UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Ejercicio 8.8 (Listado 2)
MATEMÁTICA I (529103-1)

Determine para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se satisface la siguiente inecuación:

$$\sqrt{x^2 + 4x} < 5x - 1$$

Solución: Procedemos mediante una cadena de equivalencias, pero antes observamos lo siguiente:

- Para que la raíz esté bien definida se requiere que $x^2 + 4x \geq 0$, es decir, que $x \in]-\infty, -4] \cup [0, +\infty[$. Para deducir lo anterior usamos la siguiente tabla de signos:

		$x = -4$		$x = 0$	
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x^2 + 4x = x(x+4)$	$+$	0	$-$	0	$+$

- Como $\sqrt{x^2 + 4x} \geq 0$, se requiere que $0 < 5x - 1$, pues en caso contrario

$$\sqrt{x^2 + 4x} < 5x - 1 \leq 0,$$

es decir, $\sqrt{x^2 + 4x} < 0$, contradiciendo que $\sqrt{x^2 + 4x} \geq 0$.
Así, $x \in]1/5, +\infty[$.

De lo anterior, los valores de x que estén en el conjunto solución debe satisfacer las dos condiciones anteriores, esto es

$$x \in]-\infty, -4] \cup [0, +\infty[\quad \wedge \quad x \in]1/5, +\infty[,$$

que es equivalente a que $x \in (]-\infty, -4] \cup [0, +\infty[) \cap]1/5, +\infty[=]1/5, +\infty[$.

Ahora, teniendo en cuenta lo anterior, notamos que

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+4x} < 5x-1 &\iff x^2+4x < (5x-1)^2 \\
&\iff x^2+4x < 25x^2-10x+1 \\
&\iff 0 < 24x^2-14x+1 \\
&\iff 0 < x^2 - \frac{7}{12}x + \frac{1}{24} \\
&\iff 0 < x^2 - 2\left(\frac{7}{24}\right)x + \frac{1}{24} \\
&\iff 0 < x^2 - 2\left(\frac{7}{24}\right)x + \left(\frac{7}{24}\right)^2 - \left(\frac{7}{24}\right)^2 + \frac{1}{24} \\
&\iff 0 < \left(x - \frac{7}{24}\right)^2 - \frac{49}{24^2} + \frac{1}{24} \\
&\iff 0 < \left(x - \frac{7}{24}\right)^2 - \frac{25}{24^2} \\
&\iff 0 < \left(x - \frac{7}{24}\right)^2 - \frac{5^2}{24^2} \\
&\iff 0 < \left(x - \frac{7}{24} + \frac{5}{24}\right)\left(x - \frac{7}{24} - \frac{5}{24}\right) \\
&\iff 0 < \left(x - \frac{1}{12}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right),
\end{aligned}$$

es decir, gracias a la tabla de signos:

		$x=1/12$		$x=1/2$	
$x-1/2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-1/12$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\left(x-\frac{1}{12}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$

podemos concluir que $x \in \,]-\infty, 1/12[\, \cup \,]1/2, +\infty[$. Lo anterior, junto al hecho que $x \in \,]1/5, +\infty[$ (comentario del comienzo), nos permite concluir que

$$x \in \,]-\infty, 1/12[\, \cup \,]1/2, +\infty[\quad \wedge \quad x \in \,]1/5, +\infty[,$$

es decir, que el conjunto solución es

$$S = (]-\infty, 1/12[\, \cup \,]1/2, +\infty[) \cap \,]1/5, +\infty[\, = \,]1/2, +\infty[$$

.

PVR/pvr. 30 de marzo, 2016.