

1. Sejam r e s retas das equações paramétricas dada por:

$$\begin{cases} r : x = -3 + t \\ y = 4 - t, t \in \mathbb{R} \\ z = -3 + 2t \end{cases} \quad \begin{cases} s : x = -4 - t \\ y = 2, t \in \mathbb{R} \\ z = -5 - 2t \end{cases} \quad (1)$$

- a. Verifique que r e s são concorrentes. Os vetores direcionais r e s são, respectivamente, $\vec{v}_r = \langle 1, -1, 2 \rangle$ e $\vec{v}_s = \langle -1, 0, -2 \rangle$. Checando que \vec{v}_r e \vec{v}_s não são paralelos. De fato, se: $\vec{v}_r = k\vec{v}_s$, para algum $k \in \mathbb{R}$, então teríamos:

$$\langle 1, -1, 2 \rangle = k \langle -1, 0, -2 \rangle \Leftrightarrow \{-k = 1 \rightarrow k = -1$$

$$0 = -1(impossível)$$

$$-2k = 2 \rightarrow k = -1$$

Portanto, \vec{v}_r e \vec{v}_s não são paralelos.

Vamos agora verificar que r e s possuem um ponto comum para isto resolvemos:

$$\begin{cases} -3 + t_1 = -4 - t_2 \rightarrow -3 + 2 = -4 - t_2 \rightarrow -1 + 4 = -t_2 \rightarrow t_2 = -3 \\ 4 - t_1 = 2 \rightarrow -1t_1 = -2 \rightarrow t_1 = 2 \\ -3 + 2t_1 = -5 - 2t_2 \end{cases} \quad (2)$$

Substituindo $t_1 = 2$ e $t_2 = -3$ na última equação de (2), obtemos $-3 + 2(2) = -4 - 2(-3)$.

Portanto, as retas s e r se cruzam no ponto $-3 + 2, 4 - 2, -3 + 2 \cdot 2 = (-1, 2, 1)$ e assim concluímos que r e s são concorrentes.

- b. Determine o ponto de interseção entre r e s . Resposta: $P = (-1, 2, 1)$ veja item a.

- c. Determine a equação do plano que contém r e s . Para determinar um vetor normal ao plano requerido, basta tomar:

$\vec{v}_n = \vec{v}_r * \vec{v}_s$ = Daí, o plano que contém r e s passa por $P = (-1, 2, 1)$ e é ortogonal a \vec{v}_n . Portanto, tem equação dada por:

$$2(x - (-1)) + 0(y - 2) - 1(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 2(x + 1) - z + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x - z = -3 \quad (3)$$

2. Determine dois planos π_1 e π_2 formando um ângulo de 45° e de tal forma que a interseção entre eles seja a reta r de equações:

$$r : \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 + t \\ z = -1 \end{cases} \quad (4)$$

Podemos escolher para π_1 , o plano que contém $P = (-2, 2, -1)$ e que tem vetor normal \vec{v}_{π_1} aos vetores.

$\vec{v}_r = \langle 0, 1, 0 \rangle$ e $\vec{v}_a = \langle 1, 0, 0 \rangle$ isto é,
 $\vec{n}_{\pi_1} = \vec{v}_r * \vec{v}_a =$ Nesse caso, π_1 é dado por:

$$\pi_1 : 0(x + 2) + 0(y - 2) - 1(z + 1) = 0 - z - 1 = 0 \quad (5)$$

Vamos tomar agora para o vetor normal a π_2 , precisamos de um vetor \vec{n}_{π_2} que forme com \vec{n}_{π_1} um angulo de 45° , isto é,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ = \frac{\vec{n}_{\pi_1} * \vec{n}_{\pi_2}}{\|\vec{n}_{\pi_1}\| \|\vec{n}_{\pi_2}\|} \quad (6)$$

$\frac{\langle 0, 0, -1 \rangle * \langle a, b, c \rangle}{\sqrt{0^2 + 0^2 + (-1)^2} * \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ e além disso, $\vec{n}_{\pi_2} * \vec{v}_r = 0 \rightarrow \langle a, b, c \rangle * \langle 0, 1, 0 \rangle = 0$.

Combinando essas restrições, temos:

$$\begin{cases} \frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ b = 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (7)$$

Escolhendo:

$$\begin{cases} c = -\sqrt{2} \\ b = 0 \\ c = \sqrt{2} \end{cases} \text{ temos que:} \quad (8)$$

$$\vec{n}_{\pi_2} = \langle \sqrt{2}, 0, -2\sqrt{2} \rangle \text{ e } \pi_2 : \sqrt{2}(x - (-2)) + 0(y - 2) - \sqrt{2}(z + 1) = 0$$

3. Considere as retas r e s de equações dadas por:

$$r : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \in \mathbb{R} \\ z = 2 - t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 + 2t \in \mathbb{R} \\ z = 5 + 2t \end{cases} \quad (9)$$

a. Verifique que r e s são reversas.
baste mostrar que os vetores direcionais não são paralelos e que r e s não tem ponto em comum.

b. Determine as equações de planos paralelos π_1 e π_2 tais que $r \perp \pi_1$ e $s \perp \pi_2$.
Solução: O vetor normal a ambos os planos deve ser ortogonal aos vetores direcionais de ambas as retas, assim basta tomar:
Note ainda que: $P_1 = (-1, -1, 2) \in \pi_1$ e $P_2 = (1, -2, 5)$. Daí, π_1 e π_2 são dados por:

$$\pi_1 : 4(x + 1) - 2(y + 1) + 6(z - 2) = 0 \quad \pi_2 : 4(x - 1) - 2(y + 2) + 6(z - 5) = 0 \quad (10)$$

4.

5.