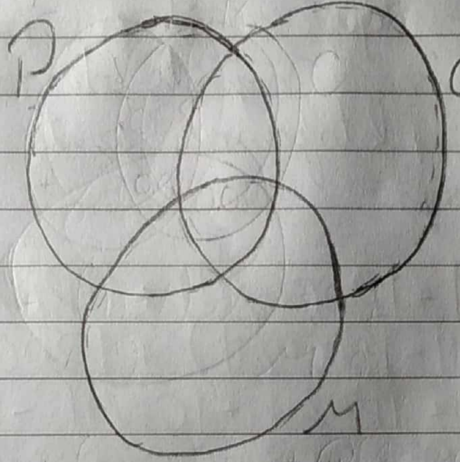
1) Denote por P, C e M os conjuntos dos alunos que jogam no PC, no console e no mobile, respectivamente.



1. O número de pessoas que joga apenas no PC é dado por

$$|P - C \cup M| = |P| - |P \cap C| - |P \cap M| + |P \cap C \cap M|$$
$$= 10^4 (0.16 - 0.05 - 0.08 + 0.02)$$
$$= 10^4 \cdot 0.05$$
$$= 500$$

Analogamente, para C e M,

$$|C - P \cup M| = |C| - |P \cap C| - |C \cap M| + |C \cap P \cap M|$$
$$= 10^4 (0.18 - 0.05 - 0.08 + 0.02)$$
$$= 10^4 \cdot 0.07 = 700$$
$$|M - P \cup C| = |M| - |M \cap P| - |M \cap C| + |M \cap P \cap C|$$
$$= 10^4 (0.26 - 0.08 - 0.08 + 0.02)$$
$$= 10^4 \cdot 0.12 = 1200$$

Portanto, o número de pessoas que jogo em uma única plataforma é

$$|P - C \cup M| + |C - P \cup M| + |M - C \cup P| = 500 + 700 + 1200$$
$$= 2400$$

2. O conjunto de pessoas que jogam em pelo menos duas plataformas consiste no conjunto de pessoas que jogo em exatamente duas plataformas, junto das pessoas que jogam nas três. Ou seja

$$\begin{aligned}
|\text{Pelo menos duas}| &= (|P \cap C| - |P \cap C \cap M|) + (|P \cap M| - |P \cap C \cap M|) \\
&\quad + (|C \cap M| - |P \cap C \cap M|) + |P \cap C \cap M| \\
&= |P \cap C| + |P \cap M| + |C \cap M| - 2 \cdot |P \cap C \cap M| \\
&= 10^4 (0.05 + 0.08 + 0.08 - 2 \cdot 0.02) \\
&= 10^4 \cdot 0.17 = 1700
\end{aligned}$$

3. Neste caso, é necessário contabilizar o conjunto de pessoas que jogam em uma única plataforma tradicional e no mobile, juntamente com as pessoas que jogam em ambas as plataformas além do mobile. Denote este conjunto por X:

$$\begin{aligned}
|X| &= (|P \cap M| + |C \cap M| - 2|P \cap C \cap M|) + |P \cap C \cap M| \\
&= |P \cap M| + |C \cap M| - |P \cap C \cap M| \\
&= 10^4 (0.08 + 0.08 - 0.02) \\
&= 10^4 \cdot 0.14 \\
&= 1400
\end{aligned}$$

4. Para obter o número de pessoas que não jogam em nenhuma plataforma, subtraímos do total o número de pessoas que jogo em pelo menos

S T Q Q S S D __/__/__

uma plataforma, número este dado por

$$|P \cup C \cup M| = |P| + |C| + |M| - |P \cap C| - |P \cap M|$$
$$- |C \cap M| + |P \cap C \cap M|$$
$$= 10^4 \cdot (0.16 + 0.18 + 0.26 + 0.05 - 0.08$$
$$- 0.08 + 0.02)$$
$$= 10^4 \cdot 0.41 = 4100$$

$\therefore$ $1 - |P \cup C \cup M| = 10^4 - 4100 = 5900$

5. Seguindo o raciocínio do item 3, basta subtrair do valor obtido o número de pessoas que jogam em duas plataformas tradicionais e no mobile. Denote o conjunto buscado por Y:

$$|Y| = |X| - |P \cap C \cap M|$$
$$= 1400 - 10^4 \cdot 0.02$$
$$= 1400 - 200 = 1200$$

___/___/___ S T Q Q S S D

2) Sejam $D \in \{$segundo, terça, ..., sexta$\}$ e X_D a variável aleatória que denota o número de funcionários que se atrasaram no dia D. A variável X_D pode ser condicionada à variável C_D que determina se choveu no dia D. A distribuição de X_D é Binomial com parâmetro $n = 500$ e probabilidade a depender de C_D.

Dado que para $X \sim$ Binomial(n, p) vale que $\mathbb{E}[X] = np$, da tabela fornecida pelo problema podemos construir uma outra com as esperanças condicionais $\mathbb{E}[X_D \mid C_D]$

	segunda	terça	quarta	quinta	sexta
sem chuva	35	25	30	60	75
com chuva	50	35	50	65	100

1. Da teoria de probabilidade vale que se X é uma variável aleatória tal que $\mathbb{E}[X] < +\infty$ e se $\{A_i\}$ é uma partição do espaço de probabilidades Ω (i.e. particiona o espaço em subconjuntos disjuntos de eventos), então

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i \mathbb{E}[X \mid A_i]\,\mathbb{P}(A_i)$$

Para cada D, $\{C_D\}$ é uma partição, de modo que

$$\mathbb{E}[X_D] = \mathbb{E}[X_D \mid C_D = \text{sem chuva}]\,\mathbb{P}(C_D = \text{sem chuva}) + \mathbb{E}[X_D \mid C_D = \text{com chuva}]\,\mathbb{P}(C_D = \text{com chuva})$$

Por independência das variáveis e linearidade da esperança, o valor esperado em um mês é a soma das esperanças dos dias úteis. Pelas informações do

spiral

S T Q Q S S D

problema, podemos assumir que a probabilidade de chuva em um dia útil é $6/20 = 3/10$. Portanto, se X é o total de atrasos,

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[4 \cdot \sum_D X_D]$$

$$= 4 \cdot \sum_D \mathbb{E}[X_D]$$

$$= 4 \cdot \sum_D (\mathbb{E}[X_D | \text{com chuva}]\,\mathbb{P}(\text{com chuva}) + \mathbb{E}[X_D | \text{sem chuva}]\,\mathbb{P}(\text{sem chuva}))$$

$$= 4 \cdot \left[\left(\frac{50 \cdot 3 + 35 \cdot 7}{10}\right) + \left(\frac{35 \cdot 3 + 25 \cdot 7}{10}\right) + \left(\frac{50 \cdot 3 + 30 \cdot 7}{10}\right) + \left(\frac{65 \cdot 3 + 60 \cdot 7}{10}\right) + \left(\frac{100 \cdot 3 + 75 \cdot 7}{10}\right)\right]$$

$$= 990$$

2. Seja I_D uma variável indicadora que denota se um dado funcionário faltou no dia D. Por definição da probabilidade condicional,

$$\mathbb{P}(D = \text{quarta} \mid I_D = 1, C_D = \text{choveu}) = \frac{\mathbb{P}(I_D = 1, C_D = \text{choveu}, D = \text{quarta})}{\mathbb{P}(I_D = 1, C_D = \text{choveu})}$$

Da tabela, a probabilidade no numerador equivale a 0.10. Pelo teorema da probabilidade total,

$$\mathbb{P}(I_D = 1, C_D = \text{choveu}) = \sum_D \mathbb{P}(I_D = 1, C_D = \text{choveu}, D)$$
$$= 0.10 + 0.07 + 0.10 + 0.13 + 0.20$$
$$= 0.60$$

so $\mathbb{P}(D = \text{quarta} \mid I_D = 1, C_D = \text{choveu}) = \dfrac{0.10}{0.60} = \dfrac{1}{6}$

3) Denote por G a variável aleatória que assume valores no conjunto $\{800, 200, 100, 0\}$, indicando o lucro da aposta.

Denote por N a variável aleatória que indica o tipo de nome selecionado. Supondo que seja uniforme a seleção de qualquer nome, N pode assumir os seguintes valores com as probabilidades correspondentes:

- $\mathbb{P}(N=A) = \frac{1}{500}$; retorno 800 de lucro
- $\mathbb{P}(N=B) = \frac{1}{100}$; retorno 200 de lucro
- $\mathbb{P}(N=C) = \frac{1}{50}$; retorno 100 de lucro
- $\mathbb{P}(N=D) = \frac{484}{500}$; não retorno lucro

Com isso conseguimos calcular a expectativa de ganho,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[G] &= 800 \cdot \mathbb{P}(G=800) + 200 \cdot \mathbb{P}(G=200) \\
&\qquad + 100 \cdot \mathbb{P}(G=100) + 0 \cdot \mathbb{P}(G=0) \\
&= 800 \cdot \mathbb{P}(N=A) + 200 \cdot \mathbb{P}(N=B) + 100 \cdot \mathbb{P}(N=C) \\
&= 800 \cdot \frac{1}{500} + 200 \cdot \frac{5}{500} + 100 \cdot \frac{10}{500} \\
&= 5.6
\end{aligned}$$

e o lucro esperado é $5.6 - 10 = -4.4$

S T Q Q S S D

4) 1. Se $\vec{x} = (x, y, z)$ é um ponto do plano, então vale que

$$\langle (x-4, y-3, z-2), (-3, 2, -1) \rangle = 0,$$

o que equivale à

$$-3x + 2y - z + (12 - 6 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -3x + 2y - z + 8 = 0$$

2. A partir da equação do plano obtemos facilmente o vetor normal olhando para os coeficientes das incógnitas. Dessa forma, o vetor normal é dado por $n = (3, 4, 0)$.

Na interseção com o eixo x temos que $y = z = 0$, e da equação obtemos o ponto $(4, 0, 0)$. Analogamente, o plano intercepta o eixo y no ponto $(0, 3, 0)$, e observamos que não há ponto de interseção com o eixo z, pois a equação não é satisfeita quando $x = y = 0$.

spiral