Simple Sample

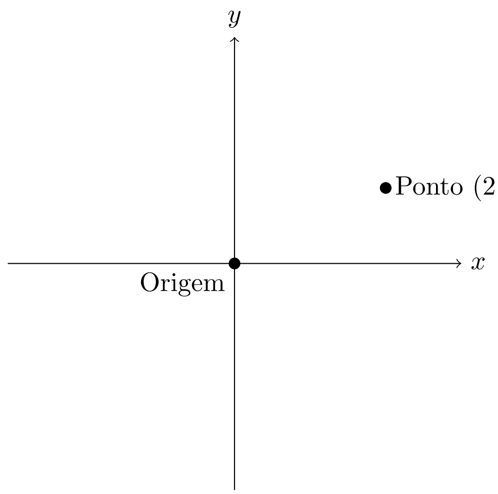
My Name

2024-10-27

01-10-2024

1 Coordenadas no Espaço e Vetores no R^3

1.1 Plano

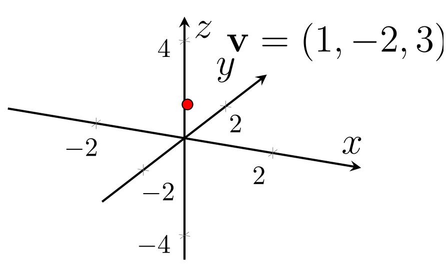


$\mathbb{R}^2$

1.2 Espaço

Exemplo: Localize no Espaço os pontos $P = (1, 2, 3)$ e $Q = (1, -2, 3)$

Gráfico 3D de um vetor no espaço



1.3 Distancias entre pontos

Exemplo: $E \in R$, descreva os pontos dados pelas equações:

a. $x = 5$

b. $y = 3$

c. $x^2 + y^2 = 1$ $d((x, y)(0, 0)) \to \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 1$
$\leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

Exemplo: Que superficie em R^3 é representada pela seguinte equação?

a. $z = 3$
A equação $z = 3$ representa o conjunto $\{(x, y, z)/z = 3\}$

b. $y = 5$
A equação $y = 5$ representa um conjunto de todos os pontos do espaço que tem $2^{\underline{o}}$ coordenadas igual a 5.

1.3.1 Formula de Distancias

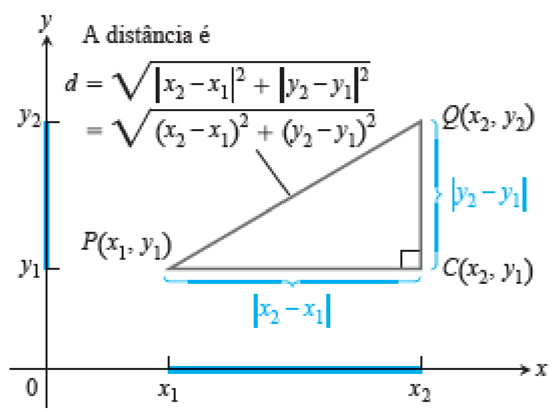


Figure 1: Descrição da imagem

1.4 Esfera:

Definição Uma esfera de centro (a,b,c) e raio r é o conjunto de todos os pontos no espaço que estão a uma distancia e do ponto (a,b,c) e é descita por:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r^2 \leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2 \quad (1)$$

Exemplo: Mostre que $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 6 = 0$ é a equação de uma esfera. Identifique seu centro e raio. Solução: Podemos reescrever a e f fornecendo o seguinte modo. $x^2 + 4x + y^2 - 6y + z^2 + 2z + 6 = 0 \leftrightarrow (x+2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 + (z+1)^2 - 1 + 6 = 0$

$(x+2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=8 \leftrightarrow (x-(-2))^2+(y-3)^2+(z-(-1))^2=8$
Assim, a e f dado descreve os pontos da esfera de contro (-2,3,-1) e o raio $r=\sqrt{8}$

Exercicio: Determine a região em $\mathbb{R}$ decrita pelas inequações: $1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4$ e $z \geq 0$

Exemplo: $E \in \mathbb{R}$ qual é a superficie decrita pela equação $x^2+y^2=1$.

03.10.2024
Exemplo: Localize no $\mathbb{R}^2$ os pontos que satisfazem:

a. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ e $z = 3$

b. $(x-4)(z-2) = 0$ R: Note que $(x-4)(z-2) = 0$ ocorre $\leftrightarrow x-4=0$ ou $z-2=0 \leftrightarrow x=4$ ou $z=2$

Exemplo: Srjam P=(-5,2,3) e Q=(3,4,-1). Determine a esuqeção da esfera que tem $\overline{PQ}$
Pmédio $= \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$ $P_u = u + \frac{1}{2}v = (x_1, y_1) + \frac{1}{2}(x_2-x_1)(y_2-y_1) = \left(\frac{x_2+x}{2}, \frac{y_2+y_1}{2}\right)$

1.5 Vetores

Definição: Dados 2 pontos A ou B em $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$, o segmento orientado a $\overrightarrow{AB}$ é o segmento com ponto incicial A, ponto final V e orientado de $A \to B$. **Definição:** Um segmento não nulo de $\overrightarrow{AB}$ é equivalente a $\overrightarrow{CD}$ ou $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ tem o mesmo comprimento e direção e sentido Dados dois segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, definimos: a soma de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ Em geral, sejam u e v dois segmentos orientados. Para determina u+v, podemos seguir uma das duas abordagens:

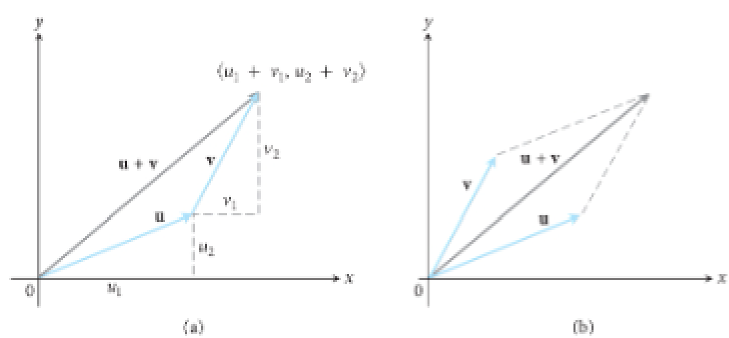


FIGURA 12.12 (a) Interpretação geométrica do vetor soma. (b) A regra do paralelogramo da adição de vetores.

Figure 2: Descrição da imagem

Dado um segmento u de reta orientado $\overrightarrow{AB}$, existe um segmento de reta orientado $\overrightarrow{v}$, equiavalente a $\overrightarrow{AB}$ e com ponto inicial em (0,0,0). Para especificiar $\overrightarrow{v}$ precisamos apenas fornecer as coordenadas de um ponto final (a,b,c). De modo geral, o vetor $\overrightarrow{v} = < x, y, z >$ é definido como o segmento de reta orientada com ponto inicial em (0,0,0) e ponto final (x, y, z).

Observação: Sejam $u = < x, y, z >$ e $v = < x_2, y_2, z_2 >$. Então: $u = v \leftrightarrow$ $\{x_1 = x_2$

$y_1 = y_2$
$z_1 = z_2\}$

Observação: Dados $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$, o vetor equivalente a $\overrightarrow{AB}$ (ou vetor com representação $\overrightarrow{AB}$). $v =< x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 >$.

Exemplo: Dados $A = (1, 4, 0)$, $B = (-1, 1, -1)$ e $C = (3, 5, -10)$, encontre o vetor $\overrightarrow{v}$ equivalente a $\overrightarrow{AB}$ e as coordenadas do ponto D tal que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{v}$
Solução: Segue se $v =< x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 >$ que $v =< -1 - (1), 1 - (4), -1 - (0) >=< -2, -3, -1 >$. Queremos encontrar $D = (a, b, c)$ de tal modo que $\overrightarrow{v}$ seja equiavalente a $\overrightarrow{CD}$. $< -2, -3, -1 >=< a - 3, b - 5, c - (-10) >\leftrightarrow$ $a - 3 = -2 \rightarrow a = 1 b - 5 = -3 \rightarrow b = 2 c + 10 = -1 \rightarrow c = -11$

1.5.1 Operação com Vetores

Soma: Sejam $\overrightarrow{u} =< x_1, y_1, z_1 >$ e $\overrightarrow{v} =< x_2, y_2, z_2 >$. Definimos a soma $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ por $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} =< x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 >$.

Produto Escalar: Seja $k \in \mathbb{R}$ e $\overrightarrow{u} =< x_1, y_1, z_1 >$. Definimos o produto $k * \overrightarrow{u} =< kx_1, ky_1, kz_1 >$.

Comprimento: O comprimento de $\overrightarrow{u} =< x_1, y_1, z_1 >$ é $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x_1^2, y_1^2, z_1^2}$

$$\|v\|$$

08-10-2024
Exemplo:

$$\overrightarrow{u} =< 4,0,3 > e \overrightarrow{v} =< -2,1,5 >$$

. Determine:

a.

b. $\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}$

$< 4,0,3 > +(-2) < -2,1,5 >=$
$< 4,0,3 > + < 4,-2,10 >=$
$< 8,-2,-7 >$

1.5.2 Propriedades:

Sejam $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores do $\mathbb{R}$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Então:

a. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$

b. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$

c. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$

d. $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$

e. $a(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = a\overrightarrow{u} + a\overrightarrow{v}$

f. $(a+b)\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{u}$

g. $(ab)\overrightarrow{u} = a(b\overrightarrow{u})$

h. $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$

1.5.3 Propriedades (Normas):

a. $\|\overrightarrow{u}\| \geq$ e $\|\overrightarrow{u}\| = 0 \leftrightarrow \|u\| = \|0\|$

b. $\|k\overrightarrow{u}\| = |k|\,\|\overrightarrow{u}\|$

c. $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (desigualdade do triângulo)

Obs: Dado $\vec{u} = \vec{0}$, posso obter um novo vetor que tem a mesma dimensão.
Vamos corrigir a questão considerando um vetor $\vec{u} \neq \vec{0}$:

$$\vec{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

Aqui, $\|\vec{u}\| \neq 0$, e a norma de $\vec{u}$ é 1:

$$\|\vec{u}\| = 1$$

Se multiplicarmos $\vec{u}$ por um escalar λ, a norma do novo vetor $\lambda\vec{u}$ será:

$$\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\|\vec{u}\|$$

Se $\|\vec{u}\| = 1$, então:

$$\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|$$

Portanto, a expressão correta é:

$$|\lambda| = \frac{1}{\|\vec{u}\|}$$

Mas, como $\|\vec{u}\| = 1$, temos:

$$|\lambda| = 1$$

Notação: Em $\mathbb{R}^3$, demonstremos por:

$$\vec{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$$
$$\vec{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$$
$$\vec{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

Dai, seja $< x, y, z > \in \mathbb{R}^3$ então:
$< x, y, z > = x < 1, 0, 0 > +y < 0, 1, 0 > + < 0, 0, 1 > = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

1.5.4 Produto escalar

Def: Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.
Definimos o produto escalar (interno) de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ como: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.

Exemplo: Encontre $\vec{u} \cdot \vec{v}$ em que:

a. $\vec{u} = < 3, 5, 2 >$ e $\vec{v} = < -1, 3, 0 >$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3(-1) + 5(3) + 2(0) = -3 + 15 + 0 = 12$

b. $\vec{u} = 10\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$ e $\vec{v} = -2\hat{i} + \hat{j} + 6\hat{k}$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 10(-2) + (-4)(1) + (7)(6) = -20 - 4 + 42 = 18$

Propriedades: Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ e $c \in \mathbb{R}$. Então:

a. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

b. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

c. $c(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (c\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (c\vec{v})$

d. $\vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}||^2$

Exemplo: Dados $\vec{u} =< 1, 2, -3 >$, $\vec{v} =< 0, 2, 4 >$ e $\vec{w} =< 5, -1, 3 >$, determine:

a. $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} = (1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 4)\vec{w} = -8\vec{w} =< -40, 8, -24 >$

b. $\vec{u} \cdot (2\vec{v}) = 2(\vec{u} \cdot \vec{v} = 2(-8) = -16)$

1.5.5 Angulo entre vetores:

`https://query.libretexts.org/Idioma_Portugues/Livro%3A_Calculus_(OpenStax)/12%3A_Vetores_no_espa%C3%A7o/12.03%3A_O_produto_Dot`

22-10-2024

2 Plano no R^3

3 pontos não colineares no espaço só definem um plano. Seja π um plano no espaço, $P = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto em π e $\overrightarrow{n} =< a, b, c >$ um vetor ortogonal a π. Isto é, $\overrightarrow{n} * \overrightarrow{QR} = 0$, quaisquer que sejam Q e R em π

Se $Q = (x, y, z)$ em π então $\overrightarrow{PQ} =< x - x_0, y - y_0, z - z_0 >$ é ortogonal a $\overrightarrow{n}$, isto é:

$$< x - x_0, y - y_0, z - z_0 > * < a, b, c >= 0 \leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{2}$$

(2) equação vetorial de π

Podemos então reescrever (2) como:

$$ax + by + xz = ax_0 + by_0 + cz_0 - > d \leftrightarrow ax + by + cz = d \tag{3}$$

(3) equação geral de π

Exemplo: Escreva a equação do plano que contém $P = (1, 1, -2)$, $Q = (0, 2, 1)$ e $R = (-1, -1, 0)$

Para determinar um vetor ortogonal ao plano, basta tomar o produto vetorial $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{PQ} * \overrightarrow{PR} =< -1, 1, 3 > * < -2, -2, 2 >$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$= < 8, -4, 4 >$

Daí, a equação vetorial do plano que contem P, Q e R é: $8(x-1)-4(y-1)+4(z+2) = 0$. A equação geral é $8x-4y+4z = 8-4-8 = -4 \leftrightarrow 8x-4y+8z = -4$

Exemplo: Somente a equação do plano que passa por $(1, 4, 3)$ e contém a reta:

$$x = \frac{y-1}{2} = z + 1 \tag{4}$$

1º Solução: Percebe que $P = (1, 4, 3)$, $Q = (0, 1, -1)$ e $R = (1, 3, 0)$ pertecem ao plano π.

2.1 Distnacia entre um ponto e um plano

Trocando po P uma reta paralela ao vetor normal, $(\overrightarrow{n})$ ao plano e denotando por R o ponto onde tal reta interecepta o plano π, definindo a distância de P em π por: $d = ||\overrightarrow{RP}|| = ||P - R||$

Assim, $d = ||Proj_{\overrightarrow{n}\overrightarrow{PQ}}$