

Brachistochrone-problemet uten friksjon

H. Collett^c, M. Egeli^c, P. Kjærran^b, M. Nesse^a, N. Rystad^c

^aInstitutt for bygg- og miljøteknikk, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, 7491 Trondheim.

^bInstitutt for teknisk kybernetikk, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, 7491 Trondheim.

^cInstitutt for industriell økonomi og teknologiledelse, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, 7491 Trondheim.

Sammendrag

For å forsøke å finne en løsning på Brachistochrone-problemet, som går ut på å finne den banen fra et punkt til et annet lavere punkt som en kule bruker kortest tid på å trille ned, ble det på tur utformet tre forskjellige kurver i en justerbar berg- og dalbane. En bordtennisball ble så filmet med et høyhastighetskamera mens den traverserte kurvene, og bildene ble senere analysert ved hjelp av Tracker. Resultatene viste at ballen i gjennomsnitt brukte $(1,082 \pm 0,008)$ sekunder på å rulle ned sirkelbue-kurven, og $(1,083 \pm 0,011)$ sekunder ned sykloide-kurven, mens ballen teoretisk sett skulle ha brukt kortest tid på sykloide-kurven. Hovedgrunnene for at det teoretiske utfallet ikke ble det faktiske utfallet i dette forsøket, er trolig at kurvene ikke var formet helt korrekt, og at det er et energitap med tanke på den statiske rullefriksjonen.

1. Introduksjon

Helt siden Johann Bernoulli satte Brachistochrone-problemet på dagsorden i 1696 [1] har det fascinert fysikere og matematikere. Han definerte problemet som:

Gitt to punkter A og B i det vertikale planet. Hva er kurven til et punkt påvirket av kun tyngdekraften, som starter i A og på kortest mulig tid når B. [1]

Problemet ble løst av flere anerkjente matematikere og fysikere, og løsningskurven fikk tilnavnet Brachistochrone-kurven. (Brachistochrone er gresk og betyr korteste tid). [2]

Gjennom dette forsøket har vi som mål å finne ut hvilken kurve som gir den raskeste rulletiden fra A til B. For å få til dette, skal vi sammenlikne en lineær, en sirkelbueformet og en sykloideformet baneprofil.

2. Teori

Vi har Newtons andre lov,

$$\sum F = ma, \quad (1)$$

hvor F er summen av kreftene som virker på legemet, m er massen og a er legemets akselerasjon. Ved å dekomponere kreftene som virker på ballen i en parallell og normal komponent relativt til underlaget, kan vi uttrykke legemets akselerasjon (a) ved

$$a = \dot{v} \mathbf{e}_{\parallel} + \frac{v^2}{R(x)} \mathbf{e}_{\perp}, \quad (2)$$

hvor \dot{v} er baneakselerasjonen langs underlaget, $R(x)$ er banens krumningsradius, v er legemets hastighet, \mathbf{e}_{\parallel} og \mathbf{e}_{\perp} er enhetsvektorene i henholdsvis fartsretning og normalretning. Parallellkomponenten kommer fra tyngdekraftens

akselerasjon, og normalkomponenten kommer fra ballens sentripetalakselerasjon. Ved å se på kraftsummen i de to retningene får vi likningene

$$N - mg \cos \alpha(x) = \frac{mv^2}{R(x)}, \quad (3)$$

$$mg \sin \alpha(x) - f = m\dot{v}. \quad (4)$$

Her er N normalkraften, $\alpha(x)$ banens hellningsvinkel og f friksjonskraften. Friksjonskraften vil her ha samme fortegn som ballens akselerasjon, men være motstatt rettet. I et system som bare tar høyde for den statiske rullefriksjonen, kan vi uttrykke friksjonskraften f som

$$f = I_0 \frac{\dot{v}}{r^2}, \quad (5)$$

hvor I_0 er ballens treghetsmoment og r er baneradien. (5) forutsetter rullebetingelsen $v = \omega r$, som beskriver en rullebevegelse uten sluring. Vi har at $I_0 = cmr^2$, hvor c avhenger av objektets utforming. Innsatt i likning [4] kan ballens akselerasjon uttrykkes ved

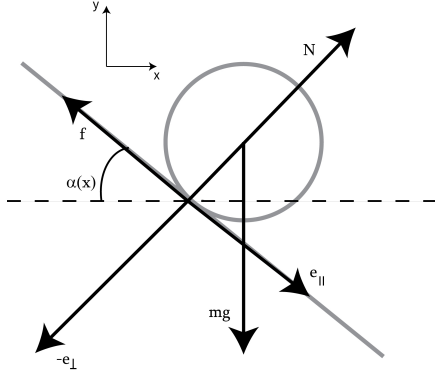
$$a(x) = \frac{g \sin \alpha(x)}{1 + c}. \quad (6)$$

Utrykket for akselerasjonen kan integreres med Eulers metode gitt ved likningene

$$v_{n+1} = v_n + a(x_n) \cdot \Delta t, \quad (7)$$

$$x_{n+1} = x_n + v \cos \alpha \cdot \Delta t. \quad (8)$$

Her er Δt steglengde. Ved å sette akselerasjonen inn i (7) kan man finne en ny verdi for hastigheten v . Deretter kan Eulers metode benyttes på nytt (8) for å beregne en ny



Figur 1: Figuren viser tyngdekraften mg , normalkraften N og friksjonskraften f , samt dekomponerte krefter parallelt og normalt på underlaget. $\alpha(x)$ er banens hellningsvinkel og sirkelen illustrerer ballen.

verdi for ballens horisontale posisjon. Ved å gjenta stegene ovenfor kan en iterativt traversere ballens bane.

Alle målinger av fysiske størrelser er usikre. Ballens tid fra punkt A til punkt B er en usikker størrelse, så det er viktig å se på usikkerheten i tidsmålingen.

Gjennomsnittet på målingene i tid er gitt ved formelen

$$\bar{t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i. \quad (9)$$

Et mål på usikkerheten i hver måling er standardavviket,

$$\delta t = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (t_i - \bar{t})^2}. \quad (10)$$

Det kan tenkes på som å finne det gjennomsnittlige avviket fra den mest sannsynlige verdien. Standardfeilen av et gjennomsnitt er standardavviket i utvalget dividert med kvadratroten av antall observasjoner N ,

$$\delta \bar{t} = \frac{\delta t}{\sqrt{N}}. \quad (11)$$

For å finne usikkerheten til målingene, brukes hvor langt unna standardfeilen gjennomsnittet av målingene ligger,

$$\bar{t} \pm \delta \bar{t}. \quad (12)$$

Figur 1 viser kreftene som virker på ballen. Dette er initiell posisjon før ballens bevegelse, hvor alle kurvene starter med en hellning i ulik grad. Normalkraften og enhetsvektoren parallelt med fartsretningen er like store og motsatt rettet. Enhetsvektoren parallelt med fartsretningen er gitt av en dekomponering av tyngdekraften som virker på ballen.

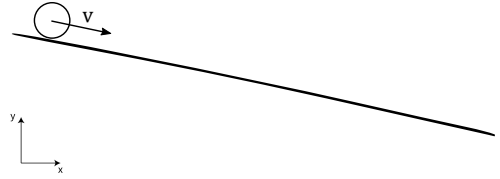
3. Eksperimentell metode

Figur 2, 3 og 4 viser de ulike baneprofilene vi benyttet i forsøket. En bordtennisball rulles ned disse kurvene, og vi

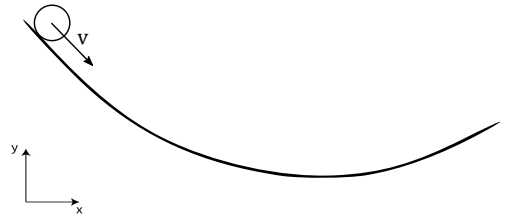
filmer med et høyhastighetskamera. Ballens bevegelse spores i Tracker [3] og vi får med det tiden som ballen bruker fra banens start- til endepunkt. Usikkerheten bestemmes ved å gjenta forsøket og beregne en standardfeil. Resultatene er funnet ved å ta gjennomsnittet av 12 målinger.

Fra tids-, og posisjonsdata fra Tracker kunne vi danne en interpolasjonen av de ulike kurvene. Gjennom bruk av et egenlaget dataprogram [4], som benytter seg av Eulers metode, kan vi iterativt traversere de interpolerte banene i et friksjonsfritt system (ved unntak av ballens statiske rullefriksjon, siden vi i [6] tar høyde for legemets treghetsmoment.) Den interpolerte banen er representert ved et Lagrange-polynom av grad 8, og i anvendelsene av Eulers metode benyttet vi en steglengde Δt lik $1 \cdot 10^{-6}$ s. Lagrange-polynomene ble generert ved hjelp av Common Apaches' bibliotek for matematisk analyse [5]. Ved valg av datapunkter benyttet vi Chebyshev-noder [6] for å minimere effekten av Runge's fenomen [7]. All kode er tilgjengelig på GitHub [4].

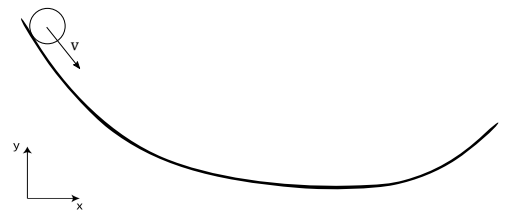
Den raskeste banen finnes ved å regne et gjennomsnitt av alle tidene fra hver av de respektive banene.



Figur 2: Ball som ruller langs en rett linje, der v er fartsretning ved ballens posisjon.



Figur 3: Ball som ruller langs en kurve formet som en sirkelbue, der v er fartsretning ved ballens posisjon.



Figur 4: Ball som ruller langs en kurve formet som en sykloide, der v er fartsretning ved ballens posisjon.

4. Resultater

Tabell 1: Denne tabellen viser gjennomsnittet \bar{t} med standardavvik for tid målt for en kule som ruller fra start- til sluttpunkt for hver av de tre kurvene. Resultatet er basert på 12 målinger. Den siste kolonnen viser tilsvarende rulletid for de interpolerte banene fra et tilfeldig valgt datasett fra de ulike kurvene.

Kurve	\bar{t} [s]	t (numerisk) [s]
Linje	$1,724 \pm 0,025$	1,695
Sirkelbue	$1,082 \pm 0,008$	0,998
Sykloide	$1,083 \pm 0,011$	0,957

Fra tabellen vises det at banen formet som en sirkelbue og banen formet som en sykloide brukte svært lik tid. Banen formet som en sirkelbue ble målt til å være den raskeste.

I figur 5, 6, 7 og 8 er det tatt utgangspunkt i banen formet som en sykloide. De er tatt utgangspunkt av et tilfeldig valgt datasett (måling 1). Figur 5 og 6 viser numerisk data opp mot eksperimentelle data. Vi ser at den eksperimentelt målte hastigheten i starten er lavere enn den teoretiske verdien, noe som er i overensstemmelse med energibevarelse. Grafene krysser i begge tilfeller, noe som blir tatt opp mot diskusjon.

Ettersom sykloidebanen ikke er rett, er både normalkraften og friksjonskraften ikke konstant [figur 7 og 8].

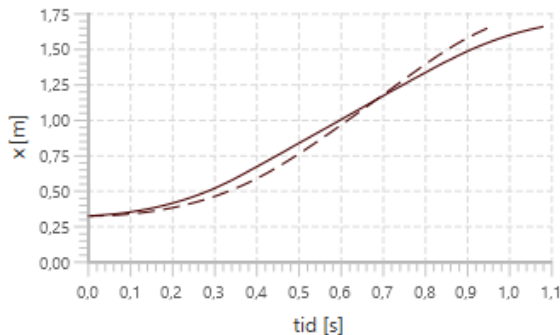


Figure 5: Viser ballens horisontale posisjon som funksjon av tid. Den heltrukkede linjen representerer eksperimentelle data fra måling 1 fra sykloidebanen, mens den striplede linjen representerer numeriske data uten energitap.

5. Diskusjon

Som man kan se av resultatene i tabell 1 er den rettlinjede banen vist ved figur 2 den tregeste fra A til B. Dette stemmer sammenlignet med antagelsen vi hadde på forhånd. Den rettlinjede banen gir tyngdeakselerasjonen g mindre rom for å akselerere ballen opp i fart tidlig i rullefasen, enn det de to andre banene som starter brattere. Dette kan man se ved å dekomponere g i x- og y-retning for de respektive banene.

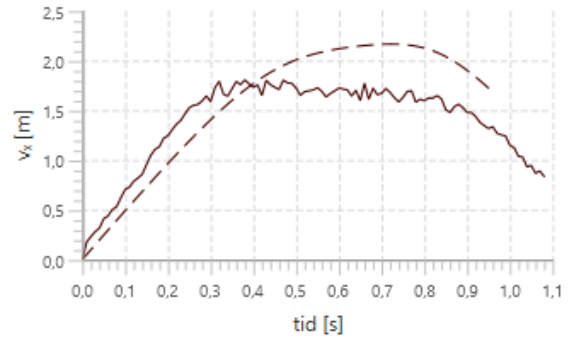


Figure 6: Viser ballens hastighet v som funksjon av tid. Den heltrukkede linjen representerer eksperimentelle data for måling 1 fra sykloidebanen, mens den striplede linjen representerer numeriske data.

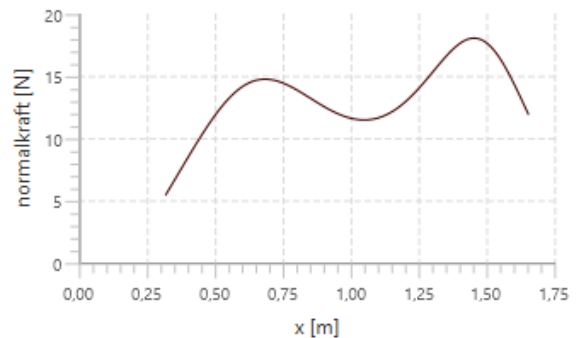


Figure 7: Viser numeriske verdier for normalkraften som funksjon av ballens horisontale posisjon til måling 1 av sykloidebanen.

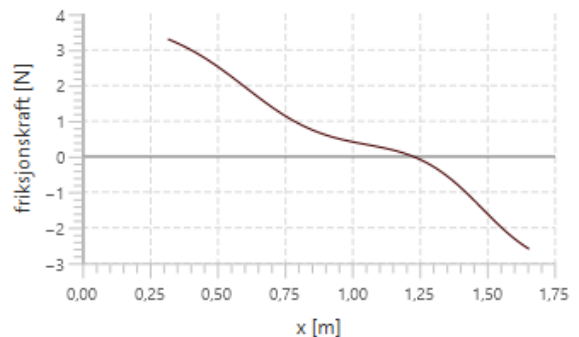


Figure 8: Viser numeriske verdier for friksjonskraften som funksjon av ballens horisontale posisjon til måling 1 av sykloidebanen.

Videre viser resultatene fra tabell 1 at rulletiden til de ikke-lineære kurvene er svært like, hvorav sirkelbuen er marginalt raskere. Dette stemmer ikke med antagelsen vi hadde på forhånd. En viktig årsak til dette resultatet kan være at energitapet er større i sykloidebanen. Dette kommer blandt annet fra at ballen vil oppnå en høyere hastighet tidlig i banen, derav økt friksjon. En annen påvirkningsfaktor kan være at kurven har en høy hellningsvinkel i starten, som resulterer i at ballen vil slure. Sluringen kommer av at dreiemomentet forårsaket av friksjonskraften ikke er tilstrekkelig for å gi en vinkelakselerasjon som tilsvarer ballens akselerasjon.

Andre feilkilder kan være banens utforming, og i hvilken grad måledataene fra Tracker er nøyaktige. Figur 3 og 4 er en gjengivelse av måledataene våre i Tracker. Det vil si at de er en gjengivelse av de faktiske banene som ble benyttet under forsøket. Vi kan se av dem at hverken sirkelbuebanen eller sykloidebanen er helt korrekte gjengivelser av figurene navnene tilsier. Eksempelvis har 4 en noe mindre jevn krumning enn en matematisk sykloide.

Av figur 5 og figur 6 ser vi at de eksperimentelle resultatene fra $x(t)$ og $v_x(t)$ viser at ballen underveis i banen har trillet lengre og fortere enn det de numeriske utregningene viser. Den numeriske løsningen tar ikke hensyn til friksjon, mens eksperimentelle data er med friksjon. Dette peker til feilkilder ved den numeriske analysen, ettersom ballen ikke skal kunne bevege seg raskere og lengre i et system med friksjon enn i et teoretisk system hvor friksjon er utelatt. De motstridende resultatene kan komme fra perspektivfeil, eller at ballen har en initiell hastighet som ikke tas høyde for i de numeriske beregningene.

Videre ser vi at den målte eksperimentelle farten vist ved figur 6 begynner å avta. Den eksperimentelle hastigheten representerer momentan hastighet i ulike punkter i banen. Årsaken til bevegelsene er at funksjonen vi bruker med autotracker ikke er 100% nøyaktig i målingene sine av ballens posisjon. Det gjør at avstandene ballen tilbakelegger mellom målepunktene ikke blir presist målt, og følgelig blir den utregnede farten heller ikke presis.

Av figur 7 øker og minsker normalkraften i tråd med formelen (3) for normalkraft. Vi ser også at 7 har to topppunkter, som kommer fra at sentripetalkraften som bidrar til normalkraften er omvendt proporsjonal med banens krumningsradius. Siden sykloiden har en høy krumning mot starten og slutten av banen får vi to lokale topppunkter.

Friksjonskraften skifter fortegn fra positiv til negativ underveis i banen. Som nevnt har vi tatt utgangspunkt i sykloidebanen for grafene, hvor banen avslutter med å bevege seg i motsatt retning i y-komponent i forhold til tyngnekraften. Etter formel (4) for friksjonskraft vil akselerasjonen til ballen og friksjonskraften ha samme fortegn, men være motsatt rettet. Det er derfor vi ser at friksjonskraften skifter fortegn i samsvar med banens hellningsvinkel.

Det er verdt å merke seg at med standardavviket som

er presentert, kan utfallet også føre til at sykloidebanen ved enkelte forsøk er raskere enn sirkelbuebanen. Dette kan vi se ved at resultatene ligger innenfor hverandres usikkerhetsintervall. Vi valgte å basere den raskeste banen på gjennomsnittet til målingene, og da går sirkelbuen frem som den raskeste.

6. Konklusjon

I dette forsøket, hvor vi ønsket å finne den raskeste banen fra et punkt A til et punkt B, gjennomførte vi 12 forsøk på tre ulike baner; rett linje, sirkelbue og sykloidebane. Den raskeste banen ble etter våre tidsmålinger banen formet som en sirkelbue. Målingene viste at sirkelbue-banen og sykloide-banen lå veldig tett opp mot hverandre, mens den rette kurven var den klart tregeste. I tillegg gjorde vi noen numeriske beregninger hvor vi fant ut at sykloidebanen ville være den raskeste. Resultatene viste dog at sirkelbuebanen var raskere enn sykloidebanen. Denne forskjellen skyldes i hovedsak en upresis baneutforming og energitap fra friksjon mellom ball og underlag, samt luftmotstand.

Referanser

- [1] *Acta eruditorum*. Nummer v. 18 i *Acta eruditorum*. Christoph Günther, 1696. <https://books.google.no/books?id=4q1RAAAAcAAJ>.
- [2] inc, Apple: *Ordbok*. 2017. Version 2.2.2 (203).
- [3] Brown, Doug: *Tracker*. <https://physlets.org/tracker/>.
- [4] Kjærran, Patrik. <https://github.com/patrikkj/Patrik-Forked/tree/master/Physics>.
- [5] Foundation, The Apache Software. <http://commons.apache.org/proper/commons-math/javadocs/api-3.6/org/apache/commons/math3/analysis/polynomials/PolynomialFunctionLagrangeForm.html>.
- [6] *Wikipedia - Chebyshev nodes*. https://en.wikipedia.org/wiki/Chebyshev_nodes.
- [7] *Wikipedia - Runge's phenomenon*. https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%27s_phenomenon.