Université Paris-Saclay
IUT DE CACHAN

Département GEII 2

BUT3
Semestre 5

BUT Génie Électrique et Informatique Industrielle – ESE

Électronique

TD n°1 : FIR 1D et 2D

Auteur(s) : PR
Date : 2024
Version : V1

PARTIE A - Étude de deux filtres élémentaires pour le traitement de l'image

Un domaine d'application très étendu du traitement du signal est le traitement numérique des images. Nous nous proposons ici d'étudier l'effet sur l'image de deux filtres : un filtre moyenneur d'ordre 2, et un filtre dérivateur d'ordre 1.

Avant de traiter une image 2D, nous allons rappeler le fonctionnement d'un filtre moyenneur en 1D d'ordre 2.

k	0	1	2	3	.	.	.	k-2	k-1	k	k+1	.	.	.	n
E[k]	E[0]	E[1]	E[2]	E[3]	.	.	.	E[k-2]	E[k-1]	E[k]	E[k+1]	.	.	.	E[n]
M[k]	M[0]	M[1]	M[2]	M[3]	.	.	.	M[k-2]	M[k-1]	M[k]					

Tableau 1 : illustration de la moyenne glissante ($N_b = 3$).

1. [*]Écrire ci-dessous la relation donnant à un instant k, la moyenne glissante M[k] sur 3 échantillons E[k].

Pourquoi parle-t-on de filtre d'ordre 2 ?

---

[*] Les questions avec * sont au programme du DS pour tous les apprentis. Les questions avec ** uniquement pour les BUT3.

Est-ce un FIR ou un IIR ?

2. *Questions de réflexion :
   - Pour le filtrage d'un signal numérique, à quoi correspond k ? ________________
   - S'il s'agit maintenant de filtrer une image ligne par ligne, à quoi correspond k ?

     ____

Prenons l'exemple du filtrage ligne par ligne d'une image noir et blanc pour laquelle chaque niveau de gris correspond à une valeur numérique comprise entre 0 (noir) et 10 (blanc). La ligne de pixels figure 1 peut-être représentée en mémoire par les données de la deuxième ligne du tableau 2.

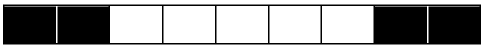

Figure 1

2. *Calculer le résultat de l'application du filtre moyenneur à cette suite de valeurs et remplir la troisième ligne du tableau 2 en conséquence (on supposera que la droite et la gauche de l'image sont noires, donc leurs valeurs sont 0).

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
E[k]	0	0	10	10	10	10	10	0	0
M[k]									

Tableau 2

A chaque valeur de M[k] obtenue à la question 2 on fait correspondre un niveau de gris selon le tableau suivant :

	0
	10/3
	20/3
	10

Tableau 3 : Correspondance entre niveau de gris et valeur numérique du pixel

3. *Coloriez la ligne de pixels figure 2 qui correspond aux valeurs trouvées pour M[k] question 2 (on commence toujours une année par un dessin !).

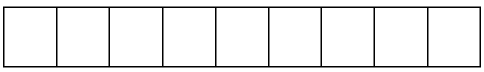

Figure 2

Décrire ci-dessous l'effet de ce filtre sur l'image d'origine :

4. *Comme vu en BUT2, un tel filtre présente des fréquences « singulières ». Pour constater l'effet sur une image, appliquer le filtre à la figure suivante et commenter le résultat.

Figure 1bis

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
E[k]	10	5	0	10	5	0	10	5	0
M[k]									

Tableau 2bis

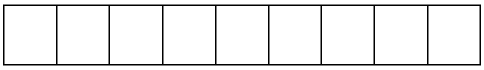

Figure 2bis

Décrire la notion de fréquence « singulière » du point de vue de son effet :

5. *Le filtre « dérivateur » d'ordre 1 présente la relation suivante : D[k] = **I** E[k] – E[k-1] **I** (où **I**…**I** est la valeur absolue). Remplir le tableau 4 et colorier la figure 3 correspondante.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
E[k]	0	0	10	10	10	10	10	0	0
D[k]									

Tableau 4

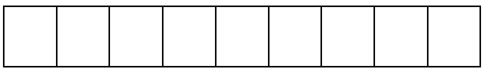

Figure 3

Décrire ci-dessous l'effet de ce filtre sur cette image (indice : regarder la photo à la fin de l'énoncé).

Bien sûr une image possède 2 dimensions, le tableau d'entrées doit donc en posséder deux aussi : E[j][k] ; le premier indice correspondra aux lignes, le second aux colonnes.

	0	1	2	3
0	E[0][0]	E[0][1]	E[0][2]	...
1	E[1][0]	E[1][1]		
2	E[2][0]			
3	...			

Tableau 5 : les pixels d'une image N&B, entrées du filtre

Donc un filtre de traitement d'image doit filtrer sur deux dimensions. Voici l'équation d'un filtre dérivateur deux dimensions très simple :

$$D[j][k] = \frac{|-E[j-1][k] - E[j][k-1] + 4 * E[j][k] - E[j+1][k] - E[j][k+1]|}{4}$$

6. *Appliquer ce filtre à la figure 4 de gauche et donner les valeurs des cases A, B et C dans le tableau 6.

A	B	C

Tableau 6

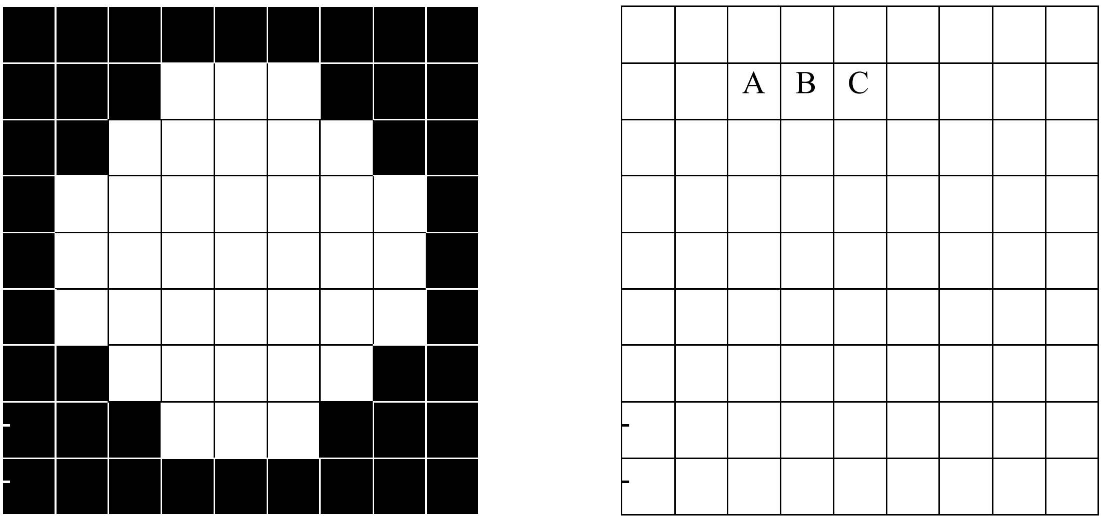

Figure 4

7. *En remarquant qu'à part le noir (0) et le blanc (10) il n'y a que des cases de type A, B ou C, colorier l'ensemble sur la figure 4 de droite.

8. ****Puisque qu'une image numérisée est représentée par une matrice 2D, on utilise généralement le calcul matriciel pour effectuer du filtrage d'images.** Donner la matrice

correspondante et vérifier que le produit de convolution donne le même résultat que l'équation.

9. **En utilisant le même principe que pour le filtre dérivateur, établir l'équation d'un filtre moyenneur d'ordre 1 2D (celui du début du TD était un filtre 1D d'ordre 2)

10. **Déduire ce cette équation la matrice de filtrage. Utiliser cette matrice pour trouver le résultat pour les cases A, B et C.

PARTIE B – Un risque important de dégradation dû à la numérisation des images

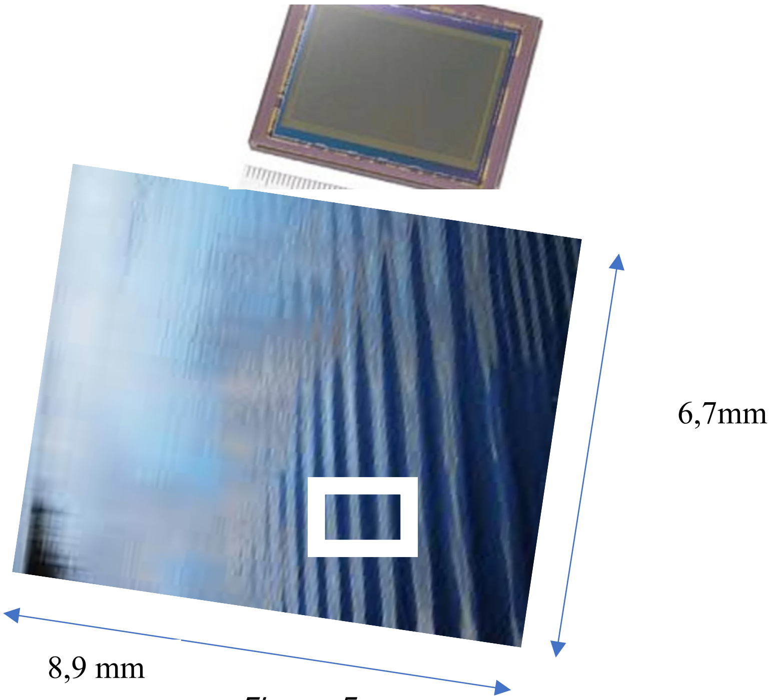

Figure 5

Nous allons considérer ici que la caméra principale d'un iPhone 16 pro filme l'image dont est extraite la figure 5, et nous nous intéressons plus particulièrement à la partie de l'image encadrée. La taille du capteur mesure 6,4mm x 4,8mm, avec une résolution 8000 x 6000.

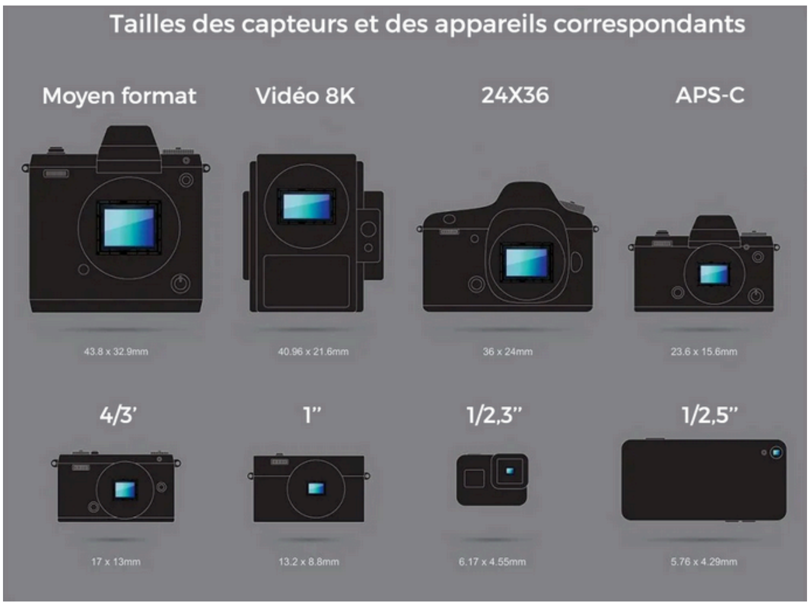

Figure 6

1. *Quel est le pitch de ce capteur (distance entre deux pixels).

Si on représente par un niveau de gris chaque point de l'image « analogique » en fonction de la position horizontale on obtiendrait pour une ligne de pixels la courbe sinusoïdale de la figure 7 représentative de $p(x) = 5 + 5 * \sin(2 * \pi * f_x . x)$.

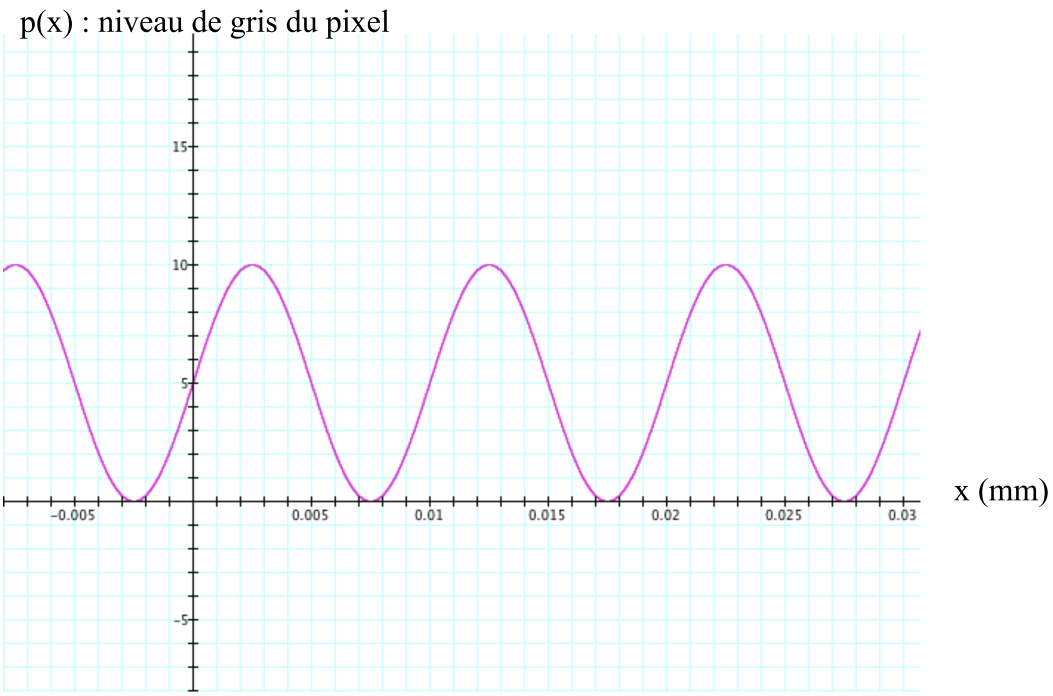

Figure 7

2. *Questions de réflexion :

- Quel est le changement principal du modèle mathématique par rapport au signaux sinusoïdaux habituels ? ______________________
- Quel nom proposez-vous de donner à f_x ? ______________________
- A quelle image correspond le signal dont $f_x = 0$? ______________________
- A quelle image correspond le signal dont $f_x = 1\ km^{-1}$? ______________________

Retour au signal étudié en figure 7 :

Que vaut X la période (spatiale) de p(x) : ______________ mm

Que vaut f_x (inverse de la période) ? ______________ $(mm)^{-1}$ ou km^{-1}

3. *La série de Fourier de p(x) sera notée P(f). **Représenter ci-dessous le spectre de raies de P(f) en précisant toutes les valeurs numériques sur les axes, sans oublier le continu.**

4. *On suppose que l'image (figure 5) après numérisation par le capteur d'un iPhone 16 pro est compressée par la méthode la plus simple : en **décimant** le nombre de pixels par **4.** Quel est alors le **pitch** après compression ?

5. *Pour simplifier on considère finalement que la ligne de l'image étudiée contient 4 pixels pour 0,01mm suivant l'axe Ox. <u>Représenter les positions d'échantillonnage sur la figure 7 par des verticales.</u>

Que vaut X_e l'écart entre deux pixels ? ________________ mm

Quel autre nom peut-on donner à X_e ? ____

Que vaut F_e, la fréquence d'échantillonnage (spatiale) ? ______________ **$(mm)^{-1}$ ou km^{-1}**

6. *Compléter les lignes 2 et 3 du tableau 7 avec les valeurs numériques obtenues.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x(mm)	0	X_e	$2.X_e$	$3.X_e$	$4.X_e$	$5.X_e$	$6.X_e$	$7.X_e$	$8.X_e$
$p(x) = p_k$									

Tableau 7

Comme vu dans le cours sur l'échantillonnage, on peut faire correspondre à la suite (p_k) le signal constitué d'impulsions de Dirac p*(x) qui permet le calcul de la série de Fourier notée P*(f)

7. ***Représenter ci-dessous le spectre de raies du signal échantillonné P*(f) en allant jusqu'à la fréquence (spatiale) 2 x F_e.** Utiliser les notations f_x, F_e et X_e, et préciser la valeur numérique ce chacun d'eux.

8. *Au moment de la reproduction de l'image numérisée (DAC), **quelles fréquences risquent de gêner le spectateur ?** Si on pouvait placer un filtre sur cette image (par une technologie inspirée de la partie A), **à partir de quelle fréquence (spatiale) devrait-il couper pour éviter tout problème ? Quel nom donne-t-on usuellement au filtre qui joue ce rôle ?**

Fréquences gênantes :

Fréquence de coupure :

Nom donné à ce filtre dans le cadre des systèmes numériques :

9. *Pour réaliser le filtre de la question précédente, lequel des algorithmes de la partie A vous parait le plus approprié ? Pourquoi ? Pour pouvoir mettre en œuvre ce filtre efficacement on utilise généralement une interpolation numérique : pouvez-vous décrire précisément ce que génère un interpolateur x10 ? Quelle serait alors la valeur de la fréquence d'échantillonnage (spatiale) après l'interpolateur ?

Filtre de la partie A qui pourrait servir :

Justification élémentaire :

Que produit un interpolateur x10 ?

Fréquence d'échantillonnage après interpolation : ______________________________ mm^{-1}

10. *En tenant compte de la fréquence de coupure établie à la question 8, et en décidant qu'on lui fera correspondre la fréquence singulière des filtres moyenneurs, déterminer l'ordre minimal du filtre.

Indice