MATEMÁTICA I

525103-1

Primer Semestre 2016

CAPÍTULO II
Números Reales

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Concepción

Números reales

EL CONJUNTO DE NÚMEROS REALES COMO UN CUERPO ORDENADO.

Conjunto de números más usuales y conocidos:

$\mathbb{N}$: **Conjunto de números naturales** (enteros positivos).

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

$\mathbb{Z}$: **Conjunto de números enteros** (enteros negativos, cero, enteros positivos).

$$\ldots,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

$\mathbb{Q}$: **Conjunto de números racionales** (cociente de números enteros).

$$\frac{p}{q},\ p \text{ y } q \text{ números enteros},\ q \neq 0$$

Números reales

Cualquier número racional puede escribirse en forma decimal. Por ejemplo:

$$\frac{3}{4} = 0.75, \quad \frac{39}{8} = 4.875, \quad \frac{2}{11} = 0.1818\ldots$$

$0.1818\ldots$: **decimal periódico**, los dígitos 1 y 8 se repiten indefindamente.

De esta manera, el número racional puede ser caracterizado por una representación decimal que termina o, si es indefinida, es decimal periódico. Los números cuya representación decimal es indefinida y no periódica no son números racionales. Por ejemplo, $\sqrt{2}$, π.

$$\sqrt{2} = 1.414213562\ldots, \quad \pi = 3.141592654\ldots$$

Este conjunto de números recibe el nombre de **números irracionales**, $\mathbb{I}$.

Números reales

$\mathbb{R}$: **Conjunto de números reales**

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Algunos Axiomas o Propiedades que caracterizam a los Números Reales.-

Dadas las operaciones usuales de **suma (+)** y **multiplicación ($\cdot$)** , se tiene:

1.- Axioma de Clausura

Para todo a y $b \in \mathbb{R}$, entonces $a + b \in \mathbb{R}$ y $a \cdot b \in \mathbb{R}$.

2.- Axiomas de Asociatividad

Para todo a, b y $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad (a\cdot b)\cdot c = a\cdot (b\cdot c)$$

Números reales

3.- Axiomas de Conmutatividad

Para todo a y $b \in \mathbb{R}$, entonces

$$a + b = b + a, \qquad a \cdot b = b \cdot a$$

4.- Axiomas de Distributividad

Para todo a, b y $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \qquad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

5.- Axiomas de Identidad

Para todo $a \in \mathbb{R}$, existen dos números distintos entre sí, cero (0) y uno (1), respectivamente, tales que

$$a + 0 = a, \qquad a \cdot 1 = a$$

0: **Elemento unidad para la suma.**

1: **Elemento unidad para la multiplicación.**

6.- Axiomas de Inverso

Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe otro elemento de $\mathbb{R}$; designado por $-a$ (**menos a** o **negativo de a**) tal que

$$a + (-a) = 0$$

Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, existe otro elemento de $\mathbb{R}$; designado por $\frac{1}{a}$ o a^{-1} (**recíproco de a**) tal que

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \quad \text{o} \quad a \cdot a^{-1} = 1$$

$\mathbb{R}$, provisto de estos axiomas, constituye lo que se denomina **cuerpo conmutativo** (**cuerpo**).

Números reales

Observación Si a y b están en $\mathbb{R}$, entonces $a \cdot b$ se escribe como ab.

A partir de las propiedades de cuerpo se puden obtener algunos resultados.

Teorema Para todo a, b y $c \in \mathbb{R}$, entonces

1.- $a = b \iff a + c = b + c$

2.- $ac = bc, \; c \neq 0, \implies a = b$

Proposición El elemento indentidad para la suma, 0, es único en $\mathbb{R}$. El elemento indentidad para la multiplicación, 1, es único en $\mathbb{R}$.

Proposición Para todo $a \in \mathbb{R}$, $-a$ es único. Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, a^{-1} es único.

Números reales

Definición La expresión $a - b$ es equivalente a $a + (-b)$ y se llama **diferencia** de a y b.

Definición La expresión $\dfrac{a}{b}$, con $b \neq 0$, es equivalente a $a\dfrac{1}{b}$ y se llama **cociente** de a por b.

Teorema Para todo a y b en $\mathbb{R}$, $a \neq 0$, existe un único c en $\mathbb{R}$ tal que

$$ac = b$$

con $c = \frac{b}{a}$; es decir c es el cociente de b por a.

Números reales

Teorema Para todo a y b en $\mathbb{R}$, se tiene:

1.- $-(-a) = a$

2.- $(a^{-1})^{-1} = a, \quad a \neq 0$

3.- $-(a+b) = -a - b$

4.- $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

Teorema Para todo a y b en $\mathbb{R}$, se tiene:

1.- $ab = 0 \iff a = 0$ o $b = 0$

2.- $\dfrac{a}{b} = 0 \iff a = 0,$ si $b \neq 0$

3.- $(-a)b = a(-b) = -(ab)$

4.- $(-a)(-b) = ab$

Números reales

Dados los números reales a y b, la expresión $a < b$ significa $\boldsymbol{a}$ menor que $\boldsymbol{b}$; denotando de esta manera una **desigualdad**. Se puede escribir la misma desigualdad en sentido opuesto: $b > a$ y significa $\boldsymbol{b}$ mayor que $\boldsymbol{a}$.

Axiomas de Orden de los Números Reales

1.- Axioma de Tricotomía

Si a y b están en $\mathbb{R}$ entonces una y sólo una de las siguientes propociciones es verdadera:

$$a > b, \qquad a = b, \qquad b > a$$

2.- Axioma de Transitividad

Si a, b y c están en $\mathbb{R}$, entonces

$$a < b \quad \text{y} \quad b < c \quad \Longrightarrow \quad a < c$$

3.- Axioma de Adición

Si a, b y c están en $\mathbb{R}$, entonces

$$a < b \quad \Longrightarrow \quad a + c < b + c$$

4.- Axioma de Multiplicación

Si a, b y c están en $\mathbb{R}$, entonces

$$a < b \quad \text{y} \quad c > 0 \quad \Longrightarrow \quad ac < bc$$

Dado que los elementos de $\mathbb{R}$ cumplen estos axiomas, se dice que $\mathbb{R}$ es un **conjunto ordenado** o un **cuerpo ordenado**.

Definición Un número real a se dice **positivo** si $a > 0$ y **negativo** si $a < 0$.

Observaciones

- En el axioma de tricotomía, poniendo $b = 0$, las proposiciones quedan:

$$a > 0, \quad a = 0, \quad a < 0$$

- Si a es número real negativo; $a < 0$, entonces $-a > 0$; es decir, $-a$ es un número real positivo.
- Por el axioma de tricotomía un número real a no puede ser un número real positivo ni un número real negativo a la vez.

Números reales

- El conjunto de números reales cumple los siguientes axiomas:

1.- Compatibilidad de la Suma: a y b en $\mathbb{R}$, entonces

$$a > 0 \quad \wedge \quad b > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a + b > 0$$

2.- Compatibilidad de la Multiplicación: a y b en $\mathbb{R}$, entonces

$$a > 0 \quad \wedge \quad b > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad ab > 0$$

Números reales

Teorema Sean a, b, c y d en $\mathbb{R}$.

1.- i) $a > b \iff -a < -b$

ii) $a < b \iff -a > -b$

2.- $a > 0 \implies -a < 0$

3.- $a < b$ y $c < 0 \implies ac > bc$

4.- $a < b$ y $c < d \implies a + c < b + d$

5.- a, b, c y d números reales positivos, entonces

$$a > b \text{ y } c > d \quad ac > bd$$

6.- $a \neq 0$, $a^2 > 0$ ($1 = 1^2 > 0$, en particular).

7.- $a > 0 \implies a^{-1} > 0$

8.- $a > 0,\ b > 0$ y $a < b \iff \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$

9.- $a \neq 0,\ b \neq 0$

- $ab > 0 \iff (a > 0 \ \wedge \ b > 0) \ \vee \ (a < 0 \ \wedge \ b < 0)$
- $ab < 0 \iff (a > 0 \ \wedge \ b < 0) \ \vee \ (a < 0 \ \wedge \ b > 0)$

Definición Si a y b son dos números reales, la expresión $a \leq b$ es tal que

$$a < b \quad \vee \quad a = b$$

y significa que $\boldsymbol{a}$ es menor que $\boldsymbol{b}$ o $\boldsymbol{a}$ es igual a $\boldsymbol{b}$ o equivalentemente $\boldsymbol{b}$ es mayor a $\boldsymbol{a}$ o $\boldsymbol{b}$ es igual a $\boldsymbol{a}$ y en este último caso se escribe $b \geq a$.

Teorema La relación $\leq$ satisface las siguientes propiedades

a) Propiedad Reflexiva

$$\forall\, a \in \mathbb{R},\quad a \leq a$$

b) Propiedad Antisimétrica

$$\forall\, a \text{ y } b \in \mathbb{R};\quad a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$$

c) Propiedad Transitiva

$$\forall\, a,\ b,\ \text{y } c \in \mathbb{R};\quad a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$$

d) $\forall\, a \text{ y } b \in \mathbb{R};\quad a \leq b$ o bien $b \leq a$

RAÍCES Y POTENCIAS RACIONALES.

Definición Todo número real a cuya potencia de exponente n; número natural, es igual al número real b y que satisface la ecuación $a^n = b$ se llama una **raíz n-ésima** de b.

Observación: En general, a excepxión del cero, todo número real tiene exactamente n raíces n-ésima, si bien la mayoría o todas no son números reales.

Definición La **raíz n-ésima principal** de un número real positivo es la raíz positiva. La **raíz n-ésima principal** de un número real negativo es la raíz negativa, si n es un número impar.

Números reales

Observación: Si n es un número par y el número real es negativo, la raíz principal no se define porque no tiene un valor real.

El **símbolo** $b^{1/n}$ o $\sqrt[n]{b}$ significa la **raíz n-ésima principal** de b:

n: **índice**, b: **cantidad subradical de la raíz**

En particular si $b = 0$ entonces $0^{1/n} = 0$ y para $n = 2$, $b^{1/2} = \sqrt{b}$.

Si p y q son números enteros no negativos, con $q \neq 0$, y b un número real, se define:

$$(b^{1/q})^p = b^{p/q}$$

Esta igualdad nos dice que $b^{1/q}$ es una raíz p-ésima de $b^{p/q}$ y que $b^{p/q}$ es la potencia de **exponente** p de la raíz q-ésima principal de b.

Números reales

De lo anterior, para $b \in \mathbb{R}$, p y q números enteros no negativos, con $q \neq 0$, se tiene que:

$$\underbrace{b^{p/q} \cdot b^{p/q} \cdots b^{p/q}}_{\text{q factores}} = b^p$$

De modo que $b^{p/q}$ es también la raíz q-ésima principal de b^p; o sea:

$$(b^p)^{1/q} = b^{p/q}$$

Por notación, las potencias anteriores pueden escribirse como:

$$(b^p)^{1/q} = \sqrt[q]{b^p}, \quad (b^{1/q})^p = (\sqrt[q]{b})^p$$

Números reales

Definición Para cualquier $a \in \mathbb{R}$ y cualquier número racional positivo u,

$$a^{-u} = \frac{1}{a^u}$$

De las definiciones anteriores, se obtiene el siguiente resultado:

Teorema Para a y b números reales; u y v números racionales, se tiene:

1.- $a^u a^v = a^{u+v}$

2.- $(ab)^u = a^u b^u$

3.- $(a^u)^v = a^{uv}$

4.- $\dfrac{a^u}{a^v} = a^{u-v}$

5.- $\dfrac{a^u}{b^u} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^u, \quad b \neq 0$

VALOR ABSOLUTO E INECUACIONES.

Definición El **valor absoluto** de un número real a, denotado por $|a|$, se define como:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a > 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \\ 0, & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

Teorema

- Para todo $a \in \mathbb{R}$
  $i)\ -|a| \leq a \leq |a|, \quad ii)\ |a| = |-a|, \quad iii)\ |a|^2 = |a^2| = a^2$

Números reales

- Si a y b son dos números reales cualquiera, entonces

$$|ab| = |a||b|$$
$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0$$

- Si a y b son dos números reales cualquiera, entonces

$$|a+b| \leq |a| + |b|, \qquad (\textbf{desigualdad triangular})$$

- Si a y b son dos números reales cualquiera, entonces

$$\Big| |a| - |b| \Big| \leq |a-b|$$

Plano cartesiano

- Si a y b son dos números reales cualquiera:

$$|a| = |b| \quad \text{entonces} \quad a = b \ \lor \ a = -b$$

$$a = b \ \lor \ a = -b \quad \text{entonces} \quad |a| = |b|$$

- Si a y b son dos números reales con $b > 0$;

$$|a| \leq b \quad \text{entonces} \quad -b \leq a \leq b$$

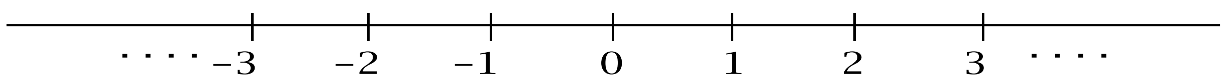
$$-b \leq a \leq b \quad \text{entonces} \quad |a| \leq b$$

- Si $b > 0$:

$$|a| \geq b \quad \text{entonces} \quad a \geq b \ \lor \ -b \geq a$$

Números reales

Desde un punto de vista geométrico asociamos el **eje horizontal** a la totalidad de los números reales. A la derecha del origen 0 están los números positivos y a la izquierda los números negativos. A cada número real le corresponderá un punto del eje; denominado **recta numérica** o **recta real**, y recíprocamente cada punto de esta recta representará un número real.



Números reales

La desigualdad $a < b$ se interpreta como $\boldsymbol{a}$ está a la izquierda de $\boldsymbol{b}$

Definición Si a y b son dos números reales con $a < b$ entonces el **intervalo abierto** de a y b es el conjunto de todos los números reales que son mayores que a y menores que b. Un número real x está en dicho intervalo si ambas desigualdades

$$a < x \quad \wedge \quad x < b$$

son verdaderas. Una manera compacta de escribir esto es

$$a < x < b$$

a y b: **extremos** del intervalo

Números reales

Definición Si a y b son dos números reales con $a < b$ entonces el **intervalo cerrado** de a y b es el conjunto de todos los números reales que son mayores o iguales que a y menores o iguales que b. Un número real x está en dicho intervalo si ambas desigualdades

$$a \leq x \quad \wedge \quad x \leq b$$

son verdaderas. Una manera compacta de escribir de esto es

$$a \leq x \leq b$$

Definición Sean a y b en $\mathbb{R}$, con $a < b$. Un intervalo que contiene al extremo b pero no contiene al extremo a se dice **intervalo semiabierto a la izquierda** de a y b. Un número real x está en dicho intervalo si ambas desigualdades $a < x$ y $x \leq b$ son verdaderas. Una manera compacta de escribir de esto es

$$a < x \leq b$$

Números reales

Definición Sean a y b en $\mathbb{R}$, con $a < b$. Un intervalo que contiene al extremo a pero no contiene al extremo b se dice **intervalo semiabierto a la derecha** de a y b. Un número real x está en dicho intervalo si ambas desigualdades $a \leq x$ y $x < b$ son verdaderas. Una manera compacta de escribir de esto es

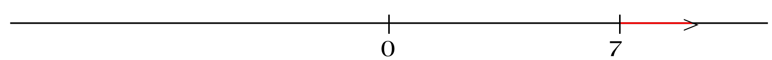
$$a \leq x < b$$

Para representar intervalos se emplean paréntisis y corchetes de la siguiente forma:

- (a, b) o $]a, b[$: intervalo abierto de a y b.
- $[a, b]$: intervalo cerrado de a y b.
- $(a, b]$ o $]a, b]$: intervalo semiabierto a izquerda de a y b.
- $[a, b)$ o $[a, b[$: intervalo semiabierto a derecha de a y b.

Números reales

Se puede generalizar la idea de intervalo para incluir algunos casos especiales:
Por ejemplo, el considerar todos los números mayores que 7; puede interpretarse como el intervalo que se extiende al infinito a la derecha a partir de 7:



Por supuesto que infinito no es un número real; empleando la notación $(7, \infty)$ o $]7, \infty[$ para representar todos los números mayores que 7.

Lo anterior puede escribirse también: todos los números x tales que:

$$x > 7 \quad \wedge \quad x < \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad 7 < x < \infty$$

Análogamente, la notación $(-\infty, 12)$ o $]-\infty, 12[$ representará todos los números menores que 12, lo que también puede escribirse como:.

$$x > -\infty \quad \wedge \quad x < 12 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\infty < x < 12$$

La ecuación de primer grado

$$3x + 7 = 19$$

tiene solución única $x = 4$. La ecuación cuadrática

$$x^2 - x - 2 = 0$$

tiene dos soluciones: $x = -1$, $x = 2$.

Números reales

La solución de una desigualdad o inecuación con una indeterminada x es el conjunto de todos los números reales para los cuales la desigualdad es verdadera; llamado **conjunto solución**.