Matrizes

Estrutura de Dados

Universidade Federal de Juiz de Fora
Departamento de Ciência da Computação

Conteúdo

Introdução

- Em computação, as matrizes são representadas por meio de estruturas de dados conhecidas como **vetores** ou **arrays**, onde cada posição/valor pode ser referenciada por um ou mais índices (dependendo da quantidade de dimensões da matriz);
- Enquanto na matemática uma matriz possui sempre duas dimensões, na computação chama-se qualquer vetor de matriz, podendo possuir uma ou mais dimensões.
  - Matrizes unidimensionais (ou vetores)
  - Matrizes bidimensionais
  - Matrizes N-dimensionais

Introdução

- Quanto de memória ocupa uma matriz 5000×5000 de valores reais?
  - Um valor real (`float`) ocupa 4 bytes;
  - Então, essa matriz ocupa aproximadamente 100MB.
- E se somente alguns poucos elementos dessa matriz fossem diferentes de zero?
- Seria possível reduzir a sua representação de forma que ela passasse a ocupar menos espaço de memória?
- Veremos como representar essas matrizes de forma compacta:
  - Matrizes Diagonais;
  - Matrizes Triangulares;
  - Matrizes Esparsas;
  - Etc...

TADs

- TAD Vetor (matriz unidimensional);
- TAD Vetor Flexível;
- TAD Matriz bidimensional.

TAD Vetor

- Seja o TAD Vetor de n elementos reais, representado na classe em C++ a seguir:

```
class Vetor
{
  public:
    Vetor(int tam);
    ~Vetor();
    float get(int indice);
    void set(int indice, float valor);

 private:
   int n;       // tamanho do vetor
   float *vet; // array que armazena n floats

   bool verifica(int indice);
};
```

TAD Vetor

- Implementar o TAD Vetor anterior para um vetor de reais, de acordo com as seguintes especificações:
  - O tamanho do vetor deve ser definido em tempo de execução. Assim, o construtor deve alocar memória de acordo com o tamanho especificado pelo seu parâmetro `tam`;
  - Ao acessar ou modificar um elemento do vetor, verificar a validade do índice;
- Em seguida, desenvolver um programa através (`main()`) para testar o TAD Vetor, usando um vetor de 60 elementos reais.

TAD Vetor

- Construtor e destrutor

```
Vetor::Vetor(int tam)
{
  // inicializa a variavel interna n e
  // aloca memoria para o vetor vet
  n = tam;
  vet = new float[n];

  // opcional: inicializar vet com zeros
  for(int i=0; i<n; i++)
    vet[i] = 0.0;
}

Vetor::~Vetor()
{
  // desaloca a memoria alocada no construtor
  delete [] vet;
}
```

TAD Vetor

- A função privada `verifica()` analisa a validade do índice do vetor.
- O índice pode assumir um valor entre 0 e n–1 (padrão C/C++):

```
bool Vetor::verifica(int indice)
{
  // verifica validade de indice
  if(indice >= 0 && indice < n)
    return true;
  else
    return false;
};
```

TAD Vetor

```
float Vetor::get(int indice)
{
  if ( verifica(indice) )
    return vet[indice];
  else {
    cout << "Indice invalido: get" << endl;
    exit(1) ; // finaliza o programa
 }
}

void Vetor::set(int indice, float valor)
{
  if ( verifica(indice) )
    //armazena valor na posicao indice de vet
    vet[indice] = valor;
  else
    cout << "Indice invalido: set" << endl;
}
```

TAD Vetor

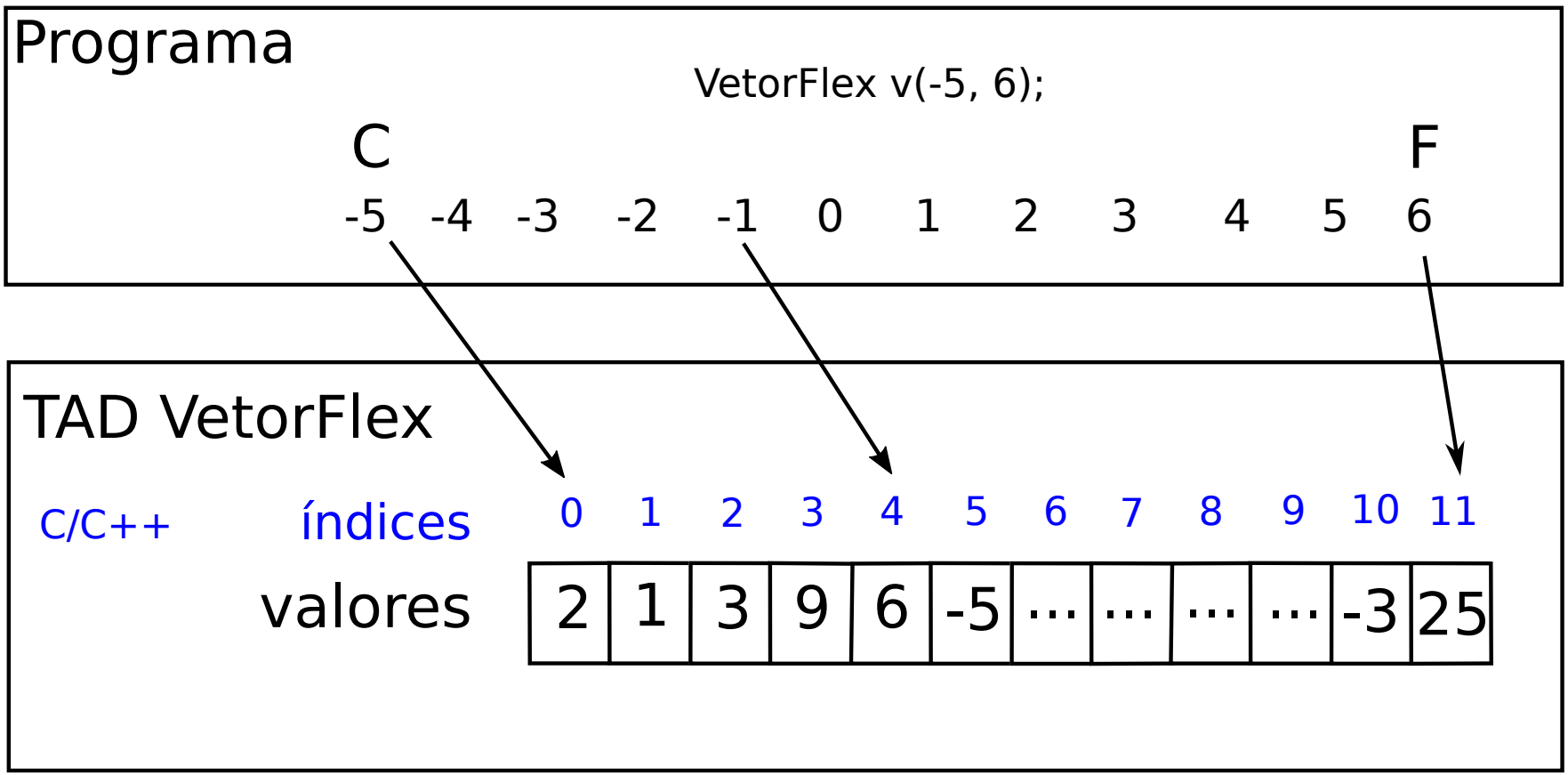
- Programa que usa o TAD Vetor criando um vetor de 60 elementos reais:

```
#include "Vetor.h"

int main() {
  int tam = 60;
  Vetor v(tam);                  // aloca vet[60]

  for(int i=0; i<tam; i++)   // armazena seq
    v.set(i,i+1);          // de 1 a 60

  for(int i=0; i<tam; i++)
  {
    float val = v.get(i) ;
    cout << val << endl;
  }
  return 0;
}
```

Vetor com índices flexíveis

- Sabendo que na linguagem C/C++, o índice de um vetor de tamanho n é um valor inteiro entre 0 e $n - 1$, pede-se:
- Desenvolver um **TAD** para possibilite criar vetores cujos índices podem assumir seus valores em intervalos inteiros e quaisquer, como por exemplo entre -10 e 45.
- Desenvolver uma **aplicação** para testar o TAD anterior, criando um vetor de 60 elementos reais numerados de –29 (limite inferior) a 30 (limite superior).
- Os valores limites (inferior e superior) do intervalo do índice devem ser definidos na aplicação, em **tempo de execução**. Assim, o construtor deve alocar memória dinamicamente para o vetor, de acordo com a definição desses limites.
- Verificar a validade do índice, quando necessário.

Vetor com índices flexíveis



TAD VetorFlex

```
class VetorFlex
{
 private:
   int n;       // tamanho do vetor
   float *vet; // array que armazena n floats
   int c, f     // c: limite inferior do indice
                // f: limite superior do indice

   int detInd(int indice); // operador privado

 public:
   VetorFlex(int a, int b);
   ~VetorFlex();
   float get(int indice);
   void set(int indice, float valor);
};
```

TAD VetorFlex

```
// construtor
VetorFlex::VetorFlex(int cc, int ff)
{
  c = cc;
  f = ff;
  n = f - c + 1;
  vet = new double[n];
}

// destrutor
VetorFlex::~VetorFlex()
{
  delete [] vet;
}
```

TAD VetorFlex

- A função `detInd(int i)` é privada, isto é, só pode ser utilizada dentro da classe `VetorFlex`.
- A função `detInd(int i)` verifica a validade do índice de vet, isto é, se $c \leq i \leq f$.
- Se for válido, retorna o valor do índice de acordo com o padrão C/C++, isto é, o valor correspondente a índice dentro do intervalo de 0 a n–1.
- Senão (se for inválido), retorna -1.

TAD VetorFlex

```
int VetorFlex::detInd(int indice)
{
  if(c <= indice && indice <= f)
    return (indice - c);
  else
    return -1;
};
```

- Até então só foram utilizados atributos (variáveis membro) como membros privados.
- Por que criar uma função privada em uma classe?
  - Para realizar alguma tarefa que só é de interesse da classe.
  - Nesse exemplo, o usuário do TAD `VetorFlex` não precisa saber se essa verificação é feita ou como ela é feita antes de acessar ou modificar um elemento do vetor.

TAD VetorFlex

```
float VetorFlex::get(int indice) {
  int i = detInd(indice);
  if(i != -1)
    return vet[i];
  else {
    cout << "Indice invalido: get\n";
    exit(1);
  }
}

void VetorFlex::set(int indice, double val) {
  int i = detInd(indice);
  if(detInd(indice) != -1)
    vet[i] = val;
  else {
    cout << "Indice invalido: set\n";
    exit(1);
  }
}
```

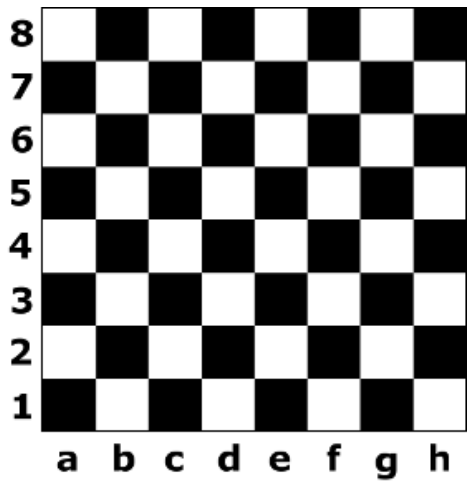
TAD VetorFlex

Aplicação

```
#include "VetorFlex.h"

int main()
{
  VetorFlex v(-29,30);
  for(int i=-29; i<=30; i++)
  {
    // valores no intervalo 1...60
    double val = i - (-29) + 1;
    v.set(i,val);
  }
  for(int i=-29; i<=30; i++)
  {
    double val = v.get(i);
    cout << val << endl;
  }
  return 0;
}
```

Matrizes

- Matrizes com mais de uma dimensão.
- As principais operações são de atribuição e consulta;
- O projeto do TAD Matriz é idêntico ao do TAD Vetor, devendo-se utilizar tantos índices quantas forem as dimensões da matriz considerada;
- Exemplos de aplicações:

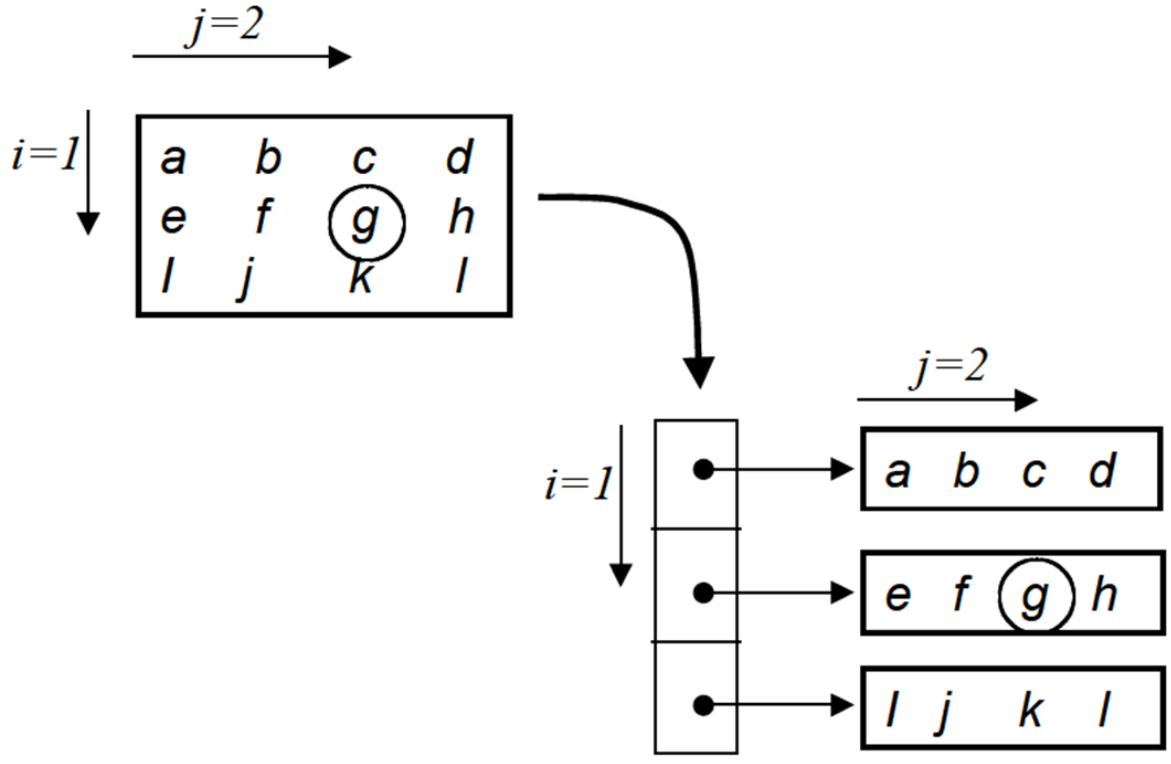


Matrizes

- Serão estudadas 2 formas diferentes de representar matrizes:
  1. Ponteiro de ponteiro (ou vetor de vetores): TAD Matriz2D
  2. Representação linear: TAD Matriz

Matrizes

- TAD Matriz2D
- Representação por ponteiro de ponteiro (ou vetor de vetores).
- Esquema:



TAD Matriz2D

- Classe para o TAD Matriz de 2 dimensões:

```
class Matriz2D
{
  public:
    Matriz2D(int nnl, int nnc);
    ~Matriz2D();

    float get(int i, int j);
    void set(int i, int j, float valor);

  private:
    int nl;          // numero de linhas
    int nc;          // numero de colunas
    float **mat;     // array com nl*nc floats

    bool verifica(int i, int j);
};
```

TAD Matriz2D

- Construtor e destrutor.

```
Matriz2D::Matriz2D(int nnl, int nnc)
{
  nl = nnl;
  nc = nnc;
  // aloca o vetor de vetores
  mat = new float*[nl];
  // aloca cada um dos vetores (cada linha)
  for(int i = 0; i < nl; i++)
    mat[i] = new float[nc];
}

Matriz2D::~Matriz2D()
{
  // desaloca a memoria alocada no construtor
  for(int i = 0; i < nl; i++)
    delete [] mat[i];
  delete [] mat;
}
```

TAD Matriz2D

- A função privada `verifica()` analisa a validade dos índices i e j seguindo o padrão C/C++;
- O índice i pode assumir valor entre 0 e $nl - 1$;
- e índice j entre 0 e $nc - 1$.

```
bool Matriz2D::verifica(int i, int j)
{
  if(i >= 0 && i < nl && j >= 0 && j < nc)
    return true;
  else
    return false; // indice invalido
};
```

TAD Matriz2D

```
float Matriz2D::get(int i, int j)
{
  if ( verifica(i, j) )
    return mat[i][j];
  else {
    cout << "Erro: indice invalido" << endl;
    exit(1);
  }
}

void Matriz2D::set(int i, int j, float valor)
{
  if ( verifica(i, j) )
    mat[i][j] = valor;
  else {
    cout << "Erro: indice invalido" << endl;
    exit(1);
  }
}
```

TAD Matriz2D

- Desenvolver um programa que usa o TAD Matriz2D para:
  a) Ler 25 valores reais e gerar uma matriz 5x5, linha por linha.
  b) Imprimir a 4ª coluna da matriz.
  c) Ler índice de linha, índice de coluna e um valor real e alterar a posição correspondente da matriz.
  d) Determinar e imprimir a transposta da matriz.
  e) Determinar o maior valor da diagonal secundária da matriz.

Aplicação com o TAD Matriz2D

```
#include "Matriz2D.h"

int main() {
  Matriz2D mat(5,5);

  for(int i=0; i<5; i++)
    for(int j=0; j<5; j++) {
      float val;
      cin >> val;
      mat.set(i,j,val);
    }

    for(int i=0; i<5; i++) {
      cout << mat.get(i,3) << endl;
    }

    // etc ...

    return 0;
}
```

Matriz

- No TAD Matriz2D, apresentado anteriormente, usamos um array bidimensional `float **mat` para representar a matriz e o acesso era realizado com a seguinte operação: `mat[i][j]`.
- Seja a matriz A (3×4) de inteiros

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 6 & 7 \\ -3 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

- Também pode-se armazenar a matriz A na memória usando um único array unidimensional `float *mat`, assim todos os elementos de A serão armazenados em posições consecutivas de memória a partir de um endereço base.
- Essa forma é conhecida como representação linear.

Matriz

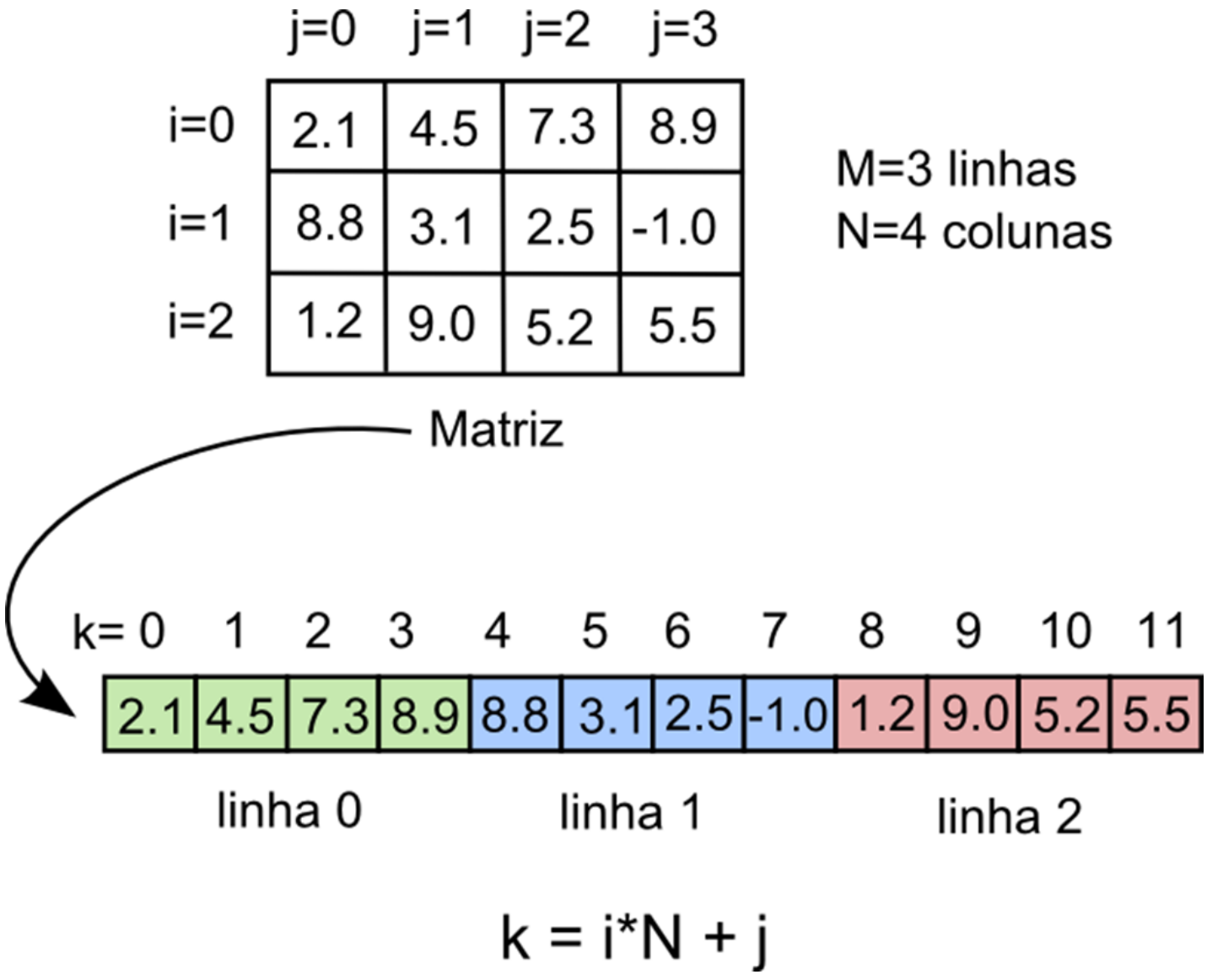
Representação linear

- Para o exemplo anterior, considere que
  - o índice da linha L varia de 0 a 2;
  - o índice da coluna C varia de 0 a 3;
  - a matriz seja percorrida **linha por linha** para ser armazenada em memória.
- Visão da representação linear na memória

		linha 0				linha 1				linha 2				
Endereços		b+0	b+1	b+2	b+3	b+4	b+5	b+6	b+7	b+8	b+9	b+10	b+11	
Valor	...	5	9	6	7	-3	2	0	4	1	8	3	-5	...
L	...	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	...
C	...	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	...

Matriz

Representação linear



Matriz

Representação linear

- Desta forma, a matriz bidimensional $A(3 \times 4)$ é representada linearmente por um vetor V do tipo:

```
float V[12];
```

- Isto é, V é a representação linear de A.
- Para acessar um elemento de A em V, é necessário relacionar o índice k de V com os índices i e j da matriz A.
- Isso é feito através da seguinte relação:

$$k = 4i + j$$

Matriz

Representação linear

- Assim, dados:
  - o vetor V (representação linear da matriz A)
  - um par de índices válidos i e j de A
- Para obter o valor do elemento A[i,j], deve-se acessar o elemento V[k], sendo

$$k = 4i + j$$

- Notar que a matriz A está armazenada na memória através de sua **representação linear** V.
- O que se deseja é consultar o valor de A[i, j] a partir de V.

Matriz

Representação linear

- Representação Linear de Matrizes
- Desenvolver o TAD Matriz para uma matriz $m \times n$ de elementos reais.
- **Observações**:
  - A representação interna da matriz deve ser **linear**.
  - O número de linhas m e o de colunas n devem ser definidos em tempo de execução.
  - Assim, o construtor deve alocar memória de acordo com o tamanho da matriz especificado pelos parâmetros m e n;
  - Verificar a validade dos índices;
  - Desenvolver um programa para testar o TAD Matriz, que usa uma matriz 7×11 de elementos reais.

TAD Matriz

```
class MatrizLin
{
  public:
    MatrizLin(int m, int n);
    ~MatrizLin();

    float get(int i, int j);
    void set(int i, int j, float val);

  private:
    int nl, nc;    // numero de linhas e colunas
    float *vet;    // vetor de tamanho nl*nc

    int detInd(int linha, int coluna);
};
```

TAD Matriz - Representação linear

- Construtor e destrutor

```
MatrizLin::MatrizLin(int m, int n)
{
  // inicializa as variaveis internas
  // e aloca memoria de vet (representacao linear)
  nl = m;
  nc = n;
  vet = new float[nl*nc];
}

MatrizLin::~MatrizLin()
{
  // desaloca a memoria alocada no construtor
  delete [] vet;
}
```

TAD Matriz - Representação linear

- A função privada `detInd` converte os índices linha e coluna da matriz no índice *k* do vetor `vet`.
- Além disso, verifica validade de linha e coluna. Todos os índices (linha, coluna e k) variam a partir de 0 (padrão C/C++):

```
int MatrizLin::detInd(int i, int j)
{
  if(i >= 0 && i < nl && j >= 0 && j < nc)
    return i*nc + j;
  else
    return -1; // indice invalido
};
```

TAD Matriz - Representação linear

```
float MatrizLin::get(int i, int j)
{
  int k = detInd(i, j);
  if(k != -1)
    return vet[k];
  else {
    cout << "Erro: get" << endl;
    exit(1);
  }
}

void MatrizLin::set(int i, int j, float valor)
{
  int k = detInd(i, j);
  if(k != -1)
    vet[k] = valor;
  else {
    cout << "Erro: set" << endl; exit(1);
  }
}
```

Aplicação com o TAD Matriz

```
#include "MatrizLin.h"

int main() {
  int m = 7, n = 11;
  MatrizLin mat(m,n);

  for(int i=0; i<m; i++)
    for(int j=0; j<n; j++)
    {
      float val = j + n*i;
      mat.set(i,j,val);
    }

  for(int i=0; i<m; i++) {
    for(int j=0; j<n; j++)
    {
      float val = mat.get(i,j) ;
      cout << val << "\t";
    }
    cout << endl;
  }

  return 0;
  }
```

Matriz - Representação linear

- Vamos considerar agora uma situação mais geral na qual os elementos de uma matriz possuem índices quaisquer (similar ao TAD `VetorFlex`).
- Seja A uma matriz com $m \times n$ de elementos de um tipo qualquer. Os índices das linhas L e colunas C são:
  - $L = c_1 \ldots f_1$
  - $C = c_2 \ldots f_2$
- A matriz A possui um total de:
  - linhas: $m = f_1 - c_1 + 1$
  - colunas: $n = f_2 - c_2 + 1$
- O índice k da representação linear V que corresponde ao elemento $A[L, C]$ é dado por

$$I = (C - c_2) + n(L - c_1).$$

TAD Matriz Flexível - Representação linear

- Representação Linear de Matrizes
- Desenvolver o TAD MatrizFlex para uma matriz $m \times n$ de elementos reais com índices quaisquer.
- **Observações**:
  - A representação interna da matriz deve ser linear;
  - Os limites dos intervalos dos índices de linha e de coluna devem ser arbitrários e definidos em tempo de execução. Assim, o construtor deve alocar memória de acordo com esses limites;
  - Verificar a validade dos índices, quando necessário;
  - Desenvolver um programa que use o TAD MatrizFlex e crie uma matriz de elementos reais com os intervalos de linha = -2..7 e de coluna = 0..5.

TAD MatrizFlex

```
class MatrizFlex
{
 public:
   MatrizFlex(int cc1, int ff1, int cc2, int ff2);
   ~MatrizFlex();

   float get(int i, int j);
   void set(int i, int j, float val);

 private:
   float *vet; // representacao linear da matriz
   int m, n;   // numero de linhas e colunas
   int c1;     // limite inicial da linha
   int c2;     // limite inicial da coluna
   int f1;     // limite final da linha
   int f2;     // limite final da coluna
   int detInd(int linha, int coluna);
};
```

TAD MatrizFlex

- Construtor e destrutor

```
MatrizFlex::MatrizFlex(int cc1, int ff1,
                       int cc2, int ff2)
{
  // inicializa os limites
  c1 = cc1;
  c2 = cc2;
  f1 = ff1;
  f2 = ff2;
  m = f1 - c1 + 1;  // calcula o numero de linhas
  n = f2 - c2 + 1;  // calcula o numero de colunas
  vet = new float[m*n] ;
}

MatrizFlex::~MatrizFlex()
{
  delete [] vet;
}
```

TAD MatrizFlex

- A função privada `detInd` converte os índices linha e coluna da matriz no índice *k* do vetor `vet`. Além disso, verifica validade de linha e coluna.

```
int MatrizFlex::detInd(int i, int j)
{
  if(i >= c1 && i <= f1 && j >= c2 && j <= f2)
    return (j - c2) + n*(i - c1);
  else
    return -1;
};
```

TAD MatrizFlex

```
float MatrizFlex::get(int i, int j)
{
  int k = detInd(i, j) ;
  if(k != -1)
    return vet[k];
  else
    cout << "Indice invalido: get" << endl;
  exit(1);
}

void MatrizFlex::set(int i, int j, float val)
{
  int k = detInd(i, j) ;
  if(k != -1)
    vet[k] = valor;
  else
    cout << "Indice invalido: set" << endl;
  exit(1);
}
```

TAD MatrizFlex

```
#include "MatrizFlex.h"

int main(){
  int c1 = -2, f1 = 7;
  int c2 = 0, f2 = 5;

  MatrizFlex mat(c1,f1,c2,f2);

  // atribui valores a matriz mat
  for(int i=c1; i<=f1; i++)
    for(int j=c2; j<=f2; j++){
      float val = (f2-c2+1)*(i-c1) + j - c2; // 0...(n*m-1)
      mat.get(i,j,val);
    }

  // imprime a matriz mat
  for(int i=c1; i<=f1; i++) {
    for(int j=c2; j<=f2; j++) {
      float val = mat.set(i,j);
      cout << val << "\t";
    }
    cout << endl;
  }
  return 0;
}
```

Matrizes Especiais

Matrizes Especiais

- Matriz Diagonal
- **Matriz Triangular Inferior**
- Matriz Triangular Superior
- Matriz Simétrica
- Matriz Anti-Simétrica
- Matriz Tridiagonal

Matrizes Especiais

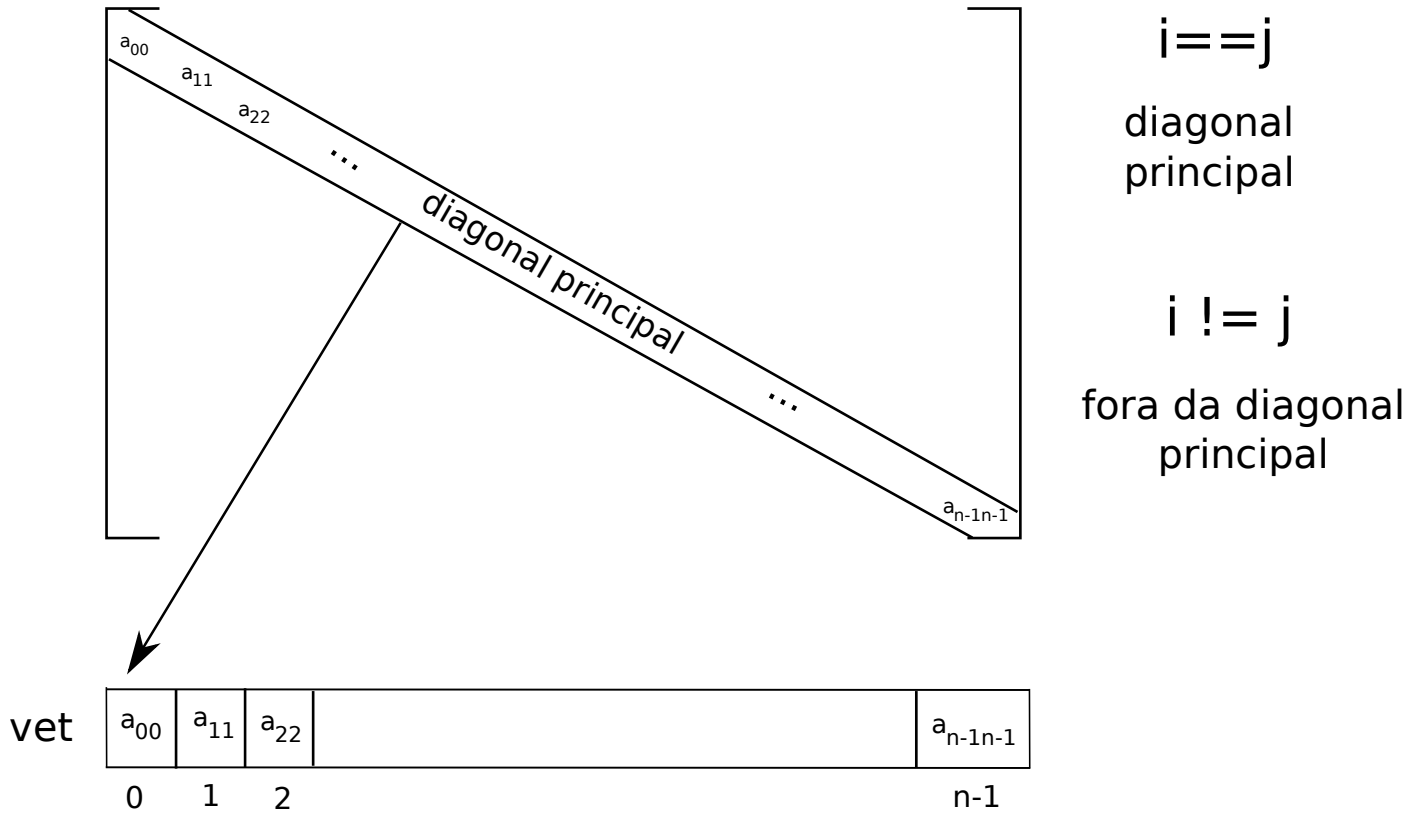
- Serão apresentados diferentes tipos de matrizes especiais.
- A **representação linear** será usada para representar cada tipo de matriz.
- Um TAD fundamental será desenvolvido com as seguintes operações:
  - Construtor
  - Destrutor
  - Função para consultar (`get`) um elemento A_{ij}
  - Função para alterar o valor de um elemento A_{ij}

Introdução

Representação Linear

- A representação linear (ou vetorial) é sempre usada pelo computador para o armazenamento de uma matriz com duas ou mais dimensões.
- Para usar uma representação linear V da matriz A, deve-se realizar três tarefas:
  1. Definir quais e de que forma os elementos de A serão alocados em V;
  2. Dimensionar V;
  3. Relacionar os índices $[i, j]$ de A com o índice k de V.
- Para atender a restrição da linguagem C/C++, será considerada a variação dos índices a partir de 0 (zero) nos casos que se seguem.

Matriz Diagonal



- Implemente o TAD MatrizDiagonal como exercício.

Matriz Triangular

- Matriz triangular inferior

$$l_{ij} = 0, \quad \forall\, i < j, \qquad \text{Exemplo: } \mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$$

- Matriz triangular superior

$$u_{ij} = 0, \quad \forall\, i > j, \qquad \text{Exemplo: } \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Matriz Triangular Inferior

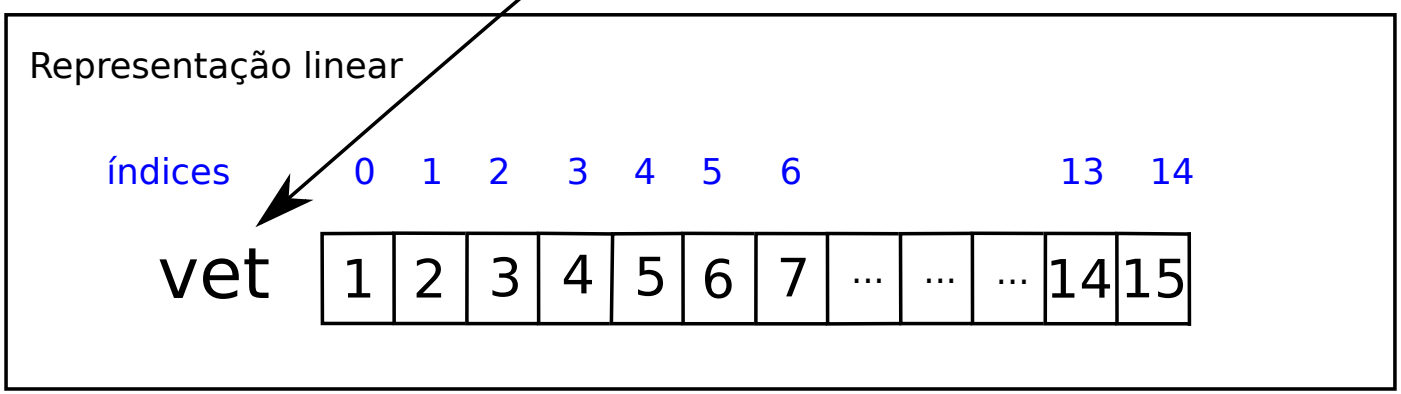
- Vamos estudar como representar uma matriz triangular inferior de $n \times n$ elementos reais.
- O procedimento é similar para uma matriz triangular superior.

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

- Questões importantes:
  1. Quantos elementos armazenar?
  2. Representação linear: como armazenar os elementos?
  3. Como acessar/modificar um elemento?

Matriz Triangular Inferior

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 0 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}$$



Matriz Triangular Inferior

- Quantos elementos a matriz triangular inferior L de dimensão n possui?

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

- Linha por linha:
  - Na linha 1 temos 1 elemento
  - Na linha 2 temos 2 elementos
  - Na linha 3 temos 3 elementos
  - $\dots$
  - Na linha n temos n elementos
- Total = $1 + 2 + 3 + \dots + n$ elementos

Matriz Triangular Inferior

- **Quantos elementos armazenar?**
- Total = $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ elementos.
- Progressão aritmética (PA) de razão $r = 1$.
- Soma dos n termos de uma PA:

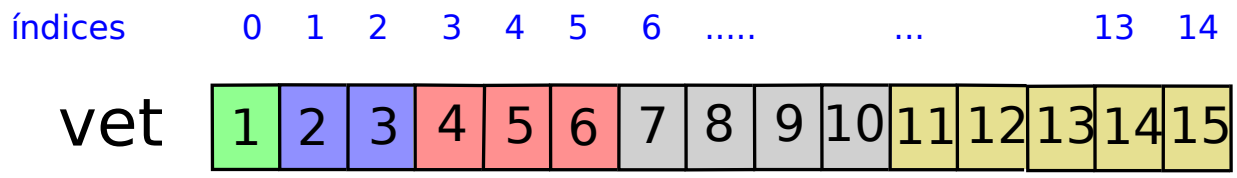
$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

- Portanto, a matriz possui um total de $\frac{(n+1)n}{2}$ elementos.

Matriz Triangular Inferior

- **Como armazenar os elementos?**
- Utilizando uma representação linear.
- Armazenar os elementos da matriz no vetor `vet` da seguinte forma:
  - Linha por linha;
  - Da esquerda para a direita.

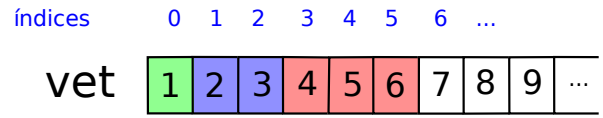
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 0 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}$$



Matriz Triangular Inferior

- **Como acessar/modificar um elemento?**
- Para acessar o elemento na posição (i, j):
  - Contar quantos elementos tem antes da linha i:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 0 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}$$



  - Número de elementos até a linha i:

$$\frac{(i+1)i}{2}$$

- Para acessar o elemento (i, j) basta somar j, isto é

$$k = \frac{(i+1)i}{2} + j$$

Matriz Triangular Inferior

```
class MatrizTriInf
{
 public:
   MatrizTriInf(int ordem);
   ~MatrizTriInf();

   float get(int i, int j);
   void set(int i, int j, float valor);

 private
   int n;         // ordem da matriz triangular
   float *vet;    // representacao linear

   bool verifica(int i, int j);
};
```

Matriz Triangular Inferior

```
MatrizTriInf::MatrizTriInf(int ordem)
{
  n = ordem;
  int tam = n*(n + 1)/2;
  vet = new float[tam];
}

MatrizTriInf::~MatrizTriInf()
{
  delete [] vet;
}

bool MatrizTriInf::verifica(int i, int j)
{
  if(i >= 0 && i < n && j >= 0 && j < n)
    return true;
  else
    return false;
};
```

Matriz Triangular Inferior

```
float MatrizTriInf::get(int i, int j)
{
  if( verifica(i, j) )
  {
    if(i >= j)
    {
      int k = i*(i + 1)/2 + j;
      return vet[k];
    }
    else
      return 0.0;
  }
  else
    cout << "Erro: indice invalido\n";
  exit(1);
}
```

Matriz Triangular Inferior

```
void MatrizTriInf::set(int i, int j, float val)
{
  if( verifica(i, j) )
  {
    if(i >= j)
    {
      int k = i*(i + 1)/2 + j;
      vet[k] = valor;
    }
    else
      if(valor != 0.0)
        cout << "Elemento fora da parte "
             << "triangular inferior\n";
  }
  else
    cout << "Erro: indices invalidos\n";
}
```

Matriz Triangular Superior

- Para uma matriz triangular superior...

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

- Questões importantes:
  1. Quantos elementos armazenar?
  2. Representação linear: como armazenar os elementos?
  3. Como acessar/modificar um elemento?

Matriz Simétrica

- Definição:

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall\, i, j$$

- Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Representação: matriz triangular superior (ou triangular inferior).
- Se a representação for por uma matriz triangular superior:
  - Se $i < j$, retorna o elemento $k = \frac{(j+1)j}{2} + i$.
  - Senão, retorna o elemento $k = \frac{(i+1)i}{2} + j$.

Matriz Anti-Simétrica

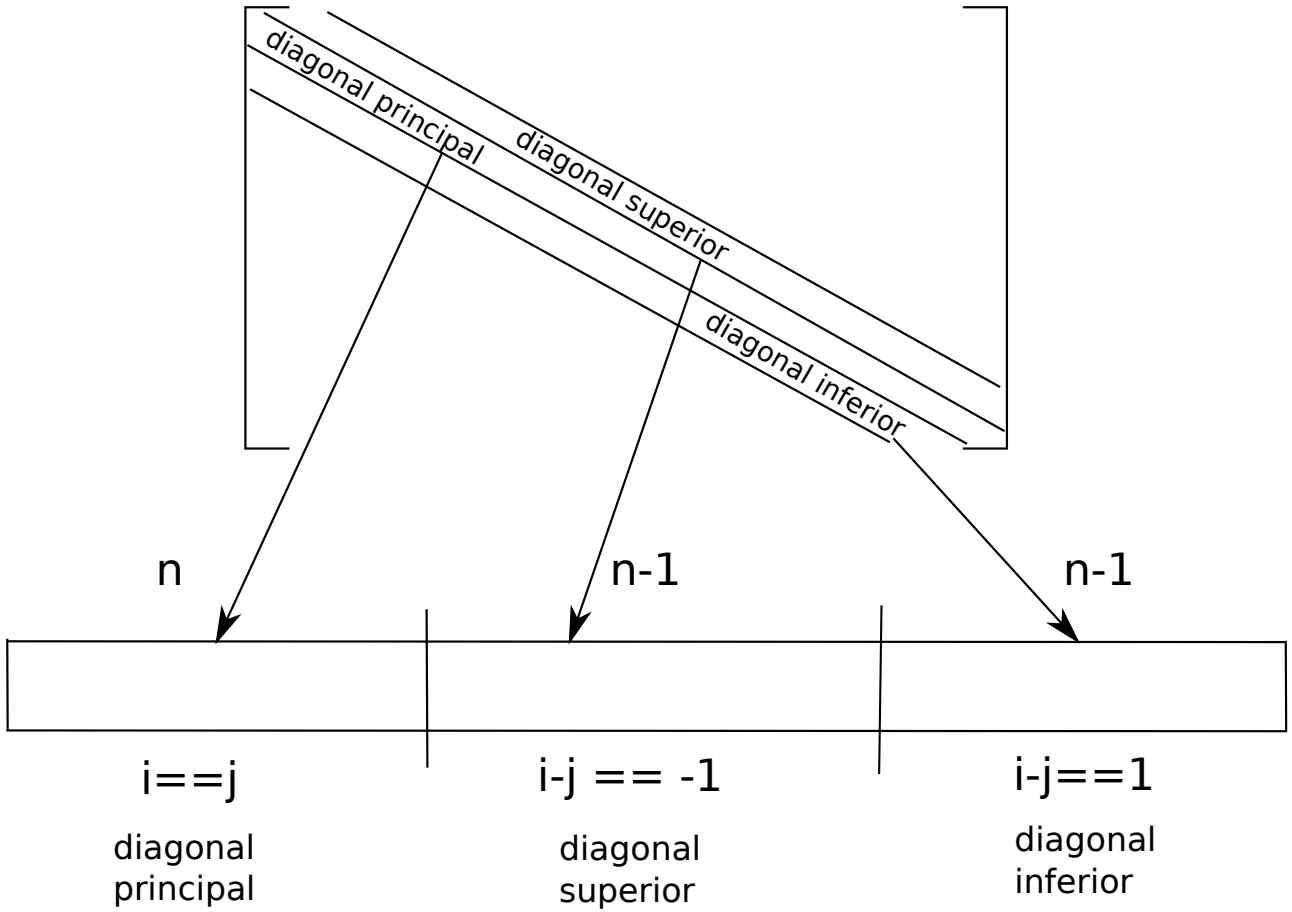
- Definição:

$$a_{ij} = -a_{ji}, \quad \forall\, i, j$$

- Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz Tridiagonal



Exercícios

1. Desenvolver um TAD para matrizes **diagonais**.
2. Desenvolver um TAD para matrizes **triangulares superiores**.
2. Desenvolver um TAD para matrizes **simétricas**.
3. Desenvolver um TAD para matrizes **anti-simétricas**.
4. Desenvolver um TAD para matrizes **tridiagonais**.

* Em cada caso desenvolver uma aplicação para testar e usar o TAD da matriz desenvolvido.