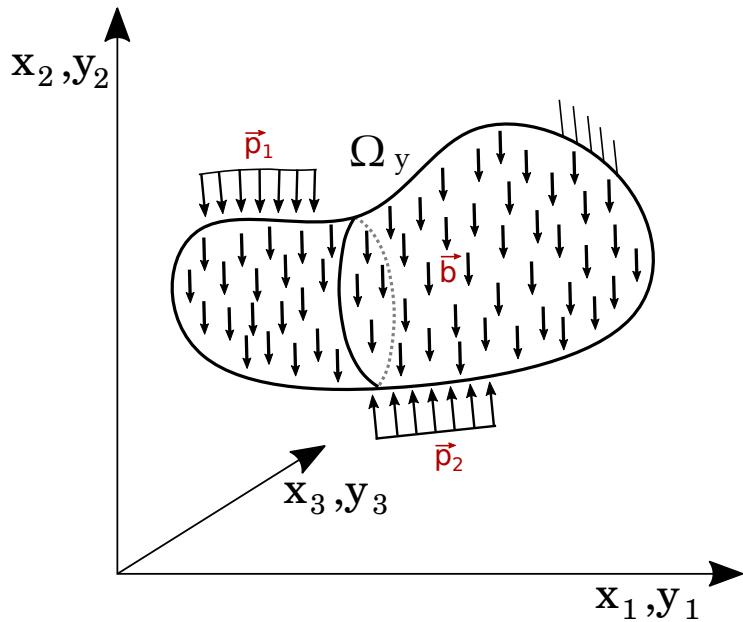


Figura 4.4 – Sólido sujeito a um conjunto de carregamento externo.

$\delta\mathbb{P}$ ,  $\delta\mathbb{K}$  e  $\delta\mathbb{U}_e$ . Antes de abordar essa relação, o segundo termo de Eq. (4.18) será desdobrado em dois:

$$\int_V -\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^t) \cdot \delta \mathbf{y} dV = - \int_A \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{y} dA + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \nabla_{\mathbf{y}} \delta \mathbf{y} dV, \quad (4.19)$$

ou,

$$\int_V -\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^t) \cdot \delta \mathbf{y} dV = - \int_A \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{y} dA + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV., \quad (4.20)$$

com  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sendo o tensor de deformação de engenharia.

As parcelas de  $\delta\mathbb{P}$ ,  $\delta\mathbb{K}$  e  $\delta\mathbb{U}_e$  são relacionadas aos termos da Eq. (4.18) como:

$$\delta\mathbb{P} = - \int_V \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{y} - \int_A \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{y} dA \quad (4.21)$$

$$\delta\mathbb{K} = \int_V \rho \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} dV \quad (4.22)$$

$$\delta\mathbb{U}_e = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV. \quad (4.23)$$

Dessa forma, uma outra maneira de se expressar as equações global de equilíbrio Euleriano é:

$$-\int_V \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{y} dV - \int_A \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{y} dA + \int_V \rho \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = 0. \quad (4.24)$$

A equivalência entre a equação de equilíbrio obtida pela primeira lei de Euler e os termos da variações do potencial de energia mecânica total é apresentada de maneira detalhada em Coda (2018).

### 4.2.2 Equação da conservação da massa

A massa pode ser calculada em qualquer instante de tempo ( $t$ ) da análise, e considerando-se que a massa não possa ser retirada ou criada, a equação da conservação da massa ( $M$ ) define que:

$$M = \int_{V_0} \rho_0 dV_0 = \int_{V(t)} \rho(t) dV. \quad (4.25)$$

Considerando a Eq.4.7, a conservação da massa pode ainda ser expressa como:

$$M = \int_{V_0} \rho(t) J(t) dV_0. \quad (4.26)$$

### 4.2.3 Equações globais de equilíbrio em descrição Lagrangiana

Partindo-se da Eq. (4.16) do equilíbrio Euleriano, e utilizando as relações para a mudança de volume e área apresentadas nas Eq. (4.7) e Eq. (4.12) respectivamente, em conjunto com a equação da conservação da massa (Eq. (4.25)), chega-se a:

$$\int_{V_0} \mathbf{b}^0 dV_0 + \int_{A_0} J\boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{N} dA_0 = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} dV_0, \quad (4.27)$$

com  $\mathbf{b}^0$  sendo as forças de corpo descritas na configuração inicial. Considerando que o tensor das tensões de Piola Kirchhoff de primeira espécie  $\mathbf{P}$  é escrito como  $\mathbf{P}^t = J\boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{B}$ , pode-se rescrever a Eq. (4.27) como:

$$\int_{V_0} \mathbf{b}^0 dV_0 + \int_{A_0} \mathbf{P}^t \cdot \mathbf{N} dA_0 = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} dV_0, . \quad (4.28)$$

Como consequência a versão da Eq. (4.24) em descrição Lagrangiana é descrita por:

$$-\int_{V_0} \mathbf{b}^0 \cdot \delta \mathbf{y} dV_0 - \int_{A_0} \mathbf{p}^0 \cdot \delta \mathbf{y} dA_0 + \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} dV_0 + \int_{V_0} \mathbf{P}^t : \delta \mathbf{A} dV_0 = 0., \quad (4.29)$$

com  $\mathbf{p}^0$  sendo as forças de superfície na configuração inicial.

Seguindo a metodologia de Coda (2018), deseja-se trabalhar com o segundo tensor de tensões de Piola Kirchhoff ( $\mathbf{S}$ ), o qual, ao contrário de  $\mathbf{P}$ , é sempre simétrico. Dessa forma, utiliza-se do fato que:

$$\mathbf{P} = \mathbf{S}^t \cdot \mathbf{A}, \quad (4.30)$$

escreve-se a equação do equilíbrio Lagrangiano local que será utilizada nas aproximações do MEF:

$$-\int_{V_0} \mathbf{b}^0 \cdot \delta \mathbf{y} dV_0 - \int_{A_0} \mathbf{p}^0 \cdot \delta \mathbf{y} dA_0 + \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} dV_0 + \int_{V_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV_0 = 0, \quad (4.31)$$

#### 4.2.4 Modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff

A lei constitutiva hiperelástica de Saint-Venant-Kirchhoff estabelece uma relação linear entre o tensor das tensões de Piola Kirchhoff de segunda espécie e o tensor de deformação de Green, e pode ser escrita pela expressão generalizada da energia de deformação por:

$$u_e(E) = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbf{E}, \quad (4.32)$$

ou, em notação indicial:

$$u_e(E) = \frac{1}{2} E_{kl} C_{klij} E_{ij} \quad (4.33)$$

com  $\mathbb{C}$  representando o tensor constitutivo elástico isotrópico, que é um tensor de quarta ordem definido como:

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \left( \kappa - \frac{2}{3} G \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (4.34)$$

sendo  $\delta_{ij}$  o delta de Kronecker,  $\kappa$  e  $G$  os módulos volumétrico e de cisalhamento respectivamente, os quais são calculados através das seguintes relações:

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3} G, \quad (4.35)$$

$$G = \frac{\mathbb{E}}{2(1+\nu)}, \quad (4.36)$$

$$\lambda = \frac{\nu \mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (4.37)$$

com  $\mathbb{E}$  sendo o módulo de elasticidade longitudinal e  $\nu$  o coeficiente de Poisson. Ressalta-se que essa lei constitutiva aqui utilizada é adequada para grandes deslocamentos, entretanto, a mesma não é adequada para grandes deformações.

### 4.3 Método dos Elementos Finitos Posicional

#### 4.3.1 Elemento finito de Casca

As cascas são sólidos que possuem uma de suas dimensões muito menor do que as outras. A cinemática utilizada para os elementos finitos de casca é aquela apresentada em Sanches e Coda (2010b), Sanches e Coda (2010a), na qual aplica-se uma aproximação das configurações do sólido baseada em posições e vetores generalizados como graus de liberdade. A proposta não utiliza o conceito de rotações como graus de liberdade, propiciando um método que conserva o momento angular e linear para grandes deslocamentos de corpo rígido quando utilizado o integrador temporal de Newmark.

As funções que definem a mudança de configuração para a superfície média da casca, conforme pode ser observada na Fig. 4.5, são definidas como:

$$\mathcal{F}^{m0} = \mathbf{x}^m(\xi_1, \xi_2, \mathbf{X}_l) = N_l(\xi_1, \xi_2)\mathbf{X}_l \quad (4.38)$$

$$\mathcal{F}^{m1} = \mathbf{y}^m(\xi_1, \xi_2, \mathbf{Y}_l) = N_l(\xi_1, \xi_2)\mathbf{Y}_l, \quad (4.39)$$

com  $\mathcal{F}^{m0}$  sendo a função mapeamento da superfície média das coordenadas do domínio paramétrico, definidas por  $\xi$ , para o domínio inicial. Já  $\mathcal{F}^{m1}$  é a função mapeamento da superfície média do domínio paramétrico para o domínio atual.  $\mathbf{X}_l$  e  $\mathbf{Y}_l$  representam as coordenadas do nó  $l$  do elemento nas configurações inicial e atual respectivamente, e,  $N_l$  representa a função de forma do nó  $l$ .

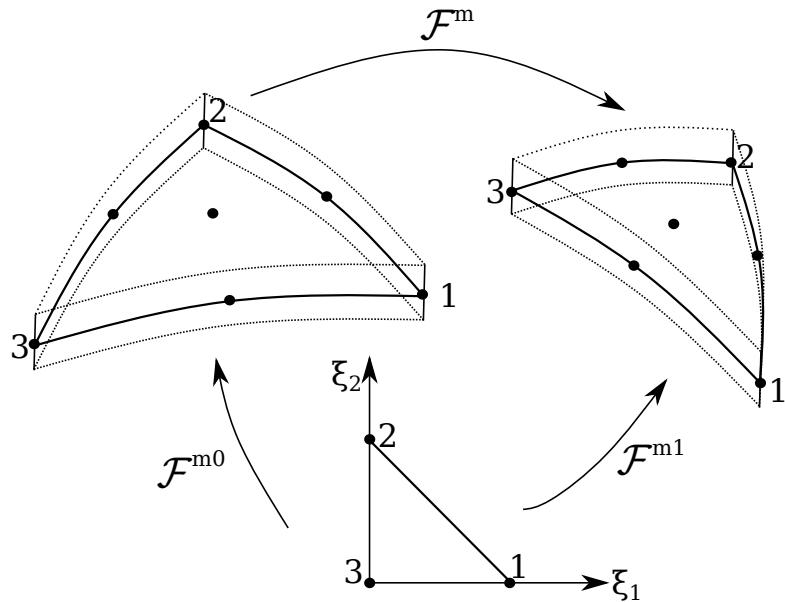


Figura 4.5 – Mapeamento da superfície média.

Para completar a cinemática do casca, as coordenadas iniciais e atuais de qualquer ponto da casca podem ser calculadas pela adição às aproximações apresentadas nas Eq. (4.38) e Eq. (4.39) de vetores posição partindo da superfície média, conforme Fig. 4.6. Dessa forma pode-se escrever as coordenadas de um ponto como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^m + \mathbf{v}^0 \quad (4.40)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^m + \mathbf{v}^1, \quad (4.41)$$

com  $\mathbf{v}^0$  e  $\mathbf{v}^1$  sendo os vetores posição para a configuração inicial (perpendicular à superfície média) e atual respectivamente, que são expressos da seguinte forma:

$$\mathbf{v}^0 = \frac{h_0}{2} N_l(\xi_1, \xi_2) \mathbf{V}_l^0 \xi_3, \quad (4.42)$$

$$\mathbf{v}^1 = \frac{h_0}{2} N_l(\xi_1, \xi_2) \mathbf{V}_l^1 [\xi_3 + \alpha(\xi_1, \xi_2) \xi_3^2], \quad (4.43)$$

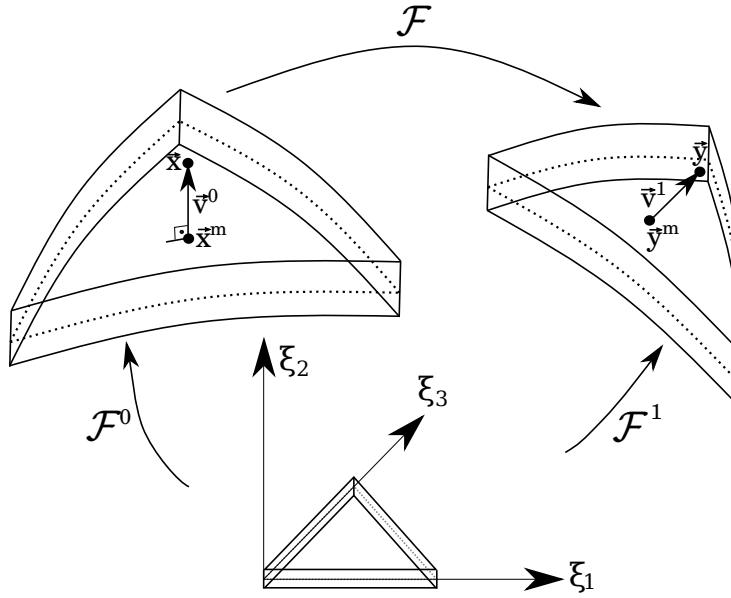


Figura 4.6 – Vetores de posição.

com  $h_0$  representando a espessura média inicial do elemento de casca,  $\mathbf{V}_l^0$  e  $\mathbf{V}_l^1$  o vetor de posição do nó  $l$  nas configurações inicial e atual, e  $\alpha$  é chamada de taxa linear de variação da espessura e é parametrizada por seus valores nodais  $\Lambda_l$  da seguinte forma:

$$\alpha(\xi_1, \xi_2) = N_l(\xi_1, \xi_2) \Lambda_l. \quad (4.44)$$

Por fim, o mapeamento posicional da casca nas configurações inicial e atual é descrito por:

$$\mathcal{F}^0 = N_l(\xi_1, \xi_2) \mathbf{X}_l + \frac{h_0}{2} N_l(\xi_1, \xi_2) \mathbf{V}_l^0 \xi_3 \quad (4.45)$$

$$\mathcal{F}^1 = N_l(\xi_1, \xi_2) \mathbf{Y}_l + \frac{h_0}{2} N_l(\xi_1, \xi_2) \mathbf{V}_l^1 [\xi_3 + \alpha(\xi_1, \xi_2) \xi_3^2]. \quad (4.46)$$

As equações Eq. (4.45) e Eq. (4.46) apresentam sete parâmetros incógnitos em cada nó  $l$ : 3 posições ( $\mathbf{Y}_l$ ), 3 componentes do vetor generalizado ( $\mathbf{V}_l^i$ ) e o valor nodal da variação linear da deformação na espessura  $\Lambda_l$ . A partir desse ponto os parâmetros incógnitos serão descritos por uma única variável  $\mathbf{Y}_l^i$ , com  $i = 0, 1$  e  $2$  representando as posições,  $i = 3, 4$  e  $5$  as componentes do vetor generalizado e  $i = 6$  a taxa de variação linear da espessura.

Para iniciar-se a descrição do MEF posicional, adiciona-se mais um termo à Eq. (4.31) respectivo a forças concentradas nodais e fica-se com a seguinte definição para as equações de equilíbrio Lagrangiana:

$$-\mathbf{F}_l \delta \mathbf{Y}_l - \int_{V_0} \mathbf{b}^0 \cdot \delta \mathbf{y} dV_0 - \int_{A_0} \mathbf{p}^0 \cdot \delta \mathbf{y} dA_0 + \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} dV_0 + \int_{V_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV_0 = 0, \quad (4.47)$$

sendo o termo  $-\mathbf{F}_l$  respectivo a força concentrada aplicada sobre o nó  $l$ . O tensor  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{Y})$

é função de  $\mathbf{A}$ , e pode ser obtido em função das posições através de  $\mathcal{F}^0$  e  $\mathcal{F}^1$  como:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^1 (\mathbf{A}^0)^{-1}. \quad (4.48)$$

Considerando uma aproximação tradicional das variáveis de elementos finitos, tem-se:

$$\delta\mathbf{y} = N_l(\xi_1, \xi_2) \delta\mathbf{Y}_l, \quad (4.49)$$

$$\mathbf{b}^0 = N_l(\xi_1, \xi_2) \mathbf{B}_l^0, \quad (4.50)$$

$$\mathbf{p}^0 = N_l(\xi_1, \xi_2) \mathbf{Q}_l^0, \quad (4.51)$$

$$\ddot{\mathbf{y}} = N_l(\xi_1, \xi_2) \ddot{\mathbf{Y}}_l, \quad (4.52)$$

da arbitrariedade de  $\delta\mathbf{Y}$  as equações do equilíbrio em função das posições nodais são escritas como:

$$\begin{aligned} & -\mathbf{F}_l - \int_{V_0^{el}} N_m(\boldsymbol{\xi}) N_l(\boldsymbol{\xi}) dV_0^{el} \mathbf{B}_m^0 - \int_{A_0^{el}} N_m(\boldsymbol{\xi}) N_l(\boldsymbol{\xi}) dA_0^{el} \mathbf{Q}_m^0 \\ & + \int_{V_0^{el}} \rho_0 N_m(\boldsymbol{\xi}) N_l(\boldsymbol{\xi}) dV_0^{el} \ddot{\mathbf{Y}}_m + \int_{V_0^{el}} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{Y}_l} dV_0^{el}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

### 4.3.2 Integração temporal e técnica de solução

As equações do equilíbrio baseadas em posição podem ser apresentadas sinteticamente como:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{Y}} = \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial \mathbf{Y}} + \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial \mathbf{Y}} + \frac{\partial \mathbb{U}_e}{\partial \mathbf{Y}} = \mathbf{0}, \quad (4.54)$$

ou ainda,

$$-\mathbf{F}^{ext}(t) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{F}^{int}(\mathbf{Y}) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{0}, \quad (4.55)$$

na qual  $\mathbf{F}^{int}(\mathbf{Y})$  representa as forças internas provenientes da variação da energia potencial interna,  $\mathbf{M}$  é a conhecida como matriz de massa proveniente da variação da energia cinética e  $\mathbf{F}^{ext}$  representam as forças externas na estrutura fruto da variação da energia potencial das forças externas. O termo  $\mathbf{C}$  representa uma matriz de amortecimento proporcional a massa, e  $\dot{\mathbf{Y}}$  a velocidade nodal.

A integração temporal das equações apresentadas na Eq. (4.55) inicia-se com a discretização temporal do tempo de maneira que:

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t, \quad (4.56)$$

na qual  $t_{n+1}$  representa o tempo no instante atual,  $t_n$  o instante de tempo anterior e  $\Delta t$  o intervalo de tempo utilizado na discretização. Utilizando as aproximações de Newmark, posições, velocidade e aceleração nos tempos  $n+1$  e  $n$  são relacionados por:

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + \Delta t \dot{\mathbf{Y}}_n + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{Y}}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{Y}}_{n+1}, \quad (4.57)$$

$$\dot{\mathbf{Y}}_{n+1} = \dot{\mathbf{Y}}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{Y}}_n + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{Y}}_{n+1}, \quad (4.58)$$

em que  $\beta$  e  $\gamma$  são parâmetros dependentes do comportamento assumido para a aceleração, adotados nesse trabalho como  $\gamma = 1/2$  e  $\beta = 1/4$  para uma aceleração constante.

Considerando a discretização temporal apresentada em Eq. (4.56) e aplicando-se a Eq. (4.57) e Eq. (4.58) à Eq. (4.55) de maneira a escrever-se a equação somente em função das posições nodais, tem-se, para um instante  $n + 1$  a seguinte relação:

$$\mathbf{F}_{n+1}^{int} - \mathbf{F}_{n+1}^{ext} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \mathbf{Y}_{n+1} - \mathbf{M} \mathbf{Q}_n + \mathbf{C} \mathbf{R}_n + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \mathbf{Y}_{n+1} - \gamma \Delta t \mathbf{C} \mathbf{Q}_n = \mathbf{0}, \quad (4.59)$$

em que  $\mathbf{Q}_n$  e  $\mathbf{R}_n$  representam os termos dependentes apenas de velocidades, acelerações e posições do instante anterior, dados por:

$$\mathbf{Q}_n = \frac{\mathbf{Y}_n}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{\mathbf{Y}}_n}{\beta \Delta t} + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{Y}}_n, \quad (4.60)$$

$$\mathbf{R}_n = \dot{\mathbf{Y}}_n + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{Y}}_n. \quad (4.61)$$

Pode-se escrever ainda o problema não linear definido por (4.59) em função do resíduo da equação governante discretizada no espaço e no tempo, tal que:

$$\mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}) = \mathbf{F}_{n+1}^{int} - \mathbf{F}_{n+1}^{ext} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \mathbf{Y}_{n+1} - \mathbf{M} \mathbf{Q}_n + \mathbf{C} \mathbf{R}_n + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \mathbf{Y}_{n+1} - \gamma \Delta t \mathbf{C} \mathbf{Q}_n = \mathbf{0}. \quad (4.62)$$

O problema não linear da Eq. (4.62) é resolvido por meio do método iterativo de Newton-Raphson. Para isso, realiza-se uma expansão em série de Taylor de primeira ordem:

$$\mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}^{i+1}) \approx \mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}^i) + \Delta \mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}^i) \Delta \mathbf{Y}_i \quad (4.63)$$

em que  $i$  indica o índice da iteração atual. Na primeira iteração para o cálculo de  $\mathbf{Y}_{n+1}$  utiliza-se como predição da iteração anterior os valores das variáveis no passo de tempo  $n$ . O método de Newton-Raphson consiste em resolver o seguinte sistema:

$$\Delta \mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}^i) \Delta \mathbf{Y}^i = -\mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}^i) \quad (4.64)$$

com:

$$\Delta \mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}^i) = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{Y}^2} = \frac{\partial^2 \mathbb{U}_e}{\partial \mathbf{Y}^2} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t}. \quad (4.65)$$

A cada iteração de Newton-Raphson atualiza-se a posição, a aceleração e a velocidade de acordo com as seguintes equações:

$$\mathbf{Y}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{Y}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{Y}^i \quad (4.66)$$

$$\ddot{\mathbf{Y}}_{n+1}^{i+1} = \frac{\mathbf{Y}_{n+1}^{i+1}}{\beta \Delta t^2} + \mathbf{Q}_n \quad (4.67)$$

$$\dot{\mathbf{Y}}_{n+1}^{i+1} = \frac{\gamma \mathbf{Y}_{n+1}^{i+1}}{\beta \Delta t} + \mathbf{R}_n - \gamma \Delta t \mathbf{Q}_n \quad (4.68)$$

### 4.3.3 Implementação Computacional

Emprega-se o programa para análise não linear de estruturas de casca cedido pelo professor Humberto Breves Coda (CODA; PACCOLA, 2007; CODA; PACCOLA, 2008), o qual segue a formulação descrita neste texto e é implementado em linguagem FORTRAN, com paralelização em protocolo MPI.

O algoritmo implementado foi criteriosamente estudado de forma a permitir a implementação do acoplamento, sendo apresentado em Alg. 2.

#### Algoritmo 2 Algoritmo para problemas de dinâmica dos sólidos computacional

1: **para** o passo de tempo 0 até T **faça**

2:     *i* = 0;

3:     Predição da solução:

$$\mathbf{Y}_{n+1}^0 = \mathbf{Y}_n, \quad (4.69)$$

$$\dot{\mathbf{Y}}_{n+1}^0 = \dot{\mathbf{Y}}_n, \quad (4.70)$$

$$\ddot{\mathbf{Y}}_{n+1}^0 = \ddot{\mathbf{Y}}_n; \quad (4.71)$$

4:     Calcula-se nível de força aplicado  $\mathbf{F}_{n+1}^{ext}(t_{n+1})$  e/ou as posições prescritas  $\mathbf{Y}_{n+1}$ ;

5:     Calculam-se os valores de  $\mathbf{Q}_n$  (Eq. (4.60)) e  $\mathbf{R}_n$  (Eq. (4.61));

6:     **enquanto** ( $\epsilon <$  tolerância) **faça**

7:         *i*++;

8:         Cálculo do incremento da variável do problema:  $\mathbf{Y}_{n+1}^i$  de acordo com a Eq. (4.64);

9:         Atualização da solução: calculada de acordo com Eq. (4.66), Eq. (4.67) e Eq. (4.68).

10:       Cálculo do erro:

$$\epsilon = \|\Delta \mathbf{R}_S (\mathbf{Y}_{n+1}^{i+1})\|_{L^2} \quad (4.72)$$

ou,

$$\epsilon = \|\Delta \mathbf{Y}_{n+1}^{i+1}\|_{L^2} \quad (4.73)$$

11:       **fim enquanto**

12:       **fim para**

## 4.4 Exemplo de aplicação - Casca cilíndrica com *snap through* dinâmico

Nesta seção é apresentada uma simulação feita com o código cedido pelo professor Humberto Breves Coda para problemas de análise não-linear geométrica de cascas. Esta análise foi realizada com o objetivo de estudar o programa a ser empregado na pesquisa.

O problema clássico analisado trata-se de um casca cilíndrica submetida a um carregamento concentrado em seu centro geométrico. Proposto inicialmente no trabalho de (KUHL; RAMM, 1999), o problema apresenta grande não-linearidade geométrica devido ao efeito de *snap-through*.

A geometria do problema em questão é apresentada na Fig. 4.7a, sendo a espessura da casca equivalente a 0,1 m. Como condições de contorno, têm-se o deslocamento restrito nas direções  $x, y, z$  para as bordas retas que formam a geometria da casca. A malha de elementos finitos que representa a superfície média da casca utilizada pode ser visualizada na Fig. 4.7b, a qual é composta por 32 elementos cúbicos e 49 nós.

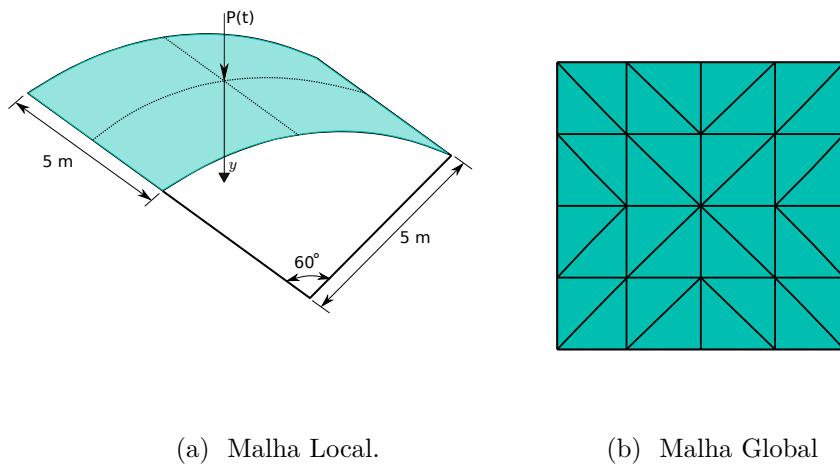
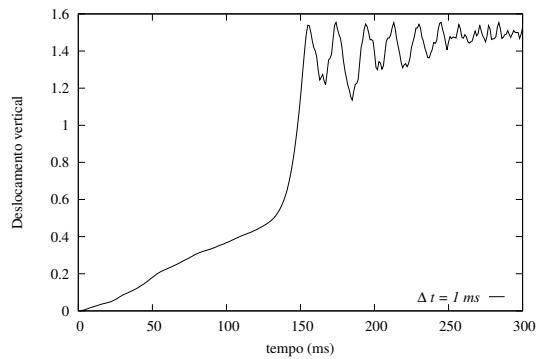


Figura 4.7 – Casca: Geometria e Malha.

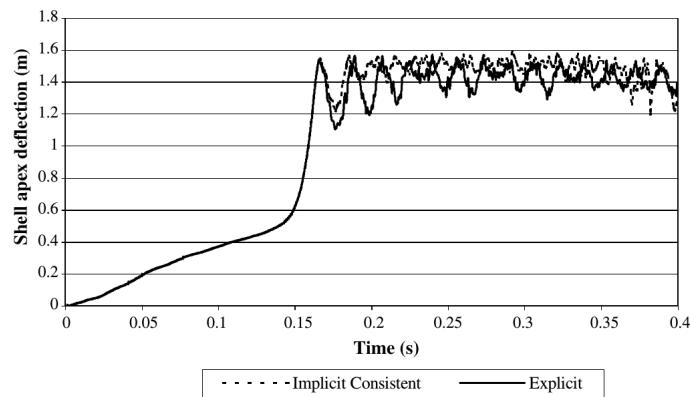
O carregamento  $P(t)$  é aplicado linearmente no intervalo  $t = 0s$  até  $t = 0,2s$ , com  $P(0) = 0kN$  e  $P(2s) = 50000kN$ , e então mantido constante. As características físicas do material utilizado são:  $\mathbb{E} = 200GPa$ ,  $\nu = 0,25$  e  $\rho = 10000kg/m^3$  e o passo de tempo adotado na simulação é  $\Delta_t = 0,001s$ .

O deslocamento vertical do nó central da casca pode ser visualizado na Fig. 4.8a. O resultado obtido está de acordo com os resultados de Argyris, Papadrakakis e Mouroutis (2003), conforme pode ser visto na Fig. 4.8b e o campo de deslocamentos nos instantes  $t = 0s$ ,  $t = 100ms$  e  $t = 155ms$  são apresentados na Fig. 4.9.

Embora a implementação do programa de cascas não seja objetivo deste trabalho, e essa análise tenha objetivo de estudar o código a ser empregado, ela também traz indício da robustez e precisão da formulação escolhida.



(a) Presente trabalho.



(b) Referência

Fonte: Argyris, Papadrakakis e Mouroutis (2003)

Figura 4.8 – Casca: Deslocamento vertical nó central.

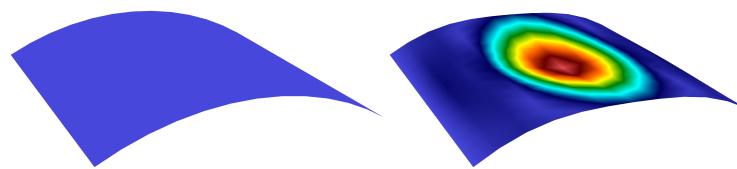
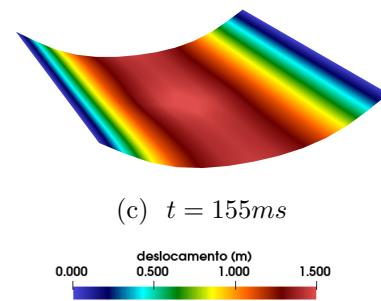
(a)  $t = 0s$ .(b)  $t = 100ms$ (c)  $t = 155ms$ 

Figura 4.9 – Casca: Campo de deslocamento.





# TÉCNICA DE DECOMPOSIÇÃO DE DOMÍNIOS

---



---

Muitas aplicações de engenharia envolvem efeitos localizados, são os casos, por exemplo, de fissuras na mecânica dos sólidos, interface entre dois tipos diferentes de fluidos na mecânica dos fluidos, ou ainda, a camada limite na interface entre sólido e fluido, entre outros. Para uma análise computacional realística desses problemas, os efeitos locais devem ser apropriadamente representados e a um custo computacional razoável.

Neste trabalho aplica-se um método decomposição de domínios que permite utilizar uma malha local mais refinada sobreposta a uma malha global com discretização mais grosseira com o intuito de melhorar a precisão local da análise numérica ou simplesmente representar a geometria local e as condições de contorno adequadamente. A malha local pode ter uma escala diferente de discretização, ou até mesmo uma aproximação numérica diferente, como no caso deste trabalho em que se utiliza o método dos elementos finitos em conjunto com a análise isogeométrica.

## 5.1 Combinação de espaços de funções

Para o entendimento da técnica de sobreposição de malhas define-se inicialmente um domínio global  $\Omega_G$ , de acordo com a Fig. 5.1a, e um domínio local,  $\Omega_L$ , apresentado na Fig. 5.1b, menor que o domínio global e que contém a região com efeitos localizados. O domínio total de estudo é então composto por:  $\Omega = \Omega_G \cup \Omega_L$ .

Adicionalmente definem-se os contornos desses domínios, conforme Fig. 5.1c, como:  $\Gamma_G$  contorno físico de  $\Omega$  determinado pelo domínio global;  $\Gamma_L$  contorno físico de  $\Omega$  pertencente ao domínio local;  $(\Gamma_G)_B$  contorno que define a região de sobreposição

pertencente ao domínio global e  $(\Gamma_L)_B$  contorno que define a região de sobreposição pertencente ao domínio local. É importante observar que os domínios ditos físicos podem ou não estarem presentes nos problemas de sobreposição. A zona dita de sobreposição  $\Omega_B = \Omega_G \cap \Omega_L$  é definida pelos contornos  $(\Gamma_L)_B$  e  $(\Gamma_G)_B$ .

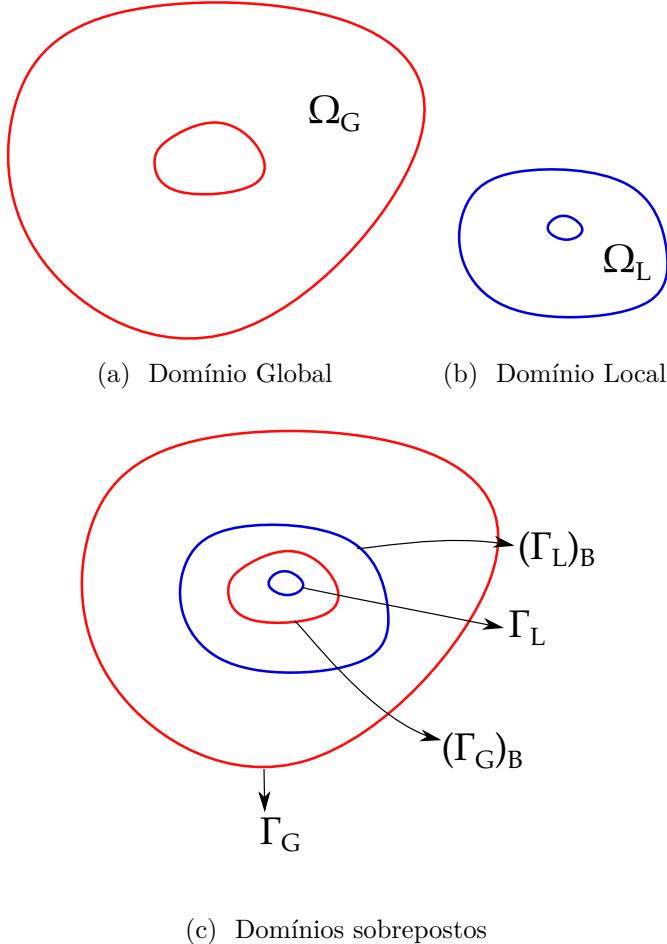


Figura 5.1 – Definição dos domínios global,local e de sobreposição.

O espaço de funções tentativa global  $u_G(\mathbf{x})$  é definido como  $\mathcal{S}_u^G$ , e o espaço das funções tentativa local  $u_L(\mathbf{x})$  por  $\mathcal{S}_u^L$ , com funções peso global  $w_G(\mathbf{x})$  e local  $w_L(\mathbf{x})$  definidas nos espaço  $\mathcal{V}_u^G$  e  $\mathcal{V}_u^L$  respectivamente. A união direta dos espaços de funções na zona de sobreposição obviamente não resulta em um espaço que respeita a partição da unidade. Dessa forma, utiliza-se uma função ponderadora de combinação  $b(\mathbf{x})$ , de maneira a criar um novo espaço de funções tentativa e peso definidas por:

$$u(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x})u_G(\mathbf{x}) + (1 - b(\mathbf{x}))u_L(\mathbf{x}), \quad (5.1)$$

$$w(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x})w_G(\mathbf{x}) + (1 - b(\mathbf{x}))w_L(\mathbf{x}), \quad (5.2)$$

com a função  $b(\mathbf{x})$  apresentando valor unitário sobre o domínio global livre (sem sobreposições), e valor zero no domínio local livre, e com uma transição suave na região de sobreposição.

Os espaços enriquecidos na região de sobreposição de malhas, são definidos por  $\mathcal{S}_{enr}^h$  e  $\mathcal{V}_{enr}^h$ , correspondentes às funções tentativa e teste respectivamente. A solução de um problema de valor de contorno recai em encontrar  $u^h \in \mathcal{S}_{enr}^h$  tal que  $\forall w^h \in \mathcal{V}_{enr}^h$ :

$$B(u^h, w^h) = F(w^h), \quad (5.3)$$

com  $B(\bullet, \bullet)$  e  $F(\bullet)$  sendo operadores bilineares e lineares respectivamente. A discretização de  $u(\mathbf{x})$  e  $w(\mathbf{x})$  no contexto dos elementos finitos é obtida através das seguintes relações:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{A=1}^{(n_{np})_G} (u_G)_A b(\mathbf{x})(N_G)_A(\mathbf{x}) + \sum_{A=1}^{(n_{np})_L} (u_L)_A (1 - b(\mathbf{x}))(N_L)_A(\mathbf{x}), \quad (5.4)$$

$$w^h(\mathbf{x}) = \sum_{A=1}^{(n_{np})_G} (w_G)_A b(\mathbf{x})(N_G)_A(\mathbf{x}) + \sum_{A=1}^{(n_{np})_L} (w_L)_A (1 - b(\mathbf{x}))(N_L)_A(\mathbf{x}), \quad (5.5)$$

com  $N_G$  e  $N_L$  sendo as funções de forma global e local; e  $(n_{np})_G$  e  $(n_{np})_L$  o número de funções de forma nas discretizações global e local respectivamente.

### 5.1.1 Função ponderadora de combinação

De maneira a se obter uma solução única deseja-se que as funções  $b(\mathbf{x})(N_G)$  e  $(1 - b(\mathbf{x}))(N_L)$  sejam linearmente independentes sobre  $\Omega_B$ . Esta não é uma questão simples de ser garantida de forma geral. Considerando que as funções base local e global possuem grau polinomial  $p$  e são linearmente independentes, e que  $b(\mathbf{x})$  e  $(1 - b(\mathbf{x}))$  são linearmente independentes, adota-se  $b(\mathbf{x})$  com grau polinomial 1 vez superior as funções base ( $p + 1$ ). Isso resulta um espaço enriquecido onde o número de funções de forma em cada ponto da zona de superposição é compatível com o grau do polinômio.

Nesse trabalho aplicam-se funções de forma locais e globais de grau polinomial quadrático. Dessa forma, a função de combinação foi definida como cúbica e é expressa por:

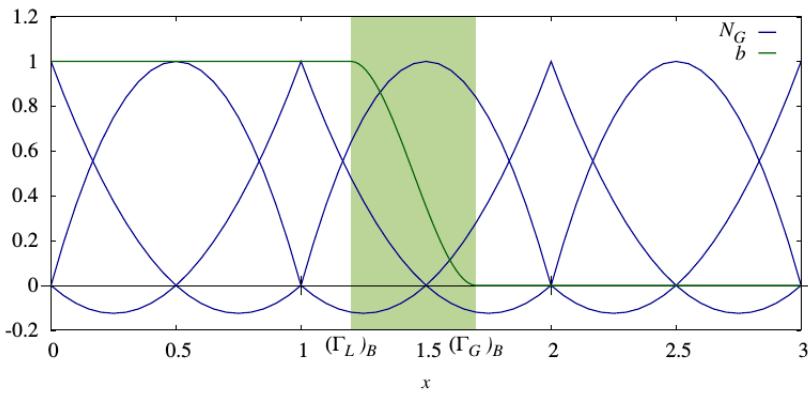
$$b(\mathbf{x}) = \begin{cases} 2 \left( \frac{X_L(\mathbf{x})}{\delta(\mathbf{x})} \right)^3 - 3 \left( \frac{X_L(\mathbf{x})}{\delta(\mathbf{x})} \right)^2 & \text{se } X_G(\mathbf{x}) > 0 \text{ e } X_L(\mathbf{x}) > 0 \\ 1 & X_L(\mathbf{x}) \leq 0 \\ 0 & X_G(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases}, \quad (5.6)$$

com  $X_L(\mathbf{x})$  a função distância assinalada medida a partir de  $(\Gamma_L)_B$ , com valores positivos dentro do domínio local e negativos fora, e  $X_G(\mathbf{x})$  a função distância assinalada medida a partir de  $(\Gamma_G)_B$ , sendo positivo se o ponto pertence à  $\Omega_G$  e negativos caso contrário. Nota-se que os pontos em que ambas funções distância assinalada são positivos estão contidos dentro da zona de sobreposição. O parâmetro  $\delta$  é obtido por  $\delta(\mathbf{x}) = X_L(\mathbf{x}) + X_G(\mathbf{x})$ , e coincide com a espessura da zona de sobreposição quando  $(\Gamma_L)_B$  e  $(\Gamma_G)_B$  são paralelos.

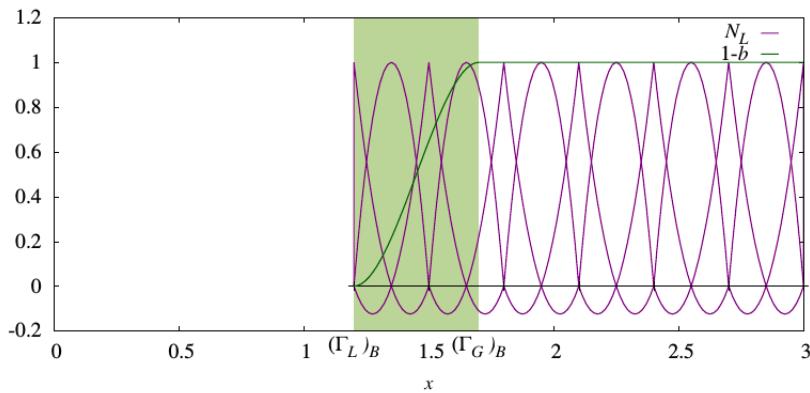
Na prática, considera-se que o domínio global tem o tamanho do domínio total, ficando a definição de  $(\Gamma_G)_B$  para uma etapa posterior, baseado na forma do modelo local,

e os elementos e nós sem suporte físico após a obtenção do novo espaço de funções são desativados da análise.

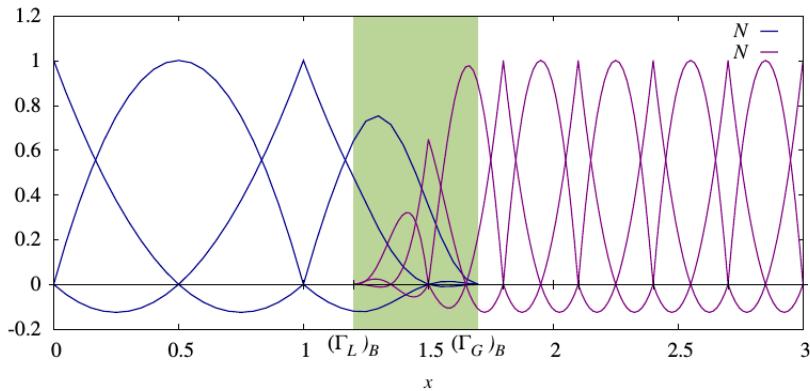
O contorno  $(\Gamma_G)_B$  pode ser obtido através de uma réplica do contorno  $(\Gamma_L)_B$  a uma distância paralela  $\delta$  do mesmo. Na Fig. 5.2 apresenta-se um exemplo do espaço de funções obtido para um caso unidimensional a partir de funções base Lagrangianas quadráticas para os domínios global e local.



(a) Funções Globais e função ponderadora ( $b$ ).



(b) Funções locais e função ponderadora ( $1-b$ )



(c) Novo espaço de funções

Figura 5.2 – Zona de sobreposição - Problema unidimensional.

Após a definição  $(\Gamma_G)_B$  é necessária uma metodologia eficiente para determinação das funções base globais com pequena influência dentro da zona de sobreposição, visto que essas podem levar a um sistema mal condicionado. Para resolver esse problema, utiliza-se, para todos os nós globais A da análise, uma variável definida como:

$$(M_G)_{AA} = \int_{\Omega} b(\boldsymbol{\xi}) N_A(\boldsymbol{\xi}) b(\boldsymbol{\xi}) N_A(\boldsymbol{\xi}) d\Omega, \quad (5.7)$$

e define-se um valor  $M_{min}$  para  $(M_G)_{AA}$ . Os nós globais são desativados se  $(M_G)_{AA} < M_{min}$ .

Os parâmetros de estabilização utilizados nesta formulação ainda necessitam um estudo mais aprofundado. No presente trabalho, faz-se a combinação dos parâmetros calculados em cada discretização:

$$\tau_{SUPG}(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x})\tau_{SUPG}^G(\mathbf{x}) + (1 - b(\mathbf{x}))\tau_{SUPG}^L(\mathbf{x}), \quad (5.8)$$

$$\tau_{PSPG}(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x})\tau_{PSPG}^G(\mathbf{x}) + (1 - b(\mathbf{x}))\tau_{PSPG}^L(\mathbf{x}), \quad (5.9)$$

$$\nu_{LSIC}(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x})\nu_{LSIC}^G(\mathbf{x}) + (1 - b(\mathbf{x}))\nu_{LSIC}^L(\mathbf{x}), \quad (5.10)$$

com  $\tau_{SUPG}^G$ ,  $\tau_{PSPG}^G$  e  $\nu_{LSIC}^G$  sendo os parâmetros de estabilização na malha global e  $\tau_{SUPG}^L$ ,  $\tau_{PSPG}^L$  e  $\nu_{LSIC}^L$  sendo os parâmetros de estabilização na malha local.

## 5.2 Implementação Computacional

O algoritmo de partição de domínios foi implementado para a solução de escoamentos incompressíveis seguindo a formulação apresentada nos capítulos ?? e 2. Nesse código, após a leitura dos dados respectivos às malhas global e local, segue-se com a definição da distância assinalada respectiva a todos os nós da malha global e da malha local com respeito aos contornos  $(\Gamma_G)_B$  e  $(\Gamma_L)_B$ . O contorno  $(\Gamma_G)_B$  é obtido a partir dos dados de entrada, onde define-se a espessura da zona de sobreposição. De posse da distância assinalada e espessura da zona de sobreposição, são definidos quais elementos das malhas local e global fazem parte da zona de sobreposição. Qualquer elemento que possua 1 ou mais nós dentro da zona de sobreposição é considerado como um elemento pertencente a ela.

As equações na região de sobreposição são integradas sobre o elemento local, dessa forma, num processo prévio à solução, os pontos de integração da malha local são projetados sobre a malha global e o elemento e coordenadas locais a que pertencem são armazenados.

Determinam-se também os nós inativos da malha global, sejam porque encontram-se fora da zona de sobreposição, ou, porque possuem pequena influência dentro da mesma, de acordo com a Eq. 5.7.

Finalmente, o processo de marcha no tempo se inicia da maneira explicitada no Item 2.4.1 levando-se em consideração que as funções tentativa e peso, e os parâmetros de estabilização são modificados de acordo com o apresentado neste capítulo.

O algoritmo que descreve esse processo de solução das equações da DFC considerando a partição de domínios pode ser visualizado no Alg. 3.

---

**Algoritmo 3** Algoritmo para problemas de dinâmica dos fluidos computacional com sobreposição de malhas
 

---

- 1: Cálculo da distância assinalada dos nós e pontos de controle aos contornos;
- 2: Determinação dos elementos e células da zona de sobreposição;
- 3: Busca dos pontos de integração na malha global equivalentes aos definidos para à malha local;
- 4: Definição dos nós inativos da malha global;
- 5: **para** o passo de tempo 0 até T **faça**
- 6:     *i* = 0;
- 7:     Predição da solução: aplicação das Eq. (2.89), Eq. (2.90) e Eq. (2.91);
- 8:     **enquanto** ( $\epsilon < \text{tolerância}$ ) **faça**
- 9:         *i*++;
- 10:         Interpolação das variáveis do problema: aplicação da Eq. (2.92), Eq. (2.93) e Eq. (2.94);
- 11:         Cálculo do incremento nas variáveis do problema:  $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$  e  $\mathbf{p}_{n+1}$  de acordo com as Eq. (2.95) e Eq. (2.96);
- 12:         Atualização da solução: calculadas de acordo com Eq. (2.97), Eq. (2.98) e Eq. (2.99).
- 13:         Cálculo do erro:

$$\epsilon = \left\| \mathbf{R}_M^i \right\|_{L^2} \quad (5.11)$$

- 14:         **fim enquanto**
  - 15:         **fim para**
- 

### 5.3 Exemplo de aplicação

Para verificar a metodologia de partição de domínios com sobreposição de malhas, neste item apresenta-se a solução estacionária do problema de Navier Stokes para a cavidade 2D.

A geometria do problema e suas condições contorno são apresentadas na Fig. 5.3. O problema foi avaliado para um número de Reynolds = 100, calculado de acordo com Eq. (2.103) e  $\rho = 1,0$ .

Sabe-se que nas paredes da cavidade podem haver efeitos de camada limite, dessa forma, definiu-se uma malha local que circunda a cavidade de acordo com a Fig. 5.4a. A malha local foi discretizada através de uma aproximação isogeométrica e foi definida com 1440 pontos de controle que foram divididos em 8 diferentes *patches*, chamados de  $P_1, P_2, \dots, P_8$ . Os *patches*  $P_1, P_3, P_6$  e  $P_8$  possuem 64 células e os  $P_2, P_4, P_5$  e  $P_7$  192 células.

A malha global por sua vez é definida para toda a seção da cavidade, sendo composta por 800 elementos triangulares quadráticos e 1681 nós, de acordo com Fig. 5.4b.

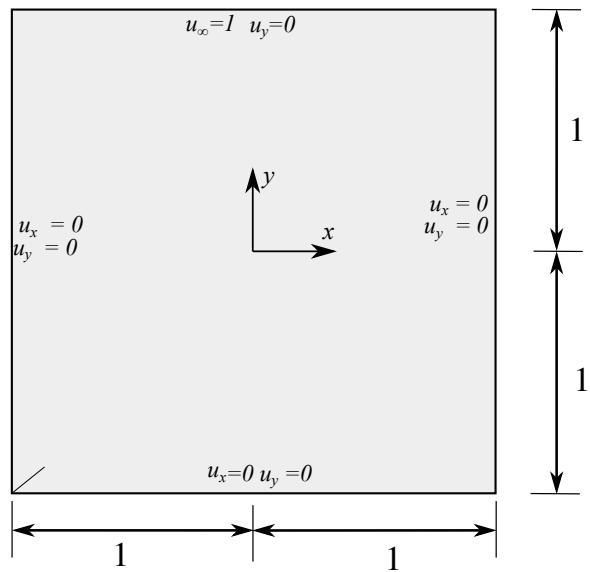
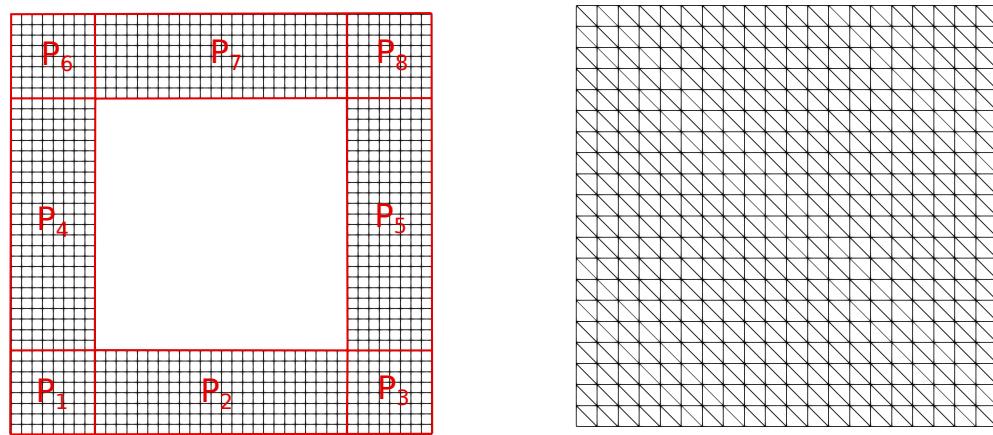


Figura 5.3 – Cavidade 2D: Condições de contorno.



(a) Malha Local.

(b) Malha Global

Figura 5.4 – Cavidade 2D: Malhas Global e Local.

Definiu-se uma espessura para a zona de sobreposição de 0,1 medida paralelamente ao contorno fictício local ( $\Gamma_L$ )<sub>B</sub>, e, a partir desse dado, os elementos globais sob o domínio local ( $\Omega_L$ ) e fora da zona de sobreposição ( $\Omega_B$ ) foram desativados. As células e elementos pertencentes à zona de sobreposição, tanto para a malha local quanto para a malha global, podem ser vistos nas Fig. 5.5a e Fig. 5.5b respectivamente.

Os campos de velocidade e pressão obtidos são apresentados nas Fig. 5.6a e Fig. 5.6b.

Os perfis de velocidade adimensionalizados ( $\mathbf{u}/\mathbf{u}_\infty$ ) horizontal e vertical ao longo de duas linhas centrais nas direções  $x$  e  $y$  da cavidade são apresentados na Fig. 5.7 e

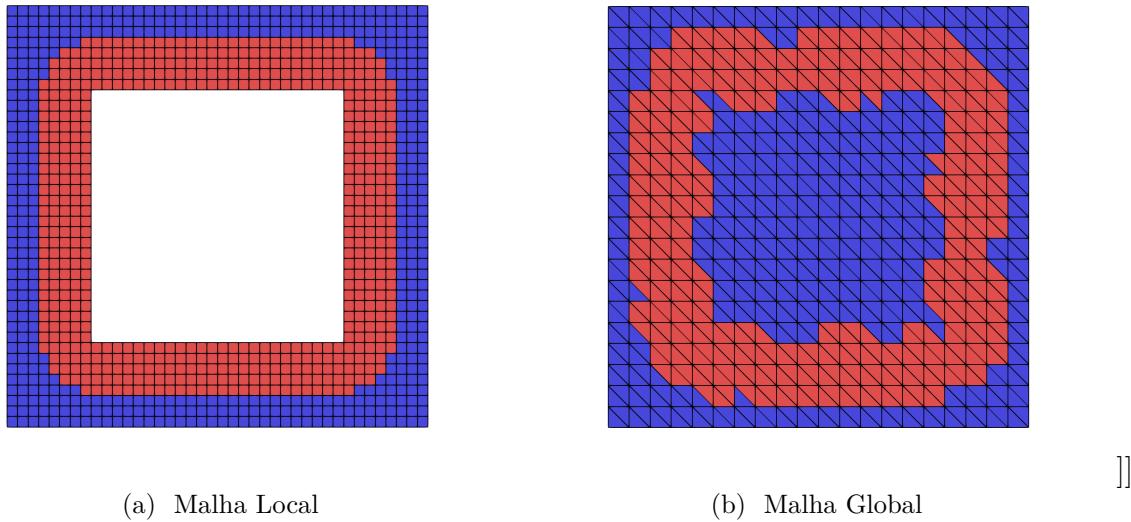


Figura 5.5 – Cavidade 2D: Zona de sobreposição.

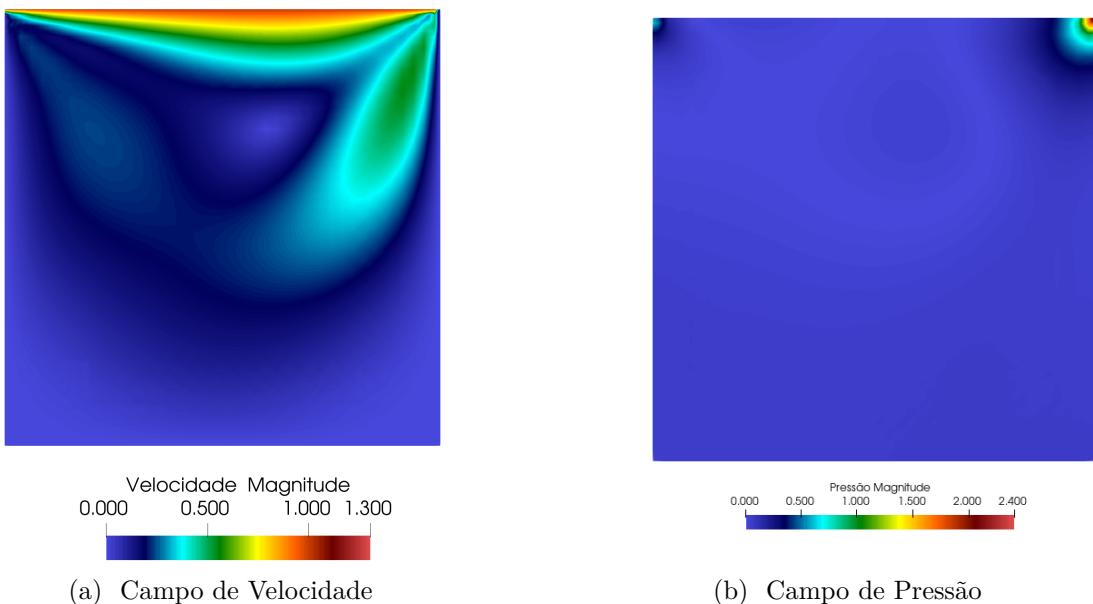


Figura 5.6 – Cavidade 2D: Solução do problema de Navier Stokes para  $Re = 100$ .

comparados com os resultados de Ghia, Ghia e Shin (1982).

De acordo com os resultados obtidos, a metodologia se mostrou muito eficiente, com características promissoras para as próximas aplicações que serão realizadas neste projeto.

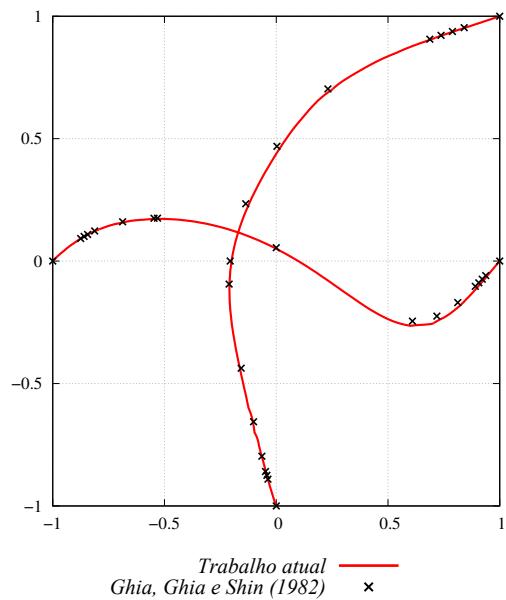


Figura 5.7 – Cavidade 2D: Perfis de velocidade.



# TÉCNICA DE DECOMPOSIÇÃO DE DOMÍNIOS ATRAVÉS DO MÉTODO DE ARLEQUIN ESTABILIZADO - RBSAM

---

---

Com intuito de superar as dificuldades encontrados com a técnica de decomposição de domínios apresentada no Cap. 5, neste capítulo será apresentado o método multiescala Arlequin que permite também levar em conta efeitos localizados através do uso de um modelo local mais refinado superposto a um modelo global com discretização mais grosseira. No método Arlequin, o processo é realizado através do cruzamento e colagem entre os modelos em uma zona de colagem através da utilização de um operador de acoplamento.

A primeira parte deste capítulo será dedicada a descrever o método clássico de Arlequin, introduzido por Ben Dhia (1998). Na sequência será apresentada a técnica de estabilização (RBSAM) introduzida por Fernandes et al. (2020) para o método de Arlequin no contexto de escoamentos incompressíveis. Na sucessão do capítulo, a extensão de tal metodologia para problemas de contorno móveis será exibida. E, por fim, o algoritmo da implementação computacional será exibido, bem como, exemplos de validação serão avaliados.

## 6.1 Método Arlequin

O método Arlequin, introduzido por Ben Dhia (1998), consiste na superposição de um domínio local a um domínio global, em região efeitos localizados. Os modelos, local e

global, são acoplados em uma zona de colagem através de um operador de acoplamento conveniente.

O método de Arlequin, de acordo com Dhia e Rateau (2005), é baseado em três principais ideias (ver Fig. 6.1):

- Um domínio local  $\Omega_1$  é sobreposto em um domínio global  $\Omega_0$  em uma zona de interesse de modo a representar efeitos locais;
- Os modelos são colados um ao outro em uma subzona da zona de superposição ( $\Omega_s$ ), chamada de zona de colagem ( $\Omega_c$ ), através de um operador de acoplamento conveniente;
- Garante-se a distribuição da energia entre os modelos através do emprego de uma função ponderadora, definida a partir da partição da unidade;

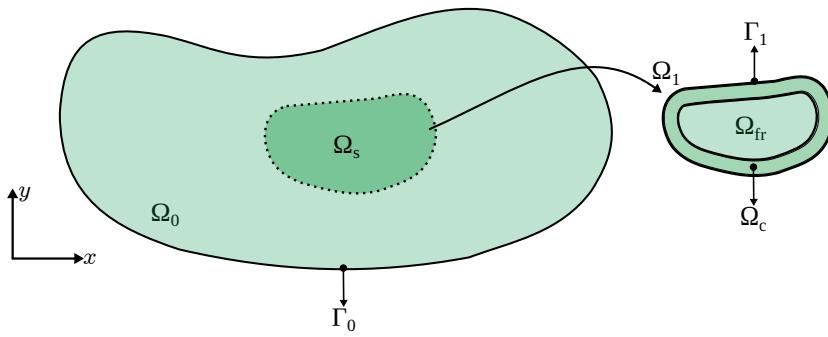


Figura 6.1 – Domínio local e global.

Dessa forma, o domínio computacional do problema é definido por:

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_1, \quad (6.1)$$

a zona de superposição,  $\Omega_s$ , pode ser definida matematicamente da seguinte forma:

$$\Omega_s = \Omega_0 \cap \Omega_1, \quad (6.2)$$

$$\Omega_s = \Omega_c \cup \Omega_{fr}, \quad (6.3)$$

$$\Omega_s > 0, \quad (6.4)$$

sendo  $\Omega_{fr}$  a chamada zona livre.

Umas das formas mais comuns de se realizar o acoplamento entre os modelos na zona de colagem  $\Omega_c$  é através da aplicação de campos de multiplicadores de Lagrange. Uma forma generalizada de representar os operadores de acoplamento é apresentada em Dhia e Rateau (2002), da maneira que se segue:

$$(\boldsymbol{\lambda}, \Delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega_c} k_0 [\boldsymbol{\lambda} \cdot \Delta \mathbf{u}] + k_1 [\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u})] d\Omega_c, \quad (6.5)$$

onde  $\lambda$  é o campo de multiplicadores de Lagrange,  $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u}_0|_{\Omega_c} - \mathbf{u}_1|_{\Omega_c}$  é a diferença entre os campos acoplados na zona de colagem.  $k_0$  e  $k_1$  são constantes estritamente positivas.

Quando  $k_0 > 0$  e  $k_1 = 0$  têm-se o operador de acoplamento  $L^2$ . Esse acoplador estabelece a continuidade de ordem 0 do campo compatibilizado, que significada que ele garante no sentido de forma fraca, a continuidade das variáveis ao longo da zona de colagem. Para valores  $k_0 > 0$  e  $k_1 > 0$  obtém-se o operador de acoplamento  $H^1$ , estabelecendo continuidade de ordem 1 do campo compatibilizado, garantindo no sentido de forma fraca, a continuidade de uma combinação de variáveis e seu Laplaciano (GUIDAULT; BELYTSCHKO, 2007).

O sucesso do método, indiferente do tipo de operador adotado, depende da escolha apropriada dos parâmetros  $k_0$  e  $k_1$ . Para o acoplamento utilizando  $L^2$ , devido a simplicidade da aplicação da restrição dos campos compatibilizados na zona de colagem, o condicionamento do sistema depende fortemente da adoção do parâmetro  $k_0$ , sendo esta uma das razões pela qual a maioria dos trabalhos realizados utilizando o método Arlequin aplica o operador  $H^1$ . A obtenção de parâmetros ótimos para o método pode ser uma tarefa difícil, sendo esse um dos fatores que levaram Fernandes et al. (2020) ao desenvolvimento da técnica RBSAM que será discutida na próxima seção.

A definição do espaço de funções para os operadores de Lagrange é muito importante. O método apresenta flexibilidade para usar uma discretização diferente da zona de colagem, entretanto, usualmente se adota um subconjunto do espaço de funções de um dos modelos sobrepostos. A escolha por um modelo ou outro pode conduzir a um maior ou menor acoplamento, sendo a escolha definida em função da aplicação desejada.

Por fim, para que o método não adicione energia ao sistema, é necessário que seja definida uma função ponderadora, denominada ( $\alpha$ ), que garanta a distribuição da energia do sistema ao longo dos modelos sobrepostos. Em geral, essa função é definida da seguinte forma:

$$\begin{cases} \alpha_0 \in [ka; 1] \text{ em } \Omega, \\ \alpha_0 = 1 \text{ em } \Omega_0 \setminus \Omega_1, \\ \alpha_0 = ka > 0 \text{ em } \Omega_f, \\ \alpha_0 + \alpha_1 = 1 \text{ em } \Omega, \end{cases} \quad (6.6)$$

com  $ka$  uma constante arbitrariamente pequena para o método de Arlequin ser relevante (BEN DHIA, 2008), conforme pode ser observado na Fig. 6.2.

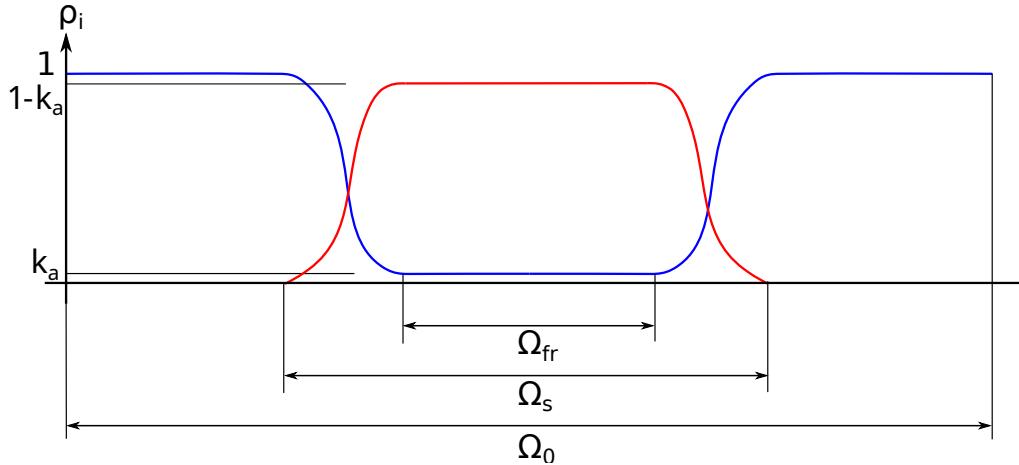


Figura 6.2 – Função Ponderadora

## 6.2 Método Arlequin clássico aplicado à problemas de escoamentos incompressíveis

O método Arlequin vem sendo aplicado amplamente em diversos trabalhos da mecânica dos sólidos nas últimas décadas. Entretanto, no que diz respeito a materiais incompressíveis, pode-se citar mais recentemente o trabalho de Jamond e Ben Dhia (2013), no qual os autores desenvolvem uma técnica para análise empregando elementos do tipo Taylor-Hood, que satisfazem a condição LBB. Essa metodologia é testada também para problemas descritos pelas equações de Stokes.

De acordo com os autores Jamond e Ben Dhia (2013) a principal dificuldade encontrada para aplicação do método Arlequin no contexto de materiais incompressíveis é que duas restrições devem ser aplicadas concomitantemente: a compatibilização dos campos de interesse na zona de colagem e a condição de incompressibilidade do material nessa mesma região. Os autores apontaram que a imposição da condição de incompressibilidade em ambos os modelos pode gerar problema de redundância, acarretando em um sistema algébrico associado singular.

A solução proposta pelos autores nesse trabalho foi a aplicação da condição de incompressibilidade em cada ponto do domínio computacional apenas uma vez. A metodologia consiste então da remoção da condição de incompressibilidade dos elementos total ou parcialmente encontrados na zona de colagem ( $\Omega_c$ ) em um dos modelos. Indiferente do modelo eleito para a remoção da condição de incompressibilidade na zona de colagem, na zona livre, a condição de incompressibilidade é removida do modelo global. Deve-se destacar que no trabalho citado existem algumas recomendações com relação a estabilidade da metodologia, como, por exemplo, a necessidade de existir pelo menos um elemento global na zona livre. Tal trabalho não explora as possíveis mudanças que acarretariam na estabilidade numérica em caso de sucessivas remoções e inclusões de condição de

incompressibilidade no caso de um modelo local móvel.

Por esse motivo, e pelas pesquisas anteriores já realizadas pela presente autora e seu grupo de pesquisa, optou-se pela adoção de elementos estabilizados, os quais já foram retratos nos capítulos anteriores (Cap. 2 e Cap. 3).

Para a construção do método de Arlequin clássico precisamos retomar às equações para um monomodelo apresentadas na seção 2.1.4 que representam a forma fraca discretizada espacialmente e estabilizada das equações da quantidade de movimento (Eq. 2.60) e da continuidade (Eq. 2.61).

**VER AQUI MUDAR AS EQUAÇÕES NO CAPÍTULO DE FLUIDOS PARA DEIXAR SEM O TERMO ALE INICIALMENTE. E ALTERAR AS EQUAÇÕES PARA FICAR COM A MESMA SIMBOLOGIA DE CONTORNO DAQUI.** Verificar se deixo tudo com o superíndice  $h$  na definição dos espaços de tentativa e teste.

Considerando os espaços de dimensão finita das funções tentativa que descrevem a velocidade ( $\mathcal{S}_{ui}^h$ ) e a pressão ( $\mathcal{S}_{pi}^h$ ) e seus respectivos espaços de funções testes  $\mathcal{V}_{ui}^h$  e  $\mathcal{V}_{pi}^h$ , com  $i = 0, 1$  indicando o índice do modelo, definidos como:

$$\mathcal{S}_{ui}^h = \left\{ \mathbf{u}_i^h \mid \mathbf{u}_i^h(\cdot, t) \in (H^{1h}(\Omega_i), \mathbf{u}_i^h = \mathbf{u}_{Di}^h \text{ em } \Gamma_{Di}) \right\} \quad (6.7)$$

$$\mathcal{S}_{pi}^h = \left\{ p_i^h \mid p_i^h(\cdot) \in L^{2h}(\Omega_i) \right\}, \quad (6.8)$$

$$\mathcal{V}_{ui}^h = \left\{ \mathbf{w}_i^h \mid \mathbf{w}_i^h(\cdot) \in H^{1h}(\Omega_i), \mathbf{w}_i^h = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_{Di} \right\}, \quad (6.9)$$

e,

$$\mathcal{V}_{pi}^h = \mathcal{S}_{pi}^h. \quad (6.10)$$

Analogamente, os espaços das funções tentativas ( $\mathcal{M}^h$ ) e teste ( $\mathcal{Q}^h$ ) para o campo dos multiplicadores de Lagrange ( $\boldsymbol{\lambda}$ ) são definidos como:

$$\mathcal{M}^h = \left\{ \boldsymbol{\lambda}^h \mid \boldsymbol{\lambda}^h(\cdot) \in H^{1h}(\Omega_c) \right\}, \quad (6.11)$$

$$\mathcal{Q}^h = \mathcal{M}^h. \quad (6.12)$$

A aplicação do operador de acoplamento  $L^2$  à formulação clássica Arlequin consiste em dado os espaços tentativa e teste apresentados nas equações anteriores: Encontrar  $(\mathbf{u}_0^h, p_0^h, \mathbf{u}_1^h, p_1^h, \boldsymbol{\lambda}^h) \in \mathcal{S}_{u0}^h \times \mathcal{S}_{p0}^h \times \mathcal{S}_{u1}^h \times \mathcal{S}_{p1}^h \times \mathcal{M}^h$  de maneira que  $\forall \mathbf{w}_0^h \in \mathcal{V}_{u0}^h, q_0^h \in \mathcal{V}_{p0}^h, \mathbf{w}_1^h \in \mathcal{V}_{u1}^h, q_1^h \in \mathcal{V}_{p1}^h$ , e  $\forall \boldsymbol{\zeta}^h \in \mathcal{Q}^h$ :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_0^h}{\partial t} d\Omega_0 \\
& + \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot (\mathbf{u}_0^h \cdot \nabla) \mathbf{u}_0^h d\Omega_0 \\
& + \int_{\Omega_0} \alpha_0 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_0^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_0 \\
& + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_e} \tau_{\text{SUPG}} ((\mathbf{u}_0^h \cdot \nabla) \mathbf{w}_0^h) \cdot \mathbf{r}_{\text{M0}}^h(\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_0 \\
& + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_e} \nu_{\text{LSIC}} \nabla \cdot \mathbf{w}_0^h r_{\text{C0}}^h(\mathbf{u}_0^h) d\Omega_0 \\
& + \chi_0 \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_0^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h d\Omega_c = \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot \mathbf{f}_0^h d\Omega_0 + \int_{\Gamma_0} \alpha_0 \mathbf{u}_0^h \cdot \mathbf{h}_0^h d\Gamma_0,
\end{aligned} \tag{6.13}$$

$$\int_{\Omega_0} \alpha_0 q_0^h \nabla \cdot \mathbf{u}_0^h d\Omega_0 + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_e} \tau_{\text{PSPG}} \left( \frac{\nabla q_0^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_{\text{M0}}^h(\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_0, \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_1^h}{\partial t} d\Omega_1 \\
& + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot (\mathbf{u}_1^h \cdot \nabla) \mathbf{u}_1^h d\Omega_1 \\
& + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_1^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 \\
& + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_e} \tau_{\text{SUPG}} ((\mathbf{u}_1^h \cdot \nabla) \mathbf{w}_1^h) \cdot \mathbf{r}_{\text{M1}}^h(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 \\
& + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_e} \nu_{\text{LSIC}} \nabla \cdot \mathbf{w}_1^h r_{\text{C1}}^h(\mathbf{u}_1^h) d\Omega_1 \\
& + \chi_1 \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_1^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h d\Omega_c = \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{f}_1^h d\Omega_1 + \int_{\Gamma_1} \alpha_1 \mathbf{u}_1^h \cdot \mathbf{h}_1^h d\Gamma_1,
\end{aligned} \tag{6.15}$$

$$\int_{\Omega_1} \alpha_1 q_1^h \nabla \cdot \mathbf{u}_1^h d\Omega_1 + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_e} \tau_{\text{PSPG}} \left( \frac{\nabla q_1^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_{\text{M1}}^h(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 = 0, \tag{6.16}$$

$$\int_{\Omega_c} \boldsymbol{\zeta}^h \cdot (\mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_1^h) d\Omega_c, \tag{6.17}$$

onde  $\mathbf{r}_{\text{Mi}}^h$  e  $r_{\text{Ci}}^h$  são os resíduos da equação da quantidade de movimento e da equação da continuidade, com  $i = 0, 1$ , respectivamente, dados por:

$$\mathbf{r}_{\text{Mi}}^h(\mathbf{u}_i^h, p_i^h, \boldsymbol{\lambda}^h) = \alpha_i \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}_i^h}{\partial t} + (\mathbf{u}_i^h \cdot \nabla) \mathbf{u}_i^h - \mathbf{f}_i^h \right) - \alpha_i \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_i^h, p_i^h) + \chi_i \boldsymbol{\lambda}^h, \tag{6.18}$$

$$r_{\text{Ci}}^h(\mathbf{u}_i^h) = \alpha_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i^h, \tag{6.19}$$

com  $\chi_i$  descrito da maneira que se segue:

$$\chi_i = \begin{cases} (-1)^i & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega_c \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \notin \Omega_c. \end{cases}. \tag{6.20}$$

O problema descrito pelas equações 6.13 à 6.17 descreve à versão clássica do método de Arlequin para o problema de Navier-Stokes estabilizado pela técnica PSPG/SUPG. Matematicamente trata-se de um problema de ponto de sela decorrente de uma formulação mista. Entretanto, desde que a condição LBB seja satisfeita, existe solução para o problema e ela é única.

Em Guidault e Belytschko (2007) pode-se encontrar uma vasta análise matemática a cerca das questões relacionadas com estabilidade, convergência e relevância do método. Nesta pesquisa, os autores relatam, por exemplo, a necessidade de emprego de funções ponderadoras contínuas quando utilizado o operador de acoplamento  $L^2$ , tal caso não ocorre com o operador de acoplamento  $H^1$ . Além disso, os autores destacam que espaços muito refinados para os acopladores de Lagrange podem levar a uma solução não convergente, independente do tipo de operador de acoplamento. Este problema ocorre devido a forte dependência da discretização do modelo global na solução.

O problema descrito no método Arlequin clássico é análogo a formulação mista em elementos finitos para escoamentos incompressíveis, que limita a escolha das funções aproximadoras para o campo de velocidade e pressão. No caso da mecânica dos fluidos, conforme apresentado no Cap. 2, uma forma de superar esta restrição LBB é o uso de métodos estabilizados como o PSPG. Seguindo essa mesma filosofia, Fernandes et al. (2020) introduzem uma técnica de estabilização consistente que será apresentada na seguinte seção.

## 6.3 Método Arlequin estabilizado aplicado à problemas de escoamentos incompressíveis

Com intuito de superar a condição LBB para o problema de Arlequin, Fernandes et al. (2020) desenvolvem uma técnica de estabilização consistente baseada em resíduo. Para isso, introduz-se uma parcela adicional à equação dos campos de multiplicadores de Lagrange, que leva em conta o gradiente de  $\zeta^h$  e o resíduo da equação da quantidade de movimento:

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_c^e} \frac{\tau_{ARLQ0}}{\rho} \nabla \zeta^h : \nabla \mathbf{r}_{M0}^h (\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_c - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_c^e} \frac{\tau_{ARLQ1}}{\rho} \nabla \zeta^h : \nabla \mathbf{r}_{M1}^h (\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_c, \quad (6.21)$$

sendo  $\tau_{ARLQ0}$  e  $\tau_{ARLQ1}$  parâmetros de estabilização, respectivamente da malha global e local. A obtenção destes parâmetros será abordada na subseção seguinte.

Dessa forma, pode-se definir a solução do problema de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis utilizando a técnica de Arlequin estabilizada da seguinte forma:

Encontrar  $(\mathbf{u}_0^h, p_0^h, \mathbf{u}_1^h, p_1^h, \boldsymbol{\lambda}^h) \in \mathcal{S}_{u0}^h \times \mathcal{S}_{p0}^h \times \mathcal{S}_{u1}^h \times \mathcal{S}_{p1}^h \times \mathcal{M}^h$  de maneira que  $\forall \mathbf{w}_0^h \in \mathcal{V}_{u0}^h$ ,  $q_0^h \in \mathcal{V}_{p0}^h$ ,  $\mathbf{w}_1^h \in \mathcal{V}_{u1}^h$ ,  $q_1^h \in \mathcal{V}_{p1}^h$ , e  $\forall \boldsymbol{\zeta}^h \in \mathcal{Q}^h$ :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_0^h}{\partial t} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot (\mathbf{u}_0^h \cdot \nabla) \mathbf{u}_0^h d\Omega_0 \\ & + \int_{\Omega_0} \alpha_0 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_0^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_0 \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{SUPG} ((\mathbf{u}_0^h \cdot \nabla) \mathbf{w}_0^h) \cdot \mathbf{r}_{M0}^h(\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_0 \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \nu_{LSIC} \nabla \cdot \mathbf{w}_0^h r_{C0}^h(\mathbf{u}_0^h) d\Omega_0 \\ & + \chi_0 \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_0^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h d\Omega_c = \int_{\Omega_0} \alpha_0 \rho \mathbf{w}_0^h \cdot \mathbf{f}_0^h d\Omega_0 + \int_{\Gamma_0} \alpha_0 \mathbf{u}_0^h \cdot \mathbf{h}_0^h d\Gamma_0, \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_0} \alpha_0 q_0^h \nabla \cdot \mathbf{u}_0^h d\Omega_0 + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{PSPG} \left( \frac{\nabla q_0^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_{M0}^h(\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_0 = 0, \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_1^h}{\partial t} d\Omega_1 + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot (\mathbf{u}_1^h \cdot \nabla) \mathbf{u}_1^h d\Omega_1 \\ & + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_1^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{SUPG} ((\mathbf{u}_1^h \cdot \nabla) \mathbf{w}_1^h) \cdot \mathbf{r}_{M1}^h(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \nu_{LSIC} \nabla \cdot \mathbf{w}_1^h r_{C1}^h(\mathbf{u}_1^h) d\Omega_1 \\ & + \chi_1 \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_1^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h d\Omega_c = \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{f}_1^h d\Omega_1 + \int_{\Gamma_1} \alpha_1 \mathbf{u}_1^h \cdot \mathbf{h}_1^h d\Gamma_1, \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_1} \alpha_1 q_1^h \nabla \cdot \mathbf{u}_1^h d\Omega_1 + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{PSPG} \left( \frac{\nabla q_1^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_{M1}^h(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 = 0, \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\zeta}^h \cdot (\mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_1^h) d\Omega_c + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \frac{\tau_{ARLQ0}}{\rho} \nabla \boldsymbol{\zeta}^h : \nabla \mathbf{r}_{M0}^h(\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_c \\ & - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \frac{\tau_{ARLQ1}}{\rho} \nabla \boldsymbol{\zeta}^h : \nabla \mathbf{r}_{M1}^h d\Omega_c, \end{aligned} \quad (6.26)$$

com os resíduos  $\mathbf{r}_{Mi}^h$  e  $r_{Ci}^h$  escritos conforme as Eq. 6.18 e Eq .6.19.

O sistema resultante pode ser reescrito em notação matricial como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{L}}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_1 & -\hat{\mathbf{L}}_1 \\ \mathbf{L}_0^T & -\mathbf{L}_1^T & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_1 \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_{\lambda} \end{bmatrix}. \quad (6.27)$$

**Como poderia chamar essas matrizes?**

Note que na estabilização Arlequin baseada no resíduo (RBSAM) não existem elementos zeros na diagonal da matriz, diferente do mesmo problema na formulação clássica Arlequin. No trabalho de Fernandes et al. (2020) pode-se encontrar a análise de estabilidade dessa técnica e testes numéricos que avaliam o condicionamento do sistema algébrico e a

convergência do método.

O problema de Arlequin não linear apresentado nas equações: Eq. 6.22 à 6.26 pode ser reescrito em sua forma semi-discreta residual para  $i = 0, 1$ , da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{M,i} &= \int_{\Omega_i} \alpha_i \rho \mathbf{w}_i^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i^h}{\partial t} d\Omega_i + \int_{\Omega_i} \alpha_i \rho \mathbf{w}_i^h \cdot (\mathbf{u}_i^h \cdot \nabla) \mathbf{u}_i^h d\Omega_i \\ &+ \int_{\Omega_i} \alpha_i \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_i^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_i^h, p_i^h) d\Omega_i \\ &+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{SUPG} ((\mathbf{u}_i^h \cdot \nabla) \mathbf{w}_i^h) \cdot \mathbf{r}_{Mi}^h(\mathbf{u}_i^h, p_i^h) d\Omega_i \\ &+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \nu_{LSIC} \nabla \cdot \mathbf{w}_i^h r_{Ci}^h(\mathbf{u}_i^h) d\Omega_i \\ &+ \chi_i \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_i^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h d\Omega_c - \int_{\Omega_i} \alpha_i \rho \mathbf{w}_i^h \cdot \mathbf{f}_i^h d\Omega_i - \int_{\Gamma_i} \alpha_i \mathbf{u}_i^h \cdot \mathbf{h}_i^h d\Gamma_i, \end{aligned} \quad (6.28)$$

$$\mathbf{R}_{C,i} = \int_{\Omega_i} \alpha_i q_i^h \nabla \cdot \mathbf{u}_i^h d\Omega_i + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{PSPG} \left( \frac{\nabla q_i^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_{Mi}^h(\mathbf{u}_i^h, p_i^h) d\Omega_i, \quad (6.29)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_L &= \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\zeta}^h \cdot (\mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_1^h) d\Omega_c + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \frac{\tau_{ARLQ0}}{\rho} \nabla \boldsymbol{\zeta}^h : \nabla \mathbf{r}_{M0}^h(\mathbf{u}_0^h, p_0^h) d\Omega_c \\ &- \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \frac{\tau_{ARLQ1}}{\rho} \nabla \boldsymbol{\zeta}^h : \nabla \mathbf{r}_{M1}^h(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_c. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Considerando  $\dot{\mathbf{U}}_i$ ,  $\mathbf{U}_i$ ,  $\mathbf{p}_i$  e  $\boldsymbol{\Lambda}$  os vetores nodais dos graus de liberdade respectivos a aceleração, velocidade, pressão e multiplicadores de Lagrange, pode-se escrever o problema semidiscreto da DFC como: Determinar  $\dot{\mathbf{U}}_0$ ,  $\mathbf{U}_0$ ,  $\mathbf{p}_0$ ,  $\dot{\mathbf{U}}_1$ ,  $\mathbf{U}_1$ ,  $\mathbf{p}_1$  e  $\boldsymbol{\Lambda}$  de maneira que:

$$\mathbf{R}_{M,0}(\dot{\mathbf{U}}_0, \mathbf{U}_0, \mathbf{p}_0, \boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{0}, \quad (6.31)$$

$$\mathbf{R}_{C,0}(\dot{\mathbf{U}}_0, \mathbf{U}_0, \mathbf{p}_0, \boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{0}, \quad (6.32)$$

$$\mathbf{R}_{M,1}(\dot{\mathbf{U}}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{p}_1, \boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{0}, \quad (6.33)$$

$$\mathbf{R}_{C,1}(\dot{\mathbf{U}}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{p}_1, \boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{0}, \quad (6.34)$$

$$\mathbf{R}_L(\dot{\mathbf{U}}_0, \mathbf{U}_0, \mathbf{p}_0, \dot{\mathbf{U}}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{p}_1, \boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{0}. \quad (6.35)$$

### 6.3.1 Integração Temporal

Quanto ao procedimento de integração temporal, utilizou-se o método  $\alpha$ -generalizado. Conforme a metodologia apresentado na Seção 2.4, para a solução do sistema de equações não lineares compostas por Eq. (6.31) à Eq. (6.35) utiliza-se o método de Newton-Raphson. A solução resulta em uma etapa preditiva e outra iterativa corretiva.

Na etapa preditiva, conhecida a solução em um passo de tempo  $n$ , prediz-se a

solução no passo seguinte ( $n + 1$ ) através das seguintes relações:

$$\dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \dot{\mathbf{U}}_{0(n)}, \quad (6.36)$$

$$\mathbf{U}_{0(n+1)}^0 = \mathbf{U}_{0(n)}, \quad (6.37)$$

$$\mathbf{p}_{0(n+1)}^0 = \mathbf{p}_{0(n)}, \quad (6.38)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \dot{\mathbf{U}}_{1(n)}, \quad (6.39)$$

$$\mathbf{U}_{1(n+1)}^0 = \mathbf{U}_{1(n)}, \quad (6.40)$$

$$\mathbf{p}_{1(n+1)}^0 = \mathbf{p}_{1(n)}, \quad (6.41)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^0 = \boldsymbol{\Lambda}_{(n)}, \quad (6.42)$$

onde o superíndice 0 representa a iteração de número zero, enquanto que os subíndices 0 e 1 representam as variáveis do modelo global e local respectivamente.

Na etapa iterativa corretiva, itera-se sobre a Eq. (6.31) à Eq. (6.35) até que elas sejam satisfeitas, seja através de uma tolerância prescrita, ou até que se alcance uma quantidade máxima de iterações pré-estabelecida. A etapa iterativa corretiva é constituída por três fases. A fase 1 consiste em determinar os valores no instante intermediário para as variáveis nodais na iteração  $i$ :

$$\dot{\mathbf{U}}_{0(n+\alpha_m)}^i = \dot{\mathbf{U}}_{0(n)} + \alpha_m (\dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^i - \dot{\mathbf{U}}_{0(n)}), \quad (6.43)$$

$$\mathbf{U}_{0(n+\alpha_f)}^i = \mathbf{U}_{0(n)} + \alpha_f (\mathbf{U}_{0(n+1)}^i - \mathbf{U}_{0(n)}), \quad (6.44)$$

$$\mathbf{p}_{0(n+1)}^i = \mathbf{p}_{0(n+1)}^i, \quad (6.45)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{1(n+\alpha_m)}^i = \dot{\mathbf{U}}_{1(n)} + \alpha_m (\dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^i - \dot{\mathbf{U}}_{1(n)}), \quad (6.46)$$

$$\mathbf{U}_{1(n+\alpha_f)}^i = \mathbf{U}_{1(n)} + \alpha_f (\mathbf{U}_{1(n+1)}^i - \mathbf{U}_{1(n)}), \quad (6.47)$$

$$\mathbf{p}_{1(n+1)}^i = \mathbf{p}_{1(n+1)}^i, \quad (6.48)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^i = \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^i. \quad (6.49)$$

Na fase 2, com os valores intermediários das variáveis nodais resolve-se o sistema linear resultante da linearização das equações Eq. (6.31) à Eq. (6.31) com respeito às variáveis de interesse  $\dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}$ ,  $\mathbf{p}_{0(n+1)}$ ,  $\dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}$ ,  $\mathbf{p}_{1(n+1)}$  e  $\boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_{M,0}}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^i} & \frac{\partial \mathbf{R}_{M,0}}{\partial \mathbf{p}_{0(n+1)}^i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{R}_{M,0}}{\partial \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^i} \\ \frac{\partial \mathbf{R}_{C,0}}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^i} & \frac{\partial \mathbf{R}_{C,0}}{\partial \mathbf{p}_{0(n+1)}^i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{R}_{C,0}}{\partial \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{R}_{M,1}}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^i} & \frac{\partial \mathbf{R}_{M,1}}{\partial \mathbf{p}_{1(n+1)}^i} & \frac{\partial \mathbf{R}_{M,1}}{\partial \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{R}_{C,1}}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^i} & \frac{\partial \mathbf{R}_{C,1}}{\partial \mathbf{p}_{1(n+1)}^i} & \frac{\partial \mathbf{R}_{C,1}}{\partial \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^i} \\ \frac{\partial \mathbf{R}_L}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^i} & \frac{\partial \mathbf{R}_L}{\partial \mathbf{p}_{0(n+1)}^i} & \frac{\partial \mathbf{R}_L}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^i} & \frac{\partial \mathbf{R}_L}{\partial \mathbf{p}_{1(n+1)}^i} & \frac{\partial \mathbf{R}_L}{\partial \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^i \\ \Delta \mathbf{p}_{0(n+1)}^i \\ \Delta \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^i \\ \Delta \mathbf{p}_{1(n+1)}^i \\ \Delta \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_{M,0} \\ -\mathbf{R}_{C,0} \\ -\mathbf{R}_{M,1} \\ -\mathbf{R}_{C,1} \\ -\mathbf{R}_L \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

Atualiza-se então na fase 3 a solução através das seguintes relações:

$$\dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^{i+1} = \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^i + \Delta \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^i, \quad (6.51)$$

$$\mathbf{U}_{0(n+1)}^{i+1} = \mathbf{U}_{0(n+1)}^i + \Delta \mathbf{U}_{0(n+1)}^i, \quad (6.52)$$

$$\mathbf{p}_{0(n+1)}^{i+1} = \mathbf{p}_{0(n+1)}^i + \Delta \mathbf{p}_{0(n+1)}^i, \quad (6.53)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^{i+1} = \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^i + \Delta \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^i, \quad (6.54)$$

$$\mathbf{U}_{1(n+1)}^{i+1} = \mathbf{U}_{1(n+1)}^i + \Delta \mathbf{U}_{1(n+1)}^i, \quad (6.55)$$

$$\mathbf{p}_{1(n+1)}^{i+1} = \mathbf{p}_{1(n+1)}^i + \Delta \mathbf{p}_{1(n+1)}^i, \quad (6.56)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{1(n+1)}^{i+1} = \boldsymbol{\Lambda}_{1(n+1)}^i + \Delta \boldsymbol{\Lambda}_{1(n+1)}^i. \quad (6.57)$$

Na utilização do método  $\alpha$ -generalizado as integrais das equações são avaliadas no instante  $t = t_{n+\alpha_f}$ . As relações entre velocidade e aceleração, e os parâmetros utilizados pelo método podem ser consultados na Seção 2.4.

### 6.3.2 Parâmetro de estabilização para técnica RBSAM

No método Arlequin existe a necessidade de definição do paramêtro de estabilização  $\tau_{ARLQ}$ . Este parâmetro deve possuir valor suficiente para estabilizar os campos de multiplicadores de Lagrange, sem, no entanto, comprometer a convergência do método.

Para a definição de  $\tau_{ARLQ}$  tomou-se como referência os trabalhos de Tezduyar e Osawa (2000) e Tezduyar e Sathe (2003) nos quais se apresenta uma vasta quantidade de informação a cerca da obtenção dos parâmetros de estabilização das equações da DFC ( $\tau_{SUPG}$ ,  $\tau_{PSPG}$ ,  $\nu_{LSIC}$ ).

Propõe-se como critério a obtenção de termos de estabilização com magnitude próxima aos termos da equação de acoplamento, através da utilização de normas vetoriais. Este parâmetro será definido para cada um dos modelos como:

$$\tau_{ARLQi} = \left( \frac{1}{(\tau_{A_i})^2} + \frac{1}{(\tau_{B_i})^2} + \frac{1}{(\tau_{C_i})^2} + \frac{1}{(\tau_{D_i})^2} + \frac{1}{(\tau_{E_i})^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.58)$$

com  $i = 0, 1$  definindo o modelo global e local respectivamente e:

$$\tau_{A_i} = \left( \frac{1}{(\tau_{A_i^0})^2 + (\tau_{A_i^1})^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.59)$$

$$\tau_{B_i} = \left( \frac{1}{\left(\tau_{B_i^0}\right)^2 + \left(\tau_{B_i^1}\right)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.60)$$

$$\tau_{C_i} = \left( \frac{1}{\left(\tau_{C_i^0}\right)^2 + \left(\tau_{C_i^1}\right)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.61)$$

$$\tau_{D_i} = \left( \frac{1}{\left(\tau_{D_i^0}\right)^2 + \left(\tau_{D_i^1}\right)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.62)$$

$$\tau_{E_i} = \left( \frac{1}{\left(\tau_{E_i^0}\right)^2 + \left(\tau_{E_i^1}\right)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.63)$$

sendo as variáveis das equações 6.59 à 6.59 as seguintes normas vetoriais:

$$\tau_{A_i^0} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_0}\|}{\|\mathbf{t}_i\|}; \quad \tau_{A_i^1} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_1}\|}{\|\mathbf{t}_i\|}, \quad (6.64)$$

$$\tau_{B_i^0} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_0}\|}{\|\mathbf{j}_i\|}; \quad \tau_{B_i^1} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_1}\|}{\|\mathbf{j}_i\|}, \quad (6.65)$$

$$\tau_{C_i^0} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_0}\|}{\|\mathbf{k}_i\|}; \quad \tau_{C_i^1} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_1}\|}{\|\mathbf{k}_i\|}, \quad (6.66)$$

$$\tau_{D_i^0} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_0}\|}{\|\mathbf{p}_i\|}; \quad \tau_{D_i^1} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_1}\|}{\|\mathbf{p}_i\|}, \quad (6.67)$$

$$\tau_{E_i^0} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_0}\|}{\|\boldsymbol{\Gamma}_i\|}; \quad \tau_{E_i^1} = \frac{\|\mathbf{M}_{\lambda_1}\|}{\|\boldsymbol{\Gamma}_i\|}. \quad (6.68)$$

Por fim, os vetores em questão, são definidos através das seguintes relações:

$$\mathbf{M}_{\lambda_0} = \int_{\Omega_c^e} N_k \cdot \mathbf{u}_0^h d\Omega_c^e, \quad (6.69)$$

$$\mathbf{M}_{\lambda_1} = - \int_{\Omega_c^e} N_k \cdot \mathbf{u}_1^h d\Omega_c^e, \quad (6.70)$$

$$\mathbf{t}_i = \int_{\Omega_c^e} \nabla N_k : \alpha_i \nabla \left( (\mathbf{u}_i^h \cdot \nabla) \mathbf{u}_i^h \right) d\Omega_c^e, \quad (6.71)$$

$$\mathbf{j}_i = \int_{\Omega_c^e} \nabla N_k : \alpha_i \nabla \left( \frac{\partial \mathbf{u}_i^h}{\partial t} \right) d\Omega_c^e, \quad (6.72)$$

$$\mathbf{k}_i = \int_{\Omega_c^e} \nabla^2 N_k : \alpha_i 2\mu \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \left( \mathbf{u}_i^h \right) d\Omega_c^e, \quad (6.73)$$

$$\mathbf{p}_i = \int_{\Omega_c^e} \nabla N_k : \alpha_i \nabla \left( -\nabla p_i^h \right) d\Omega_c^e, \quad (6.74)$$

$$\Gamma_i = \int_{\Omega_c^e} \nabla N_k : \nabla (\chi(i) \boldsymbol{\lambda}^h) d\Omega_c^e, \quad (6.75)$$

com  $k$  representando o índice dos graus de liberdade do campo de multiplicadores de Lagrange.

## 6.4 Superposição de modelos móveis

As equações Eq. 6.22 à 6.26 resolvem problemas de escoamentos incompressíveis em uma discretização Euleriana. Entretanto, como têm-se como alvo à movimentação do domínio local do fluido (ver Fig. 6.3) para acomodar a movimentação da estrutura em problemas de IFE ou representar a movimentação de um objeto imerso na DFC, faz-se o uso de uma descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária (ALE) no modelo local ( $\Omega_1$ ) enquanto que o domínio global ( $\Omega_0$ ) mantém-se fixo e com descrição Euleriana.

Para o entendimento da metodologia de superposição de modelos móveis em um esquema Euleriano-ALE, pode-se analisar a Fig. 6.3. Nela, pode-se observar a mudança de configuração dos modelos de fluido do passo  $t_n$  para o passo  $t_{n+1}$ . Nota-se que o modelo global mantém sua geometria inalterada na mudança de passo de tempo, enquanto que o modelo local é movimentado para representar uma nova localização de um objeto imerso. Vale ressaltar que o contorno do domínio do modelo local ( $\Omega_1$ ) é conhecido em  $t_n$  e em  $t_{n+1}$ , e que a zona de superposição  $\Omega_s$  é definida em diferentes posições em cada instante.

Para análise de domínios móveis do tipo Euleriano-ALE, a Eq. 6.24 será reescrita, levando-se em consideração as definições apresentadas na Seção 2.2, como:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_1^h}{\partial t} d\Omega_1 \\ & + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot ((\mathbf{u}_1^h - \bar{\mathbf{u}}_1^h) \cdot \nabla \mathbf{u}_1^h) d\Omega_1 \\ & + \int_{\Omega_1} \alpha_1 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_1^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e^h} \tau_{SUPG} ((\mathbf{u}_1^h \cdot \nabla) \mathbf{w}_1^h) \cdot \mathbf{r}_{M1}^h(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) d\Omega_1 \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e^h} \nu_{LSIC} \nabla \cdot \mathbf{w}_1^h r_{C1}^h(\mathbf{u}_1^h) d\Omega_1 \\ & + \chi_1 \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_1^h \cdot \boldsymbol{\lambda}^h d\Omega_c = \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho \mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{f}_1^h d\Omega_1 + \int_{\Gamma_1} \alpha_1 \mathbf{u}_1^h \cdot \mathbf{h}_1^h d\Gamma_1, \end{aligned} \quad (6.76)$$

e o resíduo apresentado na Eq. 6.18 ficará reescrito para  $i = 1$ , como:

$$\mathbf{r}_{M1}^h(\mathbf{u}_1^h, p_1^h, \boldsymbol{\lambda}^h) = \alpha_1 \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}_1^h}{\partial t} + (\mathbf{u}_1^h - \bar{\mathbf{u}}_1^h) \cdot \nabla \mathbf{u}_1^h - \mathbf{f}_1^h \right) - \alpha_1 \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1^h, p_1^h) + \chi_1 \boldsymbol{\lambda}^h. \quad (6.77)$$

Além da consideração da descrição ALE para o modelo local, deve-se ressaltar que

a função ponderadora  $\alpha_i$  passa a ser uma variável temporal, ou seja,  $\alpha_i(t)$  para o modelo global, visto que a zona de superposição  $\Omega_s$  é definida em diferentes posições em cada instante de tempo. Dessa forma, a integração temporal utilizando o método  $\alpha$ -generalizado deve considerar essa variação através da seguinte interpolação no tempo intermediário:

$$\alpha_{0(n+\alpha_f)} = \alpha_{0(n)} + \alpha_f(\alpha_{0(n+1)} - \alpha_{0(n)}). \quad (6.78)$$

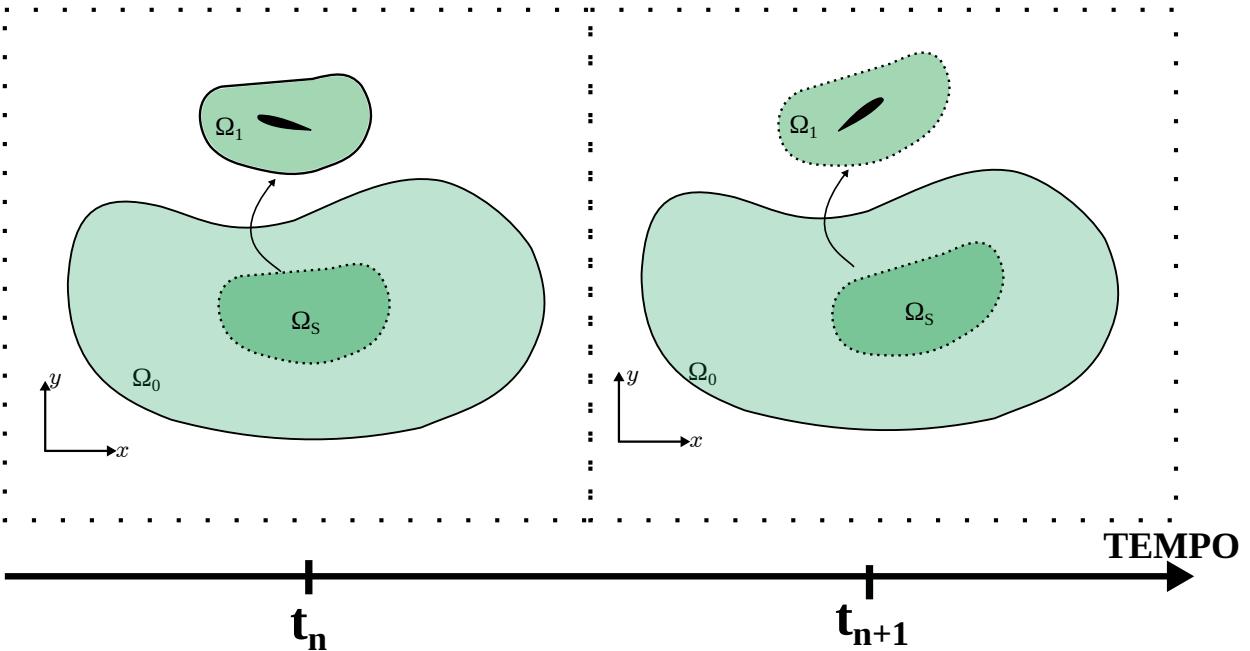


Figura 6.3 – Domínio Arlequin móvel

A solução de modelos móveis requer a utilização de uma técnica adequada para movimentação da malha local. A técnica utilizada nesse trabalho é conhecida como MJBS (Mesh-Jacobian Based Stiffening) introduzida por Tezduyar et al. (1992f) e será abordada na Subseção 7.1.1.

## 6.5 Implementação Computacional

Previamente à explicação a cerca da implementação computacional, é importante indicar que o campo dos multiplicadores de Lagrange é definido neste estudo na malha local. Tal escolha ocorre pelo fato de que mesmo em problemas em que se tenham grandes deslocamentos, a quantidade de elementos locais da zona de superposição permanece inalterada, fazendo com que o sistema algébrico mantenha-se com dimensão constante ao longo do tempo, diminuindo assim, o custo computacional.

O uso da técnica Arlequin envolve a realização de algumas etapas de pré-processamento como parte de sua implementação computacional, que podem ser divididas em 4 etapas:

1. Determinação de distâncias assinaladas; 2. Determinação da zona de colagem; 3. Determinação da função ponderadora; 4. Encontro de correspondência entre pontos dos modelos global e local.

A etapa 1 consiste em determinar a distância assinalada com relação ao contorno  $\Omega_1$  de todos os pontos (nós para malha de elementos finitos ou pontos de controle para malha isogeométrica) que compõe cada um dos modelos.

Na etapa 2, a partir da distância assinalada, são definidos os elementos locais que fazem parte da zona de colagem em função da espessura dessa região que foi previamente indicada pelo usuário do código.

A função ponderadora para os modelos (etapa 3) é determinada conforme Eq. 6.6. Além disso, a função ponderadora ( $\alpha$ ), para os modelos local e global, foi definida como uma função linear nesse trabalho. Essa função, para o modelo local, permanece com valor constante ao longo do tempo, mesmo quando ocorre a movimentação deste modelo.

Uma das maiores dificuldades da técnica de Arlequin diz respeito à integração numérica do operador de acoplamento quando se tem na composição da integral funções definidas em modelos distintos. Neste estudo, as integrais são definidas sobre a malha local, desta forma, durante o pré-processamento realiza-se um processo de busca de correspondência (etapa 4) na malha global para cada ponto de integração da malha local. O processo de busca consiste em encontrar a coordenada paramétrica e elemento da malha global correspondente a cada ponto de integração da malha local na zona de colagem.

Para contemplar a solução de problemas com contornos móveis utilizando a técnica Arlequin, a cada passo de tempo, algumas tarefas adicionais devem ser realizadas: atualização da configuração da malha; atualização da função ponderadora na malha global; e atualização das correspondências entre pontos de integração da malha local na malha global.

O Algoritmo que descreve a implementação computacional é apresentado no Alg. 4. A implementação computacional e resolução do sistema de equações resultantes ocorreu de forma análoga ao monomodelo descrito na Seção 2. O índice  $i$  apresentado diz respeito ao índice da iteração de Newton-Raphson.

## 6.6 Exemplos

Para a validação da método Arlequin estabilizado, dois exemplos amplamente explorados nas bibliografias, serão avaliados. O primeiro exemplo, trata-se de um problema de escoamento sobre um aerofólio NACA 0012, e o segundo, com intuito de validação da técnica de movimentação de domínios, consistirá no aerofólio NACA 0012 com um movimento de arfagem prescrito.

---

**Algoritmo 4** Algoritmo para problemas móveis da DFC utilizando técnica ARLEQUIN RBSAM
 

---

- 1: Cálculo da distância assinalada dos nós e pontos de controle ao contorno  $\Gamma_1$ ;
- 2: Determinação da zona de colagem  $\Omega_c$ ;
- 3: Definição da função de ponderadora de acordo com Eq. 6.6;
- 4: Busca pela correspondência entre os pontos de integração da malha local na malha global;
- 5: **para** o passo de tempo 0 até T **faca**
- 6:    Movimentação da Malha;
- 7:     $i = 0$ ;
- 8:    Predição da solução: aplicação da Eq. (6.36), Eq. (6.37), Eq. (6.38), Eq. (6.39), Eq. (6.40), Eq. (6.41) e Eq. (6.42);
- 9:    **enquanto** ( $\epsilon < \text{tolerância}$ ) **faca**
- 10:       $i++$ ;
- 11:      Atualização da função ponderadora na malha global;
- 12:      Atualização das correspondências entre os pontos de integração da malha local na malha global;
- 13:      Interpolação das variáveis do problema: aplicação da Eq. (6.43), Eq. (6.44), Eq. (6.45), Eq. (6.46), Eq. (6.47), Eq. (6.48) e Eq. (6.49);
- 14:      Cálculo do incremento nas variáveis do problema: Resolução do sistema apresentado na Eq. (6.50);
- 15:      Atualização da solução: cálculo de acordo com (6.51), Eq. (6.52), Eq. (6.53), Eq. (6.54), Eq. (6.55), Eq. (6.56) e Eq. (6.57);
- 16:      Cálculo do erro:

$$\epsilon = \left\| \mathbf{R}_{M,0}^i + \mathbf{R}_{M,1}^i \right\|_{L^2} \quad (6.79)$$

- 17:    **fim enquanto**
- 18: **fim para**

---

### 6.6.1 Escoamento sobre um aerofólio NACA 0012

Para simulação do problema de escoamento sobre um aerofólio NACA 0012, com 1 unidade de corda de dimensão e ângulo de ataque de  $10^\circ$ , utilizou-se o domínio apresentado na Fig. 6.4. O contorno da entrada de fluxo está localizado a 6 cordas (C) do bordo de ataque do aerofólio, com velocidade de entrada  $u_\infty$ . Os contornos superior e inferior da geometria, com condições de contorno de parede lisa, também estão afastados do aerofólio em 6 unidades de corda. O contorno direito do domínio é localizado a 20 unidades de corda a jusante do bordo de fuga do aerofólio.

A análise é realizada para um número de Reynolds (Re) 1000 calculado a partir da dimensão do aerofólio e da velocidade de entrada do escoamento. Foram utilizados ainda como parâmetros de análise:  $u_\infty = 1,0$ ,  $\rho = 1,0$ ,  $\Delta t = 0,02$ , e  $\rho_\infty = 0,75$ .

Para validação da teoria apresentada nesse capítulo, compararam-se os resultados de coeficientes de arrasto e sustentação ao longo do tempo para duas discretizações distintas: 1. Monomodelo; 2. Combinação de duas malhas através do método Arlequin estabilizado.

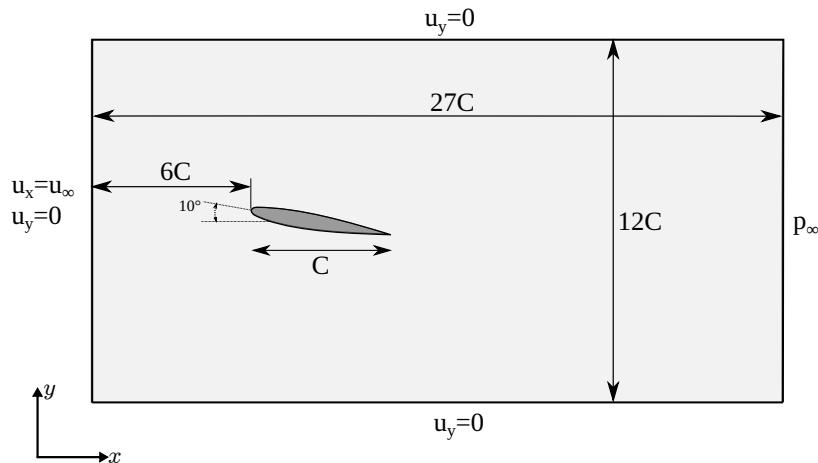


Figura 6.4 – Aerofólio 2D: Geometria

O monomodelo foi discretizado através de elementos finitos (Fig. 6.5), com malha constituída de 9240 elementos triangulares quadráticos e 18792 nós.

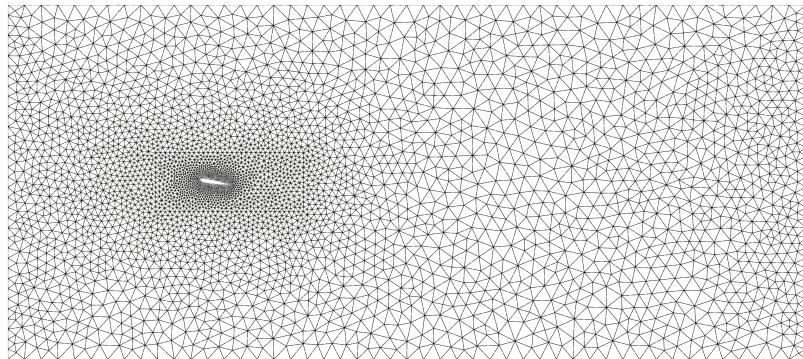


Figura 6.5 – Aerofólio 2D: Malha Monomodelo (MEF)

Para o método Arlequin, duas malhas foram utilizadas, uma malha global em elementos isogeométricos (IGA) e uma malha local, mais refinada, em elementos finitos (MEF). Uma visão global da composição do domínio é apresentada na Fig. 6.6a. Uma vista aproximada do aerofólio e da malha local pode ser visualizada na Fig. 6.6b.

A malha global em elementos isogeométricos quadráticos foi obtida através da utilização de 9 *patches*, que totalizaram 15561 pontos de controle e 14025 elementos. A malha local por sua vez é composta por 5214 elementos triangulares quadráticos e 10670 nós.

Na Fig. 6.6b pode observar em vermelho os elementos que fazem parte da zona de colagem. A espessura da zona de colagem foi definida como 0,2, totalizando 628 elementos triangulares quadráticos e 1428 nós nessa região. A constante do operador de acoplamento  $L^2$  foi definida como  $k_0 = 10$ .

Nesse problema observa-se o surgimento de uma esteira de vórtices a jusante do

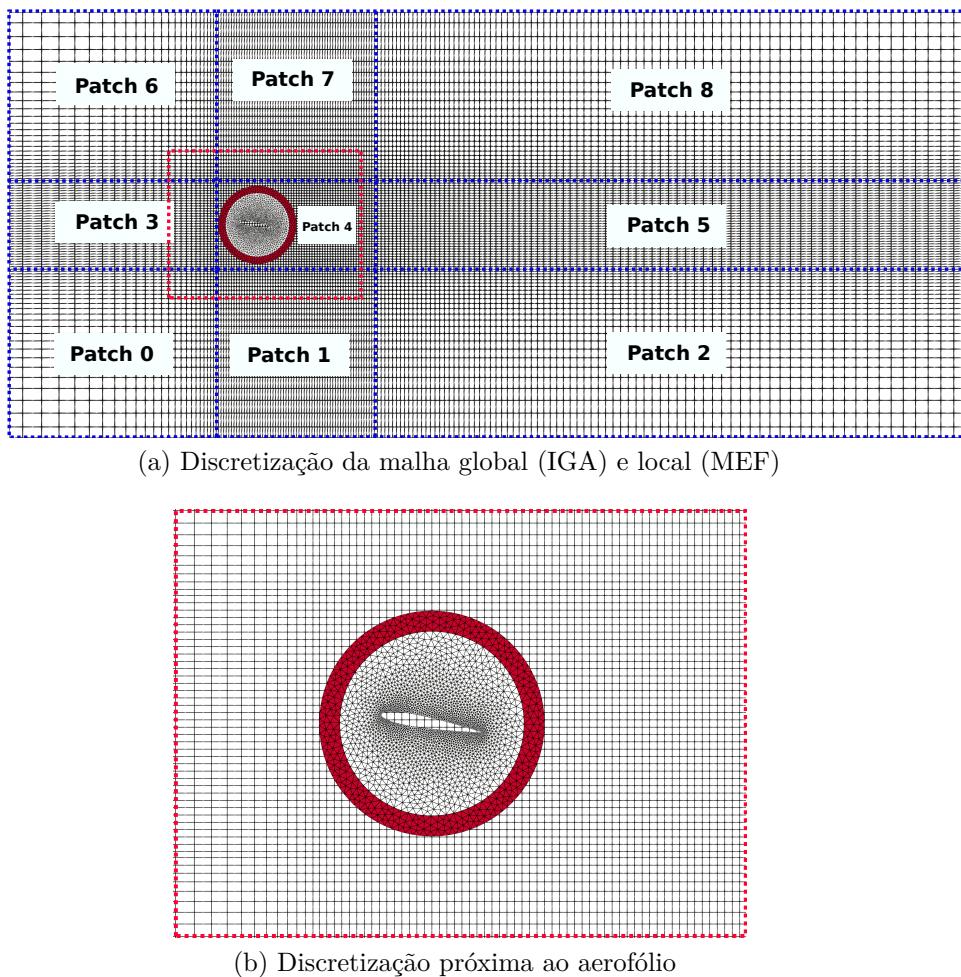


Figura 6.6 – Aerofólio 2D: Discretização das malhas

aerofólio, que resulta em um número de Strouhal ( $St$ ) equivalente a 0,877. Esse valor encontra-se em concordância com o obtido por Mittal e Tezduyar (1994) de 0,862.

Nas Fig. 6.7 e Fig. 6.8 apresentam-se os resultados de coeficiente de arrasto e sustentação obtidos para as análises realizadas. Pode-se observar que os resultados obtidos com o modelo baseado no método Arlequin estabilizados estão de acordo com os obtidos para o modelo usando monomodelo.

Nas Fig. 6.9 e Fig. 6.10 estão apresentados os campos de velocidade e pressão respectivamente para um período de um ciclo das curvas referentes aos coeficientes de arrasto e sustentação.

### 6.6.2 Aerofólio com movimento de arfagem prescrito

Para a validação computacional da técnica Arlequin estabilizada em domínios móveis utilizou-se um problema envolvendo um aerofólio NACA 0012, semelhante ao apresentado na Subseção anterior 6.6.1, aplicando-se, entretanto, um movimento de arfagem ao mesmo.

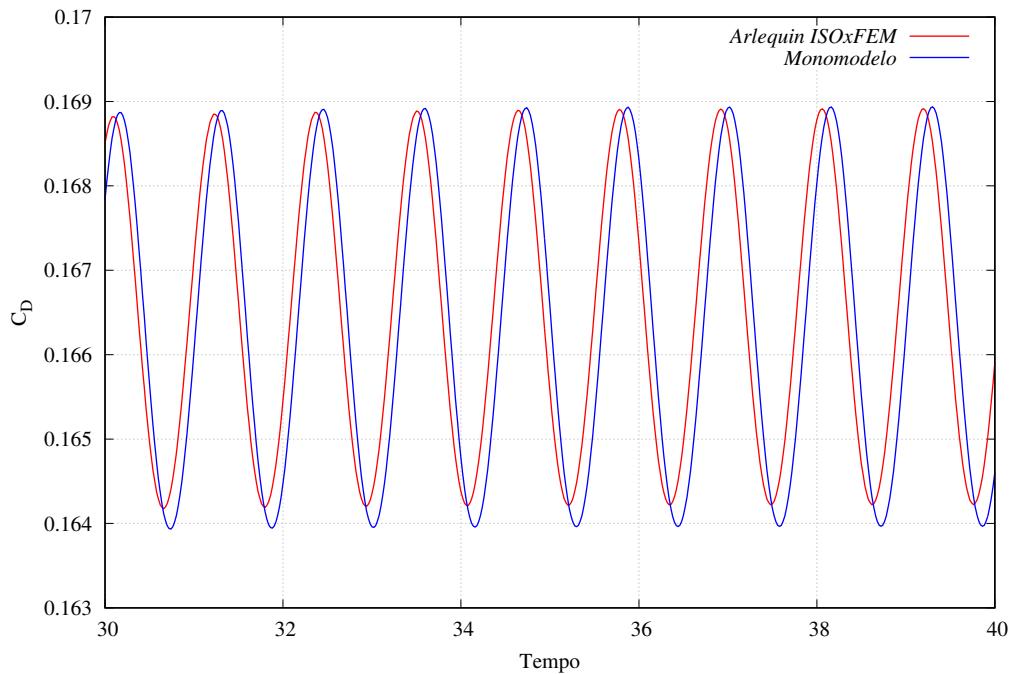


Figura 6.7 – Aerofólio 2D: Coeficiente de Arrasto

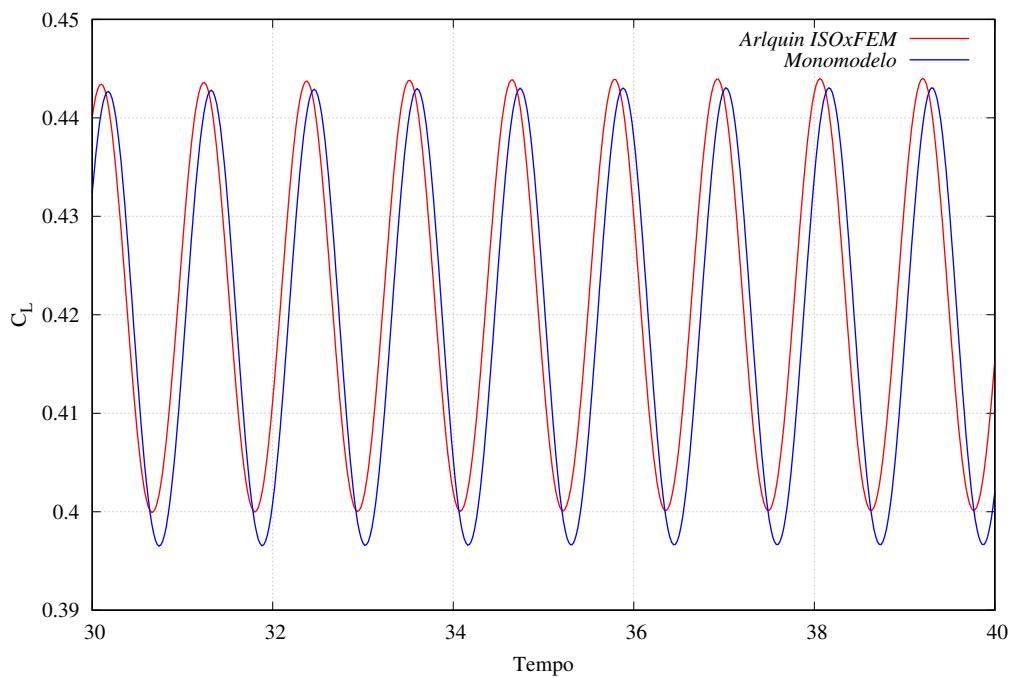


Figura 6.8 – Aerofólio 2D: Coeficiente de Sustentação

O aerofólio apresenta variação do ângulo de ataque em  $20^\circ$ , iniciando o movimento em  $10^\circ$  e finalizando-o em  $30^\circ$ .

Para descrever-se tal movimento aplica-se, tendo como centro a corda média do aerofólio, o movimento de rotação de corpo rígido através da seguinte relação:

$$\theta = \frac{\theta_{max} + \theta_{min}}{2} - \frac{\theta_{max} - \theta_{min}}{2} \cos \omega_f t, \quad (6.80)$$

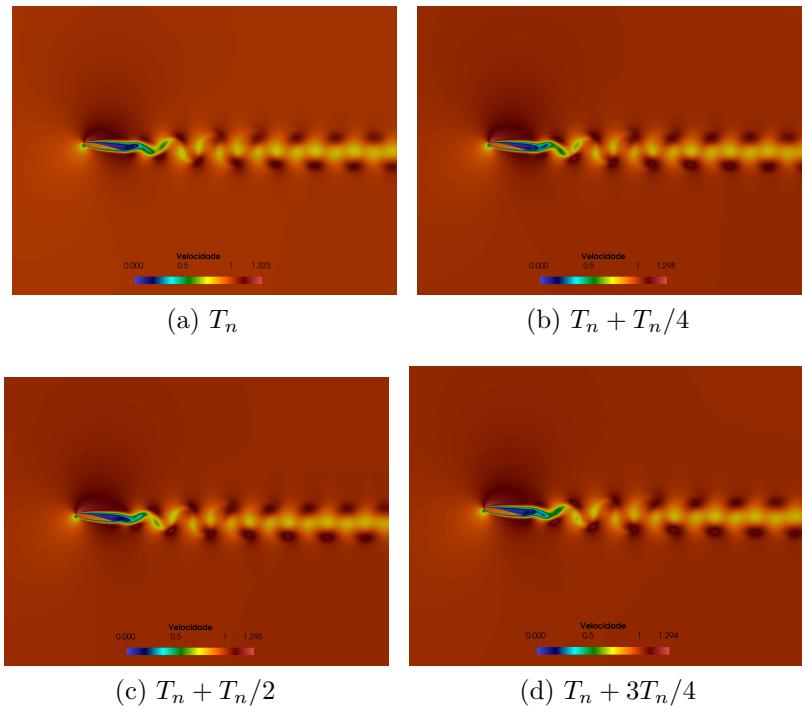


Figura 6.9 – Aerofólio 2D: Campo de velocidade

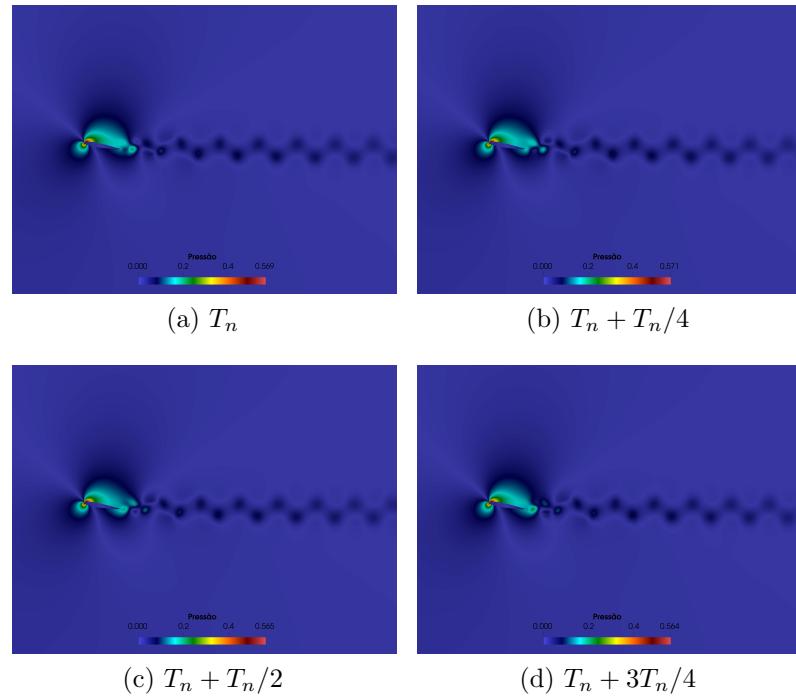


Figura 6.10 – Aerofólio 2D: Campo de pressão

com  $\omega_f = 2\pi f_o$ , sendo  $f_o$  a frequência de oscilação, adotada nesse estudo como 1.0,  $\theta_{max} = 30^\circ$  e  $\theta_{min} = 10^\circ$ .

As dimensões da geometria do domínio computacional são alteradas (ver Fig. 6.11) para capturar os efeitos dos desprendimentos de vórtices, que para esse problema, se

desprendem em uma faixa mais ampla. Os demais parâmetros de análise foram mantidos iguais aos apresentados no exemplo da Subseção 6.6.1.

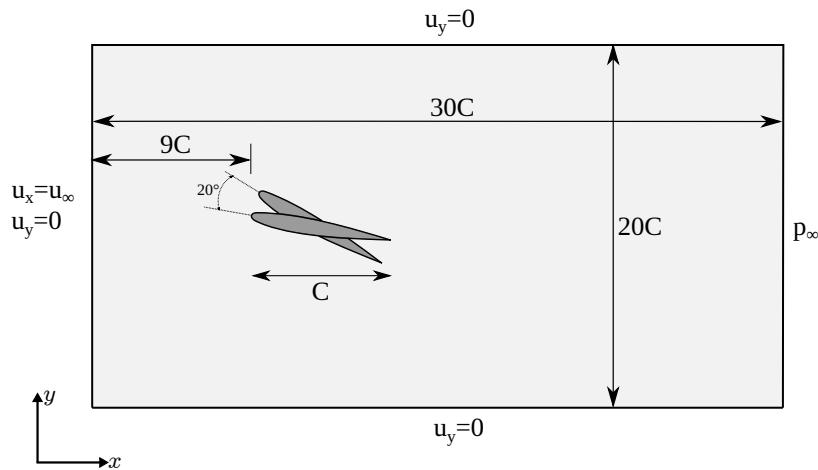


Figura 6.11 – Aerofólio Mov. 2D: Geometria

Novamente são analisadas 2 discretizações: 1. Monomodelo; 2. Combinação de duas malhas através do método Arlequin estabilizado. O monomodelo consiste em uma malha com 12438 elementos triangulares quadráticos e 25188 elementos. As malhas global e local do método Arlequin mantiveram-se com a mesma discretização do problema da Subseção 6.6.1, incluindo a quantidade de elementos na zona de colagem.

É importante ressaltar que para a simulação desse exemplo, utilizou-se como campo inicial de velocidade e pressão, valores obtidos em uma solução de longo termo do aeroporto na condição de repouso.

A variação dos coeficientes de arrasto e sustentação ao longo do tempo são apresentados nas Fig. 6.12 e Fig. 6.13. Nota-se nas imagens que o monomodelo e o modelo Arlequin estão consistentes em suas respostas. Soluções semelhantes podem ser observados no trabalho de Fernandes (2020).

Nas figuras Fig. 6.14 e Fig. 6.15 são apresentados os campos de velocidade e pressão em alguns instantes para um ciclo do movimento oscilatório preescrito.

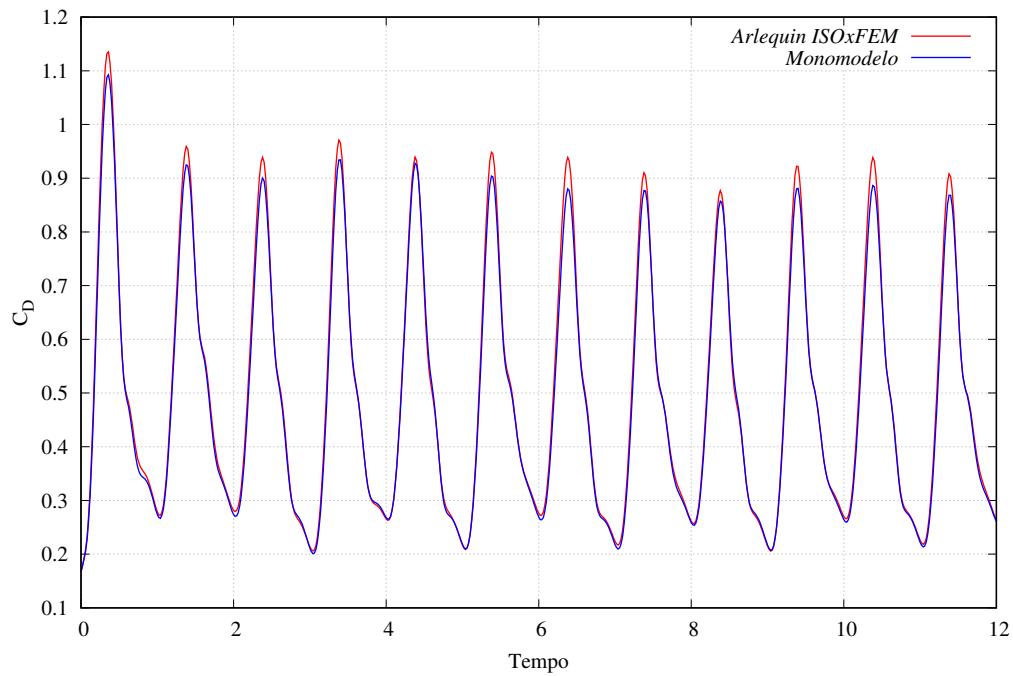


Figura 6.12 – Aerofólio Mov. 2D: Coeficiente de Arrasto

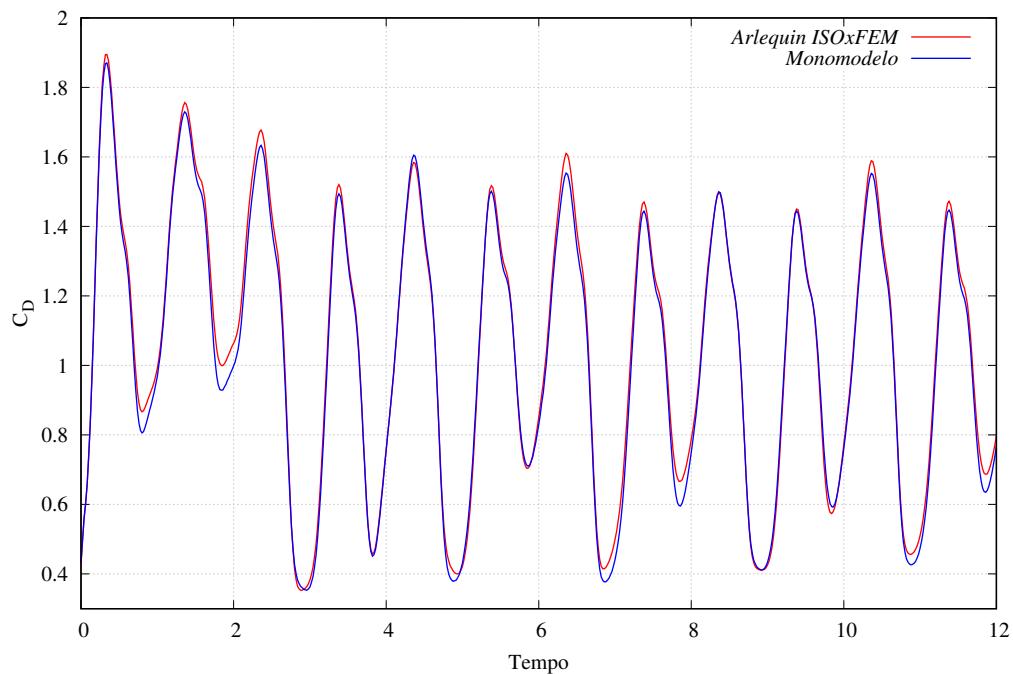


Figura 6.13 – Aerofólio Mov. 2D: Coeficiente de Sustentação

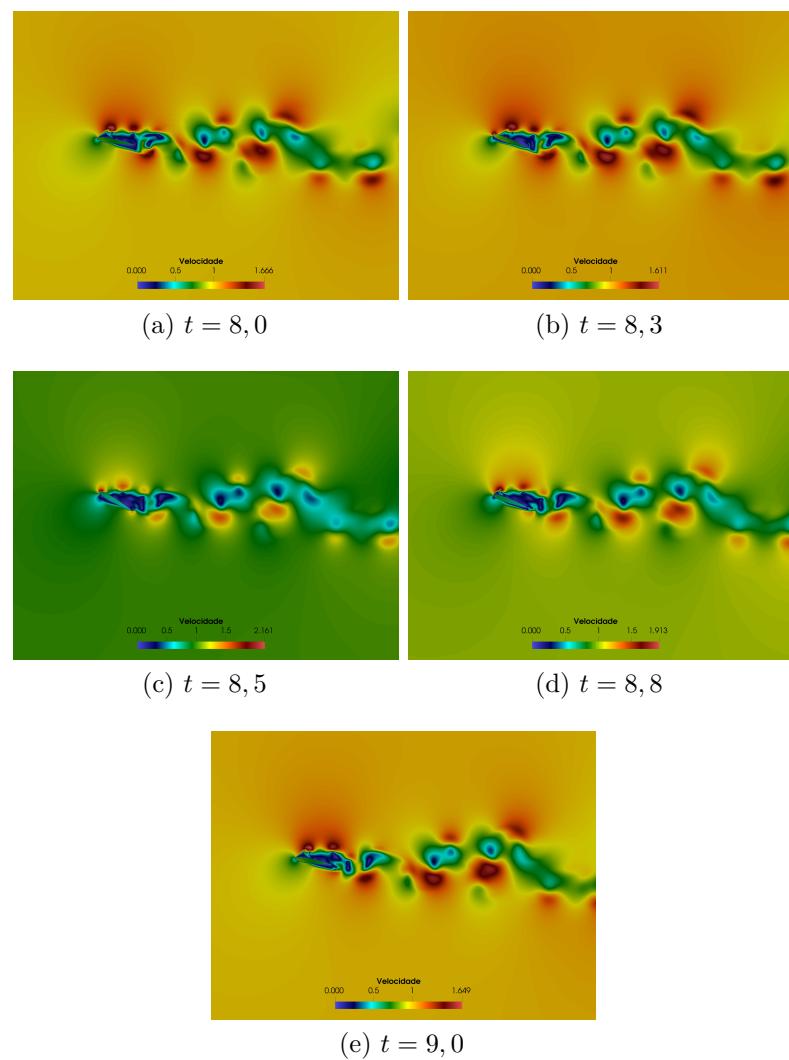


Figura 6.14 – Aerofólio Mov. 2D: Campos de velocidade

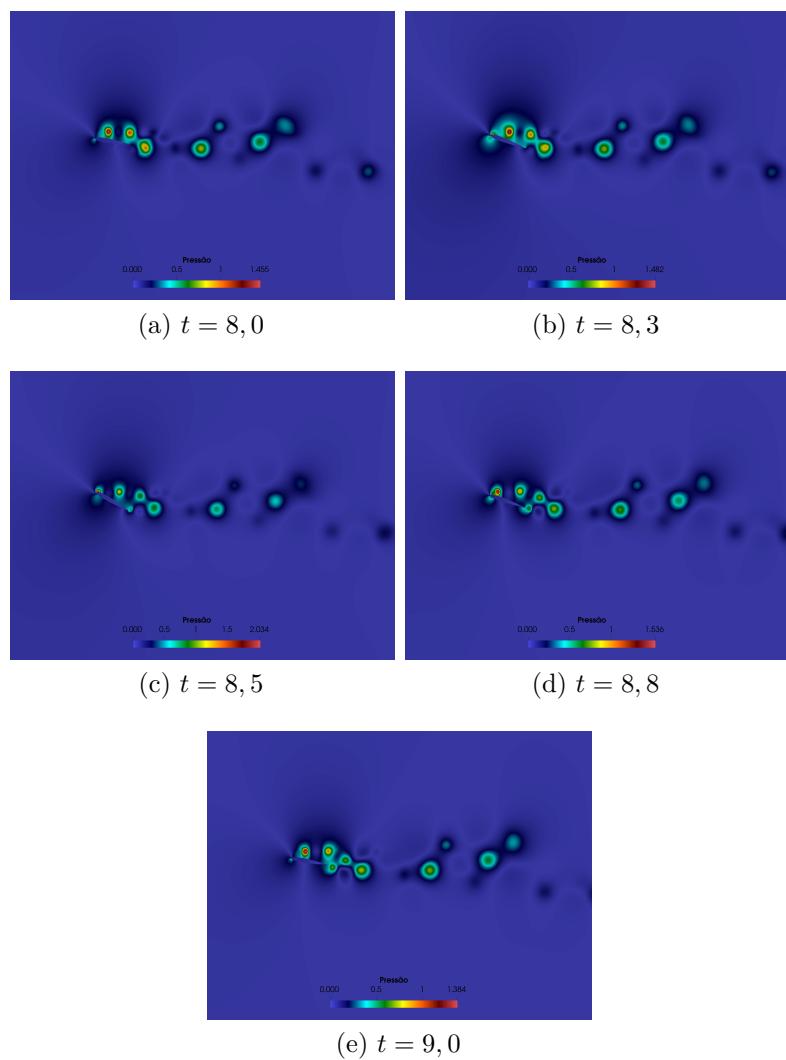


Figura 6.15 – Aerofólio Mov. 2D: Campos de pressão

## CAPÍTULO

## 7

---

# INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

---



---

Ao longo deste trabalho, conforme apresentado nos capítulos anteriores, foi desenvolvido um código computacional para análise de fluidos incompressíveis que permite a decomposição do domínio para capturar efeitos localizados por meio da técnica Arlequin estabilizada. Além disso, para esta pesquisa, foi disponibilizado por um pesquisador do grupo de pesquisas em Mecânica Computacional do Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, no qual a presente aluna está inserida, um código computacional para a análise não linear de estruturas pelo método dos elementos finitos posicional. Com base nesses desenvolvimentos, optou-se por um esquema de acoplamento particionado forte entre fluido e estrutura. Essa abordagem foi escolhida por proporcionar um total desacoplamento entre os *solvers* de fluido e de estrutura, o que facilita a solução dos problemas que aqui serão propostos.

Nesse contexto, para o acoplamento, utiliza-se a técnica de malhas adaptadas para a malha local do fluido em contato com a estrutura, aplicando-se uma descrição ALE. Vale ressaltar que, embora a malha local possa se mover, a malha global permanece fixa com descrição Euleriana, fazendo com que o método de acoplamento possa ser classificado como uma técnica híbrida.

No texto a seguir descrevem-se as condições de acoplamento necessárias a solução de um problema IFE, a técnica de movimentação de malha utilizada nesse estudo, e a metodologia de transferência de condições de contorno (Dirichlet-Neumann) em uma interface de fluido e sólido com malha não coincidente. Discorre-se na continuação sobre os detalhes a cerca do esquema de acoplamento particionado forte adotado. Por fim, o algoritmo de implementação computacional será apresentado, e exemplos de validação serão exibidos na sequência.

## 7.1 Condições de acoplamento

O domínio computacional para a análise de problemas de interação fluido-estrutura (Fig. 7.1), denominado de  $\Omega_{IFE}$ , é composto pela união entre os domínios da estrutura  $\Omega_E$  e do fluido  $\Omega_F$ , ou seja,  $\Omega_{IFE} = \Omega_F \cup \Omega_E$ , com  $\Gamma_{IFE}$  representando o contorno que define a interface fluido-estrutura.

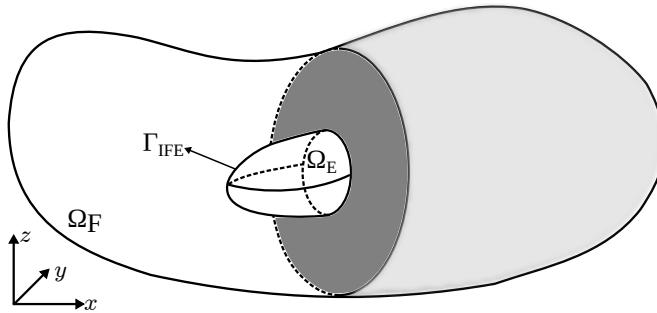


Figura 7.1 – Domínios Computacional para análise de problemas de IFE.

O domínio computacional não se sobrepõe, por isso, é necessário que em  $\Gamma_{IFE}$  existam condições físicas adicionais para se realizar o acoplamento. Richter (2017) cita que o acoplamento é realizado através de 3 diferentes princípios no contorno  $\Gamma_{IFE}$  : condição cinemática, condição dinâmica e condição geométrica.

A condição cinemática refere-se ao fato de que a velocidade do fluido e do sólido na interface devem ser iguais. A condição dinâmica, refere-se à existência de continuidade do vetor tensão de Cauchy na direção normal ao contorno  $\Gamma_{IFE}$ .

Em esquemas de acoplamento monolítico, as condições cinemática e dinâmica são atendidas de maneira implícita, visto que os meios são tratados no mesmo contexto matemático. Para esquemas particionadas, como o desse estudo, essas condições são atendidas através da transferência de condições de contorno apropriadas entre os meios.

Para a condição cinemática têm-se:

$$\mathbf{u}^h = \dot{\mathbf{y}}^h \text{ no contorno } \Gamma_{IFE}, \quad (7.1)$$

atendida através da aplicação dos valores de  $\dot{\mathbf{y}}^h$  nos nós (ou pontos de controle) que compõe a malha do fluido na interface entre os meios.

A condição dinâmica, preescreve o balanço da tensão normal no contorno, ao que diz respeito à ação e reação, conforme a equação abaixo:

$$\sigma_E \mathbf{n}_E + \sigma_F \mathbf{n}_F = 0 \text{ no contorno } \Gamma_{IFE}, \quad (7.2)$$

na qual,  $\sigma_E$  representa as tensões de Cauchy da estrutura,  $\sigma_F$  as tensões de Cauchy no fluido, e  $\mathbf{n}_E$  e  $\mathbf{n}_F$  representam o vetor normal no contorno  $\Gamma_{IFE}$  respectivamente apontando para o fluido e para a estrutura. Essa condição é atendida através da aplicação de  $\sigma_F \mathbf{n}_F$  aos nós da malha da estrutura na interface entre os meios.

Já a condição geométrica está relacionada ao fato que os domínios computacionais  $\Omega_E$  da estrutura e  $\Omega_F$  do fluido devem sempre coincidir em  $\Gamma_{IFE}$ , ou seja, não devem existir superposições ou frestas nessa interface. No contexto desse estudo essa condição é atendida através de uma movimentação adequada da malha local (Método Arlequin), que se deforma para acomodar a mudança de configuração da estrutura. A técnica de movimentação de malha adotada será apresentada na Subseção 7.1.1.

### 7.1.1 Movimentação da Malha

Para a satisfação da condição geométrica nos problemas de IFE desse trabalho, uma técnica adequada de movimentação de malha deve ser aplicada. É necessário que o método de movimentação de malha seja robusto o suficiente para que garanta ao longo de toda a análise dos problemas uma discretização de qualidade.

Dentre as técnicas desenvolvidas até o momento, destacam-se aquelas que impõem os deslocamentos da estrutura na malha do fluido ao longo do contorno  $\Gamma_{IFE}$ , determinando o campo de deslocamentos na malha do fluido por meio da resolução de um problema de valor de contorno (PVC). Neste trabalho, será adotada essa abordagem, formulando o problema com base na equivalência entre a movimentação da malha à um problema de mecânica dos sólidos, e aplicando-se a técnica de movimentação de malhas introduzida em Tezduyar et al. (1992f) e Tezduyar et al. (1993) conhecida como MJBS (*Mesh-Jacobian Based Stiffening*).

Nesse método, o movimento da malha é determinado usando um problema da elasticidade de Dirichlet fictício, descrito como:

$$\int_{\Omega_{\tilde{t}}} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^h) : \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{z}}^h - \bar{\mathbf{z}}_{\tilde{t}}^h) d\Omega = 0, \quad (7.3)$$

na qual  $\mathbf{w}^h$  é a função peso respectiva ao deslocamento da malha  $\bar{\mathbf{z}}^h$ , medido a partir de uma configuração de referência até a configuração atual  $\mathbf{x}^h$  e  $\bar{\mathbf{z}}_{\tilde{t}}^h$  representa o deslocamento da configuração de referência até a malha no tempo  $\tilde{t}$ , ou  $\mathbf{x}_{\tilde{t}}^h$ . A escolha para  $\tilde{t}$  é geralmente  $\tilde{t} = t_n$  quando se calcula a configuração da malha no tempo  $t_{n+1}$  (ver Tonon et al. (2021) para maiores detalhes).

O tensor de tensões é calculado através da seguinte relação:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{z}) = \frac{E_m}{1 + \nu_m} \left( \frac{\nu_m}{(1 - 2\nu_m)} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{z})) \mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{z}) \right) \quad (7.4)$$

com  $E_m$  e  $\nu_m$  o módulo de Elasticidade e o coeficiente de Poisson fictícios da malha respectivamente. Os valores usados por definição nesse trabalho são  $E_m = 1,0$  e  $\nu_m = 0,3$ .

Nos problemas de IFE, demanda-se maior controle da resolução da malha próxima a interface dos meios fluidos e sólidos, para representar os efeitos de camada limite, e como consequência, a obtenção de soluções mais acuradas nessas regiões críticas. Para fazer com que na deformação da malha se leve em conta o tamanho dos elementos, enrijecendo os

menores mais do que os maiores, no método MJBS a equação da elasticidade fica descrita ao final como:

$$\int_{\Omega_{\tilde{t}}} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^h) : \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{z}}^h - \bar{\mathbf{z}}_{\tilde{t}}^h) \left( \frac{J_M}{(J_M)_0} \right)^{-\chi} d\Omega = 0, \quad (7.5)$$

onde  $J_M$  é o Jacobiano da malha,  $(J_M)_0$  é um parâmetro livre e  $\chi$  determina a ordem pela qual os elementos menores serão enrijecidos mais do que os maiores.  $\chi$  é adotado correntemente como 1. E o Jacobiano da malha calculado da forma que se segue:

$$J_M = \det \left( \frac{\partial \mathbf{x}_{\tilde{t}}^h}{\partial \xi} \right), \quad (7.6)$$

onde  $\xi$  são as coordenadas paramétricas do elemento.

## 7.2 Discretizações não coincidentes entre os meios

Na maioria dos casos a discretização das malhas do fluido e da estrutura são não-coincidentes no contorno  $\Gamma_{IFE}$  e podem inclusive ter aproximações matemáticas distintas. Dessa forma, uma metodologia que possibilita a aplicação de condições de contorno em caso de discretizações com nós não coincidentes, é imprescindível.

O procedimento adotado nesse trabalho pode ser entendido a partir da Fig. 7.2. Nele, durante o pré-processamento do código computacional, cada nó do contorno da estrutura  $\mathbf{x}_E$  é projetado sobre o contorno do fluido, e busca-se a coordenada paramétrica relativa a este ponto definida como  $\xi_F(\mathbf{x}_E)$ . Da mesma forma, cada nó do contorno do fluido  $\mathbf{x}_F$  é projetado sobre o contorno da estrutura, e encontra-se uma coordenada paramétrica equivalente  $\xi_E(\mathbf{x}_F)$ .

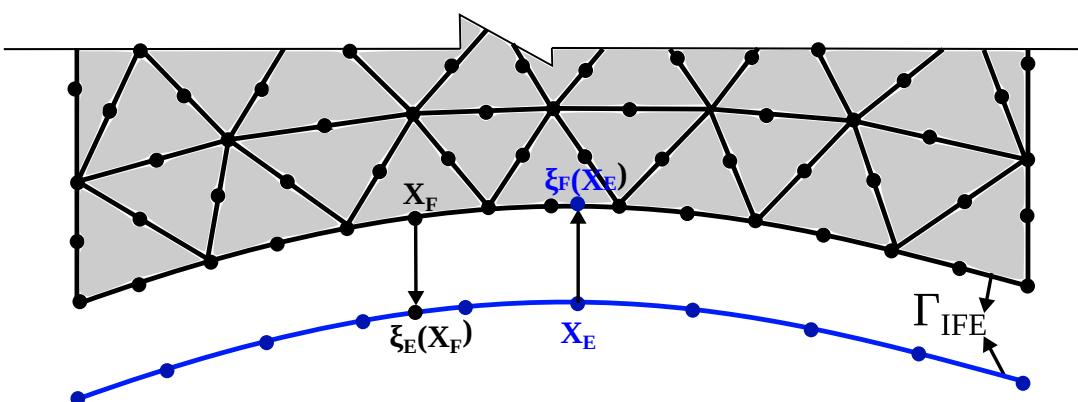


Figura 7.2 – Discretizações não-coincidentes no contorno IFE

Dessa forma, as informações que serão transmitidas ao fluido pela estrutura são interpoladas na malha da estrutura em cada uma das coordenadas paramétricas que

possuem um nó equivalente na malha de fluido, e após isso aplicadas a este nó. O equivalente ocorre quando os dados são provenientes do fluido e serão transmitidos a estrutura.

## 7.3 Acoplamento Particionado Forte - Bloco-Iterativo

Os problemas de IFE são caracterizados pela interdependência entre o fluido e a estrutura, visto que o comportamento do escoamento depende do formato e do movimento da estrutura, enquanto que o movimento da estrutura e sua deformação dependem das forças do fluido que atuam sobre ela. Matematicamente pode-se dizer que os problemas de IFE são conjuntos de equações e condições de contorno associadas ao fluido e a estrutura que devem ser satisfeitas simultaneamente.

As equações completas discretizadas da formulação IFE conduzem a um sistema de equações não-lineares que devem ser resolvidas a cada passo de tempo e podem ser representadas da seguinte maneira (BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013):

$$\mathbf{N}_1(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) = 0, \quad (7.7)$$

$$\mathbf{N}_2(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) = 0, \quad (7.8)$$

$$\mathbf{N}_3(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) = 0, \quad (7.9)$$

em que  $\mathbf{N}_1$ ,  $\mathbf{N}_2$  e  $\mathbf{N}_3$  representam as equações que descrevem o fluido, a estrutura e a malha respectivamente, e,  $\mathbf{d}_1$ ,  $\mathbf{d}_2$ ,  $\mathbf{d}_3$  são vetores com as variáveis nodais de cada meio. A resolução dessas equações através do método de Newton-Raphson conduz ao seguinte sistema linear de equações:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix}. \quad (7.10)$$

sendo  $\mathbf{b}_1 = -\mathbf{N}_1$ ,  $\mathbf{b}_2 = -\mathbf{N}_2$ ,  $\mathbf{b}_3 = -\mathbf{N}_3$ .  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  e  $\mathbf{x}_3$  são os incrementos às soluções  $\mathbf{d}_1$ ,  $\mathbf{d}_2$  e  $\mathbf{d}_3$  respectivamente e  $\mathbf{A}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial \mathbf{d}_j}$ .

Bazilevs, Takizawa e Tezduyar (2013) apresentam uma classificação da metodologia de acoplamento segundo a forma de resolver essas equações não-lineares. As categorias definidas pelos autores são: técnica direta, técnica bloco-iterativa e técnica quase-direta.

A técnica direta seria equivalente aos esquemas de solução monolíticos citados ao longo do texto, e consiste na resolução a cada iteração de Newton-Raphson do sistema apresentado na Eq. 7.10. Essa técnica apresenta boa convergência, entretanto, devido aos grandes sistemas lineares gerados, ocorre um aumento do custo computacional.

Nesse contexto, e buscando proporcionar um total desacoplamento entre os *solvers*

de fluido e de estrutura, adotou-se o um esquema de acoplamento do tipo particionado forte. Dentro da classificação dos autores Bazilevs, Takizawa e Tezduyar (2013) seria equivalente a técnica de acoplamento do tipo bloco iterativo.

Quando se utiliza um acoplamento do tipo bloco iterativo, os sistemas do fluido, da estrutura e da malha são tratados em blocos separados, e para cada iteração dentro de um passo de tempo, se resolve sequencialmente o seguinte conjunto de equações:

$$\frac{\partial \mathbf{N}_1}{\partial \mathbf{d}_1} \Big|_{(\mathbf{d}_1^i, \mathbf{d}_2^i, \mathbf{d}_3^i)} \Delta \mathbf{d}_1^i = -\mathbf{N}_1(\mathbf{d}_1^i, \mathbf{d}_2^i, \mathbf{d}_3^i) \quad (7.11)$$

$$\mathbf{d}_1^{i+1} = \mathbf{d}_1^i + \Delta \mathbf{d}_1^i \quad (7.12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{N}_2}{\partial \mathbf{d}_2} \Big|_{(\mathbf{d}_1^{i+1}, \mathbf{d}_2^i, \mathbf{d}_3^i)} \Delta \mathbf{d}_2^i = -\mathbf{N}_2(\mathbf{d}_1^{i+1}, \mathbf{d}_2^i, \mathbf{d}_3^i) \quad (7.13)$$

$$\mathbf{d}_2^{i+1} = \mathbf{d}_2^i + \Delta \mathbf{d}_2^i \quad (7.14)$$

$$\frac{\partial \mathbf{N}_3}{\partial \mathbf{d}_3} \Big|_{(\mathbf{d}_1^{i+1}, \mathbf{d}_2^{i+1}, \mathbf{d}_3^i)} \Delta \mathbf{d}_3^i = -\mathbf{N}_3(\mathbf{d}_1^{i+1}, \mathbf{d}_2^{i+1}, \mathbf{d}_3^i) \quad (7.15)$$

$$\mathbf{d}_3^{i+1} = \mathbf{d}_3^i + \Delta \mathbf{d}_3^i \quad (7.16)$$

Nota-se que o ocorre é apenas uma modificação da matriz tangente com relação ao método direto. Este fato, faz com que a resposta não seja alterada, entretanto, a convergência do problema pode ser afetada.

Em certos problemas envolvendo estruturas leves, a resposta estrutural pode tornar-se extremamente sensível a pequenas variações nas forças provenientes do fluido. Esse fenômeno pode levar à divergência da técnica de bloco iterativo. Para contornar essa dificuldade, adotou-se a estratégia proposta por Tezduyar (2003), chamada de *Augmented A22* na qual a matriz de massa em  $\mathbf{A}_{22}$  é aumentada por um fator dependente do tipo de problema em análise. Essa modificação ocorre sem alterar  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  e  $\mathbf{b}_3$ , ou seja, sem modificar as equações não lineares. Dessa forma, quando a solução pelo método de bloco iterativo converge, a massa estrutural real do problema permanece inalterada.

### 7.3.1 Implementação Computacional

O Algoritmo que descreve a implementação computacional do problema de IFE de acordo com a técnica de acoplamento forte do tipo bloco-iterativo é apresentada no Alg. 5.

No algoritmo apresentado  $\mathbf{t}^E$  representa as forças de superfície no contorno  $\Gamma_{IFE}$  aplicadas à estrutura, e as medidas de convergência  $\epsilon_F$ ,  $\epsilon_E$  e  $\epsilon_M$  são normas vetoriais  $L_2$  aplicadas sobre o resíduo das respectivas equações diferenciais.

**Algoritmo 5** Algoritmo para solução de problemas IFE

---

```

1: Busca por coordenadas paramétricas correspondentes aos nós da malha do fluido na
   malha da estrutura;
2: Busca por coordenadas paramétricas correspondentes aos nós da malha da estrutura
   na malha do fluido;
3: para o passo de tempo  $t = 0$  até  $t = T$  faca
4:   Atualiza as variáveis do fluido, estrutura e malha no passo de tempo  $t = t - 1$ ;
5:   para número de iterações de Newton Raphson  $it = 0$  até  $it = N_{it}$  faca
6:     Fluido
7:       Realiza os passos das linhas 1., 2., 3. e 4. do Algoritmo 4;
8:       Resolve o problema do fluido (Eq. (7.11));
9:       Atualiza as variáveis do fluido na iteração  $it$  através da eq. 7.12;
10:      Calcula medida de convergência  $\epsilon_F$ ;
11:      Atualiza as forças de superfície no contorno  $\Gamma_{IFE}$  ( $\mathbf{t}^E = -\boldsymbol{\sigma}_F \cdot \mathbf{n}_F$ ) ;
12:      Estrutura
13:        Resolve o problema da estrutura (Eq. (7.13));
14:        Atualiza as variáveis da estrutura na iteração  $it$  através da eq. (7.14);
15:        Calcula medida de convergência  $\epsilon_E$ ;
16:        Atualiza velocidade e acelerações no fluido no contorno  $\Gamma_{IFE}$ ;
17:        Atualiza posição da interface da malha no contorno  $\Gamma_{IFE}$ ;
18:      Malha
19:        Resolve o problema de malha Eq. (7.15);
20:        Atualiza as variáveis da malha na iteração  $it$  através da eq. (7.16);
21:        Calcula medida de convergência  $\epsilon_M$ ;
22:        se  $\epsilon_F, \epsilon_E$  e  $\epsilon_M < tol$  então
23:          Sair do loop;
24:        fim se
25:      fim para
26:    fim para

```

---

## 7.4 Exemplos

Para a validação da metodologia de análise de problemas de IFE, apresentada nesse capítulo, alguns exemplos serão estudados e analisados.

Os dois primeiros exemplos dizem respeito a uma cavidade com um fundo flexível composto por uma chapa, com velocidade oscilatória aplicada em seu topo. Esses exemplos são uma extensão do típico problema da DFC de uma cavidade quadrada (apresentado, por exemplo, na Seção 2.5.2 em sua versão 3D) e serão apresentados em uma versão bidimensional e tridimensional.

O seguinte exemplo consiste em um painel flexível engastado a um bloco prismático rígido. Esse problema é comumente utilizado na validação de códigos de Interação Fluido-Estrutura (IFE), pois envolve fenômenos complexos. À medida que ocorre o desprendimento de vórtices devido ao escoamento ao redor do prisma, perturbações são geradas no fluxo, excitando a estrutura, que então sofre grandes deslocamentos.

### 7.4.1 Cavidade com fundo flexível - 2D

O problema da cavidade com fundo flexível trata-se de uma extensão do típico problema da DFC de uma cavidade quadrada com velocidade prescrita em sua parede superior. Sua simulação computacional já foi realizada por diversos autores, como por exemplo, Gerbeau e Vidrascu (2003) e Yokomizo (2024), e por isso, será utilizada no processo de validação da metodologia nesta tese apresentada.

A cavidade com fundo flexível (geometria apresentada na Fig. 7.3) consiste em uma cavidade composta por paredes laterais rígidas e um fundo flexível composto por uma placa fina de 0,002. No seu topo uma velocidade oscilatória horizontal  $u_x(t) = 1 - \cos(0,4\pi t)$  é aplicada, sendo as demais velocidades ( $u_y$  e  $u_z$ ) nessa parede nulas. Condições de contorno de não deslizamento são aplicadas as paredes laterais. Esse modelo de cavidade apresenta duas aberturas de 0,1 no topo de suas laterais com condições homogêneas de Neumann. Como o problema apresenta comportamento bidimensional o mesmo será analisado utilizando-se uma discretização 3D com uma espessura de 0,1 de profundidade. Adotou-se condição de simetria para o fluido na direção  $y$ . Na Fig. 7.3 são apresentadas também as propriedades físicas do fluido e da estrutura necessárias a análise.

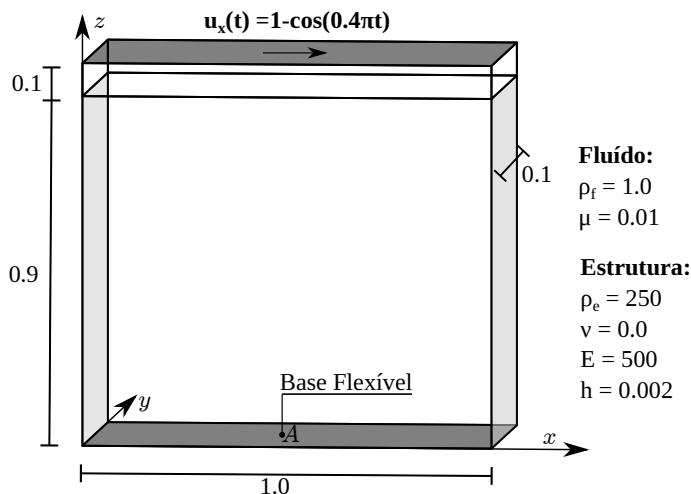


Figura 7.3 – Cavidade fundo flexível 2D: geometria

A placa fina possui condições de deslocamentos nulos em suas laterais esquerda e direita, e, na direção perpendicular ao plano da cavidade o vetor generalizado e os deslocamentos, nesta direção, são prescritos como zero em  $y = 0,0$  e  $y = 0,1$ .

No que diz respeito a integração temporal utilizou-se  $\Delta t = 0,1$ , e  $\rho_\infty = 0,0$ . A escolha por uma integração temporal com máxima dissipação se deu por conta do trabalho de Förster, Wall e Ramm (2007) que reporta que a regra trapezoidal de integração leva a resultados instáveis para esse problema.

Foram utilizadas nas análises três diferentes discretizações para o modelo Arlequin, sendo as malhas globais em elementos isogeométricos quadráticos (IGA) e as malhas

locais, mais refinadas, em elementos finitos (MEF) tetraédricos quadráticos. Além disso, os resultados foram comparados com uma discretização somente em elementos finitos tetraédricos quadráticos, chamada de monomodelo. A quantidade de nós, ou pontos de controle (PC), e de elementos para cada uma dessas discretizações é apresentada na Tab. 7.1, assim como detalhes da discretização da placa, na qual foram utilizados elementos triangulares quadráticos. Na tabela ML e MG são abreviações para malha local e malha global respectivamente.

Tabela 7.1 – Discretizações

	Nós/PC ML	Elementos ML	Nós/PC MG	Elementos MG
Arlequin - Malha 0	777	370	504	100
Arlequin - Malha 1	1625	778	1584	400
Arlequin - Malha 2	6156	3040	5544	1600
Monomodelo	-	-	11789	5750
Estrutura - Malha 0	-	-	103	40
Estrutura - Malha 1	-	-	203	80
Estrutura - Malha 2	-	-	883	400

A malha isogeométrica utilizada foi composta por 2 *patches* (observar Fig. 7.4). Essa discretização usando 2 *patches* foi necessária para gerar pontos de controle interpolatórios posicionados na linha que separa as paredes laterais das aberturas, possibilitando a adequada aplicação das condições de contorno. Na Fig. 7.4 pode ser observada também a composição do modelo Arlequin. A região em vermelho da malha local corresponde aos elementos que fazem parte da zona de colagem. A espessura da zona de colagem foi definida como 0,1. A constante do operador de acoplamento  $L^2$  foi especificada como  $k_0 = 10$ . A quantidade de elementos na zona de colagem para malha 0, 1 e 2 foram respectivamente de 185, 390, 1569, e de nós 400, 915 e 3372.

Nesse problema foi necessário para atingir a convergência a utilização da técnica *Augmented A22*, multiplicando-se a parcela da matriz tangente referente à matriz de massa da estrutura por um fator 2,0.

Na Fig. 7.5 são apresentados os deslocamentos da placa no ponto A (ver Fig. 7.3) para os modelos Arlequin (malha 0, malha 1 e malha 2). Para a comparação com as referências e com o monomodelo, utilizou-se o modelo Arlequin composto pela malha 2, mais refinada, e os resultados são apresentados na Fig. 7.6. Pode-se observar nessa última figura, que os dados obtidos com o modelo Arlequin são compatíveis com os obtidos com o monomodelo. As diferenças encontradas entre a amplitude dos deslocamentos obtidos nesse trabalho com as referências podem ser atribuídas para as diferentes formulações adotadas para a modelagem do fluido e da chapa.

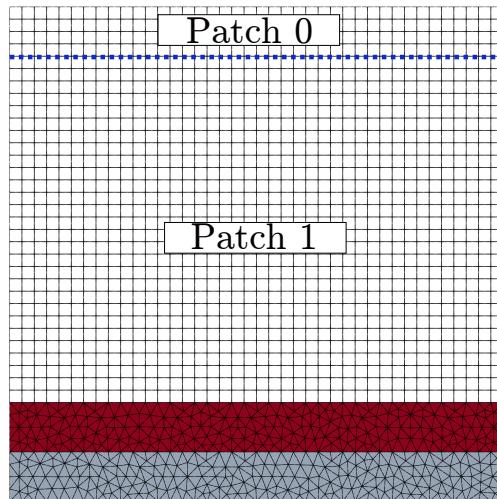


Figura 7.4 – Cavidade fundo flexível 2D: Vista frontal da discretização para modelo Arlequin - malha 2

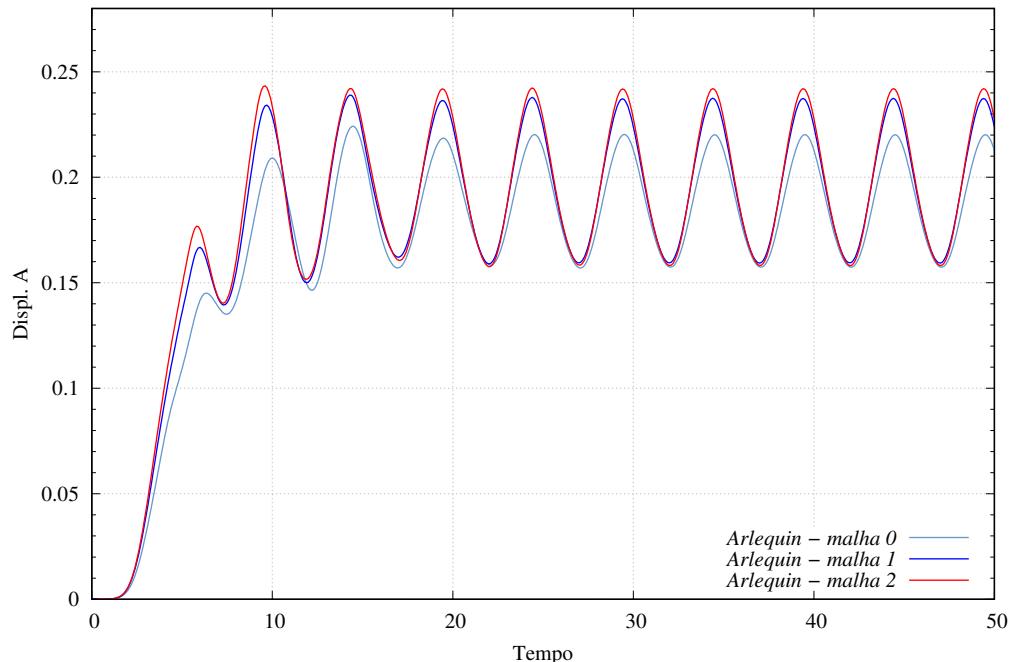


Figura 7.5 – Cavidade fundo flexível 2D: Deslocamento em A para malhas do modelo Arlequin

Na Fig 7.7 são apresentados os campos de velocidade em diferentes tempos da análise. Na Fig. 7.8 são apresentados os campos de pressão nesses mesmos tempos de análise, sendo plotadas nessas figuras a deformada da malha local que comporta a movimentação da estrutura.

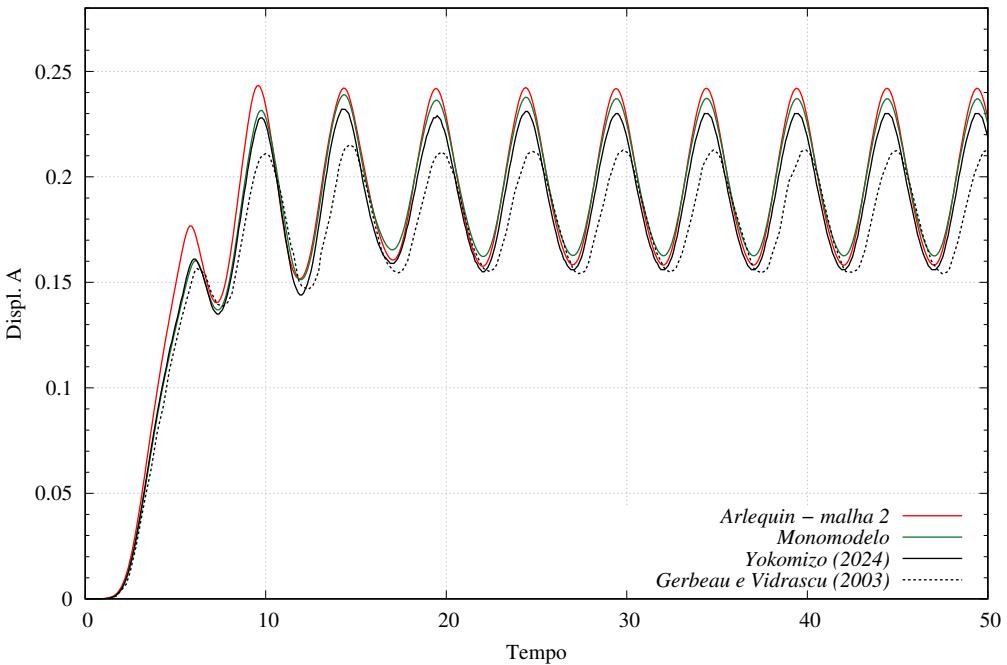


Figura 7.6 – Cavidade fundo flexível 2D: Deslocamento em A comparado com as referências e monomodelo

#### 7.4.2 Cavidade com fundo flexível - 3D

O problema da cavidade tridimensional com fundo flexível foi proposto inicialmente por Mok (2001) e é muito semelhante ao 2D, entretanto, nessa variação a profundidade da cavidade possui dimensão unitária, conforme pode ser visualizado na Fig. 7.9, além disso, a chapa possui restrição de deslocamentos em todos os 4 bordos. Os demais dados necessários à análise são idênticos ao do problema 2D.

Foram utilizadas nas análises desse problema duas diferentes discretizações: 1. Modelo Arlequin (ver Fig. 7.10a), sendo a malha global em elementos isogeométricos quadráticos (IGA) e a malha local, mais refinada, em elementos finitos (MEF) tetraédricos quadráticos; 2 . Monomodelo discretizado com elementos finitos tetraédricos quadráticos. Para ambos modelos utilizou-se uma placa discretizada com elementos finitos triangulares quadráticos (Fig. 7.10b).

O modelo Arlequin é composto por uma malha global discretizada com 2 *patches* que totalizam 8000 elementos e 11616 pontos de controle. A malha local possui 9090 elementos e 14997 nós. A zona de colagem (ver área vermelha da Fig. 7.10a) é composta por 4523 elementos e 8566 nós. Ressalta-se que na Fig. 7.10a as malhas global e local são apresentadas separadamente para melhorar a visualização, entretanto, a malha local é superposta à malha global na região inferior da cavidade. O monomodelo foi discretizado com 15899 elementos e 25127 nós. A malha da placa é constituída por 1969 nós e 944 elementos.

Na Fig. 7.11 (PROVAVELMENTE SERÁ TROCADA ESSA) pode se observar o

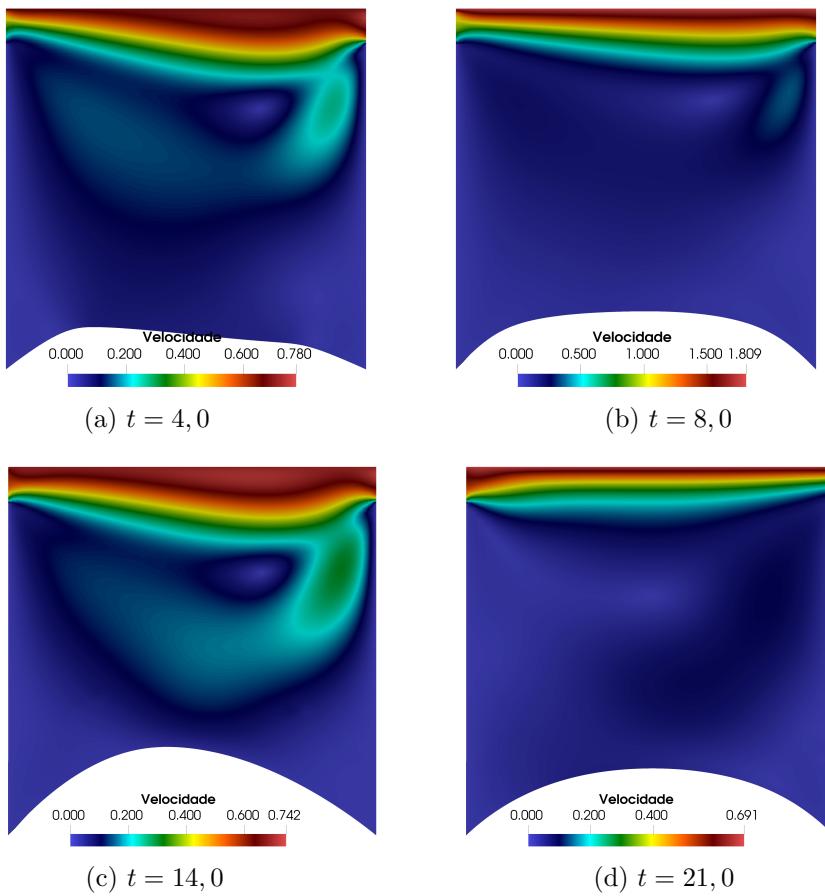


Figura 7.7 – Cavidade fundo flexível 2D: Campos de velocidade

deslocamento no ponto A que fica no centro da placa flexível para os modelos Arlequin e monomodelo, assim como dos trabalhos de Mok (2001) e Vázquez (2007). As diferenças encontradas entre a amplitude dos deslocamentos obtidos nesse trabalho com as referências podem ser atribuídas para as diferentes formulações adotadas para a modelagem do fluido e da chapa.

**rever aqui** Rodar denovo o monomodelo 3d ALTERAR FIGURA ANTERIOR ADICIONAR AQUI imagens da velocidade e pressão. ADICIONAR AQUI imagens do campo de deslocamentos na placa.

#### 7.4.3 *Flutter em painel flexível*

O problema dessa subseção consiste em um painel flexível engastado a um prisma rígido, conforme Fig. 7.12. Devido a complexidade dos fenômenos envolvidos nessa simulação, esse exemplo caracteriza-se por ser um dos mais utilizados na literatura para validação de formulações de IFE. Esse problema foi inicialmente proposto por Wall e Ramm (1998), e mais tarde, reformulado por Hübner, Walhorn e Dinkler (2004). Essa segunda versão apresenta a mesma geometria da original, entretanto, possui alteração na

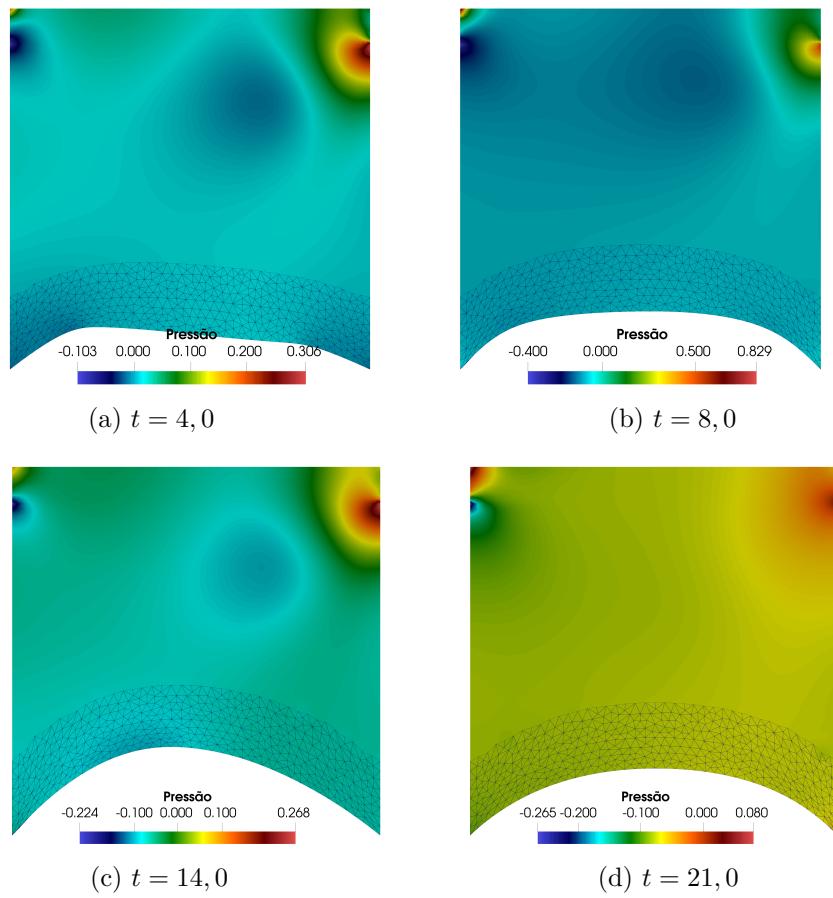


Figura 7.8 – Cavidade fundo flexível 2D: Campos de Pressão

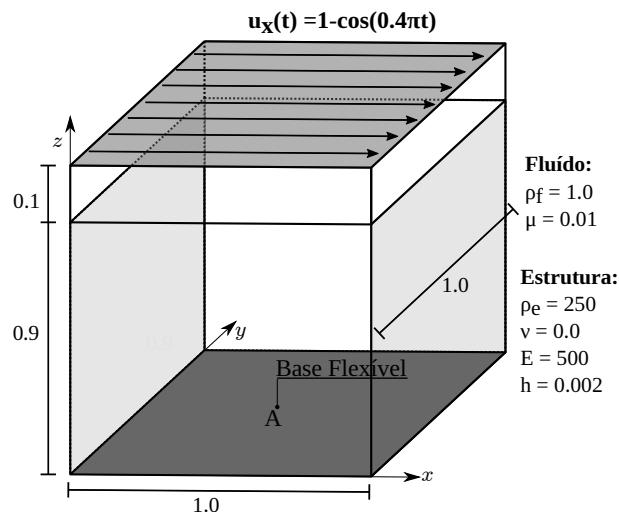
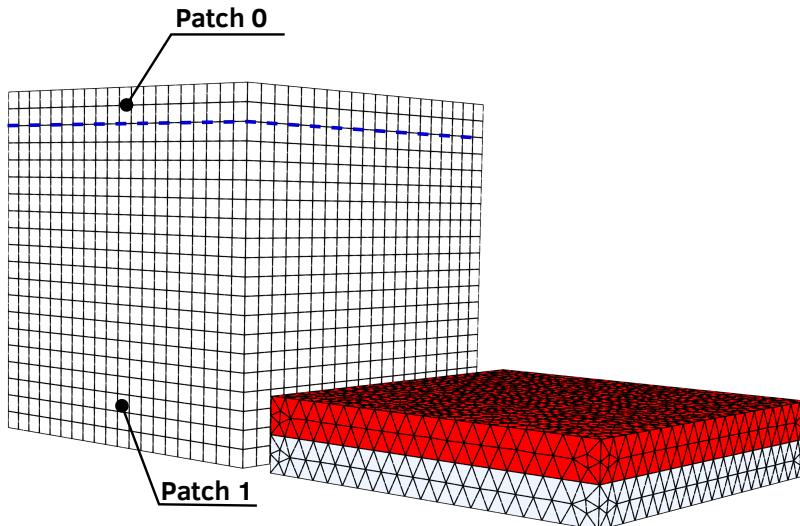
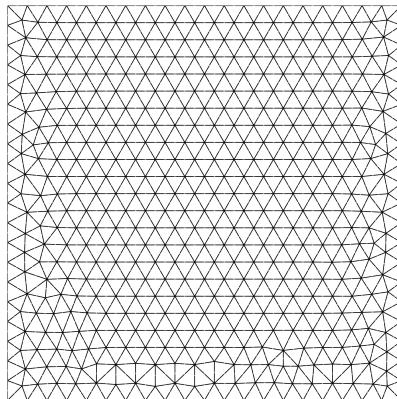


Figura 7.9 – Cavidade fundo flexível 3D: Geometria

velocidade de entrada e nas propriedades elásticas da estrutura. A versão apresentada por Hübner, Walhorn e Dinkler (2004), será utilizada nesse estudo, e distingue-se por ser menos propícia a instabilidades decorrentes de acoplamento fraco. Esse problema apresenta comportamento bidimensional e aqui será simulado através de uma malha 3D utilizando-se



(a) Malhas do modelo Arlequin



(b) Malha da placa

Figura 7.10 – Cavidade fundo flexível 3D: Discretização

uma profundidade de 0,1cm.

A velocidade de entrada do escoamento é definida por  $u_\infty = 31,5\text{cm/s}$  e o fluido possui propriedades físicas do ar:  $\mu = 1,82 \times 10^{-4}\text{g/(cm.s)}$  e  $\rho_f = 1,18 \times 10^{-3}\text{g/cm}^3$ . Tomando-se por referência o comprimento do prisma obtém-se um número de Reynolds  $\text{Re} = 204$ . A placa possui espessura de 0,06cm,  $\rho_e = 2,0\text{g/cm}^3$ , e  $E = 2,0 \times 10^5\text{g/(cm.s}^2)$ . Devido ao comportamento bidimensional do problema adotou-se  $\nu = 0,0$  para a placa.

Para a simulação adotou-se para o campo de velocidade inicial  $u_\infty$ . As condições de contorno para o problema são apresentadas na Fig. 7.12 (com dimensões em cm). Adicionalmente adotou-se condição de simetria para o fluido na direção  $y$ , e para estrutura, em  $y = 0,0$  e  $y = 0,1$ , definiu-se vetor generalizado e os deslocamentos, nesta direção, como nulos.

As simulações foram conduzidas utilizando um Modelo Arlequin (Fig. 7.13a),

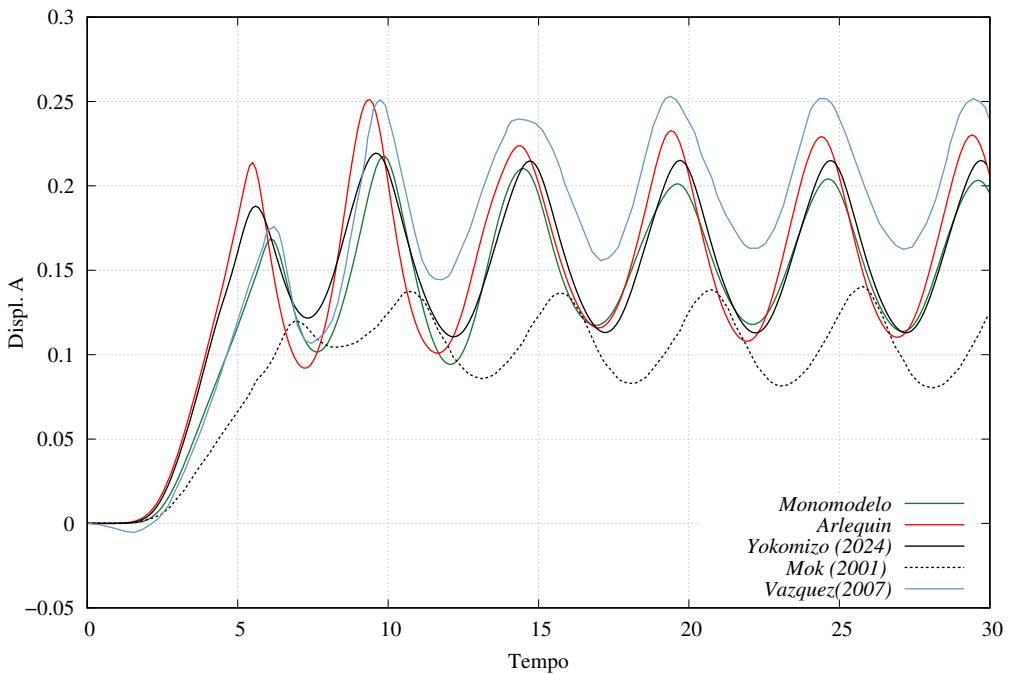


Figura 7.11 – Cavidade fundo flexível 3D: Deslocamento em A

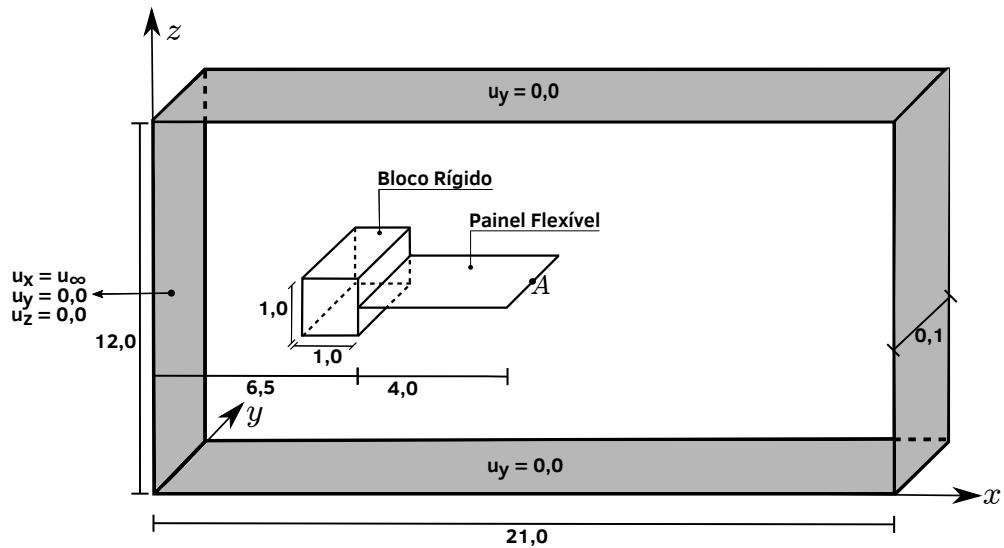


Figura 7.12 – Painel Flexível: Geometria

onde a malha global foi discretizada com elementos isogeométricos quadráticos, enquanto que para malha local foram utilizados elementos finitos tetraédricos quadráticos. Além disso, um monomodelo foi empregado nas análises, discretizado com elementos finitos tetraédricos quadráticos. Em ambos os modelos, a placa foi representada por elementos finitos triangulares quadráticos, conforme ilustrado na Fig. 7.13b.

O modelo Arlequin é composto por uma malha global discretizada com 1800 elementos e 5952 pontos de controle. A malha local possui 11061 elementos e 22407 nós. A zona de colagem, com espessura de 0,2cm, de acordo com a Fig. 7.13a é composta por

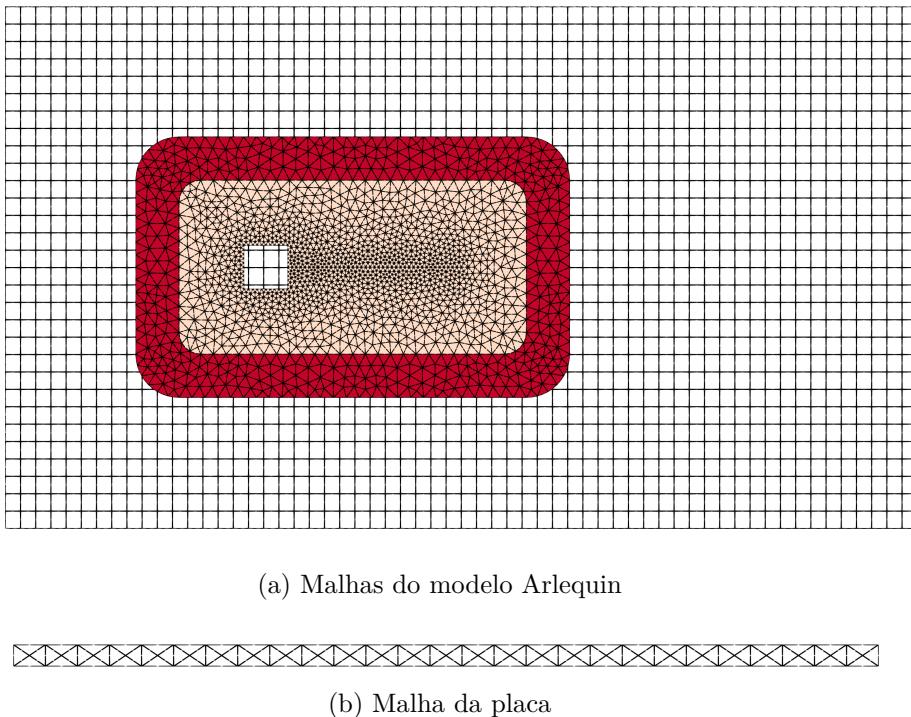


Figura 7.13 – Painel Flexível: Discretização

2979 elementos e 6503 nós. O monomodelo foi discretizado com 13315 elementos e 26599 nós. A malha da placa é constituída por 273 nós e 108 elementos. No que diz respeito a integração temporal utilizou-se  $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$ , e  $\rho_\infty = 0,5$ .

Hübner, Walhorn e Dinkler (2004) obtém em suas simulações uma frequência de desprendimento de vórtices, considerando a placa como rígida, de  $f_f = 3,7\text{Hz}$ . De acordo com a teoria clássica da dinâmica das estruturas as três primeiras frequências naturais de vibração para essa estrutura de placa são  $f_1 = 0,61\text{Hz}$ ,  $f_2 = 3,80\text{Hz}$  e  $f_3 = 10,63\text{Hz}$ . Dessa forma, espera-se que a frequência de vibração da estrutura para o problema de IFE fique próxima a sua segunda frequência natural.

Na Fig. 7.14 pode-se observar os resultados de deslocamento vertical na ponta da placa (ponto A) obtidos nesse estudo através do modelo Arlequin e do Monomodelo. Conforme pode ser observado os resultados para o monomodelo não chegam até o tempo final estimado para análise, isto se deve em função do colapso que ocorre na malha devido aos grandes deslocamentos. A deformação da malha do monomodelo em um tempo anterior ao colapso pode ser observada na Fig. 7.15. Na Fig. 7.14 também podem ser visualizado a envoltória dos deslocamentos obtidos por Hübner, Walhorn e Dinkler (2004). Nota-se que os resultados desse trabalho vão se aproximando com os da referência a medida que o tempo de análise aumenta. A placa desloca-se de maneira crescente até certo ponto da análise, e a partir de então sua amplitude de vibração se mantém aproximadamente constante.

Hübner, Walhorn e Dinkler (2004) obteve frequência de vibração um valor de  $3,1\text{Hz}$  enquanto que nesse trabalho obteve-se o valor de ACRESCENTAR VALOR. Com relação a amplitude máxima obtiveram-se valores de  $+0,78$  e  $-0,78$ . ALTERAR.

[Alterar fogira abaixo](#)

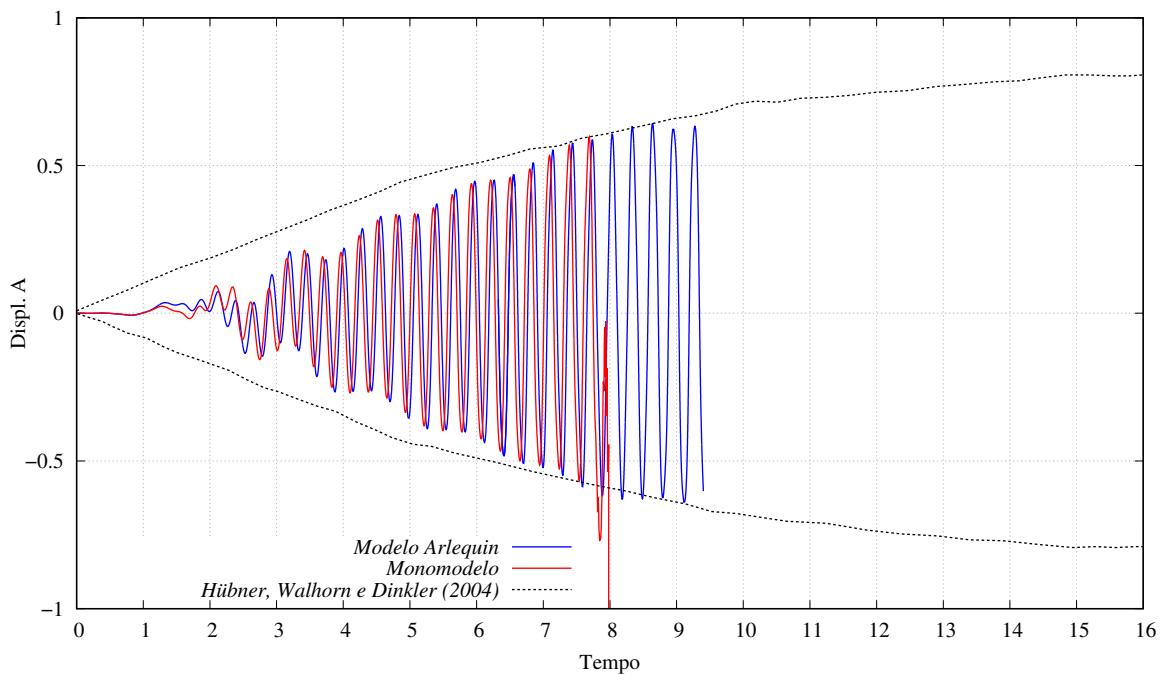


Figura 7.14 – Painel Flexível: Deslocamento em A

Considerando um ciclo de movimento da estrutura  $T$  (aproximadamente periódico) apresentam-se os valores de campos de velocidade (Fig. ) e de pressão (Fig) para alguns instantes dentro do ciclo. Na Fig. apresentam-se as deformações da malha para o problema nesses mesmos instantes.

[Adicionar Figuras](#)

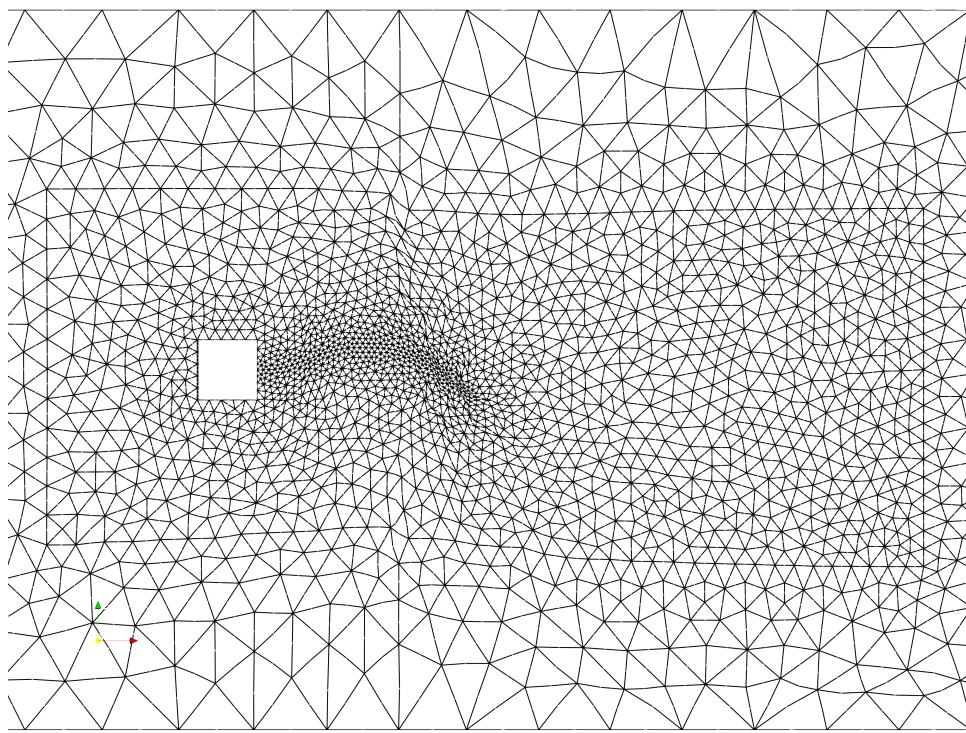


Figura 7.15 – Painel Flexível: Colapso malha monomodelo

## CAPÍTULO

## 8

---

# CONCLUSÕES PARCIAIS

---

O principal intuito desse trabalho, conforme foi apresentado nos capítulos anteriores, é a criação de uma ferramenta computacional para análise de interação fluido-estrutura para problemas 2D e 3D. Essa ferramenta conta com uma técnica de partição de domínios para a malha do fluido, fazendo com que se tenha uma malha global menos refinada e fixa e uma malha local deformável e mais refinada e que é gerada de maneira a se levar em consideração efeitos locais na interface entre fluido e estrutura. Dentro do contexto de partição de domínios diferentes aproximações podem ser utilizadas para a local e global.

Até o presente momento deste projeto, conta-se com um versátil código de DFC que possibilita a análise de problemas 2D e 3D, e pode utilizar como aproximação numérica tanto o Método dos Elementos Finitos, quanto a análise Isogeométrica, conforme pode ser visualizado nos exemplos estudados nos Cap. 1 e Cap. 2.

No Cap. 3, demonstrou-se que o código de análise não-linear geométrica de cascavéis baseado no método dos elementos finitos posicional, cedido pelo professor Humberto Breves Coda, é muito robusto e atende as necessidades deste projeto para as posteriores análises de interação Fluido-Estrutura.

No Cap. 4 apresenta-se a técnica de partição de domínios, para levar-se em conta efeitos localizados nas malhas de fluidos. Para validação da metodologia proposta o problema clássico da cavidade 2D, considerando-se o problema estacionário de Navier-Stokes, foi analisado e obtiveram-se resultados ótimos e promissores.

Na sequência desse projeto, a técnica de partição de domínios será ampliada para problemas da DFC com variação temporal, e diferentes possibilidades para os termos estabilizadores serão estudadas. Além disso, o código será ampliado para uma versão tridimensional.

Ao final do projeto, os programas da DFC com a técnica de partição de domínios e o código de estruturas serão acoplados através de uma técnica de acoplamento particionado

forte. Além disso, exemplos de problemas da IFE serão avaliados para a verificação do código proposto neste trabalho de doutorado.

# REFERÊNCIAS

---



---

- AKKERMAN, I.; BAZILEVS, Y.; BENSON, D.; FARTHING, M.; KEES, C. Free-surface flow and fluid-object interaction modeling with emphasis on ship hydrodynamics. *Journal of Applied Mechanics*, v. 79, p. doi:10.1115/1.4005072, 01 2012.
- ALFONSI, G. Reynolds-averaged navier–stokes equations for turbulence modeling. *Applied Mechanics Reviews*, v. 62, n. 4, p. 040802, 06 2009. ISSN 0003-6900. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3124648>>.
- ANDERSON, J. D. *Computational fluid dynamic - the basics with applications*. 1. ed. New York, USA: McGraw-Hill Book Company, 1995.
- ARGYRIS, J. An excursion into large rotations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 32, p. 85–155, 1982.
- ARGYRIS, J.; PAPADRAKAKIS, M.; MOUROUTIS, Z. S. Nonlinear dynamic analysis of shells with the triangular element TRIC. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 192, p. 3005–3038, 2003.
- ARMALY, B. F.; F.DURST; PEREIRA, J. C. F.; SCHÖNUNG, B. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 127, p. 473–496, 1983.
- AVANCINI, G. *Formulação unificada para análise tridimensional de interação fluido-estrutura com escoamento de superfície livre: Uma abordagem Lagrangiana baseada em posições*. Tese (Doutorado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2023.
- AVANCINI, G.; SANCHES, R. A. A total lagrangian position-based finite element formulation for free-surface incompressible flows. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 169, p. 103348, 2020.
- BADIA, S.; NOBILE, F.; VERGARA, C. Fluid-structure partitioned procedures based on robin transmission conditions. *Journal of Computational Physics*, v. 227, p. 7027–7051, 2008.
- BATTINI, J. M.; PACOSTE, C. On the choice of the linear element for corotational triangular shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, n. 44-47, p. 6362–6377, 2006. ISSN 0045-7825.
- BAUMAN, P. T.; BEN DHIA, H.; ELKHODJA, N.; ODEN, J. T.; PRUDHOMME, S. On the application of the Arlequin method to the coupling of particle and continuum models. *Comput. Mech.*, v. 42, p. 511–530, 2008.
- BAZILEVS, Y.; AKKERMAN, I. Large eddy simulation of turbulent taylor–couette flow using isogeometric analysis and the residual-based variational multiscale method. *Journal of Computational Physics*, v. 229, n. 9, p. 3402 – 3414, 2010. ISSN 0021-9991.

BAZILEVS, Y.; CALO, V. M.; COTTRELL, J. A.; HUGHES, T. J. R.; REALI, A.; SCOVAZZI, G. Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 197, p. 173–201, 2007.

BAZILEVS, Y.; CALO, V. M.; HUGHES, T. J. R.; ZHANG, Y. Isogeometric fluid-structure interaction: theory, algorithms, and computations. *Computational Mechanics*, v. 43, p. 3–37, 2008.

BAZILEVS, Y.; HSU, M.-C.; KIENDL, J.; WÜCHNER, R.; BLETZINGER, K.-U. 3d simulation of wind turbine rotors at full scale. part ii: Fluid-structure interaction modeling with composite blades. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 65, p. 236 – 253, 01 2011.

BAZILEVS, Y.; MICHLER, C.; CALO, V.; HUGHES, T. Isogeometric variational multiscale modeling of wall-bounded turbulent flows with weakly enforced boundary conditions on unstretched meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 199, n. 13, p. 780 – 790, 2010. ISSN 0045-7825.

BAZILEVS, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. Challenges and directions in computational fluid-structure interaction. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, v. 23, p. 215–221, 02 2013b.

BAZILEVS, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E. *Computational Fluid-Structure Interaction: Methods and Applications*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2013.

BAZILEVS, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E.; HSU, M.-C.; KOSTOV, N.; MCINTYRE, S. Aerodynamic and FSI analysis of wind turbines with the ALE-VMS and ST-VMS methods. *Archives of Computational Methods in Engineering*, v. 21, p. 359–398, 2014.

BELYTSCHKO, T.; LU, Y. Y.; GU, L.; TABBARA, M. Element-free Galerkin methods for static and dynamic fracture. *International Journal of Solids and Structures*, v. 32, n. 17–18, p. 2547–2570, 1995.

BEN DHIA, H. Multiscale mechanical problems: The Arlequin method. *Comptes Rendus Acad. Sci. Ser. IIb.*, v. 326, p. 899–904, 1998.

BEN DHIA, H. Further insights by theoretical investigations of the multiscale Arlequin method. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, v. 6, n. 3, p. 215–232, 2008.

BEN DHIA, H.; RATEAU, G. Mathematical analysis of the mixed Arlequin method. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris Série I*, v. 332, p. 649–654, 2001.

BENEK, J.; STEGER, J.; DOUGHERTY, F.; BUNING, P. *Chimera. A grid-embedding technique*. [S.l.], 1986.

BISCANI, F.; GIUNTA, G.; BELOUETTAR, S.; HU, H.; CARRERA, E. Mixed-dimensional modeling by means of solid and higher-order multi-layered plate finite elements. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, v. 23, n. 9, p. 960–970, 2016.

- BLOM, F. J. A monolithical fluid-structure interaction algorithm applied to the piston problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 167, n. 3-4, p. 369–391, 1998. ISSN 0045-7825.
- BONET, J.; WOOD, R. D.; MAHANEY, J.; HEYWOOD, P. Finite element analysis of air supported membrane structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 5-7, p. 579–595, 2000. ISSN 0045-7828.
- BOTTASSO, C. L.; DETOMI, D.; SERRA, R. The ball-vertex method: a new simple spring analogy method for unstructured dynamic meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 194, n. 39, p. 4244–4264, 2005.
- BREZZI, F.; FORTIN, M. Mixed and hybrid finite element methods. In: *Vol. 15 of Springer Series in Computational Mathematics*. New York: Springer, 1991.
- BROOKS, A. N.; HUGHES, T. J. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 32, n. 1-3, p. 199–259, 1982.
- CALEYRON, F.; COMBESCURE, A.; FAUCHER, V.; POTAPOV, S. SPH modeling of fluid-solid interaction for dynamic failure analysis of fluid-filled thin shells. *Journal of Fluids and Structures*, v. 39, p. 126–153, 2013.
- CARRAZEDO, R.; CODA, H. B. Alternative positional FEM applied to thermomechanical impact of truss structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 46, n. 11, p. 1008–1016, 2010.
- CATABRIGA, L.; COUTINHO, A. L. G. Implicit SUPG solution of euler equations using edge-based data structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 191, n. 32, p. 3477–3490, 2002. ISSN 0045-7825.
- CHUNG, T. J. *Computational fluid dynamics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002.
- CIRAK, F.; RADOVITZKY, R. A Lagrangian-Eulerian shell-fluid coupling algorithm based on level sets. *Computers & Structures*, v. 83, p. 491–498, 2005.
- CODA, H. B. *Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: Uma formulação posicional baseada no MEF*. Tese (Tese para concurso de professor titular) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2003.
- CODA, H. B. *O Método dos Elementos Finitos posicional: Sólidos e Estruturas - Não linearidade Geométrica e Dinâmica*. 1. ed. São Carlos: EESC-USP, 2018. 284 p.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. An alternative positional FEM formulation for geometrically non-linear analysis of shells: Curved triangular isoparametric elements. *Computational Mechanics*, v. 40, n. 1, p. 185–200, jun 2007.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A positional FEM formulation for geometrical non-linear analysis of shells. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 5, p. 205–223, 2008.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Improved finite element for 3D laminate frame analysis including warping for any cross-section. *Applied Mathematical Modelling*, v. 34, n. 4, p. 1107–1137, 2010.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A FEM procedure based on positions and unconstrained vectors applied to non-linear dynamic of 3D frames. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 47, n. 4, p. 319–333, 2011.

COTTRELL, J. A.; HUGHES, T. J. R.; BAZILEVS, Y. *Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA*. first. [S.l.]: Wiley, 2009. ISBN 9780470748732.

DHIA, H.; JAMOND, O. On the use of XFEM within the Arlequin framework for the simulation of crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 199, n. 21-22, p. 1403–1414, 2010.

DHIA, H.; RATEAU, G. The Arlequin method as a flexible engineering design tool. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 62, n. 11, p. 1442–1462, 2005.

DHIA, H.; TORKHANI, M. Modeling and computation of fretting wear of structures under sharp contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 85, p. 61–83, 2011.

DHIA, H. B.; RATEAU, G. Application of the Arlequin method to some structures with defects. *Revue Européenne des Éléments Finis*, Taylor & Francis, v. 11, n. 2-4, p. 291–304, 2002.

DONEA, J. A taylor-galerkin method for convective transport problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 20, p. 101–119, 1984.

DONEA, J.; GIULIANI, S.; HALLEUX, J. P. An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 33, n. 1-3, p. 689–723, 1982.

FARHAT, C.; HARARI, I.; FRANCA, L. P. The discontinuous enrichment method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 48, p. 6455–6479, 2001.

FARIN, G. *Curves and Surfaces for CAGD, A Practical Guide*. Fifth. [S.l.]: Morgan Kaufmann Publishers, 1999.

FELIPPA, C. A.; PARK, K. C.; FARHAT, C. Partitioned analysis of coupled mechanical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 24-25, p. 3247–3270, 2001.

FERNANDES, J. W. D. *Interação fluido-estrutura com escoamentos incompressíveis utilizando o método dos elementos finitos*. Dissertação (Mestrado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2016.

FERNANDES, J. W. D. *Técnica de superposição de modelos estabilizada para análise de interação fluido-estrutura*. Tese (Doutorado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2020.

- FERNANDES, J. W. D.; BARBARULO, A.; Ben Dhia, H.; SANCHES, R. A. K. A residual-based stabilized finite element formulation for incompressible flow problems in the arlequin framework. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 370, p. 113073, 2020. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782520302577>>.
- FERNANDES, J. W. D.; CODA, H. B.; SANCHES, R. A. K. ALE incompressible fluid–shell coupling based on a higher-order auxiliary mesh and positional shell finite element. *Computational Mechanics*, v. 63, n. 3, p. 555–569, 2019.
- FERNIER, A.; FAUCHER, V.; JAMOND, O. Multi-model Arlequin approaches for fast transient, FSI-oriented, fluid dynamics with explicit time integration. *Computers and Fluids*, Elsevier, v. 199, p. 104428, mar. 2020. Disponível em: <<https://hal.science/hal-03991421>>.
- FISH, J. The s-version of the finite element method. *Computers & Structures*, v. 43, n. 3, p. 539–547, 1992.
- FÖRSTER, C.; WALL, W. A.; RAMM, E. Artificial added mass instabilities in sequential staggered coupling on nonlinear structures and incompressible viscous flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 196, p. 1278–1293, 2007.
- GERBEAU, J. F.; VIDRASCU, M. A quasi-newton algorithmm based on a reduced model for fluid-structure interaction problems in blood flows. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, v. 37, p. 631–647, 2003.
- GERMANO, M.; PIOMELLI, U.; MOIN, P.; CABOT, W. H. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, v. 3, n. 7, p. 1760–1765, 07 1991. ISSN 0899-8213. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.857955>>.
- GHIA, U.; GHIA, K. N.; SHIN, C. T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, v. 48, p. 387–441, 1982.
- GRECO, M.; CODA, H. B. A simple and precise FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 193, p. 3541–3557, 2004.
- GRUTTMANN, F.; SAUER, R.; WAGNER, W. Theory and numerics of three-dimensional beams with elastoplastic material behaviour. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 48, n. 12, p. 1675–1702, 2000.
- GUIDAULT, P.-A.; BELYTSCHKO, T. On the l2 and the h1 couplings for an overlapping domain decomposition method using lagrange multipliers. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 70, n. 3, p. 322–350, 2007. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1882>>.
- HANSBO, A.; HANSBO, P. An unfitted finite element method, based on Nitsche's method, for elliptic interface problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 191, n. 47–48, p. 5537–5552, 2002.
- HENDERSON, R. D. Nonlinear dynamics and pattern formation in turbulent wake transition. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 352, p. 65–112, 1997. ISSN 0022-1120.

- HÖLLIG, K.; REIF, U.; WIPPER, J. Weighted extended b-spline approximation of dirichlet problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, Society for Industrial and Applied Mathematics, USA, v. 39, n. 2, p. 442–462, 2001. ISSN 0036-1429.
- HOU, G.; WANG, J.; LAYTON, A. Numerical methods for fluid-structure interaction - a review. *Commun. Comput. Phys.*, v. 12, p. 337–377, 2012.
- HRON, J.; MADLIK, M. Fluid-structure interaction with applications in biomechanics. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, v. 8, n. 5, p. 1431–1458, 2007.
- HÜBNER, B.; WALHORN, E.; DINKLER, D. A monolithic approach to fluid-structure interaction using space-time finite elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 193, p. 2087–2104, 2004.
- HUGHES, T. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. [S.l.]: Dover Publications, 2000. (Dover Civil and Mechanical Engineering). ISBN 9780486411811.
- HUGHES, T. J.; FRANCA, L. P.; BALESTRA, M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuška-Brezzi condition: a stable Petrov-Galerkin formulation of the stokes problem accommodating equal-order interpolations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 59, n. 1, p. 85 – 99, 1986.
- HUGHES, T. J.; FRANCA, L. P.; HULBERT, G. M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 73, n. 2, p. 173 – 189, 1989. ISSN 0045-7825.
- HUGHES, T. J.; LIU, W. K.; ZIMMERMAN, T. K. Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 29, p. 329–349, 1981.
- HUGHES, T. J. R. Stability, convergence and growth and decay of energy of the average acceleration method in nonlinear structural dynamics. *Computers & Structures*, v. 6, p. 313–324, 1976.
- HUGHES, T. J. R. Multiscale phenomena: Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale methods, bubbles and the origins of stabilized methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 127, p. 387–401, 1995.
- HUGHES, T. J. R.; COTTRELL, J. A.; BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement . *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 194, p. 4135–4195, 2005.
- HUGHES, T. J. R.; FEIJÓO, G. R.; MAZZEI, L.; QUINCY, J. B. The variational multiscale method - a paradigm for computational mechanics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 166, p. 3–24, 1998.
- HUGHES, T. J. R.; LIU, W. K. Nonlinear finite element analysis of shells: Part I. three-dimensional shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 26, n. 3, p. 331–362, 1981. A. ISSN 0045-7825.

- HUGHES, T. J. R.; LIU, W. K. Nonlinear finite element analysis of shells: Part II, two-dimensional shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 27, n. 2, p. 167–181, 1981. A. ISSN 0045-7825.
- HUGHES, T. J. R.; OBERAI, A. A.; MAZZEI, L. Large Eddy Simulation of turbulent channel flows by the variational multiscale method. *Physics of Fluids*, v. 13, p. 1874–1799, 2001.
- HUGHES, T. J. R.; TEZDUYAR, T. E. Finite element methods for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible Euler equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 45, p. 217–284, 1984.
- IBRAHIMBEGOVIC, A.; TAYLOR, R. L. On the role of frame-invariance in structural mechanics models at finite rotations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 191, p. 5159–5176, 2002.
- IRONS, B. M.; TUCK, R. C. A version of the Aitken accelerator for computer iteration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 1, n. 3, p. 275–277, 1969.
- JAMOND, O.; BEN DHIA, H. Incompressibility in the multimodel Arlequin framework. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, v. 94, p. 374–399, 2013.
- JANSEN, K. E.; WHITING, C. H.; HULBERT, G. M. A generalized- $\alpha$  method for integrating the filtered Navier–Stokes equations with a stabilized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 3, p. 305 – 319, 2000. ISSN 0045-7825.
- JOHNSON, A. A.; TEZDUYAR, T. E. Mesh update strategies in parallel finite element computations of flow problems with moving boundaries and interfaces. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 119, p. 73–94, 1994.
- KANCHI, H.; MASUD, A. A 3D adaptative mesh moving scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 54, p. 923–944, 2007.
- KUHL, D.; RAMM, E. Generalized energy-momentum method for non-linear adaptative shell dynamics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 178, p. 343–366, 1999.
- KÜTTLER, U.; WALL, W. A. Fixed-point fluid–structure interaction solvers with dynamic relaxation. *Computational mechanics*, Springer, v. 43, n. 1, p. 61–72, 2008.
- LAUNDER, B. E.; SPALDING, D. B. *Lectures in mathematical models of turbulence*. New York: Academic Press, 1972.
- LEFRANÇOIS, E. A simple mesh deformation technique for fluid-structure interaction based on a submesh approach. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, v. 75, p. 1085–1101, 2008.
- MELENK, J. M.; BABUSKA, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, n. 1, p. 289–314, 1996.
- MITTAL, R.; IACCARINO, G. Immersed boundary methods. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 37, p. 237–261, 2005.

- MITTAL, S.; TEZDUYAR, T. Massively parallel finite element computation of incompressible flows involving fluid-body interactions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 112, n. 1, p. 253 – 282, 1994. ISSN 0045-7825.
- MOËS, N.; CLOIREC, M.; CARTRAUD, P.; REMACLE, J.-F. A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 192, n. 28–30, p. 3163–3177, 2003.
- MOK, D. P. *Partitionierte Lösungsansätze in der Strukturdynamik und der Fluid-Struktur-Interaktion*. Tese (Doutorado) — Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Stuttgart, 2001.
- NAYROLES, B.; TOUZOT, G.; VILLON, P. Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, v. 10, n. 5, p. 307–318, 1992.
- OGDEN, R. W. *Non-linear elastic deformations*. Chichester, England.: Ellis Harwood, 1984.
- OTOGURO, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E. Element length calculation in B-spline meshes for complex geometries. *Computational Mechanics*, v. 65, p. 1085–1103, 2020.
- PESKIN, C. S. Flow patterns around heart valves: A numerical method. *Journal of Computational Physics*, v. 10, n. 2, p. 252–271, 1972.
- PIEGL, L.; TILLER, W. *The NURBS Book*. second. New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1996.
- PIOMELLI, U. Large-eddy simulation: achievements and challenges. *Progress in Aerospace Sciences*, v. 35, n. 4, p. 335–362, 1999. ISSN 0376-0421. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0376042198000141>>.
- REDDY, J. N. *An Introduction to the Finite Element Method*. 3. ed. [S.l.]: McGraw Hill, 2006.
- REDDY, J. N.; GARTLING, D. K. *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*. 3. ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 2010.
- RICHTER, T. *Fluid-structure Interactions: Models, Analysis and Finite Elements*. Springer International Publishing, 2017. (Lecture Notes in Computational Science and Engineering). ISBN 9783319639703. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=hsEyDwAAQBAJ>>.
- ROSA, R. J. R. *Técnica de partição de domínio para análise numérica de sólidos bidimensionais fraturados combinando análise isogeométrica e elementos finitos*. Dissertação (Mestrado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2021.
- ROUX, F. X.; GARAUD, J. D. Domain decomposition methodology with robin interface matching conditions for solving strongly coupled fluid-structure problems. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, v. 7, p. 29–38, 2009.

- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. An embedded domain technique based on level-sets for finite element method (FEM) fluid-shell coupling. *Mecánica Computacional*, XXIX, p. 4801–4818, 2010a.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Fluid-structure interaction using an arbitrary Lagrangian-Eulerian Fluid solver coupled to a positional Lagrangian shell solver. *Mecánica Computacional*, XXIX, p. 1627–1647, 2010b.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Unconstrained vector nonlinear shell formulation applied to fluid-structure interaction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 259, p. 177–196, 2013.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. On fluid-shell coupling using an arbitrary Lagrangian-Eulerian fluid solver coupled to a positional Lagrangian shell solver. *Applied Mathematical Modelling*, v. 38, p. 3401–3418, 2014.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Flexible multibody dynamics finite element formulation applied to structural progressive collapse analysis. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 13, n. 16, p. 52–71, 2016.
- SIMO, J. C.; FOX, D. D. On a stress resultant geometrically exact shell model. Part I: formulation and optimal parametrization. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 72, p. 267–304, 1989.
- SPEZIALE, C. G. Analytical methods for the development of reynolds-stress closures in turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, Annual Reviews, v. 23, n. Volume 23, 1991, p. 107–157, 1991. ISSN 1545-4479. Disponível em: <<https://www.annualreviews.org/content/journals/10.1146/annurev.fl.23.010191.000543>>.
- STEIN, K.; TEZDUYAR, T. E.; BENNEY, R. Automatic mesh update with the solid-extension mesh moving technique. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 193, p. 2019–2032, 2004.
- STRANG, G.; FIX, G. *An analysis of the Finite Element Method*. 2. ed. [S.l.]: Wesley-Cambridge Press, 2008.
- STROUBOULIS, T.; COPPS, K.; BABUSKA, I. The generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 32–33, p. 4081–4193, 2001.
- TAKIZAWA, K. .; TEZDUYAR, T. Space-time fluid–structure interaction methods. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, v. 22, p. 1230001, 08 2012.
- TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E.; OTOGURO, Y. Stabilization and discontinuity-capturing parameters for space-time flow computations with finite element and isogeometric discretizations. *Computational Mechanics*, v. 62, n. 5, p. 1169–1186, 2018.
- TALLEC, P. L.; MOURO, J. Fluid structure interaction with large structural displacements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 190, p. 3039–3067, 2001.
- TEZDUYAR, T. Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations. In: HUTCHINSON, J. W.; WU, T. Y. (Ed.). [S.l.]: Elsevier, 1992, (Advances in Applied Mechanics, v. 28). p. 1 – 44.

- TEZDUYAR, T.; ALIABADI, S.; BEHR, M. Enhanced-Discretization Interface-Capturing Technique (EDICT) for computation of unsteady flows with interfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 155, p. 235–248, 1998.
- TEZDUYAR, T.; ALIABADI, S.; BEHR, M.; JOHNSON, A.; MITTAL, S. Parallel finite-element computation of 3D flows. *Computer*, v. 26, n. 10, p. 27–36, 1993.
- TEZDUYAR, T.; SATHE, S. Stabilization parameters in supg and pspg formulations. *Journal of Computational and Applied Mechanics*, v. 4, n. 1, p. 71–88, 2003.
- TEZDUYAR, T. E. Stabilized finite element methods for flows with moving boundaries and interfaces. *HERMIS: The International Journal of Computer Mathematics and its Applications*, v. 4, p. 63–88, 2003.
- TEZDUYAR, T. E.; ALIABADI, S. EDICT for 3D computation of two-fluid interfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, p. 403–410, 2000.
- TEZDUYAR, T. E.; BEHR, M.; LIOU, J. A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces - the deforming-spatial-domain/space-time procedure: I. The concept and the preliminary numerical tests. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 94, p. 339–351, 1992b.
- TEZDUYAR, T. E.; BEHR, M.; MITTAL, S.; LIOU, J. A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces - the deforming-spatial-domain/space-time procedure: II. Computation of free-surface flows, two-liquid flows, and flows with drifting cylinders. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 94, p. 353–371, 1992c.
- TEZDUYAR, T. E.; BEHR, M.; MITTAL, S.; JOHNSON, A. A. Computation of unsteady incompressible flows with the finite element methods: Space–time formulations, iterative strategies and massively parallel implementations. In: *New Methods in Transient Analysis*. New York: ASME, 1992f. (PVP-Vol.246/AMD-Vol.143), p. 7–24.
- TEZDUYAR, T. E.; MITTAL, S.; RAY, S. E.; SHIH, R. Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 95, p. 221–242, 1992a.
- TEZDUYAR, T. E.; OSAWA, Y. Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 3, p. 411–430, 2000.
- TEZDUYAR, T. E.; SATHE, S. Enhanced-discretization successive update method (EDSUM). *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 47, p. 633–654, 2005.
- TONON, P. *Simulação numérica de escoamentos incompressíveis através da análise isogemétrica*. Dissertação (Mestrado) — PPGEC-UFRGS, Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil, 2016.
- TONON, P.; SANCHES, R. A. K.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E. A linear-elasticity-based mesh moving method with no cycle-to-cycle accumulated distortion. *Computational Mechanics*, 2021.
- TRUESELL, C. A. Hypo-elasticity. *J. Rational Mech. Anal.*, v. 4, p. 83–133, 1955.

- VÁZQUEZ, J. G. V. *Nonlinear analysis of orthotropic membrane and shell structures including fluid-structure interaction.* Tese (Doutorado) — Universitat Politecnica de Catalunya, Barcelona, Espanha, 2007.
- WALL, W. A.; RAMM, E. Fluid structure interaction based upon a stabilized (ALE) finite element method. In: IDELSHON, S. et al. (Ed.). *Computational Mechanics.* Barcelona: CIMNE, 1998.
- WANG, K.; RALLU, A.; GERBEAU, J.-F.; FARHAT, C. Algorithms for interface treatment and load computation in embedded boundary methods for fluid and fluid–structure interaction problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, John Wiley & Sons, Ltd., v. 67, n. 9, p. 1175–1206, 2011.
- WILCOX, D. C. *Turbulence modeling for CFD.* La Cañada, CA: DCW Industries Inc., 1993.
- WILLIAMS, P. T.; BAKER, A. J. Numerical simulations of laminar flow over a 3d backward-facing step. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 24, p. 1159–1183, 1999.
- YOKOMIZO, M. H. *Análise numérica de problemas de interação fluido-estrutura com vorticidade.* Dissertação (Mestrado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2024.
- ZHANG, Y.; BAZILEVS, Y.; GOSWAMI, S.; BAJAJ, C. L.; HUGHES, T. J. Patient-specific vascular nurbs modeling for isogeometric analysis of blood flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 196, n. 29, p. 2943 – 2959, 2007. ISSN 0045-7825.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; NITHIARASU, P. *The Finite Element Method: Fluid Dynamics.* 6. ed. [S.l.]: Butterworth Heinemann Linacre house, 2005. v. 3. 334 p.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; NITHIARASU, P. *The Finite Element Method: The Basis.* 6. ed. [S.l.]: Butterworth Heinemann Linacre house, 2005a. v. 1. 689 p.