

Cvičení 8

Příklad 1: Připomeňte si definice následujících pojmů:

- Otevřené a uzavřené množiny, okolí bodu,
- uzávěrový systém, uzávěr množiny a uzávěrový operátor,
- topologický prostor (X, τ) s otevřenými množinami, TP s uzavřenými množinami,
- uzávěr a vnitřek množiny v daném topologickém prostoru,
- souvislý a nesouvislý topologický prostor.

Příklad 2: Máme množiny $A, B \subseteq \mathbb{R}$, kde $A = \langle -1, -0.5 \rangle \cup \{1/n; n \in \mathbb{N}^+\} \cup \{2\} \cup (3, 4)$ a $B = (-\pi, -\pi/2) \cup \{\sin(1/x); x \in \mathbb{R}^+\} \cup \{\pi\} \cup (3.15, 3.16)$.

- Určete vnitřek množiny A a taky B ,
- Určete uzávěr množiny A a taky B ,
- Určete hranici množiny A a taky B ,
- Určete vnějšek množiny A a taky B ,
- Určete izolované body množiny A a taky B ,
- Určete hromadné body množiny A a taky B .

Příklad 3: Topologie horních podmnožin. Máme uspořádanou množinu (X, \leq) . Za otevřené množiny vezmeme tzv. horní podmnožiny $U \subseteq X$, pro které platí, že $x \in U$ a $x \leq y$, potom i $y \in U$.

- Vytvořte nějakou topologii horních podmnožin na svazu $(\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}, \rho)$, kde ρ je relace celočíselné dělitelnosti.
- Určete co nejmenší okolí jednotlivých prvků.
- Určete uzávěr a vnitřek množin $\{2, 3\}$, $\{1, 3\}$, $\{6, 9\}$

Příklad 4: Rozhodněte, zda jsou následující struktury topologickými prostory s otevřenými (uzavřenými) množinami a pokud ano, zda se jedná o souvislé nebo nesouvislé TP:

- $(\emptyset, \{\emptyset\})$,
- (X, τ) , kde $\tau = P(X)$ a $X = \{a, b, c\}$,
- (X, τ) , kde $\tau = \{\emptyset, X\}$ a $X = \{a, b, c\}$,
- $(\{a, b, c\}, \tau)$, kde $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$,
- $(\{a, b, c, d\}, \tau)$, kde $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}\}$,
- (\mathbb{R}, τ) , kde (\mathbb{R}, \leq) je uspořádaná množina reálných čísel, $\tau = \{\text{všechny otevřené množiny v } \mathbb{R}\}$ a okolím bodu x je pak otevřený interval $(a, b) = \{x; a < x < b\}$,
- $(\{a, b, c, d, e\}, \tau)$, kde $\tau = \{\emptyset, \{a, c\}, \{b, d, e\}, \{a, b, c, d, e\}\}$,
- $(\{a, b, c, d, e\}, \tau)$, kde $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, \{b, d, e\}, \{a, b, c, d, e\}\}$,
- (X, τ) , $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $(n \in \mathbb{N})$, $\tau = \{U; U \text{ je sjednocením otevřených koulí v } \mathbb{R}^n\}$,

- j) (X, τ) , $X = \{0, 1\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{1\}\}$,
- k) (\mathbb{N}, τ) , $\tau = \{U; U \subseteq \mathbb{N}, \mathbb{N} \setminus U \text{ je konečná množina}\} \cup \{\emptyset\}$.

Příklad 5: Určete pokud možno nejmenší okolí prvku x v topologiích z příkladu 4 a také jak vypadají jiná okolí téhož prvku:

- a) jakékoliv x ,
- b) $x = a$,
- c) jakékoliv x ,
- d) $-$,
- e) $x = b$,
- f) $x = 0$,
- g) $x = a$, $x = b$,
- h) $-$,
- i) $x = 0$ v \mathbb{R}^3 ,
- j) $x = 0$, $x = 1$,
- k) $x = 42$.

Příklad 6: Určete uzávěr, vnitřek a hranici množiny A v topologiích z příkladu 4:

- a) $A = \{a, b\}$,
- b) $A = \{a, b\}$,
- c) $A = \{a, b\}$,
- d) $-$,
- e) $A = \{a, b\}$,
- f) (a, b) ,
- g) $A = \{a, b\}$,
- h) $-$,
- i) $A = \{(x_1, x_2, x_3), |x_i| < 1 \quad \forall i = 1, 2, 3\}$, kde $A \subseteq \mathbb{R}^3$,
- j) $A_1 = \{0\}$, $A_2 = \{1\}$,
- k) $A_1 = \{42\}$, $A_2 = \{42, 43, 44, \dots\}$.