

TÉCNICA DE DECOMPOSIÇÃO DE DOMÍNIOS

Muitas aplicações de engenharia envolvem múltiplas escalas ou efeitos localizados, são os casos, por exemplo, de fissuras na mecânica dos sólidos, de interface entre dois tipos diferentes de fluidos na mecânica dos fluidos, ou ainda, a interface entre sólido e fluido na interação fluido-estrutura, entre outros. Para uma análise computacional realística desses problemas os efeitos locais devem ser apropriadamente representados, levando em conta um custo computacional razoável.

Nesse trabalho será aplicado um método decomposição de domínios que permite utilizar uma malha local mais refinada sobreposta a uma malha global com discretização mais grosseira com o intuito de melhorar a precisão local da análise numérica ou simplesmente representar a geometria local e as condições de contorno adequadamente. A malha local pode ter uma escala diferente de discretização, ou até mesmo uma aproximação numérica diferente, como no caso desse trabalho em que se utiliza o método dos elementos finitos em conjunto com a análise isogeométrica.

As funções de forma da malha local e da malha global na região de sobreposição são ponderadas e somadas de maneira a formarem um novo espaço independente de funções tentativa e peso que cumpram com a partição da unidade. Neste capítulo será apresentada a técnica de sobreposição de malhas, e ao final do mesmo, um exemplo de validação será apresentado no contexto da DFC.

1.1 Definição do novo espaço de funções base

Para o entendimento da técnica de sobreposição de malhas define-se inicialmente um domínio global Ω_G , de acordo com a Fig. 1.1a, e um domínio local, Ω_L , apresentado

na Fig. 1.1b, menor que o domínio global e que contém uma região com efeitos localizados. O domínio total de estudo é então composto por: $\Omega = \Omega_G \cup \Omega_L$.

Adicionalmente definem-se os contornos desses domínios, conforme Fig. 1.1c, como: Γ_G contorno físico de Ω determinado pelo domínio global; Γ_L contorno físico de Ω pertencente ao domínio local; $(\Gamma_G)_B$ contorno que define a região de sobreposição pertencente ao domínio global e $(\Gamma_L)_B$ contorno que define a região de sobreposição pertencente ao domínio local. É importante observar que os domínios ditos físicos podem ou não estarem presentes nos problemas de sobreposição. A zona dita de sobreposição $\Omega_B = \Omega_G \cap \Omega_L$ é definida pelos contornos $(\Gamma_L)_B$ e $(\Gamma_G)_B$.

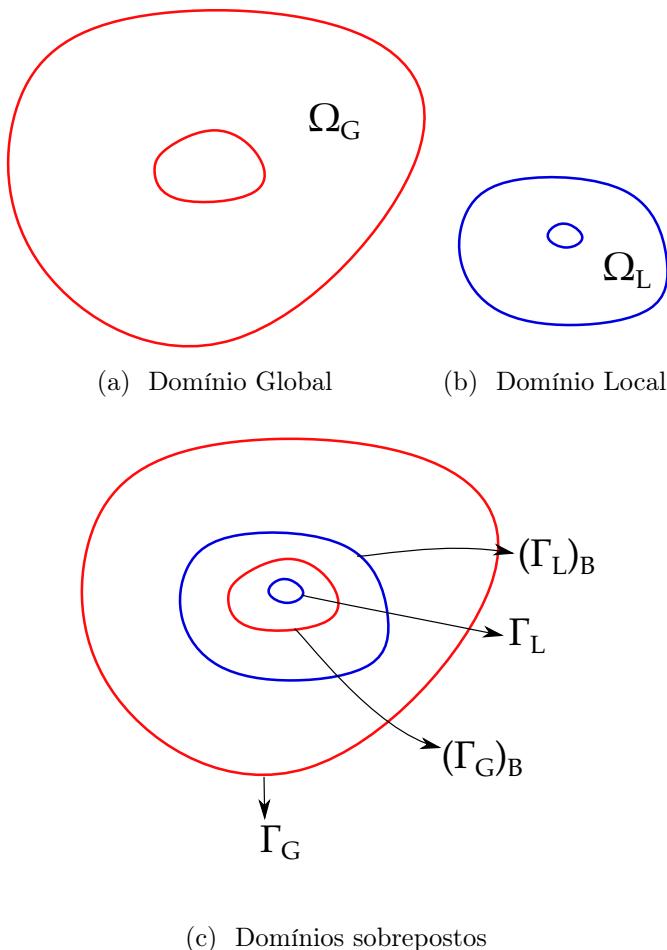


Figura 1.1 – Definição dos domínios global,local e de sobreposição.

O espaço de funções tentativa global $u_G(\mathbf{x})$ é definido como \mathcal{S}_u^G , e o espaço das funções tentativa local $u_L(\mathbf{x})$ por \mathcal{S}_u^L , com funções peso global $w_G(\mathbf{x})$ e local $w_L(\mathbf{x})$ definidas nos espaço \mathcal{V}_u^G e \mathcal{V}_u^L respectivamente. A união direta entre as funções de forma na zona de sobreposição obviamente não resulta em um espaço que respeita a partição da unidade. Dessa forma, utiliza-se uma função ponderadora de sobreposição $b(\mathbf{x})$, de maneira a criar um novo espaço de funções tentativa e peso definidos por:

$$u(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x})u_G(\mathbf{x}) + (1 - b(\mathbf{x}))u_L(\mathbf{x}), \quad (1.1)$$

$$w(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x})w_G(\mathbf{x}) + (1 - b(\mathbf{x}))w_L(\mathbf{x}), \quad (1.2)$$

com a função $b(\mathbf{x})$ apresentando valor unitário sobre o domínio global livre (sem sobreposições), e valor zero no domínio local livre, e com uma transição suave na região de sobreposição.

No contexto dos elementos finitos, os espaços enriquecidos na região de sobreposição de malhas, são definidos por \mathcal{S}_{enr}^h e \mathcal{V}_{enr}^h , correspondentes as funções tentativa e teste respectivamente. A solução de um problema de valor de contorno recai em encontrar $u^h \in \mathcal{S}_{enr}^h$ tal que $\forall w^h \in \mathcal{V}_{enr}^h$:

$$B(u^h, w^h) = F(w^h), \quad (1.3)$$

com $B(\bullet, \bullet)$ e $F(\bullet)$ operadores de funções bilineares e lineares respectivamente. A discretização de $u(\mathbf{x})$ e $w(\mathbf{x})$ no contexto dos elementos finitos é obtida através das seguintes relações:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{A=1}^{(n_{np})_G} (u_G)_A b(\mathbf{x})(N_G)_A(\mathbf{x}) + \sum_{A=1}^{(n_{np})_L} (u_L)_A (1 - b(\mathbf{x}))(N_L)_A(\mathbf{x}), \quad (1.4)$$

$$w^h(\mathbf{x}) = \sum_{A=1}^{(n_{np})_G} (w_G)_A b(\mathbf{x})(N_G)_A(\mathbf{x}) + \sum_{A=1}^{(n_{np})_L} (w_L)_A (1 - b(\mathbf{x}))(N_L)_A(\mathbf{x}), \quad (1.5)$$

com N_G e N_L as funções de base global e local; e $(n_{np})_G$ e $(n_{np})_L$ o número de funções de forma nas discretizações global e local respectivamente.

1.1.1 Função ponderadora de sobreposição

De maneira a se obter uma solução única deseja-se que as funções $b(\mathbf{x})(N_G)$ e $(1 - b(\mathbf{x}))(N_L)$ sejam linearmente independentes sobre Ω_B . Considerando que as funções base local e global possuem grau polinomial p e são linearmente independentes, e que $b(\mathbf{x})$ e $(1 - b(\mathbf{x}))$ são linearmente independentes, a escolha de $b(\mathbf{x})$ com grau polinomial 1 vez superior as funções base ($p + 1$) garante a independência da nova base polinomial.

Nesse trabalho aplicam-se funções de forma locais e globais de grau polinomial quadrático. Desta forma, a função ponderadora de transição foi definida como cúbica e é expressa por:

$$b(\mathbf{x}) = \begin{cases} 2 \left(\frac{X_L(\mathbf{x})}{\delta(x)} \right)^3 - 3 \left(\frac{X_L(\mathbf{x})}{\delta(x)} \right)^2 & \text{se } X_G(\mathbf{x}) > 0 \text{ e } X_L(\mathbf{x}) > 0 \\ 1 & X_L(\mathbf{x}) \leq 0 \\ 0 & X_G(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases}, \quad (1.6)$$

com $X_L(\mathbf{x})$ a função distância assinalada medida a partir de $(\Gamma_L)_B$, com valores positivos

dentro do domínio local e negativos fora, e $X_G(\mathbf{x})$ a função distância assinalada medida a partir de $(\Gamma_G)_B$, sendo positivo se o ponto pertence à Ω_G e negativos caso contrário. Nota-se que os pontos em que ambas funções distância assinalada são positivos estão contidos dentro da zona de sobreposição. O parâmetro δ é obtido por $\delta(\mathbf{x}) = X_L(\mathbf{x}) + X_G(\mathbf{x})$, e coincide com a espessura da zona de sobreposição quando $(\Gamma_L)_B$ e $(\Gamma_G)_B$ são paralelos.

Nos problemas práticos, considera-se que o domínio global tem o tamanho do domínio total, ficando a definição de $(\Gamma_G)_B$ para uma etapa posterior, baseado na forma do modelo local, e os elementos e nós sem suporte físico após a obtenção do novo espaço de funções são desativados da análise.

O contorno $(\Gamma_G)_B$ pode ser obtido através de uma réplica do contorno $(\Gamma_L)_B$ a uma distância paralela δ do mesmo. Na Fig. 1.2 apresenta-se um exemplo unidimensional da utilização dessa técnica com o novo espaço de funções obtido em uma zona de sobreposição a partir de funções base Lagrangianas quadráticas para o domínio global e local.

Após a definição $(\Gamma_G)_B$ é necessário uma metodologia eficiente para determinação das funções base globais com pequena influência dentro da zona de sobreposição, visto que estas podem levar a um sistema mal condicionado. Para resolver esse problema, utiliza-se uma pseudo matriz de massa diagonal $(M_G)_{AA}$ para todos os nós globais A da análise definida como:

$$(M_G)_{AA} = \int_{\Omega} b(\boldsymbol{\xi}) N_A(\boldsymbol{\xi}) b(\boldsymbol{\xi}) N_A(\boldsymbol{\xi}) d\Omega, \quad (1.7)$$

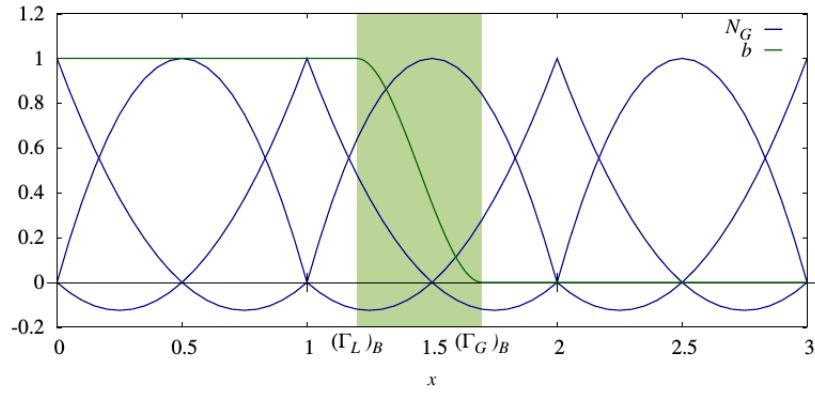
e define-se um valor M_{min} para $(M_G)_{AA}$. Os nós globais são desativados se $(M_G)_{AA} < M_{min}$.

1.2 Implementação Computacional

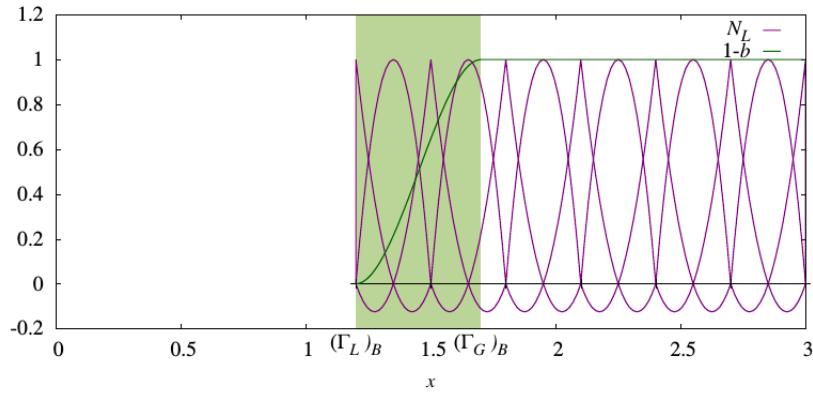
No algoritmo de partição de domínios implementado, após a leitura dos dados respectivos a malha global e a malha local, segue-se com a definição da distância assinalada respectiva a todos os nós da malha global e da malha local com respeito aos contornos $(\Gamma_G)_B$ e $(\Gamma_L)_B$ respectivamente. O contorno $(\Gamma_G)_B$ é obtido a partir dos dados de entrada, onde define-se a espessura da zona de sobreposição. De posse da distância assinalada e espessura da zona de sobreposição, são definidos quais elementos das malhas local e global fazem parte da zona de sobreposição. Qualquer elemento que possua 1 ou mais nós dentro da zona de sobreposição é considerado como um elemento pertencente a ela.

Na sequência, inicia-se um processo de varredura em todos os pontos de integração da malha local, e da projeção dos mesmos sobre a malha global. As coordenadas paramétricas na malha global respectivas aos pontos de integração da malha local são armazenados juntamente com a numeração do elemento global para posterior uso na resolução das equações governantes da DFC.

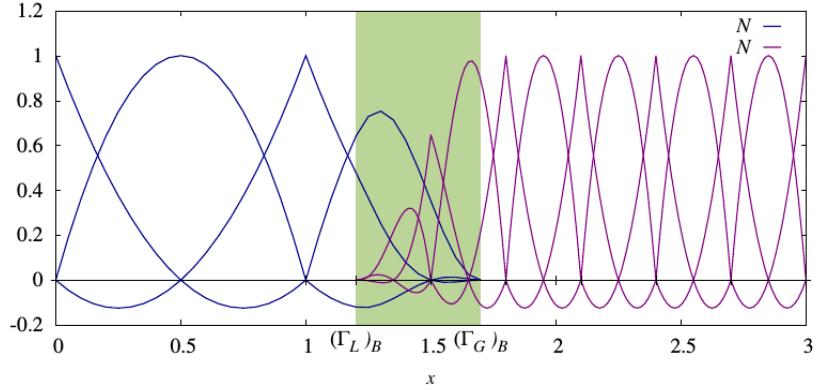
Outro processo prévio a resolução das equações, diz respeito a determinação dos nós inativos da malha de elementos globais, sejam porque encontram-se fora da zona de



(a) Funções Globais e função ponderadora (b).



(b) Funções locais e função ponderadora ($1-b$)



(c) Novo espaço de funções

Figura 1.2 – Zona de sobreposição - Problema unidimensional.

sobreposição, ou, porque possuem pequena influência dentro da mesma, de acordo com a Eq. ??.

Finalmente, o processo de solução no tempo das equações de governantes se inicia da maneira explicitada no Item ?? levando-se em consideração que as funções tentativa e peso são compostas pela nova base de funções descritas neste capítulo.

O algoritmo que descreve esse processo de solução das equações da DFC conside-

rando a partição de domínios pode ser visualizado no Alg. ??.

Algoritmo 1 Algoritmo para problemas de dinâmica dos fluidos computacional com sobreposição de malhas

- 1: Cálculo da distância assinalada dos nós e pontos de controle aos contornos;
- 2: Determinação dos elementos e células da zona de sobreposição;
- 3: Busca dos pontos de integração na malha global equivalentes aos definidos para à malha local;
- 4: Definição dos nós inativos da malha global;
- 5: **para** o passo de tempo 0 até T **faca**
- 6: *i* = 0;
- 7: Predição da solução: aplicação das Eq. (??), Eq. (??) e Eq. (??);
- 8: **enquanto** ($\epsilon < \text{tolerância}$) **faca**
- 9: *i*++;
- 10: Interpolação das variáveis do problema: aplicação da Eq. (??), Eq. (??) e Eq. (??);
- 11: Cálculo do incremento nas variáveis do problema: $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$ e \mathbf{p}_{n+1} de acordo com as Eq. (??) e Eq. (??);
- 12: Atualização da solução: calculadas de acordo com Eq. (??), Eq. (??) e Eq. (??).
- 13: Cálculo do erro:

$$\epsilon = \|\mathbf{R}_M^i\|_{L^2} \quad (1.8)$$

- 14: **fim enquanto**
 - 15: **fim para**
-

1.3 Validação e Aplicações

Para validação da metodologia de partição de domínios com sobreposição de malhas, neste item apresenta-se a solução do problema de Stokes para a cavidade 2D.

1.3.1 Cavidade 2D

O estudo da cavidade 2D para o problema de Stokes foi realizado de maneira a validar-se o código de repartição de domínio e sobreposição de malhas. As equações de descrevem esse problema são:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (1.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.10)$$

A geometria do problema e suas condições contorno são apresentadas na Fig. ?? . O problema foi avaliado para um número de Reynolds = 100, calculado de acordo com

Eq. (??). A analise foi realizada considerando-se os seguintes dados de entrada: $\rho = 1, 0$; $\Delta t = 0, 05$; $\rho_\infty = 0$.

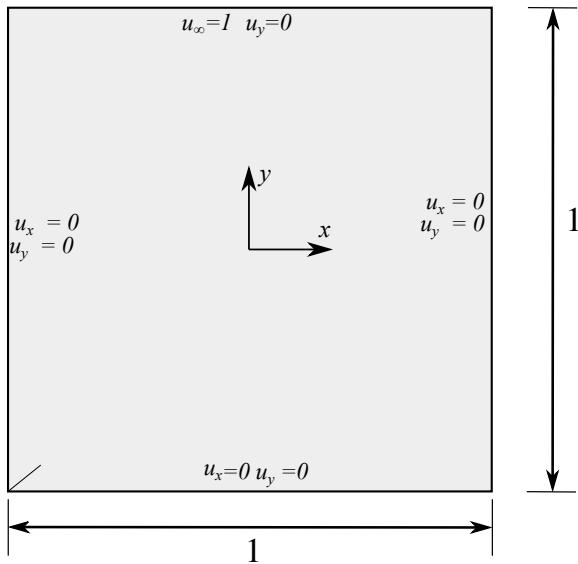
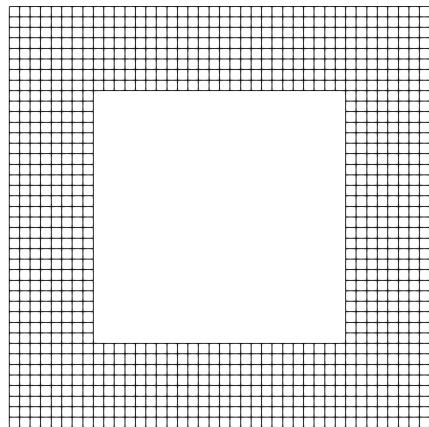


Figura 1.3 – Condições de contorno.

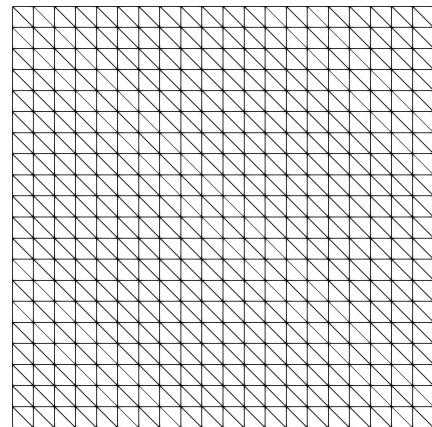
Sabe-se que nas paredes da cavidade têm-se a presença de efeitos de camada limite, dessa forma, de maneira a levar em consideração esses efeitos, definiu-se uma malha local que circunda a cavidade de acordo com a Fig. ???. A malha local foi discretizada através de uma aproximação isogeométrica e foi definida com 1440 pontos de controle que foram divididos em 8 diferentes *patches*. A malha global por sua vez inicialmente é definida para toda a seção da cavidade, e é composta por 800 elementos triangulares estruturados quadráticos e 1681 nós, de acordo com Fig. ???. A malha final utilizada para análise é definida pela composição das duas malhas e pode ser visualizada na Fig. ???.

Definiu-se uma espessura para a zona de sobreposição de 0,1 medida paralelamente ao contorno fictício local (Γ_L)_B, e a partir desse dado os elementos globais que ficaram sobre o domínio local (Ω_L) e fora da zona de sobreposição (Ω_B) foram desativados. As células e elementos pertencentes a zona de sobreposição tanto para a malha local, quanto para a malha global podem ser vistos nas Fig. ?? e Fig. ?? respectivamente. A função que pondera as funções da zona de sobreposição $b(\mathbf{x})$ é apresentada na Fig. ??.

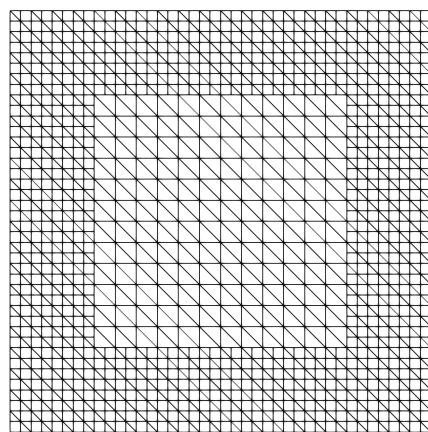
Os campos de velocidade e pressão obtidos com tal discretização são apresentados nas Fig. and Fig. .



(a) Malha Local.

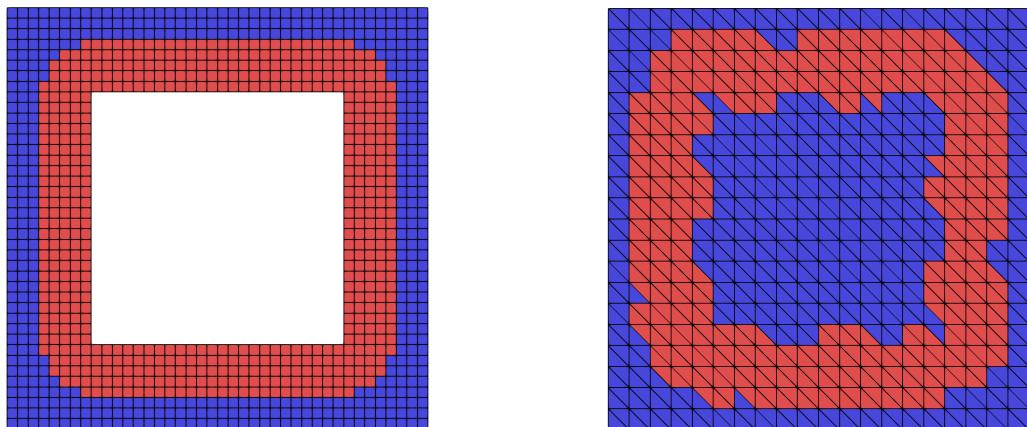


(b) Malha Global



(c) Malha Final

Figura 1.4 – Malhas Global e Local.



(a) Malha Local

(b) Malha Global

Figura 1.5 – Zona de sobreposição.

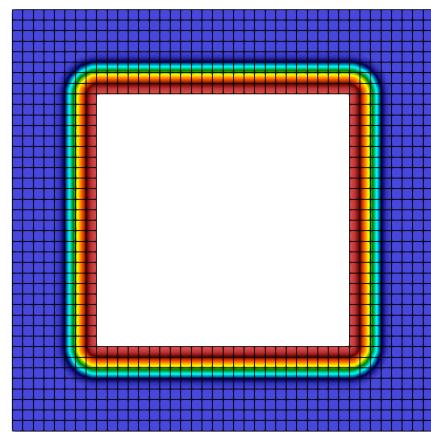
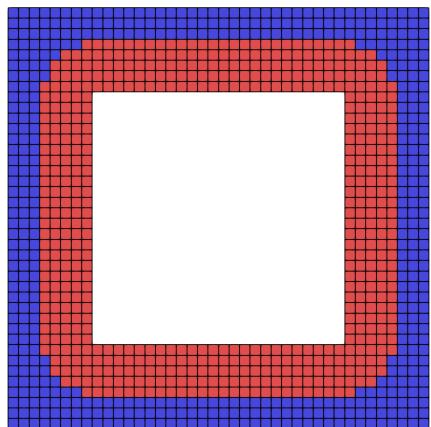
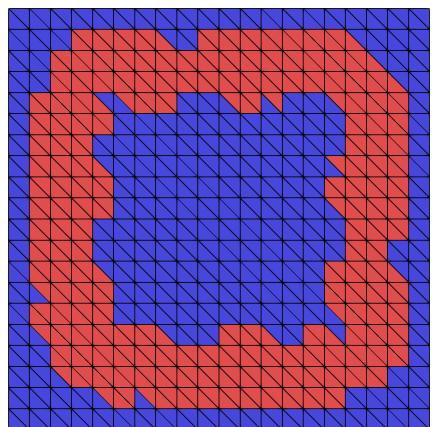


Figura 1.6 – Função $b(\mathbf{x})$ na zona de sobreposição.



(a) Campo de Velocidade



(b) Campo de Pressão

Figura 1.7 – Solução do problema de Stokes.