MATEMÁTICA I

525103-1

Primer Semestre 2016

CAPÍTULO I
Lógica

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Concepción

CONECTIVOS Y TABLAS DE VERDAD.

La llamada lógica simbólica y la teoría de conjuntos nos permiten adquirir un simbolismo y el esquema de un razonamiento deductivo que permita razonar matemáticamente a través de un lenguaje apropiado.

Definición Una **proposición** es una expresión con sentido en un lenguaje, que afirma o niega algo y proporciona una información.

Se usa el término proposición para designar una expresión de la cual tenga sentido inequívoco decir si es verdadera o falsa en un cierto contexto. Simbolizaremos las proposiciones con letras minúsculas: $p,\ q,\ r,\ s$ etc.

Los **valores de verdad**, verdadero (V) y falso (F), se consideran conceptos primitivos.

Lógica

Definición Un **conectivo lógico** es un símbolo que permite obtener nuevas proposiciones a partir de proposiciones dadas. Los conectivos son : no; y; o; si ... entonces ... ; si y sólo si.

Las proposiciones pueden ser de dos tipos:

Atómicas o **simples**: las que no incluyen conectivos, por ejemplo:

p: "Pedrito es un niño muy estudioso",

q: "El padre de Pedrito es un hombre feliz"

Moleculares o **compuestas**: las que se obtienen combinando proposiciones atómicas mediante conectivos, por ejemplo:

r: "Si Pedrito es un niño muy estudioso, entonces el padre de Pedrito es un hombre feliz".

Definición Se llama **negación** de una proposición p, a la proposición no "$\boldsymbol{p}$". La notación es $\sim p, -p, p'$

Observación La negación es el único conectivo que actúa sobre una sola proposición.

La proposición $\sim p$ es verdadera si la proposición p es falsa y, es falsa si p es verdadera. Esto se esquematiza con la llamada **tabla de verdad** siguiente:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Lógica

Definición Sean p y q dos proposiciones, se llama **conjunción** de las proposiciones p y q a la proposición $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$. La notación es $p \wedge q$.

La proposición $p \wedge q$ es verdadera sólo si p y q son ambas verdaderas y, es falsa si al menos una de ellas es falsa. Esto se esquematiza por medio de la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Definición Sean p y q dos proposiciones, se llama **disyunción** de las proposiciones p y q a la proposición $\boldsymbol{p}$ o $\boldsymbol{q}$. La notación es $p \vee q$.

La proposición $p \vee q$ es verdadera si al menos una de las proposiciones p ó q es verdadera y, es falsa si ambas son falsas. Esto se esquematiza con la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Definición Se llama **condicional** de las proposiciones p y q a la proposición si $\boldsymbol{p}$ entonces $\boldsymbol{q}$. La primera proposición se llama **antecedente** y la otra **consecuente**. La notación es: $p \longrightarrow q$.

Se lee: si $\boldsymbol{p}$ entonces $\boldsymbol{q}$ o $\boldsymbol{p}$ es condición suficiente para $\boldsymbol{q}$ o $\boldsymbol{q}$ es condición necesaria para $\boldsymbol{p}$.

La proposición $p \longrightarrow q$ es falsa sólo si p es verdadera y q es falsa, en los demás casos $p \longrightarrow q$ es verdadera. Esto se resume en la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Definición Se llama **bicondicional** de las proposiciones p y q a la proposición $\boldsymbol{p}$ si sólo si $\boldsymbol{q}$. La notación es $p \longleftrightarrow q$.

Se lee: $\boldsymbol{p}$ si y sólo si $\boldsymbol{q}$ ó $\boldsymbol{p}$ es condición necesaria y suficiente para $\boldsymbol{q}$.

La proposición $p \longleftrightarrow q$ es verdadera si ambas p y q son verdaderas o ambas son falsas y, es falsa si p y q tienen distinto valor de verdad. Un resumen de èsto se ve en la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \longleftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Lógica

Definición Una proposición molecular se dice una:

- **tautología** si es siempre verdadera cualesquiera sean los valores de verdad de las proposiciones que la componen.
- **contradicción** si es siempre falsa, independientemente de los valores de verdad de las proposiciones componentes.
- **contingencia** si no es tautología ni contradicción.

Definición Dos proposiciones p y q se dicen **logicamente equivalentes** si sus tablas de verdad son idénticas o bien, si su bicondicional es una tautología. La notación es $p \iff q$.

PROPIEDADES:

1. $\sim(\sim p) \Longleftrightarrow$ p (doble negación)

- Conmutatividad

2. $p \wedge q \Longleftrightarrow q \wedge p$
3. $p \vee q \Longleftrightarrow q \vee p$
4. $(p \longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow (q \longleftrightarrow p)$

- Asociatividad

5. $[(p \wedge q) \wedge r] \Longleftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$
6. $[(p \vee q) \vee r] \Longleftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$
7. $[(p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow r] \Longleftrightarrow [p \longleftrightarrow (q \longleftrightarrow r)]$

Lógica

- Distributividad

8. $[p \wedge (q \vee r)] \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
9. $[p \vee (q \wedge r)] \Longleftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

- Leyes de De Morgan

10. $\sim (p \wedge q) \Longleftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
11. $\sim (p \vee q) \Longleftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

- Idempotencia

12. $(p \wedge p) \Longleftrightarrow p$
13. $(p \vee p) \Longleftrightarrow p$

14. $\sim (p \longrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \sim q)$

Definición Se dice que una proposición p **implica lógicamente** una proposición q si $p \longrightarrow q$ es una tautología . Se denota $p \Longrightarrow q$. Se lee: $\boldsymbol{p}$ implica $\boldsymbol{q}$.

Inferir es una operación lógica que consiste en obtener, a partir de una o varias proposiciones (**hipótesis**), supuestamente verdaderas, otra proposición (**tesis**) que en tales condiciones resulta necesariamente verdadera.

Si se designa por H la **hipótesis** y por T la **tesis**, entonces T se infiere de H si y sólo si el condicional $H \longrightarrow T$ es una tautología, y la implicación lógica $H \Longrightarrow T$ se llama **teorema**.

Lógica

Si $H \Longrightarrow T$ y $T \Longrightarrow H$, entonces se dice que $T \Longrightarrow H$ es el **teorema recíproco** de $H \Longrightarrow T$.

Si $H \Longrightarrow T$ y $\sim H \longrightarrow \sim T$ es una implicación lógica entonces $\sim H \Longrightarrow \sim T$ se llama **teorema contrario** de $H \Longrightarrow T$.

De la tautología $(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow (\sim q \longrightarrow \sim p)$ se deduce que los teoremas $H \Longrightarrow T$ y $\sim T \Longrightarrow \sim H$ son equivalentes y cada uno se llama **contra-recíproco** del otro.

La equivalencia entre los teoremas $H \Longrightarrow T$ y $\sim T \Rightarrow \sim H$ proporciona un método de demostración que consiste en demostrar el teorema contrarecíproco en lugar del teorema original.

CUANTIFICADORES LOGICOS

Definición Se llama **función proporsicional** a una expresión que contiene una o más variables y resulta ser una proposición si se asigna a la (o las) variables(s) valores específicos.

NOTACION: $p(x),\ q(x,y),\ r(x,y,z,u)$

$p(x)$: x **sujeto** que tiene la propiedad p **predicado**

Definición Se llama **conjunto de validez** de $p(x)$ al conjunto de todos los valores de x para los cuales $p(x)$ es verdadera.

NOTACION: $V_P = \ \{x \in U : p(x)\ \}$

Es frecuente en matemática la presencia de proposiciones que aluden a objetos de un cierto universo y que su valor de verdad depende de dichos objetos. Para indicar que $p(x)$ es una proposición verdadera para todo x del universo U y que $q(x)$ es una proposición verdadera sólo para algunos elementos de U, se introducen dos símbolos especiales:

$\forall$: llamado **cuantificador universal** que se lee cualquiera sea o para todo.

$\exists$: llamado **cuantificador existencial** que se lee existe.

Observaciones

- Si el conjunto de validez es unitario, entonces se escribe $\exists!\ x, x \in U,\ p(x)$ y se lee: existe un único $x \in U$ tal que $p(x)$ es verdadera.

- La negación de la proposición para todo x en U, p(x) es verdadera, es: no es verdad que para todo x en U, p(x) es verdadera, o equivalentemente: existe un x en U tal que la proposición $\sim p(x)$ es verdadera. Simbólicamente se escribe:

$$\sim (\forall x, x \epsilon U, \; p(x)) \Longleftrightarrow (\exists x, x \epsilon U, \sim p(x))$$

- La negación de la proposición existe un x en U tal que $p(x)$ es verdadera es: no es verdad que existe un x en U tal que la proposición $p(x)$ es verdadera lo que es equivalente a decir: para todo x en U, la proposición $p(x)$ es falsa. Simbólicamente se escribe:

$$\sim (\exists x,\ x \,\epsilon\, U,\ p(x)) \Longleftrightarrow (\forall x,\ x \,\epsilon\, U, \sim p(x))$$

Lógica

- La negación de la proposición existe un único x en U tal que $p(x)$ es verdadera es :no existe ningún x en U tal que $p(x)$ es verdadera o existen al menos dos elementos en U, x e y, tales que $p(x)$ y $p(y)$ son verdaderas. Simbólicamente se escribe:

$$\sim (\exists!\, x,\ x \in U, p(x)) \Longleftrightarrow \{(\forall x \in U, \sim p(x)) \vee (\exists x \in U, \exists y \in U,\ p(x), p(y))\}$$