



# Validación de Clusters

# ¿Es necesario validar los clusters?

- Por lo menos en Clasificación, la validación es parte integral del proceso
- No así en Clustering...

# aprendizaje supervisado vs. no supervisado

## Supervised vs. Unsupervised Learning

### Supervised

- $y=F(x)$ : true function
- $D$ : labeled training set
- $D: \{x_i, y_i\}$
- $y=G(x)$ : model trained to predict labels  $D$
- Goal:  
$$E\langle (F(x)-G(x))^2 \rangle \approx 0$$
- Well defined criteria:  
Accuracy, RMSE, ...

### Unsupervised

- Generator: true model
- $D$ : unlabeled data sample
- $D: \{x_i\}$
- Learn  
????????????
- Goal:  
????????????
- Well defined criteria:  
????????????

source:

<http://www.cs.put.poznan.pl/jstefanowski/sed/DM-7clusteringnew.pdf>

# ¿Cómo saber si nuestros clusters son buenos?

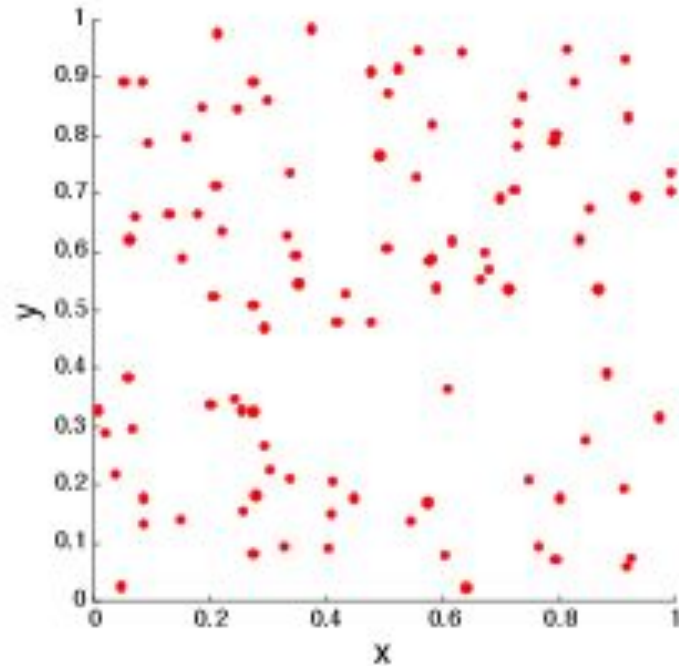
- No hay una respuesta absoluta
- Depende de la aplicación
- ¿Entonces, para qué evaluar?
  - ★ Clustering es muchas veces parte de un proceso exploratorio
  - ★ Evaluar parece innecesario en estos casos (pero no!)
  - ★ Cada algoritmo parece necesitar su propio tipo de evaluación
  - ★ k-means: SSE, pero no funciona para DBSCAN
  - ★ Es esencial! Porque siempre podemos encontrar clusters (hasta en datos aleatorios).

# Evaluamos para:

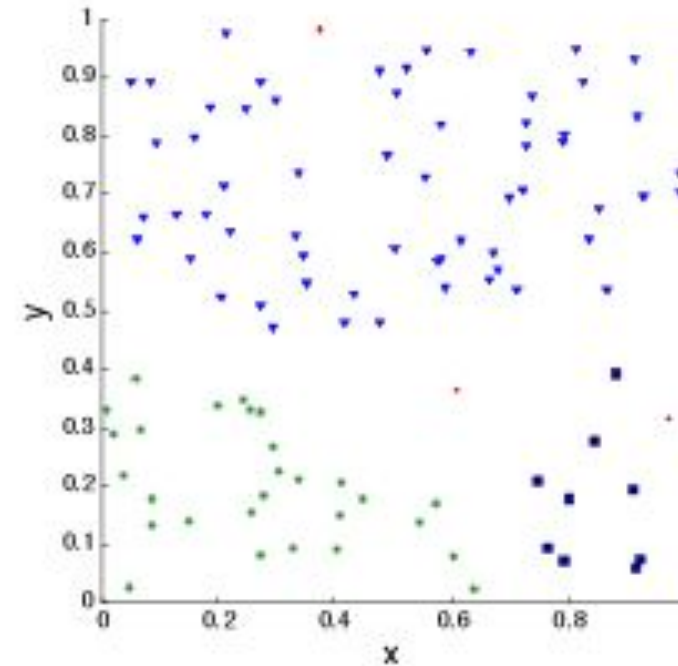
- Evitar encontrar patrones en el ruido
- Para comparar algoritmos de clustering diferentes
- Para comparar conjuntos de clusters diferentes
- Para comprar dos clusters

# CLUSTERS EN DATOS ALEATORIOS

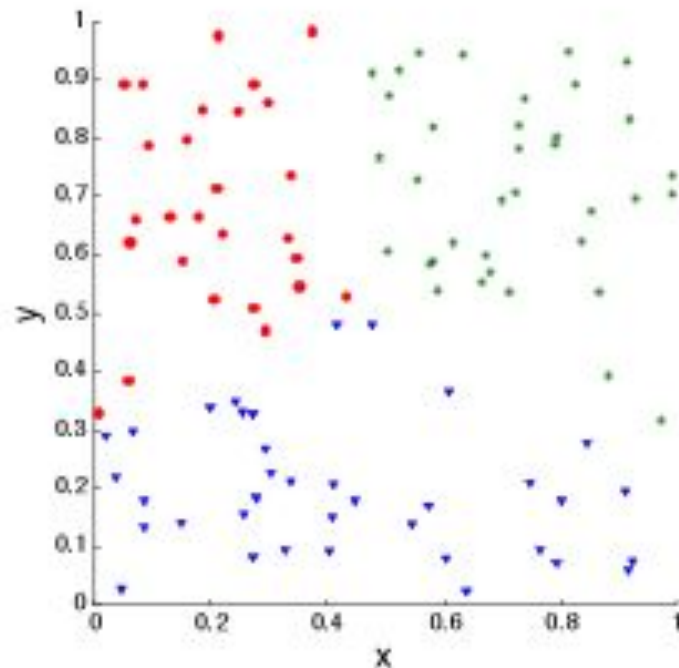
**PUNTOS  
ALEATORIOS**



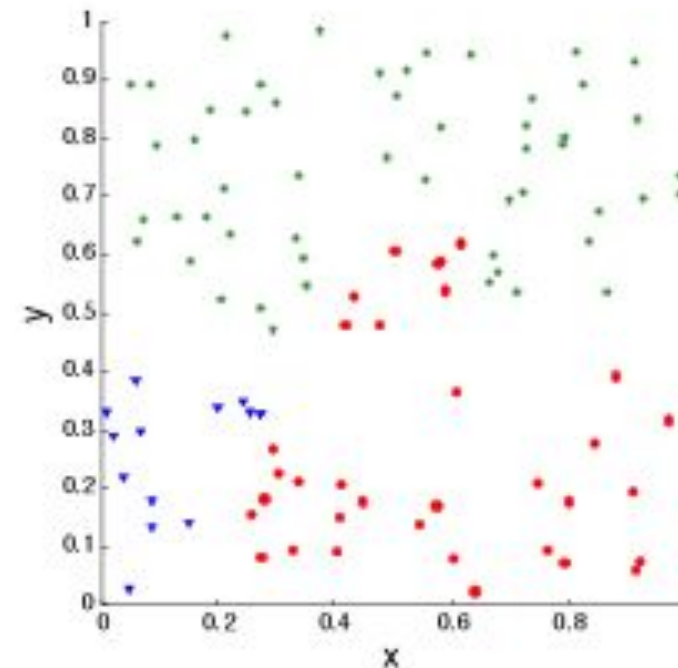
**DBSCAN**



**K-MEANS**



**COMPLETE  
LINK**



# Aspectos de la validación

1. Determinar la **tendencia de agrupamiento** (clustering tendency), i.e.: si existe una estructura no-aleatoria en los datos
2. Encontrar el número correcto de clusters
3. Evaluar qué tan bien los resultados se ajustan a los datos (sin consultar datos externos)
4. Comparar resultados con resultados externos, i.e.: clases asignadas manualmente (supervisado o eval externa)
5. Comparar dos conjuntos de clusters para saber cuál es mejor

# Medidas de validez

- **External Index** (Supervisado) Utiliza comparación con datos externos (pureza, entropía), para ver si el clustering se ajusta a una estructura externa.
- **Internal Index** (No-Supervisado) Sin datos externos (SSE), cohesión, separación.
- **Relative Index** (Relativo) Compara resultados de clustering o clusters, puede usar medidas anteriores.



# Concepto: Matriz de similitud (conversamente: matriz de proximidad)

Table 1. Similarity matrix of the woody genera in the 21 dry to arid regions of the Neotropic. Jaccard index.

	chiquitania	sonora	chamela	coastdes	chilemed	perusouth	guanacaste	venezuela	chacoarg	cochab	patagonia	caatinga	tuichi	perunorth	serrarg	serrbol	prepuna	monte	puna	guajira	chaco
chiquitania	1	0,078	0,273	0,06	0,05	0,103	0,193	0,215	0,12	0,111	0,005	0,251	0,352	0,218	0,191	0,152	0,063	0,077	0,016	0,131	0,235
sonora	0,078	1	0,148	0,19	0,123	0,183	0,042	0,058	0,175	0,176	0,093	0,102	0,092	0,111	0,183	0,166	0,182	0,192	0,136	0,214	0,181
chamela	0,273	0,148	1	0,066	0,034	0,142	0,223	0,23	0,092	0,13	0	0,207	0,267	0,221	0,185	0,176	0,08	0,072	0,022	0,229	0,188
coastdes	0,06	0,19	0,066	1	0,33	0,237	0,033	0,037	0,155	0,295	0,159	0,075	0,077	0,086	0,209	0,207	0,296	0,296	0,188	0,132	0,128
chilemed	0,05	0,123	0,034	0,33	1	0,189	0,029	0,033	0,115	0,227	0,231	0,061	0,058	0,099	0,168	0,186	0,276	0,252	0,217	0,085	0,108
perusouth	0,103	0,183	0,142	0,237	0,189	1	0,052	0,077	0,167	0,358	0,086	0,139	0,131	0,3	0,317	0,42	0,342	0,236	0,135	0,184	0,193
guanacaste	0,193	0,042	0,223	0,033	0,029	0,052	1	0,322	0,074	0,033	0	0,195	0,153	0,142	0,095	0,067	0,027	0,038	0	0,147	0,134
venezuela	0,215	0,058	0,23	0,037	0,033	0,077	0,322	1	0,099	0,056	0	0,269	0,19	0,189	0,117	0,084	0,038	0,041	0,008	0,157	0,15
chacoarg	0,12	0,175	0,092	0,155	0,115	0,167	0,074	0,099	1	0,165	0,065	0,181	0,111	0,152	0,315	0,21	0,172	0,34	0,054	0,197	0,56
cochab	0,111	0,176	0,13	0,295	0,227	0,358	0,033	0,056	0,165	1	0,107	0,116	0,141	0,17	0,399	0,465	0,457	0,289	0,181	0,161	0,195
patagonia	0,005	0,093	0	0,159	0,231	0,086	0	0	0,065	0,107	1	0	0,014	0,019	0,058	0,077	0,155	0,191	0,298	0,027	0,043
caatinga	0,251	0,102	0,207	0,075	0,061	0,139	0,195	0,269	0,181	0,116	0	1	0,175	0,213	0,216	0,18	0,088	0,102	0,02	0,22	0,231
tuichi	0,352	0,092	0,267	0,077	0,058	0,131	0,153	0,19	0,111	0,141	0,014	0,175	1	0,262	0,228	0,184	0,087	0,102	0,024	0,156	0,184
perunorth	0,218	0,111	0,221	0,086	0,099	0,3	0,142	0,189	0,152	0,17	0,019	0,213	0,262	1	0,262	0,269	0,143	0,121	0,033	0,198	0,224
serrarg	0,191	0,183	0,185	0,209	0,168	0,317	0,095	0,117	0,315	0,399	0,058	0,216	0,228	0,262	1	0,586	0,282	0,289	0,093	0,212	0,372
serrbol	0,152	0,166	0,176	0,207	0,186	0,42	0,067	0,084	0,21	0,465	0,077	0,18	0,184	0,269	0,586	1	0,387	0,249	0,137	0,182	0,304
prepuna	0,063	0,182	0,08	0,296	0,276	0,342	0,027	0,038	0,172	0,457	0,155	0,088	0,087	0,143	0,282	0,387	1	0,411	0,28	0,15	0,186
monte	0,077	0,192	0,072	0,296	0,252	0,236	0,038	0,041	0,34	0,289	0,191	0,102	0,102	0,121	0,289	0,249	0,411	1	0,191	0,147	0,281
puna	0,016	0,136	0,022	0,188	0,217	0,135	0	0,008	0,054	0,181	0,298	0,02	0,024	0,033	0,093	0,137	0,28	0,191	1	0,045	0,05
guajira	0,131	0,214	0,229	0,132	0,085	0,184	0,147	0,157	0,197	0,161	0,027	0,22	0,156	0,198	0,212	0,182	0,15	0,147	0,045	1	0,253
chaco	0,235	0,181	0,188	0,128	0,108	0,193	0,134	0,15	0,56	0,195	0,043	0,231	0,184	0,224	0,372	0,304	0,186	0,281	0,05	0,253	1

# Distancias comunes

- Es común utilizar distancias métricas, como la distancia de Minkowski
- $r=2$ , distancia Euclideana
- otras: Manhattan, y distancia no métrica, Jaccard, por ej.
- similitud coseno

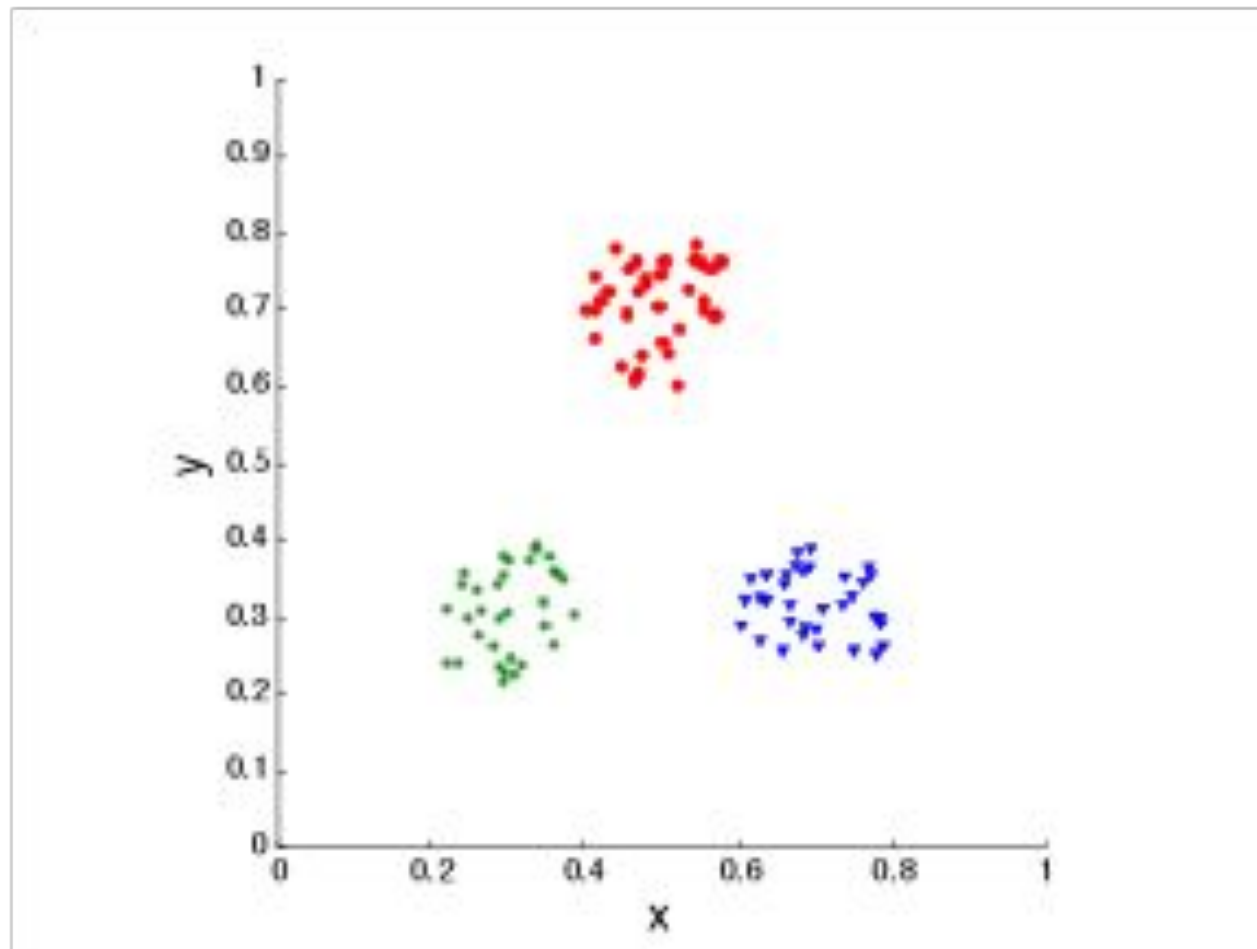
$$p_{ij} = \left( \sum_{k=1}^d |x_{ik} - x_{jk}|^r \right)^{1/r}$$

$$\text{similarity} = \cos(\theta) = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i B_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n A_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n B_i^2}},$$

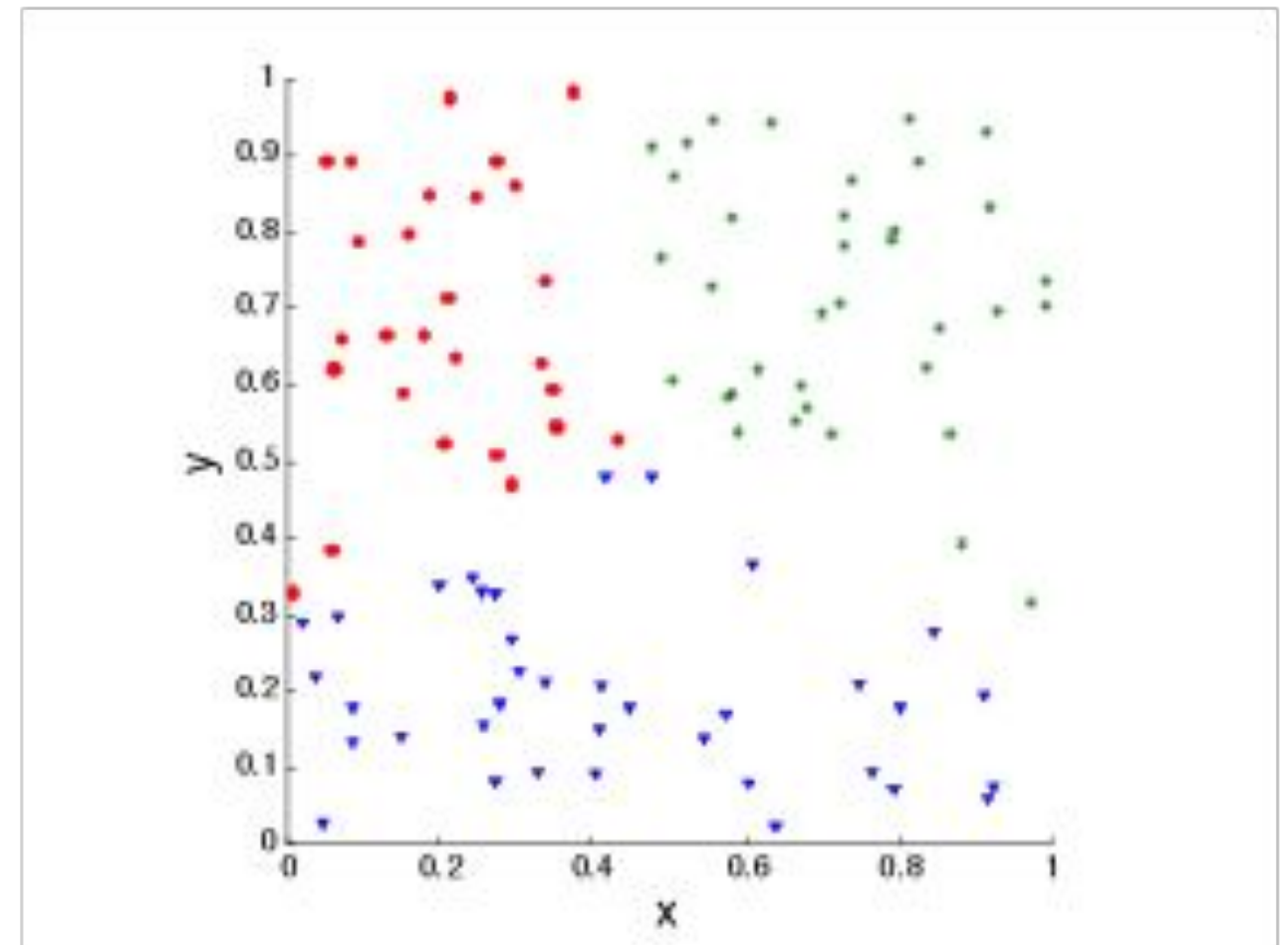
# Validez usando correlación

- Comparamos 2 matrices
  - Matriz de incidencia ( $n \times n$  matriz idealizada usando pertenencia a clusters)
    - una fila y una columna por cada punto
    - un valor es 1 si los dos puntos coinciden en el mismo cluster
    - un valor es 0 si los dos puntos no coinciden en el mismo cluster
  - Matriz de proximidad ( $n \times n$  usando la distancia entre puntos)
- Calculamos la correlación entre ambas (simétricas, sólo compara  $n(n-1)/2$  veces) implica alta correlación indica que pts en el mismo cluster están cerca
- No es buena medida para algoritmos de clustering basados en densidad o continuidad

# Correlación usando k-means



Corr = -0.9235

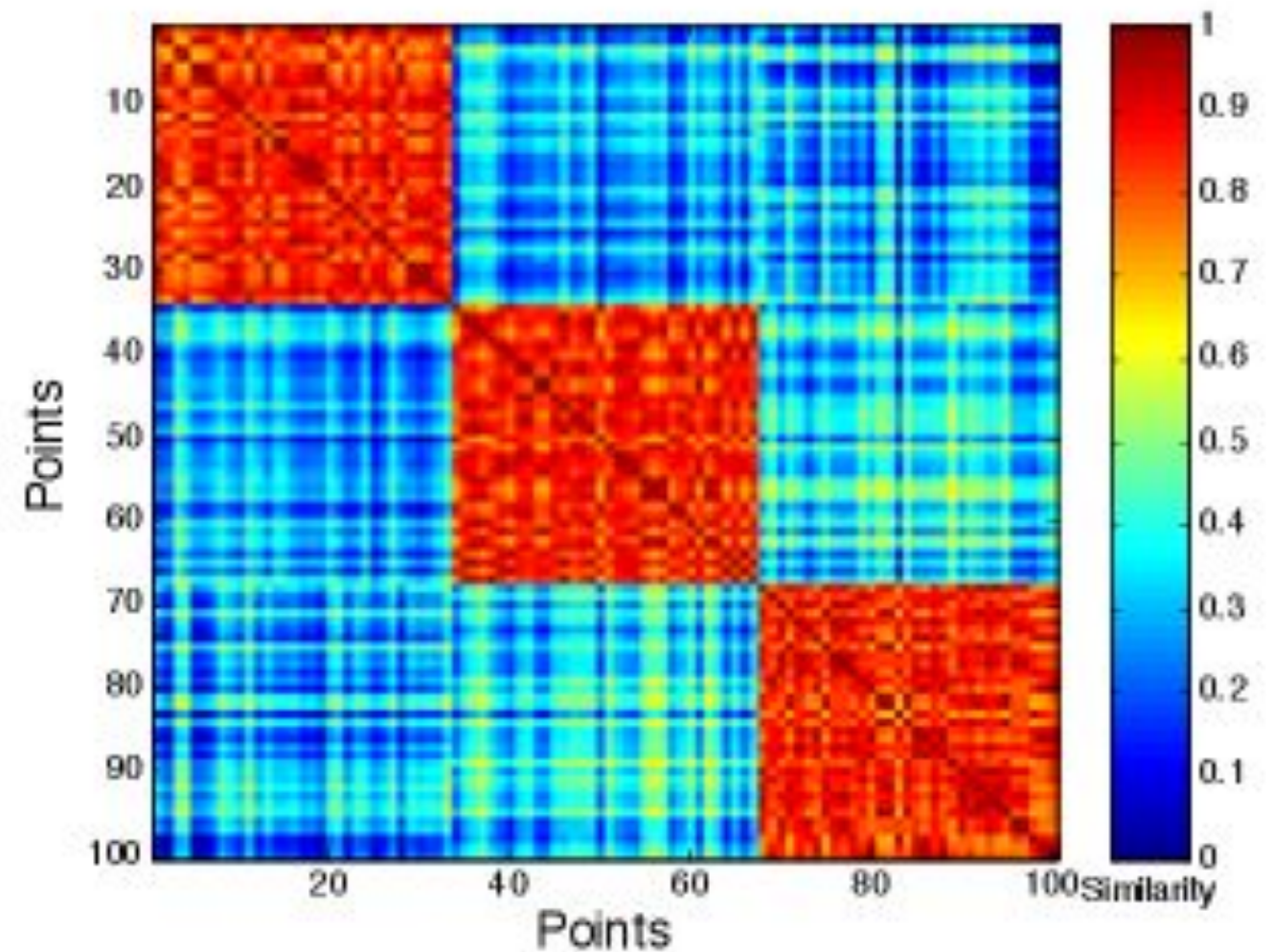
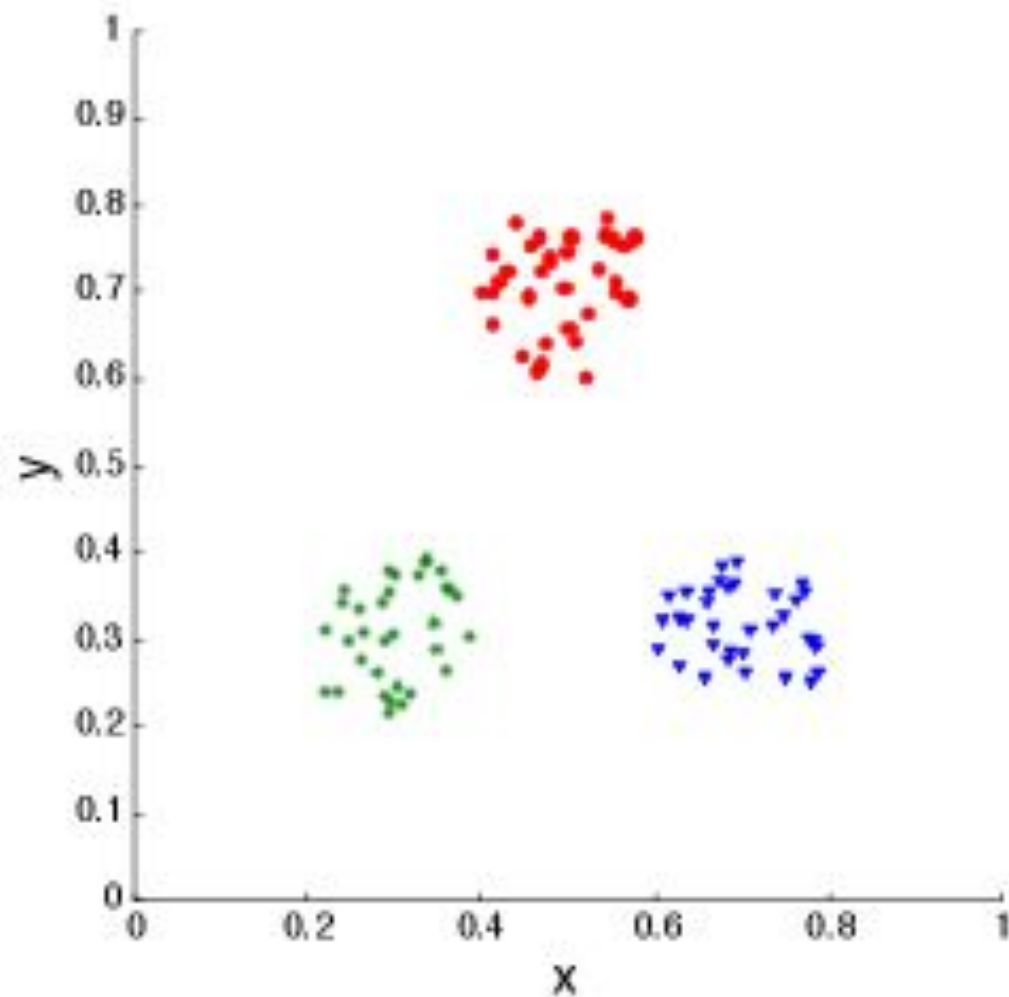


Corr = -0.5810

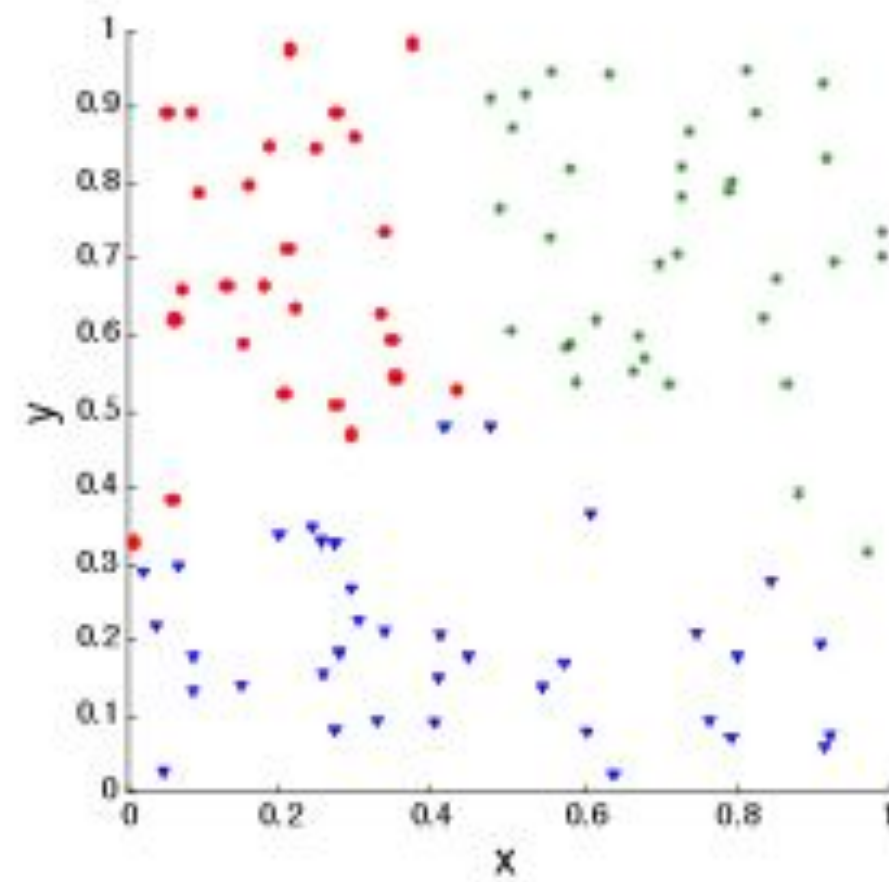
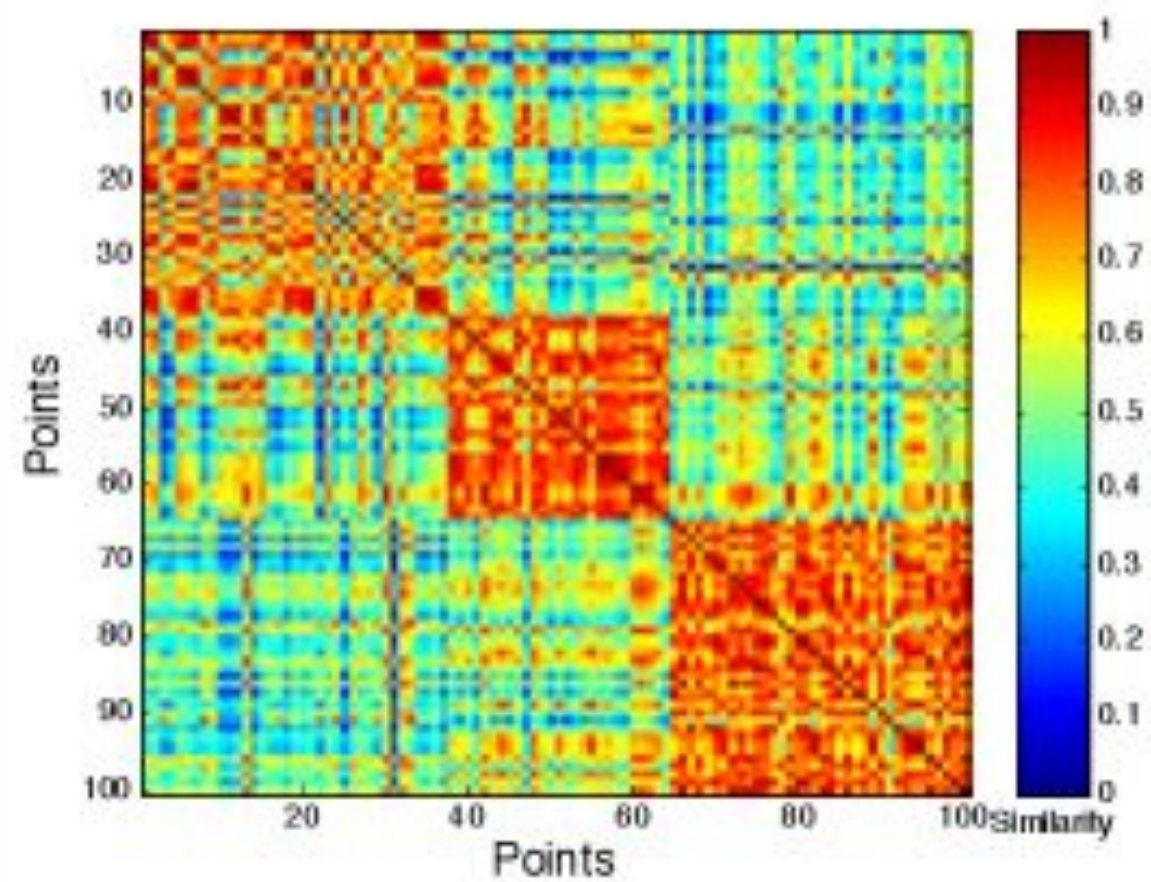
# Enfoque visual

- Ordenar la matriz de similitud con respecto a etiquetas de clusters e inspeccionar visualmente

# Visualizando la matriz de similitud (clusters reales)

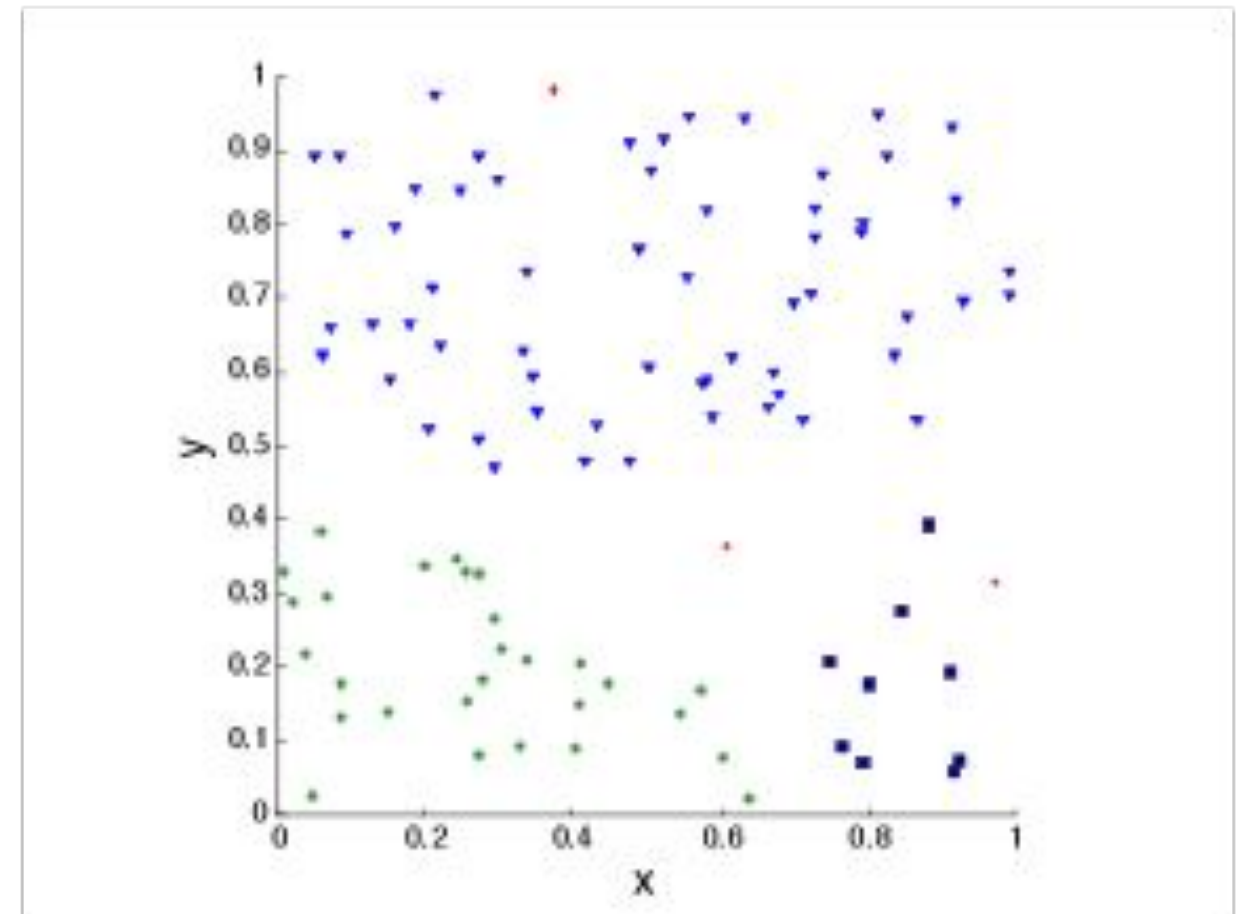
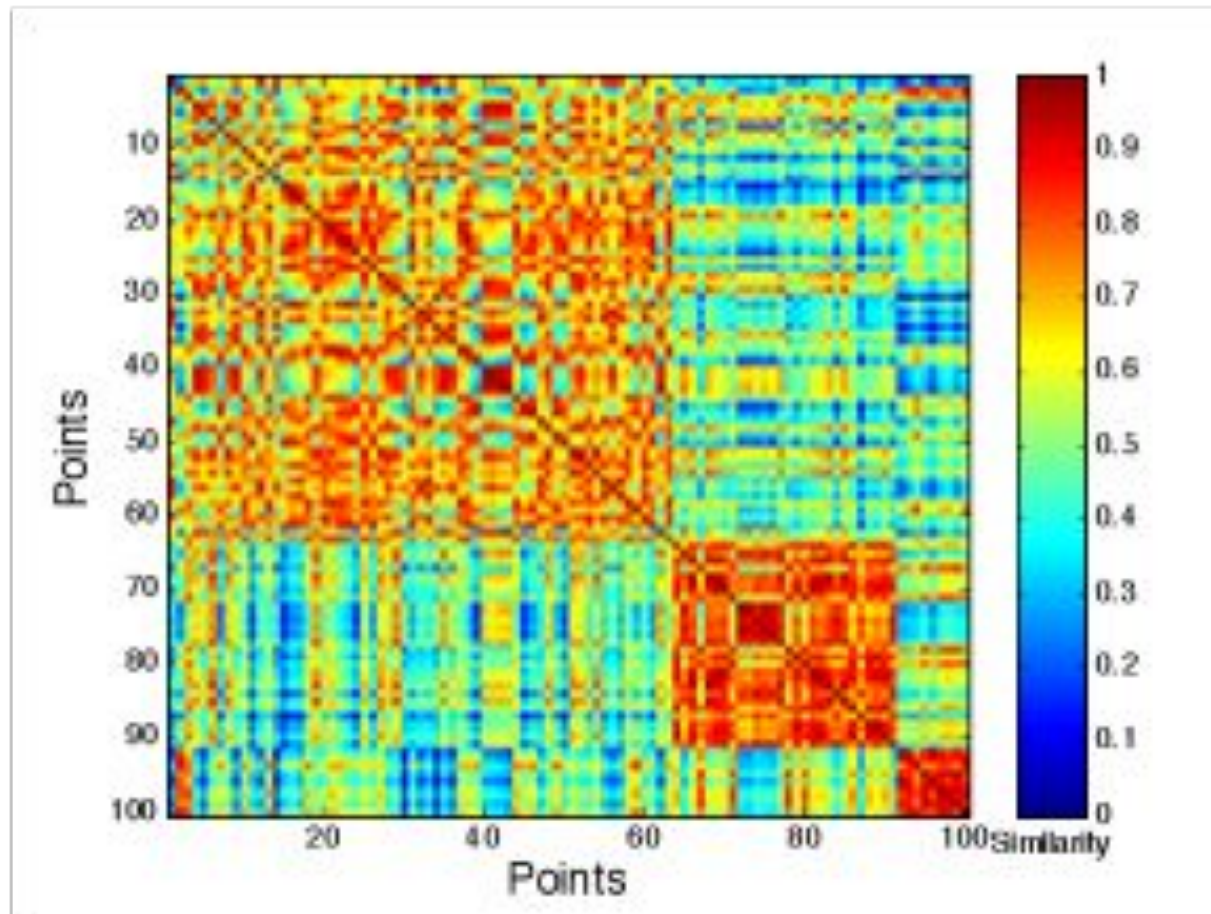






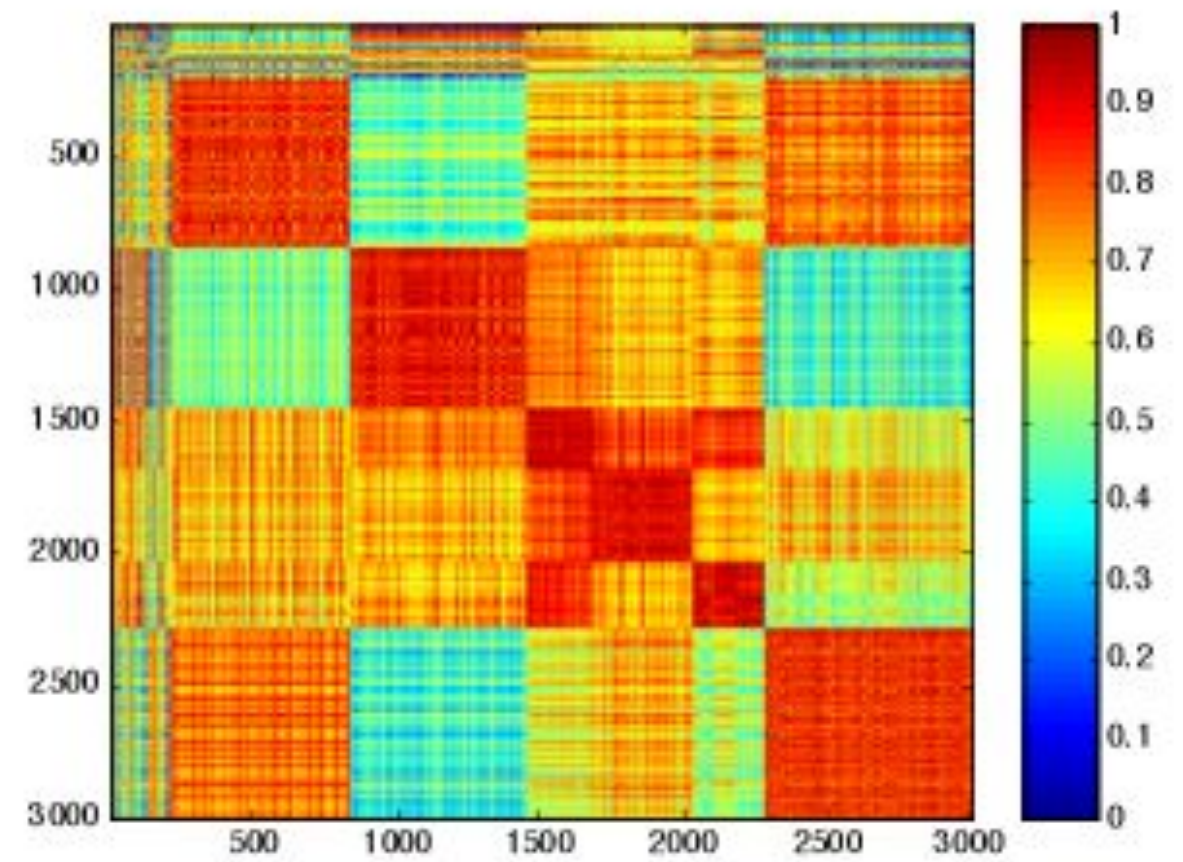
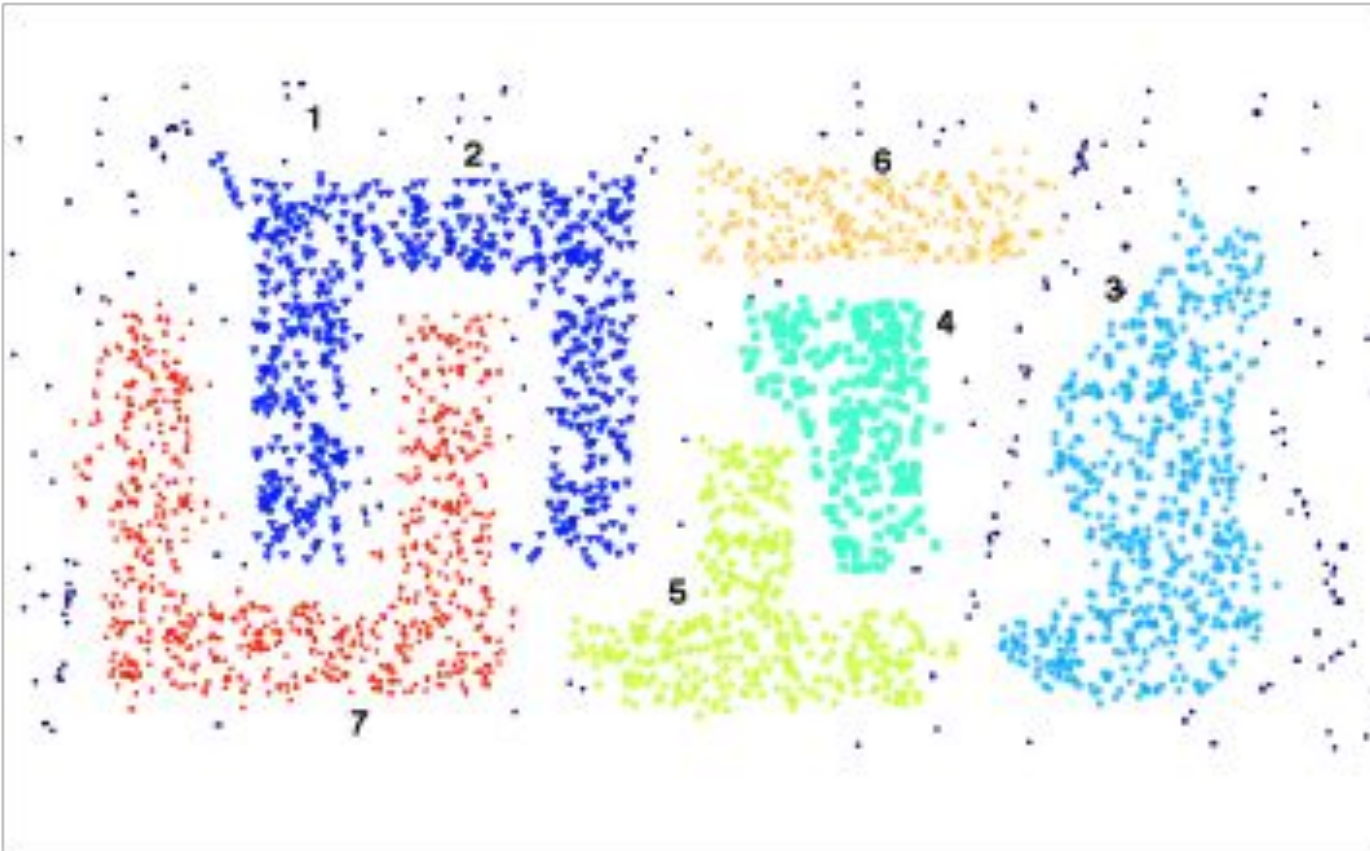
K-means

# Visualizando clusters sobre datos aleatorios



**DBSCAN**

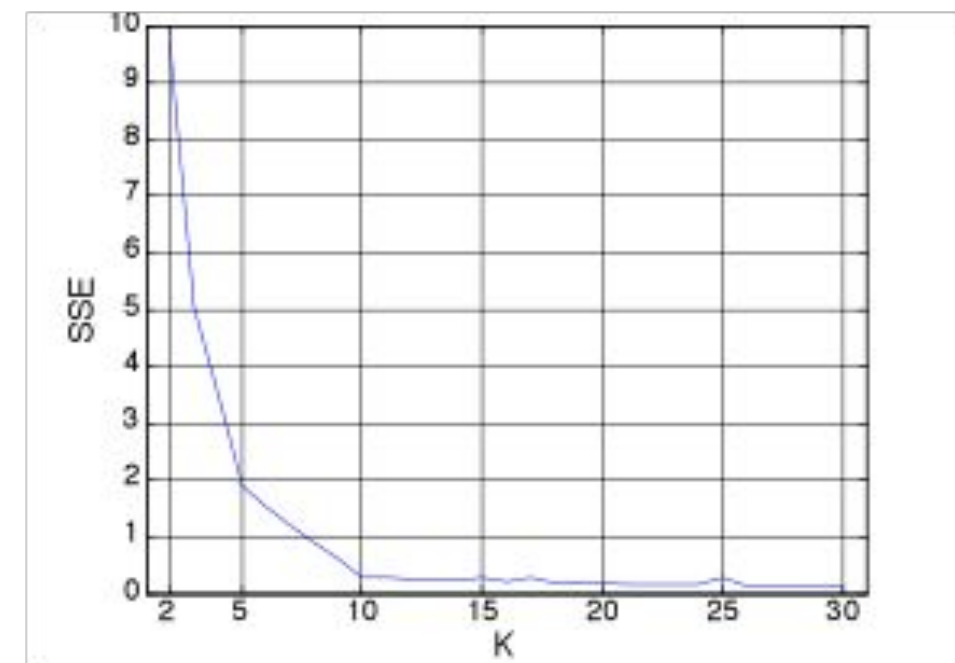
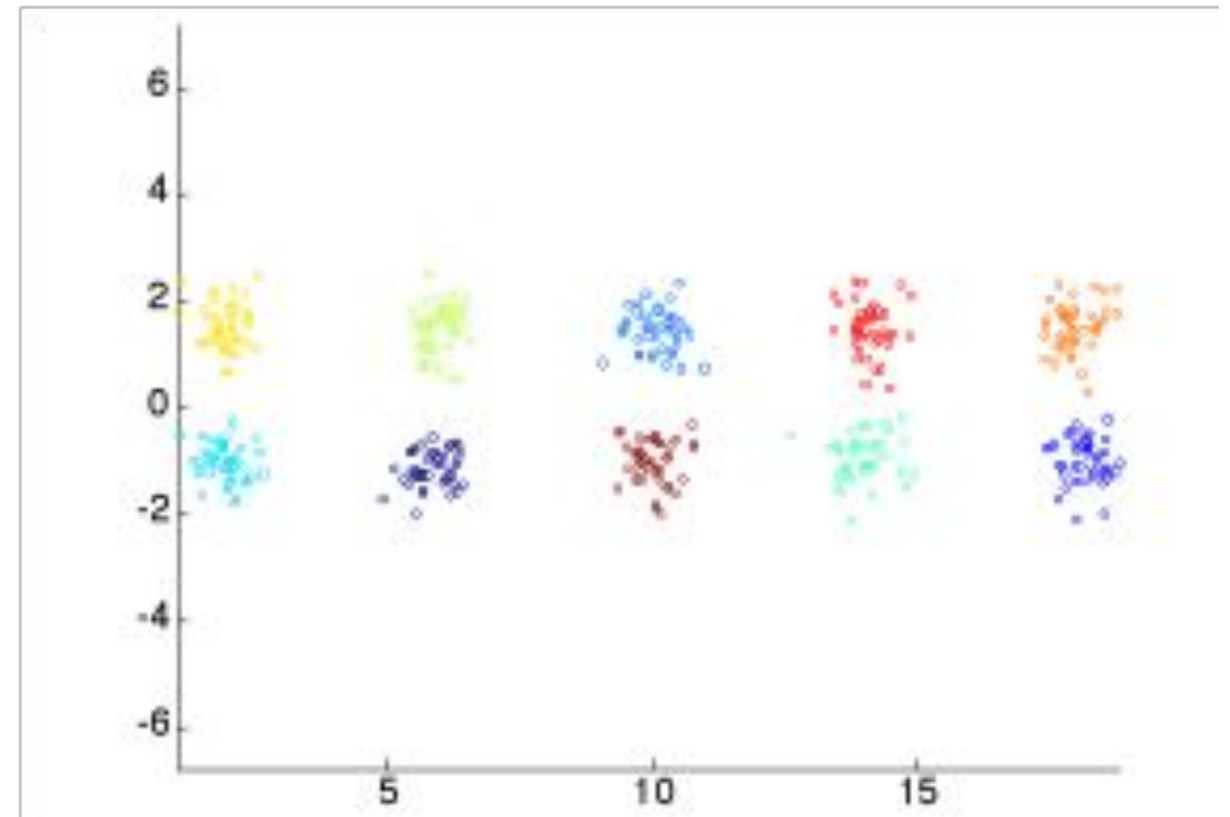


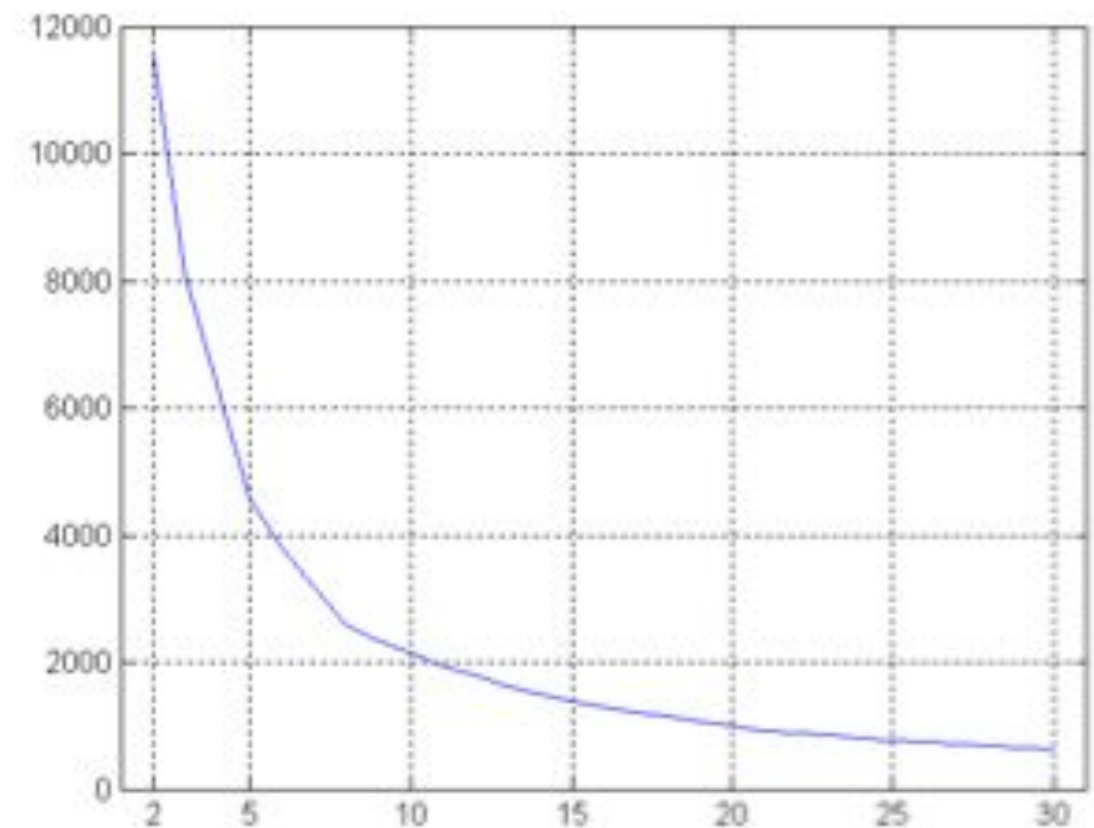
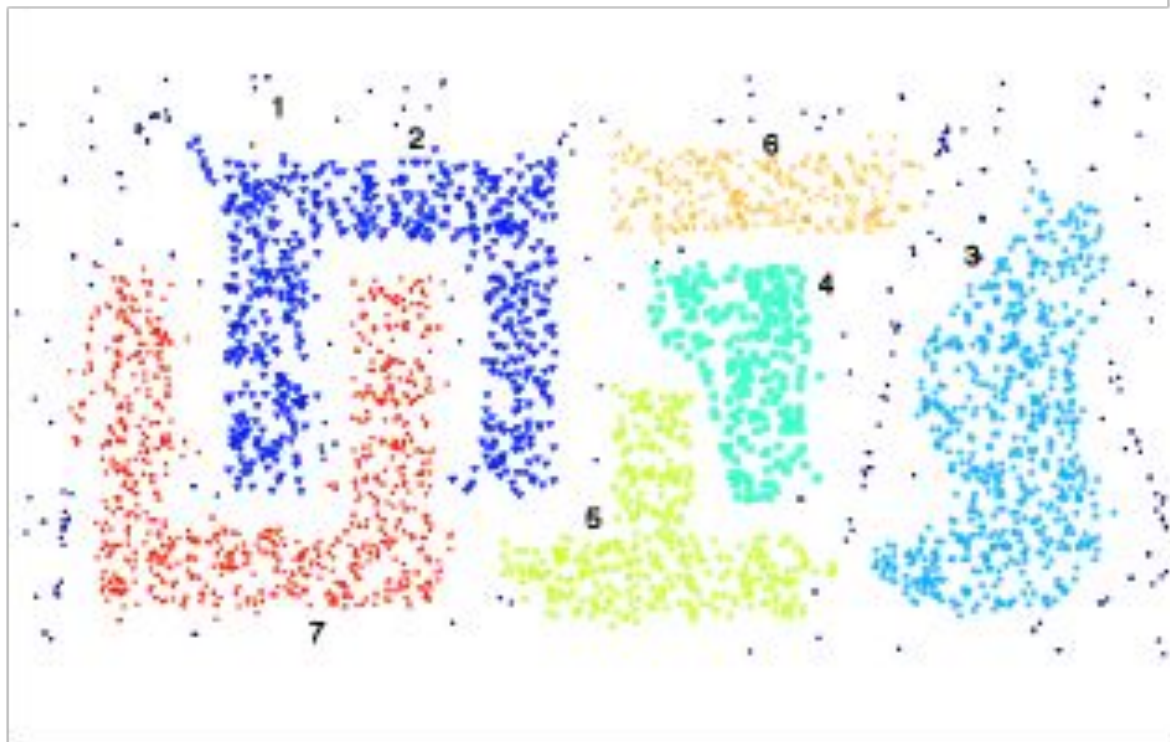


**DBSCAN**

# Medidas internas: SSE

- Clusters en figuras más complicadas no están bien separados
- Índice interno: SSE
- Permite comparar 2 clusters, o 2 soluciones de clustering
- Permite estimar el número de clusters





SSE of clusters found using K-means

Curva SSE para un dataset más complicado

# Metodología para validar clusters

- Necesidad de contar con una metodología para interpretar cualquier medida (¿qué es bueno? ¿qué no?)
- Usamos la estadística para crear una metodología

# Metodología para validar clusters

- Mientras más **atípico** es un resultado, más probable que sea reflejo de estructuras válidas
- Podemos comparar índices que resultan de datos aleatorios, con los de nuestros datos
- valores poco probables indican resultados válidos

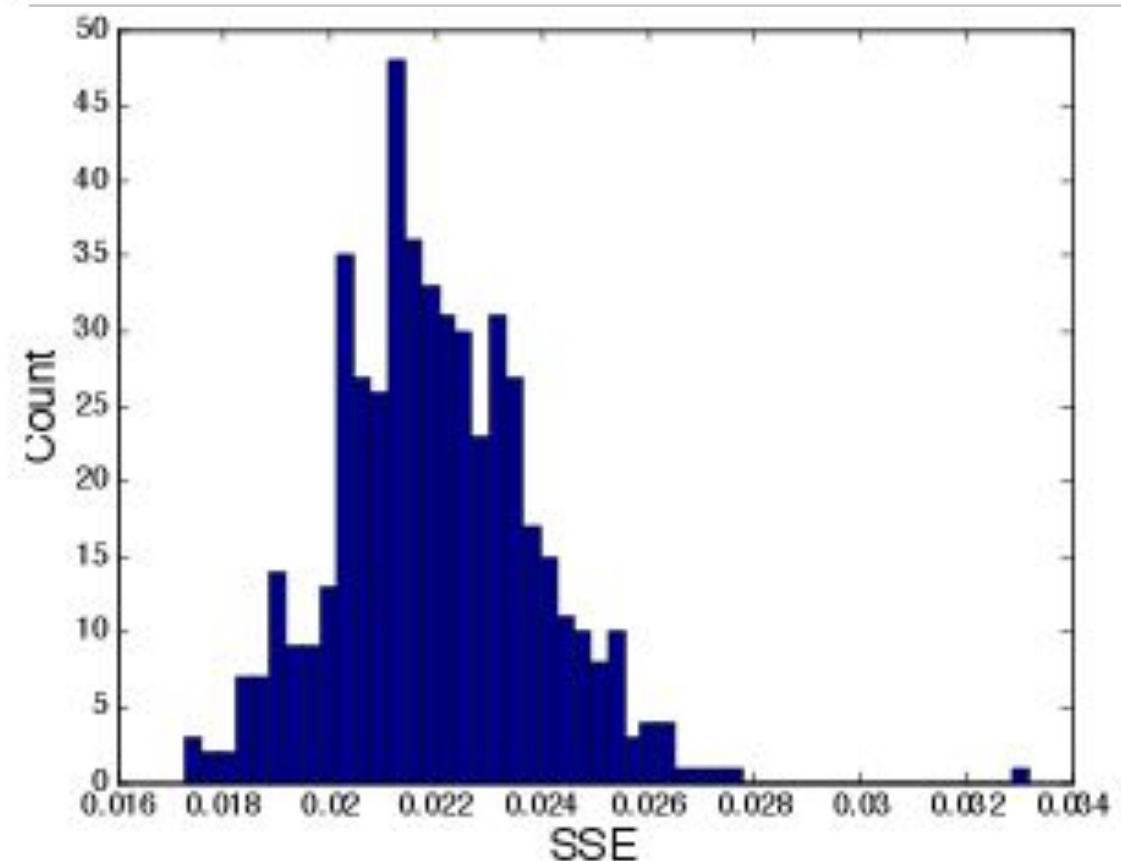
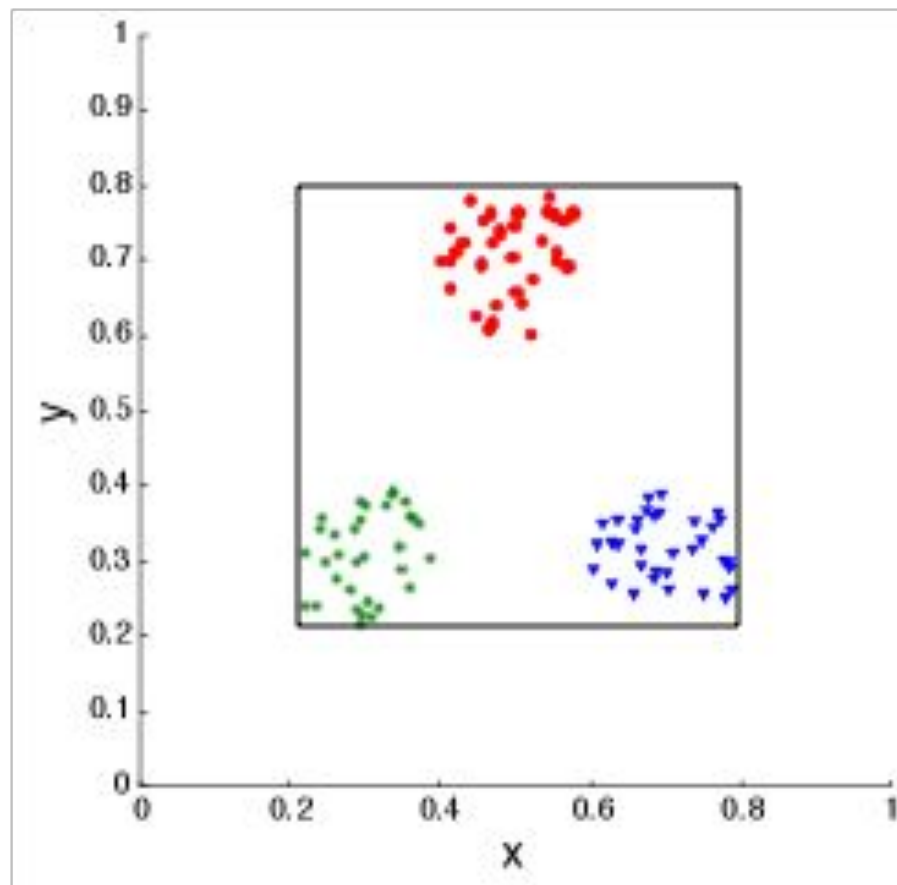
# Metodología para validar clusters

- Al comparar resultados de dos clustering (dos cluster sets), no es muy necesario usar una metodología
- Pero en este caso la pregunta es si la diferencia es **significativa** (estadísticamente - repetible y en magnitud)



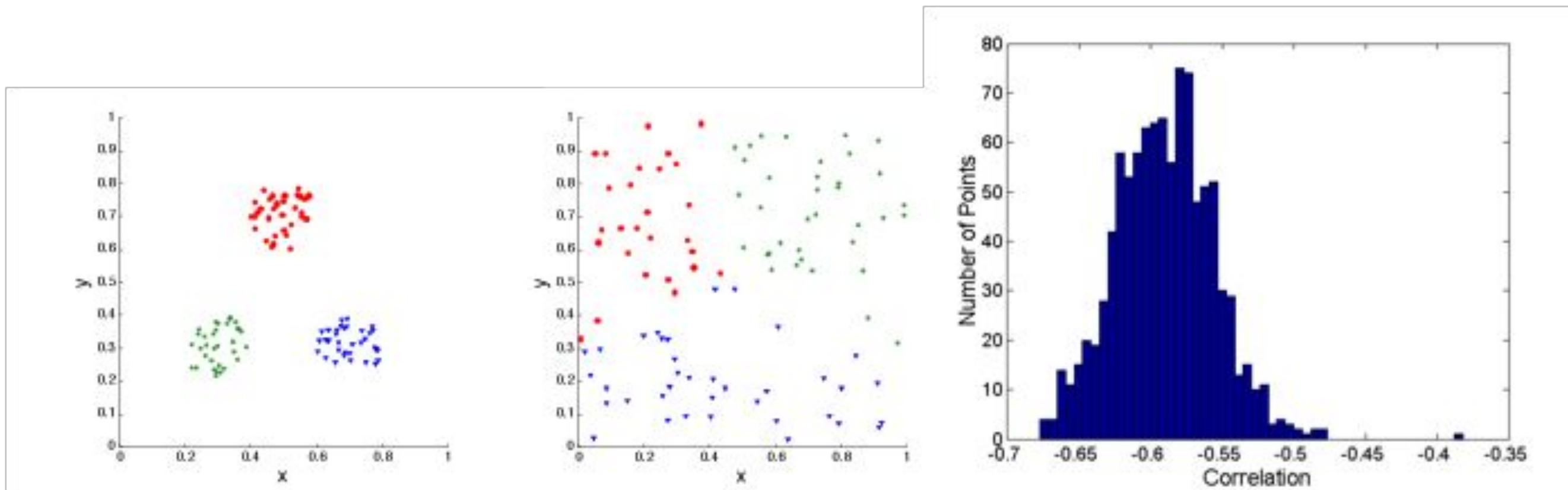
# Metodología: Ejemplo SSE

- Comparar  $SSE = 0.005$  contra 3 clusters de datos aleatorios
- Histograma muestra distribución SSE para 500 sets de datos aleatorios (100 puntos), en el mismo rango



# Otro ejemplo: Correlación

- Correlación entre matrices de incidencia y proximidad para 2 sets de datos



Corr = -0.9235

Corr = -0.5810



# Medidas internas: Cohesión y separación

- **Cohesión de clusters:** mide qué tan cercanos son los objetos en un cluster (ej: SSE)
- **Separación de clusters:** mide qué tan diferente o bien separado es un cluster de otros

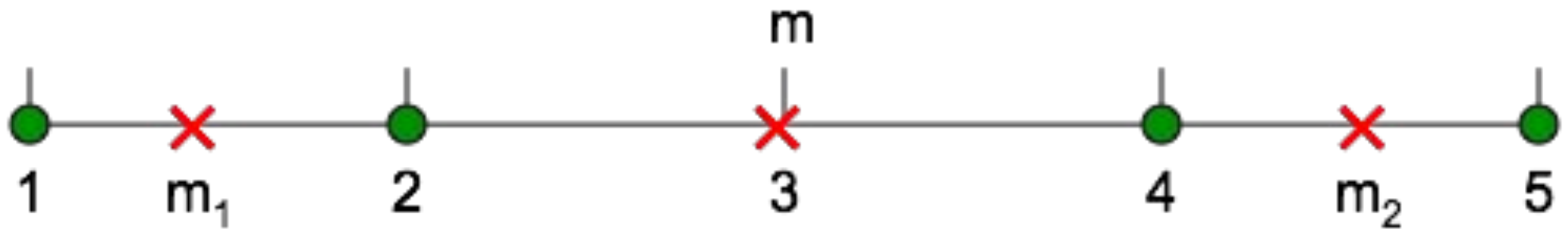
# EJ. (SSE) Cohesión y Separación

- Cohesión se mide como **within cluster sum of squares (SSE)**

$$WSS = \sum_i \sum_{x \in C_i} (x - m_i)^2$$

- Separación se mide como **between cluster sum of squares (BSS)**

$$BSS = \sum_i |C_i| (m - m_i)^2$$



**K=1 cluster:**

$$WSS = (1 - 3)^2 + (2 - 3)^2 + (4 - 3)^2 + (5 - 3)^2 = 10$$

$$BSS = 4 \times (3 - 3)^2 = 0$$

$$Total = 10 + 0 = 10$$

**K=2 clusters:**

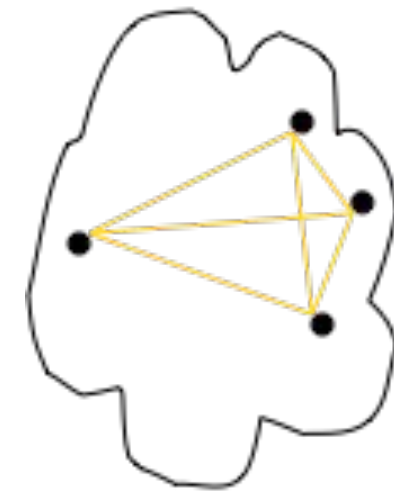
$$WSS = (1 - 1.5)^2 + (2 - 1.5)^2 + (4 - 4.5)^2 + (5 - 4.5)^2 = 1$$

$$BSS = 2 \times (3 - 1.5)^2 + 2 \times (4.5 - 3)^2 = 9$$

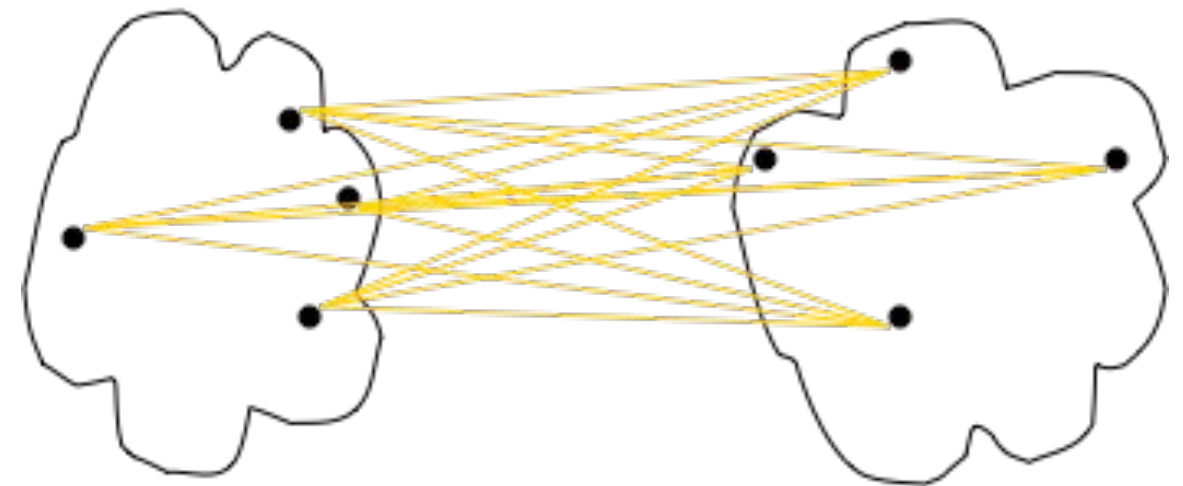
$$Total = 1 + 9 = 10$$

# Medidas internas: Cohesión y separación

- Enfoque basado en grafos de proximidad
- Cohesión: suma de los pesos de todos los arcos en un cluster
- Separación: suma de los pesos entre nodos del cluster y de otros clusters



cohesion



separation

# Medidas internas:

## Coeficiente de Silhouette

- Combina ideas de cohesión y separación, pero para puntos individuales, como también para clusters y clusterings (estos últimos son promedios)
- Para un punto individual,  $i$ 
  - Calcular **a** = distancia promedio de  $i$  a los puntos de su cluster
  - Calcular **b** = min(distancia promedio de  $i$  a puntos de otro cluster)
  - $s = (b-a)/\max(a,b)$
- valores entre -1 y 1, mientras más cerca a 1 mejor (y a más cerca de 0

# Pureza y Entropía

- Pureza: Nivel en que un cluster contiene elementos de una sólo clase (se usa la clase predominante)
- Entropía: Cantidad de clases diferentes que contiene un cluster

Table 1: Entropy and Purity in CLUTO

	Entropy	Purity
Single Cluster	$E(S_r) = -\frac{1}{\log q} \sum_{i=1}^q \frac{n_r^i}{n_r} \log \frac{n_r^i}{n_r}$	$P(S_r) = \frac{1}{n_r} \max_i(n_r^i)$
Overall	$Entropy = \sum_{r=1}^k \frac{n_r}{n} E(S_r)$	$Purity = \sum_{r=1}^k \frac{n_r}{n} P(S_r)$

$S_r$  is a cluster,  $n_r$  is the size of the cluster,  $q$  is the number of classes,  $n_r^i$  is the number of concepts from the  $i$ th class that were assigned to the  $r$ th cluster, and  $n$  is the number of concepts and  $k$  is the number of clusters.

# Medidas externas: Pureza y entropía

**Table 5.9.** K-means Clustering Results for LA Document Data Set

Cluster	Entertainment	Financial	Foreign	Metro	National	Sports	Entropy	Purity
1	3	5	40	506	96	27	1.2270	0.7474
2	4	7	280	29	39	2	1.1472	0.7756
3	1	1	1	7	4	671	0.1813	0.9796
4	10	162	3	119	73	2	1.7487	0.4390
5	331	22	5	70	13	23	1.3976	0.7134
6	5	358	12	212	48	13	1.5523	0.5525
Total	354	555	341	943	273	738	1.1450	0.7203

**entropy** For each cluster, the class distribution of the data is calculated first, i.e., for cluster  $j$  we compute  $p_{ij}$ , the ‘probability’ that a member of cluster  $j$  belongs to class  $i$  as follows:  $p_{ij} = m_{ij}/m_j$ , where  $m_j$  is the number of values in cluster  $j$  and  $m_{ij}$  is the number of values of class  $i$  in cluster  $j$ . Then using this class distribution, the entropy of each cluster  $j$  is calculated using the standard formula  $e_j = \sum_{i=1}^L p_{ij} \log_2 p_{ij}$ , where the  $L$  is the number of classes. The total entropy for a set of clusters is calculated as the sum of the entropies of each cluster weighted by the size of each cluster, i.e.,  $e = \sum_{j=1}^K \frac{m_j}{m} e_j$ , where  $m_j$  is the size of cluster  $j$ ,  $K$  is the number of clusters, and  $m$  is the total number of data points.

**purity** Using the terminology derived for entropy, the purity of cluster  $j$ , is given by  $purity_j = \max_i p_{ij}$  and the overall purity of a clustering by  $purity = \sum_{j=1}^K \frac{m_j}{m} purity_j$ .



# Validación con Expertos

- Se pueden evaluar los clusters para ver si producen el resultado esperado y comparar con otras soluciones
- Se puede generar una clasificación de validación

# Comentario final

- La etapa de validación es la parte más difícil y frustrante del análisis de clusters
- Sin embargo es necesario
- Idealmente se deben combinar medidas externas e internas



**dcc**

CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN  
UNIVERSIDAD DE CHILE

[www.dcc.uchile.cl](http://www.dcc.uchile.cl)

f @ in  / DCCUCHILE