Teoria de Jogos

1 Introdução

- A teoria de jogos representa uma forma de modelar problemas que envolvem dois ou mais ‘tomadores de decisão’. Não se trata, portanto, de prescrições de como jogar um jogo e sim de mecanismos de análise de conflitos de interesse.
- Ela se originou ao final da Segunda Guerra Mundial, como um ramo da matemática aplicada.
- Na verdade, a humanidade tem se ocupado com jogos ao longo de toda a sua história, embora as ferramentas de análise e a formalização dos processos envolvidos tenham sido propostas tão recentemente.
- Um aspecto marcante da teoria de jogos é que inferências lógicas extremamente complexas podem ser expressas rigorosamente, com um mínimo de sofisticação matemática.
- Mas sua maior atratividade está nas aplicações, pois o conceito de jogo pode ser empregado na modelagem de situações tão diversas quanto:

- ✓ Conflitos entre países, entre grupos sociais e entre grupos étnicos;
- ✓ Políticas de preço, de mercado financeiro e de expansão de mercado;
- ✓ Políticas de impostos e taxas;
- ✓ Políticas sociais e de saúde;
- ✓ Campanhas eleitorais e outras disputas de poder entre facções políticas;
- ✓ Práticas esportivas e de entretenimento;
- ✓ Dinâmica de comportamento animal.

- Os objetivos também são variados e podem envolver:
  - ✓ O tipo de resultado que pode ser obtido, dadas as estratégias dos jogadores;
  - ✓ A determinação da melhor estratégia a ser tomada por um dado jogador ou por todos os jogadores, dado o cenário que se apresenta;
  - ✓ O tipo de modelo que cada jogador deve estabelecer para os demais jogadores de modo que um dado resultado ocorra para o jogo.

- De fato, sempre que há uma disputa de interesse entre partes que possuem algumas alternativas para tomada de decisão a cada passo, a formalização matemática desses cenários é denominada jogo.
- A teoria de jogos se configura, portanto, como o conjunto de técnicas para análise desses cenários. Por exemplo, ela não indica ao jogador como jogar o jogo, mas aponta o que acontece quando se adota esta ou aquela estratégia de jogo.
- É evidente que alguns jogos são demasiadamente complexos para serem completamente modelados. Mesmo assim, espera-se que um modelo simplificado seja capaz de descrever os principais tipos de decisão, assim como as estratégias mais indicadas e os resultados predominantes quando todos os jogadores fazem o melhor que podem a todo momento.
- Embora a denominação de jogo induza a conceitos como recreação e passa-tempo, as aplicações pretendidas envolvem um cenário bem mais abrangente, que excursiona do mais louvável ao mais ignóbil dos jogos.

2 Exemplos de jogos

- Exemplos óbvios são os jogos de carta e de tabuleiro.
- Serão apresentados a seguir outros jogos, sendo que o dilema do prisioneiro será melhor analisado mais adiante.

2.1 Pilha de palitos

- Partindo de uma configuração de palitos amontoados, sendo uma configuração aleatória para cada jogador, vence o jogo o jogador que conseguir retirar o maior número de palitos do seu monte sem mover qualquer outro palito que ainda permanece no monte.

2.2 Jogo de sinuca (bilhar inglês ou *snooker*)

- Dada uma bola branca e sete bolas coloridas com valores de 1 a 7, cada jogador tem a sua vez de jogar e, nessa vez, ele pode decidir encaçapar as bolas na ordem de valor ou então posicionar a bola branca de modo a dificultar a jogada seguinte do seu adversário. Obedecendo a várias regras de pontuação, **que consideram todas as possibilidades de eventos durante o jogo**, vence aquele jogador que obtiver a maior quantidade de pontos quando todas as bolas forem encaçapadas.

2.3 Duelo

- Dois duelistas, posicionados a uma distância expressiva entre si, estão de posse de uma pistola carregada com uma bala e passam a caminhar um em direção ao outro, na mesma velocidade. A cada passo dado, cada duelista pode decidir atirar ou não, sabendo que a chance de matar o seu oponente aumenta conforme a distância entre eles diminui.

2.4 Lançamento de novos produtos no mercado

- Considere que duas empresas dividem o mercado junto a uma certa linha de produtos e que elas estão em constante disputa por ampliar sua fatia de mercado e pela redução de custos de produção. Se uma das empresas anuncia o lançamento de um produto revolucionário naquela linha, sendo que o investimento para viabilizar a sua produção foi elevado, o comportamento da empresa concorrente pode ser de três tipos:

- ✓ Não lançar nenhum produto novo e prestigiar ainda mais os seus produtos tradicionais já lançados no mercado, esperando pelo fracasso de mercado do produto revolucionário concorrente;
- ✓ Passar a investir forte no lançamento de um novo produto muito semelhante àquele já lançado pela concorrência;
- ✓ Passar a investir forte no lançamento de um novo produto, distinto daquele já lançado pela concorrência, mas que concorre pela mesma fatia de mercado.

2.5 Dilema do prisioneiro

- Duas pessoas são presas de posse de produtos roubados e elas são interrogadas separadamente pelas autoridades judiciais. Ambas sabem que:

- ✓ Se ambas se declararem inocentes (não declarando ter roubado e nem acusando a outra pessoa de roubo), não há evidências suficientes para acusá-las de roubo, havendo uma pena de um ano de prisão por posse de produtos roubados;
- ✓ Se ambas delatarem uma a outra (acusar a outra de roubo e se declarar inocente), a pena será de 3 anos de prisão para cada uma;
- ✓ Se uma pessoa delatar a outra (acusar a outra de roubo e se declarar inocente), e a outra não delatar a primeira (inocentar a primeira), então a primeira pessoa pega uma pena de serviços à comunidade, sendo solta imediatamente, e aquela que não delatou mas foi delatada pega uma pena de 5 anos de prisão.

- Quais são as semelhanças entre o lançamento de novos produtos no mercado e o dilema do prisioneiro?
- O que caracteriza uma estratégia de jogo neste caso?

3 Terminologia para teoria de jogos

- **Jogador**: são os participantes do jogo, e podem ser em número de 2 ou mais.
- **Lance**: todo jogo consiste de uma sequência de lances, alguns deles simultâneos, que correspondem ou a decisões dos jogadores ou a resultados de eventos aleatórios.
- **Pagamento**: ao final do jogo, cada jogador recebe um pagamento (acumulado dos pagamentos efetuados ao longo dos lances), que vai corresponder a um número real. Exemplo: quantia de dinheiro ganha em um jogo de cartas.
- **Utilidade**: é um conceito que reflete a preferência frente a várias alternativas de resultado de um jogo. Exemplo: Suponha que o resultado de um jogo seja $F = \langle$Ir assistir a uma partida de futebol$\rangle$ ou $C = \langle$Ir ao cinema$\rangle$. Se você prefere F a C, então a função de utilidade deve indicar $u(F) > u(C)$. Quaisquer valores podem ser empregados aqui, por exemplo, $u(F) = 4$ e $u(C) = 2$. Há a possibilidade de estender este conceito para o caso de o tempo estar seco ou chuvoso. Sejam $FS = \langle$Ir assistir

a uma partida de futebol com tempo seco⟩, $FC = \langle$Ir assistir a uma partida de futebol com tempo chuvoso⟩ e $C = \langle$Ir ao cinema⟩. Sua função de utilidade pode agora indicar $u(FS) > u(C) > u(FC)$. Quaisquer valores podem ser empregados aqui, por exemplo, $u(FS) = 4$, $u(C) = 2$ e $u(FC) = 0$. É evidente que esses valores influenciam outros indicativos de preferência associados. Supondo que exista uma chance de tempo chuvoso de 50%, então, com a função de utilidade acima, é possível indicar que o jogador é indiferente entre ir ao futebol ou ir ao cinema com base na seguinte equação:

$$\frac{1}{2}u(FS) + \frac{1}{2}u(FC) = u(C)$$

Existe um conjunto de axiomas fundamentando a teoria de utilidade (LUCE & RAIFFA, 1957), a qual foi proposta já na concepção da teoria de jogos por VON NEUMANN & MORGENSTERN (1944). A função de utilidade deve refletir todos os aspectos vinculados aos possíveis resultados de um jogo, incluindo o sentimento de satisfação de um jogador frente ao que ocorre com seus adversários.

- **Estratégia**: a estratégia de um jogador é a descrição das decisões a serem tomadas frente a todas as possíveis situações que podem se apresentar durante o jogo. Portanto, a estratégia não depende do que o adversário irá fazer naquele lance. Vão existir jogos, no entanto, em que a enumeração de todas as possíveis situações é intratável, como no caso do jogo de xadrez.
- **Jogos de soma nula**: são aqueles para os quais o somatório dos pagamentos efetuados a todos os jogadores é nulo, não importando a estratégia de cada jogador. Neste caso, o que um jogador ganha corresponde ao que é perdido pelos demais.
- **Jogos de soma não-nula**: são aqueles que não respeitam as condições que caracterizam os jogos de soma nula. Um exemplo aqui é o dilema do prisioneiro.
- **Jogos de informação completa**: são os jogos em que cada jogador tem conhecimento de todos os lances já ocorridos. Exemplos contrários aqui são alguns jogos de carta, como o pôquer.

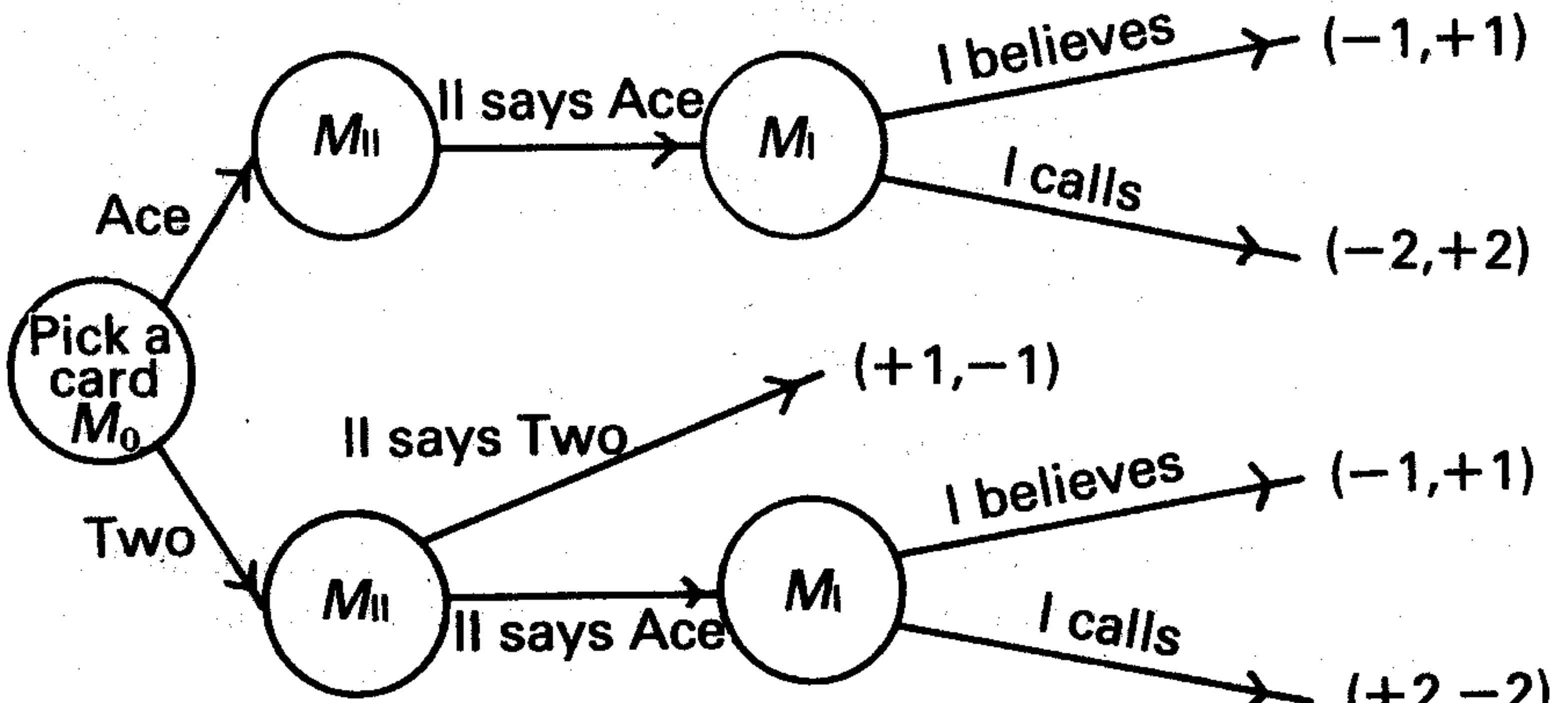
4 Jogos de soma nula e dois jogadores

4.1 Descrição na forma extensiva

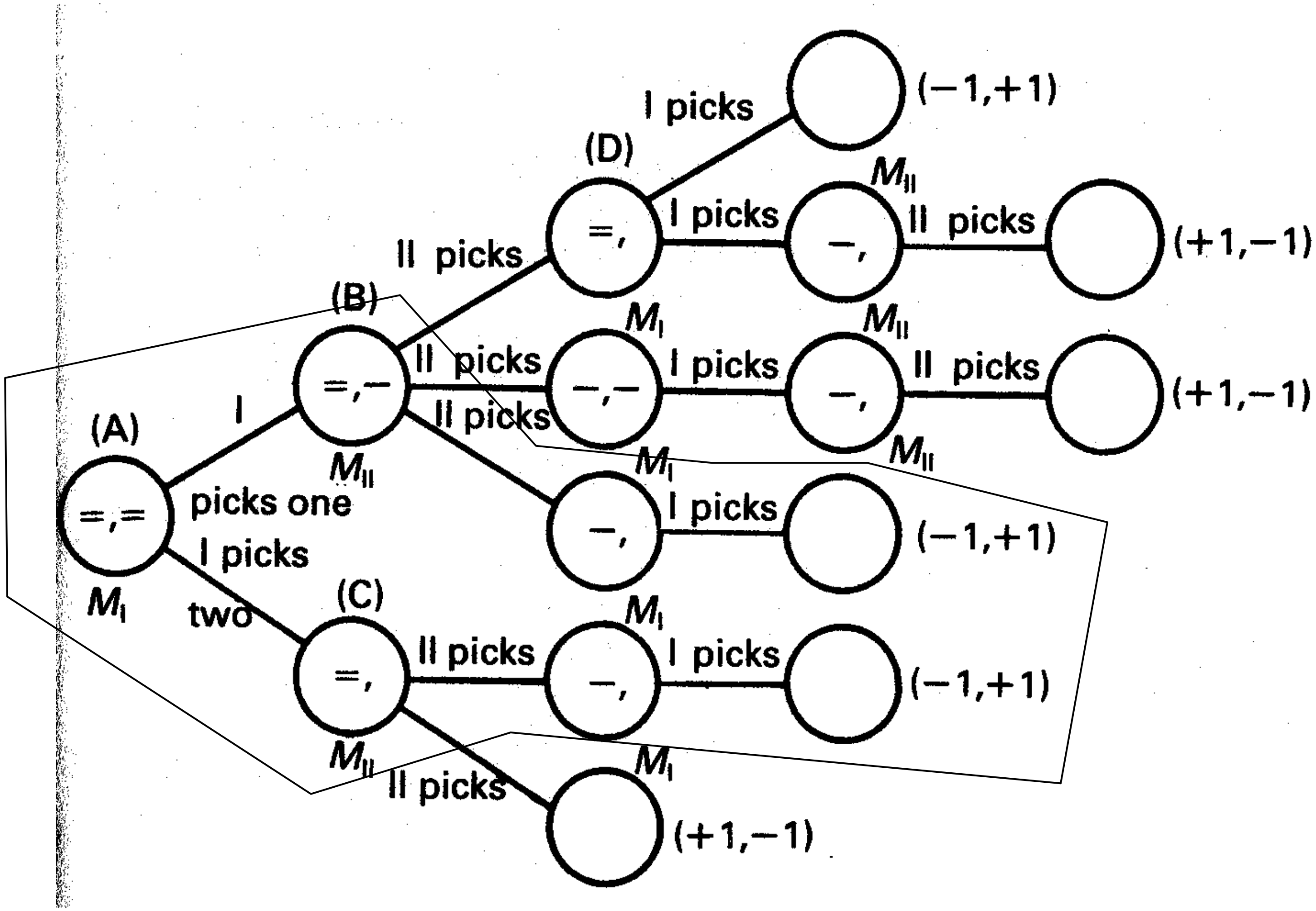
- Uma forma de descrever o jogo é armazenar todas as possíveis sequências de lances que podem ocorrer e o pagamento ao final de cada sequência.
- Essa representação pode se dar na forma de uma árvore de decisão. Cada nó da árvore representa uma situação do jogo, sendo que todos os lances possíveis a partir daquela situação devem conduzir a nós-filhos. Lembre-se que um lance corresponde ou a uma decisão dos jogadores ou a um resultado de eventos aleatórios.
- Sempre que existirem situações idênticas que podem ser obtidas por diferentes sequências de lances, essas irão ser representadas por nós distintos da árvore, permitindo assim indicar sem ambiguidade o que ocorreu até agora no jogo.
- Seguem dois exemplos de descrição na forma extensiva.

Forma extensiva para o jogo de pôquer com dois jogadores e duas cartas apenas: um Ás e um Dois

- Cada jogador aposta uma unidade monetária e o jogador I fornece uma carta ao jogador II, o qual toma conhecimento de que carta tem em mãos.



Forma extensiva para o jogo dos palitos com dois jogadores, duas pilhas e dois palitos por pilha



- Os jogadores se alternam retirando palitos das pilhas. A cada vez, cada jogador deve retirar ao menos um palito de uma pilha, mas ele pode retirar mais, desde que o faça de uma mesma pilha.
- O perdedor é o jogador que retirar o último palito.
- Repare que a parte destacada da árvore de decisão indica o que o jogador II deve fazer para sempre vencer o jogo.
- Vantagens da forma extensiva:
  - ✓ Fornece um retrato completo do jogo;
  - ✓ Permite que se descubra a melhor estratégia para vencer o jogo (se possível, para cada jogador), caminhando das folhas para a raiz.
- Desvantagens da forma extensiva:
  - ✓ Geralmente, a forma extensiva para a maioria dos jogos leva a árvores de decisão de difícil tratamento, devido ao seu tamanho.
  - ✓ Só permite análise para jogos de informação completa.

4.2 Descrição na forma normal

- Esta forma de descrição se inicia pela listagem de todas as estratégias possíveis para cada jogador:
  - ✓ I_1, I_2, ..., I_n para o jogador I;
  - ✓ II_1, II_2, ..., II_m para o jogador II.
- A própria árvore de decisão pode ser empregada para se chegar a essas estratégias.
- De posse da listagem com todas as estratégias dos dois jogadores, é possível verificar como ficaria o pagamento de cada jogador para cada par de estratégias adotada. Supondo que o jogador I adotou a estratégia I_i e que o jogador II adotou a estratégia II_j, como o jogo é de soma nula, o pagamento é indicado na forma:

$$(p_{ij}, -p_{ij})$$

- Se houver lances aleatórios durante o jogo, as probabilidades de cada resultado serão consideradas na estimativa do pagamento.

- Sempre é possível, então, obter uma matriz de pagamento, como será exemplificado nos dois jogos cujas árvores de decisão já foram apresentadas.
- Repare que a matriz de pagamento é sempre apresentada para o jogador I.

Forma normal para o jogo de pôquer com dois jogadores e duas cartas apenas: um Ás e um Dois

✓ I_1: believe II when he says 'Ace';

✓ I_2: don't believe II when he says 'Ace';

✓ II_1: say 'Two' when you have a Two and 'Ace' when you have an Ace;

✓ II_2: say 'Ace' either when you have a Two or an Ace.

- A matriz de pagamento fica:

$$\begin{array}{ccc} & II_1 & II_2 \\ I_1 & 0 & -1 \\ I_2 & -1/2 & 0 \end{array}$$

Forma normal para o jogo dos palitos com dois jogadores, duas pilhas e dois palitos por pilha.

- ✓ I_1: take 1 match in the (=,=) case, and 1 match in the (=,   ) case;
- ✓ I_2: take 1 match in the (=,=) case, and 2 matches in the (=,   ) case;
- ✓ I_3: take 2 matches in the (=,=) case;

- ✓ II_1: if (=,   ) take 2 matches, and if (=,–) take 1 match from the smaller pile;
- ✓ II_2: if (=,   ) take 2 matches, and if (=,–) take 1 match from the larger pile;
- ✓ II_3: if (=,   ) take 2 matches, and if (=,–) take 2 matches from the larger pile;
- ✓ II_4: if (=,   ) take 1 match, and if (=,–) take 1 match from the smaller pile;
- ✓ II_5: if (=,   ) take 1 match, and if (=,–) take 1 match from the larger pile;
- ✓ II_6: if (=,   ) take 1 match, and if (=,–) take 2 matches from the larger pile;

- Ao combinar as estratégias par-a-par, obtém-se a seguinte matriz de pagamento:

	II_1	II_2	II_3	II_4	II_5	II_6
I_1	1	1	−1	1	1	−1
I_2	−1	1	−1	−1	1	−1
I_3	1	1	1	−1	−1	−1

4.3 Análise do jogo a partir da descrição na forma normal

- Dispondo da matriz de pagamento, como analisar o jogo?
- Que estratégia deve ser sugerida a cada jogador?
- Uma suposição importante, particularmente no contexto de jogos de soma nula, é que **todo jogador deve ser pessimista**: “Toda vez que o meu adversário visar maximizar o pagamento dele, ele estará visando minimizar o meu pagamento (como uma consequência direta).”
- Com isso, para cada estratégia passível de ser adotada pelo jogador I, ele deve se concentrar no menor pagamento que ele poderia receber ao adotá-la. Assim, ele pode optar pela estratégia que produz o máximo desse menor pagamento.

- Por buscar maximizar o menor pagamento, esse critério recebe a denominação de **critério maximin**. Com esse critério, o jogador I terá a garantia de receber um pagamento de, no mínimo:

$$p_{\min} = \max_i \min_j \; p_{ij}.$$

- Já o jogador II, usando a matriz de pagamento do jogador I, irá minimizar o máximo pagamento do jogador I.
- Por buscar minimizar o maior pagamento, esse critério recebe a denominação de **critério minimax**. Com esse critério, o jogador II terá a garantia de que o jogador I não receberá um pagamento maior que:

$$p_{\max} = \min_j \max_i \; p_{ij}$$

- Retornando aos dois casos de estudo, resulta:

	II_1	II_2	Mínimo usando I_i
I_1	0	-1	-1
I_2	$-1/2$	0	$-1/2$
Máximo usando II_j	0	0	

- $p_{\min} = \max_i \min_j p_{ij} = \max\{-1, -1/2\} = -1/2$
- $p_{\max} = \min_j \max_i p_{ij} = \min\{0,0\} = 0$
- Como se pode constatar, $p_{\min} = -1/2 < 0 = p_{\max}$. Com isso, o jogador I pode estar certo de receber um pagamento mínimo de $-1/2$, mas o jogador II tem apenas a garantia de que ele vai conseguir evitar que o jogador I receba um pagamento maior do que 0.
- Não está claro qual será o resultado do jogo, pois o jogador I irá adotar a estratégia I_2 certamente, mas o jogador II poderá adotar tanto II_1 como II_2.

	II_1	II_2	II_3	II_4	II_5	II_6	Mínimo usando I_i
I_1	1	1	-1	1	1	-1	-1
I_2	-1	1	-1	-1	1	-1	-1
I_3	1	1	1	-1	-1	-1	-1
Máximo usando II_j	1	1	1	1	1	-1	

- $p_{\min} = \max_i \min_j p_{ij} = \max\{-1,-1,-1\} = -1$
- $p_{\max} = \min_j \max_i p_{ij} = \min\{1,1,1,1,1,-1\} = -1$
- Como se pode constatar, $p_{\min} = -1 = p_{\max}$. Com isso, o menor pagamento que o jogador I pode estar certo de receber é igual ao pagamento que o jogador II tem certeza que o jogador I não irá ultrapassar. Isso é o que se entende por solução do jogo: o jogador II deve empregar a estratégia II_6 e o jogador I pode empregar qualquer uma das 3 estratégias, sendo o pagamento -1 para o jogador I.
- Esse resultado já havia sido indicado pela análise da forma extensiva.

4.4 Estratégias mistas e garantia de solução

- Como lidar com o caso em que $p_{\min} \neq p_{\max}$?
- von Neumann ofereceu resposta a esta questão propondo uma ampliação do conjunto de estratégias que podem ser adotadas, incluindo estratégias mistas.
- Uma estratégia mista consiste na escolha aleatória de uma dentre as estratégias puras, a cada lance do jogo.
- Dado que o jogador I tem *n* estratégias puras e que o jogador II tem *m* estratégias puras, então uma estratégia mista é dada pelos dois vetores:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{bmatrix}$$

onde $x_i \geq 0$, i=1,2,...,n, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ e $y_j \geq 0$, j=1,2,...,m, $\sum_{j=1}^{m} y_j = 1$.

- Diz-se que X é o conjunto de estratégias admissíveis para $\mathbf{x}$ e Y é o conjunto de estratégias admissíveis para $\mathbf{y}$.

- Dada a matriz de pagamentos envolvendo as estratégias puras e dados os vetores **x** e **y**, o pagamento **esperado** passa agora a ser:

$$p(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_i y_j p_{ij}$$

- Por exemplo, no caso do jogo de pôquer, tomando estratégias mistas com $\mathbf{x} = [x \quad 1-x]$ e $\mathbf{y} = [y \quad 1-y]$, sendo a matriz de pagamento dada por:

$$\begin{array}{ccc} & y & 1-y \\ x & 0 & -1 \\ 1-x & -1/2 & 0 \end{array}$$

então o pagamento **esperado** é dado por:

$$p(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0\cdot x\cdot y - 1\cdot x\cdot(1-y) - \frac{1}{2}\cdot(1-x)\cdot y + 0\cdot(1-x)\cdot(1-y) =$$
$$= -x - \frac{1}{2}\cdot y + \frac{3}{2}\cdot x\cdot y$$

- É necessário redefinir $p_{\min}$ e $p_{\max}$, os quais passam a ser expressos na forma:

$$p_{\min}^{M} = \max_{\mathbf{x}\in X} \min_{\mathbf{y}\in Y} p(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

$$p_{\max}^{M} = \min_{\mathbf{y}\in Y} \max_{\mathbf{x}\in X} p(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

- Repare que **o conceito de estratégia mista implica na suposição de que se vai jogar aquele jogo várias vezes**, sendo que quanto mais se joga mais confiança se tem no pagamento esperado.
- Mesmo que o jogo só seja jogado uma vez, se os jogadores jogarem com a expectativa de jogarem novamente, já se justifica a estratégia mista.
- A solução do jogo agora envolve encontrar **x** e **y**, sendo que **todo jogo de soma nula e dois jogadores tem solução**.

- O resultado a seguir é o mais importante da Teoria de Jogos e foi demonstrado por VON NEUMANN (1937).

  Teorema: Em um jogo de soma nula e dois jogadores, com o jogador I tendo *n* estratégias puras e o jogador II tendo *m* estratégias puras, sendo *n* e *m* finitos, então, ao admitir estratégias mistas, sempre existe a solução ótima do jogo, ou seja, sempre vale $p_{\min}^{M} = p_{\max}^{M} = v$.

- v é chamado de valor do jogo.
- v e as estratégias ótimas $\mathbf{x}^*$ e $\mathbf{y}^*$ compõem a solução do jogo.

4.5 Dominância e estratégias vantajosas

- Os conceitos de dominância e de estratégias vantajosas permitem introduzir diversas simplificações junto à matriz de pagamentos, facilitando assim o tratamento de problemas com um número elevado de estratégias puras. Eles não serão abordados neste curso, no entanto.

4.6 Solução de jogos com matriz de pagamento *n* × *m*

- Inicialmente, é relevante apontar que podem existir múltiplos pares de estratégias mistas ótimas, cuja notação é ($\mathbf{x}$*,$\mathbf{y}$*). Todos eles levam ao mesmo valor do jogo e são chamados de **pares de equilíbrio**.

Definição: Um par de estratégias mistas $\mathbf{x}^* \in X$, $\mathbf{y}^* \in Y$ é um par de equilíbrio para um jogo de soma nula se, para quaisquer $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in Y$, vale:

$$p(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) \le p(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) \le p(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}).$$

Teorema: Se ($\mathbf{x}$*,$\mathbf{y}$*) é um par de estratégias em um jogo de soma nula e dois jogadores, com o jogador I tendo *n* estratégias puras e o jogador II tendo *m* estratégias puras, sendo *n* e *m* finitos, então, ao admitir estratégias mistas, ($\mathbf{x}$*,$\mathbf{y}$*) é um par de equilíbrio se e somente se $[\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*, p(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)]$ é a solução ótima do jogo.

- DANTZIG (1951) e GALE *et al.* (1951) demonstraram que resolver um jogo de soma nula e dois jogadores é equivalente a resolver um problema de programação linear, sendo esta a técnica mais eficaz e mais empregada atualmente.

5 Jogos de soma não-nula e dois jogadores

- A partir de agora, não é mais verdade que, para todas as situações do jogo, o pagamento para o jogador I é igual a menos o pagamento para o jogador II.
- Em termos de notação, cada elemento da matriz de pagamentos vai ser dado por um par, onde o primeiro número indica o pagamento do jogador I e o segundo número indica o pagamento do jogador II.
- Em jogos de soma não-nula, as principais diferenças frente ao que se viu no caso de jogos de soma nula são:
  - ✓ Os jogadores não são mais necessariamente adversários;
  - ✓ Um par maximin não é necessariamente um par de equilíbrio e vice-versa;

- ✓ Pares de equilíbrio distintos não necessariamente apresentam o mesmo valor do jogo;
- ✓ Não há um conceito óbvio de solução para o jogo.

5.1 Generalização do conceito de solução: operador maximin-maximin

- Dada a matriz de pagamentos, no caso de jogos de soma nula envolvendo dois jogadores, a determinação das melhores estratégias puras se dava pela aplicação dos operadores maximin e minimax.
- Em jogos de soma não-nula, será necessário generalizar este conceito, visto que o pagamento para cada jogador pode ser distinto.
- A generalização se dá de forma simples: ambos os jogadores aplicam o operador maximin, pensando apenas em maximizar o seu próprio pagamento, deixando de lado a minimização do pagamento do seu adversário.
- Como um exemplo, considere a seguinte matriz de pagamento:

$$\begin{array}{ccc} & II_1 & II_2 \\ I_1 & (2,2) & (3,3) \\ I_2 & (1,1) & (4,4) \end{array}.$$

- O jogador I vai tomar a sua porção da matriz:

$$\begin{array}{ccc} & II_1 & II_2 \\ I_1 & 2 & 3 \\ I_2 & 1 & 4 \end{array}$$

e, aplicando o operador maximin, optar pela estratégia I_1, a qual fornece um pagamento mínimo de 2.

- O jogador II vai tomar a sua porção da matriz:

$$\begin{array}{ccc} & I_1 & I_2 \\ II_1 & 2 & 1 \\ II_2 & 3 & 4 \end{array}$$

e, aplicando o operador maximin, optar pela estratégia II_2, a qual fornece um pagamento mínimo de 3.

- Observe que o emprego das estratégias I_1 e II_2 fornece pagamento (3,3), diferente dos valores obtidos pelos jogadores, que corresponde a (2,3). Isso é esperado, à medida que não há a preocupação explícita em minimizar o ganho do adversário.
- O par de estratégias (I_2,II_2) pode ser mostrado ser o par de equilíbrio neste caso, com pagamento (4,4), sendo distinto do par de estratégias indicado pelos operadores maximin.

5.2 O equilíbrio de Nash

- Inicialmente, é necessário estender a noção de par de equilíbrio para jogos de soma não-nula e estratégias mistas.

Definição: Um par de estratégias mistas $\mathbf{x}^* \in X$, $\mathbf{y}^* \in Y$ é um par de equilíbrio para um jogo de soma não-nula se, para quaisquer $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in Y$, vale:

$$p_1(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) \leq p_1(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)\,; \qquad p_2(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}) \leq p_2(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$$

onde $p_1(\cdot,\cdot)$ toma a matriz de pagamento do jogador I e $p_2(\cdot,\cdot)$ toma a matriz de pagamento do jogador II.

- Com isso, um conjunto de estratégias é um equilíbrio de Nash se nenhum dos jogadores tem incentivo para desviar unilateralmente (isto é, com os outros jogadores mantendo suas estratégias fixas) de sua estratégia atual. Ou seja, no equilíbrio de Nash, se um jogador for o único a avaliar a possibilidade de mudar de estratégia, não vai existir estratégia melhor que a atual.
- NASH (1951) apresentou uma generalização do teorema de von Neumann para jogos de soma não-nula, como segue:

Teorema: Em um jogo de dois jogadores, com soma nula ou soma não-nula, com o jogador I tendo *n* estratégias puras e o jogador II tendo *m* estratégias puras, sendo *n* e *m* finitos, então, ao admitir estratégias mistas, sempre existe ao menos um par de equilíbrio.

- O alcance desse teorema, no entanto, é menor que aquele associado a jogos de soma nula, pois lá foi provada a equivalência entre pares de equilíbrio e soluções ótimas do jogo.

- Para jogos de soma não-nula, sempre existem pares maximin-maximin e sempre existem pares de equilíbrio, mas eles não precisam ser os mesmos e nem em igual número.

5.3 Solução no sentido de Nash

- Os pares de equilíbrio são considerados os mais aceitáveis conceitos de solução, mas a dificuldade com eles é que podem existir muitos pares de equilíbrio em um jogo.
- Além disso, embora existam técnicas gráficas para obter os pares de equilíbrio para o caso de $n = m = 2$, para outros valores de n e m a tarefa se torna bem mais desafiadora (WINKELS, 1979).
- A sugestão mais aceita é tomar um subconjunto dos pares de equilíbrio como solução, com base em algum critério de decisão específico.
- A seguir, é apresentada a proposta de solução de Nash.

A solução do jogo, no sentido de Nash, é um subconjunto dos pares de equilíbrio que obedecem a propriedade de intercâmbio de estratégias, ou seja, se $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$ e $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$ são pares de equilíbrio, então $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2)$ e $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1)$ também o são.

- Tanto esta proposta de solução como outras já apresentadas na literatura possuem limitações e não podem ser aplicadas de forma geral (THOMAS, 2003).

5.4 Tópicos adicionais

- Não serão cobertos aqui tópicos importantes em teoria de jogos, tais como:
  - ✓ Soluções Pareto ótimas;
  - ✓ Jogos cooperativos e não-cooperativos;
  - ✓ Jogadores irracionais;
  - ✓ Jogos com mais de 2 jogadores;
  - ✓ Jogos de mercado;
  - ✓ Leilões;
  - ✓ Teoria de oligopólios;
  - ✓ Metajogos e Metaequilíbrio;
  - ✓ Jogos evolutivos;
  - ✓ *k*-resiliência e *t*-imunidade;
  - ✓ Equilíbrio de Nash generalizado e *game awareness*.

6 Estratégias para o dilema do prisioneiro

- A análise aqui se restringirá a jogos que são jogados um número infinito de vezes, fornecendo um valor preciso para o pagamento médio por partida.
- Será tomado como caso de estudo o dilema do prisioneiro, o qual tem recebido muita atenção ao longo dos últimos anos por diversas razões:
  - ✓ Representa um modelo adequado para muitos problemas de interesse prático;
  - ✓ Estabelece um conflito de interesses, permitindo contrastar interesses individuais e coletivos no contexto de jogos cooperativos;
  - ✓ A solução maximin-maximin e o par de equilíbrio são os mesmos, mas esta não representa a solução que é normalmente adotada na prática.
- A cooperação é um dos marcos em qualquer organização social. A formação de grupos sociais de fato representa uma solução cooperativa para a luta pela sobrevivência e pela reprodução das espécies. Cabe mencionar, no entanto, que o único equilíbrio de Nash no dilema do prisioneiro é sempre delatar.

- Todo grupo social acaba impondo restrições a uma parcela ou a todos os seus membros, implicando que deve se manifestar algum tipo de comportamento altruísta.
- Altruísta é aquele indivíduo que paga um preço para beneficiar um outro indivíduo ou grupo de indivíduos.
- Um dos maiores transtornos para grupos de indivíduos que dependem da cooperação para sobreviver é a presença de *freelancers* entre eles, ou seja, indivíduos que violam as regras de cooperação para maximizar seu proveito próprio.
- O interessante é perceber que os *freelancers* inicialmente preponderam na população, mas são paulatinamente substituídos por indivíduos altruístas.
- O que é preciso para haver cooperação? Em quais circunstâncias o mais racional é não cooperar? Que políticas devem ser adotadas para garantir a cooperação?

6.1 Tragédia dos comuns

- Suponha um jantar de fim de ano com 20 pessoas, com conta dividida igualmente entre todos. Você, que está com algumas dificuldades financeiras, pensa em pedir um prato barato, mas os primeiros a pedirem escolhem pratos caríssimos. Você sabe que vai pagar só 5% da conta, independente do que comer, e decide então pedir o prato mais caro do restaurante. O custo incremental para seus colegas vai ser mínimo, e você vai ter uma refeição muito melhor (em tese).
- Mas, como todo mundo pensa assim, o grupo acaba por gastar muito mais do que teria gasto se cada um pagasse individualmente pelo que consumisse, ou se o grupo tivesse se dividido por várias mesas menores.
- Não foi culpa de ninguém. As coisas simplesmente aconteceram assim. O grupo explorou a si mesmo. A decisão racional de cada indivíduo leva a um resultado irracional (negativo) para o grupo.

- Tecnicamente, por razões históricas, chamam esse tipo de jogo de “tragédia dos comuns”. Exploração coletiva de recursos sempre leva a tragédias dos comuns, e elas só podem ser evitadas introduzindo-se regras para que os participantes sejam recompensados por agirem de forma altruísta. Em outras palavras, o altruísmo é estimulado artificialmente.

6.2 Emergência de altruísmo e o Tit-for-Tat

- Processos evolutivos simulados em computador permitem identificar alguns tipos de comportamento altruísta que emergem como estratégias de jogo (AXELROD, 1984). Esse cenário será exemplificado aqui tomando o dilema do prisioneiro e a evolução de estratégias via computação evolutiva.
- Como há duas possíveis estratégias puras para cada jogador, adotou-se o bit 0 para a ação de delatar e o bit 1 para a ação de cooperar. Sendo assim, a matriz de pagamentos do jogo assume a forma:

		Ação (Jogador B)	
		0	1
Ação (Jogador A)	0	(A,B) = (–3, –3)	(A,B) = (0, –5)
	1	(A,B) = (–5, 0)	(A,B) = (–1, –1)

- Axelrod estabeleceu uma competição entre estratégias mistas para o dilema do prisioneiro, sendo que os jogadores poderiam utilizar uma memória do resultado dos 3 últimos jogos.
- Todas as propostas de estratégias deveriam competir duas-a-duas com todas as demais, e a estratégia vitoriosa foi a Tit-for-Tat, a mais simples de todas.
- Ela propõe inicialmente cooperação, no primeiro jogo, e a partir daí fornece como ação a mesma ação tomada pelo adversário no jogo passado. Repare que ela emprega apenas a memória do último jogo.
- Ela só foi batida anos depois, por estratégias de computação evolutiva. As soluções evolutivas também permitiram realizar estudos sobre cooperação.

7 Referências bibliográficas

AXELROD, R. "The Evolution of Cooperation", Basic Books, 1984.

DANTZIG, G.B. "A proof of the equivalence of the programming problem and the game problem", *in* Koopmans, T.C. (ed.) Activity Analysis of Production and Allocation, pp. 330-338, Wiley, 1951.

DAVIS, M.D. "Game Theory: A Nontechnical Introduction", Dover Publications, 1997.

GALE, D., KUHN, H.W. & TUCKER, A.W. "Linear Programming and the Theory of Games", *in* Koopmans, T.C. (ed.) Activity Analysis of Production and Allocation, pp. 317-329, Wiley, 1951.

JONES, A.J. "Game Theory: Mathematical Models of Conflict", Ellis Horwood, 1980.

LUCE, R.D. & RAIFFA, H. "Games and Decisions", Wiley, 1957.

NASH, J.F. "Non-cooperative games", Annals of Mathematics, vol. 54, pp. 286-295, 1951.

SHUBIK, M. "Game Theory in the Social Sciences", MIT Press, 1982.

TADELIS, S. "Game Theory: An Introduction", Princeton University Press, 2013.

THOMAS, L.C. "Games, Theory and Applications", Dover Publications, 2003.

VON NEUMANN, J. "Uber ein ökonomisches Gleichingssystem und eine Verallgemeinering des Brouwerschen Fixpunktsetzes", *in* Menger, K. (ed.) Ergebnisse eines Math. Coll., vol. 8, pp. 73-83, 1937.

VON NEUMANN, J. & MORGENSTERN, O. "Theory of Games and Economic Behaviour", Princeton University Press, 1944 (Princeton Classic Editions, 2007).

VOROB'EV, N.N. "Game Theory, Lectures for Economists and Systems Scientists", Springer-Verlag, 1977.

WATSON, J. "Strategy: An Introduction to Game Theory", W. W. Norton & Company, 3rd. edition, 2013.

WINKELS, H.M. "An algorithm to determine all equilibrium points of a bimatrix game", *in* Moeschlin, O. & Pallescke, D. (eds.) Game Theory and Related Topics, North-Holland, 1979.