Resumo de Cálculo III

1. Funções de várias variáveis

Uma função de várias variáveis depende de duas ou mais variáveis independentes. Por exemplo:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

2. Limites e continuidade em várias variáveis

O limite de uma função de várias variáveis é definido de forma similar ao limite de uma função de uma variável:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

3. Derivadas parciais e direcionais

Derivadas parciais são calculadas mantendo as outras variáveis constantes:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

A derivada direcional é a taxa de variação da função na direção de um vetor unitário u:

$$D_u f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot u$$

3.1 Regra da Cadeia para Derivadas Parciais

A regra da cadeia para derivadas parciais é usada quando temos uma função composta. Para uma função z = f(x,y), onde x = g(t) e y = h(t), a regra da cadeia é:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Para uma função z = f(x,y), onde x = g(s,t) e y = h(s,t), temos:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Esta regra é fundamental para resolver problemas complexos envolvendo funções compostas e é amplamente utilizada em aplicações práticas de cálculo multivariável.

4. Gradiente e plano tangente

O gradiente de uma função é um vetor que contém todas as derivadas parciais da função:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

A equação do plano tangente a uma superfície z = f(x,y) no ponto (a,b,f(a,b)) é:

$$z - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

5. Otimização em várias variáveis

Para encontrar pontos críticos, igualamos todas as derivadas parciais a zero:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

O teste da segunda derivada para classificação dos pontos críticos:

$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2$$

1 Limites de funções de várias variáveis

1.1 Exemplo 1

Problema: Calcule $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$
Solução:

1. Analisamos o comportamento da função ao longo de diferentes caminhos.
2. Caminho 1 (y = x): $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$
3. Caminho 2 (y = 0): $\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot 0}{x^2+0^2} = 0$
4. Como obtivemos resultados diferentes, concluímos que o limite não existe.

1.2 Exemplo 2

Problema: Calcule $\lim_{(x,y)\to(2,2)}(6 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}y^2)$
Solução:

1. Substituímos diretamente os valores de x e y: $\lim_{(x,y)\to(2,2)}(6 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}y^2) = 6 - \frac{1}{3}(2)^2 - \frac{1}{3}(2)^2 = 6 - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$
2. O limite existe e é igual a $\frac{10}{3}$.

2 Derivadas parciais

2.1 Exemplo 3

Problema: Calcule as derivadas parciais de $f(x,y) = x^2y + \sin(xy)$
Solução:

1. Calculamos $\frac{\partial f}{\partial x}$, tratando y como constante: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y\cos(xy)$
2. Calculamos $\frac{\partial f}{\partial y}$, tratando x como constante: $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + x\cos(xy)$

2.2 Exemplo 4

Problema: Calcule as derivadas parciais de $f(x,y) = x^3 + y^2e^x$
Solução:

1. Calculamos $\frac{\partial f}{\partial x}$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^2e^x$
2. Calculamos $\frac{\partial f}{\partial y}$: $\frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^x$

3 Gradiente e plano tangente

3.1 Exemplo 5

Problema: Encontre o gradiente de $f(x,y,z) = x^2y + yz^2 - 3xz$
Solução:

1. Calculamos as derivadas parciais: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 3z$ $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + z^2$ $\frac{\partial f}{\partial z} = 2yz - 3x$
2. Formamos o gradiente: $\nabla f = (2xy - 3z, x^2 + z^2, 2yz - 3x)$

3.2 Exemplo 6

Problema: Encontre a equação do plano tangente à superfície $z = x^2 + y^2$ no ponto (1, 2, 5)
Solução:

1. Calculamos as derivadas parciais: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$ $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$
2. Avaliamos as derivadas no ponto (1, 2, 5): $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 2) = 2$ $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 2) = 4$
3. A equação do plano tangente é: $z - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2)$

4 Otimização

4.1 Exemplo 7

Problema: Encontre os pontos críticos de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$
Solução:

1. Calculamos as derivadas parciais: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4$
2. Igualamos as derivadas parciais a zero: $2x - 2 = 0x = 1$ $2y - 4 = 0y = 2$
3. O ponto crítico é (1, 2).

4.2 Exemplo 8

Problema: Encontre os extremos locais de $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$
Solução:

1. Calculamos as derivadas parciais: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - 3$ $\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y - 3$
2. Igualamos as derivadas parciais a zero: $2x + y - 3 = 0$ $x + 2y - 3 = 0$
3. Resolvemos o sistema: $x = y = 1$
4. Calculamos a matriz Hessiana: $H = 21$
   12
5. Como $\det(H) = 3 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$, o ponto (1, 1) é um mínimo local.

5 Multiplicadores de Lagrange

5.1 Exemplo 9

Problema: Maximize $f(x, y) = xy$ sujeito à restrição $x^2 + y^2 = 1$
Solução:

1. Formamos a função Lagrangiana: $L(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$
2. Calculamos as derivadas parciais: $\frac{\partial L}{\partial x} = y - 2\lambda x = 0$ $\frac{\partial L}{\partial y} = x - 2\lambda y = 0$ $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0$
3. Resolvemos o sistema: $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x = y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
4. O máximo ocorre em $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e o mínimo em $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

5.2 Exemplo 10

Problema: Minimize $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeito à restrição $x + y = 1$

Solução:

1. Formamos a função Lagrangiana: $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x + y - 1)$
2. Calculamos as derivadas parciais: $\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda = 0$ $\frac{\partial L}{\partial y} = 2y - \lambda = 0$ $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 1 = 0$
3. Resolvemos o sistema: $x = y = \frac{1}{2}$
4. O ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ é o mínimo da função sujeito à restrição.