

## Combinação de discretizações isogeométrica e por elementos finitos na análise de interação fluido-estrutura

Combination of isogeometric and finite element discretizations for fluid-structure interaction analysis

**Patrícia Tonon**

Ph.D. Thesis – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo

**Patrícia Tonon**

**Combinação de discretizações isogeométrica e por  
elementos finitos na análise de interação fluido-estrutura**

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Ciências - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas).

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo André Kuche Sanches

**São Carlos**  
**2025**



## RESUMO

TONON, P. Combinação de discretizações isogeométrica e por elementos finitos na análise de interação fluido-estrutura. 2025. 190 p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2025.

O presente trabalho teve como principal objetivo o desenvolvimento de uma ferramenta computacional robusta para a análise de problemas de interação fluido-estrutura, incorporando uma técnica de partição de domínios no escoamento fluido, de modo a capturar efeitos localizados. Adota-se uma formulação estabilizada para análise dos escoamentos incompressíveis isotérmicos, permitindo aproximação de mesma ordem para as variáveis de velocidades e pressão, com uma integração temporal implícita realizada através do método  $\alpha$ -generalizado. A análise não-linear dinâmica da estrutura é modelada empregando-se uma abordagem do método dos elementos finitos baseada em posições aplicada a elementos de casca com integrador temporal de Newmark. Nessa formulação, levam-se em conta os efeitos localizados no modelo do fluido através do uso de um modelo local mais refinado superposto a um modelo global com discretização mais grosseira. As discretizações utilizam aproximações baseadas na análise isogeométrica ou no método dos elementos finitos clássico. A união entre malha global e malha local é realizada através de uma formulação estabilizada do método de Arlequin, o qual efetua o cruzamento e colagem entre os modelos em uma zona de colagem através da utilização de campos de multiplicadores de Lagrange. Para garantir a estabilidade do campo de multiplicadores de Lagrange, e, ao mesmo tempo, fornecer maior flexibilidade a formulação, adiciona-se um termo consistente de estabilização, baseado no resíduo das equações governantes. O acoplamento fluido-estrutura é do tipo particionado forte bloco-iterativo. Neste acoplamento, a malha local é adaptada à estrutura e deforma-se dinamicamente para acomodar a movimentação da estrutura, através de uma formulação ALE (Arbitrary Lagrangian–Eulerian), enquanto que a malha global permanece fixa. O método de acoplamento proposto pode ser caracterizado como uma abordagem híbrida e compartilha vantagens dos métodos de rastreamento de interface (malhas móveis) e de captura de interface (contornos imersos), visto que o fluido próximo à estrutura é adequadamente discretizado garantindo a captura de efeitos localizados, ao mesmo tempo em que a malha local, por ser menor, tolera maiores deformações, e em caso de necessidade de remalhamento, apenas essa malha precisa ser reconstruída. Os resultados obtidos nas simulações computacionais demonstraram a robustez e eficiência da formulação, evidenciando que trata-se de uma nova alternativa para análise de problemas de IFE com efeitos localizados.

**Palavras-chave:** Intereração Fluido-Estrutura. Análise Isogeométrica. Método dos Elementos Finitos. Partição de domínios.

## ABSTRACT

TONON, P. **Combination of isogeometric and finite element discretizations for fluid-structure interaction analysis.** 2025. 190 p. Thesis (Doctor) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2025.

The main objective of this work was the development of a robust computational tool for the analysis of fluid–structure interaction (FSI) problems, incorporating a domain partitioning technique in the fluid flow to capture localized effects. A stabilized formulation is adopted for the analysis of incompressible isothermal flows, allowing equal-order interpolation for velocity and pressure variables, with implicit time integration performed through the generalized- $\alpha$  method. The nonlinear dynamic analysis of the structure is modeled using a position-based finite element approach applied to shell elements, with time integration carried out by the Newmark method. In this formulation, localized effects in the fluid model are taken into account through the use of a refined local model superimposed on a coarser global model. The discretizations employ either isogeometric analysis or the classical finite element method. The coupling between the global and local meshes is achieved through a stabilized Arlequin method, which performs the coupling between models within an overlapping zone using Lagrange multiplier fields. To ensure the stability of the Lagrange multiplier field while providing greater flexibility to the formulation, a consistent stabilization term based on the residual of the governing equations is added. The fluid–structure coupling is strongly partitioned and block-iterative. In this coupling, the local mesh conforms to the structure and deforms dynamically to accommodate its motion through an Arbitrary Lagrangian–Eulerian (ALE) formulation, while the global mesh remains fixed. The proposed coupling method can be characterized as a hybrid approach, combining advantages of interface-tracking (moving-mesh) and interface-capturing (immersed-boundary) methods. The fluid near the structure is properly discretized to capture localized effects, while the smaller local mesh tolerates larger deformations; in case remeshing is required, only this local mesh needs to be reconstructed. The results obtained from the computational simulations demonstrated the robustness and efficiency of the formulation, showing that it provides a novel and effective alternative for the analysis of FSI problems with localized effects.

**Keywords:** Fluid-structure interaction. Isogeometric analysis. Finite Element Method. Domain Decomposition.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Volume de controle infinitesimal: Fluxo de massa . . . . .	34
Figura 2 – Volume de controle infinitesimal: Componentes de força na direção $y_1$ . . . . .	36
Figura 3 – Volume de controle infinitesimal: Fluxo de quantidade de Movimento . . . . .	37
Figura 4 – Domínio para o problema da DFC . . . . .	38
Figura 5 – Domínios utilizados para a descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária . . . . .	39
Figura 6 – Elementos Finitos: representação espacial e paramétrica . . . . .	45
Figura 7 – Cilindro: Geometria, condições de contorno e malha de elementos finitos.	57
Figura 8 – Cilindro: Coeficientes aerodinâmicos . . . . .	59
Figura 9 – Cilindro: Campos de velocidade para $Re = 100$ . . . . .	60
Figura 10 – Cilindro: Campos de pressão para $Re = 100$ . . . . .	61
Figura 11 – Cavidade quadrada: Geometria, condições de contorno e malha de elementos finitos . . . . .	62
Figura 12 – Cavidade quadrada: Perfis de velocidade adimensionalizados nas direções $y_1$ e $y_2$ . . . . .	62
Figura 13 – Cavidade quadrada: Campos de velocidade - plano $y_1y_2$ . . . . .	63
Figura 14 – Cavidade quadrada: Campos de pressão - plano $y_1y_2$ . . . . .	64
Figura 15 – NURBS: espaço físico, espaço paramétrico, espaço indicial e espaço parental . . . . .	66
Figura 16 – <i>B-Splines quadráticas</i> . . . . .	68
Figura 17 – Curva <i>B-Spline</i> . . . . .	70
Figura 18 – Refinamento $h$ para um curva <i>B-Spline</i> . . . . .	74
Figura 19 – Projeção transformativa de entidade <i>B-Spline</i> . . . . .	75
Figura 20 – Funções base univariadas na interface entre <i>Patches</i> . . . . .	78
Figura 21 – Cilindro: Divisão dos <i>Patches</i> . . . . .	82
Figura 22 – Cilindro: Obtenção da circunferência . . . . .	83
Figura 23 – Cilindro: Obtenção da superfície . . . . .	84
Figura 24 – Cilindro: Obtenção do sólido . . . . .	84
Figura 25 – Cilindro: Malha de células físicas . . . . .	86
Figura 26 – Cilindro: Coeficientes aerodinâmicos . . . . .	87
Figura 27 – Cilindro: Campos de velocidade para $Re = 1000$ - plano $y_1y_2$ . . . . .	89
Figura 28 – Cilindro: Campos de pressão para $Re = 1000$ - plano $y_1y_2$ . . . . .	90
Figura 29 – Degrau: Geometria - plano $y_1y_2$ . . . . .	90
Figura 30 – Degrau: Malha de células físicas - plano $y_1y_2$ . . . . .	91
Figura 31 – Degrau: Comprimento do vórtice principal . . . . .	93
Figura 32 – Degrau: Campos de velocidade . . . . .	93
Figura 33 – Degrau: Campos de pressão . . . . .	94

Figura 34 – Cinemática de um sólido deformável . . . . .	96
Figura 35 – Mudança no volume . . . . .	98
Figura 36 – Mudança de área . . . . .	99
Figura 37 – Volume infinitesimal: componentes de tensão . . . . .	100
Figura 38 – Tetraedro elementar . . . . .	101
Figura 39 – Sólido sob carregamento externo . . . . .	102
Figura 40 – Mapeamento da superfície média da casca . . . . .	106
Figura 41 – Vetores generalizados . . . . .	107
Figura 42 – Casca: Geometria e Malha . . . . .	113
Figura 43 – Casca: Deslocamento vertical nó central A . . . . .	113
Figura 44 – Casca: Deslocamento vertical nó central A - referência . . . . .	113
Figura 45 – Casca: Campos de deslocamentos . . . . .	114
Figura 46 – Definição dos domínios global, local e de zona de sobreposição . . . . .	116
Figura 47 – Espaços de funções na técnica de partição de domínios - Problema unidimensional . . . . .	119
Figura 48 – Cavidade: geometria e condições de contorno . . . . .	122
Figura 49 – Cavidade 2D: Malhas Global e Local . . . . .	122
Figura 50 – Cavidade 2D: Zona de sobreposição . . . . .	123
Figura 51 – Cavidade 2D: Solução do problema de Navier Stokes para $Re = 100$ . . . . .	123
Figura 52 – Cavidade 2D: Perfis de velocidade . . . . .	124
Figura 53 – Domínio local e global . . . . .	126
Figura 54 – Função Ponderadora . . . . .	127
Figura 55 – Domínio Arlequin móvel . . . . .	140
Figura 56 – Aerofólio: Geometria . . . . .	142
Figura 57 – Aerofólio: Malha Monomodelo (MEF) . . . . .	143
Figura 58 – Aerofólio: Discretização das malhas global e local . . . . .	144
Figura 59 – Aerofólio: Coeficiente de Arrasto . . . . .	145
Figura 60 – Aerofólio: Coeficiente de Arrasto . . . . .	145
Figura 61 – Aerofólio: Campo de velocidade . . . . .	146
Figura 62 – Aerofólio: Campo de pressão . . . . .	147
Figura 63 – Aerofólio Mov.: Geometria . . . . .	148
Figura 64 – Aerofólio Mov.: Coeficiente de Arrasto . . . . .	148
Figura 65 – Aerofólio Mov.: Coeficiente de Sustentação . . . . .	149
Figura 66 – Aerofólio Mov.: Campos de velocidade . . . . .	149
Figura 67 – Aerofólio Mov.: Campos de pressão . . . . .	150
Figura 68 – Domínios Computacional para análise de problemas de IFE . . . . .	152
Figura 69 – Discretizações não-coincidentes no contorno IFE . . . . .	154
Figura 70 – Cavidade fundo flexível 2D: geometria . . . . .	158
Figura 71 – Cavidade fundo flexível 2D: Discretizações . . . . .	160

Figura 72 – Cavidade fundo flexível 2D: Deslocamento em A para malhas do modelo Arlequin . . . . .	161
Figura 73 – Cavidade fundo flexível 2D: Deslocamento em A comparado com as referências e monomodelo . . . . .	161
Figura 74 – Cavidade fundo flexível 2D: Campos de velocidade . . . . .	162
Figura 75 – Cavidade fundo flexível 2D: Campos de Pressão . . . . .	163
Figura 76 – Cavidade fundo flexível 3D: Geometria . . . . .	163
Figura 77 – Cavidade fundo flexível 3D: Discretização . . . . .	164
Figura 78 – Cavidade fundo flexível 3D: Deslocamento em A . . . . .	165
Figura 79 – Cavidade fundo flexível 3D: Campos de velocidade . . . . .	166
Figura 80 – Cavidade fundo flexível 3D: Campos de Pressão . . . . .	167
Figura 81 – Casca: Campos de Deslocamentos . . . . .	168
Figura 82 – Painel Flexível: Geometria . . . . .	168
Figura 83 – Painel Flexível: Discretização . . . . .	169
Figura 84 – Painel Flexível: Deslocamento em A . . . . .	170
Figura 85 – Painel Flexível: Campos de velocidade . . . . .	171
Figura 86 – Painel Flexível: Campos de pressão . . . . .	172
Figura 87 – Painel Flexível: Deformada da malha em $nT$ . . . . .	173



## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1 – Comparação entre valores obtidos e valores de referência . . . . .	58
Tabela 2 – Cilindro: Número de pontos de controle por <i>patch</i> . . . . .	88
Tabela 3 – Degrau: Número de pontos de controle por <i>patch</i> . . . . .	91
Tabela 4 – Aerofólio: Número de pontos de controle por <i>patch</i> . . . . .	143
Tabela 5 – Cavidade fundo flexível 2D: Discretizações . . . . .	159



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>17</b>
<b>1.1</b>	<b>Apresentação do texto . . . . .</b>	<b>18</b>
<b>1.2</b>	<b>Estado da Arte . . . . .</b>	<b>20</b>
1.2.1	Dinâmica dos fluidos computacional . . . . .	20
1.2.2	Dinâmica de estruturas computacional considerando grandes deslocamentos . . . . .	23
1.2.3	Acoplamento fluido-estrutura . . . . .	24
1.2.4	Métodos Multiescala e Técnicas de partição de domínios . . . . .	27
<b>1.3</b>	<b>Objetivos . . . . .</b>	<b>29</b>
<b>1.4</b>	<b>Metodologia . . . . .</b>	<b>29</b>
<b>1.5</b>	<b>Justificativa . . . . .</b>	<b>31</b>
<b>2</b>	<b>DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL . . . . .</b>	<b>33</b>
<b>2.1</b>	<b>Equações governantes na descrição Euleriana . . . . .</b>	<b>33</b>
2.1.1	Equação da conservação da massa . . . . .	33
2.1.2	Equação da quantidade de movimento . . . . .	35
2.1.3	Formulação forte da mecânica dos fluidos . . . . .	37
<b>2.2</b>	<b>Descrição Euleriana-Lagrangiana arbitrária (ALE) . . . . .</b>	<b>38</b>
<b>2.3</b>	<b>Forma fraca e discretização espacial das equações governantes . . . . .</b>	<b>43</b>
2.3.1	Método dos elementos finitos . . . . .	44
2.3.2	Discretização Espacial . . . . .	45
2.3.3	Parâmetros de estabilização . . . . .	49
<b>2.4</b>	<b>Integração Temporal . . . . .</b>	<b>52</b>
<b>2.5</b>	<b>Implementação Computacional . . . . .</b>	<b>55</b>
<b>2.6</b>	<b>Verificação e Aplicações . . . . .</b>	<b>55</b>
2.6.1	Escoamento sobre um cilindro . . . . .	56
2.6.2	Cavidade quadrada . . . . .	58
<b>3</b>	<b>ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA APLICADA À DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL . . . . .</b>	<b>65</b>
<b>3.1</b>	<b>Noções Gerais de IGA . . . . .</b>	<b>65</b>
<b>3.2</b>	<b>B-Splines . . . . .</b>	<b>67</b>
3.2.1	Vetor de <i>knots</i> . . . . .	67
3.2.2	Funções base e suas derivadas . . . . .	68
3.2.3	Geometrias B-Splines . . . . .	70
3.2.4	Refinamento . . . . .	72
<b>3.3</b>	<b>NURBS . . . . .</b>	<b>73</b>

3.3.1	Funções base NURBS e suas derivadas . . . . .	75
3.3.2	Geometria NURBS . . . . .	76
3.3.3	Múltiplos <i>Patches</i> . . . . .	77
<b>3.4</b>	<b>Análise Isogeométrica</b> . . . . .	<b>78</b>
3.4.1	Parâmetros de estabilização . . . . .	79
<b>3.5</b>	<b>Verificação e aplicações</b> . . . . .	<b>81</b>
3.5.1	Escoamento sobre um cilindro . . . . .	81
3.5.1.1	Geração da malha NURBS . . . . .	81
3.5.1.2	Análise numérica . . . . .	85
3.5.2	Escoamento em um canal com degrau . . . . .	88
<b>4</b>	<b>DINÂMICA DOS SÓLIDOS COMPUTACIONAL</b> . . . . .	<b>95</b>
<b>4.1</b>	<b>Cinemática dos corpos deformáveis</b> . . . . .	<b>96</b>
<b>4.2</b>	<b>Equilíbrio de corpos deformáveis</b> . . . . .	<b>99</b>
4.2.1	Estado de tensão em um ponto . . . . .	99
4.2.2	Equilíbrio local Lagrangeano . . . . .	101
4.2.3	Princípio de Estacionariedade de energia . . . . .	103
4.2.4	Modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff . . . . .	105
<b>4.3</b>	<b>Método dos Elementos Finitos Posicional</b> . . . . .	<b>105</b>
4.3.1	Elemento finito de Casca . . . . .	106
4.3.2	Integração Temporal e solução do problema não-linear . . . . .	108
4.3.3	Implementação Computacional . . . . .	111
<b>4.4</b>	<b>Exemplo de aplicação - Casca cilíndrica com <i>snap through</i> dinâmico</b> <b>111</b>	
<b>5</b>	<b>TÉCNICA DE PARTIÇÃO DE DOMÍNIOS</b> . . . . .	<b>115</b>
<b>5.1</b>	<b>Combinação de espaços de funções</b> . . . . .	<b>115</b>
5.1.1	Função ponderadora de combinação . . . . .	117
5.1.2	Aplicação da técnica a Dinâmica dos Fluidos Computacional . . . . .	118
<b>5.2</b>	<b>Implementação Computacional</b> . . . . .	<b>120</b>
<b>5.3</b>	<b>Exemplo de aplicação</b> . . . . .	<b>121</b>
<b>6</b>	<b>MÉTODO DE ARLEQUIN ESTABILIZADO</b> . . . . .	<b>125</b>
<b>6.1</b>	<b>Método Arlequin</b> . . . . .	<b>125</b>
<b>6.2</b>	<b>Método Arlequin clássico aplicado à problemas de escoamentos incompressíveis</b> . . . . .	<b>128</b>
<b>6.3</b>	<b>Método Arlequin estabilizado aplicado à problemas de escoamentos incompressíveis</b> . . . . .	<b>131</b>
6.3.1	Integração Temporal . . . . .	134
6.3.2	Parâmetro de estabilização para técnica RBSAM . . . . .	136
<b>6.4</b>	<b>Superposição de modelos móveis</b> . . . . .	<b>138</b>

<b>6.5</b>	<b>Implementação Computacional . . . . .</b>	<b>139</b>
<b>6.6</b>	<b>Exemplos . . . . .</b>	<b>142</b>
6.6.1	Escoamento sobre um aerofólio NACA 0012 . . . . .	142
6.6.2	Aerofólio com movimento de arfagem prescrito . . . . .	146
<b>7</b>	<b>ACOPLAMENTO FLUIDO-ESTRUTURA . . . . .</b>	<b>151</b>
<b>7.1</b>	<b>Condições de acoplamento . . . . .</b>	<b>151</b>
7.1.1	Movimentação da Malha . . . . .	153
<b>7.2</b>	<b>Discretizações não coincidentes entre os meios . . . . .</b>	<b>154</b>
<b>7.3</b>	<b>Acoplamento Particionado Forte - Bloco-Iterativo . . . . .</b>	<b>155</b>
7.3.1	Implementação Computacional . . . . .	156
<b>7.4</b>	<b>Exemplos . . . . .</b>	<b>156</b>
7.4.1	Cavidade com fundo flexível - 2D . . . . .	157
7.4.2	Cavidade com fundo flexível - 3D . . . . .	160
7.4.3	<i>Flutter</i> em painel flexível . . . . .	164
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>175</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>179</b>



## 1 INTRODUÇÃO

A interação fluido-estrutura caracteriza-se por ser uma classe de problemas em que existe uma interdependência nos comportamentos do fluido e da estrutura. O comportamento do fluido depende do formato da estrutura e sua movimentação, assim como, o movimento e a deformação da estrutura dependem das forças que provém do fluido.

A modelagem numérica dos problemas da engenharia estrutural é um ramo vastamente desenvolvido, sendo a análise de estruturas por elementos finitos em softwares comerciais uma prática corrente entre os engenheiros. Entretanto, quando fala-se de interação fluido-estrutura (IFE), esses softwares encontram-se muito longe de atender à demanda dos engenheiros. Problemas que envolvem a interação entre fluido e estrutura estão presentes em diversas áreas da engenharia, pode-se citar, por exemplo, a ação do vento sobre edifícios, aerodinâmica de modelos automotivos, problemas de *flutter* em estruturas aeronáuticas e de pontes, ou ainda problemas de escoamento de sangue sobre vasos sanguíneos e órgãos, entre muitos outros. A análise experimental de tais problemas, em geral, é muito custosa e envolve muito tempo, desta forma, é de interesse o desenvolvimento de métodos numéricos que representem adequadamente tais análises e que possibilitem que sejam realizadas dentro de um tempo razoável. O crescimento da informática tem auxiliado nesse processo, embora, ainda muitas análises somente sejam possíveis de serem realizadas em grandes *clusters*, e algumas, devido à complexidade dos problemas, não possam ser simuladas sem grandes simplificações.

A análise computacional dos problemas de IFE envolvem basicamente três partes: dinâmica dos fluidos computacional, mecânica dos sólidos computacional e acoplamento entre os meios fluido e sólido. Uma das maiores dificuldades encontrada nessa área diz respeito ao acoplamento entre fluido e sólido visto que para fluidos aplica-se, em geral, uma descrição matemática Euleriana, e para sólidos, Lagrangiana. O processo de acoplamento é realizado basicamente utilizando-se duas possíveis técnicas: métodos de rastreamento de interface (*interface tracking*) ou método de malhas adaptadas e os métodos de captura de interface (*interface capturing*) ou método de malhas não-adaptadas.

Nos métodos de rastreamento de interface, a malha do fluido é adaptada à forma da interface sólido-fluido e acompanha seu movimento, requerendo, dessa forma, procedimentos de atualização da malha do fluido ao longo da análise. Nesse tipo de metodologia uma descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária pode ser aplicada ao fluido, permitindo a movimentação do domínio computacional de maneira independente do movimento do fluido. Essa técnica é adequada para problemas em que a estrutura sofre deslocamentos em pequenas escalas comparados à configuração inicial da estrutura, sem que haja mudança topológica do domínio do fluido, visto que grandes distorções do domínio fluido, em

geral, acarretam na necessidade de técnicas de remalhamento, que apresentam um custo computacional muito elevado.

No método de captura de interface se utiliza uma malha fixa para o fluido, na qual o sólido se encontra imerso. Um dos aspectos importantes desse método diz respeito à localização do contorno da estrutura dentro da malha do fluido, podendo ser resolvido por exemplo com o uso de uma função *level-set* baseada na distância assinalada ao contorno. Essa técnica, embora possa ser aplicada para grandes deslocamentos, em geral não é adequada para levar em consideração efeitos localizados que precisem de uma maior precisão da malha, como por exemplo, em regiões de camada limite na vizinhança da estrutura.

Neste trabalho de doutorado, para análise de problemas de IFE tridimensionais, utilizou-se uma técnica para a partição do domínio do fluido, com malhas superpostas, no intuito de unir as vantagens das metodologias de rastreamento de interface e de captura de interface e ao mesmo tempo proporcionar a combinação de diferentes técnicas de discretizações para as malhas. Nesse contexto, duas discretizações espaciais para o fluido são utilizadas, uma malha global maior, menos refinada e fixa no espaço, e uma malha local menor, mais refinada, em contato com a estrutura e que se move para acomodar as deformações da estrutura. Uma das discretizações pode ser isogeométrica, enquanto a outra em elementos finitos tradicional. Como consequência, caso seja necessária a realização de remalhamento, o mesmo pode ser realizado apenas na malha local, diminuindo o custo computacional.

A proposta inicial da tese de doutorado era a realização do acoplamento entre as malhas através de uma técnica de modificação do espaço das funções base em uma zona de sobreposição, de maneira a preservar à independência linear das funções e a partição da unidade. Tal formulação, se mostrou eficiente para alguns problemas estudados, entretanto, em simulações mais complexas, a metodologia não apresentou o comportamento esperado. Dessa forma, em alinhamento com os objetivos desse trabalho, utilizou-se para o acoplamento o método Arlequin em sua forma estabilizada, conforme será retratado ao longo do texto.

Neste capítulo são apresentados o estado da arte dos principais assuntos envolvidos no desenvolvimento deste projeto, os objetivos, a metodologia aplicada e a justificativa para esta pesquisa.

## 1.1 Apresentação do texto

Este texto está dividido em 8 capítulos os quais serão descritos sucintamente na continuação.

No *Capítulo 1* introduz-se e contextualiza-se o tema de pesquisa. Na sequência, no

estado da arte, faz-se uma breve apresentação de algumas das formulações mais utilizadas para a solução dos problemas que envolvem a interação fluido-estrutura e métodos de partição de domínios. Por fim, apresentam-se os objetivos, a metodologia e justificava desta pesquisa.

O *Capítulo 2* comprehende a descrição da técnica numérica utilizada para a resolução de problemas da dinâmica dos fluidos computacional. Apresentam-se inicialmente as equações governantes em sua forma forte em descrição Euleriana, expandindo-as na continuação para uma descrição Euleriana-Lagrangiana arbitrária. Na sequência, a formulação fraca é obtida através da aplicação do método dos resíduos ponderados utilizando a técnica clássica de Galerkin e apresenta-se a discretização espacial das equações. Para contornar as instabilidades típicas que ocorrem quando aplicado o método de Galerkin, e afim de contornar a condição LBB, apresenta-se uma metodologia estabilizada. Para a integração temporal das equações, o método  $\alpha$ -generalizado aplicado é exposto. Ao final, o algoritmo da implementação computacional é apresentado e alguns exemplos são avaliados para a verificação do programa.

No *Capítulo 3*, apresenta-se a análise isogeométrica aplicada à Dinâmica dos Fluidos Computacional (DFC) por meio da utilização de funções NURBS. O capítulo se inicia com uma breve contextualização do tema, seguida da descrição das funções-base *B-Splines* e de suas principais características, culminando na geração de geometrias a partir dessas funções. Em seguida, introduzem-se as funções NURBS, construídas a partir das *B-Splines*, destacando-se a obtenção de curvas, superfícies e sólidos NURBS. A abordagem isogeométrica é então detalhada, evidenciando a substituição das tradicionais funções polinomiais de Lagrange, utilizadas no Método dos Elementos Finitos clássico, por funções NURBS na discretização das geometrias e variáveis. Além disso, são explicados os parâmetros de estabilização empregados nas equações governantes discretizadas via IGA. Por fim, verifica-se a implementação computacional da DFC com análise isogeométrica por meio de exemplos numéricos.

O *Capítulo 4* apresenta uma breve revisão sobre a mecânica dos sólidos voltada a cinemática e ao equilíbrio de corpos deformáveis em descrição Lagrangiana, assim como elenca o princípio da estacionariedade de energia e a apresenta o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff adotado nesse trabalho. Na sequência, apresentam-se os conceitos do método dos elementos finitos posicional e o elemento finito de casca a ser utilizado nesse projeto para análise não-linear dinâmica de sólidos. Por fim, o algoritmo da implementação computacional é exibido e um problema de casca cilíndrica com *snap through* dinâmico é simulado.

No *Capítulo 5* a técnica de partição de domínios é apresentada. Descreve-se inicialmente a combinação proposta para os espaços de funções respectivos as malhas local e global com intuito de obter-se um novo espaço de funções independentes na

zona de sobreposição. Na sequência, descreve-se a metodologia para o cálculo da função ponderadora de combinação dentro do domínio. O roteiro de implementação computacional é então exibido, e apresenta-se, um exemplo de verificação voltado à dinâmica dos fluidos computacional.

No *Capítulo 6* apresenta-se a técnica de decomposição de domínios através do método Arlequin estabilizado (RBSAM). A primeira parte do capítulo foi dedicada a descrever o método clássico de Arlequin, para na sequência, introduzir a metodologia estabilizada para a solução de escoamentos incompressíveis. Apresenta-se na sucessão do capítulo a extensão da metodologia para problemas de contorno móveis. Ao final, o algoritmo de implementação é apresentado, bem como, exemplos de validação são avaliados.

No *Capítulo 7* discorre-se sobre a formulação utilizada para análise de problemas de Interação Fluido-Estrutura. No texto, apresentam-se as condições de acoplamento necessárias a solução de um problema de IFE, a técnica de movimentação de malha utilizada, e a metodologia de transferência de condições de contorno em uma interface entre fluido e sólido com malhas não coincidentes. Descreve-se na continuação do texto a teoria envolvida no esquema de acoplamento particionado forte adotado. Por fim, o algoritmo de implementação computacional e exemplos de validação são apresentados.

No *Capítulo 8* são apresentadas as considerações finais sobre o trabalho desenvolvido.

## 1.2 Estado da Arte

Nesta seção apresenta-se uma breve contextualização das formulações mais importantes relacionadas à metodologia aplicada neste projeto para a resolução dos problemas de interação fluido-estrutura. Assim, aborda-se brevemente o estado da arte da mecânica dos fluidos computacional aplicada a problemas de contornos móveis, mecânica dos sólidos computacional aplicada a problemas dinâmicos com grandes deslocamentos, técnicas de acoplamento numérico fluido-estrutura e métodos de decomposição de domínios e multiescala.

### 1.2.1 Dinâmica dos fluidos computacional

Na dinâmica dos fluidos computacional (DFC) técnicas numéricas são aplicadas para obtenção de uma solução aproximada para o conjunto de equações que descrevem o comportamento dos fluidos no espaço e no tempo, visto que a solução analítica para esses problemas é conhecida para poucos e simples casos. Os principais tópicos abordados aqui são referentes às diferentes metodologias aplicadas no que diz respeito a: discretização espacial, métodos de estabilização e modelagem de escoamentos turbulentos.

No que diz respeito à discretização espacial a DFC desenvolveu-se inicialmente no

âmbito do método das diferenças finitas e do método dos volumes finitos (ver, por exemplo, Chung (2002) e Anderson (1995)). O método dos elementos finitos (MEF), por sua vez, popularizou-se inicialmente em análises de estruturas na década de 50, com problemas baseados em princípios variacionais. Alguns anos depois, passou a ser usado também em problemas da DFC, visto que o mesmo apresenta algumas propriedades vantajosas, como por exemplo, a capacidade de discretizar geometrias complexas com o uso de malhas não estruturadas arbitrárias e a facilidade de aplicação de condições de contorno em geometrias complexas e de alta ordem (Zienkiewicz; Taylor; Nithiarasu, 2005; Reddy; Gartling, 2010).

Umas das dificuldades encontradas na aplicação do MEF à dinâmica dos fluidos computacional é o fato de que, ao adotar-se o método clássico de Galerkin na discretização espacial das equações que descrevem o comportamento dos fluidos em descrição Euleriana, obtém-se matrizes assimétricas, e, em escoamentos com convecção dominante, surgem variações espúrias nas variáveis transportadas. Esse problema pode ser amenizado à medida que a malha de elementos finitos é refinada, entretanto, é desejável que o método escolhido apresente resultados estáveis mesmo em malhas mais grosseiras.

Para resolver tal dificuldade, algumas técnicas de estabilização foram propostas, a exemplo da metodologia *Stream-Upwind/Petrov-Galerkin* - SUPG (Brooks; Hughes, 1982), *Galerkin Least-Squares-GLS* (Hughes; Franca; Hulbert, 1989) e *Sub-Grid Scale-SGS* (Hughes, 1995). Todas essas formulações baseiam-se na introdução de termos estabilizantes ao problema, contendo as variações espúrias que ocorrem em problemas com convecção dominante. Outra possibilidade, diz respeito ao uso do método Taylor-Galerkin (T-G), introduzido por Donea (1984) onde a estabilização é obtida pela introdução de termos de mais alta ordem para a expansão em série de Taylor no processo de discretização temporal.

Uma das metodologias mais difundidas para estabilização dos termos convectivos, é a técnica SUPG, aplicada nesse estudo, que consiste em adicionar à forma fraca da equação da quantidade de movimento, o resíduo da equação da quantidade de movimento ponderado por uma função especialmente escolhida para adicionar difusão na direção das linhas de corrente. Diversos autores contribuíram para consolidação dessa técnica, dentre os quais pode-se citar, Hughes e Tezduyar (1984), Tezduyar (1992), Catabriga e Coutinho (2002). O parâmetro adimensional estabilizador cuja função é aplicar uma escala na parcela adicionada, possui sua obtenção discutida em diversos trabalhos, tais como os Takizawa, Tezduyar e Otoguro (2018) e Otoguro, Takizawa e Tezduyar (2020).

Outra dificuldade da DFC diz respeito aos escoamentos incompressíveis. Ao levar-se em conta a incompressibilidade do escoamento, obtém-se a chamada equação da continuidade, onde tem-se apenas o termo do divergente do vetor velocidade. Do ponto de vista computacional, esse aspecto traz problemas na obtenção do campo de pressão. Nesses casos, a utilização da pressão e da velocidade como variáveis primárias aproximadas por funções de forma de mesmo grau pode conduzir instabilidades na resolução do sistema.

Essas instabilidades podem ser contornadas utilizando elementos que respeitem a restrição de *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi* ou LBB, onde a pressão é interpolada por funções de forma de ordem menor, sendo tais elementos conhecidos como Taylor-Hood (Brezzi; Fortin, 1991; Zienkiewicz; Taylor; Nithiarasu, 2005; Strang; Fix, 2008).

Uma metodologia de estabilização semelhante à técnica SUPG foi também desenvolvida para contornar esse problema (Hughes; Franca; Balestra, 1986; Tezduyar *et al.*, 1992a). Essa metodologia é conhecida como PSPG (*Pressure stabilized Petrov-Galerkin*), adotada nesse estudo, e consiste em adicionar à forma fraca da equação da continuidade o resíduo da equação da quantidade de movimento ponderado pelo gradiente da equação da continuidade multiplicado por uma constante estabilizadora.

Outra consideração importante nas simulações numéricas diz respeito à reprodução de escoamentos turbulentos. As equações de Navier-Stokes descrevem tanto escoamentos laminares como turbulentos, entretanto, a utilização da chamada Simulação Direta de Turbulência leva a custos computacionais elevados, visto que requer uma malha refinada de maneira a representar adequadamente todas as escalas de turbulência. Para contornar esse problema, diferentes técnicas podem ser empregadas, destacando-se os métodos *Reynolds-Averaged Navier-Stokes* (RANS) (Speziale, 1991; Alfonsi, 2009) e Simulações de grandes Vórtices (LES) (Launder; Spalding, 1972; Germano *et al.*, 1991; Wilcox, 1993; Piomelli, 1999).

Os métodos RANS baseiam-se na decomposição das variáveis de fluxo em uma média temporal e uma componente de flutuação. Essa abordagem permite que as equações governantes sejam manipuladas de forma a representar as médias de longo prazo do fluxo, enquanto as flutuações turbulentas são tratadas como termos adicionais, muitas vezes modelados por equações de fechamento. A definição da média pode variar conforme as características do problema. Nas simulações de grandes vórtices o objetivo principal é capturar as estruturas turbulentas de grande escala, que são responsáveis pela maior parte da transferência de momento e energia, e aplicar um modelo para os vórtices de pequena escala.

O método Variacional Multiescala (VMS) (Hughes, 1995; Hughes *et al.*, 1998; Hughes; Oberai; Mazzei, 2001; Bazilevs; Takizawa; Tezduyar, 2013) tem intuito de garantir concomitantemente a estabilização para os efeitos de convecção, para o campo de pressão e para problemas de vorticidade. O método, a partir de princípios variacionais, propõem a representação do problema físico por meio de sua decomposição em grandes e pequenas escalas, resolvendo-as separadamente. A modelagem do espaço de pequenas escalas é realizado em termos de resíduos das equações de conservação de massa e de conservação da quantidade de movimento. Essa metodologia tem se mostrado adequada para tratamento de problemas de camada limite ou turbulência, os quais apresentam um intervalo de escalas muito amplos.

A Análise Isogeométrica (IGA - *Isogeometric Analysis*) é uma metodologia para análise numérica de problemas descritos por equações diferenciais e foi introduzida primeiramente por Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005). Pode-se dizer que se trata de uma generalização do método dos elementos finitos clássico, a partir do uso de funções base especiais. Na análise isogeométrica, as funções base utilizadas são aquelas aplicadas nos sistemas CAD (*Computed Aided Design*), ou seja, nas tecnologias aplicadas na engenharia de *design*, animação, artes gráficas e visualização. Dentro das possibilidades de funções, as mais conhecidas são as funções NURBS(*Non-Uniform Rational B-Splines*) (Piegl; Tiller, 1996), fazendo que esse seja um ponto de partida para os estudos sobre IGA. Um dos principais objetivos do desenvolvimento dessa ferramenta é a integração entre os sistemas CAD e as técnicas numéricas baseadas em elementos finitos, as quais requerem a geração de malhas baseadas nos dados obtidos em programas CAD.

Uma das principais vantagens do uso dessa metodologia é representação exata de geometrias mesmo em malhas pouco refinadas, visto que essas funções são capazes de representar exatamente seções cônicas, círculos, cilindros, esferas e elipsoides. Além disso, outra característica matemática que a torna uma boa opção a ser utilizada, é a suavidade das funções NURBS, que são continuas  $p - 1$  vezes entre os elementos, sendo  $p$  o grau da função base. A descrição exata das geometrias é uma característica desejável em problemas que envolvem fenômenos de camada limite, os quais dependem fortemente da precisão geométrica da superfície do corpo imerso no escoamento. Alguns problemas envolvendo escoamentos turbulentos e interação fluido-estrutura, podem ser consultados em: Bazilevs *et al.* (2007), Zhang *et al.* (2007), Bazilevs *et al.* (2008), Bazilevs *et al.* (2010), Bazilevs e Akkerman (2010).

Outras metodologias aplicando diretamente funções *B-Splines* também tem se mostrado eficiente para a análise de problemas da dinâmica dos fluidos computacional, como pode ser visto nos trabalhos de Höllig, Reif e Wipper (2001), Bazilevs, Takizawa e Tezduyar (2013), Bazilevs *et al.* (2014).

### 1.2.2 Dinâmica de estruturas computacional considerando grandes deslocamentos

A análise de interação fluido estrutura recai muitas vezes em problemas onde é necessário a consideração da não linearidade geométrica da estrutura devido aos grandes deslocamentos ou a efeitos acoplados de membrana e flexão. Dentro desse grupo de problemas pode-se citar *flutter* de grande amplitude, sistemas de desaceleração (paraquedas), aplicações biomédicas, entre outros.

A solução numérica de problemas estruturais é realizada tradicionalmente aplicando-se o método dos elementos finitos. Dentro do contexto da análise não-linear de estruturas utilizando MEF, a formulação corrotacional proposta por Truesdell (1955) é muito popular e descreve a mudança de configuração da estrutura decompondo os movimentos do sólido

em rígido e de deformação, e descrevendo-os em termos dos deslocamentos e rotações nodais. Essa formulação, aplicada para pórticos, treliças e cascas, pode ser vista nos trabalhos de Hughes e Liu (1981a), Hughes e Liu (1981b), Argyris (1982), Simo e Fox (1989), Ibrahimovic e Taylor (2002), Battini e Pacoste (2006).

A formulação corrotacional, ao descrever rotações como parâmetros nodais, apresenta uma limitação para grandes deslocamentos, visto que não se pode aplicar a propriedade comutativa a essa grandeza. Para resolver este problema, utilizam-se formulações linearizadas de Euler-Rodrigues para aproximação das rotações, conforme pode ser visto, por exemplo, em Gruttmann, Sauer e Wagner (2000), Coda e Paccola (2010).

A conservação da energia nessa formulação é um assunto muito controverso em problemas de dinâmica não-linear de cascas e barras. Isso porque no uso da formulação corrotacional, as rotações finitas, que são parâmetros nodais, apresentam objetividade apenas para pequenos incrementos, além disso, a aplicação da formulação resulta em matriz de massa variável, proibindo o uso de algumas processos de integração temporal bem estabelecidos (Sanches; Coda, 2013).

Motivado por Bonet *et al.* (2000), Coda (2003) introduz uma formulação baseada em posições, sem rotações como parâmetros nodais. Essa formulação tem sido aplicada com sucesso para problemas de pórticos e cascas (Greco; Coda, 2004; Coda; Paccola, 2010; Carrazedo; Coda, 2010; Coda; Paccola, 2011; Sanches; Coda, 2016), incluindo problemas de interação fluido-estrutura (Sanches; Coda, 2013; Sanches; Coda, 2014; Fernandes; Coda; Sanches, 2019; Avancini; Sanches, 2020).

Em Sanches e Coda (2013), os autores utilizam o integrador temporal de Newmark para análise de problemas dinâmicos não-lineares de estruturas de cascas no contexto da IFE com grandes deslocamentos e rotações de corpo rígido. Nesse trabalho, os autores apresentam a prova da conservação da quantidade de movimento linear e angular no uso dessa metodologia, e testam a estabilidade e conservação de energia para problemas com pequenas deformações.

Baseado no último trabalho citado, neste projeto, aplica-se a formulação Lagrangiana total para elementos de cascas baseada em posições e vetores generalizados, o que evita o uso de aproximações para grandes rotações e permite o uso do integrador de Newmark nos problemas dinâmicos da IFE que apresentam grandes deslocamentos e rotações.

### 1.2.3 Acoplamento fluido-estrutura

O problema de interação fluido-estrutura pode ser descrito como um conjunto de equações diferenciais e condições de contornos associadas ao fluido e a estrutura que precisam ser satisfeitas ao mesmo tempo. Como sólidos e fluidos geralmente apresentam descrições matemáticas diferentes, sendo os sólidos tradicionalmente analisados por des-

crições Lagrangianas e os fluidos por descrições Eulerianas, um dos desafios da análise computacional de IFE é o acoplamento entre os dois meios. A solução de acoplamento a ser aplicada pode ser classificada em dois tipos de metodologias: métodos de rastreamento de interface (*interface tracking*) ou método de malhas adaptadas e métodos de captura de interface (*interface capturing*) ou método de malhas não-adaptadas (Hou; Wang; Layton, 2012; Bazilevs; Takizawa; Tezduyar, 2013b).

Nos métodos de rastreamento de interface, à medida em que a interface fluido-estrutura move, o domínio espacial do fluido muda seu formato, e a malha do fluido é movimentada para acomodar a mudança da interface. Nesse tipo de metodologia duas possíveis técnicas podem ser aplicadas na modelagem do domínio fluido: a descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária (Hughes; Liu; Zimmerman, 1981; Donea; Giuliani; Halleux, 1982; Kanchi; Masud, 2007) ou a formulação Espaço-Tempo (*Space-Time - ST*) (Tezduyar; Behr; Liou, 1992b; Tezduyar *et al.*, 1992c; Takizawa; Tezduyar, 2012), sendo que ambas permitem a movimentação arbitrária da discretização espacial. A principal vantagem do método de malhas adaptadas é a capacidade de controlar a dimensão da malha próxima a interface, bem como a conformidade dos domínios, e como consequência, garantir a precisão dos resultados nessa região.

A técnica empregada para movimentação de malhas é muito importante nesse tipo de problemas, pois deve ser eficiente de maneira a resultar em elementos que possuam uma mínima distorção e alteração de volume, e de forma a evitar que a malha necessite ser reconstruída. Diversas técnicas vêm sido desenvolvidas para essa finalidade e podem ser divididas em três categorias. Na primeira os deslocamentos são impostos na interface entre estrutura e fluido e o campo de deslocamentos é obtido através da resolução de um problema de valor de contorno, formulando-se o problema através de analogia de molas (Bottasso; Detomi; Serra, 2005), sólido (Johnson; Tezduyar, 1994; Stein; Tezduyar; Benney, 2004), suavização Laplaciana (Kanchi; Masud, 2007), entre outras.

O segundo grupo são esquemas ponto-a-ponto, nos quais os deslocamentos da malha são diretamente interpolados a partir dos deslocamentos impostos na interface (Donea; Giuliani; Halleux, 1982; Tezduyar *et al.*, 1993; Sanches; Coda, 2014). Existem ainda métodos híbridos, que combinam vantagens de diferentes técnicas de movimentação de malhas (Lefrançois, 2008; Fernandes; Coda; Sanches, 2019).

Nos métodos rastreamento de interface, no entanto, em alguns casos o remalhamento torna-se inevitável, como em problemas com grandes distorções do domínio ou em problemas com mudanças topológicas, fazendo com que o custo computacional se torne muito elevado.

Por sua vez, os métodos de captura de interface são capazes de lidar com mudanças topológicas e grandes deslocamentos. Para isso, utilizam-se os chamados métodos de contornos imersos, introduzido por Peskin (1972), nos quais mantém-se a malha do fluido fixa e permite-se que a estrutura mova-se dentro dessa malha. Nesses métodos é necessário

que as posições da estrutura sejam identificadas dentro da malha do fluido a cada passo de tempo (Mittal; Iaccarino, 2005; Wang *et al.*, 2011). Uma das formas de identificação é realizada através de uma função distância assinalada do contorno da estrutura (método *level-set*). Nesse contexto, pode-se citar os trabalhos de Cirak e Radovitzky (2005) aplicados no âmbito dos volumes finitos e de Sanches e Coda (2014) e Akkerman *et al.* (2012) em elementos finitos. A principal desvantagem desse tipo de metodologia é que a resolução da discretização na camada limite fica limitada a discretização da malha de elementos finitos onde a interface estiver posicionada no instante de análise.

A resolução dos problemas da IFE pode ser realizada através de duas variações principais: Métodos particionados (Roux; Garaud, 2009; Bazilevs *et al.*, 2011; Sanches; Coda, 2013; Sanches; Coda, 2014; Fernandes; Coda; Sanches, 2019) e métodos monolíticos (Blom, 1998; Hübner; Walhorn; Dinkler, 2004; Hron; Madlik, 2007; Avancini, 2023). No primeiro grupo, as equações para fluido e estrutura são resolvidas separadamente, sendo as condições de acoplamento transmitidas de um meio para o outro na interface, em geral, em termos de condições de Dirichlet-Neumann. No segundo grupo, de métodos monolíticos, fluido e estrutura são tratados como entidade única, com um único sistema de equações gerado para fluido e estrutura, sendo as condições de contorno de interface atendidas de maneira implícita durante o processo.

As técnicas de acoplamento particionado do tipo Dirichlet-Neumann caracterizam-se pela aplicação na interface de condições de contorno de Dirichlet no fluido (velocidades provenientes da movimentação da estrutura) e de Neumann no sólido (forças provenientes da variação dos campos de pressão e das tensões viscosas no fluido). Essas formulações podem ainda ser classificadas em fracas (explícitas), ou fortes (implícitas). No acoplamento particionado fraco, as equações são resolvidas de uma maneira desacoplada e só no passo de tempo seguinte são aplicadas as condições de contorno na interface. Para o acoplamento particionado forte usa-se de processos iterativos de acoplamento dentro de um passo de tempo. Esse tipo de resolução, aplicada nesse trabalho, também é conhecida como bloco-iterativa (Bazilevs; Takizawa; Tezduyar, 2013), na qual ocorre uma modificação da matriz tangente com relação ao método monolítico, sendo os sistemas do fluido, da estrutura e da malha tratados em blocos separados. Esse tipo de metodologia particionada facilita a solução dos problemas de IFE devido ao total desacoplamento entre os *solvers* de estrutura e de fluido.

Os esquemas particionados podem apresentar, entretanto, algumas desvantagens, como a defasagem que pode ocorrer entre as integrações temporais do fluido e da estrutura quando as condições de contorno na interface entre fluido e estrutura são aplicadas de maneira explícita, e, ainda, instabilidades numéricas como o efeito de massa adicionada (Felippa; Park; Farhat, 2001). Em escoamentos governados pelo campo de pressão, a ação do fluido sobre a estrutura funciona como uma massa adicional, alterando sua inércia

(Tallec; Mouro, 2001). Em escoamentos incompressíveis, nos quais a densidade do sólido e do fluido são muito próximas ou quando a estrutura é muito esbelta esse fenômeno pode ocasionar instabilidades numéricas em técnicas de acoplamento particionado fraco ou dificuldades de convergência no caso da esquema particionado forte.

Uma das formas de contornar esse problema é a alteração do esquema de acoplamento do tipo Dirichlet-Neumann para condições de contorno de Robin, que consiste em uma combinação linear das condições de Dirichlet e Neumann, ver por exemplo, Badia, Nobile e Vergara (2008). Outra possibilidade é a metodologia introduzida por Tezduyar, Behr e Liou (1992b), chamada de *augmented mass* que consiste em multiplicar a massa da matriz tangente respectiva à estrutura por um fator que dependerá do tipo de problema em análise. Cabe ressaltar ainda, para os casos de acoplamento do tipo bloco-iterativo, o uso da relaxação de Aitken, proposto por Irons e Tuck (1969), e que demonstra-se muito eficiente em trabalhos sequentes (Küttler; Wall, 2008; Fernandes; Coda; Sanches, 2019).

#### 1.2.4 Métodos Multiescala e Técnicas de partição de domínios

Em diversas áreas da engenharia se faz necessário levar em consideração efeitos localizados, geralmente de menor escala, em um modelo global. Dentro da análise estrutural pode-se citar problemas de fissuras, orifícios, imperfeições; na mecânica dos fluidos, problemas de camada limite, a interface entre dois fluidos; e na interação fluido-estrutura a interface entre estrutura-fluido, entre outros.

Para uma solução precisa desse tipo de problemas, faz-se necessário a aplicação de técnicas que levem em consideração os efeitos locais, mas ao mesmo tempo não tornem a simulação inviável devido ao seu custo computacional.

O método dos elementos finitos, tradicionalmente aplicado para as análises numéricas de equações diferenciais, foi desenvolvido a partir de um modelo mecânico de meio contínuo, apresentando pouca flexibilidade para a consideração desses efeitos. Os refinamentos  $p$  e  $h$  são metodologias eficientes, entretanto, para alguns problemas dinâmicos, demandam técnicas de remalhamento, e podem ser muito caros computacionalmente.

Em busca de aprimorar o Método dos Elementos Finitos (MEF), diversas propostas têm sido apresentadas para aumentar a flexibilidade na resolução de problemas multiescala, como pode-se citar, por exemplo, o caso dos elementos finitos difusos (Nayroles; Touzot; Villon, 1992) onde o conceito de partículas foi introduzido, resultando em uma generalização do método dos elementos finitos sem a necessidade de malha. Ou ainda, o método de Galerkin livre de elementos que é uma combinação entre métodos sem malha e o MEF (ver Belytschko *et al.* (1995)). Com esse mesmo intuito pode-se citar o método de partição da unidade (Melenk; Babuska, 1996), o método dos elementos finitos generalizado (G-FEM) (Strouboulis; Copps; Babuska, 2001) e o método dos elementos finitos estendido (X-FEM) (Moës *et al.*, 2003), os quais introduzem o enriquecimento à base aproximadora por meio

de funções capazes de capturar efeitos localizados. Os métodos G-FEM e X-FEM são, entretanto, fortemente dependentes do conhecimento local da solução, ou de pelo menos, seu aspecto espacial.

Pesquisas como as de Farhat, Harari e Franca (2001) propõem enriquecimentos descontínuos nos espaços funcionais, incorporando modos regulares por meio de formulações discretas de Galerkin e multiplicadores de Lagrange. Além disso, métodos de discretização que não dependem diretamente da interface, fundamentados na técnica de Nitsche, foram desenvolvidos para lidar com problemas envolvendo descontinuidades materiais, como demonstrado no estudo de Hansbo e Hansbo (2002).

Dentro do contexto da mecânica dos fluidos, Tezduyar, Aliabadi e Behr (1998), Tezduyar e Aliabadi (2000) introduziram a técnica *EDICT* (*Enhanced-Discretization Interface-Capturing Technique*) para captura de interface com aprimoramento da discretização para problemas bifásicos ou com superfície livre. Para isso, nessa região de interface definem-se um subconjunto de elementos (sub-malhas), que posteriormente são refinados sucessivamente, de modo a melhorar a precisão da solução. Como resultado obtém-se uma discretização melhorada para capturar a interface, entretanto, as sub-malhas provenientes, não representam com exatidão descontinuidades na interface. Uma versão mais eficiente dessa técnica foi proposta em Tezduyar e Sathe (2005), na qual um método iterativo multinível é projetado para a captura de efeitos do escoamento em pequenas escalas, permitindo a simulação de problemas mais complexos.

No âmbito da DFC pode-se citar ainda o método Variacional Multiescala (VMS) (Hughes *et al.*, 1998) que utiliza o conceito de micromodelos e macromodelos, sendo que os micromodelos capturam efeitos em pequenas escalas de maneira a corrigir os macromodelos.

Outro grupo de métodos proposto para flexibilizar o MEF em problemas com efeitos locais são os baseados em superposição de um domínio local a um domínio global. A técnica Chimera definida por Benek *et al.* (1986) traz a introdução de orifícios na região de superposição dos modelos, definindo um contorno artificial para o modelo global, e a transmissão de dados ocorre através desses contornos artificiais gerados. O método S (Fish, 1992) trata o modelo local como um enriquecimento ao global, e a solução é obtida através da soma dos campos de interesse de cada domínio.

O método Arlequin (Ben Dhia, 1998; Ben Dhia; Rateau, 2001), por sua vez também baseia-se na superposição de modelos de modo a combinar um modelo local mais refinado a um global, no entanto, esse processo é realizado através do cruzamento e colagem entre os modelos em uma zona de superposição e fazendo-se o uso para tal de multiplicadores de Lagrange. O método Arlequin vem sendo utilizado amplamente em diversas áreas da mecânica dos sólidos (ver, por exemplo, Dhia e Jamond (2010), Caleyron *et al.* (2013), Dhia e Torkhani (2011), Bauman *et al.* (2008), Biscani *et al.* (2016), Jamond e Ben Dhia (2013)), na DFC e IFE, entretanto, ainda é pouco explorado. Fernier, Faucher e Jamond (2020)

aplica a metodologia para análise de escoamentos compressíveis, e Fernandes *et al.* (2020) para análise de escoamentos incompressíveis e de IFE para problemas bidimensionais. Nesse trabalho será feita uma extensão do trabalho de Fernandes (2020) para problemas tridimensionais de IFE e levando em consideração diferentes discretizações matemáticas para as malhas global e local.

### **1.3 Objetivos**

O principal objetivo deste trabalho é o desenvolvimento e implementação computacional de uma formulação para análise de problemas tridimensionais de interação fluido-estrutura. A formulação deve permitir a consideração de efeitos localizados por meio de uma técnica de partição de domínios, além de viabilizar o uso combinado de aproximações por elementos finitos clássicos e análise isogeométrica.

Para tal finalidade, enumeram-se os seguintes objetivos específicos:

- Expansão de um código computacional para análise de escoamentos incompressíveis baseado em método dos elementos finitos tradicional para um código que conte a possibilidade de discretização através de análise isogeométrica;
- Estudo de técnicas de partição de domínios para levar em conta efeitos localizados no âmbito da DFC;
- Implementação da técnica de partição de domínios no código de dinâmica dos fluidos computacional contemplando problemas da DFC com contornos móveis;
- Estudo aprofundado de um código pré-desenvolvido de análise não-linear geométrica de estruturas de cascas utilizando o MEF posicional;
- Acoplamento entre os códigos computacionais da DFC e de sólido através do emprego de uma técnica particionada do tipo bloco-iterativa;
- Validação dos códigos computacionais através da simulação de problemas da dinâmica dos fluidos, dinâmica das estruturas e problemas IFE.

### **1.4 Metodologia**

Em função da complexidade envolvida na implementação computacional dos códigos desenvolvidos optou-se pelo uso da linguagem de programação C++ orientada a objetos, visto que esta linguagem já vem sendo utilizada com sucesso no grupo de trabalho da presente estudante de doutorado. Além disso, a programação orientada a objetos proporciona uma maior modularidade dos códigos desenvolvidos e uma maior facilidade

para o acoplamento entre módulos distintos. Todas as implementações são realizadas utilizando bibliotecas, compiladores e softwares livres ou de código aberto, em ambiente Linux.

O projeto de pesquisa iniciou-se pela dinâmica dos fluidos computacional tendo como base os desenvolvimentos realizados em Tonon (2016) e um código computacional de dinâmica dos fluidos para análises de escoamentos incompressíveis bidimensionais desenvolvido por Fernandes (2016) e Fernandes (2020) em seus trabalhos de mestrado e doutorado respectivamente. Primeiramente, ampliou-se o código pré-existente de maneira que o mesmo contemplasse análises de problemas tridimensionais. Na sequência, incluiu-se a este código baseado em método dos elementos finitos clássico a possibilidade do uso de análise isogeométrica.

A partir desse ponto, iniciou-se o processo de estudo da metodologia de decomposição de domínios e sua implementação para problemas bidimensionais da DFC foi realizada, conforme a formulação apresentada no ???. Devido a dificuldades encontradas para simulação de problemas mais complexos, o método Arlequin (Ben Dhia, 1998), em sua versão estabilizada conforme o trabalho de Fernandes (2020), foi estudado e implementado computacionalmente para problemas bidimensionais e tridimensionais da DFC.

Para a análise dos problemas não-lineares geométricos de estruturas de cascas baseado no MEF posicional, estudaram-se os textos apresentados em Sanches e Coda (2010a), Sanches e Coda (2010b) e Coda (2018), e empregou-se um código computacional cedido pelo pesquisador Rosicley Júnior Rodrigues Rosa desenvolvido em seu trabalho de mestrado (Rosa, 2021) com linguagem de programação em C++ orientada a objeto e Phyton.

Na sequência deste projeto, realizou-se o acoplamento entre os códigos de fluidos e de estrutura, utilizando-se a metodologia de acoplamento particionado forte através da técnica bloco-iterativa.

Para maior eficiência na resolução dos problemas, os códigos da DFC, de estruturas e de IFE apresentam paralelização em protocolo MPI (*Message passing interface*). O processamento paralelo acontece a partir da divisão do domínio de elementos finitos entre os processos, o qual é realizado através da biblioteca METIS<sup>1</sup>. O METIS proporciona divisão do domínio de elementos finitos em número semelhantes de elementos entre os processos e agrupando-os por proximidade geométrica.

É importante ressaltar que os códigos contam com a interface e implementações do pacote PETSc<sup>2</sup>. Essa biblioteca é desenvolvida em código aberto e possui uma grande quantidade de método iterativos e diretos para solução de sistemas algébricos e também

---

<sup>1</sup> Disponível em: <http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/metis/metis/overview>

<sup>2</sup> Disponível em: <https://www.mcs.anl.gov/petsc/>

pré-condicionadores. Além do mais, o PETSc possui uma interface bem desenvolvida com outras bibliotecas, como por exemplo, com o METIS citado anteriormente.

As malhas de elementos finitos utilizadas nas análises são obtidas através do software GMSH<sup>3</sup> e a etapa de pós-processamento e visualização é realizada no Kitware Paraview<sup>4</sup> e Gnuplot<sup>5</sup>. Para problemas aplicando a análise isogeométrica, a etapa de pré-processamento é realizada com um código desenvolvido pela autora e seu orientador durante seu trabalho de mestrado (Tonon, 2016).

No que diz respeito à infraestrutura, utiliza-se o *cluster* disponível no Laboratório de Informática e de Mecânica Computacional (LIMC) do SET para a simulação de problemas mais complexos, e um computador pessoal para a simulação de problemas mais simples.

## 1.5 Justificativa

Os problemas de interação fluido-estrutura estão presentes em todas as partes, na engenharia, nas ciências, na medicina e também no dia-a-dia das pessoas. O projeto de estruturas cada vez mais esbeltas, a necessidade de obtenção de energia elétrica a partir de fontes de energia limpa, como as usinas eólicas, o estudo de *airbags*, o bombeamento do sangue pelos ventrículos do coração humano e o abrir e fechar das válvulas do coração, são apenas alguns dos exemplos que demonstram a necessidade de se aprofundar nos estudos da interação fluido-estrutura computacional.

Enquanto que no campo engenharia estrutural os pacotes comerciais baseados em MEF estão em constante evolução, e podem resolver uma grande gama de problemas, os softwares que tratam de problemas da dinâmica dos fluidos computacional e de problemas multifísicos, como os problemas da IFE, ainda precisam evoluir muito para suprirem a demanda dos pesquisadores. A simulação numérica de problemas reais de IFE é ainda muito difícil de ser realizada em função do elevado custo computacional, e muitas vezes, devido a grande complexidade dos problemas, ainda é impossível simulá-los sem que sejam realizadas grandes simplificações. Dessa forma, os ensaios experimentais, ainda são em grande parte das vezes, a melhor forma de se estudar o comportamento de IFE, embora, sejam muito custosos e demorados.

Dentro desse contexto, muitos pesquisadores tem se esforçado para que a análise de problemas da IFE computacionalmente seja possível e eficiente. Com essa mesma proposta, nesse projeto pretende-se desenvolver uma ferramenta computacional eficiente para análise tridimensional de problemas de interação fluido-estrutura utilizando uma combinação entre método dos elementos finitos e análise isogeométrica. Nesse trabalho, será aplicado o método Arlequin para a superposição de malhas no modelo do fluido, com uma malha

<sup>3</sup> Disponível em:<https://gmsh.info/>

<sup>4</sup> Disponível em:<http://https://www.paraview.org/>

<sup>5</sup> Disponível em:<https://gnuplot.info/>

local mais refinada e deformável em contato com a superfície da estrutura sobreposta a uma malha global fixa e com discretização mais grosseira. Dessa forma, ainda que a estrutura mude drasticamente, não se faz necessário o remalhamento de toda a malha que compõe o fluido, diminuindo assim o custo computacional. Esta proposta compartilha as vantagens dos métodos de malhas adaptadas e de malhas não adaptadas, possuindo a possibilidade de alcançar uma ótima convergência.

## 2 DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL

O escoamento isotérmico de um fluido newtoniano é descrito pelas equações advindas da conservação da quantidade de movimento, ou de Navier-Stokes, e da conservação de massa. Nos casos em que ocorram variações significativas no campo de temperatura, ou em escoamentos compressíveis, a equação da conservação de energia deve ser adicionada ao sistema. Essas equações governantes, juntamente com as relações constitutivas, resultam em um sistema de equações diferenciais não lineares que descrevem o comportamento do escoamento no tempo e no espaço.

Neste trabalho, são investigados escoamentos incompressíveis, isotérmicos e com contornos móveis. As seções seguintes apresentam a abordagem adotada para a resolução desse tipo de problema, bem como sua implementação computacional. Utiliza-se uma formulação Arbitrária Euleriana-Lagrangiana (ALE) para representar as equações, e a discretização espacial é realizada por meio do método dos elementos finitos (FEM) ou da análise isogeométrica (IGA).

Para tratar questões numéricas recorrentes nesse sistema de equações, como as oscilações espúrias em casos de convecção dominante, típicas da aplicação do método dos resíduos ponderados baseado na formulação clássica de Galerkin, emprega-se a metodologia SUPG. Adicionalmente, a estabilização PSPG é aplicada com o objetivo de contornar a condição imposta pelo critério de *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi* (LBB). A integração no tempo é conduzida por meio do método  $\alpha$ -generalizado.

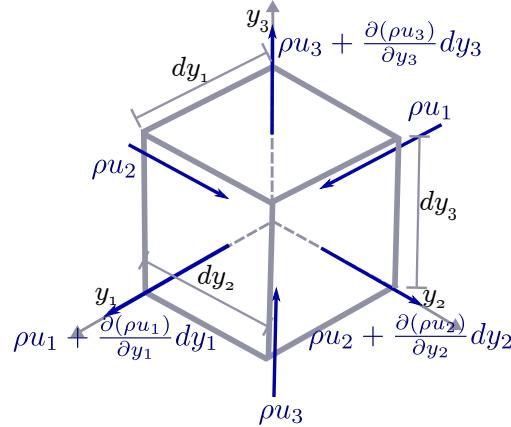
Ao final deste capítulo, é apresentado um algoritmo que detalha o esquema computacional de solução dos problemas da DFC, seguido pela resolução de alguns casos clássicos, utilizados como verificação da metodologia proposta.

### 2.1 Equações governantes na descrição Euleriana

#### 2.1.1 Equação da conservação da massa

Considere um volume de controle infinitesimal fixo no espaço, permeável a matéria e submetido a uma escoamento de velocidade  $\mathbf{u}$ , com componentes  $u_1, u_2$ , e  $u_3$  (conforme Figura 1). Para um intervalo de tempo infinitesimal  $dt$ , a lei da conservação da massa impõe que a variação de massa dentro do volume de controle seja igual ao fluxo líquido de massa que atravessa suas fronteiras, que pode ser expresso matematicamente da seguinte forma:

Figura 1 – Volume de controle infinitesimal: Fluxo de massa



Fonte: Elaborada pela autora

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dV = (\rho u_1 dA_1 + \rho u_2 dA_2 + \rho u_3 dA_3) - \left( \left( \rho u_1 + \frac{\partial \rho u_1}{\partial y_1} dy_1 \right) dA_1 + \left( \rho u_2 + \frac{\partial \rho u_2}{\partial y_2} dy_2 \right) dA_2 + \left( \rho u_3 + \frac{\partial \rho u_3}{\partial y_3} dy_3 \right) dA_3 \right), \quad (2.1)$$

com  $\rho$  a massa específica do fluido e  $dA_i$  a área referente à face ortogonal ao eixo  $y_i$ . Considerando que  $dV = dy_1 dy_2 dy_3 = dy_1 dA_1 = dy_2 dA_2 = dy_3 dA_3$  e manipulando-se algebraicamente a Equação 2.1 chega-se a seguinte expressão:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u_1}{\partial y_1} - \frac{\partial \rho u_2}{\partial y_2} - \frac{\partial \rho u_3}{\partial y_3}. \quad (2.2)$$

Para escoamentos incompressíveis, quando  $\rho$  é constante ao longo do tempo, a equação fica reduzida a:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \frac{\partial u_2}{\partial y_2} + \frac{\partial u_3}{\partial y_3} = 0, \quad (2.3)$$

ou ainda:

$$\nabla_y \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.4)$$

### 2.1.2 Equação da quantidade de movimento

Para um volume de controle infinitesimal, a lei da conservação da quantidade de movimento afirma que a variação temporal da quantidade de movimento no interior do volume é determinada pela diferença entre o fluxo de quantidade de movimento que entra e o que sai pelas suas fronteiras, somada à resultante das forças aplicadas sobre o volume de controle.

Para chegar-se à equação da quantidade de movimento em sua forma conservativa partindo desse princípio, inicia-se com a avaliação das forças que atuam sobre um volume de controle infinitesimal no instante atual. Considerando o equilíbrio das forças externas e internas na direção  $y_1$ , de acordo o volume apresentado na Figura 2, chega-se na seguinte relação:

$$\begin{aligned} F_1 = & -(\sigma_{11}dy_2dy_3 + \sigma_{12}dy_1dy_3 + \sigma_{13}dy_1dy_2) + \\ & \left( \left( \sigma_{11} + \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial y_1}dy_1 \right) dy_2dy_3 + \left( \sigma_{12} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y_2}dy_2 \right) dy_1dy_3 + \left( \sigma_{13} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial y_3}dy_3 \right) dy_1dy_2 \right) + \\ & b_1dy_1dy_2dy_3, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde  $F_1$  representa a resultante das forças externas na direção  $y_1$ ;  $\sigma_{ij}$  são as componentes  $ij$  do tensor de tensões Cauchy ( $\boldsymbol{\sigma}$ ); e  $b_1$  representa a componente na direção  $y_1$  do vetor força de campo por unidade de volume  $\mathbf{b}$ . Dividindo-se Equação 2.5 por  $dV$  e efetuando as subtrações, têm-se a força resultante por unidade de volume ( $q_1$ ) dada por:

$$q_1 = \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y_2} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial y_3} + b_1. \quad (2.6)$$

Considerando-se o equilíbrio das forças nas direções  $y_2$  e  $y_3$ , pode-se escrever também:

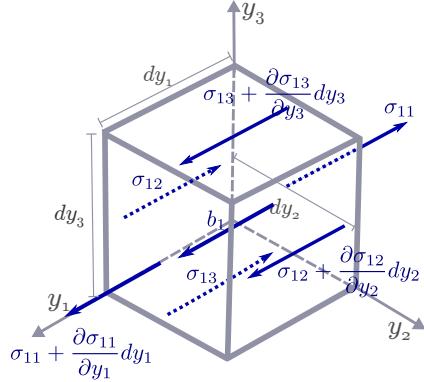
$$q_2 = \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial y_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial y_2} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial y_3} + b_2, \quad (2.7)$$

$$q_3 = \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial y_1} + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial y_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial y_3} + b_3, \quad (2.8)$$

ou ainda:

$$\mathbf{q} = \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}. \quad (2.9)$$

Figura 2 – Volume de controle infinitesimal: Componentes de força na direção  $y_1$



Fonte: Elaborada pela autora

Realizando-se o balanço da quantidade de movimento no volume de controle infinitesimal da Figura 3, e aplicando-se a lei da conservação da quantidade de movimento, pode-se chegar a seguinte equação:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} dV = u_1 \rho \mathbf{u} dA_1 + u_2 \rho \mathbf{u} dA_2 + u_3 \rho \mathbf{u} dA_3 - \left( \left( u_1 \rho \mathbf{u} + \frac{\partial u_1 \rho \mathbf{u}}{\partial y_1} dy_1 \right) dA_1 + \left( u_2 \rho \mathbf{u} + \frac{\partial u_2 \rho \mathbf{u}}{\partial y_2} dy_2 \right) dA_2 + \left( u_3 \rho \mathbf{u} + \frac{\partial u_3 \rho \mathbf{u}}{\partial y_3} dy_3 \right) dA_3 \right) + \mathbf{q} dV, \quad (2.10)$$

dividindo-se a Equação 2.10 por  $dV$  e efetuando-se as subtrações, chega-se a:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\partial u_1 \rho \mathbf{u}}{\partial y_1} - \frac{\partial u_2 \rho \mathbf{u}}{\partial y_2} - \frac{\partial u_3 \rho \mathbf{u}}{\partial y_3} + \mathbf{q}, \quad (2.11)$$

ou ainda:

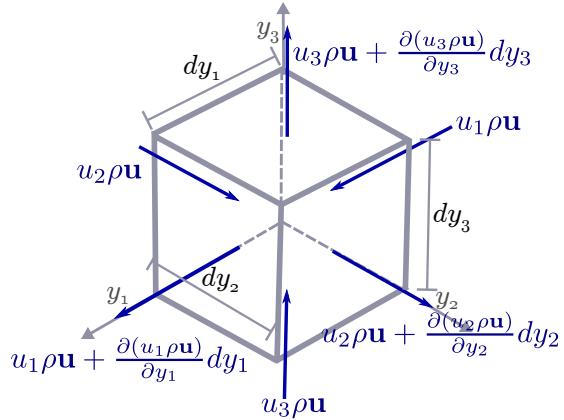
$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla_y \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mathbf{f} \right) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (2.12)$$

com  $\mathbf{f} = \rho \mathbf{b}$  que representa a força de campo por unidade de massa.

Da consideração da equação da continuidade, a Equação 2.12 pode ser rescrita ainda em sua forma convectiva como:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla_y) \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (2.13)$$

Figura 3 – Volume de controle infinitesimal: Fluxo de quantidade de Movimento



Fonte: Elaborada pela autora

O tensor de tensões de Cauchy  $\sigma$  é definido para fluidos newtonianos incompressíveis pela seguinte relação constitutiva:

$$\sigma = -p\mathbf{I} + 2\mu\varepsilon(\mathbf{u}), \quad (2.14)$$

onde  $p$  representa a pressão,  $\mu$  a viscosidade dinâmica do fluido e  $\varepsilon(\bullet)$  é o tensor taxa de deformação infinitesimal, definido como:

$$\varepsilon(\bullet) = \frac{1}{2} \left( \nabla_y(\bullet) + \nabla_y(\bullet)^T \right). \quad (2.15)$$

### 2.1.3 Formulação forte da mecânica dos fluidos

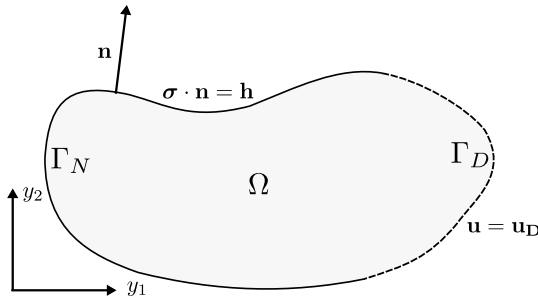
Seja  $\Omega \in \mathbb{R}^{n_{sd}}$ , com  $n_{sd} = 1, 2, 3$  definindo a dimensão do domínio espacial do escoamento com contorno  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ , no instante  $t \in (0, T)$  (ver Figura 4).

Para escoamentos incompressíveis isotérmicos o fluido possui movimento descrito pela equação da quantidade de movimento, ou equações de Navier-Stokes (Equação 2.13) e da conservação de massa (Equação 2.4). Para completar a formulação da mecânica dos fluidos, condições de contorno devem ser especificadas. Em geral, em uma dada parte do contorno espacial, condições de contorno essenciais (Dirichlet) ou naturais (Neumann) são aplicadas. Dessa forma, o escoamento é governado pelo seguinte conjunto de equações:

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_y \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ em } \Omega \\ \nabla_y \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ em } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_D \text{ em } \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{h} \text{ em } \Gamma_N, \end{cases} \quad (2.16)$$

sendo  $\Gamma_D$  a porção do contorno com condições de contorno de Dirichlet, representadas pelo campo de velocidades  $\mathbf{u}_D$ , e  $\Gamma_N$  aquela com condições de contorno de Neumann, descritas pelas forças de superfície  $\mathbf{h}$ . A variável  $\mathbf{n}$  representa o vetor unitário normal ao contorno  $\Gamma_N$ .

Figura 4 – Domínio para o problema da DFC



Fonte: Elaborada pela autora

## 2.2 Descrição Euleriana-Lagrangiana arbitrária (ALE)

A descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária (Donea; Giuliani; Halleux, 1982) representa uma generalização da descrição puramente Lagrangiana e da descrição puramente Euleriana do movimento do contínuo. A descrição Lagrangiana fixa a atenção em pontos materiais do contínuo, enquanto que na descrição Euleriana considera-se uma porção fixa do espaço ocupada pelo contínuo, e analisam-se os pontos materiais que passam por essa porção ao longo do tempo. Como consequência, na descrição puramente Lagrangiana a malha computacional move-se com o contínuo, enquanto que na Euleriana a malha computacional mantém-se fixa. Por sua vez, na descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária, trabalha-se com pontos de referência que podem movimentar-se, mas de maneira independente do movimento dos pontos materiais do contínuo analisado.

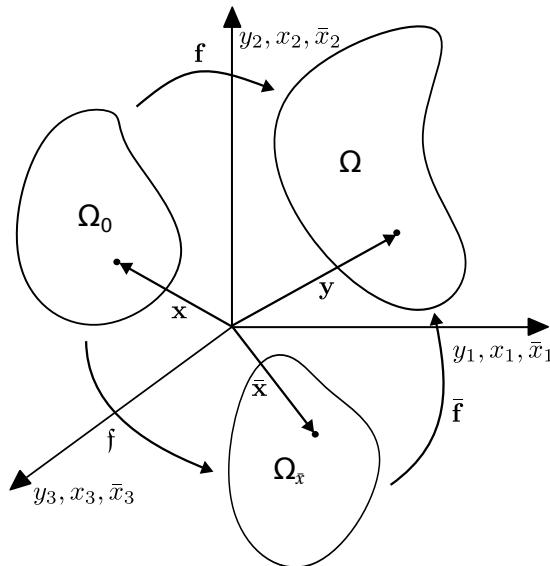
Para a aplicação dessa metodologia às equações governantes da mecânica dos fluidos é importante a definição de três domínios, de acordo com a Figura 5. O domínio inicial, chamado de **domínio material** ( $\Omega_0$ ), que é definido pelas coordenadas dos pontos materiais  $\mathbf{x}$ ; O domínio atual, chamado de **domínio espacial** ( $\Omega$ ), definido pelas coordenadas  $\mathbf{y}$ ; e por fim, o **domínio de referência** ( $\Omega_{\bar{x}}$ ) com coordenadas dos pontos de referência  $\bar{\mathbf{x}}$ .

Considera-se nesse texto, o domínio de referência,  $\Omega_{\bar{x}}$ , como sendo a configuração inicial da malha, enquanto que a configuração atual da malha e do contínuo consistem ambas na referência espacial  $\Omega$ .

As coordenadas no domínio atual do contínuo,  $\Omega$ , podem ser mapeadas a partir do domínio inicial ( $\Omega_0$ ) ou a partir do domínio de referência ( $\Omega_{\bar{x}}$ ) utilizando as seguintes funções de mapeamento:

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, t). \quad (2.17)$$

Figura 5 – Domínios utilizados para a descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária



Fonte: Elaborada pela autora

Da mesma forma, o domínio de referência, pode ser mapeado a partir do domínio inicial por:

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t). \quad (2.18)$$

A velocidade dos pontos da malha é calcula por:

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}}, \quad (2.19)$$

e a velocidade dos pontos materiais no instante  $t$  é obtida pela derivada do vetor posição  $\mathbf{y}$  mantendo  $\mathbf{x}$  fixo:

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} . \quad (2.20)$$

As matrizes jacobianas dos mapeamentos considerando a dependência do espaço e do tempo são dadas por:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial (\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial (\mathbf{x}, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{\partial (\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, t), t)}{\partial (\bar{\mathbf{x}}, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} & \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

e

$$\mathfrak{F} = \frac{\partial (\mathfrak{f}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial (\mathbf{x}, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{w} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

sendo  $\mathbf{w} = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}$ .

Considerando que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{f}} \circ \mathfrak{f}$ , pode-se escrever:

$$\frac{\partial (\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial (\mathbf{x}, t)} = \frac{\partial (\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, t), t)}{\partial (\bar{\mathbf{x}}, t)} \cdot \frac{\partial (\mathfrak{f}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial (\mathbf{x}, t)}, \quad (2.24)$$

que pode ser rescrita como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} & \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{w} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Dessa forma, pode-se estabelecer uma relação entre a velocidade da malha e a velocidade do ponto material:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{w} \quad (2.26)$$

Supondo agora uma grandeza física escalar, denominada de  $g(\mathbf{y}, t)$  na configuração espacial, de  $g^*(\bar{\mathbf{x}}, t)$  na configuração de referência, e  $g^{**}(\mathbf{x}, t)$  na configuração material. Pode-se escrever então:

$$g^{**}(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), t), \quad (2.27)$$

ou:

$$g^{**} = g \circ \mathbf{f}, \quad (2.28)$$

o que permite escrever o seguinte gradiente:

$$\frac{\partial g^{**}(\mathbf{x}, t)}{\partial(\mathbf{x}, t)} = \frac{\partial g(\mathbf{y}, t)}{\partial(\mathbf{y}, t)} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial(\mathbf{x}, t)}, \quad (2.29)$$

que em forma matricial é apresentado como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g^{**}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial g^{**}}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial g}{\partial t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Essa expressão nos permite escrever a derivada temporal da variável na configuração material:

$$\frac{\partial g^{**}}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}} \cdot \mathbf{u}, \quad (2.31)$$

que é justamente a derivada material de  $g$ . Para facilitar a visualização pode tirar os sobrescritos  $**$ , e então:

$$\frac{Dg}{Dt} = \left. \frac{\partial g}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} = \left. \frac{\partial g}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} + \mathbf{u} \cdot \nabla_y g. \quad (2.32)$$

Usando essa mesma metodologia pode-se escrever a transformação de  $g^*(\bar{\mathbf{x}}, t)$  para a referência material da seguinte forma:

$$g^{**} = g^* \circ \mathfrak{f}, \quad (2.33)$$

que resulta no seguinte gradiente

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g^{**}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial g^{**}}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g^*}{\partial \bar{\mathbf{x}}} & \frac{\partial g^*}{\partial t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{w} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

com a segunda coluna resultando em:

$$\frac{\partial g^{**}}{\partial t} = \frac{\partial g^*}{\partial t} + \frac{\partial g^*}{\partial \bar{x}} \cdot \mathbf{w}. \quad (2.35)$$

Utilizando-se a expressão apresentada na Equação 2.26 e substituindo-a em 2.35, resulta em:

$$\frac{\partial g^{**}}{\partial t} = \frac{\partial g^*}{\partial t} + \frac{\partial g^*}{\partial y} \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}). \quad (2.36)$$

Removendo-se os sobrescritos (\*\*\*) e (\*), chega-se a equação fundamental para os desenvolvimentos utilizando a metodologia ALE:

$$\frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial g}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_y g. \quad (2.37)$$

Utilizando-se a definição de derivada material da Equação 2.32 e comparando com a Equação 2.13, pode-se rescrever a equação da quantidade de movimento da seguinte forma:

$$\rho \left( \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \mathbf{f} \right) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (2.38)$$

Para expressar então a equação da quantidade de movimento em uma descrição Euleriana-Lagrangeana, basta substituir na Equação 2.38 a definição de derivada material apresentada na Equação 2.37, e têm-se finalmente:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_y \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (2.39)$$

A equação da continuidade independe da movimentação da malha. Dessa forma a Equação 2.4 se mantém a mesma para as análises usando uma descrição ALE. Assim, reescrevendo o conjunto de equações da DFC apresentada na Equação 2.16 para um descrição ALE, têm-se:

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_y \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ em } \Omega \\ \nabla_y \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ em } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_D \text{ em } \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{h} \text{ em } \Gamma_N, \end{cases} \quad (2.40)$$

### 2.3 Forma fraca e discretização espacial das equações governantes

Tomando-se a forma forte das equações governantes da DFC em descrição ALE, aplica-se o método de resíduos ponderados para se chegar à forma fraca e proceder com a discretização espacial. Os espaços de dimensão finita das funções tentativa que descrevem a velocidade e a pressão são chamados de  $\mathcal{S}_u$  e  $\mathcal{S}_p$  respectivamente, e definidos como:

$$\mathcal{S}_u = \left\{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u}(\cdot, t) \in \left( H^1(\Omega) \right)^{n_{sd}}, \mathbf{u} = \mathbf{u}_D \text{ em } \Gamma_D \right\} \quad (2.41)$$

e

$$\mathcal{S}_p = \left\{ p \mid p(\cdot) \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} p \, d\Omega = 0 \text{ se } \Gamma = \Gamma_N \right\}, \quad (2.42)$$

sendo  $(H^1(\Omega))^{n_{sd}}$  o espaço de funções vetoriais com derivadas de quadrado integrável sobre  $\Omega$  e  $L^2(\Omega)$  o espaço de funções escalares que são de quadrado integrável sobre  $\Omega$ .

O espaço das funções teste ou funções peso das equações da quantidade de movimento e da continuidade são definidos respectivamente por:

$$\mathcal{V}_u = \left\{ \mathbf{w} \mid \mathbf{w}(\cdot) \in \left( H^1(\Omega) \right)^{n_{sd}}, \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_D \right\}, \quad (2.43)$$

$$\mathcal{V}_p = \mathcal{S}_p. \quad (2.44)$$

Aplicando-se o método dos resíduos ponderados sobre as equações Equação 2.39 e Equação 2.4, integrando-se por partes o termo referente ao tensor de tensões de Cauchy, empregando-se o teorema da divergência e levando-se em consideração a condição de homogeneidade da função  $\mathbf{w}$  sobre o contorno  $\Gamma_D$ , obtém-se a forma fraca. A solução do problema consiste então em encontrar  $\mathbf{u} \in \mathcal{S}_u$  e  $p \in \mathcal{S}_p$ , de tal modo que  $\forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}_u$  e  $q \in \mathcal{V}_p$ , as seguintes expressões sejam verdadeiras:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\bar{x}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_y \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w}) : \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} d\Gamma_N = 0, \quad (2.45)$$

$$\int_{\Omega} q (\nabla_y \cdot \mathbf{u}) d\Omega = 0. \quad (2.46)$$

### 2.3.1 Método dos elementos finitos

Antes de prosseguir com a discretização espacial da forma fraca do conjunto de equações da Mecânica dos Fluidos, é fundamental compreender os princípios básicos do Método dos Elementos Finitos. A discretização espacial tanto pelo método dos elementos finitos, como pela técnica de análise isogeométrica (Capítulo 3), consiste em, dado um problema com domínio  $\Omega$ , dividi-lo em subdomínios  $\Omega^e$ , também chamados de elementos ou células, de forma que:

$$\Omega \approx \Omega^h = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{el}}} \Omega^e, \quad (2.47)$$

onde  $\Omega^h$  é o domínio discretizado por subdomínios, com o índice  $h$  se referindo ao tamanho representativo dos elementos, e  $n_{\text{el}}$  representando o número total de elementos.

Da mesma forma o contorno do domínio também é discretizado da seguinte forma:

$$\Gamma \approx \Gamma^h = \bigcup_{b=1}^{n_{\text{eb}}} \Gamma^b, \quad (2.48)$$

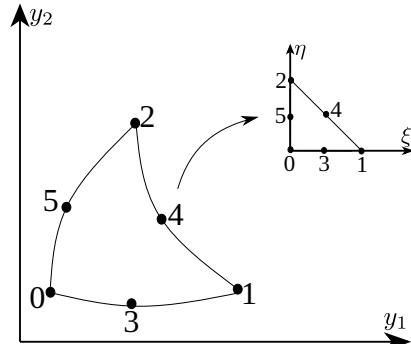
onde  $n_{\text{eb}}$  representa o número de elementos que formam o contorno.

No Método dos Elementos Finitos, cada subdomínio, denominado elemento, é composto por um conjunto de pontos, chamados nós. As variáveis de interesse do problema, que incluem a geometria na abordagem isoparamétrica, são aproximadas pela combinação linear de um número finito de funções associadas aos nós, chamadas funções de forma, multiplicadas por variáveis chamadas parâmetros nodais. As funções de forma utilizadas no Método dos Elementos Finitos satisfazem, em geral, a propriedade de partição da unidade, ou seja, a soma das funções de forma associadas a todos os nós de um elemento resulta em 1 para qualquer ponto dentro do domínio paramétrico do elemento. A técnica de elementos finitos pode ser estudada nos diversos livros disponíveis sobre o assunto, tais como Zienkiewicz, Taylor e Nithiarasu (2005a), Reddy (2006).

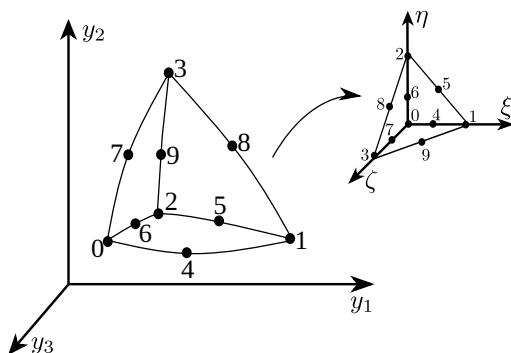
Nesse trabalho são utilizadas funções de forma quadráticas do tipo polinômios de Lagrange, sendo empregados elementos isoparamétricos triangulares para o caso 2D e tetraédricos para o caso 3D. Na Figura 7a e Figura 7b, pode-se observar os elementos finitos 2D e 3D respectivamente bem como os espaços paramétricos adimensionais adotados para definir as funções de forma.

Adotar a abordagem isoparamétrica implica que a geometria do problema é descrita também pela combinação entre funções de forma e as coordenadas nodais da malha, conforme equação abaixo:

Figura 6 – Elementos Finitos: representação espacial e paramétrica



(a) Elemento Finito 2d



(b) Elemento Finito 3d

Fonte: Elaborada pela autora

$$\mathbf{y}^h = \sum_{A=1}^{n_{\text{nos}}} \mathbf{y}_A N_A(\mathbf{y}), \quad (2.49)$$

sendo que para uma geometria tridimensional o vetor  $\mathbf{y}$  possui coordenadas  $y_1, y_2$  e  $y_3$ , as quais representam as posições físicas do domínio; O subíndice " $A$ " representa o índice dos nós da malha,  $n_{\text{nos}}$  o número total de nós e  $N$  as funções de forma da discretização.

A discretização das variáveis de interesse para DFC no contexto do método dos elementos finitos serão apresentados no seguinte capítulo (subseção 2.3.2).

### 2.3.2 Discretização Espacial

Os espaços de função tentativa para velocidade e pressão, bem como as funções teste, no contexto dos métodos dos elementos finitos, são dados pela combinação linear de parâmetros nodais com funções de forma definidas sobre cada subdomínio, atendendo à partição da unidade, de forma que o problema da dinâmica dos fluidos fica definido como: encontrar  $\mathbf{u}^h \in \mathcal{S}_u^h$  e  $p^h \in \mathcal{S}_p^h$ , de tal modo que  $\forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_u^h$  e  $q^h \in \mathcal{V}_p^h$  a seguinte expressão seja verdadeira:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{w}^h \cdot \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_y \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_N} \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{h}^h d\Gamma_N + \int_{\Omega} q^h (\nabla_y \cdot \mathbf{u}^h) d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (2.50)$$

onde:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{y}, t) = \sum_{A=1}^{n_{\text{nos}}} \mathbf{u}_A(t) N_A(\mathbf{y}), \quad (2.51)$$

$$p^h(\mathbf{y}, t) = \sum_{A=1}^{n_{\text{nos}}} p_A(t) N_A(\mathbf{y}), \quad (2.52)$$

$$\mathbf{w}^h(\mathbf{y}) = \sum_{A=1}^{n_{\text{nos}}} \mathbf{w}_A N_A(\mathbf{y}), \quad (2.53)$$

$$q^h(\mathbf{y}) = \sum_{A=1}^{n_{\text{nos}}} q_A N_A(\mathbf{y}), \quad (2.54)$$

sendo as variáveis  $\mathbf{w}_A$  e  $q_A$  arbitrárias nas aproximações.

No entanto, as formulações obtidas pelo método de Galerkin são conhecidas por apresentarem oscilações espúrias em escoamentos dominados pela convecção. Uma das formas de se lidar com esse problema é a utilização de métodos estabilizados, como *Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin* (SUPG) (Brooks; Hughes, 1982; Hughes; Tezduyar, 1984), aplicado nesse trabalho. Essa metodologia consiste em adicionar à equação da quantidade de movimento, o seu resíduo ponderado por  $\tau_{\text{SUPG}} ((\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_y \mathbf{w}^h)$ , onde  $\tau_{\text{SUPG}}$  é um parâmetro de estabilização. Do ponto de vista numérico a aplicação de sobre o termo convectivo da equação da quantidade de movimento dá origem a um termo difusivo adicional, cuja viscosidade tem magnitude  $\tau_{\text{SUPG}}$ , e é responsável por garantir a estabilidade numérica em problemas com convecção dominante.

Para os problemas de escoamentos incompressíveis aqui analisados, deve-se levar em conta que os campos de velocidade e pressão não podem ser aproximados arbitrariamente, podendo levar à ocorrência de oscilações espúrias no campo de pressão. Para evitar isso, podem ser escolhidos elementos Taylor-Hood que obedeçam, à condição de *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi* (LBB) (Brezzi; Fortin, 1991; Zienkiewicz; Taylor; Nithiarasu, 2005; Strang; Fix, 2008), ou pode-se recorrer a um método estabilizado.

Neste trabalho, para estabilização da pressão, emprega-se a técnica *Pressure Stabilization Petrov Galerkin* (PSPG) (Hughes; Franca; Balestra, 1986; Tezduyar *et al.*, 1992a). Essa técnica consiste em adicionar à equação da continuidade, o resíduo da equação da quantidade de movimento ponderada pela função  $\tau_{\text{PSPG}} \left( \frac{\nabla_y q^h}{\rho} \right)$ , onde  $\tau_{\text{PSPG}}$  é um parâmetro de estabilização. Essa estabilização cria termos dependentes da pressão na equação da continuidade, responsáveis pela flexibilização do campo de pressão e por contornar a condição LBB.

Por fim, para prover maior estabilização em problemas com formação de vórtices, adiciona-se à equação da quantidade de movimento o resíduo da equação da continuidade ponderado por  $\nu_{\text{LSIC}} \rho \left( \nabla_y \cdot \mathbf{w}^h \right)$  (Tezduyar; Osawa, 2000), sendo  $\nu_{\text{LSIC}}$  um parâmetro de estabilização. A estabilização  $\nu_{\text{LSIC}}$  dá origem a um termo do tipo mínimos quadrados, e que também introduz na formulação uma difusão artificial.

Nota-se que a consistência da formulação estabilizada é garantida, uma vez que são adicionados às equações seus resíduos ponderados. Os parâmetros de estabilização  $\tau_{\text{SUPG}}$ ,  $\tau_{\text{PSPG}}$  e  $\nu_{\text{LSIC}}$  têm função de proporcionar uma solução estável e otimizar a convergência durante o refinamento de malha. A obtenção dos parâmetros estabilizadores será discutida na subseção 2.3.3.

Por fim, o problema da dinâmica dos fluidos passa a ser a determinação de  $\mathbf{u}^h \in \mathcal{S}_u^h$  e  $p^h \in \mathcal{S}_p^h$ , de tal modo que  $\forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_u^h$  e  $q^h \in \mathcal{V}_p^h$  as seguintes expressões sejam verdadeiras:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{w}^h \cdot \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \Big|_{\bar{x}} + (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_y \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w}^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_N} \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{h}^h d\Gamma_N + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{SUPG}} ((\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_y \mathbf{w}^h) \cdot \mathbf{r}_M(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega^e} \rho \nu_{\text{LSIC}} \nabla_y \cdot \mathbf{w}^h r_C(\mathbf{u}^h) d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (2.55)$$

e

$$\int_{\Omega} q^h \nabla_y \cdot \mathbf{u}^h d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{PSPG}} \left( \frac{\nabla_y q^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_M(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega = 0, \quad (2.56)$$

onde  $\mathbf{r}_M$  e  $r_C$  são os resíduos da equação da quantidade de movimento e da equação da continuidade, respectivamente, dados por:

$$\mathbf{r}_M(\mathbf{u}^h, p^h) = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \Big|_{\bar{x}} + (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_y \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h, p^h), \quad (2.57)$$

$$r_C(\mathbf{u}^h) = \nabla_y \cdot \mathbf{u}^h. \quad (2.58)$$

A solução de modelos móveis requer a utilização de uma técnica adequada para movimentação da malha local. A técnica utilizada nesse trabalho é conhecida como MJBS (Mesh-Jacobian Based Stiffening) introduzida por Tezduyar *et al.* (1992f) e será abordada na ??.

Visto que existem funções teste separadas para a velocidade e pressão, pode-se definir dois vetores residuais correspondentes a equação da quantidade de movimento ( $\mathbf{R}_M$ ) e a equação da continuidade ( $\mathbf{R}_C$ ). Considerando a arbitrariedade de  $\mathbf{w}_A$  e  $q_A$ , têm-se:

$$\mathbf{R}_M = [(\mathbf{R}_M)_{A,i}], \quad (2.59)$$

$$\mathbf{R}_C = [(\mathbf{R}_C)_A], \quad (2.60)$$

com:

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_M)_{A,i} &= \int_{\Omega} N_A \mathbf{e}_i \cdot \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \Big|_{\bar{x}} + (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_y \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(N_A \mathbf{e}_i) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma_N} N_A \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{h}^h d\Gamma_N + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{SUPG} ((\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla_y N_A \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{r}_M(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega \\ &\quad + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \rho \nu_{LSIC} (\nabla_y \cdot N_A \mathbf{e}_i) r_C(\mathbf{u}^h) d\Omega, \end{aligned} \quad (2.61)$$

e:

$$(\mathbf{R}_C)_A = \int_{\Omega} N_A \nabla_y \cdot \mathbf{u}^h d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{PSPG} \left( \frac{\nabla_y N_A}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_M(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega, \quad (2.62)$$

com  $i = 1, 2$  para problemas 2D e  $i = 1, 3$  para problemas 3D.

Considerando  $\dot{\mathbf{U}}$ ,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{p}$  os vetores nodais dos graus de liberdade respectivos a velocidade, aceleração e pressão, pode-se escrever a forma semidiscreta do problema da DFC como: Encontrar  $\dot{\mathbf{U}}$ ,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{p}$  de maneira que

$$\mathbf{R}_M(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}, \quad (2.63)$$

e

$$\mathbf{R}_C(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}. \quad (2.64)$$

### 2.3.3 Parâmetros de estabilização

Para a utilização da metologia estabilizada da DFC, descrita nesse capítulo, a definição adequada dos parâmetros de estabilização desempenha papel fundamental na precisão e estabilidade numérica.

Desde os primeiros desenvolvimentos relacionados aos métodos estabilizados houve um amadurecimento das expressões de definição dos parâmetros  $\tau$ , as quais passam a levar em consideração formulações mais robustas, sendo adaptadas tanto para elementos de ordem elevadas, quanto para malhas mais complexas, como as usadas em análise isogeométrica.

Considerando que nesse trabalho dois tipos de aproximações espaciais são utilizadas, uma baseada no FEM e outra baseada em IGA, adotam-se os parâmetros propostos mais recentemente por Takizawa, Tezduyar e Otoguro (2018), Takizawa, Ueda e Tezduyar (2019), Otoguro, Takizawa e Tezduyar (2020), que são adequados para ambas aproximações.

Para essa opção é necessário definir-se o tensor métrico do elemento no espaço. Com essa finalidade, descreve-se inicialmente a matriz Jacobiana  $\mathbf{Q}$ , como:

$$\mathbf{Q} = \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi} \right), \quad (2.65)$$

com  $\xi$  representando as coordenadas do espaço paramétrico, com componentes  $\xi, \eta$  e  $\zeta$ .

Para que a ordem polinomial seja levada em consideração, ou, outros fatores como a dimensão do elemento no espaço paramétrico, aplica-se à  $\mathbf{Q}$ , uma matriz de transformação ( $\mathbf{D}$ ), conforme a seguinte expressão:

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}\mathbf{D}^{-1}. \quad (2.66)$$

O comprimento direcional do elemento fica definido como:

$$h_{RQD} = 2 (\mathbf{r} \mathbf{r} : \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.67)$$

o fator 2 vem de um típico espaço paramétrico, que é um quadrado ou um cubo com lado de comprimento 2.  $\mathbf{r}$  é o vetor unitário na direção do gradiente da intensidade da

velocidade e  $\mathbf{G}$  o tensor métrico do elemento, os quais são representados respectivamente como:

$$\mathbf{r} = \frac{\nabla_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|}{\|\nabla_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\|} \quad (2.68)$$

e

$$\mathbf{G} = \hat{\mathbf{Q}}^{-T} \cdot \hat{\mathbf{Q}}^{-1}. \quad (2.69)$$

Para elementos finitos com funções de forma polinomiais de Lagrange de ordens  $p_\xi$ ,  $p_\eta$  e  $p_\zeta$  nas direções paramétricas  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$ , respectivamente, com  $\xi, \eta, \zeta \in [-1, 1]$ , a matriz  $\mathbf{D}$  é definida por:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} p_\xi & 0 & 0 \\ 0 & p_\eta & 0 \\ 0 & 0 & p_\zeta \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

Em geral, se escolhe o espaço paramétrico baseado em razões como eficiência da integração numérica ou conveniência de implementação. A maioria das metodologias utilizadas para definir o comprimento do elemento não levam este fator em consideração. Para essa finalidade, em Takizawa, Ueda e Tezduyar (2019), apresenta-se a matriz de transformação ( $\mathbf{D}$ ) como:

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\xi}}}{\partial \boldsymbol{\xi}}, \quad (2.71)$$

com  $\hat{\boldsymbol{\xi}}$  chamado de espaço paramétrico de preferência.

Para elementos simplex, buscando encontrar uma expressão que leve a um comprimento de elemento que não possua variação em função da ordenação dos nós, os autores introduziram um espaço paramétrico preferido que consiste em um elemento simplex regular com distância entre vértices de 2, e chegaram a seguinte expressão para  $\mathbf{D}$  quando  $n_{sd} = 2$ :

$$\mathbf{D} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} + 1 & \sqrt{3} - 1 \\ \sqrt{3} - 1 & \sqrt{3} + 1 \end{bmatrix}, \quad (2.72)$$

e para  $n_{sd} = 3$ :

$$\mathbf{D} = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

A definição da matriz  $\mathbf{D}$  para elementos isogeométricos será descrita na subseção 3.4.1.

Além disso, nessa metodologia, o comprimento do elemento é limitado pelos mínimos e máximos valores representados abaixo:

$$h_{min} \equiv 2 \min_r \left( (\mathbf{r} : \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}} \right), \quad (2.74)$$

$$h_{max} \equiv 2 \max_r \left( (\mathbf{r} : \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}} \right), \quad (2.75)$$

que podem ser reescritos como:

$$h_{min} = 2 (\lambda_{max} \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.76)$$

$$h_{max} = 2 (\lambda_{min} \mathbf{G})^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.77)$$

onde  $\lambda_{max}$  e  $\lambda_{min}$  representam os máximos e mínimos autovalores da matriz  $\mathbf{G}$ .

Por fim, os parâmetros de estabilização são escritos como:

$$\tau_{SUPG} = \tau_{PSPG} = \left( \frac{1}{\tau_{SUGN1}^2} + \frac{1}{\tau_{SUGN2}^2} + \frac{1}{\tau_{SUGN3}^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.78)$$

$$\nu_{LSIC} = \tau_{SUPG} \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|^2, \quad (2.79)$$

onde:

$$\tau_{SUGN1}^{-2} = (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) : \mathbf{G}, \quad (2.80)$$

$$\tau_{SUGN2} = \frac{\Delta t}{2}, \quad (2.81)$$

e

$$\tau_{\text{SUGN}3}^{-1} = \nu \left( \mathbf{r}_{reg} \mathbf{r}_{reg} : \mathbf{G} + \left( 1 - \mathbf{r}_{reg}^2 \right) 4 h_{min}^{-2} \right), \quad (2.82)$$

sendo  $\mathbf{r}_{reg}$  definido como:

$$\mathbf{r}_{reg} = \frac{\nabla_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|}{\|\nabla_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\| + \varepsilon (\|\nabla_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\|)_0}, \quad (2.83)$$

com  $\varepsilon$  uma constante pequena e  $(\|\nabla_y \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\|)_0$  um valor de referência. Os termos  $\tau_{\text{SUGN}1}$ ,  $\tau_{\text{SUGN}2}$  e  $\tau_{\text{SUGN}3}$  são parâmetros correspondentes aos termos convectivos, iniciais e viscosos, respectivamente.

## 2.4 Integração Temporal

Para a integração temporal das equações governantes, utiliza-se o método  $\alpha$ -generalizado. Esse método foi proposto inicialmente por Chung e Hulbert (1993) no contexto da mecânica das estruturas, e foi estendido para o contexto da dinâmica dos fluidos computacional por Jansen, Whiting e Hulbert (2000).

Considerando que o tempo da análise do problema é definido por um intervalo de  $[0, T]$ , o qual é particionado em subintervalos  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ , com  $t_n$  e  $t_{n+1}$  os instantes anterior e atual, respectivamente. A solução do problema consiste em: conhecida a solução nos graus de liberdade nodais ( $\dot{\mathbf{U}}$ ,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{p}$ ) no passo de tempo  $n$ , encontrar a solução no passo de tempo  $n + 1$  de forma que:

$$\mathbf{R}_M(\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}, \mathbf{U}_{n+\alpha_f}, \mathbf{p}_{n+1}) = \mathbf{0}, \quad (2.84)$$

$$\mathbf{R}_C(\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}, \mathbf{U}_{n+\alpha_f}, \mathbf{p}_{n+1}) = \mathbf{0}, \quad (2.85)$$

com:

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m} = \dot{\mathbf{U}}_n + \alpha_m (\dot{\mathbf{U}}_{n+1} - \dot{\mathbf{U}}_n), \quad (2.86)$$

$$\mathbf{U}_{n+\alpha_f} = \mathbf{U}_n + \alpha_f (\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n), \quad (2.87)$$

sendo  $\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}$  e  $\mathbf{U}_{n+\alpha_f}$  valores intermediários entre  $t_n$  e  $t_{n+1}$  do vetor aceleração e velocidade. A relação entre os valores nodais de aceleração e velocidade são calculados de acordo com fórmula discreta de Newmark (ver, por exemplo, (Hughes, 1976)):

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta t \left( (1 - \gamma) \dot{\mathbf{U}}_n + \gamma \dot{\mathbf{U}}_{n+1} \right). \quad (2.88)$$

Os parâmetros que definem o instante intermediário, no qual as variáveis serão calculadas, são determinados de forma a proporcionarem estabilidade e precisão ao método. Seguindo a metodologia proposta por Jansen, Whiting e Hulbert (2000), uma precisão de segunda ordem é obtida, para casos lineares, desde que:

$$\gamma = 1/2 + \alpha_m - \alpha_f, \quad (2.89)$$

enquanto que a estabilidade do problema é incondicional com:

$$\alpha_m \geq \alpha_f \geq 1/2. \quad (2.90)$$

Para proporcionar a precisão de segunda-ordem de convergência e estabilidade da solução, pode-se calcular o parâmetro  $\gamma$  de acordo com Equação 2.89 e  $\alpha_m$ ,  $\alpha_f$ , através de (Hughes, 2000):

$$\alpha_m = \frac{1}{2} \left( \frac{3 - \rho_\infty}{1 + \rho_\infty} \right) \quad (2.91)$$

e

$$\alpha_f = \frac{1}{1 + \rho_\infty}. \quad (2.92)$$

O parâmetro  $\rho_\infty$  é conhecido como raio espectral da matriz de amplificação quando  $\Delta t_n \rightarrow \infty$ . Esse parâmetro controla a dissipação numérica em altas frequências realizada pelo processo de integração e está contido no intervalo de  $[0, 1]$ . Para  $\rho_\infty = 0$  a dissipação é máxima e para  $\rho_\infty = 1$  não há introdução de difusão numérica ao método.

Para a solução do sistema de equações não lineares compostas por Equação 2.84 e Equação 2.85 utiliza-se o método de Newton-Raphson. O método pode ser separado em duas etapas, uma etapa preditiva e outra iterativa corretiva (Bazilevs; Takizawa; Tezduyar, 2013).

Na etapa preditiva, conhecida a solução em um passo de tempo  $n$ , prediz-se a solução em  $n + 1$  com as seguintes equações:

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \dot{\mathbf{U}}_n, \quad (2.93)$$

$$\mathbf{U}_{n+1}^0 = \mathbf{U}_n, \quad (2.94)$$

$$\mathbf{p}_{n+1}^0 = \mathbf{p}_n, \quad (2.95)$$

onde o índice 0 representa a iteração de número zero.

Na etapa iterativa corretiva, itera-se sobre a Equação 2.84 e Equação 2.85 até que elas sejam satisfeitas, considerando uma tolerância prescrita, ou até que se alcance uma quantidade máxima de iterações pré-estabelecida. Essa etapa é composta por três fases. A fase 1 consiste em determinar os valores no instante intermediário para as variáveis nodais na iteração  $i$ :

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}^i = \dot{\mathbf{U}}_n + \alpha_m (\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i - \dot{\mathbf{U}}_n), \quad (2.96)$$

$$\mathbf{U}_{n+\alpha_f}^i = \mathbf{U}_n + \alpha_f (\mathbf{U}_{n+1}^i - \mathbf{U}_n), \quad (2.97)$$

$$\mathbf{p}_{n+1}^i = \mathbf{p}_{n+1}. \quad (2.98)$$

Na fase 2, com os valores intermediários das variáveis nodais resolve-se o sistema linear resultante da linearização das equações Equação 2.84 e Equação 2.85 com respeito às variáveis de interesse  $\mathbf{p}_{n+1}$  e  $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$ :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}_M}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{n+1}} \right|_i \Delta \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i + \left. \frac{\partial \mathbf{R}_M}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} \right|_i \Delta \mathbf{p}_{n+1}^i = -\mathbf{R}_M^i, \quad (2.99)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}_C}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{n+1}} \right|_i \Delta \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i + \left. \frac{\partial \mathbf{R}_C}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} \right|_i \Delta \mathbf{p}_{n+1}^i = -\mathbf{R}_C^i. \quad (2.100)$$

Por fim, na fase 3 atualiza-se a solução através das seguintes relações:

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^{i+1} = \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i + \Delta \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i, \quad (2.101)$$

$$\mathbf{U}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{U}_{n+1}^i + \gamma \Delta t \Delta \mathbf{U}_{n+1}^i, \quad (2.102)$$

$$\mathbf{p}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{p}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{p}_{n+1}^i. \quad (2.103)$$

Na utilização do método  $\alpha$ -generalizado as integrais das equações Equação 2.84 e Equação 2.85 são avaliadas no instante  $t = t_{n+\alpha_f}$ , de forma que:

$$\int_{\Omega} (\cdot) d\Omega = \int_{\Omega_{t_{n+\alpha_f}}} (\cdot) d\Omega, \quad (2.104)$$

e, por consequência:

$$\Omega_{t_{n+\alpha_f}} = \left\{ \mathbf{y}^h \mid \mathbf{y}^h(\bar{\mathbf{x}}^h, t_{(n+\alpha_f)}) = \alpha_f \mathbf{y}^h(\bar{\mathbf{x}}^h, t_{n+1}) + (1 - \alpha_f) \mathbf{y}^h(\bar{\mathbf{x}}^h, t_n) \right\}. \quad (2.105)$$

## 2.5 Implementação Computacional

O Algoritmo que descreve a implementação computacional tanto de problemas utilizando o método dos elementos finitos, quanto para problemas utilizando a análise Isogeométrica, é apresentado no Alg. 1.

---

### Algoritmo 1 Algoritmo para problemas de dinâmica dos fluidos computacional

---

- 1: **para** o passo de tempo 0 até  $T$  **faça**
- 2:      $i = 0$ ;
- 3:     Predição da solução: aplicação das Equação 2.93, Equação 2.94 e Equação 2.95;
- 4:     **enquanto** ( $\epsilon <$  tolerância) **faça**
- 5:          $i++$ ;
- 6:         Interpolação das variáveis do problema: aplicação da Equação 2.96, Equação 2.97 e Equação 2.98;
- 7:         Cálculo do incremento nas variáveis do problema:  $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$  e  $\mathbf{p}_{n+1}$  de acordo com as Equação 2.99 e Equação 2.100;
- 8:         Atualização da solução: calculadas de acordo com Equação 2.101, Equação 2.102 e Equação 2.103.
- 9:         Cálculo do erro:

$$\epsilon = \left\| \mathbf{R}_M^i \right\|_{L^2} \quad (2.106)$$

- 10:         **fim enquanto**
  - 11:         Atualização das variáveis do passo anterior;
  - 12:         **fim para**
- 

## 2.6 Verificação e Aplicações

Para a verificação dos códigos baseados no método dos elementos finitos, adotam-se 2 exemplos muito populares nas bibliografias: Escoamento sobre um cilindro e o problema da cavidade quadrada, os quais são apresentados na subseções sequentes.

### 2.6.1 Escoamento sobre um cilindro

O estudo do problema de um escoamento sobre um cilindro 2D teve como principal intuito a análise dos coeficientes aerodinâmicos medidos ao longo do tempo e verificar consequentemente se o modelo é capaz de reproduzir os fenômenos relacionados à formação e desprendimento de vórtices característicos desse problema. Para isso, diferentes números de Reynolds (Re) foram estudados,  $Re = 40$ ,  $Re = 100$  e  $Re = 1000$ , os quais são calculados de acordo com a seguinte equação:

$$Re = \frac{\rho L \| \mathbf{u}_\infty \|}{\mu} = \frac{L \| \mathbf{u}_\infty \|}{\nu}, \quad (2.107)$$

com  $L$  a dimensão característica do problema, sendo nesse caso o diâmetro do cilindro, e  $\nu$  a viscosidade cinemática do fluido.

A geometria e condições de contorno são apresentadas na Figura 8a. Como pode-se observar trata-se de um domínio retangular, parametrizado em função do diâmetro do cilindro, com um perfil constante de velocidade na entrada e condição de parede lisa nas paredes superior e inferior. No contorno denominado como *saída*, não se conhece o comportamento do escoamento, desta forma, determina-se sua posição no domínio computacional a uma distância grande o suficiente de maneira a não interferir no comportamento do escoamento.

Na Figura 8b pode-se observar a malha não-estruturada de elementos finitos utilizada para esse problema, composta por 9122 elementos triangulares quadráticos e 18508 nós. O problema foi simulado para um velocidade de entrada  $u_\infty = 1,0$ ,  $\rho = 1,0$ ,  $\Delta t = 0,05$ , e  $\rho_\infty = 0,5$ .

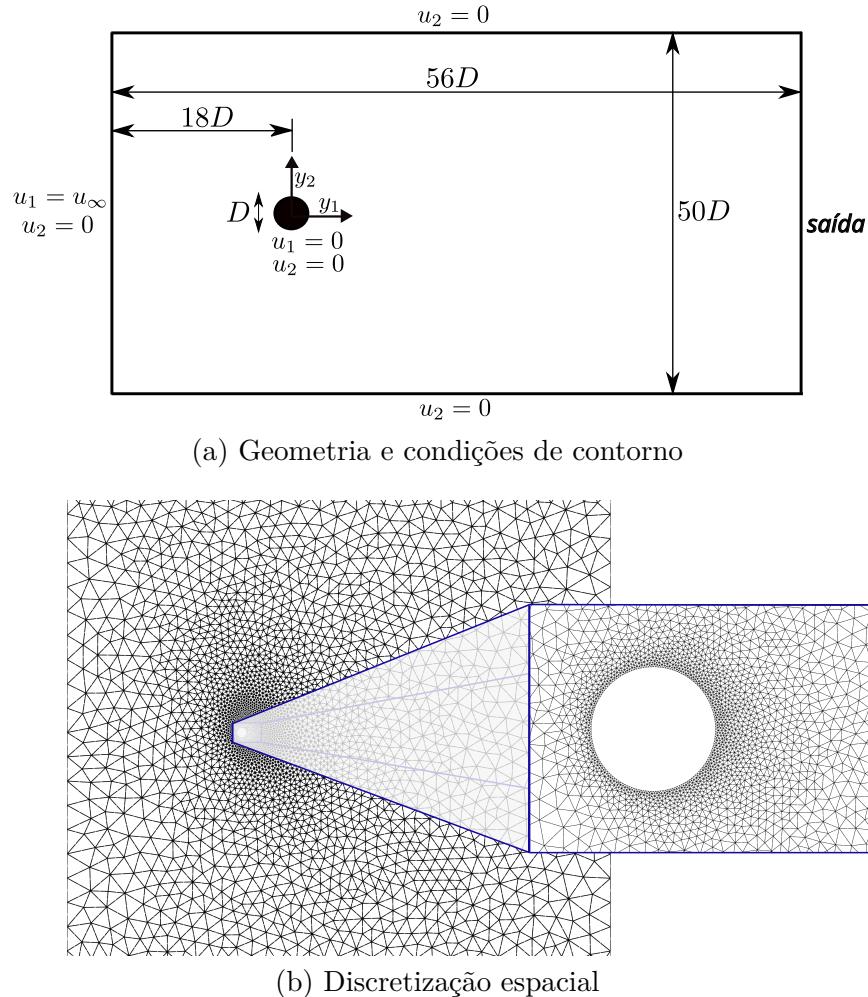
Para o cálculo dos coeficientes aerodinâmicos é necessário definir-se primeiramente as forças de arrasto - horizontal ( $F_D$ ) e de sustentação - vertical ( $F_L$ ), que são induzidas por tensões desviadoras e hidrostáticas e são calculadas pelas seguintes equações:

$$F_D = \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\sigma}_{1j} n_j d\Gamma_c, \quad (2.108)$$

$$F_L = \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\sigma}_{2j} n_j d\Gamma_c, \quad (2.109)$$

nas quais o símbolo  $\Gamma_c$  representa o contorno do cilindro e  $n_j$  é o vetor normal à esse contorno na direção  $j$ , com  $j = 1, 2$ . Os coeficientes de arrasto e sustentação são definidos respectivamente por:

Figura 7 – Cilindro: Geometria, condições de contorno e malha de elementos finitos.



Fonte: Elaborada pela autora

$$C_D = \frac{F_D}{0,5\rho\|\mathbf{u}_\infty\|^2 L}, \quad (2.110)$$

$$C_L = \frac{F_L}{0,5\rho\|\mathbf{u}_\infty\|^2 L}, \quad (2.111)$$

Devido ao fenômeno de desprendimento de vórtices que ocorre a partir de determinado número de Reynolds do escoamento, é usual determinar-se a frequência deste fenômeno através do número adimensional de Strouhal (St), dado por:

$$\text{St} = \frac{f_v L}{\|\mathbf{u}_\infty\|}, \quad (2.112)$$

com  $f_v$  sendo a frequência de desprendimento dos vórtices.

Como pode-se observar na Figura 8 para  $Re = 40$ , os coeficientes de arrasto e de sustentação, após o escoamento entrar em fase estacionária, se mantém constantes ao longo de todo o tempo de análise. Isso ocorre, visto que para Reynolds entre 5 à 50, aproximadamente, formam-se dois vórtices simétricos e estacionários na região logo após o cilindro. Posteriormente, o par de vórtices se quebra e passa existir a chamada esteira de Von Karmán, que ocorre devido à formação de vórtices de maneira alternada entre as regiões superior e inferior do cilindro, o que pode ser notado também na Figura 8 para  $Re = 100$  e  $Re = 1000$ . Os valores do coeficiente de Strouhal, para  $Re = 100$  e  $Re = 1000$ , assim como os valores médios obtidos para o coeficiente de arrasto ( $C_{Dmed}$ ) para  $Re = 40$ ,  $Re = 100$  e  $Re = 1000$  são apresentados na Tab. 1 juntamente com os valores de referência provenientes do trabalho de Wanderley e Levi (2002).

Tabela 1 – Comparaçāo entre valores obtidos e valores de referência

$Re$	$C_{Dmed}$		$St$	
	Presente estudo	Referência	Presente estudo	Referência
40	1,54	1,59	-	-
100	1,35	1,33	0,166	0,163
1000	1,52	1,51	0,238	0,235

Fonte: Elaborada pela autora.

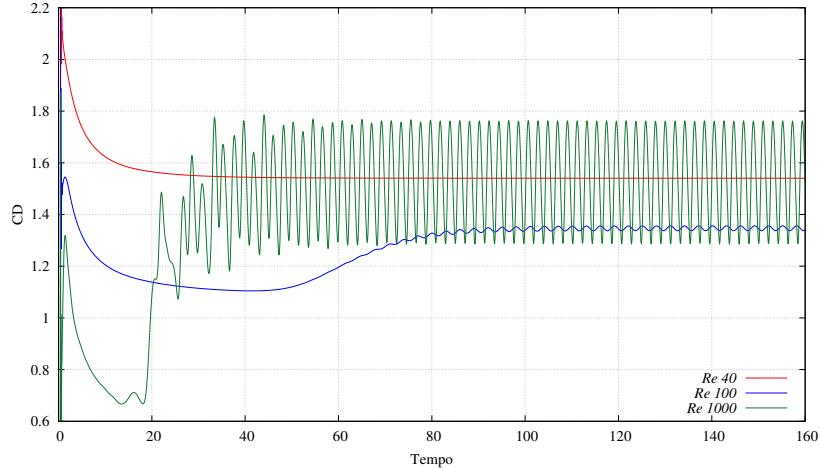
Nas Figura 9 e Figura 10 podem ser observados os campos de velocidade e pressão ao longo de um ciclo de desprendimento de vórtices para  $Re = 100$ . Pode-se notar nessas imagens, a formação e o desprendimento de vórtices na esteira de Von Karmán.

### 2.6.2 Cavidade quadrada

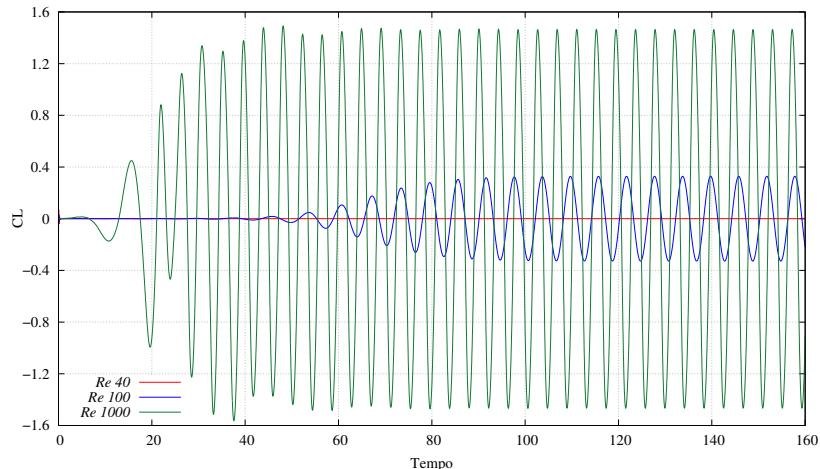
Para a verificação do código 3D utilizando elementos finitos o problema de uma cavidade quadrada com velocidade prescrita  $u_\infty$  em sua parede superior foi estudado. A geometria do problema em questão e o conjunto de suas condições de contorno são apresentadas na Figura 12a. As paredes da cavidade são rígidas, com paredes laterais e do fundo com condição de aderência, e adicionalmente, condição de simetria na direção  $y_3$ . A cavidade possui na direção  $y_3$  uma espessura de 0,03. A discretização espacial em elementos finitos utilizada é apresentada na Figura 12b, a qual consiste em 7252 elementos tetraédricos quadráticos e 14727 nós.

O problema é estudado para os números de Reynolds: 100, 400 e 1000. O número de Reynolds foi calculado de acordo com Equação 2.107, com  $L$  equivalente ao comprimento do lado da cavidade. O problema foi simulado para uma velocidade na parede superior

Figura 8 – Cilindro: Coeficientes aerodinâmicos



(a) Coeficiente de arrasto  $C_D$



(b) Coeficiente de sustentação  $C_L$

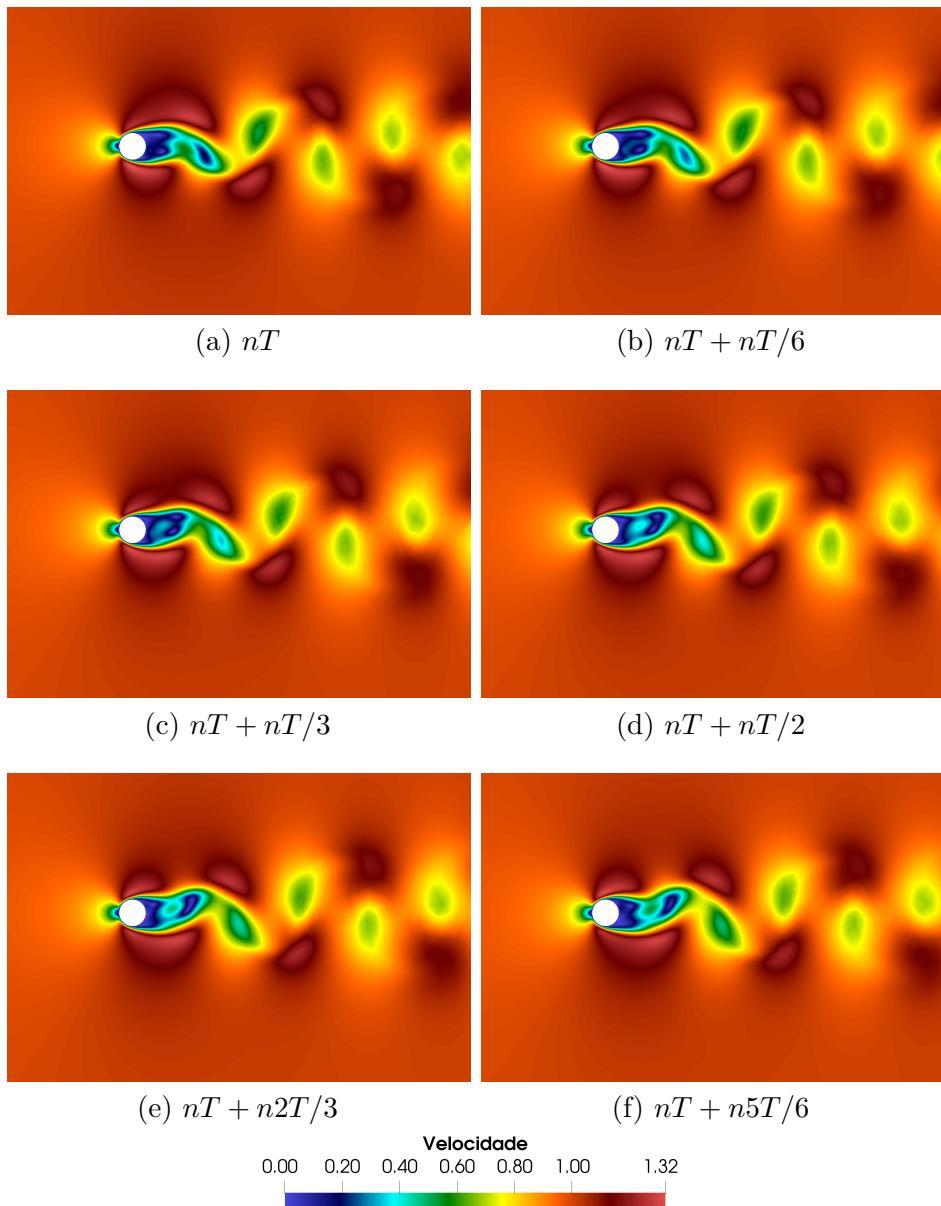
Fonte: Elaborada pela autora

de  $u_\infty = 1,0$ ,  $\rho = 1,0$ ,  $\Delta t = 0,05$ , e  $\rho_\infty = 0$ , sendo a viscosidade do fluido variada de modo a alterar o número de Reynolds. A simulação foi mantida até que se atingiu o estado estacionário de escoamento.

Os perfis de velocidade adimensionalizados ( $\mathbf{u}/u_\infty$ ) ao longo de duas linhas centrais nas direções  $y_1$  e  $y_2$  posicionadas no centro da espessura da direção  $y_3$  da cavidade são apresentados na Figura 12 e comparados com a referência de Ghia, Ghia e Shin (1982).

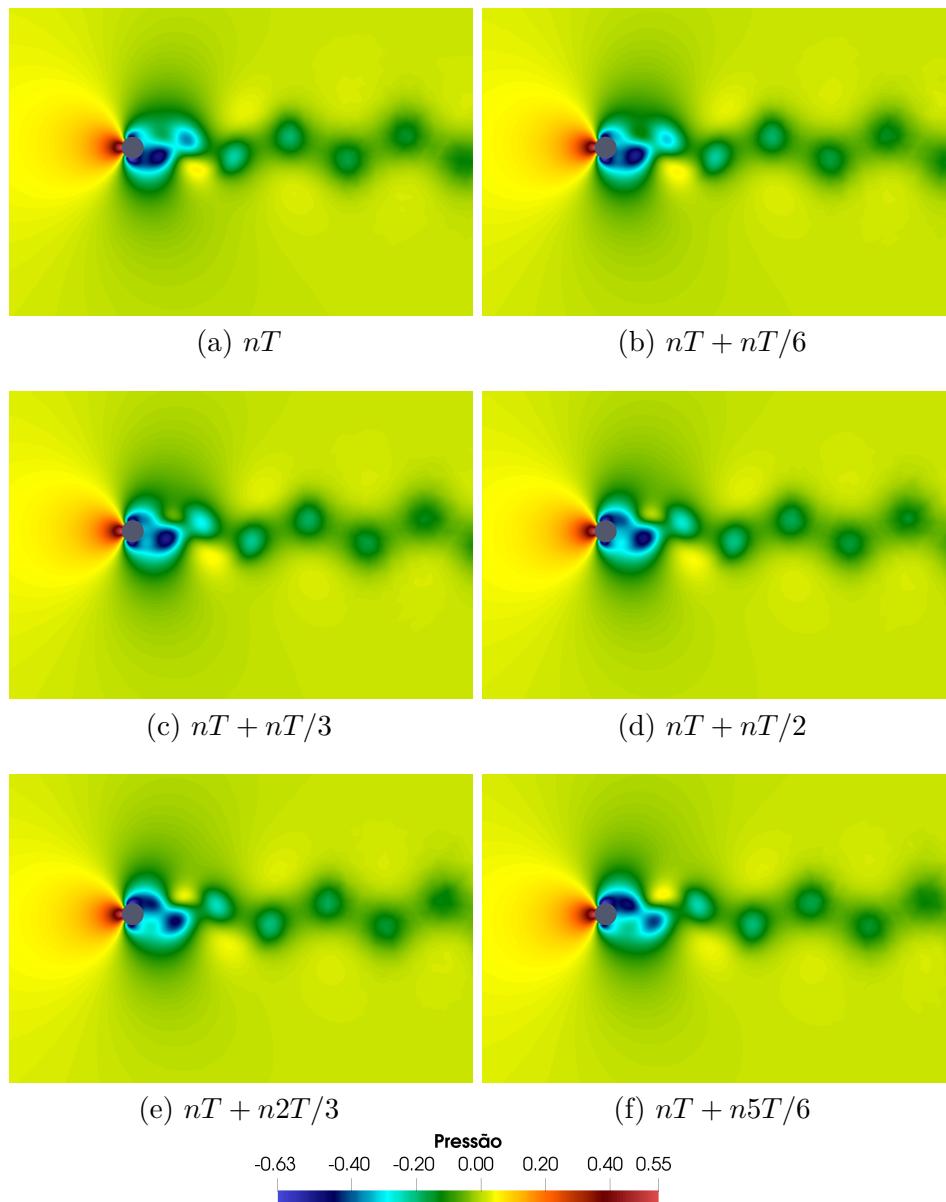
Os campos de velocidade e de pressão são apresentados nas figuras Fig 13 e 14 respectivamente. Ressalta-se que para a solução do problema, por se tratar de um problema com todos os contornos com condição de Dirichlet impostas, a pressão torna-se indefinida. Por esse motivo, prescreveu-se uma pressão  $p = p_{ref} = 0.0$  no canto superior direito da cavidade.

Figura 9 – Cilindro: Campos de velocidade para  $\text{Re} = 100$



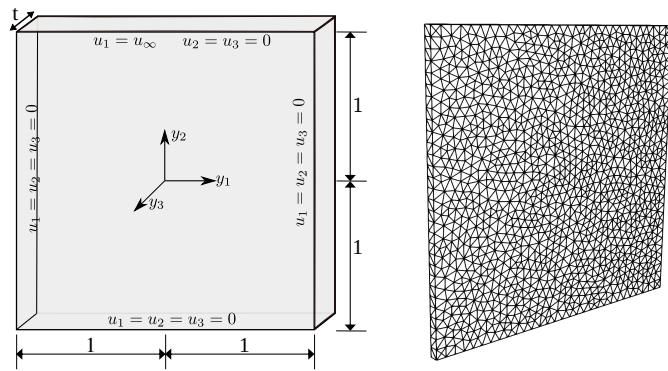
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 10 – Cilindro: Campos de pressão para  $\text{Re} = 100$



Fonte: Elaborada pela autora

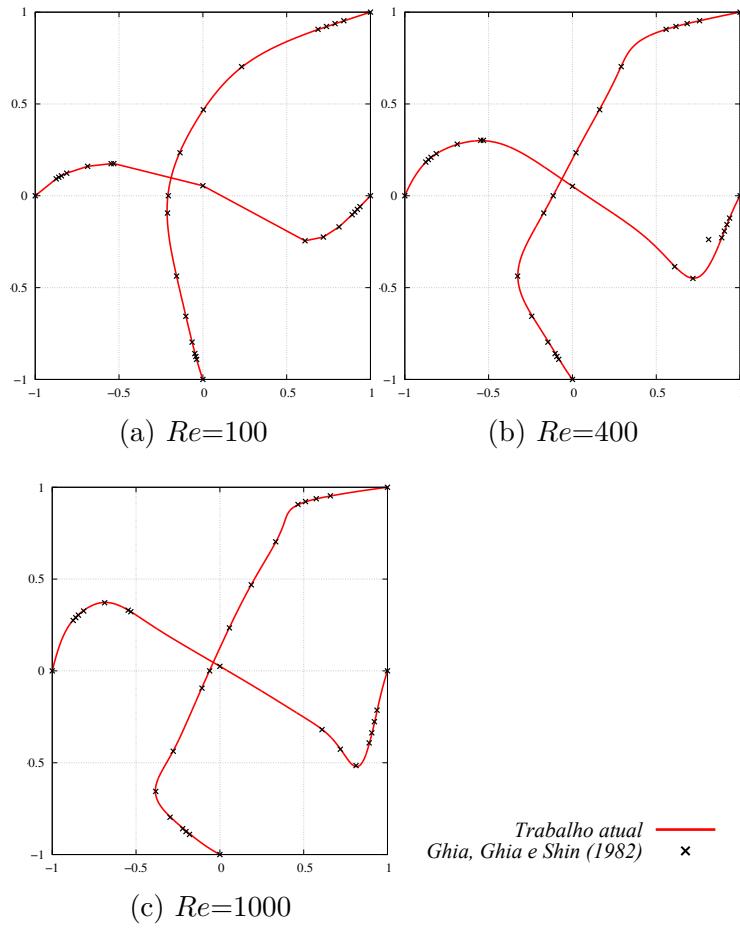
Figura 11 – Cavidade quadrada: Geometria, condições de contorno e malha de elementos finitos



(a) Geometria e condições de contorno (b) Discretização espacial.

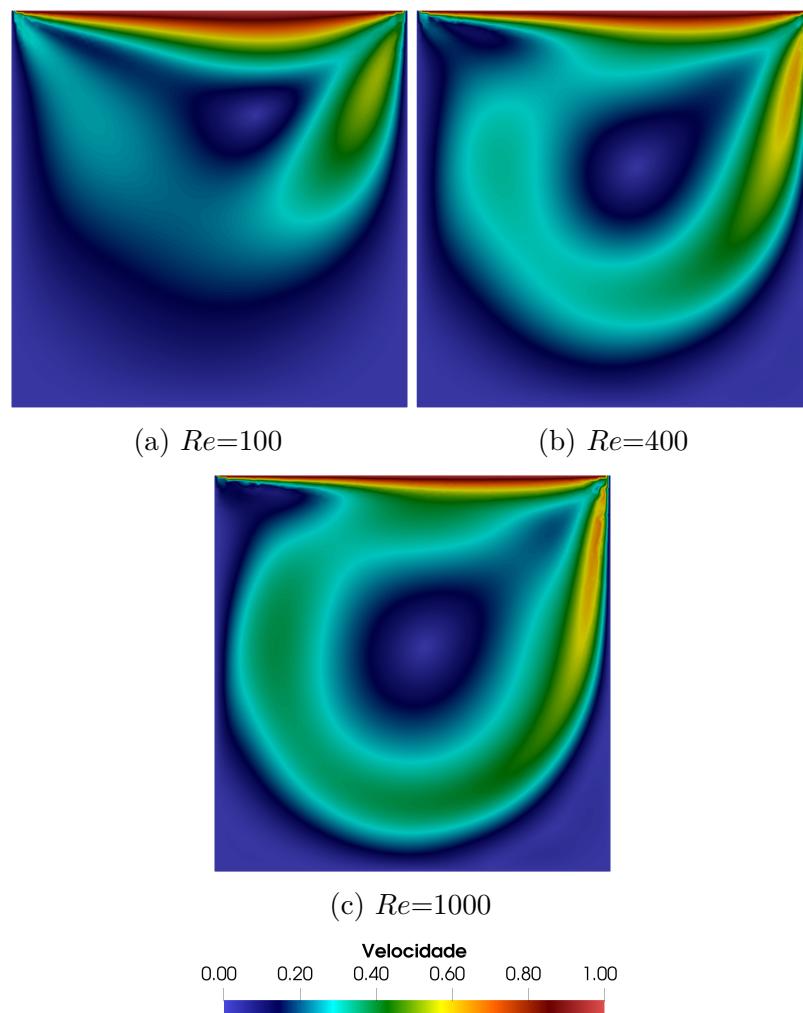
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 12 – Cavidade quadrada: Perfis de velocidade adimensionalizados nas direções  $y_1$  e  $y_2$



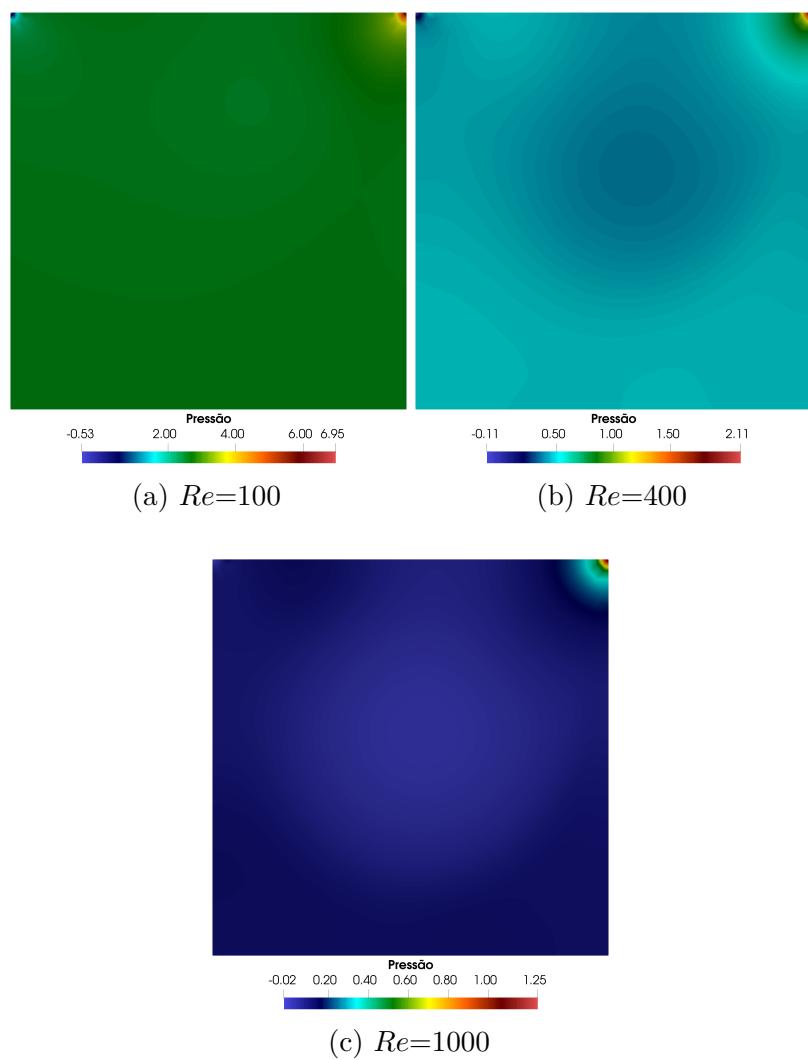
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 13 – Cavidade quadrada: Campos de velocidade - plano  $y_1y_2$



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 14 – Cavidade quadrada: Campos de pressão - plano  $y_1y_2$



Fonte: Elaborada pela autora

### 3 ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA APLICADA À DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL

A Análise Isogeométrica (IGA) é uma técnica numérica introduzida por Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005) para obtenção de soluções aproximadas de equações diferenciais. O método pode ser entendido como uma generalização do método dos elementos finitos clássicos a partir do uso de funções base especiais.

Na Análise Isogeométrica, as funções base escolhidas na discretização da geometria do problema e de suas variáveis são aquelas utilizadas nos sistemas CAD, sendo as funções do tipo NURBS as mais aplicadas (ver, por exemplo, Piegl e Tiller (1996)). O grande impulso para o desenvolvimento da técnica foi proporcionar a integração entre a engenharia de *design*, com modelos baseados em CAD, e as simulações numéricas, com modelos principalmente baseados no MEF, de forma que ambas trabalhem com somente um modelo geométrico.

A IGA apresenta vantagens significativas, uma vez que permite a representação exata de diversas geometrias comuns, como seções cônicas, círculos, cilindros, esferas e elipsoides, além de dispor de algoritmos eficientes e estáveis para a geração de objetos NURBS. As funções NURBS, em particular, possuem propriedades matemáticas que as tornam adequadas para aplicações numéricas, destacando-se a elevada suavidade, a alta capacidade de aproximação e a possibilidade de refinamento local por meio da inserção de *knots*, os quais correspondem às coordenadas do espaço paramétrico nas quais as funções são definidas.

Este capítulo apresenta uma breve introdução à Análise Isogeométrica (IGA) e sua relação com o Método dos Elementos Finitos clássico. Inicialmente, são descritas as funções base B-spline, suas principais características e a construção de geometrias associadas. Em seguida, introduzem-se as funções NURBS, destacando sua formulação e aplicações geométricas. A análise isogeométrica é então introduzida no contexto da dinâmica dos fluidos computacional, enfatizando suas particularidades quanto à discretização das variáveis e da geometria, aos métodos de integração numérica e à determinação dos parâmetros de estabilização. Por fim, são apresentados exemplos numéricos que validam a formulação proposta. As referências bibliográficas que fundamentam esta construção são Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005) e Piegl e Tiller (1996).

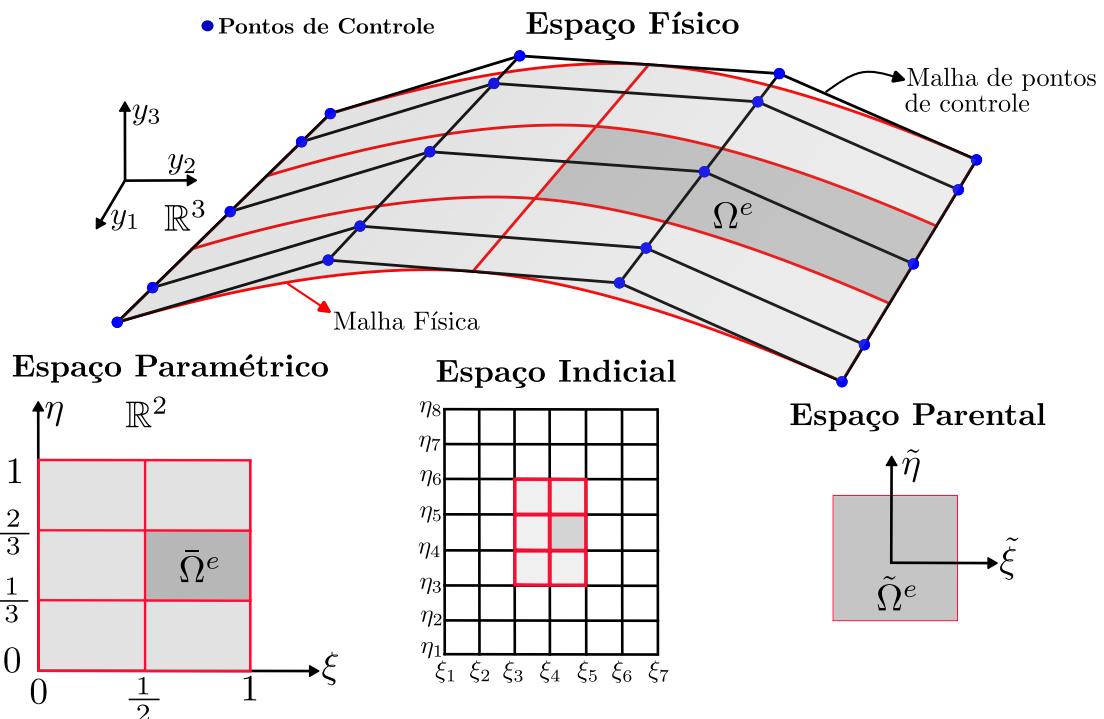
#### 3.1 Noções Gerais de IGA

No contexto do MEF isoparamétrico, a formulação é construída a partir da definição de uma malha e de seus elementos, os quais são representados tanto no espaço físico quanto no espaço paramétrico. Cada elemento é caracterizado pelas coordenadas de seus nós,

sendo os graus de liberdade do problema associados aos valores das funções de forma interpolados nesses pontos nodais.

Dentro da IGA têm-se duas noções de malha: uma malha de pontos de controle e uma malha física. A malha de pontos de controle é muito semelhante a uma malha de elementos finitos, entretanto, ela não define a geometria, ela é apenas um esqueleto que controla o formato da geometria (ver Figura 15), visto que as funções de forma baseadas em *B-Splines* não são necessariamente interpolatórias. Dessa forma, os graus de liberdade do problema são associados aos pontos de controle, cujas posições não coincidem, necessariamente, com a geometria representada.

Figura 15 – NURBS: espaço físico, espaço paramétrico, espaço indicial e espaço parental



Fonte: Elaborada pela autora

A malha física representa a geometria discretizada. Dentro da malha física podem ser definidos dois tipos de elementos, um macro-elemento, denominado de *patch*, e o *knot span*, que é o equivalente a um elemento finito e será denominado como célula ao longo desse texto. Cada *patch* é composto por um conjunto de células. Muitas geometrias simples podem ser discretizadas apenas com um *patch*, entretanto, a depender da complexidade da geometria ou de requisitos de parametrização, se torna necessário o uso de um conjunto de *patches*. As células são representações geométricas de linhas, superfícies e volumes nos espaços físicos unidimensional, bidimensional e tridimensional respectivamente.

Cada *patch* e suas respectivas células possuem uma representação no espaço paramé-

trico (Figura 15), que é o espaço onde as funções base são definidas. O espaço paramétrico, para os casos de funções univariadas, é definido por um *knot vector*, aqui denominado de vetor de *knots*, que é um conjunto de *knots* ou coordenadas paramétricas. As células são constituídas pelo espaço entre dois *knots* consecutivos. O espaço onde se representam todas as células, inclusive as nulas (quando mais de um *knot* ocupa a mesma posição), é chamado de espaço indicial.

Por fim, na análise isogeométrica conta-se ainda com o espaço parental, que é o espaço de integração numérica das funções base, em geral, definido de forma adimensional  $[-1, 1]$  dentro de uma célula. Na Figura 15 pode-se observar os espaços relatados para uma superfície 3D construída por funções base quadráticas e apenas um *patch*.

### 3.2 *B-Splines*

Para a construção de uma geometria NURBS, é fundamental compreender as funções base *B-splines* e suas particularidades. Essas funções servem como o ponto de partida para a definição de curvas, superfícies e sólidos NURBS, sendo essenciais para o entendimento da flexibilidade e controle geométrico oferecido por esse modelo. As *B-splines* são funções construídas através de um vetor de coordenadas paramétricas (vetor de *knots*) e que dependem de um conjunto de pontos de controle, sendo esses elementos responsáveis por estabelecer a forma geométrica e o grau de continuidade da curva ou superfície.

#### 3.2.1 Vetor de *knots*

As funções *B-Splines*, utilizadas na construção das NURBS, são definidas em um espaço paramétrico que é comum a um conjunto de células ou *patch*. O espaço paramétrico unidimensional é construído através de um vetor de *knots*, que consiste em um conjunto não decrescente de coordenadas paramétricas, definido como:  $\Xi = [\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n+p+1}]$ , sendo que  $\xi_i \in \mathbb{R}$  e representa a  $i$ -ésima coordenada paramétrica com  $i = 0, 1, \dots, n + p + 1$ , e  $p$  corresponde ao grau polinomial das funções. O parâmetro  $n$  equivale ao índice da última função base nesta direção paramétrica, sendo o conjunto de funções base indexado de 0 a  $n$ , totalizando  $n + 1$  funções. Os *knot spans*, ou intervalo entre *knots*, definem células no espaço paramétrico, cujos contornos são mapeados pelas funções base para formar a malha no espaço físico.

O vetor de *knots* pode ser classificado como uniforme, quando as coordenadas paramétricas são igualmente espaçadas, e como não-uniformes, caso contrário. A multiplicidade de um *knot* pode ser superior a um, influenciando diretamente na continuidade e na forma das funções base, conforme será visto posteriormente. Os vetores de *knots* conhecidos como abertos, são frequentemente utilizados nas literaturas de CAD, e caracterizam-se por ter a primeira e a última coordenada paramétrica repetidas  $p + 1$  vezes. Este fato garante

que as funções sejam interpolatórias nos extremos do espaço paramétrico e nas bordas entre *patches*, proporcionando, por exemplo, a homogeneidade com respeito às condições de contorno essenciais.

### 3.2.2 Funções base e suas derivadas

As funções base *B-Splines* ( $N^b$ ) univariadas são definidas a partir de um vetor de *knots* unidimensional, sendo para  $p = 0$ , escritas através da seguinte relação:

$$N_{i,0}^b(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1}, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (3.1)$$

enquanto que para funções com  $p \geq 1$  são definidas como:

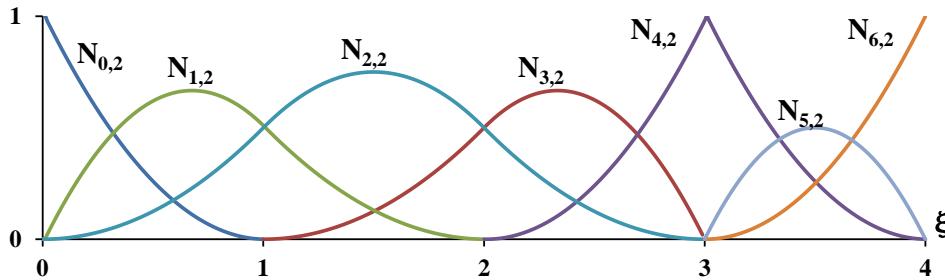
$$N_{i,p}^b(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}^b(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}^b(\xi), \quad (3.2)$$

com  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Essas equações são conhecidas como a fórmula recursiva de *Cox-de Boor* (COX, 1972; de Boor, 1972). Para funções *B-Splines* de grau  $p = 0$  ou  $p = 1$ , obtém-se, respectivamente, as mesmas funções constantes e lineares por partes utilizadas no método dos elementos finitos clássico.

Na Figura 16, pode-se observar funções *B-Splines* quadráticas construídas sobre o vetor de *knots* não-uniforme aberto  $\Xi = [0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4]$ . A figura evidencia que, devido à repetição de  $p + 1$  vezes dos *knots* nas extremidades do vetor, as funções base se tornam interpolatórias nesses pontos. Ademais, a presença de um *knot* com multiplicidade 2 em  $\xi = 3$  reduz a regularidade da função base nesse ponto, resultando na descontinuidade da sua derivada. Em termos gerais, a continuidade de uma função *B-Spline* em uma coordenada paramétrica é dada por  $C^{p-m}$ , onde  $m$  é a multiplicidade do *knot*.

Figura 16 – *B-Splines quadráticas*



Fonte: Elaborada pela autora

As principais propriedades das funções *B-Splines* são:

- **Partição da Unidade:**  $\sum_{i=0}^n N_{i,p}^b(\xi) = 1$ ;
- **Positividade:** Todas as funções base são positivas, ou seja,  $N_{i,p}^b \geq 0, \forall \xi$ ;
- **Suavidade:** função de ordem  $p$  é, em geral,  $p - 1$  vezes continua no contorno das células;
- **Suporte Compacto:** O suporte de cada  $N_{i,p}^b$  está contido no intervalo  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ , ou seja, em cada célula, apenas  $p + 1$  funções são não nulas.

A derivada de uma função de forma *B-Spline* pode ser calculada recursivamente em termos de funções base de ordem menor. Considerando uma função de ordem  $p$  e vetor de *knots*  $\Xi$ , a derivada da  $i$ -ésima função de forma pode ser escrita como:

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}^b(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}^b(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}^b(\xi). \quad (3.3)$$

Essa expressão pode ser generalizada para derivadas de ordem superior através de:

$$\frac{d^k}{d\xi^k} N_{i,p}^b(\xi) = \frac{p!}{(p-k)!} \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} N_{i+j,p-k}^b(\xi), \quad (3.4)$$

sendo  $k$  a  $k$ -ésima derivada da função  $N_{i,p}^b(\xi)$  e:

$$\alpha_{0,0} = 1, \quad (3.5)$$

$$\alpha_{k,0} = \frac{\alpha_{k-1,0}}{\xi_{i+p-k+1} - \xi_i}, \quad (3.6)$$

$$\alpha_{k,j} = \frac{\alpha_{k-1,j} - \alpha_{k-1,j-1}}{\xi_{i+p+j-k+1} - \xi_{i+j}} \quad j = 1, \dots, k-1, \quad (3.7)$$

$$\alpha_{k,k} = \frac{-\alpha_{k-1,k-1}}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+k}}. \quad (3.8)$$

Algoritmos eficientes para a determinação das funções de forma *B-Splines* e de suas derivadas podem ser encontradas em Piegl e Tiller (1996).

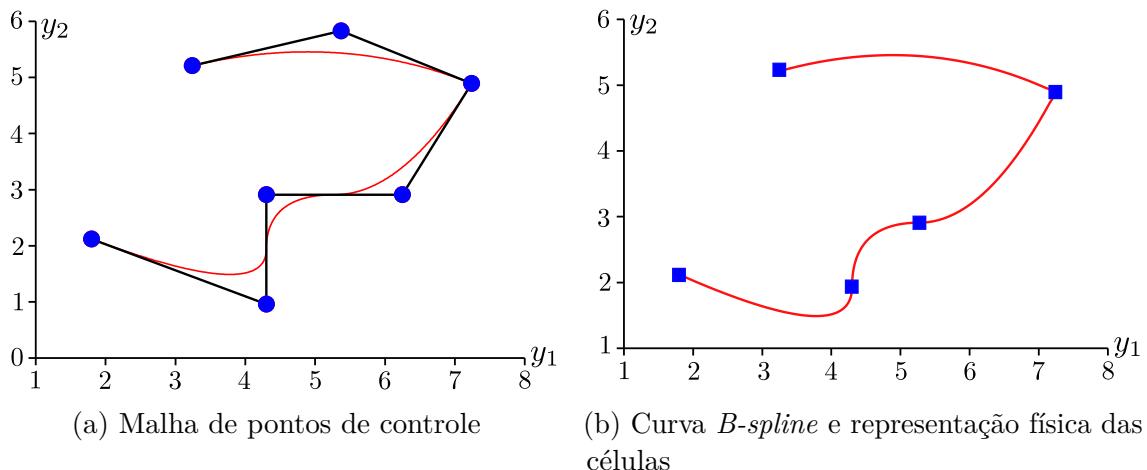
### 3.2.3 Geometrias *B-Splines*

Uma curva *B-Spline* é construída a partir da combinação linear entre funções base e um conjunto de pontos de controle. Considerando um conjunto de  $n + 1$  funções base  $N_{i,p}^b$  e respectivos pontos de controle  $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{n_{sd}}$  com  $i = 0, 1, \dots, n$ , uma curva polinomial por partes *B-Spline* univariada é definida como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{y}(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}^b(\xi) \mathbf{B}_i, \quad (3.9)$$

com  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$  as componentes do vetor de coordenadas físicas  $\mathbf{y}$ . Utilizando as funções *B-Splines* apresentadas na Figura 16 e uma malha de  $n + 1$  pontos de controle, obtém-se a curva apresentada na Figura 18a. Na Figura 18b pode-se observar as células físicas equivalentes a essa combinação.

Figura 17 – Curva *B-Spline*



Fonte: Elaborada pela autora

A partir da Figura 18a pode-se constatar que a curva *B-Spline* interpola o primeiro e o último ponto de controle, que é uma característica das curvas construídas com funções descritas a partir de vetores de *knots* abertos. Adicionalmente nota-se que, devido à multiplicidade do *knot* de coordenada paramétrica  $\xi = 3$ , existe um ponto de controle intermediário também interpolando a curva. Coordenadas paramétricas com multiplicidade maior ou igual ao grau polinomial  $p$  resultam, por definição, em interpolação dos pontos de controle associados. Além disso, a curva possui continuidade  $C^{p-1} = C^1$  em todos os lugares, exceto em  $\xi = 3$ , onde equivale a  $C^{p-2} = C^0$ , que trata-se de uma propriedade herdada das funções base.

Conforme observado nas figuras: Figura 18a e Figura 18b, muitas das características de curvas *B-Splines* são consequências das propriedades das funções *B-splines*. Outra

importante propriedade dessas curvas é a Transformação Afim, que significa que uma transformação afim de uma curva B-spline é obtida aplicando a transformação diretamente aos pontos de controle. Além disso, devido ao suporte compacto das funções base, as curvas *B-Splines* possuem característica denominada de *localidade*, que significa que, movendo-se um ponto de controle, afeta-se não mais do que  $p+1$  células na curva. Outras propriedades matemáticas das curvas *B-Splines* podem ser consultadas em detalhes em Piegl e Tiller (1996).

Uma superfície *B-spline* é obtida analogamente à curva *B-spline*. Dado uma rede de pontos de controle  $\mathbf{B}_{i,j} \in \mathbb{R}^{n_{sd}}$  com  $i = 0, 1, \dots, n$  e  $j = 0, 1, \dots, m$ , e vetores de *knots*  $\Xi = [\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{p+n+1}]$ ,  $\mathcal{H} = [\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{q+m+1}]$ , a superfície é obtida através do produto tensorial entre  $(n+1)$  funções univariadas  $N_{i,p}^b$  e  $(m+1)$  funções univariadas  $M_{j,q}^b$  da seguinte forma:

$$\mathbf{S} = \mathbf{y}(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}^b(\xi) M_{j,q}^b(\eta) \mathbf{B}_{i,j}, \quad (3.10)$$

onde  $q$  representa o grau das  $m+1$  funções na direção paramétrica  $\eta$ . Muitas das propriedades das superfícies *B-Splines* são resultado da natureza do produto tensorial que as geram. A base de funções apresenta propriedade de positividade e formam uma partição de unidade, de forma que:  $\forall(\xi, \eta) \in [\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{p+n+1}] \times [\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{q+m+1}]$ :

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}^b(\xi) M_{j,q}^b(\eta) = \left( \sum_{i=0}^n N_{i,p}^b(\xi) \right) \left( \sum_{j=0}^m M_{j,q}^b(\eta) \right) = 1. \quad (3.11)$$

O suporte, por exemplo, de uma função bivariada  $\hat{N}_{i,j:p,q}^b(\xi, \eta) = N_{i,p}^b(\xi) M_{j,q}^b(\eta)$  é equivalente à:  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+q+1}]$ .

Por fim, um sólido *B-Spline* é obtido através do produto tensorial entre funções univariadas  $N_{i,p}^b$ ,  $M_{j,q}^b$ ,  $L_{k,r}^b$ , construídas sobre os vetores de *knots*  $\Xi = [\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{p+n+1}]$ ,  $\mathcal{H} = [\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{q+m+1}]$  e  $\mathcal{Z} = [\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{r+l+1}]$  respectivamente, e um conjunto de pontos de controle  $\mathbf{B}_{i,j,k} \in \mathbb{R}^{n_{sd}}$  com  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ ,  $k = 0, 1, \dots, l$ , da seguinte forma:

$$\mathbf{T} = \mathbf{y}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l N_{i,p}^b(\xi) M_{j,q}^b(\eta) L_{k,r}^b(\zeta) \mathbf{B}_{i,j,k}, \quad (3.12)$$

na qual  $r$  representa o grau das  $l+1$  funções base na direção paramétrica  $\zeta$ . As propriedades de um sólido *B-Spline*, correspondem às generalizações trivariadas das propriedades das superfícies *B-Spline*. Além disso, o suporte de uma função trivariada  $\hat{N}_{i,j,k:p,q,r}^b(\xi, \eta, \zeta) = N_{i,p}^b(\xi) M_{j,q}^b(\eta) L_{k,r}^b(\zeta)$  está contido no intervalo  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+q+1}] \times [\zeta_k, \zeta_{k+r+1}]$ .

### 3.2.4 Refinamento

Um dos aspectos mais relevantes das *B-splines* é a flexibilidade na forma de enriquecimento da base, permitindo aprimorar sua representação sem alterar a geometria subjacente nem sua parametrização. Dentro os principais procedimentos utilizados, destacam-se: a inserção de *knots* (ou refinamento  $h$ ), que consiste na subdivisão da malha; a elevação de grau (ou refinamento  $p$ ), que aumenta a ordem polinomial das funções base; o refinamento  $k$ , que promove simultaneamente um aumento da ordem e da continuidade entre células; e, por fim, o refinamento  $hpk$ , que combina de forma coordenada as três estratégias anteriores, oferecendo maior controle e eficiência na representação da geometria e na solução numérica de problemas.

Neste trabalho, será adotado na geração das geometrias o refinamento  $h$ , baseado na inserção de *knots*. Por essa razão, somente essa estratégia será abordada ao longo desse texto.

O enriquecimento das funções base utilizando a inserção de *knots* é realizado sem que se altere uma curva geometricamente ou parametricamente. Para essa finalidade, considerando o vetor de *knots*  $\Xi = [\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n+p+1}]$ , será introduzido o conceito de vetor de *knots* estendido, o qual compreende em:  $\bar{\Xi} = [\bar{\xi}_0 = \xi_0, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_{n+m+p+1} = \xi_{n+p+1}]$ . As  $(n + m + 1)$  novas funções de base *B-Splines* são determinadas através da Equação 3.1 e Equação 3.2, aplicando-as ao vetor de *knots*  $\bar{\Xi}$ . Os  $(n + m + 1)$  novos pontos de controle  $\bar{\mathcal{B}} = [\bar{\mathbf{B}}_0, \bar{\mathbf{B}}_1, \dots, \bar{\mathbf{B}}_{n+m}]^T$  são obtidos através da combinação linear dos  $(n + 1)$  pontos de controle originais,  $\mathcal{B} = [\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n]^T$ , por:

$$\bar{\mathcal{B}} = \mathbf{T}^p \mathcal{B}, \quad (3.13)$$

, com:

$$\mathbf{T}_{ij}^0 = \begin{cases} 1 & \text{se } \bar{\xi}_i \in [\xi_j, \xi_{j+1}) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{T}_{ij}^{q+1} = \frac{\bar{\xi}_{i+q} - \xi_j}{\xi_{j+q} - \xi_j} \mathbf{T}_{ij}^q + \frac{\xi_{j+q+1} - \bar{\xi}_{i+q}}{\xi_{j+q+1} - \xi_{j+1}} \mathbf{T}_{ij+1}^q \text{ com } q = 0, 1, 2, \dots, p-1, \quad (3.15)$$

sendo  $i = 0, 1, \dots, (n + m)$  e  $j = 0, 1, \dots, n$ .

Considerando uma curva quadrática *B-spline* construída sobre um vetor de *knots* aberto  $\Xi = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$  apresentada na Figura 19a juntamente com sua rede de pontos de controle. Essa curva, possui apenas uma célula no espaço físico, conforme pode ser

observado na Figura 19c, e 3 funções base no espaço paramétrico (Figura 19e). Ao realizar-se a inserção de um *knot*,  $\xi = 1/2$ , o vetor de *knots* estendido fica definido como:  $\bar{\Xi} = [0, 0, 0, 1/2, 1, 1, 1]$ . Aplicando-se as Equação 3.1 e Equação 3.2 à esse vetor de coordenadas paramétricas, obtém-se as 4 funções base apresentadas na Figura 19f definidas sobre 2 células do espaço paramétrico. Após o emprego do refinamento  $h$ , a geometria da curva é preservada. No entanto, como ilustrado na Figura 19d, uma nova célula física é inserida, além de que, de acordo com a Figura 19b, a malha de pontos de controle é modificada, com o acréscimo de um novo ponto e o reajuste de suas posições.

Para fins práticos, o processo de refinamento consiste na inserção consecutiva de coordenadas paramétricas ao vetor de (*knots*) até que se alcance a discretização desejada. Um algoritmo mais eficiente para realizar esse procedimento de refinamento pode ser encontrado em Piegl e Tiller (1996). Esse procedimento pode ser aplicado analogamente à superfícies e sólidos, aplicando-se a inserção de *knots* nas direções paramétricas desejadas.

### 3.3 NURBS

Uma geometria NURBS no  $\mathbb{R}^{n_{sd}}$  pode ser entendida, do ponto de vista geométrico, como a transformação projetiva de uma geometria *B-Spline* no  $\mathbb{R}^{n_{sd}+1}$ . Nesse contexto, geometrias cônicas podem ser construídas exatamente através de curvas quadráticas por partes. Na Figura 20b, apresenta-se uma curva NURBS  $\mathbf{C}(\xi)$  no  $\mathbb{R}^2$ , que representa de forma exata uma circunferência, a qual foi obtida a partir da transformação projetiva de uma curva quadrática por partes *B-Spline* ( $\mathbf{C}^w(\xi)$ ) no  $\mathbb{R}^3$ . A transformação é realizada através da projeção em um plano  $y_3 = 1$  de cada ponto da curva projetiva ( $\mathbf{C}^w(\xi)$ ) através de um raio que passa pela origem.

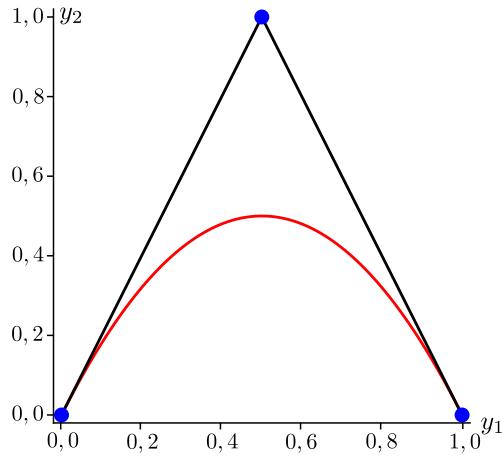
O mesmo procedimento de transformação pode ser realizado para obtenção dos pontos de controle NURBS (Figura 20a) a partir de pontos de controle projetivos ( $\mathbf{B}_i^w$ ), usando a seguinte relação:

$$(\mathbf{B}_i)_j = (\mathbf{B}_i^w)_j / w_i, \quad j = 1, \dots, n_{sd}, \quad (3.16)$$

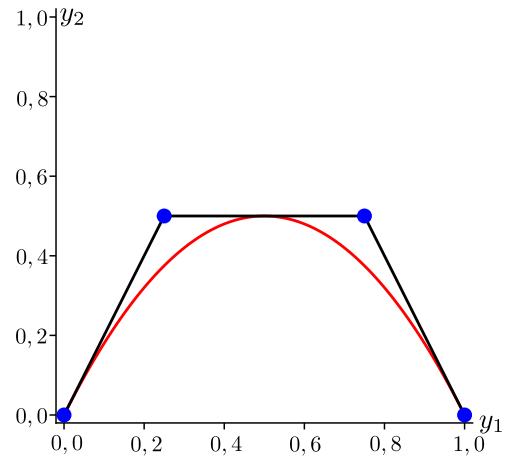
$$w_i = (\mathbf{B}_i^w)_{n_{sd}+1}, \quad (3.17)$$

com  $(\mathbf{B}_i)_j$  o j-ésimo componente do vetor  $\mathbf{B}_i$  e  $w_i$  refere-se ao i-ésimo peso, que consiste na coordenada  $y_3$  dos pontos de controle projetivos para o exemplo citado.

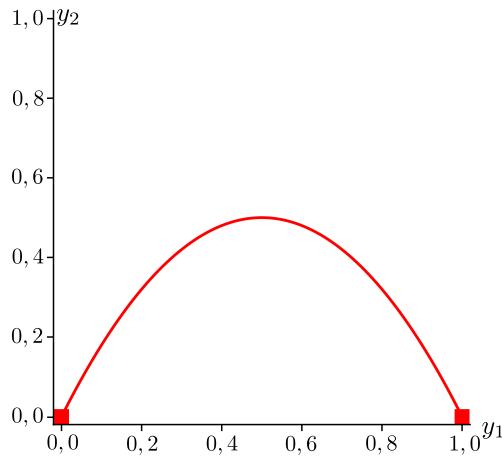
Para a aplicação dessa mesma transformação para cada ponto da curva, será utilizado um conceito de função peso, dada por:

Figura 18 – Refinamento  $h$  para um curva  $B$ -Spline

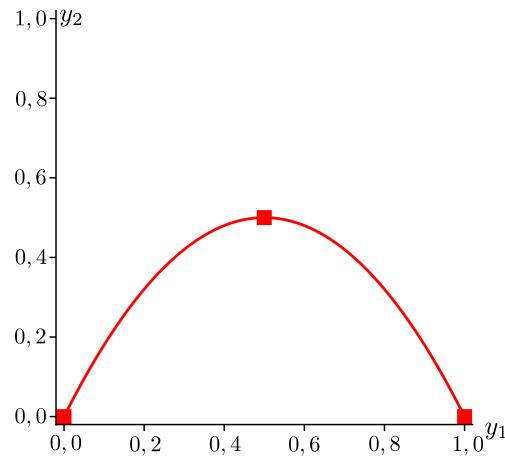
(a) Curva original e pontos de controle



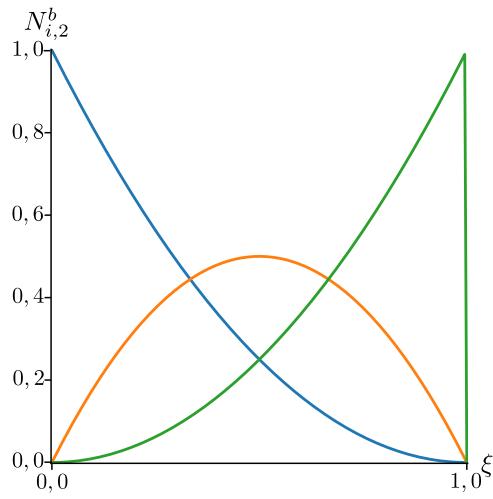
(b) Curva refinada e pontos de controle



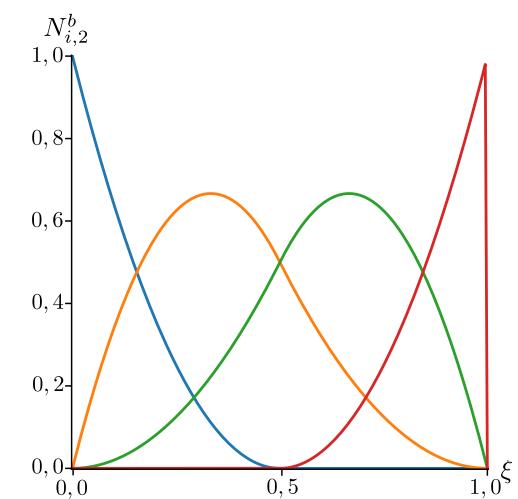
(c) Célula curva original



(d) Células curva refinada

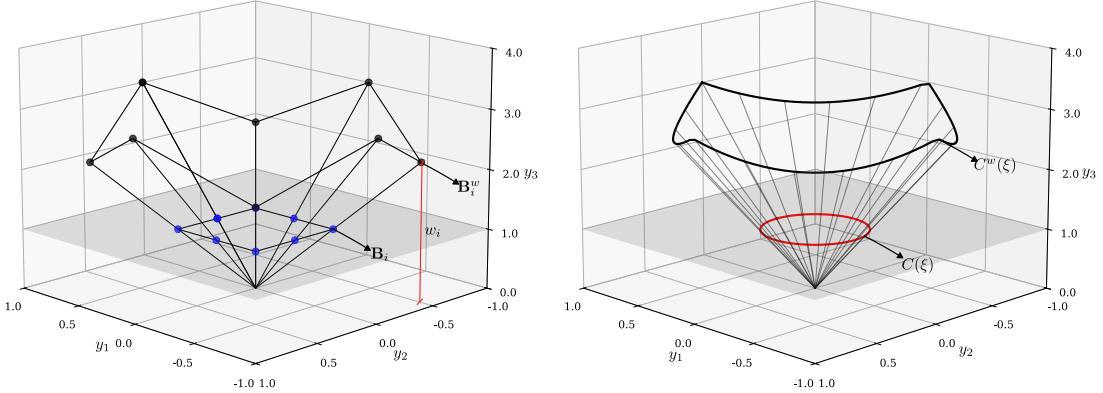


(e) Funções base originais

(f) Funções base após refinamento  $h$  refinada

Fonte: Elaborada pela autora

Figura 19 – Projeção transformativa de entidade *B-Spline*



(a) Projeção transformativa malha de pontos de controle      (b) Projeção transformativa *B-Spline*

Fonte: Elaborada pela autora

$$W(\xi) = \sum_{\hat{i}=0}^n N_{\hat{i},p}^b(\xi) w_{\hat{i}}, \quad (3.18)$$

e a curva NURBS pode ser definida como:

$$(\mathbf{C}(\xi))_j = (\mathbf{C}^w(\xi))_j / W(\xi), \quad j = 1, \dots, n_{sd}. \quad (3.19)$$

Tanto  $\mathbf{C}^w$  como  $W(\xi)$  são funções polinomiais por partes, dessa forma,  $\mathbf{C}(\xi)$  é uma função racional por partes.

### 3.3.1 Funções base NURBS e suas derivadas

Matematicamente, uma função NURBS é obtida pela racionalização de uma função *B-Spline*. A racionalização dessa função ocorre através da razão entre dois polinômios. Uma função racional NURBS ( $R$ ) é construída através da seguinte expressão:

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}^b(\xi) w_i}{\sum_{\hat{i}=0}^n N_{\hat{i},p}^b(\xi) w_{\hat{i}}}. \quad (3.20)$$

com  $w_i$  e  $w_{\hat{i}} \in \mathbb{R}$ , sendo  $i = \hat{i} = 0, 1, \dots, n$ .

A derivada de uma função  $R_{i,p}$  é obtida aplicando simplesmente a regra do quociente à expressão da Equação 3.20:

$$\frac{d}{d\xi} R_{i,p}(\xi) = w_i \frac{W(\xi) (N_{i,p}^b)'(\xi) - W'(\xi) N_{i,p}^b(\xi)}{(W(\xi))^2}, \quad (3.21)$$

com:

$$(N_{i,p}^b)'(\xi) \equiv \frac{d}{d\xi} N_{i,p}^b(\xi), \quad (3.22)$$

e:

$$W'(\xi) = \sum_{\hat{i}=0}^n (N_{\hat{i},p}^b)'(\xi) w_{\hat{i}}. \quad (3.23)$$

A  $k$ -ésima derivada de  $R_{i,p}$  é obtida em termos de derivadas de menores ordem, através da seguinte expressão:

$$\frac{d^k}{d\xi^k} R_{i,p}(\xi) = \frac{A_i^{(k)}(\xi) - \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} W^{(j)}(\xi) \frac{d^{(k-j)}}{d\xi^{(k-j)}} R_{i,p}(\xi)}{W(\xi)} \quad (3.24)$$

com:

$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}, \quad (3.25)$$

$$W^{(j)}(\xi) = \frac{d^j}{d\xi^j} W(\xi), \quad (3.26)$$

e:

$$A_i^{(k)}(\xi) = w_i \frac{d^k}{d\xi^k} N_{i,p}^b(\xi) \text{ sem soma em } i. \quad (3.27)$$

### 3.3.2 Geometria NURBS

Uma curva NURBS é obtida através da combinação linear entre as funções base NURBS e um conjunto de pontos de controle, conforme expresso pela equação abaixo:

$$\mathbf{C} = \mathbf{y}(\xi) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(\xi) \mathbf{B}_i, \quad (3.28)$$

cujos pontos de controle e pesos são escolhidos criteriosamente de forma a obter-se a geometria desejada.

Analogamente uma superfície NURBS é obtida através das seguintes relações:

$$R_{i,j:p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}^b(\xi) M_{j,q}^b(\eta) w_{i,j}}{\sum_{\hat{i}=0}^n \sum_{\hat{j}=0}^m N_{\hat{i},p}^b(\xi) M_{\hat{j},q}^b(\eta) w_{\hat{i},\hat{j}}}, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{y}(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j:p,q}(\xi, \eta) \mathbf{B}_{i,j}, \quad (3.30)$$

com  $w_{i,j}$  e  $w_{\hat{i},\hat{j}}$   $\in \mathbb{R}$ , sendo  $i = \hat{i} = 0, 1, \dots, n$  e  $j = \hat{j} = 0, 1, \dots, m$ , correspondem aos pesos relativos às funções  $N_{i,p}^b(\xi) M_{j,q}^b(\eta)$  e  $N_{\hat{i},p}^b(\xi) M_{\hat{j},q}^b(\eta)$  respectivamente. Por fim, um sólido NURBS é obtido por:

$$R_{i,j,k:p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{N_{i,p}^b(\xi) M_{j,q}^b(\eta) L_{k,r}^b(\zeta) w_{i,j,k}}{\sum_{\hat{i}=0}^n \sum_{\hat{j}=0}^m \sum_{\hat{k}=0}^l N_{\hat{i},p}^b(\xi) M_{\hat{j},q}^b(\eta) L_{\hat{k},r}^b(\zeta) w_{\hat{i},\hat{j},\hat{k}}}, \quad (3.31)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{y}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l R_{i,j,k:p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{B}_{i,j,k}, \quad (3.32)$$

onde  $w_{i,j,k}$  e  $w_{\hat{i},\hat{j},\hat{k}}$   $\in \mathbb{R}$ , sendo  $i = \hat{i} = 0, 1, \dots, n$ ,  $j = \hat{j} = 0, 1, \dots, m$  e  $k = \hat{k} = 0, 1, \dots, l$ , correspondem aos pesos relativos às funções  $N_{i,p}^b(\xi) M_{j,q}^b(\eta) L_{k,r}^b(\zeta)$  e  $N_{\hat{i},p}^b(\xi) M_{\hat{j},q}^b(\eta) L_{\hat{k},r}^b(\zeta)$ , respectivamente.

### 3.3.3 Múltiplos *Patches*

Na grande maioria das situações práticas, é necessário para descrever um domínio computacional o uso de múltiplos *patches* NURBS, isto se deve ao fato que o produto tensorial do espaço paramétrico não é adequado para a representação de domínios complexos multiplamente conectados. Ademais, mesmo para domínios simples, do ponto de vista da simulação numérica, o uso de múltiplos *patches* pode ser necessário em algumas circunstâncias, conforme será visto na seção de exemplos.

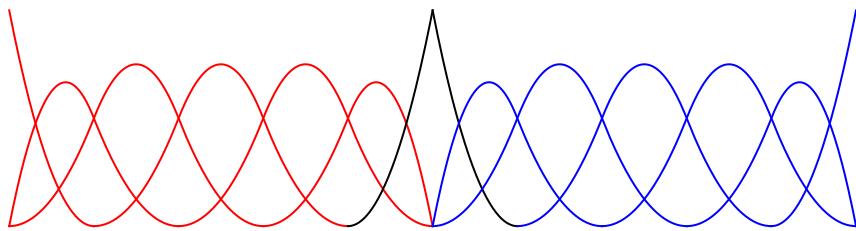
Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005) cita que o uso de múltiplos *patches* pode facilitar a análise numérica quando diferentes materiais e modelos físicos são utilizados em diferentes partes do domínio. E, além disso, em processamento paralelo, pode se tornar conveniente, do ponto de vista de estruturas de dados, não ter um único *patch* entre diferentes processadores.

A utilização de múltiplos *patches* implica na compatibilização da discretização na interface entre *patches* adjacentes, ou seja, a parametrização e o mapeamento devem ser idênticos nesses locais. Cada ponto de controle em uma face de *patches* adjacentes deve

possuir um correspondente na outra face. Esses pontos iguais são tratados como um único ponto de controle dentro do sistema global resultante da análise numérica.

Ressalta-se ainda, que na interface entre os *patches*, devido a natureza interpolatória do vetores de *knots* abertos, as funções base terão continuidade  $C_0$ , conforme pode ser observado na Figura 20, onde apresentam-se as funções base univariadas na interface entre dois *patches*.

Figura 20 – Funções base univariadas na interface entre *patches*



Fonte: Elaborada pela autora

### 3.4 Análise Isogeométrica

Para a aplicação da IGA no contexto da Dinâmica dos Fluidos Computacional, será utilizada como base a metodologia apresentada no Capítulo 2. Nesse contexto, a aproximação da geometria, realizada no contexto do MEF pela Equação 2.49, será substituída pela abordagem Isogeométrica através do uso de geometrias NURBS, descritas pelas equações: Equação 3.28, Equação 3.30 ou Equação 3.32 para os casos de curvas, superfícies ou sólidos, respectivamente.

As funções tentativa para velocidade e pressão, e as funções teste associadas à elas, apresentadas nas Equação 2.51 à Equação 2.54 como  $N$ , são equivalentes à  $R_{i,p}(\xi)$ ,  $R_{i,j:p,q}(\xi, \eta)$  e  $R_{i,j,k:p,q,r}(\xi, \eta, \zeta)$  a depender da geometria em análise.

A integração numérica nas células é realizada através da quadratura Gaussiana. Considerando o domínio paramétrico de uma célula:  $\bar{\Omega}^e$ , e o domínio de integração ou parental:  $\tilde{\Omega}^e$ , apresentados na Figura 15, definidos respectivamente pelos vetores de coordenadas paramétricas  $\xi(\xi, \eta, \zeta)$  e  $\tilde{\xi}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta})$ , a matriz jacobiana do mapeamento do espaço físico, com coordenadas  $\mathbf{y}(y_1, y_2, y_3)$ , para o espaço de quadratura, é definida por:

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tilde{\xi}} = \frac{d\mathbf{y}}{d\xi} \frac{d\xi}{d\tilde{\xi}}, \quad (3.33)$$

com  $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta} \in [-1, 1]$ .

O primeiro termo à direita da igualdade da Equação 3.33 é calculado a partir das derivadas parciais da Equação: Equação 3.28, Equação 3.30 ou Equação 3.32, a depender do tipo da geometria em questão (curva, superfície ou sólido, respectivamente).

Para a obtenção do segundo termo à direita, primeiramente é necessário definir-se a relação entre as coordenadas do domínio paramétrico e do domínio parental. Considerando-se a célula  $\bar{\Omega}^e = [\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}] \times [\zeta_k, \zeta_{k+1}]$ , pode-se calcular  $\xi, \eta, \zeta \in \bar{\Omega}^e$  a partir de  $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta} \in \tilde{\Omega}^e$  através das seguintes relações:

$$\xi = \xi_i + (\tilde{\xi} + 1) \left( \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{2} \right), \quad (3.34)$$

$$\eta = \eta_i + (\tilde{\eta} + 1) \left( \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{2} \right), \quad (3.35)$$

e

$$\zeta = \zeta_i + (\tilde{\zeta} + 1) \left( \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_i}{2} \right), \quad (3.36)$$

assim,  $\frac{d\xi}{d\tilde{\xi}}$  é obtido derivando-se parcialmente às expressões apresentadas em: Equação 3.34, Equação 3.35 e Equação 3.36.

### 3.4.1 Parâmetros de estabilização

Para a determinação dos parâmetros de estabilização  $\tau$ , de acordo com o exposto na subseção 2.3.3, faz-se necessário a determinação de um tensor métrico,  $\mathbf{G}$  (Equação 2.69), o qual depende da matriz jacobiana transformada,  $\hat{\mathbf{Q}}$ , definida na Equação 2.66.

Devido a diferença entre o espaço paramétrico utilizado na definição das funções de base e do espaço paramétrico de integração, definido aqui como espaço parental, a matriz  $\mathbf{Q}$  será reescrita como:

$$\mathbf{Q} = \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}} \right). \quad (3.37)$$

Para a obtenção de  $\hat{\mathbf{Q}}$ , de acordo com a Equação 2.66, define-se a matriz  $\mathbf{D}$  para análise isogeométrica, de acordo com o trabalho de Otoguro, Takizawa e Tezduyar (2020), como:

$$\mathbf{D} = \left( \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\xi}}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}} \right), \quad (3.38)$$

que representa a relação entre o espaço paramétrico de preferência, onde o comprimento efetivo da célula deve ser medido, e o espaço de integração, onde são definidos os pontos de quadratura.

O espaço paramétrico de preferência, para problemas unidimensionais, é definido para cada célula por meio de uma interpolação usando polinômios de Bernstein  $B_b^p$  de ordem  $p$ :

$$\hat{\xi}(\tilde{\xi}) = \sum_{b=0}^p \hat{\xi}_b B_b^p(\tilde{\xi}), \quad (3.39)$$

com os pontos de controle de Bézier,  $\hat{\xi}_b$ , definidos igualmente espaçados da seguinte maneira:

$$\hat{\xi}_b = \frac{\Delta\hat{\xi}}{p} b, \quad (3.40)$$

sendo  $\Delta\hat{\xi}$  o comprimento paramétrico da célula de Bézier.

Os pontos de controle correspondentes no espaço de integração são dados por:

$$\tilde{\xi}_a = \frac{\Delta\hat{\xi}}{p} \sum_{b=0}^p b \left\{ \mathbf{C}^{-1} \right\}_{ba}, \quad (3.41)$$

com  $a = 0, \dots, p$ .  $\mathbf{C}$  consiste no operador de extração de Bézier, que relaciona as funções B-spline globais às funções de Bernstein locais, cuja obtenção, nesse trabalho, é realizada de acordo com o exposto em Borden *et al.* (2011).

O comprimento efetivo da célula para  $a = 1, \dots, p$  pode ser calculado por:

$$\Delta\tilde{\xi}_a = \tilde{\xi}_a - \tilde{\xi}_{a-1} \quad (3.42)$$

$$= \frac{\Delta\hat{\xi}}{p} \sum_{b=0}^p b \left( \left\{ \mathbf{C}^{-1} \right\}_{ba} - \left\{ \mathbf{C}^{-1} \right\}_{ba-1} \right). \quad (3.43)$$

A partir disso pode-se definir o razão entre o comprimento da célula de Bézier e o comprimento efetivo da célula. Considerando um problema 1D, uma das proposta dos autores para  $D$ , utilizada nesse trabalho, chama-se *RQD-MAX* e consiste em:

$$D = \frac{\Delta\hat{\xi}}{\min_{a=1,\dots,p} \Delta\tilde{\xi}_a}, \quad (3.44)$$

resultando em:

$$D = p \left( \min_{a=1,\dots,p} \sum_{b=0}^p b \left( \{\mathbf{C}^{-1}\}_{ba} - \{\mathbf{C}^{-1}\}_{ba-1} \right) \right)^{-1} \quad (3.45)$$

$$= p \max_{a=1,\dots,p} \left( \sum_{b=0}^p b \left( \{\mathbf{C}^{-1}\}_{ba} - \{\mathbf{C}^{-1}\}_{ba-1} \right) \right)^{-1} \quad (3.46)$$

Para múltiplas dimensões o coeficiente de transformação  $D$  é obtido individualmente para cada uma das direções do espaço paramétrico, e os componentes da matriz de transformação  $\mathbf{D}$  são determinados como:

$$D_{ij} = D^i \delta_{ij}, \quad (3.47)$$

$i, j = 1, \dots, n_{pd}$ , sendo  $n_{pd}$  a dimensão do espaço paramétrico.

### 3.5 Verificação e aplicações

Para aplicação da IGA em problemas da DFC utilizou-se o roteiro da implementação computacional apresentada no seção 2.5, levando-se em consideração as mudanças na formulação salientadas na seção 3.4. Os exemplos escolhidos para a verificação do código computacional foram o escoamento sobre um cilindro, e um escoamento sobre canal com degrau, em ambas análises, fez-se uso de células 3d. Os resultados obtidos são apresentados nas subseções sequentes.

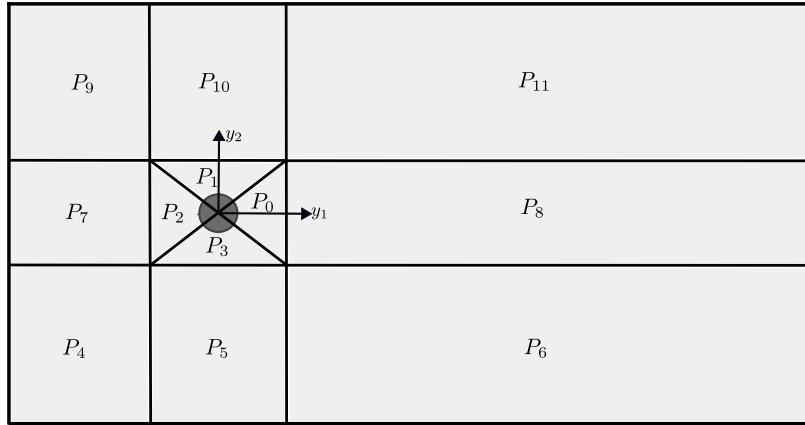
#### 3.5.1 Escoamento sobre um cilindro

##### 3.5.1.1 Geração da malha NURBS

Para a análise do problema de escoamento sobre um cilindro utilizando-se IGA com células 3d, por se tratar de uma geometria de simples complexidade, a malha foi desenvolvida pela própria autora. Para isso, inicialmente, com base nas dimensões bidimensionais do exemplo apresentado na subseção 2.6.1, dividiu-se o domínio físico em 12 *patches*, conforme pode ser observado no esquema apresentado na Figura 21.

O processo de geração da malha, simplificadamente, consiste em se escolher vetores de *knots*, pontos de controle, e pesos adequados para a descrição da geometria de cada *patch*, assegurando simultaneamente o refinamento necessário para a análise numérica.

Para a geração do primeiro *patch*,  $P_0$ , o qual contém 1/4 do cilindro em seu interior, iniciou-se pela discretização de uma circunferência definida na direção paramétrica  $\xi$ . Utilizando o número mínimo de pontos de controle necessários para representar exatamente 1/4 de circunferência, de diâmetro  $D$ , com o uso de funções quadráticas NURBS, o

Figura 21 – Cilindro: Divisão dos *Patches*

Fonte: Elaborada pela autora

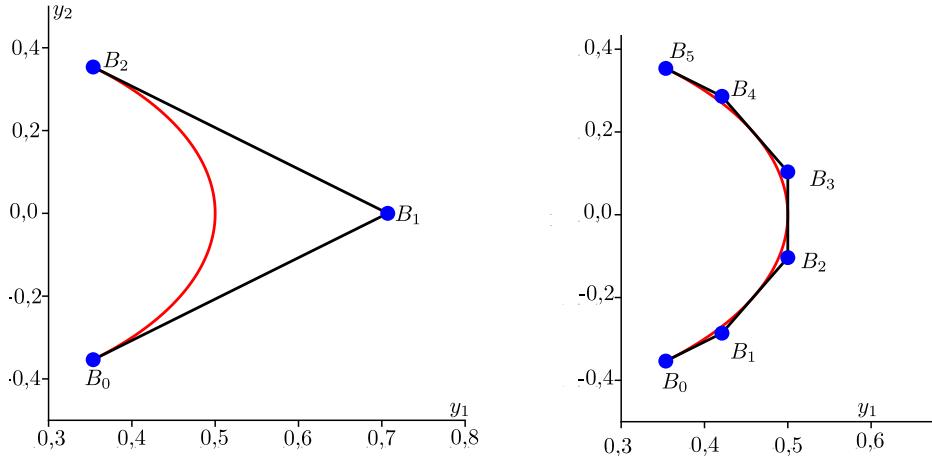
vetor de *knots* aberto foi definido por:  $\Xi = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$ , os pontos de controle como:  $\mathbf{B}_0 = [\frac{\sqrt{2}D}{4}, -\frac{\sqrt{2}D}{4}, 0]$ ,  $\mathbf{B}_1 = [\frac{D}{\sqrt{2}}, 0, 0]$ ,  $\mathbf{B}_2 = [\frac{\sqrt{2}D}{4}, \frac{\sqrt{2}D}{4}, 0]$ , e os pesos:  $w_0 = 1$ ,  $w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$  e  $w_2 = 1$ . A disposição dos pontos de controle e a curva resultante, podem ser observados na Figura 23a.

Na sequência realizou-se o procedimento de refinamento por inserção sucessiva de coordenadas paramétricas no vetor de *knots*. O algoritmo utilizado para este procedimento pode ser encontrado em Piegl e Tiller (1996). Na Figura 23b apresenta-se um exemplo dos pontos de controle resultantes após a inserção das coordenadas paramétricas  $1/4, 1/2$  e  $3/4$ . Essa inserção resultará em três novas células físicas. A quantidade de coordenadas paramétricas a ser inserida depende da discretização requerida à análise numérica.

Dando continuidade a descrição exemplificativa da geometria do *patch*  $P_0$ , gerou-se uma curva na direção paramétrica  $\xi$  que define o contorno direito do domínio. A curva é definida considerando o vetor de *knots* atualizado  $\Xi = [0, 0, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1, 1, 1]$ , e, consiste em uma reta cujas coordenadas de suas extremidades inicial e final são:  $\mathbf{y}_0 = [2, -2, 0]$  e  $\mathbf{y}_1 = [2, 2, 0]$ , respectivamente. Os 6 pontos de controle são distribuídos sobre a reta através de um espaçamento não uniforme: nas extremidades, a distância entre pontos consecutivos corresponde à metade do espaçamento adotado no interior, enquanto a região central é subdividida uniformemente, conforme pode ser observado na Figura 24a. Essa distribuição não uniforme dos pontos de controle, proporcionada para essa discretização, uma distribuição uniforme das células mapeadas no espaço físico. Para essa curva, os todos os pesos foram definidos como 1.

A superfície do domínio foi gerada discretizando-se a direção  $\eta$  do espaço paramétrico. Para isso, os  $m + 1$  pontos de controle nessa direção foram posicionados ao longo das retas que conectam os pontos de controle da primeira camada (circunferência) aos da

Figura 22 – Cilindro: Obtenção da circunferência



(a) Curva inicial e rede de pontos de controle    (b) Curva refinada e rede de pontos de controle

Fonte: Elaborada pela autora

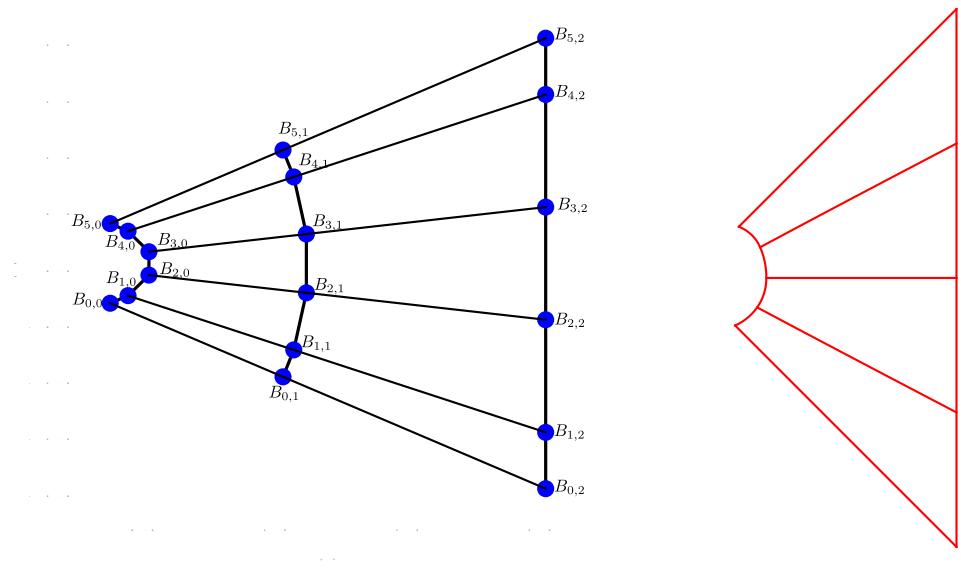
última camada (reta). A distribuição desses pontos seguiu uma progressão geométrica, de modo que as células menores se localizassem próximas ao cilindro, captando adequadamente os efeitos de camada limite. Para garantir que essa distribuição também se refletisse nas células mapeadas para o espaço físico, aplicou-se um fator de correção aos pontos de controle intermediários  $B_{i,1}$  e  $B_{i,m-1}$ , para  $i = 0, 1, \dots, n$ , deslocando-os em direção aos pontos de controle das extremidades.

A fim de exemplificar a geração da superfície, adotou-se a discretização mínima necessária, utilizando apenas três pontos de controle na direção  $\eta$ , para o emprego de funções quadráticas e vetor de *knots* aberto  $\mathcal{H} = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$ , conforme pode-se observar na Figura 24a. Na Figura 24b apresentam-se as células mapeadas do espaço paramétrico para o espaço físico. Salienta-se que os pontos de controle obtidos nessa etapa foram definidos com peso unitário.

Para a simulação numérica apresentada na sequência a quantidade de pontos de controle na direção  $\eta$  foi definida em função da necessidade de discretização para o problema. Para um vetor de *knots* abertos com coordenadas interiores de multiplicidade unitária, a quantidade de células (*ncel*) está relacionada a quantidade de pontos de controle por  $ncel = npc - deg$ , sendo *npc* o número de pontos de controle e *deg* o grau das funções na direção paramétrica em questão.

Por fim, para a geração do sólido NURBS, com apenas uma camada de células na direção paramétrica  $\zeta$ , correspondente à direção  $y_3$  do espaço físico deste problema, foram utilizadas funções quadráticas, um vetor de *knots* aberto  $\mathcal{Z} = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$ , assim como

Figura 23 – Cilindro: Obtenção da superfície



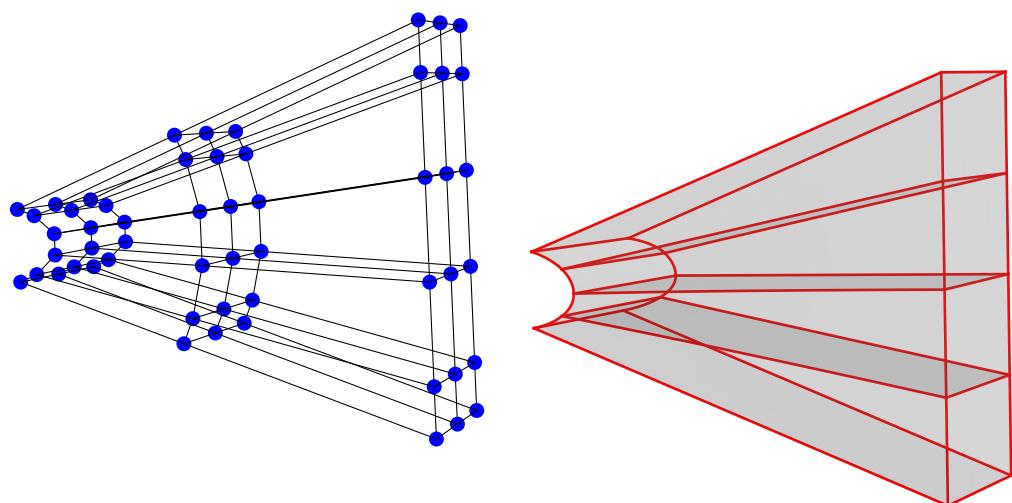
(a) Rede de pontos de controle superfície

(b) Malha física

Fonte: Elaborada pela autora

pontos de controle distribuídos uniformemente e de peso unitário. Na Figura 25a pode-se observar a rede de pontos de controle resultante, na qual a nomenclatura dos pontos foi omitida para facilitar a visualização. Na Fig. 25b apresenta-se a malha física derivada da discretização exemplificativa do *patch*  $P_0$ .

Figura 24 – Cilindro: Obtenção do sólido



(a) Rede de pontos de controle sólido

(b) Malha física sólido

Fonte: Elaborada pela autora

Para os *patches*  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ , utiliza-se a mesma parametrização de  $P_0$ , obtendo-se seus pontos de controle por rotação dos pontos de controle de  $P_0$ , de modo que cada um seja ajustado ao quadrante do cilindro correspondente.

Para a geração dos demais *patches* retangulares,  $P_4$  à  $P_{11}$ , definiu-se a direção paramétrica  $\xi$  respectiva à direção física  $y_1$ ,  $\eta$  correspondente à  $y_2$  e  $\zeta$  à  $y_3$ . A quantidade de pontos de controle em cada direção foi definida a partir do número de células desejadas para a análise numérica. Considerando o exposto anterior para o *patch*  $P_0$ , a distribuição dos pontos de controle foi realizada de forma a se obter células físicas igualmente espaçadas, ou, arranjadas com um espaçamento que segue uma distribuição geométrica. Os pontos de controle foram definidos com peso unitário. Os vetores de *knots* são abertos e com espaçamento interior subdividido de maneira uniforme. As funções NURBS utilizadas foram quadráticas.

Destaca-se que na discretização de todos os *patches* é necessário garantir uma parametrização idêntica nos planos que apresentam fronteira com outro *patch*.

### 3.5.1.2 Análise numérica

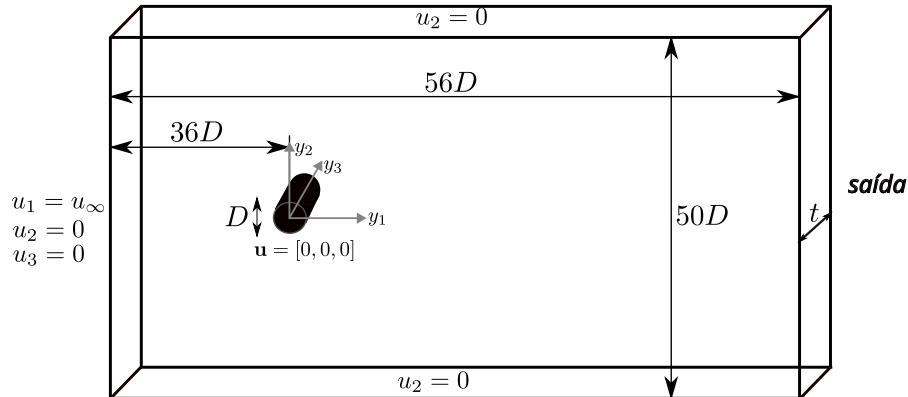
Conforme exposto na subseção 2.6.1 o estudo do problema de escoamento sobre um cilindro proporciona avaliar se o modelo computacional implementado é capaz de reproduzir os fenômenos relacionados à formação e desprendimentos de vórtices, além de propiciar a validação do código através da comparação dos coeficientes aerodinâmicos medidos ao longo do tempo com referências bibliográficas disponíveis na literatura especializada. Visando a verificação do código de IGA com células 3D analisa-se o problema do escoamento sobre o cilindro para  $Re = 40$ ,  $Re = 100$ , e,  $Re = 1000$ .

O domínio do problema simulado é um volume retangular discretizado em função do diâmetro do cilindro e é apresentado na Figura 26a. A dimensão  $t$  na direção  $y_3$  é equivalente à  $0,01D$ . Aplica-se um perfil de velocidade constante na entrada do domínio,  $\mathbf{u} = [u_\infty, 0, 0]$ , e condições de parede lisa são atribuídas às paredes superior e inferior, enquanto que para as frontal e dos fundos condições de simetria são aplicadas.

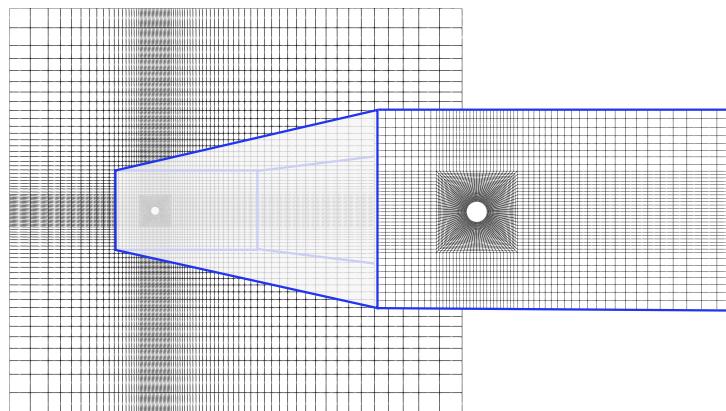
A malha isogeométrica utilizada é apresentada na Figura 26b e na Tabela 2 pode-se observar a quantidade de pontos de controle em cada uma das direções paramétricas utilizados na discretização de cada um dos *patches* que compõe a malha, resultando em 30228 pontos de controle e 8728 células físicas.

O problema é simulado para um velocidade de entrada  $u_\infty = 1,0$ ,  $\rho = 1,0$ ,  $\Delta t = 0,05$ , e  $\rho_\infty = 0,5$ , sendo a viscosidade variada de acordo com o número de Reynolds desejado. Calculam-se os coeficientes aerodinâmicos,  $C_D$  e  $C_L$ , a partir das definições de forças de arrasto e de sustentação apresentadas respectivamente nas Equação 2.108 e Equação 2.109, através das seguintes equações:

Figura 25 – Cilindro: Malha de células físicas



(a) Cilindro: Geometria e condições de contorno

(b) Discretização espacial - plano  $y_1y_2$ 

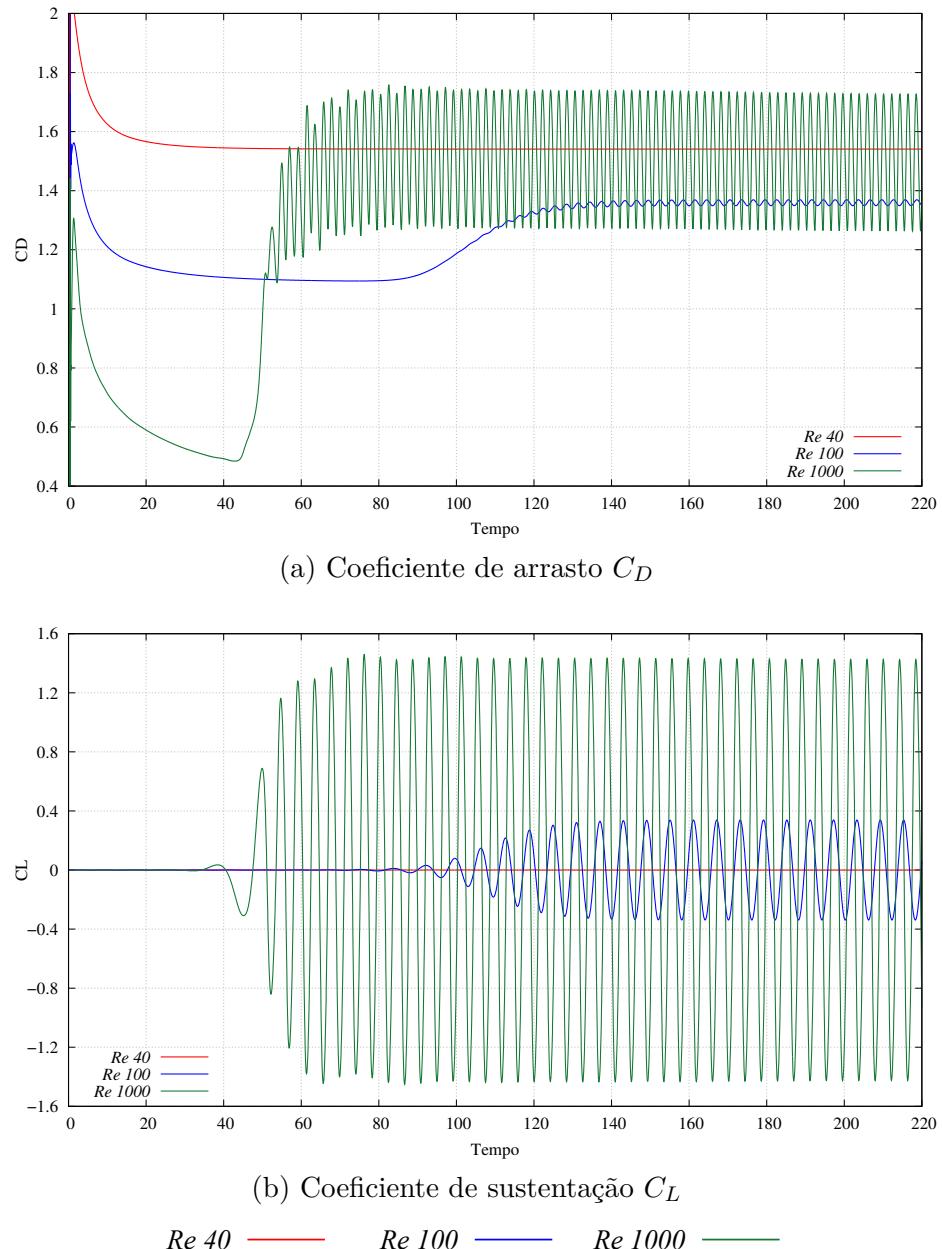
Fonte: Elaborada pela autora

$$C_D = \frac{F_D}{0,5\rho\|\mathbf{u}_\infty\|^2 Lt}, \quad (3.48)$$

$$C_L = \frac{F_L}{0,5\rho\|\mathbf{u}_\infty\|^2 Lt}, \quad (3.49)$$

Nas Figs. 27a e 27b, apresenta-se a variação ao longo do tempo dos coeficientes aerodinâmicos  $C_D$  e  $C_L$ . Os valores do coeficiente de arrasto médio obtidos com a malha isogeométrica com células 3d foram:  $C_{Dmed} = 1,54$  para  $Re = 40$ ,  $C_{Dmed} = 1,36$  para  $Re = 100$  e  $C_{Dmed} = 1,49$  para  $Re = 1000$ . Ressalta-se, que apesar dos valores de  $C_{Dmed}$  estarem bem próximos aos da simulação com MEF tradicional da subseção 2.6.1, para as análises utilizando IGA, foram necessários mais passos de tempo para o início do processo de desprendimento de vórtices, nos casos de  $Re = 100$  e  $Re = 1000$ .

Figura 26 – Cilindro: Coeficientes aerodinâmicos



Fonte: Elaborada pela autora

Tabela 2 – Cilindro: Número de pontos de controle por *patch*

<i>Patch</i>	$\xi$	$\eta$	$\zeta$	<i>Patch</i>	$\xi$	$\eta$	$\zeta$
0	26	34	3	6	42	28	3
1	26	34	3	7	20	26	3
2	26	34	3	8	42	26	3
3	26	34	3	9	20	28	3
4	20	28	3	10	26	28	3
5	26	28	3	11	42	28	3

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nas Figura 27 e Figura 28 são apresentados os campos de velocidade e pressão ao longo de um ciclo de desprendimento de vórtices para  $Re = 1000$ .

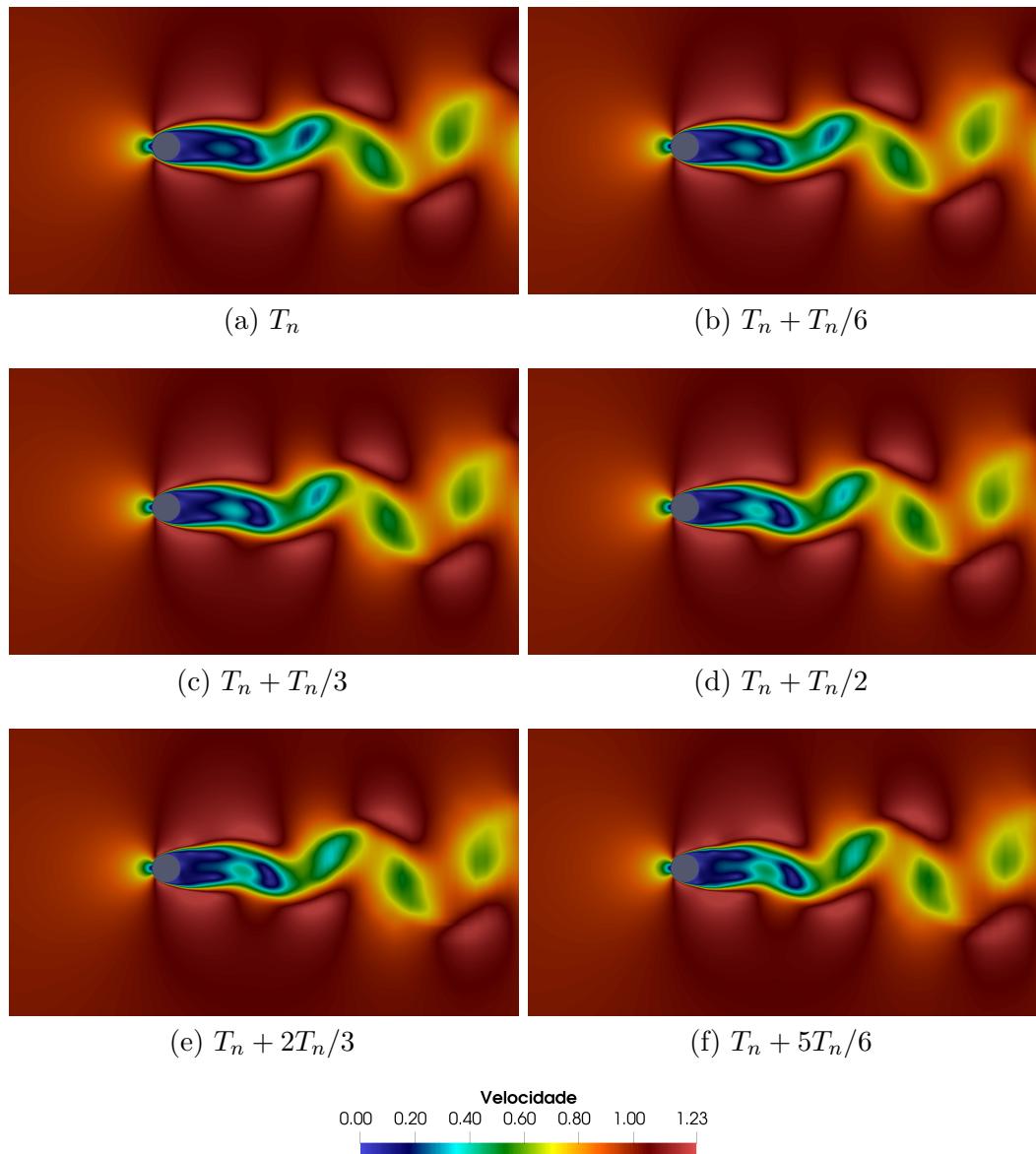
### 3.5.2 Escoamento em um canal com degrau

O problema de escoamento em canal com degrau consiste na aplicação de um perfil de velocidade parabólico na entrada de um canal, o qual caracteriza-se pela presença de um degrau próximo a entrada do escoamento. A existência do degrau acarreta na formação de um vórtice de recirculação, chamado aqui de vórtice primário, o qual aumenta de tamanho, a medida que se eleva o número de Reynolds do escoamento. A dimensão do vórtice primário, para diferentes números de Reynolds, será alvo de avaliação nessa seção, através da análise comparativa deste dado com bibliografias de referência.

Na Figura 29 apresenta-se a configuração geral da geometria do canal, que foi discretizado através do uso de células isogeométricas 3d definidas dentro de cinco *patches* que descrevem o domínio do problema. As dimensões do canal são:  $h = 1,0m$ ,  $s = 0,94m$ ,  $x_e = 1,0m$ ,  $x_f = 15m$  e  $x_t = 30m$ . A profundidade do canal adotada, na direção  $y_3$ , é equivalente a  $0,1m$ . Devido a pequena dimensão definida em  $y_3$  a simulação numérica realizada é caracterizada como um escoamento em domínio bidimensional.

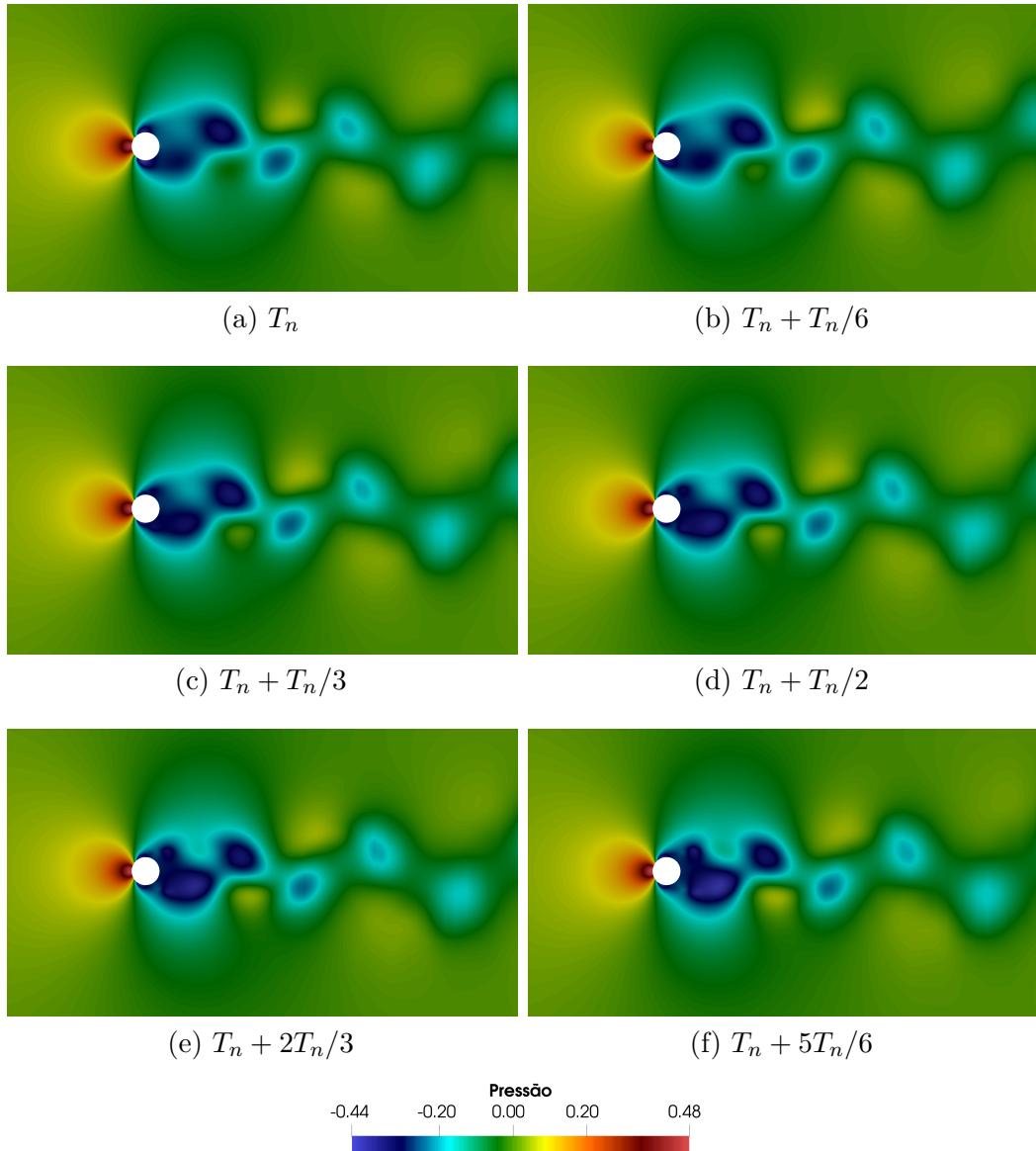
Para a geração da geometria NURBS, os 5 *patches*, denominados  $P_0, P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$ , são discretizados em todas as direções paramétricas com funções base quadráticas e com vetores de *knots* abertos de coordenadas paramétricas igualmente espaçados em seu interior. Os pontos de controle para os *patches*  $P_0, P_1$  e  $P_2$  foram distribuídos no espaço físico, direções  $y_1, y_2$  e  $y_3$ , de maneira a se obter células igualmente espaçadas. Ressalta-se, que o número de células está relacionado a quantidade de pontos de controle por  $ncel = npc - deg$ . Para os *patches*  $P_3$  e  $P_4$ , na direção do espaço físico  $y_2$  e  $y_3$ , os pontos de controle são posicionadas de maneira a gerar células uniformes, e, na direção  $y_1$ , são distribuídos de maneira a se obter células em progressão geométrica, aumentando de

Figura 27 – Cilindro: Campos de velocidade para  $\text{Re} = 1000$  - plano  $y_1y_2$



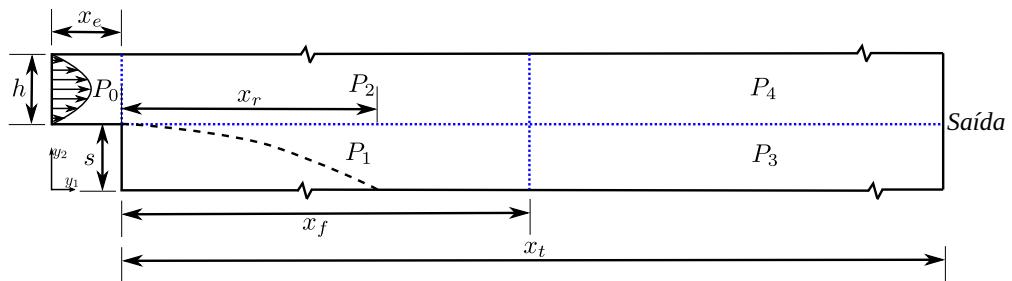
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 28 – Cilindro: Campos de pressão para  $\text{Re} = 1000$  - plano  $y_1y_2$



Fonte: Elaborada pela autora

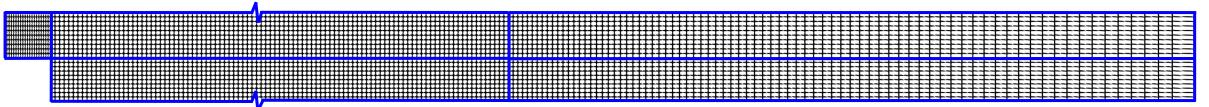
Figura 29 – Degrau: Geometria - plano  $y_1y_2$



Fonte: Elaborada pela autora

tamanho no sentido do contorno de saída, conforme pode ser observado na Figura 30. Na Tabela 3 apresenta-se o número de pontos de controle em cada direção paramétrica para cada *patch*, resultando em 17640 pontos de controle e 4800 células.

Figura 30 – Degrau: Malha de células físicas - plano  $y_1y_2$



Fonte: Elaborada pela autora

Tabela 3 – Degrau: Número de pontos de controle por *patch*

<i>Patch</i>	$\xi$	$\eta$	$\zeta$
0	22	12	3
1	152	12	3
2	152	12	3
3	82	12	3
4	82	12	3

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para a simulação numérica, aplicou-se condição de aderência nos contornos contidos nos planos  $y_1y_3$  e  $y_1y_3$ , exceto naqueles com condições de entrada ou de saída. Nos contornos contidos nos planos  $y_1y_2$  aplicou-se condição de simetria. O perfil parabólico adotado na entrada do domínio é descrito pela seguinte equação:

$$u_1 = V_{max} \left( 1 - \left( \frac{(y_2 - s) - h/2}{h/2} \right)^2 \right), \quad (3.50)$$

com velocidade  $V_{max} = 10m/s$  e  $u_2 = u_3 = 0$  nesse contorno.

O escoamento sobre o degrau é caracterizado por produzir áreas de recirculação onde o fluido se separa e forma vórtices. A distância entre o degrau e o ponto de recolamento do vórtice principal,  $x_r$ , é uma das principais características verificadas nesse problema. A dimensão dos vórtices varia em função do número de Re, o qual é calculado de acordo com Armaly *et al.* (1983), por:

$$\text{Re} = \frac{\rho \left( \frac{2V_{max}}{3} \right) 2h}{\mu}. \quad (3.51)$$

Foram selecionados três diferentes número de Reynolds para as análises:  $\text{Re} = 100$ ,  $\text{Re} = 400$  e  $\text{Re} = 800$ , os quais são obtidos a partir da variação da viscosidade do fluido. Considerou-se  $\rho = 1\text{kg/m}^3$ ,  $\Delta t = 0,05\text{s}$ , e  $\rho_\infty = 0,5$ .

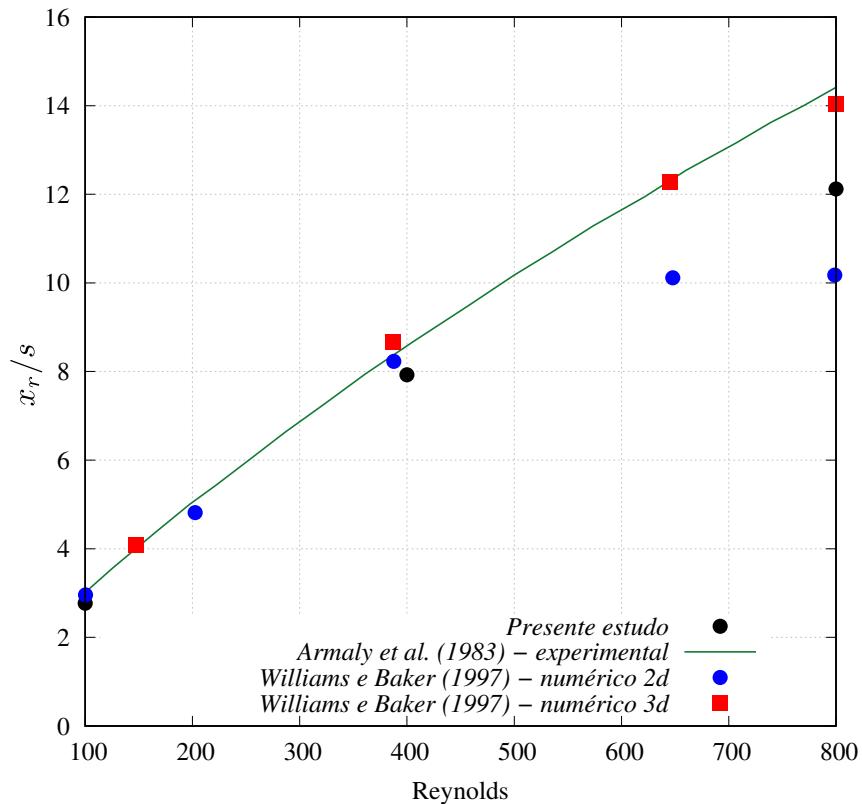
De acordo com os experimentos realizados por Armaly *et al.* (1983), as medições do comprimento do vórtice primário, logo a jusante do degrau na parte inferior, identificam o regime do escoamento como laminar ( $\text{Re} < 1200$ ), transiente ( $1200 < \text{Re} < 6600$ ) e turbulento ( $\text{Re} > 6600$ ). Além disso, o autor constatou em seus ensaios que para  $\text{Re} < 400$  o escoamento é predominantemente bidimensional, enquanto que para Reynolds superiores, o escoamento apresenta regiões de comportamento tridimensional.

Armaly *et al.* (1983) em suas análises constatou o surgimento de uma bolha de separação adicional ao longo do piso do canal, a jusante da separação primária, a qual desaparece para  $\text{Re} > 2300$ . Outra região de separação secundária também foi observada ao longo da parede superior, a jusante do degrau, desenvolvendo-se a partir de  $\text{Re} = 400$  e permanecendo durante todo o regime de transição.

Na Figura 31 são apresentados os comprimentos de recolamento do vórtice primário adimensionalizados ( $x_r/s$ ) obtidos nesse trabalho, juntamente com os valores adaptados dos ensaios experimentais de Armaly *et al.* (1983) e os resultados de análises 2d e 3d de Williams e Baker (1999). Com essa figura é possível observar que a medida que o número de Reynolds aumenta, os resultados obtidos do presente estudo se afastam dos valores de referência respectivos ao estudo experimental e da simulação tridimensional. Este fato ocorre visto que o ensaio experimental foi realizado em um canal com  $2m$  profundidade na direção  $y_3$ , enquanto que a simulação atual conta com apenas uma célula nessa direção, sendo então incapaz de captar os fenômenos tridimensionais que ocorrem a medida que o número de Reynolds cresce.

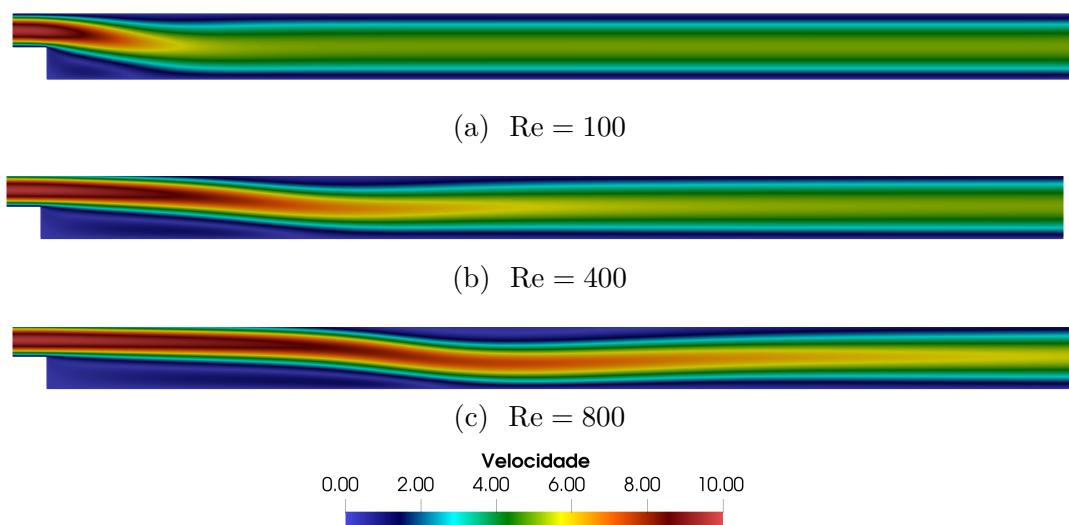
Na Figura 32 pode-se observar os campos de velocidade para o domínio completo para  $\text{Re} = 100$ ,  $\text{Re} = 400$  e  $\text{Re} = 800$ . Para  $\text{Re} = 800$  constatou-se a formação de um vórtice secundário na parede superior, conforme havia sido relatado pelos autores previamente citados, conforme pode ser observado na Figura 33c. Por fim, na Figura 33 é possível observar-se os campos de pressão para todos os números de Reynolds simulados.

Figura 31 – Degrau: Comprimento do vórtice principal



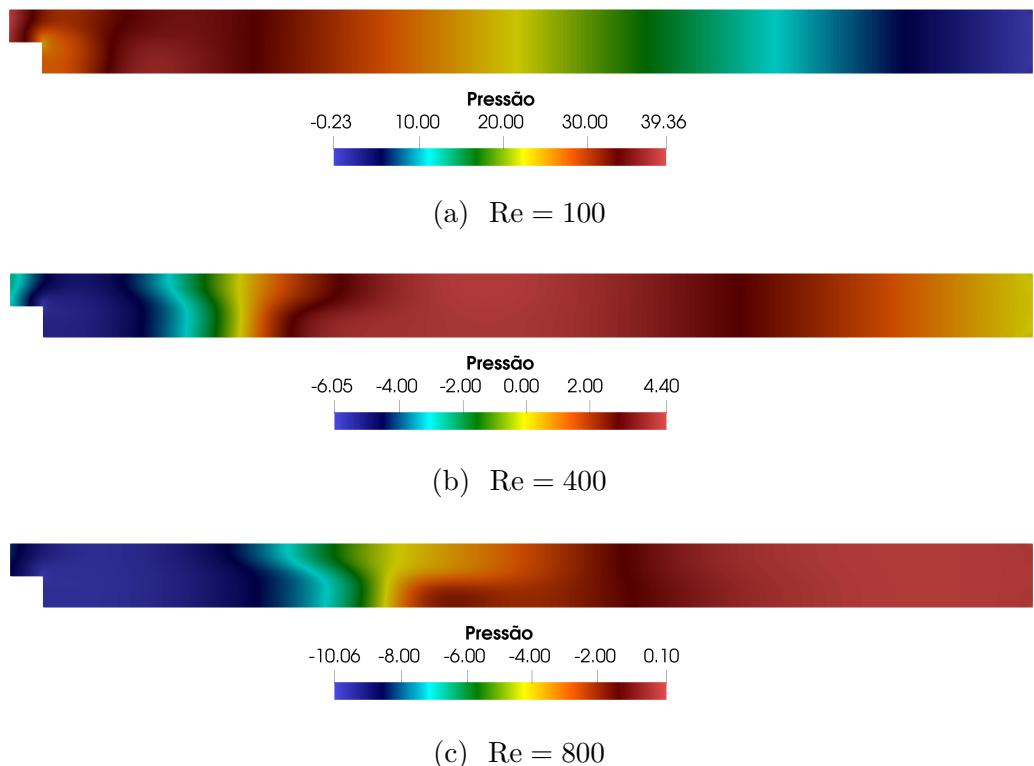
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 32 – Degrau: Campos de velocidade



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 33 – Degrau: Campos de pressão



Fonte: Elaborada pela autora

## 4 DINÂMICA DOS SÓLIDOS COMPUTACIONAL

Assim como no caso da Mecânica dos Fluidos, um sólido é modelado como um corpo contínuo, com seu movimento governado por um conjunto de equações provenientes da lei da conservação da quantidade de movimento, lei da conservação da massa e lei da conservação de energia. Entretanto, diferentemente dos fluidos, os sólidos possuem resistência às solicitações tangenciais até que alcance seu limite resistente, e por isso, apresentam deslocamentos e deformações finitos.

As variáveis de interesse na resolução do conjunto de equações que descrevem o comportamento do sólido são os deslocamentos, ou, posições atuais ao longo do tempo, dessa forma, uma descrição do tipo Lagrangiana é mais adequada para essas análises.

Nesse contexto, o comportamento estrutural pode ser classificado como linear ou não linear. No contexto do comportamento não linear, em geral, as não linearidades envolvidas podem ser de natureza geométrica, quando associadas à presença de grandes deslocamentos e rotações que não permitem aproximar a configuração atual pela inicial, ou de natureza física, quando resultam de modificações na relação constitutiva do material.

Para problemas de sólidos com comportamento elástico, quando houver a possibilidade de grandes deslocamentos, a não-linearidade geométrica deve ser contemplada no modelo matemático. Para isso, altera-se a forma de consideração do equilíbrio das forças no sólido. Enquanto que em uma modelagem geometricamente linear o equilíbrio é considerado na configuração inicial, que é muito próxima a configuração atual do corpo, em uma análise não-linear geométrica, o equilíbrio é considerado na configuração atual (ver, por exemplo Ogden (1984) e Coda (2018)).

Em muitos problemas da IFE, tal como o *flutter*, grandes deslocamentos estão envolvidos. Desse modo, neste estudo utiliza-se uma formulação não-linear geométrica dinâmica de cascas baseada em uma descrição Lagrangiana Total para as análise dinâmica de estruturas.

A formulação é baseada no método dos elementos finitos com abordagem posicional (Coda, 2003; Coda, 2018), onde as variáveis principais são as posições nodais. Escolheu-se trabalhar com elementos de cascas, uma vez que esses podem representar a maioria dos problemas estruturais tridimensionais.

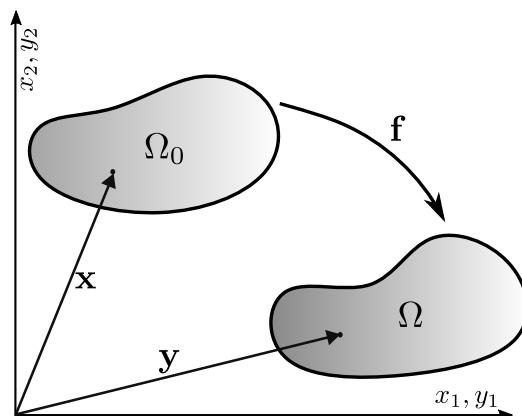
Considera-se a cinemática de Reissner-Mindlin, e adotam-se como parâmetros nodais as posições da superfície média, vetores generalizados, inicialmente unitários e perpendiculares à superfície média, e um termo de enriquecimento que permite considerar variação linear de deformação na direção da espessura, de acordo com Sanches e Coda (2013). Isso permite um mapeamento completo e flexível do elemento deformado.

Neste capítulo, a formulação é apresentada a partir da descrição da cinemática e das condições de equilíbrio dos corpos deformáveis, com o objetivo de se deduzirem as equações globais de equilíbrio na descrição Lagrangiana, seguida pela introdução do modelo constitutivo de *Saint-Venant–Kirchhoff*. Em seguida, aborda-se a formulação do método dos elementos finitos baseada em posição para ao elemento finito de casca adotado, a técnica de integração temporal e o algoritmo para solução, juntamente com um exemplo. Essa formulação foi desenvolvida, verificada e validada em diversos estudos (??Sanches; Coda, 2013; Sanches; Coda, 2014; ??) **citar trabalhos com casca dinâmica** e o código computacional já disponível no grupo de pesquisa foi aproveitado, de modo que não se preocupa com validação do código.

#### 4.1 Cinemática dos corpos deformáveis

Um sólido deformável quando sujeito à ações externas, sofre uma mudança de configuração. Nesta seção busca-se definir medidas pontuais para a deformação. Na Figura 34, pode-se observar um sólido na sua configuração inicial  $\Omega_0$ , com coordenadas materiais descritas por  $\mathbf{x}$ , e o mesmo sólido no instante atual, representado por  $\Omega$ , com coordenadas espaciais  $\mathbf{y}$ .

Figura 34 – Cinemática de um sólido deformável



Fonte: Elaborada pela autora

A função mudança de configuração, denominada de  $\mathbf{f}$ , mapeia cada ponto da posição inicial para a atual, de modo que:

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \quad (4.1)$$

Uma medida de deformação Lagrangeana deve quantificar a mudança de forma em cada ponto do contínuo em relação ao estado inicial. Para o caso de grandes deslocamentos,

assunto deste estudo, a medida de deformação deve ser independente de movimento de corpo rígido ou da escolha dos eixos de referência, ou seja, deve ser uma medida objetiva. A medida de deformação é descrita em termos do gradiente da função mudança de configuração,  $\mathbf{A}$ , definido como:

$$\mathbf{A} = \nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{f}) = \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{y}. \quad (4.2)$$

onde o subscrito  $\mathbf{x}$  indica que o gradiente é tomado segundo as coordenadas da configuração material inicial.

A partir de  $\mathbf{A}$ , é possível definir o tensor de deformações de Green-Lagrange (ver por exemplo Ogden (1984)), que é uma medida de deformação objetiva e normalizada dada por:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad (4.3)$$

onde  $\mathbf{C}$  é um tensor simétrico denominado de tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green dado por:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t. \quad (4.4)$$

A partir do gradiente da função mudança de configuração pode-se estabelecer uma relação entre um vetor qualquer  $\mathbf{u}$  definido na configuração inicial e seu equivalente na configuração atual  $\mathbf{v}$  através da seguinte expressão:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} \quad (4.5)$$

Para a obtenção posteriormente das equações de equilíbrio em descrição Lagrangiana, faz-se necessário abordar as relações de mudança de volume e de área que ocorrem da configuração inicial para a atual.

No estabelecimento de uma relação entre o volume inicial e final, definem-se dois volumes infinitesimais, um inicial  $dV_0$  e um final  $dV$ , apresentados na Figura 35. O volume infinitesimal inicial  $dV_0$  pode ser calculado por:

$$dV_0 = (\mathbf{dx}_1 \wedge \mathbf{dx}_2) \cdot \mathbf{dx}_3 = \det(\mathbf{dx}_1, \mathbf{dx}_2, \mathbf{dx}_3), \quad (4.6)$$

com  $\mathbf{dx}_1, \mathbf{dx}_2$  e  $\mathbf{dx}_3$  vetores materiais que definem o volume inicial. O volume atual pode ser expresso então, por:

$$dV = (\mathbf{dy}_1 \wedge \mathbf{dy}_2) \cdot \mathbf{dy}_3 = \det(\mathbf{dy}_1, \mathbf{dy}_2, \mathbf{dy}_3), \quad (4.7)$$

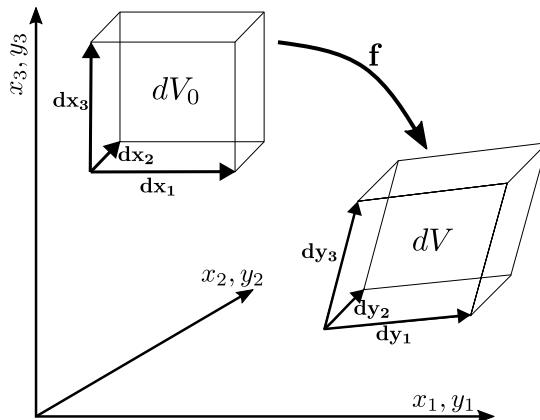
sendo  $\mathbf{dy}_1, \mathbf{dy}_2$  e  $\mathbf{dy}_3$  aos mesmos vetores  $\mathbf{dx}_1, \mathbf{dx}_2$  e  $\mathbf{dx}_3$  após a mudança de configuração.

Tendo em vista a expressão 4.5, pode-se reescrever a Equação 4.7, como:

$$dV = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{dx}_1, \mathbf{dx}_2, \mathbf{dx}_3) = J dV_0, \quad (4.8)$$

na qual  $J$  representa o determinante Jacobiano da função mudança de configuração.

Figura 35 – Mudança no volume



Fonte: Elaborada pela autora

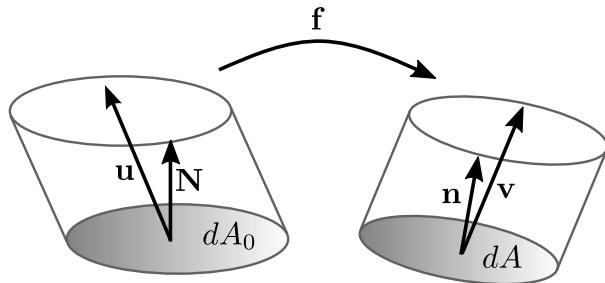
Para escrever a relação entre uma área definida na configuração inicial e o seu valor na configuração atual, considera-se o cilindro apresentado na Figura 36 em suas configurações inicial e atual. Sendo  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{n}$  os versores unitários normais às áreas inicial  $dA_0$  e atual  $dA$ . Os volumes na configuração inicial ( $dV_0$ ) e na configuração atual ( $dV$ ) são calculados por:

$$dV_0 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{dA}_0 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dA_0, \quad (4.9)$$

$$dV = \mathbf{v} \cdot \mathbf{dA} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA, \quad (4.10)$$

com  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  vetores não coplanares com as áreas inicial e atual, que ligam os centros da base e do topo do cilindro.

Figura 36 – Mudança de área



Fonte: Elaborada pela autora

Considerando a relação da Equação 4.5, pode-se escrever o volume na configuração atual,  $dV$ , como:

$$dV = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{n} dA = J dV_0 = J \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dA_0. \quad (4.11)$$

Pré-multiplicando a Equação 4.11 por  $((\mathbf{A}^t)^{-1})$  e considerando a arbitrariedade de  $\mathbf{u}$ , chega-se a conhecida fórmula de Nanson, descrita como:

$$\mathbf{n} dA = J \mathbf{A}^{-t} \cdot \mathbf{N} dA_0. \quad (4.12)$$

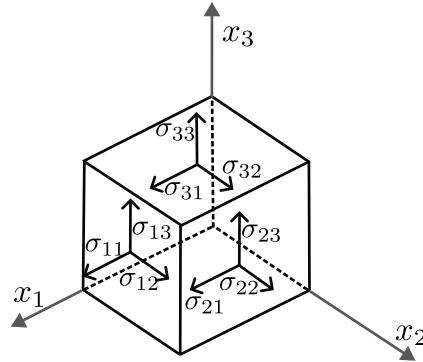
## 4.2 Equilíbrio de corpos deformáveis

### 4.2.1 Estado de tensão em um ponto

Um corpo contínuo, ao ser submetido a ações externas, desenvolve forças internas de modo a garantir o equilíbrio dinâmico ou estático. A medida dessas forças internas em cada ponto material é fundamental dentro da para a aplicação das leis que governam o movimento dos sólidos.

Considerando um corpo qualquer, na configuração atual, sujeito a um conjunto equilibrado de forças externas, ao fazer-se a extração de um volume elementar infinitesimal, conforme pode ser observado na Figura 37, considerando as forças que o restante do corpo exerce de forma distribuída sobre cada uma de suas faces são obtidas as componentes cartesianas de tensão, com uma componente normal e duas componentes tangenciais (de cisalhamento) em cada face. Essa medida de tensão é denominada tensão de Cauchy, sendo suas componentes designadas por  $\sigma_{ij}$ , com  $i$  referindo-se ao plano de atuação e  $j$  indicando a direção de atuação da componente.

Figura 37 – Volume infinitesimal: componentes de tensão



Fonte: Elaborada pela autora

O tensor de tensões de Cauchy ( $\sigma$ ) contém todas as informações de tensão em um ponto, sendo representado por:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Ao realizar-se o equilíbrio de momentos sobre um elemento infinitesimal, nota-se que  $\sigma$  é simétrico (Teorema de Cauchy), e pode ser reescrito como:

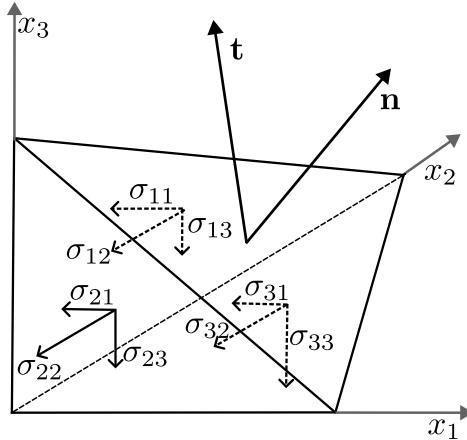
$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Vale ressaltar que, a tensão de Cauchy é definida na configuração atual do contínuo, e por isso, trata-se de uma medida Euleriana de tensão, portanto inadequada para a formulação pretendida.

Extraindo-se do corpo contínuo um volume tetraédrico (Figura 38), no plano inclinado, cujo versor normal é  $\mathbf{n}$ , surge o vetor tensão de Cauchy designado por  $\mathbf{t}$ . Considerando que a área do plano inclinado seja  $dA$ , enquanto que as áreas correspondentes aos planos coordenados são suas projeções, pode-se calcular o equilíbrio do tetraedro em cada direção, chegando-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{t} = \sigma^t \cdot \mathbf{n} = \sigma \cdot \mathbf{n}. \quad (4.15)$$

Figura 38 – Tetraedro elementar



Fonte: Elaborada pela autora

Essa expressão é conhecida por fórmula de Cauchy. Caso o plano inclinado esteja no contorno do corpo (superfície externa),  $\mathbf{t}$  se iguala às forças de superfície ( $\mathbf{p}$ ) que atuam no ponto considerado do contorno, ou seja:

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}. \quad (4.16)$$

#### 4.2.2 Equilíbrio em descrição Lagrangiana

Para a obtenção das equações de equilíbrio em descrição Lagrangiana, será utilizada como ponto de partida a equação de equilíbrio local na descrição Euleriana. Para isso, considere o sólido apresentado na Figura 39, o qual está submetido a forças de corpo,  $\mathbf{b}$ , e a forças de superfície,  $\mathbf{p}$ . Extrairindo-se um elemento infinitesimal deste corpo que sofreu mudança de configuração, e aplicando-se a segunda Lei de Newton sobre esse elemento, chega-se à equação do movimento de Cauchy, que define o equilíbrio de forma local (forma local da primeira Lei do movimento de Euler), também chamada de equação da quantidade de movimento:

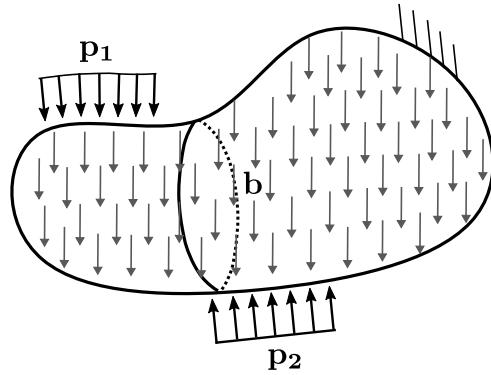
$$\nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma}^t + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{y}}, \quad (4.17)$$

ou ainda, em notação indicial:

$$\sigma_{ji,j} + b_i = \rho \ddot{y}_i, \quad (4.18)$$

com  $\rho$  representando a massa específica do material na configuração atual e  $\ddot{\mathbf{y}}$  é a derivada material da velocidade do ponto material (aceleração do corpo).

Figura 39 – Sólido sob carregamento externo



Fonte: Elaborada pela autora

Ao integrar-se a Equação 4.17 no volume do sólido, utilizando o Teorema da Divergência, chega-se a:

$$\int_A \boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{n} dA + \int_V \mathbf{b} dV = \int_V \rho \ddot{\mathbf{y}} dV \quad (4.19)$$

ou, ainda:

$$\int_A \mathbf{P} dA + \int_V \mathbf{b} dV = \int_V \rho \ddot{\mathbf{y}} dV \quad (4.20)$$

Considerando as relações de mudança de área e volume, apresentadas nas equações Equação 4.8 e Equação 4.12, e que da equação da conservação da massa ( $M$ ) tem-se que:

$$M = \int_{V_0} \rho_0 dV_0 = \int_{V(t)} \rho(t) dV. \quad (4.21)$$

Considerando as Eqs. (?? e ??) na ??, escreve-se a forma global da equação da quantidade de movimento na descrição Lagrangiana total como:

$$\int_{A_0} \mathbf{P}^t \cdot \mathbf{N} dA_0 + \int_{V_0} \mathbf{b}_0 dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} dV_0, \quad (4.22)$$

na qual o primeiro tensor de tensão de Piola-Kirchhoff ( $\mathbf{P}$ ) é definido como  $\mathbf{P}^t = J\boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{A}^{-t}$ , e o subíndice 0, refere-se à configuração inicial.

Considerando-se o Teorema da Divergência a Equação 4.22 e a arbitrariedade do volume, chega-se à versão local da equação de equilíbrio em descrição Lagrangiana, expressa por:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P}^t + \mathbf{b}_0 = \rho_0 \ddot{\mathbf{y}}. \quad (4.23)$$

#### 4.2.3 Conservação da Energia e Equilíbrio

No estudo do equilíbrio de corpos deformáveis a análise da energia mecânica é um assunto de grande importância. A energia mecânica é formada basicamente por três parcelas: energia potencial das forças externas ( $\mathbb{P}$ ), energia de deformação ( $\mathbb{U}_e$ ) e energia cinética ( $\mathbb{K}$ ). A energia total mecânica ( $\Pi$ ) é um funcional obtido pela soma dessas três parcelas, sendo escrita da seguinte maneira:

$$\Pi = \mathbb{P} + \mathbb{K} + \mathbb{U}_e. \quad (4.24)$$

O princípio da estacionariedade da energia define que um corpo quando em equilíbrio apresenta a primeira variação do funcional de energia mecânica nula, sendo o equilíbrio estável quando a posição de equilíbrio representa um mínimo local para a energia mecânica total. Este princípio, para uma descrição das equações de equilíbrio em posições, pode ser expresso matematicamente da seguinte forma:

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{y}} \cdot \delta\mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad (4.25)$$

ou, dada a arbitrariedade de  $\delta\mathbf{y}$ , como:

$$\delta\Pi = \delta\mathbb{P} + \delta\mathbb{K} + \delta\mathbb{U}_e. \quad (4.26)$$

Um incremento de energia mecânica específica (energia mecânica por unidade de volume) pode ser obtido pelo produto escalar da Equação 4.23 por um incremento de posição  $\delta\mathbf{y}$ , e, integrando-se sobre o domínio inicial, têm-se:

$$\delta\Pi = \int_{V_0} (\rho_0 \ddot{\mathbf{y}} - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P}^t - \mathbf{b}_0) \cdot \delta\mathbf{y} dV_0 = 0 \quad (4.27)$$

Ao integrar-se por partes o segundo termo da Equação 4.27 e utilizar-se o Teorema da Divergência, chega-se a seguinte expressão:

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} dV_0 - \int_{A_0} \mathbf{P}^t \cdot \mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{y} dA_0 + \int_{V_0} \mathbf{P}^t : \nabla_{\mathbf{x}}(\delta \mathbf{y}) dV_0 - \int_{V_0} \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{y} dV_0 = 0 \quad (4.28)$$

A Equação 4.28 pode ainda ser reformulada, considerando que  $\nabla_{\mathbf{x}}(\delta \mathbf{y}) = \delta \mathbf{A}$  e que  $\mathbf{P}^t \cdot \mathbf{N}$  representa as forças de superfície na configuração inicial ( $\mathbf{p}_0$ ) como:

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} dV_0 - \int_{A_0} \mathbf{p}_0 \cdot \delta \mathbf{y} dA_0 + \int_{V_0} \mathbf{P}^t : \delta \mathbf{A} dV_0 - \int_{V_0} \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{y} dV_0 = 0. \quad (4.29)$$

Conforme relatou-se, o tensor de Piola-Kirchhoff de primeira espécie não é necessariamente simétrico, desta forma, torna-se mais conveniente adotar uma medida de tensão que resulte em um tensor simétrico. Com essa finalidade, adota-se um tensor  $\mathbf{S}$ , de forma que:

$$\mathbf{P} = \mathbf{S}^t \cdot \mathbf{A}^t, \quad (4.30)$$

com  $\mathbf{S}$  conhecido como tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie.

Utilizando-se a relação apresentada na Equação 4.30 na Equação 4.29, chega-se a:

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} dV_0 - \int_{A_0} \mathbf{p}_0 \cdot \delta \mathbf{y} dA_0 + \int_{V_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV_0 - \int_{V_0} \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{y} dV_0 = 0. \quad (4.31)$$

A Equação 4.31, será adicionada ainda uma parcela referente a possibilidade de carregamentos pontuais, sendo expressa então, por:

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} dV_0 - \int_{A_0} \mathbf{p}_0 \cdot \delta \mathbf{y} dA_0 + \int_{V_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV_0 - \int_{V_0} \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{y} dV_0 - \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{y} = 0. \quad (4.32)$$

Partindo-se da Equação 4.32, encontra-se a relação entre suas componentes e as parcelas de energia mecânica, dessa forma, têm-se:

$$\delta \mathbb{P} = - \int_{A_0} \mathbf{p}_0 \cdot \delta \mathbf{y} dA_0 - \int_{V_0} \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{y} dV_0 - \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{y}, \quad (4.33)$$

$$\delta \mathbb{K} = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} dV_0, \quad (4.34)$$

$$\delta \mathbb{U}_e = \int_{V_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV_0. \quad (4.35)$$

#### 4.2.4 Modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff

A lei constitutiva hiperelástica de Saint-Venant-Kirchhoff estabelece uma relação linear entre o tensor das tensões de Piola Kirchhoff de segunda espécie e o tensor de deformação de Green, e pode ser escrita pela expressão generalizada da energia de deformação por:

$$u_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbf{E}, \quad (4.36)$$

ou, em notação indicial:

$$u_e = \frac{1}{2} E_{kl} C_{kl ij} E_{ij} \quad (4.37)$$

com  $\mathbb{C}$  representando o tensor constitutivo elástico isotrópico, que é um tensor de quarta ordem definido como:

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \left( \kappa - \frac{2}{3} G \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + G (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (4.38)$$

sendo  $\delta_{ij}$  o delta de Kronecker,  $\kappa$  e  $G$  os módulos volumétrico e de cisalhamento respectivamente, os quais são calculados através das seguintes relações:

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3} G, \quad (4.39)$$

$$G = \frac{\mathbb{E}}{2(1 + \nu)}, \quad (4.40)$$

$$\lambda = \frac{\nu \mathbb{E}}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad (4.41)$$

com  $\mathbb{E}$  sendo o módulo de elasticidade longitudinal e  $\nu$  o coeficiente de Poisson. Ressalta-se que essa lei constitutiva aqui utilizada é adequada para grandes deslocamentos, entretanto, a mesma é adequada somente para deformações pequenas a moderadas por permitir a inversão do material.

### 4.3 Método dos Elementos Finitos

Conforme discutido na subseção 2.3.1, o método dos elementos finitos baseia-se na substituição do contínuo por um conjunto finito de subdomínios, denominados elementos finitos. Em cada um desses elementos, as variáveis de interesse — incluindo a própria geometria — são aproximadas, de modo que o problema contínuo é convertido em um problema discreto, caracterizado por um número finito de incógnitas.

Nesta subseção será apresentada formulação do Método dos Elementos Finitos baseada em posições aplicada à cinemática de cascas.

#### 4.3.1 Elemento finito de Casca

Esta formulação foi desenvolvida por Coda e Paccolla (2007), e consistia inicialmente em 6 graus de liberdade por nó, sendo 3 referentes à posições e 3 referentes às componentes do vetor generalizado. Em Coda e Paccolla (2008) incluí-se a formulação um sétimo parâmetro, que considera a taxa de variação linear da espessura, para lidar com o fenômeno de travamento volumétrico. Sanches e Coda (2013) apresentam a formulação dinâmica empregando a cinemática com 7 graus de liberdade aplicada ao problema de interação fluido-estrutura, sendo essa a abordagem adotada aqui.

As cascas são sólidos que possuem uma de suas dimensões muito menor do que as outras, assim o mapeamento do seu domínio pode ser facilitado tomando-se a superfície média como referência. Os mapeamentos das configurações inicial e atual dos pontos da superfície média, conforme pode ser observado na Figura 40, são definidos respectivamente como:

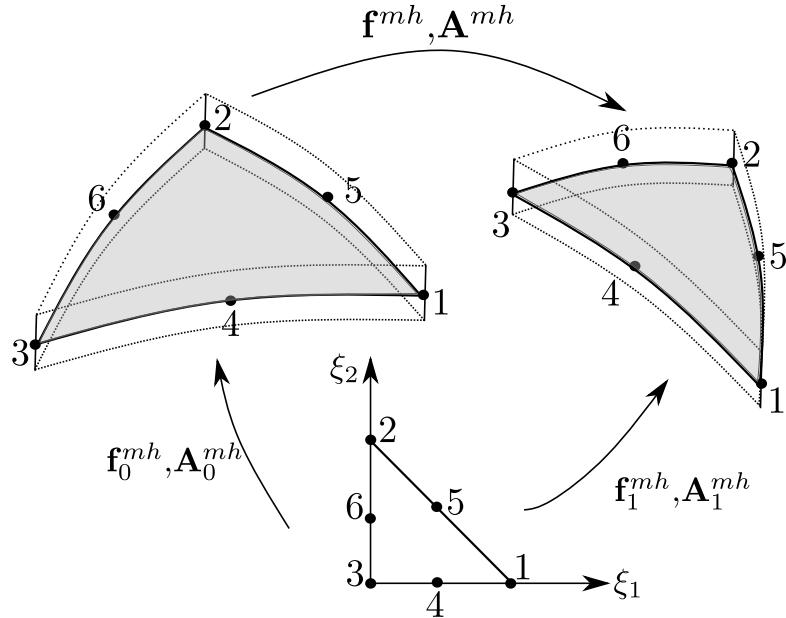
$$\mathbf{f}_0^{mh}(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{x}^{mh}(\xi_1, \xi_2) = N_l(\xi_1, \xi_2) \mathbf{x}_l^{mh} \quad (4.42)$$

$$\mathbf{f}_1^{mh}(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{y}^{mh}(\xi_1, \xi_2) = N_l(\xi_1, \xi_2) \mathbf{y}_l^{mh}, \quad (4.43)$$

onde  $\mathbf{x}_l^{mh}$  e  $\mathbf{y}_l^{mh}$  representam, respectivamente, os vetores dos parâmetros de posição inicial e atual da superfície média respectivos ao nó  $l$ , com  $N_l(\xi_1, \xi_2)$  sendo a forma do nó  $l$  calculada no ponto de coordenadas paramétricas  $(\xi_1, \xi_2)$ .

Os demais pontos do domínio são mapeados por meio da soma da posição de um ponto na superfície média com um vetor generalizado  $\mathbf{g}_0^h$  para a configuração inicial ou  $\mathbf{g}_1^h$  para a configuração atual. Observa-se que  $\mathbf{g}_0^h$  é normal à superfície média na configuração inicial, conforme pode ser observado na Figura 41, enquanto  $\mathbf{g}_1^h$  pode não ser normal à superfície média deformada. Desta forma, o mapeamento completo de um elemento de casca é:

Figura 40 – Mapeamento da superfície média da casca



Fonte: Elaborada pela autora

$$\mathbf{f}_0^h(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \mathbf{x}^h(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \mathbf{f}_0^{mh}(\xi_1, \xi_2) + \mathbf{g}_0^h(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (4.44)$$

$$\mathbf{f}_1^h(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \mathbf{y}^h(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \mathbf{f}_1^{mh}(\xi_1, \xi_2) + \mathbf{g}_1^h(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (4.45)$$

em que  $\xi_3$  é a coordenada adimensional na direção da espessura da casca, variando de -1 a 1.

Os vetores generalizados  $\mathbf{g}_0^h$  e  $\mathbf{g}_1^h$  podem ser expressos por:

$$\mathbf{g}_0^h(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{h_0}{2} \xi_3 N_l(\xi_1, \xi_2) \cdot (\mathbf{e}_x)_l, \quad (4.46)$$

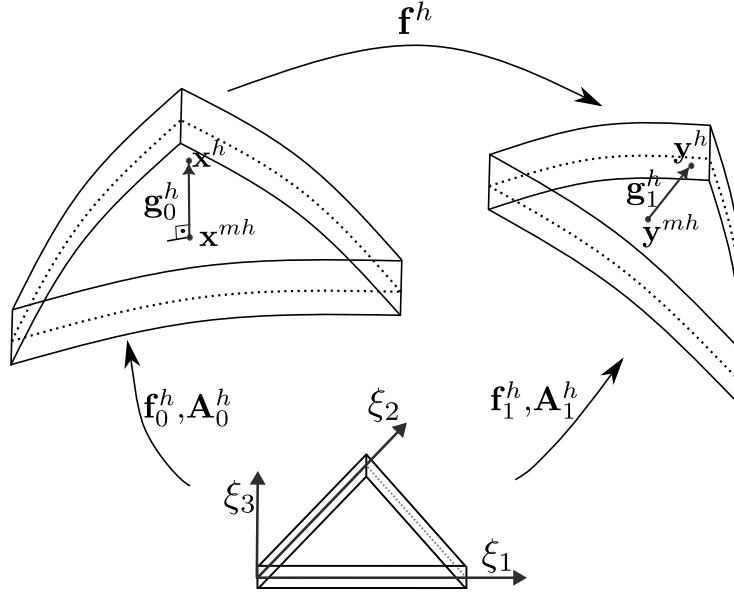
$$\mathbf{g}_1^h(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{h_0}{2} [\xi_3 + \eta_l N_l(\xi_1, \xi_2) \xi_3^2] N_l(\xi_1, \xi_2) \cdot (\mathbf{e}_y)_l, \quad (4.47)$$

onde  $h_0$  representa a espessura média inicial do elemento de casca,  $(\mathbf{e}_x)_l$  é o  $l$ -ésimo valor nodal do vetor unitário normal à linha de referência inicial,  $(\mathbf{e}_y)_l$  o  $l$ -ésimo valor nodal do vetor generalizado, de norma irrestrita, na configuração atual e  $\eta_l$  é o  $l$ -ésimo valor nodal da chamada de taxa linear de variação da espessura.

Dessa forma, a função mudança de configuração pode ser definida através da seguinte relação:

$$\mathbf{f}^h = \mathbf{f}_1^h \circ (\mathbf{f}_0^h)^{-1}. \quad (4.48)$$

Figura 41 – Vetores generalizados



Fonte: Elaborada pela autora

De forma análoga pode-se representar o gradiente de  $\mathbf{f}^h$  como:

$$\mathbf{A}^h = \mathbf{A}_1^h \cdot (\mathbf{A}_0^h)^{-1}, \quad (4.49)$$

em que  $\mathbf{A}^h = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}^h$ ,  $\mathbf{A}_0^h = \frac{\partial \mathbf{f}_0^h}{\partial \xi}$  e  $\mathbf{A}_1^h = \frac{\partial \mathbf{f}_1^h}{\partial \xi}$ .

Assim, o alongamento à direta de Cauchy-Green e a deformação de Green podem ser escritos em função de  $\mathbf{A}_0^h$  e  $\mathbf{A}_1^h$ , como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} = \left( \mathbf{A}_1^h \cdot (\mathbf{A}_0^h)^{-1} \right)^t \cdot \left( \mathbf{A}_1^h \cdot (\mathbf{A}_0^h)^{-1} \right), \quad (4.50)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \left( \left( \mathbf{A}_1^h \cdot (\mathbf{A}_0^h)^{-1} \right)^t \cdot \left( \mathbf{A}_1^h \cdot (\mathbf{A}_0^h)^{-1} \right) - \mathbf{I} \right). \quad (4.51)$$

Partindo do mapeamento apresentado é possível escrever o funcional de energia mecânica em função dos parâmetros nodais apresentados, e ao discretizar-se as equações no tempo, a solução do problema consiste encontrar os parâmetros nodais que satisfaçam:

$$\frac{\partial \Pi^h}{\partial \mathbf{y}_l^{mh}} = \frac{\partial \Pi^h}{\partial (\mathbf{e}_y)_l} = \frac{\partial \Pi^h}{\partial \eta_l} = \mathbf{0}. \quad (4.52)$$

### 4.3.2 Integração Temporal e solução do problema não-linear

Para a tornar o equacionamento mais compacto, reescreve-se o equilíbrio baseado na energia da variável  $\mathbf{Y}$ , que consiste em um vetor que contém todos os parâmetros nodais da estrutura (posições, vetores generalizados e taxa de variação linear da espessura) de forma que:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{Y}} = \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial \mathbf{Y}} + \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial \mathbf{Y}} + \frac{\partial \mathbb{U}_e}{\partial \mathbf{Y}} = \mathbf{0}, \quad (4.53)$$

ou ainda,

$$-\mathbf{F}^{ext}(t) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{F}^{int}(\mathbf{Y}) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{0}, \quad (4.54)$$

onde  $\mathbf{F}^{int}(\mathbf{Y})$  representa as forças internas provenientes da variação da energia potencial interna,  $\mathbf{M}$  é a conhecida como matriz de massa e  $\mathbf{F}^{ext}$  advém da variação da energia potencial das forças externas. O termo  $\mathbf{C}$  representa uma matriz de amortecimento viscoso e os pontos sobreescritos indicam derivadas materiais no tempo.

Neste trabalho, para a discretização temporal das equações, será utilizado o integrador de Newmark, visto que o mesmo demonstrou estabilidade e eficácia na vasta gama de trabalhos envolvendo o MEF posicional com sua aplicação ((Greco; Coda, 2004; Coda; Paccola, 2010; Carrazedo; Coda, 2010; Coda; Paccola, 2011; Sanches; Coda, 2016)).

A integração temporal das equações inicia-se com a discretização do tempo de maneira que:

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t, \quad (4.55)$$

onde  $t_{n+1}$  representa o instante atual,  $t_n$  o instante final do passo de tempo anterior e  $\Delta t$  o intervalo do passo de tempo utilizado na discretização. Utilizando as aproximações de Newmark, posição, velocidade e aceleração nos instantes  $n + 1$  e  $n$  são relacionados por:

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + \Delta t \dot{\mathbf{Y}}_n + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{Y}}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{Y}}_{n+1}, \quad (4.56)$$

$$\dot{\mathbf{Y}}_{n+1} = \dot{\mathbf{Y}}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{Y}}_n + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{Y}}_{n+1}, \quad (4.57)$$

em que  $\beta$  e  $\gamma$  são parâmetros dependentes do comportamento assumido para a aceleração. Para um aceleração constante, hipótese adotada neste trabalho,  $\gamma = 1/2$  e  $\beta = 1/4$ .

Partindo das equações Equação 4.56 e Equação 4.57 é possível escrever a aceleração e a velocidade atual em função das posições no instante  $n + 1$ , as incógnitas do problema, e das demais variáveis do passo anterior:

$$\ddot{\mathbf{Y}}_{n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{Y}_{n+1} - \mathbf{Q}(t_n), \quad (4.58)$$

$$\dot{\mathbf{Y}}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{Y}_{n+1} + \mathbf{R}(t_n) - \gamma \Delta t \mathbf{Q}(t_n), \quad (4.59)$$

em que:

$$\mathbf{Q}(t_n) = \frac{\mathbf{Y}_n}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{\mathbf{Y}}_n}{\beta \Delta t} + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{Y}}_n, \quad (4.60)$$

$$\mathbf{R}(t_n) = \dot{\mathbf{Y}}_n + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{Y}}_n. \quad (4.61)$$

Utilizando as equações Equação 4.58 e Equação 4.59 na equação do equilíbrio em forma matricial (Equação 4.54), tem-se para o instante  $t_{n+1}$  a seguinte relação:

$$\mathbf{F}_{n+1}^{int} - \mathbf{F}_{n+1}^{ext} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \mathbf{Y}_{n+1} - \mathbf{M}\mathbf{Q}_n + \mathbf{C}\mathbf{R}_n + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \mathbf{Y}_{n+1} - \gamma \Delta t \mathbf{C}\mathbf{Q}_n = \mathbf{0}, \quad (4.62)$$

Pode-se escrever ainda o problema não linear definido pela Equação 4.62 em função do resíduo da equação governante discretizada no espaço e no tempo, como:

$$\mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}) = \mathbf{F}_{n+1}^{int} - \mathbf{F}_{n+1}^{ext} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \mathbf{Y}_{n+1} - \mathbf{M}\mathbf{Q}_n + \mathbf{C}\mathbf{R}_n + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \mathbf{Y}_{n+1} - \gamma \Delta t \mathbf{C}\mathbf{Q}_n = \mathbf{0}. \quad (4.63)$$

O problema não linear da Equação 4.63 é resolvido por meio do método iterativo de Newton-Raphson. Para isso, realiza-se uma expansão em série de Taylor de primeira ordem:

$$\mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}^{i+1}) \approx \mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}^i) + \Delta \mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}^i) \Delta \mathbf{Y}_{n+1}^i \quad (4.64)$$

em que  $i$  indica o índice da iteração atual. Na primeira iteração para o cálculo de  $\mathbf{Y}_{n+1}$  utiliza-se como predição da iteração anterior os valores das variáveis no passo de tempo  $n$ . O método de Newton-Raphson consiste em resolver o seguinte sistema:

$$\Delta \mathbf{R}_S (\mathbf{Y}_{n+1}^i) \Delta \mathbf{Y}_{n+1}^i = -\mathbf{R}_S (\mathbf{Y}_{n+1}^i) \quad (4.65)$$

com:

$$\Delta \mathbf{R}_S (\mathbf{Y}_{n+1}^i) = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{Y}^2} = \frac{\partial^2 \mathbb{U}_e}{\partial \mathbf{Y}^2} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t}. \quad (4.66)$$

A cada iteração de Newton-Raphson atualiza-se a posição, a aceleração e a velocidade de acordo com as seguintes equações:

$$\mathbf{Y}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{Y}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{Y}_{n+1}^i \quad (4.67)$$

$$\ddot{\mathbf{Y}}_{n+1}^{i+1} = \frac{\mathbf{Y}_{n+1}^{i+1}}{\beta \Delta t^2} + \mathbf{Q}_n \quad (4.68)$$

$$\dot{\mathbf{Y}}_{n+1}^{i+1} = \frac{\gamma \mathbf{Y}_{n+1}^{i+1}}{\beta \Delta t} + \mathbf{R}_n - \gamma \Delta t \mathbf{Q}_n \quad (4.69)$$

Para mais detalhes a cerca da obtenção das matrizes e vetores do método, recomenda-se a consulta de Coda (2018).

#### 4.3.3 Implementação Computacional

O código empregado para a simulação das estruturas de cascas neste trabalho foi desenvolvido anteriormente dentro do grupo de pesquisas, sendo a versão utilizada aqui desenvolvida pelo doutorando Rosicley Junior Rodrigues Rosa, e empregada também no trabalho de mestrado de ??), ambos do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos - USP.

O código foi desenvolvido em linguagem C++ utilizando paralelização em protocolo MPI e conta com elementos triangulares de 3, 6 ou 10 nós, respectivamente com aproximação linear, quadrática e cúbica. Ressalta-se que a implementação conta com uma estratégia de acoplamento entre elementos não coplanares, que pode ser vista em Coda (2018). O algoritmo que descreve a implementação computacional pode ser visualizado em Alg. 2. No algoritmo a variável  $\mathbf{X}$  consiste em um vetor das variáveis nodais na configuração inicial.

### 4.4 Exemplo de aplicação - Casca cilíndrica com *snap through* dinâmico

Nesta seção apresenta-se um problema clássico que trata-se de uma casca cilíndrica submetida a um carregamento concentrado em seu centro geométrico. Proposto inicialmente no trabalho de (Kuhl; Ramm, 1999), o problema apresenta grande não-linearidade geométrica devido ao efeito de *snap-through*.

---

**Algoritmo 2** Algoritmo para problemas não-lineares dinâmicos utilizando MEF posicional

- 1: Adota-se  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$ ;
- 2: **para** o passo de tempo 0 até  $T$  **faca**
- 3:     *i* = 0;
- 4:     Predição da solução:

$$\mathbf{Y}_{n+1}^0 = \mathbf{Y}_n, \quad (4.70)$$

$$\dot{\mathbf{Y}}_{n+1}^0 = \dot{\mathbf{Y}}_n, \quad (4.71)$$

$$\ddot{\mathbf{Y}}_{n+1}^0 = \ddot{\mathbf{Y}}_n; \quad (4.72)$$

- 5:     Calcula-se nível de força aplicado  $\mathbf{F}_{n+1}^{ext}(t_{n+1})$  e/ou as posições prescritas  $\mathbf{Y}_{n+1}$ ;
- 6:     Calculam-se os valores de  $\mathbf{Q}_n$  (Equação 4.60) e  $\mathbf{R}_n$  (Equação 4.61);
- 7:     **enquanto** ( $\epsilon <$  tolerância) **faca**
- 8:         *i*++;
- 9:         Cálculo do incremento da variável do problema:  $\mathbf{Y}_{n+1}^i$  de acordo com a Equação 4.65;
- 10:        Atualização da solução: calculada de acordo com Equação 4.67, Equação 4.68 e Equação 4.69.
- 11:        Cálculo do erro:

$$\epsilon = \|\Delta \mathbf{R}_S(\mathbf{Y}_{n+1}^{i+1})\|_{L^2} \quad (4.73)$$

ou,

$$\epsilon = \|\Delta \mathbf{Y}_{n+1}^{i+1}\|_{L^2} \quad (4.74)$$

- 12:     **fim enquanto**
- 13:     Atualiza-se a solução do passo anterior:

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{Y}_{n+1}, \quad (4.75)$$

$$\dot{\mathbf{Y}}_n = \dot{\mathbf{Y}}_{n+1}, \quad (4.76)$$

$$\ddot{\mathbf{Y}}_n = \ddot{\mathbf{Y}}_{n+1}; \quad (4.77)$$

- 14: **fim para**
- 

A geometria do problema em questão é apresentada na Figura ??, sendo a espessura da casca equivalente a 0,1m. A malha de elementos finitos que representa a superfície média da estrutura utilizada pode ser visualizada na Figura ??, a qual é composta por 104 elementos quadráticos e 233 nós.

Os contornos esquerdo e direito da chapa são considerados simplesmente apoiados. O carregamento aplicado ao ponto central (ponto A)  $P(t)$  é aplicado linearmente no intervalo  $t = 0s$  até  $t = 0,2s$ , com  $P(0) = 0kN$  e  $P(2s) = 200000kN$ , e então mantido constante. As características físicas do material utilizado são:  $E = 200GPa$ ,  $\nu = 0,25$  e  $\rho = 10000kg/m^3$  e o passo de tempo adotado na simulação é  $\Delta_t = 0,001s$ .

O deslocamento vertical do nó central da casca obtido nesse trabalho pode ser