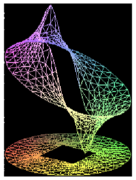
MATEMÁTICA I

525103-1

Primer Semestre 2016



CAPÍTULO III
Funciones (parte 1)

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Concepción

Funciones

FUNCIONES: CONCEPTOS FUNDAMENTALES Y GRÁFICAS, FUNCIÓN CRECIENTE, DECRECIENTE, PAR/IMPAR, OPERACIONES Y COMPOSICIÓN.

Definición Sean X y Y dos conjuntos no vacío, el **producto cartesiano** de los conjuntos X e Y, denotado por $X \times Y$, se define como

$$X \times Y = \{(x, y) \ : \ x \in X, \ x \in Y\};$$

donde, cada elemento (x, y) de dicho conjunto, recibe el nombre de **par ordenado**.

En un par ordenado (x, y) es fundamental el orden en que aparecen:

$$(x, y) = (t, z) \quad \Longleftrightarrow \quad x = t \ \wedge \ y = z$$

En genertal: $X \times Y \neq Y \times X$

Funciones

Definición Se llama **relación**, entre un conjunto X y un conjunto Y, a una terna ordenada

$$R = (G, X, Y);$$

donde, $G \subseteq X \times Y$. G se denomina el **gráfico** de R, X el **conjunto de partida** de R y Y el **conjunto de llegada** de R.

Si $(x, y) \in G$ se dice que x está relacionado con y a través de $\boldsymbol{R}$ o que $\boldsymbol{R}$ hace corresponder a x el elemento y. Esto es:

$$xRy \iff (x, y) \in G$$

Definición Sea $R = (G, X, Y)$ una relación se llamará **relación inversa** de R a la relación $R^{-1} = (G^{-1}, Y, X)$ de Y en X, donde

$$G^{-1} = \{(x, y) \,/\, (y, x) \in G\} \quad (\textbf{gráfico inverso de } G)$$

Funciones

Si una realción es tal que a cada elemento x de X se le asocia un único elemento y de Y, dicha relación pasa a llamarse una **función**.

Definición Una **función** f se define como una relación

$$f = (G, X, Y)$$

con la particularidad de que cada elemento de X debe estar relacionado con uno y sólo un elemento de Y.

Observaciones

1.- En una función no pueden aparecer dos pares ordenados diferentes, que tengan el mismo primer elemento.

2.- Todas las funciones son relaciones pero algunas relaciones no son funciones.

Funciones

En los modelos matemáticos (representaciones matemática de un fenómeno real) las relaciones significativas suelen representarse por medio de funciones.

Con la notaciones dadas, una función $f = (G, X, Y)$ se escribe como

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ x &\longrightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

$f(x)$: $\boldsymbol{f}$ de $\boldsymbol{x}$ o valor de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x}$

La notación $y = f(x)$ significa que $x \in X$ se asocia con un único elemento $y \in Y$ mediante f y se dice que y es la **imagen** de x por f y $(x, f(x))$ pertenece al gráfico G.

f es función entonces $x_1 = x_2 \implies f(x_1) = f(x_2)$

Funciones

Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función de X en Y, entonces:

X: **dominio** de f $(Dom(f))$ Y: **codominio** de f $(Cod(f))$.

El subconjunto de Y formado por tados las imágenes de las x en X se llama **recorrido** o **rango** de f $(Rec(f)$ o $Im(f))$.

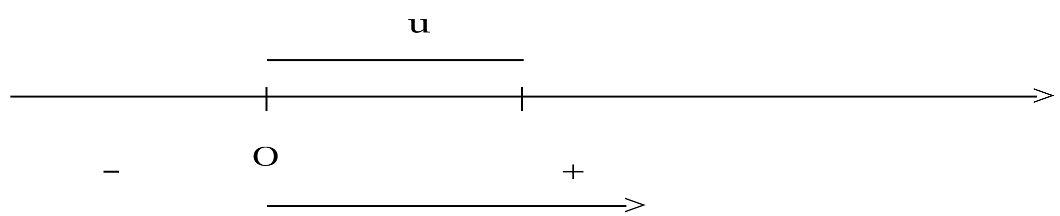
Definición Dos funciones $f = (F, A, B)$ y $g = (G, C, D)$ son **iguales** si tienen iguales sus gráficos, sus conjuntos de llegada y conjuntos de partida. Es decir:

$$f = g \iff (F = G,\ A = C,\ B = D)$$

La definición anterior también se puede escribir de la siguiente manera: Sea $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow D$, entonces:

$$f = g \iff (A = C,\ B = D,\ f(x) = g(x)\ \forall\ x \in A)$$

Sistema Cartesiano de Coordenadas



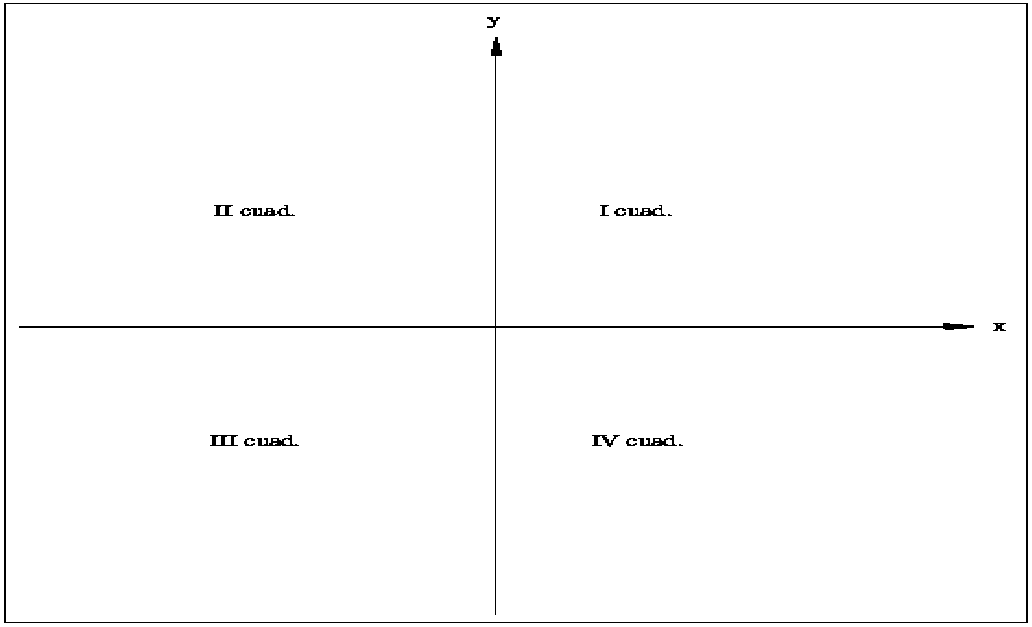
Recta orientada con un punto O elegido como **origen**, una unidad de magnitud u y un sentido positivo. Esto corresponde a un **sistema de coordenadas** en una **dimensión**.

A cada punto sobre la recta le corresponde un número real, que representa la distancia desde el origen al punto, y a cada número real le corresponde un punto sobre la recta.

Sean, ahora, dos sistema de coordenadas en una dimensión tal que sus orígenes coinciden y que son perpendiculares:

Sistema horizontal: **eje** x

Sistema vertical: **eje** y



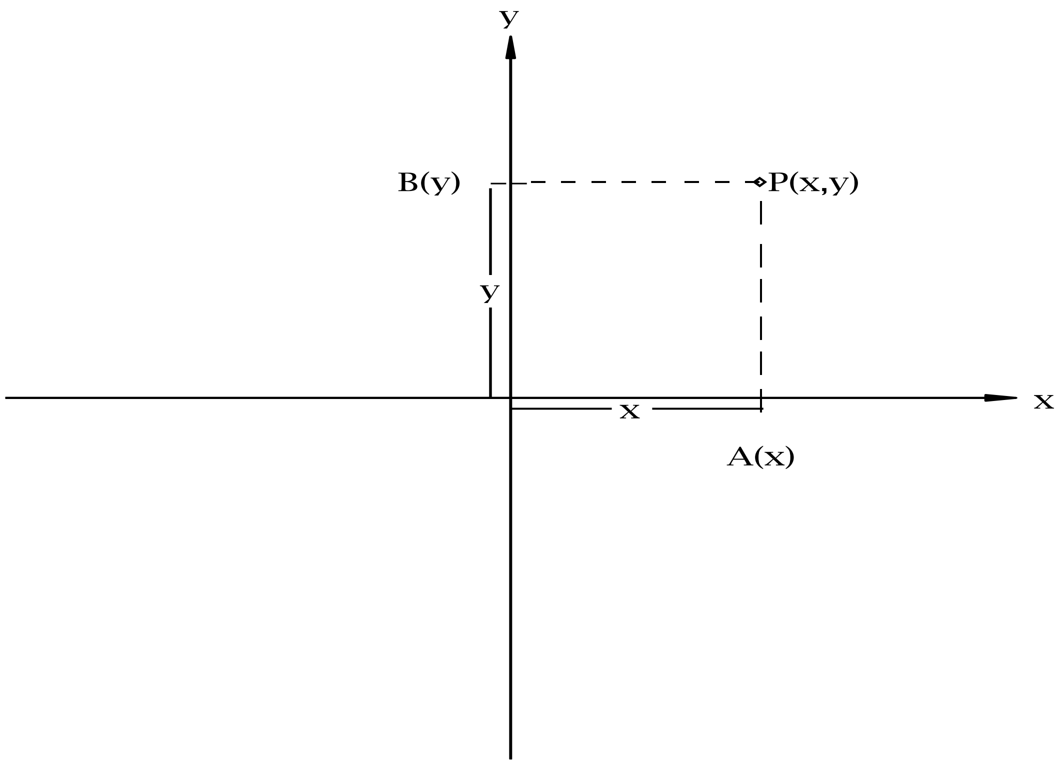
Funciones

Los dos ejes coordenados dividen al plano en cuatro partes llamadas **primer cuadrante**, **segundo cuadrante**, **tercer cuadrante** y **cuarto cuadrante**. Los signos de las coordenadas según el cuadrante en que se encuentre el punto correspondiente están dados en la siguiente tabla:

cuadrante	coordenada x	coordenada y
I	$+$	$+$
II	$-$	$+$
III	$-$	$-$
IV	$+$	$-$

Funciones

Sea P un punto del plano.



Desde P se trazan líneas perpendiculares a ambos ejes, determinando así los puntos $A(x)$ y $B(y)$.

Funciones

$A(x)$ está en el eje x y determina la distancia del origen de A.

$B(y)$ está en el eje y determina la distancia del origen de B.

Así, el punto P queda caracterizado por los números reales x e y. Se dice que las **coordenadas** de P son x e y, y se denota como $P(x, y)$.

x : **abscisa** de P

y : **ordenada** de P

De esta manera, cada punto del plano queda repesentado por un par de números reales (x, y).
Plano cartesiano:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \, / \, x \in \mathbb{R} \;\wedge\; y \in \mathbb{R}\}$$

Funciones

Si la función $f : A \to B$; donde $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$, se dice que es una **función real de dominio real** y en este caso la función f es un conjunto de pares ordenados de números reales, es decir:

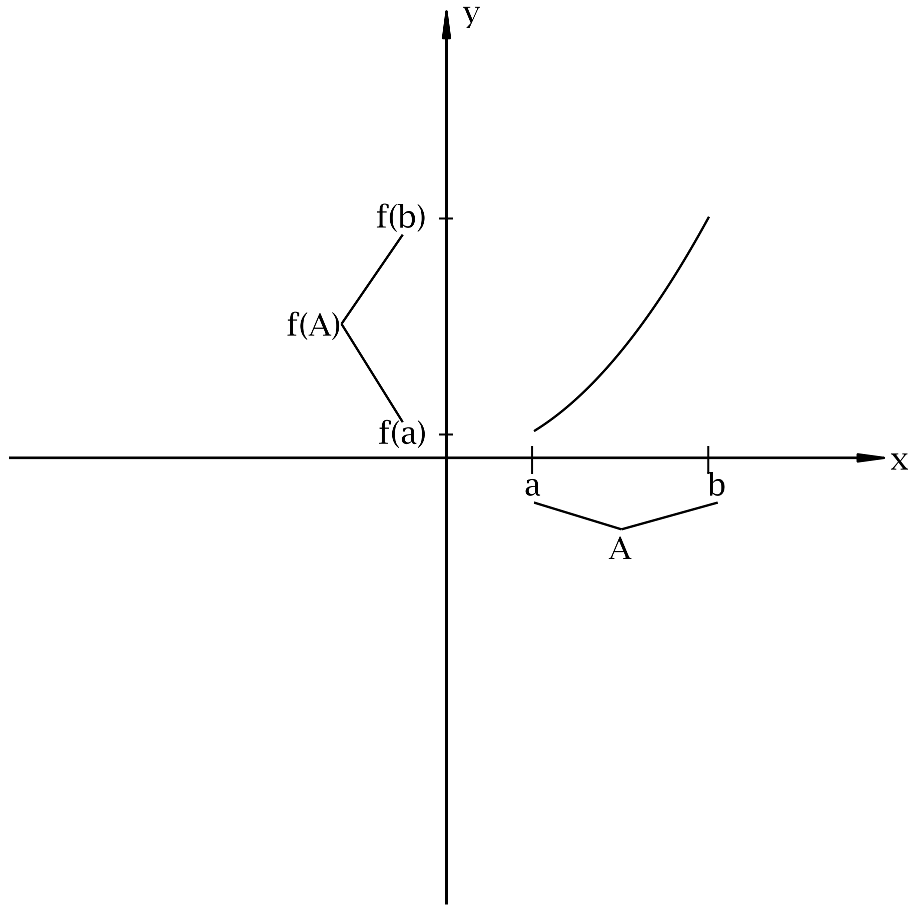
$$f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad ((x, f(x)))$$

Si se dibujaran todos los puntos de f en el plano cartesiano aparecería en este una línea, que generalmente se denomina como **curva** y constituye la **gráfica** de la función.

Ahora, como en la práctica, no es posible dibujar todos los puntos de una función, basta dibujar algunos puntos en el plano y unirlos mediante una línea y así obtener una aproximación buena de la gráfica de la función.

Funciones

gráficamente:

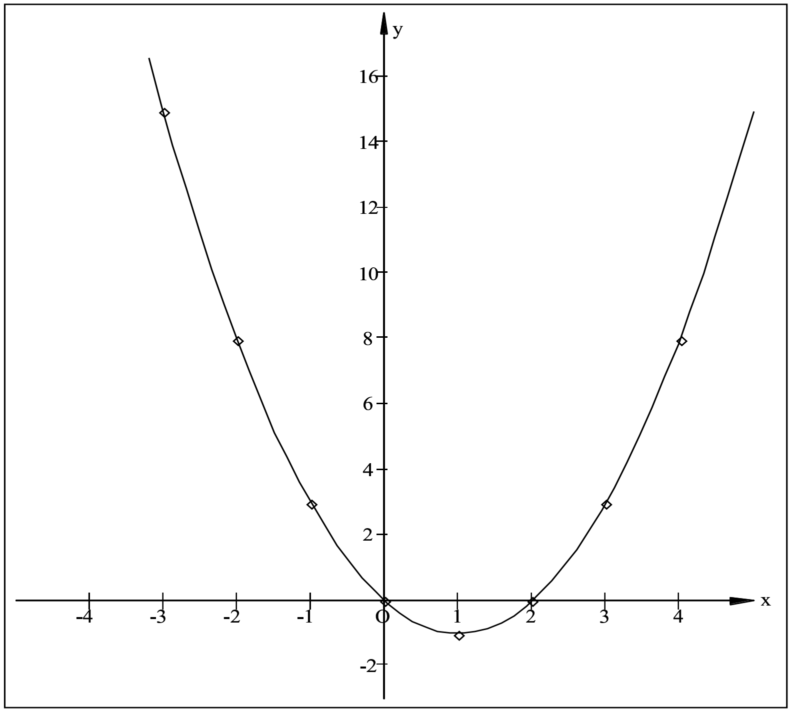


Dominio: A, Recorrido: $f(A)$

Funciones

Por ejemplo, para construir el gráfico dada por la ecuación $y = x^2 - 2x$, se construye una tabla de valores para los pares (x, y) o $(x, f(x))$:

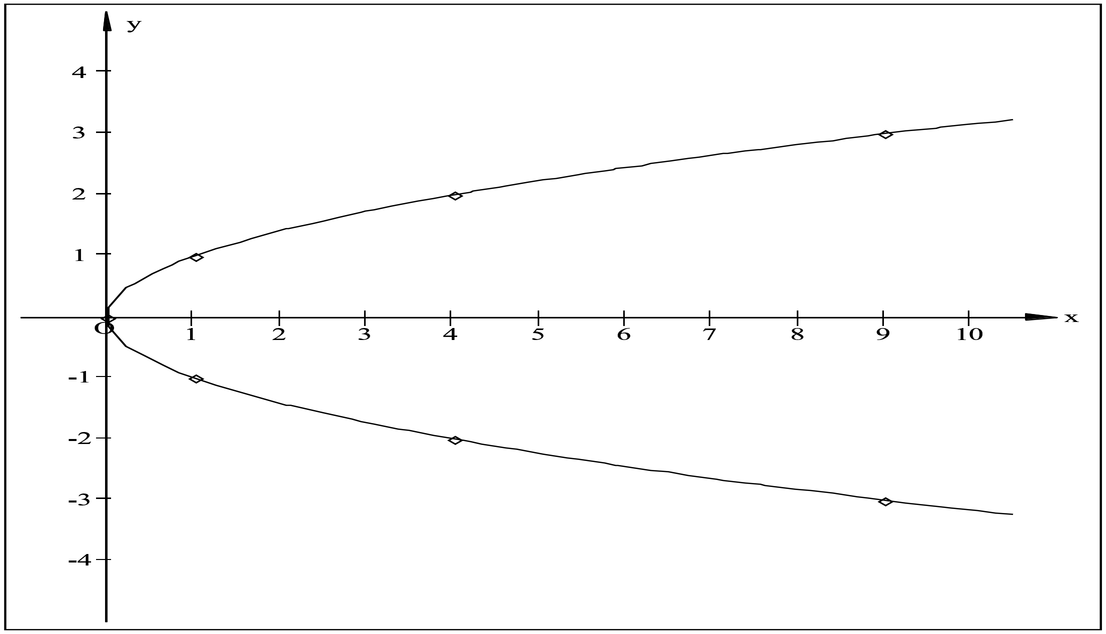
x	0	1	2	3	4	-1	-2	-3
y	0	-1	0	3	8	3	8	15



La ecuación $x = y^2$, se tiene la siguiente tabla:

x	0	1	4	9
y	0	± 1	± 2	± 3

Su gráfica es la siguiente:



Funciones

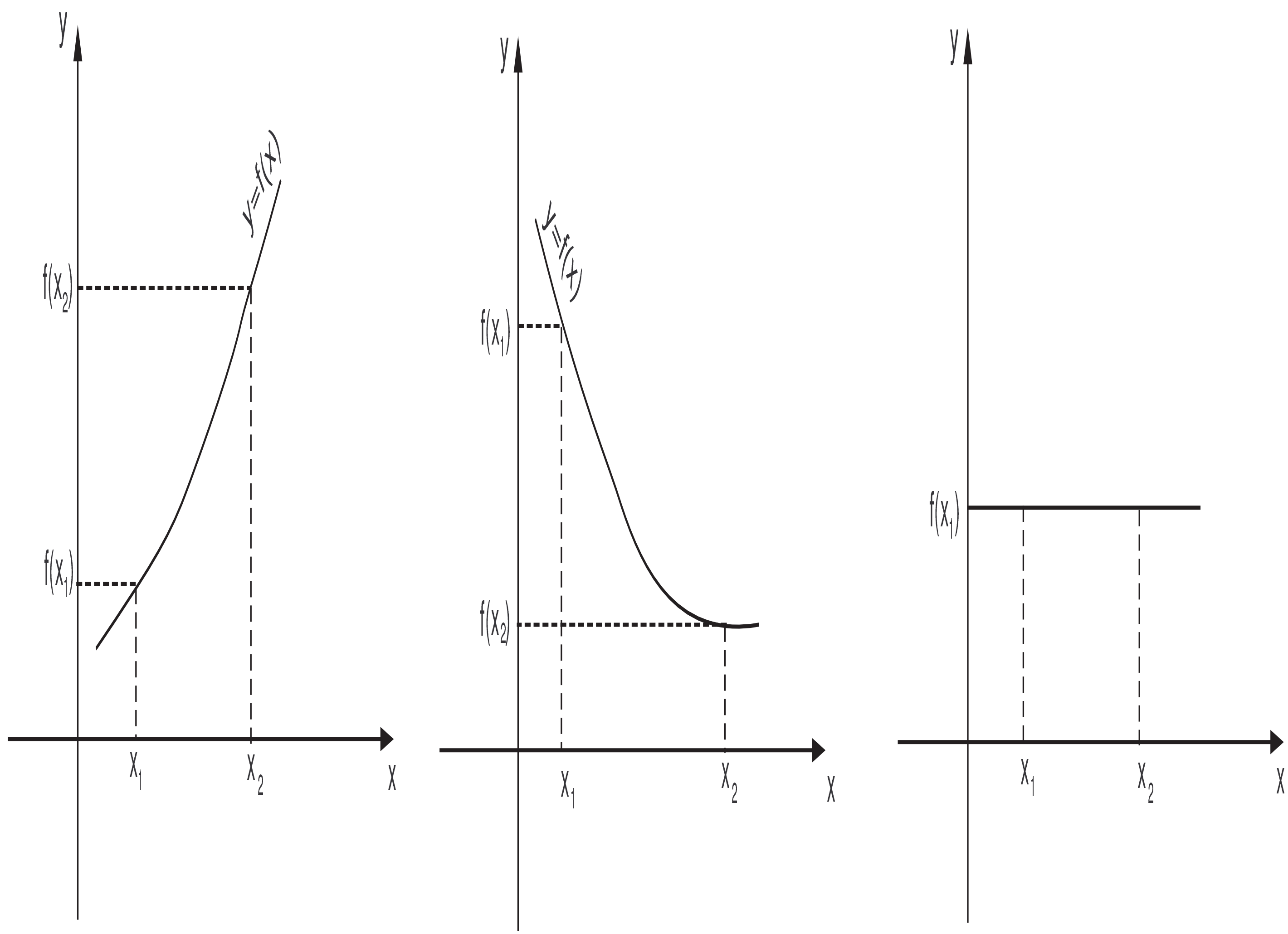
Definición Sea f una función definida en un intervalo I y sean x_1 y x_2 dos números reales cualquiera que están en I.

i) f es **creciente** en I si $f(x_1) < f(x_2)$, siempre que $x_1 < x_2$.

ii) f es **decreciente** en I si $f(x_1) > f(x_2)$, siempre que $x_1 < x_2$.

iii) f es **constante** en I si $f(x_1) = f(x_2)$, para todo x_1, x_2 en I.

Funciones



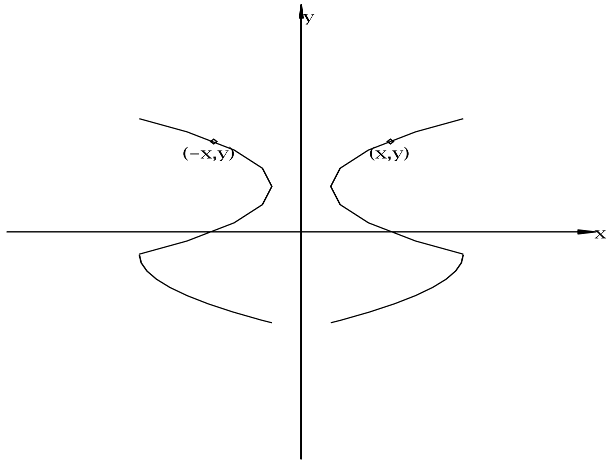
creciente decreciente constante

Definición (Funciones Par e Impar). Una función

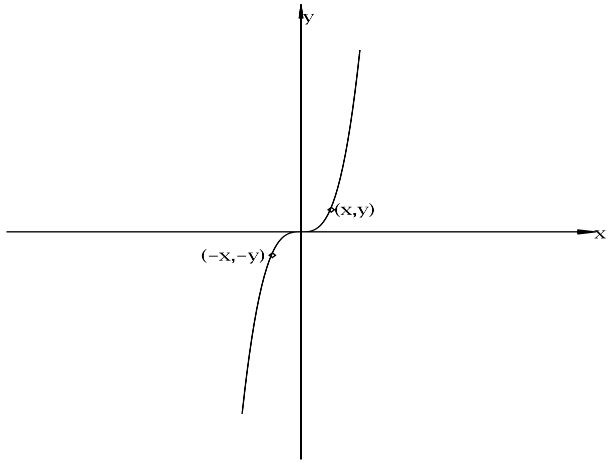
$$f : X = Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = f(x)$$

se dice :

- **Par** si y sólo si, $\forall x \in X : -x \in X \quad \wedge \quad f(-x) = f(x)$Noticias
- **Impar** si y sólo si,$\forall x \in X : -x \in X \quad \wedge \quad f(-x) = -f(x)$



función par



función impar

Funciones

Definición (Operaciones con funciones)

Sean

$$f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad X = Dom(f) \cap Dom(g) \neq \emptyset.$$

Se define la función

- **Suma** $\boxed{f + g : X \to \mathbb{R}; \quad x \in X \mapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x).}$
- **Producto** $\boxed{fg : X \to \mathbb{R}; \quad x \in X \mapsto (fg)(x) = f(x)g(x).}$
- **Cuociente**
  $$\boxed{f/g : \{x \in X : g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}; \quad x \in X \mapsto (f/g)(x) = f(x)/g(x).}$$
- **Producto por escalar** ($\lambda \in \mathbb{R}$)
  $$\boxed{f + g : X \to \mathbb{R}; \quad x \in Dom(f) \mapsto (\lambda f)(x) = \lambda f(x).}$$

Definición (Función Compuesta)

Sean

$$\begin{aligned} f &: Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ g &: Dom(g) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ X &= \{x \in Dom(f)\ f(x) \in Dom(g)\} \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Se define la función g compuesta con f, $g \circ f$, como

$$\begin{aligned} f : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)). \end{aligned}$$