

# Bloc 1

Patrick Nzudom

14 avril 2022

---

## Table des matières

<b>1 Bloc 1 - Et pourquoi pas prédire le futur ?</b>	<b>1</b>
1.1 Simulation d'une chaîne de Markov . . . . .	1
1.2 Simulation d'une autre chaîne de Markov . . . . .	3

## 1 Bloc 1 - Et pourquoi pas prédire le futur ?

Grâce à la chaîne de Markov, ou modèle de Markov, je peux estimer le comportement futur des individus à l'aide de processus stochastiques, ou aléatoires. Selon un processus stochastique, seul le passé détermine l'évolution du processus ou la probabilité qu'un événement ne se produise [2].

Dans ce bloc, nous verrons comment simuler une chaîne de Markov avec `Python` et comment illustrer certaines de ses propriétés. Dans la suite (*listeapprox*), il y aura une chaîne de Markov à espaces d'états  $A$  et  $B$  et de vecteurs d'état initial  $S_0$  et  $P_0$ , pour deux situations différentes.

### 1.1 Simulation d'une chaîne de Markov

D'après mes connaissances, il n'y a pas de fonction toute faite, en `Python`, pour générer une chaîne de Markov à partir de sa matrice de transition. Toutefois, c'est possible de le faire et la méthode est située dans le livre de Vincent Vigon [5].

Le premier exemple est le suivant : Un individu sans dettes a une possibilité sur trois de finir endetté, et lorsqu'un individu est endetté, il a une possibilité sur 6 de ne plus avoir de dettes.

Dans la première situation, l'ensemble d'état contient deux états possibles. Premièrement, celle où l'individu est endetté, puis finalement celle où l'individu est sans dettes. Je cherche la probabilité pour un individu endetté et un individu sans dettes de passer d'un état à un autre ou de rester dans le même état [4].

J'insère la figure représentant la situation que j'ai conçu au préalable à l'aide du site web `overleaf.com`

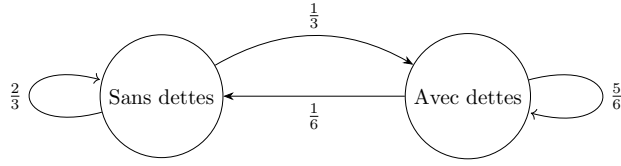


FIGURE 1 – Probabilités qu’un individu soit endetté ou non

Pour représenter la chaîne de Markov, il faut définir l’ensemble d’état. Dans ce cas, il s’agit de :  $\Omega = \text{Sans dettes}, \text{Avec dettes}$

Ensuite, je commence par créer la matrice de probabilités de transition  $A$ .

	Sans dettes	Avec dettes
Sans dettes	2/3	1/6
Avec dettes	1/3	5/6

Ensuite, je crée le vecteur d’état initial du système  $S_0$ .

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Après une étape ou une journée, il faut multiplier le vecteur  $S_0$  trouvé plus haut (1) par  $A$  pour trouver le vecteur d’état. On obtient :

$$S_1 = (A)(S_0) = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Ainsi de suite, après deux étapes ou deux jours, on peut calculer le carré  $A^2$  et puis multiplier le vecteur  $S_0$  par  $A^2$  pour trouver le vecteur d’état.

En effet, il y a deux méthodes d’effectuer ce calcul. On peut calculer

$$A_2 = (A_0)(A_1)$$

$$A_2 = (A^2)(S_0)$$

Ce qui donne des probabilités égales :

$$A_2 = (A^2)(S_0) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Après un an, j’obtiens de la même manière :

$$A_{365} = (A^{365})(S_0) = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

Pour savoir si les puissances de la matrice de transition converge, on continue les calculs de celles-ci en les multipliant par le vecteur d’état initial du système  $S_0$ . Après un an et plus, on remarque, grâce à python et la suite (*listeapprox*), qu’une personne commençant endettée ou pas, elle aura 2 chances sur 3 de finir endettée.

## 1.2 Simulation d'une autre chaîne de Markov

Dans la seconde situation, le sujet à l'étude est les passes que se font trois joueurs de hockey entre eux. Il y a le joueur A, le joueur B, et le joueur C [1]. La chaîne de Markov est celle de la probabilité pour qu'un joueur passe la rondelle à un autre.

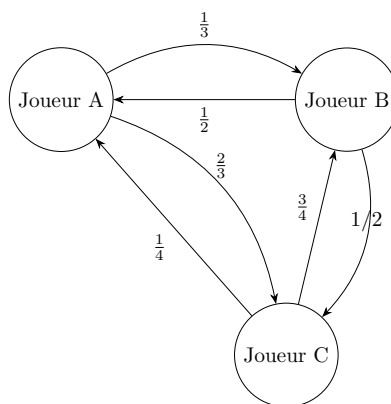


FIGURE 2 – Probabilités qu'un joueur fasse la passe à un autre

$$\Omega = A, B, C$$

Ensuite, je commence par créer la matrice de probabilités de transition  $B$ . J'obtiens :

	$A$	$B$	$C$
$A$	0	$1/3$	$2/3$
$B$	$1/2$	0	$1/2$
$C$	$1/4$	$3/4$	0

On peut interpréter cette matrice de la façon suivante : Lorsque le joueur A a la rondelle, il y a une chance sur trois qu'il la passe au joueur B et  $2/3$  sont les probabilités qu'il la passe au joueur C. Lorsque le joueur B a la rondelle, il y a une chance sur deux qu'il la passe au joueur a et  $1/2$  sont les probabilités qu'il la passe au joueur C, et ainsi de suite.

Ensuite, je crée le vecteur d'état initial du système  $P_0$ .

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Après une étape ou une passe, on peut multiplier le vecteur  $P_0$  par  $B$  pour trouver le vecteur d'état. On obtient :

$$P_1 = (B)(P_0) = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

Ainsi de suite, après trois étapes ou trois passes, on peut calculer le cube  $B^3$  et puis multiplier le vecteur  $P_0$  par  $B^3$  pour trouver le vecteur d'état. Cela donne les probabilités suivantes, pour chaque joueur d'avoir la rondelle :

$$[0.236111111111111111 \quad 0.291666666666667 \quad 0.53125]$$

De la même manière, dans une situation hypothétique où les trois joueurs A, B et C se seraient fait 100 passes les probabilités pour chacun des joueurs d'avoir la rondelle sont égales :

$$[0.3636363636364 \quad 0.3636363636364 \quad 0.3636363636364]$$

Bien qu'ils n'aient pas été utilisés dans ce bloc, les vecteur propres et les valeurs propres sont des notions intéressantes en relation avec les chaînes de Markov.

## Références

- [1] Abdurrazzak Ajaja. Chaînes de markov. [https://scientificsentence.net/Equations/Algebre\\_lineaire/index.php?key=yes&Integer=chaine\\_markov](https://scientificsentence.net/Equations/Algebre_lineaire/index.php?key=yes&Integer=chaine_markov).
- [2] Economy-pedia. Chaîne de markov. <https://economy-pedia.com/11031896-markov-chain#menu-1>.
- [3] Pete Lefeux. *Vivre mieux en faisant des mathématiques*. MathAcadémie, 2014.
- [4] Daniel Lemire. Les chaînes de markov. <https://spip.telug.ca/inf6460/spip.php?article108>.
- [5] Vincent Vigon. *Python Proba Stat*. Independently published, 2018.