Otázky na skúšku ku predmetu *Fyzikálne základy počítačových hier*, letný semester 2021/2022

14. mája 2022, Martin Konôpka (`martin.konopka@stuba.sk`); otázky $56 - 62$ sformuloval doc. Bokes.

1. Napíšte
   (a) Niektorú z jednotiek ***dĺžky*** (akú na Slovensku bežne používame),
   (b) Základnú jednotku ***času***,
   (c) Niektorú z jednotiek ***rýchlosti***,
   (d) Jednotku vhodnú na vyjadrenie ***zrýchlenia***.
   *(Preberané v častiach **1.2, 1.3, 1.4.**)*

2. Napíšte
   (a) Čo je priamočiary pohyb?
   (b) Čo je rovnomerný priamočiary pohyb?
   (c) Čo je trajektória pohybu hmotného bodu?
   (d) Čo je dráha?
   *(Preberané v častiach **1.4.1, 1.5.1.**)*

3. Napíšte
   (a) Ako matematicky definujeme ***rýchlosť*** hmotného bodu pohybujúceho sa v smere osi x?
   (b) Ako matematicky definujeme ***zrýchlenie*** hmotného bodu pohybujúceho sa v smere osi x? *(Preberané v častiach **1.4.1, 1.4.2.**)*

4. Vyriešte príklad:
   Auto sa pohybovalo rovnomerne rýchlosťou veľkosti $25\,\mathrm{m/s}$. V čase spustenia stopiek (to je okamih $t = 0$) malo súradnicu $x_0 = -30\,\mathrm{m}$ a jazdilo po ceste smerom doprava (teda v smere osi x). Akú súradnicu má po 8,3 sekundách takej jazdy?
   Tento jeden príklad stačí vyriešiť číselne. Ak nemáte kalkulačku, výpočet netreba dotiahnuť do úplného konca.
   *(Preberané v časti **1.4.1.**)*

5. Pre **rovnomerný** priamočiary pohyb pozdĺž osi x napíšte matematické funkcie, ktorými vyjadríme
   (a) závislosť rýchlosti v_x od času,
   (b) závislosť súradnice x od času.
   Rýchlosť pohybu v_x a začiatočná súradnica x_0 sú dané.
   *(Preberané v časti **1.4.1.**)*

6. Napíšte (prípadne aj odvoďte), aká je pri rovnomerne **zrýchlenom** pohybe
   (a) závislosť rýchlosti v_x od času,
   (b) závislosť súradnice x od času.
   Pritom predpoklajte, že ide o pohyb v smere osi x. Dané je zrýchlenie a_x, začiatočná rýchlosť $v_x(0)$ a začiatočná súradnica $x(0)$.
   *(Preberané v časti **1.4.2.**)*

7. Riešte úlohu (voľný pád):
   Kameň padá z výšky h. Za aký čas a akou rýchlosťou dopadne? Odpor vzduchu zanedbajte. Tiažové zrýchlenie g považujte za dané. Riešte len všeobecne (bez dosadzovania nejakých čísiel).
   *(Preberané v časti **1.4.2.**)*

8. Riešte úlohu (zvislý vrh):
   Vyhodíme kameň do výšky rýchlosťou $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$, pričom ho z ruky vypustíme vo výške $h_0 = 2\,\mathrm{m}$. Ako vysoko vyletí, za aký čas sa tam dostane a za aký čas a akou rýchlosťou dopadne na zem? Odpor vzduchu zanedbajte. Tiažové zrýchlenie $g \doteq 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. Úlohu riešte všeobecne. Čísla dosadzovať netreba, sú to len ilustračné údaje.
   *(Preberané v časti **1.4.4.**)*

9. Uvažujte ***nerovnomerne*** zrýchlený priamočiary pohyb pozdĺž osi x. Dané je zrýchlenie $a_x(t)$ (ako funkcia času). Napíšte vyjadrenia pre rýchlosť $v_x(t)$ a súradnicu $x(t)$. Začiatočnú rýchlosť $v_x(0)$ a začiatočnú súradnicu

$x(0)$ považujte za dané (známe).
*(Preberané v časti **1.4.5.**)*

10. Riešte úlohu (vodorovný vrh):
Obrancovia hradu vrhnú z jeho veže kameň vodorovným smerom rýchlosťou $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$. Výška okna, z ktorej kameň vrhajú, je $h = 35\,\mathrm{m}$. Terén pod vežou v smere letu kameňa je vodorovný. Ako ďaleko kameň doletí a za aký čas dopadne? Odpor vzduchu považujte za zanedbateľný. Tiažové zrýchlenie $g \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. Úlohu riešte všeobecne a nakreslite aj obrázok. Čísla dosadzovať netreba, sú to len ilustratívne údaje.
*(Preberané v časti **1.5.2.**)*

11. Riešte úlohu (šikmý vrh):
Kameň je vrhnutý pod uhlom α voči terénu rýchlosťou veľkosti v_0. Predokladajte, že je vrhnutý z úrovne zeme (z výšky nula). Určte maximálnu dosiahnutú výšku počas letu, dobu letu (teda čas dopadu) kameňa a vzdialenosť, do ktorej dopadne. Predpokladajte, že odpor vzduchu je zanedbateľný. Nakreslite aj obrázok.
*(Preberané v časti **1.5.3.**)*

12. **Pohyb bodu po kružnici**: nech má polomer r, jej stred nech leží v počiatku súradnicovej sústavy (x, y) a uhlová poloha bodu na kružnici voči osi nech je vyjadrená uhlom φ. Veľkosť rýchlosti uvažujeme všeobecne, teda sa môže aj meniť s časom.
(a) Nakreslite príslušný obrázok.
(b) Napíšte vyjadrenia pre x, y pomocou r a φ.
(c) Definujte uhlovú rýchlosť ω.
(d) Vyjadrite v_x a v_y.
(e) Vyjadrite obvodovú rýchlosť pohybu v_φ.
(f) Vyjadrite a_x a a_y.
(g) Definujte uhlové zrýchlenie pohybu ε.
(h) Vyjadrite veľkosť celkového zrýchlenia (a).
(i) Identifikujte vo vyjadrení celkového zrýchlenia dve zložky:
1. ***Obvodové (tangenciálne)*** zrýchlenie $a_{||}$; vyjadrite ho pomocou uhlového zrýchlenia ε.
2. ***Dostredivé (normálové)*** zrýchlenie $a_\perp$; vyjadrite ho pomocou uhlovej rýchlosti (ω).
*(Preberané v časti **1.5.5.**)*

13. Uvažujte hmotný bod, ktorý sa rovnomerne pohybuje po kružnici a jeden obeh mu trvá čas T. Akú veľkosť má uhlová rýchlosť ω tohto pohybu? V akých jednotkách sa udáva?
*(Preberané v časti **1.5.5.**)*

14. Vektory:
(a) Napíšte definíciu skalárneho súčinu vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$ zvierajúcich uhol θ.
(b) Vyjadrite skalárny súčin pomocou karteziánskych zložiek.
(c) Definujte vektorový súčin vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$.
(d) Vyjadrite vektorový súčin pomocou karteziánskych zložiek.
(e) Napíšte definičnú formulu pre zmiešaný súčin vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
*(Preberané v časti **2.**)*

15. Vektory:
(a) Ako určíme veľkosť vektora, keď poznáme jeho karteziánske zložky?
(b) Ako vypočítame súčin skalára s vektorom?
*(Preberané v častiach **2.3**, **2.5.**)*

16. (a) Ako matematicky definujeme ***rýchlosť*** hmotného bodu (v zmysle vektora) vo všeobecnosti?
(b) Ako matematicky definujeme ***zrýchlenie*** hmotného bodu (v zmysle vektora) vo všeobecnosti?
*(Preberané v časti **2.2.**)*

17. Odvoďte formulu pre rozklad zrýchlenia (ako vektora) na tangenciálnu a normálovú zložku.
*(Preberané v časti **3.**)*

18. (a) Ako matematicky definujeme ***uhlovú rýchlosť*** ($\vec{\omega}$) v zmysle vektora?
(b) Ako matematicky definujeme ***uhlové zrýchlenie*** ($\vec{\varepsilon}$) v zmysle vektora?
*(Preberané v časti **3.1.**)*

19. Čo je inerciálna a čo neinerciálna vzťažná sústava? (Odpoveď napíšte slovne, bez formúl.)
*(Preberané v časti **4.**)*

20. Sformulujte
(a) Prvý Newtonov zákon (zákon zotrvačnosti),
(b) Druhý Newtonov zákon (zákon sily)
(c) Tretí Newtonov zákon (zákon akcie-reakcie).
*(Preberané v častiach **4.1, 4.2, 4.3.**)*

21. Rovnomerne klesajúci parašutista:
(a) Stručne slovne zdôvodnite, prečo klesá stálou rýchlosťou.
(b) Zakreslite obrázok skladania síl (tiažovej a odporovej) a vyjadrite toto skladanie aj stručnou vektorovou formulou.
(c) Nájdite formulu vyjadrujúcu rýchlosť klesania parašutistu.
(Daná je jeho hmotnosť m, plocha padáka S v smere kolmom na pohyb, hustota vzduchu ρ, veľkosť g tiažového zrýchlenia a koeficient aerodynamického odporu C).
*(Preberané v časti **4.4.**)*

22. Sánky na vodorovnej ceste:
Sú ťahané vodorovne konštantnou ťahovou silou $\vec{F}_1$. Presne oproti nej pôsobí konštantná sila šmykového trenia $\vec{F}_2$. Ťahová sila nech je väčšia než sila trenia. Hmotnosť sánok je m. Spravte rozbor síl pôsobiacich na sánky, uvážte, ako sa skladajú a určte, s akým zrýchlením sa sánky budú pohybovať.
*(Preberané v časti **4.4.**)*

23. Kocka ľadu na zľadovatenej ceste dole svahom:
Daný je uhol sklonu α a známa je veľkosť tiažového zrýchlenia g. Trenie zanedbáme.
(a) Nakreslite obrázok vrátane síl a ich skladania.
(b) Napíšte vektorovú rovnicu skladania síl.
(c) Určte veľkosť zrýchlenia, s ktorým sa kocka ľadu bude šmýkať.
*(Preberané v časti **4.4.**)*

24. Napíšte formulu, ktorá vyjadruje
(a) Maximálnu možnú ***statickú*** treciu silu (pre nejaké teleso na nejakej podložke),
(b) Kinetickú treciu silu,
a vysvetlite význam použitých symbolov.
*(Preberané v časti **5.**)*

25. Tehla šmýkajúca sa dole naklonenou rovinou:
Na tehlu pôsobia sily: tiažová $\vec{G}$, kinetická trecia $\vec{T}$, kolmá reakcia podložky $\vec{R}$.
(a) Nakreslite obrázok vrátane síl a ich skladania. (b) Napíšte vektorovú rovnicu skladania síl.
(c) Určte veľkosť kinetickej trecej sily.
(d) Určte veľkosť sily $\vec{R}$.
(e) Nájdite formulu pre veľkosť zrýchlenia tehly.
Koeficient kinetického trenia μ_{k} ako aj tiažové zrýchlenie g považujte za známe.
*(Preberané v časti **5.**)*

26. Dosku s tehlou pomaly nakláňame (zdvíhame jeden okraj). Na tehlu pôsobia sily: tiažová $\vec{G}$, statická trecia $\vec{T}$, kolmá reakcia podložky $\vec{R}$.
(a) Nakreslite obrázok vrátane síl a ich skladania. (b) Napíšte vektorovú rovnicu skladania síl.
(c) Určte hraničný (kritický) uhol náklonu α_{c}, pri ktorom sa tehla dá do pohybu, i keď do nej len nepatrne ťukneme. Koeficient statického trenia μ_{s} ako aj tiažové zrýchlenie g považujte za známe.
*(Preberané v časti **5.**)*

27. Hybnosť a impulz:
    (a) Čo je hybnosť hmotného bodu?
    (b) Čo je impulz sily, ak je sila $\vec{F}$ pôsobiaca na hmotný bod konštantná a pôsobí počas doby Δt?
    (c) Čo je impulz sily udelený hmotnému bodu vo všeobecnosti? (Uvažujte časový interval $\langle t_a, t_b \rangle$.)
    (d) Odvoďte prvú impulzovú vetu tak v integrálnom ako aj v diferenciálnom tvare.
    *(Preberané v časti **6.**)*

28. Sformulujte a dokážte zákon zachovania hybnosti v izolovanej sústave hmotných bodov.
    (Preberané v časti 7.)

29. Poľovník s puškou na člne vystrelí vodorovne. Vypočítajte rýchlosť, ktorou budú čln s poľovníkom odhodené. Vyjadrite aj pomer rýchlosti projektilu a rýchlosti zvyšku sústavy (teda poľovník, čln, puška) v okamihu tesne po výstrele. Dané údaje sú:
    m_1 - hmotnosť strely (prejektilu)
    m_2 - hmotnosť poľovníka, pušky a člna spolu; predpokladáme, že tvoria akoby jedno teleso.
    $\vec{v}_1$ - rýchlosť strely tesne po výstrele.
    Odpor vody zanedbajte.
    (Preberané v časti 7.)

30. Auto idúce rýchlosťou $80\,\mathrm{km/h}$ a vážiace $950\,\mathrm{kg}$ narazí do auta, ktoré ide pred ním rýchlosťou $50\,\mathrm{km/h}$ a váži $1050\,\mathrm{kg}$. Autá z nejakého dôvodu zostanú po zrážke do seba zakliesnené. Akou rýchlosťou sa budú pohybovať tesne po zrážke?
    Predpokladajte, že tie dve autá tvoria efektívne (akoby) izolovanú sústavu. Úlohu ***riešte všeobecne a vektorovo***. Označte si rýchlosť prvého auta pred zrážkou $\vec{v}_1$, rýchlosť druhého $\vec{v}_2$. Ich hmotnosti si označte m_1, m_2. Čísla nedosadzujte, sú len ilustračné.
    (Preberané v časti 7.)

31. Vysvetlite, čo je Eulerova metóda (EM) riešenia obyčajných diferenciálnych rovníc (ODR) 1. rádu a uveďte, prečo býva EM pre náročnejšie problémy nevhodná.
    *(Preberané v časti **8.4.1.**)*

32. Vysvetlite princíp metódy poliaceho bodu (t. j. metódy Runge-Kutta 2. rádu). Odvoďte aj praktické formuly pre jej použitie.
    *(Preberané v časti **8.4.2.**)*

33. Formulujte sústavu N obyčajných diferenciálnych rovníc prvého rádu najprv v podrobnejšom značení a potom ukážte, ako sa zavedením vhodných označení dá zápis tejto sústavy zostručniť.
    *(Preberané v časti **8.5.**)*

34. Sformulujte Keplerove zákony. (Pre tretí napíšte aj rovnicu alebo aspoň vzťah úmery.)
    *(Preberané v časti **9.1.**)*

35. Na základe Keplerovych zákonov odvoďte Newtonov gravitačný zákon. Zapíšte ho aj vo vektorovom tvare.
    *(Preberané v časti **9.2.**)*

36. (a) Čo je intenzita gravitačného poľa? (Stačí stručná všeobecná formula.)
    (b) Dá sa intenzita gravitačného poľa vždy stotožniť so zrýchlením hmotného bodu? (Stačí odpovedať *áno* alebo *nie*.)
    *(Preberané v časti **9.3.**)*

37. (a) Konštantná sila $\vec{F}$ posunie teleso o úsek $\mathrm{d}\vec{r}$. Akú prácu pritom vykoná?
    (b) Nejaká sila $\vec{F}$ (táto nemusí byť konštantná) koná prácu posúvaním telesa (alebo hmotného bodu) z miesta $\vec{r}_1$ do miesta $\vec{r}_2$. Akú prácu pritom vykoná?
    (c) Sila $\vec{F}$ vykoná za infinitezimálny čas $\mathrm{d}t$ prácu $\mathrm{d}W$. Ako vyjadríme výkon P tejto sily?
    (d) Odvoďte vyjadrenie výkonu pomocou sily a rýchlosti.
    *(Preberané v časti **10.1.**)*

38. (a) Napíšte, ako vyjadríme jednotku práce (joule, J) pomocou jednotiek pre silu a dráhu.
(b) Napíšte, ako vyjadríme jednotku výkonu (watt, W) pomocou jednotiek pre prácu a čas.
*(Preberané v časti **10.1**.)*

39. (a) Zaveďte pojem potenciálové pole.
*(Preberané v časti **10.2**.)*
(b) Nakreslite obrázok s bodmi (1), (2) v priestore, medzi ktorými sa presúva hmotný bod, prípadne aj s referenčným bodom (0).
(c) Zaveďte pojem potenciálna energia a vysvetlite jej (približný) vzťah ku práci, ktorú by konala nejaká „ruka“, keby presúvala hmotný bod z miesta (1) do miesta (2).
(d) Napíšte formulu, ktorou vyjadríme potenciálnu energiu $U(\vec{r})$ všeobecne [vzhľadom na referenčný bod (0)].
*(Preberané v časti **10.3**.)*

40. (a) Celkovú silu na hmotný bod si zapíšte

$$\vec{f}_{\text{tot}} = \vec{f}_{\text{pole}} + \vec{f}_{\text{ruka}}$$

kde $\vec{f}_{\text{pole}}$ je sila potenciálového poľa a $\vec{f}_{\text{ruka}}$ sú zvyšné sily (jedna alebo ich súčet). Môžu zahŕňať silu naozajstnej ruky, ale napr. aj silu odporu vzduchu.
(b) Zdôvodnite, prečo sa prácu sily $\vec{f}_{\text{ruka}}$ dá vyjadriť ako rozdiel

$$W_{\text{ruka}} = W_{\text{tot}} - W_{\text{pole}}$$

(c) Analyzujte príspevok W_{tot} (odvoďte preň výsledok) a ukážte, ako tento príspevok vedie ku pojmu ***kinetická energia***. Nezabudnite definovať pojem kinetická energia hmotného bodu.
(d) Bez odvodenia použite vyjadrenie

$$W_{\text{pole}} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{f}_{\text{pole}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = U_1 - U_2$$

a aj pomocou predošlých úvah potom dokážte, že ***ak*** $\boldsymbol{W_{\text{ruka}} = 0}$ (počas nejakého bližšie nešpecifikovaného časového intervalu), ***tak mechanická energia hmotného bodu sa zachováva***. (Napíšte pre tú energiu aj vyjadrenie.)
*(Preberané v časti **10.4**.)*

41. Zdôvodnite, prečo je práca konaná proti sile poľa nezávislá od integračnej cesty.
Je to tak voľne povedané. Máme samozrejme na mysli potenciálové pole a treba zdôvodniť formulu

$$\oint \vec{f}_{\text{pole}} \,.\, \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

*(Preberané v časti **10.5**.)*

42. Dokážte, že potenciálové pole pôsobí na hmotný bod silou $\vec{f}_{\text{pole}} = -\vec{\nabla} U$. Nezabudnite pritom vysvetliť význam symbolu $\vec{\nabla}$.
*(Preberané v časti **10.6**.)*

43. Majme inerciálnu vzťažnú sústavu S. Majme aj inú vzťažnú sústavu, označme ju S', takú, že sa vzhľadom na sústavu S pohybuje rovnomerne priamočiaro pozdĺž osi x rýchlosťou V_x.
(a) Zakreslite obrázok.
(b) Sformulujte Galileiho transformácie súradníc medzi sústavami S a S'. (Môžete použiť aj inú znamienkovú konvenciu, než sme mali na prednáške.)
(c) Zovšeobecnite Galileiho transformácie pre prípad, kedy sa sústava S' pohybuje vzhľadom na S všeobecným smerom konštantnou rýchlosťou $\vec{V}$.
(d) Nájdite vzťah medzi rýchlosťami hmotného bodu v tých dvoch sústavách (pre prípad všeobecného smeru rýchlosti $\vec{V}$).
(e) Nájdite vzťah medzi zrýchleniami hmotného bodu v tých dvoch sústavách.
(f) Slovne sformulujte, čo je Galileiho princíp relativity.
*(Preberané v časti **11.1**.)*

44. Uvažujte neinerciálnu vzťažnú sústavu:
(a) vysvetlite pojem ***fiktívna sila***,
(b) napíšte 2. Newtonov zákon pre neinerciálnu sústavu, ktorá sa voči inerciálnej pohybuje so zrýchlením $\vec{a}^*$.
(Preberané v časti ***11.2.****)*

45. Slovne zdôvodnite, prečo sa dynamika sústavy hmotných bodov týka aj:
(a) simulácií deformovateľných telies (ako napr. lopta),
(b) simulácií tuhých telies (ako napr. biliardová guľa).
(Preberané v časti ***12.****)*

46. Zaveďte pojem ***moment sily*** na elementárnom príklade, napr. pomocou úvahy o sile, ktorá pôsobí na list vrtule, alebo na iné teleso, ktoré sa môže otáčať okolo pevnej osi. Pritom nezabudnite aj:
(a) Zakresliť aspoň jeden obrázok, kde bude sila $\vec{F}$, vektor $\vec{r}$ označujúci jej pôsobisko a ***uhol*** medzi $\vec{F}$ a $\vec{r}$ bude nejaký ***všeobecný*** (nie 90°).
(b) Odvodiť formulu pre ***veľkosť*** momentu sily.
(c) Napísať vektorovú formulu pre ***vektor*** momentu sily.
(Preberané v časti ***12.****)*

47. (a) Napíšte formulu pre polohový ***vektor ťažiska*** sústavy N hmotných bodov, ktoré sa nachádzajú v miestach $\vec{r}_i,\ i \in \{1, \ldots, N\}$.
(b) Vyjadrite túto formulu aj pomocou troch samostatných formúl pre karteziánske zložky.
(Preberané v časti ***12.1.****)*

48. Uvažujte sústavu N hmotných bodov, ktoré pôsobia silami $\vec{f}_{ji}$ jeden na druhý a ešte na ne pôsobia aj vonkajšie sily $\vec{f}_i^{(\mathrm{e})}$. Silu pôsobiacu na i-ty hmotný bod si vyjadrite formulou

$$\vec{f}_i = \vec{f}_i^{(\mathrm{e})} + \sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{ji} \qquad (\vec{f}_{jj} \equiv \vec{0} \quad \forall j)$$

(a) Odvoďte ***vetu o pohybe ťažiska*** tejto sústavy hmotných bodov.
(b) Pomocou označenia $\vec{F}$ pre súčet vonkajších síl a ďalších praktických označení zapíšte ***vetu*** o pohybe ťažiska ***v stručnom tvare***.
(Preberané v časti ***12.2.****)*

49. Definujte, čo je celková hybnosť sústavy N hmotných bodov a nájdite jej súvis s rýchlosťou pohybu ťažiska tejto sústavy. Pri odvodení použite definičnú formulu pre polohový vektor ťažiska. Vysvetlite všetky použité symboly.
(Preberané v časti ***12.2.****)*

50. Slovne napíšte, za akých podmienok sa mechanická energia sústavy hmotných bodov zachováva a zapíšte formulu vyjadrujúcu konštantnosť tejto energie. Vysvetlite všetky použité symboly.
(Preberané v časti ***12.3.****)*

51. Napíšte definičnú formulu pre ***moment hybnosti*** sústavy N hmotných bodov. Vysvetlite všetky použité symboly.
(Preberané v časti ***12.4.****)*

52. **Úvahy vo všeobecnej inerciálnej vzťažnej sústave:**
(a) Pre sústavu hmotných bodov odvoďte ***druhú vetu impulzovú***, teda formulu

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i^{(\mathrm{e})} \equiv \vec{\Gamma}$$

Pri jej odvodení použite rovnosť $\sum_i \vec{r}_i \times \sum_j \vec{f}_{ji} = \vec{0}$ ktorú nemusíte dokazovať.
(b) Ako sa nazýva fyzikálna veličina označená symbolom $\vec{\Gamma}$? Vysvetlite aj ďalšie použité symboly.
(c) Ukážte, ako z druhej vety impulzovej vyplýva, že celkový moment hybnosti sa môže zachovávať. (Napíšte aj, za akých podmienok sa zachováva.)
(Preberané v časti ***12.4.1.****)*

53. **Úvahy s použitím ťažiskovej vzťažnej sústavy**:
(a) Polohový vektor hmotného bodu si vyjadrite v tvare

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i{}'$$

kde $\vec{R}$ je polohový vektor ťažiska (vzhľadom na hlavnú súradnicovú sústavu) a $\vec{r}_i{}'$ je poloha bodu vzhľadom na ťažisko.
(b) Nakreslite ku tomu obrázok.
(c) Dokážte, že platia formuly

$$\sum_i m_i \vec{r}_i{}' = \vec{0}, , \qquad \sum_i m_i \vec{v}_i{}' = \vec{0}$$

kde $\vec{v}_i{}'$ je rýchlosť bodu vzhľadom na ťažisko.
(Preberané v časti 12.4.2.)

54. Je známe, že ***moment hybnosti*** (MH) sústavy hmotných bodov sa dá ***rozdeliť na dve zložky***: MH ťažiska a MH pohybu *okolo* ťažiska.
(a) Zapíšte tento rozklad MH formulami a vysvetlite vyznam jednotlivých symbolov.
(b) Pomocou MH a ďalších veličín zapíšte rovnicu pre dynamiku pohybu ťažiska.
(c) Pomocou MH a ďalších veličín zapíšte rovnicu pre dynamiku pohybu *okolo* ťažiska.
(Nezabudnite vysvetliť aj význam symbolov, tak isto aj v časti (b).)
(Preberané v časti 12.4.2.)

55. Napíšte, ako sa dá kinetická energia sústavy hmotných bodov rozčleniť na ťažiskovú časť T_{CM} a príspevok pohybu okolo ťažiska T'.
(Preberané v časti 12.5.)

56. Ako definujeme ideálne tuhé teleso?
(Preberané v časti 13.)

57. Koľko reálnych čísiel musíme zadať, aby sme jednoznačne špecifikovali polohu a orientáciu ideálne tuhého telesa v 3D priestore? Uveďte jeden príklad a opíšte, aký je geometrický význam týchto čísiel.
(Preberané v časti 13.)

58. Uveďte vzťah pre kinetickú energiu ideálne tuhého telesa, ktoré sa otáča uhlovou rýchlosťou ω okolo osi, ktorá nemení svoj smer a prechádza jeho ťažiskom.
(Preberané v časti 13.)

59. Ako je definovaný moment zotrvačnosti ideálne tuhého telesa? Čo všetko je potrebné špecifikovať, aby bola jeho hodnota jednoznačná?
(Preberané v časti 13.)

60. Uveďte vzťah pre priemet momentu hybnosti ideálne tuhého telesa do daného smeru, ak poznáme jeho vhodný moment zotrvačnosti a uhlovú rýchlosť otáčania.
(Preberané v časti 13.)

61. Sformuluje pohybové rovnice ideálne tuhého telesa, ktoré sa pohybuje v rovine a os jeho otáčania je na túto rovinu kolmá. Rovnice napíšte tak aby zodpovedali situácii, v ktorej je súčet všetkých síl ktoré naň pôsobia nulový, ale súčet všetkých momentov síl, ktoré naň pôsobia je $\vec{\Gamma} \neq \vec{0}$.
(Preberané v časti 13.)

62. Nájdite vyjadrenie pre moment zotrvačnosti činky skladajúcej sa z tyče s dĺžkou ℓ a hmotnosťou m_ℓ a dvoch guľových závaží na koncoch tyče, ktorých polomer je R a hmotnosť m_R. Os otáčania, vzhľadom na ktorú máte vyjadriť moment zotrvačnosti je kolmá na tyč a prechádza ťažiskom činky. Môžete použiť nasledovné vzťahy:

$$J_{\mathrm{g}} = \frac{2}{5} m R^2 \,, \qquad J_{\mathrm{t}} = \frac{1}{12} m \ell^2 \,, \qquad J = J' + m d^2$$

pričom označenia v týchto vzťahoch priamo nesúvisia s označeniami v zadaní úlohy.
(Preberané v časti 13.)