Øving 6 - Patrik Kjærran

① $f''(x) = kf(x)$, $f(-\pi) = f(\pi)$, $f'(-\pi) = f'(\pi)$ for $x \in [-\pi, \pi]$

a) $\left.\begin{array}{l} \lambda^2 - k = 0 \;\Big|\; k=0 \text{ gir} \\ \lambda^2 = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{Dobbel rot}}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} f(x) = c_1 e^{0 \cdot x} + c_2 x e^{0 \cdot x} \\ \quad = c_1 + c_2 x \end{array}$

Innsatt og løst for initialbetingelser:

$f(x) = c_1 = C$

b) $\left.\begin{array}{l} \lambda^2 - k = 0 \\ \lambda^2 = k \end{array}\right\} \overset{\text{Distinkte, reelle røtter}}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} f(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx} \\ f'(x) = c_1 k e^{kx} - c_2 k e^{-kx} \end{array}$

Innsatt for initialbetingelser:

I: $c_1 e^{k\pi} + c_2 e^{-k\pi} = c_1 e^{-k\pi} + c_2 e^{k\pi}$
$c_1 e^{k\pi} - c_2 e^{k\pi} = c_1 e^{-k\pi} - c_2 e^{-k\pi}$
$(c_1 - c_2) e^{k\pi} = (c_1 - c_2) e^{-k\pi}$

Forutsatt $k > 0$, har likningen bare løsning for $c_1 = c_2$

II: $c_1 k e^{k\pi} - c_2 k e^{-k\pi} = c_1 k e^{-k\pi} - c_2 k e^{k\pi}$
$(c_1 + c_2) k e^{k\pi} = (c_1 + c_2) k e^{-k\pi}$

Forutsatt $k > 0$, har likningen bare løsning for $c_1 = -c_2$

I og II gir:

$c_1 = c_2 = 0$ (Den trivielle løsningen)

c) $f''(x) = -p^2 f(x)$ gir:

$\left.\begin{array}{l} \lambda^2 + p^2 = 0 \\ \lambda^2 = -p^2 \end{array}\right\} \overset{\text{Komplekse røtter}}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} f(x) = c_1 \sin(px) + c_2 \cos(px) \\ f'(x) = c_1 p \cos(px) - c_2 p \sin(px) \end{array}$

Innsatt for initialbetingelser:

I: $c_1 \sin(p\pi) + \cancel{c_2 \cos(p\pi)} = c_1 \sin(-p\pi) + \cancel{c_2 \cos(-p\pi)}$ | $\cos p\pi = \cos -p\pi$
$c_1 \sin(p\pi) = c_1 \sin(-p\pi)$
$2 c_1 \sin(p\pi) = 0$

Forutsetter $p \in \mathbb{N}^+$ eller $c_1 = 0$

II: $\cancel{c_1 p \cos(p\pi)} - c_2 p \sin(p\pi) = \cancel{c_1 p \cos(-p\pi)} - c_2 p \sin(-p\pi)$
$2 c_2 p \sin(p\pi) = 0$

Forutsetter $p \in \mathbb{N}^+$ eller $c_2 = 0$

I og II:

Ikke-triviell løsning gitt $p \in \mathbb{N}^+$

d) $F''(x) = -n^2 F(x)$, fra oppg. c har vi:

$F(x) = C_1 \sin(nx) + C_2 \cos(nx)$

testing av initialbetingelser som i a, b og c gir følgelig:

$F_n(x) = C_n \sin(nx) + D_n \cos(nx)$

---

2 $\boxed{U_{tt}(t,x) = U_{xx}(t,x),}$ $U(t,-\pi) = U(t,\pi)$, $U_x(t,-\pi) = U_x(t,\pi)$ for $\begin{cases} t \geq 0 \\ x \in [-\pi, \pi] \end{cases}$

anta løsning på formen:

$U(t,x) = G(t)F(x)$

a) Innsatt i likningen:

$G''(t)F(x) = G(t)F''(x)$

$\Leftrightarrow \dfrac{G''(t)}{G(t)} = \dfrac{F''(x)}{F(x)}$ | for at to uavhengige brøker skal være like, må de være konstante.

Vi kan da skrive:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{I}&: \frac{G''(t)}{G(t)} = k \\ \mathrm{II}&: \frac{F''(t)}{F(t)} = k \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} G''(t) &= kG(t) \\ F''(t) &= kF(t) \end{aligned}}$$

b) Hvis det eksisterer en ikke-triviell løsning på formen

$U(t,x) = G(t)F(x)$

har vi fra oppgave 1c at likningene I og II fra 2a har ikke-trivielle løsninger hvis og bare hvis k kan skrives på formen

$k = -n^2$ for $n \in \mathbb{N}^+$

---

c) Benytter vi resultatet fra (1d) kan vi skrive:

$$G(t) = a_n \sin nt + b_n \cos nt$$

og

$$F(x) = c_n \sin nx + d_n \cos nx$$

$U(t,x) = G(t)F(x)$ gir:

$$U(t,x) = (a_n \sin nt + b_n \cos nt)(c_n \sin nx + d_n \cos nx)$$
$$= a_n c_n \sin nt \sin nx + a_n d_n \sin nt \cos nx$$
$$+ b_n c_n \cos nt \sin nx + b_n d_n \cos nt \cos nx$$

Samler vi konstanter får vi:

$$U(t,x) = A_n \cos nt \cos nx + B_n \sin nt \sin nx$$
$$+ C_n \cos nt \sin nx + D_n \sin nt \cos nx$$

$n = 0$ gir:

$$G''(t) = 0 \quad\Rightarrow\quad G(t) = a_0 t + b_0$$
$$F''(x) = 0 \qquad\quad F(x) = c_0 x + d_0$$

$$F(x) = c_0 x + d_0$$
$$F'(x) = c_0$$

Innsatt initialbetingelser;

Initialbetingelsene krever at $F(x)$ er på formen

$$F(x) = d_0.$$

$U(t,x) = G(t)F(x)$ gir:

$$U(t,x) = (a_0 t + b_0) \cdot d_0$$
$$= a_0 d_0 t + b_0 d_0$$

Samler vi konstanter får vi:

$$U(t,x) = A_0 t + B_0$$