MATEMÁTICA I

525103-1

Primer Semestre 2016

CAPÍTULO I
Conjuntos

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Concepción

Conjuntos

DEFINICIONES, OPERACIONES Y PROPIEDADES.

Un **conjunto** puede ser considerado como una colección de objetos de cualquier especie, con la restricción de considerar solo a aquellos objetos que han sido descrito en forma suficientemente clara para que no haya duda acerca de que un cierto objeto pertenece o no al conjunto.

Ejemplos

1) El conjunto de alumnos que realiza el curso de Matemática I.
2) El conjunto de letras del alfabeto español.
3) El conjunto de los números enteros positivos menores que 10.
4) El conjunto de puntos sobre un segmento de recta.

Conjuntos

Si un objeto pertenece al conjunto, se dice que es un **miembro** o **elemento** del conjunto; de lo contrario no es un elemento del conjunto. Generalmente, se utilizan letras mayúsculas para denotar conjuntos y letras mimúsculas para denotar elementos. Ahora, si a es un elemento del conjunto A, se escribe:

$$a \in A \quad (\text{“}a \text{ pertenece a } A\text{”})$$

Si a no es elemento de A, esto se escribe como:

$$a \notin A$$

Dos métodos para describir un conjunto:

Método por extensión: Se determina el conjunto haciendo una enumeración de los elementos encerrado entre llaves.

Método por comprensión: Se determina el conjunto, encerrado entre llaves, con una frase descriptiva; conviniendo que son elementos del conjunto aquellos objetos, y sólo ellos, que poseen la propiedad descrita.

Subconjuntos

Toda vocal del alfabeto español es, claramente, una letra de este alfabeto. Si se denota por A al conjunto de todas las letras del alfabeto español y V al conjunto de las vocales, se dice que V está incluido o es subconjunto de A.

Definición El conjunto A es un **subconjunto** del conjunto B si todo elemento de A es elemento de B. Si B contiene elementos que no son de A, entonces se dice que A es un **subconjunto propio** de B.

Conjuntos

En la definición anterior se escribe:

$$A \subseteq B, \quad A \text{ subconjunto de } B$$

$$A \subset B, \quad A \text{ subconjunto propio de } B$$

Observación

- Todo conjunto puede ser considerado como subconjunto de si mismo; es decir, para todo conjunto A, $A \subseteq A$.
- Un conjunto puede tener un solo elemento.
- Un conjunto no puede tener ningún elemento. Un conjunto que no tiene elementos se llama **conjunto vacío** y es denotado por ϕ.

Conjuntos

Hay ocasiones en que los elementos de un conjunto son a su vez conjuntos. Para evitar decir conjunto de conjuntos se suele decir **familia de conjuntos** o **clase de conjuntos**.

Consideremos el conjunto A como;

$$A = \{x /\ x \text{ es una letra del alfabeto español}\}$$

Entonces, los conjuntos V y C, determinados por:

$$V = \{x /\ x \text{ es una vocal del alfabeto español}\}$$

$$C = \{x /\ x \text{ es una consonante del alfabeto español}\}$$

son subconjuntos de A. En esta situación A es un conjunto total de elementos en los cuales se está interesado. Tal conjunto, fijo en cualquier representación, se llama **conjunto universal** o **conjunto universo** (U).

Conjuntos

Definición En cualquier representación, el conjunto universal representa la totalidad de los miembros que pueden ser considerados como elementos de cualquier conjunto.

Definición La famlia de todos los subconjuntos de un conjunto A se llama **conjunto potencia** de A y se designa por $\mathcal{P}(A)$ o 2^A.

Definición Dos conjuntos A y B son **iguales**, $A = B$, si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Observación

- Si un conjunto contiene un elemento que no está en el otro conjunto, los dos conjuntos son distintos y se escribe $A \neq B$.

Conjuntos

Se ve que existen muchos conjuntos diferentes entre sí, como también de distintos tamaños. Un conjunto se dice **finito** si tiene un número finito de elementos; de lo contrario, se dice **infinito**

Definición Sea un conjunto A con cantidad determinada de elementos (número finito de elementos). Se define la **cardinalidad** de A como la cantidad de elementos distintos del conjunto y se denota por $n(A)$ o $|A|$.

Operaciones entre conjuntos

Sean $U = \{x /\ x \text{ es una letra del alfabeto español}\}, \quad V = \{a, e, i, o, u\}$.

Las letras restantes del conjunto V forman las letras consonantes del alfabeto.

Conjuntos

Definición El **complemento** de un conjunto A, con respecto de un conjunto universal U, es el conjunto de elementos de U que no están en A.

El complemento del conjunto A se designa por A' o A^c. Entonces

$$A^c = \{x \,/\, x \in U \ \wedge \ x \notin A\} \quad (\wedge: \text{ y})$$

Definición La **unión** de dos conjuntos A y B es el conjunto de los elementos que pertenecen al menos a uno de los conjuntos A y B; esto es, a A o B. Esta unión se simboliza por $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x \,/\, x \in A \ \vee \ x \in B\} \quad (\vee: \text{ o, no excluyente})$$

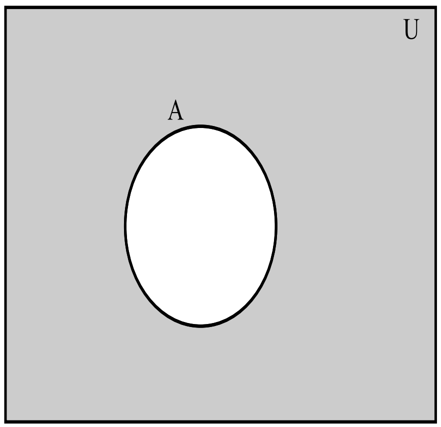
Definición La **intersección** de dos conjuntos A y B es el connjunto de los elementos que pertenecen tanto a A como a B. Esta intersección se simboliza por $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \ \wedge \ x \in B\}$$

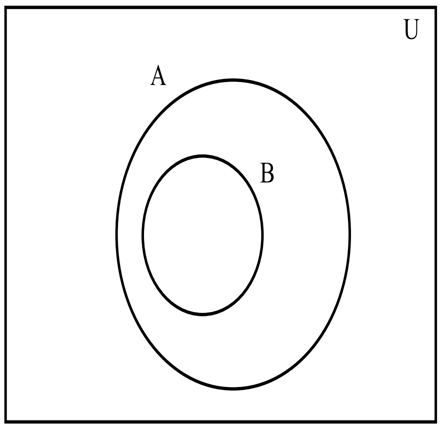
Definición Si A y B son dos conjuntos referido a un universo U, se llama **diferencia** de A y B al conjunto de los elementos que están en A y no pertenecen a B y se denota por $A - B$

$$A - B = \{x \in U \,/\, x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$$

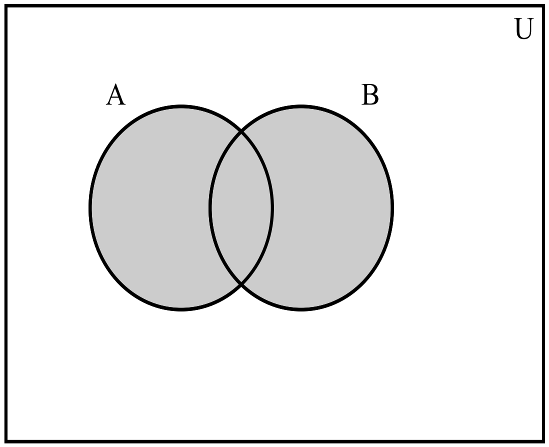
Los llamados **diagramas de Venn** se usan para representa gráficamente las operaciones entre conjuntos:



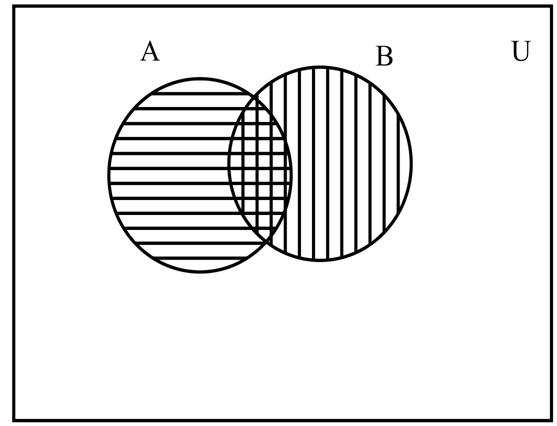
A^c



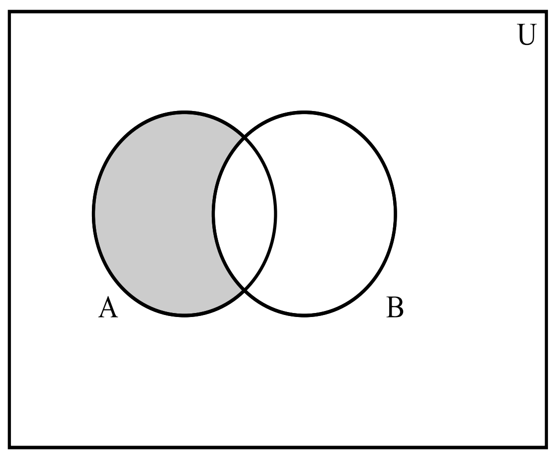
$B \subseteq A$



$A \cup B$

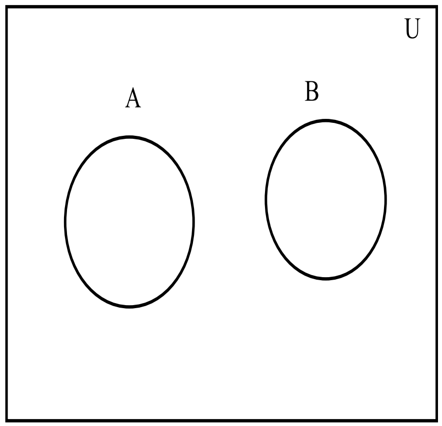


$A \cap B$

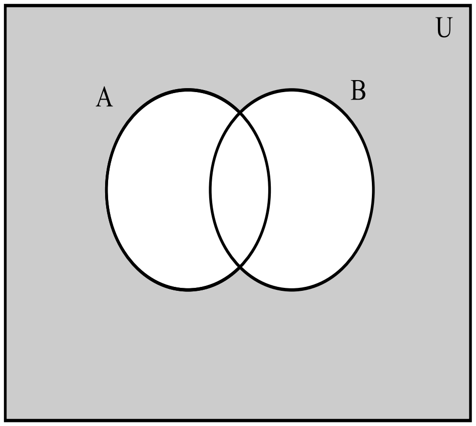


$A - B$

Conjuntos



$A \cap B = \phi$



$(A \cup B)^c$

Conjuntos

Propiedades Sean A, B y C conjuntos referidos a un universo U.

1.- $A \cup B$ y $A \cap B$ son conjuntos (**clausura**)

2.- $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$ (**conmutatividad**)

3.- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ y $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (**asociatividad**)

4.- $A \cup A = A$ y $A \cap A = A$ (**idempotencia**)

5.- $A \cup U = U$ y $A \cap U = A$

6.- $A \cup \phi = A$ y $A \cap \phi = \phi$

7.- $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$

8.- $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$

9.- $A \subseteq B$ entonces $A \cup B = B$

10.- $A \subseteq B$ entonces $A \cap B = A$

Aparte de estas propiedades, existen las propiedades **distributivas** de la unión con respecto de la intersección y de la intersección con respecto de la unión.

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Propiedades Sean A y B conjuntos referidos a un universo U.

1.- $(A^c)^c = A$

2.- $A \cup A^c = U$

3.- $A \cap A^c = \phi$

4.- $U^c = \phi$

5.- $\phi^c = U$

6.- $A \cap B^c = A - B$

7.- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

8.- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Observación Las propiedades 7 y 8 reciben el nombre de **Leyes de De Morgan**.

Definición Dos conjuntos, A y B, son **disjuntos** si y sólo si no contienen elementos comunes; es decir, $A \cap B = \phi$.

Conjuntos

En los conjuntos V (conjunto de las vocales del alfabeto español) y C (conjunto de las consonantes del alfabeto español), definidos anterinormente, ningún elemento de V es elemento de C, y viceversa. Esta mención da origen a la siguiente definición:

Definición Una **partición** de un conjunto P es una colección P_1, P_1,...,P_n de subconjuntos no vacíos, mutuamente disjuntos dos a dos, y cuya unión es P; es decir,

i) $P_i \neq \phi \quad \forall\, i = 1, 2, ...n.$

ii) $P_i \cap P_j = \phi \quad \forall\, i \neq j.$

iii) $P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_n = \bigcup_{j=1}^{n} P_j = P$

Conjuntos

CARDINALIDAD.

El número de elementos de un conjunto finito A se llama cardinalidad de A y se denota $|A|$.

Propiedades

- Si A y B son conjuntos disjuntos, entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

- Si A y B son conjuntos arbitrarios, entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

- Si A, B y C son conjuntos arbitrarios, entonces

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

.