

ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA APLICADA À DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL

A Análise Isogeométrica (IGA) é uma técnica numérica introduzida por ??) para obtenção de soluções aproximadas de equações diferenciais. O método pode ser entendido como uma generalização do método dos elementos finitos clássicos a partir do uso de funções base especiais.

Na Análise Isogeométrica, as funções base escolhidas na discretização da geometria do problema e de suas variáveis são aquelas utilizadas nos sistemas CAD, sendo as funções do tipo NURBS as mais aplicadas (ver, por exemplo, ??)). O grande impulso para o desenvolvimento da técnica foi proporcionar a integração entre a engenharia de *design*, com modelos baseados em CAD, e as simulações numéricas, com modelos principalmente baseados no MEF, de forma que ambas trabalhem com somente um modelo geométrico.

A IGA apresenta vantagens significativas, uma vez que permite a representação exata de diversas geometrias comuns, como seções cônicas, círculos, cilindros, esferas e elipsoides, além de dispor de algoritmos eficientes e estáveis para a geração de objetos NURBS. As funções NURBS, em particular, possuem propriedades matemáticas que as tornam adequadas para aplicações numéricas, destacando-se a elevada suavidade, a alta capacidade de aproximação e a possibilidade de refinamento local por meio da inserção de *knots*, os quais correspondem às coordenadas do espaço paramétrico nas quais as funções são definidas.

Este capítulo apresenta uma breve introdução à Análise Isogeométrica (IGA) e sua relação com o Método dos Elementos Finitos clássico. Inicialmente, são descritas as funções base B-spline, suas principais características e a construção de geometrias associadas.

Em seguida, introduzem-se as funções NURBS, destacando sua formulação e aplicações geométricas. A análise isogeométrica é então introduzida no contexto da dinâmica dos fluidos computacional, enfatizando suas particularidades quanto à discretização das variáveis e da geometria, aos métodos de integração numérica e à determinação dos parâmetros de estabilização. Por fim, são apresentados exemplos numéricos que validam a formulação proposta. As referências bibliográficas que fundamentam esta construção são ??) e ??).

1.1 Noções Gerais de IGA

No contexto do MEF isoparamétrico, a formulação é construída a partir da definição de uma malha e de seus elementos, os quais são representados tanto no espaço físico quanto no espaço paramétrico. Cada elemento é caracterizado pelas coordenadas de seus nós, sendo os graus de liberdade do problema associados aos valores das funções de forma interpolados nesses pontos nodais.

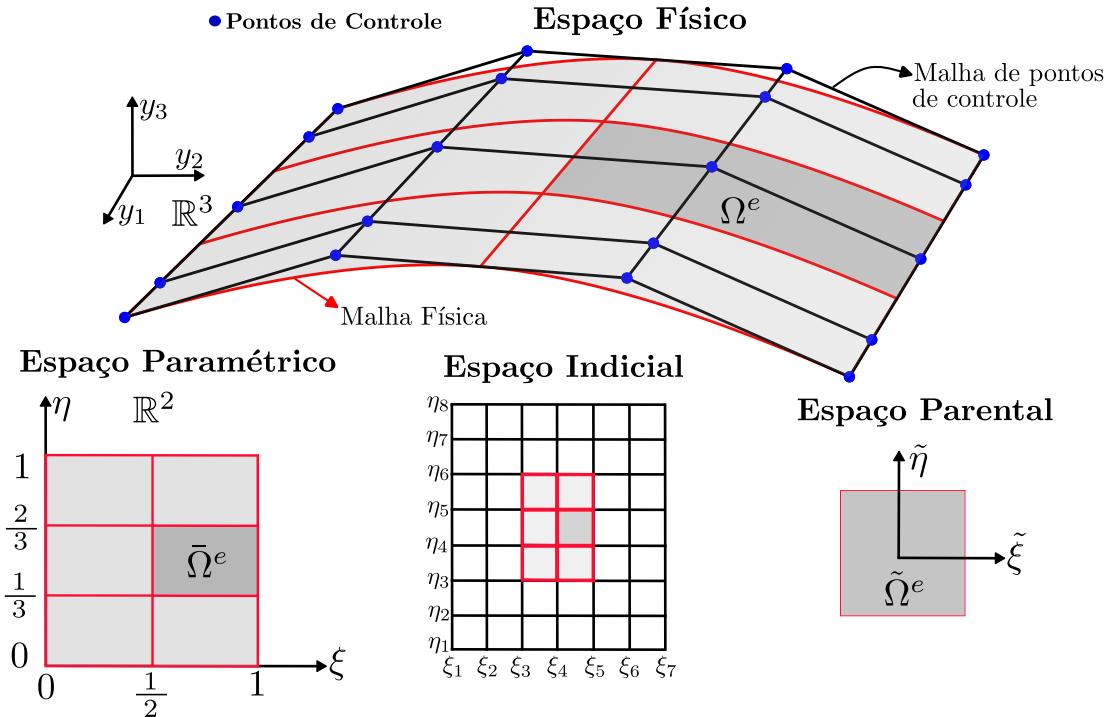
Dentro da IGA têm-se duas noções de malha: uma malha de pontos de controle e uma malha física. A malha de pontos de controle é muito semelhante a uma malha de elementos finitos, entretanto, ela não define a geometria, ela é apenas um esqueleto que controla o formato da geometria (ver Figura 1.1), visto que as funções de forma baseadas em *B-Splines* não são necessariamente interpolatórias. Dessa forma, os graus de liberdade do problema são associados aos pontos de controle, cujas posições não coincidem, necessariamente, com a geometria representada.

A malha física representa a geometria discretizada. Dentro da malha física podem ser definidos dois tipos de elementos, um macro-elemento, denominado de *patch*, e o *knot span*, que é o equivalente a um elemento finito e será denominado como célula ao longo desse texto. Cada *patch* é composto por um conjunto de células. Muitas geometrias simples podem ser discretizadas apenas com um *patch*, entretanto, a depender da complexidade da geometria ou de requisitos de parametrização, se torna necessário o uso de um conjunto de *patches*. As células são representações geométricas de linhas, superfícies e volumes nos espaços físicos unidimensional, bidimensional e tridimensional respectivamente.

Cada *patch* e suas respectivas células possuem uma representação no espaço paramétrico (Figura 1.1), que é o espaço onde as funções base são definidas. O espaço paramétrico, para os casos de funções univariadas, é definido por um *knot vector*, aqui denominado de vetor de *knots*, que é um conjunto de *knots* ou coordenadas paramétricas. As células são constituídas pelo espaço entre dois *knots* consecutivos. O espaço onde se representam todas as células, inclusive as nulas (quando mais de um *knot* ocupa a mesma posição), é chamado de espaço indicial.

Por fim, na análise isogeométrica conta-se ainda com o espaço parental, que é o espaço de integração numérica das funções base, em geral, definido de forma adimensional

Figura 1.1 – NURBS: espaço físico, espaço paramétrico, espaço indicial e espaço parental



Fonte: Elaborada pela autora

$[-1, 1]$ dentro de uma célula. Na Figura 1.1 pode-se observar os espaços relatados para uma superfície 3D construída por funções base quadráticas e apenas um *patch*.

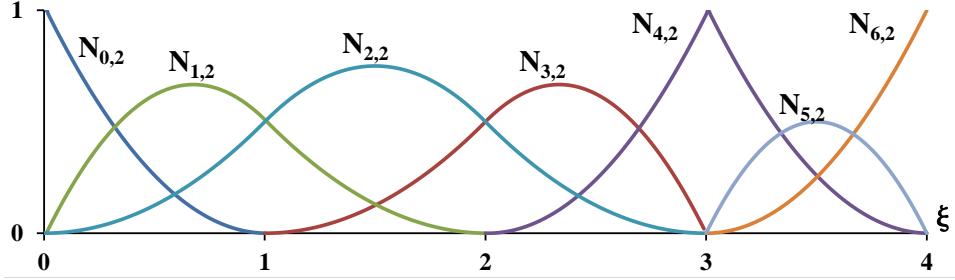
1.2 *B-Splines*

Para a construção de uma geometria NURBS, é fundamental compreender as funções base *B-splines* e suas particularidades. Essas funções servem como o ponto de partida para a definição de curvas, superfícies e sólidos NURBS, sendo essenciais para o entendimento da flexibilidade e controle geométrico oferecido por esse modelo. As *B-splines* são funções construídas através de um vetor de coordenadas paramétricas (vetor de *knots*) e que dependem de um conjunto de pontos de controle, sendo esses elementos responsáveis por estabelecer a forma geométrica e o grau de continuidade da curva ou superfície.

1.2.1 *Vetor de knots*

As funções *B-Splines*, utilizadas na construção das NURBS, são definidas em um espaço paramétrico que é comum a um conjunto de células ou *patch*. O espaço paramétrico unidimensional é construído através de um vetor de *knots*, que consiste em um conjunto

Figura 1.2 – *B-Splines quadráticas*



Fonte: Elaborada pela autora

- **Partição da Unidade:** $\sum_{i=0}^n N_{i,p}^b(\xi) = 1$;
- **Positividade:** Todas as funções base são positivas, ou seja, $N_{i,p}^b \geq 0, \forall \xi$;
- **Suavidade:** função de ordem p é, em geral, $p - 1$ vezes continua no contorno das células;
- **Suporte Compacto:** O suporte de cada $N_{i,p}^b$ está contido no intervalo $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$, ou seja, em cada célula, apenas $p + 1$ funções são não nulas.

A derivada de uma função de forma *B-Spline* pode ser calculada recursivamente em termos de funções base de ordem menor. Considerando uma função de ordem p e vetor de *knots* Ξ , a derivada da i -ésima função de forma pode ser escrita como:

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}^b(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}^b(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}^b(\xi). \quad (1.3)$$

Essa expressão pode ser generalizada para derivadas de ordem superior através de:

$$\frac{d^k}{d\xi^k} N_{i,p}^b(\xi) = \frac{p!}{(p-k)!} \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} N_{i+j,p-k}^b(\xi), \quad (1.4)$$

sendo k a k -ésima derivada da função $N_{i,p}^b(\xi)$ e:

$$\alpha_{0,0} = 1, \quad (1.5)$$

$$\alpha_{k,0} = \frac{\alpha_{k-1,0}}{\xi_{i+p-k+1} - \xi_i}, \quad (1.6)$$

$$\alpha_{k,j} = \frac{\alpha_{k-1,j} - \alpha_{k-1,j-1}}{\xi_{i+p+j-k+1} - \xi_{i+j}} \quad j = 1, \dots, k-1, \quad (1.7)$$

$$\alpha_{k,k} = \frac{-\alpha_{k-1,k-1}}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+k}}. \quad (1.8)$$

Algoritmos eficientes para a determinação das funções de forma *B-Splines* e de suas derivadas podem ser encontradas em ??).

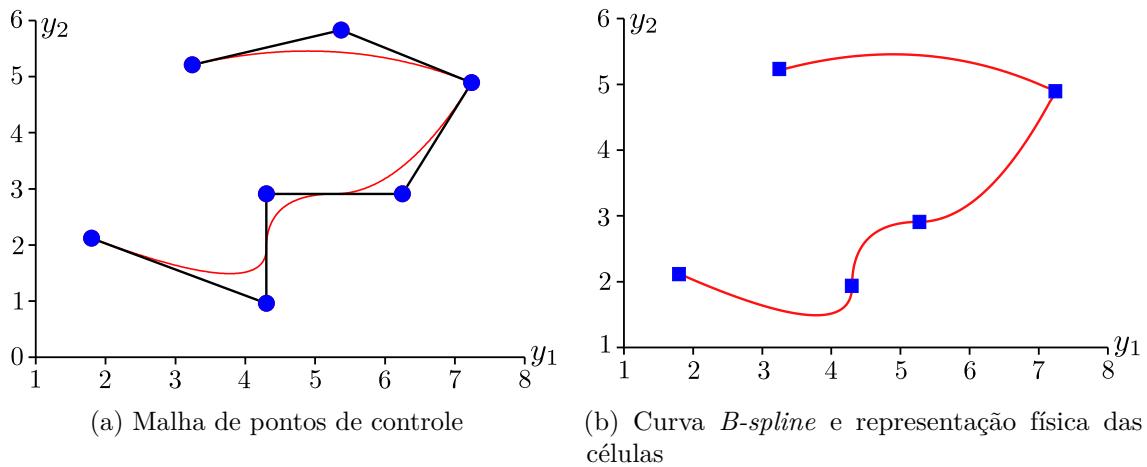
1.2.3 Geometrias *B-Splines*

Uma curva *B-Spline* é construída a partir da combinação linear entre funções base e um conjunto de pontos de controle. Considerando um conjunto de $n + 1$ funções base $N_{i,p}^b$ e respectivos pontos de controle $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{n_{\text{sd}}}$ com $i = 0, 1, \dots, n$, uma curva polinomial por partes *B-Spline* univariada é definida como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{y}(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}^b(\xi) \mathbf{B}_i, \quad (1.9)$$

com y_1 , y_2 e y_3 as componentes do vetor de coordenadas físicas \mathbf{y} . Utilizando as funções *B-Splines* apresentadas na Figura 1.2 e uma malha de $n + 1$ pontos de controle, obtém-se a curva apresentada na Subfigure 1.4a. Na Subfigure 1.4b pode-se observar as células físicas equivalentes a essa combinação.

Figura 1.3 – Curva *B-Spline*



Fonte: Elaborada pela autora

A partir da Subfigure 1.4a pode-se constatar que a curva *B-Spline* interpola o primeiro e o último ponto de controle, que é uma característica das curvas construídas com funções descritas a partir de vetores de *knots* abertos. Adicionalmente nota-se que, devido à multiplicidade do *knot* de coordenada paramétrica $\xi = 3$, existe um ponto de controle intermediário também interpolando a curva. Coordenadas paramétricas com multiplicidade maior ou igual ao grau polinomial p resultam, por definição, em interpolação dos pontos de controle associados. Além disso, a curva possui continuidade $C^{p-1} = C^1$ em todos os lugares, exceto em $\xi = 3$, onde equivale a $C^{p-2} = C^0$, que trata-se de uma propriedade herdada das funções base.

Conforme observado nas figuras: Subfigure 1.4a e Subfigure 1.4b, muitas das características de curvas *B-Splines* são consequências das propriedades das funções *B-splines*. Outra importante propriedade dessas curvas é a Transformação Afim, que significa que uma transformação afim de uma curva B-spline é obtida aplicando a transformação

sólidos, aplicando-se a inserção de *knots* nas direções paramétricas desejadas.

1.3 NURBS

Uma geometria NURBS no $\mathbb{R}^{n_{sd}}$ pode ser entendida, do ponto de vista geométrico, como a transformação projetiva de uma geometria *B-Spline* no $\mathbb{R}^{n_{sd}+1}$. Nesse contexto, geometrias cônicas podem ser construídas exatamente através de curvas quadráticas por partes. Na Subfigure 1.6b, apresenta-se uma curva NURBS $\mathbf{C}(\xi)$ no \mathbb{R}^2 , que representa de forma exata uma circunferência, a qual foi obtida a partir da transformação projetiva de uma curva quadrática por partes *B-Spline* ($\mathbf{C}^w(\xi)$) no \mathbb{R}^3 . A transformação é realizada através da projeção em um plano $y_3 = 1$ de cada ponto da curva projetiva ($\mathbf{C}^w(\xi)$) através de um raio que passa pela origem.

O mesmo procedimento de transformação pode ser realizado para obtenção dos pontos de controle NURBS (Subfigure 1.6a) a partir de pontos de controle projetivos (\mathbf{B}_i^w), usando a seguinte relação:

$$(\mathbf{B}_i)_j = (\mathbf{B}_i^w)_j / w_i, \quad j = 1, \dots, n_{sd}, \quad (1.16)$$

$$w_i = (\mathbf{B}_i^w)_{n_{sd}+1}, \quad (1.17)$$

com $(\mathbf{B}_i)_j$ o j -ésimo componente do vetor \mathbf{B}_i e w_i refere-se ao i -ésimo peso, que consiste na coordenada y_3 dos pontos de controle projetivos para o exemplo citado.

Para a aplicação dessa mesma transformação para cada ponto da curva, será utilizado um conceito de função peso, dada por:

$$W(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}^b(\xi) w_i, \quad (1.18)$$

e a curva NURBS pode ser definida como:

$$(\mathbf{C}(\xi))_j = (\mathbf{C}^w(\xi))_j / W(\xi), \quad j = 1, \dots, n_{sd}. \quad (1.19)$$

Tanto \mathbf{C}^w como $W(\xi)$ são funções polinomiais por partes, dessa forma, $\mathbf{C}(\xi)$ é uma função racional por partes.

1.3.1 Funções base NURBS e suas derivadas

Matematicamente, uma função NURBS é obtida pela rationalização de uma função *B-Spline*. A rationalização dessa função ocorre através da razão entre dois polinômios. Uma função racional NURBS (R) é construída através da seguinte expressão:

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}^b(\xi) w_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}^b(\xi) w_i}. \quad (1.20)$$

Q será reescrita como:

$$\mathbf{Q} = \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi} \right). \quad (1.37)$$

Para a obtenção de $\hat{\mathbf{Q}}$, de acordo com a ??, define-se a matriz **D** para análise isogeométrica, de acordo com o trabalho de ??), como:

$$\mathbf{D} = \left(\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial \tilde{\xi}} \right), \quad (1.38)$$

que representa a relação entre o espaço paramétrico de preferência, onde o comprimento efetivo da célula deve ser medido, e o espaço de integração, onde são definidos os pontos de quadratura.

O espaço paramétrico de preferência, para problemas unidimensionais, é definido para cada célula por meio de uma interpolação usando polinômios de Bernstein B_b^p de ordem p :

$$\hat{\xi}(\tilde{\xi}) = \sum_{b=0}^p \hat{\xi}_b B_b^p(\tilde{\xi}), \quad (1.39)$$

com os pontos de controle de Bézier, $\hat{\xi}_b$, definidos igualmente espaçados da seguinte maneira:

$$\hat{\xi}_b = \frac{\Delta \hat{\xi}}{p} b, \quad (1.40)$$

sendo $\Delta \hat{\xi}$ o comprimento paramétrico da célula de Bézier.

Os pontos de controle correspondentes no espaço de integração são dados por:

$$\tilde{\xi}_a = \frac{\Delta \hat{\xi}}{p} \sum_{b=0}^p b \{ \mathbf{C}^{-1} \}_{ba}, \quad (1.41)$$

com $a = 0, \dots, p$. **C** consiste no operador de extração de Bézier, que relaciona as funções B-spline globais às funções de Bernstein locais, cuja obtenção, nesse trabalho, é realizada de acordo com o exposto em ??).

O comprimento efetivo da célula para $a = 1, \dots, p$ pode ser calculado por:

$$\Delta \tilde{\xi}_a = \tilde{\xi}_a - \tilde{\xi}_{a-1} \quad (1.42)$$

$$= \frac{\Delta \hat{\xi}}{p} \sum_{b=0}^p b \left(\{ \mathbf{C}^{-1} \}_{ba} - \{ \mathbf{C}^{-1} \}_{ba-1} \right). \quad (1.43)$$

A partir disso pode-se definir o razão entre o comprimento da célula de Bézier e o comprimento efetivo da célula. Considerando um problema 1D, uma das proposta dos autores para D , utilizada nesse trabalho, chama-se *RQD-MAX* e consiste em:

$$D = \frac{\Delta \hat{\xi}}{\min_{a=1,\dots,p} \Delta \tilde{\xi}_a}, \quad (1.44)$$

resultando em:

$$D = p \left(\min_{a=1,\dots,p} \sum_{b=0}^p b \left(\{\mathbf{C}^{-1}\}_{ba} - \{\mathbf{C}^{-1}\}_{ba-1} \right) \right)^{-1} \quad (1.45)$$

$$= p \max_{a=1,\dots,p} \left(\sum_{b=0}^p b \left(\{\mathbf{C}^{-1}\}_{ba} - \{\mathbf{C}^{-1}\}_{ba-1} \right) \right)^{-1} \quad (1.46)$$

Para múltiplas dimensões o coeficiente de transformação D é obtido individualmente para cada uma das direções do espaço paramétrico, e os componentes da matriz de transformação \mathbf{D} são determinados como:

$$D_{ij} = D^i \delta_{ij}, \quad (1.47)$$

$i, j = 1, \dots, n_{pd}$, sendo n_{pd} a dimensão do espaço paramétrico.

1.5 Verificação e aplicações

Para aplicação da IGA em problemas da DFC utilizou-se o roteiro da implementação computacional apresentada no ??, levando-se em consideração as mudanças na formulação salientadas na seção 1.4. Os exemplos escolhidos para a verificação do código computacional foram o escoamento sobre um cilindro, e um escoamento sobre canal com degrau, em ambas análises, fez-se uso de células 3d. Os resultados obtidos são apresentados nas subseções sequentes.

1.5.1 Escoamento sobre um cilindro

1.5.1.1 Geração da malha NURBS

Para a análise do problema de escoamento sobre um cilindro utilizando-se IGA com células 3d, por se tratar de uma geometria de simples complexidade, a malha foi desenvolvida pela própria autora. Para isso, inicialmente, com base nas dimensões bidimensionais do exemplo apresentado na ??, dividiu-se o domínio físico em 12 *patches*, conforme pode ser observado no esquema apresentado na Figura 1.7.

O processo de geração da malha, simplificadamente, consiste em se escolher vetores de *knots*, pontos de controle, e pesos adequados para a descrição da geometria de cada *patch*, assegurando simultaneamente o refinamento necessário para a análise numérica.

Para a geração do primeiro *patch*, P_0 , o qual contém 1/4 do cilindro em seu interior, iniciou-se pela discretização de uma circunferência definida na direção paramétrica ξ . Utilizando o número mínimo de pontos de controle necessários para representar exatamente 1/4 de circunferência, de diâmetro D , com o uso de funções quadráticas NURBS, o vetor de *knots* aberto foi definido por: $\Xi = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$, os pontos de controle como: $\mathbf{B}_0 = [\frac{\sqrt{2}D}{4}, -\frac{\sqrt{2}D}{4}, 0]$, $\mathbf{B}_1 = [\frac{D}{\sqrt{2}}, 0, 0]$, $\mathbf{B}_2 = [\frac{\sqrt{2}D}{4}, \frac{\sqrt{2}D}{4}, 0]$, e os pesos: $w_0 = 1$,

$w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $w_2 = 1$. A disposição dos pontos de controle e a curva resultante, podem ser observados na Subfigure 1.9a.

Na sequência realizou-se o procedimento de refinamento por inserção sucessiva de coordenadas paramétricas no vetor de *knots*. O algoritmo utilizado para este procedimento pode ser encontrado em ??). Na Subfigure 1.9b apresenta-se um exemplo dos pontos de controle resultantes após a inserção das coordenadas paramétricas $1/4, 1/2$ e $3/4$. Essa inserção resultará em três novas células físicas. A quantidade de coordenadas paramétricas a ser inserida depende da discretização requerida à análise numérica.

Dando continuidade a descrição exemplificativa da geometria do *patch* P_0 , gerou-se uma curva na direção paramétrica ξ que define o contorno direito do domínio. A curva é definida considerando o vetor de *knots* atualizado $\Xi = [0, 0, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1, 1, 1]$, e, consiste em uma reta cujas coordenadas de suas extremidades inicial e final são: $\mathbf{y}_0 = [2, -2, 0]$ e $\mathbf{y}_1 = [2, 2, 0]$, respectivamente. Os 6 pontos de controle são distribuídos sobre a reta através de um espaçamento não uniforme: nas extremidades, a distância entre pontos consecutivos corresponde à metade do espaçamento adotado no interior, enquanto a região central é subdividida uniformemente, conforme pode ser observado na Subfigure 1.10a. Essa distribuição não uniforme dos pontos de controle, proporcionada para essa discretização, uma distribuição uniforme das células mapeadas no espaço físico. Para essa curva, os todos os pesos foram definidos como 1.

A superfície do domínio foi gerada discretizando-se a direção η do espaço paramétrico. Para isso, os $m + 1$ pontos de controle nessa direção foram posicionados ao longo das retas que conectam os pontos de controle da primeira camada (circunferência) aos da última camada (reta). A distribuição desses pontos seguiu uma progressão geométrica, de modo que as células menores se localizassem próximas ao cilindro, captando adequadamente os efeitos de camada limite. Para garantir que essa distribuição também se refletisse nas células mapeadas para o espaço físico, aplicou-se um fator de correção aos pontos de controle intermediários $B_{i,1}$ e $B_{i,m-1}$, para $i = 0, 1, \dots, n$, deslocando-os em direção aos pontos de controle das extremidades.

A fim de exemplificar a geração da superfície, adotou-se a discretização mínima necessária, utilizando apenas três pontos de controle na direção η , para o emprego de funções quadráticas e vetor de *knots* aberto $\mathcal{H} = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$, conforme pode-se observar na Subfigure 1.10a. Na Subfigure 1.10b apresentam-se as células mapeadas do espaço paramétrico para o espaço físico. Salienta-se que os pontos de controle obtidos nessa etapa foram definidos com peso unitário.

Para a simulação numérica apresentada na sequência a quantidade de pontos de controle na direção η foi definida em função da necessidade de discretização para o problema. Para um vetor de *knots* abertos com coordenadas interiores de multiplicidade unitária, a quantidade de células (*ncel*) está relacionada a quantidade de pontos de controle por $ncel = npc - deg$, sendo *npc* o número de pontos de controle e *deg* o grau das funções

na direção paramétrica em questão.

Por fim, para a geração do sólido NURBS, com apenas uma camada de células na direção paramétrica ζ , correspondente à direção y_3 do espaço físico deste problema, foram utilizadas funções quadráticas, um vetor de *knots* aberto $\mathcal{Z} = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$, assim como pontos de controle distribuídos uniformemente e de peso unitário. Na Subfigure 1.11a pode-se observar a rede de pontos de controle resultante, na qual a nomenclatura dos pontos foi omitida para facilitar a visualização. Na Subfigure 1.11b apresenta-se a malha física derivada da discretização exemplificativa do *patch* P_0 .

Para os *patches* P_1 , P_2 e P_3 , utiliza-se a mesma parametrização de P_0 , obtendo-se seus pontos de controle por rotação dos pontos de controle de P_0 , de modo que cada um seja ajustado ao quadrante do cilindro correspondente.

Para a geração dos demais *patches* retangulares, P_4 à P_{11} , definiu-se a direção paramétrica ξ respectiva à direção física y_1 , η correspondente à y_2 e ζ à y_3 . A quantidade de pontos de controle em cada direção foi definida a partir do número de células desejadas para a análise numérica. Considerando o exposto anterior para o *patch* P_0 , a distribuição dos pontos de controle foi realizada de forma a se obter células físicas igualmente espaçadas, ou, arranjadas com um espaçamento que segue uma distribuição geométrica. Os pontos de controle foram definidos com peso unitário. Os vetores de *knots* são abertos e com espaçamento interior subdividido de maneira uniforme. As funções NURBS utilizadas foram quadráticas.

Destaca-se que na discretização de todos os *patches* é necessário garantir uma parametrização idêntica nos planos que apresentam fronteira com outro *patch*.

1.5.1.2 Análise numérica

Conforme exposto na ?? o estudo do problema de escoamento sobre um cilindro proporciona avaliar se o modelo computacional implementado é capaz de reproduzir os fenômenos relacionados à formação e desprendimentos de vórtices, além de propiciar a validação do código através da comparação dos coeficientes aerodinâmicos medidos ao longo do tempo com referências bibliográficas disponíveis na literatura especializada. Visando a verificação do código de IGA com células 3D analisa-se o problema do escoamento sobre o cilindro para $Re = 40$, $Re = 100$, e, $Re = 1000$.

O domínio do problema simulado é um volume retangular discretizado em função do diâmetro do cilindro e é apresentado na Subfigure 1.12a. A dimensão t na direção y_3 é equivalente à $0,01D$. Aplica-se um perfil de velocidade constante na entrada do domínio, $\mathbf{u} = [u_\infty, 0, 0]$, e condições de parede lisa são atribuídas às paredes superior e inferior, enquanto que para as frontal e dos fundos condições de simetria são aplicadas.

A malha isogeométrica utilizada é apresentada na Subfigure 1.12b e na Tabela 1.1 pode-se observar a quantidade de pontos de controle em cada uma das direções paramétricas utilizados na discretização de cada um dos *patches* que compõe a malha, resultando em

$$u_1 = V_{max} \left(1 - \left(\frac{(y_2 - s) - h/2}{h/2} \right)^2 \right), \quad (1.50)$$

com velocidade $V_{max} = 10m/s$ e $u_2 = u_3 = 0$ nesse contorno.

O escoamento sobre o degrau é caracterizado por produzir áreas de recirculação onde o fluido se separa e forma vórtices. A distância entre o degrau e o ponto de recolamento do vórtice principal, x_r , é uma das principais características verificadas nesse problema. A dimensão dos vórtices varia em função do número de Re, o qual é calculado de acordo com ??), por:

$$Re = \frac{\rho \left(\frac{2V_{max}}{3} \right) 2h}{\mu}. \quad (1.51)$$

Foram selecionados três diferentes número de Reynolds para as análises: $Re = 100$, $Re = 400$ e $Re = 800$, os quais são obtidos a partir da variação da viscosidade do fluido. Considerou-se $\rho = 1kg/m^3$, $\Delta t = 0,05s$, e $\rho_\infty = 0,5$.

De acordo com os experimentos realizados por ??), as medições do comprimento do vórtice primário, logo a jusante do degrau na parte inferior, identificam o regime do escoamento como laminar ($Re < 1200$), transiente ($1200 < Re < 6600$) e turbulento ($Re > 6600$). Além disso, o autor constatou em seus ensaios que para $Re < 400$ o escoamento é predominantemente bidimensional, enquanto que para Reynolds superiores, o escoamento apresenta regiões de comportamento tridimensional.

??) em suas análises constatou o surgimento de uma bolha de separação adicional ao longo do piso do canal, a jusante da separação primária, a qual desaparece para $Re > 2300$. Outra região de separação secundária também foi observada ao longo da parede superior, a jusante do degrau, desenvolvendo-se a partir de $Re = 400$ e permanecendo durante todo o regime de transição.

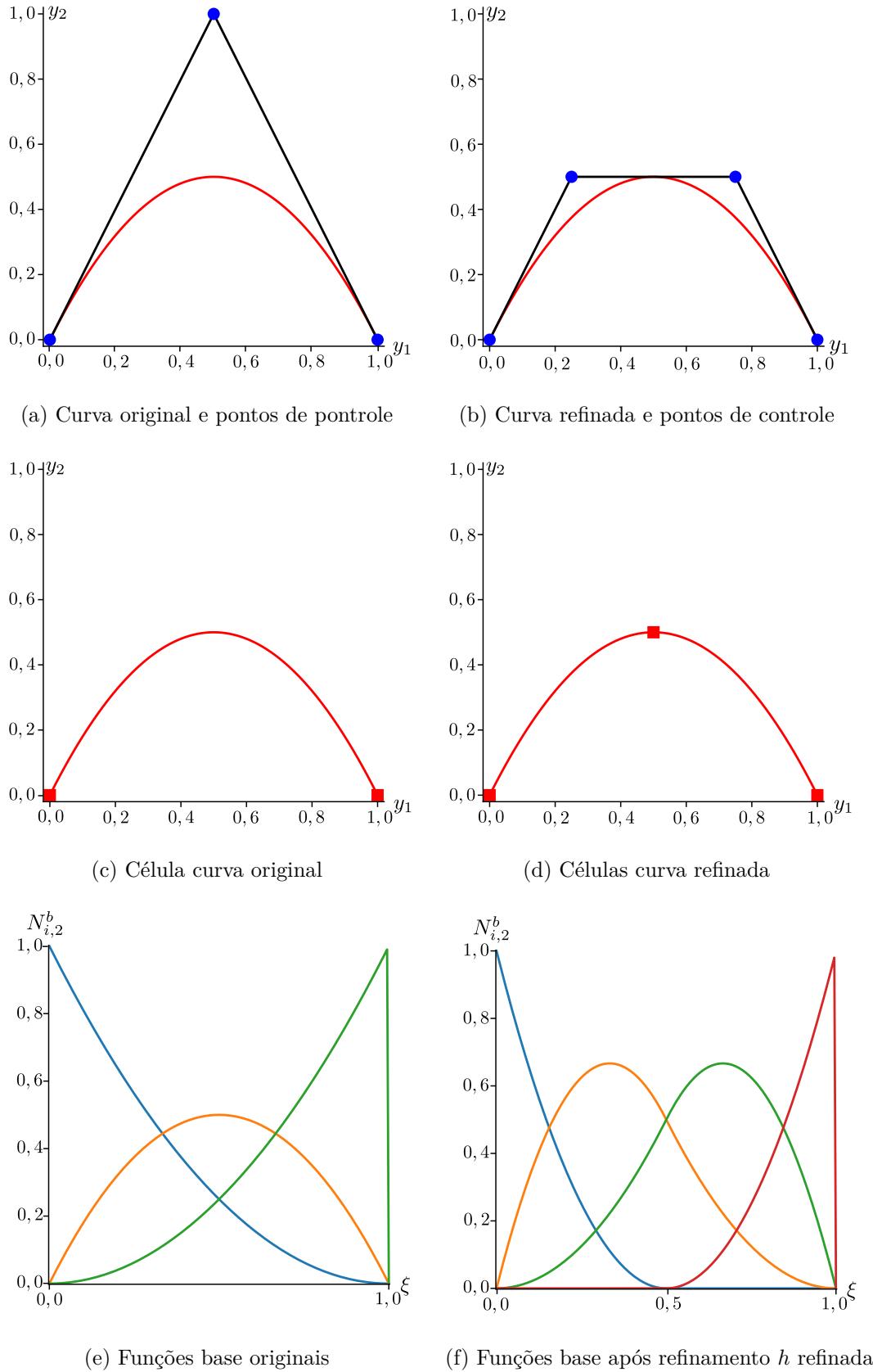
Na Figura 1.17 são apresentados os comprimentos de recolamento do vórtice primário adimensionais (x_r/s) obtidos nesse trabalho, juntamente com os valores adaptados dos ensaios experimentais de ??) e os resultados de análises 2d e 3d de ??). Com essa figura é possível observar que a medida que o número de Reynolds aumenta, os resultados obtidos do presente estudo se afastam dos valores de referência respectivos ao estudo experimental e da simulação tridimensional. Este fato ocorre visto que o ensaio experimental foi realizado em um canal com $2m$ profundidade na direção y_3 , enquanto que a simulação atual conta com apenas uma célula nessa direção, sendo então incapaz de captar os fenômenos tridimensionais que ocorrem a medida que o número de Reynolds cresce.

Na Subfigure 1.18 pode-se observar o campo de velocidade para o domínio completo e para a região do vórtice primário para $Re = 100$, enquanto que na Subfigure 1.19 e na Subfigure 1.20 são apresentados para $Re = 400$ e $Re = 800$ respectivamente. Para $Re = 800$ constatou-se a formação de um vórtice secundário na parede superior, conforme

havia sido relatado pelos autores previamente citados, conforme pode ser observado na Subfigure 1.21c.

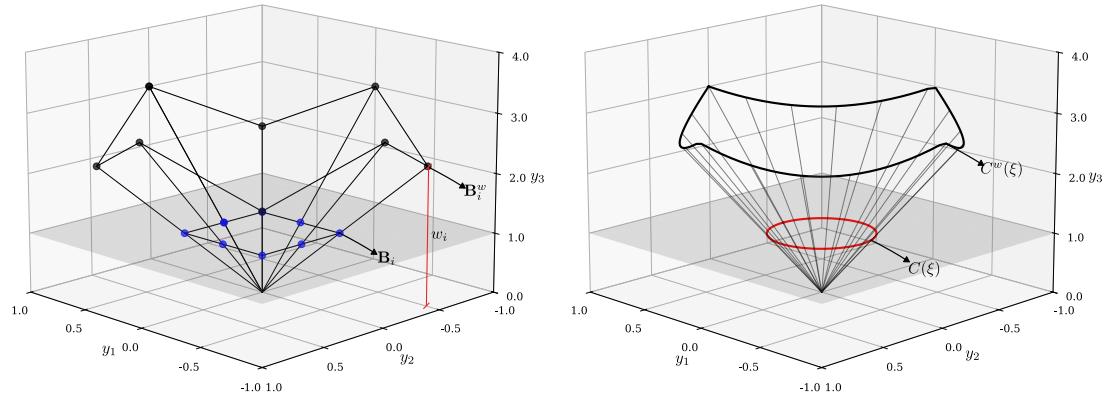
Por fim, na Subfigure 1.21 é possível observa-se os campos de pressão para todos os números de Reynolds simulados.

Figura 1.4 – Refinamento h para um curva B -Spline



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 1.5 – Projeção transformativa de entidade *B-Spline*

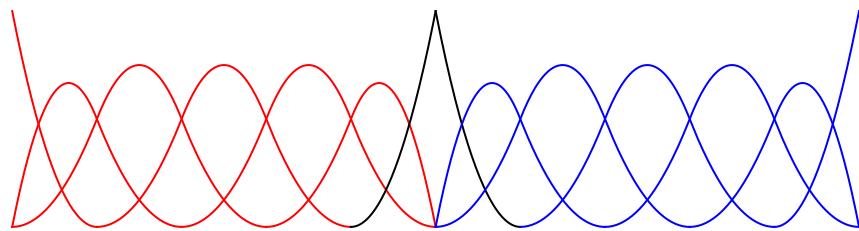


(a) Projeção transformativa malha de pontos de controle

(b) Projeção transformativa *B-Spline*

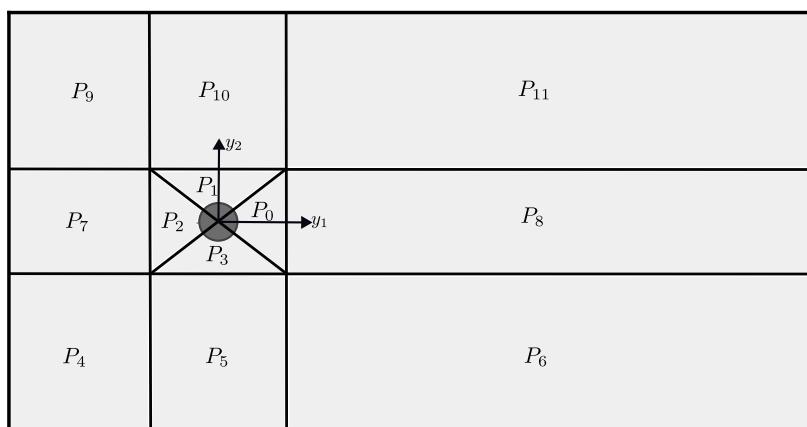
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 1.6 – Funções base univariadas na interface entre *Patches*



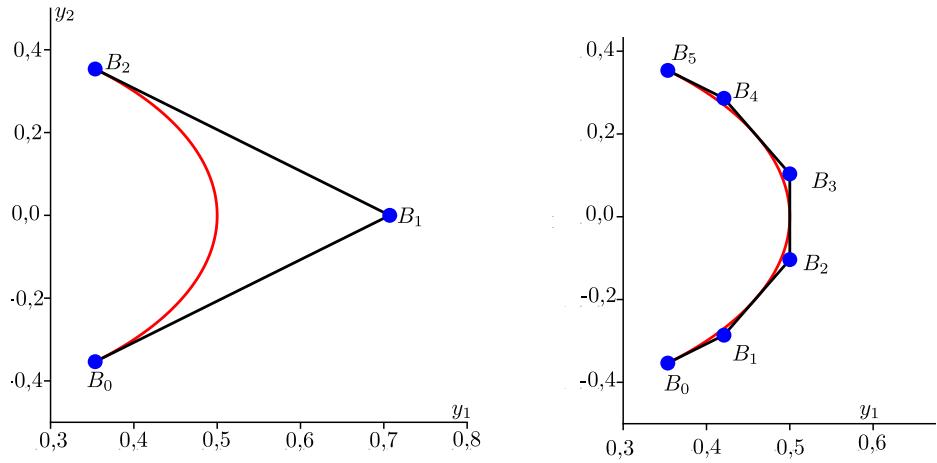
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 1.7 – Cilindro: Divisão dos *Patches*



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 1.8 – Cilindro: Obtenção da circunferência

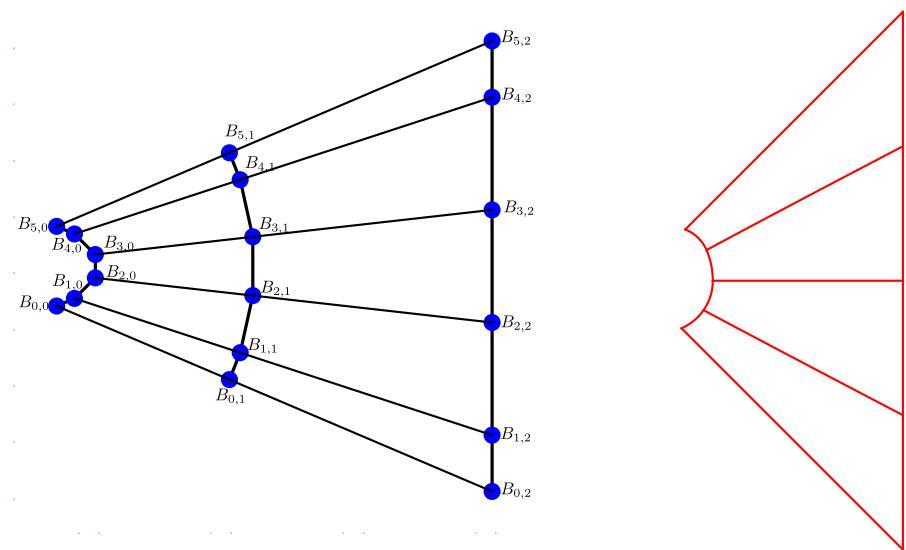


(a) Curva inicial e rede de pontos de controle

(b) Curva refinada e rede de pontos de controle

Fonte: Elaborada pela autora

Figura 1.9 – Cilindro: Obtenção da superfície

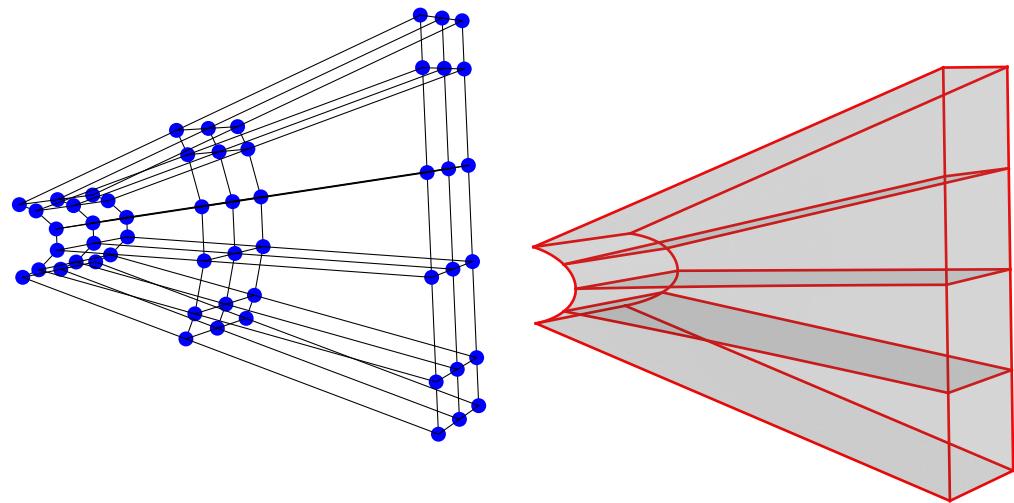


(a) Rede de pontos de controle superfície

(b) Malha física

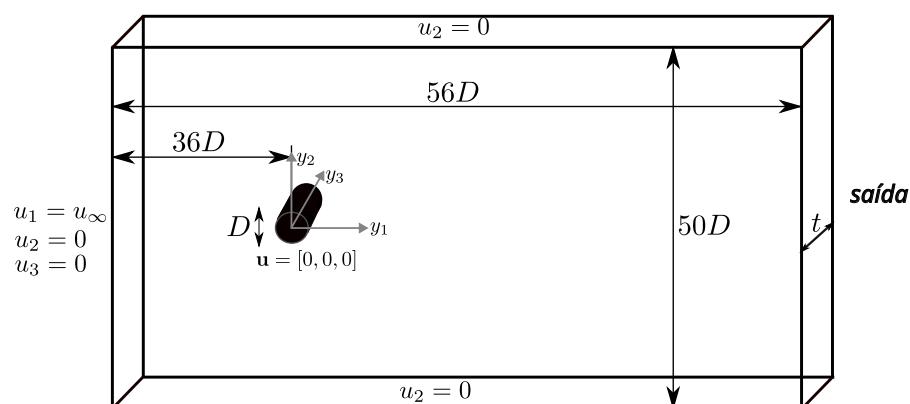
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 1.10 – Cilindro: Obtenção do sólido

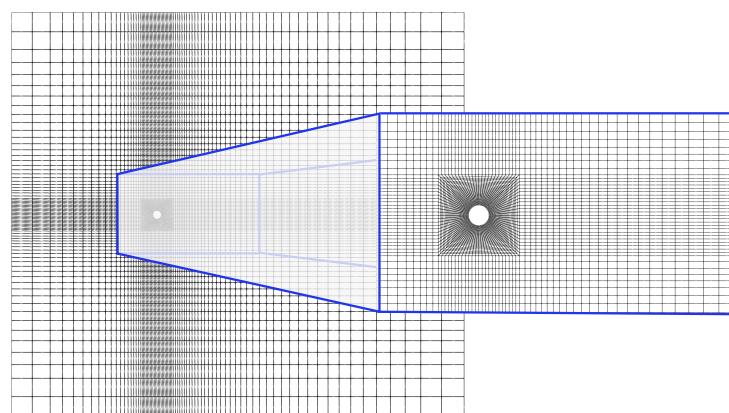


Fonte: Elaborada pela autora

Figura 1.11 – Cilindro: Malha de células físicas



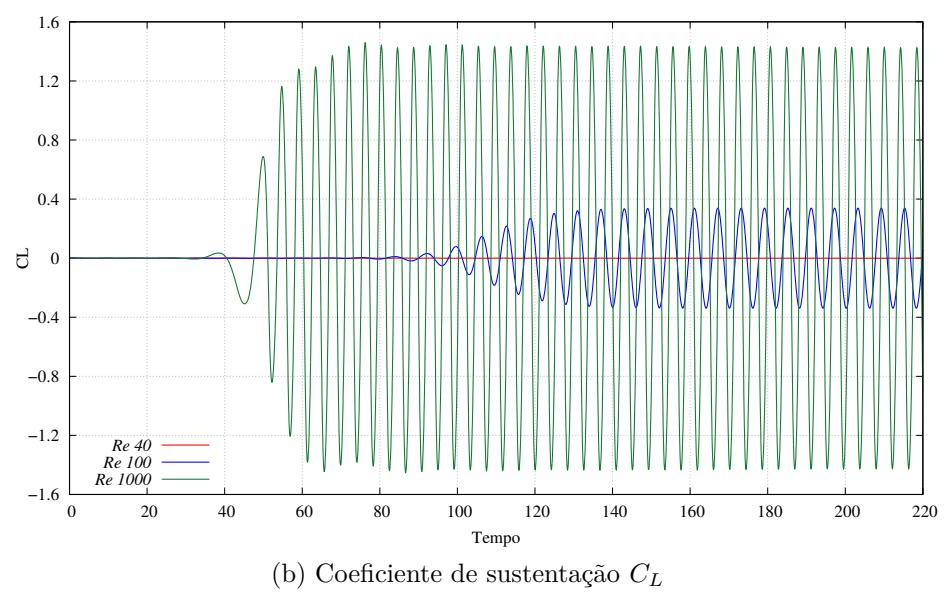
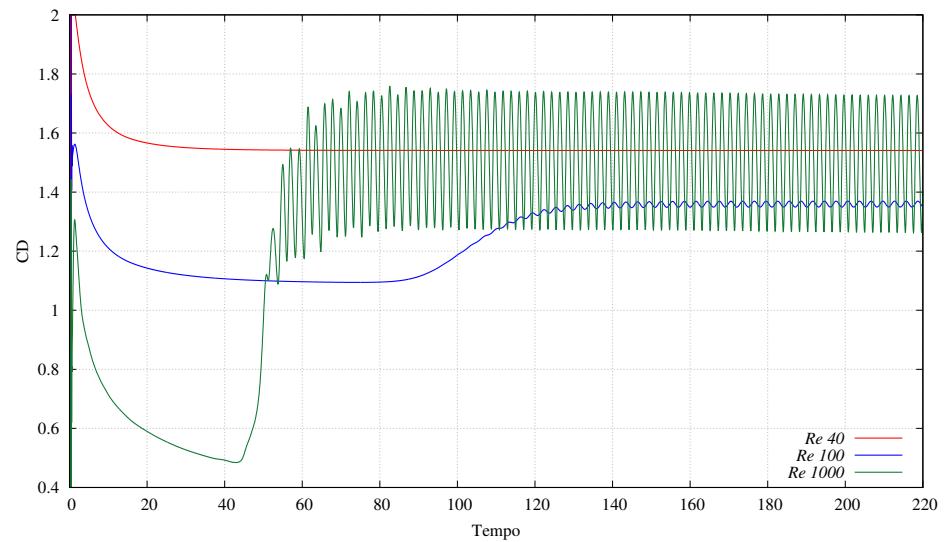
(a) Cilindro: Geometria e condições de contorno



(b) Discretização espacial - plano y_1y_2

Fonte: Elaborada pela autora

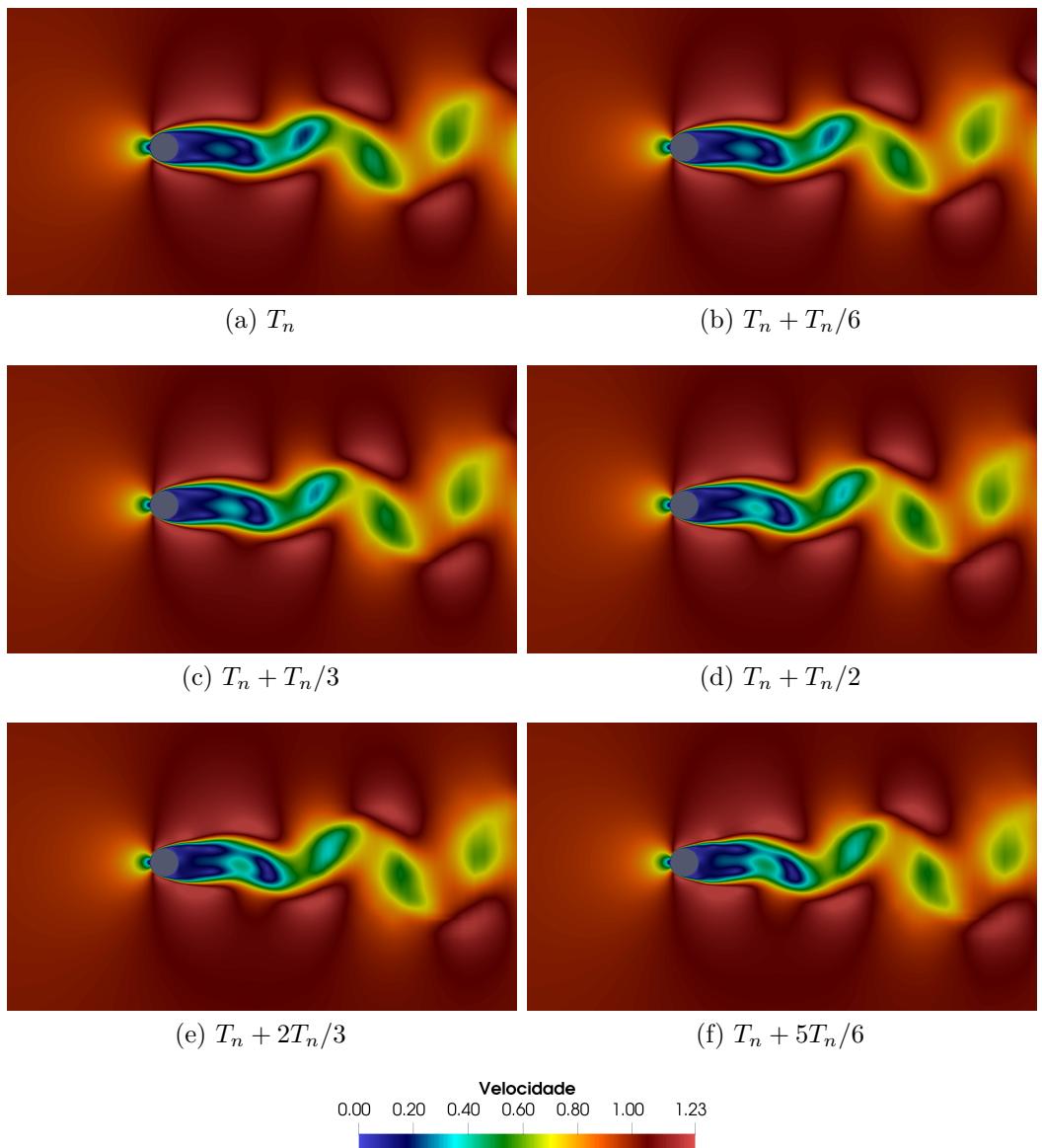
Figura 1.12 – Cilindro: Coeficientes aerodinâmicos



$Re\ 40$ ————— $Re\ 100$ ————— $Re\ 1000$ —————

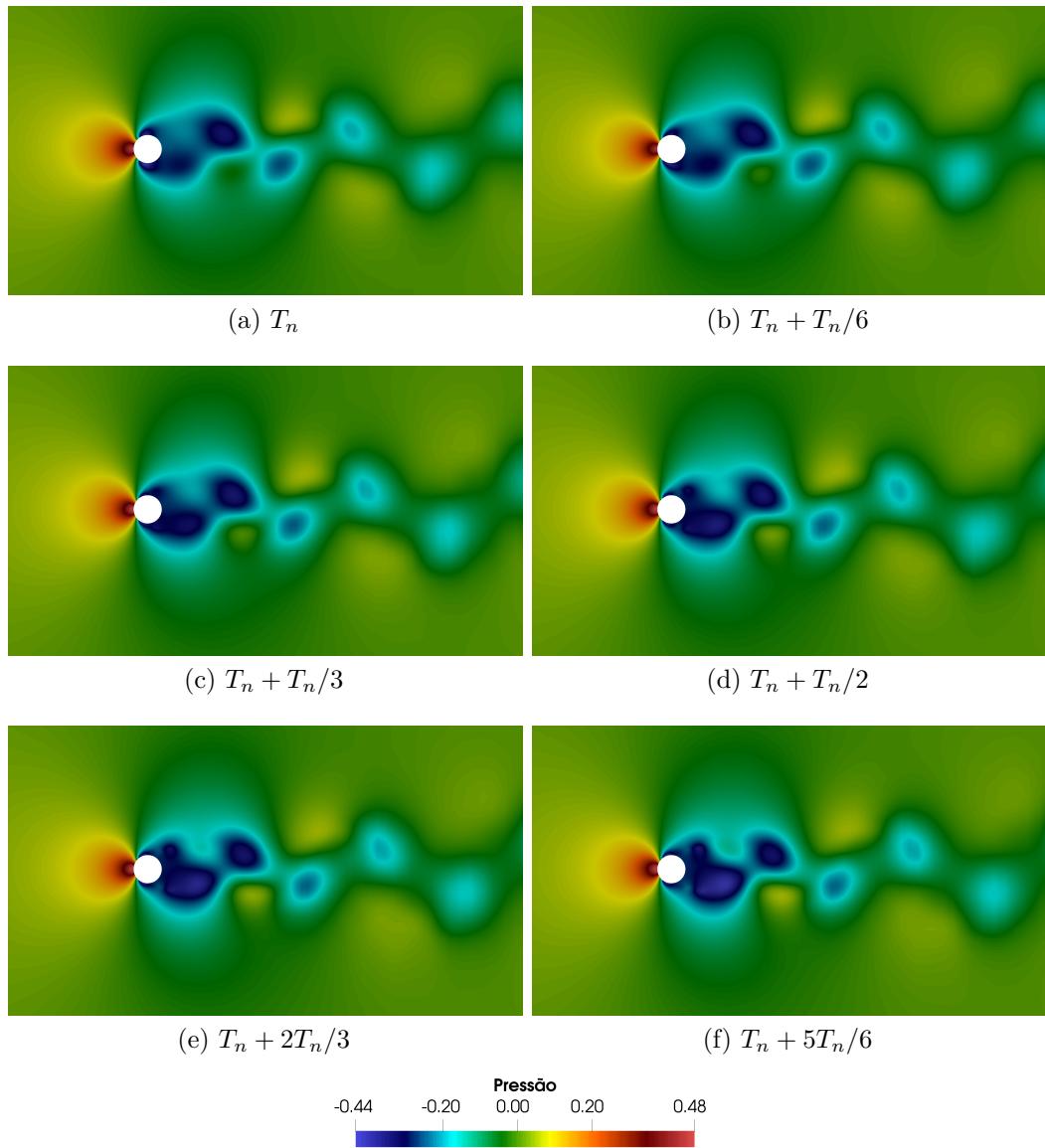
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 1.13 – Cilindro: Campos de velocidade para $Re = 1000$ - plano y_1y_2



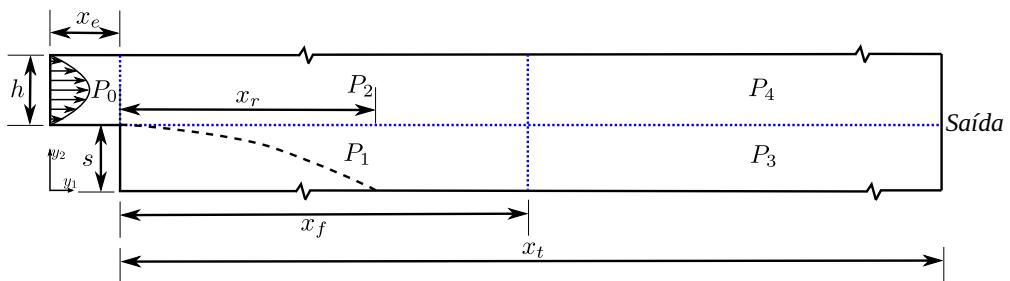
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 1.14 – Cilindro: Campos de pressão para $Re = 1000$ - plano y_1y_2



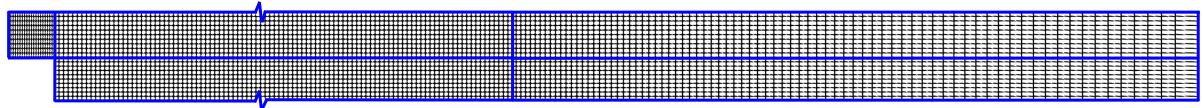
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 1.15 – Degrau: Geometria - plano y_1y_2



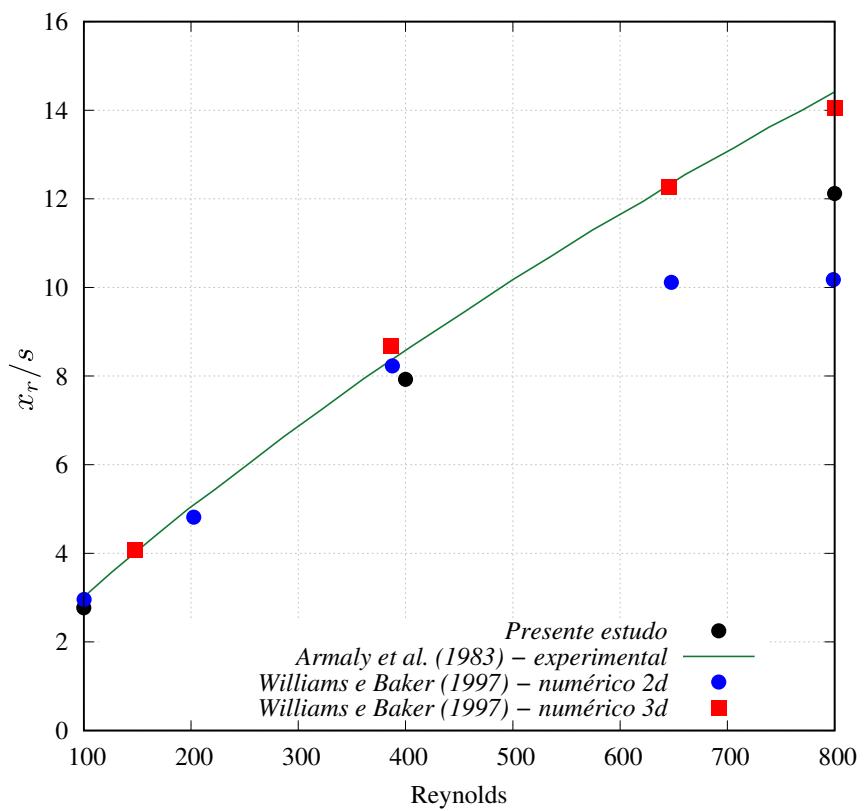
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 1.16 – Degrau: Malha de células físicas - plano y_1y_2



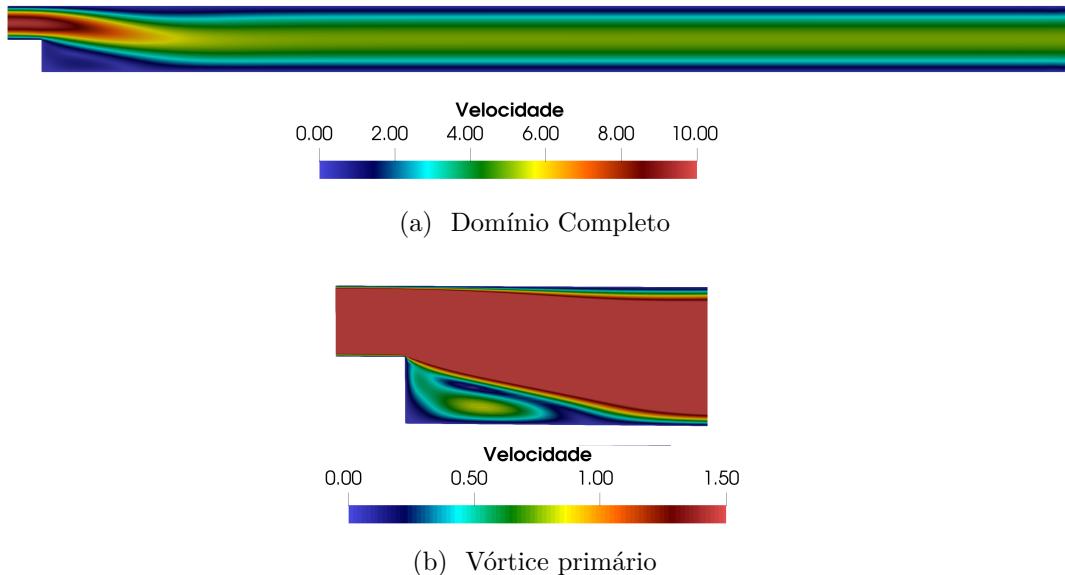
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 1.17 – Degrau: Comprimento do vórtice principal



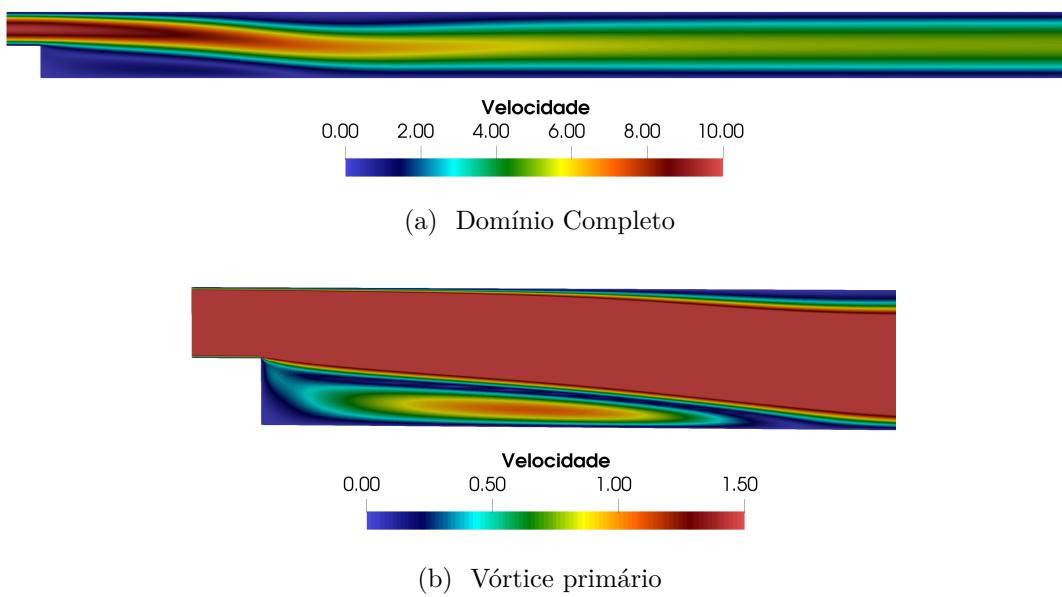
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 1.18 – Degrau: Campos de velocidade para $Re = 100$



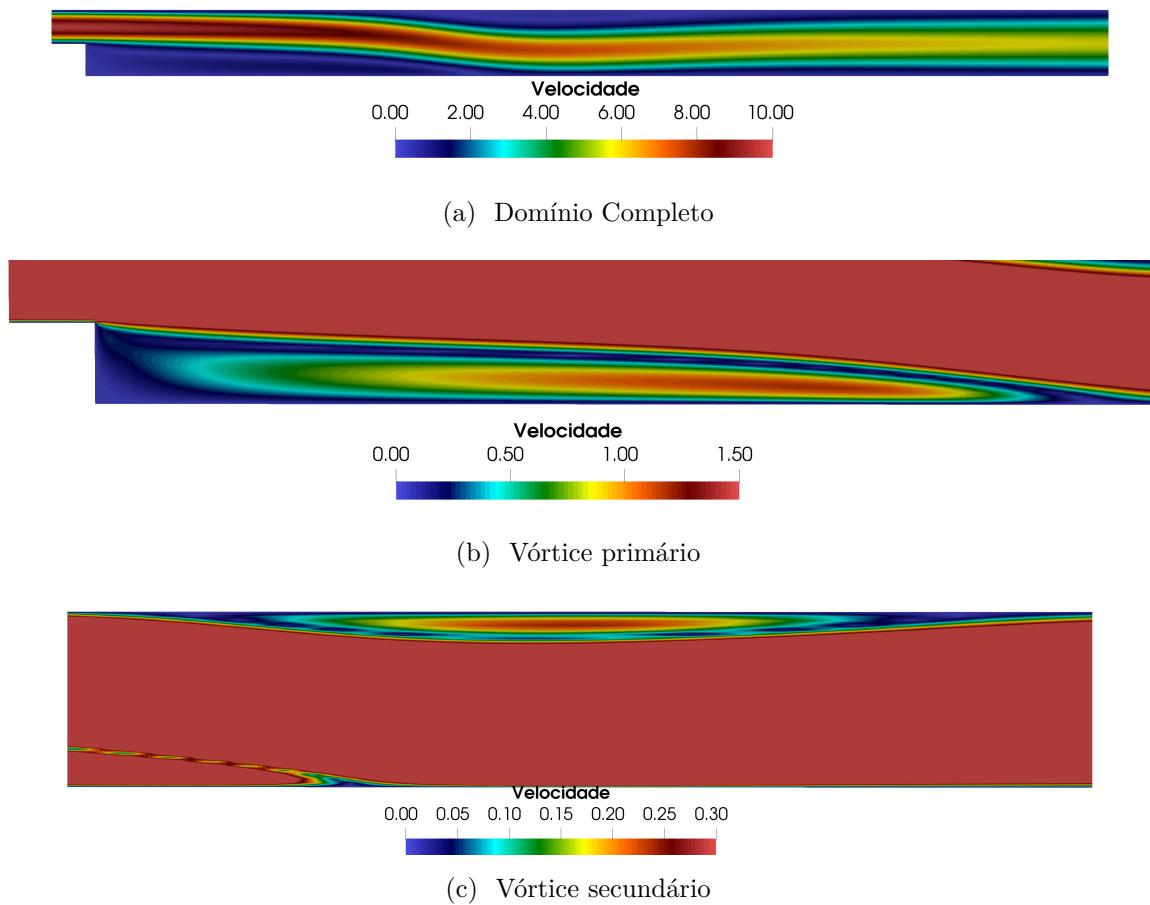
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 1.19 – Degrau: Campos de velocidade para $Re = 400$



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 1.20 – Degrau: Campos de velocidade para $Re = 800$



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 1.21 – Degrau: Campos de pressão



(a) $Re = 100$



(b) $Re = 400$



(c) $Re = 800$

Fonte: Elaborada pela autora