

## EA072 – Roteiro de Estudos para a Prova 2 – 2s2019

### Tópico 2 – Computação Evolutiva

- (2.1) Proponha múltiplas estratégias de seleção para a escolha de indivíduos que irão compor a próxima geração.
- (2.2) Explique como funciona a estratégia evolutiva, para busca em espaços contínuos.
- (2.3) Explique como funciona o algoritmo genético, para busca em espaços binários.
- (2.4) Como se dá a evolução de regras em sistemas classificadores?
- (2.5) Uma vez formalizado o espaço de busca, calcule a sua cardinalidade, ou seja, o número de soluções candidatas do espaço de busca.
- (2.6) Aprenda a aplicar a Tabela de Contagem de Coleções.
- (2.7) O que é um problema de otimização multimodal e o que é um problema de otimização dinâmica? Por que algoritmos populacionais de busca, com módulos eficazes para manutenção de diversidade na população, se mostram bastante competitivos para esses dois tipos de problemas?

**Resolução:** Um problema de otimização multimodal é aquele que apresenta uma função de otimização não-convexa, com múltiplos ótimos locais. Esses ótimos locais podem ou não apresentar os mesmos valores do critério de otimização. Já um problema de otimização dinâmica é aquele em que a função de otimização varia com o tempo, de modo que a(s) região(ões) do espaço de busca em que se encontra(m) o(s) ótimo(s) pode(m) variar com o tempo. Abordagens de busca populacionais com manutenção de diversidade geralmente apresentam mecanismos para localização e preservação de múltiplos ótimos, assim como tendem a expressar uma melhor capacidade de seguimento de (ou reação a) ótimos que variam no tempo.

### Tópico 3 – Sistemas Nebulosos

- (3.1) Descreva o princípio da incompatibilidade, apresentado por Zadeh.
- (3.2) O que é universo de discurso em lógica nebulosa?
- (3.3) O que é variável linguística e o que são termos linguísticos?
- (3.4) O que é conjunto nebuloso?
- (3.5) O que é partição do universo de discurso?
- (3.6) Explique os conceitos de granularidade e de graduação em sistemas nebulosos.
- (3.7) Procure se familiarizar com as formulações matemáticas das funções de pertinência triangular, trapezoidal, sigmoidal e gaussiana. O que é um singleton?
- (3.8) Defina suporte e  $\alpha$ -corte de uma função de pertinência.
- (3.9) Procure distinguir os conceitos de grau de pertinência e de probabilidade.

- (3.10) Dê um exemplo de uma t-norma e de uma s-norma.
- (3.11) Uma vez determinados os valores das variáveis de entrada e dado um sistema composto por regras nebulosas, aplique o método de Mamdani e o centro de gravidade para obter a saída defuzificada.
- (3.12) O que é um sistema nebuloso Takagi-Sugeno?
- (3.13) No projeto de um controle nebuloso, dadas as variáveis de entrada e suas partições, preencha a tabela que indica os consequentes das regras nebulosas.
- (3.14) Dadas as partições das variáveis a seguir, na condição de um especialista, sua tarefa é propor um conjunto de regras que formará a base de conhecimento de um robô que precisa navegar por um ambiente desconhecido, com velocidade constante e sem sofrer colisão com obstáculos.

Variáveis de entrada (leitura sensorial):

Sensor 30° à esquerda (SE): perto (P), médio (M), longe (L)

Sensor 30° à direita (SD): perto (P), médio (M), longe (L)

Variável de saída:

Girar: Muito à esquerda (ME), À esquerda (E), Não girar (NG), À direita (D), Muito à direita (MD)

**Resolução:**

SD\SE	P	M	L
P	?	ME	ME
M	MD	E ou NG ou D	E ou NG
L	MD	D ou NG	NG

**Tópico 4 – Outras Técnicas de Computação Natural**

- (4.1) Explique como um algoritmo baseado em colônia de formigas e uso de feromônio pode ser empregado na solução do problema do caixeiro viajante.
- (4.2) Como você adaptaria esta proposta visando resolver outros tipos de problemas combinatórios? Observação: Para tanto, é fundamental definir quais são as decisões que cada formiga deve tomar ao construir uma solução candidata e onde deve ser depositado o feromônio, visando guiar as decisões das formigas.
- (4.3) Em um problema de otimização combinatória usando colônia de formigas, cada formiga, em uma dada iteração, deve se mover para um dentre um conjunto finito de posições alternativas. De forma genérica, quais são os dois fatores que influenciam a tomada de decisão da formiga?

**Resolução:** Um dos fatores é a quantidade relativa de feromônio no caminho até a nova posição (ou na própria posição), de modo que posições associadas com uma maior concentração de feromônio terão uma chance proporcionalmente maior de serem escolhidas. O outro fator é um termo heurístico associado a especificidades do problema de otimização. Por exemplo, se uma posição alternativa produz o menor acréscimo junto à função-custo (supondo minimização), quando comparada com as demais posições alternativas, ela terá proporcionalmente maior chance de ser escolhida. Esses dois fatores

geralmente são ponderados e, em seguida, multiplicados, visando considerá-los simultaneamente na tomada de decisão por parte de cada formiga.

- (4.4) Em um problema de otimização por enxame de partículas (PSO, do inglês *particle swarm optimization*), quais são as três direções que contribuem para a definição da nova posição de cada partícula?

**Resolução:** (1) Direção adotada na última atualização de posição da própria partícula; (2) Direção que aponta da posição atual da partícula até a melhor posição dela, desde o início da busca; (3) Direção que aponta da posição atual da partícula até a melhor posição encontrada até o momento por todas as partículas vizinhas. A ponderação dessas três direções geralmente é feita de forma aleatória, a cada iteração.

- (4.5) A resposta à questão 4.4 envolve o conceito de vizinhança entre as partículas. Quais são os principais tipos de vizinhança adotados em PSO? Qual é o efeito predominante de cada tipo de vizinhança no comportamento da busca?
- (4.6) Explique como operam os princípios de seleção clonal e maturação de afinidade em sistemas imunológicos artificiais.
- (4.7) Em que um algoritmo de otimização multi-modal difere de um algoritmo de otimização que busca encontrar uma única solução ótima para o problema?
- (4.8) Como ocorre com o sistema nervoso, defende-se que o sistema imunológico também executa cognição, no sentido de sensoriar o seu ambiente, reagir a estímulos internos e externos, executar reconhecimento de padrões e implementar memória (por exemplo, no caso do princípio de imunização pela vacinação). Quais são as principais semelhanças e diferenças entre os componentes e a forma de operar de ambos os sistemas (nervoso e imunológico)?
- (4.9) Observando a natureza, é possível constatar que existem soluções sub-ótimas ou até bem pouco otimizadas em vários contextos. Mas também existem soluções surpreendentemente eficientes e inspiradoras. Ao longo do curso, foi dada ênfase a inspirações voltadas para heurísticas e meta-heurísticas de busca e otimização. Apresente outras tecnologias inspiradas na natureza.

**Resolução:** Em todo lugar nos deparamos com tecnologias inspiradas diretamente na natureza, mesmo que não nos demos conta disso. Como exemplos temos velcro (inspirado em sementes de plantas que aderem ao corpo de animais, como o carrapicho), adesivos (inspirados nas patas de lagartixas), antenas e radares (inspiradas em insetos e morcegos) e nanoestrutura de superfícies, seja para reter ou dissipar água, seja para impedir a aderência de corpos indesejados (inspirada na superfície de folhas e de animais marinhos). Veja esses e outros casos em:

⟨<http://www.bloomberg.com/news/photo-essays/2015-02-23/14-smart-inventions-inspired-by-nature-biomimicry>⟩.

## Tópico 5 – Lógica Matemática, Representação e Inferência

- (5.1) O que é uma proposição?
- (5.2) O que é uma fórmula bem-formada?
- (5.3) O que é uma tautologia?

- (5.4) O que é uma contradição?  
(5.5) O que é um problema de satisfação?  
(5.6) O que é vinculação de proposições?  
(5.7) Dada a regra da resolução:

$$\frac{\frac{a \vee b}{\neg b \vee r}}{a \vee r}$$

---

Regra da Resolução

e sua variante quando  $r$  é sempre verdadeiro:

$$\frac{\frac{a \vee b}{\neg b}}{a}$$

---

Variação da Regra da Resolução

o que é necessário para se realizar uma prova por refutação de uma determinada proposição, dada a base de conhecimento?

**Resolução:** Todas as proposições logicamente consistentes podem ser obtidas aplicando-se a regra de resolução. É por isso que se diz que a resolução é logicamente completa. Para provar que uma proposição é verdadeira, adiciona-se o negativo dessa proposição à base de conhecimento (conjunto de proposições sabidamente verdadeiras) e busca-se chegar a uma contradição. Antes de manipular a base de conhecimento, é necessário que todas as proposições sejam convertidas para a forma normal disjuntiva.

- (5.8) Em que a lógica de primeira ordem difere da lógica proposicional, em termos do valor-verdade das proposições?  
(5.9) Exemplo de prova por inferência em lógica de primeira ordem. Não será cobrado em prova, mas pode ajudar a compreender melhor o conceito de lógica de predicados.

*The law says that it is a crime for an American to sell weapons to hostile nations. The country Nono, an enemy of America, has some missiles, and all of its missiles were sold to it by Colonel West, who is an American.*

Prove que *Colonel West* é um criminoso.

**Resolução:**

Representação em lógica de primeira ordem:

$\forall x,y,z \text{ American}(x) \wedge \text{Weapon}(y) \wedge \text{Nation}(z) \wedge \text{Hostile}(z) \wedge \text{Sells}(x,y,z) \Rightarrow \text{Criminal}(x)$	[1]
$\exists x \text{ Owns}(\text{Nono},x) \wedge \text{Missile}(x)$	[2]
$\forall x \text{ Owns}(\text{Nono},x) \wedge \text{Missile}(x) \Rightarrow \text{Sells}(\text{West}, \text{Nono},x)$	[3]
$\forall x \text{ Missile}(x) \Rightarrow \text{Weapon}(x)$	[4]
$\forall x \text{ Enemy}(x,\text{America}) \Rightarrow \text{Hostile}(x)$	[5]
$\text{American}(\text{West})$	[6]
$\text{Nation}(\text{Nono})$	[7]
$\text{Enemy}(\text{Nono}, \text{America})$	[8]
$\text{Nation}(\text{America})$	[9]

### Sequência de Passos da Prova:

1- De [2] e eliminação do $\exists$ : $\text{Owns}(\text{Nono},M1) \wedge \text{Missile}(M1)$	[10]
2- De [10] e And-Elimination: $\text{Owns}(\text{Nono},M1)$	[11]
$\text{Missile}(M1)$	[12]
3- De [4] e eliminação do $\forall$ : $\text{Missile}(M1) \Rightarrow \text{Weapon}(M1)$	[13]
4- De [12], [13] e Modus Ponens: $\text{Weapon}(M1)$	[14]
5- De [3] e eliminação do $\forall$ : $\text{Owns}(\text{Nono},M1) \wedge \text{Missile}(M1) \Rightarrow \text{Sells}(\text{West}, \text{Nono}, M1)$	[15]
6- De [15], [10] e Modus Ponens: $\text{Sells}(\text{West}, \text{Nono}, M1)$	[16]
7- De [1] e eliminação do $\forall$ ( $3\times$ ): $\text{American}(\text{West}) \wedge \text{Weapon}(M1) \wedge \text{Nation}(\text{Nono})$ $\wedge \text{Hostile}(\text{Nono}) \wedge \text{Sells}(\text{West},\text{Nono},M1) \Rightarrow \text{Criminal}(\text{West})$	[17]
8- De [5] e eliminação do $\forall$ : $\text{Enemy}(\text{Nono}, \text{America}) \Rightarrow \text{Hostile}(\text{Nono})$	[18]
9- De [8], [18] e Modus Ponens: $\text{Hostile}(\text{Nono})$	[19]
10- De [6,7,14,16,19] e And-Introduction: $\text{American}(\text{West}) \wedge \text{Weapon}(M1) \wedge \text{Nation}(\text{Nono})$ $\wedge \text{Hostile}(\text{Nono}) \wedge \text{Sells}(\text{West}, \text{Nono}, M1)$	[20]
11- De [17], [20] e Modus Ponens: $\text{Criminal}(\text{West})$ $\square$	[21]

(5.10) Dê exemplos de como expressar conhecimento em lógica de predicados.

#### Resolução:

(1) Todos os cisnes são brancos.	$\forall X [\text{Cisne}(X) \rightarrow \text{Branco}(X)]$
(2) Algum cisne é branco.	$\exists X [\text{Cisne}(X) \wedge \text{Branco}(X)]$
(3) Nem todos os cisnes são brancos. Algum cisne é não-branco.	$\neg\{\forall X [\text{Cisne}(X) \rightarrow \text{Branco}(X)]\}$ $\exists X [\text{Cisne}(X) \wedge \neg\text{Branco}(X)]$
(4) Nenhum cisne é branco. Todos os cisnes são não-brancos.	$\neg\{\exists X [\text{Cisne}(X) \wedge \text{Branco}(X)]\}$ $\forall X [\text{Cisne}(X) \rightarrow \neg\text{Branco}(X)]$
(5) Apenas cisnes são brancos. Todas as coisas brancas são cisnes.	$\forall X [\text{Branco}(X) \rightarrow \text{Cisne}(X)]$
(6) Todos e apenas os cisnes são brancos.	$\forall X [\text{Cisne}(X) \leftrightarrow \text{Branco}(X)]$
(7) Marujo é um cisne branco.	$\text{Cisne}(\text{Marujo}) \wedge \text{Branco}(\text{Marujo})$

Repare que, como já informado nas notas de aula, o quantificador universal  $\forall$  tem como principal conectivo a implicação, enquanto que o quantificador existencial  $\exists$  tem como principal conectivo a conjunção.

(5.11) Dadas as seguintes proposições:

- (1) Todos os participantes da competição são brasileiros.
  - (2) Todos os hóspedes do hotel são brasileiros.
  - (3) Todos os hóspedes do hotel são participantes da competição.
  - (4) Todos os participantes da competição são hóspedes do hotel.
- indique o que é indução, dedução e abdução nas inferências abaixo:

- (a) Se (1) e (2) então (3). ⟨ABDUÇÃO⟩ ou ⟨INDUÇÃO⟩
- (b) Se (1) e (3) então (2). ⟨DEDUÇÃO⟩
- (c) Se (1) e (4) então (2). ⟨ABDUÇÃO⟩ ou ⟨INDUÇÃO⟩
- (d) Se (2) e (3) então (1). ⟨ABDUÇÃO⟩ ou ⟨INDUÇÃO⟩
- (e) Se (2) e (4) então (1). ⟨DEDUÇÃO⟩

Observação: Muitas vezes, é possível distinguir claramente abdução de indução (como nos exemplos apresentados nas notas de aula), mas a presença do quantificador universal em todas as proposições acima leva a uma fronteira não muito clara, pois vai depender da forma como a inferência será conduzida. Já a distinção entre dedução e as outras duas formas de inferência (indução e abdução) tende a ser sempre evidente.

(5.12) Por que, para a inferência abdutiva, não basta propor uma hipótese comparativamente melhor que outras hipóteses?

Resolução: Uma proposição abdutiva tem que ser forte em algum sentido absoluto. Por exemplo, quando se refere a uma hipótese que ocorre com alta probabilidade em situações parecidas com aquela em questão.

(5.13) Explique por que a ciência está fundamentada na refutabilidade de suas teorias.

(5.14) O que se pode dizer sobre um teoria aceita no meio científico.

**Resolução:**

- Ela é aceita por ser aquela que melhor resiste aos testes de refutação já propostos;
- Quanto mais testes de refutação são vencidos pela teoria, maior confiança se tem em seu poder de explicar a verdade;
- Ela pode deixar de ser aceita, caso o seu poder de explicar a verdade seja superado por uma teoria alternativa.

(5.15) O que é uma falácia lógica?

(5.16) Supondo que os argumentos ou as premissas sejam falaciosos, o que se pode concluir sobre o valor-verdade da conclusão?

## **Tópico 6 – Sistemas Baseados em Regras e Árvores de Decisão**

(6.1) Apresente os módulos constituintes e explique como opera um sistema especialista baseado em regras.

(6.2) O que significa uma abordagem *top-down* para o projeto de um sistema baseado em regras?

(6.3) O que significa uma abordagem *bottom-up* para o projeto de um sistema baseado em regras?

(6.4) Partindo da seguinte base de conhecimento:

1.  $p \wedge q \rightarrow M$
2.  $r \wedge s \rightarrow p$
3.  $w \wedge r \rightarrow q$
4.  $t \wedge u \rightarrow q$
5.  $v \rightarrow s$
6.  $l \rightarrow v \wedge r \wedge q$

e sabendo que a proposição  $l$  é verdade, mostre que a proposição  $M$  é verdade empregando encadeamento direto.

**Resolução:**

Ciclo	WM	Regras Ativas	Regra Disparada
0	$l$	6	6
1	$l, v, r, q$	6,5	5
2	$l, v, r, q, s$	6,5,2	2
3	$l, v, r, q, s, p$	6,5,2,1	1
4	$l, v, r, q, s, p, M$	6,5,2,1	parar

- (6.5) Entenda como se aplica o encadeamento reverso.
- (6.6) Quais são as principais vantagens dos sistemas especialistas? E as suas principais desvantagens?
- (6.7) O que é um *flat file*?
- (6.8) Quais são os três tipos de atributos que podem ser utilizados na descrição de objetos?
- (6.9) Explique como funciona o algoritmo de indução de árvores de decisão denominado *Top-Down Induction of Decision Tree* (TDIDT).
- (6.10) Por que não se recorre, na prática, a uma busca exaustiva pela melhor topologia de árvore de decisão, explorando o espaço formado por todas as topologias candidatas?
- (6.11) O que é ganho de informação no processo de escolha de um atributo para um nó de uma árvore de decisão?
- (6.12) O que é razão de ganho no processo de escolha de um atributo para um nó de uma árvore de decisão?
- (6.13) Como a árvore de decisão trabalha no caso de atributos categóricos não-ordinais?
- (6.14) Como a árvore de decisão trabalha no caso de atributos numéricos e/ou categóricos ordinais?
- (6.15) O que se pode dizer acerca de atributos que são escolhidos para compor os nós de decisão mais próximos da raiz da árvore de decisão?
- (6.16) Qual é a utilidade da poda em árvores de decisão?

- (6.17) Quais são as principais diferenças entre C4.5 e CART?
- (6.18) O que são árvores de decisão multivariadas?
- (6.19) O que é uma *random forest*?
- (6.20) O que é *bagging*?
- (6.21) O que é um comitê de máquinas (*ensemble*)?
- (6.22) Quais são as principais distinções entre *random forest* e CART?
- (6.23) Apresente as motivações que sustentam o melhor desempenho de *random forest* sobre CART.
- (6.24) Demonstre que os dados oob (*out of bag*) representam aproximadamente um terço das  $N$  amostras disponíveis para treinamento.

**Resolução:**

- Visto que *bagging* equivale a um processo de amostragem com reposição, então a chance de um dado não ser escolhido a cada amostragem é:

$$\frac{N-1}{N}.$$

- Logo, a chance de um dado não ser escolhido ao final da coleta de  $N$  amostras com reposição (compondo então o conjunto oob) é:

$$\left(\frac{N-1}{N}\right)^N.$$

- Quando  $N$  cresce, esta probabilidade converge para:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{N-1}{N}\right)^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^N = e^{-1} \cong 0,368.$$

- (6.25) Apresente uma técnica capaz de estimar a relevância de atributos em *random forest*.

**Tópico 7 – Representação do Conhecimento e Solução de Problemas**

- (7.1) Dado um problema a ser resolvido empregando alguma técnica de inteligência artificial, que tipo de representação você adotaria para as soluções candidatas? Existe algum conhecimento a priori que pode ser empregado para simplificar o problema?
- (7.2) Em várias situações ao longo do curso de EA072, foi necessária a adoção de modelos simplificados (aproximados) para processos que se pretendia reproduzir em computador, visando tratabilidade. Apresente exemplos disso.
- (7.3) O que é seleção de variáveis (*variable selection*)?
- (7.4) O que é seleção de atributos (*feature selection*)?
- (7.5) Por que se diz que o desempenho superior de *deep learning*, em variadas aplicações de classificação de padrões, se deve à capacidade de definição



automática de um espaço de atributos com alto poder discriminatório, a cada camada da rede neural, também conhecido como aprendizado da representação?

- (7.6) (Não é questão candidata para a Prova 2) Leio o livro de Polya e, em seguida, leia o livro de Michalewicz & Fogel. Procure então discorrer acerca de como mudaram as estratégias de solução de problemas antes e depois do advento de computadores de alto desempenho.

## **Tópico 8 – Estruturas e Estratégias de Busca**

- (8.1) O que é uma busca informada e o que é uma busca não-informada?
- (8.2) Quais são os dois tipos de custo que precisam ser definidos quando se realiza busca em árvore empregando o algoritmo A\* e o que caracteriza cada um deles?

**Resolução:** A busca empregando o algoritmo A\* deve recorrer a dois índices:

- Fator de altura –  $g(n)$ : é o custo do caminho de custo mínimo entre o nó-raiz e o nó  $n$ .
- Fator heurístico –  $h(n)$ : é o custo estimado do caminho de custo mínimo entre o nó  $n$  e o nó-solução.

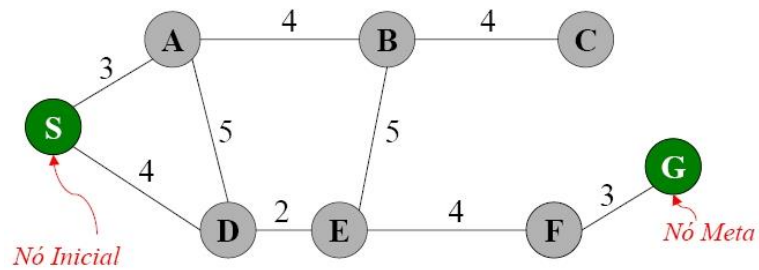
O fator de altura não pode diminuir quando se aumenta a distância até a raiz, enquanto que o fator heurístico nunca pode sobre-estimar o custo real até o nó solução.

- (8.3) Explique o princípio de operação do algoritmo A\*.
- (8.4) Explique o princípio de operação do algoritmo de busca não-populacional denominado simulated annealing (recozimento simulado).
- (8.5) Explique o princípio de operação da busca tabu.
- (8.6) Explique os três tipos de buscas locais em espaços discretos.

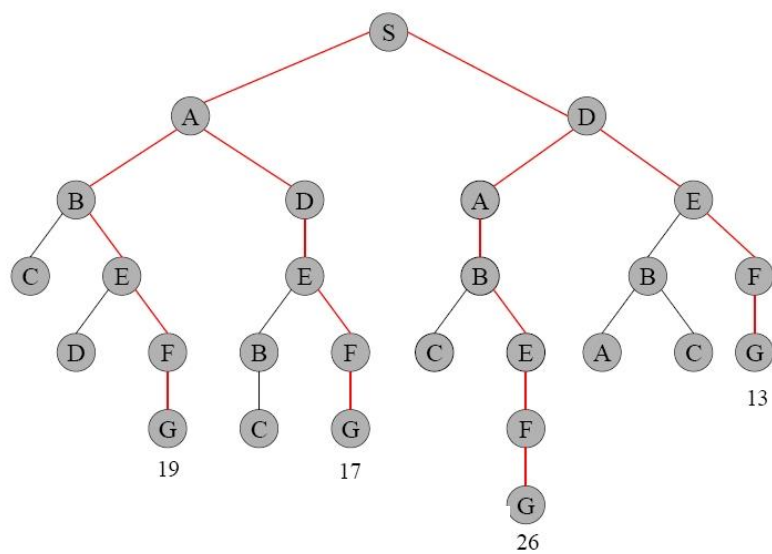
**Resolução:**

- *First improvement*: respeitando a vizinhança previamente definida, pare a busca assim que for encontrada uma solução melhor que a atual.
  - *Best improvement*: respeitando a vizinhança previamente definida, teste todas as soluções candidatas e fique com a melhor dentre elas, que pode ser a atual. Este método de busca pode ser intratável.
  - *Best improvement with limited resources*: respeitando a vizinhança previamente definida, teste um subconjunto de soluções candidatas (por exemplo, um número fixo e razoável de soluções candidatas) e fique com a melhor dentre elas, que pode ser a atual.
- (8.7) Dada uma representação matemática de soluções candidatas, defina uma vizinhança no espaço de busca.

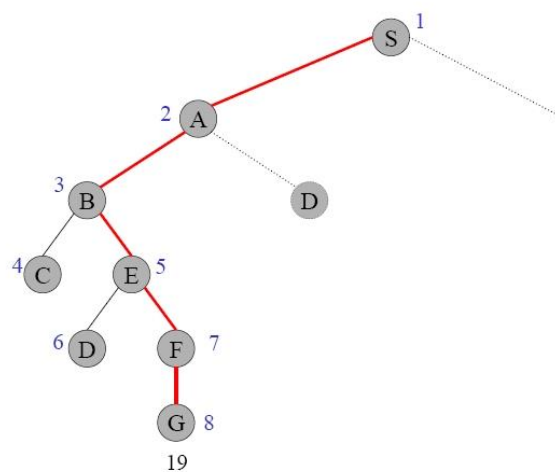
- (8.8) Dado o problema de encontrar o caminho mínimo entre o nó inicial  $S$  e o nó meta  $G$  no seguinte grafo:



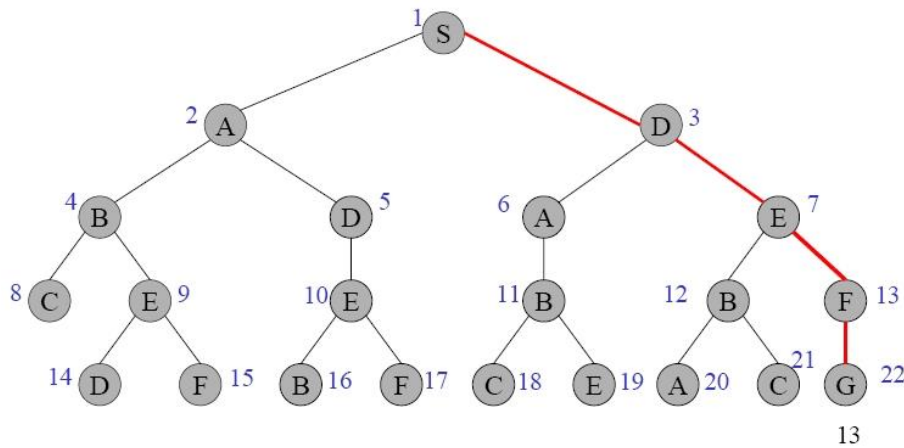
- a) Apresente a árvore de busca, com todos os caminhos existentes.



- b) Apresentar a solução que seria obtida pela técnica de busca em profundidade.



c) Apresentar a solução que seria obtida pela técnica de busca em largura.



### Tópico 9 – Teoria de Jogos

- (9.1) Dadas as regras do jogo e as estratégias de dois jogadores, monte a matriz de pagamentos.
- (9.2) O que representa a solução de um jogo de soma nula e estratégia mista envolvendo dois jogadores?
- (9.3) Em um jogo de soma nula com dois jogadores, cada jogador tem duas estratégias (não-dominantes entre si) e a matriz de pagamento assume a forma:

$$\begin{array}{cc} & \Pi_1 & \Pi_2 \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \end{array} & \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \end{array}$$

Sob estas condições, responda as seguintes questões:

a) O que é estratégia, estratégia pura e estratégia mista?

**Resolução:** Uma estratégia deve determinar a ação do jogador frente a qualquer situação possível (estado) do jogo. Portanto, ela indica que decisão o jogador vai tomar a cada lance, mas somente quando o estado do jogo associado ao lance estiver definido. Supondo que cada jogador possua um conjunto finito de estratégias alternativas, a estratégia pura implica a adoção de uma única estratégia durante todo o jogo, enquanto que a estratégia mista envolve a escolha aleatória de uma dentre as estratégias admissíveis a cada lance, seguindo uma atribuição fixa de probabilidade para a escolha de cada estratégia.

b) Forneça valores numéricos arbitrários para a matriz de pagamento de modo que, **em um cenário de estratégias puras**, o Jogador I seja sempre levado a adotar a sua estratégia 1. Para tanto, use o critério maximin.

**Resolução:** O critério maximin garante que o Jogador I não receberá um pagamento menor do que  $p_{\min}$ , onde  $p_{\min} = \max_i \min_j a_{ij}$ . Para atender a solicitação do enunciado, é necessário que o menor pagamento para quando o Jogador I utiliza a sua estratégia 1 seja maior que o menor pagamento no caso dele utilizar a estratégia 2. Dentre as infinitas possibilidades de atribuição de valores, tem-se:

	$\Pi_1$	$\Pi_2$	Mínimo
$I_1$	3	1	1
$I_2$	4	0	0

- c) Aplicando técnicas de programação linear e **supondo estratégias mistas**, é possível obter a seguinte solução para o jogo:

✓ Valor do jogo:  $v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$

✓  $\mathbf{x}^* = \left[ \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \quad \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \right]$

✓  $\mathbf{y}^* = \left[ \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \quad \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \right]$

O que é preciso acontecer com os elementos da matriz de pagamentos para que o jogador I adote com maior frequência a sua estratégia 1?

**Resolução:** Basta produzir  $\frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} > \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$ , que pode ser decomposto em:

$$\begin{cases} a_{22} - a_{21} > a_{11} - a_{12} & \text{se } a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12} > 0 \\ a_{22} - a_{21} < a_{11} - a_{12} & \text{se } a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12} < 0 \end{cases}$$

- (9.4) Defina como você aplicaria computação evolutiva para evoluir estratégias do dilema do prisioneiro, supondo que a sua decisão de cooperar ou delatar vai depender das 3 últimas decisões suas e de seu adversário.

## Tópico 10 – Raciocínio Probabilístico

- (10.1) Procure distinguir as formas empregadas para se tratar incerteza em sistemas nebulosos e em sistemas baseados no raciocínio probabilístico.
- (10.2) O que é um espaço amostral?
- (10.3) O que é um experimento?
- (10.4) O que é um evento?
- (10.5) O que é uma variável aleatória?
- (10.6) Como aplicar o Teorema de Bayes em situações práticas?
- (10.7) Como obter probabilidades a partir de uma rede bayesiana?

(10.8) Como aplicar métodos de busca do Tópico 8 (Exemplo: *First Improvement*) para se obter uma topologia de rede bayesiana mais verossímil?

(10.9) Como obter uma rede bayesiana, mesmo ainda sem as tabelas de probabilidades, a partir de uma descrição em linguagem natural da relação de dependência entre eventos aleatórios?

(10.10) Suponha que um fabricante de queijo recebe o leite que utiliza na seguinte proporção:

- 20% do produtor  $P_1$ ;
- 30% do produtor  $P_2$ ;
- 50% do produtor  $P_3$ .

Um órgão de fiscalização inspecionou esses produtores de surpresa e relatou que:

- 20% dos galões de leite produzido por  $P_1$  são adulterados;
- 5% dos galões de leite produzido por  $P_2$  são adulterados;
- 2% dos galões de leite produzido por  $P_3$  são adulterados.

Como os galões de leite não apresentam identificação do produtor, ao se analisar um galão ao acaso e constatar que o seu conteúdo está adulterado (nova evidência), qual é a probabilidade de que o leite seja proveniente do produtor  $P_1$ ?

Sugestão: Aplique a seguinte formulação para o teorema de Bayes:

$$\Pr(A_i | B) = \frac{\Pr(B | A_i) \Pr(A_i)}{\sum_j \Pr(B | A_j) \Pr(A_j)}$$

**Resolução:** Chamando  $\Pr(P_j)$  a probabilidade do leite ser proveniente do produtor  $P_j$  ( $j=1, \dots, 3$ ) e de  $Q$  a nova evidência, então a probabilidade  $\Pr(P_1 | Q)$  de que o leite seja proveniente do produtor  $P_1$ , dada a nova evidência  $Q$ , assume a forma:

$$\Pr(P_1 | Q) = \frac{\Pr(Q | P_1) \Pr(P_1)}{\sum_{j=1}^3 \Pr(Q | P_j) \Pr(P_j)}$$

A partir do enunciado da questão, extraem-se todos os valores dos termos do lado direito da equação acima, resultando:

$$\Pr(P_1 | Q) = \frac{0,2 * 0,2}{0,2 * 0,2 + 0,05 * 0,3 + 0,02 * 0,5} = \frac{0,04}{0,04 + 0,015 + 0,01} = \frac{0,04}{0,065} \cong 61,54\%$$

(10.11) Uma equipe da área de saúde coletou dados de campo e desenvolveu uma rede bayesiana visando explicar as relações de causa-efeito entre  $E \equiv \langle \text{Praticar Esporte} \rangle$ ,  $O \equiv \langle \text{Ocorrência de Obesidade} \rangle$  e  $M \equiv \langle \text{Ocorrência de Problemas Musculares} \rangle$ . A rede bayesiana está apresentada abaixo, onde “s” significa sim e “n” significa não. Estão sendo negligenciados outros fatores que, além de  $E$ , sabidamente também influenciam  $O$  e  $M$ . Sob estas condições, encontre a probabilidade de uma pessoa praticar esporte dado que ela apresenta problemas musculares, ou seja:

$$\Pr(E = s | M = s) = \frac{\Pr(E = s, M = s)}{\Pr(M = s)}.$$

Sugestão: Aplique as formulações:

$$\Pr(E = s, M = s) = \Pr(E = s, M = s, O = s) + \Pr(E = s, M = s, O = n)$$

e

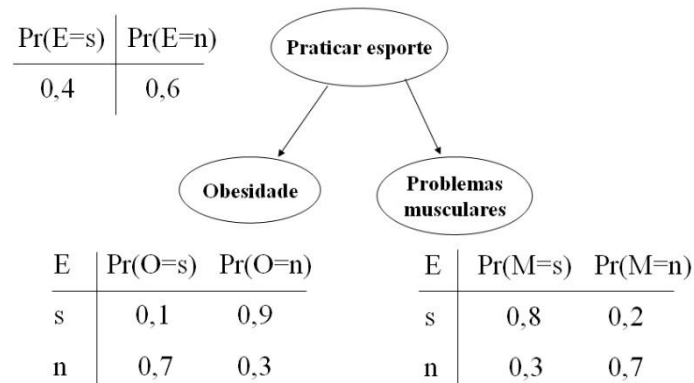
$$\begin{aligned}\Pr(M = s) &= \Pr(E = s, M = s, O = s) + \Pr(E = s, M = s, O = n) \\ &+ \Pr(E = n, M = s, O = s) + \Pr(E = n, M = s, O = n)\end{aligned}$$

ou de modo alternativo:

$$\Pr(E = s, M = s) = \Pr(M = s | E = s) \Pr(E = s)$$

e

$$\Pr(M = s) = \Pr(M = s | E = s) \Pr(E = s) + \Pr(M = s | E = n) \Pr(E = n)$$



**Resolução:** As sugestões de formulação nos remetem aos seguintes cálculos alternativos:

Cálculo de  $\Pr(E = s, M = s)$  :

$$\begin{aligned}\Pr(E = s, M = s) &= \Pr(E = s, M = s, O = s) + \Pr(E = s, M = s, O = n) = \\ &0,4 * 0,8 * 0,1 + 0,4 * 0,8 * 0,9 = 0,32\end{aligned}$$

ou de modo alternativo:

$$\Pr(E = s, M = s) = \Pr(M = s | E = s) \Pr(E = s) = 0,8 * 0,4 = 0,32$$

Cálculo de  $\Pr(M = s)$  :

$$\begin{aligned}\Pr(M = s) &= \Pr(E = s, M = s, O = s) + \Pr(E = s, M = s, O = n) + \Pr(E = n, M = s, O = s) \\ &+ \Pr(E = n, M = s, O = n) = \\ &0,4 * 0,8 * 0,1 + 0,4 * 0,8 * 0,9 + 0,6 * 0,3 * 0,7 + 0,6 * 0,3 * 0,3 = 0,32 + 0,18 = 0,5\end{aligned}$$

ou de modo alternativo:

$$\begin{aligned}\Pr(M = s) &= \Pr(M = s | E = s) \Pr(E = s) + \Pr(M = s | E = n) \Pr(E = n) = \\ &0,8 * 0,4 + 0,3 * 0,6 = 0,32 + 0,18 = 0,5\end{aligned}$$

Logo:

$$\Pr(E = s | M = s) = \frac{\Pr(E = s, M = s)}{\Pr(M = s)} = \frac{0,32}{0,5} = 64\%$$

(10.12) Qual a diferença entre os frequentistas e os bayesianos? (Não é uma questão a ser cobrada em prova, mas ajuda a posicionar melhor a perspectiva bayesiana.)

### Resolução:

A diferença está na interpretação do que significa probabilidade, conduzindo assim a uma forma distinta de realizar inferências sobre um todo, dado que se dispõe de amostras desse todo (população). Todos estão satisfeitos com os axiomas de probabilidade, mas como utilizar a probabilidade para realizar inferências? Os bayesianos predominaram no século 19, os frequentistas no século 20 e os bayesianos estão recebendo mais atenção nos últimos anos, particularmente devido ao apoio da computação. Considere um cenário em que foram realizados  $N$  experimentos visando medir a velocidade da luz no vácuo, sendo que erros aleatórios de medida estão presentes. Para um frequentista, existe um valor verdadeiro e fixo, mas desconhecido, para a velocidade da luz no vácuo. Ele irá tomar uma certa distribuição de probabilidade (geralmente a distribuição normal, também conhecida como gaussiana) e irá estimar os seus parâmetros (no caso, média e variância amostral, levando em conta as  $N$  amostras). A estatística resultante para a média amostral (uma estatística é uma função das amostras) será usada como uma estimativa da média da população de amostras. O frequentista, no entanto, não é capaz de dizer o quão distante a sua estatística está do valor verdadeiro da velocidade da luz.

Já um bayesiano parte de uma distribuição de probabilidade a priori. Um bayesiano discorda de que existe um valor verdadeiro para a velocidade da luz, pois ele a toma como uma variável aleatória com uma distribuição de probabilidade. Usando o teorema de Bayes, o bayesiano utiliza as amostras para definir a distribuição de probabilidade a posteriori.

Em síntese:

- O bayesiano defende a ideia de que quantidades desconhecidas, como média populacional, possuem distribuições de probabilidade. Com isso, ele pode interpretar probabilidade como o grau de confiança (*degree of belief* ou medida de plausibilidade dado um conhecimento incompleto) em uma hipótese. Ele parte de uma distribuição a priori (*prior knowledge* ou *prior belief*), toma algumas poucas amostras (conhecimento adicional ou novidade), aplica a regra de Bayes para obter a distribuição a posteriori e realiza inferências. Para ele, somente as amostras são reais e a média da população é uma abstração. Para ele, alguns valores são mais prováveis que outros, baseado nos dados e na distribuição a priori. Infelizmente, nem sempre a distribuição a priori é informativa.
- O frequentista considera esse procedimento do bayesiano um uso demasiadamente liberal da teoria de probabilidade. Para ele, as probabilidades são apenas definidas quando o número de amostras independentes tende a infinito. Um frequentista acredita que a média da população é real, mas desconhecida e “desconhecível” (só conhecida para infinitas amostras), e pode ser apenas estimada a partir dos dados.

(10.13) É possível expressar o Teorema de Bayes na seguinte forma:

$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^k P(B | A_j)P(A_j)}$$

Use então este teorema para resolver o Problema de *Monty Hall*.

**Resolução:** Definindo que  $A_i$  corresponde ao evento <Carro está atrás da porta  $i$ > e  $B$  corresponde a <Apresentador do programa abriu uma das portas não escolhidas>, então

supondo, sem perda de generalidade, que a pessoa escolheu a porta 1 e o apresentador abriu a porta 3, a probabilidade do carro estar atrás da porta 1 é dada na forma:

$$P(A_1 | B) = \frac{P(B / A_1)P(A_1)}{P(B / A_1)P(A_1) + P(B / A_2)P(A_2) + P(B / A_3)P(A_3)}$$

Interpretação: A probabilidade do carro estar atrás da porta 1, dado que o apresentador abriu a porta 3, é dada pela probabilidade do apresentador abrir a porta 3, dado que o carro está atrás da porta 1, vezes a probabilidade a priori do carro estar atrás da porta 1, dividido pela soma das seguintes probabilidades:

- Probabilidade do apresentador abrir a porta 3, dado que o carro está atrás da porta 1, vezes a probabilidade a priori do carro estar atrás da porta 1;
- Probabilidade do apresentador abrir a porta 3, dado que o carro está atrás da porta 2, vezes a probabilidade a priori do carro estar atrás da porta 2;
- Probabilidade do apresentador abrir a porta 3, dado que o carro está atrás da porta 3, vezes a probabilidade a priori do carro estar atrás da porta 3.

Resulta então:

$$P(A_1 | B) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

De forma similar, a probabilidade do carro estar atrás da porta 2 é dada na forma:

$$P(A_2 | B) = \frac{P(B / A_2)P(A_2)}{P(B / A_1)P(A_1) + P(B / A_2)P(A_2) + P(B / A_3)P(A_3)}$$

produzindo:

$$P(A_2 | B) = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

Logo, trocar pela porta 2 dobra a probabilidade da pessoa ganhar o carro.