CC4102 - Control 2

Prof. Gonzalo Navarro

30 de Mayo de 2023

P1 (3.0 pt)

El *conteo inexacto* es una técnica aleatorizada para contar con cierto margen de error la cantidad de veces que ocurre un evento, en un entorno donde los números son demasiado grandes como para mantener un contador exacto. La idea es mantener en un contador c sólo el exponente (entero) del valor que queremos contar, es decir que el evento ha ocurrido unas 2^c veces.

Proponga una estrategia aleatorizada para determinar si aumentar c o no cada vez que ocurre un evento, de modo de garantizar que la cantidad esperada de eventos que han ocurrido es esencialmente 2^c. Analice su estrategia demostrando que tiene esta propiedad. Note que no conoce de antemano cuántas veces ocurrirá el evento.

Solución:

La idea sería que, de los 2^k incrementos que me llevan de 2^k a 2^{k+1}, en promedio uno me incremente c. La estrategia sería entonces incrementar c con probabilidad $1/2^c$. De ese modo, la cantidad esperada de incrementos que me hacen pasar de c a $c+1$ sería 2^c, y para llevar k de 0 a c serían $\sum_{k=0}^{c-1} 2^k = 2^c - 1$ incrementos en promedio.

P2 (3.0 pt)

Alí Babá entra a la cueva de los 40 ladrones con una mochila que puede cargar peso P, y encuentra n objetos que pesan p_1, p_2, ..., p_n, y que tienen valores v_1, v_2, ..., v_n.

Desea maximizar la suma de los valores de los objetos que se lleva en la mochila, pero sin superar el peso P que puede cargar. El problema es NP-completo, por lo que debe buscar una aproximación razonable antes de que lleguen los ladrones.

1. Considere ordenar los objetos por valor decreciente de v_i/p_i, e introducirlos en la mochila en ese orden hasta que no quepan más. Muestre que esta estrategia no es una $r(n)$-aproximación para ningún $r(n)$.

2. Sean $v_1, \ldots, v_k$ los valores de los objetos que quedan en la mochila en la estrategia anterior, y sea v_{k+1} el valor del primer objeto que ya no entra. Muestre que el algoritmo óptimo no puede llevarse un valor total igual o superior a $v_1 + v_2 + \cdots + v_k + v_{k+1}$. Hint: (0) Deje este punto para el final y asúmalo en el siguiente punto. (1) Argumente que, si no es posible cambiar ningún elemento de valor v y peso p en nuestra solución extendida a v_{k+1}, por otros elementos de valores $v'_1 + \cdots + v'_r \geq v$ y pesos $p'_1 + \cdots + p'_r < p$, entonces es imposible llevarse un valor de $v_1 + v_2 + \cdots + v_k + v_{k+1}$. (2) Suponga ahora que sí existen r objetos con esos pesos y valores. Considerando que no están en nuestra solución, acote los cocientes v'_i/p'_i y obtenga una contradicción.

3. Considere ahora una variante de la estrategia del punto 1 donde, si lleva metidos en la mochila los objetos $1, \ldots, k$, y el $k+1$ ya no le entra, escoge lo más valioso entre llevarse los objetos $1, \ldots, k$ y llevarse el único objeto $k+1$. Muestre que esta estrategia es una 2-aproximación usando lo que se pide demostrar en el punto 2.

Solución:

1. Considere dos objetos, uno con valor y peso $v_1 = p_i = \epsilon$ y el otor con valor $v_2 = P - \epsilon$ y peso $p_2 = P$. El algoritmo elegiría el primero, llevándose valor total ϵ, mientras que el óptimo elegiría el segundo, llevándose valor total $P - \epsilon$. Cualquier variante de esta idea donde el cociente entre lo que se llevan se puede hacer crecer independientemente de n, es válido, no necesitan aproximarse todo lo posible a P.

2. (1) Para lograr valor $v_1 + \cdots + v_{k+1}$ en peso P, la estrategia óptima debe requerir sacar al menos un objeto (de valor v y peso p) de la actual. Esos objetos (tal vez todos, pero al menos uno) se reemplazan por otros. Podemos pensar siempre que cada objeto a eliminar de la estrategia actual se cambia por cero o más en la óptima. Pero si a ningún objeto de la actual se lo puede reemplazar por una combinación de menor peso sin perder valor, es imposible mantener o superar el valor actual y reducir peso. (2) Digamos que cambiamos un objeto de valor v y peso p de nuestra solución por varios objetos de valores $v'_1, \ldots, v'_r$ y pesos $p'_1, \ldots, p'_r$ que que no están en nuestra solución, logrando $p'_1 + \cdots + p'_r < p$ y $v'_1 + \cdots + v'_r \geq v$. Como estos objetos no están en nuestra solución, vale que $v'_i/p'_i \leq v/p$ para todo $1 \leq i \leq r$, y entonces $p \sum_i v'_i \leq v \sum_i p'_i$. Por otro lado, de $\sum p'_i < p$ tenemos que $v \sum_i p'_i < vp$, y de $\sum_i v'_i \geq v$ tenemos $p \sum_i v'_i \geq vp$, una contradicción.

3. Dado que, por el punto 2, el valor óptimo es $v_{opt} < v_1 + \cdots + v_{k+1}$ y nuestra estrategia obtiene $v = \text{máx}(v_1 + \cdots + v_k, v_{k+1})$, tenemos una 2-aproximación porque, como $v \geq v_1 + \cdots + v_k$ y $v \geq v_{k+1}$, vale que $v_{opt} < (v_1 + \cdots + v_k) + v_{k+1} \leq v + v = 2v$.

Tiempo: 2.0 horas | Con una hoja de apuntes | Responder en hojas separadas