

1 Dynamika tuhých telies

- Zopakovanie:

- Newtonov zákon pre hmotný bod
- Pohybové zákony pre sústavu hmotných bodov

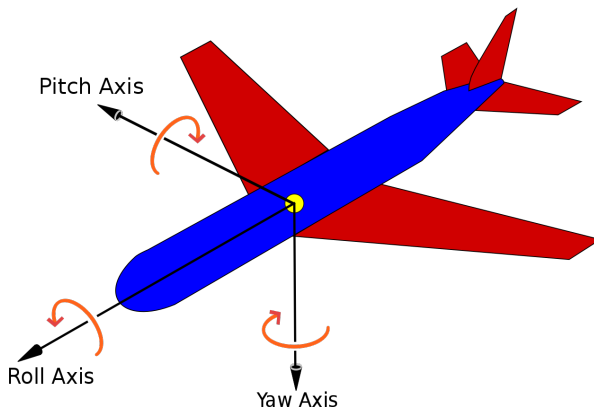
$$M = \sum_i m_i, \quad \vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i, \quad \vec{F} = \sum_i \vec{f}_i^{(e)}$$

$$M \frac{d}{dt} \vec{V} = \vec{F} \rightarrow \vec{R}(t)$$

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i, \quad \vec{\Gamma} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i^{(e)}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{\Gamma} \rightarrow ???$$

- Ideálne tuhé teleso (itt): vzdialenosti bodov nemenné, uhly nemenné
- Stupne voľnosti itt: ťažisko \vec{R} (voči inerciálnej sústave), uhol natočenia ϕ (voči referenčnej orientácii)
- Natočenie v 3D - tri uhly voči referenčnej orientácii, záleží na poradí, rôzne konvencie. Príklad: yaw, pitch, roll.



- Otáčanie itt okolo pevnej osi, vektor uhlovej rýchlosti (mali by poznať)
 $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\vec{e}$.
- Kinetická energia itt (zo sústavy hmotných bodov)

$$T = T_{\text{CM}} + T', \quad T_{\text{CM}} = \frac{1}{2}MV^2, \quad T' = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2$$

$$\vec{v}_i' = \vec{\omega} \times \vec{r}_i', \quad v_i' = r_{i,\perp}' \omega$$

$$T' = \frac{1}{2} \sum_i m_i (r_{i,\perp}')^2 \omega^2 = \frac{1}{2} J' \omega^2$$

- Moment zotrvačnosti itt (vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom)

$$J' = \sum_i m_i (r_{i,\perp}')^2$$

$[J] = \text{kg.m}^2$, valec $J' = \frac{1}{2}MR^2$, tyč $J' = \frac{1}{12}Ml^2$, guľa $J' = \frac{2}{5}MR^2$.

Steinerova veta $J = J' + Md^2$.

Jedno teleso má rôzne momenty zotrvačnosti vzhľadom na inak orientované osi, dynamika 3D rotácií vyžaduje tenzor zotrvačnosti - matica 3×3 .

Príklad 1.1 Jeden generátor veternej elektrárne s výkonom 3 MW má tri asi $l = 50\text{m}$ dlhé lopatky. Hmotnosť jednej lopatky je asi 12,5t. (1) Aký je moment zotrvačnosti vrtule? $J' = 3(\frac{1}{12}ml^2 + m(l/2)^2) = ml^2 = 31 \cdot 10^6 \text{kg.m}^2$. (2) Aká je jej kinetická energia, ak sa otočí raz za 4 s? $T' = \frac{1}{2}J(2\pi/\Delta t)^2 = 39\text{MJ}$.

- Moment hybnosti v smere osi rotácie (\vec{e})

$$\vec{L}' = \sum_i m_i \vec{r}_i' \times \vec{v}_i'$$

$$\vec{L}' \cdot \vec{e} = \sum_i m_i (\vec{r}_i' \times \vec{v}_i') \cdot \vec{e} = \sum_i m_i (\vec{v}_i' \times \vec{e}) \cdot \vec{r}_i'$$

$$= \sum_i m_i v_i' \vec{e}_r \cdot \vec{r}_i' = \sum_i m_i v_i' r_{i,\perp}' = \sum_i m_i (r_{i,\perp}')^2 \omega$$

$$= J_{\vec{e}}' \omega$$

Vo všeobecnosti \vec{L} môže byť inak orientovaný ako $\vec{\omega}$.

- Pohybové rovnice itt (pri nemennom smere osi otáčania, z rovníc pre sústavu hmotných bodov):

$$M \frac{d}{dt} \vec{V} = \vec{F}, \quad \vec{F} = \sum_i \vec{f}_i^{(e)}$$

$$J'_e \frac{d}{dt} \omega = \vec{\Gamma}' \cdot \vec{e}, \quad \vec{\Gamma}' = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{f}_i^{(e)}$$

Príklad 1.2 Aký veľký je moment síl, ktorým pôsobí vietor na lopatky generátora veternej elektrárne z predchádzajúceho príkladu, ak sa vrtuľa roztočí za dobu $t = 26\text{ s}$ z pokoja na uhlovú rýchlosť jednej obrátky za 4 s ?

Poznámky: (1) Vrtuľa sa roztáča bez zapojenia záťaže, t.j. generátor je zapojený naprázdno. (2) Dá sa ukázať, že pre okamžitý výkon točiaceho sa stroja platí $P = \Gamma\omega$ a teda čas roztáčania je v súlade s predchádzajúcim príkladom, kde sa výkonovo zaťažaná vrtuľa otáča už s konštantnou uhlovou rýchlosťou.

- Pohybové rovnice sústavy itt; pridaj 3. Newtonov zákon.

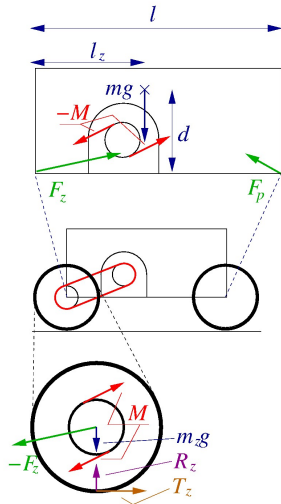
Príklad 1.3 Akým zrýchlením sa pohybuje závažie M_1 zavesené na lane, ak ... kladka I , druhé závažie M_2 . Akou silou je napínané lano?

$$ma = -mg + f_m$$

$$Ma = +Mg - f_M$$

$$J\epsilon = -f_m R + f_M R$$

Príklad 1.4 (Tento príklad nebol na prednáške rozanalyzovaný, ale spomínal som ho ako príklad na dynamiku sústavy itt v súvislosti s populárnymi hrami „X-moto“ alebo „Hill climb racing“.) Sformulujte pohybové rovnice pre pohyb autíčka v 2D, ak krútiaci moment motora pôsobiaci na zadné koleso je M ? Hmotnosť autíčka je m , hmotnosť kolies $m_K (= m_z)$, moment zotrvačnosti kolies J_K , vonkajší polomer kolies r . Predpokladajte, že nedôjde k prešmyku kolies na teréne.



Zadné koleso:

$$\begin{aligned} m_K a_{\parallel} &= T_z - F_{z,\parallel} \\ m_K a_{\perp} &= -m_K g \cos(\alpha) + R_z - F_{z,\perp} \\ J_K \epsilon_K &= M - r T_z \end{aligned}$$

Predné koleso:

$$\begin{aligned} m_K a_{\parallel} &= T_p - F_{p,\parallel} \\ m_K a_{\perp} &= -m_K g \cos(\alpha) + R_p - F_{p,\perp} \\ J_K \epsilon_K &= -r T_p \end{aligned}$$

Telo vozidla:

$$\begin{aligned} m a_{\parallel} &= F_{p,\parallel} + F_{z,\parallel} \\ m a_{\perp} &= -m g \cos(\alpha) + F_{p,\perp} + F_{z,\perp} \\ J \epsilon &= -M + l_z F_{z,\perp} - d F_{z,\parallel} - l_p F_{p,\perp} - d F_{p,\parallel} \end{aligned}$$

https://ufv.science.upjs.sk/_projekty/smolenice/pdf_13/08_bokes.pdf