FYZAKPH skuska

1. Napíšte
   (a) Niektorú z jednotiek ***dĺžky*** (akú na Slovensku bežne používame),
   (b) Základnú jednotku ***času***,
   (c) Niektorú z jednotiek ***rýchlosti***,
   (d) Jednotku vhodnú na vyjadrenie ***zrýchlenia***.
   (Preberané v častiach 1.2, 1.3, 1.4.)

(a) Niektorú z jednotiek dĺžky (akú na Slovensku bežne používame): meter (m)
(b) Základnú jednotku času: sekunda (s)
(c) Niektorú z jednotiek rýchlosti: km/h, m/s
(d) Jednotku vhodnú na vyjadrenie zrýchlenia: m/s^2

2. Napíšte
   (a) Čo je priamočiary pohyb?
   (b) Čo je rovnomerný priamočiary pohyb?
   (c) Čo je trajektória pohybu hmotného bodu?
   (d) Čo je dráha?
   (Preberané v častiach 1.4.1, 1.5.1.)

(a) Čo je priamočiary pohyb?

Priamočiary pohyb hmotného bodu je pohyb hmotného bodu, ktorého trajektóriou je časť priamky (teda rovná čiara). Ekvivalentná definícia: pohyb, pri ktorom sa nemení smer rýchlosti (smer v);

(b) Čo je rovnomerný priamočiary pohyb?

Je priamociary pohyb, pri ktorom sa veľkosť rýchlosti nemení.

(c) Čo je trajektória pohybu hmotného bodu? (d) Čo je dráha?

Trajektória pohybu je množina bodov v priestore, cez ktoré bod pri svojom pohybe prechádza. Je to teda vo všeobecnosti nejaká krivka. Najjednoduchším príkladom trajektórie je priamka alebo jej časť. Vtedy by šlo o priamočiary pohyb. Dráha je dĺžka trajektórie. Je to teda veličina, ktorá sa meria v dĺžkových jednotkách a je vždy nezáporná. Značí sa najčastejšie s.

3. Napíšte
   (a) Ako matematicky definujeme ***rýchlosť*** hmotného bodu pohybujúceho sa v smere osi x?
   (b) Ako matematicky definujeme ***zrýchlenie*** hmotného bodu pohybujúceho sa v smere osi x? *(Preberané v častiach 1.4.1, 1.4.2.)*

(a) Ako matematicky definujeme rýchlosť hmotného bodu pohybujúceho sa v smere osi x?

vx = ∆x/∆t
vx – rýchlosť hmotného bodu pohybujúceho sa v smere osi x
∆x- dĺžka úseku
∆t- čas potrebný na prejdenie daného úseku

(b) Ako matematicky definujeme zrýchlenie hmotného bodu pohybujúceho sa v smere osi x?

ax = ∆vx/∆t
ax- zrýchlenie hmotného bodu pohybujúceho sa v smere osi x
∆vx- zmena rýchlosti
∆t- počas doby

4. Vyriešte príklad:
   Auto sa pohybovalo rovnomerne rýchlosťou veľkosti $25\,\mathrm{m/s}$. V čase spustenia stopiek (to je okamih $t = 0$) malo súradnicu $x_0 = -30\,\mathrm{m}$ a jazdilo po ceste smerom doprava (teda v smere osi x). Akú súradnicu má po 8,3 sekundách takej jazdy?
   Tento jeden príklad stačí vyriešiť číselne. Ak nemáte kalkulačku, výpočet netreba dotiahnuť do úplného konca.
   *(Preberané v časti **1.4.1.**)*

$x(t) = x_0 + v_x t$ => x(t) = -30 + 25 * 8.3 = 177.5

5. Pre **rovnomerný** priamočiary pohyb pozdĺž osi x napíšte matematické funkcie, ktorými vyjadríme
   (a) závislosť rýchlosti v_x od času,
   (b) závislosť súradnice x od času.
   Rýchlosť pohybu v_x a začiatočná súradnica x_0 sú dané.
   *(Preberané v časti **1.4.1.**)*

$$\boxed{\begin{aligned} v_x(t) &= v_x = \text{konšt} \\ x(t) &= x_0 + v_x t \end{aligned}}$$

6. Napíšte (prípadne aj odvoďte), aká je pri rovnomerne **zrýchlenom** pohybe
   (a) závislosť rýchlosti v_x od času,
   (b) závislosť súradnice x od času.
   Pritom predpoklajte, že ide o pohyb v smere osi x. Dané je zrýchlenie a_x, začiatočná rýchlosť $v_x(0)$ a začiatočná súradnica $x(0)$.
   *(Preberané v časti **1.4.2.**)*

$$\boxed{v_x(t) = v_x(0) + a_x t}$$

$$\boxed{x(t) = x(0) + v_x(0)\,t + \frac{1}{2} a_x t^2}$$

7. Riešte úlohu (voľný pád):
   Kameň padá z výšky h. Za aký čas a akou rýchlosťou dopadne? Odpor vzduchu zanedbajte. Tiažové zrýchlenie g považujte za dané. Riešte len všeobecne (bez dosadzovania nejakých čísiel).
   *(Preberané v časti **1.4.2.**)*

t => h(t) = ½ gt^2 => t = sqrt(2*h/g)

v => g*t = g* sqrt(2*h/g) = sqrt(2*g*h)

8. Riešte úlohu (zvislý vrh):
   Vyhodíme kameň do výšky rýchlosťou $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$, pričom ho z ruky vypustíme vo výške $h_0 = 2\,\mathrm{m}$. Ako vysoko vyletí, za aký čas sa tam dostane a za aký čas a akou rýchlosťou dopadne na zem? Odpor vzduchu zanedbajte. Tiažové zrýchlenie $g \doteq 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. Úlohu riešte všeobecne. Čísla dosadzovať netreba, sú to len ilustračné údaje.
   *(Preberané v časti **1.4.4.**)*

Ako vysoko vyleti ymax => y_max = y0 + ½ (v0^2 / g)

Za aky cas vyletí na ymax => t_m = v0 / g

Za aky cas dopadne => t_d = v0 / g + sqrt((v0/g)^2 + (2y0)/g)

Akou rychlostou dopadne => y0 = h0, v_dy = - sqrt(v0^2 + 2 * g * y0)

9. Uvažujte ***nerovnomerne*** zrýchlený priamočiary pohyb pozdĺž osi x. Dané je zrýchlenie $a_x(t)$ (ako funkcia času). Napíšte vyjadrenia pre rýchlosť $v_x(t)$ a súradnicu $x(t)$. Začiatočnú rýchlosť $v_x(0)$ a začiatočnú súradnicu

$x(0)$ považujte za dané (známe).
*(Preberané v časti **1.4.5.**)*

$$\boxed{v_x(t) = v_x(0) + \int_0^t a_x(t')\,\mathrm{d}t'}\,, \qquad \boxed{x(t) = x(0) + \int_0^t v_x(t')\,\mathrm{d}t'}$$

10. Riešte úlohu (vodorovný vrh):
    Obrancovia hradu vrhnú z jeho veže kameň vodorovným smerom rýchlosťou $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$. Výška okna, z ktorej kameň vrhajú, je $h = 35\,\mathrm{m}$. Terén pod vežou v smere letu kameňa je vodorovný. Ako ďaleko kameň doletí a za aký čas dopadne? Odpor vzduchu považujte za zanedbateľný. Tiažové zrýchlenie $g \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. Úlohu riešte všeobecne a nakreslite aj obrázok. Čísla dosadzovať netreba, sú to len ilustratívne údaje.
    (Preberané v časti 1.5.2.)

a) za aky cas dopadne?

tD = sqrt(2h/g) = 2,47s (2,67s ?) 2.67

b) ako daleko dopadne?

s = v0 * sqrt(2h/g) = 49,5m (53,4m ?) 53.4

11. Riešte úlohu (šikmý vrh):
    Kameň je vrhnutý pod uhlom α voči terénu rýchlosťou veľkosti v_0. Predokladajte, že je vrhnutý z úrovne zeme (z výšky nula). Určte maximálnu dosiahnutú výšku počas letu, dobu letu (teda čas dopadu) kameňa a vzdialenosť, do ktorej dopadne. Predpokladajte, že odpor vzduchu je zanedbateľný. Nakreslite aj obrázok.
    *(Preberané v časti **1.5.3.**)*

a) urcte maximalnu dosiahnutu vysku pocas letu

$$\boxed{y_{\max} = y(t_{\mathrm{m}}) = \frac{1}{2} g t_{\mathrm{m}}^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}}$$

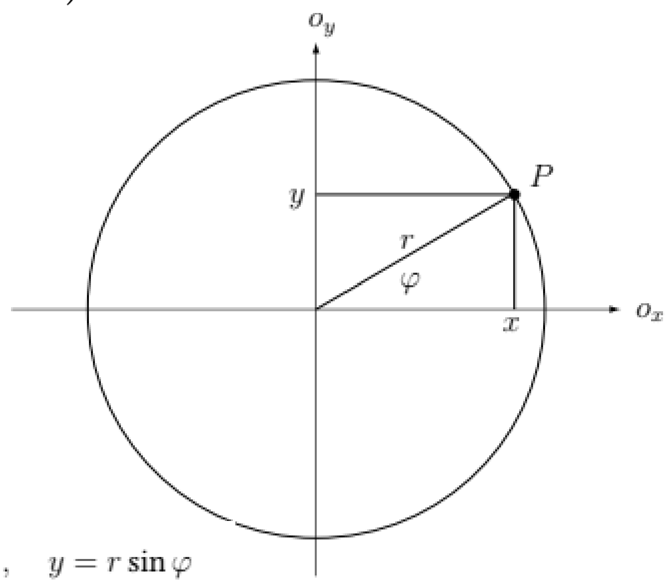
b) doba letu

$$\boxed{t_{\mathrm{D}} = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}}$$

c) ako daleko kamen doletel

$$\boxed{\ell = x(t_{\mathrm{D}}) = v_{0x} t_{\mathrm{D}} = \frac{2v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g}} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

12. **Pohyb bodu po kružnici**: nech má polomer r, jej stred nech leží v počiatku súradnicovej sústavy (x, y) a uhlová poloha bodu na kružnici voči osi nech je vyjadrená uhlom φ. Veľkosť rýchlosti uvažujeme všeobecne, teda sa môže aj meniť s časom.
(a) Nakreslite príslušný obrázok.
(b) Napíšte vyjadrenia pre x, y pomocou r a φ.
(c) Definujte uhlovú rýchlosť ω.
(d) Vyjadrite v_x a v_y.
(e) Vyjadrite obvodovú rýchlosť pohybu v_φ.
(f) Vyjadrite a_x a a_y.
(g) Definujte uhlové zrýchlenie pohybu ε.
(h) Vyjadrite veľkosť celkového zrýchlenia (a).
(i) Identifikujte vo vyjadrení celkového zrýchlenia dve zložky:
1. ***Obvodové (tangenciálne)*** zrýchlenie $a_{||}$; vyjadrite ho pomocou uhlového zrýchlenia ε.
2. ***Dostredivé (normálové)*** zrýchlenie $a_\perp$; vyjadrite ho pomocou uhlovej rýchlosti (ω).
(Preberané v časti 1.5.5.)



a)

b) $x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi$

$$\boxed{\omega(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\varphi}}$$

c)

$$v_x = -\omega\, r\sin\varphi = -\omega y\,, \quad v_y = \omega\, r\cos\varphi = \omega x$$

d)

$$\boxed{v_\varphi = \omega r}$$

e)

Celkové zrýchlenie bodu na kružnici. Karteziánske zložky (celkového) zrýchlenia sú

$$a_x = \dot{v}_x\,, \quad a_y = \dot{v}_y \tag{56}$$

Zderivovaním (53) podľa času dostávame

$$\begin{aligned} a_x &= -\dot{\omega}y - \omega\dot{y} = -\dot{\omega}y - \omega^2 x = -\dot{\omega}r\sin\varphi - \omega^2 r\cos\varphi = (-\dot{\omega}\sin\varphi - \omega^2\cos\varphi)r \\ a_y &= \dot{\omega}x + \omega\dot{x} = \dot{\omega}x - \omega^2 y = \dot{\omega}r\cos\varphi - \omega^2 r\sin\varphi = (\dot{\omega}\cos\varphi - \omega^2\sin\varphi)r \end{aligned}$$

f)

g) $$\boxed{\varepsilon \overset{\text{def.}}{=} \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}}$$:

h) $$\boxed{a = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\, r}$$:

i) $$\boxed{a_{||} = \varepsilon r}$$, $$\boxed{a_{\perp} = \omega^2\, r = \frac{v^2}{r} = \omega\, v_{\varphi}}$$

13. Uvažujte hmotný bod, ktorý sa rovnomerne pohybuje po kružnici a jeden obeh mu trvá čas T. Akú veľkosť má uhlová rýchlosť ω tohto pohybu? V akých jednotkách sa udáva?
(Preberané v časti 1.5.5.)

|w| = 2π/T = 2*π*f , označuje sa jednotkou Hz , nazýva sa aj ako uhlova frekvencia

f = 1/T

T = 2*π*r/v , kde T je jedna perioda

14. Vektory:
(a) Napíšte definíciu skalárneho súčinu vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$ zvierajúcich uhol θ.
(b) Vyjadrite skalárny súčin pomocou karteziánskych zložiek.
(c) Definujte vektorový súčin vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$.
(d) Vyjadrite vektorový súčin pomocou karteziánskych zložiek.
(e) Napíšte definičnú formulu pre zmiešaný súčin vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
(Preberané v časti 2.)

a) $$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\, |\vec{b}| \cos\theta}$$

b) $$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

c) $$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

d)

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

e)

15. (a) ako určíme veľkosť vektora, keď poznáme jeho karteziánske zložky?

(b)ako vypočítame súčin skalára s vektorom?

Pytagorovej vety:

$$b \equiv |\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$$

a)

Alebo povieme aj *násobenie vektora skalárom*. Vyjadríme to v zložkách:

$$\boxed{\lambda\vec{b} = (\lambda b_x, \lambda b_y, \lambda b_z)} \quad (77)$$

Súčin skalára a vektora je teda vektor. Jeho veľkosť je $|\lambda\vec{b}| = |\lambda|\,|\vec{b}|$. Pre tento druh súčinu nepoužívame žiaden symbol (ani bodku).

b)

16. (a) Ako matematicky definujeme ***rýchlosť*** hmotného bodu (v zmysle vektora) vo všeobecnosti?
(b) Ako matematicky definujeme ***zrýchlenie*** hmotného bodu (v zmysle vektora) vo všeobecnosti?
(Preberané v časti 2.2.)

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)\,, \quad \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)\,, \quad \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

a platia vzťahy

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}}$$

17. Odvoďte formulu pre rozklad zrýchlenia (ako vektora) na tangenciálnu a normálovú zložku. *(Preberané v časti 3.)*

$$\vec{v} = v.\vec{\tau}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt}.\vec{\tau} + v.\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = -\frac{v}{r}\vec{\rho}$$

$\vec{\rho}$ - jednotkový vektor

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v.\left(-\frac{v}{r}\right).\vec{\rho}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} - \frac{v^2}{r}.\vec{\rho}$$

$$a_{\parallel} = \frac{dv}{dt}.\vec{\tau}$$ tangenciálne zrýchlenie

$$a_{\perp} = -\frac{v^2}{r}.\vec{\rho}$$ normálové zrýchlenie

18. (a) Ako matematicky definujeme ***uhlovú rýchlosť*** ($\vec{\omega}$) v zmysle vektora?
(b) Ako matematicky definujeme ***uhlové zrýchlenie*** ($\vec{\varepsilon}$) v zmysle vektora?
(Preberané v časti 3.1.)

a)

$$\boxed{\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\alpha}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\alpha}}{\mathrm{d}t}}$$

b)

$$\boxed{\vec{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}}$$

19. Čo je inerciálna a čo neinerciálna vzťažná sústava? (Odpoveď napíšte slovne, bez formúl.)
(Preberané v časti 4.)

Inerciálna vzťažná sústava je vzťažná sústava, v ktorej **platí 1. Newtonov pohybový zákon**, t. j. že telesá, na ktoré **nepôsobí žiadna sila**, alebo výslednica síl je nulová, zostávajú **v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe**.

Neinerciálna vzťažná sústava je vzťažná sústava, v ktorej **neplatí** 1. Newtonov pohybový zákon ani 3. Newtonov pohybový zákon, tzn. že teleso, aj keď na neho nepôsobí žiadna sila alebo výslednica síl je nulová, mení svoj pohybový stav (rýchlosť).

20. Sformulujte
(a) Prvý Newtonov zákon (zákon zotrvačnosti),
(b) Druhý Newtonov zákon (zákon sily)
(c) Tretí Newtonov zákon (zákon akcie-reakcie).
(Preberané v častiach 4.1, 4.2, 4.3.)

(a) Prvý Newtonov zákon (zákon zotrvačnosti):

Každé teleso zotrváva v pokoji, alebo koná rovnomerný priamočiary pohyb, kým nie je nútené pôsobením nejakých síl tento svoj pohybový stav zmeniť.

(b) Druhý Newtonov zákon (zákon sily):

Sila, ktorá pôsobí na teleso, je úmerná súčinu jeho hmotnosti a zrýchlenia, ktoré mu udeľuje.

(c) Tretí Newtonov zákon (zákon akcie-reakcie).

Sily, ktorými na seba pôsobia dva hmotné objekty, sú rovnako veľké a majú opačný smer.

21. Rovnomerne klesajúci parašutista:
    (a) Stručne slovne zdôvodnite, prečo klesá stálou rýchlosťou.
    (b) Zakreslite obrázok skladania síl (tiažovej a odporovej) a vyjadrite toto skladanie aj stručnou vektorovou formulou.
    (c) Nájdite formulu vyjadrujúcu rýchlosť klesania parašutistu.
    (Daná je jeho hmotnosť m, plocha padáka S v smere kolmom na pohyb, hustota vzduchu ρ, veľkosť g tiažového zrýchlenia a koeficient aerodynamického odporu C).
    (Preberané v časti 4.4.)

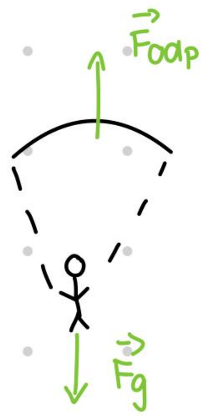
a) Aerodynamická odporová sila je rovnako veľká a opačne orientovaná ako tiažová sila, výsledná sila je teda nulová. Keď je sila nulová, je nulové aj zrýchlenie.

21.

$F_G = F_{odp}$

$m.g = \frac{1}{2} \cdot C.S.\rho.v^2$

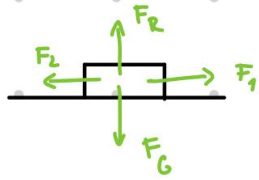
$v = \sqrt{\frac{2mg}{CS\rho}}$



$\vec{F}_G + \vec{F}_{odp} = \vec{0}$

22. Sánky na vodorovnej ceste:
    Sú ťahané vodorovne konštantnou ťahovou silou $\vec{F}_1$. Presne oproti nej pôsobí konštantná sila šmykového trenia $\vec{F}_2$. Ťahová sila nech je väčšia než sila trenia. Hmotnosť sánok je m. Spravte rozbor síl pôsobiacich na sánky, uvážte, ako sa skladajú a určte, s akým zrýchlením sa sánky budú pohybovať.
    (Preberané v časti 4.4.)

22.



$$F = \overbrace{\vec{F_G} + \vec{F_R}}^{0} + \overset{\text{ťahová}}{F_1} + \underset{\text{odporová}}{F_2}$$

$$|\vec{F}| = |\vec{F_1} + \vec{F_2}| = F$$

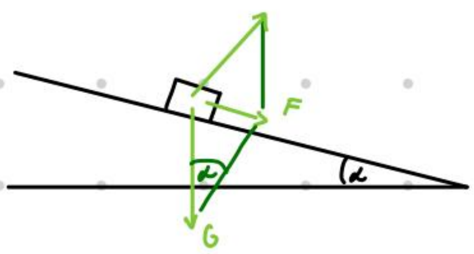
$$F_1 - F_2 > 0$$

$$F = m \cdot a$$

$$F_1 - F_2 = m \cdot a$$

$$a = \frac{F_1 - F_2}{m}$$

23. Kocka ľadu na zľadovatenej ceste dole svahom:
Daný je uhol sklonu α a známa je veľkosť tiažového zrýchlenia g. Trenie zanedbáme.
(a) Nakreslite obrázok vrátane síl a ich skladania.
(b) Napíšte vektorovú rovnicu skladania síl.
(c) Určte veľkosť zrýchlenia, s ktorým sa kocka ľadu bude šmýkať.
(Preberané v časti 4.4.)



$$\sin\alpha = \frac{F}{G}$$

$$F = G \cdot \sin\alpha$$

$$\cancel{m} \cdot a = \cancel{m} \cdot g \cdot \sin\alpha$$

$$a = g \cdot \sin\alpha$$

$$\vec{F} = \vec{G} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}$$

24. Napíšte formulu, ktorá vyjadruje
(a) Maximálnu možnú ***statickú*** treciu silu (pre nejaké teleso na nejakej podložke),
(b) Kinetickú treciu silu,
a vysvetlite význam použitých symbolov.
(Preberané v časti 5.)

(a) Maximálnu možnú statickú treciu silu (pre nejaké teleso na nejakej podložke),

$$\boxed{F_{\text{stat}}^{\text{max}} = \mu_{\text{s}} F_N}$$

Fn – tiažová síla

μ_{s} - koeficient statického trenia

$F_{\text{stat}}^{\text{max}}$ - maximálna možná staticka trecia sila

(b) Kinetickú treciu silu, a vysvetlite význam použitých symbolov.

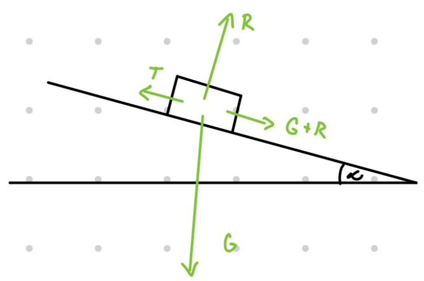
$$\boxed{F_{\text{kin}} = \mu_{\text{k}} F_N}$$

F_{kin} - kineticka trecia sila

μ_{k} - koeficient kinetického trenia

Fn – tiažová síla

25. Tehla šmýkajúca sa dole naklonenou rovinou:
Na tehlu pôsobia sily: tiažová $\vec{G}$, kinetická trecia $\vec{T}$, kolmá reakcia podložky $\vec{R}$.
(a) Nakreslite obrázok vrátane síl a ich skladania. (b) Napíšte vektorovú rovnicu skladania síl.
(c) Určte veľkosť kinetickej trecej sily.
(d) Určte veľkosť sily $\vec{R}$.
(e) Nájdite formulu pre veľkosť zrýchlenia tehly.
Koeficient kinetického trenia μ_k ako aj tiažové zrýchlenie g považujte za známe.
(Preberané v časti 5.)



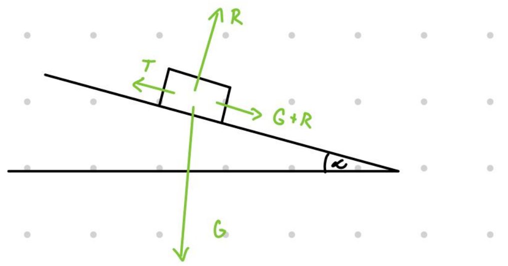
b) $\vec{F} = m.\vec{a} = \vec{G} + \vec{R} + \vec{T}$

c) $T = \mu . R = \mu . G . \cos\alpha$

d) $R = G . \cos\alpha$

e) $m.a = G . \sin\alpha - \mu_k . G . \cos\alpha$

26. Dosku s tehlou pomaly nakláňame (zdvíhame jeden okraj). Na tehlu pôsobia sily: tiažová $\vec{G}$, statická trecia $\vec{T}$, kolmá reakcia podložky $\vec{R}$.
(a) Nakreslite obrázok vrátane síl a ich skladania. (b) Napíšte vektorovú rovnicu skladania síl.
(c) Určte hraničný (kritický) uhol náklonu α_c, pri ktorom sa tehla dá do pohybu, i keď do nej len nepatrne ťukneme. Koeficient statického trenia μ_s ako aj tiažové zrýchlenie g považujte za známe.
(Preberané v časti 5.)



b) $\vec{F} = m.\vec{a} = \vec{G} + \vec{R} + \vec{T}$

$|\vec{G} + \vec{R}| = \vec{T}$

$\sin\alpha = \dfrac{|\vec{G} + \vec{R}|}{|\vec{G}|}$ $\quad |\vec{G} + \vec{R}| = G \cdot \sin\alpha$

$\cos\alpha = \dfrac{R}{G} \Rightarrow T = \mu \cdot G \cdot \cos\alpha$

$\cancel{G} \cdot \sin\alpha = \mu_s \cdot \cancel{G} \cdot \cos\alpha$

$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mu_s$

$\alpha = \mathrm{arctg}\,\mu_s$

27. Hybnosť a impulz:
    (a) Čo je hybnosť hmotného bodu?
    (b) Čo je impulz sily, ak je sila $\vec{F}$ pôsobiaca na hmotný bod konštantná a pôsobí počas doby Δt?
    (c) Čo je impulz sily udelený hmotnému bodu vo všeobecnosti? (Uvažujte časový interval $\langle t_a, t_b \rangle$.)
    (d) Odvoďte prvú impulzovú vetu tak v integrálnom ako aj v diferenciálnom tvare.
    (Preberané v časti 6.)

a)

Hybnosť hmotného bodu je definovaná ako súčin jeho hmotnosti a rýchlosti, a je to teda vektor:

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}} \tag{121}$$

b)

Menej často spomínanou veličinou v mechanike je impulz, podrobnejšie *impulz sily*. Meriame ním účinok pôsobenia sily na hmotný bod počas nejakého časového úseku (alebo účinok na teleso vo vyššie uvedenom zmysle). Ak by sila bola konštantná, tak za časový interval dĺžky Δt (akokoľvek dlhý alebo krátky) by hmotnému bodu udelila impulz

$$\vec{\mathcal{I}} = \vec{F}\Delta t$$

c)

Sila však môže v čase meniť svoju veľkosť aj smer a preto táto jednoduchá definícia, akokoľvek názorná, nie je dostatočná. Všeobecne impulz sily udelený hmotnému bodu v časovom intervale $\langle t_a, t_b \rangle$ definujeme

$$\boxed{\vec{\mathcal{I}} = \int_{t_a}^{t_b} \vec{F}\,\mathrm{d}t} \tag{122}$$

d)

$$\boxed{\int_{t_a}^{t_b} \vec{F}\,\mathrm{d}t = \vec{p}_b - \vec{p}_a} \qquad \boxed{\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}}$$

28. Sformulujte a dokážte zákon zachovania hybnosti v izolovanej sústave hmotných bodov.
(Preberané v časti 7.)

Celková hybnosť izolovanej sústavy, rovnajúca sa vektorovému súčtu hybností všetkých hmotných bodov sústavy, sa nemení.

$$\boxed{\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_N = \text{konšt}}$$

29. Poľovník s puškou na člne vystrelí vodorovne. Vypočítajte rýchlosť, ktorou budú čln s poľovníkom odhodené. Vyjadrite aj pomer rýchlosti projektilu a rýchlosti zvyšku sústavy (teda poľovník, čln, puška) v okamihu tesne po výstrele. Dané údaje sú:
m_1 - hmotnosť strely (prejektilu)
m_2 - hmotnosť poľovníka, pušky a člna spolu; predpokladáme, že tvoria akoby jedno teleso.
$\vec{v}_1$ - rýchlosť strely tesne po výstrele.
Odpor vody zanedbajte.
(Preberané v časti 7.)

Uvažované telesá tvoria efektívne izolovanú sústavu (ak zanedbáme najmä odpor vody). Preto je hybnosť tejto sústavy konštantná. Tesne po výstrele je teda taká istá ako počas výstrelu aj ako pred výstrelom.[7] Pred výstrelom bola hybnosť nulová, tak taká musí byť aj tesne po výstrele. Platí teda

$$\vec{0} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \tag{137}$$

Z toho ľahko vyjadríme hľadanú rýchlosť spätného pohybu poľovníka s puškou a člnom:

$$\vec{v}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{v}_1 \tag{138}$$

Znamienko mínus vyjadruje, že rýchlosť spätného pohybu je opačne orientovaná než rýchlosť strely. Pomer veľkostí rýchlostí je

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{m_1}{m_2} \tag{139}$$

30. Auto idúce rýchlosťou 80 km/h a vážiace 950 kg narazí do auta, ktoré ide pred ním rýchlosťou 50 km/h a váži 1050 kg. Autá z nejakého dôvodu zostanú po zrážke do seba zakliesnené. Akou rýchlosťou sa budú pohybovať tesne po zrážke?
Predpokladajte, že tie dve autá tvoria efektívne (akoby) izolovanú sústavu. Úlohu ***riešte všeobecne a vektorovo***. Označte si rýchlosť prvého auta pred zrážkou $\vec{v}_1$, rýchlosť druhého $\vec{v}_2$. Ich hmotnosti si označte m_1, m_2. Čísla nedosadzujte, sú len ilustračné.
(Preberané v časti 7.)

Tie dve autá môžeme považovať za (efektívne) izolovanú sústavu. Predpokladáme totiž, že pri zrážke z áut neodletí nejaká časť, napr. koleso. A sila zemskej tiaže sa kompenzuje so silou podložky. Hybnosť pred zrážkou teda musí byť rovná hybnosti po zrážke:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v} \tag{140}$$

Po zrážke totiž podľa predpokladu tvoria jedno teleso. Ich výsledná rýchlosť po zrážke teda je

$$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{141}$$

31. Vysvetlite, čo je Eulerova metóda (EM) riešenia obyčajných diferenciálnych rovníc (ODR) 1. rádu a uveďte, prečo býva EM pre náročnejšie problémy nevhodná.
(Preberané v časti 8.4.1.)

Eulerova metóda je najjednoduchšou metódou na riešenie ODR. Vychádza priamo z najbežnejšie používanej definície derivácie, t. j. z asymetrickej definície

$$\dot{y}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \tag{155}$$

EM je pomerne málo presná a neraz aj nestabilná práve kvôli tomu, že používa asymetrické (nesymetrické) priblíženie pre deriváciu funkcie.

32. Vysvetlite princíp metódy poliaceho bodu (t. j. metódy Runge-Kutta 2. rádu). Odvoďte aj praktické formuly pre jej použitie.
(Preberané v časti 8.4.2.)

ja sem natrískam poznámky z môjho zošita, ale sám tomu nerozumiem

$$\dot{y}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{y\left(t+\frac{h}{2}\right) - y\left(t-\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$y\left(t+\frac{h}{2}\right) \approx y\left(t-\frac{h}{2}\right) + h\dot{y}(t)$$

$$y(t+h) \approx y(t) + h\,f\left(t+\frac{h}{2}\,; y(t+\frac{h}{2})\right)$$

$$y\left(t+\frac{h}{2}\right) \approx y(t) + \frac{h}{2}\,f\big(t, y(t)\big)\ [EM - Eulerova\ Metóda]$$

*Pomocná konštanta t_n

$k_1 = h\, f(t_n, y_n)$

$k_2 = h\, f(t_n + h/2, y_n + k_1 / 2)$

$y_{n+1} = y_n + k_2$

čítaj od konca

33. Formulujte sústavu N obyčajných diferenciálnych rovníc prvého rádu najprv v podrobnejšom značení a potom ukážte, ako sa zavedením vhodných označení dá zápis tejto sústavy zostručniť.
(Preberané v časti 8.5.)

Sústava N diferenciálnych rovníc:

$$\dot{y}_i = f_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_N), \; i \in \{1, 2, \ldots, N\} \qquad (168)$$

kde f_i sú dané funkcie a y_i neznáme funkcie nezávislej premennej t. Sústavu (168) nazývame normálny systém diferenciálnych rovníc. Na vyriešenie úlohy je ešte potrebné poznať začiatočné podmienky, ktorých je N:

$y \equiv y_1, y_2, \ldots, y_N$, $f \equiv f_1, f_2, \ldots, f_N$

kompaktne:

$\dot{y} = f(t, y)$

(asi podľa toho máme riešiť reálny príklad ale netuším ako…)

34. Sformulujte Keplerove zákony. (Pre tretí napíšte aj rovnicu alebo aspoň vzťah úmery.)
(Preberané v časti 9.1.)

1. Planéty obiehajú okolo Slnka po eliptických trajektóriách. Slnko sa nachádza v spoločnom ohnisku týchto eliptických trajektórií.

2. Plochy opísané spojnicou planéta – Slnko (sprievodičom planéty) sú pre tú istú planétu za ľubovoľné, ale rovnako dlhé časové intervaly, rovnaké.

3. Druhé mocniny obežných dôb planét sú úmerné tretím mocninám ich hlavných poloosí:

$$T^2 \propto a^3 \tag{171}$$

Ak to chceme napísať ako rovnosť, tak takto: $T^2 = ka^3$, kde k je nejaká konštanta, ktorá je pre každú planétu rovnaká a môže teda závisieť len od vlastností Slnka.

35. Na základe Keplerovych zákonov odvoďte Newtonov gravitačný zákon. Zapíšte ho aj vo vektorovom tvare. (Preberané v časti 9.2.)

Podľa tretieho Newtonovho zákona musí platiť $\vec{F}' = -\vec{F}$. Preto sa veľkostí tých dvoch síl rovnajú:

$$\frac{Km}{r^2} = \frac{K'M}{r^2} \tag{178}$$

čiže

$$Km = K'M \tag{179}$$

a z toho dostávame

$$\frac{K}{M} = \frac{K'}{m} = \varkappa \tag{180}$$

kde $\varkappa$ (jeden zo spôsobov písania gréckeho písmena kapa) je označenie pre konštantu, ktorá nezávisí ani od vlastností planéty ani Slnka ani od ničoho iného; je to teda *univerzálna* konštanta. Veľkosť príťažlivej sily, ktoru na seba Slnko a hociktorá planéta pôsobia, teda môžeme vyjadriť formulou

$$\boxed{F = \varkappa \frac{mM}{r^2}} \tag{181}$$

čo je Newtonov gravitačný zákon (NGZ). Jeho slovné znenie je:

36. (a) Čo je intenzita gravitačného poľa? (Stačí stručná všeobecná formula.)
(b) Dá sa intenzita gravitačného poľa vždy stotožniť so zrýchlením hmotného bodu? (Stačí odpovedať *áno* alebo *nie*.)
(Preberané v časti 9.3.)

a)

Ak na hmotný bod o hmotnosti m nachádzajúci sa v mieste $\vec{r}$ pôsobí gravitačná sila $\vec{f}$, tak intenzita gravitačného poľa v mieste $\vec{r}$ je definovaná formulou

$$\vec{E} = \frac{\vec{f}}{m} \tag{184}$$

b) nie

ju $\vec{f}_{\text{tot}}$, pôsobiaca na daný hmotný bod je rovná tej $\vec{f}$. To vo všeobecnosti tak vôbec nemusí byť, takže má zmysel definovať zvlášť pojem *intenzita gravitačného poľa* a odlišovať ho od aktuálneho zrýchlenia daného hmotného bodu. Pojem *gravitačné zrýchlenie* však vo voľnejšom zmysle používame aj bez toho, že by sme mali na mysli naozajstné fyzikálne zrýchlenie nejakého hmotného bodu či telesa a máme vtedy vlastne na mysli intenzitu gravitačného poľa. Takže v takomto zmysle pojmy intenzita gravitačného poľa a gravitačné zrýchlenie neraz stotožňujeme.

37. (a) Konštantná sila $\vec{F}$ posunie teleso o úsek $d\vec{r}$. Akú prácu pritom vykoná?
(b) Nejaká sila $\vec{F}$ (táto nemusí byť konštantná) koná prácu posúvaním telesa (alebo hmotného bodu) z miesta $\vec{r}_1$ do miesta $\vec{r}_2$. Akú prácu pritom vykoná?
(c) Sila $\vec{F}$ vykoná za infinitezimálny čas dt prácu dW. Ako vyjadríme výkon P tejto sily?
(d) Odvoďte vyjadrenie výkonu pomocou sily a rýchlosti.
*(Preberané v časti **10.1**.)*

a) W = F*dr

b) $\boxed{W = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{r}}$

c) d)

Keď budeme počítať, aká práca je vykonaná za jednotku času, prídeme tým ku pojmu *výkon*. Spravíme to takto: Počítajme, akú prácu vykoná sila $\vec{F}$ za infinitezimálne krátky časový úsek dt. Je to

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt \tag{193}$$

Potom môžeme napísať definíciu a hneď aj vyjadrenie výkonu sily $\vec{F}$ takto:

$$\boxed{P \overset{\text{def.}}{=} \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}} \tag{194}$$

38. (a) Napíšte, ako vyjadríme jednotku práce (joule, J) pomocou jednotiek pre silu a dráhu.
(b) Napíšte, ako vyjadríme jednotku výkonu (watt, W) pomocou jednotiek pre prácu a čas.
*(Preberané v časti **10.1**.)*

(a) J = N . m
(b) W = J/s

39. (a) Zaveďte pojem potenciálové pole.
*(Preberané v časti **10.2**.)*
(b) Nakreslite obrázok s bodmi (1), (2) v priestore, medzi ktorými sa presúva hmotný bod, prípadne aj s referenčným bodom (0).
(c) Zaveďte pojem potenciálna energia a vysvetlite jej (približný) vzťah ku práci, ktorú by konala nejaká „ruka“, keby presúvala hmotný bod z miesta (1) do miesta (2).
(d) Napíšte formulu, ktorou vyjadríme potenciálnu energiu $U(\vec{r})$ všeobecne [vzhľadom na referenčný bod (0)].
*(Preberané v časti **10.3**.)*

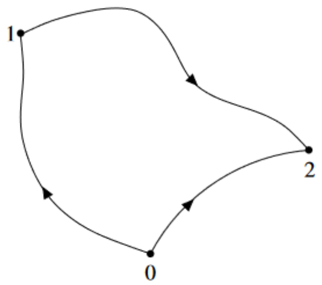
Ak platí $\vec{f}_{\text{ruka}} \approx -\vec{f}_{\text{pole}}$, môžeme písať

$$W_{\text{ruka}} \approx -\int_{(1)}^{(2)} \vec{f}_{\text{pole}} \cdot d\vec{r} \tag{197}$$

(a)

<u>Definícia:</u> *Ak sila $\vec{f}_{\text{pole}}$ je len funkciou polohy[18] a integrál na pravej strane (197) nezávisí od tvaru integračnej cesty (teda závisí len od výberu začiatočného a koncového bodu), tak pole vytvárajúce silu $\vec{f}_{\text{pole}}$ nazveme potenciálovým poľom [12].*

Pre potenciálové pole sa veľmi často používa aj pojem ***konzervatívne pole***. Týmto pojmom je vyjadrený fakt, že potenciálové pole zachováva – konzervuje – mechanickú energiu.

(b) 

$$\boxed{U_{21} = U_2 - U_1} \approx W_{\mathrm{ruka}} \qquad (200)$$

(c)
$$\boxed{\boxed{U(\vec{r}) = -\int_{(0)}^{(\vec{r})} \vec{f}_{\mathrm{pole}}(\vec{r}\,') \cdot \mathrm{d}\vec{r}\,'}} \qquad (202)$$
asi totok?

Ak zmeníme refrenčný bod, tak hodnoty potenciálnej energie sa posunú o nejakú konštantu: $U_{\mathrm{nová}}(\vec{r}) = U_{\mathrm{stará}}(\vec{r}) + \mathrm{const}$ (203)

(d)

40. (a) Celkovú silu na hmotný bod si zapíšte

$$\vec{f}_{\mathrm{tot}} = \vec{f}_{\mathrm{pole}} + \vec{f}_{\mathrm{ruka}}$$

kde $\vec{f}_{\mathrm{pole}}$ je sila potenciálového poľa a $\vec{f}_{\mathrm{ruka}}$ sú zvyšné sily (jedna alebo ich súčet). Môžu zahŕňať silu naozajstnej ruky, ale napr. aj silu odporu vzduchu.
(b) Zdôvodnite, prečo sa prácu sily $\vec{f}_{\mathrm{ruka}}$ dá vyjadriť ako rozdiel

$$W_{\mathrm{ruka}} = W_{\mathrm{tot}} - W_{\mathrm{pole}}$$

(c) Analyzujte príspevok W_{tot} (odvoďte preň výsledok) a ukážte, ako tento príspevok vedie ku pojmu ***kinetická energia***. Nezabudnite definovať pojem kinetická energia hmotného bodu.
(d) Bez odvodenia použite vyjadrenie

$$W_{\mathrm{pole}} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{f}_{\mathrm{pole}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = U_1 - U_2$$

a aj pomocou predošlých úvah potom dokážte, že ***ak*** $\boldsymbol{W_{\mathrm{ruka}} = 0}$ (počas nejakého bližšie nešpecifikovaného časového intervalu), ***tak mechanická energia hmotného bodu sa zachováva.*** (Napíšte pre tú energiu aj vyjadrenie.)
*(Preberané v časti **10.4.**)*

(a)

Teraz skúsme určiť prácu vykonanú tou „rukou" pri presune telesa po ľubovoľnej zvolenej krivke z bodu (1) do bodu (2). V súlade s definíciou práce, formulou (189), a použitím rozkladu (205) ju vieme vyjadriť

$$W_{\text{ruka}} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{f}_{\text{ruka}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{f}_{\text{tot}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} - \int_{(1)}^{(2)} \vec{f}_{\text{pole}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{207}$$

Zaveďme si pomocné označenia (i keď môžu byť z nejakých dôvodov mätúce, ale berme ich najmä ako označenia)

$$W_{\text{tot}} \equiv \int_{(1)}^{(2)} \vec{f}_{\text{tot}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{208}$$

$$W_{\text{pole}} \equiv \int_{(1)}^{(2)} \vec{f}_{\text{pole}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{209}$$

Potom môžeme napísať

$$W_{\text{ruka}} = W_{\text{tot}} - W_{\text{pole}} \tag{210}$$

(b)

$$\boxed{W_{\text{tot}} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2} \tag{218}$$

<u>Definícia:</u> Výraz

$$\boxed{\boxed{T = \frac{1}{2}mv^2}} \tag{219}$$

nazývame ***kinetická energia*** hmotného bodu.

Platí teda

(c)

$$\boxed{W_{\text{tot}} = T_2 - T_1} \tag{220}$$

Ak na teleso pôsobí aj tá prídavná sila $\vec{f}_{\text{ruka}}$, tak potom sa už mechanická energia telesa nezachováva a platí len rovnica alebo energetická bilancia (223), ktorú stručne zapíšeme

$$\boxed{\boxed{W_{\text{ruka}} = \Delta E_{\text{mech}}}} \tag{226}$$

kde $\Delta E_{\text{mech}} = E_2 - E_1$ je rozdiel mechanických energií (koncová mínus začiatočná). Ak teda na danej sústave (hmotný bod v potenciálovom poli) vykonáme prácu W_{ruka}, presne o toľko zmeníme jej mechanickú energiu.

(d) Zdá sa teda, že môžeme povedať, že mechanická energia sa zachováva, ak je práca $W_{\text{ruka}} = 0$. V zásade to platí,

41. Zdôvodnite, prečo je práca konaná proti sile poľa nezávislá od integračnej cesty.
    Je to tak voľne povedané. Máme samozrejme na mysli potenciálové pole a treba zdôvodniť formulu

$$\oint \vec{f}_{\text{pole}} \,.\, \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

(Preberané v časti ***10.5.****)*

Nebude na skúške

42. Dokážte, že potenciálové pole pôsobí na hmotný bod silou $\vec{f}_{\text{pole}} = -\vec{\nabla}U$. Nezabudnite pritom vysvetliť význam symbolu $\vec{\nabla}$.
*(Preberané v časti **10.6.**)*

$$U(\vec{r}+\mathrm{d}\vec{r}) - U(\vec{r}) = -\vec{f}_{\text{pole}}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

=>

$$U(\vec{r}+\mathrm{d}\vec{r}) = U(\vec{r}) + \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x} \mathrm{d}x + \cdots = U(\vec{r}) + \mathrm{d}\vec{r}\,.\,\vec{\nabla}U$$

=>

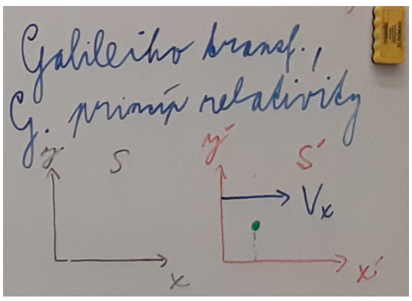
$$-\,\vec{f}(\vec{r})\,.\,\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\vec{r}\,.\,\vec{\nabla}U\,, \quad \forall \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\boxed{\vec{f}_{\text{pole}} = -\vec{\nabla}U} \equiv -\operatorname{grad} U$$

$$\boxed{\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)}$$

- gradient funkcie (zahŕňa parcialne derivacie zloziek x,y,z)

43. Majme inerciálnu vzťažnú sústavu S. Majme aj inú vzťažnú sústavu, označme ju S', takú, že sa vzhľadom na sústavu S pohybuje rovnomerne priamočiaro pozdĺž osi x rýchlosťou V_x.
(a) Zakreslite obrázok.
(b) Sformulujte Galileiho transformácie súradníc medzi sústavami S a S'. (Môžete použiť aj inú znamienkovú konvenciu, než sme mali na prednáške.)
(c) Zovšeobecnite Galileiho transformácie pre prípad, kedy sa sústava S' pohybuje vzhľadom na S všeobecným smerom konštantnou rýchlosťou $\vec{V}$.
(d) Nájdite vzťah medzi rýchlosťami hmotného bodu v tých dvoch sústavách (pre prípad všeobecného smeru rýchlosti $\vec{V}$).
(e) Nájdite vzťah medzi zrýchleniami hmotného bodu v tých dvoch sústavách.
(f) Slovne sformulujte, čo je Galileiho princíp relativity.
*(Preberané v časti **11.1.**)*

(a) 

$$
\begin{aligned}
x &= x' + V_x t \\
y &= y' \\
z &= z' \\
t &= t'
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= \vec{r}\,' + \vec{V} t \\
t &= t'
\end{aligned}
$$

(c)

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}\,'$$

(d)

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}\,'}$$

(e)

Zrýchlenia sú teda v oboch tých vzťažných sústavách rovnaké. Ľahko sa dá zistiť, že aj vzdialenosti medzi bodmi sú v oboch tých sústavách rovnaké [5]. O hmotnostiach mlčky predpokladáme, že tiež. Potom prichádzame k záveru,

že Newton zákon $m\vec{a} = \vec{F}$ platí v tejto forme v oboch tých vzťažných sústavách. Sú teda rovnocenné. A obe sú teda inerciálne. Inerciálnych vzťažných sústav máme mnoho, vlastne nekonečne veľa. Všetky sú navzájom rovnocenné.

(f) Toto tvrdenie (o ich rovnocennosti) sa nazýva ***Galileiho princíp relativity***.

44. Uvažujte neinerciálnu vzťažnú sústavu:
    (a) vysvetlite pojem ***fiktívna sila***,
    (b) napíšte 2. Newtonov zákon pre neinerciálnu sústavu, ktorá sa voči inerciálnej pohybuje so zrýchlením $\vec{a}^*$.
    *(Preberané v časti **11.2.**)*

(a) Fiktívna sila má opačný smer ako zrýchlenie neinerciálnej vzťažnej sústavy, v ktorej ju pozorujeme. To je v súlade s našimi skúsenosťami zo zrýchľujúcich áut, kde nás „zrýchlenie vtlačí do sedadla“. Keď pohybujeme s zrýchlením $\vec{a}*$ voči inerciálnej sústave tak vnimame fiktívnu silu:

$$\vec{F}_f = -m\vec{a}^*$$

(b) Druhý Newtonov zákon v neinerciálen vzťažnej sústave má tvar

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_f \tag{243}$$

kde $\vec{F}$ je výslednica skuročných síl a $\vec{F}_f$ je zotrvačná sila. Príkladmi ďalších zotrvačných síl sú napr. odstredivá sila a Coriolisova sila.

45. Slovne zdôvodnite, prečo sa dynamika sústavy hmotných bodov týka aj:
(a) simulácií deformovateľných telies (ako napr. lopta),
(b) simulácií tuhých telies (ako napr. biliardová guľa).
(Preberané v časti 12.)

a) Také teleso, napr. lopta, sa v hre dá simulovať ako sústava hmotných bodov pospájaných fiktívnymi pružinkami. Graficky sa to v návrhu herných modelov zakreslí pomocou sieťového zobrazenia: teleso vyzerá akoby vytvorené z nejakej siete, ktorá však zvyčajne má oká trojuholníkové, nie štvorcové.
b) Fyzika ich popisu je v počítačových hrách veľmi často používaná. Napr. keď vrhneme kameň, ktorý má nejaký oválny tvar, tak vizualizácia jeho pohybu v počítačovej hre môže vyzerať vcelku efektne – nielen letí, ale aj rotuje, nejako sa prevaľuje v priestore. Vyzerať to síce môže jednoducho, ale na správnu simuláciu takéhoto pohybu treba použiť správnu fyziku, a tá už nie je celkom jednoduchá. V teoretickom popise a v simuláciách tuhých telies sa dynamika sústavy hmotných bodov využíva nepriamo. Celý popis dynamiky tuhých telies totiž vychádza z dynamiky sústavy hmotných bodov, lebo aj tuhé teleso si vieme predstaviť ako objekt zložený z bodov.

46. Zaveďte pojem ***moment sily*** na elementárnom príklade, napr. pomocou úvahy o sile, ktorá pôsobí na list vrtule, alebo na iné teleso, ktoré sa môže otáčať okolo pevnej osi. Pritom nezabudnite aj:
(a) Zakresliť aspoň jeden obrázok, kde bude sila $\vec{F}$, vektor $\vec{r}$ označujúci jej pôsobisko a ***uhol*** medzi $\vec{F}$ a $\vec{r}$ bude nejaký ***všeobecný*** (nie 90°).
(b) Odvodiť formulu pre ***veľkosť*** momentu sily.
(c) Napísať vektorovú formulu pre ***vektor*** momentu sily.
(Preberané v časti 12.)

TO DO

47. (a) Napíšte formulu pre polohový ***vektor ťažiska*** sústavy N hmotných bodov, ktoré sa nachádzajú v miestach $\vec{r}_i,\ i \in \{1, ..., N\}$.
(b) Vyjadrite túto formulu aj pomocou troch samostatných formúl pre karteziánske zložky.
(Preberané v časti 12.1.)

TO DO

48. Uvažujte sústavu N hmotných bodov, ktoré pôsobia silami $\vec{f}_{ji}$ jeden na druhý a ešte na ne pôsobia aj vonkajšie sily $\vec{f}_i^{(\mathrm{e})}$. Silu pôsobiacu na i-ty hmotný bod si vyjadrite formulou

$$\vec{f}_i = \vec{f}_i^{(\mathrm{e})} + \sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{ji} \qquad (\vec{f}_{jj} \equiv \vec{0} \quad \forall j)$$

(a) Odvoďte ***vetu o pohybe ťažiska*** tejto sústavy hmotných bodov.
(b) Pomocou označenia $\vec{F}$ pre súčet vonkajších síl a ďalších praktických označení zapíšte ***vetu*** o pohybe ťažiska ***v stručnom tvare***.
(Preberané v časti 12.2.)

(a)

$$M\ddot{\vec{R}} = \sum_i \underbrace{m_i \ddot{\vec{r}}_i}_{\vec{f}_i} = \sum_i \vec{f}_i = \sum_i \vec{f}_i^{(e)} + \underbrace{\sum_i \sum_j \vec{f}_{ji}}_{\vec{0}}$$

(b) $$\boxed{M\ddot{\vec{R}} = \sum_i \vec{f}_i^{(e)} \equiv \vec{F}}$$ alebo $$\vec{F} = M\vec{A}$$

49. Definujte, čo je celková hybnosť sústavy N hmotných bodov a nájdite jej súvis s rýchlosťou pohybu ťažiska tejto sústavy. Pri odvodení použite definičnú formulu pre polohový vektor ťažiska. Vysvetlite všetky použité symboly.
(Preberané v časti 12.2.)

TO DO

50. Slovne napíšte, za akých podmienok sa mechanická energia sústavy hmotných bodov zachováva a zapíšte formulu vyjadrujúcu konštantnosť tejto energie. Vysvetlite všetky použité symboly.
(Preberané v časti 12.3.)

Aby boli splnené podmienky pre zachovanie mechanickej energie, vzájomné pôsobenie a vonkajšie pole musia byť také, aby sa celková sila na hociktorý z bodov dala vyjadriť formulou tvaru

$$\vec{f}_i = -\vec{\nabla}_i U \tag{265}$$

kde nabla operátor tentoraz musí mať index hmotného bodu, podľa súradníc ktorého sa derivuje:

$$\vec{\nabla}_i \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial z_i} \right) \tag{266}$$

Ak by v sústave bolo nejaké trenie alebo sila odporu vzduchu, tak celková sila na jej hmotné body by sa už nedala zapísať formulou (265) a mechanická energia by sa nezachovávala.

51. Napíšte definičnú formulu pre ***moment hybnosti*** sústavy N hmotných bodov. Vysvetlite všetky použité symboly.
(Preberané v časti 12.4.)

Moment hybnosti (MH) sústavy hmotných bodov je definovaný ako súčet momentov hybností jednotlivých bodov:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \tag{267}$$

52. **Úvahy vo všeobecnej inerciálnej vzťažnej sústave:**
(a) Pre sústavu hmotných bodov odvoďte ***druhú vetu impulzovú***, teda formulu

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i^{(\mathrm{e})} \equiv \vec{\Gamma}$$

Pri jej odvodení použite rovnosť $\sum_i \vec{r}_i \times \sum_j \vec{f}_{ji} = \vec{0}$ ktorú nemusíte dokazovať.
(b) Ako sa nazýva fyzikálna veličina označená symbolom $\vec{\Gamma}$? Vysvetlite aj ďalšie použité symboly.
(c) Ukážte, ako z druhej vety impulzovej vyplýva, že celkový moment hybnosti sa môže zachovávať. (Napíšte aj, za akých podmienok sa zachováva.)
(Preberané v časti 12.4.1.)

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{L}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \left(\dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i\right) = \\
&= \sum_i \frac{1}{m_i}\underbrace{\left(\vec{p}_i \times \vec{p}_i\right)}_{\vec{0}} + \sum_i \left(\vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i\right) = \\
&= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \sum_i \left[\vec{r}_i \times \left(\vec{f}^{(e)} + \sum_j \vec{f}_{ji}\right)\right] = \\
&= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}^{(e)} + \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \times \sum_j \vec{f}_{ji}}_{\vec{0}}
\end{aligned}$$

(b) $\vec{f}_i^{(e)}$ - je vonkajšia sila pôsobiaca na i-ty hmotný bod

$\vec{\Gamma}$ - vonkajšia moment sily

$\vec{r}_i$ - i-ty hmotný bod (jeho súradnice, kvôli vektoru)

(c) ? **TO DO**

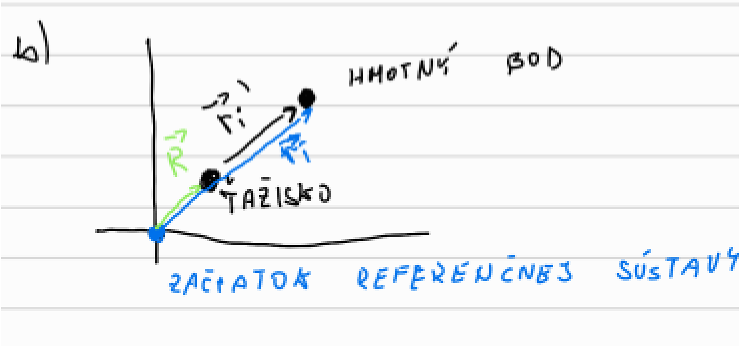
53. **Úvahy s použitím ťažiskovej vzťažnej sústavy:**
(a) Polohový vektor hmotného bodu si vyjadrite v tvare

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i{}'$$

kde $\vec{R}$ je polohový vektor ťažiska (vzhľadom na hlavnú súradnicovú sústavu) a $\vec{r}_i{}'$ je poloha bodu vzhľadom na ťažisko.
(b) Nakreslite ku tomu obrázok.
(c) Dokážte, že platia formuly

$$\sum_i m_i \vec{r}_i{}' = \vec{0}, , \qquad \sum_i m_i \vec{v}_i{}' = \vec{0}$$

kde $\vec{v}_i{}'$ je rýchlosť bodu vzhľadom na ťažisko.
(Preberané v časti 12.4.2.)



$\vec{r}_i{}'$ je teda vektor smerujúci od ťažiska po daný hmotný bod.
$\vec{r}_i$ je vektor smerujúci od počiatku našej referenčnej vzťažnej sústavy po daný hmotný bod.
$\vec{R}$ je vektor smerujúci od počiatku našej referenčnej vzťažnej sústavy po ťažisko sústavy hmotných bodov.

e) $\sum_i m_i \vec{r}_i = \sum_i m_i \vec{R}$

$$\sum_i m_i \left(\vec{R} + \vec{r}_i' \right) = \sum_i m_i \vec{R}$$

$$\cancel{\sum_i m_i \vec{R}} + \sum_i m_i \vec{r}_i' = \cancel{\sum_i m_i \vec{R}}$$

$$\boxed{\sum_i m_i \vec{r}_i' = \vec{0}}$$

$$\boxed{\sum_i m_i \vec{r}_i' = \vec{0}}$$

TO DO

54. Je známe, že ***moment hybnosti*** (MH) sústavy hmotných bodov sa dá ***rozdeliť na dve zložky***: MH ťažiska a MH pohybu *okolo* ťažiska.
    (a) Zapíšte tento rozklad MH formulami a vysvetlite vyznam jednotlivých symbolov.
    (b) Pomocou MH a ďalších veličín zapíšte rovnicu pre dynamiku pohybu ťažiska.
    (c) Pomocou MH a ďalších veličín zapíšte rovnicu pre dynamiku pohybu *okolo* ťažiska.
    (Nezabudnite vysvetliť aj význam symbolov, tak isto aj v časti (b).)
    (Preberané v časti 12.4.2.)

TO DO

55. Napíšte, ako sa dá kinetická energia sústavy hmotných bodov rozčleniť na ťažiskovú časť T_{CM} a príspevok pohybu okolo ťažiska T'.
(Preberané v časti 12.5.)

$$\boxed{T = T_{\text{CM}} + T'}$$

$$T_{\text{CM}} = \frac{1}{2} M V^2 \,, \qquad T' = \frac{1}{2} \sum_i m_i {v'_i}^2$$

56. Ako definujeme ideálne tuhé teleso?
(Preberané v časti 13.)

Teleso, ktore sa pri pôsobení sil nedeformuje (vzdialenosti bodov nemenné, uhly nemenné).

57. Koľko reálnych čísiel musíme zadať, aby sme jednoznačne špecifikovali polohu a orientáciu ideálne tuhého telesa v 3D priestore? Uveďte jeden príklad a opíšte, aký je geometrický význam týchto čísiel.
(Preberané v časti 13.)

TO DO

58. Uveďte vzťah pre kinetickú energiu ideálne tuhého telesa, ktoré sa otáča uhlovou rýchlosťou ω okolo osi, ktorá nemení svoj smer a prechádza jeho ťažiskom.
(Preberané v časti 13.)

TO DO

59. Ako je definovaný moment zotrvačnosti ideálne tuhého telesa? Čo všetko je potrebné špecifikovať, aby bola jeho hodnota jednoznačná?
(Preberané v časti 13.)

0

TO DO

60. Uveďte vzťah pre priemet momentu hybnosti ideálne tuhého telesa do daného smeru, ak poznáme jeho vhodný moment zotrvačnosti a uhlovú rýchlosť otáčania.
(Preberané v časti 13.)

TO DO

61. Sformuluje pohybové rovnice ideálne tuhého telesa, ktoré sa pohybuje v rovine a os jeho otáčania je na túto rovinu kolmá. Rovnice napíšte tak aby zodpovedali situácii, v ktorej je súčet všetkých síl ktoré naň pôsobia nulový, ale súčet všetkých momentov síl, ktoré naň pôsobia je $\vec{\Gamma} \neq \vec{0}$.
(Preberané v časti 13.)

TO DO

62. Nájdite vyjadrenie pre moment zotrvačnosti činky skladajúcej sa z tyče s dĺžkou ℓ a hmotnosťou m_ℓ a dvoch guľových závaží na koncoch tyče, ktorých polomer je R a hmotnosť m_R. Os otáčania, vzhľadom na ktorú máte vyjadriť moment zotrvačnosti je kolmá na tyč a prechádza ťažiskom činky. Môžete použiť nasledovné vzťahy:

$$J_\mathrm{g} = \frac{2}{5} m R^2 \,, \qquad J_\mathrm{t} = \frac{1}{12} m \ell^2 \,, \qquad J = J' + m d^2$$

pričom označenia v týchto vzťahoch priamo nesúvisia s označeniami v zadaní úlohy.
(Preberané v časti 13.)

TO DO