Poročilo projekta pri predmetu Matematično modeliranje

Patrik Mikuž
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

21. junij 2021

1 Problem Buffonove igle

Znan je problem simulacije metanja Buffonove igle. Ideja je, da ravnino razdelimo z neskončno vzporednicami, pri čemer so vse vzporednice med sabo enako oddaljene. Razdaljo med vzporednicami označimo z d. Na to ravnino nato naključno mečemo iglo dolžine l. Zanima nas verjetnost, da bo igla sekala vsaj eno izmed vzporednic. Analitično izračunana verjetnost je enaka

$$P(seka) = \begin{cases} \frac{2l}{\pi d}, & l \leq d \\ (\frac{2l}{\pi d} + 1) - \frac{2}{\pi}(\frac{\sqrt{l^2-d^2}}{d} + \arcsin\frac{d}{l}), & l > d \end{cases}$$

Vidimo, da je rezultat odvisen le od razmerja med dolžino igle l in razdaljo med vzporednicami d.

Pri analitičnem reševanju, se je dovolj omejiti na območje med dvema vzporednicama, saj so vsa območja med vzporenicami enako verjetna, privzamemo pa lahko, da je list neskončno dolg, saj nas zanima le, ali bo igla sekala zgornjo ali pa spodnjo vzporednico. Kot smo že razmislili, je rezultat odvisen le od razmerja med dolžino igle in in razdaljo med vzporednicami, zato se lahko omejimo na vzporednice z dolžino 1, pri čemer potem dolžino igle primerno bodisi zmanjšamo bodisi povečamo.

V nadaljevanju sem problem metanja Buffonove igle posplošil na metanje kovanca z radijem r in enakostraničnega trikotnika s stranico dolžine a. Izračunal sem analitično verjetnost, da kovanec ali trikotnik seka vsaj eno vzporednico in dobljeni rezultat primerjal z numerično vrednostjo, ki sem jo dobil s simulacijo metov.

2 Met kovanca s polmerom r

Naj bo r radij kovanca in d razdalja med vzporednicami. Kot smo že razmislili, se je dovolj omejiti na območje med dvema vzporednicama z razdaljo d. Pri metu kovanca nas zanima le kam pade središče, od tu je potem že določeno, ali kovanec seka vzporednico ali pa ne. Vse točke na robu kovanca so od središča oddaljene za r. Torej bo kovanec sekal vsaj eno vzporednico, če bo središče od nje oddaljeno za manj kot r. Izračun je simetričen za zgornjo ali pa spodnjo vzporednico, zato se lahko omejimo na spodnjo. Predpostavimo še, da je $r \leq \frac{d}{2}$, sicer bo kovanec vedno sekal vsaj eno vzporednico. Verjetnost izbire središča je enakomerno razporejena na intervalu $[0, d]$. Če bomo središče izbrali iz intervala $[0, r]$, bo kovanec sekal vzporednico. Zanima nas torej verjetnost, da bo središče izbrano iz intervala $[0, r]$. Ker je izbira središča enakomerno porazdeljena na intervalu $[0, d]$, bo iskana verjetnost enaka

$$P(seka\ eno) = \frac{r - 0}{d - 0} = \frac{r}{d}$$

Izračun je za zgornjo vzporednico simetričen, le da je ugoden interval enak $(d - r, d)$, rezultat je enak. Torej je verjetnost, da bo kovanec s polmerom r sekal vsaj eno izmed vzporednic, ki so narazen za d enak

$$P(seka) = 2P(seka\ eno) = \frac{2r}{d}$$

V primeru ko je $r > \frac{d}{2}$, torej polmer večji kot razdalja med vzporednicami, bo vsak kovanec sekal vsaj eno vzporednico. Torej lahko zapišemo

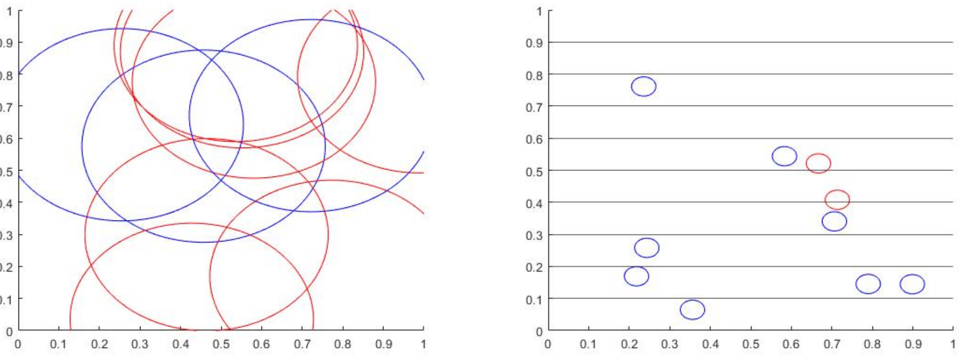
$$P(seka) = \begin{cases} \frac{2r}{d}, & r \leq \frac{d}{2} \\ 1, & r > \frac{d}{2} \end{cases}$$

Poglejmo si primer numerično izračunane verjetnosti, da kovanec seka vsaj eno vzporednico, ki jo dobimo s $10, 100, 1000, 10000$ ali pa 100000 meti kovanca. V tabeli 1 so zapisane verjetnosti, da kovanec seka vsaj eno vzporednico, pri čemer sem spreminjal število metov, ki sem jih dobil s pomočjo funkcije *verjetnost_kovanec*. Poskus sem ponovil trikrat. Vidimo, da je konvergenca k analitični verjetnosti počasna, saj se po 100000 metih verjetnost ujema šele na dve decimalki.

Poglejmo si še grafični primer poskusa za 10 metov. Ker je verjetnost, da kovanec seka vzporednice odvisna le od razmerja med polmerom kovanca

N	10	100	1000	10000	100000	Analitično
1	0.9000	0.5800	0.6030	0.6019	0.6006	0.6000
2	0.5000	0.6800	0.5730	0.6016	0.5992	0.6000
3	0.7000	0.5800	0.5920	0.5940	0.5995	0.6000

Tabela 1: Verjetnosti, da kovanec polmera $r = 3cm$ seka vsaj eno vzporednico, ki so narazen za $d = 10cm$, pri N metih

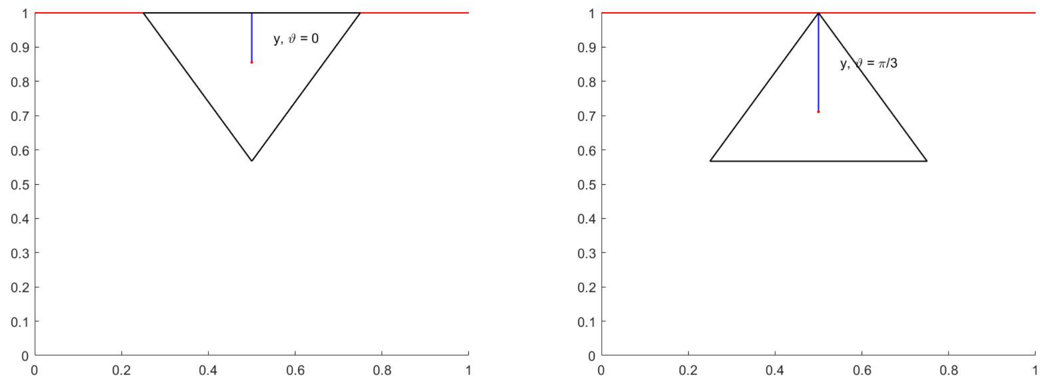


Slika 1: Leva slika prikazuje simulacijo 10 metov kovancev z radijem $3cm$ na $10cm$ širok list papirja. Desna slika pa prikazuje simulacijo 10 metov kovanca z istim radijem na list papirja, na katerem so vzporednice prav tako $10cm$ narazen. Rdeči kovanci sekajo vzporednice, modri pa ne.

in razdaljo med vzporednicami, se na drugi sliki omejimo na 10 ekvidistančnih vzporednic. Polmer kovanca je primerno zmanjšan, tako da se razmerje ohranja. Uporabljal sem funkcijo *simulacija_meta_kovanca*.

3 Met enakostraničnega trikotnika s stranico l

Naj bo l dolžina stranice enakostraničnega trikotnika in d razdalja med vzporednicami. Spet se lahko omejimo le na območje med dvema vzporednicama, saj so območja med vsemi verjetnostmi enako verjetne. Na enak način se lahko tudi omejimo le na vzporednice, ki so med sabo oddaljene za 1. V tem primeru je potem dolžina stranice kovanca enaka $a = \frac{l}{d}$. Tokrat nas bo poleg tega, kam pade središče trikotnika, zanimalo tudi, pod kakšnim kotom od navpičnice le ta pade. Pri trikotniku so skrajne točke ogljišča, zato nas bo zanimalo ali oglišča ležijo na različnih straneh vzporednic. Razmislimo



Slika 2: Leva slika prikazuje na kateri višini mora biti središče trikotnika, če želimo da je zarotiran za kot 0 in seka vsaj eno vzporednico. Desna slika prikazuje na kateri višini mora biti središče trikotnika, če želimo da je zarotiran za kot $\frac{\pi}{3}$ in seka vsaj eno vzporednico. Simetrično sliko lahko naredimo tudi za spodnjo vzporednico.

najprej, za katera središča bo trikotnik zagotovo ležal znotraj dveh premic. To bo ravno takrat, ko bo eno izmed oglišč ležalo na vzporednici. Takrat bo središče od vzporednice oddaljeno ravno za polmer očrtane krožnice, ki je enak

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

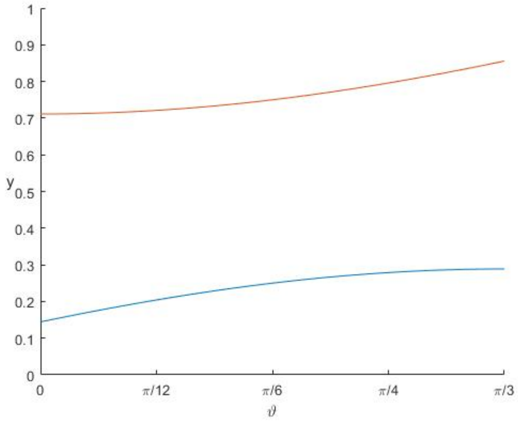
To vidimo tudi na sliki 2. V primeru ko je trikotnik zarotiran za kot $\vartheta = \pi/3$, je oddaljenost y enaka ravno polmeru očrtane krožnice R. Za analitične izračune se bomo torej omejili le na kote rotacije iz intervala $[0, \frac{\pi}{3}]$. Z uporabo Pitagorovega izreka ugotovimo, da se dolžina daljice y izraža s polmerom očrtane krožnice kot

$$y1 = 1 - R(\cos\frac{\pi}{3} - \vartheta).$$

Simetrično lahko naredimo izračun za spodnjo stranico in dobimo

$$y2 = R\cos\vartheta.$$

Ker je enakostranični trikotnik simetričen, se je dovolj omejiti le za rotacije do $\frac{\pi}{3}$. Prav tako je vseeno ali gledamo interval $[0, \frac{\pi}{3}]$ ali pa $[-\frac{\pi}{3}, 0]$. Slika 3 predstavlja območje, kdaj bo trikotnik sekal vsaj eno vzporednico.



Slika 3: Območje, kdaj bo trikotnik sekal vsaj eno vzporednico. Na x osi je kot rotacije, na y osi pa oddaljenost središče od vzporednice. Območje pod modro in nad oranžno črto predstavlja verjetnost, da trikotnik seka vsaj eno vzporednico.

Območje, kdaj trikotnik seka vsaj eno stranico, torej dobimo kot integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} ((1-y1)+y2)\ d\vartheta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} R\cos\left(\frac{\pi}{3}-\vartheta\right)d\vartheta + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\vartheta\ d\vartheta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2R\cos\vartheta\ d\vartheta$$

Pri tem smo v zadnji vrstici upoštevali, da je cos soda funkcija in tako velja

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{3}-\vartheta\right)\ d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\vartheta\ d\vartheta$$

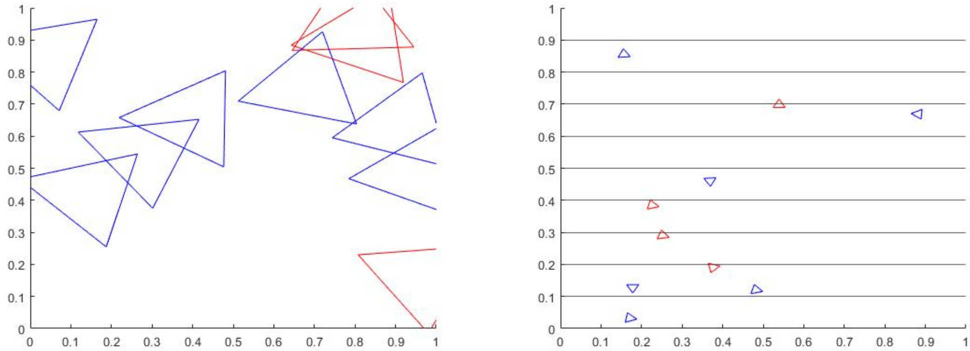
Velikost območja, ki ga dobimo z integralom pa še ni enaka verjetnosti, da bo trikotnik s stranico a sekal vsaj eno vzporednico. To pa zato, ker integriramo med 0 in $\frac{\pi}{3}$ in ne med 0 in 1. Skupna ploščina je tako v našem primeru $\frac{\pi}{3}$ namesto 1. Zato moramo še celotni rezultat deliti s konstanto $\frac{\pi}{3}$. Tako dobimo verjetnost

$$P(seka) = \frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2R\cos\vartheta\ d\vartheta = \frac{3}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{2}2R = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}R = \frac{3a}{\pi}$$

Spomnimo se, da a predstavlja razmerje med dolžino stranice in razdaljo med vzporednicami. Iskana verjetnost je torej

N	10	100	1000	10000	100000	Analitično
1	0.2000	0.3100	0.2750	0.2835	0.2869	0.2865
2	0.6000	0.2700	0.2960	0.2866	0.2880	0.2865
3	0.4000	0.2500	0.2680	0.2887	0.2854	0.2865

Tabela 2: Verjetnosti, da enakostranični trikotnik s stranico $a = 3cm$ seka vsaj eno vzporednico, ki so narazen za $d = 10cm$, pri N metih



Slika 4: Leva slika prikazuje simulacijo 10 metov trikotnikov s stranico $3cm$ na $10cm$ širok list papirja. Desna slika pa prikazuje simulacijo 10 metov trikotnika z isto dolžino stranice na list papirja, na katerem so vzporednice prav tako $10cm$ narazen. Rdeči trikotniki sekajo vzporednice, modri pa ne.

$$P(seka) = \begin{cases} \frac{3l}{\pi d}; & l < \frac{\pi d}{3} \\ 1; & sicer \end{cases}$$

Simulacijo meta sem, simetrično kot prej za krog, izvajal z 10, 100, 1000, 10.000, in 100.000 meti. Vsak poskus sem ponovil trikrat. V tabeli 2 so zbrani numerični rezultati, ki sem jih dobil z uporabo funkcije *verjetnost_trikotnik*. Tudi tokrat vidimo, da je konvergenca počasna in da je natančnost po 100.000 metih šele na dve decimalni mesti. Grafični prikaz simulacije meta trikotnika na list papirja z več vzporednicami je prikazan na sliki 4, uporabljlal pa sem funkcijo *simulacija_meta_trikotnika*.

4 Zaključek

Problem Buffonove igle sem posplošil na problem kovanca z radijem r in na enakostranični trikotnik s stranico l. Ugotovil sem, da je verjetnost, da objekt seka vsaj eno izmed vzporednic odvisen le od razmerja med dolžino objekta in pa razdaljo med vzporednicami. Z analitičnimi izpeljavami sem prišel do zaključka, da moramo ta razmerja pomnožiti z ustrezno konstanto, da dobimo iskano verjetnost. Ugotovil sem, da je za trikotnik ta verjetnost enaka $\frac{3}{\pi}$, za krog pa 1.

Poleg analitičnega izračuna sem modeliral tudi simulacijo meta kovanca oziroma trikotnika in na ta način izračunal numerične približke. Videl sem, da je konvergenca k točnemu rezultatu počasna in da se rezultati pri vsaki ponovitvi lahko precej razlikujejo. Simulacijo sem izvedel v primeru, ko objekt mečem na polje velikosti 1×1 ter še v primeru, ko mečem na polje prav tako velikosti 1×1, le da je na njem še 10 vzporednic. Ker je verjetnost odvisna le od razmerja, sem seveda stranico trikotnika in polmer kroga primerno zmanjšal oziroma povečal.

Literatura

[1] *The Buffon Needle Problem Revisited in a Pedagogical Perspective*, [ogled 21. 6. 2021], dostopno na: `https://www.mathematica-journal.com/2009/11/23/the-buffon-needle-problem-revisited-in-a-pedagogical-perspective/`.

[2] B. Pavić, *Buffonova igla in sorodni problemi*, diplomsko delo, fakulteta za matematiko in fiziko, univerza v Ljubljani, 2013.