

Listado 3
MATEMÁTICA I (529103)

1. Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{4, 8\}$. Encontrar:
 - a) $A \times C$ b) $C \times (A \cap B)$ c) $(A \cup B) \times C$
2. En los siguientes casos diga porque la terna (G, A, B) no constituye una relación.
 - a) $A = \{1, 3, 5, -2, -3, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 $G = \{(1, 1), (3, 2), (-2, 5), (5, -2), (1, 5), (-3, 5)\}$
 - b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
 $G = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (3, 3), (1, 1), (4, 4), (5, 5), (2, 4), (6, 6), (3, 6)\}$
 - c) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$
 $G = \{(x, y) / x \in A, y = 2x - 5\}$
3. Dadas las relaciones R , de A en B , diga cuál de ellas es función y cuál no. Justificar.
 - a) $R = \{(a, 1), (b, 3), (c, 5), (d, 1)\}$, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.
 - b) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$.
 - c) $R = \{(a, 2), (b, 4), (c, 5), (d, 7), (a, 8)\}$, $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$,
 $B = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
 - d) $R = \{(x, y) / x \in A, y = 3x + 2\}$, $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{N}$.
 - e) $G = \{(x, y) / 2x + 3y = 6\}$, $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Q}$
 - f) $G = \{(x, y) / 2x + y^2 = 8\}$, $A = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 4\}$, $B = \mathbb{R}$
4. En cada una de las relaciones $R = (G, A, B)$ que se dan a continuación, obtenga la relación inversa R^{-1} .
 - a) $A = \{x, y, z\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
 $G = \{(y, -2), (z, 0), (x, 1), (y, 0), (z, -2), (x, 2), (y, 1)\}$
 - b) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$
 $G = \{(x, y) / y \text{ es múltiplo de } 6\}$
 - c) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R} - I$; donde, $I = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x < 5\}$
 $G = \{(x, y) / y = 2x^2 + 5\}$

5. Determinar dominio, codominio y recorrido de la función f , para $f : A \rightarrow B$, en cada uno de los casos siguientes, según el gráfico G , el conjunto A y el conjunto B ,

a) $G = \{(10, -3), (20, -1), (30, -1), (40, 0), (50, 3)\}$

$$A = \{10, 20, 30, 40, 50, \}, \quad B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

b) $G = \{(\text{Aguilar}, 45), (\text{Barrientos}, 65), (\text{Castro}, 58), (\text{Fica}, 41), (\text{Inostroza}, 35), (\text{Zárate}, 20)\}$

$$A = \{\text{Aguilar}, \text{Barrientos}, \text{Castro}, \text{Fica}, \text{Inostroza}, \text{Zárate}\}, \quad B = \{20, 35, 41, 45, 65\}$$

c) $G = \{(x, y) : y = -5x + 3\}$

$$A = \mathbb{N}, \quad B = \mathbb{Z}$$

6. Determine el dominio más grande en \mathbb{R} y recorrido correspondiente de las funciones dadas por las siguientes expresiones:

a) $f(x) = 5x - 10$ b) $g(x) = \sqrt{3x - 2}$ c) $h(s) = \sqrt{6s^2 - 24}$

d) $f(x) = \frac{4}{(x+2)(x-3)}$ e) $\varphi(t) = \frac{1}{t^2 + 3}$

7. Determinar, en cada uno de los casos, si las funciones f y g definidas a continuación son iguales.

a) $f : A \rightarrow \mathbb{R}, g : B \rightarrow \mathbb{R}. \quad A = \mathbb{Z}, \quad B = \{x/x \in \mathbb{Z}\}$

$$f(x) = x^2 + 3x, \quad g(s) = 2s^4 + 3s^2$$

b) $f : A \rightarrow \mathbb{R}, g : B \rightarrow \mathbb{R}. \quad A = \mathbb{R}, \quad B = \{x \in \mathbb{R}/x \neq -1 \wedge x \neq 1\}$

$$f(x) = 3x^3 + 5x - 1, \quad g(x) = 3x^3 + 5x - 1$$

c) $f : A \rightarrow \mathbb{R}, g : B \rightarrow \mathbb{R}. \quad A = \mathbb{R}, \quad B = \mathbb{R}$

$$f(x) = (2x^2 + 3x)(x - 1), \quad g(u) = 2u^3 + u^2 - 3u$$

8. En los siguientes ejercicios, esquematizar el gráfico en el plano xy de la expresión dada. Obtener, si es posible, las intersecciones con los ejes x e y .

a) $2x = 5y^2 + 2$ b) $y^2 - x^2 = 9$ c) $y = \frac{1}{3x} - 2x$ d) $y = \sqrt{16 - x^2}$

9. Analizar si los gráficos de las siguientes funciones, con expresiones dadas y dominios correspondiente, son estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

a) $f(x) = -3x + 2$, $Dom(f) = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = 4x^2 + 10$, $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

c) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 27}$, $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : x < -3\}$.

d) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + s + 5$, $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$.

10. Se dice que la función f es:

- *par* si $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in Dom(f)$,
- *impar* si $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in Dom(f)$.

En los siguientes ejercicios, determinar si las funciones, cuyas expresiones están dadas, en su dominio mayor correspondiente, en \mathbb{R} , es par o impar.

a) $f(x) = 3y^2 + 2$ b) $g(x) = \frac{1}{3x} - 2x^3$ c) $h(x) = \sqrt{5 - x^2}$

11. a) Dadas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : X \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = x^2 + 3x + 4 \quad g(x) = -4x^3 + x$$

y $X = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -5\}$. Encontrar $f + g$ y fg .

- b) Dadas las funciones $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = \sqrt{1 + x} \quad h(x) = x^2 - 1$$

y $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\}$. . Encontrar fh y $\frac{f}{h}$.

- c) Dadas las funciones $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = \frac{\sqrt{25 - 9x^2}}{x - 1} \quad g(x) = 2x - 1$$

y $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq \frac{5}{3} \wedge x \geq -\frac{5}{3}, x \neq 1\}$. . Encontrar fg y $\frac{f}{g}$.

12. En cada uno de los siguientes casos, encontrar la función compuesta pedida.

- a) Obtener $g \circ f$, donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = 3 - x \quad g(x) = 6x^2 - 5x + 8$$

b) Obtener $r \circ h$, donde $r : B \rightarrow \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por:

$$r(x) = \sqrt{x-4} \quad h(x) = x^2 - 5$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 4\}$$

c) Obtener $f \circ g$, donde $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = \frac{8x}{x^2-9} \quad g(x) = \sqrt{x^2-16}$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -3, x \neq 3\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -4 \vee x \geq 4\}$$

13. Diga si las funciones de $A \subseteq \mathbb{R}$ en \mathbb{R} , definidas a continuación, son inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.

a) $g(s) = 4$ b) $f(x) = 4x - 1$ c) $h(s) = s^2 + 6s - 1$

d) $h(x) = \frac{2}{1-4x}$ e) $g(x) = \sqrt{1-4x}$ f) $g(x) = \sqrt{(x-1)(x-3)}$

14. Dadas las definiciones de las siguientes funciones, averiguar si son biyectivas.

a)

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ x &\rightarrow f(x) = x^2 + 10 \end{aligned}$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 10\}$$

b)

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x) = 12x - 5. \end{aligned}$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1 \wedge x \leq 1\}$$

c)

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x) = \sqrt{10-x}. \end{aligned}$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 10\}$$

15. Redefinir el dominio de las funciones con expresión dadas para que se transformen en funciones biyectivas.

a)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow B \\ x &\rightarrow f(x) = 2x^2 - 50. \end{aligned}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$$

b)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow B \\ x &\rightarrow f(x) = \sqrt[3]{x-8}. \end{aligned}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} / x < -8\}$$

16. Dadas el siguiente par de expresiones de funciones, en cada uno de los siguientes casos, verificar que una función es la inversa de la otra, suponiendo que las funciones tienen un dominio y codominio que la hacen biyectivas.

a) $f(s) = 2s + \frac{1}{4}$; $h(r) = \frac{4-r}{8}$.

b) $g(x) = \frac{5-3x^2}{4}$; $f(s) = \frac{1}{2}\sqrt{5-3s}$.

c) $f(x) = \frac{4x-1}{3x}$; $g(x) = \frac{1}{4-3x}$.

17. Definiendo dominio y codominio más grandes en el conjunto de los números reales, encontrar la inversa de las siguientes funciones con expresiones dadas.

a) $f(x) = -x^2 + 3x - 10$ b) $f(x) = \frac{x}{3x+2}$

c) $g(x) = -\sqrt{x+1}$ d) $h(s) = \frac{1}{3-s}$

18. Graficar las siguientes funciones lineales, en el plano coordenado xy .

a) $f(x) = -2x + 5$ b) $g(x) = \frac{3}{2}x + 4$ c) $f(x) = -x + \frac{2}{3}$

19. Una vasija contiene inicialmente 10 cm^3 de ácido y se empieza a vaciar más ácido dentro de ella. Cinco segundo después ella contiene 30 cm^3 . Si q representa la cantidad de ácido en la vasija y t el tiempo y se sabe que q varía respecto de t según la ecuación:

$$q = at + b$$

(a) Escriba la ecuación que relaciona q con t . Grafique la función.

(b) ¿Qué representan los valores de a y b ?

(c) Suponga que la capacidad de la vasija es un litro. ¿ En cuánto tiempo se llenará?

20. Cada kilo del alimento I tiene 10 g de carbohidrato y 5 g de proteínas y cada kilo del alimento II tiene 20 g de carbohidrato y 10 g de proteínas. Se supone que x kilos del alimento I se mezclan y kilos del alimento II. Los alimentos se combinan para producir una mezcla que contiene exactamente 250 g de carbohidrato y 150 g de proteínas.

a) Explique porque hay $10x+20y$ g de carbohidrato en la mezcla y por qué $10x+20y = 250$. Hallar una ecuación similar para la catidad de proteínas. Dibujar las gráficas de ambas ecuaciones.

b) ¿Dónde se cortan as dos gráficas obtenidas en a)? Interprete el significado de este punto de intersección.

21. Dadas las siguiente funciones cuadráticas, graficarlas en el plano coordenado xy .

a) $f(x) = 3x^2 + 6x$ b) $g(x) = x^2 - 10x + 20$ c) $f(x) = -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

22. Si se lanza un objeto verticalmente con una velocidad inicial de 50 metros por segundo, su altura (en metros) t segundos después está dada por la función H expresada como $H(t) = -16t^2 + 160t$.

a) Dibujar la gráfica de $H(t)$.

b) Utilice la gráfica de $H(t)$ para determinar cuando caerá el objeto al suelo.

c) Utilice la gráfica de $H(t)$ para estimar que altura alcanzará el objeto.

23. La siguiente función cuadrática tiene relevancia en ciertos estudios genéticos:

$$f(\lambda) = 2N\lambda^2 - 2(N - 1)\lambda - 1,$$

donde N es un parámetro que depende de las condiciones particulares estudiadas. En un experimento se observa que el valor mínimo de $f(\lambda)$ es -20. ¿ Cuánto debe valer N entonces ?