

Simple Sample

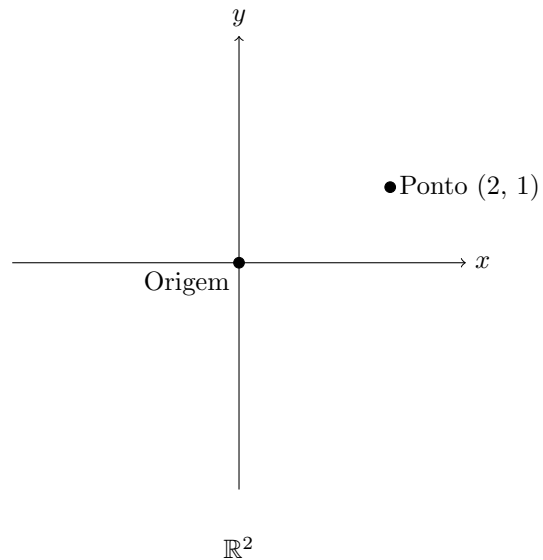
My Name

2024-10-27

01-10-2024

1 Coordenadas no Espaço e Vetores no \mathbb{R}^3

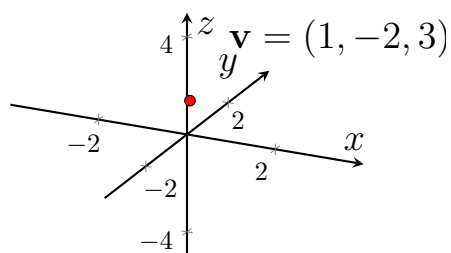
1.1 Plano



1.2 Espaço

Exemplo: Localize no Espaço os pontos $P = (1, 2, 3)$ e $Q = (1, -2, 3)$

Gráfico 3D de um vetor no espaço



1.3 Distancias entre pontos

Exemplo: $E \in R$, descreva os pontos dados pelas equações:

a. $x = 5$

b. $y = 3$

c. $x^2 + y^2 = 1 \rightarrow d((x, y)(0, 0)) \rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 1$
 $\leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

Exemplo: Que superfície em R^3 é representada pela seguinte equação?

a. $z = 3$

A equação $z = 3$ representa o conjunto $\{(x, y, z)/z = 3\}$

b. $y = 5$

A equação $y = 5$ representa um conjunto de todos os pontos do espaço que tem 2ª coordenada igual a 5.

1.3.1 Formula de Distancias

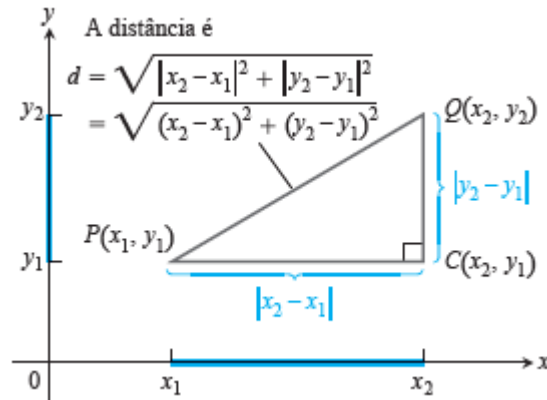


Figure 1: Descrição da imagem

1.4 Esfera:

Definição Uma esfera de centro (a, b, c) e raio r é o conjunto de todos os pontos no espaço que estão a uma distância r do ponto (a, b, c) e é descrita por:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r \leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2 \quad (1)$$

Exemplo: Mostre que $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 6 = 0$ é a equação de uma esfera. Identifique seu centro e raio. Solução: Podemos reescrever a equação fornecendo o seguinte modo. $x^2 + 4x + y^2 - 6y + z^2 + 2z + 6 = 0 \leftrightarrow (x+2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 + (z+1)^2 - 1 + 6 = 0$

$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 8 \leftrightarrow (x-(-2))^2 + (y-3)^2 + (z-(-1))^2 = 8$
Assim, a e f dado descreve os pontos da esfera de centro $(-2,3,-1)$ e o raio $r = \sqrt{8}$

Exercício: Determine a região em \mathbb{R} decrita pelas inequações: $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ e $z \geq 0$

Exemplo: $E \in \mathbb{R}$ qual é a superfície decrita pela equação $x^2 + y^2 = 1$.

03.10.2024

Exemplo: Localize no \mathbb{R}^2 os pontos que satisfazem:

- $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ e $z = 3$
- $(x-4)(z-2) = 0$ R: Note que $(x-4)(z-2) = 0$ ocorre $\leftrightarrow x-4 = 0$ ou $z-2 = 0 \leftrightarrow x = 4$ ou $z = 2$

Exemplo: Srjam $P=(-5,2,3)$ e $Q=(3,4,-1)$. Determine a esuqção da esfera que tem \overrightarrow{PQ}

Pmédio = $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$ $P_u = u + \frac{1}{2}v = (x_1, y_1) + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = \left(\frac{x_2+x_1}{2}, \frac{y_2+y_1}{2}\right)$

1.5 Vetores

Definição: Dados 2 pontos A ou B em \mathbb{R}^3 ou \mathbb{R}^2 , o segmento orientado a \overrightarrow{AB} é o segmento com ponto inicial A, ponto final V e orientado de $A \rightarrow B$. **Definição:** Um segmento não nulo de \overrightarrow{AB} é equivalente a \overrightarrow{CD} ou \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} tem o mesmo comprimento e direção e sentido. Dados dois segmentos orientados \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BC} , definimos: a soma de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Em geral, sejam u e v dois segmentos orientados. Para determina u+v, podemos seguir uma das duas abordagens:

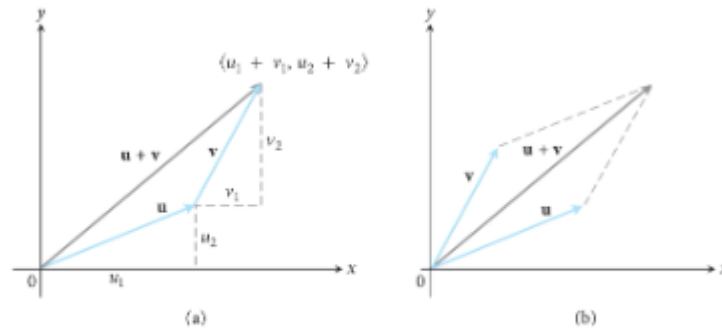


FIGURA 12.12 (a) Interpretação geométrica do vetor soma. (b) A regra do paralelogramo da adição de vetores.

Figure 2: Descrição da imagem

Dado um segmento u de reta orientado \overrightarrow{AB} , existe um segmento de reta orientado \overrightarrow{v} , equivalente a \overrightarrow{AB} e com ponto inicial em $(0,0,0)$. Para especificar \overrightarrow{v} precisamos apenas fornecer as coordenadas de um ponto final (a,b,c) . De modo geral, o vetor $\overrightarrow{v} = \langle x, y, z \rangle$ é definido como o segmento de reta orientada com ponto inicial em $(0,0,0)$ e ponto final (x, y, z) .

Observação: Sejam $u = \langle x, y, z \rangle$ e $v = \langle x_2, y_2, z_2 \rangle$. Então: $u = v \leftrightarrow \{x_1 = x_2$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= y_2 \\ z_1 &= z_2 \end{aligned} \right\}$$

Observação: Dados $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$, o vetor equivalente a \overrightarrow{AB} (ou vetor com representação \overrightarrow{AB}). $v = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$.

Exemplo: Dados $A = (1, 4, 0)$, $B = (-1, 1, -1)$ e $C = (3, 5, -10)$, encontre o vetor \overrightarrow{v} equivalente a \overrightarrow{AB} e as coordenadas do ponto D tal que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{v}$

Solução: Segue se $v = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$ que $v = \langle -1 - (1), 1 - (4), -1 - (0) \rangle = \langle -2, -3, -1 \rangle$. Queremos encontrar $D = (a, b, c)$ de tal modo que \overrightarrow{v} seja equiavalente a \overrightarrow{CD} . $\langle -2, -3, -1 \rangle = \langle a - 3, b - 5, c - (-10) \rangle \Leftrightarrow a - 3 = -2 \rightarrow a = 1, b - 5 = -3 \rightarrow b = 2, c - (-10) = -1 \rightarrow c = -11$

1.5.1 Operação com Vetores

Soma: Sejam $\overrightarrow{u} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ e $\overrightarrow{v} = \langle x_2, y_2, z_2 \rangle$. Definimos a soma $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ por $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 \rangle$.

Produto Escalar: Seja $k \in \mathbb{R}$ e $\overrightarrow{u} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$. Definimos o produto $k * \overrightarrow{u} = \langle kx_1, ky_1, kz_1 \rangle$.

Comprimento: O comprimento de $\overrightarrow{u} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ é $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

$$\|v\|$$

08-10-2024

Exemplo:

$$\vec{u} = \langle 4, 0, 3 \rangle \text{ e } \vec{v} = \langle -2, 1, 5 \rangle$$

. Determine:

a.

b.

$$\vec{u} - 2\vec{v}$$

$$\langle 4, 0, 3 \rangle + (-2) \langle -2, 1, 5 \rangle$$

1.5.2 Propriedades:

Sejam \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} vetores do \mathbb{R} e $a, b \in \mathbb{R}$. Então:

a. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

b. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

c. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

d. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

e. $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$

f. $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$

g. $(ab)\vec{u} = a(b\vec{u})$

h. $1\vec{u} = \vec{u}$

1.5.3 Propriedades (Normas):

a. $\|\vec{u}\| \geq 0$ e $\|\vec{u}\| = 0 \leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

b. $\|k\vec{u}\| = |k| \|\vec{u}\|$

c. $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (desigualdade do triângulo)

Obs: Dado $\vec{u} = \vec{0}$, posso obter um novo vetor que é nulo.

$$\begin{aligned} \text{Temos } \vec{u} &= \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \text{ que} \\ \|\vec{u}\| = 1 &\implies \|\lambda\vec{u}\| = \|\vec{u}\| = K\|\vec{u}\| \\ = 1 &\implies K = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \end{aligned}$$

Em \mathbb{R}^3 , demonstremos por:

$$\begin{aligned} \vec{i} &= \langle 1, 0, 0 \rangle \\ \vec{j} &= \langle 0, 1, 0 \rangle \\ \vec{k} &= \langle 0, 0, 1 \rangle \end{aligned}$$

Dai, seja $\langle x, y, z \rangle \in \mathbb{R}^3$ então: TA ERRADO

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = x\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle + y\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle + z\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle$$

$$\vec{e}_i \in \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

$$\Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{x} = x^2 + y^2 + z^2$$

Produto escalar

Def: Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Definimos o produto escalar (interno)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

22-10-2024

2 Plano no R^3

3 pontos não colineares no espaço só definem um plano. Seja π um plano no espaço, $P = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto em π e $\vec{n} = \langle a, b, c \rangle$ um vetor ortogonal a π . Isto é, $\vec{n} * \vec{QR} = 0$, quaisquer que sejam Q e R em π

Se $Q = (x, y, z)$ em π então $\vec{PQ} = \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle$ é ortogonal a \vec{n} , isto é:

$$\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle * \langle a, b, c \rangle = 0 \leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad (2)$$

(2) equação vetorial de π

Podemos então reescrever (2) como:

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0 = d \leftrightarrow ax + by + cz = d \quad (3)$$

(3) equação geral de π

Exemplo: Escreva a equação do plano que contém $P = (1, 1, -2)$, $Q = (0, 2, 1)$ e $R = (-1, -1, 0)$

Para determinar um vetor ortogonal ao plano, basta tomar o produto vetorial $\vec{n} = \vec{PQ} * \vec{PR} = \langle -1, 1, 3 \rangle * \langle -2, -2, 2 \rangle$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \langle 8, -4, 4 \rangle$$

Daí, a equação vetorial do plano que contém P, Q e R é: $8(x - 1) - 4(y - 1) + 4(z + 2) = 0$. A equação geral é $8x - 4y + 4z = 8 - 4 - 8 = -4 \leftrightarrow 8x - 4y + 4z = -4$

Exemplo: Somente a equação do plano que passa por $(1, 4, 3)$ e contém a reta:

$$x = \frac{y - 1}{2} = z + 1 \quad (4)$$

1º Solução: Percebe que $P = (1, 4, 3)$, $Q = (0, 1, -1)$ e $R = (1, 3, 0)$ pertencem ao plano π .

2.1 Distância entre um ponto e um plano

Trocando por P uma reta paralela ao vetor normal, (\vec{n}) ao plano e denotando por R o ponto onde tal reta intercepta o plano π , definindo a distância de P em π por: $d = ||\vec{RP}|| = ||P - R||$

Assim, $d = ||Proj_{\vec{n}} \vec{PQ}||$