

TÉCNICA DE PARTIÇÃO DE DOMÍNIOS

Muitas aplicações de engenharia envolvem efeitos localizados, são os casos, por exemplo, de fissuras na mecânica dos sólidos, interface entre dois tipos diferentes de fluidos na mecânica dos fluidos, ou ainda, a camada limite na interface entre sólido e fluido, entre outros. Para uma análise computacional realística desses problemas, os efeitos locais devem ser apropriadamente representados e a um custo computacional razoável.

Neste trabalho aplica-se um método decomposição de domínios que permite utilizar uma malha local mais refinada sobreposta a uma malha global com discretização mais grosseira com o intuito de melhorar a precisão local da análise numérica ou simplesmente representar a geometria local e as condições de contorno adequadamente. A malha local pode ter uma escala diferente de discretização, ou até mesmo uma aproximação numérica diferente, como no caso deste trabalho em que se utiliza o método dos elementos finitos em conjunto com a análise isogeométrica.

Nesta seção apresenta-se inicialmente a técnica de combinação de espaços de funções, para posteriormente introduzir as particularidades da implementação numérica, e ao final, um exemplo de aplicação é apresentado.

1.1 Combinação de espaços de funções

Para o entendimento da técnica de partição de domínios define-se inicialmente um domínio global Ω_G , de acordo com a Fig. 1.1a, e um domínio local, Ω_L , apresentado na Fig. 1.1b, menor que o domínio global e que contém a região com efeitos localizados. O domínio total de estudo é então composto por: $\Omega = \Omega_G \cup \Omega_L$.

Adicionalmente definem-se os contornos desses domínios, conforme Fig. 1.1c,

como: Γ_G contorno físico de Ω determinado pelo domínio global; Γ_L contorno físico de Ω pertencente ao domínio local; $(\Gamma_G)_B$ contorno que define a região de sobreposição pertencente ao domínio global e $(\Gamma_L)_B$ contorno que define a região de sobreposição pertencente ao domínio local. É importante ressaltar que os contornos ditos físicos podem ou não estarem presentes nos problemas de sobreposição. A zona de sobreposição, Ω_B , é definida como: $\Omega_B = \Omega_G \cap \Omega_L$, sendo limitada pelos contornos $(\Gamma_L)_B$ e $(\Gamma_G)_B$.

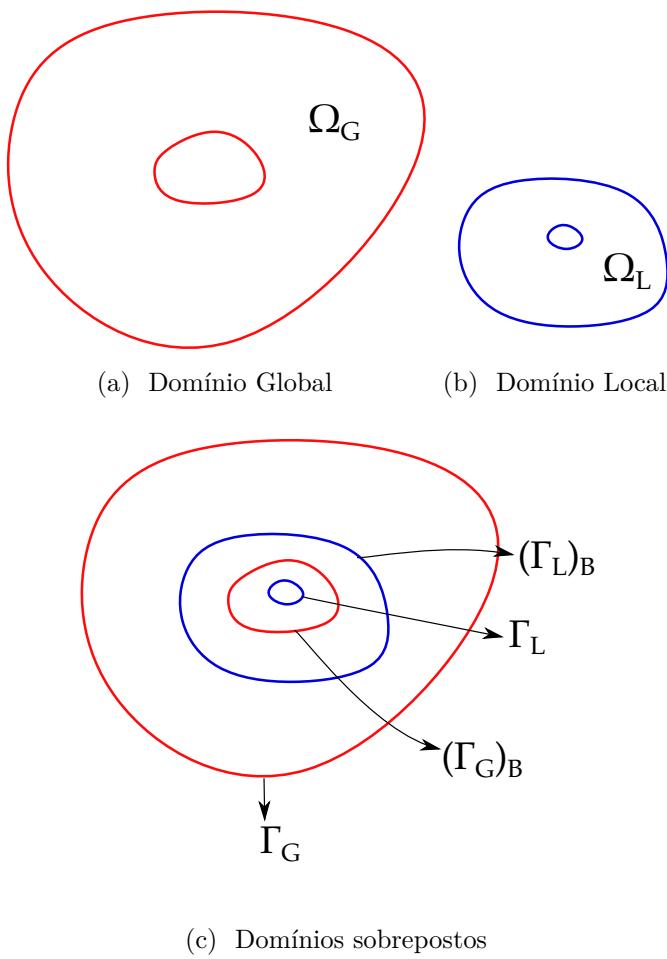


Figura 1.1 – Definição dos domínios global, local e de zona de sobreposição

Considerando um problema cujas as funções tentativas no domínio global sejam caracterizadas por $u_G(\mathbf{y})$ e definidas no espaço finito de funções \mathcal{S}_u^G , e cujas funções tentativas locais, $u_L(\mathbf{y})$, sejam definidas no espaço finito de funções \mathcal{S}_u^L . Define-se também, as funções peso global $w_G(\mathbf{y})$ e local $w_L(\mathbf{y})$ nos espaços das funções teste \mathcal{V}_u^G e \mathcal{V}_u^L respectivamente. A união direta dos espaços de funções na zona de sobreposição obviamente não resulta em um espaço que respeita a partição da unidade. Dessa forma, utiliza-se uma função ponderadora de combinação $b(\mathbf{y})$, de maneira a criar um novo espaço de funções tentativa e peso, definido por:

$$u(\mathbf{y}) = b(\mathbf{y})u_G(\mathbf{y}) + (1 - b(\mathbf{y}))u_L(\mathbf{y}), \quad (1.1)$$

$$w(\mathbf{y}) = b(\mathbf{y})w_G(\mathbf{y}) + (1 - b(\mathbf{y}))w_L(\mathbf{y}), \quad (1.2)$$

com $b(\mathbf{y})$ apresentando valor unitário sobre o domínio global livre (sem sobreposições), valor zero no domínio local livre, e apresentando uma transição suave na região de sobreposição.

Os espaços enriquecidos na região de sobreposição de malhas, são definidos por \mathcal{S}_{enr} e \mathcal{V}_{enr} , correspondentes às funções tentativa e teste respectivamente. A solução de um problema de valor de contorno recai em encontrar $u^h \in \mathcal{S}_{enr}$ tal que $\forall w^h \in \mathcal{V}_{enr}$:

$$B(u^h, w^h) = F(w^h), \quad (1.3)$$

com $B(\bullet, \bullet)$ e $F(\bullet)$ sendo operadores bilineares e lineares respectivamente. A discretização de $u^h(\mathbf{y})$ e $w^h(\mathbf{y})$ no contexto dos elementos finitos é obtida através das seguintes relações:

$$u^h(\mathbf{y}) = \sum_{A=1}^{(n_{np})_G} (u_G)_A b(\mathbf{y})(N_G)_A(\mathbf{y}) + \sum_{A=1}^{(n_{np})_L} (u_L)_A (1 - b(\mathbf{y}))(N_L)_A(\mathbf{y}), \quad (1.4)$$

$$w^h(\mathbf{y}) = \sum_{A=1}^{(n_{np})_G} (w_G)_A b(\mathbf{y})(N_G)_A(\mathbf{y}) + \sum_{A=1}^{(n_{np})_L} (w_L)_A (1 - b(\mathbf{y}))(N_L)_A(\mathbf{y}), \quad (1.5)$$

com N_G e N_L sendo as funções de forma global e local; e $(n_{np})_G$ e $(n_{np})_L$ o número de funções de forma nas discretizações global e local respectivamente.

1.1.1 Função ponderadora de combinação

De maneira a se obter uma solução única deseja-se que as funções $b(\mathbf{y})(N_G)$ e $(1 - b(\mathbf{y}))(N_L)$ sejam linearmente independentes sobre Ω_B . Considerando que as funções base local e global possuem grau polinomial p e são linearmente independentes, e que $b(\mathbf{y})$ e $(1 - b(\mathbf{y}))$ são linearmente independentes, adota-se $b(\mathbf{y})$ com grau polinomial uma vez superior as funções base ($p + 1$). Isso resulta um espaço enriquecido onde o número de funções de forma em cada ponto da zona de superposição é compatível com o grau do polinômio.

Nesse trabalho aplicam-se funções de forma locais e globais de grau polinomial quadrático. Dessa forma, a função de combinação foi definida como cúbica e é expressa por:

$$b(\mathbf{y}) = \begin{cases} 2 \left(\frac{Y_L(\mathbf{y})}{\delta \mathbf{y}} \right)^3 - 3 \left(\frac{Y_L(\mathbf{y})}{\delta \mathbf{y}} \right)^2 & \text{se } Y_G(\mathbf{y}) > 0 \text{ e } Y_L(\mathbf{y}) > 0 \\ 1 & Y_L(\mathbf{y}) \leq 0 \\ 0 & Y_G(\mathbf{y}) \leq 0 \end{cases}, \quad (1.6)$$

com $Y_L(\mathbf{y})$ a função distância assinalada medida a partir de $(\Gamma_L)_B$, com valores positivos dentro do domínio local e negativos fora, e $Y_G(\mathbf{y})$ a função distância assinalada medida a partir de $(\Gamma_G)_B$, sendo positivo se o ponto pertence à Ω_G e negativos caso contrário. Nota-

se que os pontos em que ambas funções distância assinalada são positivos estão contidos dentro da zona de sobreposição. O parâmetro δ é obtido por $\delta(\mathbf{y}) = Y_L(\mathbf{y}) + X_G(\mathbf{y})$, e coincide com a espessura da zona de sobreposição quando $(\Gamma_L)_B$ e $(\Gamma_G)_B$ são paralelos.

Na prática, considera-se que o domínio global tem o tamanho do domínio total, ficando a definição de $(\Gamma_G)_B$ para uma etapa posterior, baseado na forma do modelo local, e os elementos e nós sem suporte físico após a obtenção do novo espaço de funções são desativados da análise.

O contorno $(\Gamma_G)_B$ pode ser obtido através de uma réplica do contorno $(\Gamma_L)_B$ a uma distância paralela δ do mesmo. Na Fig. 1.2 apresenta-se um exemplo do espaço de funções obtido para um caso unidimensional a partir de funções base Lagrangianas quadráticas para os domínios global e local.

Após a definição $(\Gamma_G)_B$ é necessária uma metodologia eficiente para determinação das funções base globais com pequena influência dentro da zona de sobreposição, visto que essas podem levar a um sistema mal condicionado. Para resolver esse problema, utiliza-se, para todos os nós globais A da análise, uma variável definida como:

$$(M_G)_{AA} = \int_{\Omega} b(\boldsymbol{\xi}) N_A(\boldsymbol{\xi}) b(\boldsymbol{\xi}) N_A(\boldsymbol{\xi}) d\Omega, \quad (1.7)$$

e define-se um valor M_{min} para $(M_G)_{AA}$. Os nós globais são desativados se $(M_G)_{AA} < M_{min}$.

Os parâmetros de estabilização utilizados nesta formulação ainda necessitam um estudo mais aprofundado. No presente trabalho, faz-se a combinação dos parâmetros calculados em cada discretização:

$$\tau_{\text{SUPG}}(\mathbf{y}) = b(\mathbf{y}) \tau_{\text{SUPG}}^G(\mathbf{y}) + (1 - b(\mathbf{y})) \tau_{\text{SUPG}}^L(\mathbf{y}), \quad (1.8)$$

$$\tau_{\text{PSPG}}(\mathbf{y}) = b(\mathbf{y}) \tau_{\text{PSPG}}^G(\mathbf{y}) + (1 - b(\mathbf{y})) \tau_{\text{PSPG}}^L(\mathbf{y}), \quad (1.9)$$

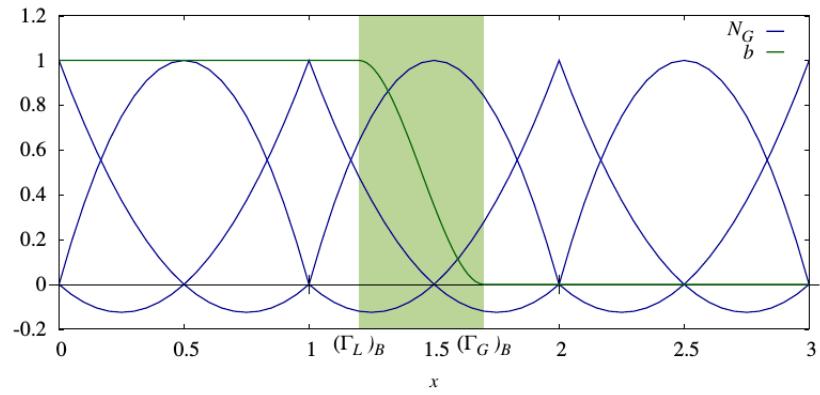
$$\nu_{\text{LSIC}}(\mathbf{y}) = b(\mathbf{y}) \nu_{\text{LSIC}}^G(\mathbf{y}) + (1 - b(\mathbf{y})) \nu_{\text{LSIC}}^L(\mathbf{y}), \quad (1.10)$$

com τ_{SUPG}^G , τ_{PSPG}^G e ν_{LSIC}^G sendo os parâmetros de estabilização na malha global e τ_{SUPG}^L , τ_{PSPG}^L e ν_{LSIC}^L sendo os parâmetros de estabilização na malha local.

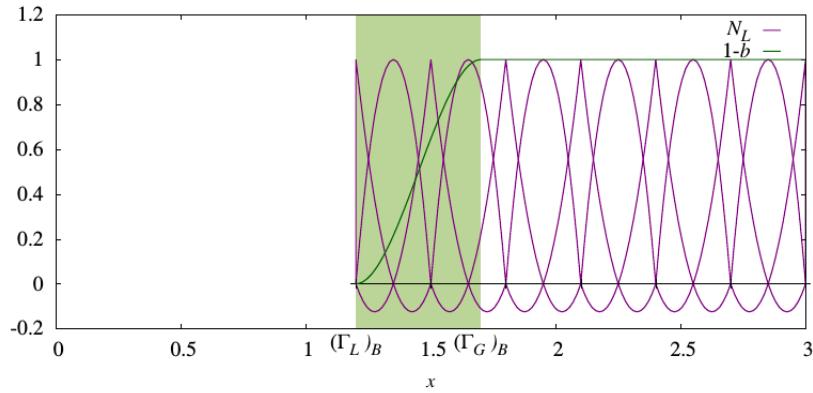
Para a aplicação da metodologia no contexto da dinâmica dos fluidos computacional, na qual as variáveis de interesse são: $\mathbf{u}^h(\mathbf{y}, t)$ e $p^h(\mathbf{y}, t)$ e as funções teste são: $\mathbf{w}^h(\mathbf{y})$, $q^h(\mathbf{y})$

1.2 Implementação Computacional

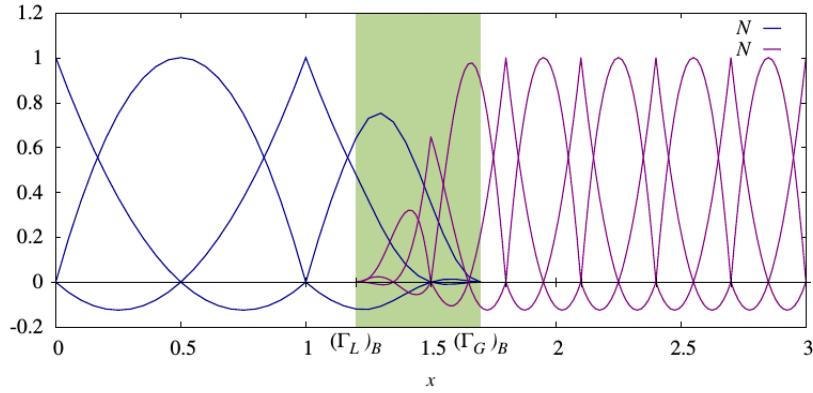
O algoritmo de partição de domínios foi implementado para a solução de escoamentos incompressíveis seguindo a formulação apresentada nos capítulos ?? e ??. Nesse código, após a leitura dos dados respectivos às malhas global e local, segue-se com a definição da distância assinalada respectiva a todos os nós da malha global e da malha local com respeito aos contornos $(\Gamma_G)_B$ e $(\Gamma_L)_B$. O contorno $(\Gamma_G)_B$ é obtido a partir dos dados de entrada, onde define-se a espessura da zona de sobreposição. De posse da distância



(a) Funções Globais e função ponderadora (b).



(b) Funções locais e função ponderadora ($1-b$)



(c) Novo espaço de funções

Figura 1.2 – Zona de sobreposição - Problema unidimensional.

assinalada e espessura da zona de sobreposição, são definidos quais elementos das malhas local e global fazem parte da zona de sobreposição. Qualquer elemento que possua 1 ou mais nós dentro da zona de sobreposição é considerado como um elemento pertencente a ela.

As equações na região de sobreposição são integradas sobre o elemento local, dessa forma, num processo prévio à solução, os pontos de integração da malha local são projetados

sobre a malha global e o elemento e coordenadas locais a que pertencem são armazenados.

Determinam-se também os nós inativos da malha global, sejam porque encontram-se fora da zona de sobreposição, ou, porque possuem pequena influência dentro da mesma, de acordo com a Eq. 1.7.

Finalmente, o processo de marcha no tempo se inicia da maneira explicitada no Item ?? levando-se em consideração que as funções tentativa e peso, e os parâmetros de estabilização são modificados de acordo com o apresentado neste capítulo.

O algoritmo que descreve esse processo de solução das equações da DFC considerando a partição de domínios pode ser visualizado no Alg. 1.

Algoritmo 1 Algoritmo para problemas de dinâmica dos fluidos computacional com sobreposição de malhas

- 1: Cálculo da distância assinalada dos nós e pontos de controle aos contornos;
- 2: Determinação dos elementos e células da zona de sobreposição;
- 3: Busca dos pontos de integração na malha global equivalentes aos definidos para à malha local;
- 4: Definição dos nós inativos da malha global;
- 5: **para** o passo de tempo 0 até T **faca**
- 6: $i = 0$;
- 7: Predição da solução: aplicação das Eq. (??), Eq. (??) e Eq. (??);
- 8: **enquanto** ($\epsilon < \text{tolerância}$) **faca**
- 9: $i++$;
- 10: Interpolação das variáveis do problema: aplicação da Eq. (??), Eq. (??) e Eq. (??);
- 11: Cálculo do incremento nas variáveis do problema: $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$ e \mathbf{p}_{n+1} de acordo com as Eq. (??) e Eq. (??);
- 12: Atualização da solução: calculadas de acordo com Eq. (??), Eq. (??) e Eq. (??).
- 13: Cálculo do erro:

$$\epsilon = \left\| \mathbf{R}_M^i \right\|_{L^2} \quad (1.11)$$

- 14: **fim enquanto**
 - 15: **fim para**
-

1.3 Exemplo de aplicação

Para verificar a metodologia de partição de domínios com sobreposição de malhas, neste item apresenta-se a solução estacionária do problema de Navier Stokes para a cavidade 2D.

A geometria do problema e suas condições contorno são apresentadas na Fig. 1.3. O problema foi avaliado para um número de Reynolds = 100, calculado de acordo com Eq. (??) e $\rho = 1,0$.

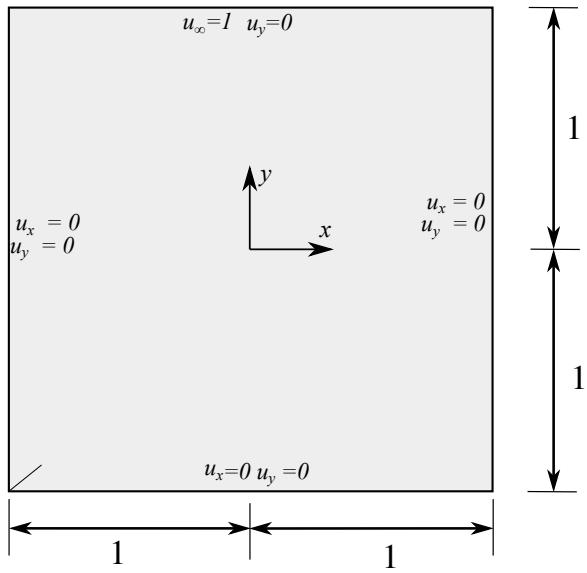
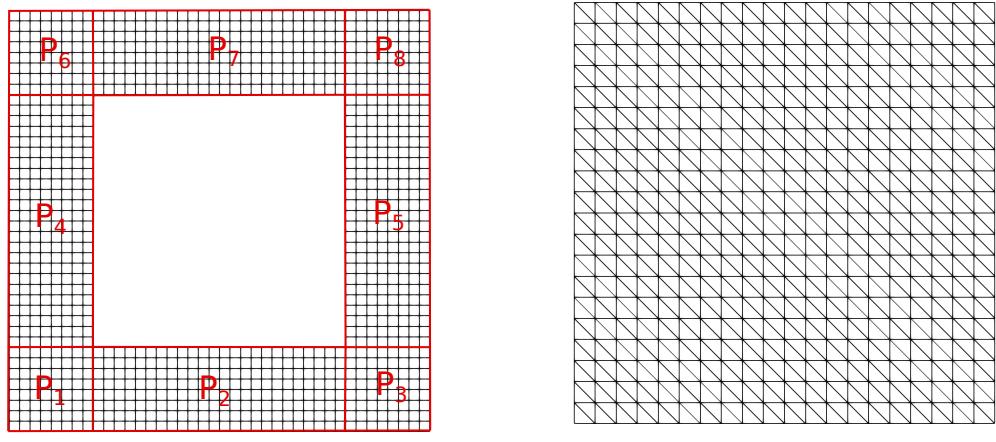


Figura 1.3 – Cavidade 2D: Condições de contorno.

Sabe-se que nas paredes da cavidade podem haver efeitos de camada limite, dessa forma, definiu-se uma malha local que circunda a cavidade de acordo com a Fig. 1.4a. A malha local foi discretizada através de uma aproximação isogeométrica e foi definida com 1440 pontos de controle que foram divididos em 8 diferentes *patches*, chamados de P_1, P_2, \dots, P_8 . Os *patches* P_1, P_3, P_6 e P_7 possuem 64 células e os P_2, P_4, P_5 e P_8 192 células.

A malha global por sua vez é definida para toda a seção da cavidade, sendo composta por 800 elementos triangulares quadráticos e 1681 nós, de acordo com Fig. 1.4b.



(a) Malha Local.

(b) Malha Global

Figura 1.4 – Cavidade 2D: Malhas Global e Local.

Definiu-se uma espessura para a zona de sobreposição de 0,1 medida paralelamente ao contorno fictício local (Γ_L)_B, e, a partir desse dado, os elementos globais sob o domínio

local (Ω_L) e fora da zona de sobreposição (Ω_B) foram desativados. As células e elementos pertencentes à zona de sobreposição, tanto para a malha local quanto para a malha global, podem ser vistos nas Fig. 1.5a e Fig. 1.5b respectivamente.

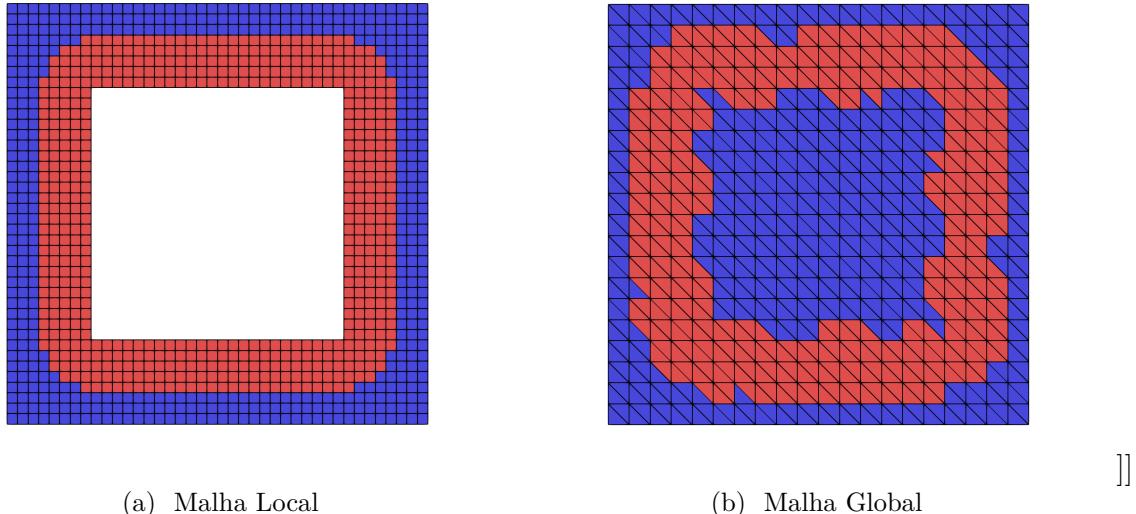


Figura 1.5 – Cavidade 2D: Zona de sobreposição.

Os campos de velocidade e pressão obtidos são apresentados nas Fig. 1.6a e Fig. 1.6b.

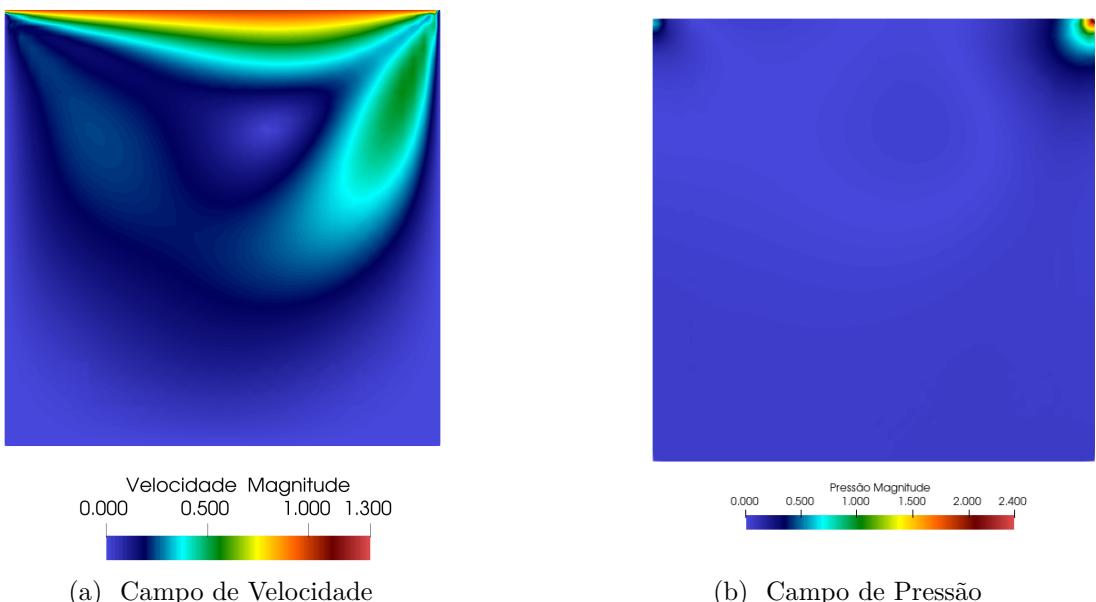


Figura 1.6 – Cavidade 2D: Solução do problema de Navier Stokes para $Re = 100$.

Os perfis de velocidade adimensionalizados ($\mathbf{u}/\mathbf{u}_\infty$) horizontal e vertical ao longo de duas linhas centrais nas direções x e y da cavidade são apresentados na Fig. 1.7 e comparados com os resultados de ??).

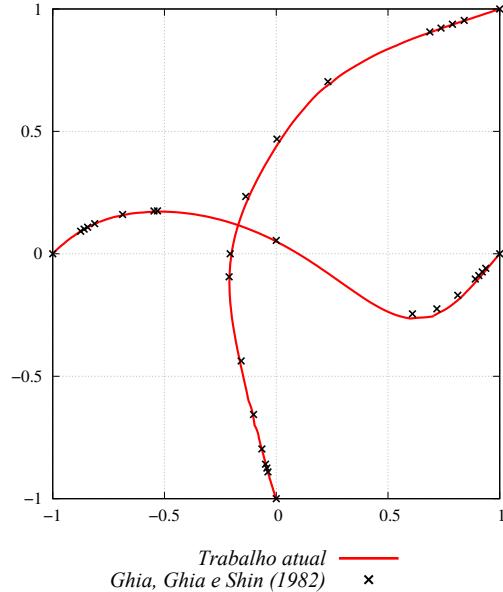


Figura 1.7 – Cavidade 2D: Perfis de velocidade.

De acordo com os resultados obtidos, a metodologia se mostrou muito eficiente, com características promissoras para as próximas aplicações que serão realizadas neste projeto.