Question 57

Escreva uma equação do plano que contém o ponto $A = (1, -2, 3)$ e é perpendicular a cada um dos planos $2x + y - z = 2$ e $x - y - z = 3$.

Question 55

Determine a distância do ponto $A = (2, 1, 3)$ a cada um dos planos:

a) $x - 2y + z = 1$

b) $x + y - z = 0$

c) $x - 5z = 8$

Question 56

Determine:

a) a distância do ponto $(5, 4, 7)$ à reta $r : \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases} \quad , t \in R$

b) a distância do ponto $(1, 2, -1)$ à reta $r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 5 - t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \quad , t \in R$

c) a distância do ponto $(2, 3, 5)$ a cada um dos eixos do sistema de coordenadas.

Question 4

Julgue cada item abaixo como verdadeiro ou falso, justificando com um argumento lógico ou com um contraexemplo. Respostas sem justificativas não serão consideradas.

a) (6 pontos) O triângulo determinado pelos pontos $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, \sqrt{2}, 1)$ e $C = (2, 0, 0)$ é um triângulo equilátero.

b) (6 pontos) O raio da circunferência, obtida pela interseção da esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com o plano π de equação $x + y + z = 1$, é $r = \sqrt{\frac{11}{3}}$.

c) (6 pontos) Se $4A^2 + B^2 - 4C^2 < 0$, então a equação $x^2 - Ax + 4y^2 + By - z^2 + Cz = 0$ representa um hiperbolóide de uma folha.

d) (6 pontos) O ponto $D = (0, 4, 1)$ pertence ao plano determinado pelos pontos $A = (1, 0, 2)$, $B = (-2, 0, 1)$ e $C = (-1, 2, 1)$.

e) (6 pontos) Se $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{w}$, com $\vec{u} \neq \vec{0}$, então $\vec{v} = \vec{w}$.

Questions 17-22 (Vector problems)

17. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores, com ângulo entre si medindo $\theta = \frac{\pi}{6}$ e tais que $(\vec{u}, \vec{v}) = 2$. Determine a área do triângulo que tem os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como lados adjacentes.

18. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores tais que $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 10$ e $\|\vec{u} - \vec{v}\| = 8$, determine $(\vec{u}, \vec{v})$.

19. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores unitários tais que $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2}$. Determine $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v})$ e $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

20. Seja $\vec{v} = (1, -5, 3)$. Determine o vetor $\vec{w}$, tal que $\|\vec{w}\| = 10$, e que tem a mesma direção e o sentido contrário ao $\vec{v}$.

21. Obtenha $\vec{v}$ tal que $\vec{v} \times \vec{j} = \vec{k}$ e $\|\vec{v}\| = \sqrt{5}$.

22. Sejam $\vec{u} = a\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Sabendo-se que o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é obtuso, determine o valor de a de modo que a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seja $\sqrt{90}$.

Question 3 (Vector orthogonality)

Seja $\vec{u}$ um vetor ortogonal a $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Sabendo-se que $\vec{v}$ e $\vec{w}$ formam um ângulo de 30 e que $\|\vec{u}\| = 6$, $\|\vec{v}\| = 3$ e $\|\vec{w}\| = 3$, calcule $(\vec{u}, \vec{v} \times \vec{w})$.

Question 68 (Plane equations)

Determinar a equação geral dos planos nos seguintes casos:

a) passa pelo ponto $D = (1, -1, 2)$ e é ortogonal ao vetor $\vec{v} = (2, -3, 1)$

b) possui o ponto $A = (1, 2, 1)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

c) passa pelos pontos $A = (2, 1, 5)$, $B = (3, 1, 3)$ e $C = (4, 2, 3)$

d) passa pelo ponto $E = (1, 2, 2)$ e contém os vetores $\vec{u} = (2, -1, 1)$ e $\vec{v} = (-3, 1, 2)$

e) possui o ponto $P = (2, 1, 3)$ e é paralelo ao plano π

f) contém as retas $r : \frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{1-z}{2}$ e $s : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-5}{4}$

g) contém as retas $r : \frac{x}{2} - y + 1 = z + 3$ e $s : \frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2}$

h) contém as retas $r : \begin{cases} x = -3 + t \\ y = -t \\ z = 4 \end{cases}, t \in R$ e $s : \frac{x+2}{2} = \frac{2-y}{2} = z = 0$

i) contém a reta $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = z - 1$ e é paralelo à reta $s : \frac{x-3}{2} = 2 - y = \frac{z-4}{4}$

Question 72 (Spheres)

Encontre o centro e o raio das esferas:

a) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4z = 0$

b) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + x + y + z = 9$

Question 82 (Surface equation)

Determine a equação da superfície definida pelo conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ tais que a distância de P ao eixo dos y é $\frac{3}{4}$ da distância de P ao plano xz. Identifique a superfície.

Question 2 (Planes)

Considere os planos:

$$\pi_1 : x - y - 2z = 3 \quad \text{e} \quad \pi_2 : -2x - y + z = 5$$

a) (5 pontos) Caso exista, determine as equações paramétricas da reta de interseção dos planos π_1 e π_2

b) (5 pontos) Determine o ângulo formado por π_1 e π_2

c) (10 pontos) Seja s a reta de equações paramétricas dadas por

$$s : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3 - 4t \\ z = -2 - 3t \end{cases}, t \in R$$

Determinar, caso existam, os pontos do espaço que estão localizados sobre a reta s e que distam $\sqrt{6}$ unidades do plano π_1.